

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Letícia Ribeiro Figueiredo

**CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS EM PROBLEMAS DE TOMADA DE
DECISÃO EM CONDIÇÕES DE INCERTEZA COM BASE EM
INFORMAÇÕES QUANTITATIVAS E QUALITATIVAS**

Belo Horizonte

2020

Letícia Ribeiro Figueiredo

**CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS EM PROBLEMAS DE TOMADA DE
DECISÃO EM CONDIÇÕES DE INCERTEZA COM BASE EM
INFORMAÇÕES QUANTITATIVAS E QUALITATIVAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Petr Iakovlevitch Ekel
Coorientador: Prof. Dr. Gustavo Luis Soares

Linha de pesquisa: Modelagem, Otimização e Inteligência Computacional

Belo Horizonte

2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

F475c	<p>Figueiredo, Leticia Ribeiro</p> <p>Construção de cenários em problemas de tomada de decisão em condições de incerteza com base em informações quantitativas e qualitativas/ Leticia Ribeiro Figueiredo. Belo Horizonte, 2020.</p> <p>74 f.: il.</p> <p>Orientador: Petr Iakovlevitch Ekel Coorientador: Gustavo Luis Soares</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica</p> <p>1. Processo decisório - Processamento de dados. 2. Processo decisório por critério múltiplo. 3. Informação. 4. Incerteza (Teoria da informação). 5. Sistemas difusos. 6. Sistemas de suporte de decisão. I. Ekel, Petr Iakovlevitch. II. Soares, Gustavo Luis. III. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.</p> <p>CDU: 658.011.56</p>
-------	---

Letícia Ribeiro Figueiredo

**CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS EM PROBLEMAS DE TOMADA DE
DECISÃO EM CONDIÇÕES DE INCERTEZA COM BASE EM
INFORMAÇÕES QUANTITATIVAS E QUALITATIVAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Linha de pesquisa: Modelagem, Otimização e Inteligência Computacional

Prof. Dr. Petr Iakovlevitch Ekel — PUC Minas
(Orientador)

Dr. Joel Gomes Pereira Júnior
(Banca avaliadora)

Prof^a. Dr^a. Rose Mary de Souza Batalha — PUC Minas
(Banca avaliadora)

Prof. Dr. Gustavo Luis Soares — PUC Minas
(Banca avaliadora suplente)

Belo Horizonte, 28 de fevereiro de 2020

AGRADECIMENTOS

A verdade é que nunca fui muito boa com agradecimentos, sempre acreditei que fosse um ato melancólico demais, mas na verdade é um ato de reconhecimento de uma pessoa por alguém que lhe prestou um benefício, então devemos fazer isso com mais frequência. Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte do fim desta etapa e que farão parte de muitas outras em minha vida. Início pedindo desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas que podem estar certas de que fazem parte da minha gratidão.

Senhor Deus, hoje dentre as poucas vezes, não venho lhe pedir nada, apenas quero expressar a minha imensa gratidão. Obrigada por colocar grandes obstáculos em minha vida que momentaneamente não as compreendo, mas quando as supero reconheço o tamanho da lição aprendida. Aqui, torno a repetir um frase que uso com frequência: “O Senhor é bom o tempo todo!”.

Familiares, bênção maior da vida, agradeço por todos os princípios ensinados durante esse tempo. Ao crescer, em muitas as vezes, opta-se por caminhos diferentes, porém a raiz sempre será a mesma. Aqui, estendo não só a minha família de sangue, mas aos agregados também.

Aos amigos, por encherem esse tempo de momentos especiais e felizes e que nos permite compreender que juntos somos mais fortes.

À Instituição de ensino, onde estudei esses sete anos sucessivos. Quando me perguntam sobre a PUC, a primeira resposta é: um lugar acolhedor! E é assim mesmo que me sinto, foram inúmeros ensinamentos passados por excelentes professores. Agradeço pela dedicação e solicitude dos membros do programa, em especial ao meu orientador Petr Ekel, e dos amigos, em especial ao Thiago e Rodolfo.

RESUMO

Este estudo lida com a análise multicritério em condições de incerteza, sendo a solução para o problema associada ao esquema geral de tomada de decisão multicritério em condições de incerteza, cuja estrutura original permite utilizar as informações quantitativas disponíveis em grau máximo para reduzir as regiões de incerteza de decisão. Neste caso, se o uso de informações quantitativas não leva a uma solução única, o esquema geral supõe o uso de informações de caráter qualitativo (com base no conhecimento, experiência e intuição dos profissionais envolvidos) aplicadas no estágio final do processo de decisão. Entretanto, surgem cada vez mais problemas que exigem a consideração de objetivos formados com base em informações qualitativas, em todas as etapas do processo de decisão. Levando isso em consideração, foi proposto recentemente uma melhoria ao esquema geral original com o objetivo de gerar soluções multicritério com o uso de informações qualitativas e informações quantitativas em mesmo nível de análise desde o início do processo. No entanto, o processamento de informações qualitativas baseia-se na aplicação de uma abordagem simplista para agregar estimativas de preferências individuais dos especialistas dentro de um modelo de tomada de decisão multicritério em grupo, visto que não são construídos e analisados diversos tipos de informações de consenso. Dessa forma, o presente estudo, que é um desenvolvimento natural no aperfeiçoamento da análise multicritério em condições de incerteza, tem como objetivo construir combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com informações qualitativas de uso direto, com base em estimativas de preferências individuais dos especialistas agregadas depois de alcançar o consenso necessário. Em particular, é proposto um novo esquema para construção de consenso. Seu uso permite evitar pontos negativos inerentes às abordagens tradicionais e reduzir os níveis de incerteza na estimativa de coeficientes de funções objetivo construídas com base na aplicação de informações qualitativas. São apresentados exemplos para ilustrar os resultados do estudo.

Palavras-chaves: Tomada de decisão multiobjetiva. Abordagem Possibilística. Soluções multicritério robustas. Processamento de informações qualitativas. Esquema de consenso.

ABSTRACT

This study deals with multicriteria analysis in conditions of uncertainty, being the solution to the problem associated with the general scheme of multicriteria decision making under uncertainty, whose an original form permits one to utilize available quantitative information to the highest degree to reduce the decision uncertainty regions. In this case, if the use of quantitative information does not lead to a unique solution, the general scheme supposes the use of qualitative information (based on the knowledge, experience and intuition of involved professionals) applied at the final decision process stage. At the same time, more frequently problems arise that require consideration of objectives formed based on qualitative information, at all decision process stages. Taking this into account, an improvement has recently been proposed to the original general scheme with the objective of generating multicriteria solutions using qualitative and quantitative information at the same level of analysis since the beginning of the process. However, the processing of qualitative information is based on the application of a simplistic approach to aggregating individual expert preference estimates within a multicriteria group decision making model, since it is not constructed and analyzed different types of consensus information . Thus, the present study, which is a natural development to improve multicriteria analysis in conditions of uncertainty, aims to constructing representative combinations of initial data, states of nature or scenarios with qualitative information for direct use, based on individual expert preference estimates aggregated after achieving the necessary consensus. In particular, a new scheme for consensus construction is proposed. Its use permits one to avoid negative points inherent in traditional approaches and to reduce uncertainty levels in estimating coefficients of objective functions built on the basis of applying qualitative information. Examples are presented to illustrate the study results.

Key-words: Multiobjective decision making. Possibilistic approach. Multicriteria robust solutions. Qualitative information processing. Consensus scheme.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema geral para tomada de decisão multicritério em condições de incertezas	36
Figura 2 – Exemplo de aplicação do AHP	40
Figura 3 – Uso de informações qualitativas no esquema geral de tomada de decisão em condições de incerteza	42
Figura 4 – Agregação de avaliações individuais	46
Figura 5 – Agregação de preferências individuais por critério	47
Figura 6 – Agregação de resultados individuais	47
Figura 7 – Uso de informações qualitativas após construção de consenso no esquema geral de tomada de decisão em condições de incerteza	53
Figura 8 – Conjunto de termos linguísticos referentes ao desempenho de cada alternativa	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Matriz <i>payoff</i> para a p -ésima função objetivo	31
Tabela 2 – Matriz de risco para a p -ésima função objetivo	32
Tabela 3 – Matriz com estimativas de características para a p -ésima função objetivo	33
Tabela 4 – Matriz com estimativas de critério de escolha para a p -ésima função objetivo	34
Tabela 5 – Matriz modificada com estimativas de critérios de escolha para a p -ésima função objetivo	35
Tabela 6 – Matriz com níveis das estimativas dos critérios de escolha <i>fuzzy</i> agregados	35
Tabela 7 – Projetos de planejamento de expansão	56
Tabela 8 – Níveis de concordância e consenso 1 ^a iteração critério Inovação	58
Tabela 9 – Níveis de concordância e consenso 2 ^a iteração critério Inovação	59
Tabela 10 – Níveis de concordância e consenso 3 ^a iteração critério Inovação	59
Tabela 11 – Coeficientes de importância dos DMs	60
Tabela 12 – Níveis de concordância e consenso 1 ^a iteração critério Risco Ambiental	61
Tabela 13 – Níveis de concordância e consenso 2 ^a iteração critério Risco Ambiental	62
Tabela 14 – Alternativas de solução dos 7 cenários	65
Tabela 15 – Matriz de <i>payoff</i> e estimativas de critérios de escolha para $F_1(X_k)$. . .	65
Tabela 16 – Matriz de <i>payoff</i> e estimativas de critérios de escolha para $F_2(X_k)$. . .	65
Tabela 17 – Matriz de <i>payoff</i> e estimativas de critérios de escolha para $F_3(X_k)$. . .	66
Tabela 18 – Matriz de <i>payoff</i> e estimativas de critérios de escolha para $F_4(X_k)$. . .	66
Tabela 19 – Matriz modificada com estimativas de critérios de escolha	66
Tabela 20 – Matriz com níveis de estimativas de critérios de escolha <i>fuzzy</i> agregados	67

LISTA DE SIGLAS

AIC	Agregação de preferências individuais por critério
AIE	Agregação de avaliações individuais. Acrônimo de <i>Aggregation of individual evaluations</i>
AR	Agregação de resultados individuais
AHP	Método de Análise Hierárquica. Acrônimo de <i>Analytic Hierarchy Process</i>
DM	Tomador de Decisão. Acrônimo de <i>Decision Maker</i>
FO	Função Objetivo
OWA	Operador de agregação por média ponderada ordenada. Acrônimo de <i>Ordered Weighted Averaging</i>
R	Relação entre conjuntos
RM	Relação de preferência multiplicativa
RN	Relação de preferência <i>fuzzy</i> não-recíproca
RR	Relação de preferência <i>fuzzy</i> recíproca aditiva

LISTA DE SÍMBOLOS

A_p	p -ésimo conjunto <i>fuzzy</i>
B_{\max}	Limite superior da agregação para criação de cenários com sequência $LP\tau$
B_{\min}	Limite inferior da agregação para criação de cenários com sequência $LP\tau$
$Ca(x_k)$	Nível de consenso do grupo por alternativa
C_G	Nível de consenso do grupo
C_q	q -ésimo critério
F	Vetor de funções objetivo
F^H	Função objetivo para critério de escolha de Hurwicz
F^L	Função objetivo para critério de escolha de Laplace
F^S	Função objetivo para critério de escolha de Savage
F^W	Função objetivo para critério de escolha de Wald
\bar{F}	Nível médio da função objetivo
F^{\max}	Nível máximo da função objetivo
F^{\min}	Nível mínimo da função objetivo
F_p	p -ésima função objetivo
L	Formato de preferência Estimativas <i>fuzzy</i>
M	Matriz de relações de preferência multiplicativa
O	Formato de preferência Ordem das Alternativas
Sa^y	Nível de concordância da alternativa para o y -ésimo
W	Conjunto e/ou vetor de elementos w_i
X	Conjunto e/ou vetor de elementos e/ou alternativas x_i
X^0	Solução ótima.
X_k	k -ésima alternativa de solução
$\langle X, F \rangle$	Modelo de tomada de decisões multiobjetivo

$\langle X, R \rangle$	Modelo de tomada de decisões multiatributo
λ_{\max}	Máximo autovalor de uma matriz
$\mu_A(x)$	Nível de pertinência de um elemento x a um conjunto <i>fuzzy</i> A
μ_D	Valor de pertinência agregado das funções objetivo
$\mu_{A_p}^H$	Nível de pertinência da p -ésima função objetivo para critério de escolha de Hurwicz
μ_D^H	Nível de pertinência agregado para critério de escolha de Hurwicz
$\mu_{A_p}^L$	Nível de pertinência da p -ésima função objetivo para critério de escolha de Laplace
μ_D^L	Nível de pertinência agregado para critério de escolha de Laplace
$\mu_{A_p}^S$	Nível de pertinência da p -ésima função objetivo para critério de escolha de Savage
μ_D^S	Nível de pertinência agregado para critério de escolha de Savage
$\mu_{A_p}^W$	Nível de pertinência da p -ésima função objetivo para critério de escolha de Wald
μ_D^W	Nível de pertinência agregado para critério de escolha de Wald

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Objetivos	24
1.2	Estrutura do Trabalho	25
2	MODELOS E MÉTODOS DE TOMADA DE DECISÃO . . .	27
2.1	Problemas de Otimização e Tomada de Decisão Multicritério	27
2.2	Esquema Geral de Tomada de Decisão em Condições de In- certeza	28
2.3	Extensão do Esquema Geral de Tomada de Decisão em Con- dições de Incerteza para o Uso de Informações Qualitativas .	36
2.3.1	<i>Representação das Preferências</i>	37
2.3.2	<i>Uniformização das Preferências em Relações Multiplicativas</i>	39
2.3.3	<i>Definição de Vetores de Preferência através da Aplicação do Processo de Hierarquia Analítica</i>	40
2.3.4	<i>Agregação de Preferências e Geração de Cenários</i>	41
2.4	Construção de Consenso na Tomada de Decisão em Grupo . .	43
2.4.1	<i>Uniformização das Preferências em Relações de Preferên- cias Fuzzy Não-Recíproca</i>	43
2.4.2	<i>Obtenção dos Coeficientes de Importância dos Decisores</i> . .	44
2.4.3	<i>Agregação das Preferências</i>	45
2.4.4	<i>Medidas de Consenso e Concordância entre o Grupo</i>	48
3	METODOLOGIA	51
4	RESULTADOS	55
5	CONCLUSÕES	69
5.1	Trabalhos Futuros	69
	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

As atividades de planejamento (estratégico, inovação, novos negócios, expansão, etc.) têm se tornado cada vez mais complexas e a necessidade de equilibrar objetivos conflitantes e tomar decisões com múltiplos critérios é inevitável (FERREIRA, 2016). Dessa forma, as empresas buscam fundamentar os seus procedimentos em metodologias consolidadas e aumentar a efetividade das decisões tomadas através da utilização de ferramentas de apoio para a elaboração do planejamento e para o acompanhamento das ações decorrentes (QUEIROZ, 2009).

Entre as várias questões relacionadas às atividades de planejamento, sempre surgem duas questões fundamentais: “O que fazer?” e “Como fazer?”. Para responder a esta primeira questão fundamental, Ekel (2002) propôs a construção e análise do modelo $\langle X, R \rangle$ associados à avaliação, comparação, escolha, priorização, e/ou ordenação de soluções ou alternativas (ações estratégicas, projetos de inovação, planos de expansão, etc.). Essas etapas exigem análise de informações relacionadas a diferentes perspectivas ou critérios, como atratividade do investimento, nível de inovação, efeito político e expansão, cuja essência quando qualitativa tem como base o conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos e/ou quando quantitativa tem como base medições com diferentes níveis de incertezas (HWANG; YOON, 1981; PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011).

A segunda questão fundamental (“como fazer?”) está associada à alocação racional de recursos (financeiros, humanos, logísticos, etc.) ou de déficit de recursos, entre consumidores (projetos, setores, estratégias, etc.) em busca de alcançar os objetivos e metas com máxima satisfação (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). Embora essa alocação tenha como base a aplicação de informações quantitativas e qualitativas, na prática, ela é realizada considerando-se apenas informações quantitativas, geralmente ignorando completamente sua incerteza. Entretanto, surgem situações, por exemplo, no planejamento estratégico, quando riscos e incertezas são tão críticos quanto a questão dos objetivos conflitantes. Em tais situações, é necessária uma modelagem mais formal das incertezas (FIGUEIRA; GRECO; EHRGOTT, 2005).

Para solução desta classe de problemas, Ekel (2002) propôs a construção e análise do modelo $\langle X, F \rangle$, associados à escolha de soluções ou alternativas com base em funções objetivo, que quando combinada com os resultados de Ekel et al. (2016) e Pereira et al. (2015) consegue de maneira satisfatória atender a objetivos elaborados com base em informações quantitativas mesmo em condições de incertezas. Dessa forma, o esquema geral proposto em Pereira et al. (2015) permite realizar a análise multicritério em condições de incerteza com base na abordagem possibilista (considerando-se combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários) direcionado ao uso de informações quantitativas disponíveis em um nível máximo para reduzir as regiões de incerteza de

decisão. Caso a capacidade de resolução do processamento de informações quantitativas não permita obter soluções únicas, o esquema pressupõe a aplicação de informações de caráter qualitativo na fase final da tomada de decisão.

Contudo, há diversas classes de problemas cuja essência requer a consideração de objetivos formados com base em critérios quantitativos e qualitativos (atratividade do investimento, efeito político, flexibilidade de manutenção, etc.), em todas as etapas do processo de decisão. Considerando isso, os resultados recentes de Ramalho et al. (2019) visam à produção de soluções multicritério, incluindo soluções robustas, com o uso imediato das informações qualitativas e quantitativas, fornecendo um processo de fusão de informações nos modelos $\langle X, F \rangle$.

A formação e o uso de informações qualitativas em Ramalho et al. (2019) estão associados a preferências individuais de especialistas, processadas e agregadas, dentro de um modelo de tomada de decisão multicritério em grupo com base em uma abordagem simplista, sem construir e analisar diversos tipos de medidas de consenso. Considerando isso, o presente estudo, que é um desenvolvimento natural dos resultados de Ramalho et al. (2019), está relacionado à construção de combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários com o uso direto de informações qualitativas, com base nas preferências individuais dos especialistas após estabelecer consenso dentro do grupo. Em particular, trabalha-se na análise dos modelos $\langle X, R \rangle$, propondo um esquema de consenso para a tomada de decisões em grupo, abordando diferentes formatos de representação de preferência, sua uniformização e agregação, aplicando medidas de consenso e concordância que regulam o fluxo de informações. Além disso, aplica-se métodos eficazes para determinar o peso de especialistas e métodos racionais para conduzir o processo de tomada de decisão, tornando possível superar dificuldades inerentes às abordagens tradicionais (BERNARDES et al., 2008; EKEL et al., 2009; KOKSALMIS; KABAK, 2019; PARREIRAS et al., 2010).

Cabrerizo et al. (2017), Dong et al. (2015) e Ramanathan e Ganesh (1994) enfatizam a importância de alcançar um nível satisfatório de concordância entre os membros do grupo, para que a solução encontrada expresse o resultado mais unânime possível. Isso é confirmado pelo presente trabalho, cujos resultados permitem reduzir o nível de incerteza dos coeficientes das funções objetivo consideradas na análise de modelos $\langle X, F \rangle$ em condições de incerteza. Um exemplo de aplicação demonstra essa consideração, bem como a possibilidade de obter uma decisão mais coerente e consistente, usando os resultados do presente trabalho.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é propor um esquema de consenso na tomada de decisão multicritério em grupo para a construção das estimativas dos coeficientes de funções objetivo que sejam compatíveis com a análise de modelos $\langle X, F \rangle$ a partir de

informações qualitativas. Em tese, utilizar as preferências dos especialistas quando se obtém um nível satisfatório de concordância reduz regiões de incerteza de decisão.

Na construção do consenso, técnicas para derivar os pesos dos especialistas são apresentadas e questionadas, além de lidar com dificuldades apresentadas em abordagens tradicionais. Para alcance do objetivo principal é necessário a aplicação da análise de modelos $\langle X, R \rangle$ (elicitação das preferências, uniformização, agregação e consenso) e de modelos $\langle X, F \rangle$ (modelagem e aplicação do esquema geral para resolução de um problema multiobjetivo), além da obtenção e agregação dos vetores de pesos para tornar as informações compatíveis ao modelo $\langle X, F \rangle$. Levando em consideração que essas técnicas são de caráter universal, seu aperfeiçoamento e desenvolvimento apresentam um outro objetivo do presente trabalho.

1.2 Estrutura do Trabalho

Além do presente capítulo, este trabalho apresenta outros 4 capítulos. O capítulo 2 apresenta os modelos e métodos de tomada de decisão, abordando o esquema geral da tomada de decisão multicritério em condições de incerteza, procedimentos para a formação de informações qualitativas com base em estimativas de preferências de especialistas individuais, e procedimentos para a construção de consenso entre as preferências dos especialistas. O capítulo 3 apresenta a metodologia para a formação e o uso de informações qualitativas com base em estimativas de preferências de especialistas do grupo, com a construção de um consenso entre os membros do grupo. No capítulo 4 a metodologia proposta é aplicada a um problema de alocação de recursos financeiros no planejamento da expansão. Finalmente, o capítulo 5 apresenta as conclusões.

2 MODELOS E MÉTODOS DE TOMADA DE DECISÃO

Este capítulo apresenta os fundamentos e as principais ferramentas para suporte à tomada de decisão multicritério em condições de incertezas que foram usadas com correspondente adaptação no desenvolvimento do presente trabalho.

2.1 Problemas de Otimização e Tomada de Decisão Multicritério

Segundo Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011), um problema de otimização é caracterizado, principalmente, por ser descrito por uma função objetivo ($F(X)$), para a qual se busca um extremo, máximo ou mínimo, observado um conjunto de restrições, como:

$$F_p(X) \rightarrow \underset{X \in L}{\text{extr}}, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (1)$$

e sua descrição matemática é suficiente para aquisição de uma única solução X^0 tal que

$$X^0 = \underset{X \in L}{\text{arg extr}} F(X) \quad (2)$$

sendo L o conjunto de soluções factíveis em \mathbb{R}^n e $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Para a solução de problemas de otimização, alguma intervenção humana é admitida apenas para redução do tempo computacional necessário para se obter uma solução, por exemplo, através da inserção de alguma heurística ou determinando o ponto inicial de busca. Caso, por qualquer outro motivo, como incerteza e/ou insuficiência dos dados e custo computacional, a obtenção de uma solução única para o problema dependa de intervenção humana, passa-se então para a classe dos problemas de tomada de decisão.

Devido à complexidade dos problemas de tomada de decisão, a necessidade de equilibrar objetivos conflitantes e tomar decisões com múltiplos critérios é inevitável, fazendo-se necessário a utilização da abordagem multicritério dos problemas de tomada de decisão. Em Hwang e Yoon (1981), os autores propõem a divisão dos problemas de tomada de decisão em duas classes, que são os problemas multiobjetivo e os problemas multiatributo.

Nos problemas multiobjetivo, o espaço de busca é contínuo e o decisor lida com objetivos não-comensuráveis e conflitantes entre si. A modelagem é feita através de um vetor de variáveis, um vetor de funções objetivo e de restrições. Neste caso, a tarefa é otimizar todas as funções objetivo simultaneamente.

Os problemas multiatributo podem ser genericamente definidos como um conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e conjunto de critérios $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$, sendo que cada critério corresponde a um dos pontos de vista segundo o qual as alternativas são avaliadas e comparadas pelo tomador de decisão (DM).

Com base nas características distintas dessas duas classes de problemas, Ekel (2002) propôs a criação de dois tipos de modelos para tomada de decisão multicritério em ambiente *fuzzy*, que são os modelos $\langle X, R \rangle$ para problemas multiatributo e os modelos $\langle X, M \rangle$ para problemas multiobjetivo, posteriormente denominados $\langle X, F \rangle$.

Ao elaborar esses modelos, Ekel (2002) associou as perguntas “o que fazer?” e “como fazer?” a cada um dos modelos, respectivamente. Dadas as incertezas acima apresentadas, em uma modelagem mais formal, Pereira et al. (2015) propuseram uma maneira satisfatória para atender aos objetivos elaborados com base em informações quantitativas mesmo em condições de incertezas. Essa abordagem é discutida a seguir.

2.2 Esquema Geral de Tomada de Decisão em Condições de Incerteza

Para tratar de forma racional com o fator de incerteza na tomada de decisão multiobjetivo, Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) desenvolveram uma abordagem associada à generalização da abordagem clássica para considerar a incerteza da informação na tomada de decisão monocritério discutida em Luce e Raiffa (1958) e Raiffa (1968). A abordagem clássica está associada à construção e análise das chamadas matrizes de *payoff*, refletindo efeitos que podem ser obtidos para diferentes combinações de alternativas de solução e combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários, para gerar soluções robustas.

Belyaev (1977) lista etapas necessárias à aplicação da abordagem clássica, associadas a: (a) formulação matemática do problema; (b) Construção das combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários; (c) Definição de alternativas de solução; (d) Construção de matrizes de *payoff*; (e) Análise de matrizes de *payoff* e escolha de soluções racionais.

Na formulação matemática do problema, a incerteza dos dados iniciais requer a transformação das funções objetivo tradicionais ($F_p(X), p = 1, 2, \dots, q$), visto que estas devem incluir a descrição correspondente da incerteza nos coeficientes das funções. Para isso, Ekel et al. (2016) e Ramalho et al. (2019) expressam os coeficientes na forma intervalar, assim as funções objetivo podem ser representadas por:

$$F_p(X) = \sum_{k=1}^n [c'_{pk}, c''_{pk}] x_k, \quad p = 1, 2, \dots, q, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

sendo c'_{pk} e c''_{pk} os limites inferior e superior, respectivamente, dos $c_{pk}, p = 1, 2, \dots, q, k = 1, 2, \dots, n$.

Para a construção das combinações representativas dos dados iniciais, Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) e Pereira et al. (2015) recomendam a utilização da sequência LP_τ , proposta em Sobol' (1979), buscando criar cenários equilibrados misturando situações

pessimistas e otimistas entre as variáveis.

A sequência LP_τ é um método para geração de números quase aleatórios, permitindo determinar pontos uniformemente distribuídos Q_s , $s = 1, 2, \dots, S$, sendo S o número da combinação representativa de dados iniciais, estados da natureza ou cenários, com coordenadas q_{st} , $s = 1, 2, \dots, S$, $t = 1, 2, \dots, T$, no hipercubo unitário Q^T , sendo T o número de coeficientes de funções objetivo. Os pontos da sequências uniformemente distribuídos em Q^T podem ser transformados no hipercubo C^T definido pelo limite inferior c'_t e superior c''_t , $t = 1, 2, \dots, T$, dos coeficientes correspondentes c'_{pk} e c''_{pk} , $p = 1, 2, \dots, q$, $k = 1, 2, \dots, n$, para a função objetivo (3) da seguinte forma:

$$c_{st} = c'_t + (c''_t - c'_t)q_{st}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4)$$

para formar uma sequência uniformemente distribuída em C^T .

O uso de (4) serve para construir problemas multiobjetivo com coeficientes determinísticos. Considerando isso, com base em (3), as funções objetivo para cada cenário Y_s , $s = 1, 2, \dots, S$, podem ser escritas no formato:

$$F_p(X, Y_s) = \sum_{k=1}^n c_{pks} x_k, \quad p = 1, 2, \dots, q, \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (5)$$

A definição de alternativas de solução é reduzida à análise dos modelos $\langle X, F \rangle$ quando um vetor de funções objetivo $F(X) = \{F_1(X), F_2(X), \dots, F_p(X), \dots, F_q(X)\}$ é considerado, e o problema é a otimização simultânea de todos eles, conforme apresentado em (1).

A etapa formal na análise dos modelos $\langle X, F \rangle$, como apresentado em (1), é a determinação de um conjunto de soluções ótimas de Pareto $\Omega \in L$ (EHRGOTT, 2005; HWANG; MASUD, 1979). Esta etapa é útil, mas não permite obter soluções únicas. Dessa forma, é necessário aplicar informações fornecidas pelo tomador de decisão para escolher uma solução Pareto específica. Neste ponto, como encontrar uma solução única depende do especialista, passa-se para a ciência da tomada de decisão. Existem três abordagens para o especialista acrescentar essas novas informações ao modelo (COELLO, 2003; PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011): *a priori*, *a posteriori* e adaptável. Ao usar a última, a melhoria da solução é realizada como transições de $X_\alpha^0 \in \Omega \subseteq L$ para $X_{\alpha+1}^0 \in \Omega \subseteq L$ considerando as informações X_α do especialista na etapa α .

Diversas abordagens foram propostas para reduzir o conjunto de soluções de Pareto em problemas multiobjetivo (EHRGOTT, 2005; HWANG; MASUD, 1979), mas há que se discutir a qualidade das soluções encontradas. Não é difícil discutir sobre a qualidade das soluções quando todos os objetivos têm o mesmo nível de importância, o que não acontece em caso contrário. Para tornar possível a discussão acerca da qualidade das soluções encontradas, Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) introduziram o conceito de

soluções harmoniosas: soluções que atendem de maneira equilibrada a todos os objetivos; e propuseram utilizar a abordagem Bellman-Zadeh como maneira de encontrá-las. Outras abordagens podem levar a soluções com altos níveis de satisfação de alguns objetivos, alcançados por baixos níveis de satisfação de outros objetivos (EKEL; GALPERIN, 2003; PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011).

A complexidade metodológica básica na análise de modelos multiobjetivo é a falta de clareza do conceito de “solução ótima”. Ao utilizar a abordagem de Bellman-Zadeh (BELLMAN; ZADEH, 1970; PEDRYCZ; GOMIDE, 1998), esse conceito é definido como o grau máximo de implementação de todos os objetivos, em conformidade com o princípio do resultado garantido e permite produzir soluções harmoniosas.

Ao aplicar a abordagem de Bellman-Zadeh à tomada de decisão multiobjetivo, as funções objetivo, $F_p(X), p = 1, 2, \dots, q$, são substituídas por conjuntos *fuzzy* $A_p = \{X, \mu_{A_p}(X)\}, p = 1, 2, \dots, q$, sendo $\mu_{A_p}(X)$ a função de pertinência de A_p , que permite construir uma solução definida como $D = \bigcap_{p=1}^q A_p$ com a seguinte função de pertinência:

$$\mu_D(X) = \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X), \quad X \in L \quad (6)$$

A partir do uso de (6), é possível obter a seguinte solução:

$$\max \mu_D(X) = \max_{X \in L} \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X) \quad (7)$$

Portanto, a solução de (7) pode ser descrita como:

$$X^0 = \arg \max_{X \in L} \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X) \quad (8)$$

As funções de pertinência $\mu_{A_p}(X), p = 1, 2, \dots, q$, que refletem o grau de pertencimento da própria otimalidade em $F_p(X), X \in L, p = 1, 2, \dots, q$, podem ser expressas da seguinte maneira (EKEL, 2002; PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011):

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)}{\max_{X \in L} F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (9)$$

para funções objetivo de maximização e

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{\max_{X \in L} F_p(X) - F_p(X)}{\max_{X \in L} F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (10)$$

para funções objetivo de minimização, sendo $\lambda_p, p = 1, 2, \dots, q$, os coeficientes de importância da correspondente função objetivo (PEREIRA et al., 2015).

Usando (8) para resolver o problema (6), é possível obter S soluções correspondentes aos cenários considerados. No conjunto de S soluções, um subconjunto de K soluções

diferentes ($X_k, k = 1, 2, \dots, K$) é selecionado para a construção de matrizes de *payoff*. Considerando as soluções $X_k, k = 1, 2, \dots, K$, e as combinações representativas dos dados iniciais, estados da natureza ou cenários $Y_s, s = 1, 2, \dots, S$, pode-se construir a matriz de *payoff* (Tabela 1), aplicando cada solução $X_k, k = 1, 2, \dots, K$, a cada função objetivo $F_p(X_k, Y_s), p = 1, 2, \dots, q$, para todos os cenários $Y_s, s = 1, 2, \dots, S$.

Tabela 1 – Matriz *payoff* para a p -ésima função objetivo

	Y_1	\dots	Y_s	\dots	Y_S
X_1	$F_p(X_1, Y_1)$	\dots	$F_p(X_1, Y_s)$	\dots	$F_p(X_1, Y_S)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_k	$F_p(X_k, Y_1)$	\dots	$F_p(X_k, Y_s)$	\dots	$F_p(X_k, Y_S)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_K	$F_p(X_K, Y_1)$	\dots	$F_p(X_K, Y_s)$	\dots	$F_p(X_K, Y_S)$

Fonte: Pereira et al. (2015)

A análise das matrizes de *payoff* e a escolha das alternativas da solução racional tem como base o uso dos chamados critérios de escolha (BELYAEV, 1977; LUCE; RAIFFA, 1958; RAIFFA, 1968; WEBSTER, 2003). Dentre as inúmeras formas de se escolher racionalmente entre uma ou outra alternativa, encontram-se em evidência os critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, que são utilizados em Ekel, Martini e Palhares (2008), Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) e Pereira et al. (2015). Seu uso está associado às seguintes estimativas de características:

- a. A função objetivo de menor retorno é utilizada quando se objetiva a minimização do problema e determina a possibilidade de menor retorno da alternativa. Representa a alternativa mais pessimista, e pode ser descrita por:

$$F^{\min}(X_k) = \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (11)$$

- b. A função objetivo de maior retorno é utilizada quando se objetiva a maximização do problema e determina a possibilidade de maior retorno da alternativa. Representa a alternativa mais otimista, e pode ser descrita por:

$$F^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (12)$$

- c. A função objetivo de retorno médio da alternativa apresenta o valor esperado da alternativa, e pode ser descrita por:

$$\bar{F}(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s) \quad (13)$$

- d. A função objetivo de arrependimento máximo da alternativa representa um gasto excessivo que ocorre na escolha de uma combinação de uma respectiva alternativa em um cenário, ao invés da escolha da alternativa ótima local para aquele cenário. Esta função pode ser descrita por:

$$R^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R(X_k, Y_s) \quad (14)$$

Para determinar o arrependimento (risco) $R(X_k, Y_s)$, é necessário definir para cada cenário, os valores máximos (12), se o objetivo é a maximização da função objetivo, ou os valores mínimos (11), se o objetivo é a minimização. Para tal, dispõe-se da utilização da matriz de riscos (Tabela 2), que apresenta o risco associado com a alternativa X_k e com o cenário Y_s . Esse risco pode ser descrito pelas seguintes equações, se, respectivamente, o objetivo é a maximização ou a minimização:

$$R(X_k, Y_s) = F^{\max}(Y_s) - F(X_k, Y_s) \quad (15)$$

$$R(X_k, Y_s) = F(X_k, Y_s) - F^{\min}(Y_s) \quad (16)$$

Tabela 2 – Matriz de risco para a p -ésima função objetivo

	Y_1	\dots	Y_s	\dots	Y_S	$R^{\max}(X_k)$
X_1	$R_p(X_1, Y_1)$	\dots	$R_p(X_1, Y_s)$	\dots	$R_p(X_1, Y_S)$	$R^{\max}(X_1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_k	$R_p(X_k, Y_1)$	\dots	$R_p(X_k, Y_s)$	\dots	$R_p(X_k, Y_S)$	$R^{\max}(X_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_K	$R_p(X_K, Y_1)$	\dots	$R_p(X_K, Y_s)$	\dots	$R_p(X_K, Y_S)$	$R^{\max}(X_K)$

Fonte: Pereira et al. (2015)

Todas as estimativas de características podem ser representadas como uma matriz (Tabela 3). Utilizando-as, é possível apresentar os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, representados abaixo sob o pressuposto de que a função objetivo deve ser minimizada.

- a. O critério de Wald, utiliza a estimativa $F^{\max}(X_k)$, representada por X^W , deve ser a alternativa que possui o menor valor da respectiva estimativa. Ou seja, entre as melhores, se escolhe a pior.

$$\min_{1 \leq k \leq K} F^{\max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (17)$$

- b. O critério de Laplace utiliza a estimativa $\bar{F}(X_k)$ e estipula que a alternativa a ser escolhida, representada por X^L , deve possuir o menor valor da respectiva estimativa.

$$\min_{1 \leq k \leq K} \bar{F}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s) \quad (18)$$

- c. O critério de Savage está correlacionado com a utilização da estimativa $R^{\max}(X_k)$, que atinge o valor mínimo quando escolhida a alternativa X^S .

$$\min_{1 \leq k \leq K} R^{\max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} R(X_k, Y_s) \quad (19)$$

- d. Por fim, o critério de Hurwicz utiliza uma combinação linear das estimativas $F^{\max}(X_k)$ e $F^{\min}(X_k)$, cuja combinação atinge seu valor mínimo quando escolhida a alternativa X^H .

$$\min_{1 \leq k \leq K} \left[\alpha F^{\max}(X_k) + (1-\alpha) F^{\min}(X_k) \right] = \min_{1 \leq k \leq K} \left[\alpha \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) + (1-\alpha) \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \right] \quad (20)$$

sendo $\alpha \in [0, 1]$ o coeficiente de “pessimismo-otimismo” e sua magnitude definida previamente por um especialista.

Tabela 3 – Matriz com estimativas de características para a p -ésima função objetivo

	$F_p^{\max}(X_k)$	$F_p^{\min}(X_k)$	$\bar{F}_p(X_k)$	$R_p^{\max}(X_k)$
X_1	$F_p^{\max}(X_1)$	$F_p^{\min}(X_1)$	$\bar{F}_p(X_1)$	$R_p^{\max}(X_1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_k	$F_p^{\max}(X_k)$	$F_p^{\min}(X_k)$	$\bar{F}_p(X_k)$	$R_p^{\max}(X_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_K	$F_p^{\max}(X_K)$	$F_p^{\min}(X_K)$	$\bar{F}_p(X_K)$	$R_p^{\max}(X_K)$

Fonte: Pereira et al. (2015)

A abordagem de tomada de decisão em ambientes de incerteza está associada com a análise das equações (17)-(20) para uma função objetivo qualquer nos vários cenários $Y_s, s = 1, \dots, S$. Para isso, considera-se (EKEL et al., 2016; EKEL; PEDRYCZ; PEREIRA, 2019; PEREIRA et al., 2015) os próprios critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, respectivamente, como funções objetivo para a p -ésima função objetivo, e se obtém:

$$F_p^W(X_k) = F_p^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (21)$$

$$F_p^L(X_k) = \bar{F}_p(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F_p(X_k, Y_s) \quad (22)$$

$$F_p^S(X_k) = R_p^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R_p(X_k, Y_s) \quad (23)$$

$$F_p^H(X_k) = \alpha F_p^{\max}(X_k) + (1 - \alpha) F_p^{\min}(X_k) = \alpha \max_{1 \leq s \leq S} F_p(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \min_{1 \leq s \leq S} F_p(X_k, Y_s) \quad (24)$$

A representação dos critérios de escolha como funções objetivo permite que se construa q problemas que geralmente contêm quatro ou menos funções objetivo (PEREIRA et al., 2015) da seguinte forma:

$$F_{r,p}(X) \rightarrow \text{extr}_{X \in L}, \quad r = 1, 2, \dots, M \leq 4, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (25)$$

sendo $F_{1,p}(X) = F_p^W(X_k)$, $F_{2,p}(X) = F_p^L(X_k)$, $F_{3,p}(X) = F_p^S(X_k)$ e $F_{4,p}(X) = F_p^H(X_k)$.

Aplicando (25) às q matrizes com estimativas características (Table 3), é possível construir q matrizes com as estimativas de critérios de escolha mostrados na Tabela 4, que refletem desempenho de cada alternativa de solução com base nos critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz.

Tabela 4 – Matriz com estimativas de critério de escolha para a p -ésima função objetivo

	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
X_1	$F_p^W(X_1)$	$F_p^L(X_1)$	$F_p^S(X_1)$	$F_p^H(X_1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_k	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_K	$F_p^W(X_K)$	$F_p^L(X_K)$	$F_p^S(X_K)$	$F_p^H(X_K)$
	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$
	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$

Fonte: Pereira et al. (2015)

A aplicação de (9) ou (10) à matriz com as estimativas de critérios de escolha da Tabela 4 permite construir as funções de associação para $F_{r,p}(X)$, $r = 1, 2, \dots, M$, para obter os níveis dos critérios de escolha *fuzzy* para a p -ésima função objetivo (Tabela 5).

Continuando a análise com os dados da Tabela 5, é possível aplicar (6) para X_k , $k = 1, 2, \dots, K$, para construir a matriz com estimativas de critérios de escolha *fuzzy* agregadas, como é mostrado na Tabela 6. Por fim, usa-se (7) considerando as estimativas apresentadas na Tabela 6 para encontrar as melhores alternativas de solução para cada critério de escolha.

Considerando o exposto acima, o esquema geral de tomada de decisão multicritério em condições de incerteza proposto por Pereira et al. (2015) está associado às etapas abaixo. A Figura 1 mostra um fluxograma-resumo desse esquema proposto.

Tabela 5 – Matriz modificada com estimativas de critérios de escolha para a p -ésima função objetivo

	$\mu_{A_p}^W(X_k)$	$\mu_{A_p}^L(X_k)$	$\mu_{A_p}^S(X_k)$	$\mu_{A_p}^H(X_k)$
X_1	$\mu_{A_p}^W(X_1)$	$\mu_{A_p}^L(X_1)$	$\mu_{A_p}^S(X_1)$	$\mu_{A_p}^H(X_1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_k	$\mu_{A_p}^W(X_k)$	$\mu_{A_p}^L(X_k)$	$\mu_{A_p}^S(X_k)$	$\mu_{A_p}^H(X_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_K	$\mu_{A_p}^W(X_K)$	$\mu_{A_p}^L(X_K)$	$\mu_{A_p}^S(X_K)$	$\mu_{A_p}^H(X_K)$

Fonte: Pereira et al. (2015)

Tabela 6 – Matriz com níveis das estimativas dos critérios de escolha *fuzzy* agregados

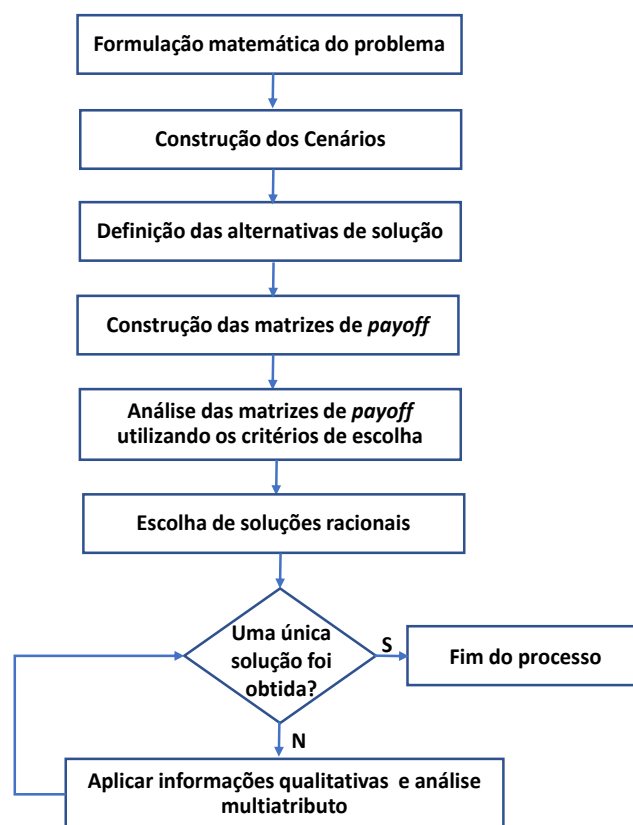
	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
X_1	$\mu_D^W(X_1)$	$\mu_D^L(X_1)$	$\mu_D^S(X_1)$	$\mu_D^H(X_1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_k	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_K	$\mu_D^W(X_K)$	$\mu_D^L(X_K)$	$\mu_D^S(X_K)$	$\mu_D^H(X_K)$
	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^S(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^H(X_k)$

Fonte: Pereira et al. (2015)

- A *primeira etapa* consiste na construção de q matrizes de *payoff*. Para construir matrizes de *payoff* é necessário resolver S problemas multicritério formalizados dentro da estrutura dos modelos $\langle X, F \rangle$. Resolvendo-os, é possível obter a alternativas de solução $X_k, k = 1, 2, \dots, K$, para $K \leq S$. Por conseguinte, $X_k, k = 1, 2, \dots, K$, são substituídas nas funções objetivo $F_p(X), k = 1, 2, \dots, K$, para os cenários $Y_s(X), s = 1, 2, \dots, S$. Essas substituições proporcionam as q matrizes de *payoff*.
- A *segunda etapa* é relacionada à análise das matrizes de *payoff* obtidas, sendo a execução dessa etapa a consideração dos critérios de escolha como funções objetivo, abordagem apresentada acima. Entretanto, a capacidade insuficiente de resolução dessa etapa pode ocasionar em soluções não únicas e essa circunstância exige a aplicação da *terceira etapa*.
- A *terceira etapa* é associada com a construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$ para a redução das regiões de incerteza na decisão. Como indicado em Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) e Pereira et al. (2015), o uso desses modelos permite que se leve em consideração na análise de informações de caráter qualitativos, que se baseiam no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos.

A análise multiobjetivo, realizada dessa maneira, é eficaz para lidar com a incerteza e garante a escolha das alternativas de solução racional de acordo com o princípio da

Figura 1 – Esquema geral para tomada de decisão multicritério em condições de incertezas



Fonte: Elaborada pela autora.

otimização de Pareto (EKEL; PEDRYCZ; PEREIRA, 2019; PEREIRA et al., 2015). Porém, como indicado por Ramalho et al. (2019), o esquema proposto por Pereira et al. (2015) admite a inclusão de objetivos de caráter qualitativo na etapa final do processo, e cada vez mais surgem problemas que requerem a análise de objetivos de caráter qualitativo desde a etapa inicial do processo. Dessa forma, Ramalho et al. (2019) desenvolveram uma abordagem, tópico seguinte, para construção de funções objetivo compatíveis com a análise de modelos $\langle X, F \rangle$ a partir de informações qualitativas.

2.3 Extensão do Esquema Geral de Tomada de Decisão em Condições de Incerteza para o Uso de Informações Qualitativas

A aplicação dos resultados de Ramalho et al. (2019) está associada aos seguintes estágios: (a) Elicitação de preferências; (b) Representação de preferências dentro de relações de preferência multiplicativas; (c) Definição de vetores de preferência através da aplicação do Processo de Análise Hierárquica (AHP, acrônimo de Analytic Hierarchy Process) (SAATY, 1980); (d) Agregação de preferências e geração de combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários. Esses estágios são detalhados nas seções seguintes.

2.3.1 Representação das Preferências

As funções objetivo formadas com base em informações qualitativas devem incluir elementos que refletem as preferências de um ou mais especialistas envolvidos por uma alternativa viável em relação à outra, expressos pelas estruturas ou formatos de preferências correspondentes. Há na literatura oito formatos diferentes para se expressar preferências entre alternativas (ZHANG; CHEN; CHONG, 2004), visto que, no processo decisório, é comum que cada profissional envolvido tenha sua própria percepção do problema, uma forma diferente de pensar ou acesso a diferentes fontes de informação. Assim, é importante apresentar os vários formatos de preferência para que cada um escolha o formato de sua preferência para se expressar (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011).

Em particular, Ekel, Pedrycz e Pereira (2019) e Ramalho et al. (2019) apresentam cinco formatos fundamentais, e respectivos exemplos, que podem ser usados para estabelecer preferências. Através desses formatos é possível preparar as informações para a grande maioria dos problemas de tomada de decisão em situações reais. A seguir é detalhado os formatos considerados na literatura.

A ordenação de alternativas (*OA*) é utilizado, principalmente, quando o especialista responsável pela tomada de decisão pode não saber dizer quão melhor é uma alternativa em relação à outra, mas ele sabe ordenar as alternativas em termos de preferência absoluta¹. A ordenação das alternativas é expressa através de um vetor $O = [o(x_1), o(x_2), \dots, o(x_n)]$, onde $o(x_k)$ é uma função de permuta que retorna a posição da alternativa x_k dentre os valores inteiros $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, sendo 1 a melhor alternativa e n a pior.

Na estimativa *fuzzy* (*EF*) os elementos de X podem ser diretamente avaliados pelos especialistas utilizando um conjunto de estimativas $L = \{l(x_1), l(x_2), \dots, l(x_n)\}$, sendo $l(x_k)$ a estimativa *fuzzy* associada à alternativa x_k sob a ótica do critério C . A estimativa *Fuzzy* é um número *fuzzy* que pode ser especificado diretamente ou através de uma variável linguística S , por exemplo, $S(F) = \{\text{muito pobre, pobre, médio, bom, muito bom}\}$; neste caso, a variável linguística deve ser traduzida em uma estimativa *fuzzy*.

A relação de preferência multiplicativa pode ser representada por uma matriz $RM_{n \times n}$ recíproca e positiva que reflete a intensidade de preferência relativa entre as n alternativas. Cada uma das entradas $RM(x_l, x_k)$ representa uma razão de intensidade de preferência que pode ser interpretada como “ x_k é $RM(x_l, x_k)$ vezes mais dominante que x_l ” (SAATY, 1980) ou “ x_k é $RM(x_l, x_k)$ vezes tão bom quanto x_l ” (CHICLANA; HERRERA; HERRERA-VIEDMA, 2001).

Dizer que uma matriz é recíproca significa que uma vez atribuído um valor $RM(x_k, x_l) = c$, automaticamente, $RM(x_l, x_k) = 1/c$. Isso implica a necessidade de

¹Entenda-se por relativo uma alternativa x_k em relação à outra x_l e por absoluto uma alternativa em relação ao conjunto das alternativas. Ex.: a melhor ou a pior.

$n(n-1)/2$ comparações ao pares para a formulação de RM , o que pode acrescentar certa intransitividade à matriz. Na relação de preferência multiplicativa a intensidade de preferência pode ser especificada com base em várias escalas de razão (TRIANANTAPHYLLOU, 2001; SAATY; VARGAS; DELLMANN, 2003). Para que M seja transitiva é necessário que $x_{ij}x_{jk} = x_{ik}, \forall i, j, k$ e/ou que $\lambda_{max} = n$, sendo λ_{max} o máximo autovalor de RM .

A relação de preferência *fuzzy* recíproca aditiva (RR) reflete o grau em que “ x_k é pelo menos tão bom quanto x_l ”. A estrutura dessa representação é dada por: $RR(x_k, x_l) = 0,5$ indica indiferença entre x_k e x_l ; $0,5 < RR(x_k, x_l) \leq 1$ indica que há preferência por x_k em relação a x_l ; $0 \leq RR(x_k, x_l) < 0,5$ indica que há preferência por x_l em relação a x_k . Dado um valor de $RR(x_k, x_l)$, o valor de $RR(x_l, x_k)$ é automaticamente inferido como $1 - RR(x_k, x_l)$, como consequência da propriedade de reciprocidade aditiva.

A relação de preferência *fuzzy* não-recíproca (RN) é representada a partir da derivação das estimativas *fuzzy*, sendo assim, deve-se notar que as relações de preferência *fuzzy* não-recíproca e as estimativas *fuzzy* são, em certa medida, equivalentes. Em particular, se duas alternativas $x_k \in X$ e $x_l \in X$ tiverem estimativas *fuzzy* com as funções de associação $\mu(x_k)$ e $\mu(x_l)$, a quantidade $RN(x_k, x_l)$ é o grau de preferência $\mu(x_k) \succeq \mu(x_l)$, enquanto a quantidade $RN(x_l, x_k)$ é o grau de preferência $\mu(x_l) \succeq \mu(x_k)$. Aplicando o conceito de uma relação de preferência generalizada (ORLOVSKY, 1983), as quantidades $RN(x_k, x_l)$ e $RN(x_l, x_k)$ podem ser avaliadas da seguinte forma (EKEL; PEDRYCZ; SCHINZINGER, 1998; EKEL; NETO, 2006):

$$RN(x_k, x_l) = \sup_{x_k, x_l \in X} \min\{\mu(x_k), \mu(x_l), \mu_R(x_k, x_l)\} \quad (26)$$

$$RN(x_l, x_k) = \sup_{x_k, x_l \in X} \min\{\mu(x_k), \mu(x_l), \mu_R(x_l, x_k)\} \quad (27)$$

sendo $\mu_R(x_k, x_l)$ e $\mu_R(x_l, x_k)$ as funções de associação das relações de preferência *fuzzy* correspondentes que, respectivamente, refletem a essência das preferências de x_k sobre x_l e de x_l acima de x_k (por exemplo, “mais atraente”, “mais flexível”, etc.). Quando o indicador em termos de quais alternativas x_k e x_l são avaliados pode ser medido em uma escala numérica e se a essência da preferência por trás da relação R é coerente com a ordem natural (\leq) ao longo do eixo dos valores medidos desse indicador, (26) e (27) são reduzidos a:

$$RN(x_k, x_l) = \sup_{x_k \leq x_l} \min_{x_k, x_l \in X} \{\mu(x_k), \mu(x_l)\} \quad (28)$$

$$RN(x_l, x_k) = \sup_{x_l \leq x_k} \min_{x_k, x_l \in X} \{\mu(x_k), \mu(x_l)\} \quad (29)$$

respectivamente. Se o indicador tiver carácter de maximização, (28) e (29) devem ser modificados para $x_k \geq x_l$ e $x_l \geq x_k$, respectivamente. Assim, a disponibilidade de estimativas *fuzzy* para todos os $x_k \in X$ suporta uma construção automática de $RN(x_k, x_l)$.

Em sua estrutura tem-se que se $RN(x_k, x_l)$ e $RN(x_l, x_k)$ são iguais a um então x_k é indiferente a x_l , se iguais a zero não podem ser comparadas, se $RN(x_k, x_l) = 1$ e $RN(x_l, x_k) = 0$, então x_k é estritamente preferido a x_l , caso contrário, x_l é estritamente preferido a x_k . A diagonal principal é preenchida com 1, dada a propriedade reflexiva da relação de preferência não-estrita $RN(x_k, x_l)$. Também são aceitos julgamentos intermediários, que devem atender a: se $0 \leq RN(x_k, x_l) < 1$ e $RN(x_l, x_k) = 1$, então há certa preferência por x_l em relação a x_k ; se $RN(x_k, x_l) = 1$ e $0 \leq RN(x_l, x_k) < 1$, então há certa preferência por x_k em relação a x_l ; se $0 \leq RN(x_k, x_l) < 1$ e $RN(x_l, x_k) = 0$, então há certa preferência por x_l em relação a x_k , ao mesmo tempo em que x_k e x_l não são completamente comparáveis; e, se $RN(x_k, x_l) = 0$ e $0 \leq RN(x_l, x_k) < 1$, então há certa preferência por x_k em relação a x_l , ao mesmo tempo em que x_l e x_k não são completamente comparáveis.

Apresentados os diferentes formatos de representação, estes precisam ser agora convertidos para um único formato. Em particular, para o esquema proposto por Ramalho et al. (2019) as preferências precisam estar no formato de relações multiplicativas.

2.3.2 Uniformização das Preferências em Relações Multiplicativas

Como é mostrado em Saaty, Peniwati e Shang (2007), e Saaty, Vargas e Dellmann (2003), os componentes de um vetor de preferências fornecidos pela utilização do AHP podem ser usados como coeficientes para a formação das funções objetivo correspondentes. O uso do AHP tem como base a construção e processamento das relações multiplicativas de preferência (SAATY, 1980). Assim, é necessário ter funções de transformação disponíveis (EKEL; PEDRYCZ; PEREIRA, 2019; HERRERA; HERRERA-VIEDMA; CHICLANA, 2001; PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011; RAMALHO et al., 2019; ZHANG; CHEN; CHONG, 2004) que permitam converter os formatos acima indicados (ordenação de alternativas, relações de preferência *fuzzy* recíproca aditiva e relações de preferência *fuzzy* não-recíproca) às relações de preferência multiplicativas.

Considerando o exposto acima, é necessário indicar que nem sempre há a transformação direta de qualquer formato de preferência na relação de preferência multiplicativa (RAMALHO et al., 2019). Por exemplo, entre os formatos de preferência indicados acima, não há conversão direta das relações de preferência *fuzzy* não-recíproca para a relação de preferência multiplicativa. Para isso, é necessário, portanto, a conversão preliminar das relações de preferência *fuzzy* não-recíproca para as relações de preferência *fuzzy* recíproca aditiva ($RN \rightarrow RR$). Como um todo, os resultados discutidos em Ramalho et al. (2019) permitem realizar a transformação do formato de ordenação das alternativas para as

relações de preferência multiplicativas,

$$OA(x_k, x_l) \rightarrow RM(x_k, x_l) = 9^{\frac{OA(x_l) - OA(x_k)}{n-1}}, n > 1 \quad (30)$$

a transformação do formato de relações de preferência *fuzzy* não-recíproca para as relações de preferência *fuzzy* recíproca aditiva,

$$RN(x_k, x_l) \rightarrow RR(x_k, x_l) = \frac{1}{2}(1 + RN(x_k, x_l) - RN(x_l, x_k)) \quad (31)$$

e a transformação do formato de relações de preferência *fuzzy* recíproca aditiva para as relações de preferência multiplicativas.

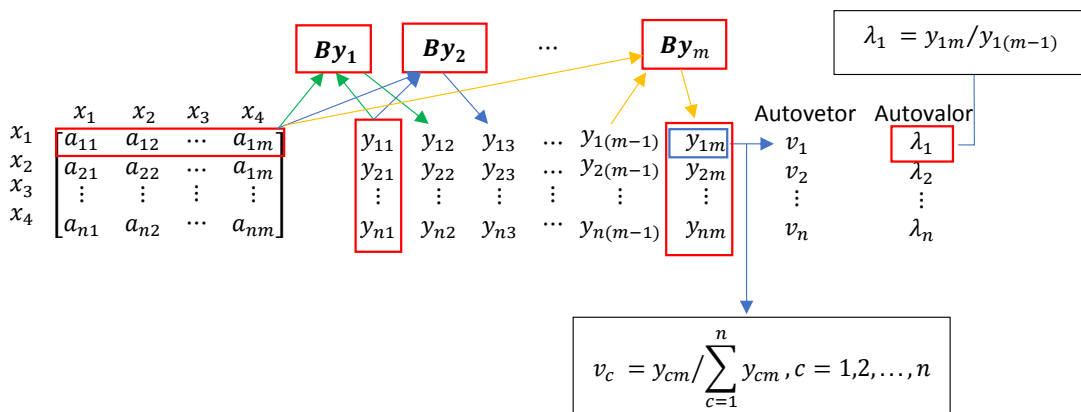
$$RR(x_k, x_l) \rightarrow RM(x_k, x_l) = 9^{2RR(x_k, x_l) - 1}, n > 1 \quad (32)$$

Considerando as informações homogêneas, o AHP pode ser aplicado para a obtenção dos vetores de preferências utilizados na construção das funções objetivo de caráter qualitativas.

2.3.3 Definição de Vetores de Preferência através da Aplicação do Processo de Hierarquia Analítica

Esta etapa do esquema consiste em obter os vetores de preferência através da aplicação do Processo de Hierarquia Analítica (SAATY, 1980), os respectivos pesos são obtidos calculando-se o autovetor que corresponde ao máximo autovalor associado a cada matriz de relação de preferências. Considera a multiplicação da matriz de pares (ex.: B) por um vetor transposto de valores de entrada iguais (ex.: $y_1^t = [1111]$), na primeira iteração tem-se By_1 , na segunda iteração têm-se By_2 , e assim por diante, até obter o autovetor correspondendo ao máximo autovalor (Figura 2).

Figura 2 – Exemplo de aplicação do AHP



Fonte: Elaborada pela autora.

Os autovetores correspondentes às relações de preferência multiplicativas devem ser agregados e usados como combinações representativas dos dados iniciais, estado da natureza ou cenários.

2.3.4 Agregação de Preferências e Geração de Cenários

A ideia principal da agregação (RAMALHO et al., 2019) é utilizar o nível de “orness”, fornecido pelo operador OWA (acrônimo de *ordered weighted averaging*, traduzido para o português como média ponderada ordenada) alterando o seu conjunto dos pesos (YAGER, 1988).

$$OWA = \sum_{i=1}^n w_i v_i \quad (33)$$

em que v_y é o valor mais alto do vetor e o conjunto de pesos (w_1, w_2, \dots, w_n) são determinados pelo quantificador linguístico, como “a maioria”, “quase tudo”, “muito mais da metade”, etc. (HERRERA-VIEDMA et al., 2014). O conjunto de pesos deve satisfazer as condições $w_i \in [0, 1]$ e $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Em seu texto original, Yager (1988) expõe que a ideia motivadora para criação deste operador é transitar entre as propriedades dos operadores *AND* e *OR* em problemas de tomada de decisão que exijam a agregação de critérios. Yager (1988) chama de “andness” e “orness” à medida de quão semelhante o comportamento do operador OWA se aproxima dos operadores *AND* ou *OR*, respectivamente, que está associada com o vetor de pesos W .

Não é difícil mostrar que formas específicas do vetor W fazem com que o OWA assumam comportamentos específicos. Por exemplo, se $W = [1, 0, \dots, 0]$, então OWA é igual ao mínimo valor, se $W = [0, 0, \dots, 1]$, então OWA é o máximo valor e se $W = [1/n, 1/n, 1/n, \dots, 1/n]$, então OWA é a média aritmética dos valores. Assim, fica claro que o tipo de agregação a ser aplicado pelo operador OWA depende da forma do vetor de pesos W .

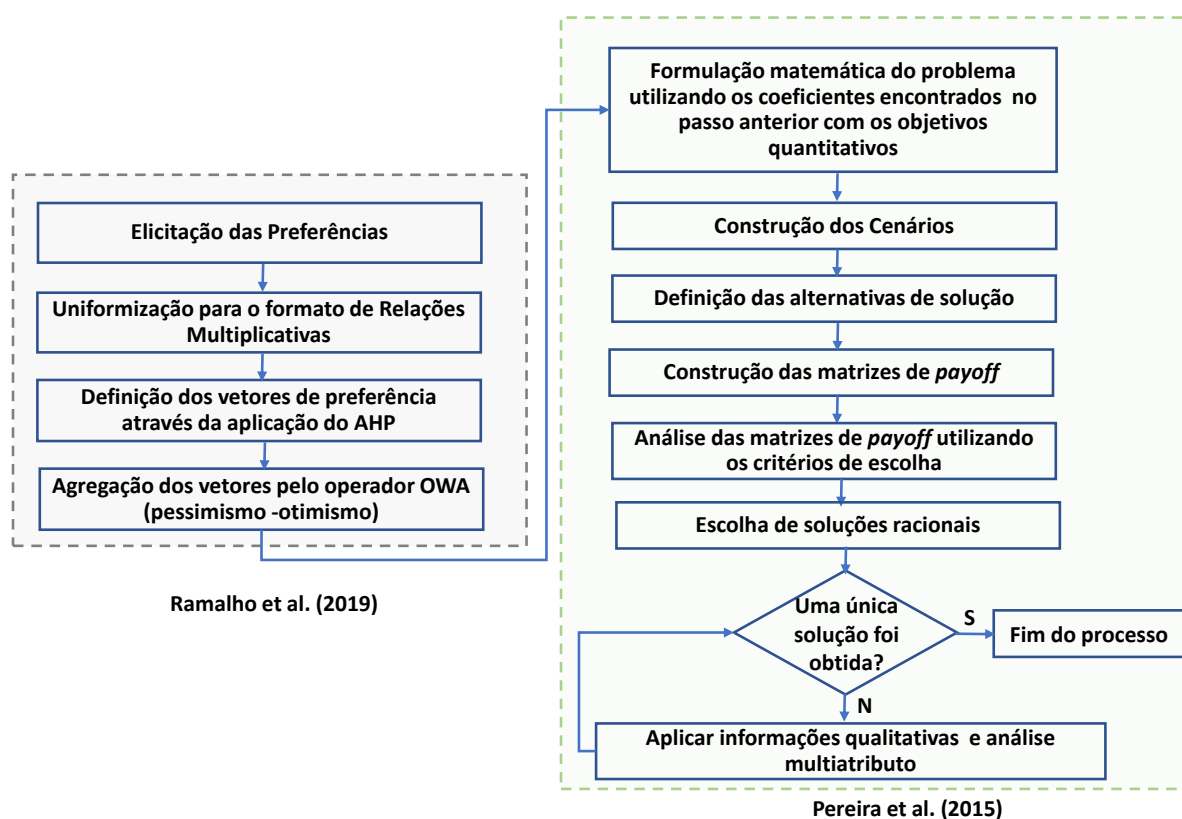
A implementação proposta por Ramalho et al. (2019) está associada à agregação de opiniões dos especialistas, extraíndo os limites de pessimismo-otimismo aceitos pelo DM. Assim, determina-se o limite inferior e superior do intervalo de coeficientes da função objetivo, estruturada conforme (3), fazendo os pesos correspondentes ao operador OWA igual a $w_1 = [0 \ 0 \ \dots \ 1]$ e $w_2 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$, aplicados aos autovetores determinados na etapa anterior.

Após essa etapa, o modelo do problema pode ser formulado utilizando as informações quantitativas disponíveis e os intervalos determinados para os objetivos de caráter qualitativo. Neste esquema, assim como em Pereira et al. (2015), a geração de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários foi realizada com base na aplicação das sequências de LP_τ (SOBOL; STATNIKOV, 2006; SOBOL', 1979) cuja

aplicação foi discutida acima. Essa geração deve fornecer combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários equilibrados do ponto de vista de uma mistura justificada de situações pessimistas e otimistas.

As demais etapas do esquema proposto por Ramalho et al. (2019) assemelha às etapas do esquema geral de tomada de decisão em condições de incerteza, apresentado na Seção (2.2), além disso, é válido salientar que a inclusão dessas etapas ao esquema geral original não garante a escolha de uma solução única, caso necessário deve-se levar em consideração o *terceiro estágio* do esquema geral original, associado à análise $\langle X, R \rangle$. A Figura 3 apresenta o fluxograma-resumo da abordagem completa proposta por Ramalho et al. (2019).

Figura 3 – Uso de informações qualitativas no esquema geral de tomada de decisão em condições de incerteza



Fonte: Elaborada pelo autora.

A análise multiobjetivo, realizada dessa maneira, é eficaz para lidar com informações qualitativas e quantitativas mesmo em condições de incerteza. Entretanto, ao se trabalhar com um grupo de especialistas é preciso considerar se a escolha da solução é unânime², necessitando, portanto, analisar diversas medidas de consenso e concordância entre o grupo.

²Entenda-se por unânime uma solução aceita como satisfatória pelo grupo.

2.4 Construção de Consenso na Tomada de Decisão em Grupo

Como foi indicado acima, os resultados de Ramalho et al. (2019) são, principalmente, direcionados ao uso de informações qualitativas (com base em estimativas de preferências de especialistas) para construir as estimativas dos coeficientes das funções objetivo, que servem para criar combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários. No entanto, a abordagem aplicada para gerar preferências de grupo com base em estimativas individuais de preferências de especialistas, em termos de tomada de decisão em grupo, é considerada simplista ao não supor a construção do consenso correspondente. Levando isso em consideração, é discutido abaixo um esquema de consenso para o processo de tomada de decisão, sendo que ao encontrar uma opinião consensual entre os membros do grupo o nível de incerteza dos coeficientes da função objetivo é reduzido. Isso resulta em estimativas mais precisas dos coeficientes e, conseqüentemente, em decisões mais consistentes, coerentes e menos conservadoras.

Conceitualmente, a tomada de decisão em grupo é o processo de obtenção de soluções com base nas preferências de vários especialistas. Um problema típico de tomada de decisão em grupo envolve um conjunto de especialistas $E = \{e_1, e_2, \dots, e_v\}$, um conjunto de critérios $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ e um conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (EKEL et al., 2009). Cada critério corresponde a um dos pontos de vista, segundo o qual as alternativas são avaliadas e comparadas pelos especialistas. Ao deparar com diferentes fontes de informações, é necessário indicar que qualquer especialista envolvido no processo de tomada de decisão ou qualquer critério considerado pode exigir diferentes formatos de representação de preferências (os mais importantes são mencionados na Seção 2.3.1).

2.4.1 *Uniformização das Preferências em Relações de Preferências Fuzzy Não-Recíproca*

O uso de diferentes formatos de representação de preferências gera a heterogeneidade das informações para a tomada de decisão. Assim, é necessário processar diferentes formatos para fornecer informações homogêneas (uniformes) para os procedimentos de tomada de decisão, reduzindo diferentes formatos para um formato único. Esse procedimento pode ser feito, conforme indicado acima, com base na aplicação das funções de transformação correspondentes (PARREIRAS; EKEL, 2013; RAMALHO et al., 2019). Parreiras e Ekel (2013) destacam o uso de relações de preferência *fuzzy* (em particular, relações de preferência *fuzzy* não-recíproca) como formato base para a representação. As relações de preferência *fuzzy* fornecem flexibilidade, necessária para lidar adequadamente com o fator de incerteza. Além disso, as várias medidas de consenso e concordância utilizam o formato da relação de preferência *fuzzy* como padrão de entrada (ALONSO et al., 2007; EKEL, 2002; PARREIRAS; EKEL; BERNARDES, 2012; PARREIRAS et al., 2011; PARREIRAS et al., 2010). Dessa forma, além das demais funções de transformação apresentadas na

Seção 2.3.1, é possível utilizar as seguintes funções que permite a transformação do formato de ordenação das alternativas para o formato de relações de preferência *fuzzy* não-recíproca

$$OA(x_k, x_l) \rightarrow RN(x_k, x_l) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{OA(x_l) - OA(x_k)}{2(n-1)}, & \text{if } OA(x_k) > OA(x_l) \\ 1, & \text{if } OA(x_k) \leq OA(x_l) \end{cases} \quad (34)$$

e a transformação do formato relações multiplicativas para o formato de relações de preferência *fuzzy* não-recíproca.

$$RM(x_k, x_l) \rightarrow RN(x_k, x_l) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} \log_9 \frac{RM(x_k, x_l)}{RM(x_l, x_k)}, & \text{if } \log_9 RM(x_k, x_l) < 0 \\ 1, & \text{if } \log_9 RM(x_k, x_l) \geq 0 \end{cases} \quad (35)$$

Considerando as informações homogêneas, as preferências individuais devem ser agregadas em uma relação de preferência coletiva para iniciar o processo de análise do nível de consenso entre o grupo, comparando as preferências individuais com as preferências coletivas. No contexto da tomada de decisão em grupo, às vezes é relevante diferenciar os níveis de influência de cada especialista, sendo que a maneira comumente usada para incorporar esses níveis de influência é atribuindo diferentes coeficientes de importância aos membros do grupo.

2.4.2 Obtenção dos Coeficientes de Importância dos Decisores

A literatura de tomada de decisão em grupo (veja uma visão geral (KOKSALMIS; KABAK, 2019)) identifica três grupos de técnicas para obter os coeficientes de importância dos tomadores de decisão: técnicas subjetivas, técnicas objetivas e a combinação de técnicas subjetivas e objetivas.

No uso de técnicas subjetivas, um supervisor avalia os DMs e atribui pesos a cada um deles (EKEL et al., 2009). Outra maneira no uso de técnicas subjetivos está associada a avaliações mútuas de DMs (RAMANATHAN; GANESH, 1994; LOOTSMA, 2007). No entanto, esse caminho pode levar à superestimação de certos membros do grupo e, até, à formação de coalizões de decisão. Na utilização de técnicas objetivas, métodos numéricos são aplicados para determinar os pesos dos DMs. Por exemplo, Toloie-Eshlaghy e Farokhi (2011) determinam os pesos dos DMs de acordo com a consistência de suas preferências.

No método combinado, esses dois coeficientes de importância são integrados em um único coeficiente, o que reflete os efeitos dos coeficientes objetivos e subjetivos. A aplicação deste método é apresentada proposto por Koksalmis, Koksalmis e Kabak (2019), sendo os pesos combinados dos DMs calculados com base nos pesos objetivos usando o índice de consenso cardinal geométrico e nos pesos subjetivos fornecidos por um supervisor. Utilizar somente a técnica objetiva neste caso pode acarretar em desfavorecimento do especialista mais discordante, mas com alto nível de conhecimento, e a utilização somente da técnica

subjetiva pode acarretar na formação de coalizões, como dito anteriormente. Ressalta-se, assim, a importância de se refletir os dois efeitos em uma única abordagem.

A técnica apresentada por Koksalmis, Koksalmis e Kabak (2019) inicia calculando os vetores prioritários das alternativas da matriz de preferência ($k = 1, 2, \dots, n$) de cada DM pelo método LSM (médias geométricas das linhas da matriz), considerando a matriz de preferência expressa no formato RM , da seguinte maneira:

$$w_k = \frac{\prod_{l=1}^n RM(x_k, x_l)}{\sum_{k=1}^n \prod_{l=1}^n RM(x_k, x_l)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (36)$$

Esses vetores prioritários são agregados usando o operador de média aritmética, obtendo o vetor prioritário do grupo. O índice geométrico de consenso cardinal para cada DM ($y = 1, 2, \dots, v$) é calculado como:

$$GCC I(A^y) = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{k < l, k, l=1}^n (\ln(RM^y(x_k, x_l) - \ln(w_k^G) + \ln(w_l^G))^2 \quad (37)$$

O uso de (37) permite obter o peso objetivo dado por:

$$w_o^y = \frac{(GCC I^y)^{-1}}{\sum_{y=1}^v (GCC I^y)^{-1}} \quad (38)$$

Os pesos objetivos dos DMs (w_o^y) são integrados aos pesos subjetivos (w_s^y) fornecidos por um supervisor resultando nos pesos combinados (w_c^y) da seguinte maneira:

$$w_c^y = \alpha(w_o^y) + (1 - \alpha)(w_s^y) \quad (39)$$

em que α é a proporção do impacto de pesos subjetivos e objetivos.

Esses coeficientes de importância são usados nos métodos de agregação, apresentados a seguir, se for necessário diferenciar os níveis de influência dos decisores na resolução do problema de tomada de decisão.

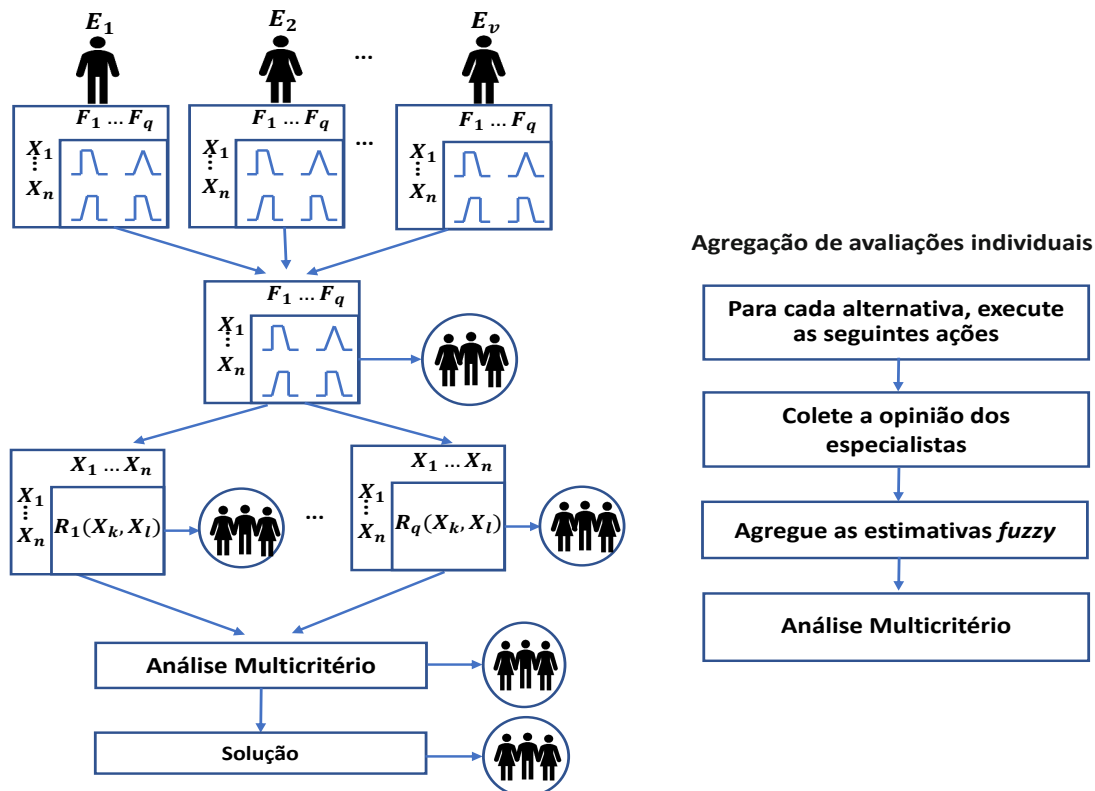
2.4.3 Agregação das Preferências

A matriz de preferência coletiva, levando em consideração os pesos correspondentes, se necessário, pode ser obtida por métodos de agregação. Note-se que os procedimentos de agregação podem ser executados em diferentes pontos do processo de discussão. Em particular, Parreiras, Ekel e Morais (2012) distinguem as três abordagens de agregação a seguir para lidar com os processos de tomada de decisão multicritério, envolvendo vários especialistas:

1. Agregação de avaliações individuais (AIE): os especialistas devem avaliar cada alternativa usando estimativas *fuzzy* ou linguísticas. Em seguida, as estimativas

individuais fornecidas, considerando cada critério, são agregadas em estimativas coletivas (Figura 4). Tendo a matriz de avaliação das alternativas, é possível construir relações de preferência *fuzzy* por critério. Depois disso, uma das técnicas de análise de $\langle X, R \rangle$ pode ser usada.

Figura 4 – Agregação de avaliações individuais

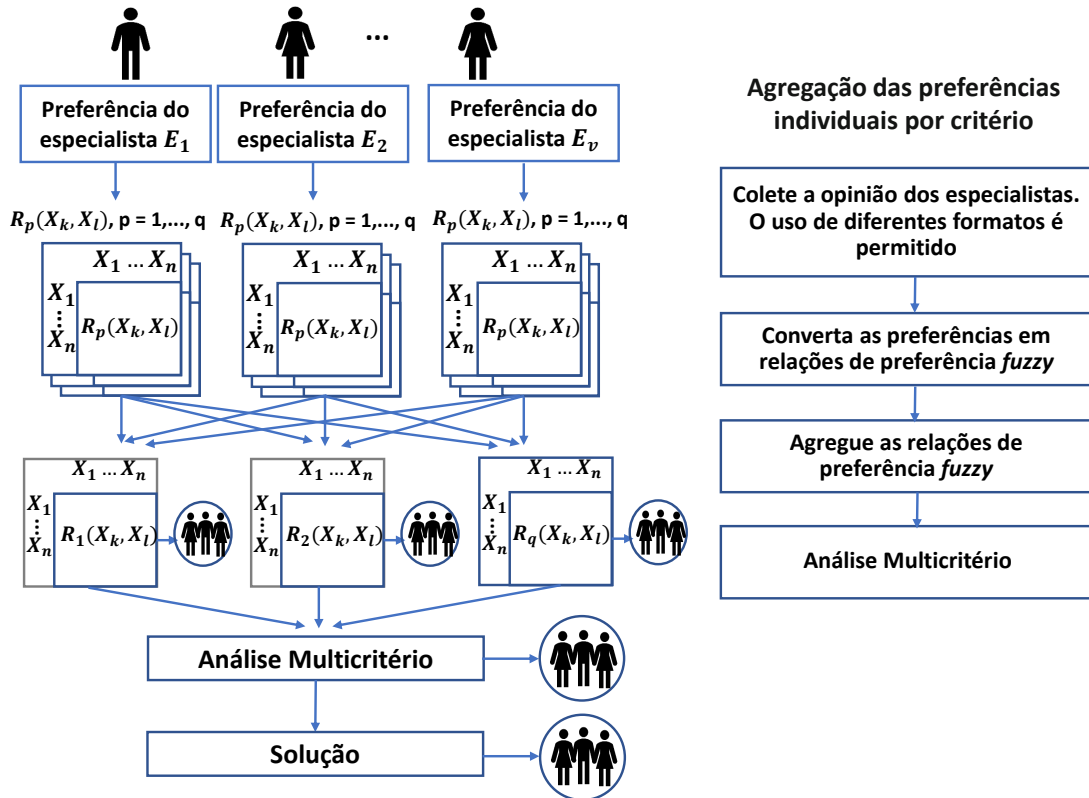


Fonte: Elaborada pela autora com dados de Parreiras, Ekel e Morais (2012).

2. Agregação de preferências individuais por critério (AIC): os especialistas podem fornecer suas preferências para os critérios usando qualquer formato de preferência, que pode ser transformado em relações de preferência *fuzzy*, aplicando as funções de transformação correspondentes. As matrizes individuais resultantes são agregadas em preferências coletivas por critério (Figura 5). Então, uma das técnicas de análise dos modelos $\langle X, R \rangle$ pode ser utilizada.
3. Agregação de resultados individuais (AR): o problema de tomada de decisão multicritério é resolvido individualmente e os resultados são combinados em um resultado coletivo. Quando AR é um *priori* usado, os DMs podem selecionar diferentes métodos de tomada de decisão multicritério para resolver o problema (Figura 6). No entanto, o uso de diferentes métodos pode aumentar as diferenças entre os resultados obtidos e complicar a construção de um resultado de agregação satisfatório.

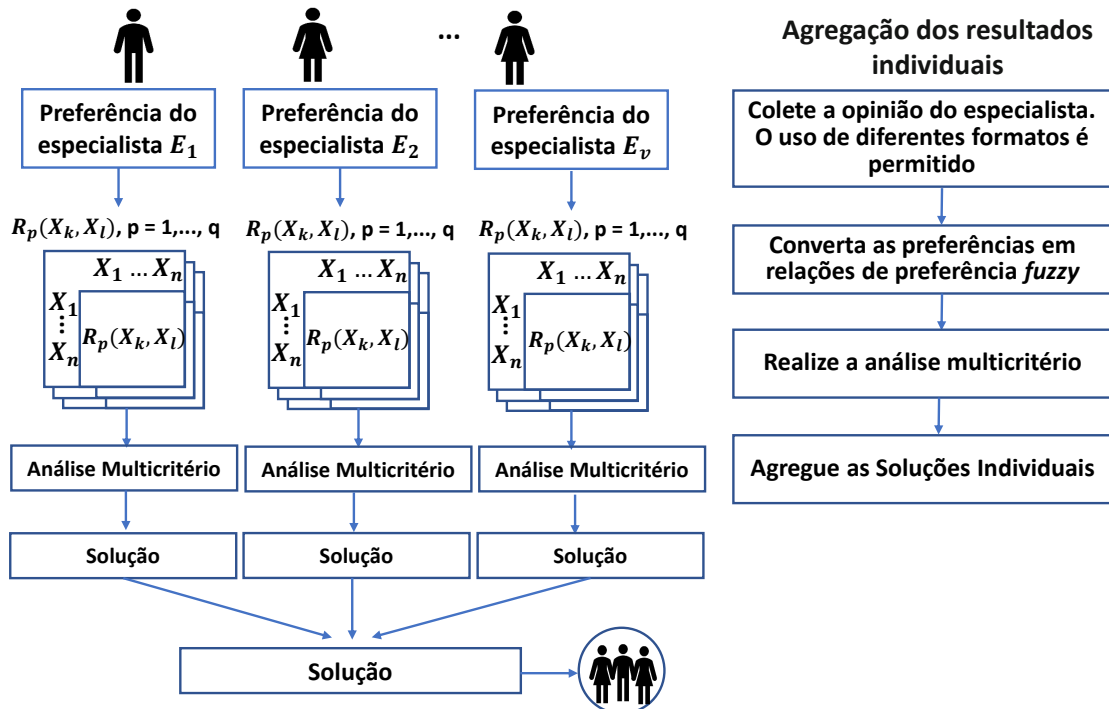
A agregação executada em diferentes pontos do processo de decisão é realizada

Figura 5 – Agregação de preferências individuais por critério



Fonte: Elaborada pela autora com dados de Parreiras, Ekel e Morais (2012).

Figura 6 – Agregação de resultados individuais



Fonte: Elaborada pela autora com dados de Parreiras, Ekel e Morais (2012).

com o uso de operadores de agregação, dentre os comumente usados (DONG et al., 2015; PARREIRAS; EKEL; BERNARDES, 2012; PARREIRAS et al., 2010) é possível indicar o operador mínimo

$$\mu_{R^c}(x_k, x_l) = \min_{1 \leq y \leq v} \mu_{R_{e_y}}(x_k, x_l) \quad (40)$$

o operador máximo

$$\mu_{R^c}(x_k, x_l) = \max_{1 \leq y \leq v} \mu_{R_{e_y}}(x_k, x_l) \quad (41)$$

o operador de média aritmética ponderada

$$\mu_{R^c}(x_k, x_l) = \sum_{y=1}^v w_{e_y} \mu_{R_{e_y}}(x_k, x_l), \quad \sum_{y=1}^v w_{e_y} = 1 \quad (42)$$

e o operador OWA já apresentado em (33), deve-se notar as adaptações necessárias quanto ao índice utilizado. Neste tópico, as correlações de agregação para obter um matriz coletiva correspondem à agregação por critério, que podem também ser facilmente alteradas para a agregação por especialista, se necessário.

Uma questão importante na escolha do operador é o conjunto de requisitos impostos pelo grupo, levando em consideração as expectativas de cada especialista. Em particular, o uso do operador mínimo fornece uma abordagem completamente não compensatória à tomada de decisão multicritério, no sentido de que o baixo nível de satisfação de alguns especialistas não pode ser compensado pelo alto nível de satisfação de outros especialistas. Por outro lado, o uso do operador máximo permite criar uma abordagem extremamente compensatória, no sentido de que o alto nível de satisfação de qualquer especialista é suficiente. Como dito anteriormente, o operador de agregação OWA produz um resultado de acordo com o ajuste de seus pesos que não depende da fonte de informações. Dependendo dos pesos atribuídos, o operador do OWA pode ser reduzido ao mínimo e ao operador máximo (PARREIRAS; EKEL; BERNARDES, 2012).

Neste ponto, é possível construir a matriz coletiva, que, em tese, expressa as preferências do grupo. Agora, deve-se verificar o nível de satisfação do grupo com esse resultado, pois pode haver alto nível de satisfação de alguns membros ao custo de um baixo nível de satisfação de outros membros. Para isso, utiliza-se as medidas de consenso e concordância.

2.4.4 Medidas de Consenso e Concordância entre o Grupo

Ao se trabalhar em grupo, é provável que ocorram opiniões discordantes entre os membros, visto que cada especialista possui informações diferentes e pode não compartilhar totalmente as opiniões dos outros membros. Em tal caso, seria uma abordagem simplista

apenas agregar as preferências individuais em uma preferência coletiva, devendo ser construída uma opinião consensual para identificar uma solução aceitável por todo o grupo.

Considerando isso, diferentes esquemas de consenso foram desenvolvidos para alcançar um nível satisfatório de concordância entre os especialistas. Esses esquemas permitem aumentar a racionalidade da solução coletiva, bem como a eficiência da discussão entre os especialistas (CHEN et al., 2012; CHEN; TSAI, 2013; PARREIRAS; EKEL; BERNARDES, 2012). Os esquemas de consenso propostos são apoiados por índices de consenso e concordância, proporcionando ao moderador a oportunidade de intervir efetivamente no processo de discussão, usando as capacidades de cada membro do grupo no trabalho em equipe.

O índice de concordância serve para quantificar o nível de similaridade ou correspondência entre qualquer par de opiniões. Assim, dentro da estrutura de um esquema de consenso, o índice de concordância é usado para identificar o especialista menos concordante com o restante do grupo em cada ciclo do processo de discussão. Este especialista é convidado a revisar sua opinião ou explicá-la ao grupo. O índice de consenso quantifica, na faixa de unidade, a que distância o grupo de especialistas está da perfeita unanimidade.

Na literatura, é possível encontrar tentativas para evitar alguns aspectos negativos relacionados ao consenso: dificuldade em atribuir diferentes níveis de influência aos DMs, falta de conhecimento especializado e experiência para julgar o conjunto completo de alternativas e/ou critérios, falta de cooperação do grupo, mudanças sucessivas nas preferências dos especialistas, etc., que podem aparecer no processo de tomada de decisão. Por exemplo, Ekel et al. (2009) desenvolveram um esquema de consenso supervisionado para evitar a situação quando o mesmo especialista é convidado várias vezes a revisar sua opinião. Bernardes et al. (2008) utilizam a ponderação dos critérios através de um algoritmo de otimização, se não for possível distinguir a ordem das alternativas usando métodos tradicionais. Parreiras et al. (2010) fizeram uma comparação do desempenho dos esquemas de consenso usando pesos ajustados pelo moderador e um procedimento de otimização que maximiza o índice de consenso.

Na presença da agregação de preferências individuais por critério, é possível medir o nível de concordância entre o y -ésimo especialista e o grupo, calculando a similaridade (ALONSO et al., 2007) entre as preferências fornecidas pelo especialista em questão e a preferência coletiva para cada par de alternativas $((x_k, x_l), k, l = 1, 2, \dots, n)$, como:

$$S_y(x_k, x_l) = 1 - |R_y(x_k, x_l) - R_c(x_k, x_l)| \quad (43)$$

em que R_y corresponde à relação de preferência *fuzzy* fornecida pelo y -ésimo especialista ($y = 1, 2, \dots, v$) e R_c reflete a relação de preferência *fuzzy* coletiva.

O nível de concordância da alternativa pode ser calculado para o y -ésimo especialista

usando a seguinte expressão:

$$Sa^y(x_k) = \sum_{l=1; l \neq k}^n \frac{S_y(x_k, x_l) + S_y(x_l, x_k)}{2(n-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (44)$$

A aplicação de (44) permite identificar o especialista que tem a menor concordância com o grupo e a alternativa que corresponde a essa discordância.

O nível médio de concordância entre as preferências do y -ésimo especialista e a preferência do grupo, independentemente da alternativa, pode ser calculado da seguinte maneira:

$$Sm^y = \sum_{k=1}^n \frac{Sa^y(x_k)}{n}, \quad y = 1, 2, \dots, v \quad (45)$$

Ao agregar os resultados que expressam o nível de concordância entre o y -ésimo especialista e o grupo, definido por (44), o nível de consenso do grupo na alternativa pode ser obtido a partir da seguinte expressão:

$$Ca(x_k) = \sum_{y=1}^v \frac{Sa^y(x_k)}{v}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (46)$$

Finalmente, o nível de consenso do grupo pode ser calculado como:

$$C_G = \sum_{k=1}^n \frac{Ca(x_k)}{n} \quad (47)$$

Este índice indica a que distância um grupo está da perfeita unanimidade. Portanto, se o valor obtido usando (47) for maior que o nível desejado, a solução do grupo será considerada aceitável.

3 METODOLOGIA

Este capítulo descreve a metodologia elaborada que permite a conexão entre a construção de consenso na tomada de decisão em grupo para determinar os coeficientes das funções objetivo de carácter qualitativo e o esquema geral de tomada de decisão. O método de construção de consenso tem como inspiração os trabalhos de Parreiras, Ekel e Morais (2012) e Koksalmis, Koksalmis e Kabak (2019) e outros trabalhos, referenciados acima, que auxiliam em etapas intermediárias desse processo, e o método de tomada de decisão em condição de incerteza possui seus fundamentos nos trabalhos de Pereira et al. (2015) e Ramalho et al. (2019). Além disso, deve-se enfatizar que as escolhas e combinações metodológicas utilizadas no presente trabalho são um aspecto original importante desta pesquisa, a partir dessa metodologia, é possível construir cenários que permitem avaliar de forma coerente as informações qualitativas para o seu uso na construção dos cenários.

A metodologia proposta está associada aos seguintes estágios: (a) Elicitação de preferências; (b) Representação de preferências dentro de relações de preferência *fuzzy* não-recíproca; (c) Agregação das preferências; (d) Análise das medidas de consenso; (e) Representação de preferências dentro de relações de preferência multiplicativas; (f) Definição de vetores de preferência através da aplicação do Processo de Análise Hierárquica (SAATY, 1980); (e) Agregação de preferências e formulação do problema de tomada de decisão; (f) Construção das combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários; (g) Definição de alternativas de solução; (h) Construção de matrizes de *payoff*; (i) Análise de matrizes de *payoff* e escolha de soluções racionais.

As etapas (a)-(d) estão associadas à construção de consenso, considerando os métodos e modelos de tomada de decisão apresentados anteriormente, o esquema de construção de consenso, dado abaixo, permite evitar alguns pontos negativos das abordagens tradicionais indicados acima. Em particular, esse esquema requer a execução das seguintes etapas principais:

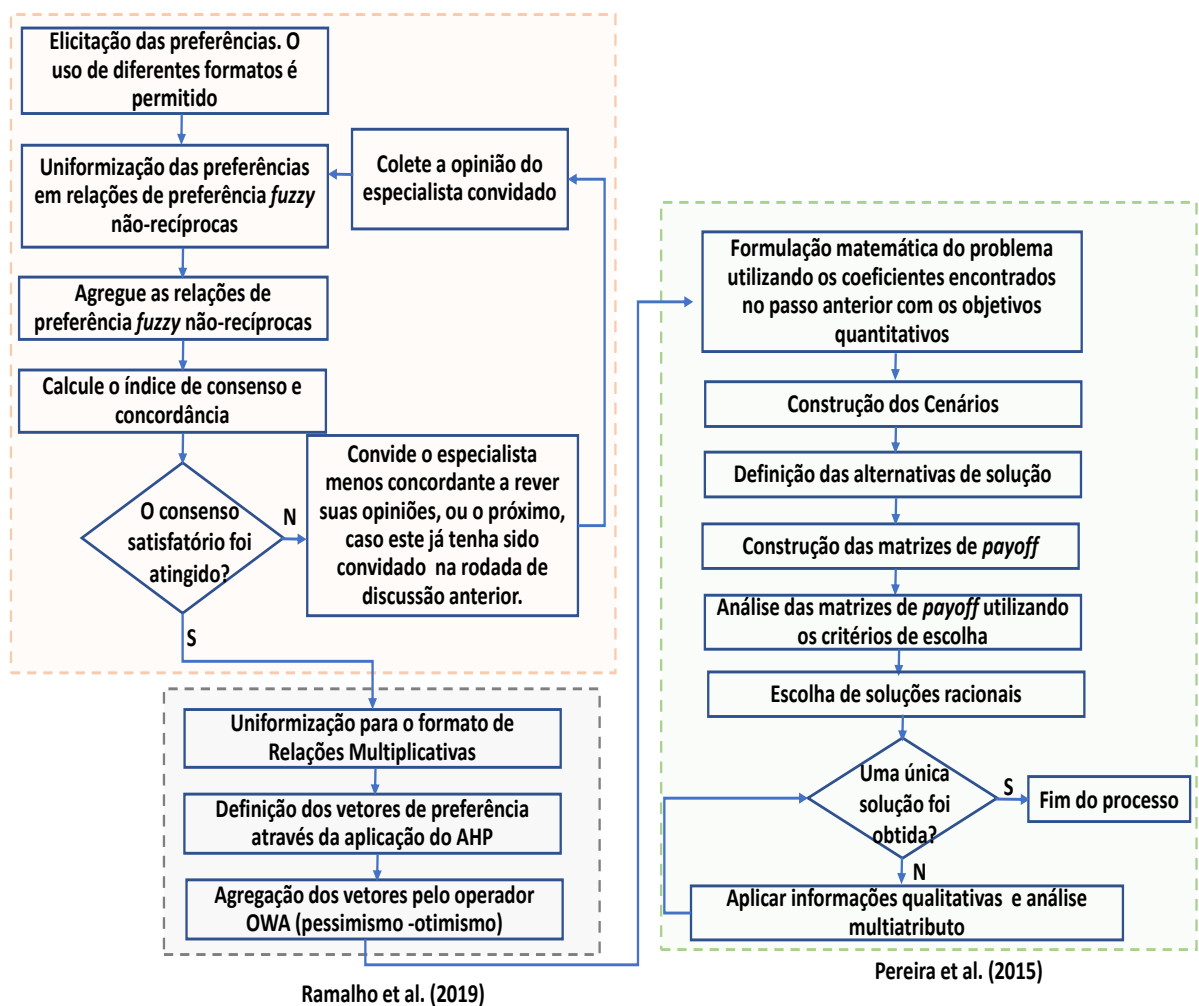
1. Os especialistas são convidados a expressar suas opiniões sobre todas as alternativas, considerando um critério por vez, usando um formato de preferência mais confortável. Na Seção 2.3.1 foram apresentados os cinco formatos principais para representação, dos quais é possível preparar as informações para a grande maioria dos problemas de tomada de decisão. Além disso, se um especialista não se sentir à vontade para julgar qualquer critério, esse não participará do processo de avaliação correspondente e o processo será continuado com a avaliação dos outros membros do grupo.
2. Caso seja necessário diferenciar os níveis de influência dos especialistas, os coeficientes de importância dos especialistas são estabelecidos. Em particular, utiliza-se a técnica subjetiva e a técnica de pesos combinados, que reflete os efeitos dos pesos subjetivos,

evitando o desfavorecimento de certos membros do grupo, e os pesos objetivos, evitando formação de coalizão.

3. As preferências dos especialistas expressas na Etapa 1 são reduzidas às relações de preferência *fuzzy* não-recíproca, utilizando as funções de transformação correspondentes.
4. Através do método de agregação AIC é obtida uma opinião coletiva pelo critério, usando o operador de agregação que satisfaz de forma convincente as preferências do grupo. Em particular, o operador da média aritmética ponderada pelo critério pode ser usado utilizando os pesos determinados na Etapa 2.
5. O índice de concordância é calculado para ordenar os especialistas do mais discordante ao menos discordante, e o índice de consenso é calculado para avaliar se o nível de consenso desejado é alcançado.
6. Se o nível de consenso for insatisfatório, o especialista mais discordante é identificado para alterar ou justificar suas preferências. No entanto, se o mesmo especialista for identificado como o mais discordante em iterações sucessivas, o moderador decidirá se deve convidar o mesmo especialista novamente ou realizar o convite do próximo especialista mais discordante. Essa decisão evita que um especialista tenha que alterar demais a sua opinião, não o prejudicando, caso esse tenha certeza nas suas preferências e seja conhecedor do assunto.
7. Se o número de iterações não atingir o valor máximo estipulado pelo moderador, o processo retornará à etapa 2. Caso contrário, o processo será interrompido.

Após obter uma opinião coletiva com o nível de consenso aceitável, as matrizes da preferência *fuzzy* individuais devem ser usadas na Etapa 2 da abordagem de Ramalho et al. (2019) para reduzi-las às relações de preferência multiplicativas, apresentadas na Seção 2.3.2, posteriormente são aplicadas as demais etapas da abordagem. Essa metodologia permite reduzir o nível de incerteza dos coeficientes das funções objetivo consideradas na análise de modelos $\langle X, F \rangle$ em condições de incerteza. Um exemplo de aplicação demonstra essa consideração, bem como a possibilidade de obter uma decisão mais coerente e consistente, usando os resultados do presente trabalho. A Figura 7 apresenta o fluxograma-resumo da abordagem proposta neste trabalho.

Figura 7 – Uso de informações qualitativas após construção de consenso no esquema geral de tomada de decisão em condições de incerteza



Fonte: Elaborada pela autora.

4 RESULTADOS

Como exemplo de aplicação para ilustrar os resultados discutidos acima, considere-se um problema de alocação de recursos financeiros no planejamento de expansão da produção de uma empresa.

Três modelos para alocar recursos ou sua escassez são considerados por Ramalho et al. (2019). Em particular, o primeiro modelo relacionado à alocação de recursos entre solução, alternativas, projetos, etc. (alternativas de expansão, ações estratégicas, projetos de inovação, novos projetos de negócios, etc.; por simplicidade, consumidores) é considerado no exemplo, e consiste na descrição a seguir.

Recebem-se demandas $D_i, i = 1, 2, \dots, n$, de consumidores e um recurso total disponível $R < \sum_{i=1}^n D_i$. Em seguida, o problema exhibe a seguinte estrutura:

$$F_p(X) \Rightarrow \max_{x \in L} \text{ or } \min_{x \in L}, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (48)$$

sujeita às restrições

$$0 \leq x_i \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (49)$$

e

$$\sum_{i=1}^n x_i = R \quad (50)$$

Em (48)-(50), $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, são variáveis que correspondem aos volumes de recursos procurados destinados aos consumidores.

Aplicando o modelo (48)-(50), é necessário alocar $R = R\$3.000.000,00$ entre alternativas de planejamento de expansão da produção empresarial: entre alternativas de aumentar o nível de produção de cinco tipos de produtos.

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 3.000.000,00 \quad (51)$$

Os dados iniciais do problema, apresentados na Tabela 7, permitem construir as seguintes restrições:

$$0 \leq x_1 \leq 850,00 \quad (52)$$

$$0 \leq x_2 \leq 220,00 \quad (53)$$

$$0 \leq x_3 \leq 1.300,00 \quad (54)$$

$$0 \leq x_4 \leq 1.615,00 \quad (55)$$

$$0 \leq x_5 \leq 700,00 \quad (56)$$

Tabela 7 – Projetos de planejamento de expansão

Projeto (i)	Demanda Máxima [kR\$]	Lucro [kR\$]	Exportação [kR\$]
1	850,00	20,00 a 30,00	55,00 a 70,00
2	220,00	65,00 a 75,00	25,00 a 45,00
3	1.300,00	55,00 a 65,00	40,00 a 60,00
4	1.615,00	90,00 a 100,00	50,00 a 80,00
5	700,00	40,00 a 50,00	70,00 a 90,00

Fonte: Elaborada pela autora.

Considerando um modo de formulação de objetivos para a alocação de recursos ou sua escassez, discutido por Ekel, Pedrycz e Pereira (2019) e Ramalho et al. (2019), os seguintes objetivos são levados em consideração:

1. Priorizar alocação de recursos para projetos com maior nível de inovação;
2. Priorizar alocação de recursos para projetos com maior nível de lucro para cada R\$ 100.000,00 investido;
3. Priorizar alocação de recursos para projetos com maior nível de oferta de produtos no exterior;
4. Priorizar alocação de recursos para projetos com um nível de risco ambiental baixo.

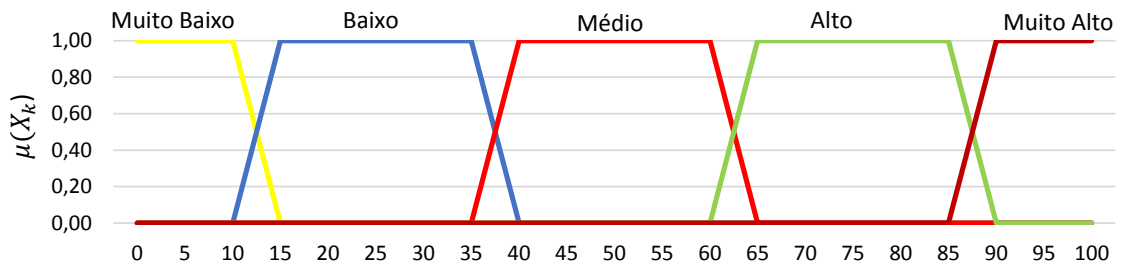
O alcance desses objetivos tem com base a maximização ou minimização, no caso mais simples, das funções lineares dos objetivos (EKEL; PEDRYCZ; PEREIRA, 2019; RAMALHO et al., 2019). Em particular, o alcance dos três primeiros objetivos está associado à maximização das funções dos objetivos correspondentes. Ao mesmo tempo, a realização do quarto objetivo está associada à minimização da função objetivo correspondente.

As funções objetivo relacionadas ao segundo e terceiro objetivos podem ser construídas com base nos dados da Tabela 7. As funções objetivo relacionadas ao primeiro e quarto objetivos devem ser construídas com base nas informações qualitativas fornecidas pelos especialistas. Em particular, um grupo de cinco especialistas participou desse processo.

Utilizando a abordagem AIC discutida acima, especialistas foram convidados a avaliar todas as alternativas. Esse processo foi iniciado com a consideração do critério “nível

de inovação”. O moderador aconselhou os especialistas a usar formatos de representação que sentissem confortáveis para expressar suas preferências. Os especialistas e_1 e e_5 escolheram expressar suas preferências utilizando as relações de preferências multiplicativas, os especialistas e_2 e e_4 optaram por usar a relação de preferência *fuzzy* não-recíproca, construída aplicando (28) e (29) para as estimativas da Figura 8, sendo $e_2 = \{\text{Baixo, Médio, Alto, Alto, Baixo}\}$ e $e_4 = \{\text{Muito alto, Alto, Médio, Médio, Muito alto}\}$. O especialista e_3 decidiu aplicar o formato de ordenação das alternativas, conforme mostrado abaixo.

Figura 8 – Conjunto de termos linguísticos referentes ao desempenho de cada alternativa



Fonte: Elaborada pela autora com dados de Ramalho (2017).

$$RM_1 = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,11 & 0,33 & 0,00 & 1,00 \\ 9,00 & 1,00 & 6,00 & 6,00 & 9,00 \\ 3,00 & 0,17 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 3,00 & 0,17 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 1,00 & 0,11 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \end{bmatrix} \quad RN_2 = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,50 & 0,50 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,50 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix} \quad OA_3 = [3 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3]$$

$$RN_4 = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 0,50 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 0,50 \\ 0,00 & 0,50 & 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,50 & 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \end{bmatrix} \quad RM_5 = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,33 & 6,00 & 6,00 & 1,00 \\ 3,00 & 1,00 & 9,00 & 9,00 & 3,00 \\ 0,17 & 0,11 & 1,00 & 1,00 & 0,17 \\ 0,17 & 0,11 & 1,00 & 1,00 & 0,17 \\ 1,00 & 0,33 & 6,00 & 6,00 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Nesse ponto, o moderador decidiu diferenciar os níveis de influência dos especialistas atribuindo um coeficiente de importância, resultando no seguinte vetor:

$$w = [0,24 \ 0,18 \ 0,28 \ 0,12 \ 0,18]$$

As preferências refletidas por RM_1 , OA_3 e RM_5 , aplicando (34) e (35), foram transformadas em relações de preferência *fuzzy* não-recíproca. Todas as cinco relações de preferências *fuzzy* não-recíproca foram agregadas usando o operador de média ponderada (42) e o vetor de peso fornecido acima. O resultado correspondente é uma matriz de preferência coletiva.

$$R_G = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,41 & 0,49 & 0,49 & 1,00 \\ 0,94 & 1,00 & 0,74 & 0,74 & 0,94 \\ 0,73 & 0,56 & 1,00 & 1,00 & 0,73 \\ 0,73 & 0,56 & 1,00 & 1,00 & 0,73 \\ 1,00 & 0,41 & 0,49 & 0,49 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os índices que regulam o fluxo do processo de construção de consenso são apresentados na Tabela 8. Esses índices correspondem ao nível de concordância por alternativa para cada um dos especialistas, calculado usando (43) e (44), nível médio de concordância, calculado usando (45) e o nível de consenso por uma alternativa calculado aplicando (46). Finalmente, o nível de consenso atual do grupo é obtido com base em (47), correspondendo a $C_G = 0,74$.

Tabela 8 – Níveis de concordância e consenso 1ª iteração critério Inovação

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^1(x_k)$	0,87	0,72	0,85	0,85	0,87
$Sa^2(x_k)$	0,79	0,79	0,73	0,73	0,79
$Sa^3(x_k)$	0,86	0,78	0,77	0,77	0,86
$Sa^4(x_k)$	0,56	0,66	0,65	0,65	0,56
$Sa^5(x_k)$	0,72	0,75	0,63	0,63	0,72
$Ca(x_k)$	0,76	0,74	0,73	0,73	0,76

Fonte: Elaborada pela autora.

O moderador determinou que o número máximo de iterações seja igual a 7 e que o nível mínimo de consenso do grupo seja igual a 0,85. Portanto, o especialista menos concordante é convidado a rever sua opinião. Analisando os dados da Tabela 8, o moderador convidou e_4 para revisar suas preferências associadas a x_1 e x_5 . Durante a nova rodada de discussão, e_4 reavaliaram suas preferências refletidas pela seguinte relação de preferência *fuzzy* não recíproca:

$$RN_4 = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,50 & 0,50 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,50 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,50 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,50 & 0,50 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os níveis de concordância e consenso por uma alternativa para a segunda iteração são mostrados na Tabela 9. No entanto, o atual nível de consenso $C_G = 0,81$ ainda é inaceitável.

Analisando os dados da Tabela 9, o moderador convida e_5 para revisar suas preferências associadas a x_3 e x_4 . Durante a nova rodada de discussão, e_5 reavaliaram suas preferências refletidas pela seguinte relação de preferência multiplicativa:

Tabela 9 – Níveis de concordância e consenso 2ª iteração critério Inovação

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^1(x_k)$	0,91	0,77	0,87	0,86	0,91
$Sa^2(x_k)$	0,82	0,78	0,77	0,77	0,83
$Sa^3(x_k)$	0,91	0,78	0,82	0,82	0,91
$Sa^4(x_k)$	0,91	0,85	0,90	0,90	0,91
$Sa^5(x_k)$	0,66	0,74	0,59	0,59	0,66
$Ca(x_k)$	0,84	0,78	0,79	0,79	0,84

Fonte: Elaborada pela autora.

$$RM_5 = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,17 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \\ 6,00 & 1,00 & 3,00 & 3,00 & 6,00 \\ 3,00 & 0,33 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 3,00 & 0,33 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 1,00 & 0,17 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os níveis de concordância e consenso por uma alternativa para a terceira iteração são mostrados na Tabela 10. O nível de consenso atual é $C_G = 0,89$, o que é aceitável. Assim, o processo de discussão está concluído.

Tabela 10 – Níveis de concordância e consenso 3ª iteração critério Inovação

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^1(x_k)$	0,93	0,76	0,87	0,87	0,93
$Sa^2(x_k)$	0,88	0,79	0,84	0,84	0,88
$Sa^3(x_k)$	0,96	0,79	0,89	0,89	0,96
$Sa^4(x_k)$	0,93	0,84	0,91	0,91	0,93
$Sa^5(x_k)$	0,95	0,88	0,91	0,91	0,95
$Ca(x_k)$	0,93	0,81	0,88	0,88	0,93

Fonte: Elaborada pela autora.

Aplicando (30)-(32), é possível transformar todas as preferências *fuzzy* não-recíproca individuais em relações de preferência multiplicativas (RM_1 pode ser usado diretamente em sua forma inicial). Agora, o método AHP pode ser aplicado para obter os seguintes vetores:

$$e_1 = [0,052 \quad 0,626 \quad 0,135 \quad 0,135 \quad 0,052]$$

$$e_2 = [0,043 \quad 0,130 \quad 0,391 \quad 0,391 \quad 0,043]$$

$$e_3 = [0,096 \quad 0,229 \quad 0,289 \quad 0,289 \quad 0,096]$$

$$e_4 = [0,059 \quad 0,529 \quad 0,176 \quad 0,176 \quad 0,059]$$

$$e_5 = [0,068 \quad 0,485 \quad 0,189 \quad 0,189 \quad 0,068]$$

Aplicando a agregação OWA (33) com $w_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ e $w_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ aos vetores obtidos, é possível obter limites, que correspondem a pessimismo e otimismo, respectivamente, representados por B_{min} e B_{max} . Esses limites servem para construir combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários (EKEL; PEDRYCZ; PEREIRA, 2019; RAMALHO et al., 2019).

$$B_{min} = [0,043 \ 0,130 \ 0,135 \ 0,135 \ 0,043] \quad B_{max} = [0,096 \ 0,626 \ 0,391 \ 0,391 \ 0,096]$$

Agora, vamos considerar o critério “risco ambiental”. No processo de tomada de decisão, é utilizada a técnica de derivar os pesos iniciais dos DMs proposta por Koksalmis, Koksalmis e Kabak (2019), que combina a técnica subjetiva do moderador e a técnica objetiva com base no índice de consenso cardinal geométrico, calculado a partir da opiniões expressas abaixo. Como a técnica requer a apresentação de preferências na forma de relações de preferências multiplicativas, considera-se que os DMs optaram por representar suas preferências nesse formato.

O especialista e_1 não estava pronto para expressar sua opinião, não participando, portando, dessa etapa da discussão. As preferências individuais de outros especialistas estão expressas abaixo:

$$RM_2 = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 3,00 & 5,00 & 3,00 \\ 1,00 & 1,00 & 3,00 & 5,00 & 3,00 \\ 0,33 & 0,33 & 1,00 & 3,00 & 1,00 \\ 0,20 & 0,20 & 0,33 & 1,00 & 0,33 \\ 0,33 & 0,33 & 1,00 & 3,00 & 1,00 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} 1,00 & 5,00 & 3,00 & 3,00 & 5,00 \\ 0,20 & 1,00 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \\ 0,33 & 3,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 0,33 & 3,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 0,20 & 1,00 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \end{bmatrix}$$

$$RM_4 = \begin{bmatrix} 1,00 & 3,00 & 3,00 & 1,00 & 5,00 \\ 0,33 & 1,00 & 1,00 & 0,33 & 3,00 \\ 0,33 & 1,00 & 1,00 & 0,33 & 3,00 \\ 1,00 & 3,00 & 3,00 & 1,00 & 5,00 \\ 0,20 & 0,33 & 0,33 & 0,20 & 1,00 \end{bmatrix} \quad RM_5 = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,33 & 1,00 & 3,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,33 & 1,00 & 3,00 \\ 3,00 & 3,00 & 1,00 & 3,00 & 5,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,33 & 1,00 & 3,00 \\ 0,33 & 0,33 & 0,20 & 0,33 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Neste ponto, são calculados os pesos combinados dos DMs, sendo os resultados da aplicação da técnica proposta por Koksalmis, Koksalmis e Kabak (2019) apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 – Coeficientes de importância dos DMs

	e_2	e_3	e_4	e_5
Pesos Objetivos (w_o^y)	0,11	0,31	0,31	0,27
Pesos Subjetivos (w_s^y)	0,25	0,25	0,25	0,25
Pesos Combinados (w_c^y)	0,18	0,28	0,28	0,26

Fonte: Elaborada pela autora.

As preferências refletidas acima, aplicando (34) e (35), foram transformadas em relações de preferência *fuzzy* não-recíproca. Todas as quatro relações de preferências *fuzzy* não-recíproca foram agregadas usando o operador média ponderada (42) e o vetor de peso obtido. O resultado correspondente é uma matriz de preferência coletiva.

$$R_G = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,87 & 1,00 & 1,00 \\ 0,65 & 1,00 & 0,73 & 0,72 & 1,00 \\ 0,63 & 0,91 & 1,00 & 0,86 & 1,00 \\ 0,73 & 0,87 & 0,78 & 1,00 & 0,91 \\ 0,37 & 0,64 & 0,53 & 0,53 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os índices que regulam o fluxo do processo de construção de consenso são apresentados na Tabela 12. Esses índices correspondem ao nível de concordância por alternativa para cada um dos especialistas, calculado usando (43) e (44), nível médio de concordância, calculado usando (45), e o nível de consenso por uma alternativa, calculado usando (46). Finalmente, o nível de consenso atual do grupo é obtido com base em (47), correspondendo a $C_G = 0,83$.

Tabela 12 – Níveis de concordância e consenso 1ª iteração critério Risco Ambiental

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^2(x_k)$	0,85	0,74	0,77	0,67	0,80
$Sa^3(x_k)$	0,88	0,82	0,88	0,87	0,92
$Sa^4(x_k)$	0,90	0,87	0,85	0,81	0,92
$Sa^5(x_k)$	0,81	0,85	0,78	0,85	0,92
$Ca(x_k)$	0,86	0,82	0,82	0,80	0,89

Fonte: Elaborada pela autora.

O moderador determinou que o número máximo de iterações seja igual a 7 e que o nível mínimo de consenso do grupo seja igual a 0,85. Portanto, o especialista menos concordante é convidado a rever sua opinião. Analisando os dados da Tabela 12, o moderador convidou e_2 para revisar suas preferências associadas a x_4 . Durante a nova rodada de discussão, e_2 reavaliaram suas preferências refletidas pela seguinte relação de preferência multiplicativa:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 & 3,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 & 3,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 & 1,00 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 & 1,00 & 1,00 \\ 0,33 & 0,33 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os níveis de concordância e consenso por uma alternativa para a terceira iteração são mostrados na Tabela 13. O nível de consenso atual é $C_G = 0,86$, o que é aceitável. Assim, o processo de discussão está concluído.

Como as preferências já são apresentadas na forma de relações de preferência multiplicativas, agora o método AHP pode ser aplicado diretamente para obter os seguintes vetores:

$$\begin{aligned} e_2 &= [0,278 & 0,278 & 0,230 & 0,093 & 0,122] & e_3 &= [0,466 & 0,073 & 0,194 & 0,194 & 0,073] \\ e_4 &= [0,343 & 0,129 & 0,129 & 0,343 & 0,055] & e_5 &= [0,165 & 0,165 & 0,444 & 0,165 & 0,063] \end{aligned}$$

Tabela 13 – Níveis de concordância e consenso 2ª iteração critério Risco Ambiental

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^2(x_k)$	0,86	0,82	0,80	0,77	0,85
$Sa^3(x_k)$	0,86	0,84	0,88	0,88	0,94
$Sa^4(x_k)$	0,90	0,89	0,85	0,83	0,93
$Sa^5(x_k)$	0,83	0,86	0,80	0,87	0,93
$Ca(x_k)$	0,86	0,85	0,83	0,84	0,91

Fonte: Elaborada pela autora.

Aplicando a agregação OWA (33) com $w_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ e $w_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ aos vetores obtidos, é possível obter limites, que correspondem a pessimismo e otimismo, respectivamente, representados por B_{min} e B_{max} . Esses limites servem para construir combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários (EKEL; PEDRYCZ; PEREIRA, 2019; RAMALHO et al., 2019).

$$B_{min} = [0,165 \ 0,073 \ 0,129 \ 0,093 \ 0,055] \quad B_{max} = [0,466 \ 0,278 \ 0,444 \ 0,343 \ 0,122]$$

O esquema de consenso proposto no presente trabalho, como foi indicado acima, permite reduzir o nível de incerteza dos coeficientes da função objetivo. Isso é confirmado pelos coeficientes das funções objetivo construídas para “nível de inovação”, antes e depois da construção do consenso, respectivamente,

$$F(X) = [0,043,0,391]x_1 + [0,130,0,626]x_2 + [0,041,0,391]x_3 + [0,041,0,391]x_4 + [0,043,0,391]x_5 \quad (57)$$

$$F(X) = [0,043,0,096]x_1 + [0,130,0,626]x_2 + [0,135,0,391]x_3 + [0,135,0,391]x_4 + [0,043,0,096]x_5 \quad (58)$$

e “risco ambiental”, antes e depois da construção do consenso, respectivamente.

$$F(X) = [0,165,0,466]x_1 + [0,073,0,343]x_2 + [0,129,0,444]x_3 + [0,055,0,343]x_4 + [0,055,0,129]x_5 \quad (59)$$

$$F(X) = [0,165,0,466]x_1 + [0,073,0,278]x_2 + [0,129,0,444]x_3 + [0,093,0,343]x_4 + [0,055,0,122]x_5 \quad (60)$$

É possível observar que o intervalo de limites para os coeficientes das funções objetivo diminui significativamente, principalmente quando as opiniões dos membros do grupo são altamente discordantes.

Levando em consideração os objetivos de alocação e as funções de objetivo após consenso, indicados acima, bem como os dados da Tabela 7, é possível formar o seguinte modelo de decisão multiobjetivo fazendo com coeficientes de intervalo nas funções objetivo:

$$F_1(X) = [0,043,0,096]x_1 + [0,13,0,626]x_2 + [0,135,0,391]x_3 + [0,135,0,391]x_4 + [0,043,0,096]x_5 \rightarrow \max \quad (61)$$

$$F_2(X) = [20, 00, 30, 00]x_1 + [65, 00, 75, 00]x_2 + [55, 00, 65, 00]x_3 + [90, 00, 100, 00]x_4 + [40, 00, 50, 00]x_5 \rightarrow \max \quad (62)$$

$$F_3(X) = [55, 00, 70, 00]x_1 + [25, 00, 45, 00]x_2 + [40, 00, 60, 00]x_3 + [50, 00, 80, 00]x_4 + [70, 00, 90, 00]x_5 \rightarrow \max \quad (63)$$

$$F_4(X) = [0, 165, 0, 466]x_1 + [0, 073, 0, 278]x_2 + [0, 129, 0, 444]x_3 + [0, 093, 0, 343]x_4 + [0, 055, 0, 122]x_5 \rightarrow \min \quad (64)$$

sujeitas às restrições (51)-(56),

A execução do *estágio (b)* do esquema geral da tomada de decisão multicritério em condições de incerteza (Seção 2) gera (de acordo com o número de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários de cenários), considerando $S = 7$, os sete conjuntos a seguir de funções objetivo:

$$F_{1,1}(X) = 0, 0695x_1 + 0, 3780x_2 + 0, 2630x_3 + 0, 2630x_4 + 0, 0695x_5 \rightarrow \max \quad (65)$$

$$F_{1,2}(X) = 25, 000x_1 + 70, 000x_2 + 60, 000x_3 + 75, 000x_4 + 45, 000x_5 \rightarrow \max \quad (66)$$

$$F_{1,3}(X) = 62, 500x_1 + 35, 000x_2 + 50, 000x_3 + 65, 000x_4 + 80, 000x_5 \rightarrow \max \quad (67)$$

$$F_{1,4}(X) = 0, 3155x_1 + 0, 1755x_2 + 0, 2865x_3 + 0, 2180x_4 + 0, 0885x_5 \rightarrow \min \quad (68)$$

$$F_{2,1}(X) = 0, 0828x_1 + 0, 2540x_2 + 0, 1990x_3 + 0, 1990x_4 + 0, 0828x_5 \rightarrow \max \quad (69)$$

$$F_{2,2}(X) = 27, 500x_1 + 67, 500x_2 + 62, 500x_3 + 67, 500x_4 + 47, 500x_5 \rightarrow \max \quad (70)$$

$$F_{2,3}(X) = 66, 250x_1 + 40, 000x_2 + 45, 000x_3 + 57, 500x_4 + 85, 000x_5 \rightarrow \max \quad (71)$$

$$F_{2,4}(X) = 0, 2403x_1 + 0, 2268x_2 + 0, 2077x_3 + 0, 2805x_4 + 0, 0718x_5 \rightarrow \min \quad (72)$$

$$F_{3,1}(X) = 0, 0562x_1 + 0, 5020x_2 + 0, 3270x_3 + 0, 3270x_4 + 0, 0562x_5 \rightarrow \max \quad (73)$$

$$F_{3,2}(X) = 22, 500x_1 + 72, 500x_2 + 57, 500x_3 + 82, 500x_4 + 42, 500x_5 \rightarrow \max \quad (74)$$

$$F_{3,3}(X) = 58, 750x_1 + 30, 000x_2 + 55, 000x_3 + 72, 500x_4 + 75, 000x_5 \rightarrow \max \quad (75)$$

$$F_{3,4}(X) = 0,3908x_1 + 0,1242x_2 + 0,3653x_3 + 0,1555x_4 + 0,1053x_5 \rightarrow \min \quad (76)$$

$$F_{4,1}(X) = 0,0629x_1 + 0,3160x_2 + 0,2950x_3 + 0,3590x_4 + 0,0629x_5 \rightarrow \max \quad (77)$$

$$F_{4,2}(X) = 21,250x_1 + 68,750x_2 + 63,750x_3 + 63,750x_4 + 46,250x_5 \rightarrow \max \quad (78)$$

$$F_{4,3}(X) = 68,125x_1 + 32,500x_2 + 47,500x_3 + 68,750x_4 + 77,500x_5 \rightarrow \max \quad (79)$$

$$F_{4,4}(X) = 0,4284x_1 + 0,1499x_2 + 0,4046x_3 + 0,3117x_4 + 0,0634x_5 \rightarrow \min \quad (80)$$

$$F_{5,1}(X) = 0,0894x_1 + 0,5640x_2 + 0,1670x_3 + 0,2310x_4 + 0,0894x_5 \rightarrow \max \quad (81)$$

$$F_{5,2}(X) = 26,250x_1 + 73,750x_2 + 58,750x_3 + 78,750x_4 + 41,250x_5 \rightarrow \max \quad (82)$$

$$F_{5,3}(X) = 60,625x_1 + 42,500x_2 + 57,500x_3 + 53,750x_4 + 87,500x_5 \rightarrow \max \quad (83)$$

$$F_{5,4}(X) = 0,2779x_1 + 0,2524x_2 + 0,2471x_3 + 0,1867x_4 + 0,0969x_5 \rightarrow \min \quad (84)$$

$$F_{6,1}(X) = 0,0761x_1 + 0,1920x_2 + 0,3590x_3 + 0,2950x_4 + 0,0761x_5 \rightarrow \max \quad (85)$$

$$F_{6,2}(X) = 28,750x_1 + 66,250x_2 + 56,250x_3 + 86,250x_4 + 43,750x_5 \rightarrow \max \quad (86)$$

$$F_{6,3}(X) = 56,875x_1 + 37,500x_2 + 42,500x_3 + 76,250x_4 + 82,500x_5 \rightarrow \max \quad (87)$$

$$F_{6,4}(X) = 0,3531x_1 + 0,2011x_2 + 0,3259x_3 + 0,1242x_4 + 0,0801x_5 \rightarrow \min \quad (88)$$

$$F_{7,1}(X) = 0,0496x_1 + 0,4400x_2 + 0,2310x_3 + 0,1670x_4 + 0,0496x_5 \rightarrow \max \quad (89)$$

$$F_{7,2}(X) = 23,750x_1 + 71,250x_2 + 61,250x_3 + 71,250x_4 + 48,750x_5 \rightarrow \max \quad (90)$$

$$F_{7,3}(X) = 64,375x_1 + 27,500x_2 + 52,500x_3 + 61,250x_4 + 72,500x_5 \rightarrow \max \quad (91)$$

$$F_{7,4}(X) = 0,2026x_1 + 0,0986x_2 + 0,1684x_3 + 0,2492x_4 + 0,1136x_5 \rightarrow \min \quad (92)$$

A execução do *estágio (c)* do esquema geral da tomada de decisões multicritério em condições de incerteza (Seção 2) permitiu obter soluções para todos os problemas multiobjetivo ($S = 7$). Essas soluções são fornecidas na Tabela 14.

Tabela 14 – Alternativas de solução dos 7 cenários

s	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	473,080	0,120	1299,760	850,000	377,040
2	0,120	220,000	614,800	1480,000	685,080
3	0,000	220,000	1164,880	1615,000	0,120
4	684,760	0,240	0,000	1615,000	700,000
5	0,000	220,000	465,040	1615,000	699,960
6	0,120	85,000	1299,880	1615,000	0,000
7	629,800	219,960	0,240	1450,000	700,000

Fonte: Elaborada pela autora.

As soluções fornecidas na Tabela 14, de acordo com o *estágio* (d) do esquema geral da tomada de decisão multicritério em condições de incerteza (Seção 2), serviram para construir as matrizes de *payoff* para todas as funções objetivo ($q = 4$). Essas matrizes são fornecidas nas Tabelas 15-18, que são complementadas pelos critérios de escolha correspondentes (17)-(20). O cálculo de $F_p^H(X_k)$ para todas as funções objetivo de acordo com (20) foi executado com $\alpha = 0,75$.

Tabela 15 – Matriz de *payoff* e estimativas de critérios de escolha para $F_1(X_k)$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	624,52	498,22	750,80	742,09	489,48	782,08	484,41	782,08	624,52	268,66	707,66
X_2	681,71	529,48	833,95	825,31	629,89	751,70	519,96	833,95	681,71	207,71	755,45
X_3	814,28	609,09	1019,47	992,95	691,69	936,87	635,60	1019,47	814,28	22,55	916,87
X_4	521,08	436,10	606,05	666,96	496,99	581,85	338,49	666,96	521,08	413,42	584,85
X_5	678,86	527,76	829,95	830,52	637,38	738,88	508,65	830,52	678,86	220,53	750,05
X_6	798,75	601,66	995,84	990,12	638,10	959,41	607,38	995,84	798,75	53,60	897,30
X_7	556,98	454,58	659,38	673,77	577,93	571,27	404,95	673,77	556,98	388,14	606,57
$\min_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								666,96	521,08	22,55	584,85
$\max_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								1019,47	814,28	413,42	916,88

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 16 – Matriz de *payoff* e estimativas de critérios de escolha para $F_2(X_k)$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	187537,80	195037,20	180038,40	194296,50	184028,50	180778,50	191047,70	195037,20	187537,80	54576,40	191287,50
X_2	223719,60	230119,60	217319,60	232156,00	219357,20	214183,20	229182,00	232156,00	223719,60	16716,90	227662,80
X_3	238723,20	245123,20	232323,20	248872,90	236072,90	227473,50	242473,50	248872,90	238723,20	0,00	243523,05
X_4	202060,80	209559,60	194562,00	206423,90	198273,90	197696,50	205848,90	209559,60	202060,80	42449,00	205810,20
X_5	228225,60	234625,60	221825,60	236625,70	223825,70	218725,50	233725,50	236625,70	228225,60	12247,20	232150,65
X_6	237370,80	244445,80	230295,80	248194,90	234046,10	226121,70	241120,50	248194,90	237370,80	2027,40	242676,60
X_7	200406,60	206806,80	194006,40	204083,30	197580,90	195630,10	204332,10	206806,80	200406,60	44789,60	203606,70
$\min_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								195037,20	187537,80	0,00	191287,50
$\max_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								248872,90	238723,20	54576,40	243523,05

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 17 – Matriz de *payoff* e estimativas de critérios de escolha para $F_3(X_k)$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	179972,90	170758,95	189186,85	181629,18	182100,28	178069,03	178093,13	189186,85	179972,90	41779,45	184579,88
X_2	189453,90	179805,75	199102,05	191204,88	184202,78	203754,93	178653,03	203754,93	189453,90	20733,45	197479,45
X_3	170928,60	154092,30	187764,90	173522,35	163147,35	180911,05	166133,65	187764,90	170928,60	43645,15	179346,75
X_4	203780,90	197737,45	209824,35	211938,33	189580,03	219848,48	193756,78	219848,48	203780,90	0,00	212281,36
X_5	191923,80	182085,90	201761,70	194517,55	184142,55	208904,65	180130,45	208904,65	191923,80	17420,78	201711,10
X_6	172951,50	154765,05	191137,95	175546,23	165169,13	181582,98	169507,68	191137,95	172951,50	42972,40	182044,73
X_7	197323,10	193408,45	201237,75	204002,73	186731,23	212391,08	186167,38	212391,08	197323,10	8586,60	205835,15
$\min_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								187764,90	170928,60	0,00	179346,75
$\max_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								219848,48	203780,90	43645,15	212281,36

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 18 – Matriz de *payoff* e estimativas de critérios de escolha para $F_4(X_k)$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	740,33	649,17	831,57	1017,42	647,90	726,43	569,39	1017,42	740,31	309,53	905,41
X_2	598,06	641,95	554,24	786,53	550,18	483,34	571,89	786,53	598,03	32,1949	710,73
X_3	724,43	744,86	703,99	1007,69	644,90	624,47	620,33	1007,69	724,38	238,79	910,85
X_4	630,10	667,87	592,48	841,16	559,71	498,49	620,73	841,16	630,08	72,26	755,49
X_5	585,86	649,75	522,04	768,91	539,79	452,45	581,98	768,91	585,82	12,59	689,79
X_6	739,44	742,30	736,58	1042,12	644,21	641,35	629,76	1042,12	739,39	273,21	939,03
X_7	615,42	658,26	572,72	799,22	569,14	502,85	590,19	799,22	615,40	50,68	725,13
$\min_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								768,91	585,82	12,59	689,79
$\max_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								1042,12	740,31	309,53	939,03

Fonte: Elaborada pela autora.

A aplicação de (9) às estimativas de critérios de escolha fornecidas nas Tabelas 15-17 e (10) nas estimativas de critérios de escolha da Tabela 18 permitiu a construção de matrizes modificadas das estimativas dos critérios de escolha apresentados na Tabela 19.

Tabela 19 – Matriz modificada com estimativas de critérios de escolha

	$F_1(X)$				$F_2(X)$				$F_3(X)$				$F_4(X)$			
	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$	$F^W(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^H(X_k)$	$F^W(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	0,327	0,353	0,630	0,370	0,000	0,000	1,000	0,000	0,044	0,275	0,957	0,159	0,090	0,000	0,000	0,135
X_2	0,474	0,548	0,474	0,514	0,690	0,707	0,306	0,696	0,498	0,564	0,475	0,550	0,936	0,921	0,934	0,916
X_3	1,000	1,000	0,000	1,000	1,000	1,000	0,000	1,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,126	0,103	0,238	0,113
X_4	0,000	0,000	1,000	0,000	0,270	0,284	0,778	0,278	1,000	1,000	0,000	1,000	0,736	0,714	0,799	0,736
X_5	0,464	0,538	0,507	0,498	0,773	0,795	0,224	0,782	0,659	0,639	0,399	0,679	1,000	1,000	1,000	1,000
X_6	0,933	0,947	0,080	0,941	0,987	0,974	0,037	0,984	0,105	0,062	0,985	0,082	0,000	0,060	0,060	0,000
X_7	0,019	0,123	0,935	0,065	0,219	0,251	0,821	0,236	0,767	0,803	0,197	0,804	0,889	0,809	0,872	0,858

Fonte: Elaborada pela autora.

Finalmente, a tabela 20 reflete os níveis agregados das estimativas dos critérios de escolha *fuzzy*, que permitem indicar como a solução do problema X_2^0 (a segunda linha da tabela 14). Esta solução pode ser implementada, levando $X_1 = 0$, já que este recebeu um valor insignificante. No entanto, se X_1 tiver um valor mais significativo (digamos, $X_1 = R\$50,000,00$) e os consumidores não receberam o volume de recursos necessário, é necessário, como discutido no trabalho de Ramalho et al. (2019), remover X_1 da consideração e resolver o problema novamente. Ou seja, a ação a ser tomada deve

considerar que entre os consumidores que não receberam o volume de recursos necessário ($x_j < D_j$) é necessário escolher o consumidor com a menor quantidade de recursos recebidos, removê-lo de consideração e resolver o problema novamente. O procedimento deve ser repetido até a situação em que apenas os consumidores permanecem com a satisfação de suas demandas. Assim, a análise associada à alocação de recursos disponíveis é um procedimento iterativo.

Tabela 20 – Matriz com níveis de estimativas de critérios de escolha *fuzzy* agregados

	$mu_W^D(X_k)$	$mu_L^D(X_k)$	$mu_S^D(X_k)$	$mu_H^D(X_k)$
X_1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
X_2	0,4737	0,5479	0,3063	0,5138
X_3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
X_4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
X_5	0,4640	0,5381	0,2244	0,4976
X_6	0,0000	0,0060	0,0371	0,0000
X_7	0,0193	0,1225	0,1967	0,0654
$\max \mu^D(X_k)$	0,4737	0,5479	0,3063	0,5138

Fonte: Elaborada pela autora.

5 CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho estão associados a uma análise multicritério (análise dos modelos $\langle X, F \rangle$) em condições de incerteza, considerando funções objetivo construídas com base em informações quantitativas e qualitativas. Esses resultados estão relacionados à extensão do esquema geral da tomada de decisão multicritério em condições de incerteza, utilizando generalização elaborada com base em conjuntos nebulosos da abordagem clássica para lidar com a incerteza de informação para produzir soluções, incluindo soluções robustas, na análise de problemas multicritério. A utilização do esquema geral em sua forma original permite usar as informações quantitativas disponíveis no grau máximo. Se a utilização de informações quantitativas não leva a uma solução única, o esquema geral assume o uso de informações de caráter qualitativo (obtidas dos DMs) aplicadas na etapa final da decisão. No entanto, surgem mais frequentemente problemas que exigem consideração dos objetivos formados com base em informações quantitativas em todas as etapas da decisão. Considerando isso, os resultados de Ramalho et al. (2019) foram direcionados à construção de soluções multicritério, incluindo soluções robustas multicritério, construindo combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com a utilização direta de informações qualitativas apresentadas junto com informações quantitativas. No entanto, o processamento de informações qualitativas em Ramalho et al. (2019) baseia-se no uso de uma abordagem muito simplificada para agregar estimativas de preferências de especialistas individuais dentro de um modelo de tomada de decisão em grupo sem construir e analisar diversos tipos de informações de consenso. Considerando isso, os resultados do presente trabalho permitem a construção de combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários com uso direto de informações qualitativas, com base em estimativas de preferências de especialistas individuais agregadas após o consenso necessário. Para isso, foi proposto o novo esquema de construção de consenso, e seu uso permite evitar pontos negativos inerentes às abordagens tradicionais e reduzir os níveis de incerteza na estimativa de coeficientes de funções objetivo construídas com base na aplicação de informações qualitativas. As escolhas e combinações metodológicas utilizadas no presente trabalho são um aspecto original importante desta pesquisa. Os resultados apresentados são de caráter universal, em particular, foram aplicados à formulação e análise do problema de alocação de recursos multicritério em um planejamento de expansão da produção empresarial. Os resultados obtidos demonstram claramente a redução do grau de incerteza na estimativa dos coeficientes das funções objetivo construídas, possibilitando a obtenção de uma decisão mais coerente e consistente.

5.1 Trabalhos Futuros

Este trabalho apresentou resultados significativos associados a análise de modelos $\langle X, R \rangle$ e $\langle X, F \rangle$. Dentre as possibilidade de trabalhos futuros, sugere-se:

- Explorar a criação de cenários com níveis de otimismo-pessimismo definidos através do vetor de pesos \mathbf{W} em conjunto com o operador OWA;
- Propor formas de incluir os níveis de influência dos especialistas ao vetor de preferências para criação de cenários;
- Explorar a redução do número de cenários a serem criados, já que houve a redução nos intervalos de incerteza associados aos coeficientes das funções objetivos. Essa redução de cenários pode resultar em ganhos no esforço computacional.

REFERÊNCIAS

- ALONSO, S. et al. Visualizing consensus in group decision making situations. In: IEEE. **2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference**. [S.l.], 2007. p. 1–6. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 49.
- BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. **Management science**, INFORMS, v. 17, n. 4, p. B-141, 1970. Citado na página 30.
- BELYAEV, L. S. A practical approach to choosing alternate solutions to complex optimization problems under uncertainty. RM-77-007, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 31.
- BERNARDES, P. et al. Fuzzy set based multicriteria decision making and its applications. **PROGRESS IN NONLINEAR ANALYSIS RESEARCH**, p. 243, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 49.
- CABRERIZO, F. J. et al. Soft consensus measures in group decision making using unbalanced fuzzy linguistic information. **Soft Computing**, Springer, v. 21, n. 11, p. 3037–3050, 2017. Citado na página 24.
- CHEN, S.-M. et al. Adaptive consensus support model for group decision making systems. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 39, n. 16, p. 12580–12588, 2012. Citado na página 49.
- CHEN, S.-M.; TSAI, B.-H. A new method for autocratic decision making using group recommendations. In: IEEE. **Machine Learning and Cybernetics (ICMLC), 2013 International Conference on**. [S.l.], 2013. v. 3, p. 1250–1255. Citado na página 49.
- CHICLANA, F.; HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations. **Fuzzy sets and systems**, Elsevier, v. 122, n. 2, p. 277–291, 2001. Citado na página 37.
- COELLO, C. A. C. Evolutionary multi-objective optimization: A critical review. In: **Evolutionary optimization**. [S.l.]: Springer, 2003. p. 117–146. Citado na página 29.
- DONG, Y. et al. Consensus-based group decision making under multi-granular unbalanced 2-tuple linguistic preference relations. **Group Decision and Negotiation**, Springer, v. 24, n. 2, p. 217–242, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 48.
- EHRGOTT, M. **Multicriteria optimization**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. v. 491. Citado na página 29.
- EKEL, P. et al. Multiobjective and multiattribute decision making in a fuzzy environment and their power engineering applications. **Information Sciences**, Elsevier, v. 361, p. 100–119, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 23, 28 e 33.
- EKEL, P.; PEDRYCZ, W.; PEREIRA, J. **Multicriteria Decision-Making under Conditions of Uncertainty: Fuzzy set Perspective**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019. Citado 7 vezes nas páginas 33, 36, 37, 39, 56, 59 e 62.

EKEL, P.; PEDRYCZ, W.; SCHINZINGER, R. A general approach to solving a wide class of fuzzy optimization problems. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, v. 97, n. 1, p. 49–66, 1998. Citado na página 38.

EKEL, P. et al. Fuzzy set based models and methods of multicriteria group decision making. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 71, n. 12, p. e409–e419, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 24, 43, 44 e 49.

EKEL, P. Y. Fuzzy sets and models of decision making. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 44, n. 7, p. 863–875, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 23, 28, 30 e 43.

EKEL, P. Y.; GALPERIN, E. Box-triangular multiobjective linear programs for resource allocation with application to load management and energy market problems. **Mathematical and Computer Modelling**, Elsevier, v. 37, n. 1-2, p. 1–17, 2003. Citado na página 30.

EKEL, P. Y.; MARTINI, J.; PALHARES, R. M. Multicriteria analysis in decision making under information uncertainty. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, v. 200, n. 2, p. 501–516, 2008. Citado na página 31.

EKEL, P. Y.; NETO, F. H. S. Algorithms of discrete optimization and their application to problems with fuzzy coefficients. **Information Sciences**, Elsevier, v. 176, n. 19, p. 2846–2868, 2006. Citado na página 38.

FERREIRA, A. L. L. Estilos de tomada de decisão na adoção de inovações tecnológicas: um estudo de caso no instituto federal de educação, ciência e tecnologia da bahia. Faculdade de Educação, 2016. Citado na página 23.

FIGUEIRA, J.; GRECO, S.; EHRGOTT, M. **Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. v. 78. 445–470 p. Citado na página 23.

HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E.; CHICLANA, F. Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 129, n. 2, p. 372–385, 2001. Citado na página 39.

HERRERA-VIEDMA, E. et al. A review of soft consensus models in a fuzzy environment. **Information Fusion**, Elsevier, v. 17, p. 4–13, 2014. Citado na página 41.

HWANG, C.-L.; MASUD, A. S. **Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1979. Citado na página 29.

HWANG, C.-L.; YOON, K. **Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications – A State-of-the-Art Survey**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 27.

KOKSALMIS, E.; KABAK, Ö. Deriving decision makers' weights in group decision making: An overview of objective methods. **Information Fusion**, Elsevier, v. 49, p. 146–160, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 44.

KOKSALMIS, E.; KOKSALMIS, G. H.; KABAK, O. A combined method for deriving decision makers' weights in group decision making environment: An application in medical decision making. In: **Industrial Engineering in the Big Data Era**. [S.l.]: Springer, 2019. p. 503–513. Citado 4 vezes nas páginas 44, 45, 51 e 60.

- LOOTSMA, F. A. **Multi-criteria decision analysis via ratio and difference judgement**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. v. 29. Citado na página 44.
- LUCE, R. D.; RAIFFA, H. Games and decisions: Introduction and critical survey. **New York**, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 31.
- ORLOVSKY, S. Problems of decision-making with fuzzy information. WP-83-028, 1983. Citado na página 38.
- PARREIRAS, R.; EKEL, P. Construction of nonreciprocal fuzzy preference relations with the use of preference functions. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 33, n. 2, p. 305–323, 2013. Citado na página 43.
- PARREIRAS, R.; EKEL, P.; BERNARDES, F. A dynamic consensus scheme based on a nonreciprocal fuzzy preference relation modeling. **Information Sciences**, Elsevier, v. 211, p. 1–17, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 43, 48 e 49.
- PARREIRAS, R. et al. Tomada de decisão multicritério em grupo com estrutura hierárquica usando modelagem das relações de preferência fuzzy. Ubatuba, SP, 2011. Citado na página 43.
- PARREIRAS, R.; EKEL, P. Y.; MORAIS, D. Fuzzy set based consensus schemes for multicriteria group decision making applied to strategic planning. **Group Decision and Negotiation**, Springer, v. 21, n. 2, p. 153–183, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 45, 46, 47 e 51.
- PARREIRAS, R. O. et al. A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments. **Information Sciences**, Elsevier, v. 180, n. 7, p. 1075–1089, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 24, 43, 48 e 49.
- PEDRYCZ, W.; EKEL, P.; PARREIRAS, R. **Fuzzy multicriteria decision-making: models, methods and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado 9 vezes nas páginas 23, 27, 28, 29, 30, 31, 35, 37 e 39.
- PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets: analysis and design**. [S.l.]: Mit Press, 1998. Citado na página 30.
- PEREIRA, J. et al. On multicriteria decision making under conditions of uncertainty. **Information Sciences**, Elsevier, v. 324, p. 44–59, 2015. Citado 11 vezes nas páginas 23, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41 e 51.
- QUEIROZ, J. C. B. de. **Modelos e métodos de tomada de decisões para apoio à gestão estratégica em empresas de energia elétrica**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2009. Citado na página 23.
- RAIFFA, H. Decision analysis addison-wesley. **Reading, Mass**, 1968. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 31.
- RAMALHO, F. et al. Multicriteria decision making under conditions of uncertainty in application to multiobjective allocation of resources. **Information Fusion**, v. 49, 01 2019. Citado 16 vezes nas páginas 24, 28, 36, 37, 39, 41, 42, 43, 51, 52, 55, 56, 59, 62, 66 e 69.
- RAMALHO, R. D. **Utilização da informação qualitativa no processo de tomada de decisão**. 71–72 p. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2017. Citado na página 57.

RAMANATHAN, R.; GANESH, L. Group preference aggregation methods employed in ahp: An evaluation and an intrinsic process for deriving members' weightages. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 79, n. 2, p. 249–265, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 44.

SAATY, T. L. The analytic hierarchy process mcgraw-hill. **New York**, v. 324, 1980. Citado 5 vezes nas páginas 36, 37, 39, 40 e 51.

SAATY, T. L.; PENIWATI, K.; SHANG, J. S. The analytic hierarchy process and human resource allocation: Half the story. **Mathematical and Computer Modelling**, Elsevier, v. 46, n. 7-8, p. 1041–1053, 2007. Citado na página 39.

SAATY, T. L.; VARGAS, L. G.; DELLMANN, K. The allocation of intangible resources: the analytic hierarchy process and linear programming. **Socio-Economic Planning Sciences**, Elsevier, v. 37, n. 3, p. 169–184, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

SOBOL, I.; STATNIKOV, R. The choice of optimal parameters in problems with many criteria: Textbook. **Manual for Universities (Moscow: Drofa)**, v. 175, 2006. Citado na página 41.

SOBOL', I. On the systematic search in a hypercube. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 16, n. 5, p. 790–793, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 41.

TOLOIE-ESHLAGHY, A.; FAROKHI, E. N. Measuring the importance and the weight of decision makers in the criteria weighting activities of group decision making process. **American Journal of scientific research**, v. 24, p. 6–12, 2011. Citado na página 44.

TRIANTAPHYLLOU, E. Two new cases of rank reversals when the ahp and some of its additive variants are used that do not occur with the multiplicative ahp. **Journal of Multi-Criteria Decision Analysis**, Wiley Online Library, v. 10, n. 1, p. 11–25, 2001. Citado na página 38.

WEBSTER, T. **Managerial Economics: Theory and Practice**. [S.l.]: Academic Press, 2003. Citado na página 31.

YAGER, R. R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. **IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics**, IEEE, v. 18, n. 1, p. 183–190, 1988. Citado na página 41.

ZHANG, Q.; CHEN, J. C.; CHONG, P. P. Decision consolidation: criteria weight determination using multiple preference formats. **Decision Support Systems**, Elsevier, v. 38, n. 2, p. 247–258, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.