PUC Minas
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Campus Coração Eucarístico

Wander Moraes da Silva Júnior

FRAÇÕES E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS EM ALGUNS MATERIAIS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Belo Horizonte - MG
2020

Wander Moraes da Silva Júnior

FRAÇÕES E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS EM ALGUNS MATERIAIS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Dra. Elenice de Souza Lodron Zuin

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Belo Horizonte/MG
2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Silva Júnior, Wander Moraes da
S586f Frações e seus diferentes significados em alguns materiais didáticos de matemática / Wander Moraes da Silva Júnior. Belo Horizonte, 2020.
109, 60, f. : il.

Orientadora: Elenice de Souza Lodron Zuin
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino - Problemas, questões, exercícios. 3. Livros didáticos - Avaliação. 4. Multiplicação - Estudo e ensino (Ensino fundamental). 5. Frações - Estudo e ensino. 6. Material didático. I. Zuin, Elenice de Souza Lodron. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 51:37.02
Ficha catalográfica elaborada por Fernanda Paim Brito - CRB 6/2999

Wander Moraes da Silva Júnior

FRAÇÕES E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS EM ALGUNS MATERIAIS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Prof[a]. Dr.[a] Elenice de Souza Lodron Zuin – PUC Minas (Orientadora)

Prof. Dr. Saulo Furletti – IFMG (Banca Examinadora)

Prof. Dr. Romanelli Lodron Zuim – PUC Minas (Banca Examinadora)

Belo Horizonte 21 de Outubro de 2020

"Não se mede o valor de um homem pelas suas roupas ou pelos bens que possui, o verdadeiro valor do homem é o seu caráter, suas ideias e a nobreza dos seus ideais".

Charles Chaplin

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que me deu saúde, persistência e ânimo em momentos difíceis desse trabalho de dissertação; às pessoas que me ajudaram, participando diretamente (como minha orientadora), ou não (como meusirmãos, filhos e amigos) a concluir essa tarefa.

RESUMO

Esta dissertação retrata a pesquisa desenvolvida a partir de cinco significados de fração, quais sejam: *número, parte-todo*, *operador multiplicativo*, *quociente* e *medida.* O nosso principal aporte teórico está ancorado nas definições de Kieren (1976) e Campos, Magina e Nunes (2006). Os objetivos se centraram na apresentação dos significados e na análise de livros didáticos e paradidáticos de Matemática, buscando verificar quais significados de fração são abordados pelos autores. A análise de cunho qualitativo se centrou, principalmente, em categorias relativas aos aspectos didático-metodológicos, aos recursos visuais e à abordagem histórica sobre frações. Como produto educacional, foi elaborado um guia para a formação docente no âmbito inicial e continuada, guia este também endereçado aos professores que atuam, de for- ma efetiva no dia a dia, com a temática circunscrita e desenvolvida na presente dissertação.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Fundamental; Significados de Fração

ABSTRACT

This Dissertation portrays the research developed from five meanings of fraction, namely: *number, part-whole, multiplicative operator, quotient and measure.* Our main theoretical frame- work is based on the definitions of Kieren (1976) and Campos, Magina e Nunes (2006). The objectives were centered on the presentation of meanings and analysis of textbooks and paradidactic books, seeking to verify which meanings of fraction are present in them. The qualitavive analysis focused on categories related to didactic-methodological aspects, visual resources and the historical approach to fractions. As an educational product, a guide for teachers training as developed in the initial and continuing scope. This guide also addressed to teachers who work effectively in daily live, with the circumscribed theme developed in this dissertation.

Key words: Mathematical Education; Elementary School; Fraction Meanings

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

MEC - Ministério de Educação e Cultura

TCC - Teoria dos Campos Conceituais

SAEB - Sistema Nacionalde Avaliação da Educação Básica

PNE - Plano Nacional de Educação

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um pouco da minha trajetória como estudante e profissional

Na minha adolescência como estudante, eu só gostava de Matemática. Era a única matéria que eu aprendia dentro de sala, graças a um bom professor (Kamei, descendente de japoneses) que a lecionava com calma e paciência, reforçando com os exercícios de "para casa". As demais matérias, eu não conseguia aprender o suficiente nas aulas exigindo muita dedicação extra-classe, tomando, dessa maneira, meu tempo de brincar na rua, irritando-me profundamente. Estudava e passava de ano com muito sacrifício e pressão da minha mãe (ainda bem, porque priorizava as brincadeiras do que os estudos). Eu gostava muito é de jogar bola, soltar papagaio na rua (nessa época os entretenimentos eram basicamente fora de casa) brincar de pegador, pique esconde, quase um menino maluquinho.

Aos 16 anos, no 3º ano do Ensino Médio, mudei para um colégio que tinha os mesmos professores do pré-vestibular. Profissionais experientes, rápidos e conteudistas ao extremo.Essa série era integrada, isto é, além do conteúdo específico do 3º ano,também havia umarevisão de grande parte dos tópicos dos ensinos fundamental e médio. A minha defasagem em Matemática, principalmente em geometria, era enorme. Consegui superar essa lacuna com muito esforço e ajuda de um tio, engenheiro arquiteto, que morava perto da minha casa. Ele foi um bom aluno, quando estudante, gostava de geometria e sabia ensinar; estudei e aprendi muito com ele.

Em 1982, passei no vestibular para Engenharia Civil. No 5º ano do curso, durante o estágio em obra residencial, percebi que a engenharia não era, para mim, o que esperava de uma profissão. Na trajetória do curso, no último ano, conclui que gostava mais das matérias teóricas que se relacionavam com a Matemática, como cálculos, integral e vetorial, álgebras, geometria descritiva e outras. Finalizei o curso e, depois de algumas tentativas frustradas, em concursos na área do direito (fiscal), passei a lecionar Matemática em curso livre, pré-vestibular e preparatório para o CEFET[1]. Após essa experiência, constatei que a minha trajetória profissional seria traçada na sala de aula. Ao lecionar em colégio, senti a necessidade de ter um conhecimento mais específico com maior amplitude que pudesse me dar mais confiança, principalmente no viés da pedagogia e didática, conhecimentos cruciais na profissão que havia escolhido.

Em 1995,ingressei no curso de licenciatura em Matemática, lecionando em colégios particulares, simultaneamente ao desenvolvimento da graduação. Atuei profissionalmente em todas as séries do fundamental e médio. Naquele colégio no qual aprendi a gostar de Matemática com o pro-

---

[1] CEFET MG - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

fessor Kamei, eu retornava, agora, como professor, vinte anos depois.No período de 2000 a 2004, integrei uma grande equipe de profissionais bem qualificados. Interagi e aprendi com professoresde diversas áreas. Historiadores, filósofos, pedagogos e diretores, contribuíram de maneira substantiva no meu perfil profissional.

Em uma determinada época da minha profissão, lecionei durante uns dez anos no 3º ano do Ensino Médio de um colégio particular, das Clarissas Franciscanas. Esse conhecimento, que adquiri nesse período, me auxiliou na aprovação em dois concursos como professor na área da educação, assegurando-me uma renda suficiente para aprofundar nos estudos fazendo essa pós-graduação.

Após alguns anos dentro da sala de aula, a inquietude de saber mais, preocupar com a didática e como ensinar, me levou a procurar o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, oferecido pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

Essa pós-graduação joga por terra muitos conceitos que adquiri ao longo da minha graduação e profissão, tais como:

- o tradicionalismo como forma ideal de aprendizagem e transmissão deconteúdo;
- o conhecimento que, muitas vezes, achamos que temos baseando-nos apenas nos livros didáticos;
- a grande e ingênua confiança nos livros didáticos que aparentam ser eficientes e completos em diversositens;
- as informações, adquiridas nessa extensão, vêm nos mostrar estratégias de como ensinar sem ser tradicional, mesmo sendo aluno de professores que sempre atuaram nessavertente.

Essa extensão nos proporciona algumas reflexões a saber: como somos carentes de conhecimentos que, em geral, não encontramos nos textos didáticos;quais os livros didáticos que são considerados bons e o porquê disso. Como analisar esses materiais pedagógicos com um olhar mais crítico e menos ingênuo.

O porquê desse trabalho

Este trabalho nasceu da minha percepção das dificuldades em relação ao conteúdo de fração (representação dos números racionais), apresentada tanto entre estudantes (do Ensino Fundamental e Médio), quanto entre professores (matemáticos e pedagogos). Esses profissionais, que compõem o corpo docente de uma escola, também apresentam sérias dificuldades na abordagem desse conteúdo. E surge a pergunta: como tratar os tópicos de maneira eficiente e simples (usando a linguagem dos alunos), abrangente, sem perder os conceitos relevantes relacionados ao tema que possam contribuir para o corpo discente desenvolver uma aprendizagemsignificativa?

Cabe, nesse momento, uma descrição do que vem a ser uma aprendizagem significativa termo que será utilizado no desenvolver desse texto. Para muitos autores e professores toda aprendizagem ou conhecimento é significativo.

Para Pelizzari *et. al*. (2002), a teoria da aprendizagem de David Ausubel[2] tem como foco valorizar os conhecimentos prévios, de modo que lhes seja possível construir estruturas mentais, descobrindo e redescobrindo outros conhecimentos.

> A aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado àsestruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio. Ao contrário, ela se torna mecânica ou repetitiva, uma vez que se produziu menos essa incorporação e atribuição de significado, e o novo conteúdo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva.
>
> A noção de aprendizagem significativa, definida dessa maneira, torna-se nesse momento o eixo central da teoria de Ausubel. Efetivamente, a aprendizagem significativa tem vantagens notáveis, tanto do ponto de vista do enriquecimento da estrutura cognitiva do aluno como do ponto de vista da lembrança posterior e da utilização para experimentar novas aprendizagens, fatores que a delimitam como sendo a aprendizagem mais adequada para ser promovida entre os alunos. (PELIZZARI *et al.*, 2002, p. 38).

Aprendizagem significativa, nesse contexto, se ancora no que o aluno possa apropriar-se no campo do seu saber ampliando ou modificando os conhecimentos que já absorvidos anteriormente. Naturalmente, dentro do que Ausubel defente, para que um aluno incorpore alguma informação, ele deverá ter um conhecimento prévio adequado, permitindo que esse conjunto de dados possa ser agregado no seu campo cognitivo. Sem acionar os conhecimentos prévios, a aprendizagem se torna mecânica e, então, não será significativa.

Nessa perspectiva, cabe ao professor aferir (através de perguntas, exercícios, testes e outros métodos) se esse conhecimento prévio, citado pelo autor, faz parte das estruturas cognitivas que os alunos possuem para incorporar as novas informações no seu campo de conhecimento, proporcionando, assim, uma amplitude na sua aprendizagem.

Não podemos deixar de realçar a importância do "professor", elemento substancial, imprescindível nesse processo de aprendizagem. Este profissional deverá ter, naturalmente,um bom conhecimento dos temas que serão explanados para os alunos.

Nessa perspectiva, Beatriz D`Ambrosio (2005, p. 20) elucida no seu artigo "*Conteúdo e metodologia na formação de professores*":

> A determinação do conteúdo necessário para obter o melhor desempenho dos professores, talvez seja a maior dificuldade inerente à formação desses profissionais. Percebe-se que uma das grandes dificuldades, na avaliação da sua eficácia,é a falta de compreensão do conteúdo matemático. "Por outro lado, está claro que mais cursos tradicionais de matemáti- ca têm pouco efeito em seu nível de compreensão". (D`AMBROSIO *apud* CANOVA, 2006, p. 55).

[2] [2]David Paul Ausubel (1918-2008) foi um psicólogo e pedagogo norte-americano que contribuiu para os campos da Psicologia Educacional e Ciências Cognitivas.

Algumas perguntas que se fazem presentes são: Os professores possuem um conhecimento satisfatório de frações que vão além do ***"parte-todo"***? Os livros paradidáticos e, principalmente, os didáticos retratam este assunto de maneira completa, com uma boa exposição didática, contemplan- dodiversos significados?

A segunda pergunta se torna o objetivo central do nosso estudo. Temos como uma das finalidades verificar *se* e *como* os livros didáticos e paradidáticos, que tratam das frações, debatem os significados pertinentes a esse conteúdo. Essa investigação torna-se relevante, na medida em que os materiais didáticos são os principais suportes para o desenvolvimento das aulas de Matemática nas escolas.

Voltando à primeira questão, entendíamos que seria primordial verificar: *Quais os significados de fração possuem os professores de Matemática e estudantes do curso de Pedagogia?*

Várias pesquisas foram feitas, visando estudar e apurar os conceitos que os professores possuem sobre os significados de frações; como trabalham com os conteúdos que trazem os livros didáticos, que normalmente são incompletos.

No início do desenvolvimento da nossa investigação, procuramos averiguar qual era o conhecimento dos significados de frações que os professores detinham, de modo a respaldar a necessidade de desenvolvermos o nosso estudo.

Elaboramos questionários para serem aplicados a docentes em exercício, com formação em Matemática (licenciatura plena) lecionando para o Ensino Básico e para cursos superiores. Tais instrumentos visaram aferir se esses profissionais tinham um conceito mais amplo sobre as frações além do "*Parte-todo*".

Aplicamos um questionário a 20 professores (especialistas) que cursavam o mestrado na área de Ensino de Matemática. Das diversas perguntas inseridas no questionário, (apêndice I deste trabalho) vamos apresentar as três que mais convergem para as nossas conclusões.

- Para você, qual o conceito de fração? (Dê exemplo)
- Como professor(a), qual é a metodologia que você utiliza para o ensino de frações?
- Além dessa metodologia citada acima, você conhece outra maneira de explicar esse assunto?
  ( ) Não ( ) Sim, qual:__________
- Você já leu algum livro paradidático sobre esse assunto? ( ) SIM ( ) NÃO
  Em caso afirmativo, qual?

Doze professores conceituaram fração como sendo uma relação entre partes de um todo sem falar de outro significado eoito trataram-na como número. Os demais significados não foram relatados por ninguém. Todos citaram apenas um significado: ou *número* ou *parte-todo*.

Quadro 1 - Tabulação de questionário

TIPOS DE SIGNIFICADOS USADOS PELOS PROFESSORES PARA DEFINIR FRAÇÕES					
	Parte-todo	Número	Medida	Operador M.	Quociente
Número de professores	12	8	0	0	0

Fonte: Dados da investigação

Ao analisarmos o questionário que aplicamos a esse grupo de educadores, percebemosuma limitação nos significados de fração, pois, como já foi dito, os únicos conceitos expostos por eles foram o de *número* e *parte-todo*.

A restrição teórica, por parte desses profissionais, pode resultar num comprometimento na parte didática e uma limitação nas estratégias para ensinar o conteúdo, podendo acarretar em uma lacuna no processo de aprendizagem por parte dos alunos.

O resultado dos questionários aplicados aos alunos do sexto período do curso de Pedagogia, de uma instituição superior localizada em Belo Horizonte, apontou que a formação desses estudantes em relação ao tópico frações apresenta lacunas. Estes demonstraram conhecimento apenas do conceito *parte-todo*.

Na revisão de literatura pudemos confirmar os resultados que obtivemos e também constatamos problemas com o ensino desse conteúdo em outros países. Cardoso e Mamede (2015) dissertam que: "o conceito de fração é um conceito reconhecidamente complexo, por um lado, e considerado essencial para a aprendizagem matemática futura da criança por outro". (CARDOSO e MAMEDE, 2015, p. 229).

As autoras portuguesas procuram responder, dentre outras, a seguinte questão: Que conhecimento têm os professores sobre o conceito de fração? Usaram uma metodologia de entrevistas semi-estruturadas (tipo de entrevista que não há uma "imposição inflexível das questões") e individuais a 30 professores do 1º ciclo de escolas públicas do município de Braga, em Portugal. As autoras concluem que "o domínio da representação de frações num significado não garante a compreensão do conceito para resolver problemas com sucesso". Diante das dificuldades detectadas pela pesquisa feita, as autoras sugerem, aos professores do 1º ciclo, "a promoção de formação que vise colmatar essas dificuldades". Formação esta, que deverá focar nas fragilidades dos professores em relação às estratégias educativas como nos conceitos limitados (apenas *parte-todo*) apresentados pela maioria dos educadores. (CARDOSO e MAMEDE, 2015, p. 233).

Magina e Campos (2008) expõem uma conclusão similar à de Cardoso e Mamede, relatando que a maioria dos professores não possuem os principais significados sobre frações. Desta maneira, suas abordagens e estratégias de ensino se tornam limitadas, refletindo diretamente no aprendizado do aluno (MAGINA e CAMPOS 2008).

As autoras apresentam no artigo *A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental*, uma pesquisa diagnóstica feita com "70 professores polivalentes e 131 alunos que cursavam 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental". Após a análise dos resultados, a pesquisa aponta que os professores, em geral, têm "um prognóstico do desempenho dos alunos longe do real, havendo uma tendência de superestimar o nível de acertos, principalmente no que tange aos alunos da 4ª série". Essa discrepância, segundo as autoras, pode estar relacionada "ao fato da maioria dos professores não ter claro os diferentes significados que as frações assumem, o que os leva a apresentar estratégias de ensino que nem sempre auxiliam seus alunos a superar falsas concepções sobre esse conceito". (MAGINA e CAMPOS 2008, p.23).

As autoras prosseguem com uma inferência relevante sobre essa carência de significados por parte do corpo discente citadas anteriormente; "se os professores não têm consciência dos invariantes operatórios da fração, tampouco lançarão mão de estratégias de ensino que facilitem a aprendizagem de seus alunos". (MAGINA e CAMPOS 2008, p.25).

A partir do resultado obtido com a aplicação dos questionários e da leitura de alguns estudos que apontam os problemas com ensino e aprendizagem de frações, definimos que, em nossa investigação, nosso objetivo geral seria trazer para discussão os diferentes significados de fração no contexto escolar.

Nossa pesquisa é de cunho qualitativo. Entre os objetivos, destacamos a análise do conteúdo frações nos livros didáticos de Matemática destinados ao 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental e paradidáticos que abordem a temática. O primeiro foco, nosso objetivo central, foi analisar os textos didáticos relativamente aos significados de fração. Ao longo da pesquisa, outras categorias de análise foram elencadas, concernentes aos recursos visuais e a existência de abordagem história nos livros. Em relação ao contexto e desenvolvimento do tópico, também passamos a verificar como os autores se valem das ilustrações para complementar o conceito de frações – fez-se necessário averiguar se os autores utilizam outras figuras geométricas, além das tradicionais (círculo, retângulo e quadrado) para indicar as frações e como estas estavam destacadas nessas representações, se existe alguma contextualização, o número de páginas dedicadas ao assunto. Além disso, consideramos como estão propostos os exercícios e problemas. Em relação às práticas, se há atividades ou orientações para utilização de material concreto, outras atividades lúdicas e se são abordados aspectos históricos. Nesse sentido, as categorias foram ampliadas buscando concretizar melhor as nossas considerações sobre os textos didáticos analisados.Selecionamos três paradidáticos e onze livros didáticos de Matemática (cinco do 4ºano, três do 5ºano e três do 6º ano do Ensino Fundamental), que abordam o tópico frações.

A presente dissertação contém quatro capítulos. O primeiro capítulo faz alusão às lacunas constatadas, através do nosso questionários aos professores, relativamente ao ensino de frações.
A notoriedade das frações para a estrutura mental e operações algébricas elementares a serem desenvolvidas ao longo do ensino de matemática, da criança e do adolescente. A necessidade da extensão do conjunto dos números naturais quando se trata de medidas, de divisões não exatas, de números não inteiros, de probabilidades, por exemplo.

No segundo capítulo, dissertamos sobre os cinco significados de fração: *parte-todo, quociente, medida, número e operador multiplicativo*; fundamentamo-nos em Kieren (1976) e Campos, Magina e Nunes (2006), tecemos alguns comentários, explicações e exemplos referentes aos seus estudos. Versamos sobre a exposição do conteúdo em sala de aula.

O terceiro capítulo contemplaa análise de onze livros didáticos, destinados ao 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental e três paradidáticos de Matemática no que concerne à abordagem das frações. Como esses livros introduzem, retratam e desenvolvem este tema. Quais as ideias, os conceitos e as representações que são externadas na sua teoria e nos seus exercícios;que orientações, diretrizes os autores retratam para o desenvolvimento desseconteúdo.

No quarto capítulo, discorremos sobre o produto educacional, com seus atributos e particularidades, contemplando a parte histórica e os significados de frações. Objetiva-se dessa maneira, atingir a meta desse instrumento pedagógico, isto é, ampliar e reformular conceitos dos alunos de Matemática. Posteriormente, as nossas considerações finais.

CAPÍTULO I

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

1.1. Frações como conteúdo escolar

O conceito de fração é de grande importância quando se amplia a visão dos conteúdos matemáticos que estão vinculados a diversas situações do estudante; nas manipulações aritméticas e algébricas, regras de três, fórmulas e suas diversas aplicações, simplificações de polinômios e equações e outros ramos não só da matemática como na Física, Química, Geografia e outras disciplinas.

Com a facilidade de acessar calculadoras no celular, muitos alunos tendem a manusear mais números racionais usando representação decimal no lugar das frações. Faz-se necessário mostrar para os alunos que as operações com decimais esbarram em algumas dificuldades, como, por exemplo, as dízimas que, muitas vezes, nos obrigam a transformá-las em frações geratrizes para podermos dar sequência em determinadas operações. A simplificação, potenciação, radiciação e divisão com frações são muito mais precisas, rápidas e convenientes do que com os decimais. Esses são mais viáveis em algumas situações, por exemplo: para agruparmos números em ordem crescente ou decrescente; posicionarmos numa reta real; representarmos porcentagens; as frações, nesses contextos, levam desvantagens.

Deparamos com frações em algumas situações do cotidiano. No esporte temos: as *frações de segundos*que um piloto de "Fórmula Um" perde uma corrida; que um nadador é desclassificado por não atingir o tempo olímpico ou um jogador de basquete pode empatar ou ganhar uma partida nos segundos finais de uma disputa. Uma receita culinária, por exemplo, ¼ de xícara ou ½ xícara de algum ingrediente para compor uma massa. Numa construção, onde a ferragem é conhecida pelos operários como ferro de meia (meia polegada), ferro de um quarto ou três quartos (também em polega- das), além das tubulações hidráulicas e as bitolas de fios no campo elétrico. Na medição de tempo em horas e minutos, quatro horas e meia (meia hora), cinco e quinze (ou cinco horas e um quarto de hora como dito nos USA). Nos preços de uma mercadoria, como R$ 4,25 (cabe aqui realçar para o aluno que a parte decimal, os centavos 0,25 não deixa de ser a quarta parte de um real). Este exem- plo é uma boa oportunidade de mostrar que ¼ é um número racional representado na forma de fra- ção e 0,25 também é um número racional representado na forma decimal, e ambos são iguais.

Podemos citar várias situações além dessas que nos servem como exemplos de aplicabilidade de frações. É de extrema relevância a exemplificação por parte dos professores, para que o aluno perceba não só a importância do assunto na esfera da Matemática, mas também como esse conteúdo está inserido no contexto do seu dia a dia. Esse "novo" conhecimento, por volta dos 9 ou 10 anos de idade, pode tirar a criança da zona de conforto e trazer algumas dificuldades.

No nosso dia a dia, quase tudo se resolve com números naturais e decimais. Contagem, medidas, valores no comércio, o tempo, índices inflacionários e diversas situações inseridas ao nosso redor são resolvidas ou expressas em números naturais e decimais. Na verdade, os alunos, fora do contexto escolar, se deparam poucas vezes com números racionais representados em forma de fração. Lopes (2008, p. 5) converge nesse viés, no seu artigo, dissertando que o "uso direto das frações tende a se tornar cada vez mais raro. Já não se encontram com facilidade balanças e instrumentos de medida com ponteiros, como é o caso dos hidrômetros antigos". O autor apresenta um exemplo do nosso dia a dia, o visor do marcador de combustível dos automóveis, como um dos poucos que ainda resiste à notação decimal; "pelo posicionamento dos ponteiros numa escala, para saber se o tanque tem cerca de ¼, ½, ou ¾ de combustível". Ele completa sua argumentação, explanando:

> Temos que reconhecer estes fatos e nos ajustar à realidade. A notação decimal ganhou a guerra da comunicação e da usabilidade para representar números "quebrados", não inteiros. Isso não quer dizer que as frações devam ser abolidas, temos que reconhecer sua importância em contextos não utilitários, que atendem a outros significados e objetivos. (LOPES, 2008, p. 5).

Bertoni encaminha na mesma vertente no seu texto "Frações e números fracionários":

> [...] as frações, em sua representação fracionária (não decimal) nos ajudam a entender melhor razões, escalas, porcentagens, possibilidades – e ainda são frequentes nas receitas culinárias. Nossa preocupação maior é com o conhecimento das frações e do conceito de número fracionário, que não pode ser conseguido só com a divisão de figuras geométricas em partes iguais e a memorização das regras operatórias. É preciso encontrar caminhos para levar o aluno a identificar essas quantidades em seu contexto cotidiano e a apropriar-se da ideia do número fracionário correspondente, usando-os demodo significativo. (BERTONI , s.d.).

A autora nos lembra de conteúdos fundamentais, que possuem as frações como ferramenta preponderante para o desenvolvimento e a compreensão desses tópicos, tais como: razões, escalas e porcentagens. No estudo das proporções, de maneira geral, trabalha-se com os conceitos e as aplicações defrações. Proporções se estendem para abordagens das geometrias plana e sólida, nos Teoremas de Tales, Semelhança de Triângulos, Relações Métricas e Trigonométricas no Triângulo Retângulo e outros. Nas escalas, tanto em Matemática como na Geografia, nada mais é que uma aplicação de proporção inserida num enunciado diferente. Nas Regras de Três e Porcentagens é notório a aplicação direta e constante das frações. Não podemos nos esquecer das diversas aplicações na álgebra e da sua importância para ajudar a estruturar a abstração desenvolvida pelo aluno. Além dessas, há também aplicações em outras áreas de conhecimento, como na Física, diversas grandezas, situações, medidas, que precisam de equações, muitas vezes fracionárias, para desenvolver um conceito ou um raciocínio. É conveniente se lembrar da Química (que trabalha com as regras de três) e da Biologia (principalmente na genética, nos cálculos deprobabilidade).

Não precisamos dizer que os conceitos e propriedades operatórias das frações são fundamentais para a matemática superior, em cursos de áreas exatas, engenharias e outros.

Em conversas informais com professores, averiguamos que, muitas vezes, existe na grade curricular das escolas particulares e públicas, um tempo inadequado para desenvolver e trabalhar esse conteúdo que é tão complexo, em muitos aspectos, para as crianças. Constatamos que, dentre os onze livros analizados por nós – assunto que abordaremos com mais propriedade em capítulo específico – a maioria não dá a devida importância para um tema tão significativo e que traz em si diversas peculiaridades e dificuldades, tanto para os alunos quanto para os professores.

1.2. Dificuldades no ensino e na aprendizagem das frações

A criança aprendeu a contar, relacionando os números com objetos inteiros, sejam os dedos das mãos, tampinhas, palitos, brinquedos, pedrinhas ou outras referências, mas sempre inteiras. Depois que ela aprende a contar e efetuar as operações básicas, na escola, é colocado um conteúdo em que ela vai contar as partes e não os inteiros; ou os inteiros juntos com as partes, o caso das frações impróprias. Um número que representa um (ou mais) pedaço(s) do outro. Tudo isso parece muito estranho e difícil para um aluno com faixa etária de 9, 10, 11 anos, que estava acostumado a visualizar os números com representações no "Concreto", isto é, com ob- jetos, palitos, tampinhas, moedas, etc.

É perceptível as dificuldades que uma criança do 4º ou 5º ano sentem ao se depararem, pela primeira vez, com um número fracionário, representado por dois números naturais, sobrepostos e separados por um traço horizontal, que representa uma quantia menor que um e, algumas vezes, maior, mas não inteira (o caso da fração imprópria), é uma ideia complexa e abstrata para essa faixa etária. Em nossa prática profissional, constatamos que que vários alunos tendem, a princípio, a não aceitar e não entender que esses números existem e representam situações cotidianas.

A grande dúvida de muitos professores é: como trabalhar um conteúdo tão diferente e sutil, que irá causar, por parte de alguns alunos, uma resistência considerável, mas que deverá ser efêmera para que o processo de aprendizagem se concretize? Não há uma resposta precisa e definitiva por parte dos educadores que nos permita resolver tal questionamento. Entretanto, buscamos nas percepções, conhecimentos e experiências de alguns deles, tentar amenizar ou desnublar parte desse dilema que tanto incomoda o corpo docente.

Osorio e Porto (1965, p. 89) já sinalizavam, na década de 1960, que "pesquisas e teorias modernas da aprendizagem têm mostrado a grande importância de se desenvolver compreensão antes de qualquer esforço para aprender as regras que levam à habilidade em computar". As autoras defendiam a ideia de que deveria haver, por parte do aluno, a assimilação dos conceitos antes de fazer uma bateria de exercícios que muitos livros e, consequentemente, professores propõem para aprender oconteúdo. A falsa ideia que "matemática é só fazer exercícios", ainda habita a mente de muitas pessoas menos familiarizadas com a aprendizagem. Além disso, muitos professores conteudistas e tradicionais também compactuam com essa maneira de pensar. Naturalmente, os exercícios fazem parte do processo de aprendizagem, mas a parte teórica e sua compreensão são fundamentais para absorver e fixar o conteúdo de forma significativa. Observa-se que o aluno com dificuldade em compreender os aspectos teóricos de um determinado assunto, seja de qual nível escolar for, não terá facilidade na execução das atividades relacionadas com aquelestópicos.

Esse conceito é reforçado pelas autorasquando destacam: “o objetivo principal deve ser introduzir o conceito de fração sem preocupação em desenvolver ainda os processos de cálculo”. (OSORIO e PORTO, 1965, p. 89). As autoras continuam relacionando a ideia da fração com um numeral.

> A ideia de fração é usada em situações onde apenas parte de alguma coisa é considerada. Um numeral fracionário diz quanto está sendo considerado de uma coisa inteira, tomada como unidade e, portanto, representada por 1. Suponhamos, por exemplo, que se divida alguma coisa em três partes iguais e se tome duas dessas partes. O aluno deverá aprender que para simbolizar a correspondência entre estas duas partes e o inteiro original usa-se uma nova espécie de numeral, isto é, o numeral fracionário 2/3 onde o "3" mostra o número de partes iguais em que se dividiu o inteiro e o “2” o número de partes que se considerou. O numeral todo 2/3 mostra quanto está sendo considerado do inteiro. Essa parte considerada (que se representa por 2/3) guarda com o inteiro (representado por 1) a mesma correspondência que há de 2 para 3.Essa ideia é fundamental. O conceito de fração envolve ainda outras ideias, mas sua ideia fundamental é a que acabamos de discutir. (OSORIO e PORTO, 1965, p. 90).

1.2.1. O problema da formação docente

Professores que ministram matemática nos anos iniciais, durante a sua formação “tiveram parcos conhecimentos de matemática em sua graduação. A maioria dos professores atuantes nas séries iniciais são os que concluíram o 2º grau com habilitação para o magistério e os graduados em pedagogia.” (BONZANINI e BASSOI, 2016, p. 145).

Para “ensinar bem”, devemos ter um bom domínio do que pretendemos ensinar. Esses profissionais citados pelas autoras, normalmente não gostam de matemática ou tiveram grandes dificuldades nessa matéria na sua vida acadêmica ou, ainda, não tiveram os conhecimentos necessários durante o nível superior.

Para Curi (2004, p. 76), a formação dos docentes que ensinam Matemática nos anos iniciais ainda apresenta problemas, sendo muito precária, “o conhecimento, de e sobre“ matemática épouco enfatizado, mesmo no que se refere aos conteúdos previstos para o Ensino Fundamental”, dada a pequena carga-horária de disciplinas referentes à Matemática nos cursos de Pedagogia (Curi, 2005). Esse aspecto é abordado por Bonzanini e Bassoi (2016, p. 145) quando acrescentam mais alguns detalhes que nos ajudam a analisar melhor essas características. “Nos cursos de pedagogia, muitas vezes a disciplina de matemática ou de didática da matemática contém carga-horária insuficiente para um bom desempenho na prática de ensino, fazendo o professor privilegiar outras áreas do conhecimento, ou seja, a que tem mais afinidade”.

Se na graduação, no curso de licenciatura plena, a carga horária referente às cadeiras de Didática e Metodologia da Matemática e História da Matemática, em geral, ficam muito aquém do ideal, quanto mais num curso não específico. Isso tudo contribui de maneira significativa para uma lacuna de conteúdos nos profissionais da educação, refletindo negativamente na aprendizagem de inúmeras crianças. Neste sentido, queremos apontar não só as lacunas na formação dos estudantes de Pedagogia, como também na Licenciatura em Matemática.

Contudo, em relação à formação no curso de Pedagogia, se esses(as) futuros(as) professores(as) que desempenharão suas atividades com alunos nessa faixa etária, não estudarem em bons e diversos livros, interagirem com outros profissionais da área,se empenharem para o seu aprimoramento, terão dificuldades em ensinar alguns conteúdos, entre eles, o de frações.

Infelizmente, tais profissionais, fundamentais no processo de aprendizagem de um aluno, não são devidamente valorizados no meio acadêmico e pela sociedade em geral. Valorização não apenas monetária, mas também com cursos de aperfeiçoamento de qualidade queas escolas (ou os órgãos públicos) deveriam proporcionar para minimizar as defasagens citadasanteriormente.

Duas perguntas: "Teriam esses professores plenas condições de ensinar matemática em momento tão significativo do processo cognitivo do aluno? Seriam eles os responsáveis por dificuldades nas séries posteriores, ajudando, até, a criar uma rejeição na criança pela disciplina de matemática?" Esses são questionamentos de Bonzanini e Bassoi (2016, p. 146).

Percebe-se, não só nas turmas de Ensino Básico, mas também no Ensino Médio, uma aversão e grande dificuldade, por parte de muitos alunos, em dominar os conceitos elementares de fração e operacionalizar números racionais das diversas formas. Essa percepção, na minha prática pedagógica, tanto se aplica nas escolas particulares, que tive a oportunidade de atuar durante vários anos de profissão, quanto nas públicas, nas quais trabalho atualmente. Essa constatação é corroborada por alguns autores. Para Bezerra (2004, p. 1), "há um consenso entre pesquisadores e professores de que a fração não é um conceito fácil de se entender". O autor afirma que as dificuldades dos alunos estão em construir significados para as frações.

"Muitas vezes os alunos reconhecem a forma a/b, ($a \in N$, $b \in N$, com $b \neq 0$), dizem que é uma fração, mas não conseguem representá-la ou aplicá-la numa situação-problema, principalmente quando apresentamos mais de um inteiro". (BEZERRA, 2004, p. 1)

Canova converge com Bezerra e ainda nos relata que, para Behr *et al.* (1983):

> [...] o conceito de fração é uma das ideias matemáticas mais complexas e importantesna formação do aluno e que o seu ensino e aprendizagem envolvem três aspectos:
>
> - O primeiro aspecto é o prático, isto é, as frações, em suas diferentes representações, surgem com frequência em diversas situações relacionadas à expressão de medida e de quantidade. Esse fato evidencia a necessidade da extensão do conjunto dos númerosnaturais;
>
> - O segundo aspecto refere-se a uma perspectiva psicológica, ou seja, o trabalho com as frações surge com uma oportunidade privilegiada para alavancar e expandir estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual;
>
> - O terceiro aspecto diz respeito à perspectiva da Matemática, pois serãojustamente os primeiros estudos com frações que fundamentarão ideias matemáticas mais complexas como

> por exemplo, as operações algébricas elementares a serem desenvolvidas ao longo do ensino de Matemática. (CANOVA, 2006, p.16).

A necessidade da extensão do conjunto dos números naturais, não é difícil mostrar numa sala de aula, através de atividade prática que a confirme. Se pedirmos para um grupo de alunos medir uma das dimensões de uma sala com bastão de um metro, eles vão perceber,após algumas vezes, que posicionar o bastão, um atrás do outro, "faltará um pedaço menor"desse bastão para que a dada extensão possa ser medida com precisão. Nessa situação, o(a) professor(a) pode questionar como poderia se completar a mensuração. Se nenhum aluno sugerir uma unidade menor, o(a) docente pode intervir e explicar que há uma necessidade de trabalhar com uma subunidade para atingir o objetivo criado anteriormente. Essa subunidade seria uma partição da unidade padrão, que, no exemplo, foi o metro. Desta maneira, dividiria o todo em "n" partes, em que cada parte seria 1/n, mostrando a ideia de fração unitária, assunto pré-requisito das demais frações, como nos mostra Bertoni.[3]

Como sinaliza Canova (2006), Behr *et al.* falavam em expandir estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual e à perspectiva da Matemática – nós já retratamos a relevância das frações no item 1.1 deste texto, ratificada e explanada por autores como Lopes (2016) e Bertoni (2005).

Lopes (2016, p. 1), no seu artigo *Formação de professores dos anos iniciais sobre o processo de ensino e aprendizagem de frações*, discorre sobre a dificuldade das frações "tanto para quem ensina como para quem aprende e alguns fatores colaboram para isso". Metodologias que enfatizam técnicas de resolução, memorização e repetição de algoritmo, "encontram um obstáculo em um dos conteúdos que exige um maior grau de abstração. Ao se tratar deste assunto, nos questionamos: será que o professor conhece essa ação do pensamento e esse grau de abstração para o processo de ensino e aprendizagem de frações?" (LOPES, 2016, p. 2).

Esse questionamento em relação aos(às) professores(as), nos remete a outras indagações sobre a formação inicial (graduação e seu currículo), formação continuada (cursos de extensão para suprir algumas lacunas de conteúdos e conceitos) e os livros que faremos algumas alusões e análises posteriormente neste trabalho.

As autoras Bonzanini e Bassoi (2016), estudando sobre a aprendizagem de frações, pesquisaram alguns professores das escolas municipais do Paraná[4] e relataram que:

> Todos os professores entrevistados, apesar da diferença do tempo de magistério, são enfáticos ao afirmar que para ensinar frações é preciso partir do "concreto". [...] "Concreto" para eles seria partir de uma situação física e prazerosa, que tenha relação com o cotidiano – como, por exemplo, dividir uma maçã, um chocolate, um bolo ou ainda auxiliar a mãe na realização de alguma receita culinária. Segundo eles, essa relação do concreto/cotidiano x fração terá sentido para o aluno, garantindo a aprendizagem. Outro fator a ser considerado, é que todos os professores trabalham apenas com grandezas contínuas,

---

[3] Será apresentado em outra parte desse texto com mais detalhes (final do item 1.2, deste capítulo).

[4] As escolas citadas são E.M. Profa. Dilair Ribeiro Fogaça e E.M. Profa. Gladis Maria Titola.

não abordando as grandezas discretas. (BONZANINI e BASSOI, 2016, p. 151).

Baseando nos relatos citados pelas autoras, os professores trabalham, provavelmente, na perspectiva que fração possui apenas um significado: *"parte-todo"*. Segundo o discurso de todos eles, o trabalho deve ser ancorado "no concreto" que tenha de preferência, vínculo com o cotidiano dos alunos. Não discordamos dessas abordagens, já que são realmente eficientes em relação a este significado que exige uma compreensão se baseando na percepção. Podemos garantir uma aprendizagem eficiente, significativa, trabalhando apenas com esse significado? Nenhum deles considerou fração como: número, medida, operador multiplicativo e quociente [5].

Em todos os conteúdos da matemática, é conveniente tentarmos introduzi-los com uma situação problema ou uma aplicabilidade do dia a dia, para que o aluno possa perceber e valorizar a importância daquele tópico. Remetendo à pesquisa, quando as autoras relatam que, para ensinar frações, é preciso partir do "concreto", não só é ideal como possível em qualquer escola, por mais carente de recursos que ela seja. No caso das frações, pode-se trabalhar com diversas possibilidades de exemplos, como bolo, torta, barra de chocolate, frutas ou outras opções, como cartolina, papel, emborrachados, restos de madeira ou objetos que possam ser manipulados pelos alunos. Conteúdos como ordem de grandeza, frações equivalentes, operações com frações (soma, subtração, produto e divisão) podem ser explorados com eficácia usando esses materiais ou com outras estratégias se o professor tiver criatividade e um bom conceito ancorado nos significados de frações.

Bonzanini e Bassoi (2016, p. 151), argumentam que "todos os professores trabalham apenas com grandezas contínuas, não abordando as grandezas discretas"; talvez esse comportamento possa ser justificado por seguirem fielmente os livros didáticos que, em sua maioria, tratam esse conteúdo de maneira única, isto é, com muita ênfase nas grandezas contínuas e pouca (ou nenhuma) nas grandezas discretas, realçando especialmente o significado "Parte-todo" que iremos explanar mais adiante.

As nossas práticas educativas no ensino de números racionais, especificamente frações, são ancoradas apenas pela formação acadêmica e pela utilização abusiva dos livros didáticos (ROMANATTO, 1997, p. 3). O(a) professor(a) fica muito limitado(a), restrito(a) a informações, para de- sempenhar de maneira significativa o seu papel. "Pesquisas recentes, podem oferecer importantes subsídios para justificativas de suas ineficiências, inseguranças, bem como formular caminhos pro- missores para alterações e implementações de práticas onde a aprendizagem compreensiva se faça presente". (ROMANATTO, 1997, p. 3).

Na sua tese, Romanatto postula que convivemos numa visão tecnicista, na perspectiva metodológica, na qual o método ideal em que passa para o aprendiz de maneira rápida e concisa, com conteúdo liso e limpo, isto é, "livre de quaisquer contradições e desligado de qualquer problemati-

[5] Veremos com mais detalhes esses significados posteriormente.

zação. Na concepção mecanicista do método, o professor não ouve, mas expõe. Não pergunta, mas responde". Metas e métodos são desvinculados pelo professor nesta abordagem. Fomenta-se mais a resposta, o resultado do que o desenvolvimento, a estratégia. Valoriza-se excessivamente os algoritmos, simbologia e cálculos do que a interpretação e a compreensão. "Daí o método lhe soa neutro e a eficácia do método é medida em função da rapidez com que o aluno emite a resposta correta, muitas vezes, sem a devida compreensão e sujeita ao esquecimento em pouco tempo." (ROMANATTO, 1997, p. 3).

1.2.2. A dificuldade na aprendizagem defrações

Observa-se uma grande dificuldade por parte dos alunos em relação à ordem de grandeza, nas frações com o mesmo numerador e denominadores distintos. Muitos não entendem ou têm dificuldade de perceber que quanto maior o denominador, menor é o número, ou a fração, isto é, $1/5 < 1/4 < 1/3 < 1/2$. Nesses exemplos, podemos levar o aluno a imaginar uma repartição de um bolo. A ideia da divisão auxilia na sua percepção; se dividirmos um bolo por duas, três, quatro, cinco, mil pessoas, o pedaço diminui; podemos inferir com os alunos que se aumentarmos o denominador (no nosso exemplo as pessoas que ganhariam um pedaço de bolo) com o numerador fixo, o resultado (ou o pedaço) é cada vez menor. Essa perspectiva é corroborada pelas autoras Campos, Magina e Nunes (2006) que nos relatam: "situações de quociente podem ser usadas para que as crianças se apropriem do invariante de ordenação de frações por meio do raciocínio lógico: quanto mais crianças para dividirem o bolo, menor o pedaço de bolo que cada criança receberá". (CAMPOS, MAGINA E NUNES, 2006, p.128)

Representar as frações na reta numérica, embora muitos autores não enfatizem essa habilidade, também é uma dificuldade para muitos alunos. Mas, se o aluno possuir o conceito numérico de fração, ele tem uma boa ferramenta para desempenhar de maneira eficiente esseinvariante.

Ordenar as frações, isto é, colocá-las na ordem crescente ou decrescente. Neste ponto também o conceito numérico é relevante. Certamente pode-se optar pelo campo das frações equivalentes para desenvolver tal tarefa. O ideal seria o professor trabalhar os dois processos e compará-los, para que o aluno perceba que tratam de "coisas" iguais por caminhos diferentes. Outra vertente é identificar e representar frações equivalentes, abordagem útil para as operações de simplificação, de soma, subtração, porcentagem além da comparação já abordada. *Frações equivalentes* constituem-se em um dos tópicos importantes que antecedem a propriedade fundamental das pro- porções (produto dos meios é igual ao produto dos extremos) e, consequentemente, as regras de três simples e compostas (direta e inversa).

Esses invariantes, ordem e equivalência, são fundamentais para entender futuros significados de fração.

A operação de multiplicação entre frações – multiplicar os numeradores e os denominadores entre si – em geral, é bem executada pela grande maioria dos estudantes não trazendo maiores dificuldades na parte operacional ou mecânica. É praticamente a mesma ideia do conjunto dos números naturais. A dificuldade está nas interpretações dos resultados. A multiplicação de duas frações, por exemplo ½ e ¼ dará como resultado um número menor que as duas partes. Aceitar que o produto é menor que os fatores, não é tão simples para o aluno se ele construiu, no seu passado ao trabalhar com números naturais, que o resultado de uma multiplicação é sempre maior que as partes, isto é, o produto maior que os fatores.

Há uma tendência, por parte dos alunos, em repetir o processo que fez na multiplicação com a soma e a subtração de frações com denominadores diferentes. Nesse momento, uma estratégia eficiente é usar as frações equivalentes como principal recurso, estabelecendo comparações, possibilitandoao aluno perceber que a mesma regra da multiplicação não pode ser adotada nessas operações; trabalhar no concreto, seja com papel, cartolina, emborrachado ou outro tipo de material, usando o conceito *parte-todo*, talvez seja um recurso eficiente para que o aluno conclua que não se soma coisas diferentes em matemática sem fazer as devidas adaptações necessárias que o conteúdo exige.

Lopes (2008), no seu artigo, *O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações*, corrobora com Canova (2006), quando postula que: "A aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas sobre pizzas e barras de chocolates". Podemos ratificar a ideia do autor na análise dos livros, em que a maioria trabalha com essa metodologia; apresentam e aplicam o conceito de fração com figuras, normalmente retangulares e circulares, dividindo-as em partes iguais e destacando algumas para introduzir o significado de fração, *parte-todo*.

Lopes (2008, p. 7) prossegue, relatando: "Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas". Ele discorre sobre a dificuldade também em relação à notação de fração: "O estatuto epistemológico das frações, não é o único obstáculo à sua aprendizagem, também a notação das frações constitui um obstáculo, não é tão trivial a associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um tracinho". (LOPES, 2008, p. 7).

Bertoni, no seu livro *Frações e números fracionários*, também segue na mesma direção das argumentações de Lopes (2008) e Canova (2006):

> Frações têm sido um dos temas mais difíceis no ensino fundamental. Avaliações e pesquisas atestam o baixo rendimento dos alunos no assunto. Nos últimos anos, as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse tema têm detectado inúmeros problemas e levantado hipóteses, que, entretanto, não abrangem a totalidade da problemática, nem são conclusivas. Talvez devido a isso, propostas de ensino incorporando esses resultados são apenas incipientes. O mais comum de se encontrar são as mesmas propostas de sempre, que começam informando as crianças sobre nomes e símbolos de frações, apresentando quadrados, retângulos ou círculos divididos e parcialmente pintados. (s.d., p. 2).

Na mesma perspectiva, ainda podemos citar Alves e Martens (2011) no artigo *Desafios para* *a construção do conhecimento de frações nas séries intermediárias do Ensino Fundamental.* As pesquisas em Educação Matemática objetivam entender o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais representados em forma de fração; de acordo com essas pesquisas, esse é um problema que extrapola o Ensino Básico e Fundamental, atingindo todos os níveis de escolaridade. (ALVES e MARTENS,2011, p. 9364).

Batista e Jesus também legitimam essas opiniões,

> O conceito de número racional – fração é bem complexo do ponto de vista matemático. Para a criança compreender e construir conceitos de número fracionário é necessário que se tenha certo grau de maturidade e que ela seja alfabetizada matematicamente, pois o nível de complexidade é maior do que a construção do número natural. (BATISTA e JESUS, 2016, p. 16)

Romanatto avaliza essas ideias, ao citar um exemplo na sua tese, *Número Racional: relações necessárias à sua compreensão*, quando nos relata que, ao solicitar uma criança a localizar o número 2/3 numa reta numérica, muitas o colocam entre os números naturais 2 e 3. “O que esse erro significa? Quando as crianças são questionadas sobre qual é a maior fração de um mesmo todo, 5/6 ou 12/33, muitas não vacilam em dizer 12/33. O mesmo acontece quando comparam 1,67 e 1,9. Não raro, 1,67 é assinalado como o número maior”. (ROMANATTO, 1997, p. 90).

O autor, além desse exemplo, faz alusão a outra situação que corrobora a complexidade das propriedades relativas às frações, quando nos apresenta uma visão reducionista, parcial, do conceito de fração. Segundo o autor, professores que lecionam nos 3º e 4º anos do Ensino Fundamental, relatam sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos em compreender4/3 como fração.“O obstáculo se explica na medida em que, se fração é parte de um todo, então 4/3 não é mesmo uma fração. Para que aceitemos como tal é necessário que a noção original de fração seja ampliada”. (ROMA NAT- TO, 1997, p. 90).

Os problemas com as dificuldades dos alunos em relação a frações não estão restritas às escolas brasileiras. Em Portugal, Mamede indica que, na literatura nacional, são identificados “diversos tipos de dificuldades na aprendizagem de frações, por parte dos alunos nos níveis de escolaridade básica. Estas dificuldades incluem tanto aspectos da compreensão conceptual como de destrezas de cálculo.” (MAMEDE, 2011, p. 1).

Arthur Powell destaca que “o sentido de frações é mal construído”, apontando que, nos Estados Unidos, uma parcela representativa de alunos de 13 anos de idade, demonstrou não ter “sentido da razoabilidade de uma adição de frações.” (POWELL, 2018, p.82).

Os estudos fomentam a importância das estruturas mentais que as frações proporcionam para as crianças e adolescentes. Além das abstrações mentais que as frações despertam e oportunizam, elas exigem dos alunos aplicações de regras e propriedades próprias que diferem dos números naturais em algumas operações. A soma e a diferença de frações com denominadores distintos, por exemplo, levam muitos alunos a efetuarem de maneira direta, operações nos numeradores e denominadores, produzindo resultados totalmente equivocados.

Supondo um exemplo de soma de frações: ½ + ¾, verifica-se que vários estudantes costumam somar os numeradores (1 e 3) e os denominadores (2 e 4), surgindo um resultado equivocado, porque a soma de dois números positivos sempre irá produzir um valor maior que as parcelas (ou as partes). Um dos motivos para que esse procedimento ocorra é que “a abordagem parte-todo está baseada na contagem e numa visão aditiva” e os “estudantes usam as propriedades e procedimentos dos números naturais para fazer inferências sobre números fracionários.” (POWELL, 2018, p. 82). Seria relevante levar o aluno a verificar como ocorre a adição frações com denominadores diferentes para que perceba os equívocos, que normalmente ocorrem, dessa forma de operar. Uma forma prática seria através de material concreto, seja cartolina, emborrachado, folhas coloridas ou outro produto similar. Inicialmente, seria pertinente um trabalho com frações equivalentes, para depois, se encaminhar o processo com soma e subtração de frações com denominadores distintos, sempre com o suporte do material concreto.

Algumas habilidades deveriam ser enfatizadas e desenvolvidas pelos professores para um aprendizado mais eficiente, mais significativo. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, trazem importantes contribuições no que tange às frações.

> Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos cotidianos e históricos e exploração de situações-problema em que indicam relação parte-todo, quociente, razão ou funcionam como operador.
> Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.
> Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema.(BRASIL, 1998, p.71).

Essas indicações, citadas pelos PCN de Matemática, podem não resolver totalmente os problemas que percebemos nas salas de aula e nos nossos alunos, mas certamente amenizam e minimizam grande parte das dificuldades que deparamos no meio escolar.

> O estudo de Grandezas e Medidas é outro articulador entre diversos conteúdos matemáticos, por proporcionar um vasto campo de problemas que permitem consolidar e ampliar a noção de número e possibilitar a aplicação de noções geométricas.
> A utilização dos instrumentos de medida é fundamental para iniciar a exploração dos significados e usos de termos como algarismo duvidoso, algarismo significativo, ordem de grandeza, erro de medição e arredondamento. Neste ciclo, o trabalho com essas noções pode ficar restrito às primeiras aproximações, reservando para o Ensino Médio seu aprofundamento. Ao discutir esses conceitos, o aluno poderá perceber que todas as medidas são inevitavelmente acompanhadas de erros, identificando uma dimensão da Matemática que é o trabalho com a imprecisão.
> Também com o objetivo de ampliar a noção de medida, indica-se o estudo de grandezas determinadas pela razão de duas outras, como a densidade demográfica, ou pelo produto, como a energia elétrica (kWh). (BRASIL,1998, p.85).

Medidas, como citado pelos PCN de Matemática, é um tópico bastante amplo e de um grande significado na matemática como todo. Pode-se relacioná-la com diversos temas, entre eles, as frações naturalmente. Se elas surgiram, aparentemente,através das medidas no Egito, porque não explorar essa parte histórica e algumas situações do dia a dia do aluno para trazer esse conceito para a sala de aula? É importante observar, que o objetivo nesse contexto não é trabalhar com as unidades de medidas, com as operações ou transformações inseridas nesse tema; e sim com o significado "Medida", da fração. Em outro momento, entraria as unidades de medidas, nomenclaturas, transformações, operações, etc. Depois de administrar os dois assuntos, poderia criar e resolver exercícios que trabalhasse com ambos os tópicos.

Medida é um tópico que pode auxiliar para o desenvolvimento da habilidade apresentada no texto da BNCC. A norma nos diz que: espera-se que os alunos "desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações". (BRASIL, 2017, p. 265).

A BNCC indica que o trabalho com frações deve se iniciar no 2º ano do Ensino Fundamental e ser desenvolvido até o 8º ano. Essa aprendizagem, de forma gradual, pode favorecer uma aprendizagem mais consistente deste tópico.

CAPÍTULO II

SIGNIFICADOS SOBRE FRAÇÕES E ABORDAGEM INTRODUTÓRIA NA SALA DE AULA

Este capítulo traz apontamentos sobre a etimologia de alguns termos relativos às frações; aspectos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1995, 2009); e significados de fração, para os quais adotamos um aporte teórico baseando em Kieren (1976), Campos, Magina e Nunes (2006).

2.1. Primeiras considerações -a etimologia do termo fração

Iniciaremos trazendo o significado de alguns termos usuais no conteúdo de fração e suas respectivas fontes, como: fração, numerador, denominador, avos.

Quadro 2 - Termos relacionados à fração

TERMO PESQUISADO	FONTE
Fração: 1 Ato de dividir ou quebrar. 2 Divisão de uma coisa em partes. 3 Parte ou partes iguais de um todo em relação a ele. 4 Mat. Número que exprime um ou várias partes iguais em que se divide uma unidade ou inteiro. 5 Arit. Quociente indicado de dois números inteiros.	Michaelis
Numerador: Termo de uma fração ordinária (fração cujo denominador não é potência de 10), que fica sobre o denominador, ambos separados por um traço horizontal; indica quantas partes se tomaram das portes iguais em que se dividiu aunidade.	Michaelis
Denominador: Termo de um número fracionário que se escreve por baixo do traço, e indica em quantas partes foi dividida a unidade.	Michaelis
Fracção: s. Do lat. Tardio *fractiõne*, acto de quebrar; pedaço, fragmento; fractura (de membro)	Machado
Fração: sf. ato de partir, quebrar, dividir parte de um todo	Cunha

Fonte: Michaelis (1998); Machado (1960); Cunha (s.d.)

O termo "AVOS", usado para a denominação de frações com denominadores maiores que dez, não se encontra nos dicionários pesquisados. Sebastiani (2006), no seu artigo "*Onze avos, doze avos,.. De onde vem este termo "Avo"*?,nos relata que: o "termo "*avo*", que aparece nas designações das frações a partir de um onze avos, não tem até hoje uma explicação na história da matemática". Tal termo veio do oitavo, de acordo com pesquisas em enciclopédias e dicionários feitas pelo autor. Este sufixo foi adotado pelos espanhóis e portugueses, "que o emprega como palavra na designação de frações cujos denominadores são maiores que dez". A hipótese do autor, nesse artigo, é que o termo mencionado "deriva do harmônico pitagórico oitava, que chegou à Espanha pelos árabes e foi latinizado, chegando, também, a Portugal". Ele finaliza o artigo relatando que: "somente esses dois países que o adotaram para designar a parte fracionária a partir do décimo". (SEBASTIANI, 2006, p. 107).

2.2 – Surgimento da discussão sobre os significados de fração

Thomas Kieren (1976)é o primeiro pesquisador a fazer considerações a respeito dos números racionais, discutindo diferentes perspectivas e indicando sete interpretações para conceituar fração:*quociente*, *classe de equivalência*, *razão*, *operador multiplicativo*, *parte-todo*, *medida* (incluindo parte-todo), *números decimais*.Segundo ele, a interpretação e a compreensão destessignificados levariama um maior entendimento dos números fracionários. Kieren (1976, p. 102) afirma que "a maioria dos materiais curriculares escolares simplesmente tratam os números como objetos de cálculo".

O artigo de Kieren (1976), "*On the mathematical, cognitive, and instructional foundation of rational numbers*" tem repercussão entre os educadores matemáticos, que passam a desenvolver pesquisas focadas nos significados de fração propostos por ele.

Fundamentado em Kieren, os pesquisadores Behr *et al*. (1983) tratam dos mesmos significados de fração, contudo indicam *medida* e *parte-todo* como dois modelos distintos (CARDOSO, MAMEDE, 2015). Posteriormente, o próprio Kieren (1988) vai afirmar que os cinco significados *parte-todo*, *quociente*, *medida*, *razão* e *operador* são básicos para que o aluno compreenda os números racionais. (CAMPOS, 2013).

A partir dos trabalhos de Kieren (1980), Nunes (2003) afirma que uma melhor apreensão do conceito de fração ocorre quando explorado os seus cinco significados: *número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo*. Ao trabalhar cada um desses significados, é relevante teros invariantes operatórios dos conceitos explicitamente presentes. (MAGINA e CAMPOS, 2008, p.28).

No ensino de fração o significado *parte-todo* é evidenciado; divide-se uma figura em partes de áreas iguais, destacam-se algumas normalmente pintando-as e a fração é nomeada como sendo "o número de partes pintadas sobre o número total de partes e analisar a equivalência e a or- dem da fração por meio da percepção". (MAGINA e CAMPOS, 2008, p 28).

Os professores podem trabalhar com problemas de lógica como alicerce para as ideias de fração. Por exemplo: na divisão de um bolo por uma quantidade de pessoas, observa-se uma relação inversa entre divisor e quociente; o aluno perceberá que ao aumentar a quantidade de pessoas (o divisor), o pedaço diminuirá (o quociente) (MAGINA e CAMPOS, 2008, p.28).

2.3. Breves apontamentos sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

Para trazer alguns elementos da teoria de Vergnaud, nosso aporte teórico se fundamenta em Vergnaud (1995, 2009) e em Campos, Magina e Nunes (2006). O nosso propósito é somente indicar determinados aspectos da teoria de Vergnaud que estão ligados aos significados de fração em trabalhos com este conteúdo no ambiente escolar.

A Teoria dos Campos Conceituais foi elaborada pelo psicólogo francês Gèrard Vergnaud.

> A Teoria dos Campos Conceituais tem por premissa primeira que o conhecimento emerge de resolução de problemas, sejam eles de caráter teórico ou prático. Com isso, Vergnaud está querendo dizer que o conhecimento não surge simplesmente por que sem razão alguma, apenas por diletantismo, alguém resolve elaborar uma teoria sobre algo; igualmente esse conhecimento não surge por meio de geração espontânea. (MAGINA, s.d., p. 1).
>
> Uma segunda premissa tomada pela TCC [Teoria dos Campos Conceituais] é que o conhecimento emerge a partir da ação do sujeito sobre a situação (...). e Vergnaud completa afirmando que essa ação precisa de uma **reflexão** para que não se torne apenas uma competência adquirida, mas sim, que encaminhe na direção e formação e desenvolvimento de um conceito. (MAGINA, s.d.).

O próprio Vergnaud (1995, p.1) indica que "a Teoria dos Campos Conceituais não é específica da Matemática, embora inicialmente tenha sido elaborada para explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas e multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra". Ele também destaca que o campo conceitual é, ao mesmo tempo, um conjunto de situações e um conjunto de conceitos interligados. (VERGNAUD, 2009, p. 86).

Vergnaud concebe que a construção de um conceito não é imediato, ele demanda um tempo para se consolidar. Ele se apóia na tríade: situação, invariante e representação (S, I, Y). Um conceito é formado por essa tríade.

Neste sentido, teríamos:

> S – conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência)
>
> I – conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado)
>
> Y – conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante). (VERGNAUD, 1995,p.8).

Ou seja, o conjunto de situações é o que dá significado ao objeto; o conjunto de invariantes está ligado às propriedades e procedimentos indispensáveis que permitem definir o objeto. O conjunto das formas de linguagem é o "conjunto de representações simbólicas que permite relacionaro significado desse objeto com as suas propriedades”. (CAMPOS, MAGINA e NUNES, 2006, p.126).

Os invariantes são explícitos –“quando as propriedades do objeto e os procedimentos para resolver o problema” – ou implícitos – “quando o sujeito faz uso correto dos procedimentos, porém não tem consciência das propriedades que subjaz a esse procedimento que ele próprio usou para resolver o problema”. Ordem e equivalência são os invariantes das frações (CAMPOS, MAGINA e NUNES, 2006, p.126).

Um conjunto de situações dá sentido ao conceito.

Vergnaud (1995, p. 1) afirma que um conceito “não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se nos interessamos por sua aprendizagem e seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.” Ele também adverte que o conceito de situação está relacionado à tarefa, ou seja, atividades que o professor elabora. Em outras palavras, a situação estaria relacionada com “o contexto, no qual o problema (ou tarefa) se encontra inserido, de forma a contribuir, para que os conceitos presentes nessa situação ganhem significado.” (MOUTINHO, 2005, p. 14). O professor deveria elaborar diversos tipos de situações-problema para conduzir suas aulas, pois um conceito não deve ser apresentado unicamente por uma situação.

Enfim, se faz necessário um conjunto de representações simbólicas, as quais são empregadas para retratar simbolicamente o conceito, as propriedades inerentes e as situações.

Para Vergnaud (2009, p. 86), “o significado de um conceito não vem de uma situação apenas, mas de uma variedade de situações e que, reciprocamente, uma situação não pode ser analisada com um conceito sozinho, mas sim com váriosconceitos”.

Voltando-nos para o tópico frações, as situações envolveriam os significados de fração a serem considerados: *parte-todo, número, quociente, operador multiplicativo* e *medida*, entre os enumerados por Kieren (1976). Representações simbólicas, diferentes situações e diferentes significados. No contexto curricular, o trabalho com esses cinco significados de fraçãopropiciariam uma melhor apreensão e entendimento do conceito de fração. As situações devem ser contextualizadas de modo a gerar significado aoconceito.

O ensino de frações, baseado apenas em situações que focam o*parte-todo,* traz empecilhos para a ampliação do campo conceitual. Seria importante trabalhar os cinco significados já explicitados e também a relação entre eles.

2.4. Os significados defração e estratégias didáticas

As autoras Campos, Magina e Nunes (2006), como aporte teórico das nossas considerações para trabalharmos e analisarmos os conceitos de fração, apresentam cinco “significados de fração” –

parte-todo, número, quociente, operador multiplicativo e *medida* – que apresentaremos a seguir, sendo que algumas estratégias foram por nós elaboradas.

Significado Parte / todo– definição

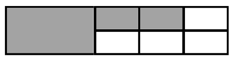
Este significado aparece predominantemente no ensino de frações, em todos os livros (didáticos e paradidáticos). Representa um todo dividido em "*m*" partes com áreas iguais (denominador), sendo cada parte representada por 1/me delas são tomadas "*n*" partes (numerador), representando na forma n/m em um processo de dupla contagem.

- Exemplo

  Dividir uma unidade em quatro partes iguais e tomarmos uma delas ¼ em um processo de dupla contagem.

Estratégias sugeridas

Cabe aqui uma observação pertinente, que muitos autores não fazem na explicação desse significado. O procedimento de dupla contagem se dá, contando as partes consideradas no numerador sobre o total das partes queo todo foi divido; este processo só pode ser considerado se todas elas possuírem áreas iguais. Na figura abaixo, por exemplo, as áreas destacadas não são iguais. A dupla contagem simples, 3/7,sem levar em consideração esse quesito, estaria errada. A complementação da figura, em áreas iguais, faz-se necessário para executar o procedimento corretamente, achando o resultado 6/10.



O recurso "**parte-todo**" também é eficaz para mostrar as operações de divisões. Frações equivalentes podem ser usadas nesta operação. É fácil mostrar, com sobreposição de frações equivalentes, numa cartolina ou material similar que ¼ é a metade de ½, ou 1/6 é a metade de 1/3. Frações equivalentes é um invariante significativo neste contexto. É um tópico da matemática que serve como pré-requisito de vários outros.

Significado Número– definição

Assim como número natural, o número racional na forma de fração pode comparecer em situações matemáticas que não precisam referir-se especificamente a quantidade.

Estratégias sugeridas

Uma maneira de trabalhar esse significado é pedir ao aluno para posicionar um número racional na forma de fração na reta numérica. Alguns livros didáticos não abordam esse significado, levando muitos alunos a pensarem que a fração não é um número.

Ordenar frações em ordem crescente ou decrescente também ajuda a fixar esse conceito. A ordenação é um invariante que vários autores chamam atenção da sua significância perante o tema de frações.

É bom lembrar que trabalhar com frações unitárias, como nos lembra Bertoni (capítulo I), é de extrema utilidade para diversos tópicos inseridos nesse contexto.

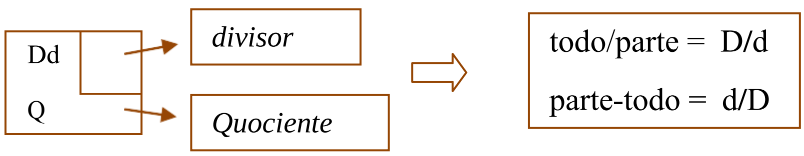
- Exemplo

  Ordenar as frações: 1/2, 1/4,1/3, 2/5 e 2/9 em ordem crescente e representá-las na reta numérica.

  Solução: $2/9 < 1/4 < 1/3 < 2/5 < 1/2$

Significado Quociente - definição

Retrata o resultado de uma divisão entre duas grandezas correspondentes ao numerador e denominador. O numerador seria o dividendo (o todo) e o denominador o divisor (a parte), D/d e $d \neq 0$.



Estratégias sugeridas

É mister lembrar que o quociente é o resultado de uma divisão. Aqui, nesse conceito, há uma dificuldade em expressar a fração que representa a ideia desse significado. Alguns alunos e professores possuem um conceito errôneo de fração como sendo somente *"parte-todo"* (d/D). Esse conceito está tão impregnado, infiltrado na mente de várias pessoas, que as dificultam perceber que, em algumas situações, esses valores são invertidos, isto é, o conceito seria *"todo/parte"* (D/d). É o caso de dividir uma quantidade de elementos por uma quantidade de grupos, ou pessoas, sendo que esses são superados por aqueles. São as frações impróprias, cujo numerador é maior que o denominador.

- Exemplo

Dentro de um isopor há 44 picolés. Quantos picolés ganhariam quatro crianças, se dividirmos de maneira equânime?

Solução: 44 : 4 = 11.

Significado Operador multiplicativo - definição

Como o próprio nome sugere, atua como um fator multiplicador que irá transformar o valor do número através de uma ação multiplicativa que se imprime sobre o próprio número nesse processo. Um dos fatores será a fração e o outro o número que se faz referência.

Estratégias sugeridas

Quando pedir, por exemplo, para calcular 4/5 de uma determinada quantidade, podemos mostrar, inicialmente, 1/5 da quantia – ou seja, dividir a quatidade "inteira" por 5 e, depois, somar o valor encontrado, com ele mesmo, 3 vezes ou, simplesmente, multiplicá-lo por 4.

- Exemplo

Uma jarra de suco tem capacidade de 2 litros (=2000 ml). Se 4/5 da jarra possui suco, quantos mililitros (ml) de suco ela tem?

Solução: 2000 : 5 = 400; 400 + 400 + 400 + 400 = 1600 ml

ou 400 x 4 = 1600 ml

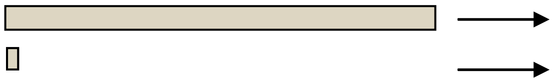
Medida - definição

Toma-se uma determinada unidade como referência e verifique quantas dessas partes caberão na grandeza que se quer medir. Se esta não for múltipla daquela, trabalha-se com uma subunidade da unidade referência.

Estratégias sugeridas

Nesse significado, devemos trabalhar com a ideia de comparação. Supondo-se que se queira medir um determinado comprimento que possui três metros e quinze centímetros. Se for utilizado, para medição, um padrão de um metro, sem a marcação de centímetros, não se pode executar essa tarefa de modo satisfatório. Logicamente, para ter uma medida mais exa- ta, seria necessário termos um submúltiplo do metro.

Supondo que uma pessoa tem a sua disposição, para medir um determinado comprimento, 40 sarrafos (pedaços de madeira), 20 de cada medida conhecida, como representado na figura abaixo:



Sarrafo de 100 cm (ou 1 metro)

Sarrafo de 1 cm

Qual a quantidade mínima de sarrafos seria necessária, colocando um após o outro, para medir esse comprimento?

A metodologia que deverá ser feita para executar essa tarefa, é desenvolver a ideia da comparação para verificar quantos sarrafos de 100cm e quantos de 1cm seriam suficientes para preencher a dimensão pedida.

Outra situação, considerada como medida, é calcular a chance de ocorrer um evento; representa-se pelo quociente do número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis.

- Exemplo

Qual a chance (ou probabilidade) de sair um número primo ao lançarmos um dado não viciado de seis faces?

Solução: Números primos =2;3 e 5. Chance = Probabilidade (=P). P = 3/6 =1/2 = 0,5 ou 50%.

Esse significado da fração, *medida*, é muito realçado pela BNCC[6] (2017). Vejamos alguns pontos relevantes destacado por este documento normativo.

Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária.

Pela BNCC, nos "anos iniciais do Ensino Fundamental, a expectativa é que os alunos reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação por meio de um número". (BRASIL, 2017, p. 273).

O texto normativo sugere resolver, sem uso de fórmulas, "problemas oriundos de situações cotidianas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos) e capacidade e volume (de sólidos formados por blocos retangulares)". (BRASIL, 2017, p.273).

"Sugere-se que esse processo seja iniciado utilizando, preferencialmente, unidades não con-

[6] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).

vencionais para fazer as comparações e medições, o que dá sentido à ação de medir, evitando a ênfase em procedimentos de transformação de unidades convencionais". (BRASIL, 2017, p.273). Medidas agrárias podem merecer maior atenção em sala de aula, dependendo geograficamente e do contexto no qual a escola (região agrícola, por exemplo) está inserida.

"No que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – anos iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos". (BRASIL, 2017, p.274). Além de conceituar e comparar fenômeno determinístico (resultado previsível) de um fenômeno aleatório (resultado imprevisível), é fundamental trabalhar nessa faixa etária, com diversos exemplos para que os alunos percebam a diferença entre eles.

Para que haja um bom desenvolvimento do conceito de probabilidade, que é uma medida também, deve-se ter um bom "desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis".(BRASIL, 2017, p.274).

Outras preocupações e dificuldades dos professores e órgãos públicos ocorrem ao auferir a prendizagem por parte dos alunos. Quando abordado apenas osignificado "*parte-todo*", o aluno pode aparentar ter aprendido ou mascarar uma aprendizagem conseguindo resolver alguns problemas. Esse significado trabalha apenas com a percepção do aluno perante uma determinada figura, desprezando a parte da lógica matemática inserida nos outros significados. Podemos garantir o aprendizado de fração abordando apenas um significado? Essa é a ideia que diversos autores e professores possuem de fração. Muitas vezes, o aluno só consegue executar, com certa habilidade, exercícios que trabalham a dupla contagem, isto é, a relação entre as partes destacadas ou pintadas (numerador da fração) e as partes que compõe a divisão da unidade, (denominador da fração).

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba. (NUNES e BRYANT, 1997,p.191).

Percebemos a veracidade dos autores, nas últimas séries do ensino Fundamental e Ensino Médio, período escolar em que os alunos não sabem e gostam pouco de trabalhar com frações. A maioria apresenta dificuldades nas operações elementares e, alguns, não detêm esses conhecimentos básicos. O texto de Nunes e Bryant é referendado pelas autoras Magina e Campos (2008). De acordo com estas, questões similares às trabalhadas em sala de aula e apresentadas pela maioria dos livros trazem difi- culdades para diversos alunos, mostrando dessa maneira o "baixo desempenho atingido pelos alu- nos brasileirosfrente a situações que envolvem o conceito de número racional, na sua representação fracionária". (MAGINA e CAMPOS, 2008, p. 26). A comprovação desse posicionamento pode ser avalizada pelos resultados oficias das avaliações bienais do SAEB (Sistema Nacionalde Avaliação da Educação Básica).

2.5. Aspectos complementares na aprendizagem das frações

A percepção da fração unitária, Bertoni (2005) esclarece com detalhesno livro *Número fracionário: primórdios esclarecimentos - Coleção Histórica da Matemática para Professores* - "um conhecimento mais consistente das frações unitárias em si mesmas é importante para garantir a construção das frações gerais pelos alunos, com compreensão." (p.14).

A autora faz referência às frações unitárias usadas pelos egípcios. A História da Matemática nos mostra, diversas vezes, uma metodologia mais simples e eficiente de ensinar; percebe-se que a maioria dos autores a despreza ou a desconhece. "O entendimento das frações unitárias envolve vários conhecimentos básicos para a construção conceitual do número fracionário, que devem ser explorados em sala de aula". (BERTONI, 2005, p.14).

Há também uma sugestão de se trabalhar com as frações unitárias objetivando responder os seguintes questionamentos:

> – Em quantas partes o inteiro foi dividido para se obter aquelafração?
> – Quantas daquelas frações são necessárias para compor ointeiro?
> – Quantas daquelas frações são necessárias para compor metade do inteiro?.(BERTONI, 2005).

Uma ordem que leva a uma boa compreensão, segundo a autora, é:

> – Trabalhar suficientemente sem símbolos (até que o aluno não tenha mais dúvidas sobre o significado das frações, dadas por seus nomes, nem sobre as relações entreelas).
> – Introduzir símbolos para as frações unitárias: ½; ¼;1/3;1/5etc.
> – Referir-se a uma fração pelo número que indica a quantas frações unitárias (e a qual) elas se referem: 7 de 1/10 (sete pedaços de 1/10 cada um); 4 pedaços de ½ (quatro pedaços de ½ cadaum).
> – Finalmente, representar 7 pedaços de 1/10 cada um por 7/10; 4 de ½ por 4/2. (BERTONI,2005).

Esquemas, de acordo com Bertoni, que devem fazer parte do repertório das crianças, com compreensão, são:

> – Comparar duas frações de mesmo denominador observando o numerador:quanto maior o numerador, maior é a fração.
> – Comparar duas frações de mesmo numerador observando o denominador: quanto maior o denominador, menor é afração.
> – Comparar duas frações de numeradores e denominadores diferentes usando o inteiro como referencial. Se uma delas é maior que o inteiro e a outra é menor, fica clara a ordenação entre elas. Por exemplo, 9/7 é maior que12/15.
> – Comparar duas frações de numeradores e denominadores diferentes usando a metade como referencial. Se uma delas é maior que a metade e a outra é menor, fica clara a ordenação entre elas. Por exemplo, 4/7 é maior do que 8/18. (BERTONI, 2005, p.15).

Um aspecto relevante no processo de avaliação e aprendizagem é o "*erro*" que os alunos cometem. O erro deve ser levado mais a sério por parte dos educadores para auxiliarem seus alunos. Pesquisar o porquê daquele erro!

Beatriz D"Ambrosio (1989) disserta no seu artigo, *Como ensinar Matemática hoje*?,que o erro é um sinal que houve falha em algum momento na aprendizagem e que merece toda atenção e estudo por parte do professor. Muitas vezes, o aluno demonstra que aprendeu um conceito matemático através de respostas de exercícios e com o passar do tempo, ou com uma abordagem diferente em algum exercício, ele nos surpreende com erros inesperados. "É apartir do estudo dos erros cometidos pelos alunos que poderemos compreender as interpretações por eles desenvolvidas". (D"AMBROSIO, B., 1989, p.17).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, destinados ao 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, tratam essa questão da seguinte forma:

> Ao levantar indícios sobre o desempenho dos alunos, o professor deve ter claro o que pretende obter e que uso fará desses indícios. Nesse sentido, a análise do erro pode ser uma pista interessante e eficaz.
>
> Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução.
>
> Ao procurar identificar, mediante a observação e o diálogo, como o aluno está pensando, o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode interferir para auxiliá-lo.
>
> Quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido. Se, por outro lado, todos os erros forem tratados da mesma maneira, assinalando-se os erros e explicando-se novamente, poderá ser útil para alguns alunos, se a explicação for suficiente para esclarecer algum tipo particular de dúvida, mas é bem provável que outros continuarão sem compreender e sem condições de reverter a situação. (BRASIL, 1997, p 41).

Romper com essa visão internalista da Matemática significa dar ênfase a um ensino mais intuitivo e menos formal, que possa estabelecer conexões com outras áreas do conhecimento.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS E PARADIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

3.1. O significado e o valor do Livro Didático

O livro didático é a principal, se não for a única, em alguns lugares do Brasil, ferramenta ou fonte de consulta do professor para trabalhar o conteúdo com os alunos, no Ensino Básico e mesmono ensino superior, como alega Gatti Júnior (1997). É necessário lembrar que, em algumas localidades do nosso país, há diversas pessoasnão formadas lecionando, ou formadas em áreas afins, desempenhando funções acadêmicas por carência de profissionais. Estudos como os de Vighi (2008) e Borges (2011), sobre a profissionalização de professores leigos, indicam que a formação docente ainda é preocupante no país.[7] Nesse contexto, aumenta mais ainda a influência e notoriedade de um livro escolar. Sua função é primordial, diante deste conjunto de circunstâncias, seria possibilitar uma oportunidade de um bom aprendizado para crianças, jovens e adultos.

O livro didático tem uma grande importância no processo educacional. Ele é o principal norteador ou fonte de pesquisa dos educadores e alunos (COSTA e ALLEVATO, 2010; AZEVEDO, 2004). A grande maioria dos professores segue fielmente a distribuição dos conteúdos apresentados neste material, a não ser que haja um planejamento divergente da sequência dos tópicos apresentados nele. É compreensível os professores tomá-lo como principal referência por diversos motivos, o principal deles está relacionado à distribuição dos conteúdos.

Depois de passar por uma graduação, em diversas disciplinas da matemática superior, como cálculos, álgebras, geometrias, físicas, análise e outras matérias, espera-se que o professor de Matemática tenha capacidade de trabalhar os diversos assuntos teóricos relativos ao Ensino Fundamental e Médio. Mas ele não vai se lembrar da ordem dos tópicos de cada conteúdo e nem do processo pedagógico de como ensiná-lo. Seu direcionador principal será o livro didático. Provavelmente, vai confiar no livro, escrito na maioria das vezes, por autores graduados, qualificados, e com uma boa experiência em sala deaula.

Não podemos nos esquecer das estratégias que bons livros didáticosapresentam de "como" ensinar determinados conteúdos. Muitos deles apresentam várias figuras, reta numerada, tabelas, gráficos, quadros, pictogramas; diversas ferramentas que, bem conduzidas e aplicadas, podem trazer um bom auxílio no aprendizado.

No caso das frações, conteúdo presente nos programas de 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, que foi estudado há muito tempo por um graduado, o livro tem uma importância

[7] O Anuário Brasileiro da Educação Básica de 2019 mantém a caracterização do professor leigo

significativa, já que ele será o eixo principal do desenvolvimento das aulas administradas pelo professor. Esse mesmo posicionamento,podemos estender às professoras não especialistas, ou polivalentes. Essas devem ter um cuidado mais apurado, por trabalharem com crianças menores, que exigem uma didática mais refinada, cuidadosa, agregada a uma boa dose de carinho e afetividade para uma rela- ção saudável e produtiva. O livro didático para essa faixa etária, além de colorido e vistoso, como é a maioria, deve apresentar bons conceitos, abordagens claras com vocabulário compatível à faixa etária, exemplos relacionados com o dia a dia dos alunos, gravuras didáticas, atividades lúdicas, exercícios atraentes e variados, etc.

Brandão também vê nesse prisma. No seu artigo *O papel e a importância do livro didático no processo de ensino aprendizagem*, ele discursa:

> Parece ser consenso da importância do livro didático no processo de ensino e aprendizagem, pois ele auxilia, orienta e até mesmo direciona o currículo escolar e o processo de ensino aprendizagem.
> Sabemos que o livro didático, na maioria das vezes, é o único material utilizado pelo professor e pelos alunos. Ainda notamos, pela nossa prática, que para muitos professores ele é visto como verdadeiro e correto, o que faz com que seu uso seja feito de forma ingênua.
> Antes de utilizar o livro didático como um material de apoio nas aulas, o professor precisa conhecê-lo previamente – conhecer sua estrutura, sua proposta e possibilidades de trabalho com ou através dele, é necessário analisá-lo cuidadosamente. (BRANDÃO, 2014, p.1).

É notável a importância do livro didático, mas Brandão (2014) nos lembra de uma atitude ingênua por parte de alguns professores em relação a esse material de apoio, considerando-o único e quase perfeito. Os professores, que trabalharam pouco (ou nada) com outros livros didáticos, tendem a ter uma visão menos crítica e mais restrita, por faltar parâmetros para comparação. Mas não é raro acontecer com professores mais antigos, que se acomodam e não pesquisam nada além do livro didático adotado pela escola.

O anonimato do livro didático, embasando Corrêa (2000), é determinado por três fatores a considerar: o primeiro deles refere-se à sua natureza: “Livro feito para ser usado em certa série ou grau de ensino, vai sendo descartado na medida em que cumpre sua finalidade escolar”. A especificidade da leitura que é profundamente marcada por sua natureza, seria o segundo. “E o terceiro deve-se a um tipo de mentalidade dominante no Brasil, particularmenteno que se refere ao tratamento que é dado à memória de modo geral e à educação em particular”. (CORRÊA, 2000, p. 12).

Pode-se acrescentar que “provavelmente, nenhum material escolar sofreu tanto as influências das leis de mercado quanto esse. Fundamentalmente porque as políticas do livro escolar mantiveram conectados aos interesses estatais aos privados”. (CORRÊA, 2000, p. 22).

Ampliando a nossa visão do livro didático para uma dimensão da cultura social, Correa (2000) argumenta:

> O livro escolar, ao fazer parte da cultura da escola, não integra essa cultura arbitrariamente. É organizado, veiculado e utilizado com uma intencionalidade, já que é portador de uma dimensão da cultura social mais ampla. Por isso, esse tipo de material serve como instru- mento, por excelência, da análise sobre a “mediação” que a escola realiza entre a sociedade e os sujeitos em formação, o que significa interpretar parte de sua função social. (CORRÊA, 2000, p. 19),

A autora prossegue dissertando que “os conteúdos contidos no livro escolar, neste entendimento, fazem parte da cultura escolar, uma vez que representam um dos aspectos do currículo. Por isso, torna-se importante compreender currículo”. (CORRÊA, 2000, p. 20).

3.2. Análise doslivros

A análise dos materiais didáticos se pautou inicialmente nos significados de fração que estariam presentes nos livros didáticos e paradidáticos baseando no estudo feito de “significados de fração”, citados no segundo capítulo. Posteriormente, foram estabelecidas outras categorias de análise. Relativamente ao *contexto e desenvolvimento do tópico*, foi verificado como os livros trazemas ilustrações –se existem outras figuras geométricas, além das tradicionais (círculo, retângulo e quadrado) para indicar as frações e como estas são destacadas nessas representações; como estão propostos os exercícios e problemas, se há contextualização; o número de páginas dedicadas ao tópico. Em relação às *práticas*, se existem atividades ou propostas para utilização de material concreto, atividades lúdicas e se há abordagem histórica.

Os onze livros didáticos de Matemática analisados foram escolhidos aleatoriamente sendo o nosso foco selecionar livros publicados no século XXI que apresentassem o conteúdo frações. Estes pertencem ao acervo das bibliotecas de colégios e da PUC Minas aos quais tivemos acesso. Os livros didáticos analisados, destinados ao 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental e foram editados a partir de 2008. Quanto aos paradidáticos, selecionamos três que tratavam do tema frações.

3.2.1. Análise dos Livros Paradidáticos

Título: *O pirulito do pato*

Autor: Nilson José Machado
Ano: 2004

O livro *O Pirulito do Pato* apresenta um texto simples e infantil com 24 páginas, tendo como público alvo, crianças na faixa etária de 5 a 8 anos. A narrativa é apresentada em pequenos parágrafos, com rimas, na forma depoesia.

O autor narra uma história na qual a personagem Mamãe Pata chama os dois patinhos, Dino e Lino, pedindo para dividir o pirulito. O pato Dino dividiu dando o palito para o seu irmão. A Mamãe Pata explicou-lhe que a divisão não poderia ser daquela maneira, deveria dividir o pirulito ao meio, metade para cada um. Antes de efetuar a partição, chegou a pata Xoca, amiga da Mamãe Pata, com o seu filho Xato pedindo um pedaço do pirulito. Diante daquela situação, a Mamãe Pata disse que iria dividir o pirulito em três partes, dizendo “um terço para cada um” – já indicando a forma de nomear a fração.

O livro exibe uma figura de um pirulito circular mostrando a divisão em três partes iguais, ou seja, três setores circulares. Após efetuar a divisão, mostra as partes separadas e os patinhos esperando a sua terçaparte.

Posteriormente a partição, chega o pato Zinho. O pato Xato, percebendo a presença de mais um para dividir e deduzindo a diminuição do seu pedaço, expressou que ninguém tocaria na sua terça parte.

A narrativa mostra, de maneira lúdica, como fazer a divisão do pirulito em partes iguais, com pouca preocupação com os nomes dos termos da fração, na história, nomeiam-se “metade” e “um terço”. Evidencia-se que, quanto mais partes dividir o pirulito (o todo), menor fica o pedaço para cadaum.

A história continua com o Lino dividindo ao meio a sua terça parte e dando ao seu amigo Zinho. O autor finaliza a história expressando que todos ganharam um pedaço.

Após a narrativa, o livro apresenta algumas perguntas, tais como:

- Quantos patinhos chuparam partes do pirulito?
- Todos ganharam partes iguais?
- Se não, respondam, quem ganhou mais?
- O pato Zinho, quanto levou? Um terço? Um quarto? Um quinto? ou....

Posteriormente às perguntas, a obra mostra diversas figuras circulares divididas em partes iguais, realçando: duas (metade), três (um terço), quatro (um quarto), cinco (um quinto) e seis (um sexto) com desenhos e seus respectivos nomes.

Em seguida, o livro apresenta uma ilustração de um pirulito dividido em três partes iguais, sendo uma delas partida ao meio, evidenciando a fração um sexto.

Nas últimas páginas, o autor relata o resultado da divisão das partes de cada pato, cabendo um terço para Dino e Xato e um sexto para Lino e Zinho. Confirmam esses resultados exibindo uma figura de um pirulito (o todo) dividido em quatro partes, duas de um terço e duas de um sexto, lado alado.

O livro contempla os *significados parte-todo e quociente* assim como a relação inversa do divisor com o quociente, isto é, aumentando aquele diminui este. Essa ideia é evidenciada pela primeira vez na narrativa, quando o pato Xato recusa-se a dividir o seu pirulito na chegada do Zinho. É reforçada a relação inversa posteriormente, ao mostrar que ao dividir a sua parte, o pato Lino diminui o seu pedaço ao meio.

Título: *Doces Frações*

Autora: Luzia Faraco Ramos.
Ano: 1998

O paradidático *Doces Frações* apresenta catorze páginas grandes, muitas gravuras e um texto infantil. Tem como público alvo crianças na faixa etária de 8 a 10 anos. Uma das propostas é mostrar a relação da matemática com contextos do cotidiano.

A autora relata a história de uma menina, Adelaide, que estava muito feliz porque ia passear no sítio da avó. Ao chegar em casa, na hora do jantar, ela e seus pais dividem uma pizza em três pedaços iguais. A primeira página do livro mostra a figura que representa esta situação. Antes de começarem a comer, toca a campainha e Adelaide atende a porta. Eram três pessoas, sua avó, e duas crianças, Binha e Caio. Como não haviam jantado, eles assentaram à mesa e dividiram a pizza em seis pedaços, situação indicada na figura da segunda página. Adelaide ficou chateada percebendo que comeria a metade de antes.

As crianças foram para o sítio da avó de Adelaide após o jantar. No percurso, a menina ainda chateada pensou: “eu ia comer um pedaço em três e acabei comendo um pedaço em seis”. (RAMOS, 1998, p.4)

O livro mostra uma ilustração de duas pizzas lado a lado, uma dividida em três e outra em seis pedaços iguais, possibilitando a visualização das proporções. Introduz, desta maneira, frações equivalentes expondo as partes de um todo.

Em outra situação, a avó de Adelaide lhe diz que vendia tortas na praça. No final do dia, pediu a meninada que cortassem as tortas em pedaços do mesmo tamanho enquanto ia colher laranjas. Porém, as crianças fazem a divisão das tortas em pedaços diferentes. A de chocolate, dois pedaços iguais e a de morango oito. O livro mostra a divisão em duas e oito, com desenhos coloridos e um perto do outro, para que o leitor visualize as equivalências. Nesse momento, há uma conversa das duas meninas que mostra de maneira bastante lúdica a divisão de um todo em partes iguais. Adelaide pergunta a Binha porque estava chateada. Esta pensava que quanto mais partes dividisse o todo, maior seriam os pedaços. Aquela explica que é o contrário, quanto mais se divide menor fica. Esse diálogo mostra a ideia da relação inversa entre divisor e quociente.

Caio dividiu a torta de pêssego em seis partes iguais. Há uma figura mostrando a torta com as partes divididas em setores circulares. Ao voltar da colheita das laranjas, deparando com as repartições distintas, a avó ficou apavorada, questionando como venderia pedaços de tamanhos tão diferentes? As crianças sugeriram que os maiores seriam mais caros e os menores mais baratos. Adelaide relata à sua avó que essas divisões estão parecendo matemática e esta confirma falando que são frações. O livro mostra uma figura de um inteiro em forma de círculo, representando uma torta dividida em oito partes iguais e Caio dizendo que um oitavo quer dizer um pedaço em oito.

Há figuras mostrando várias tortas divididas em seis, duas e quatro partes iguais. Eles conversavam sobre as proporções das partes em relação ao todo. A autora apresenta, através das imagens, equivalências de dois pedaços de um oitavo com um de um quarto; quatro pedaços de um oitavo com um de meio, para que possam desta maneira, calcular o preço de cada um deles.

Adelaide pergunta ao Caio que fração fica na assadeira ao dividir a torta em quatro partes iguais e vender um pedaço de um quarto. O menino responde que vão ficar três pedaços. A menina insiste questionando qual é a fração e ele responde que se um pedaço de quatro é um quarto, três pedaços de quatro, são três quartos.

Caio se mostra espantado falando, à Adelaide, que se usa matemática no dia a dia e nem percebe. Esta responde que já sabia disso faz tempo. As crianças continuam conversando e descobrindo o preço dos outros pedaços fazendo comparações. Binha, ao comparar três pedaços de um sexto com um pedaço de meia torta, percebe a equivalência e conclui que: ao tomar o preço de meia torta e dividir por três, obtêm-se o valor desse pedaço.

O livro mostra uma equivalência dessas situações através de figuras adjacentes divididas em setores circulares. A autora termina a história com as crianças dizendo à avó que já sabiam calcular o preço de todos ospedaços.

A história realça os significados *parte-todo e quociente* além das equivalências de maneira lúdica, com bastante representações de imagens para destacar as correspondências. Destaca, na fração unitária, a relação inversa entre denominador e quociente ao dividir a pizza no início da história, em três e seis pedaços iguais.

A autora apresenta após a história, um encarte e duas folhas anexadas no livro para serem recortadas, com figuras de tortas divididas com as frações 1/2 , 1/4 e 1/8. Traz três propostas de jogos que podem ser executadas com o material que se localiza no fim do livro. Jogo 1 = Quem ganha o pedaço maior? Jogo 2 = Quem enche o prato primeiro? Jogo 3 = Quem vende uma torta primeiro?

Para cada jogo, descreve o material que pode ser utilizado, o objetivo do jogo e suas regras.

Título: *Frações Sem Mistérios*

Autora: Luzia Faraco Ramos.
Ano: 2003

O paradidático *Frações Sem Mistérios* é dividido em dezoito capítulos com 105 páginas. Tem como público alvo pré-adolescentes e adolescentes na faixa etária de 11 a 14 anos aproximadamente.

Os personagens principais são: Lino; Alice; Taís; Beto; o professor de Matemática, Daniel; Dona Rosa, proprietária de um sítio.

O livro está dividido em capítulos, com os seguintes títulos:

1. *Fim de férias, volta àsaulas*
2. *O bolo deabacaxi*,
3. *Nem tudo é o que pareceser*
4. *A casa misteriosa*
5. *Cartões que viram frações*,
6. *O fantasma assa pão*
7. *O prazer da descoberta*
8. *O mistéri ocontinua*
9. *Tipos, tipos e tipos*,
10. *Fração na prática,*
11. *Descobertas ao ar livre*
12. *Cheiro de terra*
13. *Tamanhos diferentes*,
14. *Águas dos céus*
15. *O professor sumiu*,
16. *Um convite ao diretor*, os alunos,
17. *Entre amigos*,
18. *Respostas e encontros*

Diversas situações apresentadas no texto remetem à utilização das frações em um contexto escolar e também fora da sala de aula, em uma tentativa de mostrar a teoria utilizada na prática, no cotidiano.

No primeiro capítulo, *Fim de férias, volta às aulas*, a autora começa narrando sobre Lino, um rapaz que ajudava, como garçom, o seu tio Zeca. Num determinado dia, o *pizzaiolo* não foi trabalhar, o tio foi fazer as pizzas e Lino, além de servir, foi cortá-las, atividade que nunca tinha feito. Cortou pedaços de tamanhos diferentes, mostrados na primeira página do livro. Essa foi a primeira ideia que o livro nos trás de fração, embora o conceito *parte-todo* as partes devem ser iguais, isto é, possuírem a mesma área; a partição em tamanhos distintos é mostrada na primeira página do capítulo. Dessa forma, as frações já aparecem nesse contexto implicando na ideia que as partes deveriam seriguais.

No segundo capítulo, outro personagem, Daniel começou a contar uma história: "houve um tempo que os homens não sabiam como explicar quantidades menores que um, como o pedaço de bolo que comemos. Era preciso criar um modo de representar quantidades menores que um, ou seja, as partes iguais de algo inteiro". (RAMOS, 2003, p. 14). Nesse capítulo a autora mostra o significado *parte-todo*com a partição de um inteiro, o bolo, em vinte pedaços sem apresentar nenhuma nomenclatura.

No quinto capítulo, *Cartões que viram frações*, o contexto é da sala de aula e o professor propõe atividades com cartões, nas quais está expresso o conceito de frações equivalentes.

No sétimo capítulo, *O prazer da descoberta,* também se encontra uma situação escolar, o professortrabalha a simplificação de frações. Essa tarefa continua no oitavo capítulo.

No nono capítulo, *Tipos, tipos e tipos*, o professor introduz os conceitos de frações: impróprias, próprias e aparentes, usando a mesma estratégia, explorando as percepções com o mesmo material e levando os alunos a perceberem suas características.

No décimo capítulo, *Fração na prática,* a situação apresentada é prática e em um ambiente que não é o escolar, no qual se insere a divisão de um terreno, no sítio deDona Rosa. As crianças representaram a situação em um retângulo, dividindo-o em quatro partes iguais, e perceberam uma aplicabilidade do conteúdo de frações estudado na escola.

No décimo primeiro capítulo, *Descobertas ao ar livre*, novamente em um contexto da sala de aula, o professor Daniel mostra as operações de soma e subtração com o mesmo denominador, usando materiais de cores iguais. Os alunos observaram que somar e subtrair com cartões de mesma cor, isto é, com o mesmo denominador, bastava contar a quantidade que resultaria na resposta da operação. O livro mostra os cartões azuis, que representam a fração 1/4 , fazendo a operação: 2/4 – 1/4 = 1/4. Os verdes de valores 1/6, executando 3/6 + 2/6 =5/6.

No décimo terceiro capítulo, *Tamanhos diferentes*, o professor Daniel propõe à turma somar pedaços distintos com fichas de 1/2 e 1/4, tamanhos desiguais. O livro mostra a representação desses cartões na segunda página do capítulo. Os alunos dizem que só sabiam somar frações com os mesmos denominadores. O professor lançou mais um desafio: “como contar pedaços de tamanhos diferentes ou como somar frações com denominadores diferentes?” (RAMOS, 2003, p. 67). Os alunos se envolvem com a atividade, e o professor, ao final lança um novo desafio: observar “com atenção a soma das frações com denominadores diferentes.” (RAMOS, 2003, p.71). Nesse capítulo também comparece a “PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES: Multiplicando ou dividindo os termos de uma fração por um mesmo número natural, diferente de zero, obtém-se uma fração equivalente à fração dada”. (RAMOS, 2003, p.72). Finalizando o capítulo, o professor apresenta um desafio para casa. “Pesquisar outra forma de encontrar o denominador”. (RAMOS, 2003, p.75)

No décimo quarto capítulo, fora da sala de aula, os alunos criaram outros exemplos. Com auxílio de Dona Rosa, que também havia atuado profissionalmente como professora, os alunos chegam a outras conclusões: que a operação inversa, ou seja, a divisão do menor múltiplo comum pelo denominador original resultaria no número que seria o fator multiplicativo dos termos primitivos, proporcionando a equivalência das frações. Nessa parte do livro, a autora não trabalha mais com as fichas mostrando as equivalências. Mostra-as usando representações de igualdade das frações, ilustrando com setas coloridas de vermelho as correspondências entre numeradores e denominadores.

No décimo quinto capítulo, no sítio da dona Rosa, os alunos se depararam com um dos canteiros da horta destruído. Perceberam que o estrago foi a metade do que Lino plantou, isto é, a metade de um quarto. A proprietária do sítio pediu aos alunos que calculasse aquela parte danificada. Depois de algum tempo, eles deduziram que deveriam dividir a área de todo o terreno em oito partes iguais para obter o resultado alvejado. O livro representa estas situações com figuras retangula- res e equações de frações equivalentes com setas relacionando numeradores e denominadores.

No décimo sétimo capítulo, o professor pergunta à turma se alguém poderia expor uma situação do dia-a-dia que uma fração tinha sido dividida. Uma aluna relatou que sua mãe tinha feito um bolo e guardado a metade, dividindo a outra parte em cinco pedaços iguais para as pessoas presentes na casa. Baseando no exemplo da aluna, o professor perguntou à turma quanto cada um comeu. O livro apresenta uma figura retangular dividida pela metade e uma das partes dividida em cinco outros retângulos iguais. E a operação escrita na linguagem matemática ao lado. Após algum tempo, eles chegam a conclusão que deveriam dividir o desenho em dez partes iguais, obtendo a resposta de1/10.

Beto apresentou outro exemplo, dizendo que ele, Alice, Taís e Lino tinham feito uma sociedade com dona Rosa e que repartiriam entre eles a metade do lucro. O professor pediu que calculasse a parte do lucro que cada aluno ganharia. Lino desenhou um gráfico de setor circular, conhecido como pizza, representando a situação com oito pedaços iguais. Chegaram a conclusão que cada um ganharia 1/8 do lucro total.

Daniel disse à turma que o denominador de todo número inteiro é um e lançou mais um desafio. “Como fazer essas divisões sem representação com desenhos”. Baseando em alguns exemplos e depois de algum tempo, chegaram a conclusão que bastava manter a primeira fração e multiplicar pela inversa da segunda. Após essa conclusão, Daniel questionou “quantas vezes 1/3 cabe em dois inteiros?”(RAMOS, 2003, p.99). Nesse momento, o livro mostra novamente dois cartões divididos em três partes iguais cada um.

Lino responde, baseando na representação dos cartões que cabem seis pedaços de um terço em dois inteiros. Daniel propõe em representar essa resposta em operações matemáticas. Taís representa a operação 2 : 1/3 = 2 x 3 = 6. A turma, gostando da demonstração dos cartões e da equação, pediu outro exemplo e Daniel perguntou “quantas vezes 1/6 cabem em 4/6”? (RAMOS, 2003, p.100)

Novamente começou representando em cartões de 1/6 e relacionou com a equação como no exemplo anterior. Na figura visualizaram quatro vezes e na equação acharam 24/6. Claudia achou estranho e Beto sugeriu simplificar a fração achando o valor quatro.

No quadro a seguir, nomeamos os capítulos e quais significados de fração foram identificados, se o autor ilustra as situações apresentadas com figuras e se são introduzidas terminologias referentes à fração.

Quadro 3 – Significados de fração no livro *Frações sem Mistérios*

Capítulos	**Significados**					**Ilustrações**	**Nomenclatura**
	Parte-todo	**Número**	**Medida**	**Operador Multiplicativo**	**Quociente**		
Fim de férias, volta às aulas							
O bolo de abacaxi					X	X	X
Nem tudo é o que parece ser	X					X	X
A casa misteriosa							
Cartões que viram frações							
O fantasma assa pão							
O prazer da descoberta							
O mistério continua							
Tipos, tipos e tipos							
Fração na prática							
Descobertas ao ar livre							
Cheiro de terra							
Tamanhos diferentes							
Águas dos céus							
O professor sumiu				X		X	X
Um convite ao diretor							
Entre amigos			X			X	X
Respostas e encontros							

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 4 – Resumo dos significados de fração

SIGNIFICADO	DEFINIÇÃO
Parte-todo	Partição de um todo em “n” partes iguais, em que cada parte pode ser representada como 1/n. A utilização de um procedimento de dupla contagem, partes tomadas e partes de um todo, é suficiente para se chegar a uma representação correta.
Número	Assim como o número inteiro, a fração nesse significado é representada por pontos na reta numérica.
Medida	Algumas medidas envolvem fração por se referirem a quantidade medida pela rela- ção entre duas variáveis. Uma determinada unidade é tomada como referência para medir uma outra. A probabilidade de ocorrer um evento é medida pelo quociente número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.
Operador multiplicativo	Comparece em situações em que se associa a ideia de transformação, ou seja, uma ação que se imprime sobre um número ou quantidade, transformando o seu valor nesse processo.
Quociente	Resultado presente em situação que envolve a ideia de divisão.

Fonte: Campos, Magina e Nunes (2006)

Através da análise de três paradidáticos encontrados no mercado, elaboramos o quadro 5, no qual indicamos a presença ou não dos cinco significados de fração.

Quadro 5 - Análise dos significados nos Livros Paradidáticos

Título	Autor (a)	SIGNIFICADOS				
		Parte-todo	Número	Medida	Operador Multiplicat.	Quociente
O pirulito do pato	Nilson José Machado	X				X
Doces Frações	Luzia Faraco Ramos	X				X
Frações Sem Mistérios	Luzia Faraco Ramos	X		X	X	X

Fonte: Dados da pesquisa

Como pode ser verificado no quadro 5, predomina nos paradidáticos analisados os significados*parte-todo e quociente*. Apenas, no paradidático *Frações sem mistérios,* encontramos os significados *parte-todo, quociente, medida e operadormultiplicativo.*

3.2.2 Análise dos Livros Didáticos

Como já foi mencionado, selecionamos onze livros didáticos de Matemática, sendo cinco do 4º ano, três do 5º ano e três do 6º ano, publicados entre 2008 e 2018.

Livros do 4º ano do Ensino Fundamental

Título: *Bem Me Quer*
Autoras: Ana Lúcia Bordeaux, Cléia Rubinstein, Elizabeth França, Elizabeth Ogliari, Vânia Miguel.
Ano: 2017

O livro *Bem Me Quer*, apresenta o conteúdo de frações no capítulo 8 com 27 páginas. As autoras trazem orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas e revelam aspectos históricos.

Tais aspectos são apresentados no início do capítulo com o título *Como surgiram as frações*, trazendo as seguintes informações:

> No Egito Antigo, há 5000 anos, à margem do rio Nilo, os agricultores que cultivavam terras deparavam com um problema: as águas do rio inundavam a região, todos os anos no período de Julho a Setembro, desmanchando as marcações que delimitavam o terreno. Os proprietários precisavam demarcar o limite dos seus terrenos quando as águas baixavam e novamente os funcionários do governo faziam as medições. Tais funcionários eram denominados de estiradores de cordas, pois os instrumentos de medição usados por eles eram cordas com a mesma unidade de medida, imposta pelo faraó. Nem sempre essa unidade de medida, durante as medições, cabia um número inteiro de vezes nos lados dos terrenos. Diante desta dificuldade, os estiradores pegavam essa unidade e dobravam ao meio, criando

> uma subunidade. Caso essa subunidade não fosse ideal para medir a sobra, eles pegavam a unidade de medida determinada pelo faraó, e dividia em três partes iguais, ou quatro, ou cinco, ou qualquer quantidade, até obter uma subunidade que permitisse fazer a medição, isto é, que coubesse um número exato de vezes na parte que sobrava.
>
> Essa subunidade utilizada pelos egípcios representa uma fração da unidade dofaraó.
> (BORDEAUX et al., 2017, p.184).

Os tópicos abordados são:

- fração de um inteiro;
- fração quando um inteiro é um grupo de elementos;
- fração como medida;
- leitura e escrita de frações;
- frações que correspondem a metade de um inteiro;
- adição e subtração de frações; probabilidade;
- localização de frações na reta numérica.

Após a história das frações, o livro reforça o *significado parte-todo* com um exemplo simples de folhas, que serão divididas para destacar as frações 1/2, 1/4 e 1/8.Além das ilustrações tradicionais, isto é, as frações representadas, através de divisões em partes iguais de retângulos e círculos, há outras figuras geométricas, como pentágonos e hexágonos.

Depois de alguns exercícios que pedem a representação da parte colorida ou destacada de uma figura, existem atividades contextualizadas. Percebe-se que não há nenhuma proposta diferente como dobraduras, recortes de cartões comparativos de tamanhos distintos para reforçar o conceito parte-todo.

As autoras contemplam o significado de *medida* introduzindo-o com exemplos comparativos. Dois lápis de tamanhos diferentes, sendo um a metade do outro, mostrando essa proporção numa figura, posicionando-os lado a lado. Apresentam uma ilustração, para reforçar este significado, que retrata a distância da escola a uma casa e esta a uma padaria mostrando que uma é quatro vezes a outra. Propõem uma atividade de comparação de medidas com duas fitas de comprimentos distintos, uma a quinta parte da outra, expostas de maneira adjacente.

Dentro do tópico fração como *medida*, realçam a ideia de probabilidades, apresentando alguns exercícios de jogos, tais como: roleta e dado.

Divulgam o *significado de número*, representando-os na reta numérica. Expõem este tópico apresentando segmentos de reta com alguns pontos posicionados em ordem crescente da esquerda para direita. Posteriormente, apontam alguns exercícios de associação dos valores de cada ponto marcado na reta numérica, com suas nomenclaturas.

O livro exibe váriasatividades variadas para trabalhar os três significados citados anteriormente, sendo algumas delas contextualizadas.

Título: *Conhecer e Crescer - Matemática*

Autora: Jaqueline Garcia

Ano:2011

O livro *Conhecer e Crescer – Matemática* apresenta o conteúdo de frações no capítulo 7 com 27páginas.

A autora não aponta orientações e sugestões pedagógicas e nem destaca parte histórica. Inicia o capítulo sem nenhuma situação problema. Introduz o conceito *parte-todo* com uma receita de bolo e ilustrações de comida, destacando as frações 1/2 e 1/4.

Os tópicos abordados são:

- frações de um inteiro;
- fração de uma quantidade;
- comparação de frações;
- frações equivalentes;
- probabilidade.

Além das representações tradicionais de fração com a utilização de retângulo e circulo, o livro nos evidencia formas geométricas variadas como: paralelogramo, pentágono, hexágono, decágono e uma ilustração diferente parecendo uma estrela de cinco pontas. Exibe figuras geométricas com marcações não adjacentes. Essas ilustrações estão inclusas nos exercícios que solicitam a representação da fração que corresponde à parte pintada do todo.

Verifica-se um trabalho de maneira excessiva com leituras de frações, sendo algumas sem uma aplicação real no dia-a-dia, como setenta e um três mil avos (71/3000).

Em algumas atividades, háfiguras coloridas e sólidos geométricos, como cubo, pirâmide, cone e cilindro. O livro apresenta várias atividades contextualizadas, porém, sem nenhuma proposta fora do padrão, isto é, não há atividades sugeridas relativas a recortes de papeis, dobraduras, utilização de cartões diferentes para comparação de frações.

Constatam-se, na obra, três significados, *parte-todo*, *medida* e *operador multiplicativo*. Os dois últimos apenas em exercícios. E, através de figuras geométricas adjacentes, é abordado o tópico de frações equivalentes.

Título: *Ligamundo*

Autora: Eliane Reame

Ano: 2017

O livro *Ligamundo*, apresenta o conteúdo de frações no capítulo 6 com 57 páginas.

Deparamos com orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas sem aspectos históricos.

A autora não introduz o conceito de fração com uma situação problema, mas começa o capítulo sugerindo uma dobradura de círculos para representar algumas frações, principalmente,metade e quarta parte de umtodo.

No capítulo são abordados os tópicos:

- partes de figuras e frações;
- fração e movimentação;
- proporcionalidade;
- multiplicação e divisão;
- multiplicação por decomposição;
- qual é a chance?;
- giros e ângulos;
- frações na reta numérica;
- comparação de áreas.

Além das figuras convencionais, a autora trabalha com pentágonos, hexágonos (regulares e não regulares). Exibe figuras geométricas com divisões em partes diferentes representando áreas distintas. Expõe muitos exercícios semelhantes e poucos contextualizados.

Mesmo retratando o processode dobradura para introduzir o significado *parte-todo*, não encontramos nenhuma atividade desta natureza e nem sugestões para se trabalhar frações através de recorte de papel, cartões ou materiais similares nas propostas apresentadas.

O significado de fração como *número*, abordado no tópico frações na reta numérica, é pouco explorado pela quantidade de páginas apresentadasno capítulo. Há duas páginas e algumas atividades para retratar este tópico.

O significado *quociente* comparece apenas em alguns exercícios. Nos tópicos *comparação de áreas* e *qual é a chance,* deparamos com o significado *medida* na obra.

Título: *Ápis*

Autor: Luiz Roberto Dante

Ano: 2017

O livro *Ápis* apresenta o conteúdo de frações no oitavo capítulo, com 30 páginas.

O autor retrata orientações pedagógicas nas bordas das páginas, mas não cita aspectos históricos.

O capítulo 8 é iniciado com uma situação-problema, mostrando também uma figura de uma pizzaria, levando o aluno a perceber frações nas propagandas expressas na ilustração,

Neste capítulo, são expostos os tópicos:

- situações que envolvem frações;
- frações e medidas;
- fração de um grupo de elementos;
- fração de um número;
- frações na reta numerada;
- comparação de frações;
- probabilidade;
- porcentagem;

- decimais;
- decimais maior que um;
- decimais e medida de comprimento;
- comparação de decimais.

Além de trabalhar com figuras geométricas para representar o significado *parte-todo*, o livro usa outras ilustrações como: lápis, peixinhos, balões, copos, balas, figurinhas, frutas e outras. Para expor o significado *medida*, exibe exemplos com barbante, tijolos, folhas e moedas. Apresenta poucos exercícios que retratam esse tópico, e nenhum deles é contextualizado.

Para o significado *operador multiplicativo,* encontramos mais atividades, sendo que algumas são contextualizadas.

O significado*número*é abordado de maneira superficial, exposto em meia página, sendo explorado apenas com um exercício de localização de algumas frações na reta numérica.

Após apresentar os tópicos de comparação de frações, probabilidade e porcentagem, o autor realça as equivalências entre frações e decimais. Aponta, em algumas atividades, relações entre áreas de figuras com porcentagem.

A quantidade de exercícios é adequada e variada, embora não haja um número expressivo de atividades contextualizadas.

Não verificamos em nenhum pontodo capítulo alguma proposta lúdicade atividades diferentes como: recorte de cartões, papel, dobradura ou similares.

Título: *Nosso Livro de Matemática* - 4º ano

Autores: Célia Maria Carolino Pires; Ivan Cruz Rodrigues

Ano: 2017

Nosso Livro de Matemática 4º ano apresenta o conteúdo de frações no capítulo 8, com 15 páginas.

Percebem-se, no livro, orientações pedagógicas no contorno das páginas, contudo, não retrata aspectos históricos.

Os tópicos abordados são:

- diversidade cultural;
- a receita de cuscuz;
- de dar água na boca;
- medidas dos ingredientes;
- as figuras da professora Julia;
- o beiju de Tainã;
- divisões de barra de chocolate;
- a terça parte;
- comparações de escritas fracionárias;
- tira para comparar frações;
- o que são números racionais;
- os números racionais e a reta numérica.

Os autores iniciam o capítulo com uma tabela expressando os dados que alunos coletaram da sua família,pais, avós, bisavós e outros antepassados, para descobrir suas origens. As perguntas, após a tabela, não expressam nada sobre frações.

Na segunda página, mostram uma situação que realça a presença de frações na receita de cuscuz. Após a receita, apresentam o significado*parte-todo* de maneira não tradicional, através de exemplos com ilustrações de xícaras. Reforçam este conceito com receita de massa de bolo e alguns exercícios com colheres e pizzas.

O livro apresenta as frações simbolizadas em figuras tradicionais, como retângulos e círculos mostrando quais frações representam as marcações das partes de um todo.

O significado*operador multiplicativo*é introduzido através de exercícios, sem nenhuma explicação teórica, assim como o significado *medida*. Nesses significados e nos demais, não se apresenta nenhuma atividade contextualizada.

O significado *número* exposto demonstra uma explicação mais consistente, relatando que o número racional pode ser representado na forma fracionária ou decimal. Observa-seque,para esse significado, os autoresnão apresentam nenhuma situação contextualizada. Existemalguns exercícios para fixar essa ideia, com a transformação de fração ordinária para fração decimal e vice-versa (1/4= 0,25; 0,5 = ½) – ou mais propriamente, destacando a escrita de números decimais.

Posteriormente, os autores apresentam a representação de frações na reta numérica finalizando o assunto. Identificamos poucas atividades no livro e, a maioria, se constitui em exercícios simples com pequenas variações, não apresentando qualquer contextualização. Não há propostas de atividades diferentes envolvendo dobraduras, recortes de papel, cartões, ou situações similares.

Livros do 5º ano do Ensino Fundamental

Título: *Nosso Livro de Matemática* - 5ºano

Autores: Célia Maria Carolino Pires; Ivan Cruz Rodrigues Ano: 2017

A obra *Nosso Livro de Matemática 5º ano* apresenta o conteúdo de frações nos capítulos 6 e 7, totalizando 23 páginas.

Os autores expõem orientações pedagógicas nas bordas das páginas, porém não discorrem, em nenhum momento, aspectos históricos, apresentando uma diferença em relação ao livro da mesma coleção e dos mesmos autores destinado ao 4º ano, no qual se evidencia tais características.

Os tópicos abordados no capítulo são:

- escritas fracionárias;
- cálculos na cozinha;
- os doces da mãe de José;
- divisão de folhas de papel;
- Pedro e divisão de partes iguais;

- Tiras coloridas;
- números em receitas;
- a ideia de razão;
- escritas equivalentes;
- diferentes representações;
- formas fracionária e decimal;
- comparações de números;
- diferentes representações de número racional.

No início do capítulo 6, não há nenhuma situação-problema e nemexemplo ou exercício contextualizado. Os autores introduzem uma atividade que retrata um diálogo entre José e sua mãe com uma ilustração de um bolo partido em oito partes e a criança dizendo que ia comer três pedaços.

Os autores utilizam apenas figuras retangulares e circulares para retratar o conceito *parte-todo*. Realçam, em alguns exercícios, ilustrações com formas divididas em partes diferentes com áreas distintas. Apontam também, em algumas atividades, relações entre frações, porcentagens e áreas de figuras.

Pires e Rodrigues destacam ordem de grandeza comas frações unitárias 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 e 1/10, através de nove tiras horizontais coloridas, posicionando-as lado a lado, para mostrar suas proporções em relação ao todo. Essa abordagem, diferente dos outros autores analisados, explora a parte visual, evidenciando a ideia inversa do divisor e quociente, isto é, aumentando-se o denominador o pedaço da tiradiminui.

O significado *número* é introduzido baseando-se nessa atividade citada anteriormente. Os autores apontam a ordem de grandeza das frações unitárias comparando-as e, posteriormente, retratam as demais.

Em nenhum momento, apresentam o significado *número* com a utilização da reta numérica. Pires e Rodrigueslançam mão de números decimais e porcentagens para tratar o significado de *operador multiplicativo*. O livro não traz sugestões de trabalhos com frações que envolvamdobraduras, recortes de papel ou cartão.

Título: *Aprender Juntos Matemática*

Autoras: Roberta Taboada; Ângela Leite

Ano: 2014

O livro *Aprender Juntos Matemática* apresenta o conteúdo de frações no capítulo 2, nasunidades 2, 3 e 4, num total de 46 páginas. Não existem orientações pedagógicas e nem aspectos históricos para o referido conteúdo.

São abordados os seguintes tópicos:

- dividir, fracionar e repartir;

- quocientes decimais;
- comparação de frações;
- frações equivalentes;
- simplificando frações;
- comparação de frações;
- adição e subtração de frações;
- estimativas e cálculos aproximados com frações;
- multiplicação com frações;
- porcentagem;
- divisão de fração porinteiro.

As autoras iniciam o capítulo com um texto que se refere a uma alimentação saudável. Discorrem sobre a sua importância e de alguns alimentos que contribuem para ter boa saúde, não apresentando as frações. Posteriormente, trazem situações com a mesma abordagem citada no início para introduzir o significado *parte-todo*. Expõem esse significado com figuras tradicionais, usando retângulos e círculos, contudo, apresentam marcações ora adjacentes, oranão.

São expostas diversas situações, lembrando história em quadrinhos, em figuras com os balõezinhos acima das pessoas, crianças e adultos. Através das informações inseridas nestes “balões”, são apresentadas questões que revelam frações.

O significado *operador multiplicativo* está inserido no tópico no qual se aborda porcentagem.

O significado de *número* é retratado com abordagem bem exemplificada, mostrando diversas atividades na reta numerada.

As frações equivalentes são expostas com ilustrações comparativas, tais como retângulos divididos em duas, quatro, oito e dezesseis partes com áreas iguais, um abaixo do outro.

Observa-se uma quantidade de exercícios variados, dos quais muitos são contextualizados.

Não há propostas de atividades diferenciadas como recortes de papel, cartões, dobraduras ou situações similares.

Título: *Conquista da Matemática*

Autor: José Ruy Giovanni Júnior

Ano: 2018

O livro *Conquista da Matemática*, apresenta o conteúdo de frações no capítulo 6, com 37 páginas.

A obra expõe orientações pedagógicas no contorno das páginas,porém não externaparte histórica.

São abordados os seguintes tópicos:

- partes de um inteiro;
- ideias de fração;
- numerador e denominador:

- os termos de uma fração;
- comparando frações com um inteiro;
- números mistos;
- frações equivalentes;
- simplificando frações;
- chances de ocorrência;
- frações e porcentagem;
- fazendo cálculos de porcentagem;
- frações, porcentagem e probabilidade.

O autor não começa o capítulo com situação-problema e nem com exemplo ou exercício contextualizado. Inicia tratando dos termos metade, um terço e um quarto. Indica estas situações com ilustrações representando frações em figuras circulares.

Giovanni Júnior exibe a ideia de fração, lançando mão de medidas de comprimento com duas figuras de formato retangular, posicionadas lado a lado. O mesmo acontece para introduzir os significados *medida* e *parte-todo*,comparando um pedaço de corda com palitos, posicionados de maneira adjacentes. Existem diversas figuras com formatos variados, tais comoretângulo, círculo, losango, pentágono, hexágono e prisma.

O autor explora figuras retangulares adjacentes, divididas em duas, quatro, seis e oito partes com áreas iguais para elaborar comparações equivalentes. Retrata o conceito de *operador multiplicativo* quando expõe o assunto de porcentagem.

Percebe-se o significado *número* quando são feitas comparações entre frações e inteiro. Não se apresenta a explicação desse significado, apenas um exercício,no qual há posicionamento de fração na reta numérica.

Existem diversos exercícios variados, entretanto, poucos contextualizados. Não hánenhuma atividade ou proposição de construção de dobraduras, recortes de papel e cartões ou situações similares.

Livros do 6º ano do Ensino Fundamental

Título: *Geração Alpha*

Autores: Carlos N.C. de Oliveira; Felipe Fugita

Ano: 2018

O livro *Geração Alpha* apresenta o conteúdo de frações nos capítulos 1 e 2 da unidade 5, perfazendo 41 páginas.

Os autores não trazem aspectos históricos, mas apresentam orientações e sugestões pedagógicas.

Destacam-se os seguintes tópicos:

- números racionais na forma fracionária;
- situações que envolvem frações;
- tipos de fração;
- números mistos;
- fração de um número;
- frações equivalentes;
- simplificação de frações;
- comparação de frações;
- operações com frações (soma, subtração, multiplicação edivisão);
- potenciação;
- porcentagem.

O livro inicia com um texto que cita um número racional com representação decimal. Os autores comparam essa representação com a fracionária. Posteriormente, exibem a representação de frações através de diversas figurasvariadas,além das tradicionais, retângulo e círculo, como: triângulos,pentágonos, hexágonos, e outras não geométricas, peixes num aquário, planta, copo, tubo e chave de boca. Apresentam marcações ora adjacentes, ora não, para representar partes de um inteiro, introduzindo, dessa maneira, o conceito *parte-todo*.

Oliveira e Fujita lançam mão de ilustrações como barras retangulares posicionadas lado a lado para comparar e ordenar frações, tanto com denominadores iguais quanto diferentes. Mostram a ordenação na reta numérica para evidenciar o significado de *número*. Apontam exemplos com valores monetários para introduzir o significado de *operador multiplicativo*. Percebe-se a inclusão, de maneira superficial e discreta, em alguns exercícios, o significado*quociente*.

O livro apresenta vários exercícios, com probleminhas de enunciados curtos sem quaisquer contextualizações. Não se encontra no livro recomendações para que o professor desenvolva o conceito de fração utilizando dobraduras, recortes de cartões ou atividades similares.

Título: *Matemática Compreensão e Prática*

Autores: Ênio Silveira, Claudio Marques
Ano: 2008

O livro *Matemática Compreensão e Prática* apresenta o conteúdo de frações no capítulo 5, com um total de 37 páginas.

Os autores retratam parte histórica, mas não indicam sugestões ou orientações pedagógicas.

Um pouco de história

“Na Antiguidade, os egípcios utilizavam frações unitárias, isto é, frações obtidas tomando somente uma parte de uma unidade dividida em partes iguais. A fração 2/3, é a única exceção”. (SILVEIRA e MARQUES, 2008, p. 134)

Observa-se uma ilustração, no canto superior à direita desta página do Papiro de Rhind, informando que se trata de um documento egípcio com data aproximada de 1650 a.C., trazendo frações unitárias.

A obra apresenta símbolos egípcios associados aos números 1/2, 1/3, 1/10 e 2/3.

Segundo os autores, as frações com numeradores diferentes de um, eram representadas pela soma de duas ou mais frações unitárias. Apresentam como exemplo: $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Ao lado da equação, representam os símbolos egípcios dos números 1/2 e 1/4. Também incluem a informação: “A partir do século XIII, as frações passaram a ser representadas como fazemos hoje, ou seja, por meio de uma barra separando um par de números (o numerador e o denominador)”. (SILVEIRA e MARQUES, 2008, p. 134)

No referido capítulo, são abordados os seguintes tópicos:

- a ideia de número fracionário;
- leitura de uma fração;
- frações impróprias, próprias e aparentes;
- número misto;
- frações equivalentes;
- simplificação de frações;
- redução de frações ao mesmo denominador;
- comparação de frações;
- adição de frações;
- subtração de frações;
- multiplicação de frações;
- divisão de frações;
- potenciação e radiciação de frações;
- expressões numéricas;
- problemas envolvendo frações.

Silveira e Marques iniciam o quinto capítulo argumentando que, no dia-a-dia, há situações que não podem ser medidas por números naturais. Ratificam essa informação com a foto de uma pizza cortada em setores circulares, de oito partes, faltando duas delas.

Para introduzir o significado *parte-todo*, os autores exibem figuras convencionais como retângulos e círculos, destacadas e acompanhadas das frações que representam as áreas pintadas.Apresentam exercícios com representação de frações com marcações variadas, ora adjacentes, ora não.Retratam as frações equivalentes com figuras em forma de quadrados posicionados lado a lado e divididos em três, seis, nove e doze partes de áreas iguais para proporcionar visualizações.

Não deparamos com atividades nem situações abordando o tópico de maneira mais lúdica, e trazendo significado para os alunos, como dobraduras, recortes de cartões ou cartolina.

Título: *Matemática Realidade e Tecnologia*

Autor: Joamir Souza

Ano: 2018

O livro *Matemática Realidade e Tecnologia* apresenta o conteúdo de frações no capítulo 5, com 19 páginas.

O autor expressa orientações e sugestões pedagógicas no contorno das páginas, entretanto, não identificamos aspectos históricos.

Merecem destaque ostópicos:

- os números racionais na forma defração;
- fração de uma quantidade;
- frações equivalentes e simplificação de fração;
- comparação de frações;
- adição e subtração de frações.

No capítulo, se encontram algumas figuras geométricas, além das tradicionais, retânguloe circulo como: triângulo, pentágono, hexágono e octógono, para trabalhar o conceito *parte-todo*.

São retratadas frações equivalentes através do posicionamento de quatro retângulos lado a lado, com duas, quatro, seis e oito divisões de mesma área, destacando-se a metade de cada um deles, facilitando a percepção da mesma parte equivalente.

Joamir Souza introduz o significado *medida* abordando, de maneira superficial, informações históricas em uma atividade, sendo a única referência histórica sobre frações encontrada no capítulo. Relata que, no Antigo Egito, usavam-se cordas demarcadas com nós para medir as terras destinadas ao plantio. Há uma ilustração de uma corda com seis nós, com o mesmo espaçamento entre eles, e símbolos egípcios, representando as frações: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10, 1/15.

Encontram-se exercícios sobre o significado *operador multiplicativo* usando unidade de tempo e capacidade, como 3/4 de hora e 8/25 de 1 litro.

O livro apresenta exercícios variados, exigindo que os alunos interpretem os enunciados. Contudo, não se encontra nenhuma proposta com atividades relacionadas à dobradura, recortes de cartolina ou algo similar.

Quadros-resumo relativos às análises

Elaboramos alguns quadros-resumo para se ter uma visão de todos os livros didáticos dentro das categorias analisadas. Os quadros 6, 7 e 8 relacionam onze livros didáticos com o(s) seu(s) respectivo(s) autor (es), os significados de frações e outras características contempladas por eles.

O quadro 6 refere-se aos significados de frações. Quais desses significados estão inseridos nos livros abordados. Antes da apresentação dos quadros 7 e 8, daremos algumas informações que auxiliarão no esclarecimento e interpretação do conteúdo de cada um deles.

Como os significados parte-todo e medida comparecem na maioria dos livros selecionados, realizamos uma análise desses significados separadamente verificando também as orientações e sugestões pedagógicas dos autores para os mesmos.

Quadro 6 - Significados de fração nos livros didáticos

Título	Autores	Ano	Significados				
			Parte-todo	Número	Medida	Operaor Multipliativ	Quociente
Bem Me Quer 4ª ed. 2017	*Ana Lúcia Bordeaux, Cléia Rubinstein, Elizabeth França, Elizabeth Ogliari, Vânia Miguel*	4º	X	X	X		
Conhecer e Crescer 3ª ed. 2011	*Jaqueline Garcia*	4º	X		X	X	
Ligamundo 1ª ed.2017	*Eliane Reame*	4º	X	X	X		X
Ápis 3ª ed. 2017	*Luiz Roberto Dante*	4º	X	X	X	X	
Nosso Livro de Matemática - 3ª ed. 2017	*Célia Maria Caroline Pires, Ivan Cruz Rodrigues*	4º	X	X	X	X	
Nosso Livro de Matemática - 3ª ed. 2017	*Célia Maria Caroline Pires, Ivan Cruz Rodrigues*	5º	X	X	X	X	X
Aprender Juntos 4ª ed. 2014	*Roberta Taboada, Ângela Leite*	5º	X		X	X	
Conquista da Matemática 1ª ed. 2018	*José Ruy Giovanni Júnior*	5º	X	X	X	X	X
Geração Alpha 2ª ed. 2018	*Carlos N.C. de Oliveira, Felipe Fugita*	6º	X	X	X	X	X
Matemática: Compreensão e Prática 1ª ed. 2008	*Ênio Silveira, Claudio Marques*	6º	X			X	
Matemática Realidade e Tecnologia 1ª ed. 2018	*Joamir Souza*	6º	X		X	X	

Fonte: Dados da pesquisa

O significado *parte-todo* é algo fundamental e, deste modo, era esperado que todos os livros o apresentassem, como foi possível constatar através da nossa análise.
Coincidentemente, o livro mais antigo *Matemática Compreensão e Prática*, de 2008, é o ú- nico que aborda apenas os significados *parte-todo* e *operador multiplicativo*. Somente os livros *Nosso Livro de Matemática* para o 5º ano, publicado em 2017, de Célia Maria Caroline Pires e Ivan Cruz Rodrigues, *Conquista da Matemática* para o 5º ano, publicado em 2018, de José Ruy Giovanni Júnior, *Geração Alpha* para o 6º ano, publicado em 2018, de Carlos N.C. de Oliveira e Felipe Fugita contêm todos os cinco significados pesquisados.

Podemos inferir que o fato de os significados de fração estarem sendo tema de alguns estudos no Brasil, já há algum tempo, pode ter influenciado os autores de livros didáticos a contemplarem outros significados em seus livros. No entanto, verificamos que o significado *Quociente* é pouco explorado pela maioria dos autores analisados.

Significado *parte-todo* com orientações e sugestões pedagógicas

Parte-todo é o significado contemplado por todos os livros didáticos e paradidáticos pertencentes a esse trabalho. Por essa razão, consideramos relevante analisá-lo com mais critérios e detalhes separadamente. Foi verificado que o mais frequente é a apresentação de representações de *parte-todo* com a utilização de quantidades contínuas, com indicação de figuras geométricas (principalmente retângulos e círculos), bolos, pizzas, chocolates etc, divididos em partes iguais – o denominador se refere ao número total de partes e, a quantidade das partes destacadas é o numerador da fração. No entanto, o significado *parte-todo* também pode se apresentar em situações com quantidades discretas.

Selecionamos dois exercícios e/ou atividades dos livros a fim de verificar as recomendações dos autores para o desenvolvimento dos mesmos. As orientações e sugestões pedagógicas comparecem nas bordas das páginas ou no *manual pedagógico*

Livros do 4º ano

Título: *Bem Me Quer*

Autoras: Ana Lúcia Bordeaux, Cléia Rubinstein, Elizabeth França, Elizabeth Ogliari, Vânia Miguel.

Ano: 2017

No livro, há representações geométricas tradicionais, como retângulos e círculos com marcações adjacentes, estas são observadas num exemplo introdutório do assunto e em exercícios dispostos em cinco páginas do capítulo. A maioria com figuras coloridas e partes pintadas para o aluno representar a fração associada à parte destacada.

Verifica-se a presença de retângulos, como representação geométrica tradicional, mostrando marcações não adjacentes em apenas um exercício, evidenciando, dessa maneira, pouca valorização desse item.

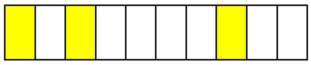
Deparamos com algumas representações geométricas não convencionais, como trapézios, hexágonos e triângulos de formas variadas (equilátero, isósceles e retângulo).

Não há nenhuma atividade para expressar, em porcentagem, uma determinada fração indicada em uma ilustração assim como figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas.

A seguir, dois exercícios mostrando a explanaçãodo tópico pelas autoras.

1) Carla pegou uma folha de papel e dividiu-a em 10 partes iguais. Depois ela abriu a folha e pintou três partes de amarelo. A figura abaixo mostra como ficou a folha de Carla.

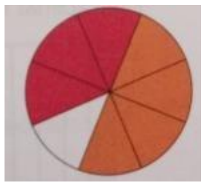
   Cada uma dessas partes é 1 *décimo* ou a *décima parte*



   a) A que fração da folha correspondem as partes pintadas?
   b) A que fração da folha correspondem as partes em branco?
   c) A quantos décimos corresponde uma folha inteira?
   (BORDEAUX et al., 2017, p.189).

2) Observe a figura e responda asquestões.

   a) Em quantas partes iguais o círculo está dividido?
   b) Cada parte é que fração docírculo?
   c) Que fração do círculo corresponde a parte:



   – Pintada de vermelho?
   – Pintada de laranja?
   – Em branco?
   (BORDEAUX et al., 2017, p. 187).

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas.

As autoras orientam o professor da relevância em mostrar aos alunos que o inteiro (ou a unidade) deve ser dividido em partes iguais, ou equivalentes, em comprimento, superfície (ou área), volume, etc. Sugerem trabalhar as equivalências de superfícies usando sobreposições ao dobrar folhas ao meio; dobrando sobre as diagonais, o segmento originário da ligação dos pontos médios dos lados maiores ou menores, e outros. Segundo as autoras, "é importante que cada aluno vivencie concretamente a ação de dividir em partes iguais". (BORDEAUX et al., 2017, p. 188). Fica evidente uma associação a conceitos geométricos nas atividades com dobraduras.

Título: *Conhecer e Crescer - Matemática*

Autora: Jaqueline Garcia

Ano: 2011

No texto, são incluídas representações geométricas tradicionais, como retângulos e círculos com marcações adjacentes, tanto nos exemplos iniciais do capítulo quanto em exercícios.

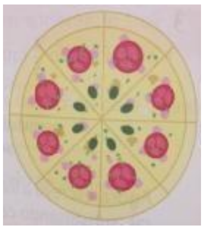
Observam-se retângulos e círculos com marcações não adjacentes, além de outras figuras como hexágono regular e paralelogramo.

A autora expõe, em exemplos, representações geométricas não convencionais como pentágonos e heptágonos e, em exercícios, hexágonos, octógonos e dodecágonos.

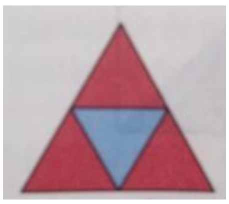
Não foram detectadas atividades teóricas e nem práticas relacionando porcentagem a uma determinada fração, assim como figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas.

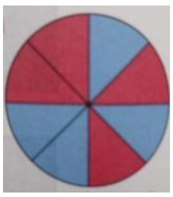
Transcreveremos dois exercícios, de modo a se verificar a exposição do tópico pelo livro:

1) Valter, Anselmo e Célia foram a uma pizzaria e pediram uma pizza como representada ao lado. Note que essa pizza foi dividida em 8 pedaços de mesmo tamanho. Valter comeu três pedaços, Anselmo quatro e Célia o restante. Que fração da pizza cada um delescomeu? (GARCIA, 2011, p. 198).



2) Escreva que fração de cada figura está pintada de vermelho e que fração está pintada de azul. (GARCIA, 2011, p. 198).





Orientações e sugestões didáticas no manual pedagógico

O capítulo de frações, nesta obra, começa apresentando uma ilustração de uma melancia e uma fatia cortada. A autora sugere ao professor propor ao aluno uma estimativa, através de um questionamento: de que parte da melancia a fatia cortada representa, e estimar quantas fatias semelhantes àquela são necessárias para representar toda a fruta. O objetivo, de acordo com Garcia, é explorar de maneira informal a ideia de fração de um inteiro. "Essa é uma oportunidade para avaliar seu conhecimento prévio sobre esse conteúdo e, partindo das afirmações ou até mesmo das dúvidas dos alunos, introduzir o estudo dos números fracionários”. (GARCIA, 2011, p.53).

Título: *Ligamundo*

Autora: Eliane Reame

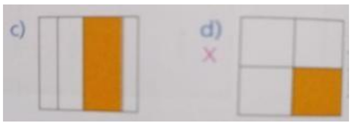
Ano: 2017

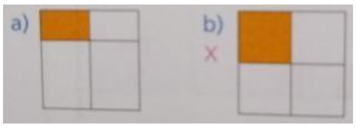
Podemos presenciar, no livro, representações geométricas convencionais, como retângulos e círculos com marcações somente adjacentes assim como hexágonos, octógonos e outras figuras poligonais. Percebemos, apenas, em dois exercícios, figuras geométricas divididas em partes dife- rentes representando áreas distintas.

A autora não exibe, em nenhuma parte do capítulo, atividades que relacionam porcentagem com uma determinada fração indicada em uma figura.

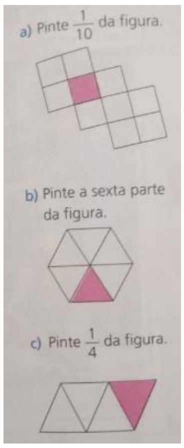
Exercícios que retratam o tópico citado pela obra:

1) Em quais figuras a parte pintada de laranja pode ser representada pela fração 1/4. (REAME, 2017, p.138).





2) Observe cada figura e pinte com a cor que você preferir a parte indicada pela fração.

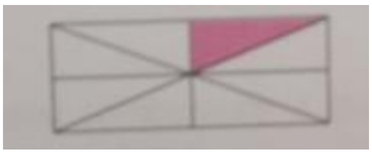


a) Pinte 1/10 da figura.

b) Pinte a sexta parte da figura.

c) Pinte ¼ da figura.

d) Pinte a oitava parte da figura. (REAME, 2017, p.139).



Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas.

Na primeira atividade apresentada, Reame sugere ao professor conduzir questionamentos aos alunos para que eles respondam por que a parte pintada de laranja dos quadrados, que ocupam as posições primeira e terceira, não representam a fração ¼ de toda a figura. Ela alerta aos educadores para realçar que a divisão feita na figura formou quatro partes desiguais, originando áreas diferentes. E, nos outros quadrados, das posições segunda e quarta, as partes possuem áreas congruentes, sendo a parte pintada equivalente a ¼ de toda a figura. (REAME, 2017, p.138).

No segundo exercício, a autora lembra ao professor a relevância em mostrar à turma as diversas frações unitárias representadas nas ilustrações. Sugere explicar aos discentes que "há uma infinidade de representações para o mesmo número". (REAME, 2017, p. 139).

Título: *Ápis*

Autor: Luiz Roberto Dante

Ano: 2017

O livro contém representações geométricas tradicionais, como retângulos e círculos com marcações adjacentes, não são encontradas quaisquer figuras geométricas não convencionais, como triângulos, losangos, pentágonos, hexágonos, octógonos e outras.

Há ausência de representações geométricas com marcações não adjacentes.

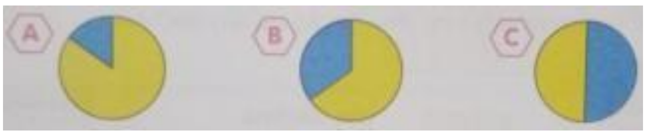
Encontram-se exercícios que associam porcentagem a uma determinada fração representada por parte de uma figura pintada.

Não observamos, no capítulo, figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas.

Exercícios:

1) Claudete tinha 6 balas. Ela deu um terço das balas a sua irmã Neuza. Quantas balas Neuza ganhou? (DANTE, 2017,p.207)

2) Em qual das figuras Ana pintou 50% do círculo de azul? (DANTE, 2017, p.213).



Este exercício faria os alunos refletirem sobre o fato de 50% ser igual a 50/100 que, por sua vez, equivale à metade do círculo, possibilitando a observação das figuras para se chegar à resposta correta.

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas.

Dante sugere ao professor, no primeiro exercício, o uso de material concreto, com o qual seja possível realçar a distribuição dos elementos. Pode ser distribuído em 3 potes, 6 lápis por exemplo. Os alunos poderiam perceber a mesma quantidade em cada pote. Ele valoriza essa visualização em outros exercícios de modo a auxiliar o entendimento da atividade e propiciar a sua solução. (DANTE, 2017).

Na atividade anterior a essa, nessa mesma página, o autor informa aos alunos que cem por cento representa o todo, a unidade, o inteiro, tudo. Nesse exercício apresentado, o objetivo é fazer com que o aluno, diante dessa informação, consiga relacionar a parte pintada com a porcentagem, interpretando cada situação.

Título: *Nosso Livro de Matemática* - 4º ano

Autores: Célia Maria Carolino Pires; Ivan Cruz Rodrigues

Ano: 2017

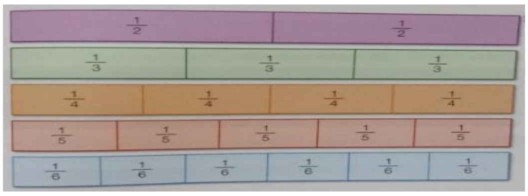
Os autores nos apontam representações geométricas tradicionais, como retângulos e círculos com marcações adjacentes, porém, inexistem no capítulo marcações não adjacentes.

Não existem figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas, assim como há ausência de exemplos e exercícios associando porcentagem com frações.

Exercícios:

1) A mãe de Joana faz sovertes caseiros em forma de cubinhos, e usa diferentes formas para acondicioná-los, como mostra as figuras. Circule a terça parte da quantidade de espaços. (PIRES & RODRIGUES, 2017, p.163).

2) A professora Júlia distribuiu a seus alunos uma série de tiras coloridas. Cada uma estava dividida em partes iguais. Ela pediu que eles escrevessem em cada pedaço da tira a representação correspondente à relação entre cada parte e a tira toda. (PIRES & RODRIGUES, 2017a, p.165).



Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas.

Na primeira atividade, Pires e Rodrigues recomendam ao professor questionar à turma, verificando se os alunos gostam de sorvetes e quais os sabores preferidos. Conversar sobre a importância de comer bem, ter uma boa alimentação e moderar em produtos que contêm açúcar. Logo em seguida, lembrá-los o significado da expressão *terça parte* representando-a em fração. Desenhar e mostrar no quadro 1/3 das sete figuras, destacando na ordem dada, 4; 2; 6; 5; 7; 3 e 8,nas ilustrações, usando a nomenclatura (1/3)em cada uma delas para que o aluno possa, através da percepção, visualizar o que o exercício pede e o que a figura mostra (PIRES & RODRIGUES, 2017a).

No segundo exercício, os autores aconselham aos professores, através do suporte de imagem e/ou material manipulável, explorarem bem as frações unitárias como unidades de medida, observando os numeradores e os seus respectivos valores (tamanhos, no caso das tiras). Além da comparação, pode-se fomentar a operação de adição com o mesmo denominador, ou tiras da mesma cor.“É importante que os alunos verifiquem que as divisões equitativas (em partes iguais) foram feitas a partir do mesmo inteiro (todas as tiras têm o mesmo tamanho). A partir dessa observação, é possível comparar duas representações fracionárias”. (PIRES & RODRIGUES, 2017a, p.165).

Através das tiras expostas lado a lado, na página, pode-se mostrar aos alunos algumas frações equivalentes, tais como: 1/3 = 2/6;1/2 = 2/4; 1/2 = 3/6; 2/3 = 4/6 e que 2/2 = 3/3 = 4/4 = 5/5 = = 6/6.

Livros do 5º ano

Título: *Nosso Livro de Matemática*- 5º ano

Autores: Célia Maria Carolino Pires; Ivan Cruz Rodrigues

Ano: 2017

Percebem-se apenas representações geométricas convencionais, como retângulos e círculos com marcações adjacentes e não adjacentes. Não há uma diversidade de figuras como pentágonos, hexágonos, octógonos e outras.

Deparamos com três exercícios que abarcam figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas.

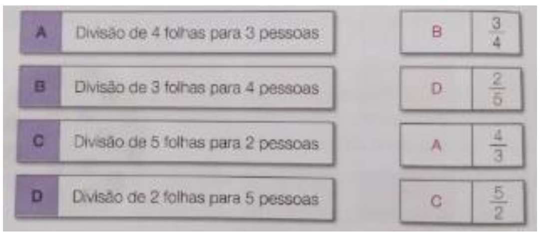
Os autores exibem, em uma parte do capítulo, atividades que relacionam porcentagem com uma determinada fração indicada em uma figura.

Exercícios:

1) Represente com uma fração a relação entre cada parte colorida e o todo. (PIRES & RODRIGUES, 2017b, p.163).

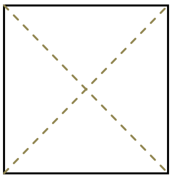
Esse exercício é uma das atividades do capítulo que aborda figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas.

2) Relacione cada cartela da primeira coluna com a escrita fracionária correspondente da segunda coluna. (PIRES & RODRIGUES, 2017b, p.162).



Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas.

Pires e Rodrigues recomendam aos professores que proponham aos alunos uma dobradura. Para isso, cada um deve ter metade de uma folha de sulfite. Aconselham dividir a folha ao meio e, em seguida, fazer uma nova dobra, realizando outra divisão em duas partes iguais. Após os dois procedimentos, pedir que abram a folha e verifiquem em quantas partes ela foi dividida.



Com o material concreto em mãos, os alunos poderiam perceber, com mais facilidade, a fração pedida no exercício (PIRES & RODRIGUES, 2017b).

Em algumas situações, um significado pode ser confundido com outro. Vejamos as argumentações feitas pelos autores. Eles alertam que as cartelas do exercício, exploram números racionais com o significado quociente, em que a fração é interpretada como divisão de dois números inteiros, havendo uma relação entre duas grandezas. Na explicação apresentada, elucidam que: "a interpretação não é a mesma do significado parte-todo, porque é diferente dividir duas folhas de papel em três partes e considerar duas dessas partes em relação à folha inteira e dividir duas folhas de papel para três pessoas, embora nos dois casos haja a mesma representação, 2/3". (PIRES & RODRIGUES, 2017b, p.162).

Pires e Rodrigues continuam com outro exemplo para complementar a explanação apresentada. "Outra situação com esse significado, o do quociente, pode ser vista ao dividir igualmente 5 laranjas para 4 pessoas e indicar a fração que cabe a cada uma das pessoas, que, nesse caso, é 5/4". (PIRES & RODRIGUES, 2017b, p.162).

Título: *Aprender Juntos Matemática*

Autoras: Roberta Taboada; Ângela Leite

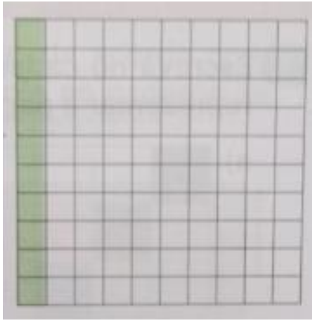
Ano: 2014

As autoras apresentam representações geométricas convencionais, como retângulos e círculos com marcações adjacentes nos exemplos. Nos exercícios, deparamos com marcações não adjacentes.

Não se observa, no livro, diversidade de figuras geométricas como pentágonos, hexágonos, octógonos e outras.

Inexistem figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas.

A obra exibe quatro exercícios que relacionam porcentagem com uma determinada fração indicada em uma figura. Um deles, citaremos a seguir.



1) Observe o quadrado ao lado, dividido em 100 quadradinhos e responda as questões no caderno.

a) Quantos quadradinhos foram pintados?
b) Que fração do quadrado está pintada? (TABOADA & LEITE, 2014, p.219).

Após, no item b, o livro apresenta uma informação expressando que 10% dos quadradinhos, ou seja, um décimo deles está pintado.

2) O dono da fazenda que Fabrício trabalha está arando as terras para o plantio de milho deste ano. A área da propriedade destinada ao cultivo corresponde a 2/5 do total, e o milho será plantado em apenas 3/4da área de cultivo.

a) O milho será cultivado em que parte da propriedade?
b) Em que fração da propriedade serão cultivados outros vegetais?
(TABOADA & LEITE, 2014, p. 220).

Orientações e sugestões didáticas no manual pedagógico

As autoras esclarecem que essa atividade, a número 1 citada, utiliza a relação *parte-todo* para introduzir a ideia de porcentagem. O objetivo está na percepção dos alunos, baseando na figura da malha quadriculada apresentada, a fração 10/100 = 10% = 0,1 representando a parte pintada da ilustração.

Taboada e Leite sugerem aos professores que registrem um número qualquer na forma de porcentagem no quadro e peçam aos alunos que o leiam; posteriormente, questione-os em quais situações já viram números parecidos com esse. Após essas explorações, dividir a turma em grupos e distribuir revistas, jornais e cartolina. “Solicite a eles que recortem os números que encontrarem na forma de porcentagem, colando-os na cartolina e escrevendo-os por extenso, em fração e em número decimal”. (TABOADA & LEITE, 2014, p.327).

Título: *Conquista da Matemática*

Autor: José Ruy Giovanni Júnior

Ano: 2018

O autor apresenta figuras geométricas tradicionais, como retângulos e círculos com marcações adjacentes, assim como outras figuras, como triângulos, pentágonos, hexágonos, octógonos e outras.

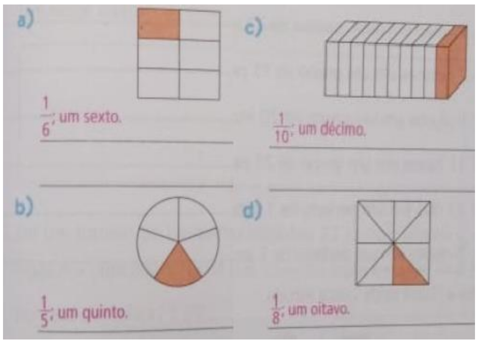
Comparecem apenas marcações adjacentes em figuras nas partições do inteiro.

Não deparamos com figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas, assim como associação de fraçãoindicada em uma figura com porcentagem.

Exercícios:

1) Escreva a fração que a parte colorida de laranja representa em cada figu- ra e escreva como se lê essa fração.

(GIOVANNI JR, 2018, p.149).



2) Das 24 partidas que Simone disputou em um torneio de xadrez, ela perdeu 1/3 delas. Quantas partidas Simone perdeu nesse torneio? (GIOVANNI JR, 2018,p.151).

Neste problema, o enunciado envolve quantidades discretas.

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas.

No primeiro exercício, autor recomenda ao professor, mostrar à turma, baseando-se nos e-xercícios apresentados, que a dupla contagem[8] narelação *parte-todo*, só é possível quando a divisão da unidade for feita em partes iguais. Propõe aos docentes representar figuras com divisões distintas para que o aluno perceba que a dupla contagem nesses exemplos não pode ser aplicada para representar partes de um todo. Ele deve completar a figura dividindo-a em partes iguais para visualizar a fração destacada (GIOVANNIJR, 2018).

Na segunda atividade exposta, Giovanni Junior sugestiona aos professores trabalharem com material manipulável e ordená-lo em três fileiras até obter 24 itens no total. Sugere que os alunos sejam estimulados a observar a organização do material de modo a perceber que podemos interpretar cada coluna como sendo 1/3 de 24 itens. Portanto, eles podem concluir que 1/3 de 24 é igual a 8. Aproveitando a distribuição do material em fileira, é pertinente retratar 2/3 de 24. “Espera-se que os alunos não tenham dificuldades de compreender que é necessário considerar duas colunas, portanto, 16 itens. Caso eles apresentem dúvidas, retome o que for necessário para garantir que elas sejam sanadas em sala de aula”. (GIOVANNI JR, 2018, p. 151).

Livros do 6º ano

Título: *Geração Alpha*

Autores: Carlos N.C. de Oliveira; Felipe Fugita
Ano: 2018

No livro, observam-se representações geométricas convencionais, como retângulos e círcu-

[8] Dupla contagem é um procedimento que se divide o todo em “n” partes, toma-se “k” e se faz uma contagem das partes tomadas e das divididas, representando por “k/n”.

los com marcações adjacentes assim como hexágonos, octógonos e outras figuras poligonais.

Podemos presenciar, no livro, marcações não adjacentes em figuras que acompanham os exercícios.

Deparamos com atividades que possuem figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas, mas não detectamos exercícios que relacionam porcentagem com uma determinada fração indicada em uma figura.

Exercícios:

1) Rodrigo quer dividir igualmente entre 6 amigos as 5 tortas de morango quecomprou.
   a) Represente com uma fração a quantidade de tortas que cada amigo receberá.[9]
   b) Faça um esquema para representar a fração que você obteve no item anterior.
   c) A quantidade de tortas que cada amigo receberá é maior ou menor queuma unidade? (OLIVEIRA & FUGITA, 2018, p. 168).

2) Na coleção de Giovana, há 24 livros de poesia e 15 livros de ficção científica.
   a) Os livros de poesia representam que fração do total de livros da coleção de Giovana?
   b) Qual é a fração que representa a quantidade de livros de ficção científica em relação ao total de livros da coleção de Giovana? (OLIVEIRA & FUGITA, 2018, p.168).

No segundo exercício, o enunciado envolve quantidades discretas.

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas.

Oliveira e Fugita recomendam, aos professores, perguntar aos alunos se eles conseguem responder o *item c* da 1ª questão sem fazer contas ou desenhos. O objetivo é verificar se eles percebem o fato de ter mais pessoas que tortas, resultando, dessa maneira, uma fração menor que a unidade. Os autores sugerem exemplificar dividindo, uma por uma, em 6 pedaços e dando uma fatia de cada torta aos amigos, ou então, "dividindo cada torta em 6 pedaços e dando 5 pedaços de cada torta a cada amigo, sendo que um dos amigos vai ficar com 1/5 de cada torta no final, ou seja, com o pedaço que sobrou de cada uma das tortas. Pergunte aos alunos se o resultado é o mesmo". (OLIVEIRA & FUGITA, 2018, p.168).

Título: *Matemática Compreensão e Prática*

Autores: Ênio Silveira, Claudio Marques

Ano: 2008

[9] Percebe-se também nesse exercício o significado *quociente*, representado pela quantidade de tortas que cada amigo do Rodrigo receberá.

Os autores apontam representações geométricas tradicionais, como retângulos e círculos com marcaçõesadjacentes.

Apresentam três exercícios com marcações não adjacentes.

Não há figuras além das convencionais, não são encontradas indicações de frações utilizando-se triângulos, hexágonos, octógonos e outras.

Figuras geométricas divididas em partes diferentes, representando áreas distintas, não são encontradas em nenhuma página do capítulo, assim como a relação entre porcentagem e fração indicada em uma figura.

Exercícios:

1) Responda nocaderno:
   a) Que fração do dia são setehoras?
   b) Que fração da semana representam cincodias?
   c) Que fração igual à unidade tem denominador 3?
   (SILVEIRA & MARQUES, 2008, p.134).

2) Paulinho retirou quatro peças de um cubo formado por diversos cubinhos iguais. Observe a figura: Que fração do cubo ele retirou? Que fração do cubo sobrou? (SILVEIRA & MARQUES, 2008, p.134).

Os autores Silveira e Marques não fazem indicações para os docentes no livro *Matemática*

Compreensão e Prática.

Autor: Joamir Souza

Ano: 2018

O autor exibe representações geométricas tradicionais, como retângulos e círculos, além das não convencionais como pentágonos, hexágonos, octógonos e outras figuras com marcações adjacentes e não adjacentes.

Não deparamos com figuras geométricas divididas em partes diferentes representando áreas distintas, assim como não se obtêm exemplos e exercícios associando porcentagem com fração.

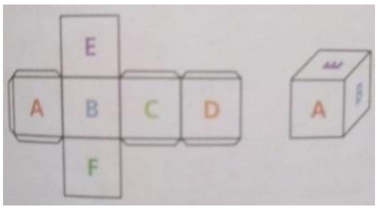
Exercício e exemplo

1) Joaquim recortou um molde de um dado, que representa um cubo, indicando nas suas faces as seis primeiras letras do nosso alfabeto e montou o sólido.

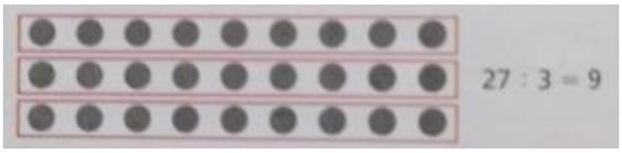
a) Em relação ao total de faces, escreva a fração correspondente à quantidade de faces que contêm:

– Vogais
– Consoantes

b) Se Joaquim lançar esse dado, é mais provável que a letra obtida na face de cima seja vogal ou consoante? Justifique sua resposta. (SOUZA, 2018,p.151).



2) O Brasil possui 27 unidades da federação (26 estados e o Distrito Federal), distribuídos em 5 regiões: Centro-Oeste; Nordeste; Norte; Sudeste e Sul. A região Nordeste tem a maior quantidade de estados da federação: 1/3 do total. Para obter a quantidade de unidades da federação da região Nordeste, podemos calcular 1/3 de 27. (SOUZA, 2018,p.152).



Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas

O autor recomenda ao professor explicar que, em algumas situações, a ideia é associar o todo a um grupo de objetos ou elementos. No exemplo apresentado, o todo corresponde às 27 unidades federativas do Brasil. Deve-se "enfatizar que o denominador da fração é o que indica em quantas partes iguais o todo deve ser dividido, ao passo que a quantidade de partes a serem consideradas é indicada pelo numerador". (SOUZA, 2018, p.152).

Significado *medida* com orientações e sugestões pedagógicas

Além do significado parte-todo, *Medida* também é apontado pela maioria das obras analisadas. Dessa maneira, apresentaremos, a seguir, dois exercícios que se relacionam a este significado e as orientações e sugestões pedagógicas dos autores, caso sejam retratadas no livro.

Livros do 4º ano

Título: *Bem Me Quer*

Autoras: Ana Lúcia Bordeaux, Cléia Rubinstein, Elizabeth França, Elizabeth Ogliari, Vânia Miguel.

Ano: 2017

1) Luís e Paula resolveram brincar com um dado. Luís observou que, aojogar um dado, a probabilidade de aparecer o número 4, por exemplo, é de uma em seis, pois as seis faces do dado somente uma apresenta o4.

a) Qual é a probabilidade de sair um número ímpar ao jogar um dado? Responda e mostre como você chegou àconclusão.

(BORDEAUX et al., 2017, p. 206-207).

2) Fabrício e Amanda usaram uma roleta para brincar. Cada jogador, na sua vez, dava um palpite: dizia se o ponteiro pararia em um número maior ou menor que um número escolhido. Em seguida, rodava a roleta. Se acertasse o palpite marcava um ponto. Amanda disse que o ponteiro pararia em um número menor que 7. Ela tinha mais chance de errar ou de acertar? Por quê?
(BORDEAUX et al., 2017, p. 206).

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas

As autoras sugerem que, antes de fazer as atividades, seria interessante que os alunos vivenciassem a situação dos jogos, tanto com o dado, quanto com a roleta, para perceberem a chance de acontecer determinado resultado. Em situações envolvendo probabilidade, de acordo com Bordeaux et al., a fração é apresentada como razão, ou seja, "a possibilidade de sair um número 6 ao lançar um dado é de uma em seis. Podemos representar esse resultado em forma de fração: 1/6". (BORDEAUX et al., 2017, p. 207).

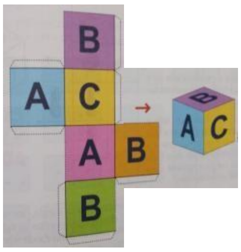
Título: *Conhecer e Crescer - Matemática*

Autora: Jaqueline Garcia

Ano: 2011

1) Joel e dois amigos estão brincando com o jogo da sorte. Para esse jogo, eles colocaram em um saco as 10 bolinhas representadas na figura. Qual a cor da bolinha que um participante tem a maior chance de tirar? Justifique sua resposta. (GARCIA, 2011, p. 215)

2) Elisete montou um cubo a partir do molde representado na figura. Após umlançamento, qual letra tem a maior chance de ficar na face voltada para cima? (GARCIA, 2011, p.217).



Orientações e sugestões no manual pedagógico

A autora propõe que, após a realização das atividades citadas, seja realizada uma simulação com os alunos de uma partida do jogo apresentado, peça-os solicitando que comparem o resultado obtido com as soluções apresentadas nas atividades e verifiquem se concretizaram as previsões. Garcia completa explanando que, ao trabalhar a ideia de probabilidade, "é importante que os alunos reproduzam as situações propostas nos problemas e observem que, apesar de pequenas variações, as previsões geralmente estão próximas do acontecimento real". (GARCIA, 2011, p.56).

Título: *Ligamundo*

Autora: Eliane Reame

Ano: 2017

Entre os exercícios do livro, transcrevemos os seguintes:

> Existem jogos que utilizam dados de diferentes formatoscom números em suas faces. Um desses dados tem 12 faces numeradas de 1 a 12. Quando você lança esse dado, o número que vale para o jogo é o que aparece escrito na face superior.
>
> 1) Joana e Pedro estão brincando com um dado de 12 faces. Se o número obtido for par, Joana ganha, e, se for impar, quem ganha é Pedro. Qual dos dois tem mais chance de ganhar? Explique suaresposta.
> (REAME, 2017, p. 158).
>
> 2) Talita, Fernanda e Guilherme estão brincando com um dado de 12 faces e cada um deles escolheu números dessedado.
>
> Talita: números menores do que 5.
> Fernanda: números maiores do que 4 e menores do que 8.
> Guilherme: números maiores do que 7.
>
> No lançamento desse dado, qual jogador tem mais chance de tirar um número escolhido por ele? Por quê? (REAME, 2017, p.158).

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas

Reame destaca que, no conjunto dos eventos aleatórios, o objetivo é identificar "aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis". (REAME, 2017, p.158).

A autora expõe algumas informações, apresentando um fragmento do texto da BNCC[10] aclarando da seguinte forma: "no que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos".

Título: *Ápis*

Autor: Luiz Roberto Dante

Ano: 2017

> 1) Girando o ponteiro desta roleta, em qual cor há maior chance de o pon- teiro parar? Por quê? (DANTE, 2017,p.212).

[10] Base Nacional Comum Curricular

2) As letras da palavra MATEMÁTICA foram escritas separadamente em 10 cartões. Um desses cartões seráso̲rteado.
Para quais letras a probabilidade de sair é 2/10 ? (DANTE, 2017, p.212).

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas

Dante assinala a importância de o professor trabalhar com a ideia de probabilidade, mostrando previsões sobre o que tem mais ou menos chance de ocorrer. Ele reforça que, nas atividades, essa chance deve ser indicada por uma fração.

No exercício transcrito anteriormente, sobre a roleta, Dante indica a relevância, por parte dos alunos, em apresentar a justificativa da resposta. “É importante que percebam que a chance de sair a cor verde é maior, pois há mais partes dessa cor na roleta”. (DANTE, 2017, p.212).

O autor prossegue relatando a identificação, intuitivamente, por parte dos alunos, da maior chance em cada situação, nessa e em outras atividades. “Associando a uma medida, podem fazer comparações e identificar numericamente a maior chance”. (DANTE, 2017, p.212). Continuando a elucidação, ele completa se referindo novamente ao exercício da roleta, relatando que o aluno deve confirmar a maior probabilidade com a fração 3/6, confirmando a mais provável chance de parar na cor verde.

Título: *Nosso Livro de Matemática* - 4º ano

Autores: Célia Maria Carolino Pires; Ivan Cruz Rodrigues

Ano: 2017

Leila ganhou do seu pai um pacotinho de balas embrulhadas em papel colorido, cada um de uma cor. O pai propôs uma brincadeira:

1) No pacotinho, vou colocar três balas, uma amarela, uma vermelha e uma azul. Se você fechar os olhos e pegar uma bala, qual a chance de ela ser vermelha?(PIRES & RODRIGUES, 2017,p.232).

2) O pai fez outra pergunta: as três balas, amarela, vermelha e azul, continuam no pacotinho. Se você fechar os olhos e pegar duas balas, qual a chance de uma ser vermelha?(PIRES & RODRIGUES, 2017, p.232).

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas.

Os autores recomendam aos professores, começarem o assunto questionando a turma se no dia seguinte vai chover. Após a resposta, que perguntem novamente, *é certeza?* Pires e Rodrigues aconselham promover uma discussão, comentando que há situações cujos resultados são previsíveis e, outras, podemos identificar se há grandes chances de ocorrência ou não. Os autores argumentam sobre a significância em desenvolver a habilidade de “identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis”. (PIRES & RODRIGUES, 2017, p.232).

Livros do 5º ano

Título: *Nosso Livro de Matemática*- 5º ano

Autores: Célia Maria Carolino Pires; Ivan Cruz Rodrigues

Ano: 2017

> O professor André pediu aos alunos que levassem folhas de jornal, uma fita métrica e uma fita adesiva para a construção de um quadrado de 1 metro de lado. Quando terminaram, ele lembrou que eles tinham acabado de construir uma das unidades de medida de superfície mais conhecidas, denominada metro quadrado.O professor pediu aos alunos que usassem os metros quadrados de jornal para recobrir totalmente o chão da sala de aula, colocando um ao lado do outro. Na parede de frente, couberam exatamente 8 folhas (metros quadrados de jornal) e, na lateral, couberam exatamente 10 folhas.
>
> 1) O professor perguntou se, com essas informações, era possível saber a área total da sala sem recobri-la.(PIRES & RODRIGUES, 2017, p.207).
> 2) Jonas fez uma proposta para sua irmã Ariel. Cada um lança uma moeda para cima duas vezes. Se, nas duas vezes, sair coroa, você ganha 10 pontos. Se isso não acontecer, eu ganho 10 pontos. Ariel ficou pensando na proposta do irmão. Você acha que ela deve aceitar? Porquê?
>
> (PIRES & RODRIGUES, 2017, p. 243).

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas

Pires e Rodrigues sugerem ao professor comentar, em sala de aula, que em jogos de futebol de campo, são utilizados os termos “grande área” e “pequena área”. Deste modo, que o docente pergunte qual o significado desses termos, solicitando a um aluno para fazer um desenho no quadro mostrando esses elementos. O professor, então, deve destacar que a superfície é uma região interna a um polígono. Os autores recomendam ao docente fomentar a habilidade de investigação, proporcionando aos alunos a oportunidade de perceberem que “figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes”. (PIRES & RODRI- GUES, 2017, p.207).

Os autores também recomendam que o professor inicie uma conversa com os alunos, perguntando o que é mais provável de acontecer no lançamento de uma moeda: cara ou coroa; ressaltando que, provavelmente, eles identificarão que os resultados possuem a mesma chance de acontecer. Neste caso, seria fundamental “apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não”. (PIRES & RODRIGUES, 2017, p.242).

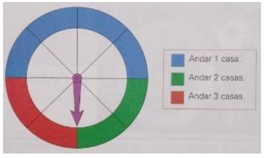
Na segunda atividade, os autores recomendam ao professor questionar a turma sobre quais são os possíveis resultados quando se realiza o lançamento de uma moeda duas vezes. Caso eles não percebam, expressar no quadro os resultados: *cara-cara*; *cara-coroa*; *coroa-cara* e *coroa-coroa*. Dessa forma, prosseguem os autores, eles presenciarão que a possibilidade de sair duas coroas é uma das possíveis, ou seja, "há uma chance em quatro de que isso ocorra. E para que isso não ocorra, há três chances em quatro. Portanto, Ariel não deve aceitar, pois as chances de ela ganhar 10 pontos e de Jonas ganhar 10 pontos não são iguais". (PIRES & RODRIGUES, 2017, p. 243).

Título: *Aprender Juntos Matemática*

Autoras: Roberta Taboada; Ângela

LeiteAno: 2014

José, Alfredo e Joaquim decidiram brincar com um jogo de tabuleiro, a Roleta da sorte. Nesse jogo, cada jogador, na sua vez, gira a seta da roleta.



1) José começou o jogo. Em qual das cores da roleta há maior chance de a seta parar? Por quê?(TABOADA & LEITE, 2014, p.236).

2) Larissa e o noivo decidiram passar a lua de mel em Parati, no Rio de Janeiro, mas ainda não sabem em que pousada vão se hospedar. O noivo sugeriu fazer um sorteio das 5 pousadas (Beira Mar, Forte, Centro, Rio, Logo ali). Indicar com uma fração a probabilidade de ser sorteada a Pousada Beira Mar.(TABOADA & LEITE, 2014, p.220).

Orientações e sugestões no manual pedagógico.

As autoras propõem aos professores que perguntem aos alunos quais situações no dia a dia,a sorte interfere em algo que estão fazendo. Eles podem citar alguns jogos, como baralho, dado, jogos de tabuleiro, etc. Sugerem que se explique aos alunos que em algumas situações, embora sai- bamos os possíveis resultados, não podemos prevê-los, como no lançamento de uma moeda ,(cara ou coroa). Em fenômenos desse tipo, podemos calcular a chance de obtermos um determinado resultado, cara ou coroa, calculando a probabilidade.

Taboada e Leite ressaltam que, desde o século XVIII, os matemáticos buscavam analisar e conhecer como determinar a probabilidade de algo ocorrer, surgindo desse modo uma especialização conhecida como matemática das probabilidades. É possível determinar, no dia a dia, a probabilidade de que aconteça algo sobre o qual tenhamos algum conhecimento ou totalmente fora do nosso controle.

Na primeira atividade apresentada, Taboada e Leite esclarecem que a mesma tem como objetivo explorar "o cálculo da probabilidade de ocorrer cada uma das cores ao girar a seta da roleta". (TABOADA & LEITE, 2014, p. 330).

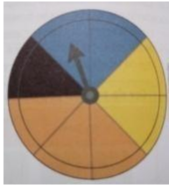
Título: *Conquista da Matemática*

Autor: José Ruy Giovanni Júnior

Ano: 2018

O autor propõe os exercícios:

Em um parque de diversões há uma roleta dividida em 8 partes iguais. Observe ao lado. Aline, Marcos e Vinicius foram girar a roleta. O vencedor será aquele que acertar o resultado que sair.



1) Na primeira rodada Aline escolheu a cor laranja. Marcos a cor amarela e Vinicius a corazul.

a) Quem tem a maior chance de vencer arodada?

b) Para todas as cores terem a mesma chance de serem sorteadas o que poderia ser feito nessa roleta?(GIOVANNI JUNIOR, 2018, p.164).

2) Marcelo está brincando com um dado honesto. Ao lançar esse dado, achance de um número ser par é maior, menor ou igual à chance de ser impar? (GIOVANNI JUNIOR, 2018,p.164).

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas

Giovanni Jr. em relação ao primeiro exercício, indica que os possíveis resultados para a roleta parar são nas cores azul, laranja, amarelo ou preta; pelo fato de não estarem distribuídas de maneira uniforme, cada cor terá uma chance diferente da outra.

No primeiro item do exercício, o autor aponta sua expectativa relatando: espera-se uma percepção por parte dos alunos que a Aline tem a maior chance, pois escolheu a cor cuja maior quantidade de partes está presente na roleta.

No segundo item, o autor apresenta a seguinte argumentação: os alunos devem observar a quantidade de cores que a roleta possui. Para que as chances sejam idênticas, a distribuição deve ser equânime, ou seja, iguais. “Para isso acontecer, uma possibilidade seria pintar uma parte laranja de preta, por exemplo”. (GIOVANNI JUNIOR, 2018, p. 164).

No segundo exercício, o autor comenta: espera-se uma tomada de consciência dos os alunos em relação à igualdade de números ímpares e pares expressas em um dado. “Portanto a chance de um número par cair com a face voltada para cima é igual à chance de um número ímpar”. (GIOVANNI JUNIOR, 2018, p. 164).

Livros do 6º ano

Título: *Geração Alpha*
Autores: Carlos N.C. de Oliveira; Felipe Fugita
Ano: 2018

Uma caixa contém 10 bolas do mesmo material, como mesmo tamanho e com a mesma massa. Uma bola é retirada dessa caixa ao acaso e observa-se a sua cor.

1) Qual é a probabilidade de não sair uma bolavermelha?
(OLIVEIRA & FUGITA, 2018, p. 247).

> Considere o lançamento de um dado honesto com faces numeradas de 1 a 6e responda:
>
> 2) Qual é a probabilidade de um resultado ser um númeroprimo?
>
> (OLIVEIRA & FUGITA, 2018, p. 247).

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas

Os autores sugerem aos professores explorarem as situações dos eventos certos, cuja a probabilidade é 1 ou 100% e os impossíveis, com probabilidade 0. Revelam a necessidade de elucidar com exemplos, como a chance de sair o número 9 num dado numerado de 1 a 6, realçando evento impossível e a chance de sair um número menor que 9 para representar um evento certo.

Oliveira e Fugita expõem a significância de apresentar aos alunos eventos aleatórios e não aleatórios e pedir-lhes para dar exemplos, questionando se cada situação sugerida por eles apresenta resultados possíveis ou impossíveis de se prever.

Na primeira atividade, os autores chamam a atenção para retratar eventos complementares. A recomendação é tentar mostrar, sem nomenclaturas, a ideia da complementação de eventos e tentar criar outras situações para ilustrar essa percepção.

Na segunda atividade, Oliveira e Fugita sugerem aos professores solicitar aos alunos que registrem os possíveis resultados. “São eles os números 2, 3 e 5. Se necessário, retome o conceito de números primos”. (OLIVEIRA & FUGITA, 2018, p.247).

Título: *Matemática Realidade e Tecnologia*

Autor: Joamir Souza

Ano: 2018

> Elvis está brincando de realizar sorteios. Veja o que ele está dizendo. Recortei cinco pedaços de papel de mesmo tamanho e escrevi cada letra do meu nome neles. Depois coloquei esses pedaços de papel dentro de uma caixa. Por fim, sorteio um papel, verifico se a letra é vogal ou consoante e devolvo o papel na caixa.
>
> 1) Em um sorteio, é mais provável que Elvis obtenha uma vogal ou umaconsoante? Explique. (SOUZA, 2018,p.223).
>
> A professora de língua portuguesa propôs aos alunos da turma do 6º ano, escolher um dos quatro livros, O Pequeno Príncipe; O Mágico de Oz; Peter Pan; O Grande Ivan, para ser o primeiro a ser lido coletiva mente pela turma. Cada aluno fez a sua escolha e escreveu o nome do livro em um pedaço de papel.

> A votação teve a seguinte distribuição: O Pequeno Príncipe (7 votos), O Mágico de Oz (5 votos), Peter Pan (5 votos), O Grande Ivan (3votos).

2) A professora vai colocar todos os votos em uma caixa eum deles será sorteado, indicando o primeiro livro que será lido coletivamente pela turma. Qual a probabilidade de o livro sorteado ser O Pequeno Príncipe? (SOUZA, 2018, p.224).

Orientações e sugestões pedagógicas nas bordas das páginas

Souza propõe aos professores que explorem o cálculo da probabilidade de um evento aleatório. Antes de iniciá-lo, para solucionar o exercício, pedir aos alunos que listem as vogais e as consoantes do nosso alfabeto; verificar se identificaram corretamente os resultados favoráveis e os resultados possíveis para efetuar o cálculo. O autor sugere, caso o professor ache conveniente, realizar um dinâmica parecida com a apresentada, para que os alunos possam simular um sorteio.

No segundo exercício, Souza explicita que esta atividade trabalha o cálculo da probabilidade de um evento aleatório; recomendando que, antes de iniciar a atividade, perguntar aos alunos se algum deles já leu um dos livros citados. “Discutir com os alunos que, caso houvesse a mesma quantidade de papéis para cada um desses livros, as probabilidades de se sortear qualquer um deles seria a mesma”. (SOUZA, 2018, p. 224).

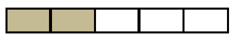
Na análise dos livros, verifica-se que a probabilidade é ressaltada, contudo, nas orientações dos autores, fica evidente que não há uma referência explícita ao significado de fração que está subjacente aos exercícios propostos.

O quadro 7 traz a indicação de: se o livro apresenta aspectos históricos em relação ao tema das frações, se possui orientações e sugestões pedagógicas e algumas características mais usadas para expressar o significado *parte-todo*.

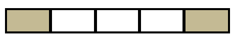
Informações para o quadro 7 - Categorias de análise do livro didático

a) Apresentaçãode aspectos históricos sobrefrações
b) Orientações e sugestões pedagógicas para trabalhar oconteúdo.
c) Representações mais utilizadas para expressar o significadoparte-todo.

c_1) Representações geométricastradicionais, como: Retângulos e círculos com marcações adjacentes.

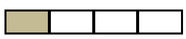


c_2) Representações geométricas tradicionais, como: Retângulos e círculos com marcações não adjacentes.

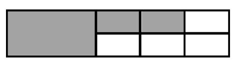


c_3) Representações geométricas não tradicionais. (Ex: hexágonos, octógonos e outras figuras poligonais ou não).

c_4) Expressar em porcentagem uma determinada fração indicada em uma figura
Por exemplo, ¼ = 25%



c_5) Figura geométrica dividida em partes diferentes representando áreas distintas.



Observamos que a representação tradicional de fração (na forma quantidade contínua) se situa na utilização de círculos e retângulos, como se outras formas geométricas não pudessem indicar a representação de frações. Neste sentido, foi nosso intuito verificar como os livros representam as frações, presentes nos itens de c_1 a c_5 indicados anteriormente.

O quadro 7 aponta indicativos se o livro apresenta aspectos históricos em relação ao tema das frações, se possui orientações e sugestões pedagógicas e algumas características mais usadas para expressar o significado *parte-todo*.

Quadro 7 - Características do livro didático

Título	Ano	**Apresenta parte histórica**	**Possui orientações e sugestões pedagógicas**	**Características mais usadaspara expressar o significadoparte-todo**				
				Representações geométricas tradicionais com Marcações Adjacentes	**Representações geométricas tradicionais com Marcações NÃO Adjacentes**	**Representações geométricas. NÃO tradicionais**	**Expressar em porcentagem uma determinada fração indi-cada em uma figura**	**Figura geométrica dividida em partes diferente representando áreas diferentes**
Bem Me Quer - 4ª ed. 2017	4º	X	X	X	X	X		
Conhecer e Crescer - 3ª ed. 2011	4º		X	X	X	X		
Ligamundo - 1ª ed. 2017	4º		X	X		X		X
Ápis - 3ª ed. 2017	4º		X	X			X	
Nosso Livro de Matemática - 3ª ed. 2017	4º		X	X				
Nosso Livro de Matemática - 3ª ed. 2017	5º		X	X	X		X	X
Aprender Juntos - 4ª ed. 2014	5º		X	X	X		X	
Conquista da Matemática - 1ª ed. 2018	5º		X	X		X		
Geração Alpha - 2ª ed. 2018	6º		X	X	X	X		X
Matemática Compreensão e Prática 1ª ed. 2008	6º	X		X	X			
Matemática Realidade e Tecnologia 1ª ed. 2018	6º		X	X	X	X		

Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se que apenas dois livros, dos onze analisados, contemplam aspectos históricos sobre fração, *Bem Me Quer 4º ano e Matemática Compreensão e Prática 6º ano.*

Notou-se que nenhum dos livros analisados apresenta todas as características indicadas no item c para expressar o significado parte-todo. Apenas três livros didáticos expressam em porcentagem uma determinada fração indicada em uma figura, *Apis 4º ano,Nosso livro de Matemática5º ano* e *Aprender Juntos* 5º ano. Em relação à representação de figura geométrica dividida em partes diferentes, representando áreas diferentes, comparece novamente no *Nosso livro de Matemática 5º ano,* no *Ligamundo 4º ano* e *Geração Alpha 6 º ano*.

O quadro 8 indica a existência de outras maneiras complementares de trabalhar o conteúdo de frações para melhor fixação abordada pelos autores analisados.

Informações para o quadro 8

Maneiras complementares de trabalhar o conteúdo de frações

- Localizar ou representar frações na reta numerada.
- Relacionar frações com números decimais. (1/4 = 0,25; 1/2 =0,5)
- Compreender e calcular probabilidades usandofrações.
- Transformar uma fração em porcentagem (1/4 = 25%), usando fraçõesequivalentes.
- Confrontar frações unitárias (numerador “1”) com denominadores diferentes para identificar qual é maior ou menor sem efetuarcálculos.
- Identificar ordem de grandeza de frações – menor, igual ou maior (< , = ou >) – com denominadoresdiferentes.
- Quantidade de páginas que retratam sobrefrações em relação ao total de páginasdo livro.

Quadro 8 - Maneiras de trabalhar o conteúdo de frações

Título	**Ano**	Outras maneiras de trabalhar frações para melhor fixação						
		Localizar ou representar frações na reta numerada	**Relacionar frações com números decimais**	**Calcular probabilidades usando frações**	**Transformar uma fração em porcentagem (¼ = 25%)**	**Confrontar frações unitárias (numerador =1) para identificar qual é maior ou menor**	**Identificar ordem de grandeza (<, = ou >) de frações com Denominadores diferentes**	**Quantidade de páginas qu retratam sobre frações em relação ao total de páginas do livro**
Bem Me Quer 4ª ed. 2017	4º	X		X				27/256
Conhecer e Crescer 3ª ed. 2011	4º			X			X	27/296
Ligamundo 1ª ed. 2017	4º	X		X		X		57/272
Ápis 3ª ed. 2017	4º	X		X	X	X	X	30/248
Nosso Livro de Matemática 3ª ed. 2017	4º	X	X			X		15/256
Nosso Livro de Matemática 3ª ed. 2017	5º	X	X	X	X	X	X	23/272
*Aprender Juntos 4*ª ed. 2014	5º	X	X	X			X	46/254
Conquista da Matemática 1ª ed. 2018	5º	X		X	X			37/272
Geração Alpha 2ª ed. 2018	6º	X				X	X	41/328
Matemática Compreensão e Prática 1ª ed. 2008	6º				X		X	37/342
Matemática Realidade e Tecnologia 1ª ed. 2018	6º	X	X	X			X	19/294

Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se, no quadro 8, que apenas quatro livros dos onze abordados, relacionam frações com números decimais;*Nosso Livro de Matemática, publicado em* 2017 , 3ª edição- dosanos 4º e 5º, a 4ª edição do quinto ano de *Aprender juntos*, a 1ª edição de *Matemática Realidade e Tecnologia*, publicado em 2018.

Apenas quatro livros transformam frações em porcentagem (1/4 = 25%):do quarto ano, a 3ª edição de *Ápis*, de 2017, a 3ª ediçãodo quintoano de *Nosso Livro de Matemática, publicado em* 2017, a 1ª edição do quinto ano da *Conquista da Matemática*, publicado em 2018, e a 1ª edição do sexto ano do livro *Matemática Compreensão e Prática,* publicado em 2008.

A análise dos livros de Matemática selecionados veio corroborar nossa hipótese inicial de que, em geral, os seus autores não abordam o conteúdo de frações de modo a incorporar todos os significados de frações aos alunos.

Encerramos este capítulo com a declaração de um autor de livros didáticos de Matemática, Antônio José Lopes "Bigode": "a maioria dos professores e autores de materiais didáticos, desconhece a história do conceito de frações, bem como suas componentes, epistemológica e cognitiva". (LOPES, 2008, p. 20). Essa afirmação tão precisa vai ao encontro dos resultados que encontramos com a análise dos livros didáticos.

.

CAPÍTULO IV

O PRODUTO EDUCACIONAL E SUA APLICAÇÃO

Como parte integrante dessa pesquisa de dissertação do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, elaboramos o produto educacional: “Frações: História e Significados”.

O produto teve como objetivo elaborar um material para a formação docente inicial e continuada e para os professores em serviço, tendo como principal alvo docentes do 4º ao 6º ano do Ensino Fundamental que introduzem e trabalham o conceito de fração nas escolas.

O produto se subdivide na abordagem dos seguintes temas:

Capítulo 1

- A Importância da História naMatemática.

Capítulo 2 - Aspectos históricos de algumas representações de frações.

- Artefatos Numéricos Pré-Históricos.
- Surgimento de civilizações em vales de rios, Nilo, no Egito; Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia; Indo, no Paquistão; Yang-Tsé, na China.
- Registros cronológicos das civilizações nos vales dos Rios.
- Registros na Mesopotâmia em tabletes de argila.
- Registros no Egito em papiros, Papiro Ahmes (ou Rhind) e o Papiro de Moscou (ou Golonischev).
- Símbolos numéricos dos egípcios.
- Sistema de numeração Indo-Arábico.
- A popularização do algorismo no século XIII.
- O *Libe rAbaci* (ou livro do ábaco) de Leonardo Fibonacci.
- O interesse da Igreja pela sustentação do monopólio em manter sobre o seu domínio o processo tradicional usando os algarismos romanos e oábaco.
- A figura de Margarita Philosophica, de Gregor Reisch, mostrando a transição e a convivência de dois sistemas, o romano e o indo-arábico.
- Alguns relatos sobre o“zero”.
- Frações decimais.

- Capítulo 3 - Os significados defrações

- Quantidades contínuas e discretas.
- Significados de fração

Capítulo 4 - Análise de livros paradidáticos e didáticos

- Alguns pontos sobre a análise dos livros Paradidáticos.
- Alguns pontos sobre a análise dos livros Didáticos.

A estratégia desenvolvida, para aplicação deste material, foi elaborar um "Minicurso" para licenciandos dos últimos períodos do curso de Matemática da PUC Minas, tratando desses tópicos citados anteriormente. O minicurso abordou alguns aspectos históricos e cinco significados de frações. Apósa explanação teórica, os alunos responderam um questionário com algumas questões sobre o tema para aferir os conhecimentos adquiridos por eles.

Iniciamosdiscorrendo sobre a importância de estudar o passado para entendermos e analisarmos melhor o presente. Foram abordados alguns tópicos históricos sobre números, baseando nas informações de Boyer (1996), Boyer e Merzbach (2012), Eves (2004), Crosby (1999) e Ifrah (1989,1997). Iniciamos com uma explanação da trajetória humana, discutindo alguns processos utilizados pelo homem para quantificar as coisas que o cercam.

Entre os temas apresentados, abordamos os registros ou as representações numéricas que eram feitas pelo princípio aditivo, uma repetição de símbolos, como ocorreu na cultura egípcia. As frações unitárias eram muito usadas pelos egípcios e tinham simbologia própria além da de 2/3. Os principais registros deste povo são: Papiro de Moscou (1850 a.C.) e o papiro de Ahmes ou Rhind (1650 a.C.).

Foi apresentado um quadro comparativo entre os sistemas de numeração do Egito e Babilônia; bases10 e 60 respectivamente.

Posteriormente, abordamos o sistema de numeração indo-arábico, ou sistema decimal; aspectos históricos e características.Este foi um sistema que apresentou mais conveniência para diversas representações numéricas e diversos cálculos, principalmente por ser na base 10, posicional, ter princípiomultiplicativo, e finalmente incluir o zero.

Destacamos a imagem da Aritmética contida no livro *Margarita Philosophica,* de Gregor Reisch, indicando a transição para o sistema desenvolvido pelo povo do vale do Rio Indo, com uma "disputa"entre abacistas e algoristas. Durante muito tempohouve dois sistemas de numeração na Europa, os algarismos romanos e os algarismos hindus, o primeiro tinha como auxílio o ábaco para realizar as operações aritméticas.

A seguir, foram descritos os cinco significados de fração: *número, parte-todo, operador multiplicativo*, *quociente* e *medida,* de forma teórica e prática.

Posteriormente a essas abordagens, apresentamos uma lista contendo alguns exercícios/problemas, para que os alunos identificassem qual (is) significados seriam mais adequados, ou aplicáveis, na resolução das situações propostas. No total, tivemos 13 alunos presentes no minicurso.

A seguir, transcrevemos cada uma das questões apresentadas aos alunos e as expectativas de respostas.

Tabulação, da resolução e do significado de fração, da quantidade de acertos das questões do questionário, que faz parte do minicurso, aplicado na turma do 7º período de graduação emMatemática.

Questão 1

Um pedreiro queria assentar um piso de pedra, de formato quadrado (40x40cm), em uma varanda retangular. Ele não tinha nenhum instrumento tradicional como (trena, régua, e outros com escala) que permitisse calcular as dimensões: largura e comprimento da varanda. Nos seus materiais, ele lembrou que tinha pedaços de madeira (ripas) com medidas conhecidas (de 50cm, 10cm, 5cm e 1cm). Sabe-se que a varanda tinha um metro e noventa e oito centímetros (1,98m) de largura, e sete metros e noventa e seis centímetros (7,96m) de comprimento.Pede-se:

a) Quantas vezes ele usou cada pedaço de madeira para chegar nesses valores?

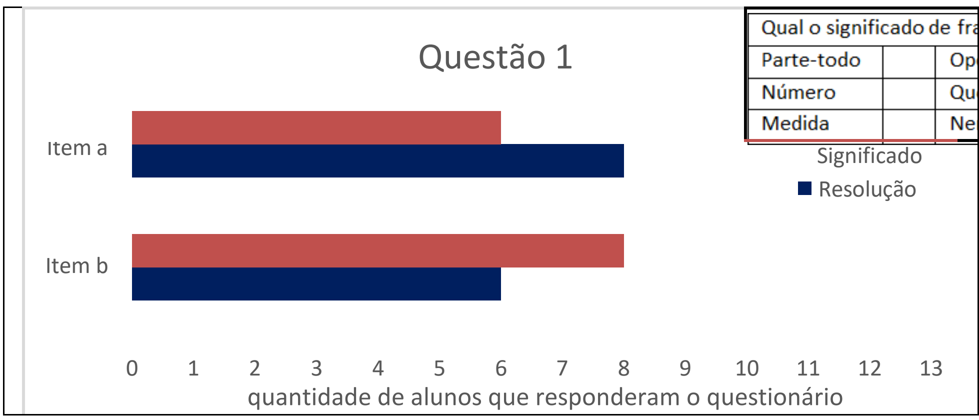
Comprimento:

Largura:

Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

b) Desconsiderando os rejuntes entre as pedras, quantas pedras o pedreiro deve comprar para cobrir todo opiso?

Obs: para diminuir os seus cálculos, ele arredondou as medidas do comprimento para (8,0m) e largura (2,0m) da varanda.



Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

Expectativa– item a

No item a, esperava-se que o aluno, diante dos comprimentos conhecidos das ripas, calculasse quantas seriam suficientes,adotando cada tamanho como padrão, para efetuar os cálculos necessários.

Possível resolução – item a

7,96m = 7,00 m + 0,9m (=90 cm) + 0,06m (=6cm).

7,00 m = 14 ripas de 50cm.

90cm = 9 ripas de 10cm.

6cm = 1 ripa de 5cm + 1 ripa de 1cm.

ou

7,96m = 7,50 m + 0,4m (=40 cm) + 0,06m (=6cm).

7,5m = 15 ripas de 50cm.

40cm = 4 ripas de 10cm.

6cm = 1 ripa de 5cm + 1 ripa de 1cm.

Questão 1 – Significado - item a)Medida

Expectativa– item b

No item b, esperava-se que o aluno efetuasse a divisão da área (ou superfície) total pela área (ou superfície) de cada pedra, obtendo assim o valor que representa a quantidade de pedras necessárias para cobrir todo opiso.

Possível resolução – item b

A_T = área total; A_T = 8m x 2m = 16m² ou 800 cm x 200cm =

160000cm². A_P = área de cada pedra; A_P = 40cm x 40cm = 1600cm².

Q_P = quantidade de pedras; $Q_P = A_T : A_P$ = 160000cm² : 1600cm² = 100 pedras.

Questão 1 – Significado - item b)Medida

Análise e comentário

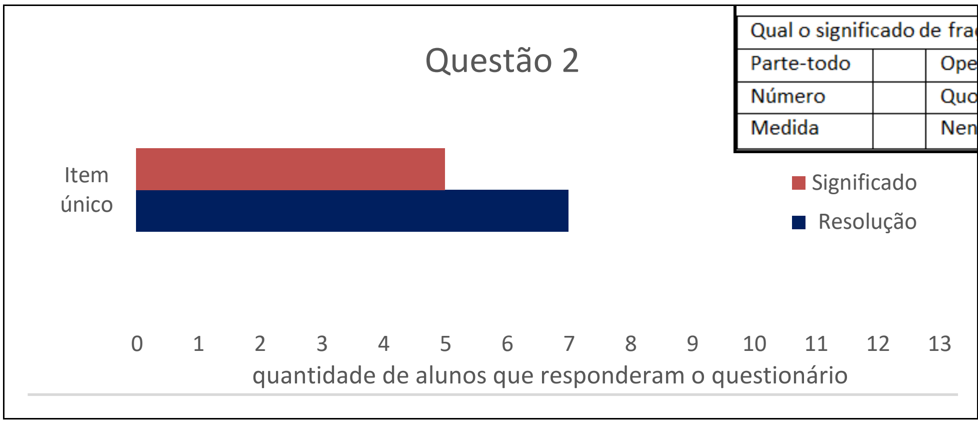
O item a, apresentou no significado de fração uma quantidade de acerto abaixo do esperado, já que exigiu operações básicas com divisão de medidas para responder o questionamento. Talvez a necessidade de conversão das unidades, metro e decímetro, tenham causado dificuldades nas operações.

O item b, embora tenha apresentado uma quantidade de acerto mais expressiva no significado, foi aquém do previsto, já que a resposta seria uma divisão de áreas, ou seja, quantas áreas de uma pedra caberiam na superfície total. A baixa quantidade apresentada na resolução pode ser explicada pela dificuldade de interpretação em problemas com enunciado mais extenso e na conversão das unidades, como já citado. No entanto, por se tratar de alunos cursando disciplinas dos 6º e 7º períodos de licenciatura em Matemática, não era previsto que as conversões pudessem ser um entrave para a solução do problema.

Questão 2

Um funcionário de uma empresa possui duas garrafas de café, uma com capacidade de 300ml e outra de 900ml. Ele deseja fazer uma quantidade de café para levar ao trabalho, usando a garrafa menor.Como só faz café em casa o suficiente para encher a garrafa maior,

precisa calcular proporcionalmente a quantidadede pó e açúcar para a bebida possuir o mesmo paladar. Se gasta em casa 30g de pó e 15g de açúcar, quanto deveria colocar, de pó e açúcar na garrafa pequena, sem alterar o gosto do café?



Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

Expectativa

O aluno deveria perceber uma relação entre as grandezas que proporcionasse, através de uma igualdade de frações equivalentes, calcular a quantidade pedida na questão.

Possível resolução

Sendo P e A as quantidades de pó de café e açúcar respectivamente que devem ser colocados na garrafa pequena.

$$\frac{300\ ml}{900\ ml} = \frac{P}{30\ g} \rightarrow P = 10g$$

$$\frac{300\ ml}{900\ ml} = \frac{A}{15\ g} \rightarrow A = 5g$$

Questão 2– Significado:Número ou medida

Análise e comentário

Aparentemente, o baixo índice de acerto no significado, nos leva a supor que o aluno foi induzido, sem nenhuma intenção, a pensar que quociente seria o significado da fração coerente com a resolução, por se tratar de frações equivalentes.

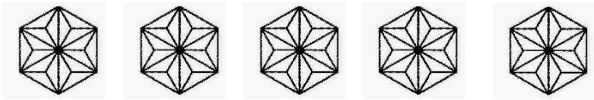
Ele deveria perceber que, por se tratar de frações equivalentes, o significado maisco-erente é *número ou medida*; aquele por representar a mesma quantidade nos dois membrosda igualdade e este por estabelecer uma comparação de padrões entre numerador e denominador em cada membro da igualdade.

Questão 3

Foram feitos dezoito triângulos dentro de cada um dos cinco hexágonos regulares das figu-ras abaixo. Uma professora pediu:

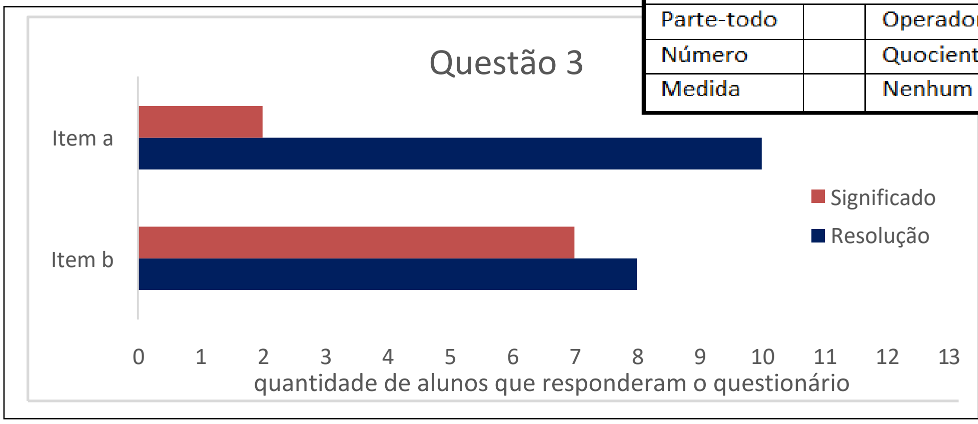
a) Para pintar nesses polígonos, a quantidade de: 1/3; 1/6; 1/9; 25%;75%.

No lugar de pintar, calcule quantos triângulos foram pintados em cada figura?



a) para colocar em ordem decrescente a quantidade pintada?

Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	



Expectativa– item a

No item a, pretendia-se que o aluno executasse as operações de multiplicação envolvendo: os números com representação fracionária (1/3, 1/6, 1/9) e os números representados na forma percentual (25%, 75%), com o inteiro 18.

Possível resolução – item a

Polígono 1 = P_1 ; Polígono 2 = P_2 ; Polígono 3 = P_3 ;.......

$$P_1 = \frac{1}{3} x 18 = 6;\ P_2 = \frac{1}{6} x 18 = 3;\ P_3 = \frac{1}{9} x 18 = 2$$

$$P_4 = 25\% x 18 = \frac{1}{4} x 18 = 4{,}5;\ P_5 = 75\% x 18 = \frac{3}{4} x 18 = 13{,}5$$

Questão 3– Significado item a) Operador multiplicativo

Expectativa– item b

No item b desejava-se que o aluno, para aplicar o invariante da ordenação, percebe-se o significado da fração *número*.

Possível resolução – item b

13,5 triângulos; 6 triângulos; 4,5 triângulos; 3 triângulos; 2 triângulos.

Questão 3– Significado item b)Número

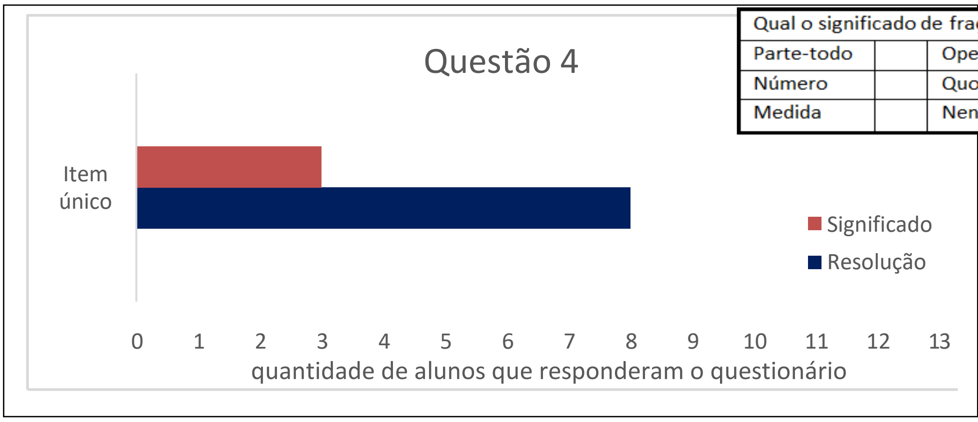
Análise e comentário

O item a, apresentou no significado de fração, uma quantidade de acerto abaixo do esperado, já que a operação para responder o item é uma operação de multiplicação.

O item b, mesmo apresentando uma quantidade maior no acerto do significado, esperava-se valor mais expressivo nesse invariante, bastando colocar as quantidades em ordem decrescente, ou seja, observam-se os valores numéricos e ordena-os.

Questão 4

O Salário de uma pessoa é R$ 4500,00. Ela gasta 1/3 dessa quantia com aluguel, e 50% do restante com alimentação, transporte, cultura, conta de água e luz. O que sobra, ela aplica. Qual o valor da aplicação?



Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

Expectativa

Desejava-se uma quantidade maior de acerto na resolução e no significado, já que a interpretação e as operações não apresentam dificuldades. Os cálculos relativos àresolução, são cálculos elementares envolvendo produto de fração simples com número inteiro além da subtração.

<u>Possível resolução</u>

$$Gasta \rightarrow \frac{1}{3} x 4500 = 1500$$

$$Sobra \rightarrow 4500 - 1500 = 3000$$

$$Gasta \rightarrow 50\% x 3000 = \frac{1}{2} x 3000 = 1500$$

$$Aplica \rightarrow 3000 - 1500 = 1500$$

Questão 4– Significado:Operador multiplicativo

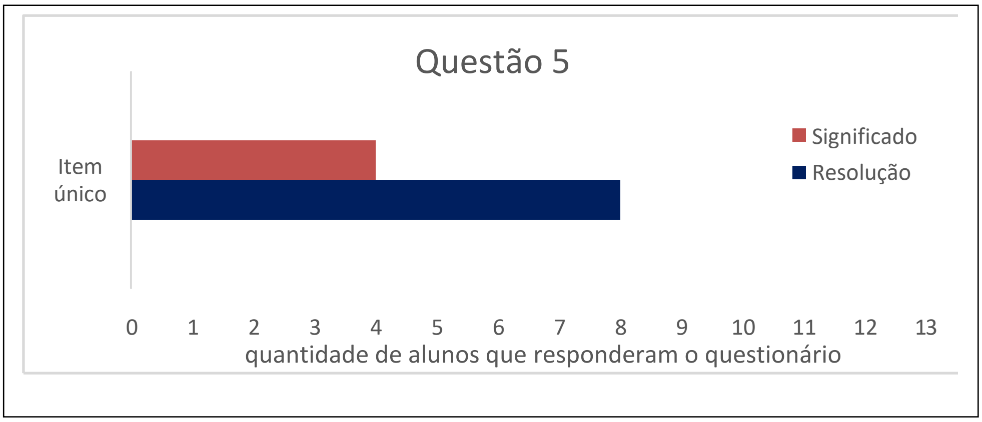
Análise e comentário

Embora a questão apresente interpretação e solução simples, o índice de erro no significado continua elevado mostrando, dessa maneira, que grande parte dos alunos apresenta dificuldade em perceber o significado *operador multiplicativo*.

Questão 5

Em obras civis, é comum fazer referência às ferragens (barras de aço) usando numerações com frações. Se um encarregado de ferragem indica uma barra de 3/8, essa medida é em polegadas (1 polegada = 2,54 centímetros), isto é, ele está se referindo a uma barra de diâ- metro de 10 milímetros. Na prática, é usada mais a nomenclatura em polegadas, isto é, nu- meração fracionária.

Supondo que um encarregado separe seis barras de ferro com bitolas diferentes para testar um operário de armação. Ferros cujas medidas são: 5/8; 3/4; 1/2; 3/8; 5/16; 1/4. Se o encar- regado pedisse ao operário para pegar as duas menores, quais ele pegaria?



Expectativa

Esperava-se que o aluno, usando frações equivalentes ou transformando cada fração em número racional com representação decimal, percebesse quais os números representari- am a menor quantidade. Ao analisar a grandeza de cada número para responder a questão, deveria inferir que o significado nesse contexto seria número.

Possível resolução

$$\frac{5}{8}=\frac{10}{16};\frac{3}{4}=\frac{12}{16};\frac{1}{2}=\frac{8}{16};\frac{3}{8}=\frac{6}{16};\frac{5}{16}=\frac{5}{16};\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$$

ou

$$\frac{5}{8}=0{,}625;\frac{3}{4}=0{,}75;\frac{1}{2}=0{,}5;\frac{3}{8}=0{,}375;\frac{5}{16}=0{,}1325;\frac{1}{4}=0{,}25$$

Questão 5– Significado: Número

Análise e comentário

Analisando a grandeza de cada número, o aluno pode identificar os valores referentes as duas menores barras de ferro para responder a questão. Mesmo havendo uma quantidade de acerto superior a metade, o significado não foi compreendido pela a maioria dos alunos, inclusive os que acertaram a questão.

4.1 Considerações sobre as análises

Por se tratar de conteúdo do Ensino Fundamental, consideramos que a quantidade de acerto, tanto na resolução, quanto no significado, ficaram bem aquém do esperado em todas as questões. Mas podemos observar, pelos dados tabulados, que a quantidade de acerto do significado ficou muito destoante da quantidade de acerto da resolução. Aquele ficou muito abaixo deste. O significado operador multiplicativo (questão 3, item a e questão 4) apresentou maior dificuldade de interpretação por parte dos alunos.

A análise da quantidade representada nos gráficos, nos permite fazer uma conjectura:o significado de fração, para a maioria das pessoas, inclusive para os licenciandos em Matemática, é somente o *parte-todo*. Esse conceito incorporado como único e suficiente atrapalha a compreensão e assimilação dos demais significados. Uma exposição desse tópico, para que seja bem compreendida e absorvida pelos alunos, requer tempo e muitos exemplos, já que é novidade para a maioriadeles.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise das respostas dos questionários aplicados, tanto para alunos da graduação (em Pedagogia e em Matemática), quanto na pós-graduação, apontam dados preocupantes indicando que, muito provavelmente, a formação inicial e continuada apresenta lacunas e que existem docentesque não detêm os conhecimentos sobre os significados de fração. O que ficou mais patente, tendo como base os resultados obtidos com a aplicação dos questionários, é o conceito geral associando-o somente ao significado *parte-todo*. Esses dados reforçam a relevância do desenvolvimento do nosso estudo que,desde o início, tinha como finalidade trazer contribuições, para docentes em formação e em exercício, com a ampliação dos significados de fração.

Não há uma maneira correta ou eficaz de versar frações em sala de aula que nos permita dizer que a aprendizagem será garantida. O processo ensino/aprendizagem é muito maiscomplexo do que aparenta ser, principalmente em se tratando de um conteúdo que, muitas vezes, se fazabstrato para os alunos. Envolve inúmeras variáveis que se relacionam, dificultando, dessa maneira, seus estudos e suas interpretações. As dificuldades que os alunos do Ensino Fundamental apresentam em relação a este conteúdo não foram objeto do presente estudo e nem retratadas no nosso trabalho mesmo fazendo parte deste contexto. Dissertamos nas perspectivas dos significados de fração, no conhecimento dos professores em relação ao tema e nas análises dos livros paradidáticos edidáticos.

Discordamos do tempo destinado para contemplar toda a amplitude pertinente a tópicos tão peculiares e complexos como relatam diversos autores. Se o conjunto dos números racionais, representados na forma de fração, causa tanta dificuldade e problema para a grande parte dos alunos, porque não distribuir as suas particularidades em mais de dois ou três anos?

Faz parte das nossas deduções que, em geral, os(as) professores(as) não detêm todos os significados de fração incorporados no seu conhecimento. Essa visão reducionista deste conteúdo não abarca diversas situações, que necessitam ou exigem, outros significados além do *parte-todo*; o entendimento parcial só gera possíveis restrições nas estratégias didáticas. O desdobramento ou consequência dessa limitação é um aprendizado, por parte dos alunos, comlacunas.

A análise dos livros de Matemática selecionados veio comprovar que os seus autores não retratam o assunto de maneira completa (com todos os seus significados, exemplos e abordagens teóricas), sendo enfatizado o significado "*parte-todo*" em detrimento dos demais. Dentro deste significado específico, destacamos o quadro 6, no item *"Características mais usadas para expressar o significado parte-todo"*, que a maioria dos livros estudados apresenta uma abordagem incompleta em alguns tópicos em relação a este significado.

O Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, por mim cursado, ampliou os meus conhecimentos sobre diversos conteúdos dentro da Educação Matemática, levando a uma reflexão sobre a educação e o ensino, sobre o perfil educacional dentro da sala de aula. O desenvolvimento da dissertação e os debates realizados no curso, também trouxeram significativas contribuições para as questões relativas à pesquisa, inferir sobre as nossas metodologias; posturas tradicionais; avaliações; visões sobre educação como um todo; didáticas e abordagens deconteúdo.

A pesquisa também abriu outros horizontes para diversos tópicos da História da Matemática, por mim ignorados, o que veio a contribuir para outra postura diante dos conhecimentos que um professor necessita, não só para sua própria formação, como para trazer outros elementos para a sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALVES, Denis Rogério Sanches; MARTENS, Adam Santos. Desafios para a construção do conhecimento de frações nas séries intermediárias do Ensino Fundamental. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 10., 2011, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUC Paraná, 2011. p.9364-9378.

ANUÁRIO Brasileiro da Educação Básica. São Paulo: Moderna, 2019.

AZEVEDO, Ricardo. Formação de leitores e razoes para a literatura.In: SOUZA, Renata Junqueira. **Caminhos para a formação do leitor**. São Paulo: DCL, 2004.

BATISTA, João Paulo Lima; JESUS, Thamires Belo. Concepções dos futuros professores de Matemática com relação ao conteúdo de fração. *In*: Seminário de Licenciatura em Matemática, 7., 2016, Cachoeiro do Itapemirim. **Anais...** Cachoeiro do Itapemirim: IFES, 2016. p.16-21

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Número fracionário:** primórdios esclarecimentos. Brasília: SBHMat, 2005. (Coleção Histórica da Matemática para Professores).

BEZERRA, Francisco José Brabo. Construindo a Representação da fração: abordagem tradicional versus abordagem conceitual. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004.

BONZANINI, Louisianne Christine; BASSOI, Tânia Stella.**Os professores e o ensino de frações no 2º ciclo do Ensino Fundamental.** Ponta Grossa: UEPG, 2016.

BRANDÃO, Jeferson Dagmar Pessoa. O papel e a importância do livro didático no processo de ensino aprendizagem. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 1., 2014, Campina Grande, PB. ***Anais...*** Campina Grande: Realize,2014.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental,1997.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental,1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental,2017.

BORGES, Célio José. **Professores leigos em Rondônia**: Entre sonhos e oportunidades, a formação e profissionalização docente – um estudo de caso – O PROHACAP. 2011. Tese (Doutorado em Educação Escolar) – Universidade Estadual Paulista, Araraquara, 2011.

CAMPOS, Tânia. Sobre o ensino e aprendizagem de frações. **Cuadernos de Investigación y Formación em Educación Matemática**, año 8, n.11, p.239-246,2013.

CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra; NUNES, Terezinha. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa**, v.8, n.1, p.125-136, 2006.

CANOVA, Raquel Factori. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental com relação á fração**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

CARDOSO, Paula; MAMEDE, Ema. O conceito de fração – o conhecimento de professores do 1º ciclo. **Revista de Estudios e Investigaciónen Psicologia y Educación**, v. ext, n. 6, p. 229-233, 2015.

CORRÊA, Rosa Lydia Teixeira. O livro escolar como fonte de pesquisa em História da Educação. **Cadernos Cedes**, ano XX, n. 52, p. 11-24, nov. 2000.

COSTA, Manuel S.; ALLEVATO, Norna S. G. Livro didático de matemática: Análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. **Vidya**, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010.

CUNHA, Antônio Geraldo da.**Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Lingua Portuguesa**. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, s.d.

CURI, Edda. A Formação Matemática de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental face às novas demandas brasileiras. **Revista Iberoamericana de Educación**, Madrid, v. 37, n. 5, p. 1-10, 2005.

CURI, Edda. **Formação de professores polivalentes**: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

D`AMBROSIO, Beatriz. Conteúdo e metodologia na formação de professores. In: FIORENTINI, Dario e NACARATO, Adair Mendes (Orgs.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.** São Paulo: Musa Editora, p. 20-32, 2005.

D‟AMBROSIO, Beatriz. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. Brasília, v.2 , n. 2, p. 15-19,1989.

GATTI JÚNIOR, Décio. Livro didáticos, saberes disciplinares e cultura escolar: primeiras aproximações. **História da Educação,** 2, p. 29-50, 1997.

KIEREN, T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers**.** In LESH, R. (Ed.). **Number and measurement:** paper from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, 1976, p.101-151.

LOPES, Antônio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **BOLEMA** (Boletim de Educação Matemática), v. 21, n. 31, p.1-22, 2008.

LOPES, Aparecida Ferreira. Formação de professores dos anos iniciais sobre o processo de ensino e aprendizagem de frações. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 12., 2016, São Paulo. **Educação Matemática na contemporaneidade:** desafios e possibilidades. São Paulo: SBEM, 2016.
Disponível em: file:///C:/Users/k/AppData/Local/Temp/5153_3951_ID.pdf. Acesso em: 4. out. 2019.

MACHADO, José Pedro. **Dicionário etimológico da Língua Portuguesa**. Lisboa: Editorial Confluência, 1960.

MAGINA, Sandra. CAMPOS, Tânia. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **BOLEMA (**Boletim de Educação Matemática), v. 21, n.31, p. 23-40, 2008.

MAMEDE, Ema. Sobre o ensino e aprendizagem de fracções nos níveis elementares de ensino. PROFMAT, 2011, Lisboa. **Actas...** Lisboa: APM, 2011.

MICHAELIS.**Moderno dicionário da língua portuguesa.** São Paulo: Companhia Melhoramentos, 1998.

MOUTINHO, Leonel. **Fração e seus diferentes significados**: um estudo junto a alunos de 4ª e 8ª séries do ensino fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo,2005.

NUNES, Terezinha. BRYANT, Peter. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação Matemática:** números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

OSORIO, Norma Cunha; PORTO, Riza de Araújo. **Matemática na Escola Primária.** Moderna. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1965.

PELIZZARI, Adriana et al. Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel. **Rev. PEC,** Curitiba, v.2, n.1, p.37-42, jul.2001/jul. 2002.

POWELL, Arthur. Melhorando a epistemologia de números fracionários: uma ontologia baseada na História e Neurociência. **REMATEC**, ano 13, n. 29, p. 78-93, set./dez. 2018.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Número racional: r**elações necessárias à sua compreensão. 1997. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Campinas, Campinas,1997.

SEBASTIANI, Eduardo Ferreira. Onze avos, doze avos,... De onde vem este termo Avo? **Revista Brasileira de História da Matemática, v.** 6, n. 11, p. 97-108, 2006

VERGNAUD, Gérard. The Theory of Conceptual Fields. **Human Development**, v. 52, p. 83-94,2009.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos Campos Conceituais. SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1995, Rio de Janeiro. In: NASSER, Lilian (Ed.). **Anais...** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ,1995.

VIGHI, Cátia S. B. Raquel Factori. **Professores leigos em escolas rurais.** Trajetória de vida profissional de um passado revisitado. 2008. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) – Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2008.

LIVROS DIDÁTICOS E PARADIDÁTICOS ANALISADOS

BORDEAUX, Ana Lucia; RUBINSTEIN, Cléa; FRANÇA, Elizabeth; OGLIARI, Elizabeth; MIGUEL,Vânia. **Bem me quer Matemática - 4º Ano.** 4. ed. São Paulo:Editora do Brasil, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática 4º ano – Ápis**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

GARCIA, Jacqueline. **Conhecer e Crescer – Matemática.** 3. ed. São Paulo: Escala Educacional, 2011.

GIOVANNI, Júnior José Ruy. **A Conquista da Matemática.** São Paulo: FTD, 2018.

MACHADO, Nilson José. **O pirulito do pato**. São Paulo: Scipione, 1996.

OLIVEIRA, Carlos N. C.; FUGITA, Felipe. **Matemática - Geração Alpha 6º ano.** 2. ed. São Paulo: S.M., 2018.

PIRES, Célia Maria Carolino; RODRIGUES, Ivan Cruz. **Nosso Livro de Matemática 4º ano.** 3. ed. São Paulo: Zapteditora, 2017a.

PIRES, Célia Maria Carolino; RODRIGUES, Ivan Cruz. **Nosso Livro de Matemática 5º ano.** 3. ed. São Paulo: Zapteditora, 2017b.

RAMOS, Luzia. **Doces frações**. 4.ed. São Paulo: Ática, 1998.

RAMOS, Luzia. **Frações sem mistérios**. São Paulo: Ática, 2003.

REAME, Eliane. **Ligamundo**. São Paulo: Saraiva, 2017

SILVEIRA, Enio. MARQUES, Claudio. **Matemática -** compreensão e prática. São Paulo: Moderna, 2008.

SOUZA, Joamir. **Matemática, Realidade & Tecnologia**. São Paulo: FTD, 2018.

TABOADA, Roberta; LEITE, Angela. **Aprender Juntos Matemática 5º ano.** 4. ed. São Paulo: S.M., 2014.

APÊNDICE I

PUC MINAS - MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO APLICADO PARA ALUNOS DA PÓS-GRADUAÇÃO (MESTRANDO EM MATEMÁTICA)

Este questionário é um dos instrumentos de coleta de dados para uma dissertação de mestrado sobre o tema frações.

Leia as instruções abaixo e responda:

- Pedimos que responda todas as perguntas que nos ajudarão no processo deanálise.
- Não há resposta certa ouerrada.
- Nosso principal interesse é estudar a metodologia empregada pelos professores.

1) Formação
a) Curso superior ouequivalente:______________________________
b) Instituição______________________________
c) Ano de conclusão______________________________
d) Especialização: ( ) Não ( ) Sim,em______________________________
e) Outros cursos______________________________
2) Há quanto tempo lecionamatemática:
( ) Menos de 5 anos
( ) De 5 a 10anos
( ) De 10 a 15 anos
( ) Mais de 20anos
3) Atuaçãodocente

Anterior	Atual
( ) Somente em escola particular	( ) Somente em escola particular
( ) Somente em escola pública	( ) Somente em escola pública
( )Escolaparticularepúblicaalternada-	( ) Escola particular e pública alternadamente
( ) Escola particular e pública simultaneamente	( ) Escola particular e pública simultaneamente

4) Experiência com ensino dematemática:
( ) Anos iniciais do ensino fundamental (1º ao 5º)
( ) Anos finais do ensino fundamental (6º ao9º)
( ) Ensino Médio

5) Você já trabalhou com o conteúdo de frações algum momento em sala de aula?

( ) SIM ( ) NÃO

b) Em caso afirmativo, qual foi suametodologia?

c) Caso não tenha trabalhado, como ensinaria esseconteúdo?

d) Qual o livro didático de matemática com esse tema vocêrecomendaria?

6) Para você, qual o conceito de fração? (Dêexemplos)

7) Além dessa metodologia citada acima, você conhece outra maneira de explicar esse assunto?

( ) NÃO ( ) SIM, qual:____

8) Dê a sua opinião sobre o conteúdo de frações presente em algum livro didático de matemática que você adota ou já adotou. (Cite o nome e autor dolivro)

9) Você já leu algum livro paradidático sobre esse assunto?
( ) SIM ( ) NÃO

Em caso afirmativo, qual?

10) No conteúdo de frações qual o assunto você considera mais difícil para oaluno?

APÊNDICE II

PUC MINAS - MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EMATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO APLICADO PARA ALUNOS DA LICENCIATURA EMMATEMÁTICA

Este questionário é um dos instrumentos de coleta de dados para uma dissertação de mestrado sobre o tema frações. Deverá ser destinado a alunos do curso de graduação em matemática.

- Solicitamos que tente responder todas as perguntas e agradecemos pela suacolaboração.

Ao interpretar os enunciados dos cinco exercícios propostos, verifique após a solução, qual dos significados você aplicou para solucionar cada umdeles.

1) Um pedreiro queria assentar um piso de pedra, de formato quadrado (40x40cm), em uma varanda retangular. Ele não tinha nenhum instrumento tradicional como (trena, régua, e outros com escala) que permitisse calcular as dimensões: largura e comprimento da varanda. Nos seus materiais, ele lembrou que tinha pedaços de madeira (ripas) com medidas conhecidas (de 50cm, 10cm, 5cm e 1cm). Sabe-se que a varanda tinha um metro e noventa e oito centímetros (1,98m) de largura, e sete metros e noventa e seis centímetros (7,96m) de comprimento.Pede-se:

a) Quantas vezes ele usou cada pedaço de madeira para chegar nesses valores?

Comprimento:

Largura:

Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

b) Desconsiderando os rejuntes entre as pedras, quantas pedras o pedreiro deve comprar para cobrir todo opiso?

Obs: para diminuir os seus cálculos, ele arredondou as medidasde comprimento (8,0m) e largura (2,0m) da varanda

Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

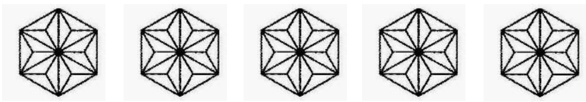
2) Um funcionário de uma empresa possui duas garrafas de café, uma com capacidade de 300ml e outra de 900ml. Ele deseja fazer uma quantidade de café para levar ao trabalho, usando a garrafa menor. Como só faz café em casa o suficiente para encher a garrafa maior, precisa calcular proporcionalmente a quantidade de pó e açúcar para a bebida possuir o mesmo paladar. Se gasta em casa 30g de póe 15g de açúcar, quanto deveria colocar, de pó e açúcar na garrafa pequena, sem alterar o gosto docafé?

Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

3) Foram feitos dezoito triângulos dentro de cada um dos cinco hexágonos regulares das figuras abaixo. Uma professorapediu:

a) Para pintar nesses polígonos, a quantidade de: 1/3; 1/6; 1/9; 25%;75%.

No lugar de pintar, calcule quantos triângulos foram pintados em cada figura?



Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

b) para colocar em ordem decrescente a quantidadepintada?

Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

4) O Salário de uma pessoa é R$ 4500,00. Ela gasta 1/3 dessa quantia com aluguel, e 50% do restante com alimentação, transporte, cultura, conta de água e luz. O que sobra, ela aplica. Qual o valor daaplicação?

Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

5) Em obra é comum fazer referência ás ferragens (barras de aço) usando numerações com frações. Se um encarregado de ferragem indica uma barra de 3/8, essa medida em polegadas (1 polegada = 2,54 centímetros), ele está se referindo a uma barra de diâmetro de 10 milímetros. Na prática, é usada mais a nomenclatura em polegadas, isto é, numeraçãofracionária.

Supondo que um encarregado separe seis barras de ferro com bitolas diferentes para testar um operário de armação. Ferros cujas medidas são: 5/8; 3/4; 1/2; 3/8; 5/16; 1/4. Se o encarregado pedisse ao operário para pegar as duas menores, quais ele pegaria?

Qual o significado de fração foi usado nesse item?			
Parte-todo		Operador multiplicativo	
Número		Quociente	
Medida		Nenhum deles	

APÊNDICE III

PUCMINAS - MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO APLICADO PARA ALUNOS DO CURSO DE PEDAGOGIA

Este questionário é um dos instrumentos de coleta de dados para uma dissertação de mestrado sobre o tema frações.

- Solicitamos que tente responder todas as perguntas e agradecemos pela suacolaboração.

1) Formação

- Curso superior em Matemática

( )concluído (   ) em andamento

- Curso dePedagogia

( ) concluído ( ) em andamento

( ) Curso Normal Superior

( ) Curso deMagistério

2) Há quanto tempo leciona:

( ) Menos de 5anos

(   ) De 5 a 10 anos

( ) De 10 a 15 anos

( ) De 15 a 20 anos

( ) Mais de 20 anos

Você trabalhou ou leciona atualmente em:

( ) Somente em escola particular

( ) Somente em escolapública

( ) Escolas particular epública

3) Experiência com ensino de Matemática:

(   ) Ensino Infantil

(   ) Anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º)

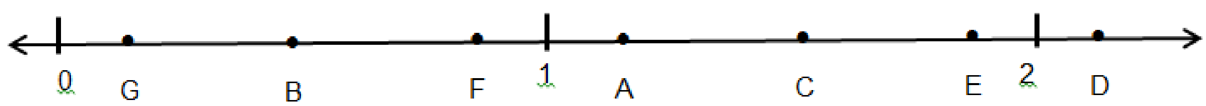
(   ) Anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º)

(   ) Ensino Médio

---

4) O que você entende por fração? Dê exemplos.

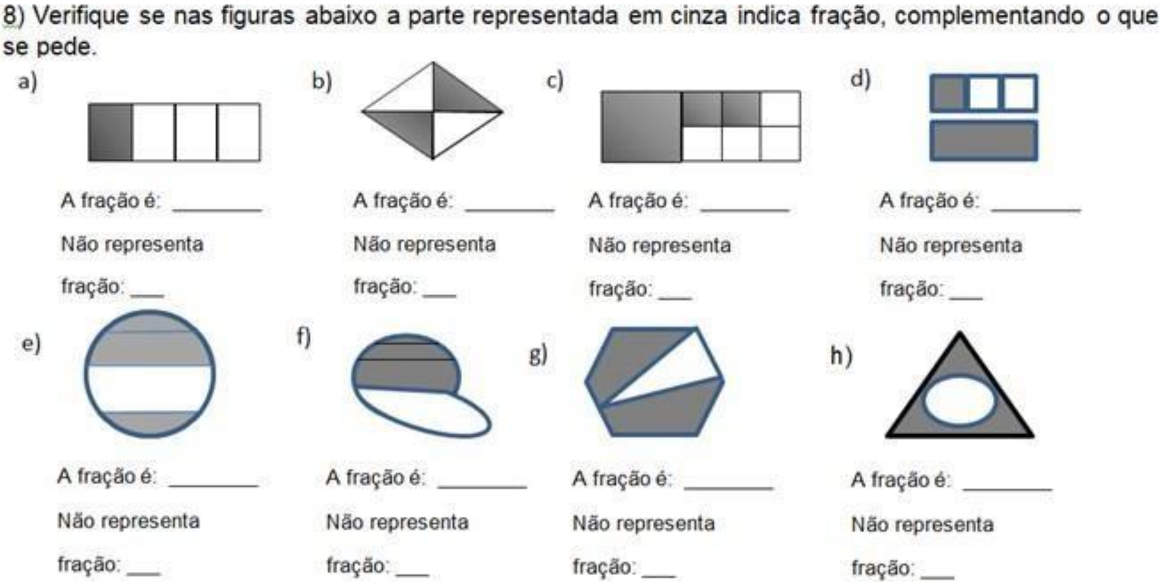
6) Baseando-se na reta numerada, que possui os números “0”, “1”, “2” marcados, relacione as frações com os pontos posicionados na reta.



Exemplo : $\frac{1}{2} = B; \frac{3}{2} = C$ *Complete* : $\frac{11}{5} =$ ___; $\frac{6}{5} =$ ___; $\frac{18}{10} =$ ___; $\frac{2}{10} =$ ___

7) O vendedor de uma indústria tinha quarenta e oito pregos para ser embalados emcaixas com 12unidades.

a) Quantas caixas são necessárias para efetuar essadistribuição?


8) Verifique se nas figuras abaixo a parte representada em cinza indica fração, complementando o que se pede.

a) A fração é: ________ Não representa fração: ___

b) A fração é: ________ Não representa fração: ___

c) A fração é: ________ Não representa fração: ___

d) A fração é: ________ Não representa fração: ___

e) A fração é: ________ Não representa fração: ___

f) A fração é: ________ Não representa fração: ___

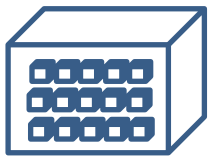
g) A fração é: ________ Não representa fração: ___

h) A fração é: ________ Não representa fração: ___

b) Qual a fração representa o resultadoencontrado?

9) Na figura abaixo, tem-se representada exatamente a quantidade de bombons em uma caixa. Se um menino comeu um quinto e uma menina comeu dois terços dosbombons da caixa, indicando o seu procedimento,responda:

a) Quantos bombons o meninocomeu?
b) Quantos bombons a meninacomeu?



10) Num grupo de sete crianças, havia quatro meninas e três meninos. Esse grupo pediu duas pizzas do mesmo tamanho, uma delas, para dividir entre as meninas e, outra, para dividir entre os meninos. Indique seu raciocínio para chegar às respostas

a) Qual fração representa o que cada meninacomeu?

b) Qual fração representa o que cada meninocomeu?

c) Quem comeu mais, cada menina ou cadamenino?

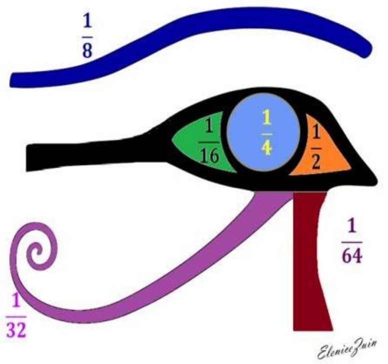
TABULAÇÃO DE RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO ALUNOS DA GRADUAÇÃO DE PEDAGOGIA

QUANTIDADE DE ACERTOS NUMA TURMA DE 14 ALUNOS

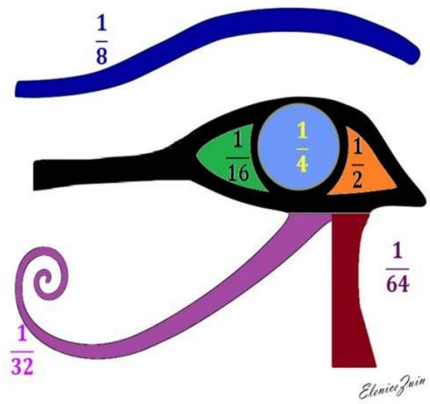
QUESTÃO 5	10/14
QUESTÃO 6	4/14
QUESTÃO 7	a) = 11/14b) = 7/14
QUESTÃO 8	a) = 14/14b) = 13/14 c) = 6/14 d) = 4/14 e) = 7/14f) = 7/14 g) = 4/14 h) = 6/14
QUESTÃO 9	a) = 9/14b) = 8/14
QUESTÃO 10	a) = 8/14b) = 7/14 c) = 8/14

APÊNDICE IV – PRODUTO EDUCACIONAL

Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Ciências e Matemática



FRAÇÕES: HISTÓRIA E SIGNIFICADOS



WANDER MORAES DA SILVA JÚNIOR

ELENICE DE SOUZA LODRON ZUIN

Belo Horizonte – Minas Gerais
2020

PUC Minas

WANDER MORAES DA SILVA JÚNIOR

ELENICE DE SOUZA LODRON ZUIN

Belo Horizonte – Minas Gerais
2020

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Campus Coração Eucarístico

FRAÇÕES: HISTÓRIA E SIGNIFICADOS

WANDER MORAES DA SILVA JÚNIOR

ELENICE DE SOUZA LODRON ZUIN

Belo Horizonte
Minas Gerais
2020

APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é parte da dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, *Frações e seus diferentes significados em alguns materiais didáticos de Matemática***.**

Nosso objetivo é que este material possa auxiliar nas formações inicial e continuada de professores, incluindo os cursos de Pedagogia e Matemática, e servir de suporte para os profissionais em serviço que atuam no Ensino Básico.

A finalidade desses apontamentos é apresentar cinco significados de fração: *número, parte-todo*, *operador multiplicativo*, *quociente* e *medida,* visando ampliar e propiciar um ensino/aprendizagem mais efetivo das frações. São abordados alguns aspectos históricos referentes à numeração incluindo as representações fracionárias. Além disso, integramos a análise do tópico frações em três livros paradidáticos e onze livros didáticos de Matemática do 4º ao 6º ano do Ensino Fundamental, para que seja possível verificar como os significados de fração comparecem nos mesmos.

Esperamos que esse material possa não só contribuir para ampliar o entendimento dos significados de fração como também aguçar o olhar, de modo crítico e reflexivo, de licenciandos e professores para os muitos conteúdos curriculares do EnsinoBásico.

Os autores

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

A IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA NA MATEMÁTICA

Como os professores podem, amenizar tanta “aversão à Matemática”? A atual grade curricular do Ensino Básico corrobora com esse sentimento? A História da Matemática, se bem trabalhada, pode ser um modo eficiente de despertar a curiosidade e incentivar esse aluno tão diferente de outras épocas. Essa metodologia, com suporte na história, como observa Ubiratan D’Ambrosio:

> [..] não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir história de matemática em seus cursos. Se em algum tema tem uma informação ou curiosidade histórica, compartilhe com os alunos. Se sobre outro tema ele não tem o que falar, não importa. (D’AMBROSIO, 1996, p. 13).

O autor ainda sinaliza a relevância de o professor fazer algumas reflexões relatando um pouco de história em alguns tópicos, para despertar interesse nos alunos. O ideal seria que “o professor tivesse uma noção da história da matemática e pudesse fazer um estudo sistemático e, por isso, recomenda-se aos professores em serviço que procurem essa formação.” (D’AMBROSIO, 1996, p. 13). No entanto, se o docente busca algumas informações históricas para as suas aulas, já está fazendo a diferença.

Outro aspecto relevante é tentar relacionar, sempre que possível, a Matemática com o dia a dia do aluno ou das pessoas que o cercam. Uma matemática mais pragmática, objetiva, aplicável, no lugar de um conteúdo abstrato, com muitas fórmulas, algoritmos, teorias distantes do aluno, trazem desinteresse e dificuldade, principalmente para os alunos menores.

Em seu artigo, *Priorizar História e Filosofia da Matemática na Educação*, D’Ambrosio (2012) contribui com suas considerações sobre a importância da “inclusão de História e Filosofia da Matemática com prioridade sobre conteúdos apresentados como um simples elenco de técnicas para lidar com problemas padronizados e descontextualizados”. (p.159). Como transmitir esse conhecimento? Depende da compreensão, fornecida pelo estudo crítico do passado sobre esse conhecimento, como se originou e quais as principais motivações para o seu desenvolvimento. Esse encadeamento é um dos principais objetivos da História e Filosofia da Matemática.

A História da Matemática, na perspectiva do autor, tem objetivos de:

> 1. Situar a matemática como uma manifestação cultural de todos os povos, em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos e, como tal, é diversificada na suaevolução.
>
> 2. Mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvida pelahumanidade.
>
> 3. Destacar que a Matemática Escolar, teve sua origem nas culturas da Antiguidade Mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média em toda a Europa e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilopróprio.
>
> 4. Saber que a Matemática escolar, tornou-se indispensável como base para a ciência, a tecnologia e a economia, e que devido a isso, foi introduzida nas colônias e espalhou-se por todo o mundo, tendo sido incorporada aos sistemas escolares de todas as nações. (D'AMBROSIO, 2012,p.168).

A percepção de Mendes (2012) sobre a importância da História da Matemática converge com a de D'Ambrosio em todos os aspectos. O autor defende que: "é possível tomar pedagogicamente a investigação histórica como um exercício de criatividade que provoque o processo de criação nas aulas de matemática" (MENDES, 2012, p.1). Observa-se, no seu texto, a importância de "buscar na história das práticas e elaborações matemáticas, em seus níveis experimentais e formais, aspectos que definem o contorno dos desafios que levaram a produção de saberes matemáticos atualmente abordados no Ensino Fundamental, Médio e Superior". (MENDES 2012, p.1).

Em relação a um trabalho mais sistematizado com a história, a investigação pode ser um caminho viável.

> A investigação histórica nas aulas de Matemática pode contribuir para que os estudantes se familiarizem com o uso de referências bibliográficas como uma agente de compreensão do desenvolvimento histórico-epistemológico da Matemática, além de ganharem autonomia para trabalhar de maneira independente na construção da sua própria aprendizagem, desenvolverem o espírito investigativo bem como habilidades de organizar, analisar e apresentar os resultados de seus projetos de pesquisa por meio de exercício de comunicação oral de suas ideias, apresentação visual e escrita. (MENDES, 2012, p. 13).

Miguel (2015) também se insere na mesma perspectiva dos autores anteriores. Ele advoga que a construção do conhecimento matemático dos alunos se dá na interação com o professor, com os demais alunos e com os textos e atividades escolares, num processo ininterrupto de

> [...] construção e negociação de significados, processo este, cujo limite é dado pelas significações histórico-sociais construídas no passado, isto é, por nossos antepassados, então, esse processo, queiramos ou não, já traz subjacente a si mesmo uma interação com o passado, com a história, ainda que nem professores e nem alunos tenham consciência disso. A história da matemática medeia esse processo construtivo de significados mesmo que não tenhamos a menor consciência disso. (MIGUEL, 2015, p. 8).

Num curso de licenciatura em Matemática, cujo principal objetivo é habilitar professores para o Ensino Básico, a História da Matemática é indispensável para uma formação mais consistente. Ela é capaz de propiciar ao professor uma visão mais ampla do passado, ajudando-o na compreensão dos fatos, na comparação de conceitos e procedimentos, possibilitando a constatação de que não se trata de uma "matemágica", que nada nasceu por acaso, que muitos conhecimentos nasceram de uma necessidade humana e estes foram sofrendo transformações; deixados de lado ou aperfeiçoados e divulgados.

O professor pode transmitir aos seus alunos, ou levá-los a pesquisar para verificar alguns conhecimentos que foram desenvolvidos em tempos passados. Deste modo, é possível, tentar retratar uma época, argumentar sobre as adversidades, as dificuldades de comunicação, a falta de tecnologia, as carências de transportes em outros séculos, e mostrar que, apesar disso, muito foidesenvolvido.

Zuin (2003, p. 3) destaca que, no Brasil, a proposta de ajustamento dos novos programas de Matemática, que abarca a História da Matemática, só foi "efetivada nos PCN de Matemática para o 1º e 2º ciclos e para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental em 1997 e 1998, respectivamente". A autora observa que os PCN não eram obrigatórios, mesmo sendo oficiais. Neste contexto, muitos docentes "não se ocupam da história em suas aulas, por não terem formação na área ou por não acreditarem que a história possa colaborar para a melhoria do ensino/ aprendizagem de Matemática". (ZUIN, 2003, p. 3).

A Secretaria de Educação Fundamental e o Ministério de Educação e Cultura – MEC, vêm endossar e reforçar a importância da História da Matemática em documentos oficiais que norteiam a educação do país.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais tinham como objetivo construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras, respeitando as diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada em dezembro de 2017, é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. (BRASIL, 2017, p.7).

A primeira das oito competências específicas da Matemática para o Ensino Fundamental, citadas pela BNCC, trata da importância dos momentos históricos da matemática e o seu desenvolvimento como sendo consequência de carências humanas. O texto nos diz que o aluno deve ser preparado para:

> [...] reconhecer que a matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p. 267).

Embora a BNCC traga alguma valorização para a História da Matemática, os PCN de Matemática, apesar de ainda focar aspectos restritos, justificam a presença da História nas aulas de Matemática de forma mais coesa e contundente do que a BNCC.

Em relação aos números racionais, os alunos chegam aos anos finais do Ensino Fundamental sem compreender os procedimentos de cálculo com esses números, principalmente na forma decimal, (mesmo tendo visto nos ciclos iniciais) além dos diferentes significados associados a esses números (BRASIL, 1998, p. 100).

A abordagem dos Números Racionais, principalmente, a partir do 4º ano do Ensino Fundamental tem como objetivo levar o aluno a perceber que o conjunto dos Números Naturais é insuficiente para a realização de certas operações relacionadas com situações-problema que envolvem medidas de grandeza. Para abordar o estudo dos Números Racionais sob essa perspectiva, os PCN de Matemática textualizam da seguinte forma:

> [...] os **problemas históricos** envolvendo medidas, que deram origem a esses números, oferecem bons contextos para seu ensino. Pode-se discutir com os alunos, por exemplo, que os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C. para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados”. (BRASIL, 1998, p. 101).

Antonio Lopes também discorre na mesma linha de D'Ambrosio e Mendes, anteriormente citados, no que tange à importância da parte histórica no processo educacional. Ele defende que, na História da Matemática, as frações tem um papel de destaque, que sua abordagem não deve ficar ausente dos currículos e que "a notação decimal é praticamente recente na história da matemática, números irracionais como π eram substituídos por aproximações de números racionais". (LOPES, 2008, p. 17). A história do conceito de frações, bem como suas componentes, epistemológica e cognitiva, é desconhecida pela maioria dos professores e autores.

> O ensino de frações tem sido praticado como os nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, "carroções", cálculo pelo cálculo. Essa fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da matemática. (LOPES, 2008, p. 22).

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICOS DE ALGUMAS REPRESENTAÇÕES DE FRAÇÕES

Neste capítulo, nossa proposta é fazer uma breve abordagem histórica relativa à algumas maneiras que foram utilizadas para representar as frações. No entanto, o caminho que a humanidade percorreu para adquirir o conceito de número, ao que parece, primeiro vem com os símbolos para quantidades inteiras até fazer sentido e haver necessidade de representar as partes de um inteiro.

O estudo e o conhecimento do passado nos proporciona entendermos e analisarmos melhor o presente, ampliando e modificando as nossas concepções em diversos tópicos da Matemática. Naturalmente, estudar o passado não irá nos propiciar prever ou alterar o futuro, mas através de informações, conhecimentos e análises, nos permite:

- Assimilar, criar ou aperfeiçoar mais metodologias, aprimorando a nossa didática para ministrarmos vários tópicos acadêmicos de maneira mais consistente econsciente;

- Não cometermos os mesmos equívocos que outras pessoas (ou grupos)praticaram;

- Ampliar o conhecimento através de uma visão teórica da evolução do pensamento matemático, acarretando maiores e melhores compreensões dos diversos assuntos abordados em livros e naaula;

- Uma ordenação histórica das teorias e dos fatos para que possamos relacionar e entender os conteúdos de maneira mais lógica e coerente diante das situações (dificuldades) daépoca;

- Relacionarmos os diversos tópicos dentro do campo da Matemática, assim como com outras disciplinas, com outros conhecimentos e com o nosso dia adia.

Iniciamos, fazendo referência às palavras do matemático Caraça:

> A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente; descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outrascontradições.
>
> Descobre-se ainda qualquer coisa mais importante e mais interessante: no primeiro aspecto, a Ciência parece bastar-se a si própria, a formação dos conceitos e das teorias parece obedecer só a necessidades interiores; no segundo, pelo contrário, vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação daCiência.
>
> A ciência, encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social. (CARAÇA, 1951, p.XIII).

Para fomentar e entender esse organismo vivo, como citado pelo matemático português, vamos abordar alguns aspectos históricos dos números para que possamos visualizar os aspectos importantes e relevantes que nos proporcionarão uma visão mais ampla da evolução e surgimento dos números naturais e racionais. Naturalmente, a abordagem principia pelos números naturais, que possuem uma grande relevância no contextonumérico.

É muito difícil, talvez impossível, em se tratando da história dos números, definirmos um ponto de partida, isto é, em que época surgiram e em que local? Qual a civilização ou grupo foi o primeiro a trabalhar com os números?

Um dos conceitos mais antigos da matemática é o conceito de números inteiros não negativos cuja origem se perde na pré-histórica (BOYER e MERZBACH, 2012, p. 26). Para níveis mais avançados das civilizações, parece certo que a enumeração precedeu a numeração e esta os números (GUNDLACH, 1992, p. 2).

A matemática mais antiga, segundo Eves (2004) "é resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número". (p. 25). O autor nos diz que, antes dos primeiros registros históricos, já haviam desenvolvido o conceito de número e o processo de contar. "Há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50.000, eracapazdecontar;queamaneiracomoocorreramélargamenteconjectural".Mesmona época primitiva, não é difícil imaginar que a espécie humana tinha algum senso numérico, ao ponto de reconhecer mais ou menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena (EVES, 2004, p. 25).

Boyer e Merzbach (2012) textualizam, no seu livro "História da Matemática", que a ideia de número é muito mais antiga do que se imaginava, segundo os estudos e descobertas arqueológicas. "Uma boa noção de tempo nos é dada por dois artefatos numéricos pré-históricos encontrados na África. Um deles é uma fíbula de babuíno com vinte e nove entalhes com idade aproximada de 35.000 anos e o outro é um osso de Ishango, com estimativa de 30.000 anos de idade". (BOYER e MERZBACH, 2012, p. 24). É possível que pinturas ou entalhes em cavernas, pedras, ossos e madeiras tenham alguma relação com contagem. Alguns artefatos arqueológicos parecem indicar essas evidências, porém sem uma confirmação concreta.

A fíbula de babuíno, encontrada nas montanhas de Lebombo, entre a África do Sul e a Suazilândia, contém algumas marcas, num total de 29 entalhes e, como já mencionado, teria sido utilizada 35.000 antes de Cristo (figura 1).

Figura 1 - Osso Lebombo

Fonte:http://www.taneter.org/math.html

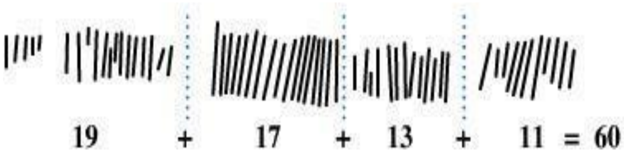
Em 1960, foi descoberto, por Jean de Heizelin de Braucout, um osso, quando ele explorava, na África, o Semliki Valley, em um território que, atualmente, pertence à República Democrática do Congo. Esse osso é conhecido como *Ishango Bone* – Osso Ishango (figura 2). A particularidade desse osso advém de 168 entalhes, distribuídos em três dos seus lados, sendo dispostos em 16 grupos ao longo de três fileiras (POMEROY, 2015). Atualmente, o artefato se encontra no Instituto Real Belga de Ciências Naturais, em Bruxelas.

Figura 2 - Osso Ishango

Fonte: https://www.realclearscience.com/blog/2015/

Algumas das marcações se estabeleciam em quatro conjuntos de entalhes em uma disposição de 11, 13, 17 e 19 sinais, perfazendo um total de 60 (figura 3).

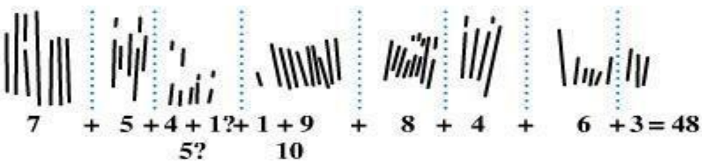
Figura 3 - Representação de entalhes no Osso Ishango



Fonte: https://www.realclearscience.com/blog/2015/

Outras marcações, segundo Pomeroy (2015), as seis primeiras sugerem um número seguido pelo seu dobro: 3 e 6, 4 e 8, 5 e 10. Os dois últimos números são 5 e 7, os quais não estariam dentro do padrão anterior. Esses entalhes perfazem 48 sinais.

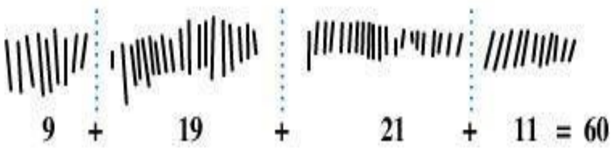
Figura 4 - Representação de entalhes no Osso Ishango



Fonte: https://www.realclearscience.com/blog/2015/

A última linha possui 4 grupos com 11, 21, 19 e 9 entalhes (figura 5). Ao que parece, dentro da visão do seu descobridor, é que esses grupos de entalhes estão relacionados com o número 10. Deste modo, teríamos 11 – 1 = 10, 21 – 1 = 20, 19 = 20 – 1, 9 = 10 – 1. Essas marcações perfazem um total de 60 entalhes (POMEROY, 2015).

Figura 5 - Representação de entalhes no Osso Ishango



Fonte: https://www.realclearscience.com/blog/2015/

Bertoni (2005) faz referência ao livro *Historie des fractions, fractions d'historie*, coordenado por Benoit, Chemla e Ritter, e traz as seguintes ponderações:

> A história (das frações) mergulha em um passado muito longínquo. Desde a origem da escrita, seja na Mesopotâmia ou no Egito, na China ou na Índia, os primeiros textos que chegaram até nós trazem signos que podem ser assimilados às frações. Elas respondiam a problemas que se apresentavam, de modo semelhante, na prática aritmética corrente, no cálculo de uma divisão; ou na prática metrológica, no cálculo de uma medida; que fazer quando a divisão ou a medida deixam um resto que inibe a continuidade da operação? (BENOIT, CHEMLA e RITTER *apud* BERTONI, 2005, p. 9).

O surgimento de civilizações, caracterizadas pelo uso de metais, primeiro teve lugar em vales de rios, como o Nilo, no Egito; Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia; Indo, no Paquistão; Yang-Tsé, na China. Os registros cronológicos das civilizações nos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates merecem uma boa credibilidade, diferentemente das informações dos povos que viveram ao longo dos rios Indo e Yang-Tsé. (BOYER, 1996, p.6).

Chineses e Indianos usavam material muito perecível, como casca de árvores e bambu. Dessa maneira, pouco se sabe sobre a matemática dessas duas civilizações. Informações menos duvidosas e em maior quantidade se tem sobre Egito e Mesopotâmia – esta última usava tábulas de argila cozida e, os egípcios, pedras e papiros, por sua vez, com uma maior conservação em virtude do clima seco da região. (EVES, 2004, p. 58).

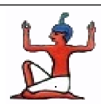
O barro era abundante na Mesopotâmia; "marcas em forma de cunha eram feitas com estilete sobre tabletas mole que depois eram cozidas em fornos ou ao calor do sol". Essa forma de escrita é denominada de cuneiforme (da palavra latina *cuneus*, cunha). Muitos milhares de tabletes de argila se mantiveram até hoje porque esses documentos cuneiformes têm maior durabilidade (BOYER, 1996, p. 6). "Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de meio milhão de tábulas de argila"; desse grupo, 400 foram identificadas com conteúdos de matemática, merecendo destaque listas de problemas matemáticos e tabelas. (EVES, 2004, p.58).

Focaremos nossas considerações nas civilizações do Egito e Mesopotâmia por possuirmos mais registros. Outros povos desenvolveram símbolos numéricos e algumas formas para realizar operações básicas. Assim como em outros ramos do conhecimento, muitos documentos se perderam ao longo do tempo, em diversas civilizações, por vários motivos. Por necessidade do homem primitivo, o pensar matemático, com quase toda certeza, veio muito antes dos registros estudados e descobertos por historiadores e antropólogos das diversas civilizações.

2.1 - As frações unitárias e as frações complementares dosegípcios

Os principais símbolos numéricos dos egípcios, na escrita hieroglífica, estão indicados na figura 6.

Figura 6 - Símbolos numéricos dos egípcios – em hieróglifos

Classe	Número decimal	Hieróglifo egípcio	Significado
Unidade	1		Haste/Bastão
Dezena	10		Arco de cesto/Calcanhar
Centena	100		Pergaminho/Rolo de corda
Milhar	1.000		Flor de lótus
Dez milhares	10.000		Dedo dobrado
Cem milhares	100.000		Girino/Sapo/Peixe
Milhão	1.000.000		Deus acocorado/Homem espantado

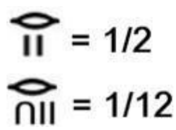
Fonte: http://luzdamatematica.blogspot.com/2017/10/a-matematica-babilonica-e-egipcia.html

A representação dos números provinha de um princípio aditivo, ou seja, o número era escrito com a adição dos símbolos, isto é, se quisermos escrever o número 3 (três) por exemplo, seria: III; o número 22 por exemplo, seria: ∩∩II; o número 144, seria: 𓍢 ∩∩∩∩IIII. Contudo, a escrita numérica podia variar. Em geral, “os dígitos menores eram colocados à esquerda e, às vezes, os dígitos eram dispostos verticalmente. Os próprios símbolos ocasionalmente eram colocados com orientação invertida.” (BOYER, 1996, p. 7).

Tudo leva a crer que, no Antigo Egito, as frações teriam surgido com os agrimensores, que tiveram a necessidade de representar as medidas de um terreno, quando os mesmos tinham alguma dimensão que não podia ser expressa por um número inteiro.

Os egípcios utilizavam as frações unitárias para desenvolver o cálculo de outras situações. Essas frações eram representadas por símbolos particulares (BERTONI, 2005).

Para a notação de frações, usavam um raciocínio similar, porém com simbologia própria. Era usada uma notação de hieróglifos, um sinal ; que significava pedaço, sobre, ou ao lado do número que passa a ser denominador. Para as frações de numerador um, a representação vinha composta do signo, relativo ao numerador 1 e o denominador, designado por algum algarismo egípcio. Porexemplo:



Além das frações unitárias, os egípcios também utilizavam a fração $2/3$. Eram utilizados também símbolos especiais para algumas frações como $2/3$ e $1/2$.

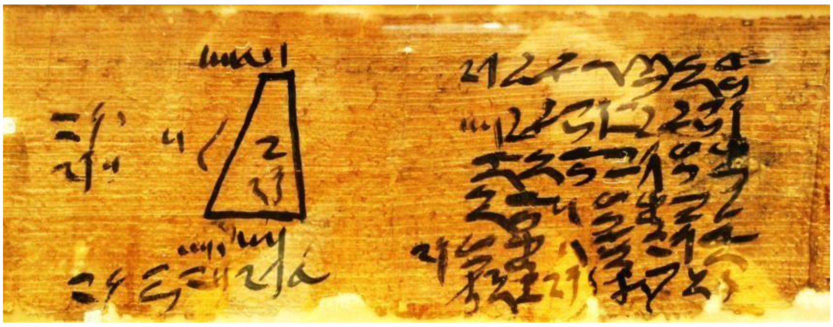
Figura 7 - Símbolos especiais para algumas frações

Fonte: http://abemkemet.blogspot.com/2012/06/everyones-favorite-math-subject.html

Os papiros eram a forma mais usual de registros dos egípcios. Dois papiros se destacam pela sua importância no contexto histórico matemático dessa civilização: o *Papiro Ahmes* (ou *Rhind*) e o *Papiro de Moscou* (ou *Golonischev*).

O *Papiro de Moscou* é um texto matemático com data aproximada de 1850 a.C. que contém 25 problemas já antigos, quando foi compilado. Foi adquirido no Egito por Vladimir Golenishchev, um colecionador russo, em 1893, e agora se encontra no Museu de Belas Artes de Moscou – Museu Pushkin. Entre os problemas desse papiro, alguns envolvem frações.

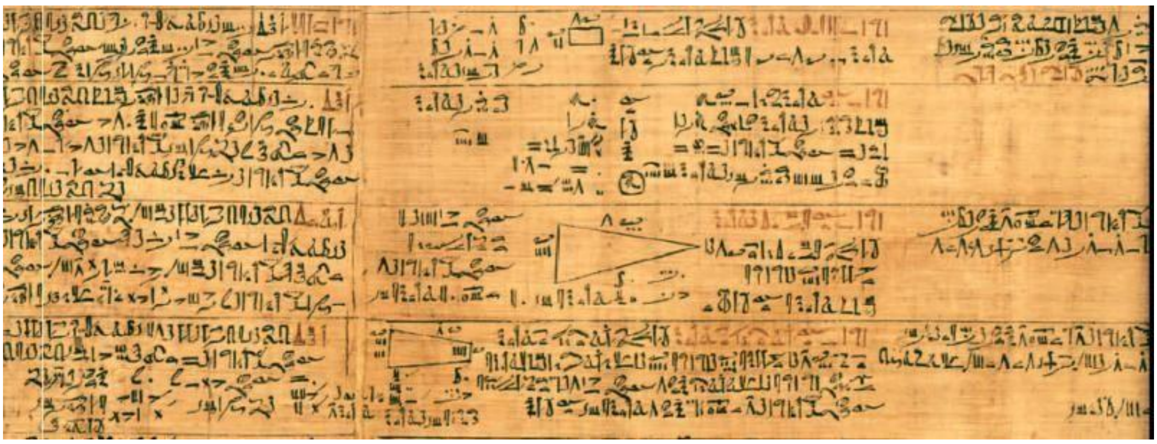
Figura 8 - Fragmento do Papiro de Moscou



Fonte: http://keenan.is/illustrating/2016/06/13/moscow-mathematical-papyrus/

O *Papiro Rhind* "é um texto matemático na forma de manual prático contendo 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo". Sua data aproximada é de 1650 a.C. foi comprado pelo escocês Alexander Henry Rhind, no Egito, e adquirido, posteriormente, pelo Museu Britânico. (EVES, 2004, p.69-70).

Figura 9 - Fragmento do Papiro de Rhind



Fonte: https://infograph.venngage.com/p/197277/egyptian-math

Os dois papiros citados são as principais fontes de informações referentes à matemática egípcia antiga (EVES, 2004). Em ambos, as frações comparecem.

Boyer (1996) nos apresenta mais algumas informações importantes o *Papiro Rhind*, este “começa com uma tabela fornecendo 2/n como soma de frações unitárias, para todos os valores de “n” de 5 a 101”. (p. 9).

O autor cita como exemplos de soma das frações unitárias, as seguintes operações:

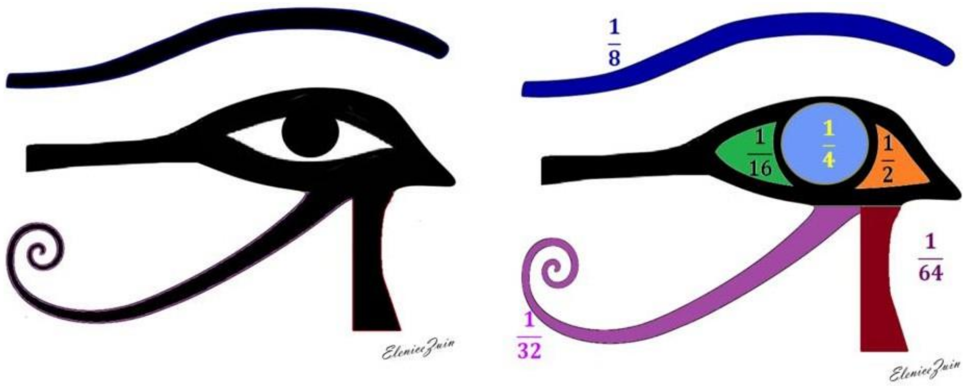
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15} \qquad \frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66} \qquad \frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{3} \qquad \frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$$

Ao que tudo indica, existia uma preferência pelas frações derivadas das frações naturais, 1/2, 1/3, 2/3 – essas seriam as mais empregadas pelos egípcios. Boyer (1996) justifica a utilização de 2/3 exemplificando a soma das frações 1/30 + 1/5 + 2/3 para obter como resultado a fração 9/10.

Além desses conhecimentos aritméticos relatados por esses autores, há também informações através de problemas algébricos e geométricos no *Papiro Rhind*, o mais extenso do antigo Egito. Existe um conhecimento de natureza prática e os cálculos eram os elementos principais nas questões. “Mesmos a geometria egípcia, outrora louvada, na verdade parece ter sido principalmente um ramo da aritmética aplicada”. (BOYER e MERZBACH, 2012, p.36)

Símbolo de proteção no Antigo Egito, o olho de Hórus (*Udyat)* tem estreita relação com as frações. Cada parte desse amuleto representava uma fração específica, cujo denominador é uma potência de 2 (figura 10).

Figura 10 - Partes do olho de Hórus



Fonte: Ilustração de Elenice Zuin

Como os egípcios usavam praticamente as frações unitárias, se o denominador fosse um número par, para calcular o dobro de uma fração bastava dividir o denominador por 2. Sendo ímpar o denominador, o dobro deveria ser representado por uma soma de frações unitárias (BERTONI, 2005, p.11-12).

2.2 - As frações na Mesopotâmia

De acordo com Bertoni (2005), no período aproximado de 4000 a.C. a 300 a.C., a Mesopotâmia era formada pelas culturas da Suméria, Babilônia e Assíria. “Incluía a região entre os rios Tigre e Eufrates, localizada no extremo leste do mar Mediterrâneo”. A autora destaca que:

> No início do segundo milênio a.C.(aproximadamente, a partir de 2000 a.C.), assírios da alta Mesopotâmia mantinham intensas relações comerciais com a Anatólia (região da Turquia), em especial com a civilização de Kanes. O reino de Mari, situado na rota comercial do Rio Eufrates, ligando o Golfo Pérsico ao Mediterrâneo, tinha administração e comércio bem desenvolvidos. Dessas civilizações há inúmeros tabletes com inscrições cuneiformes, com textos predominantemente econômicos ou administrativos, atestando que usavam as frações: 1/2; 1/3; 2/3; 1/4; 3/4; 1/6; 5/6. (BERTONI, 2005, p. 21).

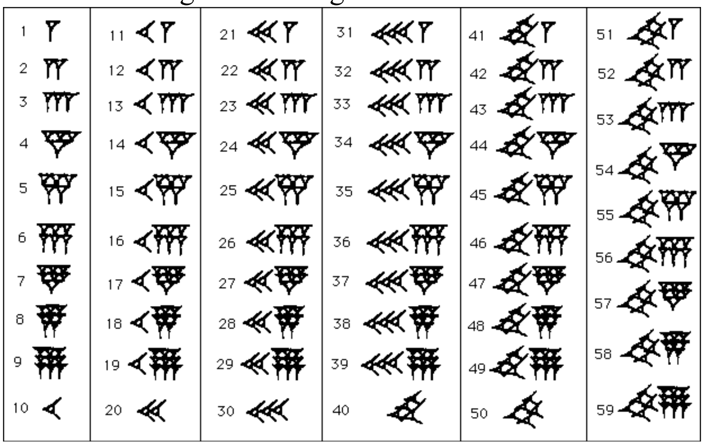
Podemos observar que, assim como os egípcios, há uma predominância de frações unitárias, além da fração 2/3.

Quadro 1 - Alguns aspectos dos sistemas de numeração do Egito e Babilônia

Civilizações que apresentam maisinformações	**Sistema de numeração**	**Frações mais usadas**	**Principal motivo para o surgimento e o desenvolvimento das frações**	**Informações complementares**
EGITO	BASE10 (ou decimal) aproximadamente 3400 a.C.	1/2; 1/3; 1/4; 1/5;1/6;1/10; 2/3 Com uma simbologia própria	Há indícios que as frações no Egito surgiram na necessidade de efetuar medidas não inteiras	Mesmo usando a base 10, não havia símbolo para o zero.
BABILÔNIA	BASE 60 (ou sexagesimal) numa época anterior a 4000 a.C.	1/2; 1/3; 1/4; 1/6; 2/3; 3/4; 5/6 Com umasimbologiaprópria, cuneiforme	Há indícios que as frações na Babilônia são utilizadas pela necessidade de efetuar cálculos para satisfazer práticas no comércio.	Em tabelas referentes a datas, medidas de peso, áreas, etc. encontra-se também mesclas de bases 10, 60 e outras.

Na região da Mesopotâmia, para os registros, se utilizavam tabletes de argila, onde se imprimia uma escrita em baixo relevo. Foi desenvolvido um sistema de numeração cuneiforme (em forma de cunha) de base 60 (figura 11).

Figura 11 - Algarismos sumérios



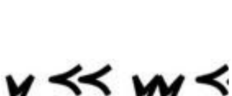
Fonte: http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/

Uma cunha, em forma de V, podia representar uma unidade ou 60, dependendo do contexto. O número 125, no nosso sistema decimal, seria representado do seguinte modo:

 = 2 x 60 + 5 = 125 (PÉREZ, 2013, p. 31)

Entre os sumérios, as frações sexagesimais eram utilizadas. Para facilitar os cálculos, eles tinham tabelas para frações 1/n na base sexagesimal e tabelas de multiplicação (BELL, 2016). Em diversos tabletes de argila encontrados na região, datados de 1800 a. C. a 1600 a. C., se verifica a utilização de frações.

A escrita numérica desses povos era muito específica. Uma sequência de símbolos numéricos cuneiformes expressava uma fração, como no exemplo a seguir.

 1;52.30 = $\frac{15}{8}$ (PÉREZ, 2013, p. 32)

Utilizando os nossos algarismos e transcrevendo uma sequência de signos cuneiformes, teríamos uma forma elaborada para traduzir um determinado número:

$$17,35;6,1,43 = 17 \text{ x } 60 + 35 + \frac{6}{60} + \frac{1}{60^2} + \frac{43}{60^3} \qquad \text{BELL, 2016 .}$$

A base 60 se torna muito prática porque 60 possui os divisores 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15 e 30 e, ao mesmo tempo, se evita recorrer àsfrações.

2.3 - Sistema de Numeração Indo-Arábico

È necessário sinalizar que, na Europa, durante muitos séculos, predominaram os algarismos romanos e os ábacos para proceder às operações, até ser assimilado um novo sistema proveniente do sul da Ásia.

O Sistema de Numeração Indo-Arábico tem esse nome devido ao povo que habitava a região do Vale do Rio Indo, que o inventou, e pelo fato de os árabes terem se apropriado desse sistema e o difundido pela Europa Ocidental.

> A ideia de valor posicional e um zero, devem ter sido introduzidos na Índia algum tempo antes do ano 800 d.C. Comerciantes e viajantes, provavelmente, foram os que levaram esses símbolos pelas costas do Mediterrâneo. Possivelmente, os árabes foram os responsáveis por esse feito na Espanha, já que haviam invadido a Península Ibérica no ano 711 d.C., onde permaneceram até 1492 d.C. (EVES, 2004, p.40).

Segundo Ifrah (1989), a atividade dos compiladores e dos tradutores de obras gregas, árabes ou hindus floresceu na Espanha, a partir do século XI. Passaram a ser cada vez mais frequentes os contatos culturais entre esses dois mundos, com o desembarque considerável de europeus desejosos de se instruir em matemática, filosofia, astronomia e ciências naturais.

O autor prossegue, relatando no seu livro, *Os Números*, “de volta ao lar, eles [os europeus] não esconderam seu entusiasmo pelos novos métodos de cálculo, muito mais práticos que o processo tradicional, que continuavam a não entender. Entusiasmo que foi, aliás, comunicado a seus discípulos cada dia mais numerosos.” (IFRAH, 1989, p. 313).

A popularização dos algorismos (algarismos), no século XIII, teve representantes de vários classes sociais, destacamos três deles que tiveram grandes influências na Europa: “Alexandre de Villedieu (viveu por volta de 1225), francês; John de Halifax (cerca de 1200-1256), também conhecido como Sacrobosco, inglês; Leonardo de Pisa (1180-1250), mais conhecido como Fibonacci, italiano”. (BOYER e MERZBACH, 2012, p. 180-181).

Para Eves (2004), o matemático mais talentoso da Idade Média, Leonardo Fibonacci (1175-1250), também conhecido como Leonardo de Pisa, filho de Bonacio, que era ligado aos negócios mercantis, teve parte da sua educação em Bejaia, norte da África – local em que seu pai foi desempenhar uma função alfandegária. O filho apresentou interesse pela aritmética em consequência das atividades do seu pai, fazendo-o executar extensas viagens para o Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, proporcionando-lhe entrar em contato direto com os matemáticos árabes e orientais. Deparando com a superioridade prática dos métodos de cálculo do povo do vale do Rio Indo, Fibonacci publicou sua obra mais famosa, em 1202, intitulada de *Liber Abaci.* "O livro ilustra com profusão e defende com energia a notação indo-arábica, muito se devendo a ele pela introdução desses numerais na Europa". (EVES, 2004, p. 293).

Publicado em 1202, o *Liber Abaci* (ou livro do ábaco) não se referia ao ábaco, como o título poderia sugerir, "é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos no qual o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado". (BOYER, 1996, p.173).

Tudo indica que Leonardo Fibonacci, na sua época, era um dos poucos que sabia ler e escrever, e ele "usava os novos algarismos com grande desenvoltura no século XIII, mas tinha que expressar as relações e operações entre eles em linguagem retórica, utilizando palavras" (CROSBY, 1999, p. 117).

Mesmo havendo a ascensão dos adeptos à democratização do cálculo, a batalha estava longe de ser vencida; existia uma grande resistência por parte dos que dominavam a velha tradição, o ábaco. De acordo com Ifrah (1989, p. 315), os calculadores profissionais da época, que não queriam abrir mão do seu ganha-pão, do segredo da arte que dominavam e do monopólio que haviam conquistado, estavam sendo ameaçados pelos "métodos revolucionários que colocavam as operações aritmética ao alcance de todos". O autor cita que havia uma resistência à numeração indo-árabe de ordem ideológica e ressalta que

> Desde o renascimento do saber na Europa, a Igreja (que procurava preservar então um clima indefinido feito de dogmatismo, misticismo e de servilhismo em relação às palavras sagradas, cujas doutrinas principais forma o pecado, o inferno e a salvação da alma) assumiria de fato o controle da ciência e da filosofia, exigindo que sua evolução se submetesse estritamente à fé absoluta em seus dogmas e que seu estudo se harmonizasse inteiramente com a teologia.
>
> Em vez de liberar o espírito curioso, este saber o aprisionou por muitos séculos e está na origem de inúmeras tragédias.

> Do mesmo modo, determinadas autoridades eclesiásticas espalharam o boato de que, sendo tão fácil, e tão engenhoso, o cálculo ao modo árabe devia ter algo de mágico ou até de demoníaco: só podia vir do próprio Satanás. (IFRAH, 1989,p. 315).

Podemos perceber, pelo relato do autor, que a Igreja faria de tudo pela sustentação do monopólio, isto é, manter sobre o seu domínio o processo tradicional usando os algarismos romanos e o ábaco. Ela jamais se posicionaria em socializar, democratizar, divulgar os cálculos, já que essa postura resultaria na perda de poder. Era conveniente que esses conhecimentos ficassem na mão dos especialistas, já que a maioria pertenciam ao clero.

Os algarismos indo-arábicos, desse modo, ficaram proibidos por algum tempo. “Os amadores do cálculo moderno são obrigados a usá-los escondidos, como se fosse um código secreto”. (IFRAH, 1989, p. 317).

A querela entre *algoristas* (defensores do cálculo com algarismos hindus) e os *abacistas* (árduos defensores dos algarismos romanos e do cálculo em ábaco de fichas) durou vários séculos (IFRAH, 1989, p. 317).

Figura 12 - Margarita Philosophica, de Gregor Reisch, 1508

Fonte: http://secretariageneral.ugr.es/pages/tablon

A figura 12 retrata dois calculadores; um, usando algarismos indo-arábicos e, outro, uma tábua de calcular, evidenciando uma época de transição e de uma convivência de dois sistemas, o romano e o indo-arábico, sendo que, o primeiro tinha como auxílio o ábaco para realizar as operações aritméticas.

No período entre os séculos XIII e XVII, presenciou-se uma maior divulgação dos algarismos indo-arábicos na Europa. É necessário destacar que os algarismos que utilizamos atualmente no Ocidente passaram por transformações desde quando foram elaborados pelo povo do Vale do Rio Indo.

Ainda que existissem resistências entre os europeus em relação à completa adoção dos símbolos indo-arábicos, pela sua simplicidade e eficiência, superaram as oposições e revolucionaram a escrita numérica, que, até então, prevalecia a romana. Porém, a transição e a assimilação dos novos algarismos foi lenta.

Para escrever um número grande, muitas vezes, a escrita utilizava os algarismos indo-arábicos juntamente com algarismos romanos. "Num calendário de 1430, o fabricante do calendário definiu o ano como sendo composto de ccc e sessenta e 5 dias e seis horas aproximadas. Duas gerações depois, outro autor expressou o ano então em curso como sendo MCCCC94". (CROSBY, 1999, p.116).

Em torno do ano 1500, as regras que culminam em alguns algoritmos para os cálculos das operações elementares com números naturais foram sendo propagadas e assimiladas, aos poucos. Os abacistas e os seus ábacos foram tendo, cada vez, menos lugar no mundo europeu. Destaca-se que mesmo "após a vitória dos novos métodos, o uso do ábaco ainda permaneceu. No século XVIII, ele ainda era ensinado, e por prudência as pessoas continuaram a verificar todos os cálculos efetuados por escrito, refazendo-os na tábua de calcular". (IFRAH,1989, p.317-318).

2.4 - Alguns relatos sobre o "zero"

A história do algarismo zero é extensa e complexa para abordarmos com detalhes neste trabalho, foge dos nossos objetivos. Vamos retratar apenas algumas informações que nos aparentam relevantes e esclarecedoras dentro das perspectivas deste texto.

Alguns povos não elaboraram a numeração de posição. Uma numeração de posição é um sistema em que um "dois" por exemplo, possui valores diferentes dependendo da posição ocupada por ele. Supondo o número 222, o dois na 1ª casa (da direita para a esquerda) representa duas unidades; o dois na 2ª casa, representa duas dezenas e o dois na 3ª, duas centenas. De acordo com Ifrah (1997), essa regra, no curso da história, só foi imaginada quatro vezes. Apareceu, pela primeira vez, entre os sábios da Babilônia, no início do segundo milênio antes de nossa era; os matemáticos chineses, a desenvolveram um pouco antes da era cristã; os astrônomos maias, entre o século III e V d.C.; e por volta do século V, pelos matemáticos da Índia (p. XXIII).

Pelos registros históricos até hoje levantados, com exceção desses quatro povos, nenhum outro teve necessidade de possuir um zero. Desde que o uso do princípio de posição foi inserido no sistema, esse conceito tornou-se fundamental.

Só o zero indiano, foi concebido como número. “Foi ele que nos foi transmitido pelos árabes junto com os algarismos que levam o seu nome, e que não são outra coisa senão os algarismos indianos, um pouco deformados pelo uso, o tempo e as viagens”. (IFRAH 1997, p. XXIII).

2.5 – Frações decimais

E quando aparecem as frações decimais? A fração cujo denominador é uma potência de dez com expoente natural? A certeza, não temos. Há alguns registros que indicam a utilização de números racionais com denominadores representados por potências dedez.

Vamos encontrar na “China a adesão à idéia decimal em pesos e medidas” a qual “teve como resultado um hábito decimal no tratamento de frações que, ao que se diz, pode ser encontrado já no século quatorze a.C.” (BOYER, 1996, p.137).

Avançando pelos séculos, transações complicadas, envolvendo juros simples e compostos, eram realizadas pelos negociantes em duas ou três moedas, além de serem empregadas frações trabalhosas como 197/280 – utilizada frequentemente – chegando a usar frações ainda mais complexas tais como 3345312/4320864. (CROSBY, 1999, p.118-119).

Considerado um dos maiores matemáticos da França, o advogado François Viète[11] (1540-1603), no ano de 1579, “tinha recomendado insistentemente o uso de frações decimaisem vez de sexagesimais”. O principal matemático dos Países Baixos, Simon Stevin (c.1548 – 1620), de Bruges, fez uma recomendação ainda mais expressiva a favor da escala

[11] Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados. Aqui encontramos, pela primeira vez na álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida”. (BOYER, 1996, p. 208).

decimal para frações (BOYER, 1996, p.217).

Simon Stevin publicou, em 1585, o livro mais influente sobre o assunto, "*De thiende*" (O Décimo) em holandês e, posteriormente, em francês (La Disme). Nele, Stevin indicou o lugar de determinado algarismo à esquerda e à direita do ponto decimal, escrevendo em pequenos círculos acima dos algarismos. O número irracional "pi" (figura 13) com quatro casas decimais por exemplo (CROSBY, 1999, p.118-119).

Figura 13 – Representação do número $\pi = 3{,}1416$

0	1	2	3	4
3	1	4	1	6

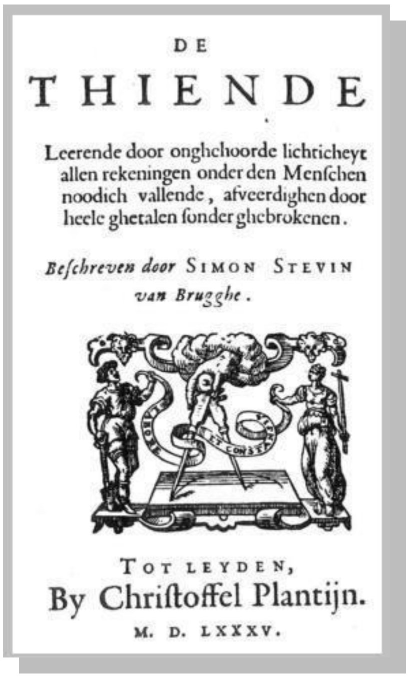
Fonte: Crosby (1997, p. 119)

Abaixo do algarismo 0, situado dentro do círculo, estaria a parte inteira do número. Abaixo dos algarismos 1, 2, 3, 4 etc., as frações. Além de uma notação específica, este livro, forneceu "uma explicação criteriosa e, pelo menos, um tipo de notação clara para o sistema de frações decimais". (CROSBY, 1999, p.118-119). Stevin propõe uma nova forma de representação das frações decimais.

É conveniente lembrar que, nessa época, século XVI, não havia máquina de calcular para trabalhar com essas frações citadas anteriormente. A primeira máquina, de acordo com Eves (2004), foi inventada por Blaise Pascal[12] no século XVII. Provavelmente, houve uma significativa contribuição do livro de Stevin para a invenção de Pascal e de outros pensadores da matemática neste século.

[12] Blaise Pascal nasceu na província francesa de Auvergne, em 1623, e muito cedo revelou aptidão extraordiná- ria para a matemática. Aos dezesseis anos escreveu um trabalho sobre secções cônicas, que Descartes duvidou que pudesse ser trabalho de adolescente, preferindo considerá-lo de autoria do pai. Entre dezoito e dezenove anos de idade, inventou a primeira máquina de calcular que idealizou para ajudar seu pai nas funções de fiscal do governo em Rouen". (EVES, 2004, p.361-362).

Figura 14 – Folha de rosto do livro “De Thiende” - 1ª edição de 1585



DE

THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menſchen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen ſonder ghebrokenen.

Beſchreven door SIMON STEVIN *van Brugghe*.

TOT LEYDEN,

By Chriſtoffel Plantijn.

M. D. LXXXV.

Fonte: https://www.maa.org

Apesar de Stevin sempre ser mencionado como o introdutor das frações decimais, há que se referir ao matemático árabe, Abu'l Hasan Ahmad ibn Ibrahim Al-Uqlidisi, que utilizou frações decimais no século X. O manuscrito *Kitab al-fusul al-hisab al-Hindi* consiste em uma cópia do original escrito por Al-Uqlidisi, que foi feita em 1157. Saidan realizou uma tradução do manuscrito para o inglês, publicada em 1978 (O'CONNOR, ROBERTSON, 1999). Desse modo, o trabalho de Al-Uqlidisi só teve uma maior divulgação no ocidente no século XX.

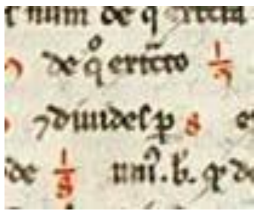
Outro personagem importante é Al-Kashi, matemático árabe, que viveu entre o século XIV e XV. Embora não tenha sido o precursor, “foi, talvez dentre os que usavam frações sexagesimais, o primeiro a sugerir que as decimais são igualmente convenientes para problemas que exigem muitas casas exatas”. (BOYER, 1996, p.167).

No seu livro, Stevin também aborda as operações com os decimais. Seu trabalho tem mérito por auxiliar na adoção dos números decimais na Europa e na sua difusão também por outros países.

Em relação à notação, de acordo com Ben-Menahem (2009), a barra horizontal, para representar as frações, teria sido utilizada entre os árabes, sendo introduzida pelo marroquino Al-Hassar por volta de 1200. Contudo, este sinal foi empregado por Leonardo Fibonacci no século XIII (figura 15), não sendo utilizado na Europa imediatamente. Apenas a partir do século XVI é que seu uso se difundiu.

De Morgan propôs o uso da barra inclinada, em 1845, como um recurso na tipografia. (BOYER, 1996).

Figura 15 - Detalhe de uma página do *Liber Abaci*
com representações fracionárias



Fonte: https://www.maa.org/

CAPÍTULO 3

OS SIGNIFICADOS DE FRAÇÕES

Neste capítulo, apresentamos uma pequena síntese sobre variáveis; retratamos os principais significados de fração ancorados na perspectiva de Kieren (1976) e de Campos, Magina e Nunes (2006).

3.1 Quantidades contínuas e discretas

Quando trabalhamos com frações, fazemos uso de quantidades contínuas e discretas. Ao introduzir o conteúdo, nos anos iniciais, priorizamos as quantidades contínuas e, posteriormente, as quantidades discretas.

Trazendo mais esclarecimentos sobre estes termos, Brolezzi (1996) indica:

> De modo geral, discreto é aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte. Vem do latim *discretus*, particípio passado do *verbo discernere* (discernir), que significa discriminar, separar, distinguir, ver claro. (...)
>
> Já contínuo vem de *com-tenere* (ter junto, manter unido, segurar). Contínuo é o que está imediatamente unido a outra coisa. (...)
>
> [...] os termos discreto e contínuo em referência, respectivamente, a duas das ações básicas da Matemática: contar e medir. Existem, como sabemos, certas grandezas chamadas contáveis, que são objetos de contagem, como o número de livros em uma prateleira. Outro tipo de grandeza é formado por aquelas quantidades que são passíveis de medida, como a largura de uma folha de papel A4, ou o peso de uma caneta. O primeiro tipo de grandeza é chamado discreto. Grandezas discretas são as que se prestam a contagem. Já o segundo tipo é chamado contínuo, e se refere às medidas. (BROLEZZI, 1996, p.1).

Exemplos de quantidades discretas, quando se tem um conjunto cujos elementos se podem contar: um certo número de balas, pessoas, objetos. Exemplos de quantidades contínuas: 2 litros de um determinado líquido, uma superfície plana, um objeto tridimensional. No caso de exemplos com as frações, utiliza-se muito a ideia de partir um chocolate, um bolo, uma pizza – quantidades contínuas. Em geral, representam-se frações através da divisão de retângulos, círculos em partes iguais. Outras quantidades contínuas seriam comprimento, massa, distância, que podem ser indicadas por uma medida.

3.2 Significados de Fração

Quando se pergunta a alguém o que é fração, na maioria das vezes, a resposta traz a divisão de dois números (numerador e denominador) ou expressa uma idéia associada a divisão de uma quantidade contínua em partes iguais. O que se tem, a partir dessa forma de representação, é o significado *parte-todo*, aprendido na escola. Desde os anos iniciais, a imagem que fica mais forte é a idéia de fração associada a*parte-todo*.

Quais seriam os outros significados de fração?

Inicialmente, é necessário citar Thomas Kieren (1976), o primeiro pesquisador a fazer ponderações a respeito dos números racionais sob diferentes perspectivas. Ele fez considerações e indicou sete interpretações para conceituar fração – fração como quociente, classe de equivalência, razão, operador multiplicativo, parte-todo, medida (incluindo parte-todo), números decimais. A interpretação e a compreensão destes significados propiciaria a um maior entendimento do conceito de fração e do seu emprego em diversas situações.

Nunes (2003), fundamentada nos trabalhos de Kieren (1980), defende que a apreensão do conceito de fração, pelos alunos, ocorre de modo mais efetivo quando são explorados os seus cinco significados: *número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo* (MAGINA e CAMPOS, 2008). E é sobre estes cinco significados que nos deteremos.

É notório que o ensino de fração nas escolas prioriza e, muitas vezes, apenas foca o significado *parte-todo*. Nos livros didáticos também se observa essa ênfase que se torna redutora.

No quadro 2, procuramos indicar cinco significados de fração de forma sucinta.

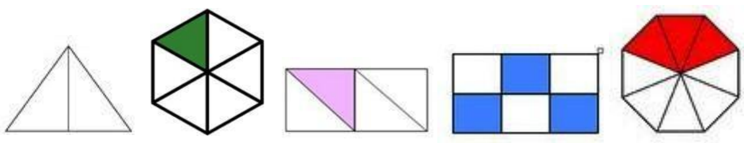
Quadro 1 - Significados de Fração

SIGNIFICADOS	DEFINIÇÃO	EXEMPLO
Parte-todo	Partição de um todo em “n” partes iguais, em que cada parte pode ser representada como 1/n. A utilização de um procedimento de dupla contagem, partes tomadas e partes de um todo, é suficiente para se chegar a uma representação correta.	Dividir uma unidade em quatro partes iguais e tomarmos uma delas 1/4 em um processo de dupla contagem. 
Número	Assim como o número inteiro, a fração nesse significado é representada por pontos na reta numérica.	Representar um número na forma decimal ou posicioná-lo na reta numérica. Ordenar frações em ordem crescente ou decrescente.
Medida	Algumas medidas envolvem fração por se referirem a quantidade medida pela relação en-tre duas variáveis. Uma determinada unidade é tomada como referência para medir uma outra.	Supondo-se que se queira medir um determinado comprimento que possui quatro metros e trinta e quatro centímetros. Se for utilizado, para medição, um padrão de um metro, sem a marcação de centímetros, não se pode executar essa tarefa de modo satisfatório. Logicamente, para ter uma medida mais exata, seria necessário termos um submúltiplo do metro.
	A probabilidade de ocorrer um evento é medida pelo quociente número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.	Qual a chance de sair um número primo ao lançarmos um dado não viciado de seis faces?
Operador multiplicativo	Comparece em situações em que se associa a ideia de transformação, ou seja, uma ação que se imprime sobre um número ou quantidade, transformando o seu valor nesse processo.	Numa caixa de 24 bananas, 1/4 estão maduras. Quantas bananas verdes possui a caixa? ou Numa caixa de 24 bananas, 75% das bananas estão maduras. Quantas bananas estão maduras?
Quociente	Resultado presente em situação que envolve a ideia de divisão.	Quantas balas ganhariam cinco crianças, se dividirmos um pacote de 60 balas de maneira equânime?

Campos, Magina, Nunes (2006)

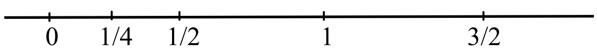
O significado *parte-todo* é o mais conhecido e difundido, sendo a fração como partede um todo, o qual foi dividido em partes iguais. Esta idéia é apresentada aos alunos dos anos iniciais tomando-se uma prática familiar de partir e repartir alimentos como bolos, pizzas, chocolates, biscoitos, frutas, etc., explorando-se sempre quantidades contínuas. E, frequentemente, para se representar essas situações, professores e livros didáticos fazem uso de figuras geométricas como retângulos e círculos. Por que não se utilizam outras figuras e outras formas de se dividir em partes iguais afigura?

Figura 16 – Outras formas de se representar as frações - significado parte-todo



Ao utilizar representações que não sejam as tradicionais, os professores podem auxiliar os alunos na ampliação do significado *parte-todo*. Um problema associado a esse significado poderia ser: *A mãe de Carla fez um bolo e o dividiu em 8 partes iguais. Carla levou 3 partes para a escola. Qual fração representa as partes do bolo que Carla levou para a escola?* Há uma identificação do número de partes que o bolo foi dividido, que representa o denominador 8 e um número de partes que é o numerador, 3.

A fração como *número* está associada à reta numérica. Neste contexto, são evidenciadas as divisões do inteiro e outras representações como, por exemplo, de frações impróprias.



A fração como *medida* indica uma relação entre duas variáveis. A fração como medida de comparação entre duas grandezas. O centímetro e o metro podem ser tomados como referência para a mensuração de outra medida. Assim, 10 centímetros equivalem a um decímetro, ou seja, um centímetro é igual a um décimo do decímetro (1cm = 1 dm/10); um metro é igual a 10 decímetros, ou seja, um decímetro equivale a um décimo do metro (1dm = 1m/10). Podemos dizer que os currículos escolares contemplam essa idéia, porém, quais são as práticas que os alunos desenvolvem não só para entender essas relações, como para identificar as frações que estão implícitas, alusivas a esteexemplo?

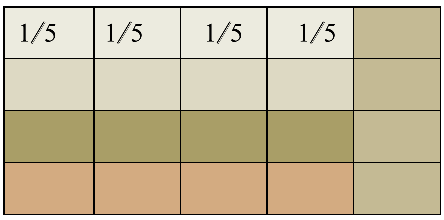
Outro contexto no qual comparece o significado medida: *No jogo de dados, quais são as possibilidades de cair a face voltada para cima, com o número 4, na primeira jogada?*

Neste caso, 1/6. Mais uma situação de medida, citada por Magina e Campos (2008, p. 30): a mistura de "3 litros de tinta branca e 3 de tinta azul" e a mistura"2 litros de branca e 2 de azul.", explorando se a cor final será a mesma e qual fração da mistura foi feita em cada caso.

O significado *operador multiplicativo* comparece em diversas situações e problemas que envolvem fração e quantidades discretas, e no cálculo de porcentagens. Problemas que envolvem esse significado costumam estar presentes nos livros didáticos. Por exemplo, se em uma classe há 30 alunos e 2/5 são meninos, calcular o número de meninos. No contexto apenas da resolução aritmética teríamos 30 x 2/5, ou seja,30 multiplicado por 2 e o resultado dividido por 5; 2/5 como operador multiplicativo. Outra situação seria dividir 12 balas para três crianças. Entre as formas que os alunos poderiam utilizar para resolver a questão, haveria o significado *operador multiplicativo*, quando se diz que cada criança receberá um terço das balas, ou seja, doze multiplicado por um terço. Ainda, casos de uma situação meramente de cálculo, "quanto é 4/5 de 50 ou 80% de 50?".

O significado *quociente* aparece nas situações que envolvem partilhas, por exemplo. Há situações mais simples, um chocolate para ser dividido entre 3 crianças – com a fração correspondente igual a 1/3, que impõe o raciocínio: quanto mais crianças, menor o pedaço a ser recebido por cada um, relacionando numerador e denominador. As relações de equivalência são bem vindas associadas a estas condições, permitindo comparação entre frações. Situações mais complexas: se queremos dividir igualmente 4 barras da mesma marca de chocolate para 5 pessoas. Cada uma terá 4/5 das de uma barra de chocolate (figura 16). E se forem 6 barras? E se forem 8 barras? Estes seriam outros contextos a serem explorados com osalunos.

Figura 17 - Representação de 4 barras de chocolate
a serem divididas por 5 pessoas



Cabe aos professores a elaboração de atividades, materiais e situações nas quais os alunos possam adquirir os significados de fração de maneira mais efetiva.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE LIVROS PARADIDÁTICOS E DIDÁTICOS

Neste capítulo, faremos algumas observações sobre livros paradidáticos e didáticos, baseando no estudo realizado sobre os “significados de fração”, citado anteriormente, e mais algumas características que consideramos relevantes para uma análise mais minuciosa dos materiais.

Porém, antes vamos listar as habilidades essenciais que os alunos devem desenvolver, segundo a Base Nacional Curricular Comum, relativamente aos números racionais entre do 2º ao 6º anos do Ensino Fundamental:

2º ano

- Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais. (BRASIL, 2017, p.279).

3º ano

- Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes. (BRASIL, 2017, p.283).

4º ano

- Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidadesde medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica comorecurso.
- Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro. (BRASIL, 2017, p.287).

5º ano

- Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica comorecurso.
- Identificar fraçõesequivalentes.
- Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na retanumérica.
- Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entreoutros.

- Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (BRASIL, 2017, p.291).

6º ano

- Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando fraçõesequivalentes.
- Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (BRASIL, 2017, p.297).

Constata-se que a proposta da inserção dos números racionais já se inicia no 2º ano, com a idéia inicial de metade e terça parte e as demais habilidades vão sendo distribuídas ao longo dos anos posteriores, de modo a possibilitar o desenvolvimento das competências de maneira gradativa.

Para o 6º ano, é citado de forma explícita que devem ser trabalhados os significados *parte-todo* e *quociente*. No entanto, no 4º e 5º anos é indicada a representação de frações na reta numérica, então, o significado *número* estaria presente. No 5º ano, dependendo de como se aborda a porcentagem, poderia estar sendo trabalhado também o significado *operador multiplicativo*.

4.1 Alguns pontos sobre a análise dos Livros Paradidáticos

Selecionamos três paradidáticos que têm como tema as frações. Um deles, escrito por Nilson José Machado – *O pirulito do pato* – e dois da autora Luzia Faraco Ramos – *Doces Frações* e *Frações sem mistérios*. *O pirulito do pato* e *Doces frações*, seriam destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental e *Frações sem mistérios* poderia ser trabalhado a partir do 6º ano.

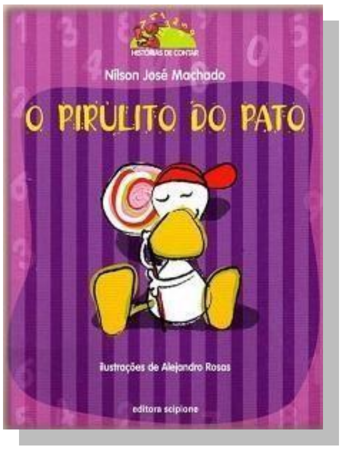
4.1.1- Análise dos Livros Paradidáticos

4.1.1.1 - ***O pirulito do pato, de*** Nilson JoséMachado

O livro analisado foi publicado em 2004 pela Editora Scipione.

O livro *O Pirulito do Pato* apresenta um texto infantil simples, com 24 páginas, tendo como público alvo crianças na faixa etária de 5 a 8 anos. A narrativa é apresentada em pequenos parágrafos, com rimas, na forma de poesia.

Figura 18 - Capa do livro "O pirulito do pato"



O autor narra uma história na qual a personagem Mamãe Pata chama os dois patinhos, Dino e Lino, pedindo para dividir o pirulito. O pato Dino dividiu dando o palito para o seu irmão. A Mamãe Pata explicou-lhe que a divisão não poderia ser daquela maneira, deveria dividir o pirulito ao meio, metade para cada um. Antes de efetuar a partição, chegou a pata Xoca, amiga da Mamãe Pata, com o seu filho Xato pedindo um pedaço do pirulito. Diante daquela situação, a Mamãe Pata disse que iria dividir o pirulito em três partes, dizendo "um terço para cada um" – já indicando a forma de nomear a fração.

O livro exibe uma figura de um pirulito circular mostrando a divisão em três partes iguais, ou seja, três setores circulares. Após efetuar a divisão, exibe as partes separadas e os patinhos esperando a sua terça parte.

Posteriormente à partição, chega o pato Zinho. O pato Xato, percebendo a presença de mais um para dividir e deduzindo a diminuição do seu pedaço, expressou que ninguém tocaria na sua terça parte.

A narrativa mostra, de maneira lúdica, como fazer a divisão do pirulito em partes i-guais, com pouca preocupação com os nomes dos termos da fração, na história, nomeiam-se "metade" e "um terço". Evidencia-se que, quanto mais partes dividir o pirulito (o todo), me-nor fica o pedaço para cada um.

A história continua com o Lino dividindo ao meio a sua terça parte e dando ao seu amigo Zinho. O autor finaliza a história expressando que todos ganharam um pedaço.

Após a narrativa, o autor apresenta algumas perguntas, tais como:

- Quantos patinhos chuparam partes do pirulito?
- Todos ganharam partes iguais?
- Se não respondam, quem ganhou mais?
- O pato Zinho, quanto levou? Um terço? Um quarto? Um quinto? ou....

Posteriormente às perguntas, a obra mostra diversas figuras circulares divididas em partes iguais, realçando: duas (metade), três (um terço), quatro (um quarto), cinco (um quinto) e seis (um sexto) com desenhos e seus respectivos nomes.

Em seguida, o livro apresenta uma ilustração de um pirulito dividido em três partes iguais, sendo uma delas partida ao meio, evidenciando a fração um sexto.

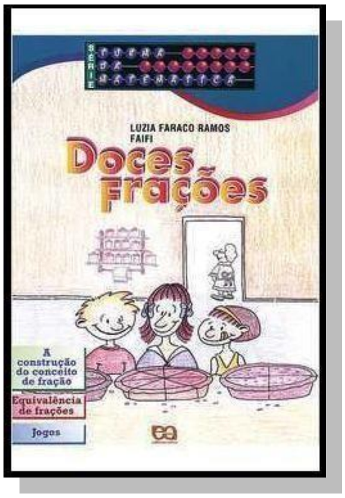
Nas últimas páginas, o autor relata o resultado da divisão das partes de cada pato, cabendo um terço para Dino e Xato e um sexto para Lino e Zinho. Confirmam esses resultados exibindo uma figura de um pirulito (o todo) dividido em quatro partes, duas de um terço e duas de um sexto, lado alado.

O livro contempla os *significados parte-todo e quociente* assim como a relação inversa do divisor com o quociente, isto é, aumentando aquele diminui este. Essa ideia é evidenciada pela primeira vez na narrativa, quando o pato Xato recusa-se a dividir o seu pirulito na chegada do Zinho. É reforçada a relação inversa posteriormente, ao mostrar que ao dividir a sua parte, o pato Lino diminui o seu pedaço ao meio.

4.1.1.2 - *Doces Frações,* de Luzia Faraco Ramos

O paradidático *Doces Frações* apresenta catorze páginas grandes, muitas gravuras e um texto infantil. Tem como público alvo crianças na faixa etária de 8 a 10 anos. A análise se fundamentou na publicação de 1998 da Editora Ática. Uma das propostas é mostrar a relação da matemática com contextos do cotidiano.

Figura 19 - Capa do livro “Doces Frações”



A autora relata a história de uma menina, Adelaide, que estava muito feliz porque ia passear no sítio da avó. Ao chegar em casa, na hora do jantar, ela e seus pais dividem uma pizza em três pedaços iguais. A primeira página do livro mostra a figura que representa esta situação. Antes de começarem a comer, toca a campainha e Adelaide atente a porta. Eram três pessoas, sua avó, e duas crianças, Binha e Caio. Como não haviam jantado, eles assentaram à mesa e dividiram a pizza em seis pedaços, situação indicada na figura da segunda página. Adelaide ficou chateada percebendo que comeria a metade de antes.

As crianças foram para o sítio da avó de Adelaide após o jantar. No percurso, a menina ainda chateada pensou: “eu ia comer um pedaço em três e acabei comendo um pedaço em seis”. (RAMOS, 1998, p.4)

O livro traz uma ilustração de duas pizzas lado a lado, uma dividida em três e outra em seis pedaços iguais, possibilitando a visualização das proporções. Introduz, desta maneira, frações equivalentes expondo as partes de um todo.

Em outra situação, a avó de Adelaide lhe diz que vendia tortas na praça. No final do dia, pediu a meninada que cortassem as tortas em pedaços do mesmo tamanho enquanto ia colher laranjas. Porém, as crianças fazem a divisão das tortas em pedaços diferentes. A de chocolate, dois pedaços iguais e a de morango oito. O livro mostra a divisão em duas e oito, com desenhos coloridos e um perto do outro, para que o leitor visualize as equivalências. Nesse momento, há uma conversa das duas meninas que mostra de maneira bastante lúdica a divisão de um todo em partes iguais. Adelaide pergunta a Binha porque estava chateada. Esta pensava que quanto mais partes dividisse o todo, maior seriam os pedaços. Aquela explica que é o contrário, quanto mais se divide menor fica. Esse diálogo mostra a ideia da relação inversa entre divisor e quociente.

Caio dividiu a torta de pêssego em seis partes iguais. Há uma figura mostrando a torta com as partes divididas em setores circulares. Ao voltar da colheita das laranjas, deparando com as repartições distintas, a avó ficou apavorada, questionando como venderia pedaços de tamanhos tão diferentes? As crianças sugeriram que os maiores seriam mais caros e os menores mais baratos. Adelaide relata à sua avó que essas divisões estão parecendo matemática e esta confirma falando que são frações. O livro mostra uma figura de um inteiro em forma de circulo, representando uma torta dividida em oito partes iguais e Caio dizendo que um oitavo quer dizer um pedaço em oito.

Há figuras mostrando várias tortas divididas em seis, duas e quatro partes iguais. Eles conversavam sobre as proporções das partes em relação ao todo. A autora apresenta, através das imagens, equivalências de dois pedaços de um oitavo com um de um quarto; quatro pedaços de um oitavo com um de meio, para que possam desta maneira, calcular o preço de cada um deles.

Adelaide pergunta ao Caio que fração fica na assadeira ao dividir a torta em quatro partes iguais e vender um pedaço de um quarto. O menino responde que vão ficar três pedaços. A menina insiste questionando qual é a fração e ele responde que se um pedaço de quatro é um quarto, três pedaços de quatro, são três quartos.

Caio se mostra espantado falando, à Adelaide, que se usa matemática no dia a dia e nem percebe. Esta responde que já sabia disso faz tempo. As crianças continuam conversando e descobrindo o preço dos outros pedaços fazendo comparações. Binha, ao comparar três pedaços de um sexto com um pedaço de meia torta, percebe a equivalência e conclui que: ao tomar o preço de meia torta e dividir por três, obtêm-se o valor desse pedaço.

O livro mostra uma equivalência dessas situações através de figuras adjacentes divididas em setores circulares. A autora termina a história com as crianças dizendo à avó que já sabiam calcular o preço de todos os pedaços.

A história realça os significados *parte-todo e quociente* além das equivalências de maneira lúdica, com bastante representações de imagens para destacar as correspondências. Destaca, na fração unitária, a relação inversa entre denominador e quociente ao dividir a pizza no início da história, em três e seis pedaços iguais.

A autora apresenta após a história, um encarte e duas folhas anexadas no livro para serem recortadas, com figuras de tortas divididas com as frações 1/2 , 1/4 e 1/8. Traz três propostas de jogos que podem ser executadas com o material que se localiza no fim do livro. Jogo 1 = Quem ganha o pedaço maior? Jogo 2 = Quem enche o prato primeiro? Jogo 3 = Quem vende uma torta primeiro?

Para cada jogo, descreve o material que pode ser utilizado, o objetivo do jogo e suas regras.

4.1.1.3 - *Frações Sem Mistérios*, de Luzia FaracoRamos

O paradidático *Frações Sem Mistérios* é dividido em dezoito capítulos com 105 páginas. Tem como público alvo pré-adolescentes e adolescentes na faixa etária de 11 a 14 anos aproximadamente. Foi analisada a publicação do ano de 2003, lançada pela Editora Ática..

Figura 20 - Capa do livro "Doces Frações"

Os personagens principais são: Lino; Alice; Taís; Beto; o professor de Matemática, Daniel; Dona Rosa, proprietária de um sítio.

O livro está dividido em capítulos, com os seguintes títulos:

1. *Fim de férias, volta às aulas*
2. *O bolo de abacaxi,*
3. *Nem tudo é o que pareceser*
4. *A casa misteriosa*
5. *Cartões que viram frações,*
6. *O fantasma assa pão*
7. *O prazer da descoberta*
8. *O mistério continua*
9. *Tipos, tipos e tipos,*
10. *Fração na prática,*
11. *Descobertas ao ar livre*
12. *Cheiro de terra*
13. *Tamanhos diferentes,*
14. *Águas dos ceús*
15. *O professor sumiu,*
16. *Um convite ao diretor*, os alunos,
17. *Entre amigos,*
18. *Respostas e encontros*

Diversas situações apresentadas no texto remetem à utilização das frações em um contexto escolar e também fora da sala de aula, em uma tentativa de mostrar a teoria utilizada na prática, no cotidiano.

No primeiro capítulo, *Fim de férias, volta às aulas*, a autora começa narrando sobre Lino, um rapaz que ajudava, como garçom, o seu tio Zeca. Num determinado dia, o pizzaiolo não foi trabalhar, o tio foi fazer as pizzas e Lino, além de servir, foi cortá-las, atividade que nunca tinha feito. Cortou pedaços de tamanhos diferentes, mostrados na primeira página do livro. Essa foi a primeira ideia que o livro nos trás de fração, embora o conceito *parte-todo* as partes devem ser iguais, isto é, possuírem a mesma área; a partição em tamanhos distintos é mostrada na primeira página do capítulo. Dessa forma, as frações já aparecem nesse contexto implicando na ideia que as partes deveriam ser iguais.

No segundo capítulo, outro personagem, Daniel começou a contar uma história: "houve um tempo que os homens não sabiam como explicar quantidades menores que um, como o pedaço de bolo que comemos. Era preciso criar um modo de representar quantidades menores que um, ou seja, as partes iguais de algo inteiro". (RAMOS, 2003, p. 14). Nesse capítulo a autora mostra o significado *parte-todo* com a partição de um inteiro, o bolo, em vinte pedaços sem apresentar nenhuma nomenclatura.

No quinto capítulo, *Cartões que viram frações*, o contexto é da sala de aula e o professor propõe atividades com cartões, nas quais está expresso o conceito de frações equivalentes.

No sétimo capítulo, *O prazer da descoberta,* também se encontra uma situação escolar, o professor trabalha a simplificação de frações. Essa tarefa continua no oitavo capítulo.

No nono capítulo, *Tipos, tipos e tipos*, o professor introduz os conceitos de frações: impróprias, próprias e aparentes, usando a mesma estratégia, explorando as percepções com o mesmo material e levando os alunos a perceberem suas características.

No décimo capítulo, *Fração na prática,* a situação apresentada é prática e em um ambiente que não é o escolar, no qual se insere a divisão de um terreno, no sítio de Dona Rosa. As crianças representaram a situação em um retângulo, dividindo-o em quatro partes iguais, e perceberam uma aplicabilidade do conteúdo de frações estudado naescola.

No décimo primeiro capítulo, *Descobertas ao ar livre*, novamente em um contexto da sala de aula, o professor Daniel mostra as operações de soma e subtração com o mesmo denominador, usando materiais de cores iguais. Os alunos observaram que para somar e subtrair com cartões de mesma cor, isto é, com o mesmo denominador, bastava contar a quantidade que resultaria na resposta da operação. O livro mostra os cartões azuis, que representam a fração 1/4 , fazendo a operação: 2/4 – 1/4 = 1/4. Os verdes de valores 1/6, executando 3/6 + 2/6 = 5/6.

No décimo terceiro capítulo, *Tamanhos diferentes*, o professor Daniel propõe à turma somar pedaços distintos com fichas de 1/2 e 1/4, tamanhos desiguais. O livro mostra a representação desses cartões na segunda página do capítulo. Os alunos dizem que só sabiam somar frações com os mesmos denominadores. O professor lançou mais um desafio: "como contar pedaços de tamanhos diferentes ou como somar frações com denominadores diferentes?" (RAMOS, 2003, p. 67). Os alunos se envolvem com a atividade, e o professor, ao final lança um novo desafio: observar "com atenção a soma das frações com denominadores diferentes." (RAMOS, 2003, p.71). Nesse capítulo também comparece a "PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES: Multiplicando ou dividindo os termos de uma fração por um mesmo número natural, diferente de zero, obtém-se uma fração equivalente à fração dada". (RAMOS, 2003, p.72). Finalizando o capítulo, o professor apresenta um desafio para casa. "Pesquisar outra forma de encontrar o denominador". (RAMOS, 2003, p.75)

No décimo quarto capítulo, fora da sala de aula, os alunos criaram outros exemplos. Com auxílio de Dona Rosa, que também havia atuado profissionalmente como professora, os alunos chegam a outras conclusões: que a operação inversa, ou seja, a divisão do menor múltiplo comum pelo denominador original, resultaria no número que seria o fator multiplicativo dos termos primitivos, proporcionando a equivalência das frações. Nessa parte do livro, a autora não trabalha mais com as fichas mostrando as equivalências. Mostra-as usando representações de igualdade das frações, ilustrando com setas coloridas de vermelho as correspondências entre numeradores e denominadores.

No décimo quinto capítulo, no sítio da dona Rosa, os alunos se depararam com um dos canteiros da horta destruído. Perceberam que o estrago foi a metade do que Lino plantou, isto é, a metade de um quarto. A proprietária do sítio pediu aos alunos que calculasse aquela parte danificada. Depois de algum tempo, eles deduziram que deveriam dividir a área de todo o terreno em oito partes iguais para obter o resultado alvejado. O livro representa estas situações com figuras retangulares e equações de frações equivalentes com setas relacionando numeradores e denominadores.

No décimo sétimo capítulo, o professor pergunta à turma se alguém poderia expor uma situação do dia-a-dia que uma fração tinha sido dividida. Uma aluna relatou que sua mãe tinha feito um bolo e guardado a metade, dividindo a outra parte em cinco pedaços iguais para as pessoas presentes na casa. Baseando no exemplo da aluna, o professor perguntou à turma quanto cada um comeu. O livro apresenta uma figura retangular dividida pela metade e uma das partes dividida em cinco outros retângulos iguais. E a operação escrita na linguagem matemática ao lado. Após algum tempo, eles chegam a conclusão que deveriam dividir o desenho em dez partes iguais, obtendo a resposta de 1/10.

Beto apresentou outro exemplo, dizendo que ele, Alice, Taís e Lino tinham feito uma sociedade com dona Rosa e que repartiriam entre eles a metade do lucro. O professor pediu que calculasse a parte do lucro que cada aluno ganharia. Lino desenhou um gráfico de setor circular, conhecido como pizza, representando a situação com oito pedaços iguais. Chegaram a conclusão que cada um ganharia 1/8 do lucrototal.

Daniel disse à turma que o denominador de todo número inteiro é um e lançou mais um desafio. “Como fazer essas divisões sem representação com desenhos”. Baseando em alguns exemplos e depois de algum tempo, chegaram a conclusão que bastava manter a primeira fração e multiplicar pela inversa da segunda. Após essa conclusão, Daniel questionou “quantas vezes 1/3 cabe em dois inteiros?” (RAMOS, 2003, p.99). Nesse momento, o livro mostra novamente dois cartões divididos em três partes iguais cada um.

Lino responde, baseando na representação dos cartões que cabem seis pedaços de um terço em dois inteiros. Daniel propõe em representar essa resposta em operações matemáticas. Taís representa a operação 2 : 1/3 = 2 x 3 = 6. A turma gostando da demonstração dos cartões e da equação, pediu outro exemplo e Daniel perguntou “quantas vezes 1/6 cabem em 4/6”? (RAMOS, 2003, p.100)

Novamente começou representando em cartões de 1/6 e relacionou com a equação como no exemplo anterior. Na figura, visualizaram quatro vezes e, na equação, acharam 24/6. Claudia achou estranho e Beto sugeriu simplificar a fração encontrando o valor quatro.

No quadro 3, nomeamos os capítulos e quais significados de fração foram identificados, se o autor ilustra as situações apresentadas com figuras e se são introduzidas terminologias referentes à fração.

Quadro 3 – Significados de fração presentes em *Frações sem Mistérios*

Capítulos	**Significados**					**Ilustrações**	**Nomenclatura**
	Parte-todo	**Número**	**Medida**	**Operador Multip.**	**Quociente**		
Fim de férias, volta às aulas							
O bolo de abacaxi					X	X	X
Nem tudo é o que parece ser	X					X	X
A casa misteriosa							
Cartões que viram frações							
O fantasma assa pão							
O prazer da descoberta							
O mistério continua							
Tipos, tipos e tipos							
Fração na prática							
Descobertas ao ar livre							X
Cheiro de terra							X
Tamanhos diferentes							
Águas dos céus							
O professor sumiu				X		X	
Um convite ao diretor							
Entre amigos			X			X	

Fonte: Dados da pesquisa

Através da análise dos três paradidáticos, elaboramos o quadro 3, no qual indicamos a presença ou não dos cinco significados de fração anteriormente apresentados.

Quadro 4 - Análise dos significados de fração nos Livros Paradidáticos

Título	Autor (a)	SIGNIFICADOS				
		Parte/todo	**Número**	**Medida**	**Operador Multiplicativo**	**Quociente**
O pirulito do pato	Nilson José Machado	X				X
Doces Frações	Luzia Faraco Ramos	X				X
Frações sem mistérios	Luzia Faraco Ramos	X		X	X	X

Fonte: Dados da pesquisa

Como pode ser verificado no quadro 4, predomina nos paradidáticos analisados os significados *parte/todo e quociente*. Apenas no paradidático *Frações sem mistérios* encontramos os significados *parte/todo, quociente, medida e operador multiplicativo.* O fato de este último livro ser para uma faixa etária superior a do paradidático *Doces Frações* pode ter levado a autora a incluir outros significados de fração. O mesmo pode-se dizer do livro *O pirulito do Pato,* que é destinado aos anos iniciais, no qual a proposta do autor é introduzir o conceito de fração, deste modo, apenas são evidenciados os significados *parte-todo* e *quociente.*

4.1.2 Breves indicações sobre a análise dos Livros Didáticos

Neste item, daremos algumas informações mais gerais sobre os livros didáticos selecionados. Uma análise mais pormenorizada encontra-se na dissertação *Frações e seus diferentes significados em alguns materiais didáticos de Matemática*.[13] O maior detalhamento em relação aos paradidáticos, neste produto educacional, se deve ao fato que os mesmos não serem de conhecimento geral.

[13] A referida dissertação está disponibilizada no site da Biblioteca da PUC Minas.

Selecionamos onze livros didáticos de Matemática, sendo cinco do 4º ano, três do 5º ano e três do 6º ano, publicados entre 2008 e 2018.

As análises foram sintetizadas nos quadros 5, 6 e 7, as quais relacionam livros didáticos com o(s) seu(s) respectivo(s) autor (es), os significados de frações e outras características por nós investigadas.

O quadro 5, refere-se aos significados de fração, ou seja, quais dos cinco significados estão inseridos nos livros abordados.

O quadro 6 traz indicações relativas a:

- apresentação de aspectos históricos em relação ao tema dasfrações;
- orientações e sugestões pedagógicas;
- algumas características mais usadas para expressar o significado *parte-todo.*

No quadro 7, serão indicados os resultados obtidos com a análise da existência de outras maneiras complementares de se trabalhar o conteúdo de frações, para melhor fixação, abordadas pelos autores analisados.

Quadro 5 - Significados de fração nos livros didáticos

Título	Autores	Ano	Significados				
			Parte/todo	**Número**	**Medida**	**Operador Multipl.**	**Quociente**
Bem me quer 4ª ed. 2017	*Ana Lúcia Bordeaux, Cléia Rubinstein, Elizabeth França, Elizabeth Ogliari, Vânia Miguel*	4º	X	X	X		
Conhecer e Crescer 3ª ed. 2011	*Jaqueline Garcia*	4º	X		X	X	
Ligamundo 1ª ed. 2017	*Eliane Reame*	4º	X	X	X		X
Ápis 3ª ed. 2017	*Luiz Roberto Dante*	4º	X	X	X	X	
Nosso Livro de Matemática 3ª ed. 2017	*Célia Maria Carolino Pires, Ivan Cruz Rodrigues*	4º	X	X	X	X	
Nosso Livro de Matemática 3ª ed. 2017	*Célia Maria Carolino Pires, Ivan Cruz Rodrigues*	5º	X	X	X	X	X
Aprender Juntos 4ª ed. 2014	*Roberta Taboada, Ângela Leite*	5º	X		X	X	
Conquista da Matemática 1ª ed. 2018	*José Ruy Giovanni Júnior*	5º	X	X	X	X	X
Geração Alpha 2ª ed. 2018	*Carlos N.C. de Oliveira, Felipe Fugita*	6º	X	X	X	X	X
Matemática Compreensão e Prática 1ª ed. 2008	*Ênio Silveira, Claudio Marques*	6º	X			X	
Matemática Realidade e Tecnologia 1ª ed.2018	*Joamir Souza*	6º	X		X	X	

Fonte: Dados da pesquisa

O significado *parte-todo* é algo fundamental e, deste modo, era esperado que todos os livros o apresentassem, como foi possível constatar através da nossa análise.

Coincidentemente, o livro mais antigo *Matemática Compreensão e Prática*, de 2008, é o único que aborda apenas os significados *parte-todo* e *operador multiplicativo*. Somente os livros *Nosso Livro de Matemática para o 5º ano*, publicado em 2017, de Célia Maria Caroline Pires e Ivan Cruz Rodrigues, *Conquista da Matemática* para o 5º ano, publicado em 2018, de

José Ruy Giovanni Júnior e *Geração Alpha* para o 6º ano, publicado em 2018, d e Carlos N.C. de Oliveira e Felipe Fugita contêm todos os cinco significados pesquisados.

Podemos inferir que o fato de os significados de fração estarem sendo tema de alguns estudos no Brasil, já há algum tempo, pode ter influenciado os autores de livros didáticos a contemplarem outros significados em seus livros. No entanto, verificamos que o significado *Quociente* é pouco explorado pela maioria dos autores analisados.

Antes da apresentação dos quadros 5 e 6, daremos algumas informações para esclarecimento e interpretação do conteúdo de cada um deles.

- Informações relativas ao quadro 6

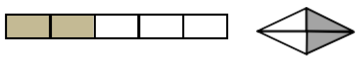
Outras categorias de análise do livro didático

a) Apresentação de aspectos históricos sobrefrações

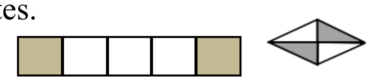
b) Orientações e sugestões pedagógicas para trabalhar o conteúdo.

c) Representações mais utilizadas para expressar o significado *parte-todo*.

c_1) Representações geométricas (R.G.) tradicionais, como: Retângulos, triângulos, círculos e losangos com marcações adjacentes.

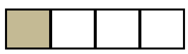


c_2) Representações geométricas (R.G.) tradicionais, como: Retângulos, triângulos, círculos e losangos com marcações não adjacentes.

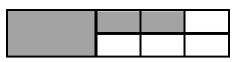


c_3) Representações geométricas (R.G.) não tradicionais. (Ex: hexágonos, octógonos e outras figuras poligonais ou não).

c_4) Expressar em porcentagem uma determinada fração indicada em uma figura.
Por exemplo, 1/4 =25%



c_5) Figura geométrica dividida em partes diferentes representando áreas distintas.



Observamos que a representação tradicional de fração (na forma quantidade contínua) se situa na utilização de círculos, quadrados e retângulos, como se outras formas geométricas não pudessem indicar a representação de frações. Neste sentido, foi nosso intuito verificar como os livros representam as frações, presentes nos itens de c_1 a c_5 indicados anteriormente.

A análise levou em conta os capítulos sobre frações, como um todo. As características verificadas podem comparecer na parte teórica, ao longo do texto, em um exemplo ou nos exercícios propostos.

Quadro 6 – Outras categorias de análise dos livros didáticos

Título	**Ano**	**Apresenta informações históricas**	**Possui orientações e sugestões didático-pedagógicas**	**Características mais usadas para expressar o significado parte/todo**				
				Representações geométricas tradicionais com Marcações Adjacentes	**Representações geométricas tradicionais. com Marcações NÃO Adjacentes**	**Representações geométricas. NÃO tradicionais**	**Expressar em porcentagem uma determinada fração indicada em uma figura**	**Figura geométrica .dividida em partes diferentes representando áreas diferentes**
Bem me quer 4ª ed. 2017	4º	X	X	X	X	X		
Conhecer e Crescer 3ª ed. 2011	4º		X	X	X	X		
Ligamundo 1ª ed. 2017	4º		X	X		X		X
Ápis 3ª ed. 2017	4º		X	X			X	
Nosso Livro de Matemática 3ª ed. 2017	4º		X	X				
Nosso Livro de Matemática 3ª ed. 2017	5º		X	X	X		X	X
Aprender Juntos 4ª ed. 2014	5º		X	X	X		X	
Conquista da Matemática 1ª ed. 2018	5º		X	X		X		
Geração Alpha 2ª ed. 2018	6º		X	X	X	X		X
Matemática Compreensão e Prática - 1ª ed. 2008	6º	X		X	X			
Matemática Realidade e Tecnologia - 1ª ed. 2018	6º		X	X	X	X		

Fonte: Dados da pesquisa

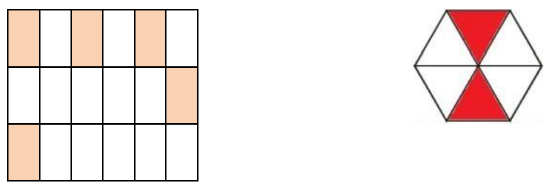
Entre os aspectos analisados, presentes no quadro 6, destacamos alguns, a seguir.

A parte histórica referente à frações é praticamente ausente nos livros analisados. Algumas notas históricas estão presentes somente nos livros *Bem me quer*, do 4º ano, e *Matemática Compreensão e Prática*, para o 6º ano.

As representações geométricas não tradicionais para as frações, como a utilização de outras figuras como triângulos, pentágonos, hexágonos, paralelogramos, etc. ou não comparecem nos livros ou são pouco utilizadas por alguns autores. A prioridade ainda é pela utilização de círculos, quadrados e retângulos para a representar frações através das quantidades contínuas. Seis livros, entre os analisados, incluem outras figuras geométricas para representar as frações, são eles: *Bem me quer*,*Conhecer e Crescer*, *Ligamundo*, *Conquista da Matemática*, *Geração Alpha* e *Matemática Realidade e Tecnologia*.

Outra verificação são as representações de frações com partes não adjacentes, ou seja, do tipo das figuras abaixo, a primeira representando 5/18, a segunda representando 2/6 e as partes coloridas não estão em sequência e/ou não são adjacentes.

Figura 21 – Representação de fração com partes não adjacentes



Sete dos livros analisados contemplam essa representação de fração com marcações não adjacentes, que é importante para que o aluno não pense que apenas as marcações adjacentes representam uma fração. Os livros que contêm figuras com marcações não adjacentes são: *Bem me quer*,*Conhecer e Crescer*, *Nosso Livro de Matemática*, *Aprender Juntos*, *Geração Alpha*, *Matemática Compreensão e Prática* e o livro *Matemática Realidade eTecnologia*.

Apenas três livros didáticos expressam em porcentagem uma determinada fração indicada em uma figura, *Nosso livro de Matemática* 5º ano, *Apis* 4º ano e *Aprender Juntos* 5º ano. Em relação à representação de figura geométrica dividida em partes diferentes representando áreas diferentes, é encontrada novamente no *Nosso livro de Matemática* 5º ano, no *Ligamundo* 4º ano e *Geração Alpha* 6ºano.

- Informações relativas ao quadro 7

Consideramos importante analisar alguns aspectos relativos às frações mesmo não estando diretamente ligados aos significados de frações propostos por Kieren (1976). Estes outros aspectos também estão sintetizados no quadro 5.

Frações como números decimais também é uma das preocupações de Kieren (1976), assim como a representação de frações na reta numerada. Contudo, elegemos outros pontos, que consideramos relevantes, para complementar as informações sobre os livros didáticos analisados.

Maneiras complementares de se trabalhar o conteúdo de frações

- Localizar ou representar frações na reta numerada.
- Relacionar frações com números decimais. (1/4 = 0,25; 1/2 =0,5)
- Compreender e calcular probabilidades usando frações.
- Transformar uma fração em porcentagem (1/4 = 25%), usando frações equivalentes.
- Confrontar frações unitárias (numerador "1") com denominadores diferentes para identificar qual é maior ou menor sem efetuar cálculos.
- Identificar ordem de grandeza de frações – menor, igual ou maior (< , = ou >) – com denominadoresdiferentes.
- Quantidade de páginas do livro que abordam o conteúdo frações.

Quadro 7 - Maneiras de se trabalhar o conteúdo de frações

Título	**Ano**	**Outras maneiras de trabalhar frações para melhor entendimento e fixação**						
		Localizar ou representar frações na reta numerada.	Relacionar frações com números decimais.	Calcular probabilidades usando frações.	Transformar em porcentagem (1/4 = 25%).	Confrontar frações unitárias (numerador =1) para identificar qual é maior ou menor.	Identificar ordem de grandeza (<, = ou >) de frações com denominadores diferentes.	Quantidade de páginas do livro que retratam sobre frações.
Bem me quer 4ª ed. 2017	4º	X		X				27
Conhecer e Crescer 3ª ed. 2011	4º			X			X	27
Ligamundo 1ª ed. 2017	4º	X		X		X		57
Ápis 3ª ed. 2017	4º	X		X	X	X	X	30
Nosso Livro de Matemática 3ª ed. 2017	4º	X	X			X		15
Nosso Livro de Matemática 3ª ed. 2017	5º	X	X	X	X	X	X	23
Aprender Juntos 4ª ed. 2014	5º	X	X	X			X	46
Conquista da Matemática 1ª ed. 2018	5º	X		X	X			37
Geração Alpha 2ª ed. 2018	6º	X				X	X	41
Matemática Compreensão e Prática 1ª ed. 2008	6º				X		X	37
Matemática Realidade e Tecnologia 1ª ed. 2018	6º	X	X	X			X	19

Fonte: Dados da pesquisa

A representação das frações na reta numerada só não está presente nos livros *Conhecer e crescer*, para o quarto ano, e *Matemática Compreensão e Prática*, para o sexto ano.

Percebe-se, no quadro 6, que apenas quatro livros dos onze abordados, relacionam frações com números decimais e transformam frações em porcentagem (1/4 = 25%): do quarto ano, a 3ª edição de *Ápis*, de 2017; do quinto ano, a 3ª edição de *Nosso Livro de Matemática, publicado em* 2017 e a 1ª edição da *Conquista da Matemática*, de 2018 *Matemática, e, do 6º ano, a* 1ª edição do livro *Compreensão e Prática,* publicado em 2008

Verifica-se que os livros, para o quarto ano, *Ligamundo,* de 2017, *e Aprender Juntos*, do 5º ano, de 2014, apresentaram a maior quantidade de páginas dedicadas ao tópico frações. Desse modo, esperávamos encontrar mais significados de fração nestes livros e também outros aspectos por nós investigados, contudo, nos três quadros apresentados, foi possível constatar que, contrariamente à nossa expectativa, há participação abaixo do esperado nos itens analisados.

A análise dos livros de Matemática selecionados veio corroborar nossa hipótese inicial de que, em geral, os seus autores não abordam o conteúdo de frações de modo a incorporar mais significados de frações aos alunos e que também as representações de fração ainda se pautam muito nas figuras tradicionais como círculos, retângulos e quadrados.

Encerramos este capítulo com a declaração de um autor de livros didáticos de Matemática, Antônio José Lopes "Bigode": "a maioria dos professores e autores de materiais didáticos, desconhece a história do conceito de frações, bem como suas componentes, epistemológica e cognitiva". (LOPES, 2008, p. 20). Essa afirmação tão precisa vai ao encontro dos resultados que encontramos com a análise dos livros didáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esses apontamentos subdividiram-se na abordagem de aspectos históricos, dos significados de fração e de dados relativos aos resultados da análise de livros paradidáticos e didáticos de Matemática do 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental.

Como foi dito inicialmente, esse material objetiva contribuir para que sejam inseridos e ampliados os significados de fração na formação inicial e continuada de professores das áreas de Pedagogia e Matemática e também servir como dados complementares, de modo que os professores em serviço possam inserir outros significados de fração em suas aulas. Além disso, os dados históricos aqui apresentados, embora reduzidos, visam propiciar uma visão de determinados aspectos subjacentes à história dos sistemas de numeração e das frações, os quais são limitados ou praticamente ausentes nos livros didáticos de Matemática.

Como bem disse Lopes (2008, p.7): a "aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas, sobre pizzas e barras de chocolates. (...) Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas". É necessário ampliar as possibilidades para o entendimento desse conteúdo.

E, novamente, recorremos a Lopes (2008, p.11):

> [...] o tema frações em algumas séries do currículo é um erro grave, desconsidera o fato de que o desenvolvimento do pensamento proporcional se estende por um longo período que vai dos 7/8 anos aos 14/15 anos, em níveis distintos de complexidade. Uma conseqüência pedagógica que se pode extrair destas considerações, é que os currículos deveriam contemplar experiências diversas com frações em todas as séries do ensino fundamental e médio, algo que vá além da revisão com frações mais "difíceis".

Nesse sentido, finalmente, queremos reforçar que os alunos necessitam de tempo para que tenham o devido entendimento e a correspondente apreensão dos diversos significados de fração. Esses devem ser inseridos de forma paulatina, em situações que façam sentido, com utilização de atividades diversificadas, com a introdução de materiais alternativos, respeitando-se o nível de entendimento e a faixa etária dos estudantes.

REFERÊNCIAS

BELL, Eric Temple. **Historia de las Matemáticas**. Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica, 2016. (Edición electrónica).

BEN-MENAHEM, Ari. **Historical Encyclopedia of Natural and Mathematical Sciences**. New York: Springer, 2009.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Número fracionário:** primórdios esclarecimentos. Brasília: SBHMat, 2005.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BOYER, Carl B; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental,1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental,2017.

BROLEZZI, Antônio Carlos. **A tensão entre o discreto e o contínuo na História da Matemática e no ensino de Matemática**. 1996. 95 f. Tese. (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; NUNES, Terezinha. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 125-136, 2006.

CARAÇA, Bento Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CROSBY, Alfred W. **A mensuração da Realidade**: a quantificação e a sociedade ocidental. Tradução de Vera Ribeiro. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Priorizar História e Filosofia da Matemática na Educação. **Tópicos Educacionais**, Recife, v.18, n. 1-2, p. 159-175, jun./dez.2012.

D'AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática e Educação. **Cadernos CEDES – História e Educação Matemática**. São Paulo: Papirus, 1996. v. 40. p.7-17.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos números e numerais**. São Paulo: Atual, 1992.

IFRAH, Georges. **Os Números** – a história de uma grande invenção. Tradução de Stela M. de Freitas Senra. 2. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KIEREN, T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers**.** In LESH, R. (Ed.). **Number and measurement:** Paper from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, 1976, p.101-151.

LOPES, Antônio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **BOLEMA** (Boletim de Educação Matemática), v. 21, n. 31, p.1-22, 2008.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **Bolema,** ano 21, n.31, p. 23-40, 2008.

MENDES, Iran Abreu. Investigação histórica em sala de aula: um exercício de criatividade para a matemática escolar. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2012, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza,2012.
Disponível em: http://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/mesas/5/2.pdf.Acesso em: 25 jun.2019**.**

MIGUEL, Antônio. **Formas especulares e não-especulares de se conceber a relação entre história, epistemologia e educação matemática**. Campinas: FE/UNICAMP, 2015.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. Abu'l Hasan Ahmad ibn Ibrahim Al-Uqlidisi. In **MacTutor History of Mathematics Archive**. University of St Andrews, 1999.

PÉREZ GARCÍA, Miguel A. **Una historia de las Matemáticas:** retos y conquistas a través de sus personajes. Madrid: Vision Libros, 2013.

POMEROY, Roos. Is the 20,000-year-old Ishango Bone the earliest evidence of logical reasoning?.**RealClearScience,** nov. 2015.
Disponível em:
https://www.realclearscience.com/blog/2015/11/the_earliest_evidence_of_logical_reasoning.html. Acesso em: 9 maio 2019.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. História da Matemática: considerações no campo educacional. ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Belo Horizonte. **Anais...** (CD-Rom). Belo Horizonte: SBEM MG, 2003.

LIVROS DIDÁTICOS E PARADIDÁTICOS ANALISADOS

BORDEAUX, Ana Lucia; RUBINSTEIN, Cléa; FRANÇA, Elizabeth; OGLIARI,Elizabeth; MIGUEL, Vânia. **Bem me quer Matemática - 4º Ano.** 4. ed.São Paulo: Edi- tora do Brasil,2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática 4º ano – Ápis**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

GARCIA, Jacqueline. **Conhecer e crescer – Matemática.** 3. ed. São Paulo: Escala Educa- cional, 2011.

GIOVANNI, Júnior José Ruy. **A conquista da Matemática.** São Paulo: FTD, 2018.

MACHADO, Nilson José. **O pirulito do pato**. São Paulo: Scipione, 1996.

OLIVEIRA, Carlos N. C.; FUGITA, Felipe. **Matemática - Geração Alpha 6º ano.** 2. ed. São Paulo: S.M., 2018.

PIRES, Célia Maria Carolino; RODRIGUES, Ivan Cruz. **Nosso livro de Matemática 4º ano.** 3. ed. São Paulo: Zapteditora, 2017

PIRES, Célia Maria Carolino; RODRIGUES, Ivan Cruz. **Nosso livro de Matemática 5º ano.** 3. ed. São Paulo: Zapteditora, 2017

RAMOS, Luzia. **Doces frações**. 4.ed. São Paulo: Ática.1998. RAMOS,

Luzia. **Frações sem mistérios**. São Paulo: Ática, 2003. REAME,

Eliane. **Ligamundo**. São Paulo: Saraiva, 2017

SILVEIRA, Enio. MARQUES, Claudio. **Matemática -** compreensão e prática. São Paulo: Moderna, 2008.

SOUZA, Joamir. **Matemática, realidade & tecnologia**. São Paulo: FTD, 2018.

TABOADA, Roberta; LEITE, Angela. **Aprender juntos Matemática 5º ano.** 4. ed. São Pau- lo: S.M., 2014.