



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

O ensino de Trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico.

Evandro Pinheiro

Belo Horizonte

2008

Evandro Pinheiro

“O ensino de Trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico.”

Núcleo Universitário Coração Eucarístico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares

Belo Horizonte

2008



Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

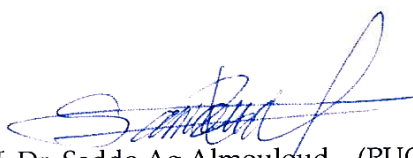
“O Ensino de Trigonometria na Educação Básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico”

Evandro Pinheiro


Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:



Prof. Dr. João Bosco Laudares – Orientador (PUC Minas)
Doutor em Educação: História, Política, Sociedade (PUC-SP)



Prof. Dr. Saddy Ag Almouloud – (PUC São Paulo)
Doutor em Mathematiques et Applications – Universite de Rennes - França



Prof.ª Dr.ª Maria Clara Rezende Frota –(PUC Minas)
Doutora em Educação (UFMG)

Belo Horizonte, 27 de junho de 2008.

A Deus, pela possibilidade da vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que fez de mim apenas um instrumento de tua vontade.

A Renata, minha esposa, pela força, fé, esperança, garra, vontade de superar todas as dificuldades da vida.

A meus filhos Filipe e Frederico, pelo carinho e incentivo.

A meu Pai, Sr. Celso, instrutor de caráter que me ensinou a trilhar o caminho de homem.

A minha Mãe, Lene, com teu sempre coração de mãe.

Ao Prof. Dr. João Bosco Laudares, meu Mestre e Instrutor, obrigado pela paciência, orientação e comprometimento profissional.

Aos professores Dr^a. Maria Clara Resende Frota e Dr. Saddo Ag Almouloud, pelas contribuições ao fazerem parte da banca examinadora.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciência e Matemática, pelos ensinamentos preciosos e fundamentais para o desenvolvimento do curso.

Aos funcionários da PUC Minas, pelo apoio, colaboração e disponibilidade.

Aos meus irmãos e amigos pelo otimismo e incentivo.

RESUMO

Repensar a didática para o ensino de Trigonometria foi nosso grande desafio. Pretendemos contribuir para o estudo de Trigonometria minimizando o uso excessivo de operacionalização algébrica a partir de extenso formulário. Nesse contexto identificamos e destacamos as variáveis de nosso problema: o conteúdo de Trigonometria proposto para o ensino médio, o método de ensino e as possibilidades metodológicas. Portanto o objetivo desta Dissertação é apresentar os resultados de uma pesquisa que culminou na elaboração de uma sequência didática que venha a contribuir para uma melhoria do ensino e aprendizagem de Trigonometria. Assim, propomos atividades de caráter investigativo. Usamos a visualização e interpretação geométrica da circunferência trigonométrica como objeto ampliador de possibilidades para o estudo das propriedades trigonométricas e suas funções básicas como seno, cosseno e tangente. O resultado da pesquisa apresenta uma nova alternativa para o ensino de Trigonometria e, também, a melhora na aprendizagem dos alunos com relação à compreensão dos conceitos desse conteúdo.

Palavras chaves: Ensino e aprendizagem de Trigonometria, circunferência trigonométrica, sequência didática, construção de conceitos.

ABSTRACT

Reconsidering a didactic sequence for the teaching process of the Trigonometry was our biggest challenge. We intend to contribute to the study of Trigonometry, minimizing the excessive usage of algebraic operationalization from an extensive formula. This way, we identified and pointed out the variables of our problem: the Trigonometry contents proposed for high school, the teaching methodology and the methodological possibilities. Therefore the main purpose of this dissertation is to present the results of a research that culminated in an elaboration of a didactics sequence to contribute to an improvement on the education and on the learning process of the Trigonometry. So activities, using an investigative character were proposed. We also used the geometric visualization and exploration of the trigonometric circumference, amplifying the possibilities for the study of Trigonometry proprieties and their basic functions, such as sine, cosine and tangent. The results of this research show a new alternative for the teaching process of the Trigonometry and an improvement on the learning process of the students regarding to the concepts of this content comprehension.

Key-words: education, learning process of the Trigonometry, trigonometric cycle, didactics sequence, construction of concepts

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	09
1 – O ENSINO DE TRIGONOMETRIA	14
1.1 – Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.....	14
1.2 – Conceitos Básicos para elaboração de uma sequência de conteúdos e uma Sequência didática	16
1.3 – Concepção investigativa na estruturação de atividades.....	18
1.4 - A Construção de Conceitos.....	20
1.5 - Produção acadêmica relativa ao tema pesquisado.....	22
1.5.1 - <i>Dissertações</i>	22
1.5.2 - <i>Artigo correlato</i>	24
2 – ANÁLISE DO CONTEÚDO DE TRIGONOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO	26
2.1 – O livro didático.....	26
2.2 – Análise dos livros didáticos.....	27
2.3 - Comentários finais sobre as três obras.....	33
3 – ELABORAÇÃO DE SEQUÊNCIA DE CONTEÚDO E DIDÁTICA PARA ENSINO DE TRIGONOMETRIA	35
3.1 - Elaboração da seqüência de conteúdos.....	35
3.2 – Elaboração das Atividades.....	36
3.2.1 – <i>Relação das Atividades por Conteúdo</i>	38
3.2.2 – <i>Atividades</i>	38

4 – APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E PROPOSTAS DE SUA REFORMULAÇÃO	52
.....	52
4.1 – Pesquisa qualitativa	52
4.2 – Público alvo da pesquisa	53
4.3 – Metodologia adotada na aplicação das atividades	53
4.4 – Método adotado na coleta de dados	55
<i>4.4.1 - Primeira etapa na avaliação da atividade – Aluno e atividade</i>	56
<i>4.4.2 – Segunda etapa na avaliação da atividade – Professor colaborador</i>	78
CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84
APÊNDICE	87

INTRODUÇÃO

Sou licenciado em Matemática em 1990 e, desde então, trabalho como docente em escolas públicas e particulares, exercendo a profissão nos três segmentos do ensino dessa matéria. Com o título de Especialista em Fundamentos de Matemática atuei no ensino superior ao ministrar aulas de Matemática I e II no curso Normal Superior pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

Pela necessidade de fazer o curso de Mestrado, decidi concentrar o trabalho profissional apenas na educação básica. Atualmente sou professor de Matemática no ensino fundamental, médio e coordenador de apoio técnico em Matemática de uma rede privada do ensino básico. Essa instituição de ensino é constituída por sete unidades espalhadas pela região Metropolitana de Belo Horizonte e como coordenador sou responsável pela elaboração de provas especiais trimestrais de 5ª série do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio, elaboração de cronogramas de conteúdos de Matemática, elaboração de provas de seleção de pessoal, coordenação e mediação de reuniões com os professores de área, escolha de material didático, dentre outras.

Apesar da grande experiência que possibilita conhecer várias realidades, necessito de buscar incessantemente novas propostas metodológicas e novos conhecimentos que venham a contribuir para minha atuação como educador. A escolha por fazer um Mestrado em Ensino trouxe subsídios para o exercício do cargo profissional de confiança que exerço.

Como já mencionado, minha formação inicial acadêmica deu-se na década de 80. Analisando historicamente esse período de minha formação inicial, percebo que sou fruto de uma de escola cuja concepção era o currículo linear, os semestres eram modulares e as matérias ministradas segundo uma visão tradicionalista de ensino. Conforme trabalho inventariado por Fiorentini (2006), o surgimento da área de conhecimento profissional reconhecido como Educação Matemática aconteceu na década de 70 e 80. As discussões ligadas ao desenvolvimento do ensino como campo profissional estavam recém-nascidas no universo pragmático em educação da época. A partir desse período aflorou-se a preocupação em se fazer um currículo envolvendo não apenas o conteúdo específico, mas, também, os processos relativos à transmissão e assimilação do conteúdo matemático.

As mudanças sociais do mundo contemporâneo, implicitamente, criam variações no comportamento das pessoas. É comum encontrarmos estudantes que se condicionam apenas em decorar e aplicar fórmulas, sem se preocuparem em entender de fato, o conceito

matemático trabalhado. Educar é um processo longo e contínuo. A persistência e concentração na realização de atividades são essenciais para uma aprendizagem efetiva e consciente.

Historicamente, em contextos educacionais, encontramos programas curriculares de Matemática que destacam um conhecimento específico, isolado de uma situação cultural, social ou até mesmo de área, e que privilegiam a prática de aprendizagem pela memorização e repetição de procedimentos. Nesses modelos educacionais, encontramos propostas curriculares em que na Matemática, subdividida em pacotes, ora se estuda álgebra, ora geometria, contrapondo a própria evolução dessa ciência que, como tal, deveria apresentar-se através dos elos de integração entre seus próprios conteúdos internos bem como com outras áreas do conhecimento.

Apesar de ter tido uma formação inicial tradicionalista, considero a importância de se ensinar uma Matemática observando as diferenças culturais na sociedade. Conhecer nossos alunos, a instituição em que trabalhamos, a comunidade na qual estamos inseridos, direcionar o currículo aos cursos ministrados e aos níveis de escolaridade, usando o discernimento no aprofundamento dos conteúdos, uma metodologia de ensino adequada e o equilíbrio entre os eixos temáticos; geometria, aritmética, álgebra e estatística é fundamental para a melhoria do ensino de um modo geral e, em particular, do ensino de Matemática.

Resolver problemas referentes às metodologias educacionais em alguns conteúdos matemáticos considerados difíceis de ensinar, assim como de aprender, levou-me a procurar algumas soluções, mesmo que sejam pontuais que viessem minimizar os conflitos estabelecidos no processo ensino e aprendizagem.

Optei por desenvolver a Dissertação de Mestrado sobre o conteúdo de Trigonometria. Escolhi tal conteúdo a partir da minha própria percepção e experiência profissional, assim como pelas falas apontadas pelo grupo de professores de meu convívio diário e através de leitura de artigos referentes ao tema. O diálogo entre os pares e os artigos lidos referentes ao conteúdo de Trigonometria sempre indicavam as dificuldades de ensino e aprendizagem apresentadas pelos professores e alunos.

Uma pesquisa desenvolvida por um grupo de trabalho de professores de Matemática do Estado do Paraná, sobre novas possibilidades para educadores matemáticos, apresentada na 25ª reunião anual pela Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, aponta que, entre os educadores daquela região, a Trigonometria é o conteúdo programático que apresenta maior dificuldade na aprendizagem por parte dos alunos. A minha apreciação sobre o fato, também se confirma na preocupação apresentada por professores em outras

regiões do país. Na citação de Amaral (2002), em sua dissertação apresentada no Estado de Minas Gerais, percebe-se o quadro que se encontra a concepção dos professores sobre a Trigonometria e sobre o seu ensino.

Dos vários conteúdos de Matemática, a Trigonometria é um dos de mais difícil compreensão pelos (as) alunos (as). Acreditamos que tal dificuldade se deva ao seu grau de abstração e a forma expositiva / transmissiva em que a mesma é ensinada. Os fatos e conceitos são apresentados sem que o aluno tenha oportunidade de construí-los. (AMARAL, 2002, p.11)

Outro texto que merece destaque é o artigo divulgado na Revista de Educação Matemática ZETETIKÉ, onde Brito e Morey (2004) apontam que os problemas no ensino de Trigonometria estão localizados não apenas no aluno, mas, também, na concepção do próprio professor sobre o conteúdo, frutos da má formação acadêmica dos cursos de licenciatura na década de 70 e 80.

A partir de então eu e meu orientador trabalhamos em diálogo e acordos. Repensar a didática para o ensino de Trigonometria foi nosso grande desafio. Identificamos e destacamos as variáveis de nosso problema: a questão curricular sobre o conteúdo de Trigonometria proposto para o ensino médio; o método de ensino; as possibilidades metodológicas.

Primeiro, apresentamos propostas metodológicas para uma Trigonometria integrada com outros conteúdos conceituais, procedimentais e, ainda, proporcionamos interações entre os grandes blocos temáticos, especificamente, geometria e álgebra. Dessa forma, criamos possibilidades de se estudar as funções trigonométricas e suas propriedades a partir da visualização e análise geométrica do desenho do ciclo trigonométrico, contribuindo para uma melhor aprendizagem em Trigonometria minimizando o uso excessivo de fórmulas.

Inicialmente, apegamo-nos nas concepções mais recentes sobre o currículo e metodologias usadas em sala de aula destacadas por Pires (2000), o qual propõe maior interação entre alunos e conteúdos através das resoluções de problemas e aplicações. No entanto, essa concepção, na prática, parece ser uma realidade muito distante do conteúdo específico de Trigonometria visto as dificuldades em contextualizar tal conteúdo em nível médio de ensino. A maioria dos livros didáticos do ensino médio ainda propõe o estudo de Trigonometria de forma linear e descontextualizada, com o conteúdo estagnado numa cultura em que a Matemática deve ser tratada apenas pelos matemáticos.

Apesar das dificuldades com relação ao currículo, sabemos que o estudo de Trigonometria tem sido dificultado devido à abordagem algébrica dada ao tratamento e manipulação das “muitas” fórmulas existentes em seu conteúdo. A algebrização excessiva de qualquer conteúdo Matemático torna a aprendizagem cansativa e extremamente abstrata.

A abordagem na profundidade dos conteúdos matemáticos deve ser sempre relevante em nossas decisões. O rigor matemático na linguagem algébrica e formalização dos conteúdos são necessários e essenciais para os cursos direcionados à área de exatas, mas o mesmo enfoque no aprofundamento algébrico é discutível para o desenvolvimento do trabalho em outras áreas do conhecimento. Essa preocupação também é exposta em um trabalho intitulado “Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis”, do autor Usiskin, apresentado por Coxford (1995, p.9). Esse artigo destaca que em 1977 o enfoque dado à álgebra era a importância de aprender a praticar técnicas, porém, em 1983 na Conference Board of the Mathematical Sciences, já se questionava a real necessidade de se fazer tantas manipulações algébricas, principalmente devido ao uso do computador.

Usar de conhecimentos em Geometria já adquiridos pelos alunos na educação fundamental e, agora, usá-los para relacionar com novos conhecimentos em Trigonometria foi a estratégia inicial e fundamental para nossa prática de estudo.

Repensamos a aprendizagem da Trigonometria inspirados pelas idéias de Eves quando cita:

Há muitas áreas da matemática em que a introdução de um procedimento e uma terminologia geométrica simplifica muito tanto a compreensão como a apresentação de um determinado conceito ou desenvolvimento. [...] Além de a linguagem da geometria frequentemente ser muito mais simples e elegante do que a linguagem da álgebra e da análise, às vezes é possível levar a cabo linhas de raciocínio rigorosas em termos geométricos sem traduzi-las para a álgebra e a análise. Disso resulta uma economia considerável, tanto de reflexões como de comunicações de reflexões. (EVES, 1992, p.28)

Inspiramos-nos também nas noções geométricas como parte da construção do pensamento da criança desde seus anos iniciais, como destacado nas obras de Piaget. Uma aprendizagem que relacionasse o conhecimento já consolidado e vivido em experiências lúdicas à estruturação e formação de um novo conceito, ou seja, associação entre as relações topológicas como ordem, paralelismo ou circunscrição dos conhecimentos de Geometria euclidiana e a formação de novos conceitos em Trigonometria.

A Geometria, como parte da Matemática que estuda as formas e medidas, torna-se importante aliada na estruturação curricular numa perspectiva de visualização e exploração geométrica aplicada a outros conceitos matemáticos e, portanto, mecanismo essencial e estratégico de elevação de um conhecimento que, a priori, de cunho simples ou fundamental, reestruture-se, que possibilite estabelecer conjecturas, generalizações e amplie no sentido do conhecimento trigonométrico.

A dissertação foi estruturada em quatro capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos a proposta para ensino de Trigonometria destacadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, os conceitos básicos para elaboração de seqüência de conteúdos e seqüência didática, as concepções investigativas na estruturação de atividades, a construção do conceito de um objeto e a produção acadêmica relativa ao tema pesquisado. No segundo capítulo, apresentamos o conteúdo de Trigonometria proposto em livros didáticos do ensino médio e uma breve análise metodológica. No terceiro capítulo, elaboramos as atividades conforme seqüência de conteúdos e de procedimentos didáticos para o ensino de Trigonometria. No quarto capítulo, apresentamos a análise qualitativa da aplicação das atividades no campo de pesquisa e propostas de reformulação.

1 – O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

1.1 – Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

Conforme descrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, a Matemática, além de seu caráter formativo e instrumental, é também uma ciência, com suas características estruturais específicas. A descoberta científica consiste em processos de elaboração intelectual que caracterizam a atividade do homem. Para Aristóteles, a lógica é um instrumento para o conhecimento. Nela, associamos os procedimentos, regras e leis que devem ser empregados naqueles raciocínios que se referem às todas as coisas das quais possamos ter um conhecimento universal e necessário.

A ciência, inserida nos processos metodológicos para práticas educacionais, é assim definida por Caraça (1958):

A ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. “ Ou se olha para ela tal como vem expostas nos livros de ensino [...]”, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições [...]”, impregnado de condição humana. (CARAÇA, 1998, p.XXIII)

Na definição de Ciência apresentada por Caraça, atingimos o aspecto fundamental na descrição da proposta educacional apresentada pelos PCNEM, ou seja, fazer com que o aluno tenha capacidade de pesquisa, autonomia e, principalmente, que seja agente responsável pela aquisição de seu próprio conhecimento.

Para conferir maior autonomia ao aluno, cabe aos profissionais de educação repensar a sua prática, suas relações com a metodologia, a significação do conceito matemático e o conteúdo trabalhado em sala de aula. Conforme os PCNEM (1999), os conceitos devem ser trabalhados pela construção de significação que, segundo Ausubel, deve acontecer através da incorporação dos novos conhecimentos aos já existentes estabelecendo assimilação eficaz do conteúdo.

Não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito a informações, com as definições e exemplos, assim como a exercitação. Pois se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça

alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. (PCNEM, 1999, p. 255)

Os exercícios que cumprem a função do aprendizado de técnicas não devem ser eliminados, mas a preocupação excessiva com o treinamento, memorização de fórmulas, regras e repetição de procedimentos algébricos são características de uma educação tecnicista, de um modelo que induz uma limitação da capacidade de abstrair, de generalizar ou até mesmo formalizar um conteúdo. Para uma maior articulação entre idéias e conceitos, Sánchez e Bravo (2006) destacam as idéias de Ausubel sobre as condições para que aluno tenha aprendizagem:

Uma aprendizagem significativa obriga o aluno a observar, perguntar, formular hipóteses, relacionar conhecimentos novos com os que já possuem e tirar conclusões lógicas a partir dos dados obtidos. Enfim, exige que construa paralelamente fatos, conceitos, princípios, procedimentos e estratégias relativas ao conhecimento matemático. (SÁNCHEZ e BRAVO, 2006, p. 24)

A preocupação com as relações entre conteúdos e as experiências do indivíduo ficou evidenciada com o surgimento da Educação Matemática como campo profissional na década de 1970. Fiorentini (2006) destaca como proposta da Educação Matemática um currículo que envolva não apenas o conteúdo específico, mas, também, os processos relativos à transmissão e assimilação da Matemática. A preocupação dos professores em relação às propostas curriculares que integram os conceitos com os procedimentos e atitudes fundamentais para que o aluno aprenda a aprender são, também, destacadas por Pires (2000):

Educadores e matemáticos colocam a atividade matemática como criação, produção, fabricação, não mais como olhar e desvelar. Destacam que os conceitos matemáticos não são um bem cultural, transmitidos hereditariamente como dom ou socialmente como capital cultural, e sim o resultado de um trabalho do pensamento. (PIRES, 2000, p.63)

Especificamente sobre a Trigonometria, os PCNEM sugerem a sua relação com o desenvolvimento de habilidades e competências através das aplicações, evitando o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações. No entanto, ainda com relação ao conteúdo de Trigonometria a ser trabalhado em sala de aula, o PCN+, Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares (2002) sugerem como proposta para o trabalho docente que:

Os temas devem, ainda, permitir uma articulação lógica de diferentes idéias e conceitos para garantir maior significação para a aprendizagem, possibilitar o estabelecimento de relações pelo aluno de forma consciente no sentido de caminharem em direção às competências da área e, até mesmo, melhor utilização do tempo disponível. É importante evitar detalhamento ou nomenclatura excessiva. (PCN+, 2002, p.119)

O conteúdo de Trigonometria pode ser explorado dentro da área específica através de conexões entre diferentes conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento, ou ainda por meio de aplicações nas outras áreas do conhecimento. Desta forma, a Trigonometria pode ser ensinada por meio de situações-problema vivenciadas como nas ciências naturais, mas, também, internamente à própria Matemática através das co-relações entre outros conceitos matemáticos, como os da Geometria.

Portanto, a Geometria, através de suas representações internas de linguagem, suas propriedades e pela visualização de um desenho, é um conhecimento fundamental que auxilia a argumentação e busca de soluções que minimizam o excesso da algebrização em Trigonometria. Assim sendo, a exploração visual, a partir das linguagens geométricas, torna-se um grande aliado aos processos de construções de novos conceitos e da aprendizagem significativa. O reforço da articulação entre idéias e novos conceitos adquiridos associados à Geometria é destacado por Ponte (2003) quando cita:

A Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa. É possível conceber tarefas adequadas a diferentes níveis de desenvolvimento que requerem um número reduzido de pré-requisitos. No entanto, a sua exploração pode contribuir para uma compreensão de fatos e relações geométricas que vai muito além da simples memorização e utilização de técnicas para exercícios-tipo. (PONTE, 2003, p. 71)

O ensino das funções trigonométricas básicas acontece a partir de transferências de representações, ou seja, de uma representação circular para uma representação de plano cartesiano. Essa transferência de representações de linguagens somente é significativa para o aluno quando há compreensão do conceito de ciclo trigonométrico.

1.2 – Conceitos Básicos para elaboração de uma seqüência de conteúdos e uma seqüência didática.

O trabalho humano é decorrente de uma atividade a ser realizada, e cada trabalho tem um objetivo a ser alcançado. O desenvolvimento de uma sociedade depende do trabalho a ser desenvolvido, e este trabalho requer organização e transposição de etapas. Portanto, desde uma descoberta científica ou um planejamento de uma nova atividade, o pressuposto é verificação da veracidade de um objeto de análise, ou ainda, o aperfeiçoamento e melhoria deste objeto.

Na Educação, especificamente no ensino, todo o trabalho é desenvolvido com a finalidade de alcançarmos um objetivo central, que é fazer com que o educando aprenda o que é proposto. Sabemos que os processos de ensino e aprendizagem são complexos e possuem diversas variáveis como o aluno, agente responsável pela sua própria aprendizagem, ou a importância que o educador exerce neste processo, principalmente no ensino e suas metodologias.

O professor é peça fundamental no processo ensino/aprendizagem, pois é ele, detentor de um conhecimento específico, quem conhece as condições necessárias para fazer intervenções no processo educacional, ou, ainda, quem prepara material didático que interfere diretamente nas relações de ensino e aprendizagem, ou seja, o professor é agente responsável pela elaboração da sequência didática.

Toda a sequência didática tem um objetivo a ser alcançado, e esse objetivo deve ser transparente para todos os integrantes do processo. Sobre o exposto, Zabala (1998, p.18) define uma sequência didática como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos”.

A sequência didática dependerá da intervenção metodológica elaborada e do planejamento dos conteúdos a serem desenvolvidos. Toda intervenção metodológica é associada com “o que fazer” para obtermos melhores resultados de aprendizagem, ou seja, que tipo de atividade ou aula deve ser programada para a melhoria do ensino e, ainda, todo planejamento dos conteúdos é associado com o “como fazer” para que isto aconteça. O conteúdo é “tudo quanto se tem que aprender para alcançar determinados objetivos que não apenas abrangem as capacidades cognitivas, como também incluem as demais capacidades.” (ZABALA,1998, p.30)

Os conteúdos de aprendizagem não são apresentados apenas como as matérias específicas de área em suas definições e conceitualizações, assim como os procedimentos adotados na execução de modelos matemáticos, mas, também, todos os conteúdos que

possibilitem o desenvolvimento pessoal e social, como afetividade, compromisso, responsabilidade e cooperação.

A sequência didática é norteada conforme o material oferecido no trabalho escolar e a sua condição de potencializar a atividade autônoma do aluno. Na concepção de Zabala (1998), os materiais de desenvolvimento curricular são os instrumentos de referência e critérios que proporcionam a intervenção do professor no processo de ensino/aprendizagem, ou seja, intervenções pedagógicas no contexto escolar, juntamente com as finalidades específicas ou gerais dos objetivos educacionais; os conteúdos e sua organização vinculados aos conceitos, procedimentos ou atitudes e, ainda, o suporte para a transmissão de informação e produção do conhecimento.

Na visão de Falcão (2003), para que uma sequência didática seja exequível é necessária a existência dos contratos didáticos, que legitimam o produto final em termos de aprendizagem. Fiorentini (2006) apresenta o termo contrato didático, como conceito introduzido por Guy Brousseau como:

Contrato didático significa as atitudes, comportamentos, posturas e ações dos alunos, que são esperadas pelo professor, e aquelas do professor, que são esperadas pelos alunos. Esse contrato pode ser implícito ou explícito, podendo o mesmo ser negociado entre professor e alunos. (FIORENTINI, 2006, p.47)

Além das relações com os alunos, são necessárias negociações cuidadosas com os professores no que diz respeito às aceitações de novas propostas metodológicas de ensino. Um caminho que nos conduz para esta maior aceitação do educador se encontra no trabalho colaborativo entre os professores. O interesse em participar de grupos de discussões sobre questões que envolvem o ensino e a aprendizagem deve ser uma escolha pessoal. Essa opção de escolha de acordo com Borba (2004, p.54) “é influenciada pela identificação com os integrantes do grupo e pela possibilidade de compartilhar problemas, experiências e objetivos comuns”.

1.3 – Concepção investigativa na estruturação de atividades.

Fazer com que o aluno faça... ! Cabe ao professor criar situações que possibilitem ao próprio aluno ser o agente principal de sua aprendizagem. Para Zabala (1998, p.91), “numa

interpretação construtivista o importante é que o aluno dê conta de resolver seus próprios problemas, suas dificuldades e, no caso de dúvidas, que ele peça ajuda”.

Já numa concepção investigativa, Ponte (2003) afirma que “a investigação para os matemáticos é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos e desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades.” (PONTE, 2003, p.13).

No contexto escolar, as investigações também são processos de descobertas que requerem do aluno a elaboração de conjecturas, identificação de propriedades e formulação de idéias. Se uma atividade matemática propõe ao aluno que ele seja o agente responsável pela descoberta, então, essa é uma atividade investigativa.

Para a prática da pesquisa ou da investigação matemática é necessário que o aluno seja ativo na produção de seu conhecimento. Para Ponte (2003, p.23), “o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo”.

Podemos destacar duas vertentes na concepção investigativa na construção de uma atividade para uma seqüência didática. A primeira refere-se à quebra de paradigmas construídos e institucionalizados historicamente pelo conhecimento relacionado ao método de ensino em ambientes escolares, enquanto a segunda, diz respeito à influência dessas atividades no processo de aprendizagem do aluno inserido no contexto cultural e familiar.

Tanto na pesquisa como na educação, as concepções coincidem na reconstrução do conhecimento e se opõem à cópia de procedimentos. Assim,

Enquanto a pesquisa pretende, através do conhecimento inovador, manter a inovação como processo permanente, a educação, usando o conhecimento inovador como instrumento, busca alicerçar uma história de sujeitos e para sujeitos...” “...enquanto a pesquisa persegue o conhecimento novo, privilegiando como seu método o questionamento sistemático crítico e criativo, a educação reage contra o mero ensino copiado para copiar, privilegiando o saber pensar e o aprender a aprender. (DEMO, 1941, p.8)

Em ambas as concepções, o fundamental é que o aluno seja o agente autônomo de sua produção, no entanto, o professor é o responsável pelo impulso dessa produção, pois é ele quem idealiza e planeja as atividades. Tanto na elaboração da atividade feita pelo professor como na perspectiva do aluno em descobrir relações, até então, desconhecidas, sobre um objeto estudado, observamos a busca pela renovação da prática de ensino e aprendizagem no contexto do ambiente educacional.

Ainda na perspectiva do mesmo autor, é dever do professor compreender que

A pesquisa inclui sempre a percepção emancipatória do sujeito que busca fazer e fazer-se oportunidade, à medida que começa e se reconstituir pelo questionamento sistemático da realidade. Incluindo a prática como componente necessário da teoria, e vice-versa, englobando a ética dos fins e valores. (DEMO, 1941, p.8)

Já Ponte (2003), com seu olhar direcionado ao aluno, afirma que:

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e professor. (PONTE, 2003, p.23)

Na estruturação da atividade de pesquisa ou de investigação, o professor é levado a refletir sobre sua prática docente, seus resultados comparados às finalidades do processo ensino/aprendizagem e seus métodos utilizados no dia-a-dia em sala de aula. Através dessa reflexão, surge a necessidade do estudo contínuo, a fim de buscar novas metodologias que melhor atentam suas expectativas. Conseqüentemente, amplia-se a análise sobre as questões referentes à área específica de conhecimento e suas estruturas internas enquanto ciência e, também, em educação enquanto currículo e transmissão desse conhecimento.

1.4 - A Construção de Conceitos.

O conceito é um termo associado com: idéia, noção, entendimento e concepção relativa a um objeto. Para Pais (2006,p.121), “os conceitos são idéias gerais e abstratas, associadas a certas classes de objetos, criados e transformados nos limites do território de uma área de conhecimento disciplinar”.

Nos processos científicos, conceituar significa expressar uma idéia de forma objetiva, sintetizar situações, estabelecer propriedades e relacionar outros conceitos e teorias com seu objeto de análise. Na Matemática, o conceito transcende o concreto, pois localiza-se no campo das idéias. Para Caraça (1958, p.118), “os conceitos matemáticos surgem, uma vez que sejam postos problemas de interesse capital, prático ou teórico para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentes”.

Numa abordagem psicológica e didática, Vergnaud (1993, p.8) considera um conceito como “um conjunto de invariantes utilizáveis na ação, ou seja, conjunto das situações que

constituem a referência de suas diversas propriedades, e ao conjunto dos esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações.”

Desta forma, o mesmo autor ainda classifica um conceito como uma trinca de conjuntos denominados por ele como:

$$C=(S,I,Y)$$

S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito;

I: conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas;

Y: conjunto das formas de linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento. (VERGNAUD, 1993, p.8)

Para Vergnaud (1993), uma situação que dá sentido ao conceito é aquela em que existe a exposição de várias combinações de tarefas e que o aluno possa enfrentá-las e progressivamente dominá-las, construindo assim o sentido do conceito estudado. Assim sendo, é necessária a análise dessas variedades de tarefas para que a atividade conduza ao conjunto das possibilidades em relação ao conceito e, também, que o aluno tenha condições funcionais, ou esquemas, para o desenvolvimento dessas combinações de tarefas. Segundo o autor supracitado (1993,p.19), um esquema é “uma totalidade organizada que permite gerar uma classe de comportamento diferentes em função das características particulares de cada situação da classe a que se destina”, ou seja, a organização invariante na construção de ações do sujeito sobre a situação dada. O esquema implica no comportamento do sujeito e na sua organização pessoal que atua em uma determinada situação e estabelece uma relação direta com o objeto criando, assim, sentido ao conceito matemático estudado. Ao criar sentido é necessária a representação da linguagem, ou seja, as transformações entre as funções proposicionais para argumentos pertinentes da situação, de sua ação e das relações entre ambas. Esses argumentos são as informações relativas ao objeto; suas propriedades e, ainda, a seleção dessas informações; validades e aceitação.

Através da criação de uma situação que dá um sentido a um conceito, por exemplo, uma metáfora, uma história, uma analogia, um desenho geométrico, e usando os esquemas adquiridos pelos conhecimentos prévios, agimos sobre o objeto em estudo e o transformamos a partir de referencial semântico para o estabelecimento de referencial sintático, ou seja, estabelecemos a argumentação fundamentada do objeto.

Desta forma, Vergnaud propõe uma estrutura que permite compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos. Para Vergnaud (1993, p.1), “a Teoria dos Campos Conceituais

é uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e aprendizagem das competências complexas”.

Este conhecimento, já diante da teoria piagetiana, também conhecido como psicogênese, se constrói por interações do indivíduo com o objeto do conhecimento através de organizações progressivas explicadas pelos processos de assimilação e acomodação, denominados como equilíbrio majorante.

Observa-se nos autores, Piaget ou Vergnaud, a mesma linha de pensamento, pois em ambos, a construção do conhecimento fundamenta-se na necessidade acumulativa de experiências a fim de que o sujeito construa suas estruturas intelectuais.

1.5 – Produção acadêmica relativa ao tema pesquisado.

Em nossa revisão bibliográfica destacamos pouca produção relativa ao tema em estudo. Citamos duas dissertações e um artigo.

Relacionamos a primeira dissertação com o nosso trabalho pela proposta de utilização de metodologia diferenciada da tradicional a fim de que os alunos compreendam melhor a Trigonometria. A segunda dissertação, associamos com a proposta de construção de conceitos das relações trigonométricas, tendo assim convergência com nossa base teórica. Em ambas as dissertações, a proposta é construir os conceitos de Trigonometria a partir de situações problemas, enquanto que, em nossa dissertação, a proposta é também construir os conceitos, mas a partir atividades de investigações e descobertas guiadas.

No artigo citado observamos as origens das dificuldades relacionadas ao ensino de Trigonometria, coincidindo com nossa também preocupação sobre o tema.

1.5.1 – Dissertações

AMARAL, Fábio José. Ensino da trigonometria via resolução de problemas mediado por dinâmicas de grupo, analogias e recursos informáticos. 2002. Dissertação de Mestrado do CEFET/MG.

Amaral (2002) destaca em seu trabalho a importância da utilização de uma metodologia adequada para a melhor compreensão, por parte dos alunos, do conteúdo de Trigonometria. Em seu trabalho, ele usa recursos ferramentais como dinâmicas de grupo, analogias, metáfora e linguagem computacional LOGO para tornar eficaz e significativa a compreensão do aluno sobre o conteúdo.

O autor, inicialmente, levanta alguns aspectos psicológicos, pedagógicos e sociais que interferem no desenvolvimento da aprendizagem. Apresenta as características fundamentais da construção do conhecimento desenvolvido por Piaget, e também, menciona o trabalho de Vygotsky com relação à importância da participação e interação social dos grupos nas resoluções de problemas e formação dos conceitos. Como metodologia de ensino, Amaral usa a analogia através da movimentação de uma aranha em torno do ciclo trigonométrico. O autor usa uma situação que estabelece um sentido ao movimento circular e, desta forma, amplia o conceito de circunferência trigonométrica.

O autor faz um levantamento teórico sobre resoluções de problemas e destaca de Smole(1998) e de Dante(1999) algumas idéias gerais sobre o assunto. Em seguida, levanta alguns aspectos e análise do conteúdo de Trigonometria em livros didáticos de Matemática frequentemente usados no Brasil.

Como proposta para minimizar dificuldades no ensino/aprendizagem da Trigonometria, Amaral utiliza como metodologia de ensino em turmas do ensino médio o método de resoluções e aplicações em situações-problema. É também usada a linguagem computacional LOGO na construção de conceitos e em algumas atividades geradores de questionamentos do grupo.

Na conclusão, Amaral apresenta uma análise dos resultados, retoma as questões de hipóteses e conclui que o método de resoluções de problemas é de grande alcance educacional e que atende as expectativas para a melhoria do ensino/aprendizagem de Trigonometria.

LINDEGGER, Luiz Roberto de Moura. Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos. 2000. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP.

Lindegger (2000) investigou uma abordagem para o ensino da Trigonometria no triângulo retângulo. Seu trabalho foi direcionado para alunos do final do ensino fundamental (8ª série), no qual pretendeu introduzir os conceitos das relações trigonométricas fundamentais seno, cosseno e tangente a partir de manipulações de modelos geométricos (triângulos).

O autor fundamentou-se nos pressupostos teóricos da Psicologia Cognitiva de Vygotsky e Vergnaud e na didática francesa de Brousseau. Percebe-se, em seu texto, que Lindegger é defensor das bases sócio-construtivistas para formação de conceitos, especificamente matemáticos.

A metodologia na proposta didática utilizada foi a comparação entre dois grupos de trabalho, denominados, pelo autor, como grupo de referência e grupo experimental. Ao grupo experimental foram submetidas as atividades referentes à proposta de pesquisa, ou seja, manipulações de figuras geométricas abordando metodologia construtivista, enquanto, ao grupo referência o trabalho decorreu como no ensino tradicional, ou seja, aulas expositivas, exemplos e exercícios.

A análise dos resultados foi distribuída em duas etapas: a primeira, quantitativa, relacionado ao acerto e o erro obtido na respostas dos alunos, e a outra, qualitativa, analisado as estratégias utilizadas pelos alunos e observado o conceito que cada um demonstrou sobre a Trigonometria.

O autor, através da análise dos dados, observou que o grupo experimental obteve um melhor desempenho na aprendizagem do conteúdo em relação ao grupo de referência e concluiu que o processo de construção dos conceitos básicos da Trigonometria ganha força quando inicia-se a partir da resolução de situações-problema.

1.5.2 - Artigo correlato

BRITO, A.J.; MOREY, B.B. Trigonometria: dificuldade dos professores de matemática do ensino fundamental. Horizontes, Bragança Paulista, v22, n.1, p.65-70, 2004.

No artigo, as autoras relataram uma pesquisa feita com professores da rede pública de ensino de Natal acerca das dificuldades no ensino e aprendizagem de Trigonometria.

Na pesquisa, foram utilizadas oficinas para professores, na tentativa de detectar a origem das dificuldades com relação aos conceitos de Geometria e Trigonometria. As observações iniciais da análise da pesquisa mostraram que as dificuldades dos professores se concentravam nos conceitos geométricos tais como simetria e semelhança, assim como, na manipulação de instrumentos de desenho geométrico.

Diante das dificuldades apresentadas pelos professores, Brito e Morey analisaram os livros didáticos dos autores Di Pietro(1987) e Imenes(1980), utilizados na prática docente daquela região. Na análise, foi observado que nenhum desses livros utilizava explicitamente os conceitos de simetria de figuras para a exploração dos valores trigonométricos da primeira determinação positiva.

As autoras concluíram o artigo afirmando que as dificuldades dos professores em Trigonometria estão intimamente relacionadas à formação escolar das décadas de 70 e 80, caracterizada, entre outros aspectos, pelo descaso para com a trigonometria; pela formalização precoce de conceitos geométricos e trigonométricos presente nos livros didáticos e pela memorização de procedimentos sem a compreensão dos mesmos.

Como proposta para minimizar as dificuldades dos professores, as autoras sugerem a formação continuada vinculada ao desenvolvimento de conceitos, norteados pela teoria de Vergnaud (1985), e a socialização dos saberes construídos na formação acadêmica e na prática docente.

2 – ANÁLISE DO CONTEÚDO DE TRIGONOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO.

2.1 – O livro didático

O livro didático é atualmente uma das fontes de informação mais utilizada no contexto escolar da educação brasileira. Um bom livro didático de Matemática deve diversificar suas representações de linguagens, ser correto nas definições e conceitos, proporcionar momentos de reflexão para a prática do professor e proporcionar atividades diversas para a produção do conhecimento.

Sabemos que o livro didático não é, e nem pode ser, o único meio de transmissão de conhecimento. A velocidade e a diversidade na informação trazem grandes benefícios para a prática docente. No entanto, cabe ao professor filtrar essas informações e redirecioná-las para o uso e bom proveito nas práticas educativas. Para Pais (2006) cabe ao professor

fazer articulações permanentes entre o livro didático e outras formas de expressão do saber, pois no plano educacional mais amplo, a tendência é que todos os recursos possam ser redimensionados e multiplicados para corresponder à multiplicidade contida no fenômeno que interliga ensino e aprendizagem. (PAIS, 2006, p.49)

Apresentamos nesse capítulo uma análise dos conteúdos de Trigonometria abordados em alguns livros didáticos de Matemática adotados em escolas do Ensino Médio em nosso país e, também, fazemos uma crítica sobre abordagem metodológica utilizada nas unidades referentes à Trigonometria.

Os livros analisados foram:

I - SMOLE, K; DINIZ;. Matemática - Ensino Médio. - Ed. Saraiva, 2003.

II - GIOVANNI, J; BONJORNIO, J; Matemática. Uma nova abordagem. Volume 1, versão Trigonometria - Ed. FTD, 2000.

III – DANTE, LUIZ ROBERTO. Matemática. Contexto e Aplicações. V2. Edição reformulada. Ed. Ática, 2003.

Escolhemos os três livros pelos seguintes motivos; primeiro: Kátia Smole é autora de artigos relacionados com o Ensino de Matemática e Doutora em Educação - Ensino de Ciência e Matemática, ou seja, formação acadêmica que justifica a preocupação com os processos de

aprendizagem e ensino; segundo: o livro “Matemática. Uma nova abordagem” dos autores Giovanni e Bonjorno é adotado atualmente no ensino médio da Escola onde foi realizada a pesquisa; terceiro: Luiz Roberto Dante é Doutor em Psicologia da Educação e propõe o trabalho com o ensino da Matemática direcionado para as resoluções de problemas e ainda é autor do livro de ensino fundamental adotado atualmente nessa Escola.

No intuito de organização de nosso trabalho, usamos os mesmos critérios para análise do conteúdo de Trigonometria apresentado em cada livro didático: exposição do conteúdo relacionado ao tema; abordagem metodológica adotada e; nossos comentários finais sobre as obras.

2.2 – Análise dos livros didáticos

I - Livro: Matemática - Ensino Médio.

Autoras: Kátia Stocco SMOLE e Maria Ignez DINIZ.

Ano de publicação: 2003.

A distribuição do conteúdo de Trigonometria dá-se ao longo dos três volumes dessa coleção. Segundo as autoras esta distribuição acontece em função do tempo que o aluno leva para aprender os conceitos e relações trigonométricas.

Volume 1

A Trigonometria no triângulo e as funções trigonométricas fundamentais.

Unidade 11 - Trigonometria no triângulo retângulo.

Unidade 12 – Ângulos, arcos de circunferência e círculo trigonométrico.

Unidade 13 - Funções trigonométricas: definição, periodicidade e gráfico.

Unidade 14 – Relações trigonométricas no triângulo qualquer.

Volume 2

Ampliação da Trigonometria no círculo Trigonométrico, equações, inequações trigonométricas e funções inversas.

Unidade 11 – Funções trigonométricas: redução ao 1º quadrante.

Unidade 12 – Equações trigonométricas e inequações trigonométricas.

Unidade 13 – Funções trigonométricas inversas.

Volume 3

Função secante, cossecante e cotangente.

Unidade 7 – Funções trigonométricas: cotangente, secante e cossecante.

A obra como um todo prima pela diversificação de propostas didáticas a fim de desenvolver não somente o valor científico da Matemática, mas, também, a formação de habilidades e competências essenciais para o desenvolvimento humano.

Na análise da proposta didática da obra observamos o desenvolvimento da interpretação de textos em diferentes linguagens, situações-problema que aguçam investigações ou ampliam possibilidades das resoluções matemáticas e, ainda, a contextualização através do elo entre ciência e tecnologia.

Sobre os aspectos metodológicos da obra observamos diferentes estratégias que visam atingir tal proposta didática. Tais estratégias são por exemplo: o uso de calculadoras que possibilitam a aproximação da matemática com a realidade, ou a participação do aluno nos processos de invenção de seus próprios problemas matemáticos.

Sobre o conteúdo específico de Trigonometria observado na obra, analisamos algumas situações pontuais que reforçam a proposta didática inicial e outras que não contribuem para atingir tais objetivos. Após essa análise do conteúdo e metodologia aplicada apresentamos algumas críticas:

Primeiro: Repensar a importância e o aprofundamento do conteúdo de Trigonometria do ensino médio como base fundamental. Internamente à própria Trigonometria, o que é essencial e o que é complementar. No livro do ensino médio deve ser trabalhado somente o essencial, ou seja, o complementar pode ser apresentado em outro tipo de material didático, como em livros temáticos ou paradidáticos.

Afirmamos o que é ser fundamental para o ensino de Trigonometria na educação básica no objeto desta nossa dissertação. Destacamos como complementar as funções trigonométricas inversas, as inequações trigonométricas e as funções trigonométricas cotangente, secante e cossecante.

Segundo: Na unidade 11 do volume 1, percebemos que o texto parte de uma situação-problema, apresenta linearmente a Trigonometria do triângulo retângulo como conteúdo já formalizado e fechado em relação às novas possibilidades de criação e não propõe aos alunos

atividades que levam à investigação ou exploração, limitando, portanto, a construção do conhecimento.

Terceiro: Observamos que as autoras em sua obra não exploram a idéia de que os próprios alunos construam seu círculo trigonométrico. O processo de descoberta científica da Trigonometria na circunferência acontece através do levantamento de hipóteses, observações das ações estabelecidas pelas construções geométricas e conclusões dessas observações. Entendemos que a construção da circunferência trigonométrica feita individualmente é sustentada pela possibilidade de visualização total do círculo que possibilita ao aluno melhor exploração e contextualização do conteúdo.

Quarto: Percebemos, na unidade 11 do volume 2, que as autoras ao apresentarem as reduções ao primeiro quadrante e as relações de simetria existentes na circunferência trigonométrica, novamente, não propõem atividades de interação do aluno com o conteúdo.

II - Livro: Matemática, Uma nova abordagem. V1, versão Trigonometria.

Autores: José Ruy GIOVANNI e José Roberto BONJORNO.

A obra, publicada em 2000, ainda muito utilizada nas escolas de ensino médio, principalmente devido à influência e respeito dos autores no meio dos educadores matemáticos, foi elaborada em duas versões conforme a distribuição dos conteúdos de Trigonometria e Progressões.

Primeira versão: Volume I - Versão Trigonometria. O volume, oferecido para alunos do 1º ano do ensino médio, trata das funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Volume II – Progressões. O volume, oferecido para alunos do 2º ano de ensino médio, trata das progressões, matrizes, sistemas lineares, probabilidades e geometria sólida.

Segunda versão: Volume I – Versão Progressões. O volume, oferecido para alunos do 1º ano do ensino médio, trata das funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas e progressões. Volume II – Trigonometria. O volume, oferecido para alunos do 2º ano de ensino médio, trata das funções trigonométricas, matrizes, sistemas lineares, probabilidades e geometria sólida.

Os autores propõem a distribuição do conteúdo de Trigonometria do volume I da primeira versão de acordo com as seguintes unidades:

Unidade 2 – Trigonometria nos Triângulos.

Na unidade são tratadas as razões trigonométricas, seno e cosseno de ângulos complementares, lei dos cossenos, lei dos senos e área de um triângulo qualquer.

Unidade 10 – Trigonometria no Ciclo.

A unidade foi subdividida em 19 tópicos destacados abaixo:

- 1 – Circunferência: arco, ângulo central, comprimento.
- 2 – Unidades de medida de arcos e ângulos.
- 3 – Arcos de circunferência
- 4 – Circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico.
- 5 – Seno e cosseno de um arco.
- 6 – Tangente de um arco.
- 7 – Equações trigonométricas.
- 8 – Cotangente de um arco.
- 9 – Secante e cossecante de um arco.
- 10 – Relação trigonométrica fundamental.
- 11 – Valor numérico de uma expressão trigonométrica.
- 12 – Propriedades de arcos complementares.
- 13 – Equações trigonométricas que envolvem artifícios.
- 14 – Fórmulas de adição de arcos.
- 15 – Fórmulas de multiplicação de arcos.
- 16 – Fórmulas de divisão de arcos.
- 17 – Identidades trigonométricas.
- 18 – Fórmulas de transformação do produto.
- 19 – Inequações trigonométricas.

Primeiro: O conteúdo de Trigonometria proposto na obra é extenso. Os autores, sem restrições, propõem o estudo das identidades trigonométricas, equações com artifícios, fórmulas da transformação em produto e inequações trigonométricas numa abordagem tecnicista de manipulações algébricas. Não há discussão sobre o que é essencial e complementar no ensino de Trigonometria para o ensino médio.

Segundo: Observamos apenas no primeiro e segundo tópicos da unidade 2 a aplicabilidade da trigonometria em situações-problema. No restante da unidade 2 e toda a unidade 10 é adotada a mesma proposta metodológica, ou seja, a seqüência didática é

apresentada linearmente: demonstração de conteúdos, exemplos com apresentações de métodos e técnicas de resoluções e exercícios de fixação.

Terceiro: Observamos em alguns tópicos a utilização do recurso metodológico da visualização do desenho, da exploração da circunferência trigonométrica e suas interpretações geométricas. No entanto, o conteúdo é apresentado sistematizado e formalizado pelos próprios autores. Essa técnica é utilizada como recurso para explicitar e demonstrar o conteúdo de Trigonometria, mas, é uma abordagem tradicionalista de ensino, pois o professor que se apresenta como agente da produção do conhecimento. Observamos ainda que os autores não propõem atividades de maior participação e interação do aluno com o conteúdo.

Os gráficos das funções seno e cosseno são um sub item de um tópico (cinco). Os autores apresentam imediatamente o gráfico de uma senóide e concluem o domínio, a imagem e o seu período pela análise da curva. Em seguida estudam a paridade da função e imediatamente introduzem a função cosseno. Observe que com essa exposição do conteúdo são os próprios autores os agentes da construção do conhecimento.

Na contra capa do livro observamos a seguinte frase: *“Trigonometria ou progressões no volume 1? Tanto faz, a coleção é apresentada em duas versões.”* Na opinião dos autores são irrelevantes as questões ligadas à maturidade cognitiva ou intelectual do aluno. A compreensão dos conhecimentos científicos e tecnológicos são resultados de construções humanas através da educação a longo prazo, inseridos em processos intelectuais históricos e sociais. Se trabalharmos com seres humanos devemos sempre refletir sobre as condições sociais, culturais e psicológicas que vivem uma sociedade.

III - Livro: Matemática. Contexto e aplicações. Ed. reformulada.

Autor: Luiz Roberto DANTE.

Ano de publicação: 2003

A distribuição do conteúdo de Trigonometria na obra é feita utilizando dois volumes. No volume 1 o autor propõe no último capítulo do livro o estudo da Trigonometria no triângulo retângulo e demonstra as relações fundamentais trigonométricas para valores discretos. No volume 2 é apresentado o conteúdo de Trigonometria no círculo e a continuidade dos ângulos numa perceptiva do campo real.

Volume 1

Capítulo 11: Trigonometria no triângulo retângulo

Volume 2

Capítulo 1: Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer.

Capítulo 2: Conceitos trigonométricos básicos.

Capítulo 3: Reduções ao primeiro quadrante.

Capítulo 4: As funções trigonométricas.

Capítulo 5: Relações trigonométricas.

Capítulo 6: Transformações trigonométricas.

A análise foi feita apenas no conteúdo de Trigonometria apresentado no volume 2. Observamos que assunto desse volume é o que mais se aproxima do foco de pesquisa desta dissertação.

O nosso procedimento metodológico na análise dessa obra foi primeiro apresentar detalhadamente o conteúdo de cada capítulo e, logo em seguida, levantar alguns aspectos positivos ou negativos observados na obra.

No capítulo 1 o autor apresenta uma revisão sobre triângulos retângulos e aproveita para ampliar o conteúdo introduzindo as relações de triângulos quaisquer com as leis do seno e cosseno a partir de resoluções de problemas. Destacamos positivamente essa metodologia, ou seja, o autor cria um modelo matemático que se aproxima de uma realidade e, logo em seguida, enuncia a lei matemática que soluciona aquela situação-problema. Essa é uma metodologia que se diferencia da tradicional, aproximando-se da Pedagogia Progressista, mas, no entanto, observamos que tal técnica não é explorada no restante da obra. Observamos que no decorrer dos capítulos a proposta didática se altera e a abordagem no aprofundamento das questões se modifica tornando-se visível o rigor algébrico apresentado pelo autor.

No capítulo 2 destacam-se os conceitos trigonométricos básicos: arcos e ângulos, unidades de medidas, circunferência unitária ou trigonométrica, orientações de sentido, arcos côngruos e os quadrantes. O autor apresenta os conteúdos básicos, exemplifica através de exercícios resolvidos e propõe exercícios para que os alunos resolvam. Não há proposta para que o aluno, a partir de uma exploração da circunferência trigonométrica, perceba relações como, por exemplo, dos arcos côngruos.

No capítulo 3, o texto retoma as idéias das funções seno, cosseno e tangente representada no ciclo trigonométrico, destaca seus valores para os ângulos notáveis e faz as

reduções para o primeiro quadrante ao representar geometricamente a tangente. Observamos que o autor é quem faz a representação geométrica da tangente. Os exercícios propostos são de repetição dos métodos e técnicas de resolução. Não há proposta de atividades em que o aluno descubra as relações geométricas de semelhança entre as medidas dos segmentos associados às funções seno, cosseno ou tangente.

No capítulo 4 são propostas as funções trigonométricas. O texto apresenta, inicialmente, as funções seno, cosseno, tangente, seus respectivos gráficos e o estudo do sinal. Prossegue com as funções cossecante, secante, cotangente e seus gráficos, interpreta a periodicidade e o domínio de algumas funções. Finaliza apresentando as funções inversas com suas limitações de domínio. Observamos que o autor cria os gráficos a partir de relações entre o valor numérico da função para um dado ângulo e apresenta o traçado das curvas das funções secante, cossecante e cotangente.

No Capítulo 5, o autor apresenta as principais relações trigonométricas e, logo após, demonstra outras decorrentes da fundamental, propõe o estudo das identidades trigonométricas, das equações simples e equações com artifícios. Propõe, também, as inequações trigonométricas. Observamos que novamente o autor prolonga o uso da abordagem algébrica para aprofundar em determinados conteúdos como: identidades trigonométricas, equações com artifícios e inequações trigonométricas.

Finalizando, no capítulo 6 o autor apresenta e demonstra as fórmulas de adição, arco duplo, arco metade, transformação em produto, retoma e aprofunda no estudo das equações e inequações trigonométricas. É proposto que o aluno resolva as atividades e exercícios observando métodos e técnicas de resoluções destacados pelos exemplos.

2.3 - Comentários finais sobre as três obras.

Iniciamos nossos comentários destacando os princípios norteadores atuais para a elaboração de um material didático seguidos por algumas observações significativas encontradas nos capítulos das obras analisados e, por fim, apresentamos algumas questões para que possamos repensar sobre o nosso trabalho enquanto educadores matemáticos.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, proposto pelo MEC em 1999, os princípios que orientam a organização para a Matemática, Ciências Naturais e Tecnologias desenvolvem-se a partir de competências. Destacamos o valor das diferentes

representações dos textos matemáticos como figuras ou gráficos, a investigação, buscas de resoluções para situações-problema e a participação coletiva na tomada de decisões.

Observamos que nas três obras analisadas os autores apresentam seu produto muito bem escrito, bem organizado, sistematizado, com o rigor matemático necessário para descrever os conteúdos de Trigonometria, porém percebemos o excesso da utilização de recursos algébricos nas explicitações dos temas distribuídos nas unidades ou capítulos. Não percebemos outras formas de linguagem como gráficos, tabelas ou figuras geométricas no contexto dos livros que contribuíssem para maior, ou melhor, integração entre conteúdo, ensino e aprendizagem. O fazer matemática é resumido em listas de exercícios de fixação, complementares, questões de vestibulares e, em raros momentos, em situações-problema no final da série de exercícios de uma unidade.

O processo da descoberta científica ou matemática que partem de situações reais e, a partir desse problema cria-se os modelos de resoluções são deixados à margem da metodologia de ensino.

Percebemos também, principalmente nas unidades finais dos capítulos, a falta de atividades de aplicações da Trigonometria em outras áreas do conhecimento. Ainda há falta de interações e relações mais significativas entre a Trigonometria e outras áreas das Ciências. Julgamos que alguns motivos dessas descontextualizações devem-se às verdadeiras intenções de comercialização do material didático, ou ainda o não uso de tecnologias que aproximam a matemática da realidade.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais a organização curricular e pedagógica se constrói a partir da proposta de maior integração entre a Matemática e as Ciências Naturais de modo geral. No entanto, como acontece tal organização ainda é muito discutível pelos educadores.

3 – ELABORAÇÃO DE SEQUÊNCIA DE CONTEÚDO E DIDÁTICA PARA ENSINO DE TRIGONOMETRIA.

3.1 - Elaboração da sequência de conteúdos e sequência didática.

Inicialmente, estabelecemos uma sequência do conteúdo conceitual de Trigonometria para ser desenvolvido e aplicado no ensino médio da educação básica.

A sequência do conteúdo proposto foi estabelecida após estudos e análise do conteúdo de Trigonometria em livros didáticos do ensino médio, pela nossa própria experiência no contexto da educação básica, pela análise do diálogo entre nossos pares, sejam eles professores de matemática do ensino médio ou professores universitários atuantes em séries iniciais em cursos de Licenciatura em Matemática e com base na produção acadêmica buscando referências teóricas para dar suporte a nossa pesquisa.

O referencial teórico usado foi o proposto por Zabala (1998), conforme exposto no capítulo 1. O objetivo, segundo este autor, é que a sequência de conteúdos e didática é estruturada como um conjunto de atividades ordenadas e articuladas segundo um objetivo educacional determinado, o que na nossa pesquisa se refere a construção de conceitos da Trigonometria, pelo ciclo trigonométrico, referente as funções seno, cosseno e tangente.

Os conteúdos conceituais propostos assemelham-se com alguns já publicados em livros didáticos conforme já mencionado em capítulo anterior. No entanto, propomos um trabalho mais detalhado na construção geométrica da circunferência trigonométrica e suas propriedades, no estudo das funções básicas seno, cosseno e tangente e suas transformações, análise das variantes e invariantes conforme mudança de parâmetros da forma algébrica da função trigonométrica e através da exploração visual de seus gráficos, assim como as relações e equações trigonométricas. Nesta proposta não trabalhamos com as equações com artifícios, a resolução algébrica das inequações trigonométricas e as fórmulas de transformação trigonométricas.

Em seguida, através de uma sequência didática, elaboramos as atividades a partir de uma concepção construtivista e investigativa usando o método da descoberta guiada, apresentado por Ernest (1996), que conduz o aluno seguir orientações propostas e, conseqüentemente, descobrir soluções. Planejamos uma sequência de atividades ordenada pela sua própria estruturação com relação ao conteúdo, além da escolha do método para

aplicação. Cada atividade foi elaborada com o objetivo de não somente buscar os conteúdos conceituais, mas, também, desenvolver outras capacidades e habilidades como compromisso e cooperação, atitudes essenciais no contexto do ambiente de aprendizagem ou, ainda, equilibrar os momentos de desenvolvimento dos conceitos, das técnicas de procedimentos e propiciar ambiente de colaboração e diálogo entre alunos e professor.

3.2 – Elaboração das Atividades.

O ensino de Trigonometria no nível médio, observando um contexto mais amplo em relação à Matemática, vem sendo, de certa forma, minimizado comparado com outros conteúdos. Observamos nos textos e na condução do trabalho docente de professores de Matemática certa angústia ao ensinar Trigonometria devido a uma baixa aprendizagem e ao fracasso escolar em tal conteúdo. Inseridos na diversidade dos sistemas educacionais e preocupados com o desempenho escolar dos alunos, nós educadores buscamos respostas aos problemas de aprendizagem na reflexão sobre nossa prática e na nossa própria atuação profissional, ou seja, no dia-a-dia em uma sala de aula. Elaboramos atividades que colaboram consideravelmente para a melhoria do ensino e aprendizagem.

As atividades propostas na sequência didática foram elaboradas apoiando-se no referencial teórico de Ponte (2003), que preconiza a mobilização dos recursos cognitivos e afetivos do estudante, conforme as diversas etapas constituintes da atividade investigativa, privilegiando formulação de questões e conjecturas, realizações de provas e refutações.

Após análise dos artigos, dissertações e livros didáticos percebemos que o extenso conteúdo estabelecido na grade curricular das escolas básicas, a complexidade do conteúdo considerando-se o nível de maturidade do aluno das séries iniciais do ensino médio ou o excesso do uso de fórmulas trigonométricas são alguns fatores determinantes para o baixo rendimento escolar referentes a conteúdos de Trigonometria no ensino médio.

Observamos que muito dos problemas apresentados na aprendizagem são referentes a questões curriculares e metodológicas e que o estudo de Trigonometria pode estar sendo dificultado, devido à abordagem algébrica dada ao tratamento metodológico e na manipulação das “muitas” fórmulas existentes em seu conteúdo.

Observando esses problemas, propomos, ao elaborar as atividades, minimizar algumas das dificuldades no ensino de Trigonometria, principalmente, no que diz respeito à utilização

do conceito de Trigonometria através ampliação do uso da Geometria como conteúdo funcional para melhor compreensão dos aspectos algébricos.

As atividades propostas foram elaboradas seguindo uma mesma sequência metodológica:

a) descrição dos objetivos específicos;

Objetivos específicos foram descritos no início de cada uma das atividades (veja anexos das atividades) conforme o conteúdo a ser desenvolvido. As finalidades são conhecidas por todos os envolvidos no processo, ou seja, professores e alunos.

b) leitura das orientações;

Leitura e compreensão do texto matemático.

c) leitura de conceitos e definições fundamentais para compreensão do texto;

Definições descritas em notas de rodapé e em caixas de texto, a fim de dar orientações e explicitações de conceitos básicos para melhor compreensão do texto por parte do estudante.

d) construções geométricas;

Utilização de material de desenho, principalmente régua, para suporte nas construções geométricas e produção de conceitos.

e) formação de conjecturas e validações;

f) busca de abstrações;

Desta forma, criamos um mecanismo para que o aluno trabalhe com experiências ao tentar resolver as atividades propostas, e, assim sendo, participem ativamente da construção de sua estrutura intelectual.

g) generalização e;

h) formalização.

Elaboramos atividades capazes de fazer com que o aluno manipule, através do uso de material de desenho, construções geométricas e gráficas, leia textos matemáticos, interprete informações e produza justificativa obedecendo ao rigor matemático esperado e necessário para tal etapa escolar. O esperado é que o aluno compreenda melhor o conteúdo de Trigonometria a partir dos conceitos e, conseqüentemente, crie condições de ampliar seu universo de conhecimento em matemática com maior articulação e significado em seu aprendizado, especialmente para aqueles alunos que optarem pela área tecnológica e científica: matemática, física, engenharia, etc. O referencial teórico também tomado foi o de Vergnaud (1993) quanto ao sentido conceitual, a análise de invariantes e a linguagem. Nas nossas considerações finais associamos o conteúdo estudado a essas categorias de Vergnaud (1993)

3.2.1 – Relação das Atividades por Conteúdo.

- 1 - Circunferência, setor circular, arco, ângulo central, medida de ângulo e medida de arco.
- 2 – Circunferência Trigonométrica e suas propriedades.
- 3 – Ângulos cômgruos.
- 4 – Representação geométrica do seno na circunferência trigonométrica e sua função original $y = \text{sen } x$.
- 5 – Transformações da função original seno a partir da alteração do parâmetro b de $y = b \cdot \text{sen } x$.
- 6 - Transformações da função original seno a partir da alteração do parâmetro c de $y = \text{sen } c x$.
- 7 – Transformações da função original seno a partir das alterações dos parâmetros a ou d de $y = a + \text{sen } (x + d)$.
- * Atividade especial – Análise de variantes e invariantes da função seno a partir da visualização de seu gráfico através da utilização do programa computacional YAG.
- 8 – Construção do gráfico da função trigonométrica original $y = \text{cos } x$ e suas transformações a partir das alterações dos parâmetros a, b, c ou d de $y = a + b \cdot \text{cos } (cx + d)$.
- 9 – Construção do gráfico da função trigonométrica original $y = \text{tg } x$ e suas propriedades.
- 10– Equações trigonométricas do tipo $\text{sen } x = a$, $\text{cos } x = b$ e $\text{tg } x = c$.
- 11 – Relação trigonométrica fundamental.

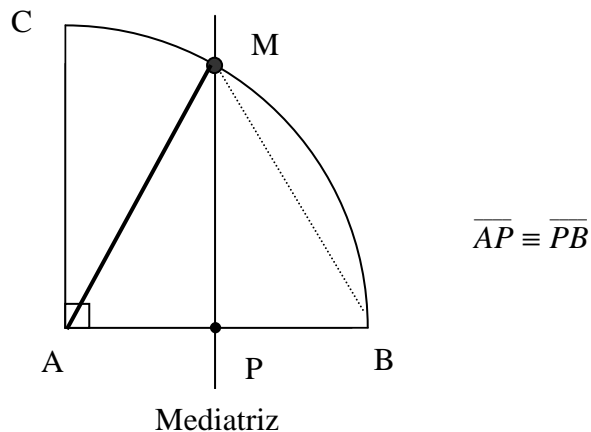
3.2.2 – Atividades

Atividade 1 - Circunferência, setor circular, arco, ângulo central, medida de ângulo e medida de arco.

Para construir um ângulo central ou um arco trigonométrico de, por exemplo, 60° , sem a utilização de um transferidor, propomos a construção geométrica do arco a partir do valor do cosseno de um número real, especificamente, do $\cos \pi/3$.

Considerando que um setor circular reto de uma circunferência equivale a $1/4$ (um quarto) dela, que o segmento representado pelo lado do setor nada mais é que o raio desta circunferência, e, sabendo que, se o valor real do $\cos 60^\circ = 0,5$, então é fato que o cosseno de 60° representa a medida da metade do raio da circunferência. Partindo dessa informação, pode-se criar uma reta mediatriz de um dos segmentos dos lados do setor que intercepta o arco desse setor reto em um ponto que divide esse arco em dois outros arcos com medidas 60° e 30° respectivamente.

Veja a figura:



Dessa forma, pode-se criar um triângulo equilátero interno ao setor reto, cujos vértices são: (A) centro do setor, (M) intersecção da mediatriz com o arco reto e (B) extremo inicial do setor reto. Um dos métodos de resolução esperado é que o aluno, usando a congruência de triângulos, consiga determinar o valor do ângulo \widehat{BAM} e conseqüentemente o arco trigonométrico de 60° .

Em seguida construímos a mediatriz do segmento AC e concluímos, usando do mesmo procedimento anterior, que na intersecção dessa mediatriz com o arco BC está localizado a extremidade final do arco trigonométrico de 30° .

Usando as construções das duas mediatrizes observa-se, na figura, a criação de um quadrado cujos vértices são: (A) centro do setor, (P) ponto médio de AB, intersecção das mediatrizes e ponto médio de AC. Portanto, com a construção da diagonal do quadrado e de seu prolongamento encontraremos o arco trigonométrico de 45° .

Atividade 2 - Circunferência Trigonométrica e suas propriedades.

Numa concepção tradicional o professor, ao ensinar a circunferência trigonométrica, usa aulas expositivas a partir da exploração visual da figura do ciclo trigonométrico criado por ele e, desta forma, apresenta todas as características do desenho, assim como, explica detalhadamente de todas as propriedades implícitas no ciclo trigonométrico como: por exemplo, a redução ao primeiro quadrante ou ângulos cômplementares. São práticas educativas já muito comuns entre professores e alunos em suas salas de aula. Observamos que mesmo numa concepção conservadora, a metodologia de ensino usada pelo professor articula os blocos temáticos, ou seja, cria um elo entre Álgebra e Geometria que possibilita melhor compreensão do conteúdo por parte dos alunos. Contudo, o fato fundamental, é que na metodologia tradicional o professor é aquele quem cria e fornece o desenho da circunferência.

A metodologia usada na proposta de nossa atividade é fazer com que o aluno seja o construtor de seu próprio Ciclo Trigonométrico, com base no referencial teórico de Vergnaud (1993) para se construir conceitos. A figura do ciclo trigonométrico é usada como objeto de suporte para explorações, desenvolvimento de novas conjecturas, propriedades, novos conceitos e inferências com relação ao conteúdo.

Questionamo-nos sobre o que é preciso para se construir uma circunferência trigonométrica e, em seguida, estabelecemos as etapas para construção. Propomos situações de leitura e interpretação de informações que conduzam o aluno, através de seus conhecimentos prévios, a desenvolver e vencer cada etapa na construção. Paralelamente ao desenvolvimento e construção da figura da circunferência trigonométrica propomos, através de perguntas e questionamentos, o levantamento e apresentação de hipóteses, justificativas de respostas, descrição das generalizações e conclusões.

Definimos por construir, em folha de papel branco A4, o desenho de uma circunferência de raio 1 dm (10 cm), de centro (0, 0) coincidindo com a intersecção dos eixos x e y do plano cartesiano.

A atividade foi subdividida em dez itens e em cada item usamos, no tempo verbal imperativo, comandos específicos que direcionassem sua resolução.

No primeiro item sugerimos ao aluno que retorne à atividade I, revise-a e transcreva as conclusões, já apresentadas anteriormente, para a construção dos arcos trigonométricos 30° , 45° e 60° . Desta forma interligamos as atividades, não em situação de linearidade, mas no

sentido da retomada de conceitos anteriores a fim de ampliação de outros novos conceitos, numa abordagem de recursividade.

Em seguida, propomos uma representação do sentido dos movimentos dos arcos trigonométricos. Mesmo definindo, em notas de rodapé, alguns conceitos fundamentais para melhor compreensão do estudante no decorrer da atividade como: circunferência trigonométrica ou arco trigonométrico existe a possibilidade de que o aluno faça as representações de forma errônea. Portanto, optamos por construir as setas de orientação no próprio desenho da circunferência. Caberá ao aluno, apenas, estabelecer os sinais (+) para sentido positivo e (-) para sentido negativo junto às setas da figura.

Visto que o plano cartesiano divide a circunferência trigonométrica em quatro regiões denominadas quadrantes e que as variações dos arcos trigonométricos limitam esses quadrantes, pedimos para que o aluno escreva em uma tabela os limites possíveis destas regiões até completar uma volta no ciclo trigonométrico, ou seja, até 360° .

No quarto item, definimos a determinação positiva de um arco trigonométrico e, em seguida, pedimos para que o aluno verifique a existência de um modelo único de cálculo, possível para estabelecer todo arco trigonométrico negativo definido no intervalo $-360^\circ < x < 0^\circ$.

Nos itens quinto, sexto e sétimo, pedimos ao aluno que fizesse construções geométricas de segmentos paralelos aos eixos do plano cartesiano, tal que interceptem a circunferência trigonométrica determinando pontos, que são as extremidades de arcos trigonométricos. Em seguida, pedimos para determinar o arco trigonométrico dos pontos localizados e descrever todas as observações encontradas. Concluindo o item, induzimos o aluno a verificar e generalizar a relação da redução ao 1º quadrante.

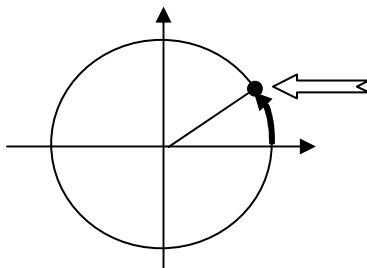
Em seguida, pedimos a construção de um quadrado e dois retângulos inscritos na circunferência cujos vértices coincidem com os pontos localizados no item anterior.

No nono item, solicitamos a transformação das unidades de graus para radianos apresentado no item 3, assim como a representação escrita na tabela construída no verso da folha do desenho da circunferência trigonométrica de todas as conversões para primeira determinação positiva dos principais arcos trigonométricos.

Enfim, pedimos ao aluno que, ao fazer medições dos segmentos formados pelos quadriláteros inscritos na circunferência trigonométrica, estabelecesse alguma relação com os valores de seno e cosseno dos arcos fundamentais 30° , 45° e 60° .

Atividade 3 - Ângulos côngruos

Inicialmente, consideramos um ponto fixo, localizado e identificado pela posição final de extremidades de um arco trigonométrico de 30° .



Na atividade propomos ao aluno que faça o deslocamento desse ponto, girando-o sobre o contorno da circunferência trigonométrica. Através deste movimento propomos alguns cálculos e generalizações a fim de estabelecer conceitos e propriedades relacionadas aos arcos.

Iniciamos a atividade propõe ao aluno que faça alguns cálculos usando como referência inicial um arco trigonométrico de 30° . Sugerimos que ele faça, a partir desse ponto de partida: um giro, dois giros e três giros completos, no sentido positivo, sobre a circunferência e descreva os valores encontrados. Definimos arcos côngruos e, em seguida, pedimos ao aluno para que ele complete uma tabela com representações de arcos e, em fim, generalize as fórmulas de congruência de arcos, sejam em graus ou em radianos.

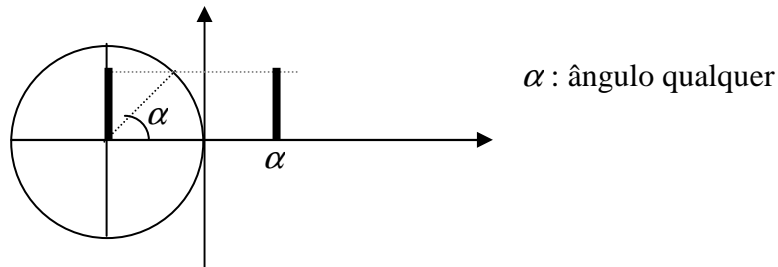
Sabendo da possibilidade do questionamento sobre o giro no sentido negativo da circunferência, definimos a primeira determinação positiva de um arco.

Finalmente propomos as partições da circunferência. A partir das expressões: $\alpha + 2k\pi$, $\alpha + k\pi$ e $\alpha + k \cdot \pi/2$, pedimos para que os alunos calculem seus valores numéricos quando $k=0$, $k=1$, $k=2$ e $k=3$ e que descrevam o significado matemático de cada expressão.

Atividade 4 – Construção da função trigonométrica $y = \text{sen } x$.

Destacamos nas atividades 4, 5, 6 e 7 as construções dos gráficos da função seno e suas transformações conforme alteração de parâmetros pré-estabelecidos.

Na atividade 4 pedimos, a partir da transposição dos segmentos formados no eixo das ordenadas no interior da circunferência trigonométrica, para que o aluno localize as coordenadas do plano cartesiano e, conseqüentemente, construa o gráfico da função $y = \text{sen } x$. Observe a figura abaixo que representa essa transposição:



O segmento formado a partir do ângulo central α e destacado sobre o eixo y é transportado para o plano cartesiano mantendo sua medida, ortogonal ao eixo x e iniciando exatamente na abscissa α .

Após a primeira construção do gráfico e usando a exploração visual da figura, pedimos para que os alunos identifiquem o maior e o menor valor da imagem da função, além de representar, também, o seu intervalo de variação.

A segunda construção gráfica ampliou o intervalo dos valores α de $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ para $-2\pi \leq \alpha \leq 4\pi$. Novamente, usando a exploração visual da figura, pedimos a construção da curva da função seno e, conseqüentemente, a generalização do conceito da função periódica através da identificação do domínio e a descrição do comportamento de seu gráfico.

Atividade 5 – Transformação da função seno.

Com a atividade cinco, damos início às transformações da função seno.

Identificamos a função algébrica $y = \text{sen } x$ como função seno original.

Propomos a alteração do valor numérico de cada parâmetro da função algébrica geral $y = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e, conseqüentemente, a investigação das variações no comportamento do gráfico em relação a original.

Na atividade cinco, iniciamos com a sugestão de alteração do parâmetro b da função algébrica $y = b \cdot \text{sen } x$.

Sugerimos a construção do gráfico da função $y = 2 \cdot \text{sen } x$. Pedimos aos alunos que completem a tabela abaixo (veja tabela completa no anexo da atividade) e que construam o gráfico da função, dado o desenho do plano cartesiano, para valores de x no intervalo $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

x	$\text{sen } x$	$2 \cdot \text{sen } x$
-----	-----------------	-------------------------

Em seguida recordamos, da atividade 4, a imagem da função $y = \text{sen } x$ e pedimos para que os alunos completem as inequações:

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \quad \times (2)$$

$$\dots \leq 2 \cdot \text{sen } x \leq \dots$$

Ao usar $-2 \leq 2 \cdot \text{sen } x \leq 2$ o aluno identifica a imagem da função $y = 2 \cdot \text{sen } x$.

Usando mais alguns exemplos, pedimos a generalização da imagem da função seno a partir da alteração do parâmetro b , dado $b > 0$, e as características do comportamento do gráfico.

Introduzimos a conjectura para $b < 0$ (b negativo), ampliando novas possibilidades à atividade conforme referencial de Ponte (2003). Propomos e esperamos, então, que os alunos construam o gráfico da função $y = -1 \cdot \text{sen } x$, identifiquem a imagem e descrevam, novamente, o comportamento do gráfico.

Desta forma, observamos que mesmo com os valores opostos das imagens da função, o seu conjunto imagem e sua amplitude não se alteram, ou seja, $[-b, b]$ é o conjunto imagem tanto para a função $y = b \cdot \text{sen } x$ ou para $y = -b \cdot \text{sen } x$ e, ainda, $b - (-b)$ é igual a amplitude também de ambas as funções.

Atividade 6 (Continuação) – Transformação da função seno

Na atividade seis, sugerimos a alteração do parâmetro c da função $y = \text{sen } c \cdot x$.

Pedimos aos alunos que preencham a tabela abaixo (veja tabela completa no anexo da atividade) e que construam o gráfico da função $y = \text{sen } 2 \cdot x$.

x	$2x$	$\text{sen } 2x$
-----	------	------------------

Definimos, em nota de rodapé, o período de uma função e pedimos para que os alunos identifiquem o período das funções $y = \text{sen } 2x$, $y = \text{sen}(x/2)$ e $y = \text{sen } 4x$.

Numa perspectiva construtivista, o aluno conjectura, apresenta suas hipóteses, generaliza e, por fim, deduz a regra $P = 2\pi/c$ para a função $y = \text{sen}(cx)$, ou seja, fórmula específica que ajuda no procedimento e cálculo do período da função seno ou cosseno.

Atividade 7 (continuação) – Transformação da função seno

A partir da alteração dos parâmetros a ou d da função $y = a + \text{sen}(x + d)$, analisamos o comportamento do gráfico e destacamos as translações em relação à função original.

A atividade foi distribuída em duas partes. A primeira parte diz respeito à elaboração do conceito de translação, enquanto, a segunda parte resulta na aplicação desses conceitos nas construções do gráfico e na análise das funções algébricas.

A primeira parte foi dividida em dois itens. O primeiro propõe a alteração do parâmetro d da função $y = \text{sen}(x + d)$ e a partir do preenchimento da tabela abaixo (veja tabela completa no anexo da atividade), e da construção do gráfico, destacamos a translação horizontal em relação à função original.

x	$x + \frac{\pi}{6}$	$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
-----	---------------------	--------------------------------------------

O segundo item propõe a alteração do parâmetro a da função $y = a + \text{sen } x$ e, também, a partir do preenchimento da tabela abaixo (veja tabela completa no anexo da atividade) e da construção do gráfico, destacamos a translação vertical em relação à função original.

x	$\text{sen } x$	$1 + \text{sen } x$
-----	-----------------	---------------------

Na segunda parte da atividade, propomos a construção do esboço do gráfico da função $y = 3 + \text{sen}(x + \pi/6)$ e a identificação de sua imagem e de seu período. Desta forma, alteramos, simultaneamente, os parâmetros a e d da função $y = a + \text{sen}(x + d)$ desencadeando novas dificuldades no desenvolvimento da atividade.

Finalizamos a atividade propondo uma síntese sobre a alteração de cada parâmetro a , b , c e d da função $y = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$. Pedimos uma análise sobre a relação entre cada parâmetro da função acima e sua influência sobre o tipo de transformação que ocorre no comportamento do gráfico.

Atividade Especial – Análise de variantes e invariantes da função seno a partir da visualização de seu gráfico através da utilização do programa computacional YAG.

Propomos trabalhar com nossos alunos uma atividade associada às utilizações da tecnológica e integrada entre o Colégio Santa Maria Nova Suíça e a Universidade Católica de Minas Gerais. A atividade, assim como o programa computacional, foi desenvolvida no Departamento de Matemática e Estatística da Pucminas pelos professores Fabiano José dos Santos e Silvimar Fábio Ferreira, e encontra-se editada no caderno 02 das Atividades de Laboratório publicado em 2005 pela Editora Fumarc. Entretanto, o grupo de Pesquisa Metodologia e Informatização do Ensino de Matemática do Mestrado em Ensino de Matemática, do qual somos também membros, liderado pelos professores doutores João Bosco Laudares e Dimas Felipe Miranda ampliou as atividades dando-lhes maior poder de análise e investigação. O software é livre, portanto podemos utilizá-lo fora da PUC Minas.

A atividade pede que o aluno após digitação da função trigonométrica e de seu campo de existência, faça uma observação do comportamento de seu gráfico e responda algumas questões propostas como: valor máximo e mínimo da função, conjunto imagem, período e outras.

Para aplicação no Colégio Santa Maria a estrutura da atividade foi mantida porém, foram necessárias algumas modificações, principalmente, no que diz respeito à sintaxe das funções algébricas. Procuramos adaptar a linguagem conforme as atividades já desenvolvidas com nossos alunos.

Visto que o programa computacional era totalmente desconhecido pelo grupo de estudante, houve, então, a necessidade de apresentação da sintaxe básica do mesmo a fim de estabelecer suporte necessário para que os alunos pudessem desenvolver o trabalho proposto.

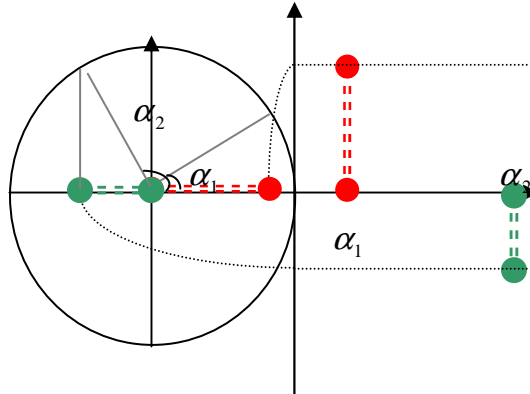
Modificações estabelecidas:

- a) Na 1ª PARTE, letra c, a atividade original fornece as informações sobre as expressões $k \cdot 2\pi$, $k \cdot \pi$ e $k \cdot \pi/2$. Como em nossa sequência de conteúdos e de atividades ainda não trabalhamos com as equações trigonométricas, substituímos a informação por $x = \alpha + 2\pi \cdot k$ haja vista que as equações apresentadas são do tipo $\text{sen } x = k$ para $k = 0$, $k = 1$, $k = -1$ e $k = 1/2$ e que num primeiro momento trabalhamos apenas com giros completos.
- b) Na 2ª PARTE, alteramos a sintaxe de “ $y = \text{sen } x$ quanto a imagem” para, $y = a + b \cdot \text{sen } x$, visto que o parâmetro a é responsável pela translação vertical e o parâmetro b responsável pela amplitude do gráfico, conseqüentemente, ambos delimitam e definem o conjunto imagem da função trigonométrica.
- No item II, alteramos a sintaxe das funções algébricas $y = k \cdot \text{sen } x$ e $y = \text{sen } x + k$ para $y = b \cdot \text{sen } x$ e $y = a + \text{sen } x$ conforme já justificado. Ainda no mesmo item, para a função $y = b \cdot \text{sen } x$, associamos ao aumento do tamanho das imagens as sentenças: $b < -1$ ou $b > 1$ e a diminuição do tamanho das imagens a sentença: $-1 < b < 1$ e também, para a função $y = a + \text{sen } x$, associamos ao deslocamento do gráfico para cima quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.
- c) Na 3ª PARTE alteramos a função $y = \text{sen } x$ para $y = \text{sen}(cx + d)$ justificado pelo fato de que o parâmetro c é o responsável pela variação do período e o parâmetro d (ângulo de fase) é o responsável pela translação horizontal do gráfico da função.

Atividade 8 – Construção do gráfico da função trigonométrica $y = \cos x$.

Na atividade pedimos para que os alunos construam o gráfico da função cosseno a partir da transposição dos segmentos formados nos eixo das abscissas, no interior da circunferência, conforme o valor real do cosseno de ângulo interno α . Esta transposição dos segmentos acontece por meio de dois movimentos apresentados na figura abaixo; no primeiro movimento usamos uma rotação de 90° , ou seja, saímos de uma situação onde o segmento se apresentava em seu estado horizontal, característica da representação geométrica do valor real do cosseno de α , e chegamos, após rotação, na situação onde o segmento se apresentava já

num estado vertical; no segundo movimento usamos a translação deslocando o segmento para a posição a partir da abscissa α destacada no plano cartesiano.



Observamos que em α_1 o segmento vertical assume valor positivo, ou seja, totalmente acima do eixo x , enquanto que em α_2 o segmento assume valor negativo, abaixo do eixo x . Associamos essa característica às representações das imagens positivas da função $y = \cos \alpha$ para $3\pi/2 < \alpha \leq 2\pi$ ou $0 \leq \alpha < \pi/2$ (1º e 4º quadrantes) e de suas imagens negativas para $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ (2º e 3º quadrantes).

Mantendo as mesmas características da proposta de trabalho para o função seno (atividade 4), após a primeira construção do gráfico e usando a exploração visual da figura, pedimos para que os alunos identifiquem o maior e o menor valor da imagem da função, além de representar, também, o seu intervalo de variação.

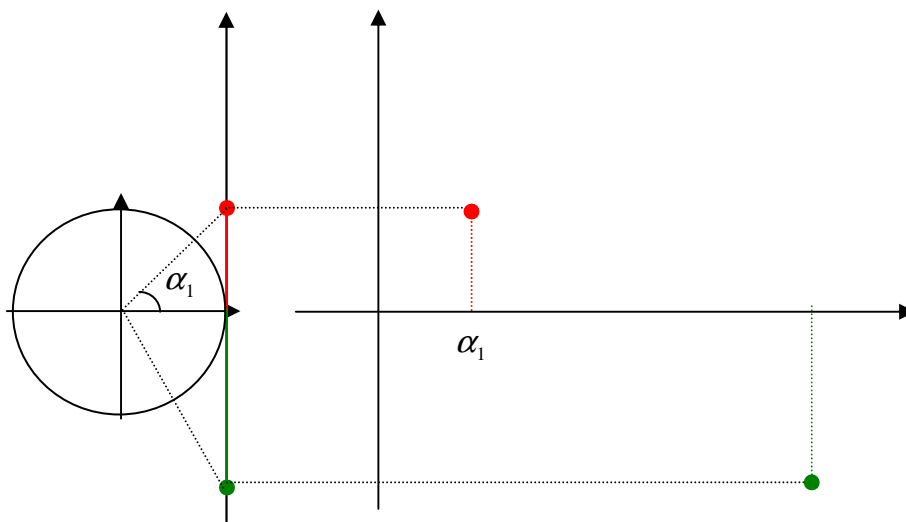
Em seguida, numa segunda construção gráfica, induzimos a ampliação dos valores α de $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ para $-2\pi \leq \alpha \leq 4\pi$ e pedimos, novamente, a identificação do domínio e a descrição do comportamento do gráfico da função.

Observada uma grande semelhança com a função seno, propomos, imediatamente, a análise da imagem, do período, do domínio e a construção de esboços de gráficos.

Atividade 9 - Construção do gráfico da função trigonométrica original $y = \operatorname{tg} x$ e suas propriedades.

Propomos, a partir da transposição dos segmentos formados no eixo auxiliar, a localização das imagens correspondentes dos principais arcos trigonométricos, $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \dots$ e a construção do gráfico da função $y = \operatorname{tg} x$, inicialmente, para $0 < x \leq 2\pi$.

Construímos uma circunferência, localizamos as extremidades dos segmentos através do desenho de pontos no plano cartesiano. Em seguida pedimos que o aluno faça a translação horizontal desses pontos (ou segmentos), localize as imagens da função e, conseqüentemente, construa o gráfico de $y = \operatorname{tg} x$.



Após a construção do gráfico apresentamos uma sequência de perguntas para justificar a inexistência de imagens no caso de alguns arcos trigonométricos. Desta forma definimos o domínio da função $y = \operatorname{tg} x$.

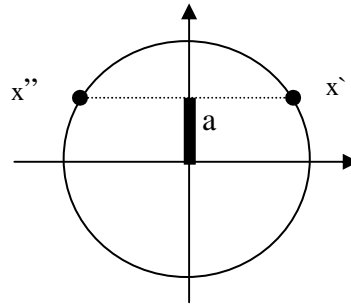
Em seguida, propomos a revisão do comportamento do gráfico da função anterior $y = \operatorname{tg} x$ e ampliação da figura para $-2\pi < x \leq 4\pi$, observados as condições de existência, a fim de atingirmos a generalização e regra para definição de seu período.

Atividade 10 - Equações trigonométricas do tipo $\operatorname{sen} x = a$, $\operatorname{cos} x = b$ e $\operatorname{tg} x = c$.

Nesta atividade propomos o trabalho com as equações do tipo $\operatorname{sen} x = a$, $\operatorname{cos} x = b$ e $\operatorname{tg} x = c$ através da relação entre as medidas dos segmentos denominados **a**, **b** e **c** e as extremidades finais dos arcos trigonométricos **x** correspondentes.

Destacamos a importância dos traçados dos segmentos paralelos aos eixos do plano cartesiano desenvolvido na atividade 2.

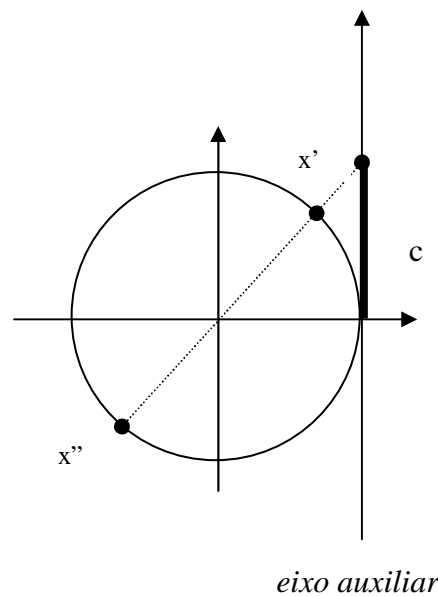
Na equação $\text{sen } x = a$ estabelecemos a relação entre o segmento **a** formado no eixo *y* e os arcos trigonométricos correspondentes x' e x'' .



Analogicamente, na equação $\text{cos } x = b$ estabelecemos a relação entre o segmento **b** formado no eixo *x* e os arcos trigonométricos correspondentes x' e x'' .

Optamos por utilizar a técnica da descoberta guiada numa proposta de atividade investigativa. Usamos alguns exemplos e propomos através de perguntas e questionamentos situações que aumentam gradativamente o grau da dificuldade.

Anteriormente ao estudo da equação $\text{tg } x = c$ definimos o eixo auxiliar paralelo à ordenada do plano cartesiano, ortogonal ao eixo *x* interceptando-o no ponto $(1, 0)$. Em seguida apresentamos o segmento construído nesse eixo auxiliar e relacionamos este segmento com os seus arcos correspondentes.



Inicialmente, todas as atividades foram apresentadas para o domínio $0 \leq x < 2\pi$. Em seguida, na segunda parte da atividade, a partir da resolução de uma equação trigonométrica

simples, propomos a ampliação do domínio. Usamos gradativamente $0 < x \leq 2\pi$, $0 < x \leq 4\pi$ e em fim generalizamos para $k \cdot 2\pi$.

Atividade 11 - Relação trigonométrica fundamental.

O objetivo da atividade é fazer com que os alunos, através de processos empíricos, formalizem a relação trigonométrica fundamental $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$.

Apresentamos uma figura composta pelo desenho de uma parte da circunferência trigonométrica, especificamente o 1º quadrante do plano cartesiano, e um triângulo retângulo qualquer cuja hipotenusa coincide com o raio dessa circunferência. Em seguida, pedimos aos alunos, através da utilização de régua, a medição, aproximada, dos lados desse triângulo. Tomando os valores encontrados pedimos o cálculo da soma dos quadrados de dois segmentos indicados (catetos) e, o valor do quadrado do terceiro segmentos. Informamos apenas os segmentos destacados, ou seja, não informamos as palavras hipotenusa e catetos, visto que as mesmas poderiam induzir as resoluções propostas. Finalmente, propomos a comparação dos resultados.

Usando mesma metodologia, ampliamos a proposta de cálculos para os triângulos formados a partir dos arcos trigonométricos de 60° e 210° . Desta forma relacionamos a atividade com o Teorema de Pitágoras e formalizamos a relação trigonométrica fundamental.

Em fim, propomos questões de aplicação algébrica dessa relação fundamental, cálculo do valor do cosseno ou seno de um arco trigonométrico e o seu sinal conforme interpretação geométrica realizada.

4 – APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E PROPOSTAS DE SUA REFORMULAÇÃO

4.1 – Pesquisa qualitativa.

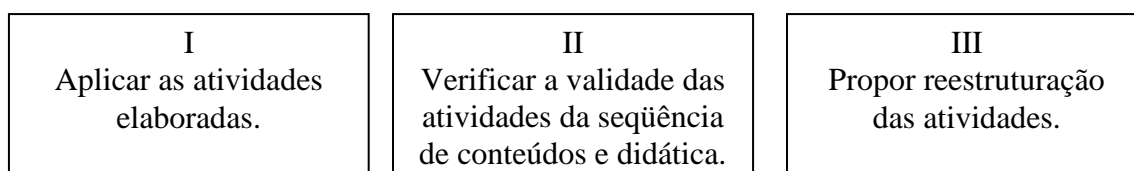
A nossa pesquisa foi qualitativa de acordo com a proposição de Lüdke (1986, p.11), que cita dos autores Bogdan e Biklen as características básicas que configuram a pesquisa qualitativa em educação:

- 1- A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento;
- 2- Os dados coletados são predominantemente descritivos;
- 3- A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto;
- 4- O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador e;
- 5- A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.

Atualmente, exercemos o cargo de professor de Matemática do ensino médio e trabalhamos na rede particular de ensino, ou seja, mantemos contato direto com a realidade e o local que representa o nosso campo de pesquisa; o método da coleta de dados foi realizado através de descrições e análise de situações vivenciadas em diversos momentos na aplicação das atividades; a descrição de como acontece o desenrolar de algumas situações-problema foi mais importante do que o resultado; a percepção do grau de satisfação que os pesquisados declaram em suas atitudes e o respeito com as opiniões diversas é de tamanha importância para nossa pesquisa; e a reestruturação das atividades é considerada como um processo contínuo e ampliador de possibilidades para obtenção de novas hipóteses.

A análise após aplicação das atividades consiste na comprovação e validação de uma seqüência de conteúdo e didática que contribua para o entendimento de conceitos e propriedades trigonométricas utilizando a interpretação geométrica do ciclo trigonométrico.

Em síntese, a proposta metodológica para nossa análise de dados segue os seguintes passos:



4.2 – Público alvo da pesquisa.

As atividades foram desenvolvidas com trinta alunos de uma turma de 1ª série do ensino médio de uma escola da rede privada de ensino, situada na região metropolitana de Belo Horizonte, no período de junho a outubro do ano de 2007. Os alunos oriundos dessa escola já apresentavam algum conhecimento prévio de relações trigonométricas no triângulo retângulo visto na 8ª série do ensino fundamental.

A escola referida é o Colégio Santa Maria Nova Suíça, que representa uma das unidades educativas mantidas pela Sociedade Mineira de Cultura, e que presta serviços educacionais para, em sua maioria, alunos de classe média moradores na região oeste de BH.

A carga horária semanal dos alunos é de 5 horas/aulas (50 minutos), sendo três aulas de Matemática pela manhã e duas aulas à tarde. O horário de aulas referentes à aplicação das atividades da pesquisa foi durante o turno da tarde de 14 horas às 15 horas e 40 minutos, motivo este devido à disponibilidade de tempo do pesquisador. O número de horas aulas está descrito na análise de cada atividade a partir do item 4.4.1.

O trabalho teve a colaboração da Direção da escola, pela permissão e acordo com o pesquisador para que a pesquisa fosse realizada no local; a colaboração e participação direta de um professor de Matemática, regente da turma, integrante ativo na aplicação das atividades e sujeito significativo no desenvolvimento da pesquisa e; a participação e esforço dos alunos ao fazerem as atividades.

4.3 – Metodologia adotada na aplicação das atividades.

As aulas referentes às aplicações das atividades foram, em conjunto, ministradas por dois educadores: o pesquisador numa postura de observador participante e que revela ao grupo o objetivo da pesquisa e, o professor colaborador José Leonardo Giovannini, que ajudou na condução do trabalho. Além da transparência das finalidades da pesquisa com o grupo pesquisado, também, é importante destacar que o professor colaborador foi previamente informado sobre o tipo de pesquisa, a proposta didática na elaboração das atividades e os critérios de avaliação das aplicações das mesmas.

Encaminhamos as atividades elaboradas para o professor colaborador, anteriormente à aplicação, a fim de ele fizesse a leitura e estudo prévio das questões e, assim pudesse contribuir tanto na análise do material didático, como na orientação dos alunos acerca dos questionamentos apresentados no decorrer das aulas referentes à pesquisa.

Sabendo que as atividades elaboradas são de caráter investigativo, limitamos-nos, inicialmente, a observadores e mediadores das dúvidas apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento das questões propostas. Em paralelo à observação e mediação, disponibilizamos um caderno de bordo e uma cópia da própria atividade no qual registramos os principais questionamentos e, também, as considerações, a nosso ver, significativas no decorrer do processo. Consideramos essas anotações como fontes de coleta de dados e, portanto, importantes para análise e validação das atividades.

Em sala de aula, assim como no laboratório de informática, os alunos foram agrupados em duplas. Neste tipo de organização o diálogo acontece entre os pares e, muitas vezes, no auge das discussões e nas divergências dos acordos é inevitável à intervenção e orientação por parte do professor a fim de minimizar as dúvidas que surgem durante o processo.

Diante das dificuldades em observar e participar ativamente das mediações em questionamentos, nós também decidimos fazer a análise documental das atividades resolvidas pelos alunos. De acordo com Lüdke (1986, p.39) esse método de coleta de dados, conforme técnica exploratória indica problemas que devem ser explorados através de outros métodos. Procuramos diversificar o método da coleta de dados a fim de que a avaliação final fosse referência e a base de informações para a reescrita e aperfeiçoamento de algumas atividades visando a uma melhor compreensão do conteúdo e aprendizagem de Trigonometria.

Após o tempo estipulado e término na resolução da atividade, propusemos aos alunos a apresentação dos diferentes caminhos utilizados no desenvolvimento de algumas perguntas das quais consideramos essenciais para prosseguimento das futuras atividades. Nesta socialização esperamos o reforço na afirmação do procedimento correto, a refutação do erro, a minimização das dúvidas, assim como, a melhor compreensão do conteúdo conceitual, procedimental e atitudinal, principalmente daqueles que se propõem a apresentar em público suas anotações.

Ao término da aula e após a socialização das principais dúvidas apresentadas e discutidas no grande grupo, recolhemos as atividades feitas pelos alunos para impressão das cópias, constituindo assim parte do nosso arquivo documental.

4.4 – Método adotado na coleta de dados.

Utilizamos duas etapas na coleta de dados:

- 1 – Aluno e atividade.
- 2 – Professor colaborador, atividade e aplicação.

Primeira etapa – Aluno e atividade.

Método de coleta de dados:

- 1 – Observação.
- 2 – Levantamento das questões apresentadas no decorrer das atividades.
- 3 – Análise documental – Descrições das resoluções significativas apresentadas pelos alunos nas atividades.

Segunda etapa – Professor colaborador, atividade e aplicação.

Método de coleta de dados:

- 1 – Análise do discurso.
- 2 – Questionário.

Indicadores de natureza:

Primeira Parte

- Conceitual.

Segunda Parte

- Desenvolvimento do raciocínio.
- Compreensão.
- Inovação metodológica.

Terceira Parte

- Participação.
- Afetividade.
- Significação e satisfação.

4.4.1 - Primeira etapa na avaliação da atividade – Aluno e atividade.

Observações, descrições de questionamentos e análise documental.

Os detalhamentos das informações seguem o seguinte critério:

- 1- O objetivo a ser alcançado;
- 2- O tempo de duração da proposta inicial de aula;
- 3- Descrição das observações;
- 4- Apresentação de resultados obtidos na análise documental.

Atividade 1 - Setor circular em circunferência, arco, ângulo central, medidas de ângulo e medida de arco.

Esta atividade tem por objetivo relacionar ângulos e arcos estabelecendo conexões entre as medidas dos ângulos centrais e os comprimentos (medidas) dos lados dos triângulos formados em um setor circular reto de raio quatro centímetros. Seu tempo de duração foi estimado em uma hora aula em módulo de 50 minutos, incluindo a sua socialização.

Apesar de se tratar, até então, de uma proposta nova de Ensino de Trigonometria para este grupo de alunos, observamos, mesmo assim, que eles se empenharam em resolver a atividade, contudo, num primeiro momento, alguns apresentaram muita dificuldade na leitura do texto matemático e na compreensão do significado do símbolo matemático de congruência. No pequeno diálogo entre aluno e professor, apresentado a seguir, procuramos descrever algumas destas dificuldades.

(a) Aluno: Professor! Não estou entendendo nada!

(p) Professor: Nada! Já fez a leitura inicial?

(a): Fiz!

(p): Quantos centímetros têm o raio do setor circular e qual é a medida de seu ângulo central?

(a): Vou ler!

(a): 4 cm e 90° , mas como vou encontrar o ângulo $\widehat{B\hat{A}M}$ do setor? O que significa $\overline{AP} \cong \overline{PB}$?

(p): Nunca viu este símbolo?

(a): Se vi, não lembro!

(p): Este símbolo significa congruência. Os segmentos possuem medidas iguais!

Notamos, através do diálogo com o aluno, que a leitura é feita, mas, este mesmo aluno não compreende as informações destacadas no texto, e, também, apresenta dificuldade em representar a linguagem natural, oral ou escrita, a partir da linguagem simbólica matemática.

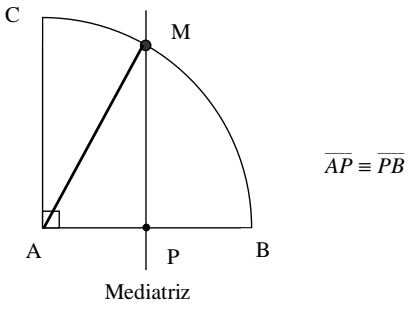
Considerando o histórico escolar desse aluno e a consulta aos cronogramas de conteúdos de matemática da instituição, observamos que o aluno, supostamente, já estudou o símbolo de congruência em séries anteriores, entretanto, percebemos que ele nunca havia presenciado tal símbolo inserido em um texto matemático, portanto, refutava-se e não resolvia a situação proposta. Sabendo que a interpretação do significado do texto e do símbolo é essencial para o desenvolvimento e resolução da questão, finalizamos que a dificuldade do aluno se tratava de compreensão da sintaxe.

Devido a dificuldade na interpretação do texto pelos alunos julgamos ser necessária a socialização do item I.a. Escolhemos este item por se tratar de uma questão essencial para o desenrolar de toda a atividade. Observamos, também, que alguns alunos responderam esse item usando diferentes vias de resoluções. A socialização da questão foi feita pelos próprios alunos, observado as diferentes estratégias na resolução e com apresentação no quadro da sala de aula.

Observe que a atividade item I-a pede para os alunos, a partir do traçado de algumas construções geométricas, determinarem o ângulo central e o arco por ele formado no setor circular.

Veja a questão:

Traçando a mediatriz do segmento AB e prolongando-a tal que intercepte o arco BC, encontraremos um ponto M. Observe a figura abaixo. Em seguida traçamos o segmento AM.



Determine a medida do ângulo $\widehat{B\hat{A}M}$ e do arco BM. Justifique sua resposta.

Destacamos a seguir três modelos de resoluções apresentadas pelos alunos:

1º tipo de resolução

Raio do setor apresentado: 4 cm.

Triângulo retângulo APM, reto em P (mediatriz).

Segmento AM mede 4 cm e segmento AP mede 2 cm (mediatriz).

Considere $\widehat{B\hat{A}M} = \alpha$; $\cos \alpha = \frac{\text{cat. adj.}}{\text{Hip.}}$

$\cos \alpha = \frac{AP}{AM} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, portanto, consultando tabela, $\alpha = 60^\circ$.

2º tipo de resolução

Segmento AM mede 4 cm e segmento AP mede 2 cm (mediatriz).

Considere $\overline{PM} = x$, e por Pitágoras; $4^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$.

Considere $\overline{BM} = y$, e por Pitágoras; $y^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow y = 4$.

Portanto $\overline{AM} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{BM} = 4$ cm, logo o triângulo ABM é equilátero e o ângulo $\widehat{B\hat{A}M}$ é 60° .

3º tipo de resolução

Temos que: $\overline{AP} \equiv \overline{PB}$ (mediatriz);

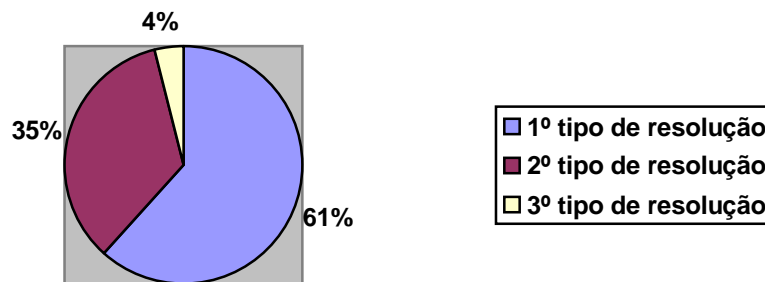
$\widehat{A\hat{P}M} \equiv \widehat{B\hat{P}M} = 90^\circ$ (mediatriz);

\overline{MP} é comum;

Pelo caso LAL, $\Delta APM \equiv \Delta BPM \Rightarrow \overline{AM} \equiv \overline{BM}$.

Portanto $\overline{AM} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{BM} = 4$ cm, logo triângulo ABM é equilátero e o ângulo $\widehat{B\hat{A}M}$ é 60° .

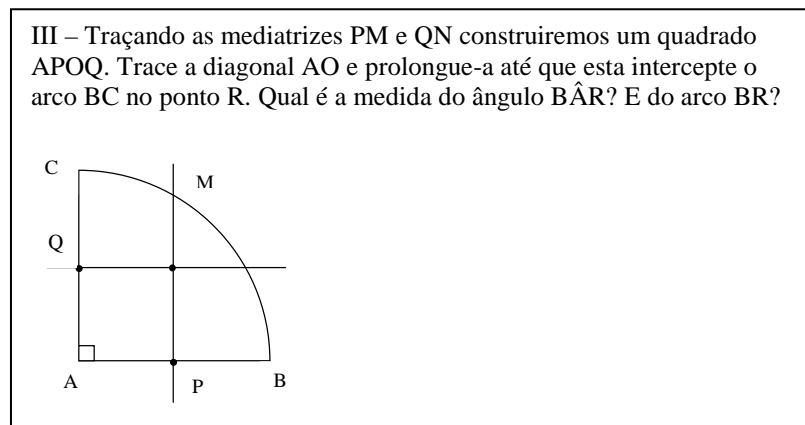
Observamos que na primeira resolução foi aplicada às relações trigonométricas do triângulo retângulo, na segunda o Teorema de Pitágoras e na terceira a congruência de triângulos. Agrupamos as atividades por tipos de resoluções e tabulamos os resultados. Vejamos o levantamento a seguir:



Observamos que o primeiro e o segundo tipo de resolução tiveram os maiores percentuais. Verificamos que os resultados encontrados podem ser justificados porque os alunos estavam, naquele momento, terminando o período de revisão das relações métricas e trigonométricas do triângulo retângulo. É importante destacar que no terceiro tipo de resolução houve a mediação entre o professor pesquisador e o pequeno grupo de alunos, motivo pelo qual, o diálogo direto possa ter ampliado as possibilidades para esse caminho de

resolução. Observamos que na resolução por congruência o aluno realizou uma pequena demonstração matemática, ou seja, ele usou um método que requer maior abstração e maturidade sobre um conteúdo.

Outras observações interessantes e significativas para o nosso trabalho foram as resoluções da questão item III. Neste item pedimos a medida do ângulo central a partir do traçado das duas mediatrizes. Veja a questão:



Tabulamos os modelos de resoluções e observamos que 45 % dos alunos resolveram aplicando as propriedades da diagonal do quadrado, 50 % usaram as relações trigonométricas aplicando tangente, seno ou cosseno de um ângulo ou, ainda, através das relações métricas do triângulo retângulo, calculando o valor do segmento AO por Teorema de Pitágoras e, por fim, 5 % não responderam.

Observamos que a resolução da atividade anterior é extremamente simples quando trabalhada com os conceitos de Geometria. No entanto, o índice dos alunos que responderam usando as relações métricas ou trigonométricas é superior ao índice dos alunos que responderam usando Geometria. Esse fato mostra que os alunos ficam condicionados aos modelos matemáticos que teoricamente aprendem. Sabemos que o fato de aplicar uma técnica na resolução de um exercício não garante que o aluno aprendeu significativamente o conceito matemático, ou seja, na maioria das resoluções apresentadas falta a significação do símbolo, e que o conceito geométrico, neste momento, é mais importante do que a técnica algébrica de resolução.

Atividade 2 - Construção do Desenho da Circunferência Trigonométrica

Esta atividade tem por objetivo fazer com que o aluno desenhe sua própria circunferência trigonométrica usando recursos de construções geométricas. Por meio dessas construções geométricas produziremos um modelo sistematizado e, através dele, usaremos da exploração visual a fim de se construir situações que estabeleça um significado ao conceito matemático de Trigonometria.

Esta atividade foi planejada para duração de 2 horas/aula em módulos de 50 minutos e foi aplicada para 30 alunos da classe.

Na aplicação da atividade percebemos que os alunos não possuem o hábito de leitura de textos matemáticos e, também, uma falta de prática em consultas de informações e definições contidas nas notas de rodapé. Observamos que o aluno pede explicações sobre um determinado termo, mas, no entanto, este mesmo aluno não percebe que a definição ou significado da palavra está descrito no próprio decorrer do texto ou em nota de rodapé.

Percebemos também muitas dúvidas dos alunos em como representar o sentido dos arcos trigonométricos. Verificamos que o item dessa atividade precisava de uma referência com relação ao local de posicionamento das setas de orientação.

Através de orientações por parte do pesquisador e do professor colaborador percebemos a diminuição das dúvidas com relação à leitura no decorrer do desenvolvimento da atividade.

Com relação à análise documental observamos que os alunos tiveram extrema facilidade em subdividir a circunferência em intervalos e descrever as medidas em graus, dos arcos que delimitam os quadrantes da circunferência trigonométrica. Este fato já não ocorreu posteriormente quando pedimos as medidas em radianos. Observe a tabela:

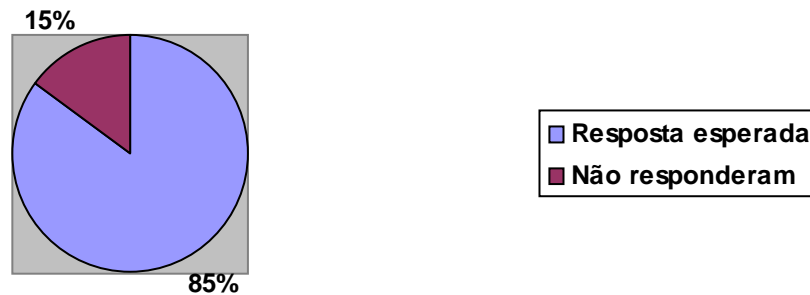
Subdivisão dos quadrantes em intervalos de arcos.	Medidas em graus	Medidas em radianos
Responderam o esperado.	100 %	80 %
Não responderam (Branco)	0	20 %

A atividade foi planejada para 2 horas aulas sequências de 50 minutos cada. Entretanto, observamos que ela ficou extensa para o tempo previsto; além de conter muitas informações e um método de ensino diferente para esse grupo de alunos. Reestruturamos a atividade numa nova proposta didática, distribuindo-a em duas partes. Na primeira parte

trabalharemos até o item oito onde desenvolveremos as questões somente para medidas dos arcos trigonométricos dados em graus e, na segunda parte, trabalharemos o restante da atividade já com medidas dos arcos trigonométricos em radianos.

Para que esta redistribuição se consolide, mudaremos a formatação do quadro do item três. A parte referente às medidas em radianos será retirada desse item e fará parte da letra b do item nove, onde focaremos o trabalho com as medidas em radianos.

No item quatro propomos a investigação, a partir da visualização da localização de um arco negativo, a generalização da fórmula da primeira determinação positiva de um arco trigonométrico α , para $\alpha \in]0, -360^\circ]$, nas medidas em graus. Segue o percentual referente aos alunos que atingiram ou não a proposição dada:



Obtivemos resultado satisfatório, não somente pelos alunos que responderam o esperado, mas também pelos métodos de resolução apresentados. Vários alunos resolveram pela regra $360^\circ - \alpha$, entretanto, um grupo expressivo (30%) resolveu pelo suplemento do módulo do arco dado somado com 180° , ou seja, para o valor absoluto de α temos que $(180^\circ - \alpha) + 180^\circ$. Essa variação nos processos de resoluções expressa as possibilidades do trabalho de uma atividade investigativa.

Nos itens 5, 6 e 7 pedimos aos alunos algumas construções geométricas simples e que, através da visualização da sua própria figura construída, estabelecessem generalizações e formalização das regras de redução de arcos para o primeiro quadrante. Veja as tabelas abaixo onde apresentamos os resultados encontrados.

Redução do 2º para 1º quadrante		
Responderam	Representação dos arcos trigonométricos na figura	Generalização da regra de redução $180^\circ - \alpha$
Corretamente	90 %	50 %
Erro ou Branco	10 %	50 %

Redução do 3º para 1º quadrante		
Responderam	Representação dos arcos trigonométricos na figura	Generalização da regra de redução $180^\circ + \alpha$
Corretamente	85 %	65 %
Erro ou Branco	15 %	35 %

Redução do 4º para 1º quadrante		
Responderam	Representação dos arcos trigonométricos na figura	Generalização da regra de redução $360^\circ - \alpha$
Corretamente	90 %	65 %
Erro ou Branco	10 %	35 %

Observamos que todos os alunos desenharam a localização dos arcos trigonométricos na figura, construíram os quadriláteros inscritos na circunferência e apresentaram seus vértices nas intersecções com a circunferência. No entanto observamos que poucos representaram seus valores numéricos no desenho da circunferência trigonométrica, mas este fato não prejudicou o potencial desta atividade. O mais importante foi a compreensão do processo de pesquisa, como aconteceu a descoberta para o aluno atuando como construtor de seu próprio conhecimento, e como ele, através de levantamento de conjecturas, reforçando o conceito de atividade investigativa de Ponte (2003), elaborou as propriedades sobre o objeto pesquisado. Enfim, ao construirmos o nosso próprio desenho da circunferência trigonométrica atribuímos valor aos mecanismos simbólicos que formam as imagens mentais e que sustentam o entendimento do conteúdo e a produção do conhecimento, conforme construção do conceito segundo Vergnaud (1993).

Analisando as falas de alguns alunos sobre a atividade podemos perceber o seu valor e significado para o mesmo.

- “Considero este tipo de trabalho bom, pois ele envolve análises e observações, não necessitando assim, de decorar as fórmulas ou regras matemáticas. É um ótimo meio para quem quer aprender a entender a matemática e não apenas tê-la como uma obrigação na grade curricular do colégio.”
- “É um trabalho interessante de ser realizado, já que visa melhor compreensão do ciclo trigonométrico. Esse exercício nos ajuda a compreender melhor a relação entre os ângulos e as fórmulas estabelecidas através deles.”
- “Acho que o exercício ajudou bastante, principalmente, na compreensão das regras de seno e cosseno de ângulos que não são do 1º quadrante. A compreensão do círculo eliminou totalmente o uso das fórmulas, as quais eu não conseguiria decorar. Foi importante também para entender a transformação de ângulos em radianos.”

Atividade 3 - Ângulos côngruos.

O objetivo desta atividade é fazer com que o aluno compreenda que a circunferência trigonométrica é definida por ciclos e que os arcos côngruos podem ser agrupados por regras ou leis. Além da compreensão do conceito esperamos que o aluno aprenda a calcular a primeira determinação positiva de um arco qualquer e ainda perceba as possíveis partições da circunferência trigonométrica.

A atividade foi planejada para ser aplicada em um tempo de 2 hora/aula em módulos de 50 minutos.

Nesta atividade contratamos um profissional para filmar o seu desenvolvimento. A filmagem ocorreu com a utilização de duas câmaras; uma fixa e outra móvel. Percebemos que a filmagem através da câmara móvel causava uma alteração no comportamento dos pesquisados, no entanto, desprezamos esse fato devido à evidência encontrada na filmagem pela câmara fixa, no qual observamos que, assim que a câmara móvel se afastava do grupo, este retomava as atividades anteriores e voltava a sua estabilidade inicial.

A partir desta atividade, percebemos que a leitura do texto efetuada pelos alunos tornou-se mais acessível, compreensível e até mais natural. A linguagem matemática contida na atividade não mais se apresentava como fator limitador para o desenvolvimento do trabalho.

Na análise documental das atividades realizadas pelos alunos levantamos algumas considerações significativas para nossa avaliação.

Na atividade fornecemos uma tabela constando um arco de 30° e alguns valores naturais para k que representam o número de voltas completas no ciclo trigonométrico. Observamos nas respostas encontradas que todos os alunos erraram a questão na qual se pedia para representar algebricamente o intervalo de localização da extremidade final do arco trigonométrico a partir da generalização do valor de k . Vejam as respostas encontradas:

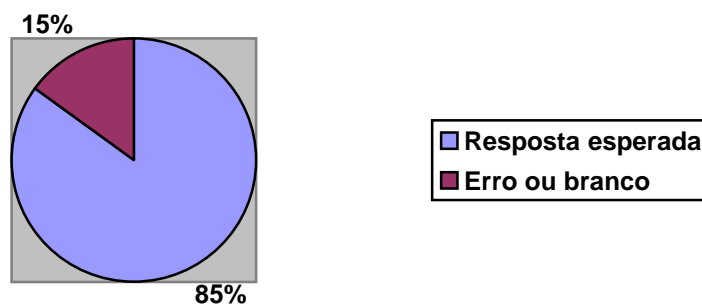
Respostas encontradas	Percentuais
$0 \leq \alpha \leq k \cdot 2\pi$	65 %
$k \leq \alpha \leq 2\pi$	15 %
$k \in \mathbb{Z}$	15 %
Branco	5 %

Sabendo que a resposta correta para $k \in N$ é $k \cdot 2\pi \leq \alpha \leq (k+1) \cdot 2\pi$, observamos que os erros nas representações feitas pelos alunos devem-se ao alto nível de dificuldade na abstração e formalização que a questão propõe.

No item 9 da atividade pedimos a descrição do significado das expressões algébricas: $\alpha + 2.k\pi$, $\alpha + k\pi$ e $\alpha + k \cdot \pi/2$. Fornecemos uma tabela contendo alguns parâmetros naturais para k e, a partir da substituição dos valores numéricos, pedimos a significação das expressões acima.

As respostas esperadas para as expressões citadas são, respectivamente, as descrições de volta completa, meia volta e um quarto de volta.

As respostas encontradas nas atividades feitas pelos alunos estão representadas no gráfico abaixo.



Procuramos comprovar a compreensão do aluno sobre o significado das expressões algébricas através de uma questão de aplicação, ou seja, uma atividade que propõe construções de polígonos inscritos na circunferência. Observamos que 60% dos alunos que deixaram em branco a aplicação responderam corretamente o item nove, ou seja, descreveram a significação ou conceito de cada expressão algébrica; 40% dos alunos que erraram a aplicação também erraram a significação das expressões algébricas. Observamos que o fato de *não fazer* a aplicação é insuficiente para comprovar a não compreensão do significado das expressões, no entanto, o *erro* na aplicação implica diretamente no fato de que o aluno não compreendeu o conceito de cada expressão.

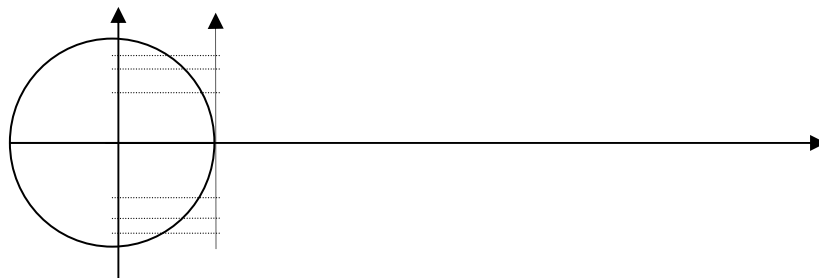
As três atividades trabalhadas, até o momento, estão diretamente relacionadas entre si. Observamos que a atividade dois inicia fazendo referência à atividade um, e já a atividade um é fonte de consulta para iniciação da atividade dois. A atividade três somente tem sentido após a compreensão do desenho da circunferência trigonométrica, ou seja, término da atividade dois, privilegiando a estrutura articulada da proposta de seqüência didática de Zabala (1998).

Atividade 4 - Construção da função trigonométrica $y = \text{sen } x$.

Com esta atividade pretendemos fazer com que o aluno construa o gráfico da função trigonométrica $y = \text{sen } x$. Esta função foi classificada como **função original**. De um modo geral, e como prática educativa dos cursos no ensino médio, observa-se que a primeira função trigonométrica seno é construída pelo professor em sala de aula, cabendo ao aluno a observação da exposição, ou seja, agente não participante da construção do seu próprio conhecimento. Com a nossa proposta o aluno explora a figura da circunferência trigonométrica que ele construiu na atividade 2. Ele observa, identifica os segmentos formados sobre o eixo y do plano cartesiano, determina os valores das imagens da função seno através da transposição dos segmentos destacados na figura fornecida na própria atividade e localiza os pares ordenados. Após a localização dos pares ordenados, o aluno traça a curva da função seno e se familiariza com o seu comportamento e, ainda, levanta conjecturas sobre suas propriedades como identificação do domínio, continuidade, amplitude e imagem da função.

Na atividade fornecemos uma figura de fundo que serve como base para se construir o gráfico. Desta forma eliminamos, em muito, o tempo necessário para desenvolver a atividade, as distorções no desenho da circunferência e no plano cartesiano possíveis de acontecer, caso o desenho fosse construído pelos alunos. Assim estimamos o tempo de duração em 1 hora/aula, em um módulo de 50 minutos.

Observe abaixo a base da figura de fundo:



No decorrer da atividade observamos algumas dúvidas apresentadas pelos alunos. A primeira dúvida surgiu logo no início de seu desenvolvimento. Informamos alguns dos principais arcos trigonométricos da primeira determinação positiva e localizamos suas abscissas no eixo do plano cartesiano. Logo após pedimos aos alunos que completassem, no eixo x do plano cartesiano, o restante dos arcos, em radianos, até 2π . As localizações dos

pontos no eixo x não foram, por nós, totalmente informadas na figura. Julgamos que aluno fosse capaz de perceber a seqüências dos arcos. No entanto, vários alunos não conseguiram finalizar a tarefa de localizar as abscissas com os principais arcos trigonométricos de 0 a 2π . Foi necessária a intervenção do professor mediador para esclarecimentos da dúvida, visto que se tratava de questão fundamental para construção do gráfico e para seqüência da atividade.

Outra dúvida foi como iniciar o desenho fazendo a representação e localização do par ordenado através da transposição dos segmentos formados a partir do ciclo trigonométrico.

Tal construção geométrica expressava uma situação nunca vivida pelo aluno. Como esperar a generalização da construção sem uma referencia inicial? Por se tratar de uma situação inicialmente difícil de perceber, apresentamos, no quadro de sala de aula, o início da transposição dos segmentos finalizados pelos pares ordenados $(0,0)$, $(\pi/6, 1/2)$ e $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$. Após a orientação do professor percebemos a total eliminação das dúvidas e destacamos o excelente resultado encontrado nos traçados da curva da função e na descrição de seu comportamento.

A tabela abaixo ilustra o percentual dos objetivos atingidos ou não, referentes à construção da curva da função seno e a descrição, por meio da linguagem natural, do comportamento de seu gráfico.

Classificação das respostas encontradas	Construção da curva da função seno para $\alpha \in [0, 2\pi]$	Construção da curva da função seno para $\alpha \in [-2\pi, 4\pi]$	Descrição do comportamento da função.
Atingiu o objetivo	100 %	100 %	95 %
Não atingiu o objetivo	0	0	5 %

Na análise crítica da elaboração da atividade destacamos um erro na definição de amplitude da função e na pergunta referente ao assunto. Observamos que a nossa definição de amplitude não ficou explícita para o entendimento do aluno. Definimos amplitude da seguinte forma: “*Amplitude da função é definida pelo intervalo de variação da imagem*”. Na atividade pedimos para identificar o intervalo de variação da imagem, sendo que o correto seria a variação do intervalo da imagem, ou seja, o valor absoluto da diferença entre a maior imagem e a menor imagem da função, definição correta de amplitude. Na função $y = \text{sen } x$ a resposta esperada para a amplitude era $A = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$; no entanto todos os alunos responderam $-1 \leq y \leq 1$. Observe que as respostas são referente à imagem da função original

seno e, portanto corretas se considerarmos a definição erroneamente apresentada. O que foi errado foi a elaboração da questão e não as respostas dos alunos.

Assim, reforçamos a importância da aplicação das atividades do trabalho de Mestrado Profissional no campo de pesquisa, a fim de que o produto final da dissertação seja revisado e, conseqüentemente, lançado para o meio educacional e acadêmico, com a eliminação dos possíveis erros.

Na parte final da atividade definimos o que é uma função periódica. Em seguida pedimos exemplos de funções periódicas encontradas em nosso dia-a-dia. Alguns exemplos apresentados pelos alunos foram: “Tempo de um dia que é definido em 24 horas”; “Tempo em meses que é definido em 30 dias”; “Ciclo menstrual da mulher”; “Batimentos cardíacos de uma pessoa”; “Dízimas periódicas”; “Corrida de atletismo em pista oval”. O aluno quando percebeu, através de exemplos práticos, que um período corresponde a um ciclo ou giro “completo” na circunferência trigonométrica ele, ampliou suas possibilidades de generalizar, estabelecer propriedades e formalizar as definições com o rigor esperado nesta fase educacional, ou seja, compreendeu de fato o conceito trabalhado, conforme categorias de Ponte (2003).

Atividades 5, 6 e 7 – Transformações da função seno $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$, sendo a , b e d parâmetros e x a variável real.

Nas atividades 5, 6 e 7 os alunos investigaram as transformações ocorridas no gráfico da função seno a partir da alteração de parâmetros. Cada atividade propõe um tipo de transformação.

Atividade 5

Nesta atividade os objetivos foram a investigação do comportamento do gráfico da função $y = b \cdot \text{sen } x$, a partir da alteração do parâmetro b , e a descrição das variações do valor numérico de suas imagens em relação à original. A atividade foi distribuída em duas partes:

na primeira propomos o estudo para valores positivos de b , e na segunda, para valores negativos de b . Nesta atividade propomos a investigação e generalização da imagem da função.

A atividade, inicialmente, foi programada para ser realizada em um horário, ou seja, 1 hora/aula em módulo de 50 minutos. No entanto, o tempo não foi suficiente para o término de toda a atividade em sala de aula. Orientamos, então, para que os alunos terminassem individualmente o restante da atividade em casa. Todavia alguns alunos não apresentaram na aula seguinte o restante da resolução do trabalho. Decidimos, portanto, avaliar somente os itens resolvidos. Observamos que a decisão não comprometeu a avaliação, visto que a maioria dos alunos havia terminado a atividade dentro do proposto. Devido ao fato ocorrido propusemos fazer algumas poucas alterações na atividade e ampliamos o tempo de resolução de 1 hora/aula para 2 horas/aula considerando, também, o período de socialização das atividades. A atividade reestruturada encontra-se no anexo dessa dissertação.

Na aplicação da atividade, observamos, através da diminuição das dúvidas e perguntas apresentadas pelos alunos, uma melhora considerável na compreensão do texto matemático e nos comandos no desenvolvimento das questões. Os resultados encontrados na análise documental descrevem algumas das principais observações que são significativas para o trabalho. Veja a tabela abaixo descrevendo os percentuais dos resultados encontrados nas construções e nas descrições elaboradas pelos alunos:

Resultados encontrados nas construções dos gráficos	Construção da curva da função $y = 2 \cdot \text{sen } x$	Construção da curva da função $y = \frac{1}{2} \cdot \text{sen } x$	Construção da curva da função $y = -1 \cdot \text{sen } x$
Atingiu o objetivo	95 %	85 %	56 %
Erro do desenho	5 %	10 %	28 %
Branco	-	5 %	16 %

Apresentamos abaixo os erros nas atividades desenvolvidas pelos alunos, e, em seguida, analisamos tais erros.

Na construção do gráfico da função $y = 2 \cdot \text{sen } x$ o percentual de erros é referente à simetria do desenho na curva do gráfico e aos valores encontrados para o máximo e o mínimo da função. Alguns alunos apresentaram o máximo $+1$ e o mínimo -1 , ou seja, não diferenciaram os valores em relação à função original.

Na construção do gráfico de $y = (1/2) \cdot \text{sen } x$ os erros foram praticamente os mesmos comparados a anterior, ou seja, nas descrições dos máximos e mínimos da função. Outro erro encontrado foi nas representações geométricas da curva do gráfico. As localizações das imagens não correspondiam com a função dada. Apesar do erro no desenho, observamos no item seguinte, que, quando pedimos a representação algébrica da imagem da função, todos os alunos acertaram.

Na construção do gráfico da função $y = -1 \cdot \text{sen } x$, 11,2 % não espelharam a curva em relação à original, 11,2 % traçaram segmentos de retas e não curvas e 5,6 % usaram um período π e não o correto 2π . Quando perguntamos: *o que acontece com a função original ao atribuímos valores negativos para o parâmetro b da função $y = b \cdot \text{sen } x$, verificamos que as respostas encontradas foram: o comportamento fica o inverso da função original; a função inverte os valores ou sinais; o inverso da positiva; muda o sinal da amplitude ou ainda o comportamento da função muda.* Percebemos que a dificuldade do aluno está relacionada com o seu conhecimento prévio de vocabulário e com a falta do cuidado na utilização das definições de conceitos matemáticos.

Percebemos que o aluno que cometeu erro não estabeleceu relação entre o seu desenho construído em sua visualização enquanto objeto de estudo e a representação algébrica da imagem da função. Não conseguimos atingir a totalidade dos alunos na perspectiva metodológica da proposta de nosso trabalho, no entanto, consideramos os resultados satisfatórios visto o percentual de acertos da atividade.

Atividade 6

Nesta atividade os objetivos foram a investigação do comportamento do gráfico da função $y = \text{sen } c \cdot x$, a partir da alteração do parâmetro c , e a descrição das variações dos períodos encontrados em relação à original.

A duração para o desenvolvimento da atividade foi de 1 hora/aula em módulo de 50 minutos.

Iniciamos a atividade apresentando a função $y = \text{sen } 2 \cdot x$. Em seguida pedimos aos alunos para traçar o seu gráfico após o preenchimento de uma tabela. Na tabela informamos os valores angulares de $2x$ com os principais arcos trigonométricos da primeira determinação

positiva e, a seguir, pedimos para determinar cada valor da coluna x conforme o arco informado anteriormente para $2x$. As dúvidas logo surgiram com relação ao modo de preenchimento e em como calcular os valores atribuídos para a coluna x da tabela. Esta dúvida já estava prevista na elaboração da atividade, pois, a mesma, trazia uma explicação sobre o modo de preenchimento da coluna. Percebemos, então, que faltou, por parte de alguns alunos, a interpretação da leitura do texto e o cuidado com as observações dos modelos matemáticos apresentados. Neste momento foi necessária a mediação do professor pesquisador no norteamto introdutório da atividade.

Com relação aos resultados encontrados na análise documental, focamos nossa avaliação na observação do traçado da curva da função trigonométrica produzida pelo aluno em seu texto. A tabela abaixo indica os resultados encontrados com relação às construções dos gráficos:

Resultados encontrados nas construções dos gráficos	Construção da curva da função $y = \text{sen } 2x$	Construção da curva da função $y = \text{sen } \frac{1}{2}x$
Atingiu o objetivo	100 %	81 %
Erro do desenho	-	5 %
Branco	-	14 %

O erro encontrado na construção do gráfico da função $y = \text{sen}(x/2)$ refere-se ao traçado de sua linha, ou seja, foram apresentados segmentos de retas e não as curvas necessárias para representação geométrica da função seno. Também na construção da curva da função $y = \text{sen}(x/2)$, observamos que nas atividades deixadas em branco os alunos preencheram corretamente a tabela com seus pares ordenados, no entanto, não construíram a curva do gráfico da função. Apesar do percentual baixo nas atividades deixadas em branco, creditamos esse fato à falta de cuidado e atenção dos alunos, mesmo porque a tabela foi produzida sem erros.

Atividade 7

Nesta atividade os objetivos foram a investigação do comportamento do gráfico da função $y = a + \text{sen}(x + d)$, a partir da alteração dos parâmetros a e d, e a descrição das translações existentes em relação à original.

A atividade foi distribuída em duas partes, sendo que na primeira o foco foi a variação do parâmetro d da função senos e sua translação horizontal e, já na segunda, a variação do parâmetro a da mesma função e sua translação vertical. Desta forma estimamos em 2 horas/aula o tempo necessário para resolução da atividade.

A tabela abaixo indica os resultados encontrados em relação às construções dos gráficos:

Resultados encontrados nas construções dos gráficos	Construção da curva da função $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	Construção da curva da função $y = 1 + \text{sen } x$
Atingiu o objetivo	95 %	85 %
Erro do desenho	-	10 %
Branco	5 %	5 %

Neste momento, não mais focamos nossa avaliação documental na análise das curvas apresentadas pelos alunos, mas na descrição em como acontece o deslocamento do gráfico da função.

Quando propusemos aos alunos a descrição de como acontece o deslocamento do gráfico da função $y = \text{sen}\left(x + \pi/6\right)$; 45% responderam que “há um deslocamento de $\pi/6$ na horizontal”, mas não descreveram em qual sentido, ou seja, para esquerda ou para direita; 15% responderam “o seu período começa no $-\pi/6$ ao invés de começar no zero e termina no $11\pi/6$ ao invés de terminar no 2π ”, mas não responderam o tipo de translação; 5% responderam “há um deslocamento vertical”, e fizeram o gráfico corretamente, mas, não reconheceram o significado da palavra vertical; 10% responderam “a curva se torna mais larga”, e também fizeram o gráfico corretamente, mas, não perceberam que o período não se alterou em relação à função original, e que houve, apenas, um deslocamento horizontal para esquerda de $\pi/6$; por fim, o restante de 25% não descreveu o tipo de deslocamento, apesar de que, apenas 5 % deixaram em branco o gráfico dessa função.

Os erros encontrados na construção do gráfico da função $y = 1 + \text{sen } x$ são referentes à localização da extremidade final do primeiro ciclo ou período. Alguns alunos finalizaram a curva, para o intervalo proposto de $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, de forma errada, ou seja, finalizaram o primeiro ciclo no ponto $(2\pi, 2)$ sendo que o correto é o par ordenado $(2\pi, 1)$. Observamos que, a representação na célula da tabela, o valor numérico de $1 + \text{sen } x$ para $x = 2\pi$ encontrado foi 2, verificamos então, o reforço e o motivo do erro do aluno.

Quando propusemos aos alunos também a descrição de como acontece o deslocamento do gráfico da função $y = 1 + \text{sen } x$; 55% responderam “foi um deslocamento vertical em que os valores de y foram acrescidos em uma unidade”; 15% responderam “o deslocamento do gráfico se dá pela alteração da imagem”; 5% responderam “o termo independente é onde se inicia o gráfico dessa função no eixo y ”; e 25% não responderam, ou seja, deixaram em branco. Todas as respostas apresentadas foram consideradas significativas na análise do comportamento do gráfico e nos conduziram a diferentes olhares, explicitações, conjecturas e propriedades enriquecendo atividade matemática investigativa. Por fim, a socialização de todas as respostas encontradas foi fundamental para o registro final do aluno sobre o comportamento dessa função.

Classificamos os alunos por meio da análise das resoluções encontradas em três grupos; o primeiro refere-se às respostas corretas parcialmente, ou seja, incompletas; o segundo refere-se às respostas erradas, mas com apresentação do gráfico da função; e o terceiro das respostas em branco, porém sem representação do gráfico e, portanto, impossíveis de correção. Sabemos que quando uma questão é proposta e se pede a descrição das observações pessoais sobre um determinado objeto, devemos ter, enquanto educadores, o discernimento e abertura em aceitar diferentes possibilidades de respostas. Conforme Ponte (2003), a investigação matemática é o processo de descobertas de relações e identificações de propriedades. Os alunos ao descobrirem relações aplicando o processo de investigações matemáticas através de descobertas guiadas, mesmos que sejam incompletas, estão ampliando possibilidades na aquisição de conhecimento.

No final da atividade, propusemos exercícios de aplicação da síntese geral dos parâmetros de $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ na representação geométrica no esboço do gráfico de algumas funções seno. Percebemos muita dificuldade no aluno sobre o entendimento de como fazer o esboço de um gráfico. O aluno identificava o parâmetro da função isoladamente e a transformação que ocorria em seu gráfico, porém, não relacionava o conjunto desses parâmetros com o esboço da curva. Assim sendo, houve a necessidade de pequenas intervenções do professor pesquisador sobre os passos para esboçar o gráfico de uma função trigonométrica com, por exemplo, ponto inicial de partida da curva ou a amplitude da função.

Atividade Especial

Quando terminamos o estudo relacionado ao comportamento da função seno $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e a análise dos parâmetros, decidimos introduzir uma nova proposta ao trabalho a partir do trabalho do Grupo de Pesquisa “Metodologia e Informatização no Ensino de Matemática” do Mestrado em Ensino da Pucminas. Foi utilizada uma atividade ampliada do Caderno que orienta o trabalho dos alunos no laboratório de informática (LABCAL), nas disciplinas Cálculo I dos cursos de engenharia da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Esta atividade contribuiu significativamente para nossa pesquisa. A atividade tem como objetivo fazer com que o aluno perceba as variantes e invariantes da função seno a partir da visualização de seu gráfico através da utilização do programa computacional YAG, ou seja, não mais através da interpretação visual da circunferência trigonométrica. A atividade propõe que o aluno faça, após a digitação da função e observação do comportamento de seu gráfico visto na tela do computador, o preenchimento de vários questões e itens em uma folha de papel.

A atividade foi distribuída em quatro partes: a primeira parte discute a função $y = \text{sen } x$; a segunda parte a função $y = a + b \cdot \text{sen } x$; a terceira a função $y = \text{sen}(cx + d)$ e a quarta propõem a análise sobre a paridade da função e síntese dos resultados.

Inicialmente, e com a ajuda da Professora Vera Torres Penna Gomide, responsável pelo laboratório de informática da Escola baixamos, com permissão da Universidade, o programa YAG em todas as nossas máquinas. O programa computacional YAG – Yet Another Graphics é um aplicativo, disponível gratuitamente no sítio eletrônico www.matematica.pucminas.br, permite o traçado de gráficos de funções de uma variável de forma simples e interativa. Este software permite editar a função e limitar os intervalos de domínio e de imagem de acordo com o apropriado para o estudo e em sua sintaxe operatória se destaca a constante π denominada por pi.

No ano da aplicação das atividades, em 2007, o laboratório de informática foi utilizado por todas as turmas da Escola, portanto, utilizamos em nossa pesquisa apenas três horas aulas de módulos de 50 minutos. Conseguimos atingir até a 3ª parte da atividade e foi suficiente para perceber o envolvimento, participação e principalmente o conhecimento adquirido pelos alunos e por nós, professor pesquisador e colaborador.

Antes do trabalho com os alunos, reunimos com o professor colaborador, para realizar todas as questões propostas da atividade. Usamos o programa computacional a fim de conhecer sobre sua sintaxe e sua plataforma.

No laboratório de informática agrupamos os alunos em duplas, distribuimos as folhas da atividade, apresentamos o programa computacional e explicitamos sobre a proposta do trabalho. Em seguida exemplificamos a sintaxe através da escrita de algumas funções no quadro e, por fim, nos disponibilizamos a orientar as dúvidas de cada dupla no decorrer do processo.

As principais dúvidas surgiram na determinação da expressão geral de x , do tipo $x = \alpha + 2k\pi$ para as equações do tipo $\text{sen } x = a$, para $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ e $a = 1/2$. Vários alunos apresentaram o valor de x como sendo um número real e não um valor angular. Observando a resposta $0,5 + 2k\pi$ dada por um aluno para a equação $\text{sen } x = 1$, verificamos que no gráfico do programa a descrição do eixo x em π , após configuração de escala, o valor $0,5$ destacado pelo aluno na expressão, por exemplo, é apresentado na abscissa do desenho do gráfico no computador e, na verdade, significa $\pi/2$ radianos e não um número real. Outra observação significativa encontrada na mesma questão e que, algumas duplas, mesmo sem ter trabalhado com as equações trigonométricas, perceberam que o valor de x da equação $\text{sen } x = 1$ é o arco trigonométrico para o valor da imagem um, e representaram usando o desenho da circunferência trigonométrica e não o desenho do gráfico destacado pelo computador.

É importante destacar que durante e após a atividade, alguns alunos baixaram, em seus computadores particulares, o programa computacional e usaram em outras situações, tanto na própria Matemática ou também na Física, portanto, o ambiente computacional contribuiu na diversificação dos caminhos que levam à aprendizagem. Nós, professores, somos responsáveis pela metodologia que conduz o estudante à construção do conhecimento e temos totais condições de ampliar e inserir novas propostas didáticas e esperar sempre do aluno o retorno na produção de seu próprio saber, seja ele conceitual, procedimental e, também, atitudinal.

Atividade 8 - Construção do gráfico da função trigonométrica $y = \cos x$.

O objetivo da atividade é fazer com que o aluno construa o gráfico da função trigonométrica original $y = \cos x$, utilizando da figura proposta no fundo que apresenta a rotação e transposição dos segmentos formados no eixo x do plano cartesiano. Após estes movimentos geométricos e identificação dos pares ordenados localizando as imagens da função para os principais arcos trigonométricos da primeira determinação positiva, pedimos ao aluno para traçar a curva da função e, conseqüentemente, familiarizar com o comportamento de seu gráfico, apresentar seu domínio, imagem, amplitude, período e, principalmente, relacionar as funções seno e cosseno.

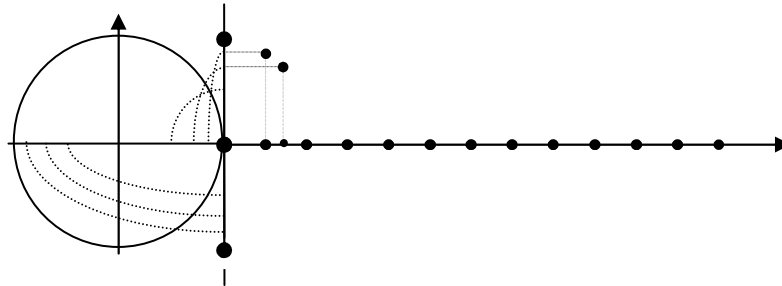


Figura de fundo

Programamos a atividade para uma duração de 1 hora/aula, mesmo porque iniciamos a identificação dos pares ordenados fornecendo as localizações de $(\pi/6, \sqrt{3}/2)$ e $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$. Desta forma eliminamos as possíveis dúvidas dos alunos em relação a como iniciar a curva da figura. Constatamos pela análise documental das atividades, que todos os alunos obtiveram sucesso no traçado do gráfico da função cosseno, na identificação de seu domínio, imagem, período e na relação estabelecida com a função seno.

Atividade 9 - Construção do gráfico da função trigonométrica $y = \operatorname{tg} x$.

O objetivo desta atividade é fazer com que o aluno, a partir das transposições dos segmentos formados sobre o eixo auxiliar, construído paralelo ao eixo y tangenciando circunferência trigonométrica no ponto de origem dos arcos trigonométricos, localizasse os pares ordenados, quando possível, dos principais arcos trigonométricos, e, conseqüentemente,

traçasse a curva da função original $y = \operatorname{tg} x$, identificando, a partir da observação do comportamento e descontinuidade do gráfico, seu domínio, imagem e período.

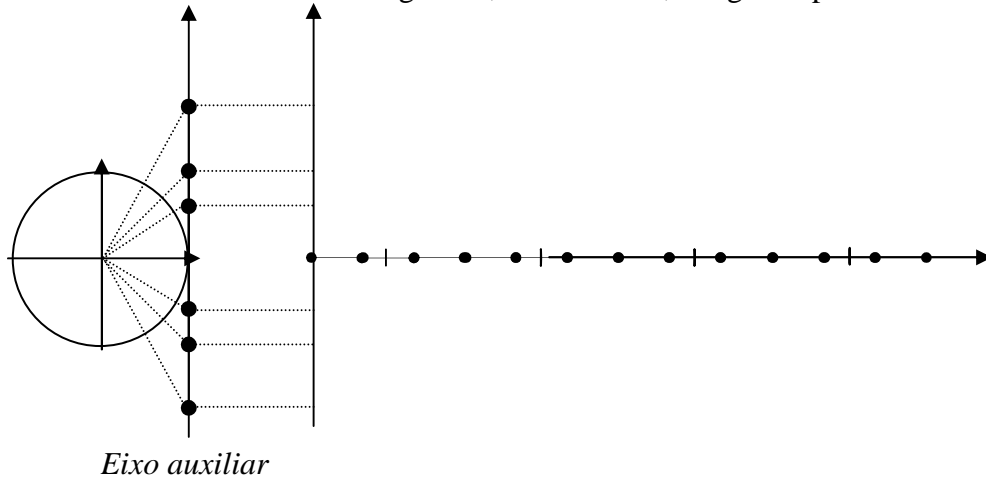
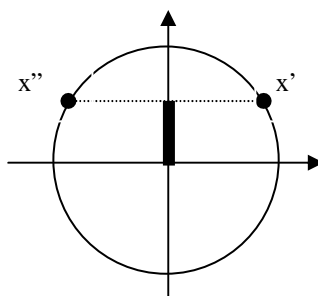


Figura de fundo

Observamos que os alunos construíram o gráfico da função tangente, identificaram a inexistência da imagem para os arcos $\pi/2$ e $3\pi/2$ observando a condição de paralelismos entre o eixo y e a localidade do segmento formado pelo prolongamento do raio desses arcos, entretanto apresentaram muita dificuldade na determinação algébrica de seu domínio para arcos de 0 até 2π e na formalização desse domínio para o intervalo real. Por se tratar de uma função com um comportamento diferenciado em relação às apresentadas anteriormente seno e cosseno, consideramos o ocorrido como uma situação normal e esperada devido as descontinuidade da função tangente. No entanto, tais dúvidas registradas foram minimizadas no momento da socialização.

Atividade 10 – Equações Trigonômétricas simples.

A atividade tem como objetivo fazer com que o aluno perceba as relações geométricas existentes entre as medidas dos segmentos formados no eixo y do plano cartesiano e as localizações finais dos respectivos arcos trigonométricos que definem os resultados de uma equação simples do tipo seno. O aluno através da observação e exploração na figura da circunferência trigonométrica, deve perceber que na equação $\operatorname{sen} x = a$ o segmento representado, neste momento por a , indica a posição dos arcos trigonométricos x' e x'' . Seja a figura representativa:



A atividade propõe também que o aluno relacione segmentos e arcos nas equações do tipo $\cos x = b$ e $\operatorname{tg} x = c$.

Na elaboração da atividade ampliamos gradativamente o intervalo de domínio de algumas equações. A tranquilidade no decorrer da aula e os resultados encontrados na análise documental indicam amplamente a facilidade e compreensão encontrada no desenvolvimento das questões. A generalização e a formalização das repostas das equações seno e cosseno atingiram os objetivos esperados para a atividade.

Quando pedimos aos alunos para determinarem a resposta da equação $\operatorname{tag} x = -\sqrt{3}/3$ no domínio real, todos responderam $5\pi/6 + k.2\pi$; $11\pi/6 + k.2\pi$. Apesar da resposta estar correta, nenhum aluno lembrou ou percebeu que o período da função original tangente é π , e a resposta poderia ser $5\pi/6 + k.\pi$.

Atividade 11 – Relação Trigonométrica Fundamental

Devido às dificuldades com relação ao tempo disponível do pesquisador, não aplicamos a atividade 11 com os alunos em sala de aula, mesmo assim, por se tratar de um conjunto de atividades baseados numa mesma linha didática e parte integrante de nosso trabalho, apresentamos a atividade no anexo dessa dissertação. Esta atividade tem o objetivo de fazer com que o aluno, através da visualização do triângulo retângulo construído dentro dos setores circulares formados pelo plano cartesiano e a circunferência trigonométrica, aplique o Teorema de Pitágoras e formalize a relação Trigonométrica Fundamental.

4.4.2 – Segunda etapa na avaliação da atividade – Professor colaborador.

A avaliação foi feita por análise do discurso através da observação da fala do professor colaborador, pela participação e seu envolvimento com a pesquisa e pelo preenchimento de um pequeno questionário para formalização de dados.

O questionário foi distribuído em três partes: a primeira é composta de sete perguntas relacionadas com o conceito de Trigonometria; a segunda é composta de sete perguntas relacionadas com o potencial da atividade sobre o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, a compreensão do texto, sintaxe e a metodologia aplicada; e a terceira parte é composta de cinco perguntas relacionadas com conteúdo ligado a atitude do aluno, sua participação, envolvimento, satisfação e significação da Matemática.

Como o questionário foi aplicado apenas para o professor colaborador não necessitamos da tabulação de dados. Vamos apresentar uma análise qualitativa das respostas encontradas. As perguntas e respostas apresentadas pelo professor sobre o conteúdo conceitual foram:

1. O conceito matemático de Trigonometria no ciclo trigonométrico é plenamente desenvolvido na elaboração das atividades? () Totalmente (X) Muito () As vezes () Nunca
2. O conceito matemático de funções trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente) são plenamente desenvolvidos na elaboração das atividades? (X) Totalmente () Muito () As vezes () Nunca
3. Você acha necessário o estudo das funções cotangente, cossecante e secante no ensino médio? () Totalmente () Muito (X) As vezes () Nunca
4. Você acha necessário o estudo das inequações trigonométricas no ensino médio? () Totalmente (X) Muito () As vezes () Nunca
5. Você acha necessário o estudo das transformações trigonométricas no ensino médio? (X) Totalmente () Muito () As vezes () Nunca
6. A seqüência de conteúdos proposta é adequada para o ensino de Trigonometria no ensino médio? () Totalmente (X) Muito () As vezes () Nunca
7. O conteúdo de Trigonometria desenvolvido nas atividades contempla as expectativas atuais do ensino para alunos do ensino médio? () Totalmente (X) Muito () As vezes () Nunca

Observe pelas respostas dadas pelo professor colaborador que tanto o conceito matemático de Trigonometria no ciclo trigonométrico e também as funções básicas são muito desenvolvidos com a seqüência das atividades, portanto, o conteúdo foi considerado satisfatório para o nível médio de ensino. Nas respostas apresentadas pelo professor

destacamos quando ele acha necessário o estudo das funções cotangente, secante, cossecante, as inequações trigonométricas e principalmente as transformações trigonométricas. Se analisarmos o conteúdo curricular de matemática desenvolvido em geral nas escolas do ensino médio no Brasil, veremos que, desses conteúdos destacados apenas as transformações trigonométricas têm uma aplicabilidade em algumas demonstrações em geometria analítica.

As perguntas e respostas apresentadas pelo professor colaborador sobre a proposta metodológica foram:

<p>8 – As atividades promovem a leitura de textos matemáticos? <input type="checkbox"/> Totalmente <input type="checkbox"/> Muito <input checked="" type="checkbox"/> As vezes <input type="checkbox"/> Nunca</p> <p>9 – Em sua opinião o aluno compreende os comandos na execução das atividades. <input type="checkbox"/> Totalmente <input checked="" type="checkbox"/> Muitas vezes <input type="checkbox"/> As vezes <input type="checkbox"/> Nunca</p> <p>10 - Você considera a interpretação geométrica da circunferência trigonométrica importante para o desenvolvimento das atividades? <input checked="" type="checkbox"/> Totalmente <input type="checkbox"/> Muito <input type="checkbox"/> As vezes <input type="checkbox"/> Nunca</p> <p>11 – Em sua opinião o aluno é levado a desenvolver estratégias matemáticas para solucionar as questões propostas das atividades? <input type="checkbox"/> Totalmente <input checked="" type="checkbox"/> Muito <input type="checkbox"/> As vezes <input type="checkbox"/> Nunca</p> <p>12 – As atividades proporcionam momentos de criação matemática? <input checked="" type="checkbox"/> Totalmente <input type="checkbox"/> Muito <input type="checkbox"/> As vezes <input type="checkbox"/> Nunca</p> <p>13 – Em sua opinião as atividades promovem o construtivismo no ensino de Trigonometria? <input checked="" type="checkbox"/> Totalmente <input type="checkbox"/> Muito <input type="checkbox"/> As vezes <input type="checkbox"/> Nunca</p> <p>14 – Em sua opinião existe inovação metodológica nas atividades propostas para o ensino de Trigonometria da educação básica? <input checked="" type="checkbox"/> Totalmente <input type="checkbox"/> Muito <input type="checkbox"/> As vezes <input type="checkbox"/> Nunca</p>

A análise feita dos alunos e pelo professor colaborador sobre a compreensão do texto e dos comandos na execução das atividades é pertinente com a nossa avaliação, exceto, no início de algumas atividades, já mencionado anteriormente, onde alguns alunos apresentaram muitas dúvidas sobre a leitura e interpretação sendo necessária a orientação do professor em sala de aula.

Na avaliação feita pelo professor colaborador, com relação à metodologia aplicada, observamos que a aceitação de nossa proposta foi muito boa. A interpretação geométrica, através da construção e visualização da circunferência trigonométrica, que foi proporcionada pelas atividades numa perspectiva investigativa, foi o diferencial na didática de ensino em nossa proposta metodológica.

Na última parte do questionário, as perguntas foram elaboradas a fim de obtermos um olhar diferenciado em relação ao do pesquisador nas questões referentes aos aspectos afetivos dos alunos, aos processos de aprendizagem de conteúdos matemáticos no contexto escolar. As

atividades e respostas apresentadas pelo professor colaborador sobre as atitudes e satisfação do aluno foram:

<p>15 – Ouve participação significativa da turma? <input type="checkbox"/> Totalmente <input checked="" type="checkbox"/> Muito <input type="checkbox"/> As vezes <input type="checkbox"/> Nunca</p> <p>16 – A dispersão dos alunos, durante o desenvolvimento das atividades, foi observada conforme o grau: <input type="checkbox"/> Alto <input checked="" type="checkbox"/> Médio <input type="checkbox"/> Pequeno <input type="checkbox"/> Nulo</p> <p>17 – As atividades lhe proporcionaram um grau de satisfação: <input checked="" type="checkbox"/> Alto <input type="checkbox"/> Médio <input type="checkbox"/> Pequeno <input type="checkbox"/> Nulo</p> <p>18 – Em sua opinião as atividades proporcionaram aos alunos um grau de satisfação: <input type="checkbox"/> Alto <input checked="" type="checkbox"/> Médio <input type="checkbox"/> Pequeno <input type="checkbox"/> Nulo</p> <p>19 - Em sua opinião as atividades proporcionaram aos alunos uma significação do conteúdo de Trigonometria em nível: <input type="checkbox"/> Alto <input checked="" type="checkbox"/> Médio <input type="checkbox"/> Pequeno <input type="checkbox"/> Nulo</p>

Analisando as respostas apresentadas pelo professor percebemos o bom nível de participação e envolvimento dos alunos no desenvolvimento das atividades. Pela nossa proposta didática para o ensino de Trigonometria, o aluno, usando meios empíricos, é participante ativo na criação de propriedades. As descobertas, sejam matemáticas ou não, aumentam a auto-estima do indivíduo e elevam o seu grau de satisfação.

Percebemos também a satisfação do professor colaborador, não somente pela resposta no questionário, mas também, através de suas falas. Observe duas de suas falas: “*com essa metodologia eu aprendi muito sobre Trigonometria, achei fantástico*” ou ainda “*você deve repassar esta proposta e as atividades para todos os professores de matemática do nosso grupo de trabalho*”. Analisando as falas e a resposta da pergunta 17 do questionário, percebemos o prazer do professor em participar de nossa pesquisa e a sua satisfação em descobrir uma metodologia alternativa para o ensino de Trigonometria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em várias atividades percebemos que as dificuldades apresentadas pelos alunos concentravam-se em sua parte inicial. Para (PONTE, 2003, p.26) o “arranque da aula é uma fase crítica, pois dela se encadeia todo o restante da atividade”. Embora as explicações sobre o desenvolvimento das questões encontrem-se, muitas vezes, explícitas no texto, necessitamos de uma introdução oral sempre que julgávamos um determinado item essencial para o desencadeamento dos demais itens da atividade. Destacamos, no conjunto de todas as atividades apresentadas, a de número 2 como fundamental para o desenvolvimento das demais. O tempo gasto na aplicação dessa atividade é recompensado na agilidade com o desenvolvimento das outras.

As atividades foram preparadas de acordo com os fundamentos metodológicos das concepções investigativas de Ponte (2003) e conforme teoria de integração de conteúdos de Zabala (1998), e estão vinculadas aos conceitos específicos da área, aos procedimentos utilizados através da resolução do algoritmo, do desenho, da formalização, e ainda proporcionam nos alunos as atitudes necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

Repensamos a prática de ensino de maneira que pudéssemos modificar a função do professor que, num primeiro momento, é rotulado como representante do saber acumulado e mero transmissor de informações, para aquele que acredita na possibilidade de ser um professor mediador e incentivador do processo aprendizagem. A mudança de atitudes didáticas e o rompimento de concepções desgastadas com o tempo foram pontos iniciais para o que propusemos neste trabalho, ou seja, o desenvolvimento de uma sequência didática alternativa para o ensino de Trigonometria aplicada à educação básica.

Observamos que a nossa intervenção no processo de ensino e aprendizagem em Trigonometria aconteceu por meio de instrumentos de referência no qual definimos como sendo as atividades elaboradas por nós, pesquisadores, e aplicadas na prática diária da sala de aula interligando a práxis de uma proposta didática.

O mecanismo de transposição aconteceu na elaboração de uma sequência de conteúdo e didática contendo atividades exploratórias e investigativas. As atividades elaboradas propuseram aos alunos a construção de desenhos por meio de descobertas guiadas e formaram imagens mentais que foram utilizadas como representação visual que sustentaram a construção de novos conceitos de Trigonometria. Essas construções geométricas iniciais utilizadas no desenvolvimento das atividades são consideradas simples, pois são noções de

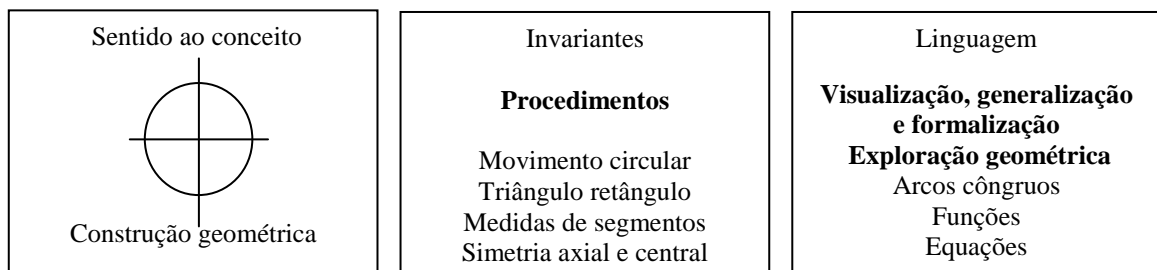
circunferência, retas paralelas e triângulo retângulo, ou seja, conteúdo já assimilado pelos alunos que cursam o ensino médio. É importante destacar que a geometria axiomática formalizada e dedutiva não se apresenta como base teórica para que o aluno desenvolva o seu estudo em Trigonometria em nossa proposta. É necessário que o aluno conheça conceitos fundamentais de Geometria Plana e que compreenda, de fato, sua utilização na formação dos novos conceitos trigonométricos.

Desta forma, nosso pressuposto foi apresentar um mecanismo de transposição onde houvesse a redução de algumas fórmulas utilizadas no conteúdo, e a valorização do ensino de Trigonometria através da interpretação e exploração geométrica do ciclo trigonométrico, de forma a permitir melhor compreensão das funções trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente) e de suas propriedades, sem que haja o comprometimento teórico do mesmo e amplie possibilidades de melhor fundamentação dos alunos com relação à significação e compreensão dos conceitos.

Com a melhora dos resultados de aprendizagem em trigonometria apresentados pelos alunos no decorrer do processo destacamos a importância em optar pela trabalho alternativo na aplicação de nossas atividades.

O aluno, ao construir a circunferência trigonométrica, relaciona o objeto estudado com outros conceitos e teorias, ou seja, ele, ao estabelecer sua imagem mental, compreende o significado da definição, cria um novo conceito matemático e, ainda, amplia as possibilidades para o desenvolvimento das propriedades relacionadas expandindo seu domínio cognitivo.

Baseando nas idéias de Vergnaud (1993), que também nos forneceu categorias teóricas de análise, construímos o esquema abaixo para ilustrar a nossa compreensão sobre a construção de conceitos em trigonometria.



O primeiro quadro mostra a construção geométrica da circunferência trigonométrica. Essa representação simbólica que utiliza principalmente a circunferência e o plano cartesiano induz uma combinação de situações que ilustra as idéias gerais do conceito matemático de

Trigonometria na circunferência, e, também, representa uma plataforma suporte para base de ampliação de possibilidades no estudo de suas propriedades.

O segundo quadro estabelece as propriedades utilizadas para a construção da circunferência trigonométrica. São regras procedimentais e situações prévias necessárias para criação de definições. No decorrer do desenvolvimento da atividade o aluno é levado a uma ação sobre o objeto, e utiliza de seus esquemas e conceitos anteriores para verificar o que varia e como varia no funcionamento de um ciclo trigonométrico.

O terceiro quadro mostra a necessidade da visualização geométrica para a compreensão e, conseqüentemente, comunicação e registro, em uma linguagem específica, das definições e propriedades. Através da exploração da figura da circunferência, criamos as generalizações que possibilitam a significação formal dos conceitos em Trigonometria.

A análise da aplicação das atividades no campo de pesquisa serve para avaliação e adequação do material didático na perspectiva de melhorar a eficácia da nossa proposta didática. Após análise e avaliação, revisamos algumas das atividades e reimprimimos todo o material finalizando nossa pesquisa. Todas as atividades encontram-se em anexo no final desta dissertação.

O trabalho de elaboração das atividades foi desenvolvido, num primeiro momento, focalizando a aprendizagem do aluno, entretanto, em sua aplicação destacamos a importância da realização do trabalho colaborativo entre o pesquisador e o professor colaborador por meio dos diálogos e que foi fundamental para lapidação das atividades. Dessa forma foi possível vivenciar novas experiências na prática de ensino, minimizar as incertezas, pavimentar novos caminhos e possibilidades, reforçar o sucesso e, principalmente, proporcionar o crescimento profissional.

Infelizmente o ensino médio no Brasil é tratado como uma passagem do ensino fundamental para o superior, pois, na prática, todo trabalho é voltado para o vestibular. Em nossa dissertação mostramos um trabalho alternativo para o Ensino de Trigonometria na educação básica, portanto perguntamos: é possível desenvolver atividades alternativas em outros conteúdos do ensino médio criando sua identidade enquanto nível de ensino/aprendizagem?

Nós, educadores matemáticos, devemos realmente repensar, não apenas sobre a nossa prática pedagógica e metodologias de ensino, mas também os conteúdos que transmitimos e sua importância no desenvolvimento mental do aluno assim como sua inserção no mundo atual.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Lioila. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BRITO, Arlete de Jesus; MOREY, Bernadete Barbosa. **Trigonometria: dificuldade dos professores de matemática do ensino fundamental**. Bragança Paulista: Horizontes, v22, n.1, p.65-70, 2004.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, 1999.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Orientações Educacionais complementares. Linguagens, códigos e suas tecnologias (PCN+)**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 244p.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 2ª ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e aplicações**. Volumes 1 e 2. Edição reformulada. São Paulo: Ática, 2003.

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa**. 6ª ed. Campinas: Autores Associados, 2003.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. V.3. São Paulo: Atual, 1992.

FALCÃO, Jorge Tarcísio da Rocha. **Psicologia da Educação Matemática: uma introdução**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

FIorentini, Dario; Lorenzato, Sérgio. **Investigação em educação matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

Giovanni, J; Bonjorno, J. **Matemática. Uma nova abordagem**. Volume 1, versão Trigonometria. São Paulo: FTD, 2000.

Iessi, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Volume 3, Trigonometria. São Paulo: Atual, 2004.

Inhelder, B; Piaget, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Pioneira, 1976.

Lakatos, Eva Maria. **Metodologia do trabalho científico: procedimentos básicos, pesquisa bibliográfica, projeto e relatório, publicações e trabalhos científicos**. São Paulo: Atlas, 2001.

Lüdke, Menga; André, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

País, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Pires, Célia Maria Corolino. **Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede**. São Paulo: FTD, 2000.

Ponte, João Pedro da; Brocardo, Joana; Oliveira, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

Robert, E. Moyer; Frank, Ayres Jr. **Trigonometria**. 3ª edição. Coleção Schaum. Porto Alegre: Bookman, 2003.

Sánchez Huete, Juan Carlos; Bravo, José A. Fernández. **O ensino da matemática, fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SANTOS, Fabiano José dos; FERREIRA, Silvimar Fábio. **Atividades de laboratório: cálculo diferencial e integral I, LABCAL**. Belo Horizonte: Fumarc, 2005.

SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria I. **Matemática - Ensino Médio**. São Paulo: Editora Saraiva, 2003.

VERGNAUD, Gérard. **Teoria dos campos conceituais**. Seminário Internacional de Educação Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro: Anais, p.1-26, 1993.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.