



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

681.3.055  
M188m

Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior

# **METODOLOGIA PARA O ENSINO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NOS CURSOS DE GRADUAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica, elaborada sob a orientação do Prof. Dr. Mário Fabiano Alves e co-orientação do Prof. Dr. Jaime Arturo Ramírez

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais  
Belo Horizonte  
2001

# SUMÁRIO

DEDICATÓRIA .....	IV
AGRADECIMENTO AOS ORIENTADORES .....	V
AGRADECIMENTO .....	VI
SUMÁRIO .....	VII
RESUMO .....	X
ABSTRACT .....	XI
LISTA DE FIGURAS .....	XII
LISTA DE TABELAS .....	XIV
SIGLAS E ACRÔNIMOS .....	XIV
1. INTRODUÇÃO .....	15
1.1. Introdução .....	15
1.2. Relevância .....	19
1.3. Visão Histórica .....	25
1.4. Escopo .....	31
1.5. Objetivos .....	33
1.5.1. Objetivos Específicos .....	34
1.6. Metodologia .....	35
1.7. Contribuição .....	37
1.8. Revisão Bibliográficas .....	38
1.9. Conclusão .....	41
2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	42
2.1. Introdução .....	42
2.2. Princípios do Método dos Elementos Finitos .....	42
2.3. Formulação Forte ou Clássica .....	44
2.4. Formulação Fraca ou Variacional .....	45
2.5. Equivalência entre as Formas Forte e Fraca .....	47
2.6. Condições de Contorno Naturais .....	50
2.7. Método de Aproximação de Galerkin .....	52
2.8. As Equações Matriciais – A Matriz de Rigidez K .....	55
2.9. O Espaço “Piecewise” Linear .....	60
2.10. Propriedades da Matriz K .....	64
2.11. O MEF do Ponto de Vista do Elemento – Coordenadas Locais e Globais .....	67
2.12. A Matriz de Rigidez e o Vetor Independente de um Elemento Genérico .....	71
2.13. A Montagem da Matriz Global de Rigidez e do Vetor Independente .....	74
2.14. A Resolução do Sistema de Equações .....	76
2.15. Consideração Finais .....	78

3. EXEMPLIFICAÇÃO DA TÉCNICA DE ENSINO PROPOSTA .....	79
3.1. Introdução .....	79
3.2. Método das Diferenças Finitas .....	79
3.3. Método dos Elementos Finitos .....	98
3.3.1. Visão Geral .....	101
3.3.1.1. Discretização (Pré-Processamento) .....	101
3.3.1.2. Equações dos Elementos (Processamento) .....	103
3.3.1.3. Montagem (Processamento) .....	107
3.3.1.4. Condições de Contorno e Iniciais (Processamento) .....	108
3.3.1.5. Solução (Processamento) .....	108
3.3.1.6. Apresentação dos Resultados (Pós-Processamento) .....	109
3.3.2. Exemplo da Temperatura de Equilíbrio .....	109
3.3.3. Problema Bidimensional .....	110
3.3.3.1. Discretização .....	110
3.3.3.2. Equações dos Elementos .....	111
3.3.3.3. Ajuste Ótimo da Função de Aproximação .....	114
3.3.3.4. Condições de Contorno e Montagem .....	119
3.3.3.5. Solução e Apresentação do Resultado (Pos-Processamento) .....	125
3.3.3.6. Comparação com a Solução pelo MDF .....	125
3.4. Conclusão .....	126
4. TÉCNICA DE ENSINO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	127
4.1. Introdução .....	127
4.2. Técnica Proposta .....	127
4.3. Outros Métodos de Ensino .....	135
4.3.1. Método de Ensino Tradicional .....	136
4.3.2. Método de Ensino Aplicativa ou Especialista .....	138
4.3.3. Método de Ensino Progressiva ou de Refinamentos .....	139
4.3.4. Método de Ensino de Pesquisa .....	140
4.3.5. Método de Ensino de Desenvolvimento Único .....	140
4.4. Proposta para Avaliação do Conhecimento Adquirido .....	141
4.5. Conclusão .....	143
5. O ENSINO ATUAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	145
5.1. Introdução .....	145
5.2. Análise do Programa de Método dos Elementos Finitos ...	148
5.3. Carga Horária Utilizada Nos Cursos de Graduação .....	152
5.4. O Momento para Apresentar o MEF .....	153

5.5. Utilização e Implementação do MEF pelo Aluno .....	155
5.6. Conclusões sobre o Ensino Atual do MEF na Graduação .....	158
CONCLUSÃO .....	159
BIBLIOGRAFIA .....	163
<b>APÊNDICE A. AJUSTE ÓTIMO DA FUNÇÃO DE APROXIMAÇÃO EM UMA DIMENSÃO.....</b>	<b>170</b>
A.1. Solução de Elementos Finitos para Molas em Séries .....	170
A.2. Exemplo de uma Haste Sendo Aquecida .....	176
A.3. Discretização .....	179
A.4. Equações dos Elementos .....	179
A.5. A Aproximação Direta .....	180
A.6. O Método dos Resíduos Ponderados .....	185
A.7. Esquemas Alternativos de Resíduos para os Métodos dos Resíduos Ponderados .....	191
A.8. Montagem .....	193
A.9. Condições de Contorno .....	195
A.10. Solução .....	195
A.11. Apresentação dos Resultados (Pós-Processamento).....	195
<b>APÊNDICE B. APLICAÇÕES DO MEF NA ENGENHARIA ELÉTRICA .....</b>	<b>197</b>
B.1. Introdução.....	197
B.2. Eletrostática .....	199
B.3. Campo de Correntes Estacionárias – Eletrocinética.....	208
B.4. Magnetostática .....	209
<b>APÊNDICE C. PACOTES COMPUTACIONAIS .....</b>	<b>214</b>
C.1. Pacotes Computacionais .....	214

## RESUMO

A presente dissertação: *Metodologia para o Ensino do Método dos Elementos Finitos nos Cursos de Graduação*, está voltada para a pesquisa de técnicas de ensino do Método dos Elementos Finitos (MEF) nos cursos de Graduação em Engenharia.

Este estudo técnico-científico apresenta formas de ensinar MEF nos cursos de graduação em Engenharia. Propõe uma nova técnica de ensino, baseada na aproximação da matemática necessária e ao seu uso de uma maneira elementar. Os princípios da metodologia proposta seguem:

- focar o MEF segundo uma abordagem de análise numérica, enfatizando e destacando conceitos e princípios dos métodos numéricos e do cálculo numérico;
- dar ênfase inicial à teoria matemática básica do MEF, para sua utilização, principalmente, na etapa de ajuste ótimo da função de aproximação;
- promover uma passagem, sucessivas vezes, pelo MEF, e a cada vez, introduzir, gradativamente, novos aspectos, aumentando, passo a passo, os conhecimentos do estudante. A idéia é ir refinando e detalhando o MEF, sem deixar o aluno perder a visão do todo;
- dividir o seu conteúdo em etapas muito bem definidas, além de sugerir novas divisões como, por exemplo, a dimensional, dividindo-o em aplicações de uma, duas e três dimensões espaciais e etc. A idéia é dividir para facilitar seu aprendizado;
- usar extensivamente os exemplos, onde, após um pequeno avanço na teoria, esta é exemplificada imediatamente antes do próximo passo teórico.

O trabalho apresenta duas conclusões: primeira, que é importante desenvolver métodos eficientes para ensinar MEF nos cursos de graduação em Engenharia, e em segundo, que o MEF representa um avanço importante na ementas das disciplinas como a análise numérica, o cálculo numérico e métodos numéricos em cursos de graduação.