

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

**Filipe Gomes Vieira**

**ANÁLISE DE NOVAS EQUAÇÕES NUMÉRICAS DA  
FOTOELASTICIDADE DIGITAL PARA POLARISCÓPIOS PLANOS**

Belo Horizonte  
2016

**Filipe Gomes Vieira**

**ANÁLISE DE NOVAS EQUAÇÕES NUMÉRICAS DA  
FOTOELASTICIDADE DIGITAL PARA POLARISCÓPIOS PLANOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior.

Área de concentração: Análise Estrutural e Dinâmica

Belo Horizonte, 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

V657a Vieira, Filipe Gomes  
Análise de novas equações numéricas da fotoelasticidade digital para polariscópios planos / Filipe Gomes Vieira. Belo Horizonte, 2016.  
150 f. : il.

Orientador: Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior  
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

1. Transformações de fase (Física estatística). 2. Fotoelasticidade - Programas de computador. 3. Polariscópio. 4. Deformações e tensões. 5. Medidores de tensão. I. Magalhães Júnior, Pedro Américo Almeida. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 539.3

**Filipe Gomes Vieira**

**ANÁLISE DE NOVAS EQUAÇÕES NUMÉRICAS DA  
FOTOELASTICIDADE DIGITAL PARA POLARISCÓPIOS PLANOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

---

Prof. Dr. Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior – PUC Minas (Orientador)

---

Prof. Dr. Claysson Bruno Santos Vimieiro – PUC Minas (Banca Examinadora)

---

Prof. Dr. Alexandre da Silva Scari - Newton Paiva (Banca Examinadora)

Belo Horizonte, 01 de julho de 2016

## RESUMO

O objetivo desta pesquisa é obter equações numéricas para a técnica de deslocamento de fase da fotoelasticidade digital usando um polariscópio plano. Os modelos foram desenvolvidos para polariscópios planos devido a simplicidade e baixo custo desse equipamento. Para desenvolver a mudança de fase e encontrar as equações de intensidade apenas o analisador é rotacionado. Um disco anelar submetido a esforços de compressão diametralmente opostos foi utilizado nos procedimentos experimentais. A partir das equações de intensidade, as equações dos parâmetros isoclínico e isocromático foram deduzidas pela aplicação de uma nova técnica numérica. Essa abordagem pode ser usada para calcular quantas imagens a resolução do polariscópio permitir. Para validar as novas equações foram realizados dois testes, um numérico e outro experimental. Os resultados experimentais mostraram que o erro médio relativo diminui quando aumenta-se o número de imagens nos cálculos de fase e, deste modo, torna-se possível conseguir resultados mais precisos nas medições de tensões pela Fotoelasticidade Digital.

Palavras-chave: Análise experimental de tensões. Deslocamento de fase. Fotoelasticidade digital. Polariscópio plano.

## **ABSTRACT**

The aim of this research is get numerical equations for the phase-shifting method in digital photoelasticity using a plane polariscope. The models was developed to plane polariscopes because of the simplicity and low cost of this equipment. To develop the phase shifting and find the intensity equations only the analyzer is rotated. A ring under diametral compression was used in the experimental procedures. From these intensity equations, the equations of isoclinic and isochromatic parameters were deduced by applying a new numerical technique. This approach can be used to calculate how many images allows the resolution of the polariscope. To validate the new equations, two tests were proposed, a numerical and an experimental. The experimental results showed that the average relative error decreases when increasing the number of images in the phase calculations and thereby, it becomes possible to achieve more accurate results in stress measurements by Digital Photoelasticity.

**Keywords:** Experimental stress analysis. Phase-shifting. Digital Photoelasticity. Plane polariscope.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Diagrama esquemático representando a variação de popularidade da técnica fotoelástica.....	21
FIGURA 2 - Os vetores elétrico e magnético de uma onda eletromagnética plana.....	31
FIGURA 3 – a) Passagem da luz através de um meio isotrópico. b) Representação esquemática da luz não-polarizada e polarizada.....	32
FIGURA 4 – Passagem da luz através de um meio cristalino.....	33
FIGURA 5 – Arranjo genérico de um polariscópio plano.....	35
FIGURA 6 – Transformação do sistema de coordenadas .....	36
FIGURA 7 – Arranjo genérico de um polariscópio circular na técnica de deslocamento de fase .....	41
FIGURA 8 – Fluxograma do processamento aplicado na fotoelasticidade digital com deslocamento de fase .....	52
FIGURA 9 – Graduação do analisador do polariscópio plano.....	54
FIGURA 10 – Algoritmo para teste numérico das novas equações de cálculo.....	62
FIGURA 11 – Exemplo de amostra submetida à compressão diametral .....	64
FIGURA 12 – Montagem experimental .....	67
FIGURA 13 – Imagens simuladas geradas em Matlab .....	72
FIGURA 14 – Disco de calibração .....	73
FIGURA 15 – Gráfico do erro médio relativo obtido para o ângulo $\theta$ .....	75
FIGURA 16 – Gráfico do erro médio relativo obtido para o ângulo $\delta$ .....	75

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Metodologias de deslocamento de fase para o polariscópio circular .....	42
QUADRO 2 – Metodologias de deslocamento de fase para o polariscópio plano.....	44
QUADRO 3 – O método dos dez passos.....	48
QUADRO 4 – Relação do número de imagens $N$ e o passo constante de rotação do ângulo $\beta$ do analisador.....	54
QUADRO 5 – Coeficientes $b_j$ , $c_j$ , $d_j$ , $e_j$ , $f_j$ e $g_j$ obtidos para $N = 3$ e $\text{step} = 3$ .....	57
QUADRO 6 – Coeficientes $b_j$ , $c_j$ , $d_j$ , $e_j$ , $f_j$ e $g_j$ obtidos para $N = 4$ e $\text{step} = 4$ .....	58
QUADRO 7 – Coeficientes $b_j$ , $c_j$ , $d_j$ , $e_j$ , $f_j$ e $g_j$ obtidos para $N = 3$ e $\text{step} = 4$ .....	58
QUADRO 8 – Coeficientes $b_j$ , $c_j$ , $d_j$ , $e_j$ , $f_j$ e $g_j$ obtidos para $N = 3$ e $\text{step} = 6$ .....	59

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Erro médio em porcentagem em função de step e do número de imagens N para o ângulo $\theta$ .....	74
TABELA 2 - Erro médio em porcentagem em função de step e do número de imagens N para o ângulo $\delta$ .....	74

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
<b>1.1 Histórico .....</b>	<b>19</b>
<b>1.1 Problema .....</b>	<b>22</b>
<b>1.3 Hipóteses.....</b>	<b>24</b>
<b>1.4 Objetivo Geral .....</b>	<b>25</b>
<b>1.5 Objetivos Específicos.....</b>	<b>25</b>
<b>1.6 Justificativa .....</b>	<b>26</b>
<b>1.7 Escopo.....</b>	<b>28</b>
<b>2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....</b>	<b>31</b>
<b>3 ESTADO DA ARTE.....</b>	<b>41</b>
<b>4 METODOLOGIA.....</b>	<b>53</b>
<b>4.1 Teste numérico matemático.....</b>	<b>60</b>
<b>4.2 Solução teórica.....</b>	<b>63</b>
<b>4.3 Procedimento experimental.....</b>	<b>66</b>
<b>4.4 Técnica para análise dos resultados.....</b>	<b>67</b>
<b>4.5 Técnica de desempacotamento de fase.....</b>	<b>68</b>
<b>5 DISCUSSÃO E RESULTADOS .....</b>	<b>71</b>
<b>5.1 Resultados do teste numérico matemático .....</b>	<b>71</b>
<b>5.2 Resultados do modelo teórico.....</b>	<b>71</b>
<b>5.3 Resultados do procedimento experimental .....</b>	<b>73</b>
<b>6 CONCLUSÃO.....</b>	<b>79</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>81</b>
<b>Apêndice A – Tabelas com todas as equações deduzidas.....</b>	<b>85</b>
<b>Apêndice B – Fotografias utilizadas nas análises .....</b>	<b>145</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A fotoelasticidade é uma técnica experimental utilizada para analisar campos de tensões ou deformações em modelos feitos com polímeros birrefringentes ou revestimentos colocados sobre as peças a serem analisadas, esses polímeros apresentam a propriedade da birrefringência temporária. Como o nome indica, a fotoelasticidade foi desenvolvida para aplicar os princípios da ótica na solução dos problemas de engenharia da Teoria da Elasticidade (ASUNDI, 1998). A fotoelasticidade, de todos os métodos de análise experimental de tensões, tem sido o mais poderoso e efetivo método de análise de campos de tensões bi ou tridimensionais (THEOCARIS; GDOUTOS, 1979). Quando o material está livre de tensões esse apresenta isotropia ótica, caso contrário, apresentará anisotropia ótica e serão formadas franjas isocromáticas (relacionadas com a diferença entre as tensões principais) e franjas isoclínicas (relacionadas com a direção das tensões principais). Essa técnica encontra-se muito desenvolvida, atualmente, é possível aplicá-la na análise de peças com geometria complexa, em análises dinâmicas, na análise de equipamentos de grande porte e em muitas outras situações nas quais o objetivo é conhecer a resposta do material ao esforço aplicado. A fotoelasticidade é uma das técnicas mais aplicadas para análises experimentais do campo completo de tensões (Baek et al. 2002). De acordo com Plouzenec e Lagarde (1999), muitos autores têm investigado um meio de automatizar as análises fotoelásticas com o objetivo de realizar análises mais precisas e obter os resultados em menos tempo. Atualmente, o único meio disponível para automatizar as análises fotoelásticas é através da aplicação do processamento de imagens digitais.

### 1.1 Histórico

A fotoelasticidade teve seu início quando Brewster em 1816 descobriu o fenômeno da birrefringência temporária no vidro e previu que esse fenômeno poderia estar relacionado com as tensões atuantes no material. Contudo, apesar da técnica ser utilizada nas fábricas de vidro até os dias atuais para verificar a presença de tensões residuais, esse não era um material adequado para a aplicação da fotoelasticidade, porque o vidro tem uma resposta ótica muito fraca, sendo necessário aplicar muito esforço para visualizar as franjas no material. Outro fator que impediu a ampliação da técnica para analisar tensões foi a falta de uma teoria que fornecesse entendimento da luz, naquela época ainda era utilizado o conceito do éter hipotético para explicar a propagação da luz.

Em 1852, Maxwell em sua teoria eletromagnética deu um importante passo para entender a luz, prevendo nessa teoria que a luz é uma onda eletromagnética formada por um vetor elétrico e um vetor magnético e que pode se propagar através do espaço sem ser suportado por nenhuma matéria conhecida (DALLY; RILEY, 2005). Maxwell também formulou as relações entre as tensões e os índices de refração em um material birrefringente, assim, passou a existir uma teoria que explicava o fenômeno da fotoelasticidade tornando possível fazer análises quantitativas de tensões. Porém, apesar de existir uma base teórica que foi desenvolvida ao longo dos anos, a necessidade de materiais adequados para a técnica limitava sua aplicação.

Materiais adequados à técnica fotoelástica surgiram, somente, na década de 1930, com a disponibilidade dos polímeros que exibem a propriedade de birrefringência temporária. A partir desta época, a aplicação da fotoelasticidade na análise de tensões foi ampliada e a popularidade da técnica cresceu até 1956. Contudo, devido ao trabalhoso método de análise dos dados e o desenvolvimento dos métodos numéricos para análise estrutural a fotoelasticidade foi tornando-se menos popular (ZHANG et al. 2007). Nessa época, a fotoelasticidade era uma técnica ponto a ponto, a análise das tensões era feita em um ponto de cada vez, isso tornava as análises muito lentas, cansativas e demoradas. Deste modo, o método dos elementos finitos se tornou um método muito mais atrativo para as indústrias e para os pesquisadores, com o desenvolvimento computacional e digital esse método se desenvolveu ainda mais e tomou grande parte dos espaços ocupados pela fotoelasticidade e outras técnicas para análise de tensões.

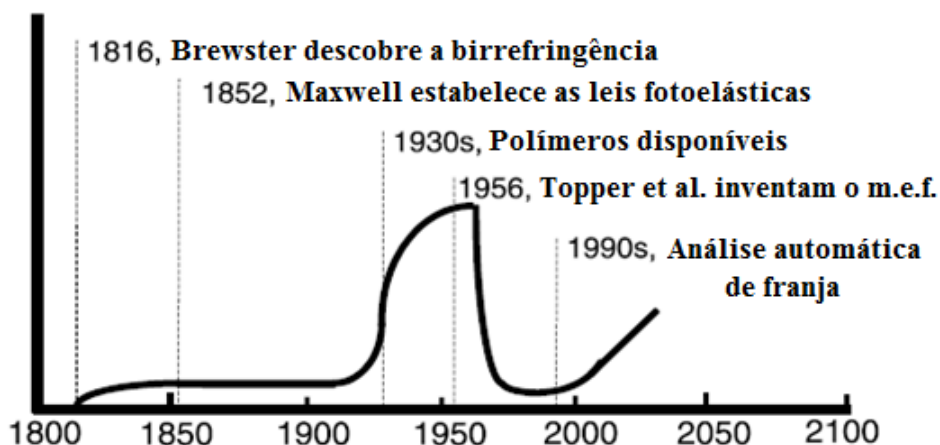
A fotoelasticidade continuou praticamente esquecida na maioria das aplicações em análises de tensões até os anos 1990. Nessa época, a disponibilidade de câmeras fotográficas para aquisição de imagens digitais, computadores com capacidade para processar grandes conjuntos de dados e teorias de processamento de imagens digitais para análise de padrões de franja tornaram possível a análise de campo completo. Com a utilização da tecnologia nas análises, foi criado um novo ramo da técnica denominado fotoelasticidade digital. Nos anos 1990, a utilização de sistemas para processamento de imagens coloridas para aquisição de dados possibilitou a diminuição da interferência das franjas isoclínicas nas isocromáticas e vice-versa. Deste modo, eliminou-se grande parte das dificuldades de processamento das imagens, pois não eram mais necessários profissionais treinados e experientes na análise de franjas para auxiliar o computador a interpretar os dados. Esse foi um passo importante em direção a automatização da técnica.

A fotoelasticidade voltou a despertar o interesse devido a essa possibilidade de automatizar a análise. Pois, na fotoelasticidade convencional, a determinação quantitativa dos

parâmetros fotoelásticos requer medições em um grande número de pontos e métodos tediosos de compensação são necessários para obter as ordens de franjas fracionárias (RAMESH; MANGAL, 1998). A técnica de deslocamento de fase, que permitia maior automatização nas análises, foi aplicada inicialmente utilizando luz monocromática, porém, cada vez mais essa técnica é aplicada utilizando luz branca (AJOVALASIT; PETRUCCI; SCAFIDI, 2007). Segundo Gasvik (1995), existem três razões para o esforço em desenvolver técnicas digitais para a medição do padrão de franjas: (1) obter melhor precisão; (2) aumentar a velocidade; (3) automatizar o processo.

A fotoelasticidade também pode ser aplicada em análises tridimensionais, contudo os procedimentos são complexos em comparação com as análises bidimensionais (CLOUD, 1995). A estereolitografia aumentou ainda mais o potencial da técnica, a possibilidade de imprimir modelos tridimensionais em resina epóxi, a partir de peças modeladas no computador, tornou possível desenvolver modelos com formas mais complexas e diminuir o tempo de confecção dos modelos, no trabalho desenvolvido por Raju, Chandra Sekhar e Drakshayani (2013) foi verificada uma redução de mais de cinquenta por cento no tempo de preparação do modelo. Atualmente, conforme mostrado no trabalho desenvolvido por Scari (2016), utilizando-se a estereolitografia é possível produzir até mesmo modelos fotoelásticos de rolamentos em resina epóxi para utilizar nas análises tridimensionais da fotoelasticidade. Entre todas as técnicas experimentais para análise de tensões, a fotoelasticidade tem o diferencial de ser a única capaz de fornecer informações do campo de tensões no interior do modelo (MANGAL; RAMESH, 1999). Na Figura 1 é possível verificar a popularidade da fotoelasticidade ao longo dos anos.

**Figura 1 – Diagrama esquemático representando a popularidade da técnica fotoelástica**



Fonte: Adaptado de PATTERSON, 2002.

Entre os pesquisadores da fotoelasticidade existe um grande otimismo quanto ao futuro da técnica. Acredita-se que se a técnica for totalmente automatizada, e com o auxílio da estereolitografia na fabricação de modelos para as análises, será possível tornar essa técnica mais atraente para as aplicações industriais. Várias técnicas foram desenvolvidas visando a automatização, porém, nenhuma conseguiu ser adequada para todas as condições de análise. Na técnica de deslocamento de fase uma das dificuldades são os polariscópios convencionais que são fabricados com limitações de posicionamento das lentes óticas. Como algumas técnicas exigem posições específicas das lentes para serem aplicadas, nem todos os polariscópios presentes nos laboratórios podem aplicar essas técnicas, assim, ainda é necessário desenvolver técnicas que permitam a utilização de qualquer polariscópio para as análises experimentais.

Contudo, apesar da técnica fotoelástica ter perdido popularidade após o aparecimento do método dos elementos finitos, essa técnica continuou sendo aplicada em algumas áreas como na determinação do fator de intensidade de tensões em diversas situações de geometria e de carregamentos (QUINAN, 2005), na determinação do fator de concentração de tensões e nas análises qualitativas de distribuição de tensões em peças, além disso, a fotoelasticidade é amplamente utilizada para medir tensões residuais no vidro, uma vez que o vidro exibe a propriedade de birrefringência temporária (RAMESH et al. 2013). Com o desenvolvimento dos métodos de aquisição automática e processamento de imagens ocorreu um progresso significativo nas análises automáticas da fotoelasticidade (AJOVALASIT; PETRUCCI; SCAFIDI, 2015), assim, novas aplicações surgiram, como a possibilidade de realizar análises de tensões dinâmicas e de analisar modelos submetidos a um estado tridimensional de tensões sem a necessidade de congelar as tensões no polímero através de um ciclo térmico no forno para, posteriormente, fatiar e analisar o modelo. Todo esse desenvolvimento da técnica fez a fotoelasticidade ser capaz de competir com os métodos numéricos (ASHOKAN; RAMESH, 2006). O desenvolvimento de técnicas que possibilitem a automatização da análise fotoelástica e facilitem as análises possibilita a viabilidade da técnica no ambiente industrial, por isso, a automatização ainda é um dos principais objetivos dos pesquisadores da fotoelasticidade.

## **1.1 Problema**

Na aplicação da técnica de deslocamento de fase utilizando a luz branca sempre existiu a dificuldade em desenvolver de uma técnica que pudesse ser implementada em qualquer polariscópio disponível comercialmente. Os polariscópios são produzidos com limitações de posicionamento das placas de quarto de onda, no caso de polariscópios circulares, e do

polarizador, no caso de polariscópios planos e circulares. Essas limitações são implementadas nos equipamentos pelos fabricantes por questões de precisão no posicionamento das lentes e facilidade de fabricação e montagens dos componentes. Polariscópios que permitem a rotação de cada componente independentemente um dos outros e sem nenhuma restrição são mais caros e também difíceis de encontrar no mercado. Por isso, muitos centros de pesquisa decidem produzir o seu próprio modelo de polariscópio, ao invés de comprar um desses equipamentos.

Muitos trabalhos foram feitos na tentativa de permitir que a técnica fosse aplicada a todos os polariscópios convencionais. Porém, nenhuma dessas técnicas conseguiu ser aplicável a todos os polariscópios disponíveis comercialmente, todas as técnicas exigem posicionamentos dos elementos óticos que não podem ser realizadas em muitos polariscópios, de maneira geral, nos polariscópios convencionais apenas o analisador pode ser rotacionado independentemente dos outros elementos óticos e sem limitações de posição. A limitação dessas técnicas se deve ao fato de que para isolar os parâmetros isoclínico e isocromático a partir das equações de intensidade da luz são necessários posicionamentos específicos dos elementos óticos, pois a separação desses parâmetros é realizada por meio de manipulações algébricas e relações trigonométricas entre as equações de intensidade. Portanto, tanto para os polariscópios planos, quanto para os polariscópios circulares as escolhas possíveis de posicionamento das lentes são bastante limitadas pelas restrições de posicionamento dos polariscópios e pela característica periódica das funções trigonométricas.

Para contornar as limitações da análise convencional e permitir a aplicação da técnica em qualquer polariscópio, além de desenvolver toda a análise apenas com a rotação do analisador, foi criada por Magalhães (2011) uma técnica que utilizava equações numéricas no lugar das equações trigonométricas convencionais para obter os parâmetros isoclínico e isocromático. Essa técnica foi desenvolvida para ser utilizada em polariscópios circulares e utilizava modelos numéricos de otimização para deduzir novas equações para serem aplicadas na técnica de deslocamento de fase. A nova técnica ainda tinha outra vantagem em relação ao método convencional, com equações numéricas tornou-se possível adquirir uma quantidade maior de imagens, diminuindo as incertezas e influência dos erros aleatórios presentes nas imagens digitais. Como adquirir mais imagens não é possível no método convencional, esse método se torna mais sensível aos erros presentes nas análises. Porém, a maior vantagem da técnica que utiliza equações numéricas é permitir que a análise seja realizada para qualquer posição dos elementos óticos, assim, a técnica pode ser aplicada em qualquer tipo de polariscópio circular disponível no mercado.

As equações numéricas para os parâmetros isoclínico e isocromático não têm as limitações que estão presentes nas análises com a utilização das equações baseadas em relações trigonométricas comuns. Portanto, a única limitação presente é devida a resolução do polariscópio no qual serão feitas as análises.

Apesar das vantagens de aplicar a técnica de deslocamento de fase usando equações numéricas, esse método ainda não foi estendido para ser utilizado em polariscópios planos. Por isso, nesta pesquisa, novas equações numéricas serão desenvolvidas para aplicação na técnica de deslocamento de fase em polariscópios planos.

### **1.3 Hipóteses**

O objetivo da pesquisa é desenvolver a técnica de deslocamento de fase utilizando equações numéricas para isolar os parâmetros isoclínicos e isocromáticos a partir de equações de intensidade da luz obtidas apenas girando o analisador. Isso possibilita a aplicação em qualquer polariscópio plano, além de tornar as análises mais simples, rápidas e precisas. Com esse objetivo serão utilizados avanços na área de computação, do processamento digital de imagens e de cálculo numérico.

Em qualquer imagem fotográfica digital estão presentes ruídos e imperfeições. Esses ruídos são as principais fontes de erros nas medidas realizadas com os experimentos fotoelásticos. Esses erros podem ser reduzidos com a aquisição de um número maior de imagens, dessa maneira, é possível reduzir as falhas no processamento das imagens digitais e melhorar a precisão das medidas de tensões e/ou deformações.

Com base em estudos de pesquisas realizadas por outros autores e revisões bibliográficas referentes ao tema, na presente pesquisa serão consideradas as seguintes hipóteses:

- a) Existe a possibilidade de utilizar a técnica de deslocamento de fase com luz branca para determinar com precisão as tensões e deformações em modelos submetidos a forças externas. Deste modo, a fotoelasticidade digital pode ser aplicada com resultados satisfatórios e eficiência na análise experimental de tensões em peças industriais.
- b) As imagens fotográficas contêm ruídos e imperfeições que vão dar origem a erros nas medidas realizadas pela fotoelasticidade. Existem muitas fontes de erro provenientes de vibrações mecânicas, variações da temperatura ambiente, sombras e reflexos nas imagens, má calibração dos instrumentos de medição, erro no

posicionamento dos elementos óticos, erros presentes nos elementos óticos, além de muitas outras.

- c) Quanto maior for a quantidade de medidas, menor será a influência do erro aleatório nas medições, tendo, desta maneira, uma melhoria da precisão do processo. Em termos estatísticos, aumentando-se o número de medições ocorre a redução da incerteza das medidas.
- d) Existe a possibilidade de deduzir novas equações matemáticas para a técnica de deslocamento de fase, em uma configuração que rotaciona somente o analisador, tendo-se o objetivo de diminuir as incertezas nas medições e suas fontes de erro para tornar as técnicas confiáveis.
- e) É possível utilizar métodos numéricos e estatísticos para a obtenção e teste das novas equações. Um número alto o suficiente de testes numéricos pode avaliar ou verificar essas novas equações ou, no mínimo, tornar pequenas ou remotas a chance de que as equações estejam erradas ou que sejam falsas.

#### **1.4 Objetivo Geral**

O objetivo geral da dissertação é utilizar a técnica de deslocamento de fase com luz branca realizada com um polariscópio plano, deduzindo-se novas equações numéricas para calcular os parâmetros isoclínico e isocromático que são obtidos a partir da equação de intensidade da luz.

#### **1.5 Objetivos Específicos**

Os objetivos específicos a serem alcançados neste trabalho são:

- a) Desenvolver equações numéricas para calcular os parâmetros fotoelásticos utilizando diversas quantidades de imagens para determinação das tensões por meio das análises fotoelásticas.
- b) Desenvolver um teste numérico para verificar se as equações numéricas realizam o cálculo correto dos parâmetros isoclínico e isocromático.
- c) Utilizar as técnicas da fotoelasticidade para realizar análises em um disco sob compressão diametral, calculando-se o coeficiente de calibração para reduzir erros na medição das tensões no disco anelar.

- d) Comparar os resultados obtidos por meio das equações numéricas com aqueles resultados obtidos pelos métodos teóricos convencionais utilizados amplamente nas pesquisas mais recentes.

## 1.6 Justificativa

Apesar dos avanços alcançados nos últimos trinta e cinco anos na técnica fotoelástica digital, devido a possibilidade de adquirir imagens digitais que poderiam ser tratadas e analisadas através de computadores, ainda não foi desenvolvida uma técnica que permitisse a automatização completa da técnica, ou seja, que não precisasse da interferência de um profissional com treinamento e experiência em análises de franjas fotoelásticas para resolver alguns problemas relativos a interpretação das informações contidas nas fotografias. Todas as técnicas desenvolvidas para automatizar a análise computacional das fotografias apresentam alguma desvantagem.

O método de deslocamento de fase que utiliza equações numéricas para a análise dos parâmetros fotoelásticos ainda é uma técnica nova que quase não foi testada. Portanto, pesquisas que exploram essa técnica são muito importantes para descobrir seus pontos fracos e fortes e verificar se a técnica pode ser utilizada para substituir as técnicas de deslocamento de fase convencionais em todas as condições experimentais, em apenas algumas condições ou em nenhuma condição, caso a nova técnica apresente alguma característica negativa para os resultados.

Contudo, os primeiros resultados obtidos com a técnica mostraram-se promissores, a nova técnica mostrou erros menores do que aqueles obtidos com a técnica de Patterson e Wang, uma das técnicas mais difundidas nas análises fotoelásticas utilizando o deslocamento de fase.

No caso de polariscópios circulares, ainda existe muito a ser feito. A técnica deve ser comparada com outras técnicas desenvolvidas na literatura, principalmente com a técnica das dez imagens que é considerada a técnica de deslocamento de fase mais robusta desenvolvida. A sensibilidade ao erro devido a incompatibilidade das placas de quarto de onda deve ser analisada e comparada com a sensibilidade de outras técnicas. A influência dos erros devidos ao desalinhamento dos elementos óticos também deve ser analisada e comparada com aquelas obtidas por meio de outras técnicas. Além disso, deve-se comparar de maneira mais detalhada entre equações com o mesmo número de imagens para verificar se existem vantagens com o mesmo número de imagens para verificar se existem vantagens em usar alguma ao invés de outras. Outro parâmetro a ser analisado é a influência do passo angular dos elementos óticos,

até hoje, somente técnicas utilizando um passo constante dos elementos óticos foram desenvolvidas por causa da limitação da maneira convencional utilizada para isolar os parâmetros isoclínico e isocromático. A técnica que utiliza métodos numéricos para realizar o isolamento dos parâmetros não possui a limitação das outras técnicas, assim, seria possível analisar a influência de passos que não são constantes. Essa análise poderia fornecer mais entendimento sobre como a posição dos elementos óticos interferem nas análises, porque como no método convencional, devido à natureza trigonométrica da equação de intensidade de tensões, é possível obter as mesmas equações de intensidade com posições diferentes dos elementos óticos. Contudo, apesar das equações serem iguais o mesmo não ocorre com os resultados obtidos utilizando-as. Entender esse fenômeno poderia auxiliar na escolha das melhores configurações dos elementos óticos para diminuir os erros, melhorar e facilitar a análise das imagens.

Em relação a polariscópios planos, a técnica deve ser desenvolvida de maneira análoga aquela que foi utilizada no desenvolvimento para polariscópios circulares. No parágrafo anterior foram citadas análises que faltam realizar no polariscópio circular, essas também podem ser estendidas para polariscópios planos e semicirculares. Contudo, os polariscópios planos têm a vantagem de ter menos elementos óticos do que os polariscópios circulares, isso facilita a identificação da influência dos erros presentes nas análises. Outro ponto importante a ressaltar é a vantagem de cada configuração de polariscópio em relação aos resultados obtidos, o polariscópio circular fornece resultados melhores ao analisar o parâmetro isocromático. O polariscópio plano, por sua vez, produz melhores resultados na determinação do parâmetro isoclínico. O sucesso da técnica das dez imagens se deve a exploração dessas vantagens, pois a técnica utiliza as quatro primeiras imagens, obtidas com o polariscópio configurado como plano, para determinar o parâmetro isoclínico e as outras seis imagens, adquiridas com o polariscópio configurado como circular, são usadas na determinação do parâmetro isocromático. Desenvolvendo o método de deslocamento de fase utilizando equações numéricas para o polariscópio plano será possível uni-lo ao método desenvolvido para o polariscópio circular e fazer um procedimento análogo à técnica das dez imagens utilizando equações numéricas, verificando se a nova técnica seria mais robusta do que utilizar as configurações plana e circular de modo separado.

Outro fator importante a analisar é a capacidade da técnica de deslocamento de fase, com o isolamento dos parâmetros fotoelásticos feitos por métodos numéricos, ser realizada de modo totalmente automatizado. Essa possibilidade de automatização deve ser comparada com outras técnicas de análise disponíveis. O tempo de processamento dos dados obtidos também

deve ser levado em consideração, pois numa possível aplicação industrial, o tempo para adquirir os resultados é uma variável de suma importância. O estudo da união da técnica proposta com outros métodos como a fotoelasticidade de três franjas, principalmente na questão da automatização, poderia render bons resultados, assim como a comparação dos resultados utilizando as duas técnicas.

A técnica desenvolvida nesta pesquisa utilizou modelos de equações numéricas mais simples do que aquelas que foram desenvolvidas para as análises com polariscópio circular, essas novas equações poderiam ser comparadas com o modelo antigo para verificar qual apresenta o menor tempo de processamento e o menor erro. Poderiam também ser feitas comparação sobre a sensibilidade dos dois modelos aos erros presentes nos experimentos fotoelásticos, como os erros de alinhamento e de incompatibilidade das placas de quarto de onda.

O desenvolvimento dessa pesquisa deixa muitas possibilidades para pesquisas futuras na área da fotoelasticidade digital. As hipóteses consideradas para desenvolver o trabalho, as análises desenvolvidas e os resultados obtidos poderão ser discutidos, modificados e utilizados em outros trabalhos, além disso, os equipamentos e os softwares desenvolvidos ficarão à disposição para utilização em pesquisas na universidade.

## **1.7 Escopo**

Nesta pesquisa, equações numéricas foram desenvolvidas para o cálculo dos parâmetros isoclínico e isocromático a partir das equações de intensidade da luz. Dessa maneira, foi possível realizar a técnica de deslocamento de fase para qualquer passo angular dos elementos óticos de um polariscópio plano. Todos os resultados da análise foram comparados com soluções analíticas calculadas utilizando-se as técnicas da elasticidade. Nos experimentos foi utilizado um disco anelar submetido a esforços de compressão diametralmente opostos, portanto a solução analítica foi possível.

Os procedimentos de aquisição e tratamento das imagens ocorreram de acordo com o método convencional da técnica de deslocamento de fase, as únicas diferenças foram o número de imagens adquiridas, o passo angular para adquirir as imagens e a utilização de equações numéricas para calcular os parâmetros fotoelásticos. Deste modo, não foram desenvolvidas técnicas especiais para tratamento das imagens obtidas durante os experimentos, as técnicas de desempacotamento de fase foram realizadas da maneira convencional e as imagens foram

analisadas em tons de cinza. Durante os experimentos foi utilizada uma estrutura para possibilitar a aplicação das forças diametralmente opostas sobre o anel. Somente uma carga foi aplicada devido à quantidade de fotografias que serão tiradas utilizando uma câmera digital.

Não foram tratadas questões relativas à influência dos erros devidos à incompatibilidade das placas de quarto de onda ou ao desalinhamento dos elementos óticos. Comparações entre as equações desenvolvidas nesse trabalho e aquelas desenvolvidas no trabalho no qual esta pesquisa se inspira não foram feitas. Também não foi feita a comparação entre análises feitas com polariscópio plano e aquelas feitas com o polariscópio circular, pois os novos modelos desenvolvidos aqui não foram estendidos para serem aplicados no polariscópio circular no presente trabalho. Nenhuma tentativa foi feita para desenvolver novos métodos de análise utilizando as duas configurações de polariscópio juntas. Essas análises foram deixadas para desenvolvimento em trabalhos futuros, assim como os experimentos que envolvem análises de modelos que possuem formas complexas.

Portanto, nesse trabalho foram tratadas somente as questões relativas a um desenvolvimento inicial da técnica, sem pretensão de analisar todos os erros que influenciam nos resultados ou de fazer uma comparação completa para verificar todas as vantagens e desvantagens que a técnica possui em relação às outras disponíveis para as análises por meio do método de deslocamento de fase.



## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

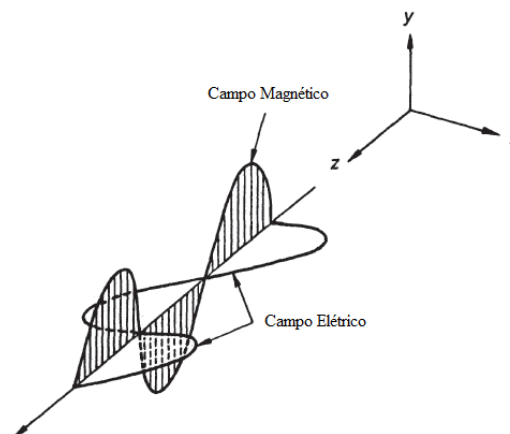
A fotoelasticidade é uma técnica experimental muito útil na análise de tensões (PINIT; UMEZAKI, 2007). Essa técnica é baseada no fenômeno da birrefringência temporária que é exibida por muitos plásticos transparentes não-cristalinos. Em condições normais os materiais que apresentam a propriedade de birrefringência temporária são opticamente isotrópicos, porém, quando são aplicados esforços o material torna-se birrefringente (RIBEIRO, 2001). Quando os esforços no material são retirados o efeito da birrefringência some e o material apresenta isotropia ótica novamente. Contudo, a luz é fundamental para que o fenômeno da birrefringência seja explorado nas análises.

A luz é uma onda eletromagnética formada por dois vetores, um deles elétrico e o outro magnético. Os vetores estão em fase e são perpendiculares um ao outro e à direção de propagação da luz, conforme ilustrado na Figura 1. No desenvolvimento da teoria o vetor elétrico é utilizado como o vetor de luz fundamental. A amplitude instantânea vetor elétrico, enquanto observado de um ponto fixo na direção de propagação, é representado por

$$E = a \sin \omega t \quad (1)$$

onde,  $a$  é a amplitude da onda de luz,  $t$  é o tempo e  $\omega$  é a velocidade angular. Sendo  $c$  a velocidade de propagação da luz no vácuo,  $f$  a frequência e  $\lambda$  o comprimento de onda, então a velocidade angular é  $\omega = 2\pi f = 2\pi c/\lambda$ .

**Figura 2 - Os vetores elétrico e magnético de uma onda eletromagnética plana**



Fonte: Adaptado de RAMESH, 2000.

A maioria das fontes de luz são formadas por um amplo número de átomos ou emissores moleculares orientados aleatoriamente (RAMESH, 2000). Os raios de luz emitidos a partir dessas fontes não têm orientação definida e o vetor de luz descreve um movimento de vibração aleatória em um plano transversal a direção de propagação. A polarização da luz ocorre quando o vetor de luz é forçado a seguir uma lei definida. Existem três tipos de polarização, quando a ponta do vetor está localizada na ponta de um círculo a luz é circularmente polarizada, se a ponta descreve uma elipse a luz é elípticamente polarizada e caso o vetor de luz seja paralelo a uma determinada direção na frente de onda a luz é linearmente polarizada.

As leis de Snell para a refração e reflexão governam a passagem da luz através de meios isotrópicos. Essas leis são:

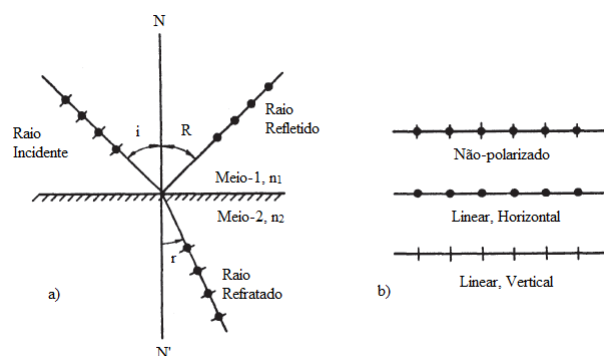
- A normal à onda incidente, a normal à interface e as normais às ondas refletida e refratada estão todas localizadas em um plano.
- O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, conforme visto na Figura 2.
- A razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração é uma constante para dois meios isotrópicos. Isso é conhecido como o índice de refração relativo, se um dos meios é o vácuo, então é denominado índice de refração absoluto.

$$\frac{\text{sen}(i)}{\text{sen}(r)} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12},$$

$$n_1 = \frac{c}{v_1},$$

$$n_2 = \frac{c}{v_2}.$$
(2)

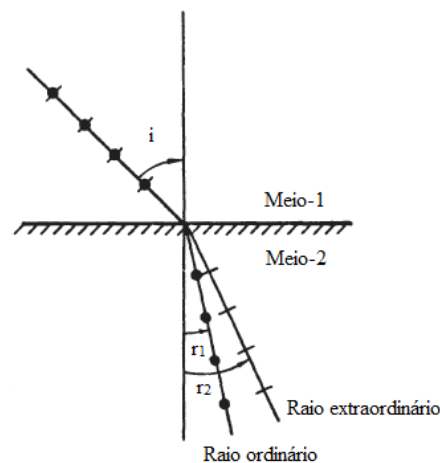
**Figura 3 – a) Passagem da luz através de um meio isotrópico. b) Representação esquemática da luz não-polarizada e polarizada**



Fonte: Fonte: Adaptado de RAMESH, 2000.

Quando a luz passa através de meios cristalinos, que são opticamente anisotrópicos, um único raio incidente gera dois raios refratados, denominados raios ordinário e extraordinário, conforme Figura 3, esse é o fenômeno da refração dupla. Um dos raios é extraordinário por conseguir violar a lei de Snell em determinadas circunstâncias. Esse raio não precisa estar confinado a um plano de incidência. Além disso, sua velocidade muda de maneira contínua em função do ângulo de incidência. Os dois índices de refração para os raios extraordinário e ordinário são iguais apenas na direção de um eixo ótico. Um meio isotrópico pode transmitir luz comum, enquanto que a luz atravessando um cristal é sempre polarizada. Os dois raios são linearmente polarizados e seus planos de polarização são perpendiculares um ao outro.

**Figura 4 – Passagem da luz através de um meio cristalino**



**Fonte: Adaptado de RAMESH, 2000.**

Quando o raio incidente é paralelo ao eixo ótico os raios ordinário e extraordinário têm o mesmo índice de refração e obedecem como se atravessassem um meio isotrópico obedecendo à lei de Snell. Contudo, quando o raio incidente é perpendicular ao eixo ótico, devido ao menor índice de refração o raio extraordinário viaja mais rápido do que o ordinário, mas seguem na mesma direção. O fenômeno fotoelástico é observado quando os raios incidentes são perpendiculares ao eixo ótico. Nesse caso, as direções principais funcionam como eixos polarizadores no ponto de interesse, os raios atravessam na mesma direção com velocidades diferentes. Os dois raios são polarizados e os eixos de polarização são perpendiculares um ao outro. Quando os raios emergem, existe um retardo relativo entre eles, o que contribui para a formação de franjas.

Considerando que a luz linearmente polarizada incide perpendicularmente sobre uma placa cristalina de espessura  $h$ , então, têm-se o raio incidente perpendicular aos eixos de

polarização da placa. Quando o raio incidente entra na placa, ocorre sua decomposição nos raios ordinário e extraordinário que viajam na mesma direção, mas com velocidades diferentes  $v_1$  e  $v_2$ . Ao emergir da placa cristalina os dois raios apresentam uma diferença de fase  $\delta$ , esse retardo relativo pode ser expresso em função da espessura e das propriedades óticas da placa. Como a velocidade de propagação dentro da placa é diferente, então os raios levam  $h/v_1$  e  $h/v_2$  unidades de tempo para atravessar a placa. Essa diferença contribui para a diferença de fase, representando matematicamente fica

$$\delta = 2\pi f \left( \frac{h}{v_1} - \frac{h}{v_2} \right) = 2\pi h \frac{c}{\lambda} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_1 - n_2) \quad (3)$$

Quando uma placa tem uma espessura que causa uma diferença de fase de  $\pi/2$  radianos, então, ela é denominada placa de um quarto de onda ( $\lambda/4$ ). As placas de onda, assim como os modelos fotoelásticos têm dois eixos polarizadores um deles é denominado eixo rápido (F) e o outro eixo lento (S). É para ser notado que uma placa pode ser denominada de um quarto de onda apenas para um comprimento de onda particular (RAMESH, 2000).

Num modelo transparente feito de polímero submetido a um estado plano de tensões, o estado de tensão em um ponto é caracterizado pelas tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e a referência delas a um conjunto de eixos. Quando o modelo é estressado as direções dos eixos de polarização no plano do modelo coincidem com a direção dos eixos das tensões principais naquele ponto. Na relação entre tensões e índices de refração, formulada por Maxwell, tem-se

$$\begin{aligned} n_1 - n &= c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 \\ n_2 - n &= c_1 \sigma_2 - c_2 \sigma_1 \end{aligned} \quad (4)$$

onde,  $c_1$  é o coeficiente de tensão ótica direto,  $c_2$  é o coeficiente de tensão ótica transversal,  $n$  é o índice de refração na condição não tensionado. Substituindo (4) em (3), resulta em

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (c_1 + c_2) (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (5)$$

A Equação (5) indica que no modelo fotoelástico, o retardo relativo muda ponto a ponto, dependendo do nível de tensão. Se  $c_1 + c_2$  é substituído por  $C$  e escrita em termos de ordem de franja, então

$$N = \frac{\delta}{2\pi} = h \frac{C}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6)$$

O coeficiente relativo de tensão óptica usualmente é assumido como constante para um material. Contudo, vários estudos mostraram que esse coeficiente depende do comprimento de onda e deve ser usado com cuidado (RAMESH, 2000).

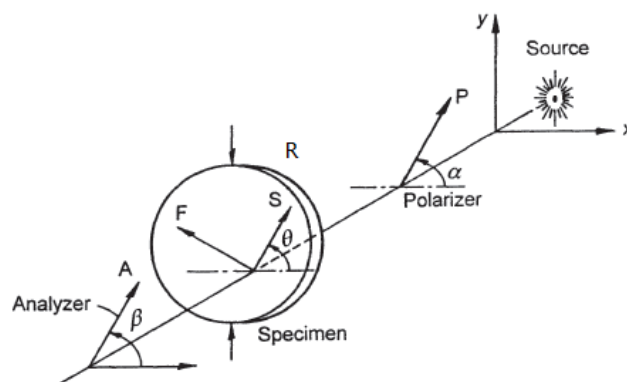
A Equação (6) pode ser escrita como

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{NF_\sigma}{h} \quad (7)$$

onde,  $F_\sigma = \lambda/C$  que é conhecido como valor de tensão de franja do material. A determinação do valor de tensão de franja do material é conhecida como calibração do material fotoelástico. Esse é o único parâmetro que relaciona tensões e informação ótica.

Na fotoelasticidade, as tensões são avaliadas usando a luz. Tipicamente, para uma luz incidente conhecida, os dados de tensões são obtidos pela análise da luz emergente. O arranjo mais simples possível na técnica é o polariscópio plano, mostrado na Figura 5. Em um polariscópio plano podem ser vistos dois tipos de franjas sobrepostas, as isocromáticas e as isoclínicas. Utilizando uma fonte de luz branca, as isocromáticas aparecem coloridas, com exceção da franja de ordem zero que é preta, e as isoclínicas aparece na cor preta.

**Figura 5 – Arranjo genérico de um polariscópio plano**



Fonte: Adaptado de RAMESH, 2000.

O cálculo de Jones é um fundamento importante para a técnica de deslocamento de fase utilizada nesta pesquisa. Em geral, um modelo fotoelástico num polariscópio introduz um retardo e uma rotação. No cálculo de Jones, essas operações são representadas por matrizes.

Uma matriz de rotação é útil para encontrar os componentes de um vetor em que o eixo de referência foi girado por um ângulo arbitrário  $\theta$ . Por exemplo, considerando  $x, y$  o eixo de referência inicial e  $x', y'$  o eixo de referência final, conforme Figura 6. Sendo  $u, v$  as componentes do vetor de luz ao longo de  $x, y$ ; então as componentes  $u', v'$  nas direções  $x', y'$  são obtidos do seguinte modo:

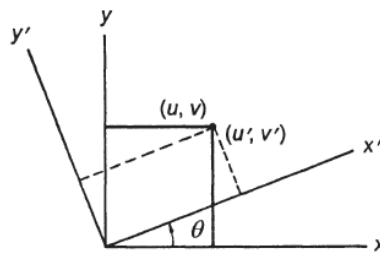
$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (8)$$

A matriz seguinte é chamada de matriz de rotação:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

Onde, um ângulo é considerado positivo se for medido no sentido anti-horário.

**Figura 6 – Transformação do sistema de coordenadas**



Fonte: RAMESH, 2000.

Um meio que apresenta dupla refração introduz um retardo relativo  $\delta$  entre as componentes oscilando ao longo de seus eixos. Sendo  $u$  e  $v$  as componentes entrando no meio com certos retardos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente.

$$\begin{aligned} u &= a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \\ v &= a_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (10)$$

Se  $u$  é o eixo lento e  $v$  é o eixo rápido, então, a luz saindo do meio é representada por

$$\begin{aligned} u' &= a_1 \cos\left(\omega t + \alpha_1 - \frac{\delta}{2}\right) \\ v' &= a_2 \cos\left(\omega t + \alpha_2 + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Usando a notação de números complexos, a luz emergindo pode ser obtida por uma operação matricial da luz incidente como

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \Re \left[ \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 e^{i\alpha_1} \\ a_2 e^{i\alpha_2} \end{Bmatrix} \right] e^{i\omega t} \quad (12)$$

A primeira matriz no lado direito da Equação (12) é a matriz de retardo.

Se o eixo lento de um modelo é orientado num ângulo  $\theta$  e o retardo total introduzido pelo modelo é  $\delta$ , então a luz incidente é girada por um ângulo  $\theta$  e a seguir o retardo  $\delta$  é introduzido. Essas operações são representadas pelas duas últimas matrizes da Equação (13), a primeira matriz é colocada para obter a luz emergindo com respeito ao eixo de referência original.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

Como muitos elementos de um polariscópio podem ser representados por um retardo e uma rotação, é conveniente representar a Equação (13) como uma única matriz desenvolvendo o produto de todas as matrizes. Assim a matriz se torna

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\delta}{2} - i\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\cos 2\theta & -i\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\sin 2\theta \\ -i\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\operatorname{sen} 2\theta & \cos\frac{\delta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

As matrizes que representam a rotação devida ao polarizador (P) e ao analisador (A) são mostradas na Equação (15). A Equação (14) é utilizada tanto para representar o modelo fotoelástico (R) quanto para representar as placas de um quarto de onda (Q).

$$P = \begin{cases} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{cases} \quad (15)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Nas discussões seguintes  $\delta$  será utilizado para representar o retardo introduzido pelo modelo,  $\theta$  é a orientação de uma das direções principais em relação à horizontal,  $ke^{i\theta}$  é o vetor de luz incidente,  $E_\beta$  e  $E_{\beta+\pi/2}$  são componentes do vetor de luz ao longo do eixo do analisador e perpendicular ao eixo do analisador, respectivamente. As orientações angulares de todos os elementos são referentes ao eixo x.

A Figura 5 mostra um modelo fotoelástico em um polariscópio plano com o polarizador e o analisador posicionados em ângulos arbitrários  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Usando o cálculo de Jones, têm-se as componentes ao longo do eixo do analisador e perpendicular ao eixo do analisador como

$$\begin{cases} E_\beta \\ E_{\beta+\pi/2} \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} - i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta & -i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\theta \\ -i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\theta & \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta \end{bmatrix} \times \begin{cases} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{cases} ke^{i\theta} \quad (16)$$

A partir da Equação (16), a intensidade da luz transmitida  $I_p$  pode ser calculada por  $I_p = E_\beta E_\beta^*$ , onde  $E_\beta^*$  é o conjugado complexo de  $E_\beta$ . Essa operação resulta em

$$I_p = I_a \left[ \cos^2 \frac{\delta}{2} \cos^2(\beta - \alpha) + \sin^2 \frac{\delta}{2} \cos^2(\beta + \alpha - 2\theta) \right] \quad (17)$$

onde  $I_a$  é a constante de proporcionalidade e representa a amplitude do vetor de luz incidente.

Na técnica de deslocamento de fase convencional, os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  e a intensidade  $I_p$  são conhecidos, os dois primeiros são determinados pelo posicionamento do polariscópio e o último é determinado a partir das intensidades dos pixels nas fotografias do modelo para cada um desses posicionamentos. Assim, as variáveis que devem ser determinadas são os ângulos  $\delta$  e  $\theta$ , os quais representam as franjas isocromáticas e isoclínicas, respectivamente. A partir da determinação desses dois ângulos para cada pixel nas fotografias do modelo, obtém-se o campo

de tensões que atua no modelo. O número de equações necessárias para calcular  $\delta$  e  $\theta$  depende do arranjo ótico escolhido e do número de variáveis desconhecidas. Em algumas técnicas foi adicionada a intensidade da luz de fundo  $I_b$ . Deste modo,  $I_b$  e  $I_a$  também são variáveis, porém não precisam ser determinadas explicitamente. O número mínimo de equações é igual ao número de variáveis, já o número máximo de equações de intensidade possíveis no método convencional não é definido, porém, quanto mais equações, mais difícil fica isolar os parâmetros  $\delta$  e  $\theta$  em função dos outros parâmetros.

No próximo capítulo, a técnica de deslocamento de fase será ilustrada com os principais métodos desenvolvidos para polariscópios planos e para polariscópios circulares, apenas os que são relevantes para a pesquisa. Também serão discutidos os avanços que cada um deles trouxe e as vantagens e desvantagens que cada um deles possui.



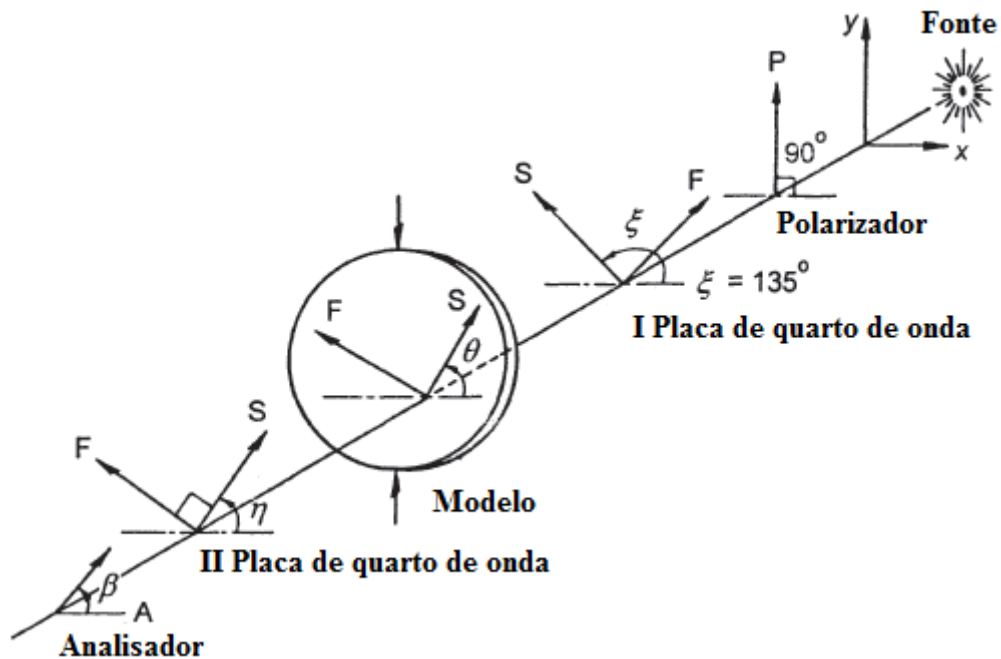
### 3 ESTADO DA ARTE

Na fotoelasticidade o conceito de deslocamento de fase foi introduzido pela primeira vez por Hecker e Morche em 1986 (RAMESH, 2000). Os dois utilizaram um polariscópio circular, o arranjo óptico utilizado por eles é mostrado na Figura 7. Para esse arranjo a equação de intensidade é

$$I_i = I_b + \frac{I_a}{2} + \frac{I_a}{2} [\text{sen}2(\beta_i - \eta_i) \cos \delta - \text{sen}2(\theta - \eta_i) \cos 2(\beta_i - \eta_i) \text{sen} \delta] \quad (18)$$

onde,  $I_b$  representa a intensidade da luz de fundo e  $\eta_i$  a posição angular da placa de quarto de onda de onda em relação a um eixo fixo de referência.

**Figura 7 – Arranjo genérico de um polariscópio circular na técnica de deslocamento de fase**



Fonte: adaptado de RAMESH, 2000.

No Quadro 1 são mostrados os arranjos ópticos específicos e as equações de intensidade para cada posição. O ângulo  $\xi$  representa a posição da primeira placa de quarto de onda e  $\eta$  representa a posição da segunda placa de quarto de onda. A partir das equações de intensidade é possível obter os parâmetros isocromático como

$$\delta = \arctg \left( \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(I_1 - I_2)^2 + (I_2 - I_3)^2 + (I_3 - I_1)^2}}{3(I_4 - I_5)} \right) \quad (19)$$

**Quadro 1 – Metodologias de deslocamento de fase para o polariscópio circular**

$\xi$	$\eta$	$\beta$	Equação de Intensidade
Hecker e Morche			
$3\pi/4$	0	0	$I_1 = I_b + \frac{I_a}{2}(1 - \text{sen}2\theta\text{sen}\delta)$
$3\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/3$	$I_2 = I_b + \frac{I_a}{2} + \frac{I_a}{4}(\text{sen}2\theta + \sqrt{3}\cos2\theta)\text{sen}\delta$
$3\pi/4$	$-\pi/3$	$-\pi/3$	$I_3 = I_b + \frac{I_a}{2} + \frac{I_a}{4}(\text{sen}2\theta - \sqrt{3}\cos2\theta)\text{sen}\delta$
$3\pi/4$	$3\pi/4$	0	$I_4 = I_b + \frac{I_a}{2}(1 + \cos\delta)$
$3\pi/4$	$\pi/4$	0	$I_5 = I_b + \frac{I_a}{2}(1 - \cos\delta)$
Patterson e Wang			
$3\pi/4$	0	$\pi/4$	$I_1 = I_b + \frac{I_a}{2}(1 + \cos\delta)$
$3\pi/4$	0	$3\pi/4$	$I_2 = I_b + \frac{I_a}{2}(1 - \cos\delta)$
$3\pi/4$	0	0	$I_3 = I_b + \frac{I_a}{2}(1 - \text{sen}2\theta\text{sen}\delta)$
$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$I_4 = I_b + \frac{I_a}{2}(1 + \cos2\theta\text{sen}\delta)$
$3\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/2$	$I_5 = I_b + \frac{I_a}{2}(1 + \text{sen}2\theta\text{sen}\delta)$
$3\pi/4$	$3\pi/4$	$3\pi/4$	$I_6 = I_b + \frac{I_a}{2}(1 - \cos2\theta\text{sen}\delta)$

Fonte: Adaptado de RAMESH, 2000.

Patterson e Wang em 1991 estenderam o trabalho de Hecker e Morche e usaram diferentes passos de rotação ótica dos elementos para produzir uma alta modulação ótica sobre

o campo (RAMESH, 2000). Os arranjos óticos específicos usados por eles e as respectivas equações de intensidade são mostrados no Quadro 1. Com as equações de intensidade na tabela o parâmetro isoclínico é obtido como

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{I_1 - I_2}{I_3 - I_4} \right) \quad \text{para } \operatorname{sen} \delta \neq 0 \quad (20)$$

e o parâmetro isocromático é obtido como

$$\delta = \operatorname{arctg} \left( \frac{I_4 - I_6}{(I_1 - I_2) \cos 2\theta} \right) \quad \text{para } \cos 2\theta \neq 0 \quad (21)$$

Ramesh (2000) explica os três principais algoritmos desenvolvidos para polariscópios planos no início das pesquisas sobre deslocamento de fase na fotoelasticidade. O primeiro foi desenvolvido por Kihara em 1990. Nesse algoritmo, a luz na saída do modelo é analisada usando combinações entre uma placa de quarto de onda e um analisador. No algoritmo desenvolvido são necessárias oito imagens para obter os parâmetros fotoelásticos. Os arranjos óticos e as respectivas equações de intensidade são mostrados no Quadro 2, para esses arranjos óticos as expressões para encontrar os parâmetros isoclínico e isocromático são

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{I_1 - I_2}{I_3 - I_4} \right) \quad \text{para } \operatorname{sen} \delta \neq 0 \quad (22)$$

$$\delta = 2 \arccos \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{I_5 - I_6}{I_5 + I_6} + \frac{I_7 - I_8}{I_5 + I_6} \right)} \right] \quad (23)$$

O segundo algoritmo foi elaborado por Sarma et al. em 1992 (RAMESH, 2000). Nesse algoritmo não é utilizada a placa de quarto de onda, somente as lentes polarizadoras são utilizadas para obter os parâmetros fotoelásticos. No algoritmo o efeito da luz de fundo não é levado em conta com a adição de um parâmetro  $I_b$ , ao invés disso, uma imagem do modelo livre de tensões é adquirida com o polarizador e o analisador em posição cruzada e os valores de intensidade dessa imagem são subtraídos das outras imagens. O algoritmo de Sarma et al., utiliza três imagens para calcular os parâmetros, esses parâmetros são calculados pelas equações

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2I_2}{I_1 + I_2 - 2I_3}\right) \quad \text{para } \sin^2 \frac{\delta}{2} \neq 0 \quad (24)$$

$$\delta = \arccos(C) \quad (25)$$

$$C = \frac{A - A^2 - B^2}{1 - A}; \quad A = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}; \quad B = \frac{I_1 + I_2 - 2I_3}{I_1 + I_2} \quad (26)$$

O terceiro algoritmo foi desenvolvido por Dupré et al. em 1993 (RAMESH, 2000), nesse algoritmo uma placa de quarto de onda é utilizada com o analisador para analisar a luz de saída do modelo, para realizá-lo são necessárias cinco imagens e as equações para calcular os parâmetros são

$$\theta = \frac{1}{4} \arctg\left(\frac{2I_3 - I_1}{I_2 - I_4}\right) \quad \text{para } \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \neq 0 \quad (27)$$

$$\delta = \arcsen\left(\frac{2I_5 - I_1}{I_1 \sin 2\theta}\right) \quad (28)$$

**Quadro 2 – Metodologias de deslocamento de fase para o polariscópio plano**

$\alpha$	$\eta$	$\beta$	Equação de Intensidade
Sarma et al.			
$\pi/2$	-	$\pi/2$	$I_1 = I_a \left[ \cos^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 2\theta \right]$
$\pi/2$	-	0	$I_2 = I_a \left[ \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 2\theta \right]$
$\pi/2$	-	$\pi/4$	$I_3 = \frac{I_a}{2} \left[ 1 - \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\theta \right]$
Kihara			
0	$\pi/2$	$-\pi/4$	$I_1 = \frac{I_a}{2} [1 + \sin \delta \sin 2\theta]$
0	$\pi/2$	$\pi/4$	$I_2 = \frac{I_a}{2} [1 - \sin \delta \sin 2\theta]$

$-\pi/4$	$\pi/2$	$-\pi/4$	$I_3 = \frac{I_a}{2} [1 + \text{sen} \delta \cos 2\theta]$
$-\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/4$	$I_4 = \frac{I_a}{2} [1 - \text{sen} \delta \cos 2\theta]$
0	$\pi/2$	0	$I_5 = I_a \left[ \cos^2 \frac{\delta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 2\theta \right]$
0	$\pi/2$	$\pi/2$	$I_6 = I_a \left[ \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \text{sen}^2 2\theta \right]$
$-\pi/4$	$\pi/4$	$-\pi/4$	$I_7 = I_a \left[ \cos^2 \frac{\delta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \text{sen}^2 2\theta \right]$
$-\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$I_8 = I_a \left[ \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 2\theta \right]$
Dupré et al.			
0	-	0	$I_1 = I_a$ modelo sem carga
0	-	0	$I_2 = I_a \left[ \cos^2 \frac{\delta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 2\theta \right]$
0	-	$\pi/4$	$I_3 = \frac{I_a}{2} \left[ 1 - \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \text{sen} 4\theta \right]$
$\pi/4$	-	$\pi/4$	$I_4 = I_a \left[ \cos^2 \frac{\delta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \text{sen}^2 2\theta \right]$
0	$3\pi/4$	0	$I_5 = \frac{I_a}{2} [1 + \text{sen} \delta \text{sen} 2\theta]$

Fonte: Adaptado de RAMESH, 2000.

Nos primeiros esforços de pesquisa, a análise crítica da precisão do conjunto de equações para avaliar os parâmetros foi negligenciada. Isso ocorreu devido à natureza exploratória dos estudos iniciais, onde chegar em diferentes arranjos óticos era a principal preocupação da pesquisa (RAMESH, 2000). As questões relacionadas a precisão receberam atenção apenas algum tempo depois. Nesse sentido, o esquema mais pesquisado no deslocamento de fase é o conjunto de equações proposto por Patterson e Wang (RAMESH, 2000).

Durante alguns anos, os algoritmos desenvolvidos foram baseados naqueles mostrados anteriormente, principalmente no algoritmo de Patterson e Wang. Um dos motivos para desenvolver outros algoritmos usando arranjos óticos diferentes é que muitos pesquisadores

possuíam polariscópios onde os elementos óticos não poderiam ser colocados nas posições exigidas pelos algoritmos. Asundi, Tong e Boay (1999) desenvolveram um algoritmo que chegava às mesmas equações para os parâmetros fotoelásticos que o algoritmo de Patterson e Wang, porém, utilizaram arranjos óticos diferentes. Esse algoritmo foi proposto para eliminar a necessidade da segunda placa de quarto de onda e do analisador girarem totalmente independentes um do outro no algoritmo de Patterson e Wang. Contudo, a segunda placa de quarto de onda ainda precisava ser posicionada em  $\pi/4$  ou  $\pi/2$  independentemente da posição do analisador.

Após o desenvolvimento de diversos algoritmos, os pesquisadores passaram a estudar a precisão dos algoritmos na determinação dos parâmetros fotoelásticos. Tamrakar e Ramesh (2001) desenvolveram um método para testar a influência dos erros presentes nos elementos óticos usando imagens simuladas e o cálculo de Jones. Eles compararam o algoritmo de Patterson e Wang com outro baseado nesse, denominado algoritmo de Ajovalasit et al., e verificaram o desempenho dos dois na avaliação dos parâmetros na presença de desalinhamentos óticos e incompatibilidade das placas de quarto de onda. Esse trabalho mostrou como associar os erros no mapa de fase com o desalinhamento ótico dos elementos, além de provar que o algoritmo desenvolvido por Patterson e Wang é mais sensível a esses erros do que o algoritmo de Ajovalasit et al.

Ramji e Prasath (2011) desenvolveram uma abordagem genérica para simular o erro na fotoelasticidade digital usando o cálculo de Jones. Na pesquisa a sensibilidade dos dados isoclínicos em quatro algoritmos é avaliada quando estão presentes erros de desalinhamento e de incompatibilidade da placa de quarto de onda, quatro algoritmos são analisados, dois utilizando um polariscópio plano e uma placa de quarto de onda (algoritmos de Barone et al. e Ramji e Ramesh), um utilizando um polariscópio circular (algoritmo de Patterson e Wang) e um outro usando os dois tipos (método de dez passos). Os autores inserem erros aleatórios entre  $\pm 2$  nos ângulos dos elementos óticos na equação de intensidade, obtêm o parâmetro isoclínico e simulam o mapa de fase isoclínico em um disco. Nesse trabalho o modelamento da influência do erro aleatório de uma placa de quarto de onda foi feito pela primeira vez. Em relação aos algoritmos foi encontrado que Patterson e Wang é o mais sensível a incompatibilidade da placa de quarto de onda e por isso tem um desempenho fraco na avaliação das isoclínicas. Os algoritmos Barone et al. e Ramji e Ramesh, por sua vez, são mais sensíveis ao erro de desalinhamento ótico, erros de  $\pm 0,25$  afetam significativamente a avaliação do parâmetro. O método dos dez passos foi o mais robusto dos quatro, porque tolerou erros de até  $\pm 2$  e é imune à incompatibilidade da placa de quarto de onda. Devido a isso, os autores recomendam que o

método dos dez passos seja utilizado nas análises manuais e em aplicações onde será feita a separação de tensões, pois nele ambos os parâmetros são obtidos com grande precisão.

De todos os algoritmos desenvolvidos até aqui, os mais eficientes na avaliação das isocromáticas foram os métodos de seis passos utilizando o polariscópio circular, ou seja, os algoritmos baseados no algoritmo de Patterson e Wang. Contudo, esses algoritmos são efetivamente responsáveis pelo erro de incompatibilidade da placa de quarto de onda (RAMESH, 2000) e também pela influência da luz de fundo (SAI PRASAD; RAMESH apud RAMJI; RAMESH, 2008, p. 257). Ramji, Gadre e Ramesh (2006) citados por Ramji e Ramesh (2008, p. 257) mostraram que algoritmos baseados em polariscópios planos fornecem resultados de isoclínicas melhores do que métodos que utilizam uma placa de quarto de onda. Destacando-se que pode ser preciso utilizar diferentes arranjos para avaliar com precisão isoclínicas e isocromáticas. Reconhecendo esse fato, existiram tentativas de propor técnicas híbridas onde as placas de quarto de onda foram removidas óticamente para determinar as isoclínicas (RAMJI; RAMESH, 2008). Essa remoção ótica da placa de quarto de onda é complicada por causa dos erros aleatórios de fabricação presentes nas placas de quarto de onda. Devido a esses problemas Ramji e Ramesh (2008) propuseram um algoritmo de dez passos, onde quatro passos são utilizados para determinar o parâmetro isoclínico sem placas de quarto de onda e seis passos são utilizados para determinar o parâmetro isocromático usando a configuração circular no polariscópio. O algoritmo de dez passos foi melhorado posteriormente pelos mesmos autores, essa versão final foi comparada a outros três algoritmos, na determinação do parâmetro isoclínico, por Ramji e Prasath (2011). Essa comparação mostrou-se menos sensível aos erros de desalinhamento ótico e incompatibilidade da placa de quarto de onda do que os outros algoritmos, por isso, os autores concluem que esse é o algoritmo mais adequado quando as análises são feitas manualmente. A versão mais atual do método dos dez passos é mostrada no Quadro 3 e os parâmetros podem ser encontrados como

$$\theta = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left( \frac{I_4 - I_2}{I_3 - I_1} \right) \quad \text{para} \quad \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2} \neq 0 \quad (29)$$

$$\delta = \operatorname{arctg} \left( \frac{(I_9 - I_7) \operatorname{sen} 2\theta + (I_8 - I_{10}) \operatorname{cos} 2\theta}{(I_5 - I_6)} \right) \quad (30)$$

**Quadro 3 – O método dos dez passos**

$\alpha$	$\xi$	$\eta$	$\beta$	Equações de Intensidade
$\pi/2$	-	-	0	$I_1 = I_b + I_a \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \text{sen}^2 2\theta$
$5\pi/8$	-	-	$\pi/8$	$I_2 = I_b + \frac{I_a}{2} \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} [1 - \text{sen}4\theta]$
$3\pi/4$	-	-	$\pi/4$	$I_3 = I_b + I_a \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 2\theta$
$7\pi/8$	-	-	$3\pi/8$	$I_4 = I_b + \frac{I_a}{2} \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} [1 + \text{sen}4\theta]$
$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$	$I_5 = I_b + \frac{I_a}{2} (1 + \cos\delta)$
$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	0	$I_6 = I_b + \frac{I_a}{2} (1 - \cos\delta)$
$\pi/2$	$3\pi/4$	0	0	$I_7 = I_b + \frac{I_a}{2} (1 - \text{sen}2\theta \text{sen}\delta)$
$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$I_8 = I_b + \frac{I_a}{2} (1 + \cos2\theta \text{sen}\delta)$
$\pi/2$	$\pi/4$	0	0	$I_9 = I_b + \frac{I_a}{2} (1 + \text{sen}2\theta \text{sen}\delta)$
$\pi/2$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$I_{10} = I_b + \frac{I_a}{2} (1 - \cos2\theta \text{sen}\delta)$

Fonte: Adaptado de RAMJI; PRASATH, 2011.

A maioria dos algoritmos exige que os elementos óticos sejam rotacionados independentemente. Infelizmente, esse não é o caso para a maioria dos polariscópios disponíveis comercialmente e amplamente utilizados nas indústrias, escolas e laboratórios (ASUNDI; TONG; BOAY, 1999). Alguns dos algoritmos, como o método dos dez passos, somente podem ser aplicados se as placas de quarto de onda forem removíveis. Essas limitações construtivas dos polariscópios muitas vezes impedem os pesquisadores de utilizar os algoritmos mais difundidos na literatura, fato que os obriga a desenvolver os próprios algoritmos para realizar as análises.

Os parâmetros fotoelásticos dos algoritmos de deslocamento de fase são obtidos por meio de cálculos algébricos sobre as equações de intensidade e pelas relações trigonométricas. O método algébrico torna difícil obter os parâmetros a partir dos ângulos desejados, pois é

necessário que exista uma solução exata e, além disso, os ângulos precisam respeitar as limitações de posicionamento do polariscópio utilizado. Outra limitação é a quantidade de imagens que podem ser consideradas, isolar os parâmetros fica mais difícil à medida que são adicionadas mais equações de intensidade. Uma solução para resolver esse problema foi criada por Magalhães e Magalhães Júnior (2012) ao desenvolverem um modelo matemático por analogia com os algoritmos para polariscópio circular, onde, por meio de equações numéricas tornou possível obter os parâmetros fotoelásticos para um número qualquer de imagens fotográficas. Esse modelo matemático desenvolvido para polariscópios circulares tem a vantagem de conseguir analisar as imagens com a rotação de apenas um ou mais dos elementos óticos. Assim, mesmo com um polariscópio circular bastante limitado, em que fosse possível girar somente o analisador, as análises seriam possíveis. As equações propostas para o cálculo dos parâmetros fotoelásticos foram:

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N b_{r,s} I_r I_s}}{\sqrt{\sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N c_{r,s} I_r I_s}} \right) \quad (31)$$

$$\delta = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N e_{r,s} I_r I_s}}{\sqrt{\sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N f_{r,s} I_r I_s}} \right) \quad (32)$$

Essas equações permitem calcular  $\theta$  e  $\delta$  em cada ponto da imagem (cada *pixel*) usando os valores da intensidade luminosa  $I_N$  das diversas imagens da amostra naquele ponto, independentemente do valor da mudança ou passo de fase (MAGALHÃES; MAGALHÃES JÚNIOR, 2012). O modelo matemático para formular numericamente o problema foi

$$\begin{array}{l}
\text{Maximizar} \quad \sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N (b_{r,s} + c_{r,s} + e_{r,s} + f_{r,s}) \\
\text{sujeito a} \quad \left\{ \begin{array}{ll}
\text{tan}(\text{ang}) = \text{Sqrt}(|\text{Num}|)/\text{Sqrt}(|\text{Den}|) & \text{Quantidade} \\
1) \quad \tan^2(2\theta^v) \left( \sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N (c_{r,s} I_r^v I_s^v) \right) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N (b_{r,s} I_r^v I_s^v) & v = 1..[N(N+1)] \\
2) \quad \tan^2(\delta^v) \left( \sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N (f_{r,s} I_r^v I_s^v) \right) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N (e_{r,s} I_r^v I_s^v) & v = 1..[N(N+1)] \\
3) \quad \begin{array}{ll}
-1 \leq b_{r,s} \leq 1, & -1 \leq c_{r,s} \leq 1 & r = 1..N, s = r..N \\
-1 \leq e_{r,s} \leq 1, & -1 \leq f_{r,s} \leq 1 & r = 1..N, s = r..N
\end{array} \\
4) \quad \begin{array}{ll}
b_{r,s}, c_{r,s} \text{ são números reais} & r = 1..N, s = r..N \\
e_{r,s}, f_{r,s} \text{ são números reais} & r = 1..N, s = r..N
\end{array}
\end{array} \right.
\end{array}$$

onde para cada  $v$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
I_j^v = K^v \left\{ 1 - \sin[2(\beta_j - \eta)] \cos(\delta^v) - \sin[2(\eta - \theta^v)] \cos[2(\beta_j - \eta)] \sin(\delta^v) \right\}, j = 1..N \\
K^v \in [0; 255] \text{ aleatório e real}, \quad \eta = -\frac{\pi}{4} \\
\theta^v \in [0; \pi/4] \text{ aleatório e real} \\
\delta^v \in [0; \pi/2] \text{ aleatório e real} \\
\beta_j = \frac{\pi}{2} \left( \frac{j-1}{\text{Passo}-1} \right) - \frac{\pi}{4}, j = 1..N, \quad \text{Passo} = N \text{ ou } 16 \text{ ou } 19 \text{ ou } 31\dots
\end{array} \right.$$

(32)

No modelo os coeficientes das matrizes dos numeradores ( $c_{r,s}$ ;  $e_{r,s}$ ) e denominadores ( $d_{r,s}$ ;  $f_{r,s}$ ), respectivamente, são números reais. Os valores de intensidade da imagem ( $I_j$ ) são inteiros, variando de 0 à 255. As variáveis  $r$ ,  $s$  e  $v$  são apenas índices usados como contadores pelo modelo. A tentativa de obter um máximo do somatório dos valores absolutos dos coeficientes das matrizes tem o objetivo diminuir o erro na medição. É importante também que esses coeficientes não sejam muito grandes para os valores do somatório do numerador e do denominador não terem valores altos, aumentando-se o erro de arredondamento do número que se propaga e reduz a precisão (MAGALHÃES, 2011).

As restrições (1) e (2) no modelo 32 representam o formato da equação buscada e sua função é garantir que ( $c_{r,s}$ ;  $e_{r,s}$ ;  $d_{r,s}$ ;  $f_{r,s}$ ) geram valores corretos para o cálculo de  $\theta$  e  $\delta$ . Os coeficientes das matrizes ( $c_{r,s}$ ;  $e_{r,s}$ ;  $d_{r,s}$ ;  $f_{r,s}$ ) são o resultado da resolução do modelo 32 e  $v$  é a quantidade total de coeficientes a determinar. Magalhães (2011) sugere que para garantir um problema hiper-restrito deve-se obter um número de restrições maior ou, no mínimo, igual ao número de variáveis. Assim, as  $v$  restrições do modelo são obtidas através da escolha aleatória

dos valores de  $K$ ,  $\delta$  e  $\theta$ . A intensidade luminosa  $I_j$  é calculada considerando  $\eta$  (ângulo da segunda quarto de onda) igual a  $-\pi/4$  e  $\beta$  (ângulo do analisador com passo constante) com

$$\theta_j = \frac{\pi}{2} \left( \frac{j-1}{Passo-1} \right) - \frac{\pi}{4}, \quad j = 1..N \quad \text{com} \quad Passo = N \quad (33)$$

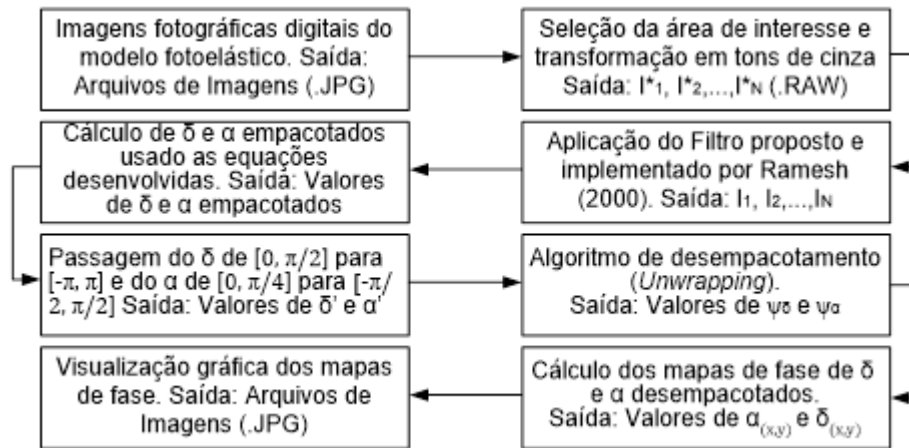
limitados entre  $-\pi/4$  e  $\pi/4$ . Sendo a configuração do polariscópio dada por  $P_{90}Q_{45}R_{\alpha,\delta}Q_{-45}A_{\beta}$ . Os valores de  $K$  são limitados entre 0 e 255, os valores de  $\theta$  entre 0 e  $\pi/4$  e os valores de  $\delta$  entre 0 e  $\pi/2$ ; para manter uma compatibilidade com o problema.

A restrição (3) é utilizada para acelerar a resolução do modelo matemático. A limitação do valor dos coeficientes representa uma significativa redução do universo de busca da solução do modelo de otimização, assim as soluções são mais rápida e o esforço computacional é menor para resolver esses modelos de otimização linear (MAGALHÃES, 2011).

Segundo Magalhães (2011), encontrar uma solução viável qualquer para o modelo é suficiente para satisfazer a pesquisa por novos algoritmos. Deste modo, a procura se restringe aos coeficientes das matrizes reais que atendam às restrições do modelo, não necessitando serem maximizados (isso é desejável, mas não necessário).

Para testar as equações dos parâmetros isocromáticos, Magalhães (2011) submeteu essas equações a quatro testes, com o objetivo de verificar se podem ser utilizadas e se não apresentam erros ou falhas. O primeiro teste é uma verificação numérica onde são atribuídos valores aleatórios a  $K$ ,  $\delta$  e  $\alpha$ , esses valores são usados para calcular os valores de  $I_j$ , na equação de intensidade, para um número  $N$  de imagens. Uma vez obtidos os valores de  $I_j$ , as equações em teste são usadas para calcular os parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  e compará-los com os valores aleatórios de  $\alpha$  e  $\delta$ . No segundo teste, imagens de tensões pelo modelo matemático de análise analítica baseado no método fotoelástico foram geradas no computador e um programa, desenvolvido em MatLab®, foi utilizado para calcular as tensões a partir dessas imagens usando as equações em teste, essas tensões são então comparadas com as tensões conhecidas. No terceiro teste, foi feito o mesmo procedimento do segundo, porém as imagens geradas foram acrescidas de ruídos e erros aleatórios. No quarto teste, foi utilizado o mesmo procedimento do segundo e terceiro teste, contudo as imagens utilizadas foram fotografias reais usando a técnica fotoelástica. O quarto teste é a aplicação da técnica fotoelástica, na Figura 8 é mostrado o fluxograma do processamento aplicado. De acordo com Magalhães (2011), esses testes não são para fazer um estudo métrico das novas equações desenvolvidas, os testes são para verificar a validade, funcionalidade e desempenho dos novos algoritmos de cálculo de fase.

**Figura 8 – Fluxograma do processamento aplicado na fotoelasticidade digital com deslocamento de fase**



Fonte: MAGALHÃES, 2011.

Magalhães (2011) concluiu a partir dos resultados da pesquisa que quanto maior o número de imagens utilizadas nas imagens, menor é o erro nas medições e maior é a precisão da técnica da fotoelasticidade digital. Outra observação foi que todas as equações com o mesmo número de imagens apresentam precisão semelhante, não podendo diferenciar uma como melhor que a outra. Magalhães (2011) apresenta duas hipóteses, a primeira é em relação ao fato de que equações que usam mais imagens obtêm um erro menor do que aquelas que usam menos imagens, a hipótese proposta é que o erro diminui porque com mais imagens consegue-se mais informação e maior redundância de cálculo para cada ponto na imagem, reduzindo os efeitos causados pelos erros aleatórios das fotografias. Devido a várias tentativas sem sucesso em determinar o quanto o erro diminui com o aumento do número de imagens, a segunda hipótese é que talvez a técnica fotoelástica não permita essa quantificação pelo fato do erro ser dependente de um grande número de variáveis. O novo algoritmo, a partir de onze imagens, tornou-se mais preciso do que o algoritmo de Patterson e Wang, de seis imagens.

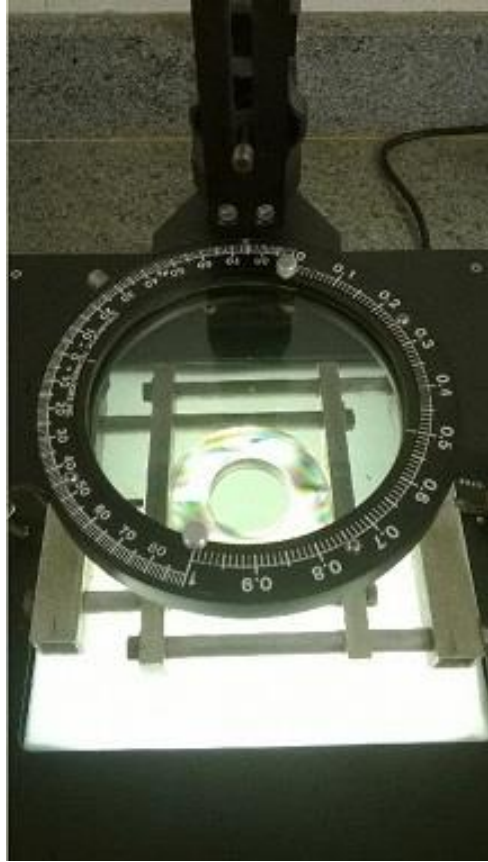
#### 4 METODOLOGIA

Baseando-se na pesquisa de Magalhães (2011), utilizou-se a Equação (17) como base para gerar um formato geral para as equações numéricas. Para desenvolver as equações considerou-se que o ângulo  $\alpha$  do analisador seria mantido em  $90^\circ$ , buscando rotacionar apenas o analisador de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . O objetivo é conseguir equações inéditas para um número  $N$  qualquer de imagens, melhorando a aplicação da técnica em polariscópios planos. Pode-se generalizar a distribuição de intensidade de cada imagem  $I_N$ , com  $\alpha$  igual a  $90^\circ$ , segundo a Equação (34):

$$I_p = I_a \left[ \cos^2 \frac{\delta}{2} \cos^2(\beta) + \sin^2 \frac{\delta}{2} \cos^2(\beta - 2\theta) \right] \quad (34)$$

onde,  $I_p$  é a intensidade luminosa emergente do polariscópio em cada ponto da imagem,  $I_a$  é a constante de proporcionalidade, ou seja, a intensidade máxima de luz emergindo do analisador,  $\beta$  é o ângulo do analisador,  $\delta$  é o retardo relativo entre as ondas do vetor de luz,  $\theta$  é o ângulo entre um dos eixos principais e o eixo de referência e  $N$  é o número de imagens.

Por uma questão de limitação do polariscópio, o número de imagens  $N$  deve ter o ângulo do analisador  $\beta$  com passo constante em graus inteiros, variando  $\theta$  de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , pois não se consegue precisão em rotação fracionária do analisador, como mostrado na Figura 9. Deste modo, a relação de  $N$  e o passo de  $\theta$  em graus é mostrado na Quadro 4.

**Figura 9 – Graduação do analisador do polariscópio plano**

Fonte: Dados de pesquisa.

**Quadro 4 – Relação do número de imagens N e o passo constante de rotação do ângulo  $\beta$  do analisador**

N	3	4	6	7	10	11	16	19	31
Passo	45°	30°	18°	15°	10°	9°	6°	5°	3°

Fonte: Dados da pesquisa.

Baseado, principalmente, na pesquisa realizada por Magalhães (2011) onde foram desenvolvidas equações numéricas para análises com o polariscópio circular e também nos trabalhos de Magalhães Júnior e outros (2009), Magalhães Júnior, Smith Neto e Barcellos (2009) e Magalhães Júnior, Smith Neto e Barcellos (2011) que desenvolveram a ideia de utilizar equações numéricas na técnica de deslocamento de fase. Neste trabalho, adaptou-se a utilização da técnica de deslocamento de fase com o polariscópio plano, onde propõem-se novas equações numéricas para o cálculo de fase para um número N de imagens. Observando-se que  $\theta$  é representado por uma função tangente e  $\delta$  pela função cosseno. Essas equações permitem calcular  $\theta$  e  $\delta$  em cada ponto (pixel) da imagem usando os valores de intensidade I nas diversas

imagens da amostra naquele ponto, independentemente do valor da mudança ou do passo de fase.

As equações (35) e (36) são o formato geral das equações numéricas escolhido para representar as equações para o cálculo dos parâmetros isoclínico e isocromático. Para chegar nessas equações procurou-se chegar a um formato geral no qual as equações dos principais algoritmos da técnica de deslocamento de fase pudessem ser escritas. Essa não é a única maneira possível de representar as equações de fase, seria possível chegar a outras equações numéricas dependendo das equações escolhidas como base. Conforme mostrado no capítulo 3, um algoritmo numérico foi desenvolvido por Magalhães (2011) visando a aplicação no polariscópio circular. Nesta pesquisa, utilizando-se da mesma abordagem conseguiu-se chegar as equações numéricas (35) e (36) que foram desenvolvidas para aplicação no polariscópio plano.

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\sum_{j=1}^N b_j I_j}{\sum_{j=1}^N c_j I_j} \right) \quad (35)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left( \frac{\cos 2(\theta - \alpha) \left( \sin 2\theta \sum_{j=1}^N d_j I_j + \cos 2\theta \sum_{j=1}^N e_j I_j \right)}{\sin 2(\theta - \alpha) \left( \cos 2\theta \sum_{j=1}^N f_j I_j + \sin 2\theta \sum_{j=1}^N g_j I_j \right)} \right) \quad (36)$$

Porém chegar nas Equações (35) e (36) não é o suficiente para calcular os parâmetros fotoelásticos, para determinar os parâmetros fotoelásticos  $\theta$  e  $\delta$  nas Equações (35) e (36), é preciso obter os coeficientes  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $e_j$ ,  $f_j$  e  $g_j$  para o número de imagens e o passo de aquisição de imagens selecionados para os experimentos. O modelo de otimização para calcular esses coeficientes é mostrado nas Equações (37), (38) e (39), o modelo de otimização não tem a preocupação de alcançar um máximo global, porque com um máximo local já seria possível atender ao objetivo de obter coeficientes viáveis para o novo algoritmo.

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar} \quad \sum_{j=1}^N b_j + c_j \\
& \text{sujeito a} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{1)} & \text{tg}(2\theta^v) \sum_{j=1}^N c_j \cdot I_j^v = \sum_{j=1}^N b_j \cdot I_j^v \quad \nu > 2N \\ \text{2)} & -1 \leq b_j \leq 1, \quad -1 \leq c_j \leq 1 \quad j=1..N \\ \text{3)} & b_j, c_j \text{ são números reais} \quad j=1..N \end{array} \right. \quad \text{Quantidades} \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar} \quad \sum_{j=1}^N d_j + e_j + f_j + g_j \\
& \text{sujeito a} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{1)} & \cos(\delta^v) \sin[2(\theta^v - \alpha)] \left[ \cos(2\theta^v) \cdot \sum_{j=1}^N f_j \cdot I_j^v + \sin(2\theta^v) \cdot \sum_{j=1}^N g_j \cdot I_j^v \right] = \\ & \cos[2(\theta^v - \alpha)] \left[ \sin(2\theta^v) \cdot \sum_{j=1}^N d_j \cdot I_j^v + \cos(2\theta^v) \cdot \sum_{j=1}^N e_j \cdot I_j^v \right] \quad \nu > 4N \\ \text{2)} & -1 \leq d_j \leq 1, \quad -1 \leq e_j \leq 1, \quad -1 \leq f_j \leq 1, \quad -1 \leq g_j \leq 1 \quad j=1..N \\ \text{3)} & d_j, e_j, f_j, g_j \text{ são números reais} \quad j=1..N \end{array} \right. \quad \text{Quantidades} \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_j^v = I_o^v \left[ \cos^2\left(\frac{\delta^v}{2}\right) \cdot \cos^2(\beta_j - \alpha) + \sin^2\left(\frac{\delta^v}{2}\right) \cdot \cos^2(\beta_j + \alpha - 2\theta^v) \right], j=1..N \\ I_o^v \in [0; 255] \text{ randômico e real} \\ \theta^v \in [-\pi/4, \pi/4] \text{ randômico e real} \\ \delta^v \in [0, \pi] \text{ randômico e real} \\ \beta_j = \left[ \left( \text{AngSuperior} - \text{AngInferior} \right) \frac{\pi(j-1)}{180(\text{step}-1)} + \pi \frac{\text{AngInferior}}{180} \right], j=1..N \end{array} \right.$$

$\text{step} = \text{divisores} (\text{AngSuperior} - \text{AngInferior}) + 1$

$\text{step}$  define o incremento do ângulo do analisador (Inteiro em graus)

$N$  = número de imagens de 3 até o valor  $\text{step}$  (Inteiro)

$j = 1..N$

$\beta_j$  = ângulo do analisador

$\alpha$  = ângulo do polarizador

$\theta$  = ângulo isoclínico

$\delta$  = parâmetro isocromático

$\text{AngInferior}$  = ângulo inferior do analisador em graus (Inteiro)

$\text{AngSuperior}$  = ângulo superior do analisador em graus (Inteiro)

Entradas :  $\text{AngInferior}$ ,  $\text{AngSuperior}$  e  $\alpha$

Saídas: Para cada valor de  $N$  e  $\text{step}$ :  $b_j, c_j, d_j, e_j, f_j$  e  $g_j$  com  $j=1..N$

(39)

No modelo de otimização, os coeficientes  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $e_j$ ,  $f_j$  e  $g_j$  foram selecionados como números reais. As variáveis  $j$  e  $v$  são índices usados como contadores no modelo. Os valores de intensidade  $I_j$  e  $I_0$  são inteiros que variam de 0 até 255. O valor do ângulo  $\alpha$  do polarizador pode assumir qualquer valor, porém nessa pesquisa esse valor foi fixado em  $90^\circ$ , pois o polarizador do polariscópio do laboratório é fixo nesse valor. O parâmetro isoclínico  $\alpha$  varia de  $-\pi/4$  a  $\pi/4$  e o parâmetro isocromático  $\delta$  varia de 0 a  $\pi$ . O ângulo do analisador  $\beta$  também pode ter qualquer valor, contudo, nessa pesquisa a variação do ângulo foi de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .  $N$  define o número de imagens e  $\text{step}$  define o passo angular em que as imagens são adquiridas nos experimentos, sendo  $\text{step}$  sempre maior ou igual a  $N$ .  $\text{AngInferior}$  e  $\text{AngSuperior}$  representam os limites inferior e superior no posicionamento do analisador, neste trabalho,  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , respectivamente. A restrição 1 garante que a resposta serão valores de coeficientes que obedecem as equações de fase e as restrições 2 e 3 estabelecem que os coeficientes são números reais maiores que um negativo e menores que um positivo.

Com a solução do modelo de otimização, representado nas Equações (37), (38) e (39), por meio de um programa computacional, foram encontradas várias equações para calcular  $\theta$  e  $\delta$  pelo método de deslocamento de fase. A solução do modelo de otimização foi realizada utilizando o Maple<sup>®</sup>. Nas tabelas a seguir estarão apresentados alguns coeficientes obtidos e como ficariam as respectivas equações de  $\theta$  e  $\delta$  quando  $N = \text{step}$ . Devido à grande quantidade de equações serão mostrados a seguir apenas alguns exemplos, porém todas as equações desenvolvidas estão no Apêndice A. O Quadro 5 mostra os coeficientes obtidos para três imagens ( $N = \text{step} = 3$ ) e as Equações (40) e (41) apresentam as equações para calcular  $\theta$  e  $\delta$  a partir dessas imagens.

**Quadro 5 – Coeficientes  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $e_j$ ,  $f_j$  e  $g_j$  obtidos para  $N = 3$  e  $\text{step} = 3$**

$j$	$\beta$	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	$0^\circ$	1,00000	0,50000	-1,00000	0,50000	1,00000	-0,25000
2	$45^\circ$	0,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	0,00000	0,50000
3	$90^\circ$	0,00000	0,50000	0,00000	-0,50000	0,50000	-0,25000

Fonte: Dados da pesquisa.

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{I_1}{0,5I_1 - I_2 + 0,5I_3} \right) \quad (40)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left( \frac{\cos 2(\theta - \alpha) (\sin 2\theta (-I_1 + I_2) + \cos 2\theta (0,5I_1 + I_2 - 0,5I_3))}{\sin 2(\theta - \alpha) (\cos 2\theta (I_1 + 0,5I_3) + \sin 2\theta (-0,25I_1 + 0,5I_2 - 0,25I_3))} \right) \quad (41)$$

O Quadro 6 mostra os coeficientes obtidos para quatro imagens ( $N = \text{step} = 4$ ) e as equações (42) e (43) apresentam as equações para calcular  $\theta$  e  $\delta$  a partir dessas imagens.

**Quadro 6 – Coeficientes  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $e_j$ ,  $f_j$  e  $g_j$  obtidos para  $N = 4$  e  $\text{step} = 4$**

j	$\beta$	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0°	1,00000	0,79904	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,68301
2	30°	1,00000	-0,73205	0,82137	1,00000	1,00000	0,57735
3	60°	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,69060	-1,00000	1,00000
4	90°	0,50000	0,93301	-0,82137	0,26795	0,63397	-0,89434

Fonte: Dados da pesquisa.

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{I_1 + I_2 - I_3 + 0,5I_4}{0,80I_1 - 0,73I_2 - I_3 + 0,93I_4} \right) \quad (42)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left( \frac{\cos 2(\theta - \alpha) (\sin 2\theta (-I_1 + 0,82I_2 + I_3 - 0,82I_4) + \cos 2\theta (I_1 + I_2 - 0,69I_3 + 0,27I_4))}{\sin 2(\theta - \alpha) (\cos 2\theta (I_1 + I_2 - I_3 + 0,63I_4) + \sin 2\theta (-0,68I_1 + 0,58I_2 + I_3 - 0,89I_4))} \right) \quad (43)$$

O Quadro 7 mostra os coeficientes obtidos para três imagens ( $N = 3$ ,  $\text{step} = 4$ ) e as Equações (44) e (45) apresentam as equações para calcular  $\theta$  e  $\delta$  a partir dessas imagens.

**Quadro 7 – Coeficientes  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $e_j$ ,  $f_j$  e  $g_j$  obtidos para  $N = 3$  e  $\text{step} = 4$**

j	$\beta$	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0°	0,57735	0,66667	-1,00000	0,19936	1,00000	-0,48803
2	30°	0,00000	-1,00000	0,92265	1,00000	-0,57735	0,73205
3	60°	0,00000	0,33333	0,07735	-0,33333	0,57735	-0,24402

Fonte: Dados da pesquisa.

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{0,58I_1}{0,67I_1 - I_2 + 0,33I_3} \right) \quad (44)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left( \frac{\cos 2(\theta - \alpha) (\sin 2\theta (-I_1 + 0,92I_2 + 0,08I_3) + \cos 2\theta (0,2I_1 + I_2 - 0,33I_3))}{\sin 2(\theta - \alpha) (\cos 2\theta (I_1 - 0,58I_2 + 0,58I_3) + \sin 2\theta (-0,48I_1 + 0,73I_2 - 0,24I_3))} \right) \quad (45)$$

O Quadro 8 mostra os coeficientes obtidos para três imagens ( $N = 3$ ,  $\text{step} = 5$ ) e as Equações (46) e (47) apresentam as equações para calcular  $\theta$  e  $\delta$  a partir dessas imagens.

**Quadro 8 – Coeficientes  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $e_j$ ,  $f_j$  e  $g_j$  obtidos para  $N = 3$  e  $\text{step} = 6$**

j	$\beta$	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	$0^\circ$	0,32492	0,72361	-1,00000	0,09481	0,94295	-0,72361
2	$18^\circ$	0,00000	-1,00000	0,90983	0,72654	-1,00000	1,00000
3	$36^\circ$	0,00000	-0,27639	0,09017	-0,20081	0,61803	-0,27639

Fonte: Dados da pesquisa.

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{0,32I_1}{0,72I_1 - I_2 - 0,28I_3} \right) \quad (46)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left( \frac{\cos 2(\theta - \alpha) (\sin 2\theta (-I_1 + 0,91I_2 + 0,09I_3) + \cos 2\theta (0,09I_1 + 0,72I_2 - 0,2I_3))}{\sin 2(\theta - \alpha) (\cos 2\theta (0,94I_1 - I_2 + 0,62I_3) + \sin 2\theta (-0,72I_1 + I_2 - 0,28I_3))} \right) \quad (47)$$

Foram calculadas equações para  $N$  e  $\text{step}$  entre 3 e 46, mas serão utilizados  $N$  e  $\text{step}$  até 31 devido a limitação da resolução do polariscópio plano do laboratório. Com essas equações obtidas, pode-se testá-las para verificar se podem ser usadas e se não apresentam erros. Neste trabalho serão utilizados alguns dos testes propostos por Magalhães (2011) para avaliar as equações.

No primeiro teste foi realizada uma verificação numérica matemática onde são atribuídos valores aleatórios a  $I_a$  (constante de proporcionalidade da intensidade máxima de luz emergindo do analisador),  $\delta$  (retardo no modelo fotoelástico dado pelas franjas isocromáticas) e  $\theta$  (ângulo entre a direção  $\sigma_1$  e o eixo de referência horizontal, dado pelas franjas isoclínicas), e então, foi utilizada a Equação (17) para calcular os valores de  $I_j$  (intensidade luminosa) onde  $j=1, 2, 3, \dots, N$  e  $N$  é o número de imagens. Uma vez obtido  $I_j$ , usou-se as novas equações em teste para calcular  $\theta$  e  $\delta$  e, então, fez-se a comparação com o valor de  $\theta$  e  $\delta$  escolhido aleatoriamente.

No segundo teste, serão geradas no computador imagens do campo de tensões para um anel, submetido a esforços de compressão diametralmente opostos, pelo modelo matemático de análise analítica baseado no método fotoelástico. A forma como as imagens são geradas é detalhada no subcapítulo 4.2. Usa-se um programa desenvolvido em Matlab<sup>®</sup>, que processa essas imagens aplicando a Teoria da Elasticidade. Esses resultados teóricos calculados foram utilizados na comparação com os resultados obtidos experimentalmente. O processo experimental consiste em adquirir imagens fotográficas do modelo sob esforços visto do polariscópio. Depois de coletadas as imagens são processadas usando a técnica fotoelástica de deslocamento de fase. Essas fotografias foram tiradas no laboratório de análise estrutural da PUC Minas.

O objetivo desses testes não é fazer um estudo métrico das novas equações desenvolvidas, mas apenas verificar a validade, funcionalidade e desempenho desses novos algoritmos de cálculo de fase.

#### 4.1 Teste numérico matemático

Como as novas equações obtidas foram desenvolvidas por meio de algoritmos numéricos de cálculo, e não de expressões analíticas de relações trigonométricas, é preciso verificá-las. Considera-se que um grande número de testes numéricos pode validar ou comprovar essas novas equações ou, pelo menos, tornar mínimas ou remotas a chance delas estarem erradas ou serem falsas. O objetivo é verificar se as novas equações calculam realmente  $\alpha$  e  $\delta$ .

Para isso, na Equação (17),  $\alpha$  é fixado em  $90^\circ$ , são atribuídos valores reais aleatórios a  $I_a$  (constante proporcional da intensidade máxima de luz emergindo do analisador), que variam de 0 a 255, sendo também atribuídos valores reais e aleatórios a  $\theta'$  entre 0 e  $\pi/4$  e a  $\delta'$  entre 0 e  $\pi/2$ ,  $\beta$  varia de acordo com  $N$  e step. Assim, são calculados  $N$  valores de intensidade, os valores da intensidade luminosa  $I_j$  ficarão entre 0 e 255, que é o intervalo de valores de intensidade dos pixels obtidos em fotografias monocromáticas digitais dos modelos fotoelásticos. Apesar de nas imagens digitais os valores de intensidade serem números inteiros, para ampliar mais os testes essas intensidades serão consideradas como números reais.

Com os valores de  $I_j$  calculados, aplicam-se as novas equações e obtém-se os valores de  $\theta$  e  $\delta$ , que devem ser comparados com os valores atribuídos aleatoriamente de  $\theta'$  e  $\delta'$ . Essa comparação se dá por meio de uma precisão bem pequena, em razão de erros numéricos de

arredondamentos que podem ocorrer nos cálculos, considera-se uma precisão  $\xi$  igual a  $10^{-6}$  ( $\xi \leq 10^{-6}$ ). Logo, o teste avalia se  $|\theta' - \theta| \leq 10^{-6}$  e  $|\delta' - \delta| \leq 10^{-6}$ . O procedimento de teste deve ser realizado milhares de vezes para verificar as novas equações.

O algoritmo para teste numérico das novas equações geradas pelo modelo de otimização é mostrado na Figura 10, onde são inseridos o número de imagens, os coeficientes obtidos no modelo de otimização, o número de testes e a precisão. Na saída, tem-se o número de acertos e o número de erros. A função aleatória retorna um valor randômico real entre 0 e 1.

Figura 10 – Algoritmo para teste numérico das novas equações de cálculo

```

Algoritmo
Entre com N // Número de Imagens
Entre com b[j], c[j], d[j], e[j], f[j], g[j] // Coeficientes da equação
Entre com nteste // Número de testes a realizar (tipo 10000)
Entre com Precisaõ // Precisão dos testes (tipo 0,0000001)

Pi = 3,1415926535897932
Alfa = Pi / 2
Passo = N

Para j de 1 até N
  | Beta[j] = Pi / 2 ((j - 1) / (Passo - 1))
Fim Para

Contador = 0
Acertos = 0
Erros = 0

Repita
  | Contador = Contador + 1
  | Teta = (Pi / 4) * Aleatório ()
  | Delta = (Pi / 2) * Aleatório ()
  | Ia = 255 * Aleatório ()

  Para j de 1 até N
    | I[j] = Ia * (cos(Delta/2)^2*cos(Beta[j]-Alfa)^2+sen(Delta/2)^2*cos(Beta[j]+Alfa-2*Teta)^2)
  Fim Para

  Somab = 0
  Somac = 0
  Somad = 0
  Somae = 0
  Somaf = 0
  Somag = 0

  Para j de 1 até N
    | Somab = Somab + b[j] * I[j]
    | Somac = Somac + c[j] * I[j]
    | Somad = Somad + d[j] * I[j]
    | Somae = Somae + e[j] * I[j]
    | Somaf = Somaf + f[j] * I[j]
    | Somag = Somag + g[j] * I[j]
  Fim Para

  Somade = Somade +(cos(2*(Teta-Alfa))*(sen(2*Teta)*Somad+cos(2*Teta)*Somae))
  Somafg = Somafg +(sen(2*(Teta-Alfa))*(cos(2*Teta)*Somaf+sen(2*Teta)*somag))

  Se (Teta - arctan (Somab / Somac) / 2) < Precisaõ e (Delta - arccos(Somade / Soma fg)) < Precisaõ
    Então Acerto = Acerto + 1
    Senão Erro = Erro + 1
  Fim Se

Até Contador = nteste

Escreva (Acerto, Erro) // Número de acertos e erros usando as equações

Fim algoritmo

```

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4.2 Solução teórica

O disco sob compressão diametral tem sido citado mais frequentemente no desenvolvimento da fotoelasticidade convencional ou digital para ilustrar novas teorias e técnicas experimentais por muitas décadas (HUNG; MA, 2003). Porém, nesta pesquisa, utilizou-se um disco anelar sob compressão diametral para verificar a validade das equações numéricas na análise de um campo de tensões mais complexo. O disco foi utilizado somente no processo de calibração do material. A solução teórica do disco anelar é obtida com uma rotina em Matlab<sup>®</sup>, que implementa o modelo matemático da fotoelasticidade. Para exemplificar, descreve-se o equacionamento das franjas fotoelásticas em um disco circular submetido à cargas de compressão diametralmente opostas.

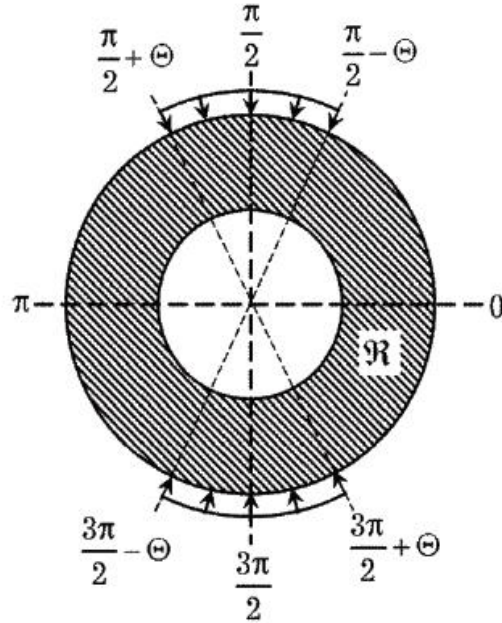
As tensões principais podem ser colocadas em função das tensões normais e de cisalhamento como

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (48)$$

$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (49)$$

Para realizar simulações matemáticas da fotoelasticidade, é necessário que se tenha todo o campo de ordens de franja como uma função das coordenadas  $x$  e  $y$ , ou seja:  $N = N(x, y)$ , ou então, para problemas discretos, um conjunto de dados  $N_{ij} = N(x_i, y_j)$ . Conhecendo-se as equações  $\sigma_1(x, y)$  e  $\sigma_2(x, y)$  (ou então  $\sigma_{1ij} = \sigma_1(x_i, y_j)$  e  $\sigma_{2ij} = \sigma_2(x_i, y_j)$ ). A relação entre a ordem de franja e as tensões principais é dada pela Equação (7). A amostra considerada é um disco anelar submetido à cargas de compressão diametralmente opostas, conforme a Figura 11.

**Figura 11 – Exemplo de amostra submetida à compressão diametral**



Fonte: TOKOVYY et al., 2010.

Pela teoria da elasticidade, o valor do campo de tensões em coordenadas polares, como função de  $r$  e  $\varphi$  com a origem do sistema de coordenadas localizado no centro do disco anelar, Tokovyy e outros (2010) fornece a seguinte solução

$$\sigma_r^e = \frac{p}{\pi} \left[ -\frac{\rho^2 - k^2}{1 - k^2} \frac{2\Theta}{\rho^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m R_m(\rho)}{m} \sin(2m\Theta) \cos(2m\varphi) \right] \quad (50)$$

$$\sigma_\varphi^e = \frac{p}{\pi} \left[ -\frac{\rho^2 - k^2}{1 - k^2} \frac{2\Theta}{\rho^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \Phi_m(\rho)}{m} \sin(2m\Theta) \cos(2m\varphi) \right] \quad (51)$$

$$\tau_{r\varphi}^e = \frac{p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m S_m(\rho)}{m} \sin(2m\Theta) \cos(2m\varphi) \quad (52)$$

Onde  $e$  significa resultado exato,  $p$  é a pressão aplicada no anel,  $\Theta$  é o ângulo de aplicação de pressão,  $\rho = r/R_1$  e  $k = R_1/R_2$  com  $r$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  igual a um raio arbitrário, o raio interno e o raio externo do anel, respectivamente. As funções de  $\rho$  são

$$R_m(\rho) = \left( 2(m+1)\rho^{-2m} - (2m+1)k^2\rho^{-2(1+m)} - k^{2(1-2m)}\rho^{-2(1-m)} \right) A_m - \left( 2(m-1)\rho^{2m} - (2m-1)k^2\rho^{-2(1-m)} + k^{2(1+2m)}\rho^{-2(1+m)} \right) B_m \quad (53)$$

$$\Phi_m(\rho) = \left( (2m+1)k^2\rho^{-2(1+m)} - 2(m-1)\rho^{-2m} + k^{2(1-2m)}\rho^{-2(1-m)} \right) A_m - \left( (2m-1)k^2\rho^{-2(1-m)} - 2(m+1)\rho^{2m} - k^{2(1+2m)}\rho^{-2(1+m)} \right) B_m \quad (54)$$

$$S_m(\rho) = \left( 2m\rho^{-2m} - (2m+1)k^2\rho^{-2(1+m)} + k^{2(1-2m)}\rho^{-2(1-m)} \right) A_m + \left( 2m\rho^{2m} - (2m-1)k^2\rho^{-2(1-m)} - k^{2(1+2m)}\rho^{-2(1+m)} \right) B_m \quad (55)$$

as constantes de integração  $A_m$  e  $B_m$  tem a forma

$$A_m = \frac{k^{2(1+m)}(k^{2m} - k^{-2m}) - 2m(1 - k^2)}{4m^2(1 - k^2)^2 - k^2(k^{2m} - k^{-2m})^2} \quad (56)$$

$$B_m = \frac{2m(1 - k^2) - k^{2(1+m)}(k^{2m} - k^{-2m})}{4m^2(1 - k^2)^2 - k^2(k^{2m} - k^{-2m})^2} \quad (57)$$

Com essas equações  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\theta$  podem ser obtidos como se segue

$$\sigma_{1,2}^e = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{2} \right)^2 + \sigma_{r\varphi}^2} \quad (58)$$

$$\theta^e = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{(\sigma_r - \sigma_\varphi) \sin(2\varphi) + 2\sigma_{r\varphi} \cos(2\varphi)}{(\sigma_r - \sigma_\varphi) \cos(2\varphi) - 2\sigma_{r\varphi} \sin(2\varphi)} \right) \quad (59)$$

A mudança de coordenadas polares para coordenadas cartesianas é dada por

$$\sigma_{xx}^e = \sigma_{rr} \cos^2(\theta) + \sigma_{\theta\theta} \sin^2(\theta) - \tau_{r\theta} \sin(2\theta) \quad (60)$$

$$\sigma_{yy}^e = \sigma_{rr} \sin^2(\theta) + \sigma_{\theta\theta} \cos^2(\theta) + \tau_{r\theta} \sin(2\theta) \quad (61)$$

$$\tau_{xy}^e = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\cos(\theta)\sin(\theta) + \tau_{r\theta} \cos(2\theta) \quad (62)$$

A partir das Equações (50) a (62) é possível obter as tensões  $\sigma_1(x, y)$  e  $\sigma_2(x, y)$ . Substituindo  $F_\sigma$ ,  $h$ ,  $\sigma_1(x, y)$  e  $\sigma_2(x, y)$  encontra-se  $N(x, y)$  na Equação 7, assim uma malha de valores  $(x, y)$  pode ser gerada e calcula-se  $N$  em todos esses pontos.

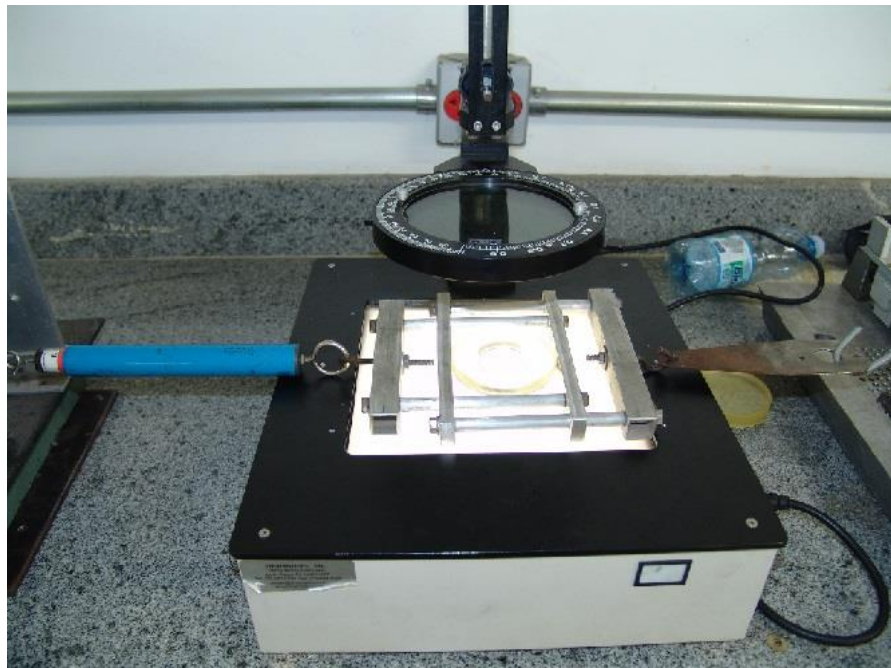
O último teste é a aplicação das novas equações em fotografias tiradas no Laboratório de Análise Estrutural da PUC Minas, algumas das fotografias utilizadas nas análises estão no Apêndice B. Esse teste só foi feito para equações com  $N \leq 31$ , devido à dificuldade de posicionar corretamente o analisador. Além disso, também serão utilizados valores de  $N$  que forneçam um valor inteiro para o passo angular no analisador por causa limitação da resolução do polariscópio que permite somente medidas de ângulos inteiros.

### 4.3 Procedimento experimental

Nos experimentos foi utilizado um disco anelar com diâmetro externo de 75 mm, diâmetro interno de 38 mm e espessura de 10 mm, essas são as medidas do anel padrão disponível no laboratório de análise estrutural para fazer o molde de disco anelar. O molde foi feito com borracha de silicone 940. O processo de confecção do molde consistiu em posicionar o disco anelar de metal no fundo de uma caixa, depois um catalisador foi misturado ao silicone para iniciar o processo de endurecimento do silicone, depois essa mistura foi despejada na caixa em que o disco de metal estava. Aproximadamente uma hora após esse procedimento, o silicone estava totalmente endurecido e retirando-se a caixa e o anel de metal foi obtido um molde para o disco anelar. Os modelos são feitos com 75% resina rígida G4 e 25% resina flexível G4, essa mistura foi feita para possibilitar o aparecimento de franjas com uma carga menor, pois cargas mais baixas facilitam o processo experimental tornando mais fácil o ajuste do modelo durante os experimentos. O procedimento de confecção das peças em resina consiste em misturar as resinas com os respectivos endurecedores na proporção de 2:1, as duas foram preparadas separadamente. Depois as resinas rígida e flexível foram misturadas na proporção 3:1 e despejadas no molde de silicone, após esse procedimento o modelo de disco anelar em resina foi removido do molde, depois de 24 horas, pronto para ser submetido aos experimentos. Esse disco anelar foi submetido a esforços de compressão diametralmente opostos de 2 N, o ângulo de aplicação dessa carga foi considerado  $\Theta = 2,5^\circ$ . Para a escolha do valor da carga compressiva montou-se toda a estrutura experimental com o disco anelar sob compressão visto do

polariscópio, a seguir aumentou-se gradativamente a carga aplicada até que no polariscópio pudessem ser vistas uma quantidade de franjas que cobrisse todo o corpo do modelo. A montagem para aplicação de carga é mostrada na Figura 12. O esforço foi aplicado manualmente e depois foi medido por um dinamômetro que pode ser visto à esquerda na Figura 12. Para determinar o ângulo de aplicação da carga foi passado óleo mineral na lateral do disco anelar e foi montada a estrutura experimental, nas mesmas condições em que as fotos foram tiradas, depois foi feita a desmontagem da estrutura. Deste modo, as duas peças de metal em contato com o disco anelar ficaram com uma área marcada pelo óleo, essa área foi considerada a área de contato durante a aplicação da carga e a partir dela calculou-se o ângulo aproximado de aplicação da carga.

**Figura 12 – Montagem experimental**



**Fonte: Experimentos da pesquisa.**

#### **4.4 Técnica para análise dos resultados**

As novas equações serão testadas através de procedimentos experimentais usando um disco anelar sob compressão diametral cuja solução para o campo de tensões é conhecida, assim, para avaliar os resultados obtidos foi calculado o erro médio relativo comparando os resultados experimentais e teóricos através das Equações (63) e (64).

$$E_{\theta} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{|\theta_i^e - \theta_i|}{|\theta_i^e|} \quad (63)$$

$$E_{\delta} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{|\delta_i^e - \delta_i|}{|\delta_i^e|} \quad (64)$$

Nas Equações (63) e (64),  $E_{\theta}$  e  $E_{\delta}$  representam o erro médio relativo de  $\theta$  e  $\delta$ , respectivamente.  $M$  é o número de pixels da imagem e  $\theta_i^e$  e  $\delta_i^e$  são os valores exatos calculados pelas Equações (58) e (59) para o disco anelar,  $\theta_i$  e  $\delta_i$  são calculados pelas Equações (35) e (36).

#### 4.5 Técnica de desempacotamento de fase

Além dos cálculos do retardo  $\delta$  e do ângulo isoclínico  $\alpha$  usando as equações desenvolvidas, as imagens fotoelásticas passam por outros processamentos. Primeiramente, destaca-se a determinação da ambiguidade de  $\delta$  e  $\alpha$  empacotados (*wrapped*). Os principais algoritmos de desempacotamento (*unwrapped*) trabalham com  $\alpha'$  entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  e  $\delta'$  entre  $-\pi$  e  $\pi$ . As transformações de  $\alpha$  em  $\alpha'$  e  $\delta$  em  $\delta'$  são os primeiros processamentos realizados. Em seguida, tem-se o processo de desempacotamento (*phase unwrapping*). No mapa de fase, resultante da aplicação das equações desenvolvidas, as ordens de franja fracionária na faixa de 0-1 são representados como um mapa de intensidade de 0-255. Para a utilização prática dos dados, é preciso encontrar a ordem de franja total sobre o domínio, ou seja, um mapa contínuo da distribuição de fase, conseguido através de um processo chamado desempacotamento de fase.

O desempacotamento dos valores do ângulo isoclínico  $\alpha$  são obtidos através de um processo de escaneamento da imagem para eliminar as discontinuidades devidas a função arco tangente, assim, é realizado a restauração da continuidade de  $\alpha$ . Durante o processo de escaneamento, se existir uma diferença de fase maior do que  $\pi/3$  entre um pixel e os pixels vizinhos, então nesse ponto é adicionado ou subtraído  $\pi/2$  ao valor da fase para eliminar a discontinuidade.

O desempacotamento dos valores do parâmetro isocromático  $\delta$ , por serem realizados pela função arco cosseno difere do desempacotamento de  $\alpha$ , os valores de  $\delta$  são desempacotados dependendo de qual meia-franja pertencem. As linhas correspondentes aos valores máximos e mínimos de cada franja isocromática são plotados para separar as meia-franjas de cada uma.

Depois, a partir de uma franja de valor conhecido, normalmente a franja de ordem zero, todas as outras são numeradas. Depois da numeração os valores de  $\delta$  estarão desempacotados.



## 5 DISCUSSÃO E RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os principais resultados obtidos nos testes para validar as equações numéricas para a técnica de deslocamento de fase da Fotoelasticidade. Os resultados obtidos nos testes são fundamentais para validar as equações obtidas. As equações numéricas são um dos principais resultados obtidos neste trabalho e os resultados apresentados neste capítulo provam a capacidade dessas equações realizarem o cálculo de fase. Todas as equações obtidas e utilizadas neste trabalho podem ser encontradas no Apêndice A.

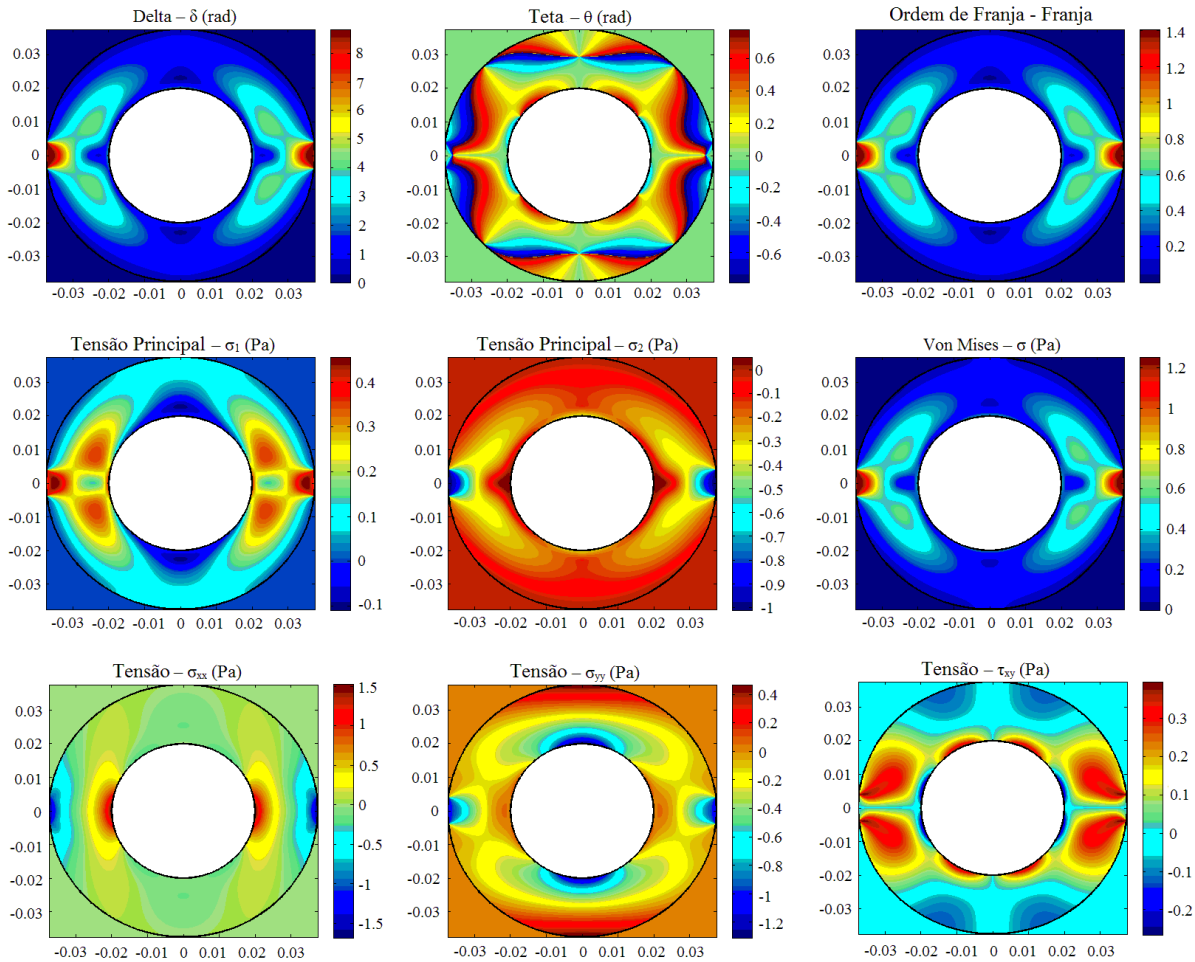
### 5.1 Resultados do teste numérico matemático

Todas as equações apresentadas nesta pesquisa passaram pelo teste numérico matemático. Para isso, foi criado um programa em Matlab<sup>®</sup>, onde cada equação foi testada cem mil vezes, e apresentaram acerto em 99,9% dos testes considerando-se uma precisão ( $\xi$ ) igual a  $10^{-6}$ . Alguns erros ocorrem em razão do valor do numerador e do denominador serem muito pequenos, gerando uma propagação do erro de arredondamento muito grande, maior que a precisão definida. Realizando-se 200 mil testes e uma precisão de  $10^{-6}$ , torna-se improvável, estatisticamente, que as equações estejam erradas.

### 5.2 Resultados do modelo teórico

O modelo matemático implementado em Matlab<sup>®</sup> gerou imagens que simulam os resultados obtidos com as fotografias nos experimentos fotoelásticos, todas as imagens geradas são mostradas na Figura 13. Nesse teste, foram calculados os valores de referência para  $\delta$  e  $\theta$  que foram comparados aos valores obtidos nos experimentos, obtendo-se o erro médio relativo. O valor  $\theta$  pode ser calculado diretamente das equações teóricas. Contudo, o valor teórico para  $\delta$  não pode ser calculado diretamente a partir das tensões principais sem o coeficiente de calibração  $F_{\sigma}$ .

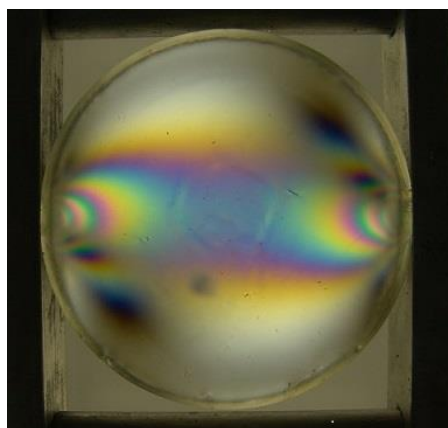
**Figura 13 – Imagens simuladas geradas em Matlab**



**Fonte: Dados da pesquisa.**

O coeficiente de calibração, não é apenas uma única constante é um parâmetro chave para ter uma conexão entre a diferença entre tensões principais e a diferença de fase ótica (LEI; YUN; KANG, 2009). O coeficiente de calibração só pode ser obtido através de experimentos fotoelásticos. O experimento consiste em submeter um disco à compressão diametral e medir a ordem de franja no centro do disco. Com o valor da ordem de franja no centro do disco, da espessura e do valor de tensão no centro do disco (calculado pela Teoria da Elasticidade) chegou-se a um valor de  $F_{\sigma} = 4,85 \text{ N/mm/franja}$ . Esse valor pode variar dependendo do tipo de resina utilizado e da proporção entre as resinas rígida e flexível, fatores ambientais como temperatura e iluminação do ambiente também podem influenciar nesse valor. Por isso, é aconselhável realizar o processo de calibração sempre antes de cada experimento. O disco utilizado para calcular o coeficiente de calibração é mostrado na Figura 14. O disco possui 15 mm de espessura, 77 mm de diâmetro e foi aplicada uma carga de 3 N.

**Figura 14 – Disco de calibração**



**Fonte: Dados da pesquisa.**

### **5.3 Resultados do procedimento experimental**

No teste experimental, o erro médio relativo entre os valores teóricos e experimentais foi calculado para as isoclínicas e para as isocromáticas, esses valores são mostrados nas Tabelas 1 e 2. Os valores de erro também foram plotados em função do número de imagens e do valor de step, conforme mostrado nas Figuras 15 e 16.

**Tabela 1 - Erro médio em porcentagem em função de step e do número de imagens N para o ângulo  $\theta$**

Erro Relativo de $\theta$ [%]	step											
	N	4	5	6	7	10	11	13	16	19	21	31
3	5,18	5,35	5,48	5,52	5,67	5,74	5,80	5,85	5,86	6,15	6,55	
4	4,17	4,55	4,63	4,66	5,18	5,22	5,40	5,68	5,76	6,09	6,56	
6			3,63	3,77	4,69	4,79	4,83	5,20	5,23	5,50	6,18	
7				3,51	4,40	4,57	4,76	4,95	5,18	5,20	6,00	
10					3,07	3,53	3,67	3,82	4,30	4,60	5,24	
11						3,01	3,62	3,80	3,95	4,32	5,11	
16								2,37	3,03	3,15	4,18	
19									1,87	2,20	3,63	
31											1,33	

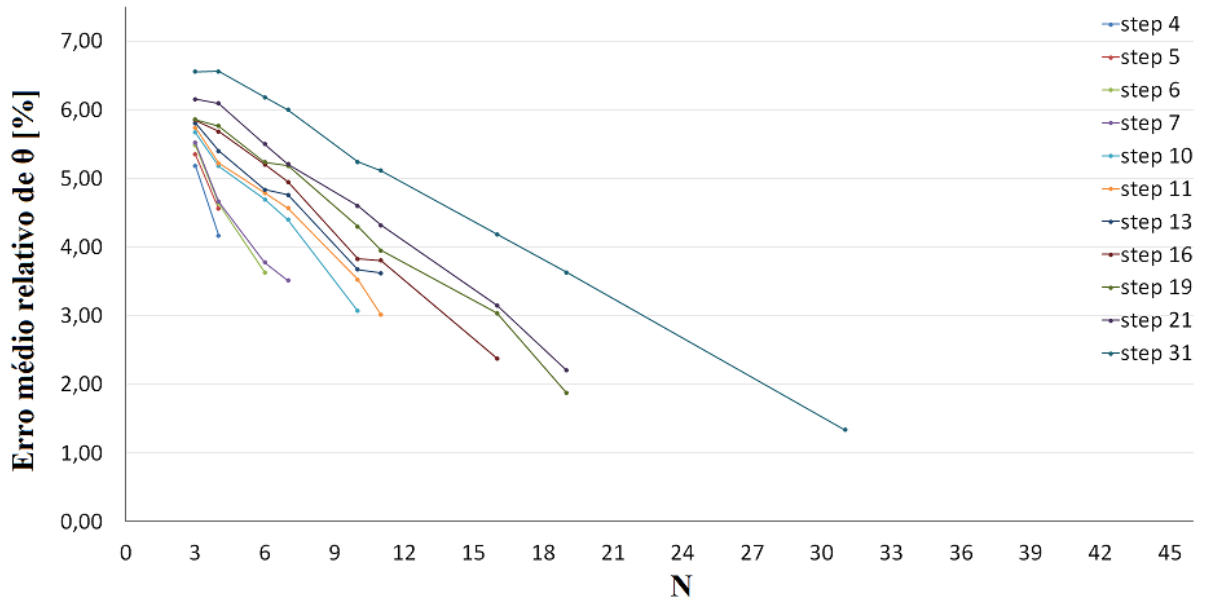
Fonte: Dados da pesquisa.

**Tabela 2 - Erro médio em porcentagem em função de step e do número de imagens N para o ângulo  $\delta$**

Erro Relativo de $\delta$ [%]	Step											
	N	4	5	6	7	10	11	13	16	19	21	31
3	5,46	5,54	5,56	5,63	5,69	5,99	6,01	6,08	6,18	6,46	6,87	
4	4,40	4,61	4,65	4,76	5,60	5,65	5,69	5,81	5,90	6,27	6,75	
6			3,99	4,06	4,67	5,02	5,22	5,33	5,35	5,62	6,37	
7				3,86	4,54	4,84	4,96	5,12	5,28	5,54	6,20	
10					3,54	3,63	3,83	4,10	4,40	4,54	5,68	
11						3,30	3,66	3,83	4,41	4,56	5,59	
16								2,57	3,15	3,16	4,63	
19									2,21	2,35	3,93	
31											1,80	

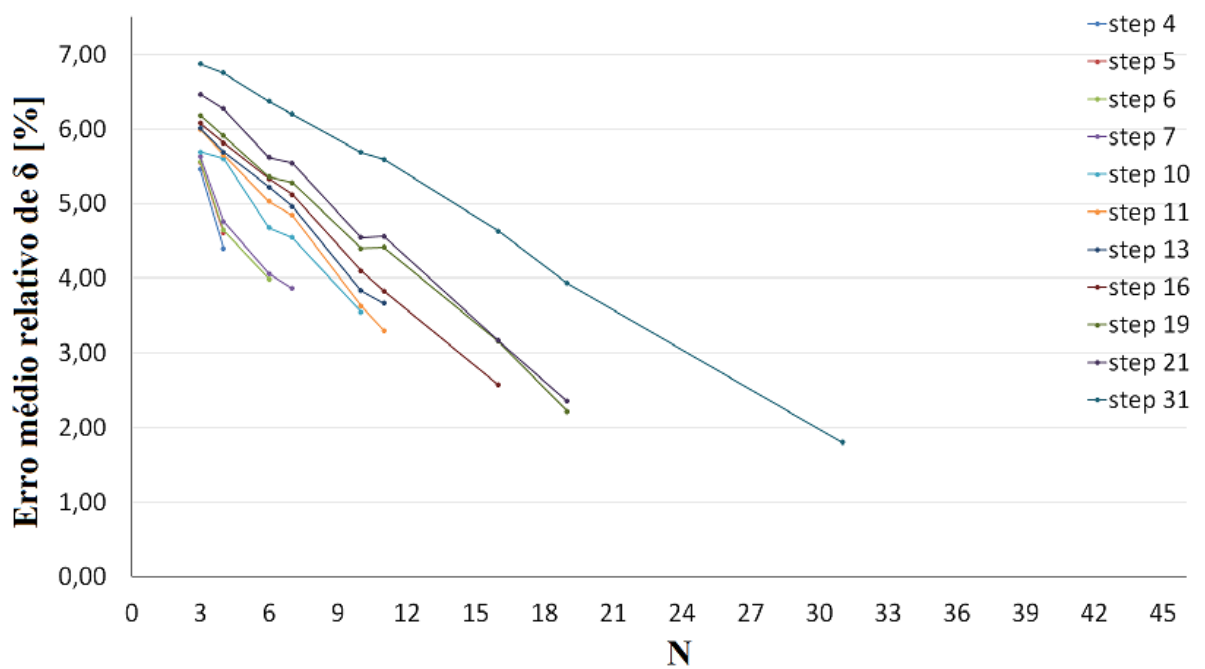
Fonte: Dados da pesquisa.

**Figura 15 – Gráfico do erro médio relativo obtido para o ângulo  $\theta$**



Fonte: Dados da pesquisa.

**Figura 16 – Gráfico do erro médio relativo obtido para o ângulo  $\delta$**



Fonte: Dados da pesquisa.

O primeiro resultado obtido foi dado pelo teste numérico, neste teste valores aleatórios eram escolhidos para  $\theta$  e  $\delta$  e utilizados para calcular I na Equação 34, então esses valores de I foram utilizados para calcular  $\theta$  e  $\delta$  com as equações numéricas. Esse procedimento de teste foi realizado cem mil vezes para cada equação e em praticamente cem por cento das vezes verificou-se uma diferença entre o valor aleatório e o valor calculado menor do que  $10^{-6}$ . Após analisar o motivo de alguns testes não atingirem a precisão requerida, percebeu-se que os erros ocorriam em razão do valor do numerador e do denominador serem muito pequenos, gerando uma propagação do erro de arredondamento muito grande. Esse tipo de erro não possui grande influência nas análises fotoelásticas, porque no processamento das imagens pode-se identificá-lo e eliminá-lo com facilidade. Com base neste resultado do teste numérico pode-se garantir que as equações numéricas podem calcular os parâmetros fotoelásticos  $\theta$  e  $\delta$  a partir dos valores de intensidade com precisão.

Para testar os resultados obtidos nos experimentos, o campo de tensões teórico foi calculado para um anel sob compressão diametral. As mesmas condições de aplicação de força e dimensões do anel utilizado nos experimentos foram consideradas. O valor do fator de calibração do material  $F_{\sigma}$  foi obtido a partir de um disco sob compressão diametral, esse valor foi considerado nos cálculos teóricos para obter o valor de  $\delta$  a partir dos dados de tensão. Usando as Equações (63) e (64) os valores teóricos foram comparados com os valores experimentais. O resultado dessas comparações é mostrado nas Tabelas 1 e 2.

Nas Equações (35) a (39), a variável step foi criada para que, sempre que fosse possível, as mesmas imagens fossem utilizadas nas análises, deste modo, o erro devido ao procedimento experimental de aquisição das fotografias foi diminuído. Nos testes experimentais, todas as fotografias necessárias para as análises foram retiradas de uma vez e o mais rápido possível, isso foi necessário porque as franjas formadas são muito sensíveis às condições ambientais onde o experimento é realizado, um total de 43 fotografias foram adquiridas para realizar as análises. Comparando os valores obtidos para  $\theta$  e  $\delta$  nos experimentos com os valores teóricos obteve-se as Tabelas 1 e 2, os valores de erro médio mostrados nessas tabelas foram plotados em função de N e step nos gráficos das Figuras 15 e 16. Observando os gráficos e também as tabelas pode-se perceber que existe uma tendência de diminuição do erro médio de medição de  $\theta$  e  $\delta$  à medida que mais imagens são utilizadas nas análises. Como cada imagem representa uma observação da amostra e uma medição de tensões no modelo, a tendência de diminuição dos erros médios com o aumento do número de fotografias pode ser explicada pela diminuição dos erros e ruídos aleatórios, pois as incertezas devidas a esses efeitos podem ser reduzidas pelo aumento do

número de observações. Essa é uma das vantagens da abordagem numérica para aquisição das equações de fase sobre a abordagem algébrica.

A abordagem numérica permite a realização das análises com qualquer número de imagens, assim, se utilizada em análises totalmente automatizadas que permitissem a aquisição de dezenas de imagens para análise com precisão de medida maior do que na medição manual essa abordagem seria mais adequada. A abordagem numérica também seria uma ótima opção para pesquisadores que possuem polariscópios com limitações de posicionamento dos elementos óticos, essas limitações algumas vezes impossibilitam o isolamento dos parâmetros  $\theta$  e  $\delta$  em função das intensidades, deste modo, com a abordagem numérica seria possível utilizar mesmo os polariscópios mais simples. A possibilidade de utilizar polariscópios mais simples e conseqüentemente mais baratos poderia incentivar as pesquisas na área de fotoelasticidade, porque não seria necessário investir muito na montagem de um laboratório onde as análises seriam realizadas.

Outra tendência facilmente observável nas tabelas 1 e 2 e nos gráficos das Figuras 15 e 16, é o aumento do erro médio para um mesmo número de imagens quando step aumenta, não se sabe a origem dessa tendência, mas acredita-se que valores maiores da variável step aumentam a semelhança entre as fotografias devido ao menor passo angular no analisador. Esse comportamento também leva a acreditar que existem arranjos óticos melhores do que outros, ou seja, alguns arranjos óticos podem resultar em erros menores nas análises fotoelásticas.

Observando as Tabelas 1 e 2, verifica-se um erro médio ligeiramente menor na medição do parâmetro  $\theta$  em comparação com a medição do parâmetro  $\delta$ , esse erro era esperado porque apesar das fotografias serem as mesmas os erros inseridos pelos elementos óticos afetam cada um dos parâmetros de maneira diferente. A ausência das placas de quarto de onda nos polariscópios planos permite que as isoclínicas escondam parte das franjas isocromáticas, esse seria um dos motivos que explicam a existência de um erro médio maior na avaliação do parâmetro isocromático  $\delta$ .

Nos experimentos existiram muitas fontes de erro, alguns desses erros foram controlados, mas outros não foram possíveis de controlar. As fontes de erro que foram possíveis controlar, ou minimizar a influência, foram a poeira presente nas lentes e a resolução fotográfica. As fontes de erro difíceis ou impossíveis de eliminar durante os experimentos foram os erros devidos ao ajuste manual da posição angular do analisador, o posicionamento da câmera, do modelo e da fonte de luz no mesmo plano geométrico, as fontes de luz que não são do polariscópio que aparecem como ruído nas imagens, as vibrações mecânicas, a poeira e partículas suspensas no ar, as variações de temperatura e a umidade do ar. Minimizando-se

essas fontes de erro provavelmente resultaria em erros médios menores nos resultados. Após várias buscas em referências bibliográficas não se conseguiu nem uma indicação de como determinar o quanto o erro diminui com o aumento do número de imagens, pela técnica fotoelástica depender de um grande número de variáveis talvez não seja possível fazer uma quantificação do erro de medição.

## 6 CONCLUSÃO

Os avanços no processamento de imagens digitais, na capacidade de processamento e armazenamento de dados possibilitam o emprego da fotoelasticidade por meio de tecnologias auxiliadas por computador, chegando em uma automatização do método. Deste modo, aumenta-se a importância e aplicabilidade comercial e industrial em várias áreas do conhecimento como na mecânica dos sólidos, engenharia civil, mecânica e mecatrônica, odontologia e medicina. Neste trabalho, foi feita uma tentativa de aprimorar a precisão da técnica criando uma nova metodologia para automatização que possibilita utilizar mais imagens nas análises experimentais.

Nesta pesquisa, foram deduzidas equações numéricas (todas as equações deduzidas encontram-se no Apêndice A) para o cálculo dos parâmetros isoclínico e isocromático através da técnica de deslocamento de fase da Fotoelasticidade Digital. Usando as equações numéricas é possível utilizar um número maior de imagens nas análises fotoelásticas e diminuir as incertezas no cálculo dos parâmetros fotoelásticos. O procedimento de aquisição de imagens também é simplificado porque a variação angular só precisa ser realizada no analisador.

Não foi possível estimar nem a porcentagem de diminuição no erro médio alcançado à medida em que se aumenta o número de imagens e nem o erro mínimo possível com essa abordagem do problema. Uma razão para isto foi a grande quantidade de variáveis que influenciam os testes da Técnica Fotoelástica.

As técnicas convencionais de deslocamento de fase na fotoelasticidade digital usam apenas configurações com grupo de quatro imagens até no máximo dez imagens, sendo dessa última configuração os melhores resultados apresentados até então. Porém, para chegar a estas configurações são necessários vários tipos de rotação de mais de um elemento ótico do polariscópio e até o uso do polariscópio circular, semicircular e plano na mesma técnica. As equações desenvolvidas neste estudo baseiam-se numa visão mais ampla, que considera ruídos nas imagens e podem usar um grande número de imagens para melhorar a precisão dos cálculos, fazendo o deslocamento de fase apenas com a rotação do analisador no polariscópio plano. A questão dessa abordagem é a melhoria dos cálculos obtidos com o aumento da quantidade de observações ou informações. A hipótese da existência de grande quantidade de ruídos nas imagens parece ser verdadeira. Os erros randômicos podem ser reduzidos com maior número de imagens, e os erros sistemáticos, só com a calibração.

A técnica de deslocamento de fase da Fotoelasticidade Digital encontra-se em desenvolvimento, sendo possível melhorar a sua precisão. Pelo que foi verificado durante os

testes, acredita-se que muitos avanços podem ser realizados no sentido de tornar essa técnica uma das mais importantes nas medições óticas de tensões.

A principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de novas equações numéricas para o cálculo de fase (Apêndice A) que permitem o uso de praticamente qualquer polariscópio plano nas análises fotoelásticas usando o deslocamento de fase. A abordagem numérica permite utilizar mais imagens nas análises, deste modo, a precisão e a exatidão dos resultados pode ser melhorada.

## REFERÊNCIAS

- AJOVALASIT, Augusto; PETRUCCI, Giovanni; SCAFIDI, Michele. Phase shifting photoelasticity in white light. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 45, 596-611, 2007.
- AJOVALASIT, Augusto; PETRUCCI, Giovanni; SCAFIDI, Michele. Review of RGB photoelasticity. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 68, 58-73, 2015.
- ASHOKAN, K.; RAMESH, K. A novel approach for ambiguity removal in isochromatic phasemap in digital photoelasticity. **Measurement Science and Technology**, v. 17, 2891-2896, 2006.
- ASUNDI, Anand. Recent advances in photoelastic applications. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FIBER OPTICS AND PHOTONICS: SELECTED PAPERS FROM PHOTONICS INDIA, 1996, Madras. **Proceedings of The International Society for Optical and Photonics**. SPIE, 1998.
- ASUNDI, Anand; TONG, Liu; BOAY, Chai Gin. Phase-shifting method with a normal polariscope. **Applied Optics**, v. 38, n. 28, 5931-5935, Oct. 1999.
- BAEK, Tae Hyun. et al. Separation of isochromatics and isoclinics from photoelastic fringes in a circular disk by phase measuring technique. **KSME International Journal**, v. 16, 175-181, 2002.
- CLOUD, Gary L. **Optical methods of engineering analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 503 p.
- DALLY, James W., RILEY, William F. **Experimental stress analysis**. 4. ed. Knoxville: College House Enterprises, 2005. 671 p.
- GASVIK, Kjell J. **Optical Metrology**. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 1995. 321 p.
- HUNG, K.-M.; MA, C.-C. Theoretical analysis and digital photoelastic measurement of circular disks subject to partially distributed compressions. **Society for Experimental Mechanics**. v. 43, n. 2, 216-224, 2003.
- LEI, Zhenkun; YUN, Hai; KANG, Yilan. Automatic evaluation of photoelastic fringe constant by the nonlinear least-squares method. **Optics & Laser Technology**, v. 41, 985-989, 2009.
- MAGALHÃES, Cristina Almeida. **Análise de novos métodos numéricos na técnica fotoelástica digital usando o deslocamento de fase**. 2011. 350 f. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Belo Horizonte, 2011.
- MAGALHÃES, Cristina Almeida; MAGALHÃES JÚNIOR, Pedro Américo Almeida. New numerical methods for the photoelastic technique with high accuracy. **Journal of Applied Physics**. v. 112, n. 083111, 2012.

MAGALHÃES JÚNIOR, et al. New equations for phase evaluation in measurements with an arbitrary but constant phase shift between captured intensity signs. **Optical Engineering**, v. 48, n. 11, 113602, 2009.

MAGALHÃES JÚNIOR, Pedro Américo; SMITH NETO, Perrin; BARCELLOS, Clóvis Sperb de. Generalization of Carré equation. **Optik**, v. 122, 475-489, 2011.

MAGALHÃES JÚNIOR, Pedro Américo; SMITH NETO, Perrin; BARCELLOS, Clóvis Sperb de. Phase shifting technique using generalization of Carre Algorithm with many images. **Optical Review**, v. 16, n. 4, 432-441, 2009.

MANGAL, S. K.; RAMESH, K. Determination of characteristic parameters in integrated photoelasticity by phase-shifting technique. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 31, 263-278, 1999.

PATTERSON, Eann A. Digital photoelasticity: principles, practice and potential. **Strain**, v. 38, 27-39, 2002.

PINIT, P.; UMEZAKI, E. Digitally whole-field analysis of isoclinic parameter in photoelasticity by four-step color phase-shifting technique. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 45, 795-807, 2007.

PLOUZENNEC, N.; LAGARDE, A. Two-wavelength method for full-field automated photoelasticity. **Experimental Mechanics**, v. 39, n. 4, 274-277, Dec. 1999.

QUINAN, Marco Antônio Dutra. **Uma metodologia para determinação do fator de intensidade de tensões causado por tensões térmicas utilizando a fotoelasticidade**. 2005. 126 f. Tese (Doutorado) – Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, 2005.

RAJU, B. S.; CHANDRA SEKHAR, U.; DRAKSHAYANI, D. N. Studies on application of rapid prototyping for the generation of photoelastic models & experimental analysis. **IJAIEEM – International Journal of Application or Innovation in Engineering & Management**. v. 2, n. 2, 209-215, 2013.

RAMESH, K. **Digital photoelasticity: advanced techniques and applications**. Berlin: Springer, 2000. 410 p.

RAMESH, K. et al. A simple approach to photoelastic calibration of glass using digital photoelasticity. **Journal of Non-Crystalline Solids**, v. 378, 7-14, 2013.

RAMESH, K.; MANGAL, S. K. Data acquisition techniques in digital photoelasticity: a review. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 30, 53-75, 1998.

RAMJI, M.; PRASATH, R. G. R. Sensitivity of isoclinic data using various phase shifting techniques in digital photoelasticity towards generalized error sources. **Optics and Lasers in Engineering**. v. 49, 1153-1167, 2011.

RAMJI, M.; RAMESH, K. Whole field evaluation of stress components in digital photoelasticity – issues, implementation and application. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 46, 257-271, 2008.

RIBEIRO, José Luiz Silva. **Fundamentação da técnica fotoelástica, com a construção de um equipamento básico – polariscópio modelo -**. 2001. 83 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Belo Horizonte, 2001.

SCARI, Alexandre da Silva. **Análise experimental de tensões utilizando fotoelasticidade digital tridimensional e prototipagem rápida com resina transparente aplicada em mancais de rolos cônicos**. 2016. 111 f. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Belo Horizonte, 2016.

TAMRAKAR, D. K.; RAMESH, K. Simulation of error in digital photoelasticity by Jones calculus. **Strain**, v. 37, n. 3, 105-112, 2001.

THEOCARIS, Pericles S.; GDOUTOS, Emmanuel E. **Matrix theory of photoelasticity**. Berlin: Springer, 1979. 352 p.

TOKOVYY, Yu. V.; HUNG, K.-M.; MA, C.-C. Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subject to diametral compression. **Journal of Mathematical Sciences**. v. 165, n. 3, 342-354, 2010.

ZHANG, Dongsheng. et al. Automatic determination of parameters in photoelasticity. **Optics and Lasers in Engineering**. v. 45, 860-867, 2007.



**APÊNDICE A – Tabelas com todas as equações deduzidas**

**Quadro A.1 – Equação para N = 3 e step = 3**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	0,50000	-1,00000	0,50000	1,00000	-0,25000
2	45	0,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	0,00000	0,50000
3	90	0,00000	0,50000	0,00000	-0,50000	0,50000	-0,25000

**Quadro A.2 – Equação para N = 3 e step = 4**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,57735	0,66667	-1,00000	0,19936	1,00000	-0,48803
2	30	0,00000	-1,00000	0,92265	1,00000	-0,57735	0,73205
3	60	0,00000	0,33333	0,07735	-0,33333	0,57735	-0,24402

**Quadro A.3 – Equação para N = 4 e step = 4**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	0,79904	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,68301
2	30	1,00000	-0,73205	0,82137	1,00000	1,00000	0,57735
3	60	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,69060	-1,00000	1,00000
4	90	0,50000	0,93301	-0,82137	0,26795	0,63397	-0,89434

**Quadro A.4 – Equação para N = 3 e step = 6**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,32492	0,72361	-1,00000	0,09481	0,94295	-0,72361
2	18	0,00000	-1,00000	0,90983	0,72654	-1,00000	1,00000
3	36	0,00000	0,27639	0,09017	-0,20081	0,61803	-0,27639

**Quadro A.5 – Equação para N = 4 e step = 6**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,74347	1,00000	-1,00000	0,09419	1,00000	-1,00000
2	18	-0,04432	-0,61803	0,25572	0,88503	0,34458	0,61803
3	36	0,04432	-1,00000	1,00000	0,01709	-1,00000	1,00000
4	54	-0,01693	0,61803	-0,25572	-0,13814	0,78704	-0,61803

**Quadro A.6 – Equação para N = 5 e step = 6**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,41816	1,00000	-0,96917
2	18	0,58568	-0,17082	-0,20820	0,77035	1,00000	0,13473
3	36	-0,46469	-1,00000	1,00000	0,60386	-0,23607	1,00000
4	54	0,05650	-0,82918	1,00000	-0,60081	-1,00000	0,83445

5	72	0,07478	1,00000	-0,79180	0,12277	1,00000	-1,00000
---	----	---------	---------	----------	---------	---------	----------

**Quadro A.7 – Equação para N = 6 e step = 6**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,27830	1,00000	0,11181
2	18	1,00000	0,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	36	0,43154	-1,00000	1,00000	1,00000	0,17082	1,00000
4	54	-0,64233	-1,00000	1,00000	0,27194	-1,00000	0,27173
5	72	-0,65893	0,00000	1,00000	-0,30527	0,34164	0,46399
6	90	0,77184	1,00000	-1,00000	-0,34285	1,00000	-0,84753

**Quadro A.8 – Equação para N = 3 e step = 7**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,26795	0,73205	-1,00000	0,09808	0,84530	-0,73205
2	15	0,00000	-1,00000	0,94338	0,57735	-1,00000	1,00000
3	30	0,00000	0,26795	0,05662	-0,15470	0,57735	-0,26795

**Quadro A.9 – Equação para N = 4 e step = 7**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,69106	1,00000	-1,00000	0,34715	1,00000	-1,00000
2	15	-0,31065	-0,57735	0,19245	-0,08932	0,08932	0,57735
3	30	0,31065	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
4	45	-0,11371	0,57735	-0,19245	-0,48803	0,82137	-0,57735

**Quadro A.10 – Equação para N = 5 e step = 7**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,63397	1,00000	-1,00000	0,06198	1,00000	-1,00000
2	15	1,00000	0,00000	-0,39230	1,00000	1,00000	0,00000
3	30	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,38621	-0,73205	1,00000
4	45	0,36603	-1,00000	1,00000	-0,25962	-0,73205	1,00000
5	60	0,00000	1,00000	-0,60770	-0,04497	1,00000	-1,00000

**Quadro A.11 – Equação para N = 6 e step = 7**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,44320	1,00000	-1,00000
2	15	0,80951	0,26795	-1,00000	0,71459	1,00000	0,30940
3	30	-0,05004	-1,00000	1,00000	0,72753	0,00000	1,00000
4	45	-0,69396	-1,00000	1,00000	0,23008	-1,00000	-0,46410
5	60	0,36403	-0,26795	1,00000	-0,07039	0,00000	1,00000
6	75	0,03456	1,00000	-1,00000	-0,31297	1,00000	-0,84530

**Quadro A.12 – Equação para N = 7 e step = 7**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,28381	1,00000	-1,00000
2	15	1,00000	0,50000	-1,00000	0,88288	1,00000	1,00000
3	30	0,89712	-1,00000	0,16987	0,49501	1,00000	-0,24166
4	45	-0,21893	-1,00000	1,00000	0,63522	-1,00000	0,57178
5	60	-0,91504	-1,00000	1,00000	0,48906	-1,00000	-0,41857
6	75	-0,53110	0,50000	0,83013	0,14223	1,00000	1,00000
7	90	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,91155

**Quadro A.13 – Equação para N = 3 e step = 10**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,17633	0,74223	-1,00000	0,07858	0,70842	-0,74223
2	10	0,00000	-1,00000	0,97771	0,36397	-1,00000	1,00000
3	20	0,00000	0,25777	0,02229	-0,09382	0,53209	-0,25777

**Quadro A.14 – Equação para N = 4 e step = 10**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,55622	1,00000	-1,00000	-0,07460	1,00000	-1,00000
2	10	-0,55355	-0,53209	0,11882	0,71448	-0,32483	0,53209
3	20	0,55355	-1,00000	1,00000	0,05041	-1,00000	1,00000
4	30	-0,19225	0,53209	-0,11882	-0,10977	0,87051	-0,53209

**Quadro A.15 – Equação para N = 5 e step = 10**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,71839	1,00000	-1,00000	-0,06564	1,00000	-1,00000
2	10	-0,36342	0,12061	-0,54174	0,73365	0,52733	-0,12061
3	20	0,41406	-1,00000	1,00000	0,41064	-1,00000	1,00000
4	30	-0,19443	-1,00000	1,00000	-0,09274	-0,60319	1,00000
5	40	0,02694	0,87939	-0,45826	-0,11369	1,00000	-0,87939

**Quadro A.16 – Equação para N = 6 e step = 10**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,71111	1,00000	-1,00000
2	10	-0,15678	0,57398	-1,00000	-0,49084	1,00000	-0,57398
3	20	0,00411	-1,00000	0,83239	1,00000	-0,44713	1,00000
4	30	-0,05096	-1,00000	1,00000	-0,04340	-1,00000	1,00000
5	40	0,22856	-0,57398	1,00000	0,68559	-0,17607	0,57398
6	50	-0,13198	1,00000	-0,83239	-0,63834	1,00000	-1,00000

**Quadro A.17 – Equação para N = 7 e step = 10**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,61721	1,00000	-1,00000
2	10	0,54883	1,00000	-1,00000	0,69463	1,00000	-1,00000
3	20	-0,13037	-1,00000	0,34333	-0,48308	0,71968	1,00000
4	30	-0,23036	-1,00000	1,00000	0,48517	-1,00000	1,00000
5	40	0,00849	-1,00000	1,00000	0,55106	-1,00000	1,00000
6	50	0,08555	0,00000	0,65667	0,28988	0,18297	0,00000
7	60	0,00345	1,00000	-1,00000	-0,64470	1,00000	-1,00000

**Quadro A.18 – Equação para N = 8 e step = 10**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,23941	1,00000	-1,00000
2	10	1,00000	1,00000	-1,00000	0,65627	1,00000	-0,01531
3	20	0,16073	-0,53209	-0,46138	0,48671	1,00000	0,63396
4	30	-0,35726	-1,00000	1,00000	0,50489	-0,60507	-0,47968
5	40	-0,15628	-1,00000	1,00000	0,26080	-1,00000	1,00000
6	50	-0,08873	-1,00000	1,00000	0,53090	-1,00000	1,00000
7	60	-0,02793	0,53209	0,46138	-0,13591	1,00000	-0,39059
8	70	0,20152	1,00000	-1,00000	-0,58925	1,00000	-0,74838

**Quadro A.19 – Equação para N = 9 e step = 10**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,52359	1,00000	0,21691
2	10	1,00000	1,00000	-1,00000	0,39562	1,00000	-0,98908
3	20	0,87366	-0,18479	-1,00000	0,56836	1,00000	-0,26853
4	30	0,14544	-1,00000	1,00000	0,62199	0,23396	-0,09884
5	40	-0,34516	-1,00000	1,00000	0,58761	-1,00000	1,00000
6	50	-0,55007	-1,00000	1,00000	0,41014	-1,00000	1,00000
7	60	-0,43597	-0,81521	1,00000	0,12431	-0,23396	0,50689
8	70	0,02925	1,00000	0,00000	-0,23431	1,00000	-0,36735
9	80	0,61643	1,00000	-1,00000	-0,62248	1,00000	-1,00000

**Quadro A.20 – Equação para N = 10 e step = 10**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,77517
2	10	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	20	1,00000	0,00000	-1,00000	0,51450	1,00000	1,00000
4	30	1,00000	-1,00000	1,00000	0,29974	1,00000	1,00000
5	40	0,15874	-1,00000	1,00000	0,47361	-0,21894	-1,00000
6	50	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,32347	-1,00000	1,00000

7	60	-0,70496	-1,00000	1,00000	-0,13135	-1,00000	1,00000
8	70	-0,87331	0,00000	1,00000	-0,06273	-0,19665	0,56243
9	80	0,43716	1,00000	-1,00000	-0,09101	1,00000	-1,00000
10	90	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,30861	1,00000	-0,78726

**Quadro A.21 – Equação para N = 3 e step = 11**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,15838	0,74373	-1,00000	0,07231	0,68412	-0,74373
2	9	0,00000	-1,00000	0,98227	0,32492	-1,00000	1,00000
3	18	0,00000	0,25627	0,01773	-0,08327	0,52573	-0,25627

**Quadro A.22 – Equação para N = 4 e step = 11**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,32848	1,00000	-1,00000	0,24892	1,00000	-1,00000
2	9	-0,01033	-0,52573	0,10653	-0,28491	-0,40344	0,52573
3	18	0,01033	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
4	27	-0,00356	0,52573	-0,10653	-0,42948	0,88064	-0,52573

**Quadro A.23 – Equação para N = 5 e step = 11**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,65701	1,00000	-1,00000	-0,17512	1,00000	-1,00000
2	9	-0,17013	0,13673	-0,55801	0,91924	0,40942	-0,13673
3	18	-0,18793	-1,00000	1,00000	0,24452	-1,00000	1,00000
4	27	0,42281	-1,00000	1,00000	-0,12872	-0,60541	1,00000
5	36	-0,18824	0,86327	-0,44199	-0,05590	1,00000	-0,86327

**Quadro A.24 – Equação para N = 6 e step = 11**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,23981	1,00000	-1,00000
2	9	-0,23934	0,61803	-1,00000	0,28703	1,00000	-0,61803
3	18	-0,22675	-1,00000	0,77286	0,48115	-0,65887	1,00000
4	27	0,20471	-1,00000	1,00000	0,31157	-1,00000	1,00000
5	36	0,27297	-0,61803	1,00000	0,15300	-0,11852	0,61803
6	45	-0,21798	1,00000	-0,77286	-0,34010	1,00000	-1,00000

**Quadro A.25 – Equação para N = 7 e step = 11**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,67921	1,00000	-1,00000
2	9	0,25444	1,00000	-1,00000	-0,49491	1,00000	-1,00000
3	18	-0,12984	-0,92116	0,21560	1,00000	0,46358	0,92116
4	27	-0,00401	-1,00000	1,00000	0,21700	-1,00000	1,00000

5	36	-0,03588	-1,00000	1,00000	0,93538	-1,00000	1,00000
6	45	0,02515	-0,07884	0,78440	-1,00000	0,22751	0,07884
7	54	0,01042	1,00000	-1,00000	0,07445	1,00000	-1,00000

**Quadro A.26 – Equação para N = 8 e step = 11**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,60385	1,00000	-1,00000
2	9	0,84613	1,00000	-1,00000	-0,38463	1,00000	-0,18154
3	18	-0,13528	-0,41722	-0,55423	0,88744	1,00000	-0,07460
4	27	-0,21820	-1,00000	1,00000	0,68397	-0,87244	0,85342
5	36	-0,09399	-1,00000	1,00000	0,48986	-1,00000	1,00000
6	45	-0,05885	-1,00000	1,00000	0,19812	-1,00000	0,49039
7	54	0,14731	0,41722	0,55423	-0,14139	1,00000	-0,77823
8	63	0,00336	1,00000	-1,00000	-0,49385	1,00000	-0,30943

**Quadro A.27 – Equação para N = 9 e step = 11**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,85846	1,00000	-1,00000
2	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,49153	1,00000	-1,00000
3	18	0,24223	0,02401	-0,70182	0,19877	1,00000	0,43986
4	27	0,34438	-1,00000	1,00000	0,06237	0,75216	1,00000
5	36	-0,03020	-1,00000	1,00000	0,91160	-1,00000	0,27751
6	45	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,16177	-1,00000	1,00000
7	54	0,04568	-1,00000	1,00000	0,18140	-1,00000	1,00000
8	63	0,06846	0,97599	-0,29818	-0,71916	1,00000	-0,71737
9	72	0,34008	1,00000	-1,00000	0,01382	1,00000	-1,00000

**Quadro A.28 – Equação para N = 10 e step = 11**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,58313	1,00000	-0,20937
3	18	0,99743	0,28408	-1,00000	0,64057	1,00000	-1,00000
4	27	0,16080	-1,00000	1,00000	0,56026	1,00000	1,00000
5	36	-0,07697	-1,00000	1,00000	-0,14513	-0,14935	1,00000
6	45	-0,12793	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
7	54	-0,67645	-1,00000	1,00000	-0,28338	-1,00000	0,22284
8	63	-0,50270	-0,28408	1,00000	-1,00000	-0,62981	0,98653
9	72	-0,07020	1,00000	-1,00000	0,32968	1,00000	-1,00000
10	81	0,86417	1,00000	-1,00000	0,04141	1,00000	-1,00000

**Quadro A.29 – Equação para N = 11 e step = 11**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,39055
2	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,20857	1,00000	0,24600
3	18	1,00000	0,50000	-1,00000	0,80408	1,00000	-1,00000
4	27	1,00000	-1,00000	0,00000	0,79615	1,00000	0,82069
5	36	1,00000	-1,00000	1,00000	0,35801	0,35517	-1,00000
6	45	-0,92131	-1,00000	1,00000	0,31145	-1,00000	1,00000
7	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,13981	-1,00000	1,00000
8	63	-0,91366	-1,00000	1,00000	0,56477	-1,00000	1,00000
9	72	-0,32816	0,50000	1,00000	-0,14869	0,69320	0,32387
10	81	0,47745	1,00000	-1,00000	-0,41994	1,00000	-1,00000
11	90	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,52111	1,00000	-1,00000

**Quadro A.30 – Equação para N = 3 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,10510	0,74724	-1,00000	0,05058	0,61627	-0,74724
2	6	0,00000	-1,00000	0,99244	0,21256	-1,00000	1,00000
3	12	0,00000	0,25276	0,00756	-0,05373	0,51117	-0,25276

**Quadro A.31 – Equação para N = 4 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,26712	1,00000	-1,00000	0,07905	1,00000	-1,00000
2	6	-0,16129	-0,51117	0,07158	0,03310	-0,62678	0,51117
3	12	0,16129	-1,00000	1,00000	0,49548	-1,00000	1,00000
4	18	-0,05456	0,51117	-0,07158	-0,22808	0,91369	-0,51117

**Quadro A.32 – Equação para N = 5 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,50400	1,00000	-1,00000	-0,03595	1,00000	-1,00000
2	6	-0,45958	0,17291	-0,59915	0,53350	0,07423	-0,17291
3	12	0,43286	-1,00000	1,00000	-0,08852	-1,00000	1,00000
4	18	-0,11970	-1,00000	1,00000	0,41426	-0,59859	1,00000
5	24	-0,01366	0,82709	-0,40085	-0,25122	1,00000	-0,82709

**Quadro A.33 – Equação para N = 6 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,88511	1,00000	-1,00000	-0,22978	1,00000	-1,00000
2	6	-0,86541	0,72023	-1,00000	1,00000	0,78495	-0,72023
3	12	0,58108	-1,00000	0,66676	-0,02459	-1,00000	1,00000
4	18	-0,18572	-1,00000	1,00000	-0,09150	-1,00000	1,00000

5	24	0,26795	-0,72023	1,00000	0,49415	-0,04670	0,72023
6	30	-0,16903	1,00000	-0,66676	-0,33150	1,00000	-1,00000

**Quadro A.34 – Equação para N = 7 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,12606	1,00000	-1,00000
2	6	-0,32749	1,00000	-1,00000	-0,02773	1,00000	-1,00000
3	12	-0,34716	-0,74724	-0,04619	1,00000	-0,31458	0,74724
4	18	0,39902	-1,00000	1,00000	-0,03734	-1,00000	1,00000
5	24	-0,23464	-1,00000	1,00000	0,17677	-1,00000	1,00000
6	30	0,53983	-0,25276	1,00000	0,08657	0,34631	0,25276
7	36	-0,33476	1,00000	-0,95381	-0,26121	1,00000	-1,00000

**Quadro A.35 – Equação para N = 8 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,18490	1,00000	-1,00000
2	6	-0,17567	1,00000	-1,00000	0,26812	1,00000	-1,00000
3	12	-0,02228	-0,17291	-0,64021	0,17133	0,60499	0,17291
4	18	0,09769	-1,00000	1,00000	0,64056	-1,00000	1,00000
5	24	0,04057	-1,00000	1,00000	0,17746	-1,00000	1,00000
6	30	0,09673	-1,00000	1,00000	0,43840	-1,00000	1,00000
7	36	-0,23314	0,17291	0,64021	-0,29646	0,78697	-0,17291
8	42	0,09650	1,00000	-1,00000	-0,24129	1,00000	-1,00000

**Quadro A.36 – Equação para N = 9 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,16953	1,00000	-1,00000
2	6	0,48787	1,00000	-1,00000	0,42524	1,00000	-1,00000
3	12	-0,27699	0,38197	-1,00000	0,26231	1,00000	-0,38197
4	18	-0,08022	-1,00000	0,80074	0,46681	-0,36220	1,00000
5	24	0,06999	-1,00000	1,00000	0,34553	-1,00000	1,00000
6	30	-0,27604	-1,00000	1,00000	0,24316	-1,00000	1,00000
7	36	0,09570	-1,00000	1,00000	0,12376	-0,82185	1,00000
8	42	0,45035	0,61803	0,19926	-0,08346	1,00000	-0,61803
9	48	-0,29508	1,00000	-1,00000	-0,33301	1,00000	-1,00000

**Quadro A.37 – Equação para N = 10 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,60295	1,00000	-1,00000
2	6	0,71261	1,00000	-1,00000	0,57397	1,00000	-1,00000
3	12	-0,16647	0,89314	-1,00000	0,54724	1,00000	-0,89314

4	18	0,27118	-1,00000	0,25742	-0,72183	0,69522	1,00000
5	24	-0,12027	-1,00000	1,00000	-0,43465	-1,00000	1,00000
6	30	-0,20568	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
7	36	-0,08670	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
8	42	-0,01678	-0,89314	1,00000	0,28941	-0,41089	0,89314
9	48	0,03758	1,00000	-0,25742	-0,22012	1,00000	-1,00000
10	54	0,09403	1,00000	-1,00000	-0,75263	1,00000	-1,00000

**Quadro A.38 – Equação para N = 11 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,58855	1,00000	-1,00000
2	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,45786	1,00000	-1,00000
3	12	0,13844	1,00000	-1,00000	0,23109	1,00000	-1,00000
4	18	0,21275	-0,66174	-0,25647	0,41062	1,00000	0,66174
5	24	-0,42627	-1,00000	1,00000	0,22061	-0,20290	1,00000
6	30	-0,16547	-1,00000	1,00000	0,38089	-1,00000	1,00000
7	36	-0,02421	-1,00000	1,00000	0,18616	-1,00000	1,00000
8	42	0,01293	-1,00000	1,00000	0,17563	-1,00000	1,00000
9	48	0,08331	-0,33826	1,00000	0,03481	-0,05744	0,33826
10	54	-0,19425	1,00000	-0,74353	-0,08942	1,00000	-1,00000
11	60	0,21116	1,00000	-1,00000	-0,38609	1,00000	-1,00000

**Quadro A.39 – Equação para N = 12 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,59265	1,00000	-1,00000
2	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,18752	1,00000	-1,00000
3	12	0,39083	1,00000	-1,00000	0,18402	1,00000	-0,91200
4	18	0,29697	-0,21861	-1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
5	24	0,28813	-1,00000	1,00000	0,36643	0,41017	1,00000
6	30	-0,38539	-1,00000	1,00000	0,20548	-1,00000	1,00000
7	36	-0,34086	-1,00000	1,00000	0,96156	-1,00000	0,27191
8	42	-0,24358	-1,00000	1,00000	-0,22045	-1,00000	1,00000
9	48	-0,05594	-1,00000	1,00000	-0,01270	-1,00000	-1,00000
10	54	0,27596	0,21861	1,00000	-0,16664	0,72520	1,00000
11	60	-0,62655	1,00000	-1,00000	-0,07750	1,00000	-0,35991
12	66	0,64647	1,00000	-1,00000	-0,33166	1,00000	-1,00000

**Quadro A.40 – Equação para N = 13 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,19078	1,00000	-1,00000
3	12	0,99927	1,00000	-1,00000	0,41569	1,00000	-0,73415

4	18	0,44330	0,19525	-1,00000	-0,08069	1,00000	0,25577
5	24	0,03890	-1,00000	0,64953	1,00000	1,00000	1,00000
6	30	-0,16095	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,29027	1,00000
7	36	-0,27911	-1,00000	1,00000	-0,43690	-1,00000	0,31254
8	42	-0,31820	-1,00000	1,00000	-0,00605	-1,00000	1,00000
9	48	-0,27619	-1,00000	1,00000	0,89912	-1,00000	1,00000
10	54	-0,26471	-1,00000	1,00000	-0,03549	-1,00000	-1,00000
11	60	-0,04366	0,80475	0,35047	-0,39021	1,00000	1,00000
12	66	0,17027	1,00000	-1,00000	-0,56143	1,00000	-0,83416
13	72	0,43414	1,00000	-1,00000	0,01521	1,00000	-1,00000

**Quadro A.41 – Equação para N = 14 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,19792	1,00000	-0,55294
2	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,42167	1,00000	-0,42393
3	12	1,00000	1,00000	-1,00000	0,50286	1,00000	-0,29815
4	18	1,00000	0,51117	-1,00000	0,59258	1,00000	-0,18110
5	24	0,41975	-1,00000	-0,48758	0,61336	1,00000	-0,07788
6	30	-0,27539	-1,00000	1,00000	0,66761	-0,24870	0,43653
7	36	-0,18525	-1,00000	1,00000	0,59421	-1,00000	1,00000
8	42	-0,36864	-1,00000	1,00000	0,47058	-1,00000	0,09447
9	48	-0,49046	-1,00000	1,00000	0,35577	-1,00000	1,00000
10	54	-0,54540	-1,00000	1,00000	0,20369	-1,00000	1,00000
11	60	0,14099	-0,51117	1,00000	-0,00032	0,48877	-1,00000
12	66	-0,23214	1,00000	0,48758	-0,20627	1,00000	-0,59810
13	72	-0,06879	1,00000	-1,00000	-0,38289	1,00000	0,48198
14	78	0,89558	1,00000	-1,00000	-0,60451	1,00000	-0,88088

**Quadro A.42 – Equação para N = 15 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,40749
2	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,70647	1,00000	-0,32334
3	12	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,09724	1,00000	-0,24217
4	18	1,00000	0,77616	-1,00000	0,20578	1,00000	-0,16753
5	24	1,00000	-1,00000	-0,90036	0,59402	1,00000	-0,10267
6	30	0,29595	-1,00000	1,00000	0,59146	1,00000	-0,05044
7	36	-0,12840	-1,00000	1,00000	0,63891	-1,00000	-0,03889
8	42	-0,03583	-1,00000	1,00000	0,43027	-1,00000	1,00000
9	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,49567	-1,00000	1,00000
10	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,43542	-1,00000	0,85090
11	60	-0,06871	-1,00000	1,00000	0,35249	-1,00000	-0,19803
12	66	-0,62507	0,22384	1,00000	0,24212	1,00000	0,06125

13	72	0,10363	1,00000	-0,09964	-0,32335	1,00000	0,61842
14	78	0,38515	1,00000	-1,00000	-0,59421	1,00000	-1,00000
15	84	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,85621	1,00000	-1,00000

**Quadro A.43 – Equação para N = 16 e step = 16**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,51605
2	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,61749
3	12	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,00437	1,00000	-0,24179
4	18	1,00000	1,00000	-1,00000	0,89338	1,00000	-0,08398
5	24	1,00000	-1,00000	-1,00000	0,85306	1,00000	0,05584
6	30	1,00000	-1,00000	1,00000	0,04464	1,00000	0,17156
7	36	1,00000	-1,00000	1,00000	0,71354	0,41421	0,25810
8	42	-0,26208	-1,00000	1,00000	0,48716	-1,00000	1,00000
9	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,06056	-1,00000	1,00000
10	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,00173	-1,00000	-1,00000
11	60	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,20733	-1,00000	1,00000
12	66	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,80986	1,00000
13	72	-0,78234	1,00000	1,00000	-0,05960	1,00000	0,77594
14	78	0,74904	1,00000	-1,00000	-0,25551	1,00000	-1,00000
15	84	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,46743	1,00000	-1,00000
16	90	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,66593	1,00000	-0,80214

**Quadro A.44 – Equação para N = 3 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,08749	0,74809	-1,00000	0,04262	0,59520	-0,74809
2	5	0,00000	-1,00000	0,99481	0,17633	-1,00000	1,00000
3	10	0,00000	0,25191	0,00519	-0,04442	0,50771	-0,25191

**Quadro A.45 – Equação para N = 4 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,21073	1,00000	-1,00000	0,25612	1,00000	-1,00000
2	5	-0,10217	-0,50771	0,06017	-0,54545	-0,69642	0,50771
3	10	0,10217	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
4	15	-0,03440	0,50771	-0,06017	-0,38829	0,92590	-0,50771

**Quadro A.46 – Equação para N = 5 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,40139	1,00000	-1,00000	0,20952	1,00000	-1,00000
2	5	-0,50602	0,18135	-0,61115	-0,11349	-0,03084	-0,18135
3	10	0,81793	-1,00000	1,00000	0,17212	-1,00000	1,00000

4	15	-0,58733	-1,00000	1,00000	0,59621	-0,59082	1,00000
5	20	0,15836	0,81865	-0,38885	-0,37842	1,00000	-0,81865

**Quadro A.47 – Equação para N = 6 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,77735	1,00000	-1,00000	0,40897	1,00000	-1,00000
2	5	-0,93648	0,74478	-1,00000	-0,55470	0,63992	-0,74478
3	10	0,81356	-1,00000	0,64963	0,75888	-1,00000	1,00000
4	15	-0,30006	-1,00000	1,00000	-0,02447	-1,00000	1,00000
5	20	0,16227	-0,74478	1,00000	0,58062	-0,05468	0,74478
6	25	-0,09126	1,00000	-0,64963	-0,47563	1,00000	-1,00000

**Quadro A.48 – Equação para N = 7 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,63950	1,00000	-1,00000	-0,29310	1,00000	-1,00000
2	5	-0,18627	1,00000	-1,00000	0,35486	1,00000	-1,00000
3	10	-0,07538	-0,70713	-0,09463	1,00000	-0,56678	0,70713
4	15	0,40978	-1,00000	1,00000	0,37441	-1,00000	1,00000
5	20	0,02319	-1,00000	1,00000	-0,23781	-1,00000	1,00000
6	25	-0,47483	-0,29287	1,00000	-0,55734	0,38766	0,29287
7	30	0,23333	1,00000	-0,90537	0,27774	1,00000	-1,00000

**Quadro A.49 – Equação para N = 8 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,04333	1,00000	-1,00000
2	5	-0,41833	1,00000	-1,00000	0,14083	1,00000	-1,00000
3	10	-0,02093	-0,11820	-0,71472	1,00000	0,29951	0,11820
4	15	0,18599	-1,00000	1,00000	0,14759	-1,00000	1,00000
5	20	0,11981	-1,00000	1,00000	-0,16828	-1,00000	1,00000
6	25	-0,45191	-1,00000	1,00000	0,14598	-1,00000	1,00000
7	30	0,59342	0,11820	0,71472	0,38147	0,80027	-0,11820
8	35	-0,27450	1,00000	-1,00000	-0,43425	1,00000	-1,00000

**Quadro A.50 – Equação para N = 9 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,12065	1,00000	-1,00000
2	5	-0,04117	1,00000	-1,00000	-0,33120	1,00000	-1,00000
3	10	-0,16864	0,45908	-1,00000	0,88663	1,00000	-0,45908
4	15	0,25021	-1,00000	0,65681	1,00000	-0,83970	1,00000
5	20	0,01759	-1,00000	1,00000	0,00629	-1,00000	1,00000
6	25	-0,07847	-1,00000	1,00000	0,06648	-1,00000	1,00000

7	30	-0,31634	-1,00000	1,00000	-0,16142	-0,70608	1,00000
8	35	0,46655	0,54092	0,34319	-0,04195	1,00000	-0,54092
9	40	-0,17864	1,00000	-1,00000	-0,12019	1,00000	-1,00000

**Quadro A.51 – Equação para N = 10 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,45145	1,00000	-1,00000
2	5	0,44424	1,00000	-1,00000	0,86267	1,00000	-1,00000
3	10	-0,18140	1,00000	-1,00000	0,61257	1,00000	-1,00000
4	15	-0,01298	-0,97295	0,08501	0,57225	0,17541	0,97295
5	20	-0,05465	-1,00000	1,00000	0,28348	-1,00000	1,00000
6	25	0,00584	-1,00000	1,00000	0,07814	-1,00000	1,00000
7	30	0,06284	-1,00000	1,00000	-0,11552	-1,00000	1,00000
8	35	-0,07927	-1,00000	1,00000	-0,32677	-0,33343	1,00000
9	40	0,02997	0,97295	-0,08501	0,52108	1,00000	-0,97295
10	45	0,01260	1,00000	-1,00000	-0,37878	1,00000	-1,00000

**Quadro A.52 – Equação para N = 11 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,65755	1,00000	-1,00000
2	5	0,56957	1,00000	-1,00000	-0,42466	1,00000	-1,00000
3	10	-0,09525	1,00000	-1,00000	0,78213	1,00000	-1,00000
4	15	0,46238	-0,47135	-0,52665	0,31103	1,00000	0,47135
5	20	-0,38496	-1,00000	1,00000	0,24381	-0,89797	1,00000
6	25	-0,13848	-1,00000	1,00000	0,23626	-1,00000	1,00000
7	30	-0,06112	-1,00000	1,00000	0,33097	-1,00000	1,00000
8	35	0,03379	-1,00000	1,00000	0,30199	-1,00000	1,00000
9	40	0,24246	-0,52865	1,00000	0,25675	0,15078	0,52865
10	45	-0,39225	1,00000	-0,47335	-0,35027	1,00000	-1,00000
11	50	0,23422	1,00000	-1,00000	-0,38333	1,00000	-1,00000

**Quadro A.53 – Equação para N = 12 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	5	0,33228	1,00000	-1,00000	0,33876	1,00000	-1,00000
3	10	0,05855	1,00000	-1,00000	-0,08371	1,00000	-1,00000
4	15	0,33778	0,01809	-1,00000	-0,23737	1,00000	-0,01809
5	20	0,49536	-1,00000	0,92699	0,47082	0,19820	1,00000
6	25	0,41688	-1,00000	1,00000	0,10038	-1,00000	1,00000
7	30	0,36493	-1,00000	1,00000	0,59889	-1,00000	1,00000
8	35	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,39877	-1,00000	1,00000
9	40	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,54942	-1,00000	1,00000

10	45	0,09907	-0,01809	1,00000	0,08363	0,48900	0,01809
11	50	0,03632	1,00000	-0,92699	-0,24697	1,00000	-1,00000
12	55	0,62706	1,00000	-1,00000	-0,68846	1,00000	-1,00000

**Quadro A.54 – Equação para N = 13 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,17912	1,00000	-1,00000
2	5	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	10	0,31783	1,00000	-1,00000	0,62784	1,00000	-1,00000
4	15	0,19559	0,49599	-1,00000	0,04379	1,00000	-0,49599
5	20	-0,04398	-1,00000	0,43730	-0,00207	1,00000	1,00000
6	25	-0,10889	-1,00000	1,00000	-0,03959	-0,65270	1,00000
7	30	-0,08546	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
8	35	-0,00672	-1,00000	1,00000	0,19389	-1,00000	1,00000
9	40	0,04600	-1,00000	1,00000	0,03317	-1,00000	1,00000
10	45	-0,60990	-1,00000	1,00000	-0,00413	-1,00000	1,00000
11	50	0,35995	0,50401	0,56270	0,12391	0,83910	-0,50401
12	55	-0,51519	1,00000	-1,00000	-0,23851	1,00000	-1,00000
13	60	0,58441	1,00000	-1,00000	-0,34700	1,00000	-1,00000

**Quadro A.55 – Equação para N = 14 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,30924	1,00000	-1,00000
2	5	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	10	0,59983	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	15	0,09192	0,94723	-1,00000	0,58808	1,00000	-0,94723
5	20	1,00000	-1,00000	0,05019	0,58570	1,00000	1,00000
6	25	-0,23561	-1,00000	1,00000	0,62049	0,56247	1,00000
7	30	-0,54637	-1,00000	1,00000	-0,00864	-1,00000	1,00000
8	35	-0,30510	-1,00000	1,00000	-0,49957	-1,00000	1,00000
9	40	-0,22365	-1,00000	1,00000	0,47789	-1,00000	1,00000
10	45	-0,07472	-1,00000	1,00000	-0,81800	-1,00000	1,00000
11	50	-0,18806	-0,94723	1,00000	0,16229	-0,88400	0,94723
12	55	-0,10034	1,00000	-0,05019	0,15248	1,00000	-1,00000
13	60	0,23461	1,00000	-1,00000	0,22720	1,00000	-1,00000
14	65	0,31863	1,00000	-1,00000	-0,29995	1,00000	-1,00000

**Quadro A.56 – Equação para N = 15 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,99646	1,00000	-1,00000
2	5	1,00000	1,00000	-1,00000	0,52683	1,00000	-0,93215
3	10	0,79963	1,00000	-1,00000	0,04131	1,00000	-0,41482

4	15	0,47337	1,00000	-1,00000	0,04318	1,00000	-0,12762
5	20	0,10630	-0,66684	-0,72754	0,82162	1,00000	0,11398
6	25	0,29290	-1,00000	1,00000	0,39789	1,00000	0,30263
7	30	0,28581	-1,00000	1,00000	0,37473	-1,00000	1,00000
8	35	-0,45200	-1,00000	1,00000	0,27744	-1,00000	1,00000
9	40	0,25185	-1,00000	1,00000	0,24793	-1,00000	-0,07525
10	45	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,13459	-1,00000	1,00000
11	50	0,19314	-1,00000	1,00000	0,40572	-1,00000	1,00000
12	55	-1,00000	-0,33316	1,00000	0,05570	0,08085	1,00000
13	60	0,03193	1,00000	-0,27246	-0,24946	1,00000	-1,00000
14	65	0,20714	1,00000	-1,00000	-0,29642	1,00000	-0,86676
15	70	0,80247	1,00000	-1,00000	-0,42456	1,00000	-1,00000

**Quadro A.57 – Equação para N = 16 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,46720	1,00000	-0,57735
2	5	1,00000	1,00000	-1,00000	0,94351	1,00000	-0,48276
3	10	1,00000	1,00000	-1,00000	0,00646	1,00000	-0,38388
4	15	0,73013	1,00000	-1,00000	0,48177	1,00000	-0,28371
5	20	0,41811	-0,29452	-1,00000	0,47953	1,00000	-0,18529
6	25	0,38330	-1,00000	0,42882	0,48361	1,00000	-0,09161
7	30	-0,38058	-1,00000	1,00000	0,46242	-0,40456	-0,00552
8	35	0,51023	-1,00000	1,00000	0,43721	-1,00000	1,00000
9	40	-0,47510	-1,00000	1,00000	0,39466	-1,00000	0,68523
10	45	-0,53140	-1,00000	1,00000	0,36318	-1,00000	1,00000
11	50	-0,54452	-1,00000	1,00000	0,26488	-1,00000	1,00000
12	55	-0,47834	-1,00000	1,00000	0,15143	-1,00000	1,00000
13	60	-0,21360	0,29452	1,00000	0,02594	1,00000	-1,00000
14	65	0,02834	1,00000	-0,42882	-0,08268	1,00000	0,27770
15	70	0,23245	1,00000	-1,00000	-0,61761	1,00000	-0,95283
16	75	0,81181	1,00000	-1,00000	-0,48169	1,00000	-1,00000

**Quadro A.58 – Equação para N = 17 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,86882	1,00000	-1,00000
2	5	1,00000	1,00000	-1,00000	0,47805	1,00000	-0,30551
3	10	1,00000	1,00000	-1,00000	0,48278	1,00000	-0,22542
4	15	1,00000	1,00000	-1,00000	0,49264	1,00000	-0,14881
5	20	0,99361	0,04742	-1,00000	0,45610	1,00000	-0,07803
6	25	0,30981	-1,00000	0,00000	0,41858	1,00000	-0,01521
7	30	0,03605	-1,00000	1,00000	0,29210	0,68836	0,03774
8	35	-0,17767	-1,00000	1,00000	0,68324	-1,00000	0,07920

9	40	-0,32378	-1,00000	1,00000	0,40658	-1,00000	1,00000
10	45	-0,39855	-1,00000	1,00000	0,33457	-1,00000	1,00000
11	50	-0,39943	-1,00000	1,00000	0,30728	-1,00000	1,00000
12	55	-0,21213	-1,00000	1,00000	0,14854	-1,00000	1,00000
13	60	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,14542	-0,48785	0,35008
14	65	-0,19620	0,95258	1,00000	-0,25288	1,00000	-0,55814
15	70	-0,01504	1,00000	-1,00000	-0,21759	1,00000	-1,00000
16	75	0,49038	1,00000	-1,00000	-0,36572	1,00000	-0,13592
17	80	0,97936	1,00000	-1,00000	-0,47468	1,00000	-1,00000

**Quadro A.59 – Equação para N = 18 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,27978	1,00000	-0,41379
2	5	1,00000	1,00000	-1,00000	0,16997	1,00000	-0,31911
3	10	1,00000	1,00000	-1,00000	0,71779	1,00000	-0,22747
4	15	1,00000	1,00000	-1,00000	0,68205	1,00000	-0,14166
5	20	1,00000	0,29019	-1,00000	0,58147	1,00000	-0,06428
6	25	1,00000	-1,00000	-1,00000	0,61343	1,00000	0,00231
7	30	0,35336	-1,00000	1,00000	0,70822	1,00000	0,05610
8	35	0,01431	-1,00000	1,00000	0,73661	-0,86565	0,09545
9	40	-0,21953	-1,00000	1,00000	0,55846	-1,00000	0,11916
10	45	-0,38662	-1,00000	1,00000	0,43602	-1,00000	0,29240
11	50	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,27851	-1,00000	1,00000
12	55	-0,55670	-1,00000	1,00000	0,47667	-1,00000	0,28834
13	60	-0,72697	-1,00000	1,00000	-0,00547	-1,00000	1,00000
14	65	-0,07655	-0,29019	1,00000	-0,20874	0,83520	1,00000
15	70	-0,98045	1,00000	1,00000	-0,13706	1,00000	-0,16837
16	75	0,44998	1,00000	-1,00000	-0,24970	1,00000	-1,00000
17	80	0,83791	1,00000	-1,00000	-0,52978	1,00000	-1,00000
18	85	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,55851	1,00000	-0,51908

**Quadro A.60 – Equação para N = 19 e step = 19**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,52536
2	5	1,00000	1,00000	-1,00000	0,42238	1,00000	-0,38753
3	10	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,28249
4	15	1,00000	1,00000	-1,00000	0,59741	1,00000	-0,18115
5	20	1,00000	0,50000	-1,00000	0,53593	1,00000	-0,08659
6	25	1,00000	-1,00000	-1,00000	0,29537	1,00000	-0,00168
7	30	1,00000	-1,00000	1,00000	0,24510	1,00000	0,07099
8	35	0,77713	-1,00000	1,00000	0,70338	0,68422	0,12923
9	40	0,33051	-1,00000	1,00000	0,44838	-1,00000	0,17125

10	45	-0,83879	-1,00000	1,00000	0,35379	-1,00000	0,19579
11	50	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,28256	-1,00000	1,00000
12	55	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,39167	-1,00000	1,00000
13	60	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,13343	-1,00000	1,00000
14	65	-0,87630	-1,00000	1,00000	0,12438	-1,00000	1,00000
15	70	-0,72789	0,50000	1,00000	0,02427	0,92134	0,22565
16	75	-0,10311	1,00000	0,00000	-0,07958	1,00000	-1,00000
17	80	0,87747	1,00000	-1,00000	-0,16759	1,00000	-1,00000
18	85	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,26115	1,00000	-1,00000
19	90	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,32811

**Quadro A.61 – Equação para N = 3 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,05241	0,74931	-1,00000	0,02596	0,55516	-0,74931
2	3	0,00000	-1,00000	0,99816	0,10510	-1,00000	1,00000
3	6	0,00000	0,25069	0,00184	-0,02635	0,50275	-0,25069

**Quadro A.62 – Equação para N = 4 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,00998	1,00000	-1,00000	0,08519	1,00000	-1,00000
2	3	0,28433	-0,50275	0,03704	-0,13465	-0,82732	0,50275
3	6	-0,28433	-1,00000	1,00000	0,42407	-1,00000	1,00000
4	9	0,09513	0,50275	-0,03704	-0,17427	0,95267	-0,50275

**Quadro A.63 – Equação para N = 5 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,01943	1,00000	-1,00000	-0,17741	1,00000	-1,00000
2	3	0,45886	0,19337	-0,63376	0,44050	-0,23015	-0,19337
3	6	-0,48454	-1,00000	1,00000	0,36388	-1,00000	1,00000
4	9	0,18778	-1,00000	1,00000	-0,47332	-0,56556	1,00000
5	12	-0,01291	0,80663	-0,36624	0,14807	1,00000	-0,80663

**Quadro A.64 – Equação para N = 6 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,58581	1,00000	-1,00000	0,09295	1,00000	-1,00000
2	3	-0,66588	0,78021	-1,00000	0,06561	0,36574	-0,78021
3	6	-0,10626	-1,00000	0,61777	0,10721	-1,00000	1,00000
4	9	1,00000	-1,00000	1,00000	0,09582	-1,00000	1,00000
5	12	-0,67720	-0,78021	1,00000	0,35064	-0,05237	0,78021
6	15	0,11624	1,00000	-0,61777	-0,28144	1,00000	-1,00000

**Quadro A.65 – Equação para N = 7 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,21587	1,00000	-1,00000	0,17362	1,00000	-1,00000
2	3	0,23380	1,00000	-1,00000	0,08942	0,96558	-1,00000
3	6	0,33761	-0,65029	-0,17185	-0,06158	-1,00000	0,65029
4	9	-0,99188	-1,00000	1,00000	0,05158	-1,00000	1,00000
5	12	0,37754	-1,00000	1,00000	0,32486	-1,00000	1,00000
6	15	0,41076	-0,34971	1,00000	0,55820	0,46990	0,34971
7	18	-0,25020	1,00000	-0,82815	-0,54737	1,00000	-1,00000

**Quadro A.66 – Equação para N = 8 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,44314	1,00000	-1,00000
2	3	-0,82908	1,00000	-1,00000	0,41235	1,00000	-1,00000
3	6	-0,11196	-0,04162	-0,83997	1,00000	-0,27348	0,04162
4	9	-0,03886	-1,00000	1,00000	-0,01078	-1,00000	1,00000
5	12	0,40435	-1,00000	1,00000	0,13774	-1,00000	1,00000
6	15	0,63092	-1,00000	1,00000	-0,40986	-1,00000	1,00000
7	18	-0,77408	0,04162	0,83997	-0,00289	0,84887	-0,04162
8	21	0,14499	1,00000	-1,00000	0,07775	1,00000	-1,00000

**Quadro A.67 – Equação para N = 9 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,23574	1,00000	-1,00000
2	3	-0,54213	1,00000	-1,00000	0,53545	1,00000	-1,00000
3	6	-0,01589	0,56530	-1,00000	0,04537	0,41280	-0,56530
4	9	0,31451	-1,00000	0,49502	0,31946	-1,00000	1,00000
5	12	-0,84119	-1,00000	1,00000	0,61424	-1,00000	1,00000
6	15	0,20294	-1,00000	1,00000	-0,21915	-1,00000	1,00000
7	18	0,44993	-1,00000	1,00000	0,02631	-0,65819	1,00000
8	21	0,61632	0,43470	0,50498	-0,04500	1,00000	-0,43470
9	24	-0,63703	1,00000	-1,00000	-0,11113	1,00000	-1,00000

**Quadro A.68 – Equação para N = 10 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,49013	1,00000	-1,00000
2	3	-0,86631	1,00000	-1,00000	0,52299	1,00000	-1,00000
3	6	0,33793	1,00000	-1,00000	0,47333	1,00000	-1,00000
4	9	0,45971	-0,81128	-0,17777	0,77752	-0,88834	0,81128
5	12	0,08051	-1,00000	1,00000	-0,25619	-1,00000	1,00000
6	15	-0,23258	-1,00000	1,00000	0,32351	-1,00000	1,00000

7	18	-0,12044	-1,00000	1,00000	0,11236	-1,00000	1,00000
8	21	0,00772	-1,00000	1,00000	-0,10160	-0,14282	1,00000
9	24	-0,12797	0,81128	0,17777	-0,39472	1,00000	-0,81128
10	27	0,15143	1,00000	-1,00000	0,15231	1,00000	-1,00000

**Quadro A.69 – Equação para N = 11 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,07456	1,00000	-1,00000
2	3	-0,58546	1,00000	-1,00000	-0,05396	1,00000	-1,00000
3	6	0,62307	1,00000	-1,00000	0,57934	1,00000	-1,00000
4	9	-0,06067	-0,21137	-0,82032	0,13935	-0,08887	0,21137
5	12	-0,17067	-1,00000	1,00000	0,32898	-1,00000	1,00000
6	15	-0,08570	-1,00000	1,00000	0,17930	-1,00000	1,00000
7	18	-0,02291	-1,00000	1,00000	0,08403	-1,00000	1,00000
8	21	0,13163	-1,00000	1,00000	0,37468	-1,00000	1,00000
9	24	0,31370	-0,78863	1,00000	0,03230	0,27401	0,78863
10	27	-0,49316	1,00000	-0,17968	-0,11308	1,00000	-1,00000
11	30	0,17772	1,00000	-1,00000	-0,29601	1,00000	-1,00000

**Quadro A.70 – Equação para N = 12 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,38734	1,00000	-1,00000
2	3	0,20591	1,00000	-1,00000	0,30766	1,00000	-1,00000
3	6	-0,27427	1,00000	-1,00000	0,38875	1,00000	-1,00000
4	9	-0,52095	0,33434	-1,00000	0,51641	0,70393	-0,33434
5	12	0,95797	-1,00000	0,47185	0,73929	-1,00000	1,00000
6	15	-0,19608	-1,00000	1,00000	0,46918	-1,00000	1,00000
7	18	-0,13193	-1,00000	1,00000	-0,26798	-1,00000	1,00000
8	21	-0,26009	-1,00000	1,00000	0,03453	-1,00000	1,00000
9	24	-0,22377	-1,00000	1,00000	0,24154	-1,00000	1,00000
10	27	0,68318	-0,33434	1,00000	-0,43764	0,73825	0,33434
11	30	-0,12125	1,00000	-0,47185	-0,09081	1,00000	-1,00000
12	33	-0,13677	1,00000	-1,00000	0,04377	1,00000	-1,00000

**Quadro A.71 – Equação para N = 13 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,19430	1,00000	-1,00000
2	3	0,96672	1,00000	-1,00000	0,18249	1,00000	-1,00000
3	6	-0,56000	1,00000	-1,00000	0,49457	1,00000	-1,00000
4	9	-0,34311	0,88731	-1,00000	0,86378	1,00000	-0,88731
5	12	-0,15163	-1,00000	-0,19998	-0,46496	-0,43063	1,00000
6	15	-0,19914	-1,00000	1,00000	0,48267	-1,00000	1,00000

7	18	0,09271	-1,00000	1,00000	0,46182	-1,00000	1,00000
8	21	0,13690	-1,00000	1,00000	0,33846	-1,00000	1,00000
9	24	0,09571	-1,00000	1,00000	0,32577	-1,00000	1,00000
10	27	0,27833	-1,00000	1,00000	0,00813	-0,83666	1,00000
11	30	0,43567	0,11269	1,00000	-0,31669	1,00000	-0,11269
12	33	-0,51949	1,00000	-0,80002	-0,65431	1,00000	-1,00000
13	36	-0,06568	1,00000	-1,00000	0,26294	1,00000	-1,00000

**Quadro A.72 – Equação para N = 14 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,05157	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,30766	1,00000	-1,00000
3	6	0,14531	1,00000	-1,00000	0,20657	1,00000	-1,00000
4	9	-0,64548	1,00000	-1,00000	0,13162	1,00000	-1,00000
5	12	-0,49936	-0,52397	-0,81337	0,46443	0,40689	0,52397
6	15	-0,18209	-1,00000	1,00000	0,68655	-1,00000	1,00000
7	18	0,02590	-1,00000	1,00000	0,11975	-1,00000	1,00000
8	21	0,14626	-1,00000	1,00000	-0,02157	-1,00000	1,00000
9	24	0,14723	-1,00000	1,00000	0,28382	-1,00000	1,00000
10	27	0,24609	-1,00000	1,00000	0,21850	-1,00000	1,00000
11	30	0,33711	-1,00000	1,00000	0,18761	-0,37023	1,00000
12	33	0,42442	0,52397	0,81337	-0,08762	1,00000	-0,52397
13	36	-0,99360	1,00000	-1,00000	-0,17631	1,00000	-1,00000
14	39	0,20712	1,00000	-1,00000	-0,33592	1,00000	-1,00000

**Quadro A.73 – Equação para N = 15 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,77208	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,35492	1,00000	-1,00000
3	6	0,32172	1,00000	-1,00000	-0,50834	1,00000	-1,00000
4	9	-0,49624	1,00000	-1,00000	0,09294	1,00000	-1,00000
5	12	-0,33473	0,06064	-1,00000	0,02364	1,00000	-0,06064
6	15	-0,20358	-1,00000	0,57615	0,25677	-0,69929	1,00000
7	18	-0,10452	-1,00000	1,00000	0,41788	-1,00000	1,00000
8	21	0,07899	-1,00000	1,00000	0,27653	-1,00000	1,00000
9	24	0,15590	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
10	27	0,17602	-1,00000	1,00000	0,26861	-1,00000	1,00000
11	30	0,07538	-1,00000	1,00000	0,15538	-1,00000	1,00000
12	33	-0,09954	-1,00000	1,00000	0,02911	0,07972	1,00000
13	36	0,41762	0,93936	0,42385	-0,11384	1,00000	-0,93936
14	39	-0,42522	1,00000	-1,00000	-0,27184	1,00000	-1,00000
15	42	0,01466	1,00000	-1,00000	-0,47488	1,00000	-1,00000

**Quadro A.74 – Equação para N = 16 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,79520	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,03078	1,00000	-1,00000
3	6	0,16629	1,00000	-1,00000	-0,02035	1,00000	-1,00000
4	9	0,06403	1,00000	-1,00000	0,09486	1,00000	-1,00000
5	12	0,22047	0,57181	-1,00000	-0,06957	1,00000	-0,57181
6	15	-1,00000	-1,00000	-0,02618	0,48458	0,25710	1,00000
7	18	0,38768	-1,00000	1,00000	0,45442	-1,00000	1,00000
8	21	0,47567	-1,00000	1,00000	0,49887	-1,00000	1,00000
9	24	-0,89622	-1,00000	1,00000	-0,08337	-1,00000	1,00000
10	27	-0,33256	-1,00000	1,00000	0,86499	-1,00000	1,00000
11	30	0,52033	-1,00000	1,00000	0,16742	-1,00000	1,00000
12	33	-0,19726	-1,00000	1,00000	-0,02196	-1,00000	1,00000
13	36	0,41790	-0,57181	1,00000	0,14847	0,48287	0,57181
14	39	0,29344	1,00000	0,02618	-0,00541	1,00000	-1,00000
15	42	0,09818	1,00000	-1,00000	-0,31821	1,00000	-1,00000
16	45	-0,41218	1,00000	-1,00000	-0,49121	1,00000	-1,00000

**Quadro A.75 – Equação para N = 17 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,64469	1,00000	-1,00000
2	3	0,63384	1,00000	-1,00000	0,26496	1,00000	-1,00000
3	6	0,47871	1,00000	-1,00000	0,08765	1,00000	-1,00000
4	9	0,27571	1,00000	-1,00000	0,06854	1,00000	-1,00000
5	12	0,14969	1,00000	-1,00000	0,30645	1,00000	-1,00000
6	15	0,03956	-0,91858	-0,62507	0,16438	1,00000	0,91858
7	18	-0,05322	-1,00000	1,00000	0,31760	-0,75792	1,00000
8	21	-0,12736	-1,00000	1,00000	0,33131	-1,00000	1,00000
9	24	-0,18307	-1,00000	1,00000	0,33519	-1,00000	1,00000
10	27	-0,21954	-1,00000	1,00000	0,28960	-1,00000	1,00000
11	30	-0,30643	-1,00000	1,00000	0,28079	-1,00000	1,00000
12	33	0,16369	-1,00000	1,00000	0,29778	-1,00000	1,00000
13	36	-0,30781	-1,00000	1,00000	0,60249	-1,00000	1,00000
14	39	0,47630	-0,08142	1,00000	-0,21905	0,89984	0,08142
15	42	0,01932	1,00000	-0,37493	-0,18666	1,00000	-1,00000
16	45	0,01744	1,00000	-1,00000	-0,31688	1,00000	-1,00000
17	48	0,00459	1,00000	-1,00000	-0,45912	1,00000	-1,00000

**Quadro A.76 – Equação para N = 18 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,34831	1,00000	-1,00000
2	3	0,93350	1,00000	-1,00000	0,37195	1,00000	-1,00000
3	6	0,79028	1,00000	-1,00000	0,24662	1,00000	-1,00000
4	9	-0,12968	1,00000	-1,00000	0,39477	1,00000	-1,00000
5	12	-0,68435	1,00000	-1,00000	0,25042	1,00000	-1,00000
6	15	0,15920	-0,38357	-1,00000	0,30714	1,00000	0,38357
7	18	0,28943	-1,00000	0,80378	0,19306	0,23864	1,00000
8	21	0,38613	-1,00000	1,00000	0,49577	-1,00000	1,00000
9	24	0,44817	-1,00000	1,00000	0,29250	-1,00000	1,00000
10	27	-0,61553	-1,00000	1,00000	0,31301	-1,00000	1,00000
11	30	0,41604	-1,00000	1,00000	0,25481	-1,00000	1,00000
12	33	0,35013	-1,00000	1,00000	0,20012	-1,00000	1,00000
13	36	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,13370	-1,00000	1,00000
14	39	-0,43743	-1,00000	1,00000	0,05630	-0,69901	1,00000
15	42	-0,32222	0,38357	1,00000	-0,02987	1,00000	-0,38357
16	45	-0,25197	1,00000	-0,80378	-0,13594	1,00000	-1,00000
17	48	0,65369	1,00000	-1,00000	-0,24270	1,00000	-1,00000
18	51	0,34192	1,00000	-1,00000	-0,35757	1,00000	-1,00000

**Quadro A.77 – Equação para N = 19 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,54395	1,00000	-1,00000
2	3	0,77948	1,00000	-1,00000	0,25516	1,00000	-1,00000
3	6	0,60655	1,00000	-1,00000	0,29662	1,00000	-1,00000
4	9	0,39879	1,00000	-1,00000	0,32919	1,00000	-1,00000
5	12	0,28057	1,00000	-1,00000	0,38944	1,00000	-1,00000
6	15	0,17443	0,14025	-1,00000	0,14275	1,00000	-0,14025
7	18	0,08136	-1,00000	0,25873	0,34676	1,00000	1,00000
8	21	0,00248	-1,00000	1,00000	0,33654	-0,73994	1,00000
9	24	-0,06130	-1,00000	1,00000	0,31405	-1,00000	1,00000
10	27	-0,10864	-1,00000	1,00000	0,29408	-1,00000	1,00000
11	30	-0,45499	-1,00000	1,00000	0,44498	-1,00000	1,00000
12	33	-0,08054	-1,00000	1,00000	0,41420	-1,00000	1,00000
13	36	-0,14395	-1,00000	1,00000	0,58761	-1,00000	1,00000
14	39	-0,31757	-1,00000	1,00000	-0,66067	-1,00000	1,00000
15	42	-0,49750	-1,00000	1,00000	0,02120	-0,28521	1,00000
16	45	0,75160	0,85975	0,74127	-0,06129	1,00000	-0,85975
17	48	-0,01711	1,00000	-1,00000	-0,15063	1,00000	-1,00000
18	51	0,06749	1,00000	-1,00000	-0,28464	1,00000	-1,00000
19	54	0,16943	1,00000	-1,00000	-0,19330	1,00000	-1,00000

**Quadro A.78 – Equação para N = 20 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,82767	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	3	0,94417	1,00000	-1,00000	0,25888	1,00000	-1,00000
3	6	0,85464	1,00000	-1,00000	0,20175	1,00000	-1,00000
4	9	0,40671	1,00000	-1,00000	0,13801	1,00000	-1,00000
5	12	0,31095	1,00000	-1,00000	-0,09284	1,00000	-1,00000
6	15	0,22558	0,60991	-1,00000	0,74443	1,00000	-0,60991
7	18	0,15176	-1,00000	-0,23157	0,39431	1,00000	1,00000
8	21	0,08936	-1,00000	1,00000	0,14889	0,34025	1,00000
9	24	0,04149	-1,00000	1,00000	0,07649	-1,00000	1,00000
10	27	-0,66285	-1,00000	1,00000	-0,01975	-1,00000	1,00000
11	30	-0,03679	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
12	33	-0,04784	-1,00000	1,00000	0,63047	-1,00000	1,00000
13	36	0,64289	-1,00000	1,00000	0,10041	-1,00000	1,00000
14	39	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,03551	-1,00000	1,00000
15	42	-0,35947	-1,00000	1,00000	-0,03166	-1,00000	1,00000
16	45	-0,14980	-0,60991	1,00000	-0,10402	0,07454	0,60991
17	48	-0,10521	1,00000	0,23157	-0,12776	1,00000	-1,00000
18	51	0,20735	1,00000	-1,00000	-0,16300	1,00000	-1,00000
19	54	0,21572	1,00000	-1,00000	-0,27322	1,00000	-1,00000
20	57	0,39553	1,00000	-1,00000	-0,26908	1,00000	-1,00000

**Quadro A.79 – Equação para N = 21 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	3	0,89134	1,00000	-1,00000	-0,44664	1,00000	-1,00000
3	6	0,66762	1,00000	-1,00000	0,83933	1,00000	-1,00000
4	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,33841	1,00000	-1,00000
5	12	0,29317	1,00000	-1,00000	0,27863	1,00000	-1,00000
6	15	0,13357	1,00000	-1,00000	0,35219	1,00000	-1,00000
7	18	0,02578	-0,93691	-0,70990	0,32590	1,00000	0,93691
8	21	0,01591	-1,00000	1,00000	0,44258	1,00000	1,00000
9	24	-0,05133	-1,00000	1,00000	0,38846	-0,55245	1,00000
10	27	-0,09873	-1,00000	1,00000	0,36067	-1,00000	1,00000
11	30	-0,12574	-1,00000	1,00000	0,65992	-1,00000	1,00000
12	33	-0,13181	-1,00000	1,00000	0,37037	-1,00000	1,00000
13	36	-0,11697	-1,00000	1,00000	0,28948	-1,00000	1,00000
14	39	-0,08090	-1,00000	1,00000	-0,18811	-1,00000	1,00000
15	42	-0,21852	-1,00000	1,00000	-0,51147	-1,00000	1,00000
16	45	0,04489	-1,00000	1,00000	-0,14216	-1,00000	1,00000
17	48	-0,84537	-0,06309	1,00000	0,00430	0,43134	0,06309

18	51	-0,03967	1,00000	-0,29010	-0,06314	1,00000	-1,00000
19	54	0,12034	1,00000	-1,00000	-0,06881	1,00000	-1,00000
20	57	0,30391	1,00000	-1,00000	-0,10913	1,00000	-1,00000
21	60	0,51358	1,00000	-1,00000	-0,16152	1,00000	-1,00000

**Quadro A.80 – Equação para N = 22 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,30738	1,00000	-1,00000
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,53260	1,00000	-1,00000
4	9	0,53140	1,00000	-1,00000	0,19231	1,00000	-1,00000
5	12	0,40419	1,00000	-1,00000	0,38202	1,00000	-1,00000
6	15	0,28605	1,00000	-1,00000	0,34935	1,00000	-1,00000
7	18	0,17795	-0,46811	-1,00000	0,41823	1,00000	0,46811
8	21	0,08016	-1,00000	0,82301	0,34309	1,00000	1,00000
9	24	-0,19786	-1,00000	1,00000	0,30747	0,57954	1,00000
10	27	0,08894	-1,00000	1,00000	0,26473	-1,00000	1,00000
11	30	0,04341	-1,00000	1,00000	0,24939	-1,00000	1,00000
12	33	0,00095	-1,00000	1,00000	0,18591	-1,00000	1,00000
13	36	-0,02449	-1,00000	1,00000	0,15340	-1,00000	1,00000
14	39	-0,40205	-1,00000	1,00000	0,09418	-1,00000	1,00000
15	42	-0,16625	-1,00000	1,00000	0,43994	-1,00000	1,00000
16	45	-0,21575	-1,00000	1,00000	-0,11096	-1,00000	1,00000
17	48	-0,71446	-1,00000	1,00000	-0,05257	-1,00000	1,00000
18	51	-0,42961	0,46811	1,00000	-0,05614	0,76819	-0,46811
19	54	0,11218	1,00000	-0,82301	-0,08137	1,00000	-1,00000
20	57	0,10663	1,00000	-1,00000	-0,16319	1,00000	-1,00000
21	60	0,35092	1,00000	-1,00000	-0,21731	1,00000	-1,00000
22	63	0,63624	1,00000	-1,00000	-0,24693	1,00000	-1,00000

**Quadro A.81 – Equação para N = 23 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,30583	1,00000	-1,00000
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,39025	1,00000	-1,00000
4	9	0,76073	1,00000	-1,00000	0,45638	1,00000	-1,00000
5	12	1,00000	1,00000	-1,00000	0,37504	1,00000	-1,00000
6	15	0,26055	1,00000	-1,00000	0,31520	1,00000	-1,00000
7	18	1,00000	-0,01457	-1,00000	0,48878	1,00000	0,01457
8	21	-0,00830	-1,00000	0,42354	0,48961	1,00000	1,00000
9	24	-0,98262	-1,00000	1,00000	0,50247	1,00000	1,00000
10	27	-0,47982	-1,00000	1,00000	0,49543	-0,24257	1,00000

11	30	-0,18446	-1,00000	1,00000	0,45071	-1,00000	1,00000
12	33	-0,40987	-1,00000	1,00000	0,38155	-1,00000	1,00000
13	36	0,00561	-1,00000	1,00000	-0,37766	-1,00000	1,00000
14	39	0,12480	-1,00000	1,00000	-0,07374	-1,00000	1,00000
15	42	-0,22249	-1,00000	1,00000	-0,02632	-1,00000	1,00000
16	45	-0,20674	-1,00000	1,00000	-0,01425	-1,00000	1,00000
17	48	-0,10045	-1,00000	1,00000	0,08842	-1,00000	1,00000
18	51	-0,11016	-0,98543	1,00000	-0,20736	-0,93747	0,98543
19	54	-0,04779	1,00000	0,57646	-0,13397	1,00000	-1,00000
20	57	0,03203	1,00000	-1,00000	-0,04008	1,00000	-1,00000
21	60	0,11038	1,00000	-1,00000	-0,06286	1,00000	-1,00000
22	63	0,21237	1,00000	-1,00000	-0,08533	1,00000	-1,00000
23	66	0,32683	1,00000	-1,00000	-0,10603	1,00000	-1,00000

**Quadro A.82 – Equação para N = 24 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,29482	1,00000	-1,00000
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,64080	1,00000	-1,00000
4	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,58311	1,00000	-1,00000
5	12	0,96689	1,00000	-1,00000	0,57013	1,00000	-1,00000
6	15	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,01978	1,00000	-1,00000
7	18	0,23361	0,37505	-1,00000	0,61213	1,00000	-0,37505
8	21	-0,00243	-1,00000	0,05822	1,00000	1,00000	1,00000
9	24	0,02484	-1,00000	1,00000	-0,08561	1,00000	1,00000
10	27	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,53951	0,88182	1,00000
11	30	0,07127	-1,00000	1,00000	0,15568	-1,00000	1,00000
12	33	-0,61634	-1,00000	1,00000	0,43393	-1,00000	1,00000
13	36	-0,27040	-1,00000	1,00000	0,07024	-1,00000	1,00000
14	39	-0,05236	-1,00000	1,00000	0,01354	-1,00000	1,00000
15	42	-0,17794	-1,00000	1,00000	-0,06710	-1,00000	1,00000
16	45	-0,18818	-1,00000	1,00000	-0,14483	-1,00000	1,00000
17	48	-0,10094	-1,00000	1,00000	-0,11550	-1,00000	1,00000
18	51	0,01073	-1,00000	1,00000	-0,16875	-1,00000	1,00000
19	54	-0,05206	-0,37505	1,00000	-0,07879	-0,59572	0,37505
20	57	-0,06292	1,00000	-0,05822	-0,06826	1,00000	-1,00000
21	60	-0,08693	1,00000	-1,00000	-0,05000	1,00000	-1,00000
22	63	0,21946	1,00000	-1,00000	-0,15049	1,00000	-1,00000
23	66	0,21719	1,00000	-1,00000	-0,02330	1,00000	-1,00000
24	69	0,37095	1,00000	-1,00000	0,02016	1,00000	-1,00000

**Quadro A.83 – Equação para N = 25 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,76726	1,00000	-1,00000
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,22771	1,00000	-1,00000
4	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,38239	1,00000	-1,00000
5	12	0,87330	1,00000	-1,00000	0,13770	1,00000	-1,00000
6	15	1,00000	1,00000	-1,00000	0,31609	1,00000	0,56196
7	18	0,46888	0,75617	-1,00000	0,39450	1,00000	-0,29233
8	21	0,06738	-1,00000	-1,00000	0,89484	1,00000	1,00000
9	24	-0,18783	-1,00000	1,00000	0,19485	1,00000	0,39918
10	27	0,56863	-1,00000	1,00000	0,75321	0,95255	0,55677
11	30	-0,08592	-1,00000	1,00000	0,36229	-1,00000	0,68300
12	33	-0,60123	-1,00000	1,00000	0,31111	-1,00000	0,77629
13	36	-0,62054	-1,00000	1,00000	0,27002	-1,00000	0,83562
14	39	-0,17138	-1,00000	1,00000	0,22047	-1,00000	0,86034
15	42	-0,27816	-1,00000	1,00000	0,16822	-1,00000	0,85018
16	45	-0,34695	-1,00000	1,00000	0,11486	-1,00000	0,80524
17	48	-0,27918	-1,00000	1,00000	0,08680	-1,00000	1,00000
18	51	-0,25093	-1,00000	1,00000	0,01945	-1,00000	1,00000
19	54	-0,17871	-1,00000	1,00000	-0,03499	-1,00000	-1,00000
20	57	-0,15152	0,24383	1,00000	-0,04516	0,71483	-1,00000
21	60	-0,10282	1,00000	0,00000	-0,12467	1,00000	0,09397
22	63	0,07863	1,00000	-1,00000	-0,17280	1,00000	0,86978
23	66	0,11401	1,00000	-1,00000	-0,20854	1,00000	-1,00000
24	69	0,43185	1,00000	-1,00000	-0,24676	1,00000	-1,00000
25	72	0,63029	1,00000	-1,00000	-0,29029	1,00000	-1,00000

**Quadro A.84 – Equação para N = 26 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,08799	1,00000	-1,00000
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,01685	1,00000	-1,00000
4	9	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
5	12	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
6	15	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
7	18	1,00000	1,00000	-1,00000	0,64732	1,00000	-0,35286
8	21	-0,36721	-0,86900	-1,00000	0,44083	1,00000	-1,00000
9	24	0,22704	-1,00000	0,65557	0,50313	1,00000	1,00000
10	27	0,10585	-1,00000	1,00000	0,40373	1,00000	1,00000
11	30	0,06995	-1,00000	1,00000	0,27299	0,18726	1,00000
12	33	0,03840	-1,00000	1,00000	0,12575	-1,00000	0,82817

13	36	0,01148	-1,00000	1,00000	-0,14680	-1,00000	0,84607
14	39	-0,60338	-1,00000	1,00000	-0,25185	-1,00000	0,86125
15	42	-0,08690	-1,00000	1,00000	-0,47083	-1,00000	0,83977
16	45	-0,09186	-1,00000	1,00000	-0,64566	-1,00000	0,78185
17	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,68813
18	51	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
19	54	-0,26264	-1,00000	1,00000	0,44804	-1,00000	1,00000
20	57	-0,15730	-1,00000	1,00000	-0,19710	-1,00000	-1,00000
21	60	-0,06887	0,86900	1,00000	-0,14793	1,00000	-1,00000
22	63	0,11450	1,00000	-0,65557	-0,25210	1,00000	1,00000
23	66	-0,06193	1,00000	-1,00000	-0,22861	1,00000	-1,00000
24	69	0,17828	1,00000	-1,00000	-0,22167	1,00000	-1,00000
25	72	0,81557	1,00000	-1,00000	-0,22246	1,00000	-1,00000
26	75	0,63559	1,00000	-1,00000	-0,27436	1,00000	-0,49238

**Quadro A.85 – Equação para N = 27 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,07495	1,00000	-1,00000
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,47413	1,00000	-1,00000
4	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,27448	1,00000	-0,36975
5	12	1,00000	1,00000	-1,00000	0,51746	1,00000	0,04660
6	15	0,78713	1,00000	-1,00000	0,26209	1,00000	0,16237
7	18	0,59333	1,00000	-1,00000	0,49609	1,00000	0,26257
8	21	0,30348	-0,53634	-1,00000	0,53693	1,00000	0,34612
9	24	0,33069	-1,00000	-0,88210	0,50487	1,00000	0,41210
10	27	0,33908	-1,00000	1,00000	0,52594	1,00000	0,45978
11	30	1,00000	-1,00000	1,00000	0,55332	-0,28240	0,48863
12	33	1,00000	-1,00000	1,00000	0,54646	-1,00000	0,49836
13	36	-0,34953	-1,00000	1,00000	0,51215	-1,00000	0,48883
14	39	-0,63473	-1,00000	1,00000	0,49217	-1,00000	0,46018
15	42	-0,74658	-1,00000	1,00000	0,44479	-1,00000	0,41269
16	45	-0,70937	-1,00000	1,00000	0,39250	-1,00000	0,34690
17	48	-0,85057	-1,00000	1,00000	0,33086	-1,00000	0,26353
18	51	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,26131	-1,00000	0,16349
19	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,18233	-1,00000	-1,00000
20	57	-0,61438	-1,00000	1,00000	0,09593	-1,00000	1,00000
21	60	-0,39913	-0,46366	1,00000	0,00330	1,00000	1,00000
22	63	1,00000	1,00000	1,00000	-0,09322	1,00000	-0,73964
23	66	0,13338	1,00000	-0,11790	-0,19658	1,00000	1,00000
24	69	0,07121	1,00000	-1,00000	-0,30171	1,00000	-1,00000
25	72	0,46958	1,00000	-1,00000	-0,40883	1,00000	0,29724

26	75	0,58223	1,00000	-1,00000	-0,52012	1,00000	-1,00000
27	78	0,71552	1,00000	-1,00000	-0,62889	1,00000	-1,00000

**Quadro A.86 – Equação para N = 28 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,38594	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	0,53490	1,00000	-1,00000
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,92332	1,00000	-1,00000
4	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,33149	1,00000	-0,26513
5	12	1,00000	1,00000	-1,00000	0,79619	1,00000	-0,36638
6	15	1,00000	1,00000	-1,00000	0,30882	1,00000	-0,55577
7	18	1,00000	1,00000	-1,00000	0,04107	1,00000	-0,72707
8	21	1,00000	-0,22802	-1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
9	24	0,60196	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
10	27	0,54004	-1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
11	30	0,44790	-1,00000	1,00000	-0,00461	1,00000	0,73878
12	33	0,42149	-1,00000	1,00000	0,22787	-0,73958	0,46681
13	36	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,26545	-1,00000	0,48092
14	39	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,34999	-1,00000	0,47945
15	42	-0,20342	-1,00000	1,00000	0,40615	-1,00000	0,46243
16	45	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,22896	-1,00000	0,43004
17	48	-0,42127	-1,00000	1,00000	0,25720	-1,00000	0,38263
18	51	-0,56892	-1,00000	1,00000	0,19261	-1,00000	0,32073
19	54	-0,44683	-1,00000	1,00000	0,15221	-1,00000	0,24501
20	57	-0,54991	-1,00000	1,00000	0,12904	-1,00000	-1,00000
21	60	-0,34537	-1,00000	1,00000	0,04853	-0,91393	1,00000
22	63	-0,21822	0,22802	1,00000	0,05165	1,00000	1,00000
23	66	-0,10694	1,00000	1,00000	-0,44003	1,00000	-1,00000
24	69	0,20552	1,00000	-1,00000	-0,18572	1,00000	1,00000
25	72	0,53106	1,00000	-1,00000	-0,23646	1,00000	-1,00000
26	75	0,61888	1,00000	-1,00000	-0,28571	1,00000	-1,00000
27	78	0,52642	1,00000	-1,00000	-0,33197	1,00000	-0,09245
28	81	0,56267	1,00000	-1,00000	-0,38004	1,00000	-1,00000

**Quadro A.87 – Equação para N = 29 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,52348	1,00000	-0,50488
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,95779
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,89656	1,00000	-1,00000
5	12	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,09942	1,00000	1,00000
6	15	1,00000	1,00000	-1,00000	0,09286	1,00000	0,43281

7	18	0,88850	1,00000	-1,00000	0,27414	1,00000	-0,00823
8	21	0,81261	0,06152	-1,00000	0,45946	1,00000	0,07308
9	24	0,86533	-1,00000	-1,00000	0,25668	1,00000	0,14237
10	27	0,55971	-1,00000	0,00000	0,38025	1,00000	0,19885
11	30	0,44517	-1,00000	1,00000	0,42768	1,00000	0,24193
12	33	0,34245	-1,00000	1,00000	0,46644	-0,33001	0,27113
13	36	0,25242	-1,00000	1,00000	0,60056	-1,00000	0,28613
14	39	0,17575	-1,00000	1,00000	0,57089	-1,00000	0,28676
15	42	0,11681	-1,00000	1,00000	0,40558	-1,00000	0,27301
16	45	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,70870	-1,00000	0,24505
17	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,67018	-1,00000	0,20316
18	51	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,60378	-1,00000	0,14783
19	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,02036	-1,00000	0,07964
20	57	-0,98044	-1,00000	1,00000	0,14571	-1,00000	-0,00066
21	60	-0,92448	-1,00000	1,00000	0,30284	-1,00000	1,00000
22	63	-0,72428	-1,00000	1,00000	0,09138	0,37265	1,00000
23	66	0,10395	0,93848	1,00000	-0,01308	1,00000	1,00000
24	69	0,08184	1,00000	1,00000	-0,11318	1,00000	1,00000
25	72	0,25883	1,00000	-1,00000	-0,16143	1,00000	-1,00000
26	75	0,72993	1,00000	-1,00000	-0,34372	1,00000	-0,41019
27	78	0,53969	1,00000	-1,00000	-0,47164	1,00000	-1,00000
28	81	0,68883	1,00000	-1,00000	-0,60688	1,00000	-1,00000
29	84	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000

**Quadro A.88 – Equação para N = 30 e step = 31**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	9	1,00000	1,00000	-1,00000	0,30462	1,00000	-0,94301
5	12	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,16689	1,00000	-1,00000
6	15	1,00000	1,00000	-1,00000	0,41227	1,00000	1,00000
7	18	1,00000	1,00000	-1,00000	0,29707	1,00000	-0,91483
8	21	0,90603	0,29192	-1,00000	0,50367	1,00000	1,00000
9	24	0,90397	-1,00000	-1,00000	0,70308	1,00000	1,00000
10	27	0,81946	-1,00000	0,04536	0,30193	1,00000	1,00000
11	30	0,71146	-1,00000	1,00000	0,39950	1,00000	1,00000
12	33	0,64654	-1,00000	1,00000	-0,25072	1,00000	1,00000
13	36	0,58869	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
14	39	0,53818	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,40303
15	42	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,55590	-1,00000	1,00000
16	45	-1,00000	-1,00000	0,52607	0,53347	-1,00000	-1,00000

17	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,57591	-1,00000	0,52785
18	51	-0,75159	-1,00000	1,00000	0,23702	-1,00000	1,00000
19	54	-0,94466	-1,00000	1,00000	0,11916	-1,00000	-0,54829
20	57	-0,68326	-1,00000	1,00000	0,08459	-1,00000	0,28130
21	60	-0,72231	-1,00000	1,00000	-0,10223	-1,00000	-1,00000
22	63	-0,82622	-1,00000	1,00000	-0,29731	-1,00000	-1,00000
23	66	-1,00000	-0,29192	1,00000	1,00000	0,71869	1,00000
24	69	0,40418	1,00000	1,00000	-0,78591	1,00000	1,00000
25	72	-0,15579	1,00000	0,42857	0,05651	1,00000	-1,00000
26	75	-0,54640	1,00000	-1,00000	0,14178	1,00000	1,00000
27	78	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,16392	1,00000	1,00000
28	81	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,07339	1,00000	-1,00000
29	84	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
30	87	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000

**Quadro A.89 – Equação para N = 31 e step = 31**

j	$\beta [^\circ]$	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,70749
2	3	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,88494
3	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	9	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,21841	1,00000	-1,00000
5	12	1,00000	1,00000	-1,00000	0,20363	1,00000	-1,00000
6	15	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
7	18	1,00000	1,00000	-1,00000	0,34479	1,00000	1,00000
8	21	1,00000	0,50000	-1,00000	0,54168	1,00000	1,00000
9	24	1,00000	-1,00000	-1,00000	0,76571	1,00000	1,00000
10	27	1,00000	-1,00000	-0,39227	1,00000	1,00000	1,00000
11	30	1,00000	-1,00000	1,00000	0,64683	1,00000	1,00000
12	33	1,00000	-1,00000	1,00000	0,68482	1,00000	0,44013
13	36	1,00000	-1,00000	1,00000	0,33238	0,34296	0,33013
14	39	-0,08700	-1,00000	1,00000	-0,12819	-1,00000	0,32161
15	42	-0,41459	-1,00000	1,00000	0,20552	-1,00000	0,29958
16	45	-0,68702	-1,00000	1,00000	0,12464	-1,00000	0,26429
17	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,93996	-1,00000	0,21613
18	51	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,29986	-1,00000	0,15561
19	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,28107	-1,00000	0,08341
20	57	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,25061	-1,00000	0,00032
21	60	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,28132	-1,00000	-0,09275
22	63	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,31843	-1,00000	-0,19479
23	66	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,29097	-1,00000	-0,77218
24	69	-0,29668	0,50000	1,00000	0,17155	1,00000	1,00000
25	72	-0,50271	1,00000	1,00000	0,30659	1,00000	1,00000

26	75	0,01483	1,00000	-0,60773	-0,89086	1,00000	1,00000
27	78	0,58300	1,00000	-1,00000	-0,32044	1,00000	0,54094
28	81	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,37598	1,00000	-1,00000
29	84	1,00000	1,00000	-1,00000	0,05816	1,00000	-1,00000
30	87	1,00000	1,00000	-1,00000	0,14213	1,00000	-1,00000
31	90	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000

**Quadro A.90 – Equação para N = 3 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,03492	0,74970	-1,00000	0,01739	0,53614	-0,74970
2	2	0,00000	-1,00000	0,99918	0,06993	-1,00000	1,00000
3	4	0,00000	0,25030	0,00082	-0,01750	0,50122	-0,25030

**Quadro A.91 – Equação para N = 4 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,01761	1,00000	-1,00000	0,24299	1,00000	-1,00000
2	2	0,15669	-0,50122	0,02512	-0,65102	-0,88822	0,50122
3	4	-0,15669	-1,00000	1,00000	0,84948	-1,00000	1,00000
4	6	0,05231	0,50122	-0,02512	-0,30574	0,96739	-0,50122

**Quadro A.92 – Equação para N = 5 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	-0,15043	1,00000	-1,00000	0,24017	1,00000	-1,00000
2	2	0,85750	0,19707	-0,64470	-0,25595	-0,32412	-0,19707
3	4	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,25587	-1,00000	1,00000
4	6	0,47637	-1,00000	1,00000	0,90723	-0,54761	1,00000
5	8	-0,07142	0,80293	-0,35530	-0,43140	1,00000	-0,80293

**Quadro A.93 – Equação para N = 6 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,74990	1,00000	-1,00000	-0,23220	1,00000	-1,00000
2	2	-0,85210	0,79122	-1,00000	0,12203	0,23734	-0,79122
3	4	-0,32656	-1,00000	0,60244	1,00000	-1,00000	1,00000
4	6	0,29298	-1,00000	1,00000	-0,28173	-1,00000	1,00000
5	8	0,90252	-0,79122	1,00000	-0,70539	-0,04169	0,79122
6	10	-0,59877	1,00000	-0,60244	0,38889	1,00000	-1,00000

**Quadro A.94 – Equação para N = 7 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,51490	1,00000	-1,00000	-0,46282	1,00000	-1,00000
2	2	-0,27696	1,00000	-1,00000	1,00000	0,79837	-1,00000

3	4	-0,25927	-0,63287	-0,18682	-0,01336	-1,00000	0,63287
4	6	-0,11052	-1,00000	1,00000	-0,16002	-1,00000	1,00000
5	8	0,26677	-1,00000	1,00000	-0,15158	-1,00000	1,00000
6	10	0,46421	-0,36713	1,00000	0,34764	0,46867	0,36713
7	12	-0,37843	1,00000	-0,81318	-0,16081	1,00000	-1,00000

**Quadro A.95 – Equação para N = 8 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,63970	1,00000	-1,00000	0,12592	1,00000	-1,00000
2	2	-0,31641	1,00000	-1,00000	0,18429	1,00000	-1,00000
3	4	0,02133	-0,01837	-0,89518	-0,03361	-0,53582	0,01837
4	6	-0,70784	-1,00000	1,00000	-0,45361	-1,00000	1,00000
5	8	0,29776	-1,00000	1,00000	0,57506	-1,00000	1,00000
6	10	0,41634	-1,00000	1,00000	0,54137	-1,00000	1,00000
7	12	0,40794	0,01837	0,89518	-0,10701	0,88734	-0,01837
8	14	-0,47739	1,00000	-1,00000	-0,30656	1,00000	-1,00000

**Quadro A.96 – Equação para N = 9 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,18331	1,00000	-1,00000
2	2	-0,88198	1,00000	-1,00000	-0,51378	1,00000	-1,00000
3	4	-0,14761	0,59716	-1,00000	0,35522	0,08563	-0,59716
4	6	0,08142	-1,00000	0,43450	1,00000	-1,00000	1,00000
5	8	0,21708	-1,00000	1,00000	-0,25477	-1,00000	1,00000
6	10	0,26548	-1,00000	1,00000	-0,17081	-1,00000	1,00000
7	12	-0,00836	-1,00000	1,00000	0,03262	-0,62816	1,00000
8	14	-0,09389	0,40284	0,56550	0,23388	1,00000	-0,40284
9	16	-0,07174	1,00000	-1,00000	-0,22431	1,00000	-1,00000

**Quadro A.97 – Equação para N = 10 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,16078	1,00000	-1,00000
2	2	-0,82497	1,00000	-1,00000	0,17693	1,00000	-1,00000
3	4	-0,13508	1,00000	-1,00000	0,22421	0,69291	-1,00000
4	6	0,37610	-0,76404	-0,24979	-0,04131	-1,00000	0,76404
5	8	0,04601	-1,00000	1,00000	0,86039	-1,00000	1,00000
6	10	0,03092	-1,00000	1,00000	0,08905	-1,00000	1,00000
7	12	0,00806	-1,00000	1,00000	-0,00520	-1,00000	1,00000
8	14	-0,05937	-1,00000	1,00000	-0,24112	-0,10989	1,00000
9	16	0,10495	0,76404	0,24979	-0,30892	1,00000	-0,76404
10	18	-0,09548	1,00000	-1,00000	0,18433	1,00000	-1,00000

**Quadro A.98 – Equação para N = 11 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,94718	1,00000	-1,00000	0,31214	1,00000	-1,00000
2	2	-0,41733	1,00000	-1,00000	0,48833	1,00000	-1,00000
3	4	-0,14663	1,00000	-1,00000	-0,97399	1,00000	-1,00000
4	6	-0,24376	-0,13373	-0,92713	0,23356	-0,63714	0,13373
5	8	-0,19103	-1,00000	1,00000	0,33156	-1,00000	1,00000
6	10	1,00000	-1,00000	1,00000	0,12774	-1,00000	1,00000
7	12	-0,09300	-1,00000	1,00000	0,43263	-1,00000	1,00000
8	14	-0,15342	-1,00000	1,00000	0,29535	-1,00000	1,00000
9	16	-0,04928	-0,86627	1,00000	0,18960	0,35257	0,86627
10	18	-0,33604	1,00000	-0,07287	0,02473	1,00000	-1,00000
11	20	0,22451	1,00000	-1,00000	-0,52519	1,00000	-1,00000

**Quadro A.99 – Equação para N = 12 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,10525	1,00000	-1,00000
2	2	-0,52278	1,00000	-1,00000	-0,06529	1,00000	-1,00000
3	4	0,53902	1,00000	-1,00000	0,13946	1,00000	-1,00000
4	6	-0,54201	0,42736	-1,00000	0,14043	0,07938	-0,42736
5	8	-0,24522	-1,00000	0,34986	0,36853	-1,00000	1,00000
6	10	0,23224	-1,00000	1,00000	0,48633	-1,00000	1,00000
7	12	0,02473	-1,00000	1,00000	-0,06989	-1,00000	1,00000
8	14	0,09194	-1,00000	1,00000	0,17127	-1,00000	1,00000
9	16	0,15653	-1,00000	1,00000	0,10758	-1,00000	1,00000
10	18	0,08198	-0,42736	1,00000	0,01878	0,78414	0,42736
11	20	-0,01311	1,00000	-0,34986	-0,08999	1,00000	-1,00000
12	22	-0,16357	1,00000	-1,00000	-0,21648	1,00000	-1,00000

**Quadro A.100 – Equação para N = 13 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,04602	1,00000	-1,00000
2	2	0,39664	1,00000	-1,00000	0,11218	1,00000	-1,00000
3	4	-0,59547	1,00000	-1,00000	0,26000	1,00000	-1,00000
4	6	-0,31269	1,00000	-1,00000	0,31964	0,76006	-1,00000
5	8	-0,18652	-0,99968	-0,35927	0,15407	-1,00000	0,99968
6	10	0,13967	-1,00000	1,00000	-0,13170	-1,00000	1,00000
7	12	0,22945	-1,00000	1,00000	-0,56375	-1,00000	1,00000
8	14	-0,34876	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
9	16	0,33016	-1,00000	1,00000	0,63264	-1,00000	1,00000
10	18	0,28481	-1,00000	1,00000	-0,00122	-0,72094	1,00000

11	20	0,16813	-0,00032	1,00000	0,00368	1,00000	0,00032
12	22	-0,05619	1,00000	-0,64073	-0,22679	1,00000	-1,00000
13	24	-0,29219	1,00000	-1,00000	-0,33014	1,00000	-1,00000

**Quadro A.101 – Equação para N = 14 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,41282	1,00000	-1,00000	0,17591	1,00000	-1,00000
2	2	0,13141	1,00000	-1,00000	-0,04523	1,00000	-1,00000
3	4	0,16825	1,00000	-1,00000	-0,15748	1,00000	-1,00000
4	6	0,19886	1,00000	-1,00000	0,49876	1,00000	-1,00000
5	8	0,21713	-0,37812	-1,00000	-0,12748	-0,53581	0,37812
6	10	0,22844	-1,00000	0,95897	0,86052	-1,00000	1,00000
7	12	0,03994	-1,00000	1,00000	0,38843	-1,00000	1,00000
8	14	0,00364	-1,00000	1,00000	0,51560	-1,00000	1,00000
9	16	-0,55838	-1,00000	1,00000	-0,74958	-1,00000	1,00000
10	18	-0,15175	-1,00000	1,00000	0,36314	-1,00000	1,00000
11	20	-0,11033	-1,00000	1,00000	0,08414	-0,24741	1,00000
12	22	-0,01397	0,37812	1,00000	0,00363	1,00000	-0,37812
13	24	0,12164	1,00000	-0,95897	-0,11158	1,00000	-1,00000
14	26	0,18459	1,00000	-1,00000	-0,23258	1,00000	-1,00000

**Quadro A.102 – Equação para N = 15 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,55646	1,00000	-1,00000
2	2	0,08850	1,00000	-1,00000	-0,04295	1,00000	-1,00000
3	4	-0,24510	1,00000	-1,00000	0,63075	1,00000	-1,00000
4	6	-0,10179	1,00000	-1,00000	0,37812	1,00000	-1,00000
5	8	0,10423	0,23507	-1,00000	0,50847	0,21709	-0,23507
6	10	0,26263	-1,00000	0,29188	0,61202	-1,00000	1,00000
7	12	-0,01271	-1,00000	1,00000	0,72946	-1,00000	1,00000
8	14	0,12205	-1,00000	1,00000	0,74826	-1,00000	1,00000
9	16	-0,22004	-1,00000	1,00000	-0,51439	-1,00000	1,00000
10	18	0,22004	-1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000
11	20	0,07541	-1,00000	1,00000	-0,04524	-1,00000	1,00000
12	22	-0,08266	-1,00000	1,00000	-0,15591	0,20420	1,00000
13	24	-0,26849	0,76493	0,70812	0,51906	1,00000	-0,76493
14	26	-0,51085	1,00000	-1,00000	-0,03846	1,00000	-1,00000
15	28	0,57502	1,00000	-1,00000	-0,12482	1,00000	-1,00000

**Quadro A.103 – Equação para N = 16 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,54655	1,00000	-1,00000
2	2	0,43051	1,00000	-1,00000	0,03216	1,00000	-1,00000
3	4	-0,43093	1,00000	-1,00000	-0,21592	1,00000	-1,00000
4	6	0,59819	1,00000	-1,00000	0,13085	1,00000	-1,00000
5	8	-0,34942	0,81402	-1,00000	0,18064	0,97520	-0,81402
6	10	-0,23384	-1,00000	-0,37622	0,25539	-1,00000	1,00000
7	12	-0,09306	-1,00000	1,00000	0,33510	-1,00000	1,00000
8	14	-0,00410	-1,00000	1,00000	0,02360	-1,00000	1,00000
9	16	0,06418	-1,00000	1,00000	-0,71084	-1,00000	1,00000
10	18	0,17039	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
11	20	0,19374	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
12	22	-0,28839	-1,00000	1,00000	0,09423	-1,00000	1,00000
13	24	0,12185	-0,81402	1,00000	0,15502	0,67909	0,81402
14	26	0,07154	1,00000	0,37622	-0,15233	1,00000	-1,00000
15	28	-0,00106	1,00000	-1,00000	-0,31697	1,00000	-1,00000
16	30	-0,09558	1,00000	-1,00000	-0,50273	1,00000	-1,00000

**Quadro A.104 – Equação para N = 17 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,62236	1,00000	-1,00000	0,17280	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,04417	1,00000	-1,00000
3	4	0,24242	1,00000	-1,00000	0,13650	1,00000	-1,00000
4	6	-0,08379	1,00000	-1,00000	0,11015	1,00000	-1,00000
5	8	-0,14511	1,00000	-1,00000	0,26321	1,00000	-1,00000
6	10	-0,18459	-0,62053	-1,00000	0,32241	-0,21070	0,62053
7	12	-0,19406	-1,00000	0,98453	0,37014	-1,00000	1,00000
8	14	-0,18361	-1,00000	1,00000	0,65164	-1,00000	1,00000
9	16	-0,13803	-1,00000	1,00000	0,19403	-1,00000	1,00000
10	18	-0,07106	-1,00000	1,00000	-0,02486	-1,00000	1,00000
11	20	0,00541	-1,00000	1,00000	0,34084	-1,00000	1,00000
12	22	0,10600	-1,00000	1,00000	0,44342	-1,00000	1,00000
13	24	-0,13863	-1,00000	1,00000	-0,09171	-0,90282	1,00000
14	26	0,34012	-0,37947	1,00000	-0,26258	1,00000	0,37947
15	28	0,48382	1,00000	0,01547	-0,58460	1,00000	-1,00000
16	30	0,63819	1,00000	-1,00000	0,36066	1,00000	-1,00000
17	32	-1,00000	1,00000	-1,00000	-0,28817	1,00000	-1,00000

**Quadro A.105 – Equação para N = 18 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	0,57358	1,00000	-1,00000	-0,23209	1,00000	-1,00000
3	4	0,18476	1,00000	-1,00000	0,26376	1,00000	-1,00000
4	6	-0,31708	1,00000	-1,00000	-0,40415	1,00000	-1,00000
5	8	-0,18492	1,00000	-1,00000	0,06031	1,00000	-1,00000
6	10	-0,07419	-0,04332	-1,00000	0,11837	0,55646	0,04332
7	12	0,01519	-1,00000	0,31179	0,13609	-1,00000	1,00000
8	14	0,08145	-1,00000	1,00000	-0,00916	-1,00000	1,00000
9	16	0,12618	-1,00000	1,00000	0,22984	-1,00000	1,00000
10	18	0,14488	-1,00000	1,00000	0,29775	-1,00000	1,00000
11	20	0,39702	-1,00000	1,00000	0,55394	-1,00000	1,00000
12	22	0,08851	-1,00000	1,00000	0,59784	-1,00000	1,00000
13	24	0,11804	-1,00000	1,00000	0,56978	-1,00000	1,00000
14	26	-0,13975	-1,00000	1,00000	0,23545	-0,41793	1,00000
15	28	-0,50375	0,04332	1,00000	-0,25287	1,00000	-0,04332
16	30	-0,69210	1,00000	-0,31179	0,64582	1,00000	-1,00000
17	32	-0,36086	1,00000	-1,00000	-0,99730	1,00000	-1,00000
18	34	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,53225	1,00000	-1,00000

**Quadro A.106 – Equação para N = 19 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,28763	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	0,07270	1,00000	-1,00000
3	4	-0,08215	1,00000	-1,00000	0,33532	1,00000	-1,00000
4	6	-0,24732	1,00000	-1,00000	0,48069	1,00000	-1,00000
5	8	-0,10974	1,00000	-1,00000	0,61782	1,00000	-1,00000
6	10	0,00826	0,53149	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,53149
7	12	-0,01029	-1,00000	-0,34500	-0,39433	-0,61738	1,00000
8	14	-0,05154	-1,00000	1,00000	0,26378	-1,00000	1,00000
9	16	0,01560	-1,00000	1,00000	0,09734	-1,00000	1,00000
10	18	0,06273	-1,00000	1,00000	0,02421	-1,00000	1,00000
11	20	0,08937	-1,00000	1,00000	0,14274	-1,00000	1,00000
12	22	0,10729	-1,00000	1,00000	0,26584	-1,00000	1,00000
13	24	0,13624	-1,00000	1,00000	0,22022	-1,00000	1,00000
14	26	0,16343	-1,00000	1,00000	0,15737	-1,00000	1,00000
15	28	0,09584	-1,00000	1,00000	0,10769	0,03538	1,00000
16	30	-1,00000	0,46851	1,00000	0,03726	1,00000	-0,46851
17	32	0,00561	1,00000	-0,65500	-0,04253	1,00000	-1,00000
18	34	0,24357	1,00000	-1,00000	-0,14232	1,00000	-1,00000
19	36	0,20762	1,00000	-1,00000	-0,44711	1,00000	-1,00000

**Quadro A.107 – Equação para N = 20 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,51554	1,00000	-1,00000	0,04968	1,00000	-1,00000
2	2	0,66894	1,00000	-1,00000	0,15259	1,00000	-1,00000
3	4	0,57171	1,00000	-1,00000	0,18399	1,00000	-1,00000
4	6	0,22198	1,00000	-1,00000	0,34614	1,00000	-1,00000
5	8	0,15433	1,00000	-1,00000	0,32599	1,00000	-1,00000
6	10	0,09623	1,00000	-1,00000	0,23975	1,00000	-1,00000
7	12	0,04841	-0,89041	-0,98272	0,30900	0,26198	0,89041
8	14	0,00913	-1,00000	1,00000	0,28681	-1,00000	1,00000
9	16	-0,01894	-1,00000	1,00000	0,29994	-1,00000	1,00000
10	18	-0,03919	-1,00000	1,00000	0,26914	-1,00000	1,00000
11	20	-0,32083	-1,00000	1,00000	0,31650	-1,00000	1,00000
12	22	0,00819	-1,00000	1,00000	0,31492	-1,00000	1,00000
13	24	0,01671	-1,00000	1,00000	0,30933	-1,00000	1,00000
14	26	0,21453	-1,00000	1,00000	-0,11761	-1,00000	1,00000
15	28	-0,37585	-1,00000	1,00000	0,10920	-1,00000	1,00000
16	30	-0,25141	-1,00000	1,00000	0,04224	0,45776	1,00000
17	32	-0,14114	0,89041	0,98272	-0,03756	1,00000	-0,89041
18	34	-0,02720	1,00000	-1,00000	-0,11880	1,00000	-1,00000
19	36	0,13472	1,00000	-1,00000	-0,21138	1,00000	-1,00000
20	38	0,34381	1,00000	-1,00000	-0,31851	1,00000	-1,00000

**Quadro A.108 – Equação para N = 21 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,76489	1,00000	-1,00000	0,66064	1,00000	-1,00000
2	2	0,56657	1,00000	-1,00000	-0,56304	1,00000	-1,00000
3	4	0,45466	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	0,20826	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
5	8	0,24726	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
6	10	0,17383	1,00000	-1,00000	0,21242	1,00000	-1,00000
7	12	0,23631	-0,33333	-1,00000	-0,03640	1,00000	0,33333
8	14	0,15550	-1,00000	0,37376	1,00000	-0,87749	1,00000
9	16	-0,05236	-1,00000	1,00000	0,33651	-1,00000	1,00000
10	18	-0,11218	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
11	20	-0,15793	-1,00000	1,00000	0,22591	-1,00000	1,00000
12	22	-0,19149	-1,00000	1,00000	-0,10047	-1,00000	1,00000
13	24	-0,52609	-1,00000	1,00000	-0,03533	-1,00000	1,00000
14	26	-0,71976	-1,00000	1,00000	-0,29017	-1,00000	1,00000
15	28	0,04091	-1,00000	1,00000	-0,10353	-1,00000	1,00000
16	30	1,00000	-1,00000	1,00000	0,01822	-1,00000	1,00000
17	32	-0,10259	-0,66670	1,00000	0,01713	0,91094	0,66670

18	34	-0,06864	1,00000	0,62624	0,03648	1,00000	-1,00000
19	36	-0,02270	1,00000	-1,00000	0,05748	1,00000	-1,00000
20	38	0,02915	1,00000	-1,00000	-0,20457	1,00000	-1,00000
21	40	0,09417	1,00000	-1,00000	-0,24240	1,00000	-1,00000

**Quadro A.109 – Equação para N = 22 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,20289	1,00000	-1,00000
2	2	0,52040	1,00000	-1,00000	-0,28535	1,00000	-1,00000
3	4	0,37167	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	0,34555	1,00000	-1,00000	0,50432	1,00000	-1,00000
5	8	-0,15098	1,00000	-1,00000	0,27540	1,00000	-1,00000
6	10	0,09009	1,00000	-1,00000	0,30708	1,00000	-1,00000
7	12	0,21356	0,20727	-1,00000	0,31531	1,00000	-0,20727
8	14	0,32137	-1,00000	-0,22788	0,30003	0,01715	1,00000
9	16	0,15690	-1,00000	1,00000	0,26155	-1,00000	1,00000
10	18	0,22762	-1,00000	1,00000	0,37933	-1,00000	1,00000
11	20	0,27434	-1,00000	1,00000	0,34777	-1,00000	1,00000
12	22	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,48038	-1,00000	1,00000
13	24	0,17265	-1,00000	1,00000	-0,27017	-1,00000	1,00000
14	26	-0,53850	-1,00000	1,00000	0,14418	-1,00000	1,00000
15	28	0,04322	-1,00000	1,00000	0,18399	-1,00000	1,00000
16	30	0,20604	-1,00000	1,00000	0,12482	-1,00000	1,00000
17	32	-0,07996	-1,00000	1,00000	0,06566	-0,66287	1,00000
18	34	-0,03300	-0,20727	1,00000	0,00452	1,00000	0,20727
19	36	-0,18211	1,00000	0,22788	-0,06346	1,00000	-1,00000
20	38	-0,19620	1,00000	-1,00000	-0,13732	1,00000	-1,00000
21	40	-0,54035	1,00000	-1,00000	-0,20875	1,00000	-1,00000
22	42	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,30017	1,00000	-1,00000

**Quadro A.110 – Equação para N = 23 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,92288	1,00000	-1,00000	0,32410	1,00000	-1,00000
2	2	0,78779	1,00000	-1,00000	0,25919	1,00000	-1,00000
3	4	0,63868	1,00000	-1,00000	0,11506	1,00000	-1,00000
4	6	0,20062	1,00000	-1,00000	0,20348	1,00000	-1,00000
5	8	0,13473	1,00000	-1,00000	0,22312	1,00000	-1,00000
6	10	0,26929	1,00000	-1,00000	0,29906	1,00000	-1,00000
7	12	0,09394	0,74672	-1,00000	0,29967	1,00000	-0,74672
8	14	0,05438	-1,00000	-0,83032	0,30208	0,91235	1,00000
9	16	0,00759	-1,00000	1,00000	0,29964	-1,00000	1,00000
10	18	-0,03300	-1,00000	1,00000	0,27908	-1,00000	1,00000

11	20	-0,06726	-1,00000	1,00000	0,39761	-1,00000	1,00000
12	22	-0,09486	-1,00000	1,00000	0,41457	-1,00000	1,00000
13	24	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,45331	-1,00000	1,00000
14	26	-0,06710	-1,00000	1,00000	0,48025	-1,00000	1,00000
15	28	-0,06611	-1,00000	1,00000	-0,56060	-1,00000	1,00000
16	30	-0,05035	-1,00000	1,00000	0,20733	-1,00000	1,00000
17	32	1,00000	-1,00000	1,00000	0,17396	-1,00000	1,00000
18	34	-0,12994	-1,00000	1,00000	0,13547	-0,20435	1,00000
19	36	-0,26826	0,25328	1,00000	0,09202	1,00000	-0,25328
20	38	-0,11671	1,00000	-0,16968	0,04379	1,00000	-1,00000
21	40	0,06869	1,00000	-1,00000	-0,19019	1,00000	-1,00000
22	42	0,16180	1,00000	-1,00000	-0,36919	1,00000	-1,00000
23	44	0,00191	1,00000	-1,00000	-0,39882	1,00000	-1,00000

**Quadro A.111 – Equação para N = 24 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,99851	1,00000	-1,00000
2	2	0,74126	1,00000	-1,00000	-0,02679	1,00000	-1,00000
3	4	0,61497	1,00000	-1,00000	0,17602	1,00000	-1,00000
4	6	0,49601	1,00000	-1,00000	0,11217	1,00000	-1,00000
5	8	-0,21315	1,00000	-1,00000	0,15003	1,00000	-1,00000
6	10	0,20571	1,00000	-1,00000	0,14250	1,00000	-1,00000
7	12	0,23620	1,00000	-1,00000	-0,40408	1,00000	-1,00000
8	14	0,08834	-0,70235	-1,00000	0,49350	1,00000	0,70235
9	16	0,08611	-1,00000	0,56810	0,52094	-0,12325	1,00000
10	18	0,08348	-1,00000	1,00000	0,23105	-1,00000	1,00000
11	20	0,08007	-1,00000	1,00000	0,32949	-1,00000	1,00000
12	22	0,07681	-1,00000	1,00000	0,50867	-1,00000	1,00000
13	24	-0,17464	-1,00000	1,00000	0,58902	-1,00000	1,00000
14	26	-0,29045	-1,00000	1,00000	0,52924	-1,00000	1,00000
15	28	-0,24992	-1,00000	1,00000	-0,15512	-1,00000	1,00000
16	30	-0,23307	-1,00000	1,00000	0,25104	-1,00000	1,00000
17	32	-0,23812	-1,00000	1,00000	0,20447	-1,00000	1,00000
18	34	-0,28710	-1,00000	1,00000	0,15469	-1,00000	1,00000
19	36	-0,34154	-1,00000	1,00000	0,09700	0,19308	1,00000
20	38	0,75630	0,70235	1,00000	-0,06648	1,00000	-0,70235
21	40	-0,00771	1,00000	-0,56810	-0,08763	1,00000	-1,00000
22	42	0,03757	1,00000	-1,00000	-0,24359	1,00000	-1,00000
23	44	0,08477	1,00000	-1,00000	-0,25131	1,00000	-1,00000
24	46	0,13540	1,00000	-1,00000	-0,51699	1,00000	-1,00000

**Quadro A.112 – Equação para N = 25 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,72843	1,00000	-1,00000	-0,39045	1,00000	-1,00000
2	2	0,97512	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	0,70971	1,00000	-1,00000	0,21323	1,00000	-1,00000
4	6	0,53680	1,00000	-1,00000	0,38737	1,00000	-1,00000
5	8	-0,13819	1,00000	-1,00000	0,20542	1,00000	-1,00000
6	10	0,32585	1,00000	-1,00000	0,13678	1,00000	-1,00000
7	12	0,15631	1,00000	-1,00000	0,18168	1,00000	-1,00000
8	14	0,11491	-0,16189	-1,00000	0,61196	1,00000	0,16189
9	16	0,08860	-1,00000	-0,04579	0,62114	0,83315	1,00000
10	18	0,06433	-1,00000	1,00000	0,80982	-1,00000	1,00000
11	20	0,04222	-1,00000	1,00000	-0,38439	-1,00000	1,00000
12	22	0,02241	-1,00000	1,00000	0,38835	-1,00000	1,00000
13	24	0,00494	-1,00000	1,00000	0,10908	-1,00000	1,00000
14	26	-0,00982	-1,00000	1,00000	0,26115	-1,00000	1,00000
15	28	-0,02206	-1,00000	1,00000	0,24344	-1,00000	1,00000
16	30	-0,03141	-1,00000	1,00000	0,20574	-1,00000	1,00000
17	32	-0,03801	-1,00000	1,00000	0,16231	-1,00000	1,00000
18	34	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,11334	-1,00000	1,00000
19	36	-0,13193	-1,00000	1,00000	0,05909	-1,00000	1,00000
20	38	-0,12498	-0,83811	1,00000	-0,00019	0,62212	0,83811
21	40	-0,17056	1,00000	1,00000	-0,06420	1,00000	-1,00000
22	42	-0,06231	1,00000	-0,95421	-0,13265	1,00000	-1,00000
23	44	0,00894	1,00000	-1,00000	-0,26933	1,00000	-1,00000
24	46	0,47064	1,00000	-1,00000	-0,12122	1,00000	-1,00000
25	48	0,41383	1,00000	-1,00000	-0,34112	1,00000	-1,00000

**Quadro A.113 – Equação para N = 26 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,24555	1,00000	-1,00000
2	2	0,94202	1,00000	-1,00000	0,22024	1,00000	-1,00000
3	4	0,75108	1,00000	-1,00000	0,17403	1,00000	-1,00000
4	6	0,38652	1,00000	-1,00000	0,39621	1,00000	-1,00000
5	8	0,31443	1,00000	-1,00000	0,59774	1,00000	-1,00000
6	10	0,24648	1,00000	-1,00000	0,00130	1,00000	-1,00000
7	12	0,18300	1,00000	-1,00000	0,44417	1,00000	-1,00000
8	14	0,55918	0,34332	-1,00000	0,45216	1,00000	-0,34332
9	16	-0,72362	-1,00000	-0,60104	0,38404	1,00000	1,00000
10	18	0,29085	-1,00000	1,00000	0,36570	-0,15808	1,00000
11	20	0,32598	-1,00000	1,00000	0,38844	-1,00000	1,00000
12	22	0,03009	-1,00000	1,00000	0,18788	-1,00000	1,00000

13	24	-0,35236	-1,00000	1,00000	0,36574	-1,00000	1,00000
14	26	-0,87417	-1,00000	1,00000	0,09313	-1,00000	1,00000
15	28	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,47295	-1,00000	1,00000
16	30	1,00000	-1,00000	1,00000	0,12260	-1,00000	1,00000
17	32	-0,22877	-1,00000	1,00000	0,28415	-1,00000	1,00000
18	34	-0,08092	-1,00000	1,00000	0,07932	-1,00000	1,00000
19	36	0,00870	-1,00000	1,00000	0,04679	-1,00000	1,00000
20	38	0,04324	-1,00000	1,00000	-0,07337	-0,99398	1,00000
21	40	0,03616	-0,34332	1,00000	-0,07389	1,00000	0,34332
22	42	0,05684	1,00000	0,60104	-0,13004	1,00000	-1,00000
23	44	0,06840	1,00000	-1,00000	-0,14198	1,00000	-1,00000
24	46	0,07023	1,00000	-1,00000	-0,20965	1,00000	-1,00000
25	48	0,07119	1,00000	-1,00000	-0,19886	1,00000	-1,00000
26	50	0,06723	1,00000	-1,00000	-0,22033	1,00000	-1,00000

**Quadro A.114 – Equação para N = 27 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,80386	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,00969	1,00000	-1,00000
3	4	0,95005	1,00000	-1,00000	0,74530	1,00000	-1,00000
4	6	0,61535	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
5	8	-0,11679	1,00000	-1,00000	0,16123	1,00000	-1,00000
6	10	0,31436	1,00000	-1,00000	0,65964	1,00000	-1,00000
7	12	0,10515	1,00000	-1,00000	0,77474	1,00000	-1,00000
8	14	0,10906	0,84670	-1,00000	0,92257	1,00000	-0,84670
9	16	0,11174	-1,00000	-1,00000	0,94214	1,00000	1,00000
10	18	0,11336	-1,00000	0,85759	1,00000	0,82804	1,00000
11	20	0,11409	-1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000
12	22	-0,05997	-1,00000	1,00000	-0,59492	-1,00000	1,00000
13	24	-0,09417	-1,00000	1,00000	0,41948	-1,00000	1,00000
14	26	-0,10458	-1,00000	1,00000	0,29021	-1,00000	1,00000
15	28	-0,11213	-1,00000	1,00000	0,40171	-1,00000	1,00000
16	30	-0,11694	-1,00000	1,00000	0,32486	-1,00000	1,00000
17	32	-0,11866	-1,00000	1,00000	0,23385	-1,00000	1,00000
18	34	-0,25871	-1,00000	1,00000	0,12861	-1,00000	1,00000
19	36	-0,40367	-1,00000	1,00000	0,00937	-1,00000	1,00000
20	38	-0,10934	-1,00000	1,00000	-0,13351	-1,00000	1,00000
21	40	-0,09167	-1,00000	1,00000	0,70674	-0,56790	1,00000
22	42	-0,02100	0,15330	1,00000	-0,06806	1,00000	-0,15330
23	44	0,02318	1,00000	0,14241	-0,11011	1,00000	-1,00000
24	46	0,07208	1,00000	-1,00000	0,03108	1,00000	-1,00000
25	48	0,12546	1,00000	-1,00000	-0,27825	1,00000	-1,00000

26	50	0,18306	1,00000	-1,00000	-0,32995	1,00000	-1,00000
27	52	0,24459	1,00000	-1,00000	-0,48381	1,00000	-1,00000

**Quadro A.115 – Equação para N = 28 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	0,55287	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,35998	1,00000	-1,00000
4	6	0,19427	1,00000	-1,00000	0,24763	1,00000	-1,00000
5	8	0,16289	1,00000	-1,00000	0,10858	1,00000	-1,00000
6	10	0,44774	1,00000	-1,00000	0,22495	1,00000	-1,00000
7	12	0,27474	1,00000	-1,00000	0,36790	1,00000	-1,00000
8	14	0,28209	1,00000	-1,00000	0,52180	1,00000	-1,00000
9	16	0,33925	-0,63818	-1,00000	0,28482	1,00000	0,63818
10	18	0,33676	-1,00000	0,31713	0,38688	1,00000	1,00000
11	20	0,33052	-1,00000	1,00000	0,48284	-0,13440	1,00000
12	22	0,32039	-1,00000	1,00000	0,12598	-1,00000	1,00000
13	24	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,80932	-1,00000	1,00000
14	26	-0,07416	-1,00000	1,00000	-0,06368	-1,00000	1,00000
15	28	-0,10324	-1,00000	1,00000	-0,06042	-1,00000	1,00000
16	30	-0,78416	-1,00000	1,00000	0,59203	-1,00000	1,00000
17	32	-0,25504	-1,00000	1,00000	0,10796	-1,00000	1,00000
18	34	-0,08701	-1,00000	1,00000	0,47285	-1,00000	1,00000
19	36	-0,05591	-1,00000	1,00000	-0,01171	-1,00000	1,00000
20	38	-0,13480	-1,00000	1,00000	0,08195	-1,00000	1,00000
21	40	-0,13709	-1,00000	1,00000	0,06756	-1,00000	1,00000
22	42	0,02375	-1,00000	1,00000	0,03212	-0,18951	1,00000
23	44	0,01038	0,63818	1,00000	0,00064	1,00000	-0,63818
24	46	0,03578	1,00000	-0,31713	-0,13494	1,00000	-1,00000
25	48	0,06458	1,00000	-1,00000	-0,18240	1,00000	-1,00000
26	50	0,15605	1,00000	-1,00000	-0,23100	1,00000	-1,00000
27	52	0,19966	1,00000	-1,00000	-0,27885	1,00000	-1,00000
28	54	0,22029	1,00000	-1,00000	-0,32784	1,00000	-1,00000

**Quadro A.116 – Equação para N = 29 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,11773
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	0,22356	1,00000	-0,09588
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	0,36512	1,00000	-0,07571
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,37418	1,00000	-0,05735
5	8	0,30946	1,00000	-1,00000	0,38005	0,13915	-0,04086
6	10	0,22205	1,00000	-1,00000	0,38269	-0,30926	-0,02633

7	12	0,13799	1,00000	0,08355	0,38209	-0,31441	-0,01384
8	14	0,05795	1,00000	0,21317	0,37826	-0,31705	-0,00343
9	16	-0,01751	-0,13457	0,17535	0,37121	-0,31718	0,00482
10	18	0,52557	-1,00000	0,14109	0,36097	-0,31480	0,01090
11	20	-0,65367	-1,00000	0,14655	0,34761	-0,30990	0,01476
12	22	0,14686	-1,00000	1,00000	0,33117	-0,30252	0,01639
13	24	0,09975	-1,00000	1,00000	0,31175	-0,29270	0,01578
14	26	0,12601	-1,00000	0,72453	0,28944	-0,28048	0,01293
15	28	-0,07520	-1,00000	0,63539	0,26434	-0,26592	0,00786
16	30	-0,11526	-1,00000	0,54904	0,23658	-0,24909	0,00059
17	32	-0,16528	-1,00000	0,46625	0,20629	-0,23007	-0,00885
18	34	-0,59244	-1,00000	0,38726	0,17362	-0,20896	-0,02040
19	36	-0,10491	-1,00000	0,31248	0,13873	-0,18586	-0,03401
20	38	-0,10402	-1,00000	0,24227	0,10179	-0,16088	-0,04962
21	40	-0,09869	-1,00000	0,17696	0,06298	-0,13415	-0,93892
22	42	-0,12399	-1,00000	0,11688	0,02249	-0,10579	1,00000
23	44	-0,16378	-0,86543	0,06231	-0,01948	-0,07594	1,00000
24	46	-0,24506	1,00000	0,01353	-0,06273	-0,04475	1,00000
25	48	-0,27967	1,00000	-0,02922	-0,10706	-0,01236	-0,10880
26	50	0,70339	1,00000	-0,06575	-0,15223	0,02105	-0,06762
27	52	0,06469	1,00000	-0,09587	-0,19804	0,79268	-0,25440
28	54	0,19936	1,00000	-0,11944	-0,24426	1,00000	-1,00000
29	56	0,22279	1,00000	-0,13633	-0,29066	1,00000	-0,17029

**Quadro A.117 – Equação para N = 30 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	0,54987	1,00000	-1,00000	-0,41478	1,00000	-1,00000
5	8	0,35368	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
6	10	0,53509	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
7	12	0,17057	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
8	14	0,39489	1,00000	-1,00000	0,60289	1,00000	-1,00000
9	16	0,39165	0,33303	-1,00000	0,77507	1,00000	-0,33303
10	18	0,38562	-1,00000	-0,71446	-0,31106	1,00000	1,00000
11	20	0,37667	-1,00000	1,00000	-0,14955	1,00000	1,00000
12	22	0,36467	-1,00000	1,00000	-1,00000	-0,01025	1,00000
13	24	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
14	26	-0,40470	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
15	28	-0,12483	-1,00000	1,00000	-0,20061	-1,00000	1,00000
16	30	-0,08364	-1,00000	1,00000	-0,05242	-1,00000	1,00000

17	32	-0,14751	-1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000
18	34	-0,11542	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
19	36	-0,14432	-1,00000	1,00000	0,81165	-1,00000	1,00000
20	38	-0,15565	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
21	40	-0,29595	-1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000
22	42	-0,22413	-1,00000	1,00000	0,01963	-1,00000	1,00000
23	44	-0,16746	-1,00000	1,00000	0,29136	-1,00000	1,00000
24	46	-0,17155	-0,33303	1,00000	-1,00000	0,56188	0,33303
25	48	-0,12139	1,00000	0,71446	1,00000	1,00000	-1,00000
26	50	-0,02252	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
27	52	0,11382	1,00000	-1,00000	0,24298	1,00000	-1,00000
28	54	0,20207	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
29	56	0,30891	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
30	58	0,42804	1,00000	-1,00000	-0,20822	1,00000	-1,00000

**Quadro A.118 – Equação para N = 31 e step = 46**

j	$\beta [^\circ]$	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	0,97536	1,00000	-1,00000	0,26276	1,00000	-1,00000
3	4	0,84446	1,00000	-1,00000	-0,16403	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,32786	1,00000	-1,00000
5	8	0,60345	1,00000	-1,00000	0,38177	1,00000	-1,00000
6	10	0,33605	1,00000	-1,00000	0,42697	1,00000	-1,00000
7	12	0,40002	1,00000	-1,00000	0,54757	1,00000	-1,00000
8	14	0,34370	1,00000	-1,00000	0,53339	1,00000	-1,00000
9	16	0,29170	0,79694	-1,00000	0,55812	1,00000	-0,79694
10	18	0,24429	-1,00000	-1,00000	0,61288	1,00000	1,00000
11	20	0,05231	-1,00000	0,80656	0,60948	1,00000	1,00000
12	22	-0,00682	-1,00000	1,00000	0,36997	1,00000	1,00000
13	24	-0,09466	-1,00000	1,00000	0,52106	-0,91257	1,00000
14	26	-0,09029	-1,00000	1,00000	0,50248	-1,00000	1,00000
15	28	-0,11813	-1,00000	1,00000	-0,55492	-1,00000	1,00000
16	30	-0,14335	-1,00000	1,00000	0,03528	-1,00000	1,00000
17	32	-0,16614	-1,00000	1,00000	-0,09890	-1,00000	1,00000
18	34	-0,18647	-1,00000	1,00000	-0,19025	-1,00000	1,00000
19	36	-0,24406	-1,00000	1,00000	0,24136	-1,00000	1,00000
20	38	-0,13216	-1,00000	1,00000	0,24516	-1,00000	1,00000
21	40	-0,29216	-1,00000	1,00000	0,23064	-1,00000	1,00000
22	42	-0,11617	-1,00000	1,00000	0,16515	-1,00000	1,00000
23	44	-0,42812	-1,00000	1,00000	0,11513	-1,00000	1,00000
24	46	-0,61544	-1,00000	1,00000	0,06225	-1,00000	1,00000
25	48	0,05928	0,20306	1,00000	0,00449	0,92775	-0,20306

26	50	-0,05202	1,00000	0,19344	-0,05614	1,00000	-1,00000
27	52	0,14550	1,00000	-1,00000	-0,11993	1,00000	-1,00000
28	54	0,13091	1,00000	-1,00000	-0,10302	1,00000	-1,00000
29	56	0,21924	1,00000	-1,00000	-0,22949	1,00000	-1,00000
30	58	0,34382	1,00000	-1,00000	-0,29753	1,00000	-1,00000
31	60	0,43964	1,00000	-1,00000	-0,23156	1,00000	-1,00000

**Quadro A.119 – Equação para N = 32 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	0,31236	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	0,97526	1,00000	-1,00000	-0,08695	1,00000	-1,00000
3	4	0,86229	1,00000	-1,00000	0,15644	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,42175	1,00000	-1,00000
5	8	0,66726	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
6	10	0,56870	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
7	12	0,66047	1,00000	-1,00000	0,26771	1,00000	-1,00000
8	14	0,56379	1,00000	-1,00000	0,48492	1,00000	-1,00000
9	16	0,49531	1,00000	-1,00000	0,46444	1,00000	-1,00000
10	18	0,42995	-0,73416	-1,00000	0,43790	1,00000	0,73416
11	20	0,36801	-1,00000	0,35353	0,22295	1,00000	1,00000
12	22	0,30975	-1,00000	1,00000	0,20223	1,00000	1,00000
13	24	0,25536	-1,00000	1,00000	0,10661	0,20813	1,00000
14	26	0,20503	-1,00000	1,00000	-0,03129	-1,00000	1,00000
15	28	-0,32924	-1,00000	1,00000	0,25177	-1,00000	1,00000
16	30	0,02487	-1,00000	1,00000	0,09779	-1,00000	1,00000
17	32	-0,65424	-1,00000	1,00000	0,01666	-1,00000	1,00000
18	34	-0,82909	-1,00000	1,00000	-0,07708	-1,00000	1,00000
19	36	0,02265	-1,00000	1,00000	-0,17551	-1,00000	1,00000
20	38	-0,21538	-1,00000	1,00000	-0,27500	-1,00000	1,00000
21	40	-0,54341	-1,00000	1,00000	0,74534	-1,00000	1,00000
22	42	-0,53292	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
23	44	-0,47275	-1,00000	1,00000	0,00289	-1,00000	1,00000
24	46	-0,41234	-1,00000	1,00000	-0,02832	-1,00000	1,00000
25	48	-0,29786	-1,00000	1,00000	-0,06467	-0,74329	1,00000
26	50	-0,20876	0,73416	1,00000	0,02916	1,00000	-0,73416
27	52	-0,09259	1,00000	-0,35353	0,01032	1,00000	-1,00000
28	54	0,04335	1,00000	-1,00000	-0,10155	1,00000	-1,00000
29	56	0,19982	1,00000	-1,00000	-0,13355	1,00000	-1,00000
30	58	0,37624	1,00000	-1,00000	-0,24235	1,00000	-1,00000
31	60	0,57178	1,00000	-1,00000	-0,31094	1,00000	-1,00000
32	62	0,78546	1,00000	-1,00000	-0,38232	1,00000	-1,00000

**Quadro A.120 – Equação para N = 33 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,02234	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,53130	1,00000	-1,00000
5	8	0,87842	1,00000	-1,00000	0,60761	1,00000	-1,00000
6	10	0,26640	1,00000	-1,00000	0,26622	1,00000	-1,00000
7	12	0,59809	1,00000	-1,00000	0,61106	1,00000	-1,00000
8	14	0,36184	1,00000	-1,00000	0,38045	1,00000	-1,00000
9	16	0,30030	1,00000	-1,00000	0,29042	1,00000	-1,00000
10	18	0,24218	-0,28435	-1,00000	0,37842	1,00000	0,28435
11	20	0,18776	-1,00000	-0,09428	0,32175	1,00000	1,00000
12	22	0,13727	-1,00000	1,00000	0,17243	1,00000	1,00000
13	24	0,09092	-1,00000	1,00000	0,13061	1,00000	1,00000
14	26	0,04886	-1,00000	1,00000	0,16723	-0,68639	1,00000
15	28	-0,01435	-1,00000	1,00000	0,19366	-1,00000	1,00000
16	30	-0,06285	-1,00000	1,00000	0,02294	-1,00000	1,00000
17	32	-0,10978	-1,00000	1,00000	-0,00015	-1,00000	1,00000
18	34	-0,24346	-1,00000	1,00000	0,15637	-1,00000	1,00000
19	36	-0,54867	-1,00000	1,00000	0,34490	-1,00000	1,00000
20	38	-0,17195	-1,00000	1,00000	0,28958	-1,00000	1,00000
21	40	-0,70781	-1,00000	1,00000	0,30115	-1,00000	1,00000
22	42	-0,00898	-1,00000	1,00000	0,30710	-1,00000	1,00000
23	44	-0,16186	-1,00000	1,00000	0,24966	-1,00000	1,00000
24	46	-0,27118	-1,00000	1,00000	-0,12223	-1,00000	1,00000
25	48	-0,60016	-1,00000	1,00000	-0,06759	-1,00000	1,00000
26	50	-0,18499	-0,71565	1,00000	-0,09500	-0,38941	0,71565
27	52	-0,08079	1,00000	1,00000	-0,10613	1,00000	-1,00000
28	54	0,04037	1,00000	-0,90572	-0,02789	1,00000	-1,00000
29	56	0,05129	1,00000	-1,00000	-0,08429	1,00000	-1,00000
30	58	0,15542	1,00000	-1,00000	-0,16409	1,00000	-1,00000
31	60	0,36535	1,00000	-1,00000	-0,19331	1,00000	-1,00000
32	62	0,39843	1,00000	-1,00000	-0,23132	1,00000	-1,00000
33	64	0,52840	1,00000	-1,00000	-0,27204	1,00000	-1,00000

**Quadro A.121 – Equação para N = 34 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	0,86738	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	0,46837	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,44813	1,00000	-1,00000

5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	0,42606	1,00000	-1,00000
6	10	0,85560	1,00000	-1,00000	0,56364	1,00000	-1,00000
7	12	0,53199	1,00000	-1,00000	0,60152	1,00000	-1,00000
8	14	0,47644	1,00000	-1,00000	0,51013	1,00000	-1,00000
9	16	0,42742	1,00000	-1,00000	0,50646	1,00000	-1,00000
10	18	0,38522	0,14063	-1,00000	-0,07974	1,00000	-0,14063
11	20	0,35011	-1,00000	-0,48747	0,30935	1,00000	1,00000
12	22	-0,31442	-1,00000	1,00000	0,29541	1,00000	1,00000
13	24	0,02034	-1,00000	1,00000	0,23441	1,00000	1,00000
14	26	-0,21288	-1,00000	1,00000	0,17962	0,44836	1,00000
15	28	-0,22141	-1,00000	1,00000	0,15018	-1,00000	1,00000
16	30	-0,23558	-1,00000	1,00000	0,10024	-1,00000	1,00000
17	32	-0,25470	-1,00000	1,00000	0,04720	-1,00000	1,00000
18	34	-0,26011	-1,00000	1,00000	0,00226	-1,00000	1,00000
19	36	-0,28559	-1,00000	1,00000	-0,04079	-1,00000	1,00000
20	38	-0,65693	-1,00000	1,00000	-0,09276	-1,00000	1,00000
21	40	-0,20078	-1,00000	1,00000	-0,15527	-1,00000	1,00000
22	42	-0,20905	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
23	44	0,03745	-1,00000	1,00000	0,32779	-1,00000	1,00000
24	46	0,18769	-1,00000	1,00000	0,00088	-1,00000	1,00000
25	48	-0,15132	-1,00000	1,00000	-0,01697	-1,00000	1,00000
26	50	-0,24902	-1,00000	1,00000	0,01408	-1,00000	1,00000
27	52	-0,26198	-0,14063	1,00000	0,01659	-0,06775	0,14063
28	54	-0,25243	1,00000	0,48747	-0,01213	1,00000	-1,00000
29	56	0,14104	1,00000	-1,00000	-0,01592	1,00000	-1,00000
30	58	0,04205	1,00000	-1,00000	0,00374	1,00000	-1,00000
31	60	0,14574	1,00000	-1,00000	-0,01561	1,00000	-1,00000
32	62	0,22855	1,00000	-1,00000	0,00725	1,00000	-1,00000
33	64	0,34318	1,00000	-1,00000	0,01411	1,00000	-1,00000
34	66	0,47173	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000

**Quadro A.122 – Equação para N = 35 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	0,61296	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	0,64189	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	0,60672	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,62666	1,00000	-1,00000
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	0,82228	1,00000	-1,00000
6	10	0,63693	1,00000	-1,00000	0,27626	1,00000	-1,00000
7	12	0,65390	1,00000	-1,00000	0,47474	1,00000	-0,57346
8	14	-0,26270	1,00000	-1,00000	0,41364	1,00000	-0,41442
9	16	0,42553	1,00000	-1,00000	0,39319	1,00000	-0,25882

10	18	-0,02416	0,55920	-1,00000	0,39644	1,00000	-0,10742
11	20	0,62367	-1,00000	-1,00000	0,37021	1,00000	0,03904
12	22	0,65185	-1,00000	0,76425	0,34115	1,00000	0,17985
13	24	0,66284	-1,00000	1,00000	0,25838	1,00000	1,00000
14	26	0,65655	-1,00000	1,00000	0,39163	1,00000	1,00000
15	28	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,44459	-1,00000	1,00000
16	30	0,44567	-1,00000	1,00000	0,16932	-1,00000	1,00000
17	32	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,10190	-1,00000	0,71373
18	34	0,24227	-1,00000	1,00000	-0,04675	-1,00000	0,78987
19	36	-0,49021	-1,00000	1,00000	0,11342	-1,00000	0,84106
20	38	0,08731	-1,00000	1,00000	-0,17921	-1,00000	0,88195
21	40	0,22006	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,91237
22	42	0,13367	-1,00000	1,00000	0,06135	-1,00000	0,93215
23	44	0,03860	-1,00000	1,00000	0,21503	-1,00000	0,94121
24	46	-0,25546	-1,00000	1,00000	-0,12291	-1,00000	0,93949
25	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,08638	-1,00000	1,00000
26	50	-0,33687	-1,00000	1,00000	-0,06935	-1,00000	1,00000
27	52	-0,94593	-1,00000	1,00000	-0,05419	-1,00000	1,00000
28	54	-0,83030	0,44080	1,00000	-0,06835	0,76364	-1,00000
29	56	-1,00000	1,00000	0,23575	-0,12254	1,00000	0,18342
30	58	-0,18891	1,00000	-1,00000	-0,00949	1,00000	-1,00000
31	60	0,04570	1,00000	-1,00000	-0,08863	1,00000	-1,00000
32	62	0,34027	1,00000	-1,00000	-0,12319	1,00000	-1,00000
33	64	0,77306	1,00000	-1,00000	-0,23278	1,00000	-1,00000
34	66	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,16116	1,00000	-1,00000
35	68	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,25588	1,00000	-1,00000

**Quadro A.123 – Equação para N = 36 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,19178
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,69778	1,00000	-0,31952
5	8	0,96168	1,00000	-1,00000	-0,53588	1,00000	0,20696
6	10	0,45045	1,00000	-1,00000	-0,33514	1,00000	0,02164
7	12	0,50380	1,00000	-1,00000	-0,46659	1,00000	-0,15026
8	14	0,47405	1,00000	-1,00000	0,38012	1,00000	-0,30788
9	16	0,44654	1,00000	-1,00000	0,30254	1,00000	-0,45047
10	18	0,42150	0,96798	-1,00000	0,85188	0,93017	-0,57733
11	20	0,40329	-1,00000	-0,08963	0,85179	0,47158	-0,68784
12	22	0,41081	-1,00000	-0,44642	-0,40384	0,10672	1,00000
13	24	0,42057	-1,00000	0,24979	0,49298	-0,21274	1,00000

14	26	0,43251	-1,00000	1,00000	0,69502	-0,48524	1,00000
15	28	0,44825	-1,00000	-1,00000	0,46324	-0,70945	1,00000
16	30	0,46642	-1,00000	1,00000	0,57280	-0,88427	1,00000
17	32	0,48671	-1,00000	1,00000	0,65563	-1,00000	0,92125
18	34	0,50883	-1,00000	1,00000	0,69261	-1,00000	-0,08139
19	36	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,75368	-1,00000	-0,09067
20	38	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,85336	-1,00000	-0,09623
21	40	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,68633	-1,00000	-0,09804
22	42	-0,80507	-1,00000	1,00000	0,59851	-0,92788	-0,09609
23	44	-0,65630	-1,00000	1,00000	0,55228	-0,81364	-0,09039
24	46	-0,62581	-1,00000	1,00000	0,47303	-0,66127	-0,08097
25	48	-0,43212	-1,00000	1,00000	0,42988	-0,47148	-0,06788
26	50	-0,52534	-1,00000	1,00000	0,33976	-0,24523	-0,05118
27	52	-0,49949	-1,00000	1,00000	0,23817	0,01641	-0,03095
28	54	0,10714	-0,96798	1,00000	0,09135	0,31215	0,03652
29	56	0,17278	1,00000	1,00000	0,03389	0,64054	1,00000
30	58	0,17410	1,00000	1,00000	-0,08976	1,00000	1,00000
31	60	0,10728	1,00000	0,28626	-0,22205	1,00000	-1,00000
32	62	0,12452	1,00000	-1,00000	-0,41700	1,00000	-1,00000
33	64	-0,03480	1,00000	-1,00000	-0,57094	1,00000	-1,00000
34	66	-0,18218	1,00000	-1,00000	-0,74008	1,00000	1,00000
35	68	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,91293	1,00000	-1,00000
36	70	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,28250

**Quadro A.124 – Equação para N = 37 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	0,50977
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,18877
7	12	0,89812	1,00000	-1,00000	0,86864	1,00000	-0,59228
8	14	0,64401	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
9	16	0,51712	1,00000	-1,00000	0,73208	1,00000	-1,00000
10	18	0,31151	1,00000	-1,00000	0,14471	1,00000	1,00000
11	20	0,27995	-0,65054	-1,00000	0,84613	1,00000	0,43536
12	22	0,25436	-1,00000	-1,00000	0,67884	1,00000	-0,12013
13	24	0,23444	-1,00000	1,00000	0,49579	1,00000	0,04592
14	26	0,21989	-1,00000	1,00000	0,26717	1,00000	0,22114
15	28	0,21056	-1,00000	1,00000	0,64418	-0,27478	0,40468
16	30	0,20766	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,59565

17	32	0,21002	-1,00000	1,00000	-0,00892	-1,00000	0,79311
18	34	0,21962	-1,00000	1,00000	0,33546	-1,00000	0,99610
19	36	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,12003	-1,00000	1,00000
20	38	-0,95868	-1,00000	1,00000	0,20682	-1,00000	1,00000
21	40	-0,30291	-1,00000	1,00000	0,17520	-1,00000	1,00000
22	42	-0,31928	-1,00000	1,00000	0,14564	-1,00000	-1,00000
23	44	-0,41909	-1,00000	1,00000	0,11788	-1,00000	0,08926
24	46	-0,37544	-1,00000	1,00000	-0,15466	-1,00000	0,85330
25	48	-0,14963	-1,00000	1,00000	-0,04486	-1,00000	0,85470
26	50	-0,45197	-1,00000	1,00000	-0,08705	-1,00000	0,84468
27	52	-0,44445	-1,00000	1,00000	-0,48893	-1,00000	0,82330
28	54	-0,39098	-1,00000	1,00000	0,05647	-1,00000	1,00000
29	56	-0,26257	-0,34946	1,00000	-0,08150	0,83337	1,00000
30	58	-0,17028	1,00000	1,00000	-0,07262	1,00000	1,00000
31	60	-0,06615	1,00000	0,00000	-0,05579	1,00000	-0,56580
32	62	0,04213	1,00000	-1,00000	-0,03298	1,00000	-1,00000
33	64	0,16761	1,00000	-1,00000	-0,06188	1,00000	-1,00000
34	66	0,30168	1,00000	-1,00000	0,02673	1,00000	-1,00000
35	68	0,44513	1,00000	-1,00000	0,09559	1,00000	-1,00000
36	70	0,60033	1,00000	-1,00000	0,15887	1,00000	-1,00000
37	72	0,75781	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000

**Quadro A.125 – Equação para N = 38 e step = 46**

j	$\beta [^\circ]$	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
7	12	1,00000	1,00000	-1,00000	0,67080	1,00000	-1,00000
8	14	0,24197	1,00000	-1,00000	0,61154	1,00000	-1,00000
9	16	1,00000	1,00000	-1,00000	0,75904	1,00000	1,00000
10	18	0,29785	1,00000	-1,00000	-0,30146	1,00000	1,00000
11	20	0,20871	-0,27595	-1,00000	0,69038	1,00000	1,00000
12	22	0,22489	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	0,02786
13	24	0,23982	-1,00000	0,75319	0,74640	1,00000	0,32873
14	26	0,25344	-1,00000	1,00000	0,36197	1,00000	0,22827
15	28	0,26563	-1,00000	1,00000	0,19819	1,00000	1,00000
16	30	0,27620	-1,00000	1,00000	-0,25710	-0,86938	0,69573
17	32	0,06032	-1,00000	1,00000	-0,51707	-1,00000	0,66863
18	34	0,02613	-1,00000	1,00000	-0,77876	-1,00000	0,69162

19	36	-0,00671	-1,00000	1,00000	-0,96785	-1,00000	0,69755
20	38	-0,03824	-1,00000	1,00000	-0,34301	-1,00000	0,68639
21	40	-0,06849	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,65820
22	42	-0,09695	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,61310
23	44	-0,24479	-1,00000	1,00000	-0,10735	-1,00000	0,55132
24	46	-0,41382	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,47317
25	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	0,37901
26	50	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,26932
27	52	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,82933	-1,00000	0,14462
28	54	-0,75653	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,00552
29	56	-0,02444	-1,00000	1,00000	0,43552	-1,00000	-0,14730
30	58	-0,13647	0,27595	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
31	60	-0,59990	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
32	62	-0,24338	1,00000	-0,75319	-0,57683	1,00000	1,00000
33	64	-0,50145	1,00000	-1,00000	-0,54089	1,00000	-1,00000
34	66	0,36737	1,00000	-1,00000	-0,68399	1,00000	-1,00000
35	68	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
36	70	0,58109	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
37	72	0,78150	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
38	74	1,00000	1,00000	-1,00000	0,15547	1,00000	-0,97173

**Quadro A.126 – Equação para N = 39 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,96568
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,66924
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,72294
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,07298	1,00000	-0,76295
7	12	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,78904
8	14	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,25241
9	16	0,91965	1,00000	-1,00000	0,73106	1,00000	1,00000
10	18	0,92777	1,00000	-1,00000	0,57820	1,00000	-0,35510
11	20	0,68197	0,08863	-1,00000	0,33250	1,00000	-0,30866
12	22	0,58112	-1,00000	-1,00000	0,34231	1,00000	-0,25220
13	24	0,48466	-1,00000	0,00000	0,26684	1,00000	1,00000
14	26	0,39304	-1,00000	1,00000	0,25203	1,00000	0,04458
15	28	0,30667	-1,00000	1,00000	0,40668	1,00000	0,12917
16	30	-0,76169	-1,00000	1,00000	0,31828	-0,27088	1,00000
17	32	-0,36771	-1,00000	1,00000	0,43369	-1,00000	1,00000
18	34	-0,45892	-1,00000	1,00000	0,37256	-1,00000	1,00000
19	36	-0,53525	-1,00000	1,00000	0,27035	-1,00000	1,00000

20	38	-0,59633	-1,00000	1,00000	0,12756	-1,00000	1,00000
21	40	-0,64186	-1,00000	1,00000	0,10556	-1,00000	1,00000
22	42	-0,66673	-1,00000	1,00000	0,20815	-1,00000	1,00000
23	44	-0,27268	-1,00000	1,00000	0,12638	-1,00000	1,00000
24	46	-0,60451	-1,00000	1,00000	0,01818	-1,00000	-0,05133
25	48	-0,38762	-1,00000	1,00000	0,63319	-1,00000	0,11465
26	50	-0,56195	-1,00000	1,00000	0,18633	-1,00000	0,07388
27	52	-0,49048	-1,00000	1,00000	0,10415	-1,00000	0,02691
28	54	0,16851	-1,00000	1,00000	0,03482	-1,00000	-0,02605
29	56	0,10723	-1,00000	1,00000	-0,01597	-1,00000	-0,08474
30	58	-0,05730	-1,00000	1,00000	0,00079	-0,09902	-0,14886
31	60	0,09282	0,91137	1,00000	-0,12025	1,00000	1,00000
32	62	0,06690	1,00000	1,00000	-0,19465	1,00000	-1,00000
33	64	0,15461	1,00000	-1,00000	-0,21519	1,00000	1,00000
34	66	-0,20270	1,00000	-1,00000	-0,26034	1,00000	1,00000
35	68	-0,33574	1,00000	-1,00000	0,09787	1,00000	-1,00000
36	70	1,00000	1,00000	-1,00000	0,15631	1,00000	-1,00000
37	72	-0,00901	1,00000	-1,00000	-0,27293	1,00000	-1,00000
38	74	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
39	76	0,27904	1,00000	-1,00000	-0,14289	1,00000	-1,00000

**Quadro A.127 – Equação para N = 40 e step = 46**

j	$\beta [^\circ]$	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,96708
7	12	1,00000	1,00000	-1,00000	0,81383	1,00000	0,23624
8	14	1,00000	1,00000	-1,00000	0,32704	1,00000	-0,26322
9	16	1,00000	1,00000	-1,00000	0,47124	1,00000	-0,10625
10	18	0,94965	1,00000	-1,00000	0,33861	1,00000	0,05853
11	20	1,00000	0,41528	-1,00000	0,28220	1,00000	0,23034
12	22	0,90493	-1,00000	-1,00000	0,25671	1,00000	0,40832
13	24	0,80243	-1,00000	-0,89368	0,25600	1,00000	0,59162
14	26	0,70463	-1,00000	1,00000	0,25964	1,00000	0,77934
15	28	0,61195	-1,00000	1,00000	0,25568	1,00000	0,97057
16	30	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,24047	0,19454	1,00000
17	32	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,28998	-1,00000	1,00000
18	34	-0,62092	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000
19	36	-0,73759	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000

20	38	-0,75817	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000
21	40	-0,77208	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,48581
22	42	-0,78474	-1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	0,62730
23	44	0,16179	-1,00000	1,00000	-0,19690	-1,00000	0,57952
24	46	0,25298	-1,00000	1,00000	-0,04705	-1,00000	0,51920
25	48	-0,70917	-1,00000	1,00000	0,04563	-1,00000	0,44663
26	50	-0,40052	-1,00000	1,00000	-0,09974	-1,00000	0,36218
27	52	-0,33977	-1,00000	1,00000	-0,08744	-1,00000	0,26626
28	54	-0,29228	-1,00000	1,00000	-0,16719	-1,00000	0,15932
29	56	-0,25092	-1,00000	1,00000	-0,36533	-1,00000	0,04190
30	58	-0,27276	-1,00000	1,00000	0,39093	-1,00000	-0,08545
31	60	-0,20431	-0,41528	1,00000	1,00000	1,00000	-0,22208
32	62	-0,04134	1,00000	1,00000	0,25922	1,00000	-1,00000
33	64	0,01298	1,00000	0,89368	0,37228	1,00000	-1,00000
34	66	0,09534	1,00000	-1,00000	-0,23622	1,00000	1,00000
35	68	0,15639	1,00000	-1,00000	0,16842	1,00000	1,00000
36	70	0,46246	1,00000	-1,00000	0,17797	1,00000	0,88099
37	72	0,34572	1,00000	-1,00000	0,22399	1,00000	-1,00000
38	74	0,39648	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
39	76	0,55256	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
40	78	0,52002	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000

**Quadro A.128 – Equação para N = 41 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,07268	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	0,46055	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	0,52394	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,27612	1,00000	-1,00000
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	0,42831	1,00000	-1,00000
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	0,63739	1,00000	-1,00000
7	12	1,00000	1,00000	-1,00000	0,71103	1,00000	1,00000
8	14	1,00000	1,00000	-1,00000	0,77888	1,00000	1,00000
9	16	1,00000	1,00000	-1,00000	0,68348	1,00000	-0,32438
10	18	0,81717	1,00000	-1,00000	0,70348	1,00000	-0,76381
11	20	0,71365	0,72851	-1,00000	0,65478	1,00000	0,55343
12	22	0,61621	-1,00000	-1,00000	0,66372	1,00000	0,06022
13	24	0,52534	-1,00000	-1,00000	0,66799	1,00000	0,16836
14	26	0,44207	-1,00000	0,47400	0,66764	1,00000	0,26653
15	28	0,36632	-1,00000	1,00000	0,79032	1,00000	0,35424
16	30	0,29914	-1,00000	1,00000	0,45202	1,00000	0,43107
17	32	0,24025	-1,00000	1,00000	0,56704	-1,00000	0,49664
18	34	0,18997	-1,00000	1,00000	0,48051	-1,00000	0,55064

19	36	0,14946	-1,00000	1,00000	0,43089	-1,00000	0,59279
20	38	-0,29242	-1,00000	1,00000	0,35070	-1,00000	0,62291
21	40	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,60062	-1,00000	0,64083
22	42	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,27719	-1,00000	0,64647
23	44	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,20370	-1,00000	0,63980
24	46	-0,47462	-1,00000	1,00000	0,16489	-1,00000	0,62086
25	48	-0,23356	-1,00000	1,00000	0,12751	-1,00000	0,58974
26	50	-0,59268	-1,00000	1,00000	0,09321	-1,00000	0,54659
27	52	-0,11292	-1,00000	1,00000	0,05639	-1,00000	0,49163
28	54	-0,40705	-1,00000	1,00000	0,02089	-1,00000	0,42510
29	56	-0,51019	-1,00000	1,00000	-0,00892	-1,00000	0,34736
30	58	-0,46350	-1,00000	1,00000	-0,04006	-1,00000	0,25876
31	60	-0,43362	-1,00000	1,00000	-0,07611	-0,20039	0,15974
32	62	-0,42067	0,27149	1,00000	-0,10671	1,00000	0,05079
33	64	-0,47169	1,00000	1,00000	-0,13266	1,00000	1,00000
34	66	-0,51685	1,00000	0,52600	-0,15761	1,00000	-1,00000
35	68	-0,95061	1,00000	-1,00000	-0,18170	1,00000	-1,00000
36	70	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,21249	1,00000	-1,00000
37	72	0,98550	1,00000	-1,00000	-0,23432	1,00000	-1,00000
38	74	0,58684	1,00000	-1,00000	-0,25394	1,00000	-1,00000
39	76	0,62240	1,00000	-1,00000	-0,26388	1,00000	1,00000
40	78	0,77743	1,00000	-1,00000	-0,27728	1,00000	-1,00000
41	80	0,86135	1,00000	-1,00000	-0,28818	1,00000	-0,42632

**Quadro A.129 – Equação para N = 42 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,13775	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,38057
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,14720
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	0,62720	1,00000	-0,43036
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,68773
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,91807
7	12	1,00000	1,00000	-1,00000	0,70058	1,00000	-1,00000
8	14	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,04664	1,00000	-1,00000
9	16	1,00000	1,00000	-1,00000	0,32021	1,00000	-1,00000
10	18	1,00000	1,00000	-1,00000	0,55551	1,00000	-1,00000
11	20	1,00000	1,00000	-1,00000	0,20054	1,00000	1,00000
12	22	0,95884	-0,96833	-1,00000	0,64887	1,00000	1,00000
13	24	0,75096	-1,00000	-1,00000	-0,25280	1,00000	1,00000
14	26	0,55188	-1,00000	-0,49082	0,41150	1,00000	1,00000
15	28	0,36258	-1,00000	1,00000	0,52736	1,00000	1,00000
16	30	0,18398	-1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

17	32	0,01695	-1,00000	1,00000	0,04484	-0,53622	0,27867
18	34	-0,13770	-1,00000	1,00000	0,10456	-1,00000	0,45122
19	36	0,01543	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,53794
20	38	-0,60444	-1,00000	1,00000	-0,06423	-1,00000	0,62643
21	40	-0,68624	-1,00000	1,00000	0,00232	-1,00000	0,71627
22	42	-0,74343	-1,00000	1,00000	0,31007	-1,00000	0,80700
23	44	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,49306	-1,00000	0,89820
24	46	0,88696	-1,00000	1,00000	0,16660	-1,00000	0,98941
25	48	-0,46992	-1,00000	1,00000	0,21006	-1,00000	-1,00000
26	50	-0,50074	-1,00000	1,00000	0,38594	-1,00000	-1,00000
27	52	-0,94170	-1,00000	1,00000	0,32988	-1,00000	-0,06879
28	54	-0,69448	-1,00000	1,00000	0,26341	-1,00000	0,08799
29	56	-0,89101	-1,00000	1,00000	0,41153	-1,00000	0,01515
30	58	-0,74406	-1,00000	1,00000	0,19034	-1,00000	-0,06337
31	60	0,40125	-1,00000	1,00000	0,67064	-1,00000	-0,14720
32	62	-0,54345	-1,00000	1,00000	0,17657	1,00000	-0,23592
33	64	-0,52613	0,96833	1,00000	0,55885	1,00000	-0,32909
34	66	-0,58881	1,00000	1,00000	0,66014	1,00000	1,00000
35	68	-0,65298	1,00000	0,49082	-0,10272	1,00000	1,00000
36	70	0,35619	1,00000	-1,00000	-0,24683	1,00000	1,00000
37	72	0,21700	1,00000	-1,00000	-0,01816	1,00000	1,00000
38	74	0,45568	1,00000	-1,00000	-0,13725	1,00000	-1,00000
39	76	0,64026	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
40	78	0,84673	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
41	80	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
42	82	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000

**Quadro A.130 – Equação para N = 43 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,68860
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,52426
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,39990
7	12	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,28054
8	14	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,16677
9	16	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,34977	1,00000	-0,05914
10	18	1,00000	1,00000	-1,00000	0,08263	1,00000	0,04184
11	20	1,00000	1,00000	-1,00000	0,17355	1,00000	0,13566
12	22	1,00000	-0,69680	-1,00000	0,20538	1,00000	0,22187
13	24	1,00000	-1,00000	-1,00000	0,25446	1,00000	0,30005

14	26	0,65031	-1,00000	-0,55523	-1,00000	1,00000	0,36982
15	28	0,45947	-1,00000	1,00000	-0,63151	1,00000	0,43083
16	30	0,31019	-1,00000	1,00000	-0,54783	1,00000	0,48280
17	32	0,16991	-1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,52547
18	34	0,03933	-1,00000	1,00000	-0,05791	-1,00000	0,55862
19	36	-0,08089	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,58211
20	38	-0,17796	-1,00000	1,00000	0,25477	-1,00000	0,59581
21	40	-0,72593	-1,00000	1,00000	0,80188	-1,00000	0,59966
22	42	-0,86207	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,59363
23	44	1,00000	-1,00000	1,00000	-0,10456	-1,00000	0,57777
24	46	-0,51360	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,55214
25	48	-0,56338	-1,00000	1,00000	-0,31833	-1,00000	0,51687
26	50	-0,97484	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,47213
27	52	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,41814
28	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,05521	-1,00000	0,35517
29	56	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,28351
30	58	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,01129	-1,00000	0,20353
31	60	-0,91221	-1,00000	1,00000	0,57123	-1,00000	0,11560
32	62	-0,01804	-1,00000	1,00000	0,21770	-0,91627	0,02016
33	64	-0,28708	-0,30320	1,00000	0,10250	1,00000	-0,08233
34	66	-0,09217	1,00000	1,00000	0,15949	1,00000	-0,19136
35	68	-0,23307	1,00000	1,00000	0,28946	1,00000	1,00000
36	70	-0,00367	1,00000	-0,44477	-0,13752	1,00000	-1,00000
37	72	-0,12547	1,00000	-1,00000	-0,16801	1,00000	-1,00000
38	74	0,18583	1,00000	-1,00000	-0,28804	1,00000	-1,00000
39	76	0,57501	1,00000	-1,00000	-0,02692	1,00000	1,00000
40	78	0,70542	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,29180
41	80	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
42	82	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
43	84	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,85206

**Quadro A.131 – Equação para N = 44 e step = 46**

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,48027
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,96045
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	0,61304	1,00000	-1,00000
7	12	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,51636	1,00000	1,00000
8	14	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,02364
9	16	1,00000	1,00000	-1,00000	0,91445	1,00000	1,00000

10	18	1,00000	1,00000	-1,00000	0,69362	1,00000	-0,39094
11	20	1,00000	1,00000	-1,00000	0,59877	1,00000	-0,43906
12	22	1,00000	-0,43868	-1,00000	0,54629	1,00000	1,00000
13	24	0,88963	-1,00000	-1,00000	0,62185	1,00000	1,00000
14	26	0,73615	-1,00000	-1,00000	0,54097	1,00000	0,02723
15	28	0,58606	-1,00000	1,00000	0,61503	1,00000	0,04921
16	30	0,44008	-1,00000	1,00000	0,86811	1,00000	0,07344
17	32	0,39198	-1,00000	1,00000	0,10182	1,00000	0,09980
18	34	0,16888	-1,00000	1,00000	0,52412	0,03979	0,12818
19	36	1,00000	-1,00000	1,00000	0,61136	-1,00000	0,15843
20	38	-0,02675	-1,00000	1,00000	0,40054	-1,00000	0,19040
21	40	-0,13786	-1,00000	1,00000	0,35922	-1,00000	0,22395
22	42	-0,52611	-1,00000	1,00000	0,38426	-1,00000	0,25889
23	44	0,05558	-1,00000	1,00000	0,30473	-1,00000	0,29508
24	46	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,45729	-1,00000	0,33232
25	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,29857	-1,00000	0,37044
26	50	-0,94649	-1,00000	1,00000	0,26174	-1,00000	0,40924
27	52	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,32906	-1,00000	0,44856
28	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,34119	-1,00000	0,48818
29	56	-0,62739	-1,00000	1,00000	0,34816	-1,00000	0,52792
30	58	-0,99505	-1,00000	1,00000	-0,16150	-1,00000	0,56759
31	60	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,06680	-1,00000	0,60698
32	62	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,05373	-1,00000	0,64592
33	64	-0,38677	-1,00000	1,00000	0,01880	-0,31195	0,68420
34	66	-0,68542	0,43868	1,00000	0,04993	1,00000	0,72165
35	68	-0,00626	1,00000	1,00000	-0,39905	1,00000	0,75808
36	70	0,06192	1,00000	1,00000	-0,35759	1,00000	1,00000
37	72	-0,42893	1,00000	-1,00000	-0,19973	1,00000	-1,00000
38	74	0,50771	1,00000	-1,00000	-0,22992	1,00000	-1,00000
39	76	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,25829	1,00000	-1,00000
40	78	0,10185	1,00000	-1,00000	-0,28585	1,00000	0,22870
41	80	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,31007	1,00000	-1,00000
42	82	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,38021	1,00000	-1,00000
43	84	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,40577	1,00000	-1,00000
44	86	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,43036	1,00000	-1,00000

**Quadro A.132 – Equação para N = 45 e step = 46**

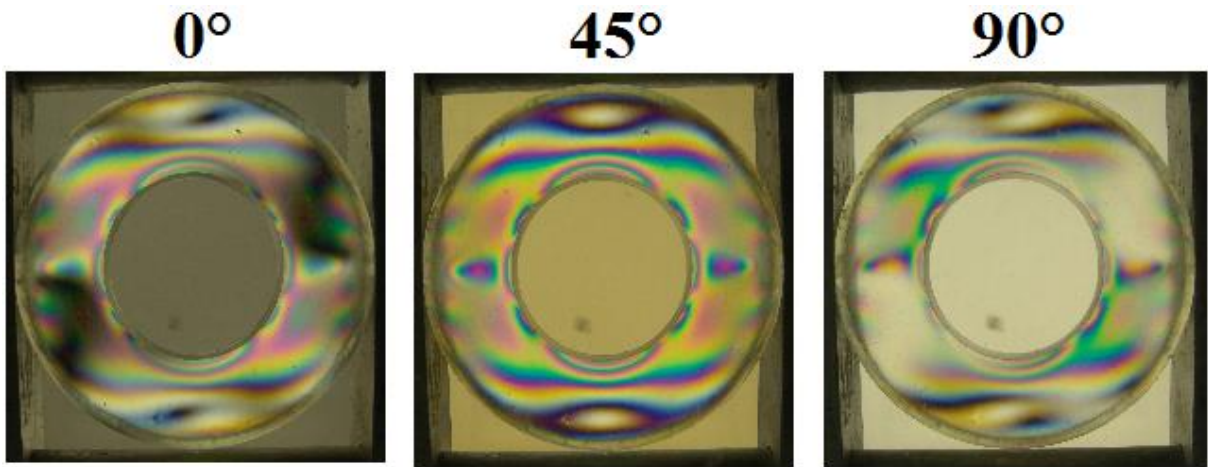
j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,56860

5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,52409
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	0,27711	1,00000	-0,48938
7	12	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,45466
8	14	1,00000	1,00000	-1,00000	0,84007	1,00000	-0,42010
9	16	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,38588
10	18	1,00000	1,00000	-1,00000	0,35717	1,00000	-0,35216
11	20	1,00000	1,00000	-1,00000	0,64602	1,00000	0,52136
12	22	1,00000	-0,20214	-1,00000	0,81687	1,00000	1,00000
13	24	1,00000	-1,00000	-1,00000	0,21009	1,00000	1,00000
14	26	1,00000	-1,00000	-1,00000	0,38565	1,00000	0,30527
15	28	1,00000	-1,00000	0,46175	0,64017	1,00000	0,35808
16	30	0,60643	-1,00000	1,00000	0,10274	1,00000	0,40345
17	32	1,00000	-1,00000	1,00000	0,46020	1,00000	0,44117
18	34	0,67582	-1,00000	1,00000	0,48359	1,00000	0,47104
19	36	0,69122	-1,00000	1,00000	0,32472	-1,00000	0,49292
20	38	0,68659	-1,00000	1,00000	0,42971	-1,00000	0,50670
21	40	-0,45878	-1,00000	1,00000	0,29485	-1,00000	0,51233
22	42	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,36790	-1,00000	0,50976
23	44	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,14509	-1,00000	0,49901
24	46	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,24335	-1,00000	0,48014
25	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,26310	-1,00000	0,45324
26	50	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,25577	-1,00000	0,41844
27	52	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,28988	-1,00000	0,37590
28	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,11719	-1,00000	0,32584
29	56	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,23852	-1,00000	0,26849
30	58	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,24804	-1,00000	0,20415
31	60	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,24523	-1,00000	0,13311
32	62	-0,22025	-1,00000	1,00000	0,26217	-1,00000	0,05574
33	64	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,23656	-1,00000	-0,02760
34	66	-0,87092	-0,79786	1,00000	0,26131	0,43772	-0,11651
35	68	0,31698	1,00000	1,00000	0,27066	1,00000	-0,21053
36	70	-0,06116	1,00000	1,00000	0,31335	1,00000	-0,30923
37	72	-0,05899	1,00000	0,53825	0,28779	1,00000	-1,00000
38	74	0,05110	1,00000	-1,00000	0,31453	1,00000	1,00000
39	76	0,57710	1,00000	-1,00000	0,34417	1,00000	1,00000
40	78	0,59702	1,00000	-1,00000	0,26977	1,00000	-1,00000
41	80	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000
42	82	0,47039	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
43	84	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
44	86	0,85513	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000
45	88	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,87742

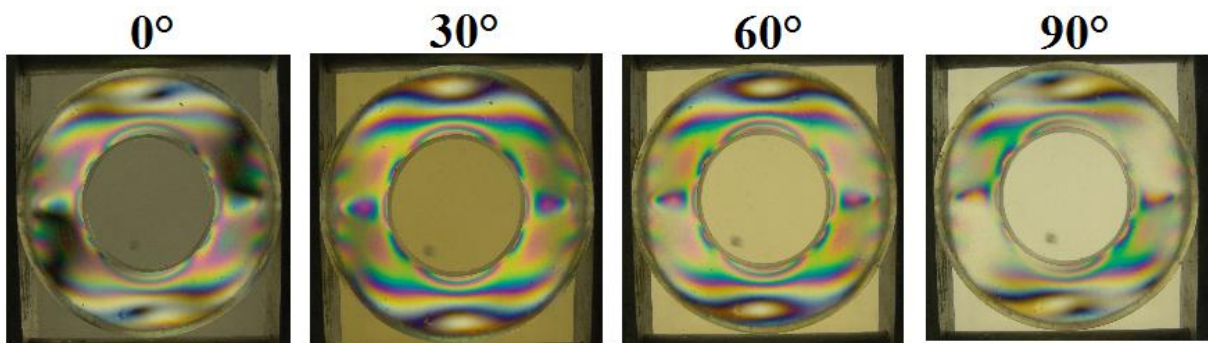
Quadro A.133 – Equação para  $N = 46$  e  $\text{step} = 46$ 

j	$\beta$ [°]	$b_j$	$c_j$	$d_j$	$e_j$	$f_j$	$g_j$
1	0	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
2	2	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
3	4	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
4	6	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000
5	8	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,18916	1,00000	1,00000
6	10	1,00000	1,00000	-1,00000	0,15409	1,00000	-1,00000
7	12	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,23872
8	14	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,12431
9	16	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,11337
10	18	1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,10161
11	20	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,59820
12	22	1,00000	0,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	0,13152
13	24	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	0,16961
14	26	1,00000	-1,00000	-1,00000	-0,03451	1,00000	0,20614
15	28	1,00000	-1,00000	0,07340	0,66134	1,00000	0,24093
16	30	1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,27380
17	32	1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	0,30460
18	34	1,00000	-1,00000	1,00000	0,61653	1,00000	0,33317
19	36	0,68310	-1,00000	1,00000	0,33324	0,12341	0,35939
20	38	0,50564	-1,00000	1,00000	0,35007	-1,00000	0,38311
21	40	-0,08165	-1,00000	1,00000	0,37175	-1,00000	0,40422
22	42	-0,48554	-1,00000	1,00000	0,30985	-1,00000	0,42262
23	44	-0,74923	-1,00000	1,00000	0,30928	-1,00000	0,43823
24	46	-0,93521	-1,00000	1,00000	0,35113	-1,00000	0,45096
25	48	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,46075
26	50	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,72367	-1,00000	0,46756
27	52	-0,85849	-1,00000	1,00000	0,47795	-1,00000	0,47135
28	54	-1,00000	-1,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	0,47210
29	56	-0,99686	-1,00000	1,00000	-0,96351	-1,00000	0,46982
30	58	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,45847	-1,00000	0,46450
31	60	-1,00000	-1,00000	1,00000	-0,16144	-1,00000	0,45618
32	62	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,13978	-1,00000	0,44490
33	64	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,12697	-1,00000	0,43072
34	66	-1,00000	-1,00000	1,00000	0,19977	-1,00000	0,41369
35	68	-1,00000	0,00000	1,00000	0,25923	1,00000	0,39391
36	70	-1,00000	1,00000	1,00000	-0,11992	1,00000	0,37147
37	72	0,54665	1,00000	1,00000	0,30976	1,00000	0,34648
38	74	0,44406	1,00000	-0,07340	-0,45723	1,00000	-1,00000
39	76	0,36295	1,00000	-1,00000	-0,36913	1,00000	-1,00000
40	78	0,51915	1,00000	-1,00000	-0,45971	1,00000	-1,00000

41	80	0,60756	1,00000	-1,00000	-0,37172	1,00000	1,00000
42	82	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,27755	1,00000	-1,00000
43	84	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,32038	1,00000	-1,00000
44	86	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,29395	1,00000	0,19807
45	88	1,00000	1,00000	-1,00000	-0,45085	1,00000	-1,00000
46	90	1,00000	1,00000	-1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000

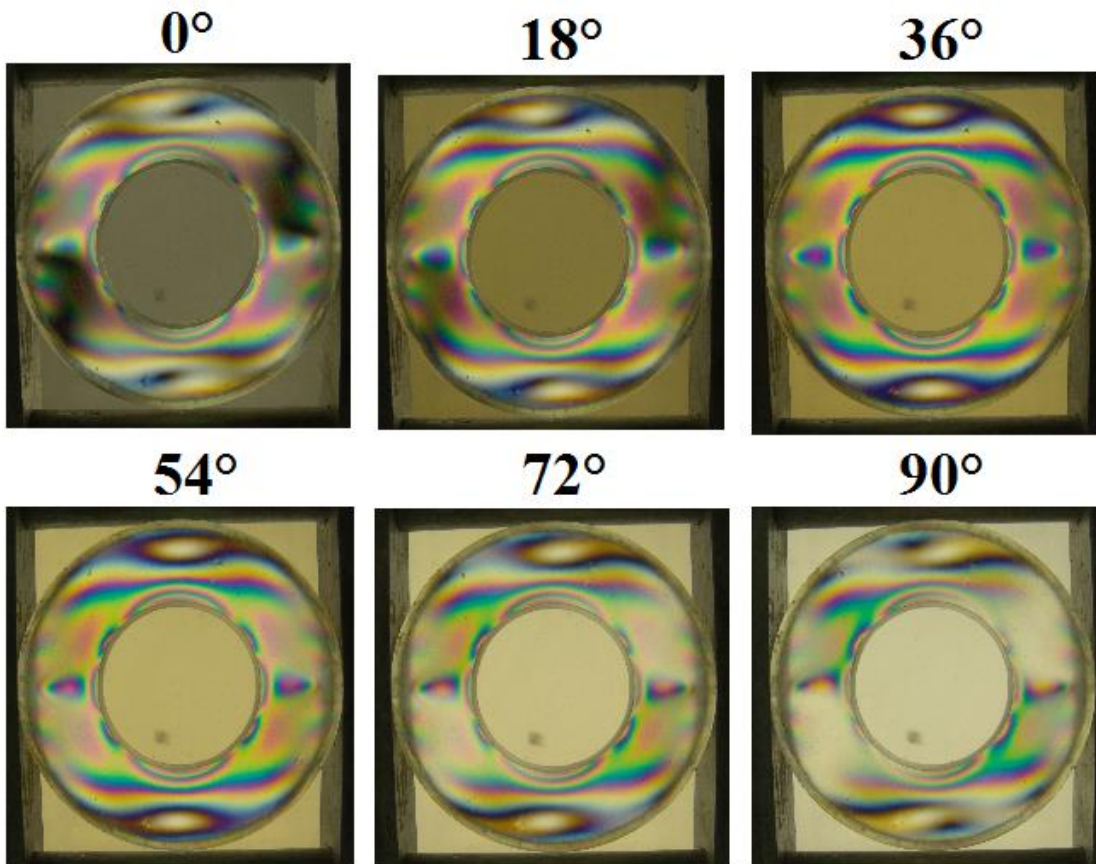
**APÊNDICE B – Fotografias utilizadas nas análises****Figura B.1 – Três imagens**

Fonte: Dados da pesquisa

**Figura B.2 – Quatro imagens**

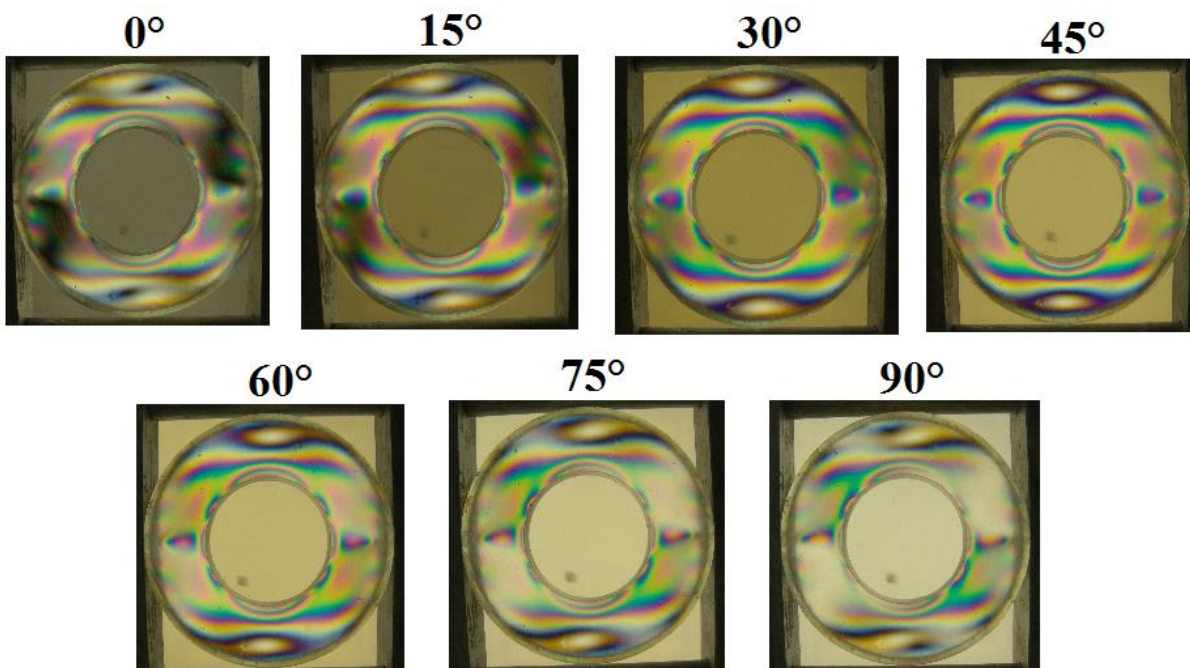
Fonte: Dados da pesquisa

Figura B.3 – Seis imagens



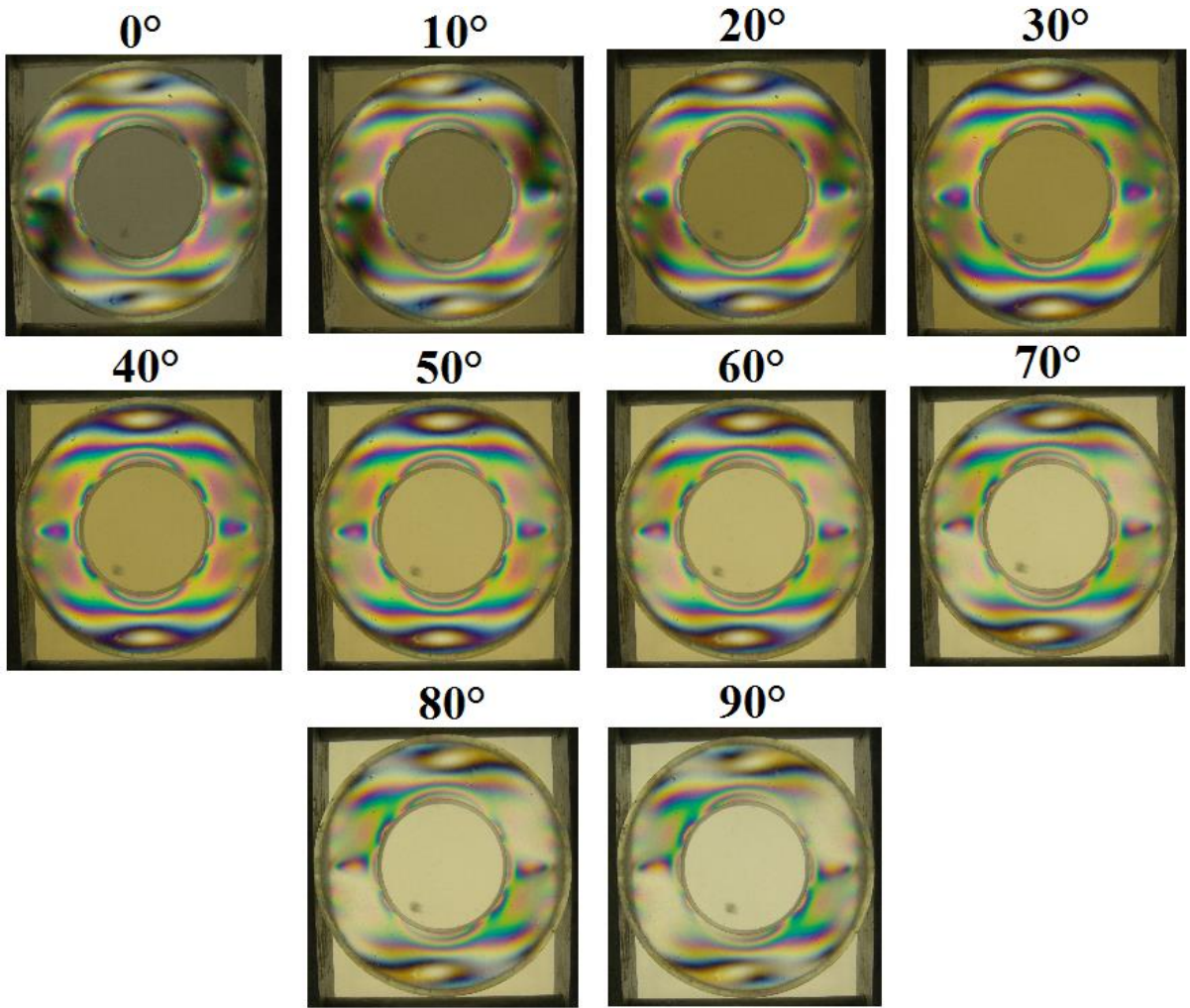
Fonte: Dados da pesquisa

Figura B.4 – Sete imagens



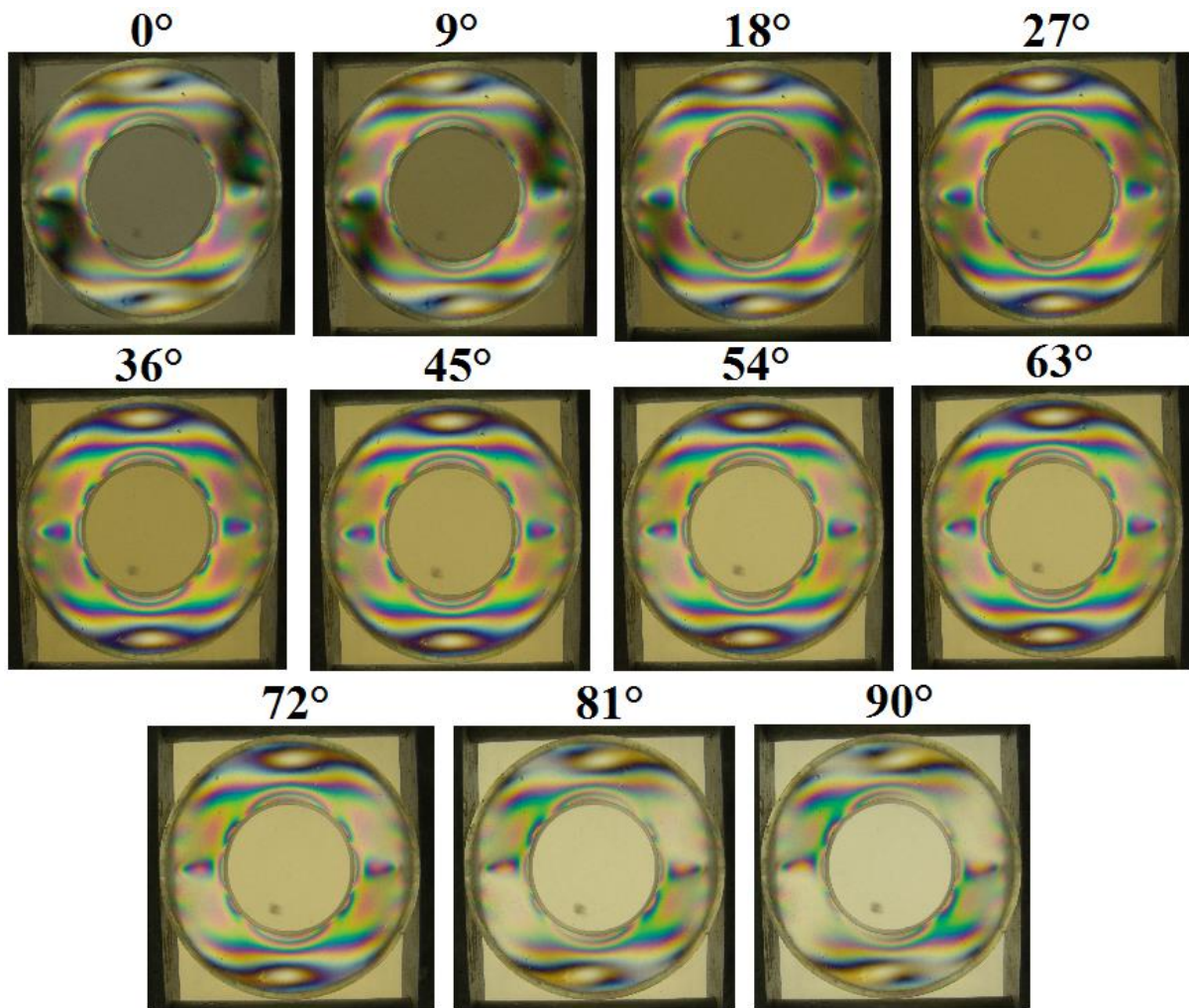
Fonte: Dados da pesquisa

Figura B.5 – Dez imagens



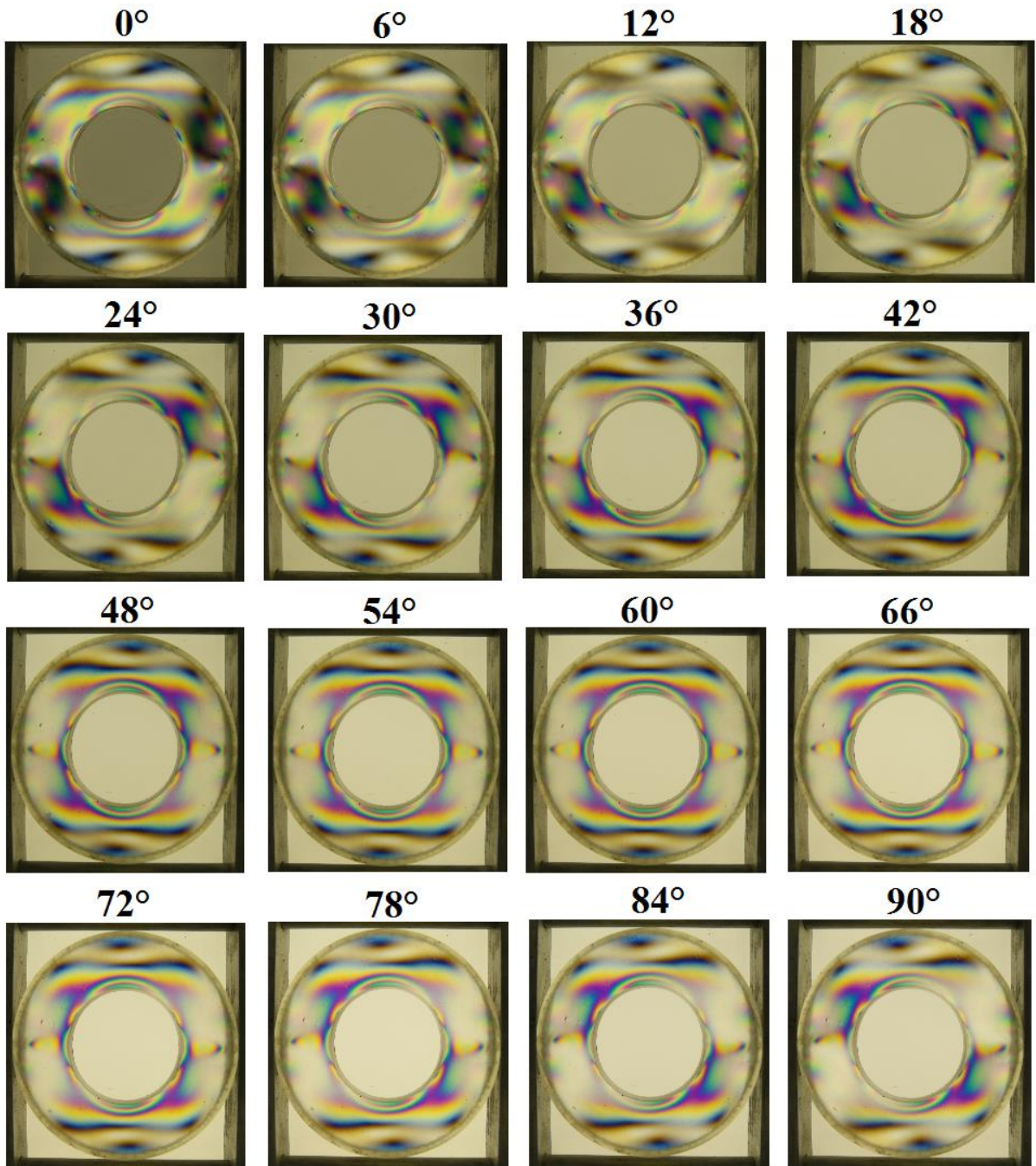
Fonte: Dados da pesquisa

Figura B.6 – Onze imagens



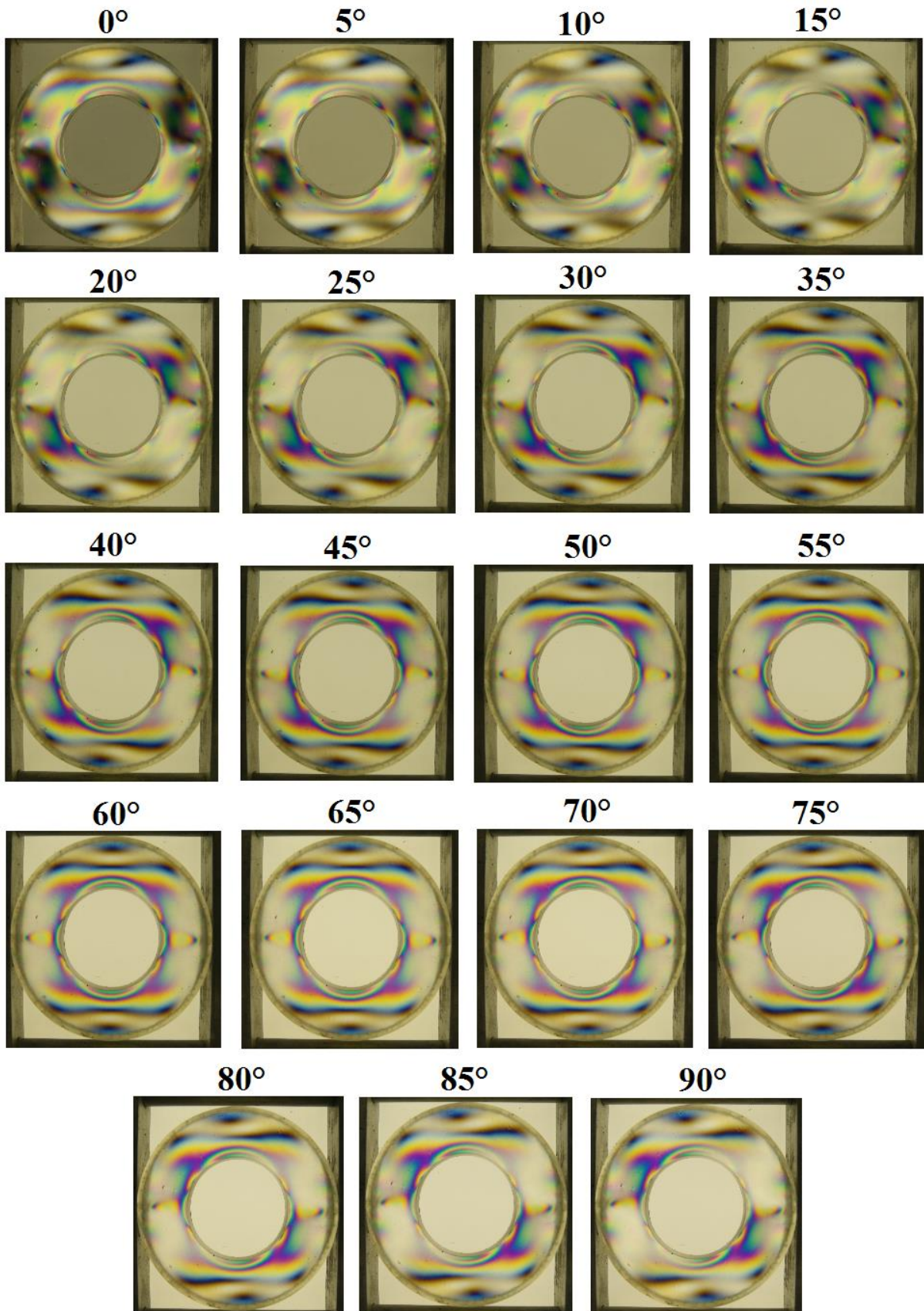
Fonte: Dados da pesquisa

Figura B.7 – Dezesesseis imagens



Fonte: Dados da pesquisa

Figura B.8 – Dezenove imagens



Fonte: Dados da pesquisa