PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Thais Andrade de Oliveira

PRÁTICAS INVESTIGATIVAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA:

Relações métricas em questão

Belo Horizonte
2021

Thais Andrade de Oliveira

PRÁTICAS INVESTIGATIVAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA:

Relações métricas em questão

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Professora Drª Eliane Scheid Gazire

Belo Horizonte

2021

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Oliveira, Thais Andrade de
O48p Práticas investigativas nas aulas de matemática: relações métricas em questão / Thais Andrade de Oliveira. Belo Horizonte, 2021.
130 f. : il.

Orientadora: Eliane Scheid Gazire
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Matemática - Estudo e ensino - Investigação. 2. Geometria - Problemas, questões, exercícios. 3. Professores de matemática - Formação. 4. Alunos - Comportamento. 5. Ótica geométrica. 6. Material didático. I. Gazire, Eliane Scheid. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 513:373
Ficha catalográfica elaborada por Elizângela Ribeiro de Azevedo - CRB 6/3393

Thais Andrade de Oliveira

PRÁTICAS INVESTIGATIVAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA:

Relações métricas em questão

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Profa. Dr.ª Eliane Scheid Gazire - PUC Minas (Orientador)

Profa. Dr.ª Leiva de Figueiredo Viana Leal - UFMG (Banca Examinadora)

Prof. Dr. João Bosco Laudares - PUC Minas (Banca Examinadora)

Belo Horizonte, 26 de Março de 2021.

Aos meus pais, Artur e Renilda, sempre presentes em minha vida, com muito amor e dedicação. À Tatiana e Davidson pelos momentos de descontração com a pequena Milene. À doce companhia das amigas Mari, Magna, Fabiana, Ju e Carlita.

AGRADECIMENTOS

Agradecer a Deus pela oportunidade de vivenciar mais uma formação profissional.

Aos meus pais e à minha irmã, pela motivação e apoio ao longo de toda essa caminhada.

Aos professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, por todo o conhecimento compartilhado nas aulas. Em especial à Prof.ª Dra. Eliane Scheid Gazire, pelo carinho e pela orientação.

A todos, o meu muito obrigada!

“Educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo.”

Paulo Freire

RESUMO

Este estudo apresenta uma pesquisa de intervenção de caráter qualitativo e teve como participantes alunos do 9º ano de uma escola da rede privada na cidade de Belo Horizonte, Minas Gerais. O objetivo da pesquisa foi o de investigar em que medida o desenvolvimento de ambientes com práticas investigativas, onde o aluno se sinta protagonista do seu processo de aprendizagem e o professor mediador do conhecimento favorecem as discussões e as trocas de conhecimentos que possibilitem aos alunos ressignificar e construir novos saberes, em especial no que diz respeito à compreensão das Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Teoricamente esta pesquisa se baseia em D'Amore (2007), Walle (2009), Pais (1996, 2001), Ponte, Brocardo, Oliveira (2005), Gazire (2000), Amâncio (2013) e Cabral (2017). Metodologicamente, o projeto de ensino foi elaborado com base na teoria de Walle, Pais e Ponte, Brocardo, Oliveira. A aplicação da proposta de ensino se deu por meio do desenvolvimento de quatro etapas previstas e descritas no projeto: revisão bibliográfica, documental e a construção do quadro teórico, elaboração das tarefas, aplicação das atividades e coleta de dados e, análise dos resultados. Pelo fato de, no momento da pesquisa, (e ainda hoje), o mundo ter sido acometido pelo covid19, a escola buscou organizar as atividades de modo a atender o contexto de sua aplicação. A proposta de ensino desenvolveu-se com um trabalho sistematizado, baseado em atividades criadas por esta pesquisadora para esse contexto de aplicação. Mesmo assim, o conjunto de atividades permitiu o acesso a diferentes maneiras de interação aluno e professor; estimulou e despertou o interesse da maioria dos alunos participantes da pesquisa. Isso porque na investigação, procurou-se elucidar a capacidade dos sujeitos de produzirem argumentos lógicos em seus comentários escritos e a inferirem dados e informações em busca na internet, aumentando a autoestima deles, mediante a percepção própria de seus processos de compreensão a respeito das relações métricas. Os resultados apontam que aluno e pesquisadora puderam viver experiências de troca e de aprendizado que os aproximaram de modo mais efetivo. Participantes que conseguiram vencer os obstáculos pandêmicos e os do mundo de uma interação remota, confirmam a didática da matemática pela investigação como caminho metodológico a ser seguido. A análise dos dados e dos resultados apontam obstáculos pedagógicos em alguns alunos, o que prejudicou a aprendizagem desses sujeitos. Apontam ainda a necessidade de revisão do material didático que circulam nas escolas e a premência de uma formação continuada de docentes, dando a eles o direito de conhecer e de se desenvolver profissionalmente de modo a atender às mudanças propostas pela nova perspectiva de ensino de Matemática e pelas teorias didáticas contemporâneas.

Palavras-chave: Didática da Matemática. Investigações Matemáticas. Sequência Didática. Relações Métricas.

ABSTRACT

This study presents an intervention research of qualitative nature and the participants were 9th grade students from a private school in the city of Belo Horizonte, Minas Gerais. The goal of the research was to investigate to what extent environments with investigative practices favor discussions and knowledge exchange, which allow students to give new significance to and build new knowledge, especially with regard to the understanding of metric relations in right triangles. Theoretically, this research is based on D'Amore (2007), Walle (2009), Pais (1996, 2001), Ponte, Brocardo, Oliveira (2005), Gazire (2000), Amâncio (2013) and Cabral (2017). In a methodological manner, the teaching project was developed based on the theory of Walle, Pais and Ponte, Brocardo, Oliveira. The application of the teaching proposal took place through the development of four stages foreseen and described in the project. Due to the fact that, at the time the research was being developed (and still today), the world was affected by COVID-19, the school tried to organize the activities in a way to meet the context of task application. Even so, the set of activities allowed access to different ways of student-teacher interaction; it sparked and awakened the interest of the majority of students participating in the research, be it in the written production of logical arguments, be it through the research instructions on the Internet. The results suggest that both student and researcher were able to live sharing and learning experiences that brought them closer together in a more interactive way. Participants who were able to overcome the pandemic and world obstacles of a remote interaction confirmed that the mathematics teaching skills through research is a methodological path to be followed. The analysis of the data and the results shows the existence of pedagogical barriers for some students, which impaired the learning of these individuals. They also highlight the need to review the teaching material being used in schools and the urgency of continued education for teachers, giving them the right to learn and to develop professionally, in order to meet the changes proposed by the new perspective of mathematics teaching and contemporary teaching theories.

Keywords: Mathematics Teaching Skills. Mathematical Investigations. Didactic Sequence. Metric Relations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

> *"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção."*
>
> Paulo Freire

Minha mãe, que sempre me acompanhou nos estudos, afirma que, desde muito pequena, a Matemática era uma das disciplinas que eu mais tinha prazer em estudar. Sempre com notas boas e muito elogiada pelos professores, segui toda minha vida escolar com a ideia de que a Matemática era a melhor e a disciplina mais fácil, ao contrário do que pensavam muitos dos meus colegas. Lembro-me bem de que, as vésperas de provas, eu me assentava para ajudar meus colegas. Esses momentos serviam como forma de estudo para mim e, ao longo do tempo, foi despertando em mim o interesse pelo ensinar.

Por ter estudado sempre em escola pública, tive a oportunidade de experimentar dificuldades próprias que a atravessam, como alterações repentinas no quadro de professores e muita insatisfação diante da dura realidade cotidiana. Para mim, foi crescimento conviver com professores que, diante de realidades difíceis, demonstravam diferentes relações com o seu fazer pedagógico. Desde aqueles extremamente desmotivados com a educação a aqueles que tentavam, de qualquer maneira, fazer diferença naquele contexto, seja pelas conversas em sala, nos mostrando que a realidade podia ser diferente, seja pela forma prazerosa com que ensinavam. Já, no Ensino Médio, os professores Marcelo (Matemática) e Karina (Física) serviram de fonte inspiradora para eu decidir seguir meus estudos na área da educação. Eles tinham uma relação interpessoal com os alunos diferenciada se comparada com os demais professores. Durante as aulas, demostravam sempre muito empenho e boa vontade em ensinar e tirar dúvidas, o que impactava sempre muito positivamente nos resultados e no empenho da maioria dos alunos. Foi quando me inscrevi no vestibular do curso de Licenciatura em Matemática no UniBH - Centro Universitário de Belo Horizonte.

Iniciei, então, em 2004, os estudos no UniBH, já com um grande problema a ser resolvido: estava apenas com o dinheiro da matrícula em mãos e meus pais, sem condição financeira de me ajudar, passaram por momentos de tensão, preocupados em como conseguir me manter na faculdade. Foi quando, na primeira semana de aula, agendei um horário com o coordenador do curso para ver a possibilidade de um estágio que pudesse garantir meus estudos. Com muita atenção, me encaminhou para uma professora que me informou de uma entrevista para estagiar no laboratório LEMAT - no Laboratório de Ensino de Matemática, com um projeto que tinha, como objetivo, fazer levantamentos de como estavam os egressos dos últimos 5 anos do curso. Concorri à vaga e fui selecionada. Quase 90% da mensalidade estava garantida. Para complementar os outros 10%, fui trabalhar com a correção dos "bloquinhos" de uma franquia do Kumon, que havia perto da minha casa. Problema resolvido.

Com o estágio, além de trabalhar com os egressos, tive a oportunidade de participar na ministração de oficinas dadas a alunos da rede pública de BH, auxiliar os alunos do curso com o uso dos materiais pedagógicos do laboratório, criar e construir jogos pedagógicos e participar da organização das Jornadas Acadêmicas de Matemática propostas pela coordenação. Todo esse trabalho me propiciou várias oportunidades de participar de congressos e eventos ligados à Educação Matemática. Já no Kumon, a experiência pedagógica foi bem diferente, pelo caráter mecânico e robotizado das atividades, o que me causava grande incômodo.

Diante desse cenário, algo involuntário aconteceu: com o tempo fui parando de corrigir os "bloquinhos" e, quando vi, já estava praticamente acompanhando o "para casa" de alguns alunos e dando aulas particulares. De fato, precisava de algo que fosse além da correção daqueles "bloquinhos". A proprietária da franquia resolveu, então, contratar uma nova pessoa para o serviço de correção e me oficializar como professora particular da sala.

Na faculdade, as disciplinas ligadas a metodologias, à educação matemática e ao ensino-aprendizagem sempre me despertaram grande interesse. Para mim, não bastava saber matemática para ensinar bem, era preciso algo a mais, algo que eu encontrava em tais disciplinas. Hoje vejo o quanto essas aulas fizeram de mim uma profissional diferenciada, no sentido de me sentir atraída por novidades educacionais, de buscar compreender os alunos que tenho, respeitando e valorizando toda a bagagem que têm como sujeitos pertencentes a um grupo sociocultural.

Em junho de 2009, concluí o curso de licenciatura e, em julho, e iniciei a Especialização em Educação Matemática na PUC-MG pelo Prepes, momento em que tive a oportunidade de aprofundar ainda mais os estudos sobre as teorias e práticas que envolvem o universo da educação. Em janeiro de 2010, pedi demissão da sala em que dava aulas particulares e fui lecionar para o Ensino Médio em uma escola estadual da periferia de Santa Luzia, município próximo a Belo Horizonte, MG, no turno na manhã. Recém-formada, com pouca experiência e trabalhando com alunos que expressam as marcas de um pertencimento social injusto: poucas perspectivas de futuro, sem visão de horizonte e de futuro, sem motivação para estar na escola, destituídos de sonhos e desmotivados, vivi ali experiências que me fizeram aprender muito mais que ensinar. De fato, não consegui envolver todos os alunos em minhas aulas, mas consegui contribuir ,de forma significativa, na formação de alguns. No período da tarde segui com as aulas particulares, porém, agora, na minha casa e com alunos fixos, acompanhados 1 ou 2 vezes por semana. Isso, por acreditar na importância da construção de um ensino-aprendizagem significativo.

Após quatro anos lecionando em escola do estado, ingressei na rede particular onde assumi aulas de matemática de todo o Ensino Fundamental II. Já me sentia bem mais segura por ter vivenciado diversas situações rotineiras ou não do ambiente escolar. Lá fiquei por cinco anos. Acredito que todos os educadores deveriam vivenciar as especificidades da educação na rede pública e privada. São experiências extremamente diferentes e surpreendentes nos dois tipos de rede, que nos levam a refletir sobre o processo de ensino e de aprendizagem e a entender sujeitos em seus diferentes contextos de existência, o que faz a diferença para um educador comprometido com uma educação justa para todos.

Nesse período, fui convidada a escrever uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental II, juntamente com outras três professoras para uma rede privada de ensino. Foi uma experiência extremamente marcante para mim pois, enquanto professora, tinha um olhar crítico ao escolher a coleção a ser adotada pelas escolas em que eu trabalhava. Agora estava do outro lado: como atender de maneira eficaz a demanda dos professores e as necessidades dos alunos que supostamente usariam aquela coleção? Um grande desafio, que muito agregou à minha formação profissional.

Pouco tempo depois de finalizar a coleção de livros, fui nomeada na rede municipal de ensino e recebi uma nova proposta de trabalho em outra escola da rede particular. Após análise das condições dadas resolvi aceitar o convite. Nessa escola, assumi as 5 turmas de 9º ano. Foi um presente, sempre gostei de dar aula para esse ano e nele é ministrado o conteúdo que, desde a outra escola, chamava minha atenção pelas dificuldades apresentadas pela maioria dos alunos: o ensino das Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

O interessante foi que os professores dessa nova escola passavam por formações e cursos de qualificação. Eram constantes as reflexões acerca do tipo de atividades a serem propostas, o quanto deveriam ser desafiadoras, dando, assim, espaço para a experimentação e possibilitando o papel do professor como mediador do conhecimento.

Apesar de todo o meu esforço, para contribuir no processo de aprendizagem dos meus alunos diante da complexidade do processo de ensino-aprendizagem Geométrica, sinto ainda não ser o suficiente. Esse fato ainda me inquieta, o que me leva a buscar novas estratégias metodológicas para minhas aulas de forma a torná-las mais interessantes e significativas para meus alunos. O fato é que sempre me senti motivada a estudar sobre a prática do professor e sobre o ambiente escolar, o que me levou a ingressar no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-Minas.

Retomando a questão da aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo citado anteriormente, pude perceber no decorrer das experiências que para sua efetiva aprendizagem é necessário que o os alunos tenham o conhecimento a respeito da Semelhança de Triângulos muito bem consolidado, caso contrário, nos deparamos com o principal obstáculo para a compreensão de tais relações. Assim, sem o conhecimento a respeito da Semelhança de Triângulos é impossível aos alunos desenvolverem um pensamento argumentativo mais avançado de modo a poderem compreender e estabelecer adequadas e coerentes relações métricas.

Ao analisar a forma como os livros didáticos apresentam tal conteúdo pude perceber o quanto as relações métricas são apresentadas como fórmulas que não fazem sentido algum aos alunos. As questões propostas são pouca exploratórias e muito mecânicas e objetivas.

A BNCC (2018) traz as Relações Métricas no Triângulo Retângulo como um dos objetos de conhecimento a serem desenvolvidos no 9º ano. Atesta, assim, a importância da aprendizagem de tal conteúdo, que interfere no processamento mental do aluno na compreensão da Geometria. Há ainda que citar a relevância que uma das relações métricas assume no desenvolvimento da Geometria, o conhecido “Teorema de Pitágoras”, como se constata da indicação, na BNCC, da habilidade que se segue:

(EF09MA13). Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (BNCC, pág.318)

A partir do que até aqui foi exposto, formulamos o seguinte problema:

Partindo de experiências com situações de investigação matemática é possível proporcionar aos alunos a construção de um pensamento argumentativo geométrico mais avançado, que os levem a compreender o estudo das Relações Métricas?

E delineados os seguintes OBJETIVOS:

Geral

- Elaborar e aplicar uma sequência de tarefas que levem os alunos à construção e à sistematização de conceitos geométricos pré-requisitos para a aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo.

Específicos

- Criar um ambiente de práticas investigativas, em que o aluno se sinta protagonista do seu processo de aprendizagem e o professor mediador do conhecimento.
- Fornecer subsídios para a melhoria do desempenho de alunos na aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo.

O presente trabalho encontra-se distribuído da seguinte forma:

Neste primeiro capítulo, procuramos traçar o caminho percorrido pela pesquisadora e relatar como se deu sua inserção no tema a ser pesquisado, justificando-o e trazendo os objetivos e a proposta de trabalho.

No segundo capítulo, buscamos compreender o papel da didática, tanto no ensino/aprendizagem num contexto geral das disciplinas como especificamente da matemática. Apresenta-se, de maneira breve, os conceitos didáticos de *transposição didática, situações didáticas, contrato didático, obstáculos didáticos e efeitos didáticos.* Em seguida, almejamos compreender a importância da investigação matemática nas aulas, bem como as adaptações e mudanças que tal prática didático-pedagógica exigem.

No terceiro capítulo, foi feito um breve levantamento sobre a história da geometria e sobre seu ensino/aprendizagem, dando destaque ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

O quarto capítulo apresenta o percurso da pesquisa. Baseamo-nos em estudiosos, como Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) e Walle (2009) para justificar a organização da sequência de tarefas que busca, a todo momento, criar ambientes de investigação. São relatadas as condições em que foi desenvolvida a pesquisa, os conteúdos trabalhados e as datas de aplicação de cada uma das tarefas.

No quinto capítulo, discutimos e analisamos a aplicação das atividades, com base nos registros dos alunos e nas observações da pesquisadora.

Por fim, são apresentadas as considerações finais, em que o estudo teórico dessa dissertação foi brevemente retomado e os resultados e observações da pesquisa são relatados e analisados. A pesquisadora também cita as potencialidades deste trabalho diante da modalidade do ensino remoto.

O Caderno de Atividades, Produto do mestrado profissional, encontra-se no Apêndice.

2 A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E A INVESTIGAÇÃO DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

> A aprendizagem não é o resultado do desenvolvimento; a aprendizagem é o próprio desenvolvimento. Ela requer invenção e auto-organização por parte do estudante. Deste modo, os professores precisam permitir que os estudantes levantem suas próprias questões, gerem suas próprias hipóteses e modelos como possibilidades e testem suas viabilidades. (WALLE,2009)

Nesse capítulo, pretende-se fazer uma breve exploração sobre a Didática da Matemática e as investigações em sala de aula. É possível ajudar nossos alunos a compreender a Matemática, concluir que ela faz sentido e que eles mesmos podem dar sentido a ela. Essa compreensão, bem como o desenvolvimento de habilidades, é potencializada sempre que é permitido ao aluno trabalhar, ou seja, participar do seu processo de aprendizagem.

2.1 – DIDÁTICA: uma concepção em contínua reconstrução

2.1.1- CONCEPÇÃO DE DIDÁTICA

A expressão *didática* foi desenvolvida na França (por volta de 1700) dentro do estudo da pedagogia, referindo-se a todo tipo de instrução e ensino. Inicialmente uma didática geral tinha como objetivo o ensino, bastando técnicas e métodos. Contudo, as pesquisas e debates, relacionadas à didática são recentes, sobre o que ela de fato representa, seus sentidos, seus conteúdos específicos e seus objetivos. D'Amore(2007, p.19) afirma que "Talvez seja desde 1700, e, sobretudo com as primeiras obras sobre o ensino do latim, que na França começa a fazer-se uso explícito do substantivo 'didática' e do adjetivo 'didático'".

Há anos o estudo da Pedagogia estava fortemente ligado à Filosofia, assim como a Didática à Pedagogia que, com os estudos e demandas, se tornaram disciplinas autônomas nos cursos de formação, como consequência do nascimento das ciências da educação. Com o tempo, constatou-se que a Didática se difere da Pedagogia por considerar de maneira sistemática os conteúdos da disciplina.

Há estudiosos que afirmam ser a Didática parte das ciências da Educação, ou não, que tem como objetivo o estudo dos processos de ensino e aprendizagem, focando ou não disciplinas específicas – especificidade de um objeto de conhecimento. Há ainda estudiosos que afirmam ser a didática uma pedagogia sem a filosofia.

> Com efeito, no caso da Didática, são analisados os procedimentos cognitivos, os 'gestos mentais' dos sujeitos, a emergência de concepções novas, não apenas enquanto produtos dos controles internos que os sujeitos exercem no problema, mas também em função dos controles externos provenientes da situação. Não se trata, pois, de produzir uma teoria psicológica do sujeito diante de um problema matemático pretexto; é necessário progredir na compreensão das condições que tornam possível o encontro do aluno com o problema e a assunção relativa por parte do próprio aluno. (D'Amore, 2007, p.24).

A Didática geral se refere a questões mais pedagógicas, à aprendizagem, ao ensino, presentes na formação de todos os professores. Ela tende a refletir sobre a teoria e a prática do trabalho docente em geral. São perguntas típicas da pesquisa em Didática geral:

1- O que devo saber para tornar o ensino mais efetivo?
2- Como meus alunos aprendem?
3- Como meus alunos acessam o saber?
4- Qual metodologia de ensino devo escolher?
5- Quais instrumentos devo usar para avaliar o processo?

A Didática como disciplina trabalha com questões mais específicas, pois busca explicar o processo de ensino e aprendizagem de uma ciência específica, bem como das ciências com as quais interage. Perguntas típicas dessa didática seriam:

1- O que devo avaliar?
2- Quais conteúdos são fundantes nessa ciência?
3- Como criar situações para melhorar o ensino da disciplina?
4- Como atrair e motivar meu aluno a pensar sobre essa disciplina?
5- Como divulgar ideias para iniciar um conteúdo?

6- Como desenvolver a linguagem técnica da disciplina, não natural em nossos alunos?

7- Como usar a história da disciplina como instrumento didático?

8- Quais conhecimentos devem estar disponíveis para acessar certo saber?

Atualizando a teoria didática, a BNCC de 2018, ressignifica algumas terminologias: considera conteúdos de ensino como objetos de conhecimento e os expressa em habilidades que são organizadas a partir de um modelo que permite identificar encaminhamentos didáticos importantes para as práticas de ensino e sinalizam para estratégias ou estabelecem alguma relação com os saberes didáticos.

Tem-se assistido ao acirramento do debate em torno da dúvida: cabe à escola ensinar conhecimento ou desenvolver competências? O documento oficial brasileiro em sua base curricular, responde:

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. **Requer o desenvolvimento de competências** para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades. (BNCC, 2018, p. 14) (grifo nosso)

As competências são ações *e operações que utilizamos para estabelecer relações com e entre objetos, situações, fenômenos e pessoas que desejamos conhecer*. Caracterizaram-se pela sua generalidade e pela transversalidade, não relacionadas a nenhum conteúdo curricular específico, mas entendidas como indispensáveis à apropriação de qualquer conhecimento e ao desenvolvimento humano. São resultados a serem alcançados nos aspectos mais gerais do desenvolvimento do aluno. Portanto, elas não são, por si mesmas, os conteúdos de ensino, mas sustentam as escolhas a serem feitas.

As habilidades referem-se ao plano imediato do ‘saber fazer’ do aprendiz e indicam mais concretamente ao professor o que deve ser ensinado, em que nível de profundidade e de como deve ser tratado o que será objeto de ensino, de aprendizagem e de avaliação. Adquire-se uma competência quando o conjunto de habilidades associadas a ela é aprendido.

Instaura-se, assim, a relação entre desenvolvimento e as ações didáticas: elas precisam se sustentar no desenvolvimento de habilidades para a formação de sujeitos para as competências mais gerais que garantirão o seu desenvolvimento humano.

Consultando a BNCC sobre o objeto de conhecimento relacionado ao tema, identificamos o seguinte:

Objeto de conhecimento:

- Relações métricas no triângulo retângulo

E as seguintes habilidades:

(EF09MA13). Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14). Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes (BNCC, pág.318)

Pensar nas perguntas apontadas acima, e nas orientações da BNCC, requer conhecimentos de habilidades e competências específicas de certa ciência. O estudo da didática nos mostra que para ensinar certa disciplina não basta sabê-la, é preciso conhecer como o saber se constrói. Isso nos remete a importância da formação docente. Walle (2009) afirma que uma boa didática tem como norte os princípios educativos. São eles:

> 1. Aprender com compreensão se baseia em conectar e organizar o conhecimento ao redor de importantes ideias conceituais.
>
> 2. A aprendizagem deve ser construída a partir do que os estudantes sabem.
>
> 3. O ensino escolar deve aproveitar o conhecimento informal das crianças. (Walle, 2009, p.119).

Sabendo que a didática busca a compreensão do entendimento, é impossível dissociá-la da Epistemologia, sendo essa o estudo da reflexão de como se conhece, se aprende. Com a BNCC, que nos traz as habilidades e objetos de conhecimento a serem estudados e entendidas pelos educadores na busca de um melhor ensino, se faz necessário, cada dia mais, haver informações e interpretações assertivas acerca dos alunos que trabalhamos. Assim, para um bom ensino/aprendizagem vê-se como necessárias intervenções que estejam em função do estudante, ou seja, os alunos devem estar no centro do processo e não o conteúdo.

> Partindo da premissa de que toda Didática supõe uma epistemologia, é preciso admitir que o núcleo do problema didático é o CONHECIMENTO. Temos sido instigados a nos interrogar sobre qual é o objeto de conhecimento de determinada disciplina, pois dele decorre um modo de conhecer e de identificar meios intelectuais para alcançar esse conhecimento. Para se criar melhores condições de como ensinar é preciso saber como se dá o processo de apropriação de conhecimento da área, portanto, trata-se de uma questão epistemológica. Primeiro pensar o objeto de ensino, para poder, com maior clareza e objetividade, saber responder como se ensina. (LEAL, 2019, p.3)

2.1.2- A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Há anos a educação matemática vem passando por mudanças, tanto nos conteúdos a serem ensinados, quanto na forma de ensinar. Segundo Walle (2009), o conhecimento matemático e o conhecimento da forma como alunos aprendem matemática são as principais ferramentas de um bom professor. As crenças do educador sobre o que significa saber e fazer matemática tem forte influência na forma como o professor desenvolve seu trabalho, seja na seleção de tarefas ou nas estratégias educativas. Daí a importância de se entender o que é a Didática da Matemática.

A pesquisa em Didática da Matemática é algo ainda mais recente. Sendo ela uma das tendências da Educação Matemática que visa favorecer as relações entre teoria e prática, dentro de um *sistema didático* em que educador, aluno e saber são inseparáveis. Estudiosos dessa área, como Pais (2001) e D'Amore (2007), apontam que, para a construção de uma boa didática, é preciso conhecer as fontes de influências na construção do saber matemático e compreender as transformações em que os conteúdos matemáticos passam até a forma final que são apresentadas em sala.

Os Elementos de Euclides (escritos há 300 a.C) e o Papiro de Rhind (escritos por volta de 1850 a.C), foram obras destinadas à didática pela forma como os registros foram apresentados. Neles havia uma proposta didática, um percurso. Contudo, no século XX nasceram estudos mais precisos sobre a didática, época quando a escola passa a escolarizar saberes, tornando-os, assim, ensináveis. Nessa época o esforço do professor era o de repetir para se ensinar e aprender. Aquele que aprendia era uma pessoa de privilégio, já as que não aprendiam, justificava-se por não possuir predisposição natural à aprendizagem.

O professor, tendo conhecimentos da evolução das ideias matemáticas, consegue desenvolver uma análise crítica e reflexões científicas diante de saberes que são didáticos. O professor, por exemplo, deve refletir quais são os elementos necessários na síntese cognitiva para formação de um novo conceito. É importante que sejam feitas, constantemente, diagnoses que servirão como ponto de partida para o planejamento das aulas.

2.1.3 - CONCEITOS E OPERAÇÕES DIDÁTICAS FUNDANTES NO ENTORNO DA DIDÁTICA CONTEMPORÂNEA

A seguir são elencadas relações entre cinco desses conceitos (didáticos): *transposição didática, situações didáticas, contrato didático, obstáculos didáticos e efeitos didáticos.*

Uma das funções da didática é selecionar conteúdos, considerados fundantes para a educação escolar, com intenção de torná-lo um saber. Esse saber a ensinar sofrerá transformações adaptativas com o intuído de tornar-se objeto de conhecimento. A esse trabalho denominamos *transposição didática*.

Pais (2001) afirma que:

> A *transposição didática* permite uma visão panorâmica das transformações por que passa o saber matemático, desde sua gênese acadêmica, passando pelas ideias dos autores de livros, por especialistas em educação, responsáveis pela política educacional, pelas interpretações do professor, até chegar no espaço conflituoso da sala de aula e, daí, para o nível intelectual do aluno. (PAIS, 2001, p.111).

O entendimento da transposição dos saberes é algo muito importante de ser compreendido para o desenvolvimento de uma boa didática. Ela está associada à necessidade da aplicação de conhecimentos anteriores para a aprendizagem de um novo conceito. Ou seja, nenhum conceito surge sem a existência de um anterior. O processo operacional de uma nova ideia não existe sem uma base anterior. Essa é a ideia de transposição que permite a produção do conhecimento. Em geral, a transposição didática é tomada como um conjunto de ações transformadoras necessárias para tornar o conhecimento científico, sempre composto de teorias complexas, em um conhecimento que possa ser assimilado pelo aluno, sem que esse perca suas características. Desafios ao professor, porque ele é quem dará esse tratamento especial ao conhecimento e o transformará em algo mais significativo para que seja melhor compreendido.

Uma *situação didática* é formada pelas relações que professor, aluno e saber estabelecem, o que caracteriza a parte viva de uma sala de aula. Juntam-se a eles os objetivos, métodos, recursos didáticos, teorias, dentre outros, que nos permite trabalhar diante da complexidade cognitiva. Assim, por meio da noção de situações didáticas, o professor pode elaborar uma sequência de atividades destinadas a desenvolver certas competências e habilidades.

Dentro de uma *situação didática* espera-se que as intenções pedagógicas sejam explicitadas, visto que o trabalho do professor é planejado. Contudo, ocorrem situações em sala em que não há uma intencionalidade pedagógica por parte do professor, são as *situações adidáticas*. Tais situações superam a ideia de que o professor seja apenas um transmissor de conhecimento. É essa interação entre o didático e o adidático que proporciona o fenômeno cognitivo. A didática da matemática reforça a importância do estudo pautado na resolução de problemas por valorizar as situações adidáticas. A todo tempo os alunos estão pensando, supondo e deduzindo ideias que ocorrem sem o controle do professor. Para o bom funcionamento das situações didáticas tem-se as regras e condições que constituem a noção de *contrato didático.*

Para Brousseau, o contrato didático é constituído por:

> “[...]uma relação que determina, - explicitamente por uma pequena parte, mas, sobretudo implicitamente, - a cada parceiro, professor e aluno, a responsabilidade de gerir aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar contas perante o outro” (BROUSSEAU, 1986, p. 51).

O contrato evita tensão de expectativas, muitas vezes invisível e não verbalizada. Ele é um vínculo entre quem leciona e os que estudam, para o planejamento e a execução de situações de ensino e de aprendizagem, de modo que as ações esperadas de alunos e de professores sejam claras e bem entendidas pelos interlocutores.

Jonnaert (1996) esclarece que:

> “[...] qualquer contrato didático se inscreve no interior da relação didática e que cada um dos sujeitos possui o seu papel de importância e, sendo sempre solidários uns com os outros. Para ele, a função do contrato didático é criar um espaço dialógico entre professor, aluno e saber, sempre estabelecendo um equilíbrio entre esses polos”. (JONNAERT, 1996,s.p).

Os *obstáculos didáticos* são aqueles que dificultam ou bloqueiam o desenvolvimento da aprendizagem do saber escolar. Pode-se citar a formalização precoce do saber escolar com o uso da linguagem matemática carregada de símbolos e códigos, o uso precoce de generalizações, sem se preocupar coma a base conceitual do aluno, a antecipação indevida de conhecimento aceito como válido e a forma como o conhecimento científico é inserido no contexto pedagógico. A linguagem é um dos elementos que afeta o sistema didático, pois está intimamente ligada ao cognitivo.

Existem, também, os *obstáculos pedagógicos*, por exemplo, a forma sintetizada no qual os livros didáticos apresentam conteúdos, além do formalismo incompatível com o momento ou estágio cognitivo dos alunos e, muitas vezes, dificultando a compreensão da tarefa pelo próprio professor. De acordo com Paes (2001) “O interesse em estudar a noção de obstáculo decorre de o fato da mesma permitir identificar as fontes de diversos fatores que levam a aprendizagem a uma situação de inércia e de obstrução.” (p.45).

Os avanços, retrocessos, acertos, erros, dúvidas e certezas fazem parte de todo processo construtivo da aprendizagem. Nesse processo, ao ter contato com um novo conceito, há encontros e desencontros entre o “velho” conhecimento e o saber em construção ou em redescoberta. Nesse cenário esses *obstáculos* interferem no fenômeno cognitivo. PAIS (2001) diz que: “Assim, é preciso entender como ocorre a reorganização intelectual de modo que o novo conhecimento entre em harmonia com os anteriores, sendo esse o momento em que os obstáculos se manifestam”. (p.46).

Ao se estudar (então) o trabalho do professor depara-se com os obstáculos didáticos, que nos levam aos *efeitos didáticos*. Para Pais (2001) os *efeitos didáticos* “(...) resultam de vários aspectos: metodologia de ensino, obstáculos, formação do professor, nível dos alunos, dos conceitos, entre outros.” 2001, p.89).

Os *efeitos didáticos* são situações que acontecem em sala como consequência de vários fatores, como, por exemplo, a condução da situação didática pelo professor. Essa situação, quando bem trabalhada pode ser decisiva para uma aprendizagem. Tais efeitos, podem então, ser positivos ou negativos. Uma situação, ou *efeito didático*, muito frequente no ensino da matemática é a do professor se deparar com um aluno com alto nível de dificuldade e, na inquietação de saná-la, termina por fornecer a resolução por completo do problema, impedindo a participação do aluno. O importante é que o professor, ao ser desafiado, tome decisões para tentar superar as dificuldades, uma delas seria criar situações que permita ao aluno desenvolver o que precisa ser desenvolvido. A escolha de uma metodologia de ensino interfere grandemente na postura do professor e do aluno frente ao conhecimento. Uma metodologia mais construtivista, por exemplo, propõe uma participação mais ativa do aluno em sala. A utilização de analogias entre conteúdos já estudados e os novos conceitos podem ser recursos didáticos que provocam efeitos didáticos eficientes.

Cabe à didática o desafio de conduzir os trabalhos escolares, estruturando condições para que se chegue aos conceitos e saberes previstos. Para os professores, fica o desafio de estruturar uma didática mais significativa, por meio da criação de ambientes mais próximos à compreensão do aluno, que estimulem a criatividade, a autonomia e a produção do conhecimento. Nesse contexto entra a metodologia, auxiliando na elaboração pedagógica de situações suficientemente diversificadas para permitir a formação de conceitos.

Em se tratando do ensino e aprendizagem matemática há uma predisposição tradicional em valorizar a memorização de regras e fórmulas, os saberes procedimentais. Os problemas se reduzem a simples reprodução de modelos, ao invés de ser um gatilho para a construção do conhecimento. Nesse contexto, a didática se depara tanto com a dificuldade do aluno em compreender como do professor que não consegue dar uma continuidade significativa ao processo de ensino. A perda do controle do processo de ensino pode estar ligada à formação do professor, algo que agrava ainda mais a situação. É preciso compreender que o bom professor não é aquele que domina exclusivamente o conteúdo, mas sim o que estuda e valoriza os processos de construção do conhecimento.

> Uma imagem ruim da Matemática é nociva para o próprio professor. Aulas não concluídas, repetitivas, enfadonhas, cansativas, têm consequências negativas nos alunos e, portanto, sobre todos os outros componentes do mundo da escola, contribuindo em dar, ao próprio professor, uma imagem negativa da Matemática, bem como uma imagem negativa de si mesmo enquanto professor, tornando, portanto, negativo o trabalho didático. (D’AMORE, 2007, p.38).

2.2 AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS EM SALA DE AULA

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que traz o detalhamento de conteúdos e competências específicas de cada área de conhecimento e disciplina. Ao se analisar a BNCC, constata-se o quanto é recomendável o trabalho investigativo e a resolução de problemas no ensino da matemática.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BNCC, 2018, p.266)

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (BNCC,2018, p.266)

Nos currículos de numerosos países, inclusive do Brasil, as atividades investigativas são a aposta em uma nova modalidade de conduzir os alunos em um processo de ensino -aprendizagem mais instigador e motivador, com destaque para o ensino de Matemática. Daí a importância em compreendê-las. Segundo Walle (2009), pesquisas apontam que países com alto desempenho educacional apresentam uso constante de atividades investigativas e valorizam a compreensão conceitual específica da matemática. Para ele, a maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da resolução de problemas. Afirma, também, que o ensino centrado no professor, numa abordagem do tipo “mostrar e explicar”, apoiados por livros tradicionais ainda estão muito presentes em alguns países.

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa reposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. (Ponte, Brocardo, Oliveira, 2005, p.9).

Várias teorias contribuíram para a construção desse nosso olhar, tais como o construtivismo piagetiano e o socio interacionismo de Vygotsky. Na teoria do construtivismo as crianças devem ser participantes ativas no desenvolvimento da sua própria compreensão, ou seja, elas constroem seu próprio conhecimento. Para que haja compreensão e construção de conhecimento é necessário haver pensamento reflexivo e ativo sobre uma ideia. Walle (2009) afirma que o pensamento reflexivo significa peneirar as ideias já existentes para encontrar aquelas que pareçam ser as mais úteis ao dar significado às novas. Já a compreensão pode ser definida como uma medida da qualidade e da quantidade de conexões que uma ideia tem com as já existentes. Essa visão vai ao encontro do trabalho desenvolvido na investigação matemática.

> No caso ideal em que a aprendizagem acontece com sucesso, os conhecimentos anteriores são adicionados uns aos outros e incorporados à nova situação. Assim, ocorre uma parte do processo cognitivo que consiste no conjunto de procedimentos de raciocínio desenvolvidos pelo sujeito para coordenar as adaptações necessárias para que informações precedentes sejam incorporadas em uma situação de aprendizagem, sintetizando o novo conhecimento. (PAIS, 2001, p.53).

A investigação matemática geralmente desenvolve-se em torno de um ou mais problemas em que o grande ganho não está no resultado final, mas no processo resolutivo. As descobertas, o raciocínio e a abordagem do aluno se revelam mais importantes que a própria solução final. Esse processo resolutivo diferencia um problema de um exercício. Nos problemas os alunos não têm um método que permita a resolução imediata como nos exercícios que trabalham com o “passo a passo” já conhecidos por eles. Daí a importância do envolvimento do aluno nas investigações, visto que ela só ocorre quando o aluno está disposto a pensar, a mobilizar seus recursos cognitivos para atingir o objetivo. Na investigação, o aluno é convidado a trabalhar como um matemático.

As aulas investigativas são pretextos para gerar aulas agradáveis, de questionamentos e de levantamento de dúvida, algo não habitual nas aulas tradicionais de matemática. A resolução de problemas é hoje considerada o motor propulsor do saber escolar da matemática. Pais (2001, p.57) afirma ser ela “*o contexto ideal para que os alunos desenvolvam sua compreensão dos conceitos e teoremas matemáticos*”. A resolução de problemas é um passo inicial para se alcançar o conhecimento. Trata-se de uma metodologia de ensino que busca motivar os alunos para o estudo da Matemática. Seu processo de ensino e aprendizagem é desenvolvido por meio de desafios e problemas de situações mais abertas que possam ser explorados e não somente resolvidas. A metodologia da resolução de problemas desenvolve a criatividade, o raciocínio lógico, o pensamento ativo e a reflexão, enfim, o modo de pensar de um matemático. Por meio dela o aluno tem a oportunidade de gerir procedimentos, na mobilização de conhecimentos já adquiridos, com intuído de obter respostas a situações variáveis.

> Ao enfatizar a função pedagógica dos problemas, o conhecimento passa a ser concebido como uma sucessão de adaptações que o aluno realiza sob a influência de situações que ele vivencia na escola e na vida cotidiana. Em cada momento, entra em cena não só conhecimentos anteriores, mas também a capacidade de coordenar e adaptar essas informações em face de uma nova situação. (PAIS, 2001, p.53).

Walle (2009) relata a importância desse tipo de trabalho ao afirmar que existem padrões de processo que se referem aos processos matemáticos que todos os alunos devem desenvolver usando seus conhecimentos matemáticos. Para ele o ensino da matemática deve refletir esses padrões. São eles: resolução de problemas, argumentação e provas, comunicação, conexões e representação, todos presentes em uma atividade investigativa.

O desenrolar de uma investigação matemática pode ocupar um número de aulas maior. Na prática Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) afirmam a importância das três fases a seguir:

> 1º) Introdução da tarefa por parte do professor, sendo oral ou impressa.
>
> 2º) Realização da tarefa, podendo ocorrer individualmente, em dupla, grupos ou a turma toda.
>
> 3º) Discussão dos resultados em que os alunos relatam a turma o trabalho realizado. (PONTE, BROCADO e OLIVEIRA (2005, p.21).

Na primeira fase, é de fundamental importância que o professor oriente o aluno quanto ao trabalho, incluindo uma leitura conjunta do enunciado. É importante que se garanta que todos os alunos compreenderam a essência do trabalho, caso contrário, todo o processo ficará comprometido. Essa fase introdutória não pode ser muito longa, para não correr o risco de uma desmotivação por parte do aluno e nem para consumir um tempo precioso que deverá ser gasto na investigação.

Na segunda fase, é importante que o professor crie um ambiente favorável para a atividade. É essencial que o aluno se sinta motivado e vontade para trabalhar, acima de tudo, que ele perceba que suas ideias são respeitadas e são importantes para a sua aprendizagem. Nessa fase o professor deverá acompanhar o trabalho que está sendo desenvolvido pelos alunos e apoiá-los quando necessário. Deverá também ser sensível em relação aos sinais emitidos pelos alunos, como, por exemplo, de cansaço, abatimento, dentre outros.

Na terceira fase, os alunos partilham o trabalho realizado, onde há uma sistematização das principais ideias e uma reflexão geral sobre o trabalho desenvolvido. Nesse momento há confrontos de ideias e estratégias, o professor entra como um mediador que deve estimular os alunos a participaram, a intervir nas falas dos colegas e facilitar o entendimento do que é uma demonstração matemática. Sem esse momento, toda o sentido da investigação pode se perder.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p.21) afirmam que a realização de uma investigação envolve quatro momentos principais que podem ocorrer simultaneamente.

1º) Exploração e formulação de questões:

Nesse momento, o aluno reconhece e compreende a situação problema, a explora e formula questões. Geralmente os alunos gastam mais tempo nessa etapa, principalmente quando é desenvolvido por um grupo de alunos, por surgirem vários caminhos para a exploração da situação. Nessa etapa, durante as discussões, quando o professor observar que essas estão sendo infrutíferas, deverá fazer uma intervenção.

2º). Conjecturas:

Nesse momento, o aluno organiza os dados emitidos e formula conjecturas. Tais conjecturas podem ser resultados da observação direta ou da manipulação dos dados ou ainda das analogias com outras conjecturas. Algumas conjecturas tendem a ficar apenas na memória dos alunos, não sendo verbalizadas, o que ressalta a importância de o registro ser algo incentivado. Ao registrar, os alunos elaboram melhor suas ideias e aumentam seu entendimento sobre o objeto de conhecimento. A escrita acaba por puxar operações mentais de verbalização, sendo esse dispositivo um dos mais importantes para a organização do pensamento lógico.

3º) Testes e reformulação:

Nesse momento, os alunos realizam testes e aperfeiçoam as conjecturas. Geralmente é um momento tranquilo para os alunos (o teste das conjecturas). O que há de ser observado é que, para muitos alunos, basta testar e fazer a verificação em um número reduzido de casos para tirar conclusões. Nesse caso, o professor pode estimular o trabalho com o contraexemplo. Para Walle (2009) o raciocínio é o pensamento lógico que ajuda o aluno a decidir se e por que suas respostas fazem sentido. Nessa fase ressalta-se a importância do registro, em que os alunos se preocupam em escrever de forma mais detalhadas seus resultados. O registro é, sem dúvida, não só um desafio adicional nas aulas de matemática, mas uma estratégia extremamente valiosa para alunos e para professores.

4º) Justificação e avaliação:

Nesse momento, o aluno justifica suas conjecturas, argumenta, demonstra e avalia o trabalho realizado. Para Walle (2009) justificar as respostas é um processo que aumenta a compreensão conceitual além de fornecer mais informações que a própria resposta em si, sendo a justificação uma etapa fundamental para aluno chegar à compreensão desejada. É comum alguns alunos nomearem e transformarem suas conjecturas em conclusões, não passando pelo processo de justificação. Com o uso mais intenso dos trabalhos investigativos, os alunos passam a compreender melhor a necessidade de justificar suas afirmações. Eles percebem, ao longo dos trabalhos, que seus argumentos vão se tornando cada vez mais aprimorados, o que lhes permitem melhorar, com o tempo, a realização das provas matemáticas. Os registros permitem aos alunos comunicar mais facilmente suas ideias, pensamentos e resultados no momento das discussões em turma, algo importante de se trabalhar: o comunicar matematicamente. Ao professor, eles permitem avaliar a atividade como um todo e, por grupo, o desempenho dos alunos e a obter subsídios para elaborar as próximas aulas.

As investigações, como qualquer outra atividade, precisam ser avaliadas. Como em toda avaliação, um dos objetivos é permitir ao professor verificar se os alunos estão progredindo de acordo com suas expectativas, para poder validar ou repensar o trabalho desenvolvido. Ela deve colaborar na ampliação da aprendizagem do estudante e na tomada de decisões educacionais por parte do professor. Walle (2009) traz o esquema a seguir com os quatro objetivos da avaliação e seus resultados esperados.

Quadro 1 – Objetivos da Avaliação

Fonte: Imagem extraída de WALLE (2009 p. 101).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p.21) citam três maneiras de avaliar uma investigação matemática e os alunos envolvidos na tarefa.

1º) Relatórios escritos

São documentos produzidos pelos alunos que permitem ao professor conhecer todo o processo investigativo e suas conclusões. Além de registrarem o passo a passo desenvolvido, os alunos também registram o que aprenderam, após realizar o trabalho, seus interesses, aspectos de maior e menor dificuldade, dentre outros. Nas primeiras investigações os relatórios tendem a apresentar poucos detalhes, com o passar do tempo eles tendem a se aperfeiçoar. Para facilitar o desenvolvimento desses relatórios, é sugerido que o professor indique ao aluno o que eles devem conter, o que é esperado e o que será valorizado. Nesses relatórios é possível avaliar individualmente os alunos e a turma como um todo.

Walle (2009) cita Burns ao valorizar o processo de registro do aluno.

> O processo de escrita requer reunir, organizar e esclarecer pensamentos. Exige descobrir o que você sabe e o que não sabe. Ela demanda claramente um pensamento reflexivo. Da mesma forma, o fazer matemática depende de reunir, organizar e esclarecer pensamentos, descobrir o que você sabe e o que não sabe e pensar com clareza. Embora a representação final de uma busca matemática pareça muito diferente da produção final de um esforço de escrita, a jornada mental é, em basicamente, a mesma - atribuir significado a uma ideia e apresentá-la efetivamente. (WALLE, 2009,p.108).

2º) Observação informal

A observação informal deve acontecer tanto no decorrer da investigação, ao analisar o que os alunos estão fazendo e a forma como pensam, quanto na fase da apresentação. Nela, o professor pode avaliar a disposição dos alunos frente à matemática. É uma forma natural de avaliá-los, que contribui para as necessárias intervenções do professor.

3º) Apresentações orais

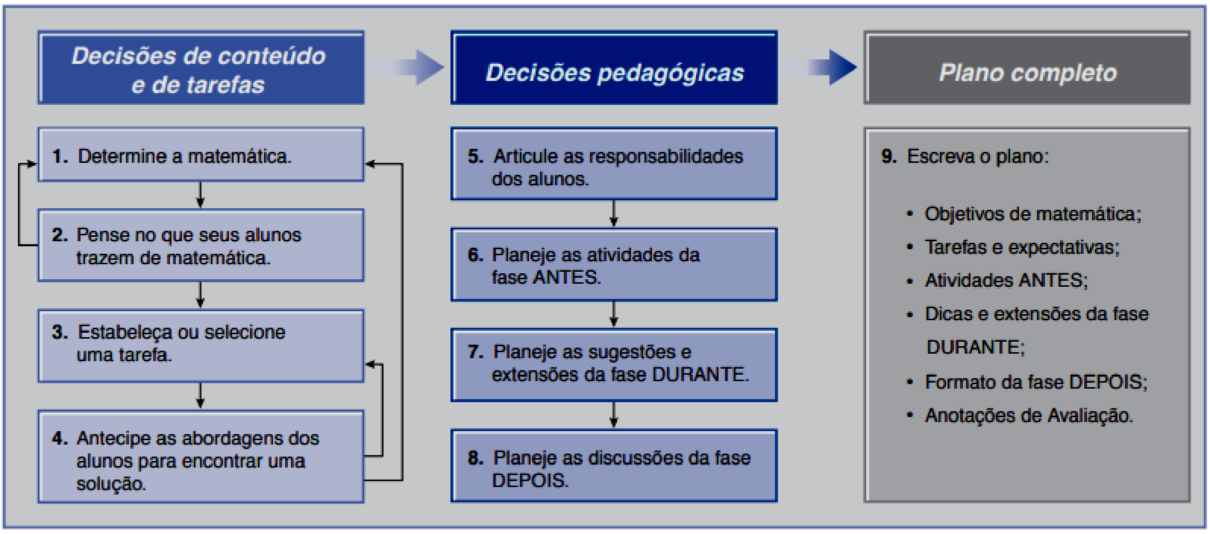
As apresentações orais, como já foi relatado, acontecem no fechamento do trabalho, quando os alunos expõem ao professor e aos colegas o trabalho desenvolvido.

O papel do professor nas aulas investigativas é de extrema importância. Sua atuação nessas aulas é bem diferente se comparar com as aulas convencionais que está acostumado a vivenciar. É necessário que ele garanta o fluxo da investigação, o desenvolvimento da autonomia dos alunos e a aprendizagem matemática. Uma postura mais interrogativa simboliza que o papel do professor não é somente validar, mas, principalmente, de apoiar o trabalho do aluno. O professor deve propor e facilitar conexões entre conceitos matemáticos e até mesmo não matemáticos durante a atividade, sendo cuidadoso com as necessidades individuais dos alunos e sempre gerenciando as questões didáticas. Na elaboração de uma investigação o professor deve ser cauteloso, buscando propor sempre situações que seja verdadeiramente um desafio para os alunos, garantindo que eles tenham acesso a conhecimentos para resolvê-los. Nas aulas tradicionais, os alunos estão mais acostumados a questionar do que serem questionados, algo a ser reelaborado pelo professor na investigação. No decorrer do processo para facilitar a avaliação final é recomendável que o professor faça registros de como está sendo o desenrolar do trabalho. Ele poderá fazer perguntas e pedir explicações aos alunos para fazer tal registro. O professor, também, deverá organizar o tempo, tanto para estendê-lo, quanto para reduzi-lo em certa etapa da investigação. É necessário que haja uma predisposição e humildade do professor ao ouvir os alunos e pensar em suas conjecturas, pois é comum, neste processo, o aluno formular conjecturas ainda não conhecidas por ele.

> A exploração antecipada da tarefa e a planificação de como o trabalho irá decorrer na sala de aula, são aspectos a que o professor deve dar devida atenção. No entanto, como referimos, essas aulas caracterizam-se por uma grande margem de imprevisibilidade, exigindo dele uma grande flexibilidade para lidar com as situações novas que, com grande probabilidade, irão surgir. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2005, p.53)

Até aqui destacou-se o que é uma atividade investigativa, as mudanças que ela exige em sala de aula e os papéis do professor e do aluno. Faltou algo importante ao professor, o como planejar uma aula baseada na resolução de problemas. Walle (2009) apresenta passos para tal planejamento.

Quadro 2 – Planejamento de uma aula



Fonte**:** Imagem extraída de WALLE (2009 p. 83).

O primeiro passo, como aponta o diagrama, é determinar o que queremos que nossos alunos aprendam com aquela aula. Para tanto é preciso ter consciência do que eles sabem e compreendem para então elaborar a tarefa. Lembrado que essa tarefa ou sequência de tarefas não precisa ser superelaboradas para serem boas. O importante é que os alunos se sintam motivados e capazes para trabalhar com aquela situação. Em algumas situações talvez seja necessário preparar acomodações ou modificações nas tarefas para alguns alunos.

3. A GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

A Geometria é a ciência que estuda as propriedades das figuras geométricas com um dos objetivos de medir. Geometria é uma palavra de origem grega que significa “medição da terra”. Considera-se que a geometria nasceu junto com as primeiras civilizações, quando o homem percebeu e se interessou pelas diferentes formas apresentadas pela natureza, como a lua, o sol, os frutos, as pétalas de flores, as teias de aranha, dentre outros. Assim, o homem foi reconhecendo e comparando as formas e observando que a natureza é repleta de padrões. A geometria foi uma das primeiras aplicações da matemática nas antigas civilizações, quando se trabalhava com distâncias, áreas e volumes diante das necessidades do povo.

Os primeiros cálculos algébricos se iniciaram no desenvolvimento da construção de monumentos, artefatos religiosos e demarcação de terras.

Para muitos pesquisadores, o vale do Rio Nilo, no antigo Egito, foi o local em que a geometria começou a ser mais científica. Devido aos períodos de cheias desse rio, fez-se necessário desenvolver métodos para calcular áreas e volumes. Muitos dos estudos desenvolvidos pelos egípcios ficaram em papiros, em que se observou o quanto eles se preocupavam com as técnicas.

Na Mesopotâmia encontraram-se os mais antigos registros de matemática em tábulas que apresentam cálculos de áreas de várias figuras planas e o volume do paralelepípedo retângulo. Essa região é também conhecida como o berço do desenvolvimento de habilidades ligados à engenharia de drenagem, à irrigação e à construção de edifícios.

Diferente dos egípcios que se utilizavam de um conhecimento geométrico aparentemente empírico e indutivo, em que as experiências eram tidas como critério de verdade, os gregos, buscavam a “razão” como base para análises. Essa mudança de pensamento, que mostra o desencontro entre ciência e senso comum, levou os Gregos a perceberam que o método experimental e indutivo não era tão satisfatório assim para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Isso demonstra que os povos daquela época já apresentavam uma nova concepção da matemática como ciência. Nesse contexto, foram utilizadas, pela primeira vez, demonstrações em Geometria.

Platão, discípulo de Sócrates, acreditava que a Matemática era a fonte para a compreensão do universo. Sua academia, em Atenas no século IV, era o centro matemático do mundo. Lá, desenvolveram-se grandes estudos e a academia incentivou o desenvolvimento do conhecimento matemático. Platão foi um dos responsáveis pela introdução da Geometria no currículo de educação.

Hipócrates de Quio foi o primeiro matemático a tentar organizar, de forma lógica, a geometria, até então desenvolvida num sistema dedutivo. Mas foi com Euclides de Alexandria, por volta do século III a. C, que a geometria dedutiva teria alcançado seu ápice. Acredita-se que Euclides tenha estudado com os discípulos de Platão. Sua grande obra *Os Elementos*, é composta por 13 livros com problemas e teoremas, sendo que os 6 primeiros livros abordam a Geometria plana elementar, os 3 próximos abordam a teoria dos números, o décimo livro trata (-se) sobre incomensuráveis e os 3 últimos livros abordam a geometria espacial. Nesta coleção encontramos os principais estudos desenvolvidos pelos antecessores de Euclides, com um caráter mais axiomático-dedutivo. Nos seus trabalhos, Euclides inseriu uma base lógica bem definida, por meio de conceitos geométricos de um alto nível de abstração e de complexidade. Conforme cita Gazire (2000):

> A Geometria euclidiana foi rigorosamente construída, e como tal, converteu-se em modelo para toda a Matemática. Os treze livros que compõem os Elementos de Euclides sintetizam todo o conhecimento matemático até então acumulado. Com essa construção, Os Elementos se tornaram o sonho metodológico de toda a ciência. De fato, o pensamento científico em busca de uma sistematização encontrou no método axiomático o modelo perfeito. (GAZIRE, 2000, p. 82).

Mudou-se, então, a forma de se pensar a Geometria. A partir disso, deu-se origem a uma geometria mais sistematizada, trazendo o rigor para toda a área da matemática. Nesse contexto, os matemáticos daquela época foram obrigados a estudar melhor os fundamentos da matemática. Assim, surge, aos poucos, a geometria analítica de Descartes, que foi fundamentando a matemática com base nos números. Houve, então, um grande crescimento da Aritmética e o aparecimento de novas linguagens.

No século XX houve grande ênfase nos estudos de duas características de geometria: as abstrações e a análise das estruturas e modelos. Com as várias transformações que a matemática vinha passando, os interessados por seu ensino viram nesse contexto uma oportunidade para adaptar tais características ao ensino. Grupos de estudiosos foram se formando com a intenção de reformular a matemática escolar. Dava-se início ao Movimento da Matemática Moderna (MMM) que influenciou diretamente o ensino da Geometria.

Tal movimento buscou aproximar a matemática desenvolvida na escola à matemática produzida pelos pesquisadores. Foram priorizadas, então, as estruturas algébricas, a teoria dos conjuntos, a topologia, as transformações geométricas, entre outras. Ao mesmo tempo que o ensino se modificava em relação às nomenclaturas e aos rigores, ocorria, também, o abrandamento na exigência de se demonstrar teoremas. Aconteceu que, muitos professores, com o passar do tempo, começaram a não fazer mais demonstrações, quase um abandono da geometria. Algumas pesquisas apontam o esvaziamento do ensino da Geometria após o MMM, o que levou ao surgimento de propostas de ensino com o intuito de reverter tal situação.

Hoje, observa-se que a busca pela retomada à geometria não trouxe de volta a uniformidade nas abordagens da clássica Geometria Euclidiana, mas preservou o estudo dos conceitos e propriedades fundamentais próprias dessa geometria, inicialmente em seus aspectos intuitivos e experimentais para, depois, chegar às deduções. As mudanças começaram a ser percebidos nos livros didáticos. Muitos autores procuraram algebrizar a geometria com intuito de torná-la mais eficaz quanto às generalizações. Considerando o ensino básico, todas essas abordagens se tornaram inadequadas para o estudo inicial de geometria. Todas essas mudanças provocaram inquietações em muitos professores que foram, cada vez mais, apresentando dificuldades na forma de abordar tais conhecimentos.

> O documento Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1997) traz que as mudanças provocadas pelo MMM ainda permanecem no ensino da matemática. São algumas delas,
>
> [...] a insistência no trabalho com a linguagem da teoria dos conjuntos nas séries iniciais, a formalização precoce de conceitos, o predomínio absoluto da álgebra nas séries finais e as poucas aplicações práticas da Matemática no ensino fundamental. (BRASIL, 1997, p.21).

Como um documento norteador da educação básica, o PCN, com a intenção de fazer a geometria tomar seu devido espaço no ensino, sistematizou as principais competências e habilidades a serem desenvolvidas na educação básica. Apesar disso, percebeu-se que a geometria seguiu sendo ensinada com rigor, axiomas e postulados de forma exagerada. Além disso, GAZIRE (2000) afirma que:

> Frequentemente, a geometria é completamente ignorada, ou, então, apenas alguns itens ligados a ela são incluídos. Nesse caso, as questões tendem a limitar-se a certos fatos sobre figuras simples e suas propriedades e a abordagem é relativamente pobre. (Gazire, 2000, p.35)

Hoje, o ensino da geometria, se comparado há décadas, como se viu anteriormente, tem sido mais valorizado. Existe um esforço para que haja uma valorização das questões relativas à construção dos conceitos geométricos de forma que os alunos possam raciocinar sobre eles.

A geometria tem dois grandes objetivos: o desenvolvimento do senso espacial/raciocínio geométrico e do conteúdo geométrico. Para Walle (2009) o senso espacial está ligado à intuição ou à sensibilidade sobre as formas e as relações entre elas, incluindo habilidades para visualização mental. Quanto aos conteúdos geométricos, tem-se, como objetivo, a aprendizagem dos temas: formas e propriedades, transformações, localização e visualização. Esses quatro temas aparecem diluídos no currículo de todos os anos.

Do ponto de vista do processamento mental, os alunos não pensam da mesma forma, nem no mesmo ritmo e podem também não estar em um mesmo nível de pensamento geométrico. Mas, todos são capazes de progredir no desenvolvimento das habilidades de pensar e de raciocinar em contextos geométricos. Walle (2009) cita que o casal Van Hiele que, em 1959, desenvolveu uma teoria de níveis que descreve os processos de pensamento usados no contexto geométrico. São eles:

Nível 0 - visualização

Nível 1 - análise

Nível 2 - dedução informal

Nível 3 - dedução

Nível 4 - rigor

Esses níveis evoluem da visualização, onde a aparência da forma é quem a define, ao rigor, onde há forte análise dos sistemas dedutivos axiomáticos. Nessa evolução, os objetos de pensamento vão gradativamente se ampliando. No nível 0 eles são as formas e o que elas parecem. No nível 1 são as classes de formas, mais do que as formas individuais. No nível 2 são as propriedades das formas. No nível 3 são as relações entre as propriedades dos objetos geométricos. No nível 4 são os sistemas dedutivos axiomáticos para a geometria. Apesar de não haver uma idade certa para cada nível, Walle (2009) afirma que, em geral, poucos alunos do 7° e 8° anos terão chegado ao nível 2, mas cabe sempre ao professor fazê-los caminhar para essa direção. O nível 4 geralmente é mais desenvolvido no ensino superior.

Sendo estes níveis sequenciais, tem-se que os alunos, obrigatoriamente, deverão passar por todos eles. O que permite a passagem de nível são as experiências dos alunos com a geometria. Cabe ao professor ensinar de forma a respeitar a linguagem do aluno, caso contrário haverá grande falha na comunicação, o que impedirá a aprendizagem. Ou seja, o ensino deve acontecer respeitando o nível de pensamento do aluno. Como não existem testes que possam identificar os níveis em que se encontram os alunos, cresce aqui a importância fundamental das observações do professor sobre as reações e a manifestações dos alunos, durante a condução de atividades.

O pensamento geométrico sendo construído a partir das experiências vividas pelos alunos traz ao professor a reponsabilidade de criar e recriar condições favoráveis para o ensino e a aprendizagem. Pais (1996) afirma que há quatro elementos fundamentais que influenciam no processo de ensino e aprendizagem da

Geometria: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental. O objeto, o desenho e a imagem mental são representações dos conceitos geométricos.

- O objeto: refere-se a modelos ou materiais didáticos.
- O desenho: é uma forma de representação; é uma ilustração dos conceitos.
- A imagem mental: é quando a pessoa é capaz de descrever as propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência deles.

Ao analisar os livros didáticos, até então adotados pelas escolas onde trabalhei, percebi que o conteúdo Relações Métricas nos Triângulos Retângulos é apresentado, mantendo o "padrão tradicional" de começar com uma explicação do conteúdo, geralmente seguido de questões resolvidas, que indicam o passo a passo de como os alunos deverão fazer os exercícios que serão apresentados logo na sequência. O preocupante é que os livros ainda são vistos como algo tão significativo que influenciam fortemente o ensino. Nesse contexto, a maioria dos professores orienta os alunos a se guiarem pelo material didático que conduzem, em sua maioria, ao uso de fórmulas de uma maneira bastante mecânica. Os livros passam a ser, nesse contexto, o foco de ensino, ao invés de ser um dos recursos pedagógicos disponíveis em sala de aula, como apoio didático coerente ao aluno a ao professor no processo de ensinar e de aprender.

O que se observa é que, quando o professor dá a definição formal e trabalha com exercícios dados por fórmulas, acaba por propiciar ao aluno um conceito restrito do conteúdo, enquanto que o conceito fica inativo na estrutura cognitiva. Tal situação incapacita o aluno de usar as relações métricas em contextos mais amplos e problematizados.

O fato da maioria dos professores não terem ainda uma formação voltada para essa nova prática, ou seja, segundo a abordagem da resolução de problemas, leva à reprodução de atividades constantes baseadas em livros ainda extremamente tradicionais. Isso é validado ao pensar que publicação de livros é comércio, logo, o foco está nas vendas, depende da aceitação do público. A questão é: por que autores irão propor tarefas que não serão acolhidas pelos professores? E mais: qual o interesse de determinados autores e de determinadas editoras? Seriam, os autores mesmos, destituídos desse saber?

Nesse contexto, o enfoque das atividades propostas está no resultado, o que delega ao professor o papel de constatar o acerto ou erro na questão e, aos aprendizes, cabe o trabalho de encontrar as respostas que o professor já tem. Resulta em uma matemática impregnada de regras, que é transmitida pelo professor. Os exercícios repetitivos de conteúdos isolados não resultam em compreensão. A curto prazo, eles produzem bons resultados nos testes, mas os alunos seguem sem a compreensão do conteúdo.

Walle (2009) afirma que:

> Esta visão “siga as regras”, “dominada pelos cálculos” e “orientada para respostas” da matemática é uma distorção brutal da real essência da matemática. Ela não pode ser muito excitante. Algumas crianças são boas em aprender regras e prosperam bem nas séries seguintes. Mas, estes estudantes não são, necessariamente, os melhores pensadores em sala de aula. O sistema tradicional recompensa a aprendizagem de regras, mas oferece poucas oportunidades para realmente fazer matemática. (Walle, 2009, p.32).

Os exercícios de fixação, que se referem a repetições, requerem que as habilidades e os conceitos já tenham sido apropriados pelos alunos antes de sua aplicação, caso contrário, proporcionará uma falsa aparência de compreensão. Eles não são atividades que levam à reflexão, seu enfoque está nas habilidades processuais, ou seja, eles ajudam no que diz respeito à agilidade. O que os alunos têm é uma habilidade temporária de reproduzir procedimentos que são apresentados a eles.

> Embora os exercícios possam fornecer um pouco de sucesso a curto prazo, uma reflexão honesta sugere que no final das contas os exercícios têm pouco efeito. O que essas crianças aprendem com mais exercícios é simples: “Eu não sou bom em matemática. Eu não gosto de matemática. A matemática é apenas fórmulas e regras”. (Walle, 2009, p.90).

É importante pensar que a matemática, sendo uma ciência, tem como objetivo compreender e dar significado às coisas. Cabe a ela descobrir e explorar regularidades para dar sentido aos processos, isso é fazer matemática. É interessante pensar que quando os cientistas exploram novas ideias que lhes parecem promissoras, eles não seguem instruções às cegas e sim, baseiam-se em fontes, teorias e experiências. Os estudantes podem, com os exercícios de repetições, ter uma visão deturpada da matemática, visto que são obrigados a repetir constantemente habilidade processuais. Há sim, espaço para tais exercícios, mas há de se considerar a frequência e a quantidade em que são trabalhados. É de fundamental importância que primeiro se construa o conceito para, depois, aplicá-los.

Walle (2009) confirma essa ideia ao afirmar que "Os estudantes que aprendem ideias conceituais de uma maneira relacional e que aprendem os processos de fazer matemática sempre terão bons resultados em testes, independente do formato ou dos objetivos específicos." (p.32).

Portanto, as orientações advindas de pesquisadores com os quais aqui dialogamos evidenciam o quanto é importante que os alunos tenham acesso a metodologias que desenvolvam as intuições e as hipóteses dos alunos, por meio de atividades experimentais para desenvolver com os alunos, de fato, o conhecimento geométrico. Nesse contexto, destaca-se a importância de os alunos terem acesso à manipulação de objetos, sendo ela uma atividade intelectual para construir os conceitos geométricos. O principal desafio ao elaborar atividades é estabelecer relação entre a prática e a teoria, entre o concreto e o abstrato, de forma a levar o aluno a pensar geometricamente.

4. O PERCURSO DA PESQUISA

4.1 O CONTEXTO DA PESQUISA

A sequência de tarefas elaborada foi aplicada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II, de uma escola da rede particular de ensino de Belo Horizonte. A escolha dos alunos foi feita considerando o envolvimento e a responsabilidade demonstrados diante os estudos, não sendo considerada a facilidade com aprendizagem matemática, nem o gostar da disciplina. O convite (ANEXO 1) para um encontro, feito por meio de uma videochamada, para a apresentação da proposta de trabalho, enviada por e-mail a 35 dos 122 alunos do 9º ano.

Destes 35 alunos que receberam o e-mail, vinte compareceram (20) ao encontro. Após explicação de como seria o desenvolvimento do trabalho, 15 alunos (12 meninas e 3 meninos) se mostraram bastante interessados e disponíveis a participar. Os outros 5 alunos alegaram não poder participar, por vários motivos, dentre eles:

- falta de tempo por estarem fazendo cursinho preparatório para colégios federais de EM,

- excesso de atividades exigidas pela escola,

- crises de ansiedade que poderiam se intensificar ao assumir um novo compromisso.

Dos 15 alunos que iniciaram o trabalho, 10 foram até o final (9 meninas e 1 menino). Os outros 5 alunos que não conseguiram concluir, justificaram o abandono ao excesso de atividades da escola.

Para facilitar a comunicação, foi criado um grupo no *WhatsApp* com todos os participantes da pesquisa. Através dele, as tarefas eram enviadas em PDF aos alunos que retornavam as resoluções por meio de fotos. O trabalho foi realizado individualmente e os alunos foram nomeados pelas letras do alfabeto, de A até J. Como combinado com a coordenação da escola, devido a diversos fatores que estavam interferindo no cotidiano dos alunos em decorrência da pandemia do Covid-19, foi enviada apenas uma tarefa por semana.

As tarefas foram enviadas nas seguintes datas:

Quadro 3 – Envio de Tarefas

Tarefa	**Data**	**Conteúdo trabalhado**
1ª tarefa	22/09/2020	Investigando a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer

2ª tarefa	29/09/2020	Investigando os triângulos quanto aos lados e ângulos
3ª tarefa	06/10/2020	Investigando o conceito de Semelhança de Polígonos
4ª tarefa	20/10/2020	Investigando o conceito de Semelhança de Triângulos
5ª tarefa	27/10/2020	Investigando o Teorema de Pitágoras
6ª tarefa	02/11/2020	Investigando as relações métricas do triângulo retângulo
7ª tarefa	04/11/2020	Atividades - As relações métricas do triângulo retângulo

Fonte: Dados da pesquisa.

4.2 A REALIZAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida em quatro fases. São elas:

a) A revisão bibliográfica, documental e a construção do quadro teórico

Para iniciar a pesquisa, buscou-se conhecer vários registros que relatavam a importância da didática geral e especificamente da matemática, assim como os conceitos didáticos de *transposição didática, situações didáticas, contrato didático, obstáculos didáticos e efeitos didáticos*. Nesse sentido, apoia-se em D'Amore (2007), Walle, (2009) e Pais (2001). Em seguida buscou-se compreender os estudos sobre as investigações matemáticas, vista como uma prática didático-pedagógica. Recorreu-se à Base Nacional Comum Curricular (2019), Ponte, Brocardo, Oliveira

(2005), Pais (2001) e Walle (2009). Para finalizar, foi feito um breve levantamento sobre a história da geometria e sobre seu ensino/aprendizagem, dando destaque ao desenvolvimento do pensamento geométrico. Apoiou-se em Gazire (2000), Walle (2009), Pais (1996), Amâncio (2013) e Cabral (2017). Dessa maneira, os aportes teóricos deste trabalho apoiam-se no Desenvolvimento da Didática, na Investigação Matemática e na Geometria.

Como relatado no capítulo 2, uma boa didática é aquela que conduz os trabalhos escolares, estruturando condições para que os alunos alcancem os conceitos e os saberes previstos e desenvolvam habilidades. A investigação matemática entra como uma proposta de ensino que ,quando bem utilizada, respeitando os critérios de uma boa didática, cria um ambiente propício à aprendizagem. Nesse contexto, o estudo da geometria proporciona a exploração de situações de investigação desde os primeiros anos do Ensino Fundamental mostrando que o ensino- aprendizagem geométrica vai muito além da simples memorização e utilização de técnicas. A sequência de tarefas apresentada nessa pesquisa comprova isso. Ela nos mostra que é possível utilizar diferentes abordagens para construir o conhecimento geométrico do aluno. Tal sequência de tarefas será apresentada na próxima etapa da pesquisa.

b) Elaboração das tarefas

Com base no uso de um material didático como um elemento motivador e colaborador do processo de aprendizagem, buscou-se elaborar atividades que permitissem aos alunos vivenciar experiências que promovessem a ressignificação e/ou o desenvolvimento de conceitos e habilidades importantes para o estudo das Relações Métricas nos Triângulos Retângulos. Assim, consolidou-se o estudo da (o): soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, classificação de triângulos quanto aos lados e aos ângulos, semelhança entre polígonos e entre triângulos e do Teorema de Pitágoras.

Levando em conta a importância de uma sequência de tarefas coerentes entre si, que desenvolvesse ideias e conceitos matemáticos para facilitar a construção do conhecimento, foi elaborado um caderno de tarefas. Nele, os alunos tiveram a oportunidade de elaborar e desenvolver registros e percepções de regularidades da geometria que os levaram a compreender, com maior facilidade, o estudo das Relações Métricas nos Triângulos Retângulos.

Aceitando que a maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da Resolução de Problemas, como afirma Walle (2009), esta pesquisadora se preocupou em desenvolver tarefas com uma estrutura que priorizasse a investigação, a manipulação, a liberdade de experimentação e o uso da criatividade.

Tudo isso nos remete ao conceito que Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), nos trazem sobre investigação. Para eles, investigar é procurar conhecer o que não se sabe e

> […] não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão-só, que formulam-se questões que interessam para as quais não se tem resposta pronta, e procura-se essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2005, p.9)

Como não foi possível a aplicação de tais tarefas no ensino presencial, devido à situação pandêmica que assolou o mundo, tomou-se o cuidado de elaborar atividades que fossem investigativas e experimentais, que norteassem a elaboração do pensamento do aluno. Não tendo o professor mediador durante todo o tempo do desenvolvimento da atividade, como visto no ensino presencial, foi preciso criar uma sequência um pouco mais indutiva para atingir o objetivo proposto, até mesmo para trazer, com maior clareza, o que se esperava ser interpretado em cada enunciado. Apesar da pesquisa ter sido feita no ensino remoto, foi possível desenvolvê-la de forma satisfatória, porém, percorrendo caminhos estratégicos sob uma nova perspectiva, o que exigiu muito mais empenho, tanto do aluno quanto do professor. Não mais o olhar face a face, as perguntas contextualizadas, a possibilidade de mostrar os desenhos, os avanços e as respostas.

c) Aplicação das atividades e coleta de dados

Os alunos que aceitaram o convite para participar da pesquisa trabalharam individualmente. Eles receberam as atividades através do grupo criado pelo *WhatsApp* e reencaminhavam suas respostas por meio de fotos.

Foi solicitado aos alunos que registrassem o máximo de detalhes, pensamentos, ideias e dificuldades que surgissem no decorrer do processo de resolução, para auxiliar na análise dos dados.

Infelizmente, devido a pandemia, não foi possível desenvolver de uma forma mais aprofundada o papel de instigador durante a atividade, como pode ser feito no ensino presencial, como abrir espaço para a socialização das ideias entre os alunos. Contudo, buscou-se, na medida do possível, desenvolver certa interação diante dessa modalidade de ensino.

Algumas informações do processo de desenvolvimento das atividades, como observações e descobertas, foram enviadas por muitos alunos pelo *WhatsApp*, assim, todos os outros alunos tinham acesso a elas. Além disso, vários alunos solicitavam, via *WhatsApp,* esclarecimentos sobre algumas questões. Ou seja, na medida do possível, por esse meio foi possível manter uma interação e instigar o pensamento dos alunos.

d) Análise dos resultados

Após o envio das resoluções das tarefas, o primeiro passo foi organizar os registros feitos pelos alunos por questões, em fichas, com o objetivo de facilitar o estudo dos dados coletados e a seleção de ideias e descobertas desenvolvidas pelos alunos.

Após essa organização, foi feita a análise dos dados com o propósito de compreender como os alunos desenvolveram e trabalharam com os conceitos matemáticos ali envolvidos.

5 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

A sequência didática apresentada neste trabalho foi construída de forma a facilitar o estudo das Relações Métricas nos Triângulos Retângulos. Ela é composta por 7 tarefas que buscam promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, partindo, em especial, de situações investigativas.

A tarefa teve início com uma investigação sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Em seguida, desenvolveu-se uma nova tarefa com o objetivo de estudar as classificações dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos. Após essas atividades, apresenta-se uma investigação sobre os conceitos de Semelhança de Polígonos e, mais especificamente, de Triângulos. Em seguida, são propostas diferentes atividades envolvendo demonstrações sobre o Teorema de Pitágoras. Após isso, são determinadas as Relações Métricas do Triângulo Retângulo. Para finalizar, são propostas 3 tarefas envolvendo as Relações Métricas com uma abordagem diferente das encontradas em livros didáticos.

O quadro a seguir apresenta os conteúdos abordados em cada uma das tarefas com seus respectivos objetivos e os recursos necessários à sua realização.

Quadro 4 - Organização das tarefas

Tarefas / Conteúdos abordados		**Objetivos**	**Recursos**
1	Investigando a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer	- Reconhecer os ângulos em um triângulo. - Compreender que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.	Caderno de atividades, papel colorido, tesoura e 3 lápis de cores diferentes.
2	Investigando os triângulos quanto aos lados e ângulos	- Classificar triângulos em relação às medidas dos lados e dos ângulos.	Caderno de atividades, régua e transferidor.
3	Investigando o conceito de Semelhança de Polígonos	- Compreender o conceito semelhança de polígonos e a razão de semelhança. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois polígonos sejam semelhantes.	Caderno de atividades, régua e transferidor.

Tarefas / Conteúdos abordados		Objetivos	Recursos
4	Investigando o conceito de Semelhança de Triângulos	- Compreender o conceito semelhança de triângulos e a razão de semelhança. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.	Caderno de atividades, régua, canudinhos (finos), tesoura e transferidor.
5	Investigando o Teorema de Pitágoras	- Reconhecer os elementos de um triângulo retângulo. - Demonstrar o Teorema de Pitágoras.	Caderno de atividades e papel quadriculado
6	Investigando as relações métricas do triângulo retângulo	- Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo utilizando a semelhança de triângulos.	Caderno de atividades
7	Atividades - As relações métricas do triângulo retângulo	- Desenvolver atividades envolvendo o estudo das relações métricas do triângulo retângulo.	Caderno de atividades

Os processos resolutivos dessas atividades serão discutidos a seguir.

5.1 Análise dos processos resolutivos da 1ª Tarefa

Tarefa 1: Investigando a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer
Objetivos: - Reconhecer os ângulos em um triângulo. - Compreender que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. **Material utilizado:** Caderno de atividades, Papel colorido, tesoura e 3 lápis de cores diferentes. **Tempo aproximado para o desenvolvimento das questões:** 50 minutos

Foi pedido aos alunos que fossem claros e detalhistas nos registros dos processos resolutivos. Tal pedido foi justificado pela importância que os registros assumem no decorrer da análise, além de serem descritos posteriormente na pesquisa.

Antes de enviar as Tarefas por e-mail, foi perguntado aos alunos, pelo grupo criado no WhatsApp, o que eles entendiam por investigação e, mais precisamente, por investigação matemática. A seguir algumas das respostas obtidas.

- Aluno B: "*Para mim, investigação é uma forma de pesquisa aprofundada que tem o objetivo de desvendar algum fato ou explicar porque algo acontece. Investigação matemática é quando realizamos esse tipo de pesquisa para explicar padrões, regras ou qualquer outro tema relacionado aos números.".*
- Aluno E: "*Investigação é quando você relaciona fatos para obter uma resposta. A investigação matemática para mim seria isso só que com cálculos envolvidos*.".
- Aluno F: "*Em uma investigação matemática, os alunos não sabem a resposta e precisam utilizar seus conhecimentos e outros recursos a seu favor para trabalhar com a situação proposta. Os alunos são provocados para procurarem as respostas por si próprios, aprendendo cada vez mais.".*

Percebe-se que as ideias trazidas pelos alunos, vão ao encontro do que Fiorentini e Lorenzato (2006) trazem como sendo parte de uma aula investigativa.

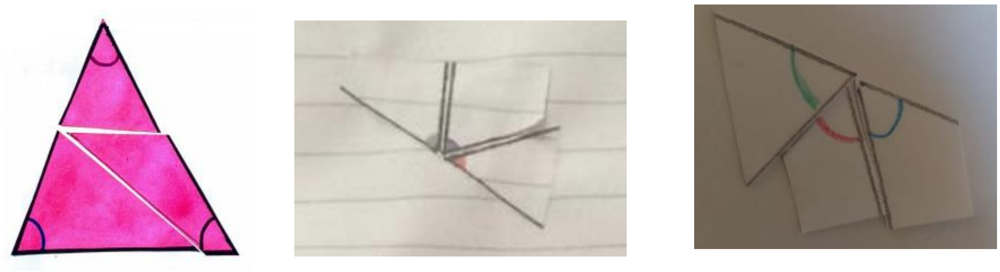
> Aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. [...] Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática (2006, p. 29).

A seguir a análise da 1ª situação da Tarefa 1.

1ª Situação – Tarefa 1
Na folha colorida faça um triângulo qualquer. Pinte de cores diferentes cada um de seus ângulos internos. Agora, recorte esse triângulo em três pedaços de forma que cada pedaço contenha um ângulo colorido por você anteriormente. Encaixe esses ângulos. Cole na caixa a seguir esse encaixe. Agora responda: a) Quantos graus mede esse ângulo que você formou nesse encaixe? b) Desenhe outros dois triângulos quaisquer e faça o mesmo procedimento. c) Que ângulo você formou nestes novos encaixes? d) Com os procedimentos acima, o que podemos concluir em relação à soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer?

Analisando o encaixe feito pelos alunos, foi possível perceber que 2 alunos apresentaram certa dificuldade na interpretação do que estava sendo solicitado e no manuseio para efetuar o encaixe desejável. No registo do aluno H, observamos que ele recortou o triângulo em 3 partes, cada parte contento um ângulo como solicitado, mas não conseguiu finalizar o que era proposto. Já os outros 8 alunos fizeram o recorte e o encaixe esperado, como se confirma abaixo, no registro dos alunos D e J.

Figura 1 – **Registro dos alunos para o item A da situação 1-tarefa1**



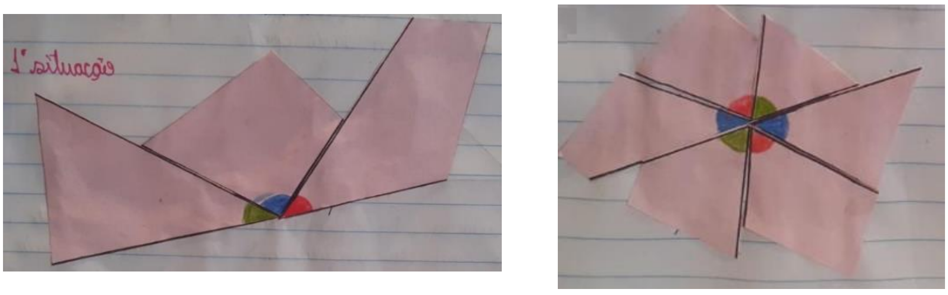
Aluna H **Aluna D** **Aluna J**

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar o item a, observou-se que os 2 alunos que apresentaram dificuldades no encaixe proposto, deixaram tal item sem resposta. Dos outros 8 alunos que fizeram o encaixe esperado, 6 responderam que se formou um ângulo de 180º e 2 alunos afirmaram ter obtido um ângulo raso.

Os 2 alunos que deixaram o item a sem resposta também deixaram o item b. Considerando os outros 8 alunos, 6 fizeram outros dois triângulos quaisquer e desenvolveram novamente o recorte e o encaixe formando 180º como o esperado. Os outros 2 alunos reuniram os recortes dos dois novos triângulos, formando ângulos de uma volta completa (360º). O aluno J fez dois tipos de registros, que seguem abaixo:

Figura 2 – **Registro dos alunos para o item B da situação 1-tarefa1**



Aluno J

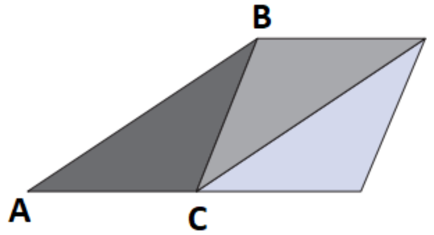
No item c, 6 alunos afirmaram que os ângulos formados nos novos encaixes mediam também 180º, assim como no primeiro recorte. Destes 6 alunos, 3 afirmaram também ser chamados de raso. Os outros 2 alunos afirmaram ter formado um ângulo de uma volta.

Já no item d, todos os alunos afirmaram que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º, inclusive aqueles que não conseguiram desenvolver o encaixe proposto no enunciado. Dois alunos registraram ainda que quaisquer dois triângulos que tivermos, ao se reunir todos os seus ângulos internos, obtém-se 360º no somatório.

Os alunos que não conseguiram fazer o encaixe dos ângulos, ao serem questionados quanto ao seu registro no idem d, afirmaram ter decorado que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º.

2ª Situação – Tarefa 1
Um aluno do 9º ano cortou três triângulos congruentes. Ele empilhou três folhas de papel e cortou as três formas de uma vez. Colocou um triângulo sobre uma reta, o segundo diretamente ao lado na mesma orientação e o terceiro triângulo no espaço entre os dois triângulos como mostra a figura. Baseando-se nessa experiência, registre nas linhas a seguir as ideias que você teve. Que conjectura você consegue fazer sobre a soma dos ângulos em um triângulo?

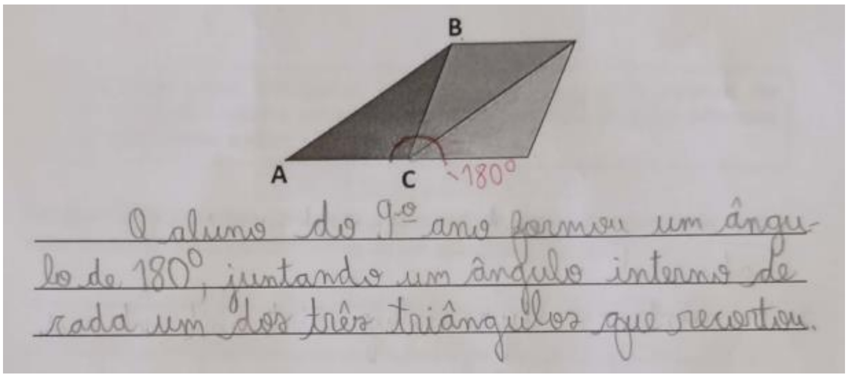
Figura 3 – 2ª Situação – Tarefa 1



Fonte: Imagem do livro de Walle (pg 461)

Nesta 2ª situação, observou-se que todos os alunos registraram de alguma forma que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer resulta sempre em 180º. A figura 52 confirma isso.

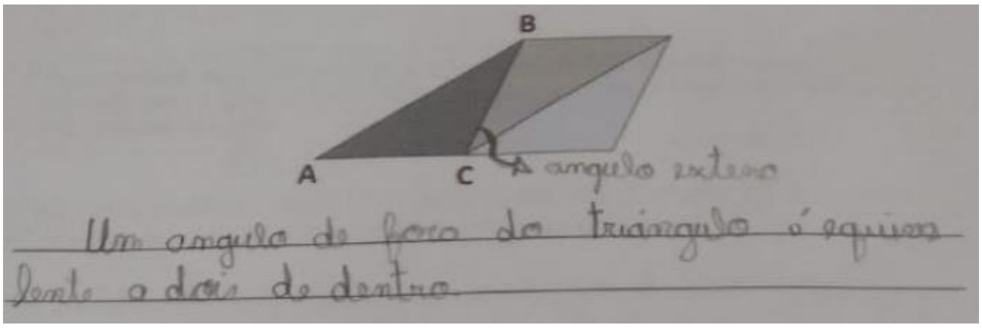
Figura 4 – Registro dos alunos para o item A-situação 2 –tarefa1(a)



Aluno I

Contudo, alguns alunos trouxeram informações adicionais importantes. A figura 5 aponta alguns registros feitos pelos alunos.

Figura 5 – Registro dos alunos para o item A- situação 2 –tarefa1(b)



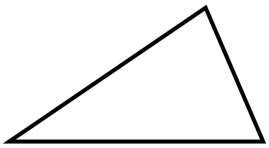
Aluno A

Situação 2 – A soma dos ângulos internos dos quadriláteros equivale 360 graus, uma vez que um quadrilátero pode ser formado a partir de dois triângulos separados e a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180 graus.

Aluno C

Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno A antecipa o estudo do ângulo externo. Ela já traz a ideia central que relaciona um ângulo externo aos outros dois internos não adjacentes a ele. O aluno C, afirma que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360º, visto que ele pode ser decomposto em dois triângulos.

3ª Situação – Tarefa 1
Triângulos são polígonos formados por três lados, três vértices, três ângulos internos e três ângulos externos. a) O que é ângulo externo? b).Destaque um dos ângulos externos do triângulo a seguir.  c) ***Propriedade dos triângulos: A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*** De que forma podemos relacionar a propriedade citada anteriormente com o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer?

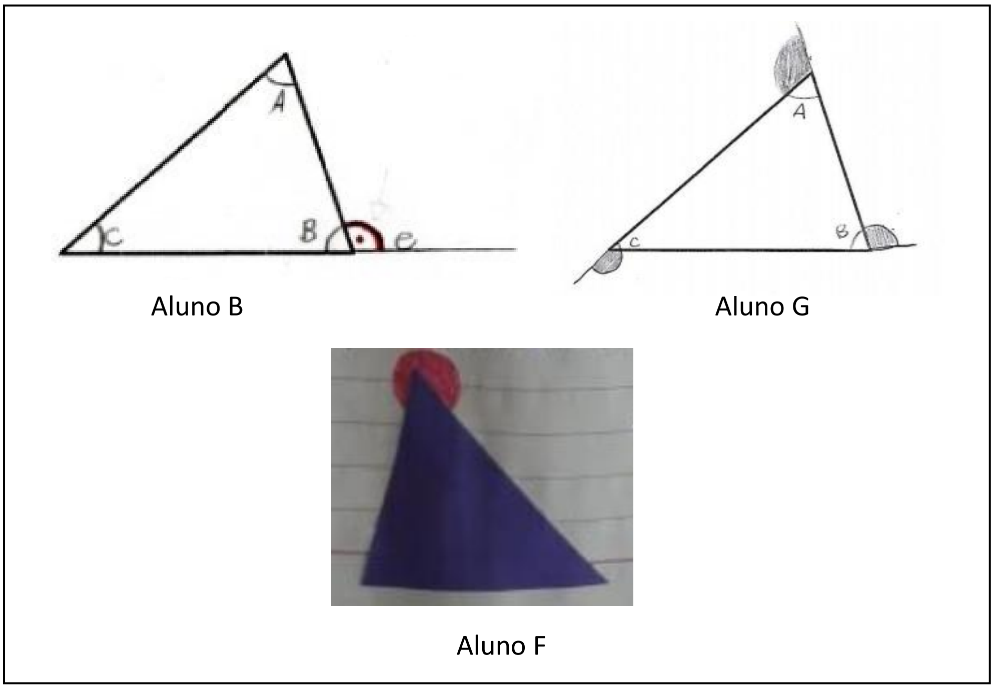
Foram várias as respostas dadas pelos alunos ao item a. Algumas com uma linguagem bem matemática, muito presente em livros; outras bem explicativas, contendo a percepção de cada aluno em relação ao que vem a ser um ângulo externo. A seguir ,algumas das respostas.

- Aluno A: “É o ângulo formado pelo prolongamento de um dos lados do triângulo.”
- Aluno C: “São os ângulos localizados na parte de fora do triângulo.”
- Aluno D: “É o ângulo formados pelo lado “estendido” do triângulo.”
- Aluno F: “É o ângulo que se forma na parte externa da figura, em torno do vértice.”

É interessante observar as formas linguísticas e vocabulares que cada aluno usa ao se expressar. Por exemplo, nesta atividade, o termo lado “estendido” foi utilizado por 3 alunos. A ideia de externo estar ligado à “parte de fora” estava presente na resposta de 5 alunos.

Dos 10 alunos que participaram da pesquisa, 9 destacaram o ângulo esperado no item b. Na figura 6 temos o registro dos alunos B e G. Já o aluno F desenhou exatamente a ideia que havia registrado no item a: “É o ângulo que se forma na parte externa da figura, em torno do vértice.”. As figuras a seguir ilustram as respectivas respostas.

Figura 6 – Registro dos alunos para o item B- 3ª Situação – Tarefa 1



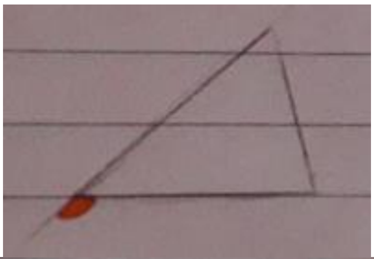
O item c trouxe uma série de reflexões e relações interessantes por parte dos alunos. O Aluno F traz a ideia da propriedade apresentada nesse item de uma forma diferente. Ele afirma que 180º menos o ângulo externo é igual a medida do ângulo interno adjacente a esse externo. Já o aluno B afirma ser A, B e C os ângulos internos do triângulo e ”e” o externo, e conclui que o ângulo externo é o suplementar ao ângulo interno adjacente a ele. O aluno A trouxe algo interessante. Ele afirmou que a soma dos ângulos externos é o dobro da soma dos ângulos internos, logo se a soma dos internos é 180º, a soma dos ângulos externos será 360º. Já o aluno G, traz várias conjecturas acerca dos ângulos internos e externos, o que justifica a propriedade apesentada no item.

Figura 7 – Registro dos alunos para o item A 3ª Situação – Tarefa 1

c) Podemos dizer que a soma dos ângulos internos subtraída à medida do ângulo externo sempre resulta no valor do ângulo interno adjacente ao externo.

A+B+C = 180° → ângulos internos.
A+C = e → âng int. não adj a e.
B+e = 180°

A soma dos ângulos externos é igual ao dobro da soma dos ângulos internos.



c) Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre resultará em 180° e esse ângulo correspon-de a uma linha reta. Olhando para a imagem, é possível perceber que o ângulo externo mais o adjacente, formará uma linha reta, ou seja, 180°. Podemos concluir então que ao subtrair 180° da medida do ângulo adjacente, ou até mesmo somando os dois ângulos não adjacentes, é possível obter as medidas do ângulo externo

Fonte: Dados da pesquisa.

Aluno G

5.2 Análise dos processos resolutivos da 2ª Tarefa

Tarefa 2: Investigando os triângulos quanto aos lados e aos ângulos
Objetivos: - Classificar triângulos em relação às medidas dos lados e dos ângulos. **Material utilizado:** Caderno de atividades, régua e transferidor. **Tempo aproximado para o desenvolvimento das questões:** 50 minutos

Questão 1 – Tarefa 2
1) Escreva tudo o que você puder sobre esses triângulos. Equilátero: Isósceles: Escaleno: Acutângulo: Retângulo: Obtusângulo:

Ao analisar os registros, deparou-se com um recado de 4 alunos, afirmando que foi preciso fazer pesquisa na internet e em livros didáticos para responder a essa questão. Esperava-se que tais alunos já apresentassem esse tipo de conhecimento consolidado. Contudo, eles afirmaram que após lerem sobre o assunto tratado foi fácil lembrar e responder à questão proposta. O fato de terem buscado informações ao invés de deixar a questão sem resposta foi algo que mostrou maturidade diante os estudos e diante o compromisso assumido com a pesquisa.

A seguir um quadro com as respostas registradas pelos alunos.

Quadro 5 – Respostas dos alunos Questão 1 – Tarefa 2

Tipo de triângulo	Definição apresentada	Quantidade de alunos
Equilátero	- Possui todos os lados iguais.	7 alunos
	- Possui três lados e três ângulos congruentes.	3 alunos
Isósceles	- Possui dois lados iguais e um diferente.	6 alunos
	- Possui dois lados e os ângulos da base congruentes.	3 alunos
	- Possui um lado menor.	1 aluno
Escaleno	- Possui três lados diferentes.	9 alunos
	- Possui três lados e três ângulos diferentes.	1 aluno
Acutângulo	- Possui todos os ângulos internos medindo menos de 90º.	5 alunos
	- Possui todos os ângulos internos agudos.	5 alunos
Retângulo	- Um dos ângulos internos mede 90º.	4 alunos
	- Um dos ângulos internos é reto.	6 alunos
Obtusângulo	- Um dos ângulos internos mede mais que 90º.	4 alunos
	- Um dos ângulos internos é obtuso.	6 alunos

Quanto aos triângulos equiláteros pode-se observar que a maior parte dos alunos se deteve aos lados congruentes, poucos extrapolaram a questão de os ângulos serem também congruentes. Quanto aos isósceles nota-se um erro muito frequente por parte dos alunos ao afirmarem que os triângulos isósceles possuem 2 lados de medidas iguais e um de medida diferente ou que eles possuem um lado menor ou maior que os outros dois, como citado por um aluno. Esse aluno se remeteu à imagem convencional de um triângulo isósceles. Apenas 3 alunos afirmaram ter eles dois lados e os ângulos da base congruentes, não necessariamente somente dois lados. Percebe-se que muitos alunos não conseguem identificar que os triângulos equiláteros são também isósceles. Isso ocorre pela falta de interpretação e conhecimento da definição de cada um desses triângulos. Conhecimento esse que já deveria ter sido consolidado por alunos de 9º ano.

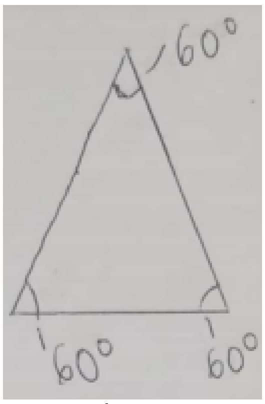
Questão 2 – Tarefa 2
2) No quadro a seguir, desenhe triângulos em cada um dos nove casos. **Quadro 6 – Desenhar Triângulos – Tarefa 2**

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutângulo			
Retângulo			
Obtusângulo			

Fonte: Quadro do livro de Walle (pg 455)

No preenchimento do quadro apresentado, obteve-se quase que unanimidade nos triângulos registrados como resposta. No espaço a que se refere a um triângulo equilátero acutângulo, todos os alunos desenharam um triângulo equilátero. Alguns deixaram registrado que os lados possuem medidas iguais e outros que todos os seus três ângulos internos medem 60º. A seguir o triângulo feito pelo aluno I.

Figura 8 – Registro dos alunos para Questão 2 – Tarefa 2(a)

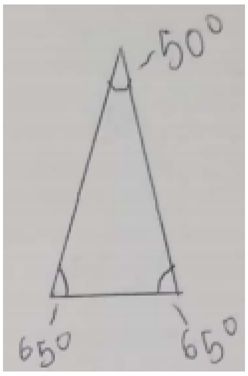


Aluno I

Fonte: Dados da pesquisa.

No espaço destinado a triângulos isósceles acutângulo, 4 alunos desenharam novamente um triângulo equilátero e 6 alunos desenharam um triângulo isósceles de apenas os ângulos da base congruentes. A seguir o triângulo feito pelo aluno I.

Figura 9 – Registro dos alunos para o item A Questão 2 – Tarefa 2(b)

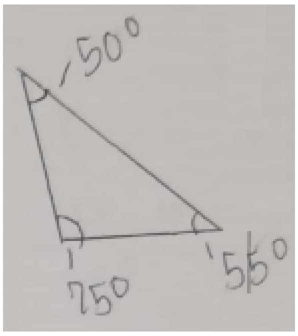


Aluno I

Fonte: Dados da pesquisa.

No espaço destinado a triângulos escaleno acutângulo, 9 alunos desenharam triângulos com os três ângulos internos de medidas diferentes, todos medindo entre 0° e 90º. Um aluno afirmou não existir esse tipo triângulo, destacando que triângulos escalenos necessariamente devem ser retângulos ou obtusângulos. A seguir o triângulo feito pelo aluno I.

Figura 10 – Registro dos alunos para o item A Questão 2 – Tarefa 2(c)

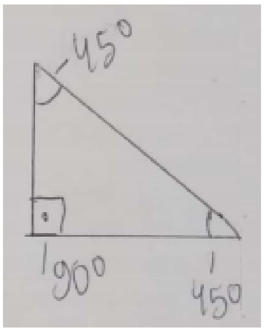


Aluno I

Fonte: Dados da pesquisa.

No espaço destinado a triângulos equilátero retângulo, todos os alunos registraram ser impossível traçar esse triângulo. Deles, 4 justificaram que todos os equiláteros devem ter ângulos internos medindo 60º, logo, é impossível termos um ângulo reto. Já no espaço destinado a triângulos isósceles retângulo, todos os alunos afirmaram existir, mas apenas 4 destacaram que os outros dois ângulos, além do reto, devem medir obrigatoriamente 45º. A seguir o triângulo feito pelo aluno I.

Figura 11 – Registro dos alunos para o item A Questão 2 – Tarefa 2(d)

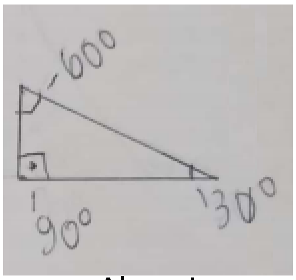


Aluno I

Fonte: Dados da pesquisa.

No espaço destinado a triângulos escaleno retângulo, um aluno afirmou não existir tal triângulo e o outros 9 alunos citaram que são triângulos que apresentam os três ângulos internas de medidas diferentes sendo um deles obrigatoriamente de medida 90º. A seguir o triângulo feito pelo aluno I.

Figura 12 – Registro dos alunos para o item A Questão 2 – Tarefa 2(e)

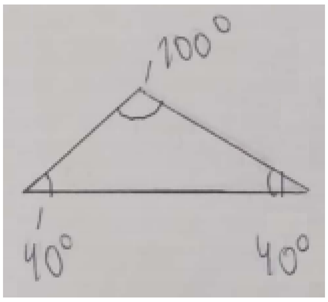


Aluno I

Fonte: Dados da pesquisa

No espaço destinado a triângulo equilátero obtusângulo, todos os alunos afirmaram não existir tal triângulo, sendo que 4 deles justificaram que todos os equiláteros devem ter ângulos internos medindo 60º, logo é impossível termos um ângulo de medida superior a 90º. Já no espaço destinado a triângulos isósceles obtusângulo, todos os alunos registraram existir tal triângulo. Os alunos registraram valores aleatórios para os ângulos internos. A seguir o triângulo feito pelo aluno I.

Figura 13 – Registro dos alunos para o item A Questão 2 – Tarefa 2(f)

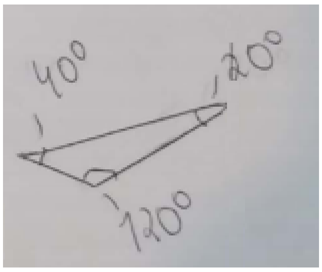


Aluno I

Fonte: Dados da pesquisa

Por último, no espaço destinado a triângulos escaleno obtusângulo, 1 aluno afirmou não existir tal triângulo e os outros 9 alunos registraram valores aleatórios para os ângulos internos, sendo sempre um deles superior a 90º. A seguir o triângulo feito pelo aluno I.

Figura 14 – Registro dos alunos para o item A Questão 2 – Tarefa 2(g)



Aluno I

Fonte: Dados da pesquisa

5.3 Análise dos processos resolutivos da 3ª Tarefa

Tarefa 3: Investigando o conceito de Semelhança de Polígonos

Objetivos: - Compreender o conceito semelhança de polígonos e a razão de semelhança.

- Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois polígonos sejam semelhantes.

Material utilizado: Caderno de atividades, régua e transferidor.

Tempo aproximado para o desenvolvimento das questões: 50 minutos

Questão 1 – Tarefa 3

Figura 15 – Três fotografias de uma criança.

Imagem 1 - 6x8

Imagem 2 - 6x4

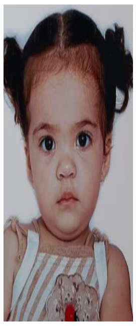


Imagem 3 - 3x8

1 - Com base nas imagens acima, responda as questões a seguir.

a) O que houve com a imagem 1 se comparada com a foto 3x4? Como estão suas dimensões?

b) O que houve com a imagem 2 se comparada com a foto 3x4? Como estão suas dimensões?

c) O que houve com a imagem 3 se comparada com a foto 3x4? Como estão suas dimensões?

d). Em quais imagens houve alteração quanto à forma se comparado com a foto 3x4?

e). Comparando a foto 3x4 com as imagens 1, 2 e 3 quais delas você considera serem semelhantes? Justifique.

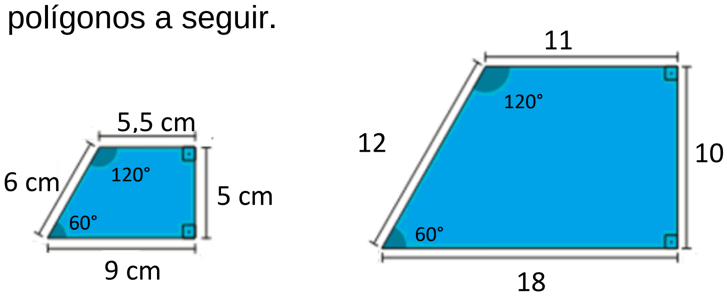
Ao responder ao item a, todos os alunos registraram que as dimensões da imagem 1 foram dobradas, sendo que, para 4 alunos, a imagem foi aumentada, para 6 alunos, a imagem foi totalmente ampliada proporcionalmente.

Já no item b, 5 alunos afirmaram que a imagem foi distorcida, pois a largura dobrou e a altura permaneceu a mesma. Os outros 5 alunos afirmaram ser a imagem 2 uma versão achatada da imagem inicial (a foto 3x4).

No item c, para 3 alunos a imagem foi distorcida pois, a largura permaneceu a mesma e a altura dobrou. Os outros 7 alunos afirmaram ser a imagem 3 uma versão esticada ou alongada da imagem inicial (a foto 3x4).

Como resposta ao item d, 9 alunos afirmaram que nas imagens 2 e 3 houve alteração quanto à forma, sendo que 5 deles justificaram que ao alterar apenas largura ou comprimento os ângulos se alteraram, o que acarreta na alteração da forma. Apenas 1 aluno afirmou que houve alteração em todas as imagens. Ele considerou que havendo ampliação ou redução há alteração. O que se percebe é que tal aluno não considerou o termo “alteração quanto à forma”.

Para os 10 alunos a foto 3x4 é semelhante à imagem 1. Alguns afirmaram que a imagem teve suas dimensões ampliadas na mesma razão e outros registraram que houve aumento da imagem com proporcionalidade. É interessante analisar que o aluno que afirmou ter havido alteração quanto à forma em todas as imagens, reconheceu que a imagem semelhante à foto 3x4 é a imagem 1.

Questão 2 – Tarefa 3
2- Analise os polígonos a seguir.  Agora responda às perguntas. a) O que podemos afirmar quanto aos seus ângulos internos desses polígonos? b) O que podemos afirmar quanto as medidas dos lados desses polígonos? c). Houve alteração quanto à forma do primeiro para o segundo polígono? d) Estes polígonos são semelhantes?

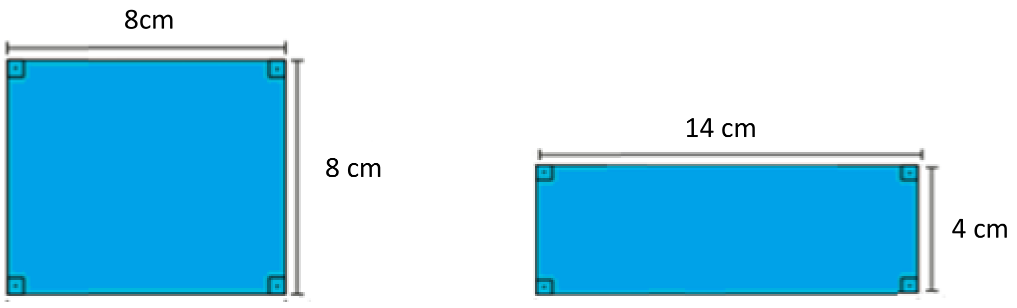
No item ‘a’, os 10 alunos afirmaram que os ângulos internos dos polígonos são os mesmos, o que aconteceu também no item b: os 10 alunos afirmaram que as medidas dos lados foram dobradas.

Já no item ‘c’, 9 alunos registraram não ter tido alteração quanto à forma do primeiro para o segundo polígono. Um aluno afirmou ter tido alteração, justificando que as medidas dos lados foram dobradas. Percebe-se, mais uma vez, que esse aluno considerou que, havendo ampliação ou redução há alteração. O que se percebe é que tal aluno não compreendeu o termo “alteração quanto à forma”.

No item ‘d’, foi interessante observar como a percepção do que é ser semelhante foi sendo desenvolvida ao longo da atividade. A escrita mostrou isso. 9 alunos afirmaram que tais polígonos são semelhantes, justificando que a forma permaneceu a mesma e as medidas dos lados foram multiplicadas por um mesmo número. O aluno que afirmou não serem semelhantes tais polígonos, não conseguiu justificar tal opinião.

Questão 3 – Tarefa 3

3 - Analise os quadriláteros a seguir.



Agora responda às perguntas.

a) O que podemos afirmar quanto aos ângulos internos desses quadriláteros?

b) O que podemos afirmar quanto às medidas dos lados desses quadriláteros?

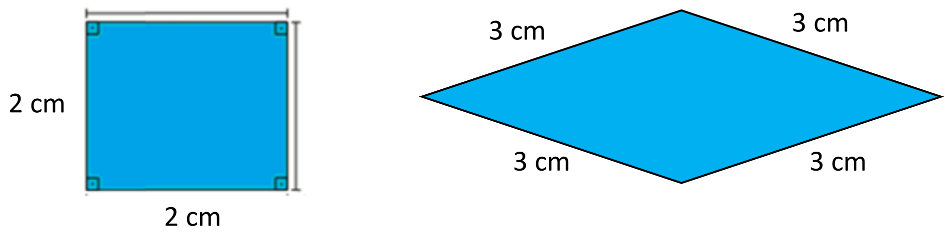
c) Houve alteração quanto a forma do primeiro para o segundo quadrilátero?

d) Estes quadriláteros são semelhantes?

Como resposta ao item *a* dessa tarefa, todos os alunos afirmaram que ambos quadriláteros possuem ângulos iguais, alguns registraram ser ângulos retos; outros registraram medir 90º.

Como resposta ao item ‘b’, 9 alunos afirmaram que as medidas dos lados não são proporcionais, sendo que 8 deles justificaram que a altura diminuiu em 4 e a largura aumentou em 6. Um aluno simplesmente registrou que os lados possuem medidas diferentes.

Os 10 alunos afirmaram ter ocorrido alteração quanto à forma do primeiro para o segundo quadrilátero, sendo que 7 deles justificaram, registrando que o quadrado possui 4 lados congruentes e já o retângulo não. Tal justificativa comprova que, de fato, esses alunos compreenderam o que é alteração quanto à forma. Dos 10 alunos, 7 afirmaram que, como resultado do item c, pode-se concluir no item d que tais quadriláteros não são semelhantes. Os outros 3 alunos apenas registraram que não são semelhantes.

Questão 4 – Tarefa 3
4 - Analise os quadriláteros a seguir.  Agora responda às perguntas. a). Os lados desses quadriláteros são proporcionais? b). Os ângulos internos desses quadriláteros são congruentes? c). Utilize as linhas abaixo para explicar se tais quadriláteros são ou não semelhantes.

Como resposta ao item a, 7 alunos afirmaram que os lados de tais quadriláteros são proporcionais e 3 afirmaram não ser. Já como resposta ao item b, 6 alunos afirmaram que tais quadriláteros não possuem ângulos internos congruentes e 4 afirmaram que possuem.

Para a maior parte dos alunos (7), tais quadriláteros não são semelhantes. Cinco deles justificaram que suas formas foram alteradas e seus lados são proporcionais e os outros 2 registraram que seus ângulos são diferentes e seus lados são proporcionais. Os outros 3 alunos que afirmaram ser tais quadriláteros semelhantes justificaram suas respostas, registrando observações apenas quanto aos lados. Os três escreveram existir uma razão constante entre as medidas dos lados, o que os tornaram semelhantes. Percebe-se que eles não analisaram os ângulos, o que modifica o aspecto estético da figura, algo visivelmente observável.

5.4 Análise dos processos resolutivos da 4ª Tarefa

Tarefa 4: Investigando o conceito de Semelhança de Triângulos

Objetivos: - Compreender o conceito de semelhança de triângulos e a razão de semelhança.

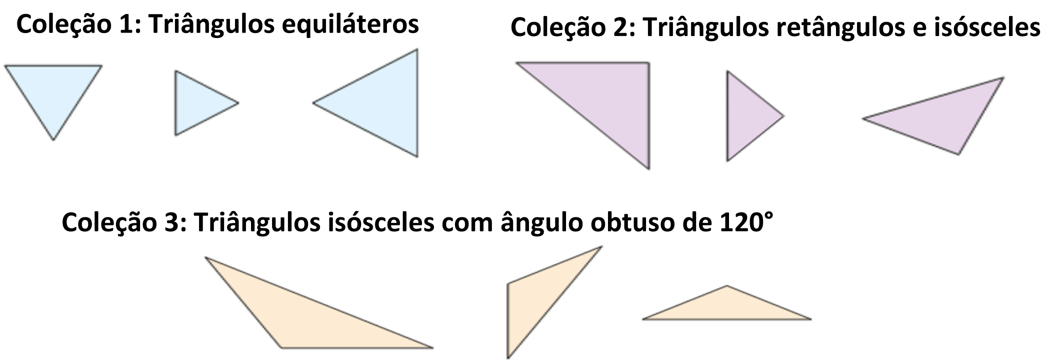
- Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Material utilizado: Caderno de atividades, régua, canudinhos (finos), tesoura e transferidor.

Tempo aproximado para o desenvolvimento das questões: 50 minutos

Questão 1 – Tarefa 4

Figura 16 – Coleção de Triângulos



Fonte: Imagens adaptadas do livro de Walle (pg 453)

1- Analisando as três coleções de triângulos acima, responda às perguntas a seguir.

a). Quanto aos três triângulos da Coleção 1, o que podemos afirmar quanto a seus:

- lados? ____
- ângulos?____

Estes três triângulos são semelhantes? Justifique.

b). Quanto aos três triângulos da Coleção 2, o que podemos afirmar quanto a seus:

- lados?____
- ângulos?____

Estes três triângulos são semelhantes? Justifique.

c). Quanto aos três triângulos da Coleção 3, o que podemos afirmar quanto a seus:

- lados?____
- ângulos?____

Estes três triângulos são semelhantes? Justifique.

d). Ao tomarmos aleatoriamente dois triângulos de coleções diferentes, eles serão semelhantes? Justifique.

Como resposta ao item a, 8 alunos afirmaram que tais triângulos possuem os três lados congruentes e 2 afirmaram que os três triângulos apresentam lados diferentes entre si, porém são proporcionais. É possível perceber que houve dupla interpretação do enunciado. Os 8 alunos observaram individualmente cada triângulo e os outros 2 relacionaram uns com os outros. Quanto aos ângulos internos, 4 alunos afirmaram que são congruentes, 1 aluno afirmou que são agudos e 5 alunos afirmaram que todos medem 60º. Para os 10 alunos os triângulos são semelhantes. As justificativas foram:

- Para 2 alunos, são semelhantes pois os lados são proporcionais.
- Para 2 alunos, são semelhantes pois os ângulos internos sempre medem 60°.
- Para 6 alunos, são semelhantes pois os lados são proporcionas e os ângulos congruentes.

Como resposta ao item b, 7 alunos afirmaram que dois dos três lados são congruentes em cada triângulo e 3 alunos afirmaram que um dos lados é maior que os outros dois que são congruentes. Um desses alunos registrou que o lado maior sempre será aquele que se opõe ao ângulo reto. Quanto aos ângulos, 4 alunos afirmaram que tais triângulos possuem dois ângulos iguais e 6 alunos afirmaram que tais triângulos possuem um ângulo reto e dois agudos. Para os 10 alunos, os triângulos são semelhantes. As justificativas foram:

- Para 3 alunos, são semelhantes pois os lados são proporcionais.
- Para 7 alunos, são semelhantes pois os ângulos são iguais.

Como resposta ao item c, todos os alunos afirmaram que dois dos três lados dos triângulos são congruentes. Quanto aos ângulos, 4 alunos analisaram os três triângulos e afirmaram serem congruentes entre si. Os outros 6 alunos registraram que tais triângulos possuem dois ângulos agudos e um obtuso. Para os 10 alunos, os triângulos são semelhantes. As justificativas foram:

- Para 7 alunos, são semelhantes pois os ângulos internos são iguais.
- Para 3 alunos, são semelhantes pois os lados são proporcionais.

Todos os alunos responderam não ao item d. As justificativas foram:

- Para 7 alunos, não são semelhantes, pois os ângulos internos não possuem medidas iguais.
- Para 3 alunos, não são semelhantes pois seus lados não são proporcionais.

Questão 2 – Tarefa 4
2- Agora, vamos estudar com mais profundidade, a semelhança dos triângulos. Utilizando canudinhos, construa o triângulo A e o triângulo B descrito a seguir. (Observação: Com a régua meça os segmentos desejados, depois corte-os e una-os.) **TRIÂNGULO A** Segmento AB = 3,8 cm Segmento BC = 5,4 cm Segmento AC = 6 cm **TRIÂNGULO B** Segmento DE = 1,9 cm Segmento EF = 2,7 cm Segmento DF = 3 cm Cole os canudinhos nas caixas a seguir, formando os triângulos desejados. Nomeie os vértices de cada triângulo. **TRIÂNGULO A** | **TRIÂNGULO B** Considerando esses triângulos, faça o que se pede. a) Use o transferidor para determinar a medida dos ângulos internos do: **TRIÂNGULO A:**______________________________ **TRIÂNGULO B:**______________________________

b) Determine a razão entre as medidas dos lados correspondentes desses triângulos.

____

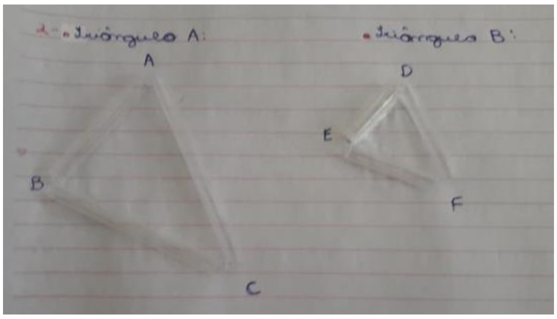
____

____

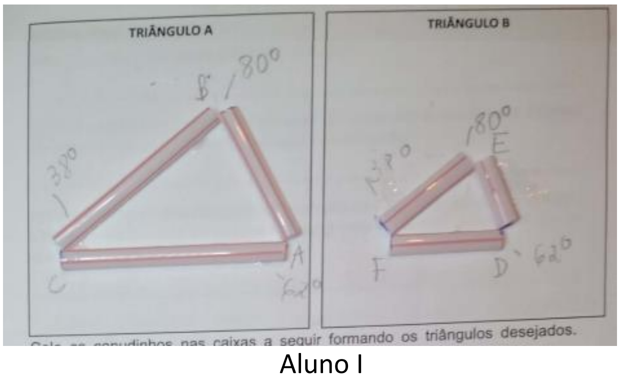
c) Os triângulos A e B são semelhantes? Justifique.

Dos 10 alunos, 1 aluno deixou essa questão em branco. Os outros 9 alunos fizeram os recortes e as construções como solicitado. A seguir temos a construção de dois alunos.

Figura 17 – Registro dos alunos para o item A- Questão 2 – Tarefa 4



Aluno F



Aluno I

Fonte: Dados da pesquisa

Como resposta ao item a, 3 alunos registram que os ângulos de ambos os triângulos medem 62º, 80º e 38º, 4 alunos registraram que medem 62º, 79º e 39º e 2 alunos registraram que medem 61º, 80º e 39º. Dois desses alunos já inferiram que os triângulos A e B são semelhantes. Quanto à razão entre as medidas dos lados correspondentes desses triângulos, 8 alunos afirmaram ser 2 e 1 aluno afirmou ser ½.

Os 9 alunos afirmaram que os triângulos A e B são semelhantes. As justificativas foram:

- Para 5 alunos, são semelhantes pois a razão entre as medidas dos lados correspondentes é a mesma, logo, os lados são proporcionais.
- Para 4 alunos, são semelhantes pois os ângulos internos correspondentes são congruentes.

Questão 3 – Tarefa 4
3- Responda: a). Se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados do outro triângulo, esses triângulos serão semelhantes? b). Se os ângulos internos de um triângulo são congruentes aos ângulos internos de outro triângulo, esses triângulos serão semelhantes? c). Para verificar se dois triângulos são semelhantes é preciso estudar se os lados são proporcionais e se os ângulos são congruentes? Ou basta verificarmos uma dessas condições? Explique.

Após todo o estudo desenvolvido com a semelhança de polígonos e mais especificamente semelhança entre triângulos, observou-se que a maioria dos alunos conseguiu perceber a diferença entre as condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes e para que dois triângulos sejam semelhantes. Ao responder a Tarefa 4, isso ficou nítido. Alguns alunos afirmaram que se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados do outro triângulo, esses triângulos serão semelhantes. Outros alunos afirmaram que se os ângulos internos de um triângulo são congruentes aos ângulos internos de outro triângulo, esses triângulos serão semelhantes.

Como resposta ao item c, 2 alunos afirmaram que é preciso estudar se os lados são proporcionais e se os ângulos são congruentes. Percebeu-se que eles não conseguiram linkar uma condição à outra, considerando a estrutura de um triângulo. Ao serem questionados, eles demonstraram ter conseguido analisar as partes, mas não o todo. Logo, tais alunos não compreenderam toda a analise desenvolvida. Para os outros 8 alunos, é necessário avaliar apenas umas das condições, se os lados são proporcionais ou se os ângulos são congruentes. Para 5 desses alunos, uma situação está intimamente ligada a outra. Eles registraram que, alterando os ângulos, consequentemente, alteram-se os lados e vice e versa.

5.5 Análise dos processos resolutivos da 5ª Tarefa

Tarefa 5: Investigando o Teorema de Pitágoras
Objetivos: - Reconhecer os elementos de um triângulo retângulo. - Demonstrar o Teorema de Pitágoras. **Material utilizado:** Caderno de atividades e papel quadriculado **Tempo aproximado para o desenvolvimento das questões:** 50 minutos

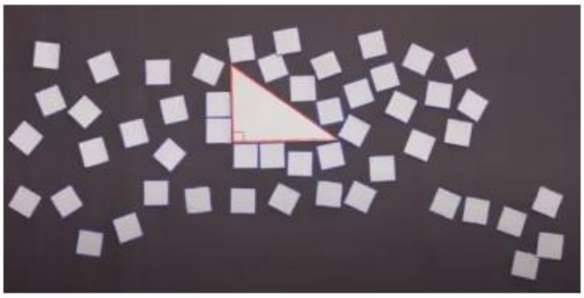
Todos os alunos conseguiram identificar que o lado BC é a hipotenusa e os lados AC e AB são os catetos. Além disso, também conseguiram identificar que o maior lado de um triângulo retângulo sempre será a hipotenusa por ser oposto ao maior ângulo.

1ª Situação – Tarefa 5
1ª situação Em uma folha de papel quadriculado, desenhe um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 4 unidades de medida. Em seguida, desenhe um quadrado sobre cada cateto e sobre a hipotenusa. Ou seja, você deverá desenhar três quadrados que terão como um dos lados os catetos e a hipotenusa desse triângulo. Cole na caixa a seguir sua construção.

a) Considerando cada “quadradinho” do papel quadriculado como uma unidade de medida de área, determine a área de cada um dos dois quadrados que “partem” dos catetos.

b) Recorte alguns “quadradinhos” do papel quadriculado e faça uma estimativa da área do quadrado que “parte” da hipotenusa. (Dica: faça uma sobreposição desses “quadradinhos” no quadrado que parte da hipotenusa. A imagem a seguir traz uma ideia)

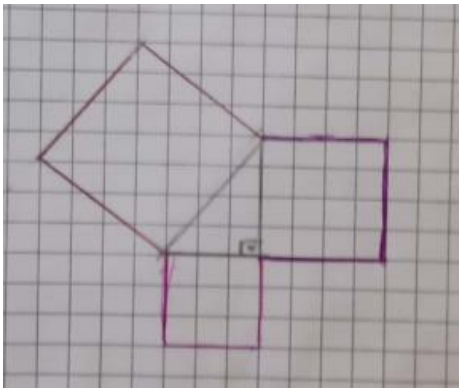
Figura 18 – Tarefa 5 – Item b

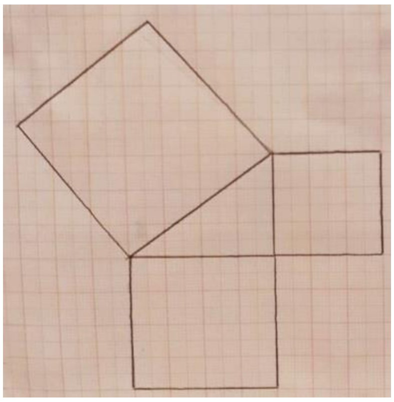


c) Agora, você está desafiado a encontrar uma relação entre as áreas dos quadrados que você obteve nos itens a e b. Registre nas linhas a seguir seu pensamento.

Para iniciar a exploração da situação 1, 2 alunos afirmaram não ter papel quadriculado ou milimetrado em casa, mas fizeram a malha manualmente, como pode ser visto na figura a seguir a resposta do aluno I. Os outros 8 alunos utilizaram o papel quadriculado como solicitado. A seguir temos a construção dos alunos I e J. Todos os alunos desenvolveram a construção corretamente.

Figura 19 – Registro dos alunos para o item A -1ª Situação – Tarefa 5(a)



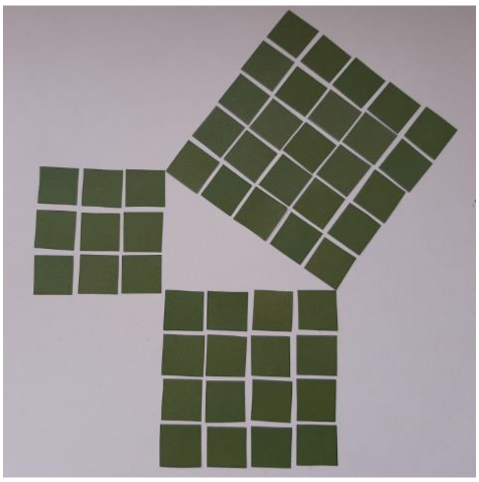


Fonte: Dados da pesquisa

Como resposta ao item a, 8 alunos afirmaram que as áreas dos quadrados que partem dos catetos são de 9 e 16 unidades de área. Um aluno não soube responder e o outro afirmou ser a área de 25 unidades de área. Acredita-se que esse aluno calculou a área do quadrado que parte da hipotenusa.

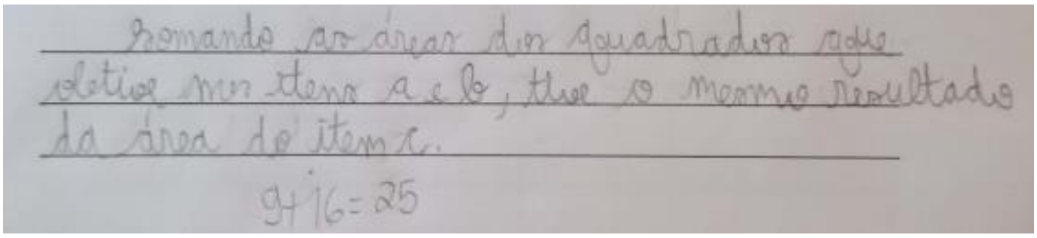
Dos 10 alunos, 7 desenvolveram o item b. Todos eles, de forma muito clara e organizada. Um deles, além de deixar o desenho registrado, afirmou que a “área do quadrado que parte da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que parte dos catetos”. Na figura a seguir, o registro deixado pelo Aluno F deixa claro que a área do quadrado que parte da hipotenusa é de 25 unidades de área.

Figura 20 – Registro dos alunos para o item A -1ª Situação – Tarefa 5(b)

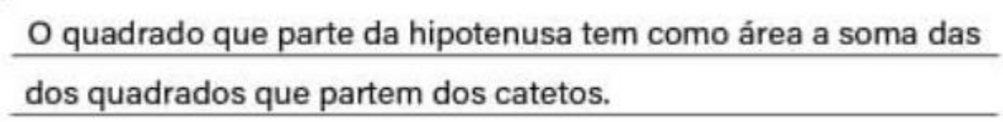


No item c, 2 alunos afirmaram que deixariam a questão em branco inicialmente, mas, depois de tentarem desenvolver as demais situações propostas compreenderam o que estava sendo trabalhado nessa situação. Assim, eles voltaram e a responderam. Os outros 8 alunos registram o Teorema de Pitágoras. Alguns escreveram numa linguagem mais formal outros escrevam da forma como pensaram. A seguir temos o registro de 2 alunos.

Figura 21 – Registro dos alunos para o item A -1ª Situação – Tarefa 5 (c)


Somando as áreas dos quadrados que obtive nos itens a e b, tive o mesmo resultado da área do item c.
9+16=25

Aluno I


O quadrado que parte da hipotenusa tem como área a soma das dos quadrados que partem dos catetos.

Aluno D

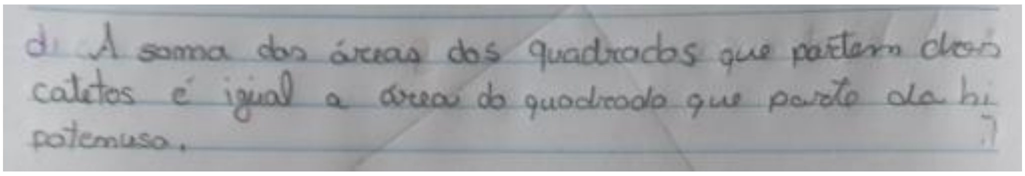
Fonte: Dados da pesquisa

2ª Situação – Tarefa 5
2ª situação Acesse o link a seguir e assista ao vídeo. https://youtu.be/CAkMUdeB06o Agora, responda às questões a seguir. a). Que tipo de triângulo você identificou no vídeo? b). Podemos observar três quadriláteros no vídeo. Que tipo de quadriláteros são esses? c) Observe que inicialmente temos a ÁREA de dois desses quadriláteros em “destaque azul”. Tais quadriláteros “partem” dos catetos ou da hipotenusa? d). Baseando-se nesse vídeo, escreva nas linhas a seguir tudo o que você identificou e/ou compreendeu. Você poderá, por exemplo, registrar relações que tenha observado.

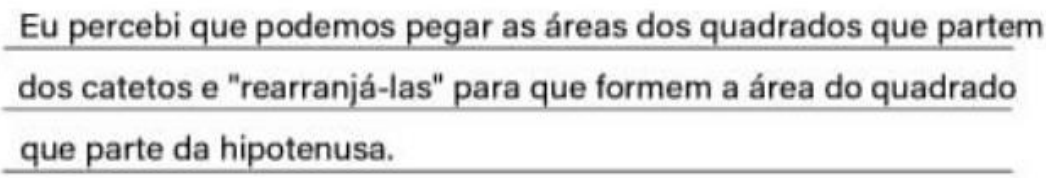
Como resposta ao item a, 9 alunos registraram ser o triângulo apresentado no vídeo retângulo e 1 aluno afirmou ser escaleno retângulo. No item b, 8 alunos afirmaram ter observado quadrados e 2 alunos, losango e quadrado. No item c, todos os alunos identificaram que os quadriláteros em destaque azul, apresentado no início do vídeo, partem dos catetos. Seis desses alunos justificaram sua resposta, afirmando que tais lados formam o ângulo reto do triângulo em análise.

No item d, 6 alunos registraram que o líquido presente nos quadrados que partem dos catetos, juntos, preenchem totalmente o quadrado que parte da hipotenusa. Outros 3 alunos registraram exatamente o Teorema de Pitágoras como mostrado na escrita da figura do aluno E. O registro feito pelo aluno D trouxe a palavra “rearranjá-las”, que expressou muito bem o raciocínio desenvolvido pelo aluno ao interpretar o vídeo.

Figura 22 – Registro dos alunos para o item A -2ª Situação – Tarefa 5


d: A soma das áreas dos quadrados que partem dos catetos é igual a áreas do quadrado que parte da hipotenusa.

Aluno E


Eu percebi que podemos pegar as áreas dos quadrados que partem dos catetos e "rearranjá-las" para que formem a área do quadrado que parte da hipotenusa.

Aluno D

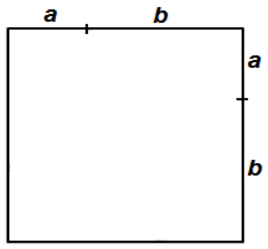
Fonte: Dados da pesquisa.

3ª Situação – Tarefa 5

3ª Situação

Observe o quadrado a seguir.

Figura 23



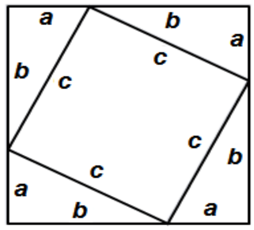
Fonte: pesquisadora

a). Quanto mede o lado desse quadrado?

b). Que produto notável determina a área desse quadrado? Desenvolva-o.

Agora veja como esse quadrado foi dividido.

Figura 24



Fonte: Imagem do livro de Walle (p. 460)

Note que temos 4 triângulos iguais e um quadrado de lado c.

Como calcularíamos a área total do quadrado maior, usando esses triângulos e o quadrado de lado c?

A seguir, um exemplo:

$$c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right) \;=\; c^2 + 2ab$$

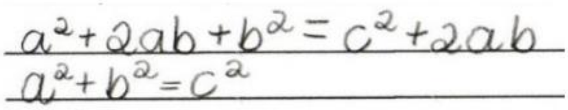
c) Analise que a expressão obtida acima $(c^2 + 2ab)$, assim como a obtida na letra b dessa atividade, representam a área do quadrado maior, logo são iguais. Iguale ambas expressões. A qual nova expressão você chegou?

A Situação 3 exigiu dos alunos a compreensão de habilidades na resolução de produtos notáveis que levaria ao Teorema de Pitágoras. No item a, 9 alunos registraram corretamente a medida do lado do quadrado apresentado e um aluno registrou a área, pois elevou a medida do lado ao quadrado.

No item b, foi pedido o produto notável que determinava a área do quadrado apresentado. Todos os 10 alunos apresentaram e desenvolveram corretamente o produto notável.

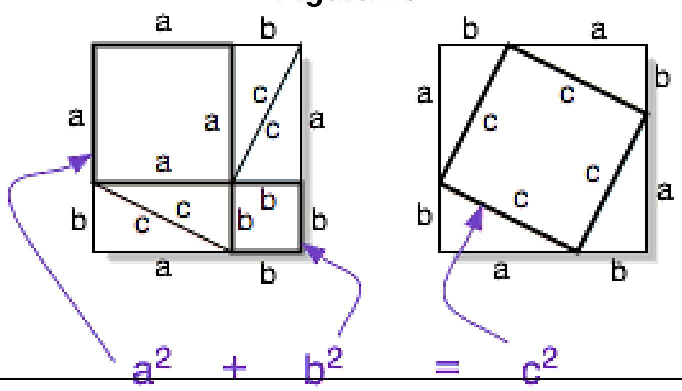
Após explicações dadas pelo enunciado da tarefa, foi proposto aos alunos, no item c, que igualassem a expressão $(c^2 + 2ab)$, a expressão obtida no item b, visto que ambas representam a área do quadrado maior. Três alunos registraram que não conseguiram compreender e desenvolver a expressão algébrica proposta. Os outros 7 alunos desenvolveram a expressão corretamente e chegaram ao Teorema de Pitágoras. A seguir o registro feito pelo aluno B.

Figura 25 – Registro dos alunos para o item A -3ª Situação – Tarefa 5



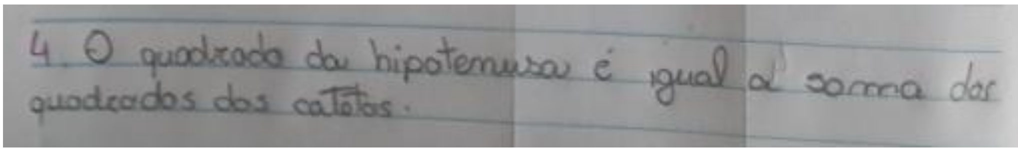
Aluno B

Fonte: Dados da pesquisa

4ª Situação – Tarefa 5
4ª Situação Estude a imagem a seguir e escreva um parágrafo explicativo para demonstrar o Teorema de Pitágoras. **Figura 26** 

De todas as questões propostas, essa foi a que os alunos apresentaram maior dificuldade. Dos 10 alunos, 3 não conseguiram desenvolver o raciocínio e deixaram a questão em branco. Os outros 7 alunos descreveram o teorema de Pitágoras, mas não conseguiram interpretar a situação geométrica que comprovaria o Teorema de Pitágoras. Muitos alunos apresentam dificuldade no raciocínio e na manipulação geométrica que questões desse tipo exigem. A seguir a resposta registrada pela maioria dos alunos a essa questão.

Figura 27 – **Registro dos alunos para o item A-4ª Situação – Tarefa 5**



Aluno E

Fonte: Dados da pesquisa

5.6 Análise dos processos resolutivos da 6ª Tarefa

Tarefa 6: Investigando as relações métricas do triângulo retângulo
Objetivos: Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo utilizando a semelhança de triângulos. **Material utilizado:** Caderno de atividades **Tempo aproximado para o desenvolvimento das questões:** 50 minutos

Tarefa 6
1 - Que relação podemos estabelecer entre as medidas dos segmentos a, m e n? 2 - Temos que o segmento n é a projeção do cateto c sobre a hipotenusa a. E o segmento m, de quem é projeção? 3 - Analisando os triângulos ABC e ABD.

a). Eles possuem ângulos em comum? Se sim, quais?

b). Eles são semelhantes? Justifique.

4 - Analisando os triângulos ABC e ACD.

a). Eles possuem ângulos em comum? Se sim, quais?

b). Eles são semelhantes? Justifique.

5 - Complete a afirmativa a seguir.

Como os triângulos______ e______ são semelhantes ao triângulo______ então esses três triângulos são semelhantes entre si.

6 - Já que os triângulos são semelhantes, temos que seus lados correspondentes são proporcionais, com isso podemos escrever algumas proporções. Vamos lá!

1º) Triângulos ABC e ABD

$\frac{a}{c} = \frac{c}{}$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{}$

2º) Triângulos ABD e ACD.

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{}$$

3º) Triângulos ABC e ACD.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{}$$

Considere as relações $\boldsymbol{b^2 = a.m}$ e $\boldsymbol{c^2 = a.n}$. Vamos adicionar membro a membro em tais relações. Acompanhe.

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = am + an}$$

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = a(m + n)}$$

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = a.a}$$

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}$$

7 - O que foi feito da 1ª para 2ª linha no 2º membro?

8 - Por que na 3ª linha obtivemos $a.a$?

9 - A qual importante relação você chegou?

A Tarefa 6 foi feita durante a aula de matemática com o acompanhamento da pesquisadora. Participaram dessa aula todos os alunos do 9° ano da escola, inclusive os 10 alunos envolvidos na pesquisa.

Com o ensino remoto a comunicação/interação ficou bem prejudicada, visto que nem todos os alunos se sentem à vontade em participar interativamente pela tela do computador. Contudo, dentre os que participaram pôde-se perceber que eles não tinham ideias acerca do que são projeções. Foi preciso desenvolver tal conhecimento no decorrer da aula.

O desenvolvimento das questões 3 e 4 ocorreu de forma tranquila. Pode-se perceber que os alunos haviam compreendido o estudo da semelhança de triângulos. Na questão 5 percebeu-se que alguns alunos tiveram dificuldade em concluir que os três triângulos eram semelhantes entre si. Não estava clara a ideia de que se dois triângulos são semelhantes a um terceiro triângulo, então, todos os triângulos são semelhantes entre si.

No processo resolutivo da questão 6, desenvolveu-se bastante a ideia de que lados opostos a ângulos congruentes são proporcionais. Partindo disso, foi fácil completar as proporções e obter as relações métricas.

Na questão 7, grande parte dos alunos perceberam que houve uma fatoração, mas poucos lembraram o tipo de fatoração – colocação de um fator comum em evidência.

Na questão 8, muitos alunos voltaram à questão 1 respondida anteriormente, afirmando que a=m+n.

Foi gratificante ler pelo chat do aplicativo de videoconferência, a escrita de muitos alunos se sentindo surpresos ao se depararem com mais uma forma de “encontrar” o Teorema de Pitágoras. Eles conseguiram identificar que tanto a geometria quanto a álgebra estavam muito presentes no estudo desenvolvido.

Ao concluir essa atividade os alunos relataram o quão foi importante o conhecimento prévio que eles tinham de proporcionalidade no decorrer das tarefas apresentadas, em especial para essa.

RESUMO
RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO
Você deverá escrever na linguagem corrente as relações métricas deduzidas por você. Analise a escrita de uma das relações que usamos neste estudo e registre as próximas.
$\boxed{\mathbf{a = m + n}}$ Em qualquer triângulo retângulo, a medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma das medidas do comprimento das projeções dos catetos sobre ela.
$\boxed{\mathbf{a.h = b.c}}$ $\boxed{\boldsymbol{c^2} = \mathbf{a.n}}$ $\boxed{\boldsymbol{h^2} = \mathbf{m.n}}$ $\boxed{\boldsymbol{b^2} = \mathbf{a.m}}$ $\boxed{\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}}$

O intuito dessa atividade foi o de registrar na linguagem corrente as relações métricas pois, na prática, percebe-se que os alunos tendem a decorar as relações, partindo das incógnitas e, ao alterá-las, o aluno perde a referência e não consegue desenvolver a questão proposta. É comum utilizarmos a incógnita *h* para a medida do segmento que representa a altura, *m* e *n* para as medidas dos segmentos que representam as projeções dentre outros, mas, tais incógnitas podem ser alteradas. Sendo assim, ao analisar e utilizar os termos altura, projeção de certo cateto, hipotenusa e cateto, o aluno tem a oportunidade de compreender melhor tais relações. Caso queira memorizá-las, ele irá minimizar a chance de ocorrer os erros presentes na memorização dessas relações, partindo de incógnitas. Esse registro foi feito pelos alunos durante a aula e, em seguida, foi avaliado, de forma coletiva, com a intervenção da pesquisadora/professora.

5.7 Análise dos processos resolutivos da 7ª Tarefa

Tarefa 7: Atividades - As relações métricas do triângulo retângulo
Objetivos: Desenvolver atividades envolvendo o estudo das relações métricas do triângulo retângulo.
Material utilizado: Caderno de atividades
Tempo aproximado para o desenvolvimento das questões: 50 minutos

Questão 1 – Tarefa 7

1) Escreva um problema envolvendo relações métricas que tenha como resposta o processo a seguir.

$$\boldsymbol{h^2 = x.y}$$

$$20^2 = 16.y \quad \rightarrow \quad 400 = 16.y$$

$$y = 25$$

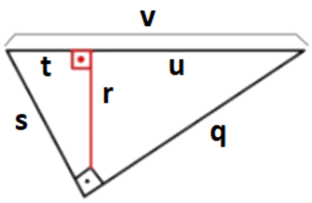
2). Escreva um problema, envolvendo relações métricas, que tenha como informações os dados a seguir e resolva-o.

a) Hipotenusa mede 64 cm e uma de suas projeções mede 16 cm.

b) Um dos catetos mede 24 cm e sua projeção sobre a hipotenusa mede 12 cm.

3). Complete as sentenças de acordo coma relações métricas estudadas.

$r^2 =$ __ . u	__ = t . v	__ = $r^2 + t^2$
$q^2 =$ u . __	r . __ = s . q	__ = t + u



O objetivo dessas 3 tarefas foi possibilitar aos alunos uma atividade que envolve as relações métricas, diferente dos apresentados pela a maioria dos livros didáticos. Como, por exemplo, na questão 1, foi dado o processo resolutivo de um problema e cabe ao aluno elaborar tal problema, o contrário do que é geralmente proposto. Já na questão 2, é relevante que os alunos sejam capazes de identificar a hipotenusa, a altura, os catetos e as projeções, caso contrário não serão capazes de desenvolver o processo resolutivo. Na questão 3, é solicitado aos alunos que completem as sentenças. O diferencial é que foram utilizadas incógnitas pouco frequentes nesse tipo de estudo e o triângulo foi apresentado em uma posição não convencional. É importante ressaltar que pequenas alterações levam nossos alunos a reflexões que são ricas na construção do conhecimento. Os alunos tiveram aproximadamente 20 m para fazer tais questões. Em seguida, elas foram avaliadas, de forma coletiva, com a mediação da pesquisadora/professora.

No fechamento dessa atividade, vários alunos que participaram da pesquisa, comentaram que apesar de não lembrarem ou não conhecerem alguns conceitos/conteúdos trabalhados na sequência de tarefas, tiveram facilidade em desenvolvê-las, pela forma como foram organizadas, apresentadas e conduzidas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do referencial teórico apresentado nesse trabalho, foi possível constatar que a Geometria foi construída em um longo período por homens das mais diversas culturas. Inicialmente apresentando um conhecimento mais intuitivo e empírico para, depois, tornar-se abstrato, com diferentes níveis de sistematização ao longo dos anos.

Foi possível observar que o principal objetivo da didática é oferecer condições pedagógicas que favoreçam a compreensão do aluno nas diferentes atividades que lhes são demandadas e, consequentemente, o acesso ao saber. Cabe ao professor conhecer as especificidades educacionais da sua disciplina, dominar o conteúdo, indicar objetivos a serem alcançados, cercar as habilidades em desenvolvimento, diagnosticar o que seus alunos já sabem sobre o que será tratado, para melhor desenvolver sua prática pedagógica, dentre outros. Ele deve compreender que seu trabalho pode conduzir ao sucesso ou ao fracasso da didática, sendo que essa está a serviço do ensino e seu mau uso reflete nos resultados que, nesse caso, em sendo frágeis, não se pode debitar a ela o insucesso de determinada aprendizagem.

Com a sequência de tarefas apresentada nessa pesquisa, envolvendo o estudo das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, foi possível minimizar vários obstáculos didáticos. Uma das explicações para esse feito é que a sequência se iniciou com a retomada de conceitos e habilidades que são essenciais para a construção do conhecimento sobre as Relações Métricas.

Deduzimos, também, que a questão da generalização precoce de uma ideia é um outro obstáculo didático. O conhecimento matemático não se inicia pelo fato geral em si, mas de casos particulares através de um processo de reflexões, de erros, de avanços e de indagações. Ao tentar mostrar uma visão geral do todo, a essência do entendimento perde espaço para a superficialidade. Constatou-se, através da sequência de tarefas apresentada nessa pesquisa, que as generalizações e as abstrações são mais facilmente compreendidas através de um processo evolutivo, envolvendo diferentes abordagens. Para chegar às Relações Métricas foi preciso perpassar por diferentes habilidades e conteúdos, inclusive estudados em anos anteriores. Isso proporcionou a alguns alunos a oportunidade de rever conteúdos cujo conhecimento ainda não havia sido consolidado.

A importante concepção de que um bom currículo deve ter espaço para as investigações, exercícios e problemas, proporciona o equilíbrio necessário para se desenvolver o conhecimento matemático dos alunos. Na sequência de tarefas apesentada na pesquisa, ficou evidenciada a importância da inserção das investigações e da resolução de problemas. Elas geram, de fato, experiências ricas de aprendizagem. Aos professores, cabe o desenvolvimento de ideias para oportunizar esse tipo de atividade. Para Walle (2009), através da resolução de problemas pode-se atender a várias necessidades curriculares. Ele cita:

1. **Concentrar** a atenção dos alunos sobre as ideias e dar sentido a elas
2. **Desenvolver** nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido.
3. **Valorizar** as ideias individuais dos alunos no processo de resolução.
4. **Facilitar** a avaliação do processo de ensino-aprendizagem, bem como permitir tomadas de decisões educacionais.
5. **Desenvolver** o potencial matemático: argumentar, justificar, comunicar, dentre outros.

Esse estudo problematizou que, nas aulas de investigação e resolução de problemas, é importante que o aluno tenha clareza do que se espera dele. Outra evidência possível é a de que o professor poderá desenvolver alguma atividade com o intuito de preparar seus alunos para a tarefa que está por vir, ativando seus conhecimentos prévios úteis e aquecendo pensamentos que orientem suas reflexões. Durante a realização da tarefa é importante que professor deixe seus alunos construírem seu conhecimento, evitando antecipações desnecessárias para que a tarefa permaneça desafiadora. O professor poderá pedir para que os alunos trabalhem primeiro sozinhos para, depois, trocar ideias com os colegas ou já iniciar socializando ideias. Ele poderá pensar em orientações ou dicas para ajudar a turma em caso de bloqueios que impeçam o desenvolvimento da tarefa. Deverá pensar em como desenvolverá as discussões dos processos resolutivos, qual organização será melhor para que os alunos comuniquem suas descobertas e quais perguntas ele poderá fazer para endossar a discussão. É recomendável que o professor sintetize as principais ideias e identifique os futuros problemas. Consideradas essas reflexões, o professor poderá escrever o plano a ser desenvolvido, ou seja, listar todas as decisões tomadas por ele, assim como os materiais a serem utilizados.

Alguns alunos registraram nos comentários que tiveram prazer em desenvolver as tarefas, pois, mesmo “não conhecendo” alguns conteúdos conseguiram compreender a atividade, partindo de “conhecimentos que já possuíam”. O estudo da proporcionalidade, muito bem compreendido no 8º ano, foi um dos conhecimentos já adquiridos que facilitou a construção de novos no decorrer da investigação. Observou-se que a forma como as atividades foram propostas, com uma linguagem acessível aos alunos, priorizando a clareza e a objetividade, foi relevante para a compreensão do tema para maioria dos alunos. Alguns alunos afirmaram que tinham se esquecido de algumas definições e conceitos, mas que foi fácil fazer uma pesquisa, relembrar e seguir no desenvolvimento da atividade.

No decorrer da análise dos dados foi possível perceber a dificuldade que muitos alunos possuem em linkar uma informação a outra, para extrair relações ou conclusões. Isso por observarem as imagens por partes, sem visualizar o todo. Como, por exemplo, podemos citar a dificuldade dos alunos em assimilar que, para verificar se dois triângulos são semelhantes basta analisar os lados ou os ângulos.

Foi interessante também observar que a relação pitagórica, por ser algébrica, geométrica e métrica ao mesmo tempo deu aos alunos a oportunidade de compreendê-la por meio de diferentes processos. Essa constatação nos leva a perceber que nossos alunos poderão desenvolver vários conhecimentos, se bem desenvolvida uma relação como essa.

O grande ganho no desenvolvimento dessa sequência de tarefas foi a oportunidade de reconstruir a compreensão do que é saber e fazer matemática, de forma a permitir mudanças na prática docente. As explicações, os relatos e os registros feitos pelos alunos, por exemplo, devem ser uma prática regular nas aulas. Fica comprovado o quanto é importante proporcionarmos aos alunos experiências com atividades de diferentes propostas e formatos de enunciados.

Não poderia deixar de relatar aqui o quão foi desafiador desenvolver essa pesquisa em plena pandemia com escolas trabalhando com o ensino remoto. Para todos os professores, o ano de 2020 foi um ano extremamente significativo. Foi um ano de busca, de descobertas, de tentativas, de erros e de acertos, enfim, um ano de possibilidades. Confesso que assim que a escola optou, em março de 2020, pelo uso do ensino remoto em caráter de urgência, me questionei se seria possível desenvolver todos os estudos propostos pelo currículo do ano que leciono. Diante das dificuldades, concluí que é possível, sim, desenvolver o conhecimento dos nossos alunos via ensino remoto. Percebi que alterando nossa visão tradicionalista de educação, é possível alcançar os alunos por meio de propostas que lhes sejam atraentes. Fica nítido o quanto a escola está desafiada a reinventar e inovar o sistema de ensino.

REFERÊNCIAS

AMÂNCIO, R. A. O desenvolvimento do Pensamento Geométrico: Trabalhando polígonos, especialmente quadriláteros. 2013. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2013.

BRASIL. BNCC. *Base Nacional Comum Curricular*. Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2018.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas. 1996

CABRAL, S. A. B, Desenvolvendo o Pensamento Argumentativo Geométrico: Construindo práticas Investigativas. 2017. 110f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2017.

D'AMORE, Bruno. Elementos de Didática da Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

EVANGELISTA, M. G. B, Construindo o conceito de ângulo poliédrico a partir dos elementos dos polígonos. 2017. 112f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2017.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.47-76.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos – Coleção Formação de Professores. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2006

GAZIRE, Eliane Scheid. O não resgate da Geometria. 2000. 224f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Campinas, SP, 2000.

JONNAERT, P., “Dévolution versus contre-dévolution!Un tandem incontournable pour le contrat didactique”. In: Au-delà des didactiques, le didactique: débats autour de concepts fédérateurs. De Boeck Université, 1996

LEAL, Leiva de Figueiredo Viana. A pertinência da abordagem epistemológica nas questões didáticas. Brasília. SESI-DN. Portal do Professor, 2019, pág.03.

Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (Ensino Fundamental). v. 3. Brasília: MEC, 1997.

PAIS, L. Didática da matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

PAIS, Luís Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. In Zetetiké. v. 4, n. 6, julho/dezembro, pp. 65-74, Campinas: CEMPEM /FE/ UNICAMP, 1996.

PAIS, Luís Carlos.Uma análise do Significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria.In ANPED, 2000. Disponível em: www.anped.org.br/23/textos/19/1919t.pdf. Acesso em 07 de junho de 2012.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações Matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SHULTE, A. P. Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994. p. 156-167.

VAN DE WALLE, John A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. São Paulo: Papirus, 2009.

APÊNDICE A – Produto

CADERNO DE TAREFAS

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Este Caderno de Tarefas é fruto da dissertação de Mestrado DIDÁTICA DE ENSINO PELA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: Relações métricas em questão. O objetivo deste material é servir de apoio ao professor no seu trabalho com o desenvolvimento de conceitos geométricos, através da investigação e experimentação, no estudo das Relações Métricas do Triângulo Retângulo. Para desenvolvê-lo, realizou-se uma pesquisa com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada de Belo Horizonte.

Inicia-se este caderno com uma síntese das ideias de estudiosos da Educação Matemática que fundamentaram a pesquisa, portanto, a escrita da dissertação e a construção dessa sequência de tarefas. Dentre eles estão: Pais (2001), Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) e Van de Walle (2009). Em seguida, é apresentado um quadro com os conteúdos abordados pela sequência de tarefas, juntamente com os objetivos e os recursos a serem utilizados. Por último, são apresentadas cada uma das tarefas que serão desenvolvidas com o intuito de preparar os alunos ao aprendizado das Relações Métricas do Triângulo Retângulo.

Como a pesquisa foi desenvolvida durante a pandemia da Covid-19 e as escolas estavam trabalhando com ensino remoto, foi preciso criar uma sequência um pouco mais indutiva, para apresentar, com maior clareza, o que se esperava ser interpretado em cada enunciado. Buscou-se elaborar atividades que permitissem aos alunos vivenciar experiências que promovessem a ressignificação e/ou o desenvolvimento de conceitos e habilidades da geometria plana e que são relevantes para a verdadeira compreensão das Relações Métricas dos Triângulos Retângulos. Constatou-se que, com um bom trabalho desenvolvido no ensino remoto, é possível desenvolver o conhecimento dos alunos. Comprovou-se que a sequência didática apresentada a seguir facilitou o desenvolvimento do estudo das Relações Métricas do Triângulo Retângulo.

Bom trabalho!

2. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A GEOMETRIA

Nas últimas décadas, a educação matemática vem passando por várias mudanças. É inconcebível imaginarmos mudanças na educação, sem pensarmos em mudanças na prática do educador, nas convicções que ele possui quanto ao saber e fazer matemática. Segundo Walle (2009), o conhecimento matemático e o conhecimento da forma como alunos aprendem matemática são as principais ferramentas de um bom professor.

Nesse contexto, encontra-se a Didática, que tem o objetivo de estudar os processos de ensino e aprendizagem, focando ora no processo geral de ensino, ora nas disciplinas específicas. Seu estudo nos mostra que, para ensinar determinada disciplina não basta sabê-la, é preciso conhecer como o saber dela se constrói. A seguir, D'Amore (2007, p.24), cita a relevância da didática.

> "Com efeito, no caso da Didática, são analisados os procedimentos cognitivos, os 'gestos mentas' dos sujeitos, a emergência de concepções novas, não apenas enquanto produtos dos controles internos que os sujeitos exercem no problema, mas também em função dos controles externos provenientes da situação. Não se trata, pois, de produzir uma teoria psicológica do sujeito diante de um problema matemático pretexto; é necessário progredir na compreensão das condições que tornam possível o encontro do aluno com o problema e a assunção relativa por parte do próprio aluno."

Os estudos envolvendo a Didática da Matemática é algo muito recente na área e uma das tendências encontra-se na Educação Matemática, que visa favorecer as relações entre teoria e prática, dentro de um *sistema didático* em que educador, aluno e saber são inseparáveis. Estudiosos dessa área apontam que, para a construção de uma boa didática, é preciso conhecer as fontes de influências na construção do saber matemático e compreender as transformações em que os conteúdos passam, até a forma final com que são apresentadas em sala. Para Pais (2001) a didática da matemática, assim como Brousseau (1986) propõe, deve-se analisar o saber matemático, o trabalho do matemático, do professor de matemática e da atividade intelectual do aluno.

Para os professores fica o desafio de estruturar uma didática significativa, que conduza os trabalhos escolares, estruturando condições para que os alunos alcancem os conceitos e saberes previstos pelos currículos e que são necessários ao desenvolvimento deles. Para além disso, ressalta-se a necessidade de criação de ambientes que facilitem a compreensão do aluno, que estimulem a criatividade, a autonomia e a produção do conhecimento, como ações previstas pela didática. Um exemplo seria o ambiente de trabalho com as investigações.

Nesse contexto é que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC,2018), documento que nos traz o detalhamento de conteúdos e competências específicas de cada área de conhecimento e disciplina, recomenda o trabalho investigativo e a resolução de problemas.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (p.266)

As aulas investigativas são pretextos para gerar aulas agradáveis de discussões, algo não habitual nas aulas tradicionais de matemática. Em um ambiente de manipulação e investigação, o aluno encontra condições para produzir o conceito, o conhecimento, experimentar combinações, expressar-se livremente, desenvolver a criatividade, resolver problemas e potencializar suas ideias. Em coerência ao que se afirma é que esta pesquisa adotou o conceito de investigação citado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 9-13), para os quais investigar

> […] é procurar conhecer o que não se sabe. […] Mas isso não significa, necessariamente, lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. […] Significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso.

A resolução de problemas é hoje considerada o motor propulsor do saber escolar da matemática. Pais (2001) afirma ser ela o contexto ideal para que os alunos desenvolvam sua compreensão matemática. A resolução de problemas é um passo inicial para se alcançar o conhecimento. O desenrolar de uma investigação matemática pode ocupar uma aula ou mais. Na prática Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) afirmam a importância das três fases a seguir:

1º) Introdução da tarefa por parte do professor.

O primeiro grande passo para iniciar uma investigação é ter clareza do problema que se deseja resolver. É importante que o professor garanta que todos os alunos compreendam a essência do trabalho, caso contrário, todo o processo ficará comprometido.

2º) Realização da tarefa.

O professor deverá criar um ambiente favorável para o desenvolvimento da atividade. É importante que o aluno se sinta motivado e à vontade para trabalhar. Nesse momento os alunos exploram o problema, formulam questões, conjecturas, testam e justificam ideias. A postura do professor com a turma é importante. Sendo ele um mediador, não pode impedir que cada estudante elabore o seu pensamento. Para isso, ele deve dar tempo aos alunos para que observem, pensem e expressem seus pensamentos, antes de fazer intervenções. A linguagem do professor precisa ser clara e cuidadosa, suficientemente rica para facilitar a compreensão dos significados do que o aluno precisa entender.

3º) Discussão dos resultados em que os alunos relatam a turma o trabalho realizado.

Nesse momento os alunos partilham o trabalho realizado, onde há uma sistematização das principais ideias e reflexões gerais sobre o trabalho desenvolvido. Havendo confrontos de ideias e estratégias, o professor deverá intervir mais uma vez, como mediador e deve estimular os alunos a participarem, a fazerem intervenções para facilitar o entendimento do que está sendo focado.

As atividades investigativas no estudo da Geometria, além de explorar os conceitos, traz a importante ideia de que o conhecimento geométrico vai muito além da simples memorização e da utilização de técnicas. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p.71),

> As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de

> representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática.

A geometria, que nasceu junto com as primeiras civilizações e que foi uma das primeiras aplicações da matemática no cotidiano das pessoas é, hoje, um dos ramos da matemática cujo campo fértil possibilita o desenvolvimento de habilidades de maneira criativa. A partir de uma boa didática, o aluno poderá vivenciar experiências que o leve a desenvolver habilidades de observação e de lógica, percepção espacial, argumentação, representação gráfica, imaginação, iniciativa, descoberta e criatividade e não somente a memorização das nomenclaturas das figuras geométricas.

A geometria tem dois grandes objetivos: o desenvolvimento do senso espacial/raciocínio geométrico e do conteúdo geométrico. Para Walle (2009) o senso espacial está ligado à intuição ou sensibilidade sobre as formas e as relações entre elas, incluindo habilidades para visualização mental. Quanto aos conteúdos geométricos, eles registram, como objetivo, a aprendizagem dos temas: formas e propriedades, transformações, localização e visualização. Esses quatro temas aparecem diluídos no currículo de todos os anos.

Certamente os alunos não pensam da mesma forma e podem também não estar em um mesmo nível de pensamento geométrico. Mas, todos são capazes de progredir no desenvolvimento das habilidades de pensar e de raciocinar geometricamente. Nesse contexto, Walle (2009) cita que o casal Van Hiele, em 1959, desenvolveu uma teoria de níveis que descreve os processos de pensamento usados. Esses níveis evoluem da visualização, onde a aparência da forma é quem a define, ao rigor, onde há forte análise dos sistemas dedutivos axiomáticos. São eles:

Nível 0 – visualização

Nível 1 - análise

Nível 2 - dedução informal

Nível 3 - dedução

Nível 4 – rigor

O pensamento geométrico, ao ser construído a partir das experiências vividas pelos alunos, exige do professor a reponsabilidade de criar condições favoráveis para seu ensino e aprendizagem. Pais (1996) afirma que há quatro elementos fundamentais que influenciam no processo de ensino e aprendizagem da Geometria: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental. Esses quatro elementos estão correlacionados aos aspectos intuitivo, experimental e teórico do conhecimento geométrico. O objeto, o desenho e a imagem mental são representações dos conceitos geométricos.

- O objeto: refere-se a modelos ou materiais didáticos.
- O desenho: é uma forma de representação; é uma ilustração dos conceitos.
- A imagem mental: é quando a pessoa é capaz de descrever as propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência deles. A formação de imagens mentais é uma consequência quase que exclusiva do trabalho com desenhos e objetos.

Uma das inquietações motivadoras deste caderno de tarefas foi pensar em como relacionar uma experiência de investigação com o estudo das Relações Métricas do Triângulo Retângulo. Ao analisar os livros didáticos, percebe-se que o conteúdo Relações Métricas nos Triângulos Retângulos é apresentado, mantendo o "padrão tradicional" de começar com uma explicação do conteúdo, geralmente seguido de questões resolvidas, que indicam o passo a passo de como os alunos deverão fazer os exercícios que serão apresentados logo na sequência. O que se observa é que, quando o professor dá a definição formal e oferece exercícios dados por fórmulas, acaba por propiciar ao aluno um conhecimento restrito do conteúdo. Tal situação incapacita o aluno de desenvolver as relações métricas em contextos mais amplos e problematizados.

Com esse trabalho pretende-se mostrar que Matemática deve ser vista como um processo em permanente evolução, ou seja, que não se trata de uma ciência pronta e acabada a ser apenas estudada e sim, construída de maneira dinâmica. É importante que o professor elabore atividades de forma a diminuir a distância entre o conhecimento matemático e o aluno. Isso só pode ser feito se forem criados ambientes em que os alunos se sintam capazes de desenvolver espírito de investigação e a criatividade na solução dos problemas propostos.

Ao pensar na estrutura deste Caderno de Tarefas, procurou-se elaborar atividades que alinhassem a investigação matemática à importância dos conhecimentos anteriormente construídos, suficientemente relevantes para o aluno aprender, desenvolvendo, principalmente, uma postura autônoma em nossos alunos. Procurou-se consolidar os conhecimentos sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, a classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos, o estudo da semelhança, em especial dos triângulos para, depois, entrar com o estudo das Relações Métricas do Triângulo Retângulo.

Assim, a sequência didática que será apresentada a seguir foi elaborada a partir da teoria da Investigação Matemática e das vivências da pesquisadora com o objetivo de promover tarefas eficientemente capazes de desenvolver a verdadeira compreensão dos alunos diante das Relações Métricas do Triângulo Retângulo.

3. A SEQUÊNCIA DE TAREFAS

As atividades dessa Sequência de Tarefas foram desenvolvidas com base nas leituras realizadas, buscando coerência com nossos pressupostos teóricos e pela própria prática docente. Baseiam-se na investigação e experimentação, com forte reflexão diante das experiências vivenciadas. Elaboraram-se atividades exploratórias com o objetivo de proporcionar aos alunos experiências que possibilitassem a construção ou ressignificação de conceitos da geometria plana, que são relevantes para a compreensão das Relações Métricas do Triângulo Retângulo.

A proposta principal foi desenvolver um trabalho focado na investigação matemática, na experimentação e nos recursos didáticos possíveis para o contexto em que estávamos vivendo: o ensino remoto; o que não exclui a utilização deste material no ensino presencial, o que traria mais possibilidades de exploração.

É de fundamental importância que os alunos sejam motivados a desenvolver registros dos seus pensamentos, dos processos desenvolvidos e conclusões obtidas. Assim, estarão desenvolvendo sua linguagem matemática e a comunicação, além de terem a oportunidade de refletir ainda mais sobre os processos desenvolvidos por eles.

Ao final de cada atividade, recomenda-se que os alunos socializem as ideias e processos utilizados na resolução das situações, com o objetivo de conhecer as explorações e descobertas feitas pelos colegas. Neste momento o professor deverá fazer a mediação da aprendizagem, intervindo e instigando os alunos, sempre que preciso.

Resume-se, no quadro abaixo, a organização das tarefas com os objetivos relacionados a cada uma e os recursos necessários à realização das atividades:

Tarefas / Conteúdos abordados		**Objetivos**	**Recursos**
1	Investigando a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer	- Reconhecer os ângulos em um triângulo. - Compreender que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.	Caderno de atividades, papel colorido, tesoura e 3 lápis de cores diferentes.
2	Investigando os triângulos quanto aos lados e ângulos	- Classificar triângulos em relação às medidas dos lados e dos ângulos.	Caderno de atividades, régua e transferidor.
3	Investigando o conceito de Semelhança de Polígonos	- Compreender o conceito semelhança de polígonos e a razão de semelhança. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois polígonos sejam semelhantes.	Caderno de atividades, régua e transferidor.
4	Investigando o conceito de Semelhança de Triângulos	- Compreender o conceito semelhança de triângulos e a razão de semelhança. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.	Caderno de atividades, régua, canudinhos (finos), tesoura e transferidor.

Tarefas / Conteúdos abordados		Objetivos	Recursos
5	Investigando o Teorema de Pitágoras	- Reconhecer os elementos de um triângulo retângulo. - Demonstrar o Teorema de Pitágoras.	Caderno de atividades e papel quadriculado
6	Investigando as relações métricas do triângulo retângulo	- Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo utilizando a semelhança de triângulos.	Caderno de atividades
7	Atividades - As relações métricas do triângulo retângulo	- Desenvolver atividades envolvendo o estudo das relações métricas do triângulo retângulo.	Caderno de atividades

TAREFA 1:

INVESTIGANDO A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

Objetivos:

- Reconhecer os ângulos em um triângulo.
- Compreender que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Material utilizado:

- Papel colorido, tesoura e 3 lápis de cores diferentes.

Duração: 50 minutos

1ª Situação

Na folha colorida, faça um triângulo qualquer. Pinte de cores diferentes cada um de seus ângulos internos.

Agora, recorte esse triângulo em três pedaços de forma que cada pedaço contenha um ângulo colorido por você anteriormente.

Encaixe esses ângulos. Cole na caixa a seguir esse encaixe.

Agora responda:

a). Quantos graus mede esse ângulo que você formou nesse encaixe? _______

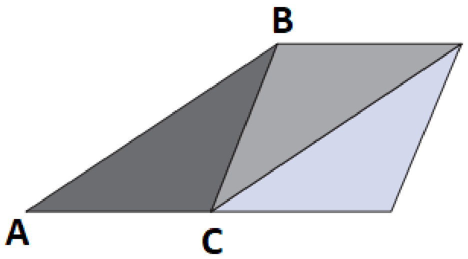
b). Desenhe outros dois triângulos quaisquer e faça o mesmo procedimento.

c). Que ângulo você formou nestes novos encaixes? _________________

d). Com os procedimentos acima, o que podemos concluir em relação à soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer?

2ª Situação

Um aluno do 9º ano cortou três triângulos congruentes. Ele empilhou três folhas de papel e cortou as três formas de uma vez. Colocou um triângulo sobre uma reta, o segundo diretamente ao lado na mesma orientação e o terceiro triângulo no espaço entre os dois triângulos, como mostra a figura. Baseando nessa experiência, registre nas linhas a seguir as ideias que você teve. Que conjectura você consegue fazer sobre a soma dos ângulos em um triângulo?

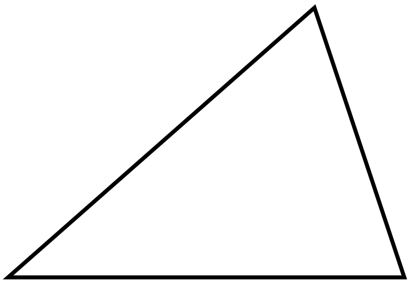


3ª Situação

Triângulos são polígonos formados por três lados, três vértices, três ângulos internos e três ângulos externos.

a) O que é ângulo externo?

b). Destaque um dos ângulos externos do triângulo a seguir.



c) **_Propriedade dos triângulos: A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele._**

De que forma podemos relacionar a propriedade citada anteriormente com o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer?

____

____

TAREFA 2:

INVESTIGANDO OS TRIÂNGULOS QUANTO AOS LADOS E ÂNGULOS

Objetivo:

- Classificar triângulos em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

Material utilizado:

- Régua e transferidor.

Duração: 50 minutos

1). Escreva tudo o que você puder sobre esses triângulos.

Equilátero: ____

____

Isósceles: ____

____

Escaleno: ____

____

Acutângulo: ____

____

Retângulo: ____

____

Obtusângulo: ____

____

2). No quadro a seguir, desenhe triângulos em cada um dos nove casos.

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutângulo			
Retângulo			
Obtusângulo			

TAREFA 3:

INVESTIGANDO O CONCEITO DE SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

Objetivos:

- Compreender o conceito semelhança de polígonos e a razão de semelhança.

- Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois polígonos sejam semelhantes.

Material utilizado:

- Régua e transferidor.

Duração: 50 minutos

Todos nós já tiramos fotos 3x4, seja para fazer documentos, matrículas em escolas, dentre outros. Ela recebe este nome justamente por possuir 3 centímetros de largura e 4 centímetros de altura. Veja a foto 3x4 a seguir.

Agora veja como podemos alterar as dimensões dessa foto usando recursos tecnológicos.

Imagem 1 - 6x8

Imagem 2 - 6x4

Imagem 3 - 3x8

1 - Com base nas imagens acima responda as questões a seguir.

a) O que houve com a imagem 1 se comparada com a foto 3x4? Como estão suas dimensões?

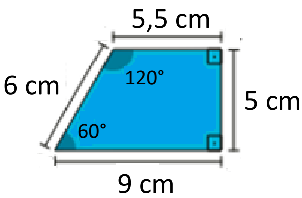
b) O que houve com a imagem 2 se comparada com a foto 3x4? Como estão suas dimensões?

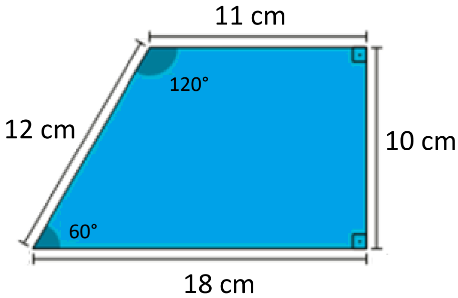
c) O que houve com a imagem 3 se comparada com a foto 3x4? Como estão suas dimensões?

d). Em quais imagens houve alteração quanto a forma se comparado com a foto 3x4?

e). Comparando a foto 3x4 com as imagens 1, 2 e 3 quais delas você considera serem semelhantes? Justifique.

2- Analise os polígonos a seguir.





Agora responda às perguntas.

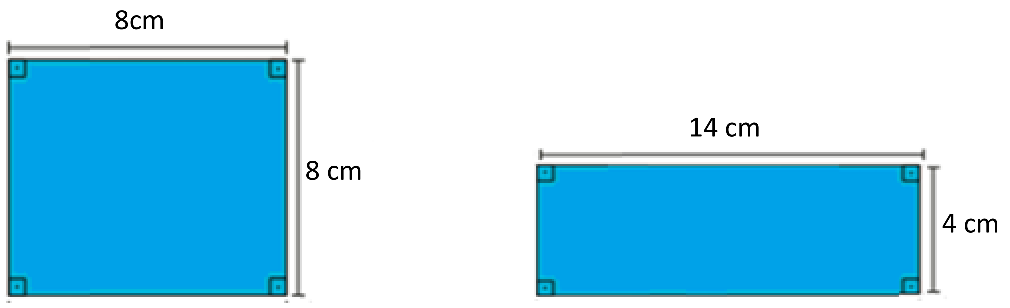
a) O que podemos afirmar quanto aos seus ângulos internos desses polígonos?

b) O que podemos afirmar quanto as medidas dos lados desses polígonos?

c). Houve alteração quanto a forma do primeiro para o segundo polígono?

d) Estes polígonos são semelhantes?

3 - Analise os quadriláteros a seguir.



Agora responda às perguntas.

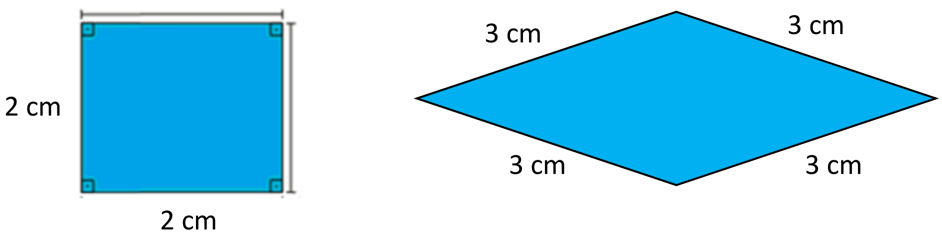
a) O que podemos afirmar quanto aos ângulos internos desses quadriláteros?

b) O que podemos afirmar quanto as medidas dos lados desses quadriláteros?

c). Houve alteração quanto a forma do primeiro para o segundo quadrilátero?

d) Estes quadriláteros são semelhantes?

4 - Analise os quadriláteros a seguir.



Agora responda às perguntas.

a). Os lados desses quadriláteros são proporcionais?

b). Os ângulos internos desses quadriláteros são congruentes?

c). Utilize as linhas abaixo para explicar se tais quadriláteros são ou não semelhantes.

____

____

____

Temos então que: sempre que ampliamos ou reduzimos uma figura sem alterarmos sua forma, obtemos figuras semelhantes à original.

A consequência disso é que todas as figuras semelhantes devem apresentar ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

Podemos concluir que: dois polígonos são semelhantes quando os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. O valor da razão entre os lados correspondentes é a razão de semelhança. No caso apresentado, considerando as duas primeiras fotos (3x4 e 6x8), a razão de semelhança entre os polígonos é 2.

Observação:

- Lados homólogos ou correspondentes são aqueles que se opõem a ângulos iguais.
- As medidas são proporcionais quando existe uma razão constante entre elas.

TAREFA 4:

INVESTIGANDO O CONCEITO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Objetivos:

- Compreender o conceito semelhança de triângulos e a razão de semelhança.

- Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Material utilizado:

- Régua, canudinhos (finos), tesoura e transferidor.

Duração: 50 minutos

Vimos que dois polígonos são semelhantes quando satisfazem a duas condições:

• os ângulos internos correspondentes são congruentes.

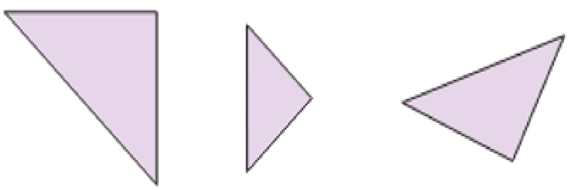
• os lados correspondentes são proporcionais.

Caso apenas uma dessas condições seja satisfeita, os polígonos não serão semelhantes.

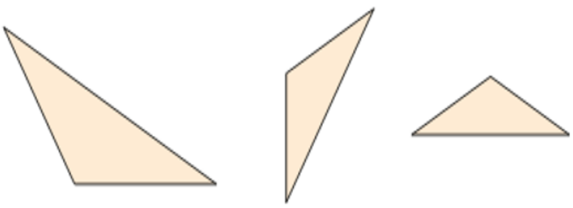
Agora, vamos compreender como o estudo da semelhança ocorre com os triângulos. Para começar, vamos verificar se os triângulos a seguir são semelhantes.

Coleção 1: Triângulos

Coleção 2: Triângulos retângulos e isósceles



Coleção 3: Triângulos isósceles com ângulo obtuso de 120°



1- Analisando as três coleções de triângulos acima, responda às perguntas as seguir.

a). Quanto aos três triângulos da Coleção 1, o que podemos afirmar quanto a seus:

- lados? ____
- ângulos?____

Estes três triângulos são semelhantes? Justifique.

____

____

b). Quanto aos três triângulos da Coleção 2, o que podemos afirmar quanto a seus:

- lados? ____
- ângulos?____

Estes três triângulos são semelhantes? Justifique.

____

____

c). Quanto aos três triângulos da Coleção 3, o que podemos afirmar quanto a seus:

- lados?____
- ângulos?____

Estes três triângulos são semelhantes? Justifique.

____

____

d). Ao tomarmos aleatoriamente dois triângulos de coleções diferentes, eles serão semelhantes? Justifique.

____

____

2- Agora, vamos estudar com mais profundidade a semelhança dos triângulos.

Utilizando canudinhos, construa o triângulo A e o triângulo B descrito a seguir. (Observação: Com a régua meça os segmentos desejados, depois, corte-os e una-os.)

TRIÂNGULO A	TRIÂNGULO B
Segmento AB = 3,8 cm Segmento BC = 5,4 cm Segmento AC = 6 cm	Segmento DE = 1,9 cm Segmento EF = 2,7 cm Segmento DF = 3 cm

Cole os canudinhos nas caixas a seguir, formando os triângulos desejados. Nomeie os vértices de cada triângulo.

TRIÂNGULO A	TRIÂNGULO B

Considerando esses triângulos, faça o que se pede.

a). Use o transferidor para determinar a medida dos ângulos internos do:

TRIÂNGULO A:____

TRIÂNGULO B:____

b). Determine a razão entre as medidas dos lados correspondentes desses triângulos.

AB e DE = ____________________________

BC e EF = ____________________________

AC e DF = ____________________________

c) Os triângulos A e B são semelhantes? Justifique.

____

____

Já que os triângulos são semelhantes, temos que a razão obtida no item b é chamada *razão de semelhança*.

3- Responda:

a). Se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados do outro triângulo, esses triângulos serão semelhantes?

____

b). Se os ângulos internos de um triângulo são congruentes aos ângulos internos de outro triângulo, esses triângulos serão semelhantes?

____

c). Para verificar se dois triângulos são semelhantes é preciso estudar se os lados são proporcionais e se os ângulos são congruentes? Ou basta verificarmos uma dessas condições? Explique.

____

____

____

____

TAREFA 5:

INVESTIGANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Objetivos:

- Reconhecer os elementos de um triângulo retângulo.

- Demonstrar o Teorema de Pitágoras.

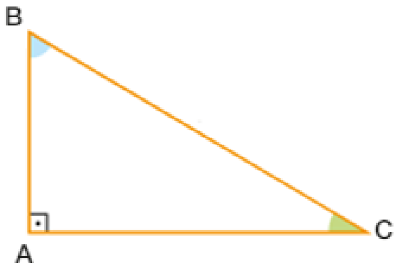
Material utilizado:

- Papel quadriculado

Duração: 50 minutos

Vimos, na Tarefa 2, algumas características e classificações dos triângulos. Na Tarefas 5 e 6, estudaremos algumas relações existentes em triângulos retângulos. Nesta tarefa, estudaremos a mais conhecida relação: O Teorema de Pitágoras.

Começaremos por destacar alguns elementos do triângulo retângulo ABC, a seguir.

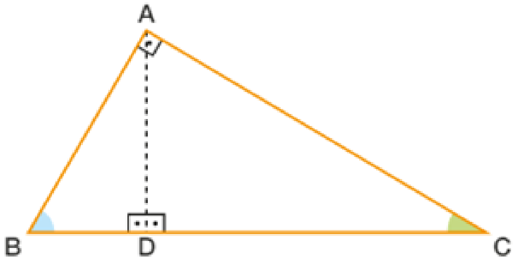


- A HIPOTENUSA é o lado oposto ao ângulo reto.
- Aos outros dois lados denominamos CATETOS.

I). No triângulo ABC escreva o segmento que representa a hipotenusa.

II). Agora, escreva os segmentos que representam os catetos.

- Veja a ALTURA (AD) relativa à hipotenusa traçada nesse triângulo. Observe que alteramos o triângulo de posição.



Propriedade dos triângulos: O maior lado de um triângulo opõe-se ao seu maior ângulo.

Considerando essa propriedade, qual deverá ser o maior lado de um triângulo retângulo?

A relação Pitagórica

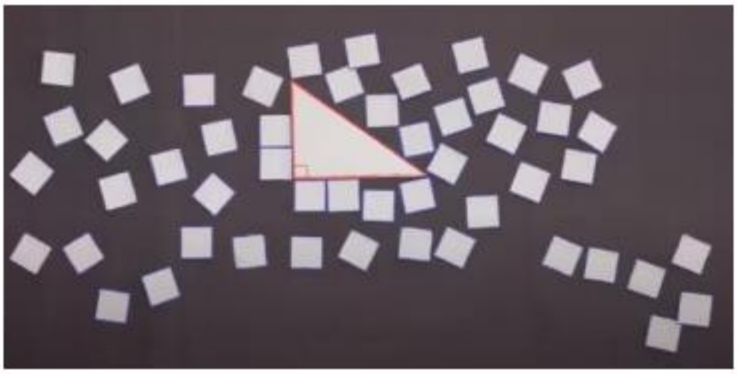
1ª situação

Em uma folha de papel quadriculado, desenhe um triângulo retângulo, cujos catetos medem 3 e 4 unidades de medida. Em seguida, desenhe um quadrado sobre cada cateto e sobre a hipotenusa. Ou seja, você deverá desenhar três quadrados que terão como um dos lados os catetos e a hipotenusa desse triângulo. Cole na caixa a seguir sua construção.

a) Considerando cada "quadradinho" do papel quadriculado como uma unidade de medida de área, determine a área de cada um dos dois quadrados que "partem" dos catetos.

____

b) Recorte alguns "quadradinhos" do papel quadriculado e faça uma estimativa da área do quadrado que "parte" da hipotenusa. (Dica: faça uma sobreposição desses "quadradinhos" no quadrado que parte da hipotenusa. A imagem a seguir traz uma ideia)



____

c). Agora, você está desafiado a encontrar uma relação entre as áreas dos quadrados que você obteve nos itens a e b. Registre nas linhas a seguir seu pensamento.

____

____

____

2ª situação

Acesse o link a seguir e assista ao vídeo.

https://youtu.be/CAkMUdeB06o

Agora, responda às questões a seguir.

a). Que tipo de triângulo você identificou no vídeo?

____

b). Podemos observar três quadriláteros no vídeo. Que tipo de quadriláteros são esses?

___

c) Observe que, inicialmente, temos a ÁREA de dois desses quadriláteros em “destaque azul”. Tais quadriláteros “partem” dos catetos ou da hipotenusa?

___

d)Baseando-se nesse vídeo, escreva nas linhas a seguir tudo o que você identificou e/ou compreendeu. Você poderá, por exemplo, registrar relações que tenha observado.

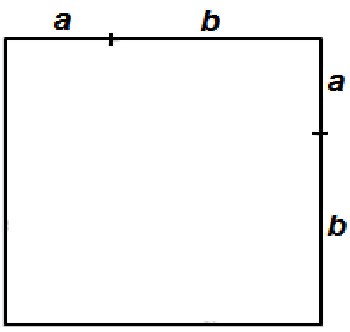
___

___

___

3ª situação

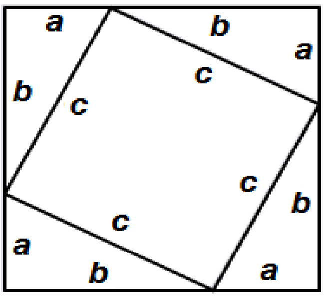
Observe o quadrado a seguir.



a). Quanto mede o lado desse quadrado?

b). Que produto notável determina a área desse quadrado? Desenvolva-o.

Agora veja como esse quadrado foi dividido.



Note que temos 4 triângulos iguais e um quadrado de lado c.

Como calcularíamos a área total do quadrado maior, usando esses triângulos e o quadrado de lado c?

Veja:

$$c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right) \;=\; c^2 + 2ab$$

c) Analise que a expressão obtida acima $(c^2 + 2ab)$, assim como a obtida na letra b dessa atividade, representam a área do quadrado maior, logo, são iguais. Iguale ambas expressões. A qual nova expressão você chegou?

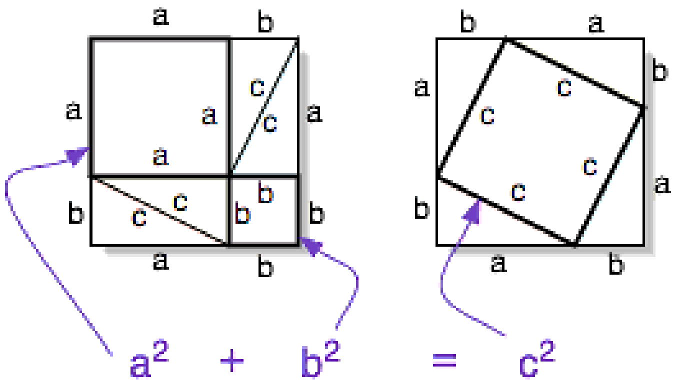
____

____

____

4ª situação

Estude a imagem a seguir e escreva um parágrafo explicativo para demonstrar o Teorema de Pitágoras.



TAREFA 6:

INVESTIGANDO AS RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Objetivos:

- Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, utilizando a semelhança de triângulos.

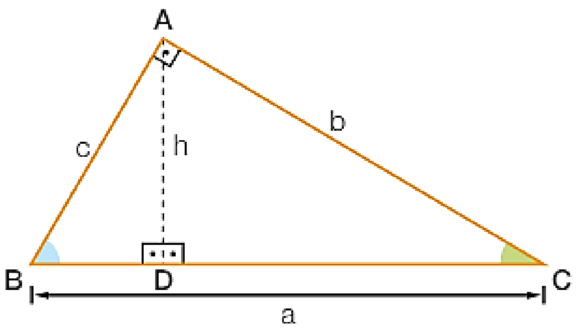
Material utilizado:

- Caderno de atividades

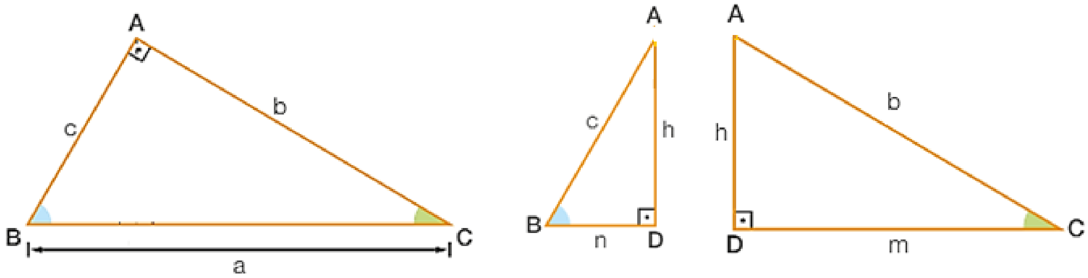
Duração: 1 hora

Na tarefa anterior, você conheceu os elementos de um triângulo retângulo e a mais importante relação: o Teorema de Pitágoras. Vamos agora conhecer novas relações.

No triângulo ABC a seguir temos traçada a altura (AD) relativa à hipotenusa.

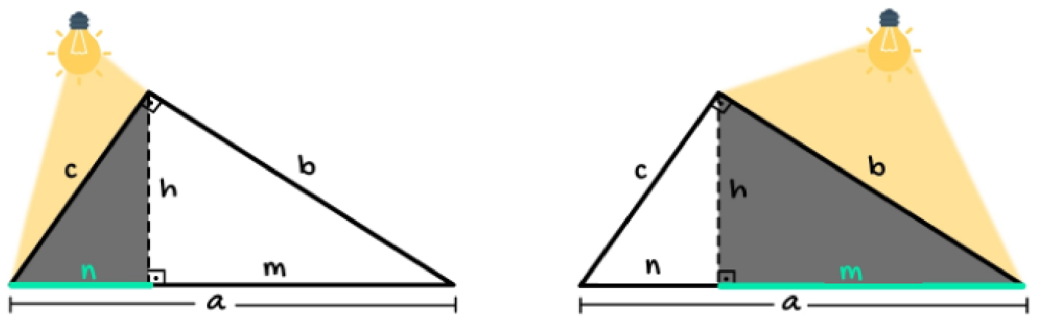


Podemos então destacar os triângulos retângulos ABC, ABD e ACD.



Qual ideia devemos ter de *projeção*?

Projeção está ligada à ideia de sombra.



https://blog.professorferretto.com.br/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo/

1 - Que relação podemos estabelecer entre as medidas dos segmentos a, *m* e *n*?

2 - Temos que o segmento *n* é a projeção do cateto c sobre a hipotenusa a. E o segmento *m*, de quem é projeção?

Vamos agora verificar se esses triângulos são semelhantes entre si.

3 - Analisando os triângulos ABC e ABD.

a). Eles possuem ângulos em comum? Se sim, quais?

b). Eles são semelhantes? Justifique.

4 - Analisando os triângulos ABC e ACD.

a). Eles possuem ângulos em comum? Se sim, quais?

b). Eles são semelhantes? Justifique.

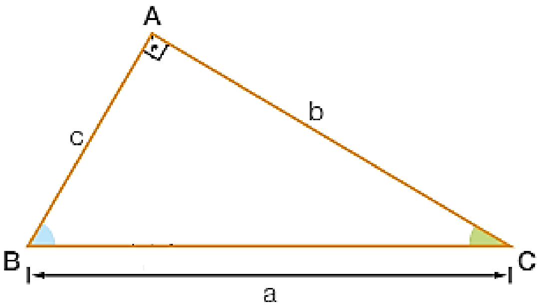
5 - Complete a afirmativa a seguir.

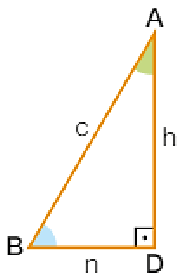
Como os triângulos ________ e ______são semelhantes ao triângulo ______então esses três triângulos são semelhantes entre si.

Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois outros triângulos retângulos, que são semelhantes ao maior e, consequentemente, semelhantes entre si.

6 - Já que os triângulos são semelhantes, temos que seus lados correspondentes são proporcionais, com isso, podemos escrever algumas proporções. Vamos lá!

1º) Triângulos ABC e ABD

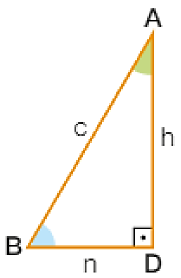


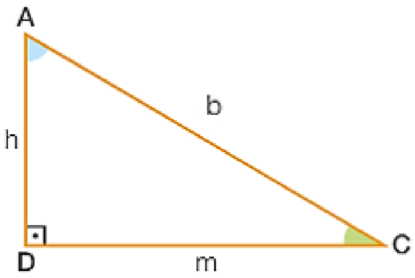


$\frac{a}{c} = \frac{b}{} \longrightarrow$ ______________________________

$\frac{a}{c} = \frac{c}{} \longrightarrow$ ______________________________

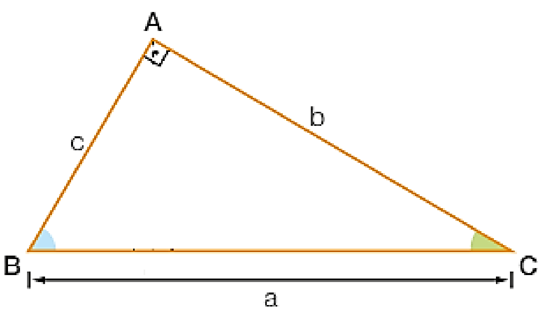
2º) Triângulos ABD e ACD.

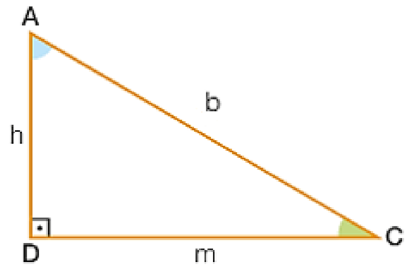




$\frac{h}{m} = \frac{n}{} \longrightarrow$ ______________________________

3º) Triângulos ABC e ACD.





$\frac{a}{b} = \frac{b}{}$ $\longrightarrow$ ____

Considere as relações $\boldsymbol{b^2 = a.m}$ e $\boldsymbol{c^2 = a.n}$. Vamos adicionar membro a membro em tais relações. Acompanhe.

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = am + an}$$

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = a(m + n)}$$

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = a.a}$$

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}$$

Responda:

7 - O que foi feito da 1ª para 2ª linha no 2º membro?

8 - Por que na 3ª linha obtivemos $a.a$?

9 - A qual importante relação você chegou?

RESUMO DAS RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Você deverá escrever, usando sua linguagem corrente, as relações métricas deduzidas por você. Analise a escrita de uma das relações que usamos neste estudo e registre as próximas.

a = m + n Em qualquer triângulo retângulo, a medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma das medidas do comprimento das projeções dos catetos sobre ela.

a.h = b.c

____

____

____

$\boxed{c^2 = a.n}$

$\boxed{h^2 = m.n}$

$\boxed{b^2 = a.m}$

$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$

TAREFA 7:

ATIVIDADES - AS RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Objetivos: Desenvolver atividades, envolvendo o estudo das relações métricas no triângulo retângulo.

Material utilizado: Caderno de atividades

Tempo aproximado para o desenvolvimento das questões: 50 minutos

1). Escreva um problema envolvendo relações métricas que tenha como resposta o processo a seguir.

$$h^2 = x.y$$

$$20^2 = 16.y$$

$$400 = 16.y$$

$$y = 25$$

2). Escreva um problema, envolvendo relações métricas, que tenha como informações os dados a seguir e resolva-o.

a) Hipotenusa mede 64 cm e uma de suas projeções mede 16 cm.

b) Um dos catetos mede 24 cm e sua projeção sobre a hipotenusa mede 12 cm.

____

____

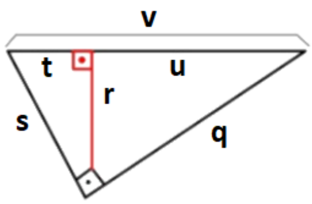
____

____

3). Complete as sentenças de acordo coma relações métricas estudadas.

$r^2 = \_\_ \cdot u$ $\qquad$ $\_\_ = t \cdot v$ $\qquad$ $\_\_ = r^2 + t^2$

$q^2 = u \cdot \_\_$ $\qquad$ $r \cdot \_\_ = s \cdot q$ $\qquad$ $\_\_ = t + u$



REFERÊNCIAS

AMÂNCIO, R. A. **O desenvolvimento do Pensamento Geométrico: Trabalhando polígonos, especialmente quadriláteros**. 2013. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Brasília, 2018. P. 288. Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>.

CABRAL, S. A. B. **Desenvolvendo o Pensamento Argumentativo Geométrico: Construindo práticas Investigativas**. 2017. 110f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2017.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

EVANGELISTA, M. G. B. **Construindo o conceito de ângulo poliédrico a partir dos elementos dos polígonos.** 2017. 112f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2017.

FIORENTINI, D. **Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente**? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.47-76.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: **percursos teóricos e metodológicos** – Coleção Formação de Professores. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2006

GAZIRE, Eliane Scheid. **O não resgate da Geometria**. 2000. 224f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Campinas, SP, 2000.

Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (Ensino Fundamental). v. 3. Brasília: MEC, 1997.

PAIS, L**. Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

PAIS, Luís Carlos. **Intuição, Experiência e Teoria geométrica. In Zetetiké**. v. 4, n. 6, julho/dezembro, pp. 65-74, Campinas: CEMPEM /FE/ UNICAMP, 1996.

PAIS, Luís Carlos. **Uma análise do Significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria**. In ANPED, 2000.Disponível em: www.anped.org.br/23/textos/19/1919t.pdf. Acesso em 07 de junho de 2012.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SHULTE, A. P. **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual, 1994. p. 156-167.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. São Paulo: Papirus, 2009.