

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática

Área de Concentração Matemática

Kátia Aquino Santos

**CONSTRUINDO SIGNIFICADOS PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS  
UTILIZANDO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Belo Horizonte

2018

Kátia Aquino Santos

**CONSTRUINDO SIGNIFICADOS PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS  
UTILIZANDO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Dra. Eliane Scheid Gazire

Belo Horizonte

2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

S237c	<p data-bbox="446 1288 1345 1422">Santos, Kátia Aquino Construindo significados para o teorema de pitágoras utilizando resolução de problemas / Kátia Aquino Santos. Belo Horizonte, 2018. 148 f.: il.</p> <p data-bbox="446 1444 1345 1534">Orientadora: Eliane Scheid Gazire Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática</p> <p data-bbox="446 1590 1345 1758">1. Pitágoras, Teorema de. 2. Ensino fundamental - Pesquisa - Minas Gerais. 3. Geometria - Estudo e ensino. 4. Transformações(Matемática). 5. Geometria plana - Problemas, questões, exercícios. I. Gazire, Eliane Scheid. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.</p> <p data-bbox="702 1780 973 1814">SIB PUC MINAS</p> <p data-bbox="1165 1803 1345 1839">CDU: 513:373</p>
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Fernanda Paim Brito - CRB 6/2999

Kátia Aquino Santos

**CONSTRUINDO SIGNIFICADOS PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS  
UTILIZANDO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Dra. Eliane Scheid Gazire

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Eliane Scheid Gazire (Orientadora) – PUC Minas

---

Dr. Dimas Felipe de Miranda – PUC Minas

---

Dra. Tânia Fernandes Bogutchi

Belo Horizonte, 29 de agosto de 2018

*Dedico este trabalho:*

*À minha filha Ana Luísa, minha maior fonte de inspiração.*

*Ao meu marido, Fernando, que com sua tranquilidade e paciência me acalmou em todos os momentos de necessidade.*

*Aos meus pais Élio e Arlete, e à minha irmã Cássia, que de forma incansável me incentivaram a persistir até o final.*

## AGRADECIMENTOS

À Deus, que me carregou no colo nos momentos difíceis.

Ao meu marido, Fernando, pelo companheirismo, paciência, palavras de incentivo, apoio, compreensão pelos momentos de ausência em função deste trabalho, e amor incondicional.

Aos meus pais, Élio e Arlete, exemplo de luta e perseverança. A eles devo tudo que sou.

À minha irmã Cássia, pelo apoio e incentivo.

À minha prima Letícia, por me acolher em sua casa.

Aos colegas de curso, pela troca de experiências.

Aos professores do curso, pelos ensinamentos e por proporcionarem grandes momentos de reflexões.

À professora Eliane Sheid Gazire, pela orientação e sabedoria.

Aos meus alunos do 9º ano, turma 4, que participaram da pesquisa, pelas discussões e troca de conhecimentos.

À todos que torceram por mim e que, de alguma forma, contribuíram e participaram desta conquista.

Muito obrigada!

## RESUMO

O presente estudo abordou como tema principal o estudo do Teorema de Pitágoras por meio da investigação matemática e resolução de problemas. Seu principal objetivo foi analisar se é possível promover uma aprendizagem significativa do Teorema de Pitágoras utilizando diferentes metodologias que enfatizam o uso de materiais concretos e recursos tecnológicos. Também foi objeto de estudo investigar como essas metodologias podem contribuir para uma efetiva aprendizagem do teorema. A pesquisa foi desenvolvida em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola estadual da cidade de Araújos-MG, composta de 24 alunos. Nessa turma foi aplicada uma sequência de atividades para a demonstração e aplicação do Teorema de Pitágoras. Após a análise das atividades desenvolvidas, pode-se concluir que a utilização das metodologias de investigação matemática e resolução de problemas contribuiu significativamente no ensino-aprendizagem do conteúdo abordado e possibilitou a produção de novos conhecimentos.

**Palavras-chave:** Resolução de problemas; investigação matemática; Teorema de Pitágoras

## **ABSTRACT**

The present study focused on the study of the Pythagorean Theorem through mathematical investigation and problem solving. Its main objective was to analyze if it is possible to promote a significant learning of the Pythagorean Theorem using different methodologies that emphasize the use of concrete materials and technological resources. It was also object of study to investigate how these methodologies can contribute to an effective learning of the theorem. The research was carried out in a 9th grade class of Elementary School, from a state school in the city of Araújios-MG, composed of 24 students. In this class a sequence of activities was applied for the demonstration and application of the Pythagorean Theorem. After analyzing the activities developed, it can be concluded that the use of mathematical research methodologies and problem solving contributed significantly to the teaching-learning of the content addressed and enabled the production of new knowledge.

**Keywords:** Problem solving; mathematical research; Pythagorean theorem

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Demonstração do Teorema de Pitágoras por decomposição extraída de Eves (2004, p. 103).....	16
Figura 2: Pitágoras (Coleção David Smith) (EVES, 2004, p.98).....	18
Figura 3: Tábula Plimpton 322 (EVES, 2004, p. 65).....	19
Figura 4: Ternos pitagóricos retirados da tábula Plimpton 322 (EVES, 2004, p. 65).....	19
Figura 5: Primeiro passo da demonstração de IMENES (1988, p. 43).....	21
Figura 6: Segundo passo da demonstração de IMENES (1988, p. 43).....	21
Figura 7: Terceiro passo da demonstração de IMENES (1988, p. 43).....	22
Figura 8: Quarto passo da demonstração de IMENES (1988, p. 43).....	23
Figura 9: Conclusão da primeira parte da demonstração de IMENES (1988, p. 43).....	23
Figura 10: Quinto passo da demonstração de IMENES (1988, p. 43).....	23
Figura 11: Conclusão da demonstração de IMENES (1988, p. 43).....	24
Figura 12: Triângulo retângulo com medidas necessárias para a demonstração do Teorema .	24
Figura 13: Quadrado formado por quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado menor.....	26
Figura 14: Trapézio utilizado na demonstração de Garfield.....	26
Figura 15: Primeiro passo da atividade 2.....	42
Figura 16: Segundo passo da atividade 2.....	42
Figura 17: Terceiro passo da atividade 2.....	43
Figura 18: Triângulo obtusângulo.....	43
Figura 19: Quebra-cabeça para o desenvolvimento da atividade 3.....	47
Figura 20: Quebra-cabeça para o desenvolvimento da atividade 4.....	49
Figura 21: Triângulos retângulos congruentes para a demonstração de Bháskara.....	55
Figura 22: Quadrado obtido a partir de 4 triângulos retângulos congruentes.....	56
Figura 23: Quadrado formado por quatro triângulos retângulos congruentes.....	57
Figura 24: Triângulo retângulo para a demonstração do Teorema de Pitágoras pela semelhança de triângulos.....	63
Figura 25: Triângulo retângulo.....	63
Figura 26: Tela inicial do Geogebra.....	68
Figura 27: Opção polígono no GeoGebra.....	69
Figura 28: Triângulo retângulo construído no GeoGebra.....	70
Figura 29: Opção para a tela de geometria no GeoGebra.....	71
Figura 30: Tela de geometria no GeoGebra.....	72
Figura 31: Opção para a construção de polígonos regulares.....	73
Figura 32: Como construir um polígono regular.....	74
Figura 33: Triângulo retângulo com triângulos regulares sobre seus lados.....	75
Figura 34: Triângulo regular sobre o triângulo retângulo.....	76
Figura 35: Opção de reflexão de um ponto em relação a uma reta no GeoGebra.....	77
Figura 36: Ponto refletido sobre uma reta.....	78
Figura 37: Opção polígono no GeoGebra.....	79
Figura 38: Triângulo equilátero desenhado sobre o ponto refletido.....	80
Figura 39: Como excluir objetos desenhados no GeoGebra.....	81
Figura 40: Figura obtida após excluir os objetos não necessários.....	82
Figura 41: Como obter a área de um polígono desenhado no GeoGebra.....	83

Figura 42: Áreas dos triângulos equiláteros desenhados sobre os lados do triângulo retângulo .....	84
Figura 43: Primeiro slide exibido sobre Pitágoras .....	102
Figura 44: Segundo slide exibido sobre Pitágoras .....	102
Figura 45: Terceiro slide exibido sobre Pitágoras .....	103
Figura 46: Quarto slide exibido sobre Pitágoras .....	103
Figura 47: Quinto slide exibido sobre Pitágoras .....	104
Figura 48: Sexto slide exibido sobre Pitágoras .....	104

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Atividades desenvolvidas para a demonstração do Teorema de Pitágoras .....	36
Quadro 2: Atividades desenvolvidas com aplicações do Teorema de Pitágoras.....	37
Quadro 3: Atividade 1 .....	40
Quadro 4: Atividade 2 .....	41
Quadro 5: Questões referentes à atividade 2 .....	44
Quadro 6: Continuação das questões referentes à atividade 2.....	44
Quadro 7: Atividade 3 .....	47
Quadro 8: Atividade 4 .....	47
Quadro 9: Questões referentes às atividades 3 e 4 .....	49
Quadro 10: Atividade 5 .....	55
Quadro 11: Questões referentes à atividade 5 .....	57
Quadro 12: Atividade 6 .....	62
Quadro 13: Questões referentes à atividade 6 .....	63
Quadro 14: Atividade 7 .....	67
Quadro 15: Atividade 1 de aplicação do Teorema de Pitágoras.....	85
Quadro 16: Atividade 2 de aplicação do Teorema de Pitágoras.....	89
Quadro 17: Atividade 3 de aplicação do Teorema de Pitágoras.....	91
Quadro 18: Atividade 4 de aplicação do Teorema de Pitágoras.....	92
Quadro 19: Atividade 5 de aplicação do Teorema de Pitágoras.....	93

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2. O TEOREMA DE PITÁGORAS .....</b>	<b>16</b>
2.1. UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA E VIDA DE PITÁGORAS .....	17
2.2. PLIMPTON 322 .....	18
2.3. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS .....	20
2.3.1. DEMONSTRAÇÃO 1.....	20
2.3.2. DEMONSTRAÇÃO 2 – SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS .....	24
2.3.3. DEMONSTRAÇÃO 3 – BHÁSKARA.....	25
2.3.4. DEMONSTRAÇÃO 4 – GARFIELD.....	26
2.4. O TEOREMA DE PITÁGORAS NA SALA DE AULA.....	27
2.5. PROPOSTA DE ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS UTILIZANDO A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS .....	28
<b>3. A PESQUISA .....</b>	<b>30</b>
3.1. TRAJETÓRIA .....	30
3.2. LOCAL E SUJEITOS DA PESQUISA.....	31
3.3. INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	32
3.4. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS .....	35
<b>4. DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....</b>	<b>39</b>
4.1. APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PARA A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS .....	40
4.1.1. ATIVIDADE 1 .....	40
4.1.2. ATIVIDADE 2.....	41
4.1.3. ATIVIDADES 3 E 4 .....	47
4.1.4. ATIVIDADE 5.....	55
4.1.5. ATIVIDADE 6.....	62
4.1.6. ATIVIDADE 7.....	67
4.2. APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS COM APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS .....	85
4.2.1. ATIVIDADE 1 .....	85
4.2.2. ATIVIDADE 2.....	89
4.2.3. ATIVIDADE 3.....	91
4.2.4. ATIVIDADE 4.....	92
4.2.5. ATIVIDADE 5.....	93
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>97</b>