PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Reinaldo Jacinto Ezequiel

“Teorema de Pitágoras”
em Livros Didáticos de Matemática
do Ensino Fundamental

Belo Horizonte

2021

Reinaldo Jacinto Ezequiel

“Teorema de Pitágoras”

em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Elenice de Souza Lodron Zuin

Área de concentração: Ensino de Matemática

Belo Horizonte

2021

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Ezequiel, Reinaldo Jacinto
E99t "Teorema de Pitágoras" em livros didáticos de matemática do ensino fundamental / Reinaldo Jacinto Ezequiel. Belo Horizonte, 2021.
146 f. : il.

Orientadora: Elenice de Souza Lodron Zuin
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Pitágoras, Teorema de. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Livros didáticos - Matemática. 4. Ensino fundamental - Brasil - Currículos. 5. Matemática - História. 6. Geometria - Problemas, questões, exercícios. 7. Professores de matemática - Formação. 8. Base Nacional Comum Curricular. I. Zuin, Elenice de Souza Lodron. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 513:373
Ficha catalográfica elaborada por Fabiana Marques de Souza e Silva - CRB 6/2086

REINALDO JACINTO EZEQUIEL

“Teorema de Pitágoras”
em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Fundamental.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Profª. Dra. Elenice de Souza Lodron Zuin- PUC Minas (Orientadora)

Profª. Dra. Patrícia de Campos Corrêa- Secretaria de Estado de Educação do Pará/ UFPA (Banca Examinadora)

Profª. Dra. Neila Mara Campos de Oliveira- PUC Minas (Banca Examinadora)

Belo Horizonte, 17 de Junho de 2021.

Dedico este trabalho a uma grande mulher,
senhora Geralda de Paula (in memoriam), minha mãe.

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial minha esposa, por todo apoio e por compreender os momentos em que tive que me ausentar para me dedicar à pesquisa. Não posso deixar de agradecer aos meus pequenos: Saulo e Matias por me darem motivação para a conclusão deste trabalho.

À minha brilhante orientadora, Professora Elenice Zuin, por toda ajuda, pela excelente orientação, mostrando os melhores caminhos para o desenvolvimento deste trabalho e pela amizade que aqui criamos.

Ao amigo Marcelo Mesquita, pela ajuda durante toda a caminhada.

À minha irmã, Lucilane, pela ajuda com as motivações durante o curso pelo seu grande apoio durante toda a trajetória.

A todos aqueles, que embora não citados, contribuíram direta e indiretamente para a execução deste trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo analisar o conteúdo “Teorema de Pitágoras” nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, editados em período anterior e posterior à publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN’s – no Brasil. O aporte teórico advém da história das disciplinas escolares, fundamentada em André Chervel. Na análise dos livros, buscou-se avaliar os aspectos metodológicos, abordagem histórica, recursos visuais, exemplos e atividades propostas em relação ao tópico “Teorema de Pitágoras”. Entre as dez obras analisadas, foi constatado que somente em livros publicados após 1998 ocorre a inclusão de alguns aspectos históricos. Há algumas diferenças entre os livros no tocante à abordagem do conteúdo. O Produto Educacional elaborado, como parte integrante da dissertação, destina-se às formações inicial e continuada de professores de Matemática e aos profissionais da área em serviço, procurando suprir algumas lacunas em relação à História da Matemática concernente ao denominado “Teorema de Pitágoras”.

Palavras-chave:

Educação Matemática, História da Matemática, “Teorema de Pitágoras”, livro didático.

ABSTRACT

This research had as objective to analyze the content “Pythagorean Theorem” in elementary school math textbooks, edited before and after publication of National Curriculum Parameters – PCN’s – in Brazil. The theoretical contribution comes from the history of school subjects, based on André Chervel. In analysis of books look for survey methodological aspect, historical approach, visual resources, examples, and activities proposed in relation to the topic “Pythagorean Theorem”. Among the ten textbooks analyzed, only those published after 1998 does the inclusion of some historical aspects. There are differences between textbooks regarding content development. The Educational Product elaborated, as an integral part of the dissertation, intended for initial and continuing education of Mathematics teachers seeking to fill some gaps in the History of Mathematics concerning the so called “Pythagorean Theorem”.

Keywords:

Mathematical Education, History of Mathematics, Pythagorean Theorem, Textbooks.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN........................ Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC. ....Base Nacional Comum Curricular

BDTD .... Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

Capes.....................Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

PNLD...................... Programa Nacional do Livro Didático

UEL-PR. ....Universidade Estadual de Londrina

UFPR .... Universidade Federal do Paraná

USP........................Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O meu encantamento pela Matemática começou na terceira série, hoje quarto ano do Ensino Fundamental. Quando a professora começou a introduzir os fatos multiplicativos, eu já demonstrava facilidade em aprendê-los; mesmo que a prática se concentrasse em decorar a tabela.

A facilidade pelo estudo em geral foi proporcionado devido ao meio social familiar no qual fui criado. Ao observar minhas quatro irmãs educadoras, preparando as aulas, corrigindo provas, falando sobre escola e alunos, eu ficava maravilhado. Em meu bairro, havia apenas uma biblioteca. Comecei a frequentá-la a partir da sexta série, atualmente sétimo ano do Ensino Fundamental. Desde então, não parei de envolver-me no universo da pesquisa e leitura.

Sinto-me privilegiado com os professores de Matemática que tive no Ensino Fundamental e Médio. Possuía admiração por todos eles, além do mais, eram muito dedicados, contudo, extremamente tradicionais, devido às suas formações e concepções.

No Ensino Médio, fiz o curso de Técnico em Contabilidade. Eu me deparei com a Matemática comercial, momento em que fiquei fascinado com os problemas comerciais e financeiros. Nesse período, a afinidade pelo conteúdo aumentou ainda mais. Após a conclusão do Ensino Médio, recebi um convite para lecionar em uma Escola Estadual para o curso técnico ao qual havia me formado, assim, começou a caminhada para a docência. Ingressei no Centro Universitário de Belo Horizonte – Uni-BH – em 1999, no curso de Licenciatura em Matemática. A minha trajetória na faculdade ocorreu pesquisando, analisando, calculando e desmistificando o temor que as pessoas apresentavam pela Matemática.

Ao longo de dez anos lecionando, percebi como, na minha formação inicial, eu absorvi uma postura metodológica tradicional. Eu verificava que os meus alunos apresentavam inúmeras dificuldades, pois as aulas eram centradas somente no professor, eu reproduzia os modelos que eu vivi como estudante. Os conteúdos de Álgebra, Geometria e Aritmética, na maior parte do tempo que lecionei, eram ensinados de formas separadas uns dos outros, sem que houvesse preocupação em interligá-los.

Tive o prazer de lecionar, neste tempo, em escolas estaduais, municipais e particulares (níveis Fundamental, Médio e Supletivo). Percebi que, tanto eu, como meus colegas, ficávamos muito presos ao livro didático, sem questionar os conteúdos apresentados, as metodologias propostas e nem avaliar a parte da História da Matemática, quando essa estava presente.

Inquieto com a repetição de conteúdo e a pouca mudança no ensino no decorrer dos anos, tendo como principal aliado o livro adotado, verifiquei que as dificuldades dos alunos não diminuíam muito. As aulas eram somente voltadas para as notações algebristas da matéria, exercícios repetitivos, que não despertavam o raciocínio dos alunos.

Com o intuito de ampliar meus horizontes profissionais, vislumbrei entrar num programa de pós-graduação. Tal objetivo aconteceu e fui selecionado para o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, na Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

O Mestrado ajudou-me a refletir sobre minhas práticas educativas. Através de leituras e reflexões, consegui vislumbrar métodos e técnicas que facilitam o ensino da Matemática e poderiam auxiliar os estudantes a apreender melhor os conteúdos. Então, passei a mudar minha postura como docente. Com o Mestrado, procurei, cada vez mais, trabalhar a Álgebra, Geometria e Aritmética de forma integrada, fazendo uma ligação das três, ao introduzir determinados conteúdos.

Comecei a dialogar com alguns colegas de trabalho e eles diziam que não tiveram a disciplina História da Matemática no curso de licenciatura. Embora eu tenha cursado tal disciplina, não houve um despertar para a valorização da história e, deste modo, se o livro adotado não trazia notas históricas eu também não dava o devido valor para esse tipo de abordagem no início da carreira como docente. Posteriormente, para suprir essa falha, eu comecei a procurar fontes confiáveis para introduzir abordagens históricas nas minhas aulas. Porém, essa busca era pontual. Neste sentido, houve o desejo de ter mais conhecimento sobre o “Teorema de Pitágoras” e sua história.

Após várias leituras e análises de alguns livros didáticos, averiguei que a parte da História da Matemática nos mesmos era inexistente ou comparecia com apenas algumas informações. Essa era a realidade presente também nos livros adotados nas escolas que eu lecionava.

Segundo Zuin (2003), é necessário que os docentes utilizem a história para auxiliar na construção do conhecimento matemático. A partir das minhas reflexões, elegi pesquisar sobre o tópico “Teorema de Pitágoras” nos livros didáticos de Matemática.

Alguns questionamentos, sobre este tema, surgiram:

- Quem é o verdadeiro “pai” deste teorema?
- Houve outros povos que tinham conhecimento desse teorema?
- como é feita a abordagem histórica nos livros didáticos?

A partir dessas questões adveio o intuito de desenvolver um produto educacional para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e, também, para auxiliar as formações inicial e continuada de professores de Matemática

O desejo de pesquisar sobre o tema advém da minha própria formação e dos meus questionamentos sobre as metodologias utilizadas em sala da de aula. É meu intuito mostrar a importância da História da Matemática na Educação Básica, em relação à aprendizagem deste conteúdo, focalizando o que se tem como verdade ou mito em torno do “Teorema de Pitágoras”.

Durante a revisão literária, localizei artigos e dissertações que tratavam do tema “Teorema de Pitágoras”. Esta revisão foi realizada no banco de dados da Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – e BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, sendo encontradas cinco dissertações, no período de 2009 até 2019. Utilizei o termo “Teorema de Pitágoras”, entre aspas, nos dois bancos de dados, sendo colocado como título nas buscas.

A primeira dissertação encontrada é a de Silva (2009), com o título: “Estudo histórico e pedagógico sobre ternos pitagóricos à luz de Eugéne Bahier”. Neste trabalho, a autora fez uma análise descritiva, histórica e pedagógica da obra de Eugêne Bahier. Defendeu o uso dos *ternos pitagóricos* como uma ferramenta para a compreensão do “Teorema de Pitágoras”, tendo como público-alvo os alunos do curso de Licenciatura em Matemática. A autora traz Miorim (1998), afirmando que os professores de Matemática utilizavam o livro didático como um importante referencial para suas aulas. Informa que, nos livros didáticos, o “Teorema de Pitágoras” é um conteúdo estritamente prático, às vezes, sem nenhum significado histórico. O trabalho da autora visou, principalmente, os ternos pitagóricos como pré-requisitos para uma melhor aprendizagem do “Teorema de Pitágoras” e também destacou a História da Matemática como um elo entre os dois tópicos anteriores para motivar os alunos a aprenderem o conteúdo em questão.

Já Amorim (2015) escreveu a dissertação: “Uma abordagem da generalização do Teorema de Pitágoras numa turma do 9º ano do Ensino Fundamental”. A autora apresentou o tópico aos alunos do 9º ano, com o intuito de demonstrar, generalizar e aplicar o teorema, associando este tema a áreas, proporção e semelhança de figuras planas. Ela relata que o teorema já existia entre os povos mais antigos, como os babilônios, egípcios e chineses, que, mesmo sem demonstrar, já faziam uso do Teorema. A pesquisadora informou que se deveria usar a História da Matemática como um recurso para despertar a curiosidade e o instinto investigativo dos estudantes. A pesquisa teve como aporte teórico Elon Lages Lima e Angêlica Raiz Calabria. No entanto, ao desenvolver o trabalho não atribuiu muita importância à História da Matemática, se preocupando mais com a demonstração algébrica do teorema.

Outra dissertação foi a de Jesus (2016), com o título: “Pitágoras: estendendo a dimensão do Teorema”. Este trabalho teve o intuito de demonstrar o “Teorema de Pitágoras” nas dimensões 3 e 4, ou seja; em R^3 e sucessivamente. A pesquisa é mais voltada para a Matemática pura, vislumbrando a demonstração do teorema com o suporte dos conteúdos de Álgebra Linear e Geometria Analítica. Ao final do trabalho, o pesquisador elabora um plano de aula voltado para o Ensino Médio, utilizando como suporte o Geogebra para demonstrar o teorema. Foi verificado que, no R^2, os alunos decoraram o teorema com a fórmula algébrica $a^2 = b^2 + c^2$, tomando sempre a letra a como representante da hipotenusa. Ao se denominar a - letra A – para um dos catetos, os discentes sempre o relacionavam à hipotenusa. A autora informa que outras civilizações, antes do tempo de Pitágoras, já utilizavam o teorema, contudo, da mesma forma que Amorim (2015), neste trabalho não se evidenciou a História da Matemática com intuito de favorecer a aprendizagem deste teorema. O autor se referendou em Abramo Hefez e Carl Boyer. Fica claro que o interesse era a aplicabilidade do teorema juntamente com outros ramos da Matemática como Álgebra Linear, Geometria Analítica e o uso do *software Geogebra.*

Prata Filho (2018), com a dissertação "Teorema de Pitágoras a partir da História da Matemática: análises epistemológicas de atividades em turmas do 9º ano da rede pública", fundamentou-se na História da Matemática, visto que este recurso fora aplicado para fundamentação da origem do referido teorema. Também foi acrescentado o uso do *Geogebra*, tendo como aporte teórico os seguintes autores: Miguel (1997), Mendes (2015), Jankvist (2009). O autor usou a História da Matemática como metodologia e como fonte motivadora, alegando o seu auxílio na resolução de problemas. O trabalho objetivou analisar as contribuições de uma abordagem metodológica no ensino acima descrito, mesclando a História e situações problemas via Geogebra no estudo do Teorema. No final do trabalho, o pesquisador montou um Guia Didático como produto educacional. Este era destinado aos docentes do Ensino Fundamental, integrando atividades com o Teorema, utilizando a História da Matemática e o *software Geogebra*.

A última dissertação é a de Nascimento (2018), intitulada: "Demonstrações do Teorema de Pitágoras". O pesquisador relatou que Pitágoras e os pitagóricos não foram os primeiros a perceber a relação existente entre as medidas dos catetos e hipotenusa. Voltado para as várias demonstrações do Teorema, como à atribuída aos Pitagóricos, de Bhaskara, de Euclides, de Garfield, de Perigal e a demonstração de Leonardo da Vinci, relatou que trabalhar com demonstrações matemáticas é difícil em nível do Ensino Básico. No capítulo 2, o pesquisador faz um breve comentário de que o "Teorema de Pitágoras" não foi descoberto e demonstrado necessariamente por Pitágoras, mas foi uma descoberta da sua escola. Verifica-se que o trabalho tem um viés que podemos determinar como histórico, na medida em que apresenta diferentes tipos de demonstrações do Teorema. No final do trabalho, o pesquisador sugere trabalhar com o tema em sala de aula, através de quebra- cabeças pitagóricos.

Os artigos publicados por Costa & Zuin (2003, 2007), sobre o "Teorema de Pitágoras" em livros didáticos de Matemática, trazem uma discussão de como se apresenta o referido teorema nos textos didáticos publicados de 1996 a 2001. Os artigos, apesar de incluírem dados históricos sobre o teorema, não o fazem de forma mais aprofundada devido à limitação de páginas exigidas pelos eventos científicos nos quais foram apresentados. Contudo, chamam a atenção para a discussão sobre a questão da história por trás do “Teorema de Pitágoras”.

Ao realizar a revisão literária sobre o tema o “Teorema de Pitágoras”, verifiquei que poucos trabalhos vislumbram a História da Matemática como alicerce para desmistificar que tal Teorema é realmente mérito somente de Pitágoras. Há trabalhos voltados para a Matemática aplicada, outros utilizando o *software* para facilitar a aprendizagem do tema. O levantamento possibilitou constatar que não existiam, nos bancos de dados pesquisados, estudos que tivessem como alicerce a História da Matemática para a introdução do Teorema, assunto este de minha pesquisa.

Após a revisão, juntamente com minha orientadora, traçamos uma linha de trabalho, objetivando investigar se é possível “encontrar o verdadeiro pai” do “Teorema de Pitágoras”, buscando informações na História da Matemática e analisar como este tema é abordado nos livros didáticos. Para tratar da história das disciplinas escolares, o principal referencial é André Chervel (1990). A fundamentação teórica de análise dos livros se baseia em Chervel (1990) e Zuin (2007). Outros elementos, para conduzir uma discussão sobre o livro didático, foram respaldados também em Marisa Lajolo (1996), Rosa Lydia Teixeira Corrêa (2000), Wagner Rodrigues Valente (2008), Kazumi Munakata (2016). A valorização da história nas aulas de Matemática se apoia, principalmente, em Ubiratam D’Ambrosio (1996). Em relação aos aspectos históricos, tomamos como aportes os trabalhos de Carl Boyer (2012) e Howard Eves (2004), entre outros, contudo a parte histórica ficou concentrada no Produto Educacional elaborado.

A condução da pesquisa da nossa dissertação está integrada a dois projetos coordenados pela minha orientadora, Elenice de Souza Lodron Zuin, “Análise de livros didáticos de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio” e “História da Matemática nos livros didáticos de Matemática do Ensino Básico”.

O estudo tem como foco principal verificar como o Teorema é abordado nos livros didáticos antes e após a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs – em 1998. Esse recorte temporal se explica pelo fato de os PCN de Matemática valorizarem as abordagens históricas. Neste sentido, com a análise dos livros didáticos, o intuito foi verificar *se* e *como* o tema era abordado. A seleção de livros foi realizada aleatoriamente, sendo escolhidas cinco obras editadas antes de 1998 e cinco lançadas a partir deste ano. O primeiro livro é de 1948 e, o último, de 2018.

A escolha dos livros selecionados teve como base, o ano de lançamento dos PCNs, ou seja, cinco livros antes de 1998 e cinco após a publicação deste documento. Alguns livros consultados pertencem ao repositório da Universidade Federal de Santa Catarina, outros foram comprados em sebos. Houve uma dificuldade de ter acesso a mais obras didáticas devido à pandemia da Covid-19, pois as bibliotecas ficaram fechadas. Também vale ressaltar que alguns livros não se apresentavam em bom estado de conservação.

Nossa investigação é de cunho bibliográfico, com análise qualitativa dos dados. Para a análise dos livros, as categorias se centraram nos aspectos metodológicos, na existência de abordagem histórica, nos recursos visuais em relação à posição do triângulo retângulo e nas atividades propostas.

Na estrutura de nossa pesquisa, para o primeiro capítulo, salientamos a importância da História da Matemática na escola. Outro ponto é como o tema está descrito nos PCN de Matemática e como deve ser apresentado em sala de aula. Incluímos também quais as recomendações da Base Nacional Comum Curricular para o ensino do “Teorema de Pitágoras”.

No segundo capítulo, procuramos focalizar o livro como fonte para a escrita da Matemática Escolar – tópico este que irá subsidiar nossa análise dos livros que será tratado no terceiro capítulo. Assim, destacamos o livro como fonte primária de pesquisa.

No terceiro capítulo, a análise de dez livros didáticos de Matemática, cinco antes da publicação dos PCN e os outros cinco editados a partir de 1998, como já foi anunciado.

No quarto capítulo, faremos uma apresentação do produto educacional elaborado e sua aplicação. Este material foi desenvolvido com o intuito de ampliar e auxiliar a formação inicial e continuada de docentes de Matemática. Destacamos a História da Matemática como motivadora para a aprendizagem da disciplina. Especificamente em nossa pesquisa, através da História da Matemática, serão sinalizados alguns aspectos que são repetidamente repassados com informações equivocadas, tendo em vista que o professor tem, muitas vezes, o livro didático como única fonte de consulta.

No produto, nos dedicamos a trazer alguns aspectos históricos sobre o “Teorema de Pitágoras”, buscando informar sobre a possível origem do Teorema, mostrando a importância da História da Matemática para quebrar paradigmas errôneos que temos sobre o assunto aqui tratado. Concluímos, tecendo nossas considerações finais.

CAPÍTULO I

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: SUA RELEVÂNCIA NO CONTEXTO ESCOLAR E NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Neste capítulo, abordaremos a importância da História da Matemática na sala de aula, com fundamentação nos seguintes autores; Nobre (1996), D'Ambrosio (1996) e Zuin (2003), Mendes, Fossa e Valdés (2006).

Segundo D'Ambrósio (1996), são fontes históricas: memórias, práticas, monumentos e artefatos, escritos e documentos. Mas, para quem e para o quê serve a História da Matemática? Este é um questionamento de D'Ambrosio (1996, p.10), ao qual ele mesmo traz a resposta:

> Para alunos, professores, pais e público em geral. Para quê? Algumas das finalidades principais parecem-me:
>
> 1. para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
> 2. para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
> 3. para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da Antiguidade Mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
> 4. e desde então foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas e se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico. (D'AMBROSIO, 1996, p. 10).

Fica notória a necessidade da História da Matemática em âmbito geral. No item 1, destacado por D'Ambrosio (1996), vislumbramos a manifestação cultural, que nos remete à valorização da Matemática fora do espaço escolar. Reforça-se que a Matemática ultrapassa os muros da escola, ou seja, ela está no cotidiano. Segundo o autor, apresenta-se nos trabalhos artesanais, nas manifestações artísticas, nos comércios e nas indústrias.

No item 2, fica claro que a Matemática escolar não é exclusiva, mas, sim uma forma das muitas formas de Matemática. Neste sentido, existem outras Matemáticas que se estabelecem em grupos isolados ou não. É frisada a existência de uma Matemática nas feiras como litro de arroz, bacia de legumes e maço de cebolinha e tantas outras formas. Tais práticas com o rigor devido, ou não, e entendido pelos povos que as utilizam (D'AMBROSIO, 1996, p.11)

No item 3, tem-se um esclarecimento sobre as origens da Matemática. Segundo a citação, para praticar o ensino da história, o docente pode associar a cada ponto do currículo tradicional da Matemática a um “contexto socioeconômico e cultural no qual aquela teoria ou prática se criou.” (D'AMBROSIO, 1996, p.12)

Quanto à questão curricular, não seria “necessário desenvolver um currículo, linear e organizado, de história da Matemática”, bastaria “colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática.” (D'AMBROSIO, 1996, p. 13). O autor defende que não é necessário o docente ser um especialista em história da Matemática. Entretanto, se possuir algum conhecimento histórico sobre um tema de Matemática, que este seja levado para a sala de aula e compartilhado com seus alunos.

No item 4, D'Ambrosio visualiza as implicações sociais e políticas da Matemática. Mostra que existia uma ideia falsa quando se diz que a Matemática deveria ser uma só, nas escolas e nas academias de todo mundo.

A Matemática está inserida na sociedade a todo o momento, pois está presente na natureza, ao encontrar um endereço, ao fazer uma chamada telefônica e ao lidar com dinheiro, são muitas as situações. Contudo, nem sempre o cotidiano é explorado nas aulas de Matemática. A História da Matemática tem uma contribuição no sentido de proporcionar uma aprendizagem significativa e compreensiva dos conteúdos matemáticos (MENDES, FOSSA e VALDÉS, 2006).

Com relação à História da Matemática, segundo Zuin (2003):

> No Brasil, só teremos esta proposta efetivada nos PCN de Matemática para o 1º e 2º ciclos e para o 3ºe 4º ciclos do Ensino Fundamental, em 1997 e 1998, respectivamente. No entanto, os PCN, apesar de oficiais, não são obrigatórios e, deste modo, verificamos que os docentes, muitas vezes, não se ocupam da história em suas aulas, por não terem formação na área ou por não acreditarem que a histó-

> ria possa colaborar para a melhoria do ensino-aprendizagem da Matemática. (ZUIN, 2003, p.3).

Neste posicionamento, Zuin (2003) nos leva a uma reflexão sobre as possíveis deficiências na formação inicial dos docentes de Matemática. Contudo, é preciso que os professores busquem fontes para contribuir nas aulas destinadas aos discentes, vindo acrescentar a necessidade de mostrar a origem da Matemática como esclarece citação de D'Ambrosio no item 3.

O que se deve levar em consideração quando o professor integra abordagens históricas em suas aulas de Matemática? Segundo Nobre (1996, p.30), "ao transmitir um conteúdo, o professor deve estar ciente de que a forma acabada, na qual ele se encontra, passou por inúmeras modificações ao longo de sua história." A História da Matemática vem como suporte para fundamentar o conteúdo ali apresentado, suprindo a necessidade de abstrair a origem daquele tópico. Possibilita-se ao discente visualizar as raízes dos temas trabalhados, vindo desmistificar a Matemática como conteúdo formalizado, como uma matéria considerada inacessível e somente pautada na utilização de técnicas.

O contexto histórico tem seu valor, porém, depois que um determinado conhecimento é apreendido, muitas vezes, suas origens não são mais evidenciadas. Neste sentido, Nobre (1996) esclarece:

> No entanto, o homem, após concluir seus questionamentos e chegar a respostas aceitáveis ao contexto de sua época, abandona, de certa forma, o processo que fora necessário para se chegar a um determinado conceito, e passa a utilizar somente o resultado final. (NOBRE, 1996, p. 30).

É importante o docente valorizar o processo de como certos conteúdos chegaram até o presente. Em alguns casos, demorou vários anos, décadas ou séculos para ter um saber pronto e acabado. Não é pertinente abandonar, simplesmente, o processo do desenvolvimento de um conhecimento para trás, e só o resultado final passando a ser visto como algo natural e ponto final. Para isto, é evidente que os docentes se apropriem da História da Matemática, ou seja, tomar conhecimento da história, através de congresso, palestras e leituras de livros de história com o intuito de valorizar o desenvolvimento das descobertas do início ao fim, segundo Zuin (2003).

Segundo Nobre (1996), no processo ensino-aprendizagem, a maneira como é tratado um tema é de suma importância para a verdadeira compreensão. No entanto, o professor não deve repassar aos alunos aquilo que lhe foi transmitido, ou seja, somente os resultados e as fórmulas.

> À medida que se possibilite ao aluno condições de questionamentos com relação ao conteúdo exposto de forma fria(e morta) nos livros didáticos, está se abrindo espaço para que passe também a elaborar questões sobre o mundo no qual ele está inserido. (NOBRE, 1996, p. 35).

O aluno, na realidade, aprenderá a perguntar os porquês dos temas lecionados, vendo assim a necessidade de o professor fundamentar os quesitos levantados por este aluno, buscando respaldo na História da Matemática para mostrar o processo de como o conteúdo chegou até a época atual.

De acordo com a citação anterior de Zuin (2003), muitas vezes os professores não têm formação adequada na área da História da Matemática. Isso dificulta o ensino da disciplina, não valoriza o contexto histórico e como um determinado saber foi elaborado. No entanto, D'Ambrosio (1996), como vimos, sugere que o conhecimento que o professor possuir sobre a história de algum tópico, deve ser compartilhado com os discentes. A partir dessa premissa, o professor pode trabalhar a história em sala, mesmo não dominando todo o conteúdo, seguindo este conselho, pode contribuir para um ensino-aprendizagem da Matemática em bases mais sólidas.

Outro ponto de vista, em relação à formação inicial e continuada, é dado por Zuin (2003):

> [...] a História da Matemática é importante não só para a formação inicial como a formação continuada dos professores em serviço. As propostas dos PCN de Matemática, que indicam a história como um dos recursos para o ensino-aprendizagem da Matemática, só darão frutos, de uma forma mais efetiva, se os docentes tiverem a possibilidade de participar de cursos de História de Matemática, ou de especializações em que esta disciplina integre o currículo. (ZUIN, 2003, p. 5).

Através de Zuin (2003), verifica-se ser viável que o professor tenha um contato com a história, seja na formação inicial ou após esta, para que possibilite ao educador ter outros caminhos para desenvolver o ensino-aprendizagem na sala de aula. A autora ainda se posiciona nos fazendo refletir sobre aqueles que não têm condições de se especializar no assunto e poderiam buscar nos congressos, encontros, seminários e palestras informações que possam auxiliar na sua prática docente.

> Em relação à História da Matemática, defendo a necessidade de que os responsáveis pelas reformas educacionais e autores de livros didáticos tenham objetivos e propostas bem determinadas e melhor direcionadas, com indicações bibliográficas e propostas de atividades. Além disso, é mister que os docentes procurem utilizar a história com o propósito de que ela possa auxiliar na construção do conhecimento matemático. (ZUIN, 2003, p. 10).

É perceptível que a História da Matemática, segundo Zuin (2003), é peça fundamental para que o docente tenha mais condições de entender a Matemática que ensina e podendo contribuir para a aprendizagem dos seus alunos.

1.1- A História da Matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e na BNCC

Neste item, abordaremos como se insere a História nos PCN de Matemática e na BNCC. Os PCN de Matemática referem-se ao Ensino Fundamental, sendo o 3º e 4º ciclos, atualmente anos finais do Ensino Fundamental.

Os PCN’s eram destinados à formação inicial e continuada de professores[1], pois, tendo os fundamentos do currículo mais claros, ficaria evidenciada a formação pretendida para o professor.

Para a Matemática, o documento explicita:

> [...] o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação. (BRASIL, 1998, p.15).

No trecho acima, vimos que a matemática está inserida no comércio, nas formas dos objetos, nas flores, ou seja, está presente no dia-a-dia da sociedade. Deste modo, percebe-se que a História da Matemática nos auxilia a perceber como a Ma-

[1] ”Como decorrência, poderão nortear a formação inicial e continuada de professores, pois à medida que os fundamentos do currículo se tornam claros fica implícito o tipo de formação que se pretende para o professor, como também orientar a produção de livros e de outros materiais didáticos, contribuindo dessa forma para a configuração de uma política voltada à melhoria do ensino fundamental.” (BRASIL, 1998, p. 15).

temática do passado chegou até nós, sendo que, muitas vezes, um determinado tópico foi elaborado e passou por transformações e processos até chegar ao presente.

Não existe o melhor caminho para o ensinamento da matemática, mas algumas opções para a facilitação deste ensino. De acordo com os PCN, "alguns caminhos para fazer a matemática em sala de aula" seriam: a História da Matemática, as tecnologias, os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução.

Em relação à História,

> Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem Matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 1998, p. 23).

Assim, destaca-se, novamente, a importância da História da Matemática e ressaltamos que ela deve avançar mais do que a simples apresentação de fatos ou datas de nascimento de matemáticos.

Uma das características da Matemática, segundo os PCN de Matemática, é que ela formaliza-se como uma compreensão e atuação no mundo do conhecimento. Produz, nessa área do saber, como "um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural". (BRASIL, 1998, p. 24).

Mostra-se que a Matemática não está pronta e acabada, ou seja, ela não é um conhecimento imutável e verdadeiro. Deste modo, ela é passível de mudança ao longo do tempo, sendo gravado pela sua História que nos dá o prazer da compreensão do processo eterno da aprendizagem.

Como um recurso,

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 42).

Dentro dessa perspectiva, vê-se a importância do processo histórico, no qual nos auxilia no ensino-aprendizagem dos tópicos da Matemática escolar, desenvolvidos ao longo do tempo, o que permite perceber que o conteúdo hoje apresentado passou por outras etapas.

Os conteúdos a serem trabalhados podem estar “numa perspectiva mais ampla, ao procurar identificá-los como formas e saberes culturais cuja assimilação é essencial para que produza novos conhecimentos.” (BRASIL, 1998, p.49). Os PCN estimulam a utilização da História da Matemática como auxílio para o ensino-aprendizagem da Matemática. Abordagens históricas podem tornar mais claras as ideias matemáticas que os discentes constroem durante a vida escolar, esclarecendo alguns porquês desta disciplina e contribuindo para que os alunos tenham senso critico ao se depararem com os problemas do dia a dia.

Em relação à Base Nacional Comum Curricular – BNCC – publicada em dezembro de 2017, para o Ensino Fundamental, verifica-se que não existe uma orientação mais efetiva para o emprego de uma abordagem histórica da Matemática. Constatam-se breves menções a este recurso.

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a História da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. (BRASIL, 2017, p. 298).
>
> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. (BRASIL, 2017, p. 299).

Demonstra-se, assim, a necessidade da utilização da História da Matemática como auxílio no ensino/aprendizagem. Serve de suporte para que os alunos tenham uma visão mais ampla da origem dos conteúdos vistos na atualidade.

Em relação às competências gerais a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental, a BNCC destaca que se deve:

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2017, p. 9).

Neste sentido, poderia se vislumbrar a questão histórica em uma dimensão mais ampla, inclusive, em relação aos saberes matemáticos.

No tocante, especificamente, às competências a serem desenvolvidas na Matemática, o documento sinaliza:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p. 267).

Neste contexto, podemos dizer que existe um direcionamento que se pauta na discussão da pluralidade cultural, ainda que isto não seja um destaque.

Podemos verificar que a dimensão dada à História da Matemática é maior nos PCN do que na BNCC, embora, no primeiro documento, esta orientação não seja extensa e nem haja indicações de leituras para os professores, como evidencia Zuin (2003). Embora a menção à abordagem histórica da Matemática na BNCC seja reduzida, sem uma defesa da mesma em bases mais sólidas, o documento, de alguma forma, sinaliza a importância da História da Matemática.

Embora a abordagem histórica sobre o “Teorema de Pitágoras” somente seja exposta no Produto Educacional, a inclusão do presente capítulo se baseia no fato de que, em geral, os livros didáticos não apresentam aspectos históricos sobre o referido teorema e vários fatos são transmitidos erroneamente ou de forma incompleta.

CAPÍTULO II

LIVRO DIDÁTICO COMO FONTE PARA A ESCRITA DA MATEMÁTICA ESCOLAR

Neste capítulo, faremos uma abordagem sobre a importância do livro como fonte primária para as pesquisas no campo da história da matemática escolar.

Zuin (2007, p.12) esclarece que nos livros didáticos "estão embutidos valores a serem transmitidos num determinado momento histórico". A autora informa que "os manuais foram e permanecem como um importante instrumento de apoio e orientação aos professores".

Tendo a escola como um lugar especial, Lajolo (1996) afirma sobre o material escolar:

> Também especial é o material escolar: que se pode definir como o conjunto de objetos envolvidos nas atividades-fim da escola. Tudo aquilo que ajuda a aprendizagem que cumpre à escola patrocinar (...) computadores, livros, cadernos, vídeo, canetas, mapas, entre outras coisas (...) é material escolar. (LAJOLO,1996, p.3).

Esta autora destaca que, dentre o conjunto de elementos que forma o material escolar, alguns são mais substanciais do que outros, porque eles influem mais na aprendizagem. O mais essencial estaria localizado nos *livros*. Lajolo (1996, p.4) esclarece que em sociedades como a nossa, livros didáticos e não didáticos, são primordiais na "produção, circulação e apropriação de conhecimentos"; ainda mais dos "conhecimentos por cuja difusão a escola é responsável". Assim Lajolo (1996) define *livro didático*:

> Didático, então é o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática. Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, *o que se ensina e como se ensina o que se ensina*. (LAJOLO,1996, p. 4).

Temos o adjetivo “didático” definido como um tipo de obra, na qual, segundo a autora, é um instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal. A escolha e a utilização do mesmo precisam ser fundamentadas na competência dos professores que, junto com os alunos, vão fazer do livro instrumento de aprendizagem. A autora esclarece que, para ser considerado didático, o livro precisa ser usado de forma sistemática no ensino-aprendizagem de um determinado objeto do conhecimento humano, geralmente já consolidado como *disciplina escolar.*

A partir das considerações de Lajolo sobre a disciplina escolar como um conhecimento humano, vamos focar no artigo “*História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa*” do pesquisador francês André Chervel. Este entende que os conteúdos encontrados nos livros didáticos são itens essenciais que o pesquisador tem para verificar como uma disciplina é apresentada nos textos didáticos num determinado período.

Zuin (2007) nos informa que, com André Chervel, os conteúdos tomam o seguinte caminho:

> É com este autor que algumas investigações voltadas para o campo escolar tomam outros direcionamentos. Para ele, de forma espontânea e original, os conteúdos escolares são criados no seio das instituições escolares e adquirem vida própria. (ZUIN, 2007, p.13).

É importante abordar a história das disciplinas escolares e seus estudos em diversos campos do conhecimento. Nosso estudo se concentra no campo do conhecimento Matemático. Chervel deixa evidente que é dentro da História da Educação que vamos dar partida a história das disciplinas. Em nosso trabalho, iremos remeter ao estudo do “Teorema de Pitágoras” nos livros didáticos, dentro de uma visão histórica da matemática escolar.

Segundo Chervel (1990), na França, a palavra *disciplina* era utilizada como vigilância dos estabelecimentos, a repressão das condutas prejudiciais à sua boa ordem, ou seja; de controle e ou obediência. Durante a segunda metade do século XIX, devido uma corrente de pensamento pedagógico, a palavra *disciplina* espalha-se como sinônimo de *ginástica intelectual*. Então, Chervel detalha quando disciplina se torna vista como matéria de ensino:

> Logo após a I Guerra Mundial, enfim, o termo “disciplina” vai perder a força que o caracterizava até então. Torna-se uma pura e simples

> rubrica que classifica as matérias de ensino, fora de qualquer referência às exigências da formação do espírito. (CHERVEL, 1990, p. 180).

No entanto, para a palavra *disciplina* tínhamos a ligação com obediência e controle. Com o passar do tempo, adquire a definição de ginástica intelectual. Esta última com uma visão pedagógica, dentro de um significado de disciplinarização da inteligência das crianças. Já na atualidade, quando vislumbramos a palavra disciplina, esta nos remete ao ensino das matérias trabalhadas no ambiente escolar.

Através de Chervel, vemos que a disciplina escolar é produzida no ambiente escolar, sendo adquiridos conhecimentos próprios, desmistificando que os saberes escolares são somente oriundos da academia.

> [...] os conteúdos de ensino são concebidos como entidades *sui generis*, próprios da classe escolar, independentes, numa certa medida, de toda realidade cultural exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever nada além delas mesmas, quer dizer à sua própria história. Além do mais, não tendo sido rompido o contato com o verbo disciplinar, o valor forte do termo está sempre disponível. (CHERVEL, 1990, p. 180).

Percebe-se que o autor defende a escola com uma produção de conhecimento própria, tendo uma cultura específica:

> Porque são criações espontâneas e originais do sistema escolar é que as disciplinas merecem um interesse todo particular. E porque o sistema escolar é detentor de um poder criativo insuficientemente valorizado até aqui é que ele desempenha na sociedade um papel o qual não se percebeu que era duplo: de fato ele forma não somente os indivíduos, mas também uma cultura que por sua vez penetrar, moldar, modificar a cultura da sociedade global. (CHERVEL, 1990, p. 184).

Segundo o autor, o conceito de disciplina extrapola as fronteiras como definição de ser matéria ou conteúdo a ser ensinado. Também, dando estrutura aos docentes como trabalhar um conteúdo em sala de aula. Assim, vemos a definição e os caminhos para trabalhar os conteúdos, segundo como ele define a disciplina:

> A disciplina escolar é então constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposições, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funcionam evidentemente em estreita colaboração, do mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades. (CHERVEL, 1990, p. 207).

O autor aborda a posição daqueles que desmerecem os conhecimentos escolares, julgando estes inferiores daqueles adquiridos no âmbito acadêmico, defendendo que as escolas são capazes de criar seus próprios conhecimentos e estes são levados à sociedade.

A escola teria uma finalidade maior do que obedecer a documentos oficiais, pois cada escola e também cada discente possui, respectivamente, sua característica e personalidade. Neste sentido, o autor discorre sobre as finalidades da escola:

> O conjunto dessas finalidades consigna à escola sua função educativa. Uma parte somente entre elas obriga-a a dar uma instrução. Mas essa instrução está inteiramente integrada ao esquema educacional que governa o sistema escolar, ou o ramo estudado. As disciplinas escolares estão no centro desse dispositivo. Sua função consiste em cada caso em colocar um conteúdo de instrução a serviço de uma finalidade educativa. (CHERVEL, 1990, p. 188).

É relevante ressaltar a importância que o autor remete ao papel da pedagogia, momento este que os conteúdos escolares se misturam com os aspectos pedagógicos – a Pedagogia sendo uma parte integrante do ensino-aprendizagem, em nossa questão do conteúdo de Matemática.

> Excluir a pedagogia do estudo dos conteúdos é condenar-se a nada compreender do funcionamento real dos ensinos. A pedagogia, longe de ser um lubrificante espalhado sobre o mecanismo, não é senão um elemento desse mecanismo; aquele que transforma os ensinos em aprendizagens. (CHERVEL, 1990, p. 182).

A escola tem interação com o meio no qual está localizada, sofrendo influência da sociedade e vice-versa. Nesse sentido, a escola é envolvida com a sociedade e também por eventos políticos. A escola, ao montar o seu projeto pedagógico, deveria fazer associações com o seu entorno, ou seja, ser pertinente com o meio escolar e também com o meio externo à escola.

Para Chervel (1990), quando nos referimos ao que ocorre dentro da escola, é evidente perceber que as disciplinas escolares auxiliam a estruturar e organizar o currículo e a história dessas disciplinas. Fica claro que, dentro das instituições educativas, criam-se saberes escolares.

No contexto das investigações sobre os saberes escolares, Valente (2008), nos mostra a importância do livro didático:

> [...] dará aos livros didáticos o status de fontes de pesquisa. Material que até pouco tempo atrás era considerado uma literatura completamente descartável, de segunda mão, os livros didáticos, ante os novos tempos de História Cultural, tornaram-se preciosos documentos para escrita da história dos saberes escolares. (VALENTE, 2008, p.141).

Chervel (1990) ressalta o ato do fenômeno da *vulgata*. Quando, dentro de um período histórico, pode-se perceber a padronização dos manuais didáticos, então vê-se a *vulgata* como:

> Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do corpus de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas. (CHERVEL, 1990, p. 203).

De acordo com Chervel (1990), tendo a história da disciplina como um subconjunto da História da Educação, para estudar uma disciplina é necessário conhecer todo o percurso de fundamentação desta para visualizar se há uma vulgata, caso esta exista.

> A experiência elementar de todo historiador das disciplinas lhe ensina que as vulgatas evoluem ou se transformam. As exigências intrínsecas de uma matéria ensinada nem sempre se acomodam numa evolução gradual e contínua. A história das disciplinas se dá frequentemente por alternância de patamares e de mudanças importantes, até mesmo de profundas agitações. (CHERVEL,1990, p. 204).

Segundo Valente (2008), dessa forma, o historiador de uma dada disciplina defronta-se, em seu inventário de fontes para estudo da trajetória histórica de um determinado saber escolar, com épocas em que a produção didática se apresenta estável, isto é, o conjunto dos livros didáticos, num dado momento histórico, caracteriza apropriadamente uma vulgata escolar.

O autor nos revela a relação entre o livro didático e a educação matemática:

> No caso de matemática (...) os livros didáticos constituem-se em elementos fundamentais para a pesquisa do trajeto histórico da educação matemática. Livro didático e educação matemática parecem ser elementos indissociáveis. Isso nos leva a pensar que a história da educação matemática se liga diretamente às transformações das vulgatas. (VALENTE, 2008, p.143).

Para Chervel (1990), é importante para o pesquisador verificar a existência de uma vulgata, no nosso caso, o tema é “Teorema de Pitágoras”.

> A descrição e a análise dessa vulgata são a tarefa fundamental do historiador de uma disciplina escolar. Cabe-lhe, se não pode examinar minuciosamente o conjunto da produção editorial, determinar um corpus suficientemente representativo de seus diferentes aspectos. (CHERVEL, 1990, p. 203).

O artigo de Corrêa (2000) vem acrescentar e ressaltar o livro didático como fonte de pesquisa em História da Educação. Apesar de a autora não tratar dos saberes matemáticos, podemos ressaltar a importância deste na escrita da matemática escolar. Corrêa (2000, p.12) coloca em evidência que os livros escolares que "serviram de guia para professores e alunos ainda têm muito a ser desvendado". Neste sentido,

> Desvendá-los requer que se tomem em consideração dois aspectos: primeiro, tratar-se de um tipo de material de significativa contribuição para a história do pensamento e das práticas educativas ao lado de outras fontes escritas, orais e iconográficas e, segundo, ser portador de conteúdos reveladores de representações e valores predominantes num certo período de uma sociedade. (CORRÊA, 2000, p. 12).

Segundo a autora, o livro didático tem suas finalidades, sendo uma delas a sua natureza, ou seja, o livro elaborado para ser usado por uma determinada faixa etária. A segunda relaciona-se à especificidade da leitura e, a terceira, "deve-se a um tipo de mentalidade dominante no Brasil" referente "ao tratamento que é dado à memória de modo geral e à educação em particular." (CORRÊA, 2000, p.12). Daí a dificuldade em pesquisar a história em educação, pois muitas editoras não preservam os manuais didáticos e há uma carência de acervos acessíveis.

A associação entre o livro escolar e escolarização propiciam um direcionamento que conduz à aproximação do ponto de vista histórico sobre a circulação de ideias, a respeito do que "a escola deveria transmitir/ensinar e, ao mesmo tempo, saber qual concepção educativa estaria permeando a proposta de formação dos sujeitos escolares", como ressalta Corrêa (2000, p.13).

A autora prossegue destacando a validade da análise dos livros didáticos:

> Nesse sentido, então, esse tipo de fonte pode servir como um indicador de projeto de formação social desencadeado pela escola. Isso é permitido por meio das interrogações que podem ser feitas, quer em termos do conteúdo, quer de discurso, sem deixar de levar em consideração aspectos referentes a temporalidade e espaço. (CORRÊA, 2000, p. 13).

É notório que, comumente, o docente recorre ao livro didático como única fonte de trabalho. Neste sentido, os materiais didáticos podem nos apontar como estão definidos e podem ser ensinados alguns conteúdos, em certo período histórico. Corrêa (2000) assinala:

> [...] aliás, dependendo do período histórico no qual for tomado como fonte, esse tipo de material pode ser considerado como o portador supremo do currículo escolar no que tange aos conhecimentos que eram transmitidos nas diferentes áreas, quando se constituiu em única referência tanto para professores quanto para alunos. (CORRÊA, 2000, p. 13).

A autora ressalta também que o livro didático carrega um viés político, ou seja, ainda que, de forma velada, haja uma interferência política influenciando as massas populares. Fica explícito “o controle sobre os conteúdos escolares a serem ensinados” e, em alguma medida, “o controle sobre as práticas escolares como, também, sobre a produção” dos livros didáticos. (CORRÊA, 2000, p.17). Isto significa não só o controle sobre os conteúdos escolares a serem ensinados e, de certo modo, o controle sobre as práticas escolares, como também sobre a produção desse tipo de livro. Então, vem a importância de que sejam feitas análises de certos valores de uma época:

> Quer na forma de uma simples narrativa ou de poesia de abordagem histórica, política ou geográfica, os textos que compuseram os livros escolares na trajetória histórica da educação escolar são registros a serem decodificados no que se refere ao saberes a inculcar e que tiveram como instrumento de inculcação as práticas educativas escolares. (CORRÊA, 2000, p. 19).

A autora nos apresenta a função do livro escolar, mostrando justamente que a escola tem uma cultura própria, como já foi sinalizado anteriormente por Chervel (1990):

> O livro escolar, ao fazer parte da cultura da escola, não integra essa cultura arbitrariamente. É organizado, veiculado e utilizado com uma intencionalidade, já que é portador de uma dimensão da cultura social mais ampla. Por isso, esse tipo de material serve como instrumento, por excelência, da análise sobre a mediação que a escola realiza entre a sociedade e os sujeitos em formação. (CORRÊA, 2000, p. 19).

Já, Munakata (2007) descreve a importância da relação entre o livro didático e o professor. Não adianta ter um excelente livro se o professor não tiver didática alguma. Ele deixa claro que, muitas vezes, pode-se ter um livro de má qualidade, mas com um professor eficiente a aula torna-se produtiva.

> O ideológico do livro didático encontra-se para além dos eventuais lapsos conceituais e éticos que possa conter; ele lhe é estruturante, na medida em que esse material é um dos dispositivos fundamentais da educação escolar. (MUNAKATA, 2007, p.137).

O livro didático assume a centralidade neste processo da escolarização. Não basta somente a utilização do livro, mas como este é usado pelo docente. Visto que o currículo é aquele que se realiza na sala de aula, com ou sem a mediação dos textos escolares, e, sim, tudo depende principalmente das decisões oriundas do professor.

A partir de todas essas considerações, podemos dizer que o livro tem um papel relevante no processo ensino-aprendizagem, ainda mais se tratando de países em desenvolvimento. Entretanto, quem conduz o que se deve ensinar e como ensinar é o docente, o que demonstra a necessidade do alinhamento entre estes dois elementos: livro didático e o professor.

> No Brasil, é sintomático que o perfil do mercado editorial de livros didáticos tenha sofrido certos deslocamentos desde que o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), instituído em 1985, passou a realizar a partir de 1996 a avaliação desses livros por equipes de especialistas. (MUNAKATA, 2007, p.140).

Existe a necessidade da união do livro didático com o professor:

> O que se postula, então, é não a contraposição entre o professor e o livro didático, mas, ao contrário, a escolha, pelo professor bem formado, de livros adequados às diferentes necessidades e expectativas. Um e outro aparecem como aliados na luta contra a rigidez do currículo, cristalizado exatamente no livro didático. Aposta-se então em um novo livro didático, adotado por um novo professor? (MUNAKATA, 2007, p.140).

Segundo Munakata (2016), o livro didático pode ser usado como fonte para pesquisas sobre a cultura escolar, mostrando que esta não é apenas constituída de normas e regras.

> O importante é, então, levar em conta que a noção de cultura escolar refere-se não apenas a norma e regras, explícitas ou não, símbolos e representações, além dos saberes prescritos, mas também e, sobretudo, a práticas, apropriações, atribuições de novos significados, resistências, o que produz configurações múltiplas e variadas, que ocorrem topicamente na escola. Afinal, não há como negar que haja coisas que só existem na escola. Não por acaso, a noção de cultura

> tende a aplicar-se a identidades peculiares, a comunidades delimitadas- cultura negra, cultura indígena, cultura gay - e, por quê não?- cultura escolar. (MUNAKATA, 2016, p.122).

Verifica-se que um dos elementos peculiares da escola é o livro didático, sua existência só se justifica *na* e *pela* escola. O livro na biblioteca parado não tem o mesmo valor que dentro de uma escola.

> O livro didático é, em primeiro lugar, o portador dos saberes escolares, um dos componentes explícitos da cultura escolar. De modo geral o livro didático é a transcrição do que era ensinado, ou que deveria ser ensinado em cada momento da história da escolarização. (MUNAKATA, 2016, p.123).

Como já explicitado, os livros são fontes imprescindíveis para pesquisas sobre a cultura escolar. Também é viável lembrar que “o livro didático é um objeto dotado de materialidade: papel e tinta” como bem observa Munakata (2016). Ressalta-se que, mesmo sendo digital, não significa que seja virtual e imaterial, “apenas que sua materialidade é constituída de impulsos eletromagnéticos” segundo Munakata (2016, p.133). A partir desse contexto, vale ressaltar que:

> Cultura material, então, não é algo para ser contemplado nostalgicamente, mas indício de práticas humanas e suas variações, entre a prescrição e as apropriações. No caso aqui abordado a cultura material escolar interessa na medida em que ali estão inscritas as possibilidades de práticas, de usos dos objetos, com fins educativos, o que permite averiguar os conteúdos disciplinares ministrados, a metodologia empregada, as atividades realizadas etc. (MUNAKATA, 2016, p.134).

Através deste autor, deparamos com a definição de cultura material, o que reforça a relevância do livro didático como fonte de pesquisa. Podemos visualizar o contexto de fases históricas nos remetendo como os conteúdos foram abordados por determinados autores, até os dias atuais.

CAPÍTULO III

Análise dos Livros Didáticos

A nossa pesquisa tem como objetivo analisar *como* o conteúdo “Teorema de Pitágoras” comparece nos livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Focamos neste segmento do Ensino Básico, uma vez que o referido conteúdo é, geralmente, trabalhado no 8º e 9º anos, sendo, também, suporte de alguns conteúdos vistos no Ensino Médio em Matemática e Física.

Zuin (2007) indica qual a finalidade da análise dos didáticos:

> A análise dos livros escolares permite inferências quanto aos objetivos e metodologia, subjacentes ou explícitos, que o autor transmite para o seu leitor. Deste modo, é possível fazer algumas deduções sobre a escolarização de um saber. (ZUIN, 2007, p.16).

No tocante à análise dos livros didáticos, seguimos as indicações desta autora:

> Em relação ao corpo do texto, propriamente, a análise deve ser realizada segundo os objetivos do pesquisador. Entre outros aspectos, o olhar pode se dirigir (...) [à] exposição e organização da teoria, definições, metodologia, exercícios, problemas resolvidos e propostos, notas de rodapé, tabelas, gráficos, ilustrações. (ZUIN, 2007, p. 19).

As categorias de análise centram-se na apresentação e desenvolvimento do conteúdo, recursos visuais e proposição de atividades. Neste sentido, verificamos:

I) Como é apresentado o “Teorema de Pitágoras”;

II) Como é o desenvolvimento do conteúdo em relação à abordagem histórica;

III) Exemplos e exercícios propostos;

IV) Ilustrações do triângulo retângulo.

Diante dos pontos acima, o objetivo é visualizar como é feita a apresentação do tema nos livros didáticos, buscando analisar se os autores apropriam da história da Matemática para delinear o “Teorema de Pitágoras”. Em relação à representação do triângulo, verificaremos se as ilustrações apresentam o referido triângulo em posições diferentes.

Quanto aos exercícios, nos apoiamos em Chervel (1990):

> Se os conteúdos explícitos constituem o eixo central da disciplina ensinada, o exercício é a contrapartida quase indispensável. A inversão momentânea dos papéis entre o professor e o aluno constitui o elemento fundamental desse interminável diálogo de gerações que se opera no interior da escola. Sem o exercício e seu controle, não há fixação possível de uma disciplina. O sucesso das disciplinas depende fundamentalmente da qualidade dos exercícios aos quais elas podem se prestar. (CHERVEL, 1990, p. 204).

O autor descreve que os temas abordados são a espinha dorsal, contudo os exercícios são indispensáveis. Logo, este é um ponto que fará parte de nossa análise nos livros didáticos. Então, os exercícios estipulados para os discentes realizarem em sala de aula não deveriam ser massificantes, ou seja, meras repetições e, sim, estimular os discentes. Chervel também se refere à importância dos exercícios.

> Conteúdos explícitos e baterias de exercícios constituem então o núcleo da disciplina... Nada se passaria em aula se o aluno não demonstrasse um gosto, uma tendência, disposições para os conteúdos e os exercícios que se lhe propõe. (CHERVEL, 1990, p. 205).

Deste modo, se os exercícios constituem o núcleo da disciplina, devem ser analisados.

Segundo Zuin (2007), os livros didáticos têm elementos externos, internos, pré e pós-textuais, que podem fornecer diversas informações: ano de publicação, números de edições, tiragem, local de impressão, editores. Sendo que todos estes detalhes podem auxiliar ao pesquisador o direcionando para outros documentos, como também ajudá-lo a interpretar determinados fatos, comprovar ou refutar hipóteses. A autora nos remete também a preocupação com relação à análise de determinados elementos texto de um livro:

> Em relação ao corpo do texto, propriamente, a análise deve ser realizada segundo os objetivos do pesquisador. Entre outros aspectos, o olhar pode se dirigir ao tamanho e tipo da letra, disposição e estilo do texto (narrativo, expositivo, descritivo), legibilidade, inteligibilidade, exposição e organização da teoria, definições, metodologia, exercícios, problemas resolvidos e propostos, notas de rodapé, tabelas, gráficos, ilustrações. (ZUIN, 2007, p. 19).

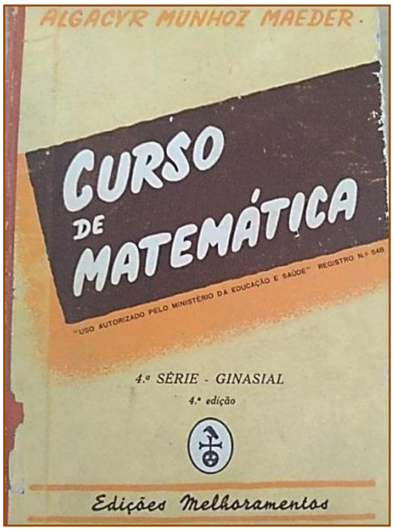
Seguindo as orientações da autora, nossa análise apontará alguns detalhes, tendo em vista que o nosso viés de pesquisa é verificar o uso da história da matemática para o ensino do “Teorema de Pitágoras”. Segundo nosso objetivo de pesquisa, foram analisados os seguintes dados: capa do livro, prefácio, dados biográficos do autor, destinação, exercícios, problemas resolvidos e propostos, além dos possíveis aspectos históricos que a obra apresente.

Analisamos dez livros didáticos de Matemática, respeitando a ordem crescente de publicação dos mesmos e analisando os quatro itens citados anteriormente (a definição do “Teorema de Pitágoras”, o desenvolvimento do conteúdo a partir do foco na história da matemática, as soluções nos exemplos e exercícios propostos e ilustrações referentes ao triângulo retângulo). O livro mais antigo selecionado foi publicado em 1948 e, o mais recente, em 2018.

As nomenclaturas, em relação à destinação dos livros, variam de acordo com a legislação educacional da época. Assim, teremos 4ª série do curso ginasial e 8ª série do primeiro grau que seriam equivalentes ao 9º ano do Ensino Fundamental. O ensino fundamental de nove anos de duração foi instituído em 6 de fevereiro de 2006, através da Lei no 11.274, incluindo as crianças de seis anos de idade, a partir do 1º ano.

3.1 Curso de Matemática, Algacyr Munhoz Maeder - 1948

Figura 1 - Capa do Livro Curso de Matemática



Fonte: Maeder (1948)

Analisamos a 4ª edição do livro *Curso de Matemática*, publicado em 1948, pela Companhia Melhoramentos de São Paulo, destinado à 4ª série do curso ginasial. O livro possui 276 páginas numeradas. O livro é escrito em preto e branco; na capa consta que este foi autorizado o uso pelo Ministério da Educação e, na folha de rosto, informa-se que a obra estava de acordo com o programa oficial do Ensino Secundário, expedido e posto em vigor pela Portaria nº 170, de 11 de julho de 1942.

O autor, nascido em Curitiba, em 1908, escreveu diversas obras, foi professor de Física, atuou em várias instituições, dentre elas, na UFPR, onde fundou o Centro Politécnico e o Departamento de Matemática e assumiu o cargo de reitor. Foi prefeito de Curitiba (LONGEN, 2007). Em 1972, recebeu, do presidente da República, a Ordem Nacional do Mérito Educativo.

O livro, *Curso de Matemática*, é constituido por quatorze capítulos, sendo o décimo sobre relações métricas nos triângulos, o qual contém o “Teorema de Pitágoras”. As figuras são em preto e branco, mas, a capa é colorida.

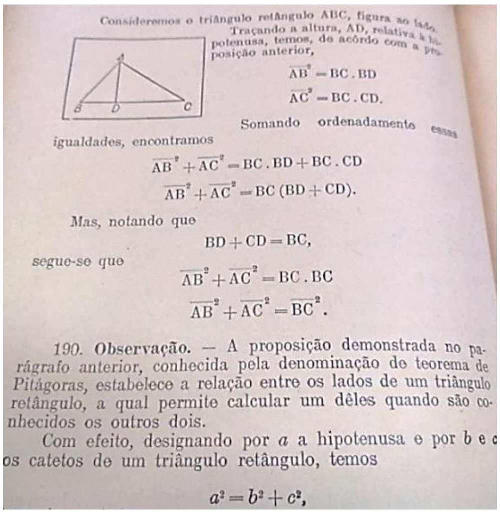
O “Teorema de Pitágoras”, abordado em 8 páginas, é encontrado no capítulo X e está subdividido nos seguintes tópicos:

- Projeções
- Fórmulas
- Relações métricas no triângulo retângulo
- Altura de um triângulo equilátero
- Triângulos de Pitágoras
- Diagonal do quadrado

Maeder assim define o “Teorema de Pitágoras”:

> **Teorema - Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrados dos catetos. (MAEDER, 1948, p.195).**

Figura 2 - Demonstração do “Teorema de Pitágoras”



Consideremos o triângulo retângulo ABC, figura ao lado. Traçando a altura, AD, relativa à hipotenusa, temos, de acôrdo com a proposição anterior,

$$\overline{AB}^2 = BC \,.\, BD$$

$$\overline{AC}^2 = BC \,.\, CD.$$

Somando ordenadamente essas igualdades, encontramos

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \,.\, BD + BC \,.\, CD$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC\,(BD + CD).$$

Mas, notando que

$$BD + CD = BC,$$

segue-se que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \,.\, BC$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

190. **Observação.** — A proposição demonstrada no *parágrafo anterior*, conhecida pela denominação de *teorema de Pitágoras*, estabelece a relação entre os lados de um triângulo retângulo, a qual permite calcular um dêles quando são conhecidos os outros dois.

Com efeito, designando por a a hipotenusa e por b e c os catetos de um triângulo retângulo, temos

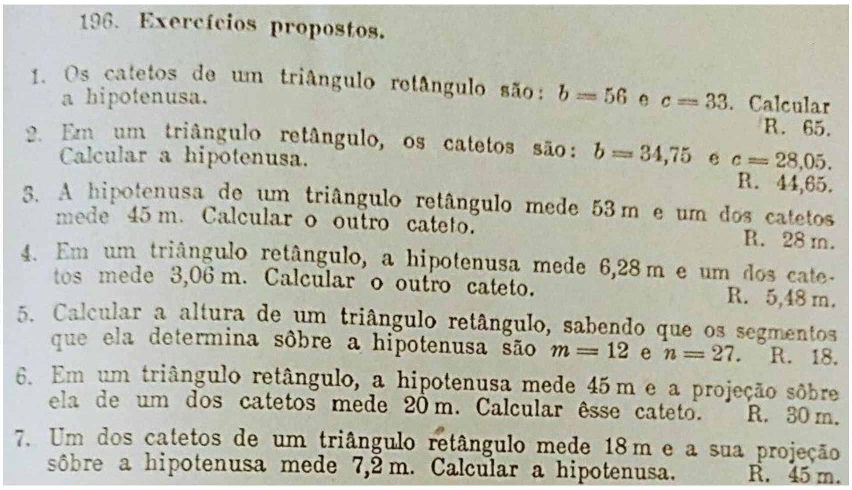
$$a^2 = b^2 + c^2,$$

Fonte: Maeder (1948, p. 196)

Não consta nenhuma menção histórica durante o desenvolvimento do tema, o autor limita-se somente a demonstrar o teorema.

O autor inclui cinco exemplos e vinte e quatro exercícios e aplicações do teorema em relação à determinação da altura de um triângulo equilátero e da diagonal de um quadrado (figuras 3, 4 e 5). Os vinte e quatro exercícios não incluem nenhuma figura geométrica. Eles implicam em somente aplicar fórmulas algébricas.

Figura 3 - Exercícios

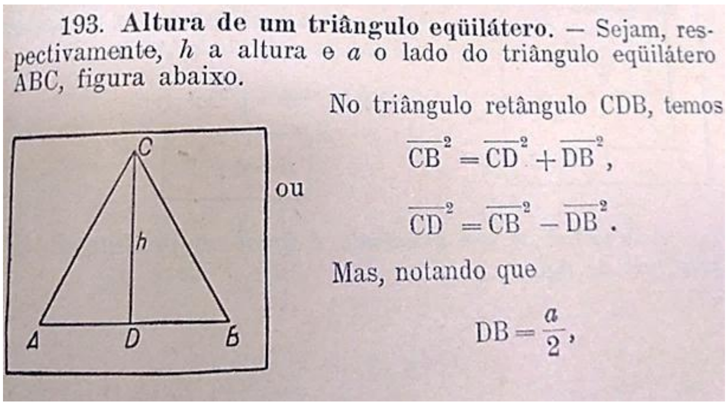


196. **Exercícios propostos.**

1. Os catetos de um triângulo retângulo são: $b = 56$ e $c = 33$. Calcular a hipotenusa. R. 65.
2. Em um triângulo retângulo, os catetos são: $b = 34{,}75$ e $c = 28{,}05$. Calcular a hipotenusa. R. 44,65.
3. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 53 m e um dos catetos mede 45 m. Calcular o outro cateto. R. 28 m.
4. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 6,28 m e um dos catetos mede 3,06 m. Calcular o outro cateto. R. 5,48 m.
5. Calcular a altura de um triângulo retângulo, sabendo que os segmentos que ela determina sôbre a hipotenusa são $m = 12$ e $n = 27$. R. 18.
6. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 45 m e a projeção sôbre ela de um dos catetos mede 20 m. Calcular êsse cateto. R. 30 m.
7. Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 18 m e a sua projeção sôbre a hipotenusa mede 7,2 m. Calcular a hipotenusa. R. 45 m.

Fonte: Maeder (1948, p.201)

Figura 4 - Aplicações do Teorema



193. **Altura de um triângulo eqüilátero.** — Sejam, respectivamente, h a altura e a o lado do triângulo eqüilátero ABC, figura abaixo.

No triângulo retângulo CDB, temos

$$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2,$$

ou

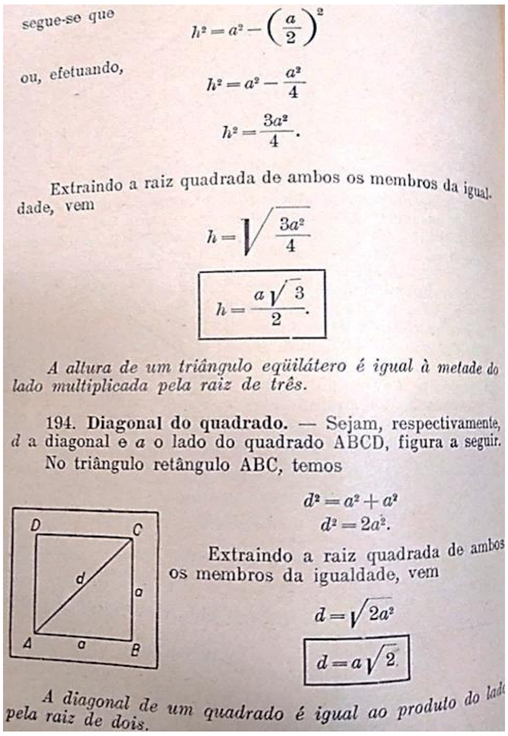
$$\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{DB}^2.$$

Mas, notando que

$$DB = \frac{a}{2},$$

Fonte: Maeder (1948, p.197)

Figura 5 - Diagonal do quadrado



segue-se que

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

ou, efetuando,

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade, vem

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.}$$

A altura de um triângulo eqüilátero é igual à metade do lado multiplicada pela raiz de três.

194. **Diagonal do quadrado.** — Sejam, respectivamente, *d* a diagonal e *a* o lado do quadrado ABCD, figura a seguir.

No triângulo retângulo ABC, temos

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d^2 = 2a^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade, vem

$$d = \sqrt{2a^2}$$

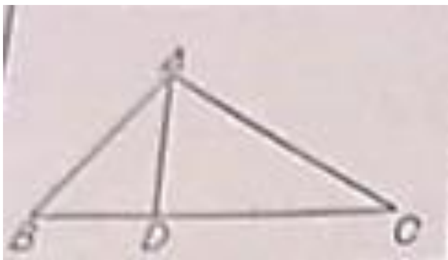
$$\boxed{d = a\sqrt{2}.}$$

A diagonal de um quadrado é igual ao produto do lado pela raiz de dois.

Fonte: Maeder (1948, p.198)

Existem, no capítulo, três representações do triângulo retângulo numa mesma posição (figura 6).

Figura 6 - Posição do triângulo retângulo

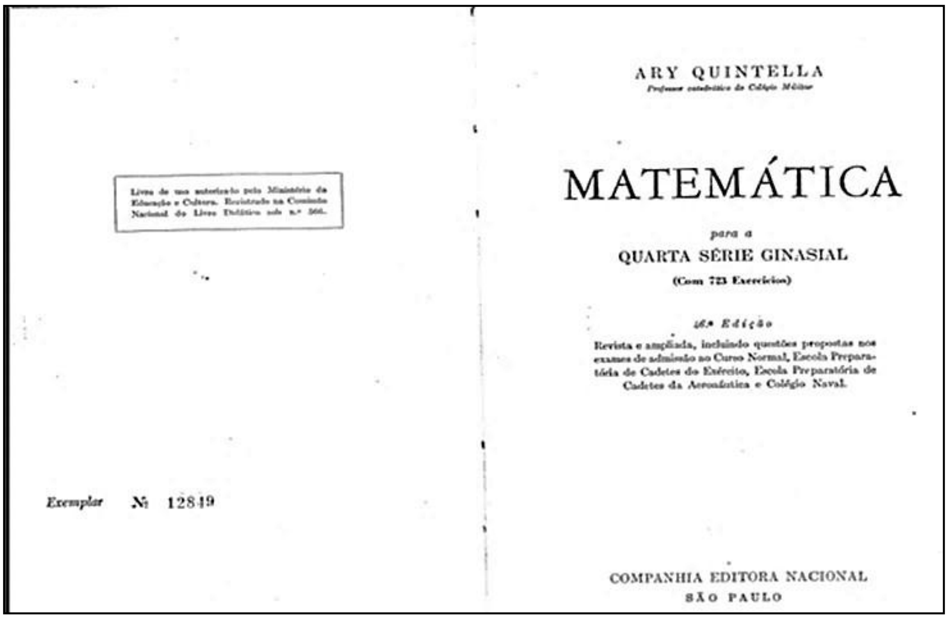


Fonte: Maeder (1948, p. 196)

Nos exercícios, o autor não colocou nenhuma figura geométrica.

3.2 Matemática para a Quarta Série Ginasial, Ary Quintella – 1963

Figura 7 - Folha de rosto do Livro Matemática Quarta Série



Livro de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura. Registrado na Comissão Nacional do Livro Didático sob n.º 566.

Exemplar N.º 12849

ARY QUINTELLA
Professor catedrático do Colégio Militar

MATEMÁTICA

para a
QUARTA SÉRIE GINASIAL
(Com 723 Exercícios)

46.ª Edição

Revista e ampliada, incluindo questões propostas nos exames de admissão no Curso Normal, Escola Preparatória de Cadetes do Exército, Escola Preparatória de Cadetes da Aeronáutica e Colégio Naval.

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

Fonte: Quintella (1963)

O livro *Matemática para a Quarta Série Ginasial*, de autoria de Ary Quintella, foi publicado em 1963, sendo analisada a 46ª edição, publicação da Companhia Editora Nacional, localizada em São Paulo.

O autor, Ary Norton de Murat Quintella (1906-1968), nasceu em São Paulo, foi catedrático de Matemática e diretor de ensino do Colégio Militar do Rio de Janeiro, professor em cursos preparatórios e assumiu o cargo de diretor da divisão de Ensino Normal do Instituto de Educação carioca. Escreveu mais de vinte livros didáticos de Matemática.

O livro, *Matemática para a Quarta Série Ginasial,* com 205 páginas numeradas, foi escrito em preto e branco. Consta que este foi autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura. Ele foi registrado na Comissão Nacional do Livro Didático sob o nº 566. O número do exemplar é 12849. Informa-se que a obra possui 723 exercícios. No índice geral, o “Teorema de Pitágoras” consta da Unidade 2:

- Unidade 2

  - Relações métricas no triângulo retângulo
  - ***Aplicações do “Teorema de Pitágoras”***
  - Relações métricas num triângulo qualquer
  - Cálculo das alturas, medianas e bissetrizes
  - Relações métricas no círculo

- Polígonos inscritíveis e circunscritíveis
- Polígonos regulares
- Medição da circunferência

Como pode-se observar, o autor trabalha, na Unidade 1, a álgebra; nas unidades 2 e 3, a geometria. O “Teorema de Pitágoras” está localizado na Unidade 2, iniciando precisamente na página 99. Quintella, antes de explorar este tema, aborda primeiramente as relações métricas no triângulo retângulo. O “Teorema de Pitágoras” é apresentado em três páginas.

O autor usa as relações métricas num triângulo retângulo para chegar à conclusão do teorema (figura 8).

Figura 8 - “Teorema de Pitágoras”, segundo Quintella

98 *Matemática — Quarta série ginasial*

Seja o triângulo retângulo BAC (fig. 3).

Tracemos a perpendicular AH sôbre a hipotenusa; m e n serão, respectivamente, as projeções dos catetos b e c.

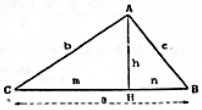


FIG. 3

Na figura 3, temos, então, imediatamente:

$$\boxed{m + n = a} \quad (1)$$

2.ª **Qualquer cateto é média proporcional entre a hipotenusa e sua projeção sôbre ela.**

Temos, na mesma figura 3:

Hip.: $A = 90°$ Tese: $\begin{cases} b^2 = am \\ c^2 = an \end{cases}$

Demonstração.

a) Os triângulos AHC e BAC são semelhantes por terem o ângulo agudo C comum. Dessa semelhança conclui-se:

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \therefore \boxed{b^2 = am} \quad (2)$$

b) Os triângulos retângulos AHB e BAC são semelhantes por terem o ângulo agudo B comum. Conclui-se:

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \therefore \boxed{c^2 = an} \quad (3)$$

3.ª **A altura traçada sôbre a hipotenusa é média proporcional entre as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa.**

Tese: $h^2 = mn$ (fig. 3)

Relações métricas no triângulo retângulo 99

Demonstração. Os ângulos $\widehat{HAC}$ e $\hat{B}$ são iguais por terem o mesmo complemento C. Logo, podemos concluir:

$$\triangle AHC \sim \triangle AHB$$

Dessa semelhança resulta:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \therefore \boxed{h^2 = mn} \quad (4)$$

4.ª **Teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.**

Demonstração. Somando, membro a membro, as equações (2) e (3), obtemos:

$$b^2 + c^2 = am + an$$

fatorando o segundo membro, resulta:

$$b^2 + c^2 = a(m + n),$$

substituindo $m + n$ por seu valor a:

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2} \quad (5)$$

5.ª **O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura.**

Demonstração. Multiplicando, membro a membro, as equações (2) e (3), dadas pela segunda relação, obtemos:

$$b^2c^2 = a^2mn$$

ou, em virtude de (4):

$$b^2c^2 = a^2h^2$$

extraindo a raiz, resulta:

$$\boxed{bc = ah} \quad (6)$$

Fonte: Quintella (1963, p. 98-99)

Não consta abordagem histórica durante o desenvolvimento do conteúdo. O autor limita-se a demonstrar o teorema. Durante o desenrolar do tema, percebe-se que o autor indicou somente dois triângulos, sendo um triângulo retângulo e, o outro, um triângulo equilátero (figura 9). Em seguida, usou um quadrado para calcular a diagonal deste, via utilização do teorema.

Figura 9 - O triângulo equilátero e o quadrado

104 *Matemática — Quarta série ginasial*

4. Aplicações do teorema de Pitágoras.

1.ª) ***Altura do triângulo eqüilátero.*** Suponhamos o triângulo eqüilátero ABC (fig. 4) e tracemos a altura AD, que é também mediana. Logo, temos:

$$BD = DC = \frac{l}{2}.$$

Considerando o triângulo retângulo ADC, teremos, de acôrdo com o teorema de Pitágoras:

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \text{ ou } h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

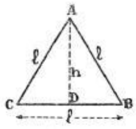


Fig. 4

donde, finalmente, a fórmula:

$$\boxed{h = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

Observação. A mesma fórmula aplica-se ao cálculo da mediana e da bissetriz.

2.ª) ***Diagonal do quadrado.*** Consideremos o quadrado $ABCD$ e tracemos a diagonal AC (fig. 5).

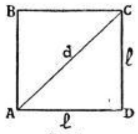


Fig. 5

O triângulo retângulo ACD, permite concluir:

$$d^2 = l^2 + l^2, \text{ ou } d^2 = 2l^2$$

donde, finalmente:

$$\boxed{d = l\sqrt{2}}$$

Fonte: Quintella (1963, p. 104)

Em relação aos tipos de soluções nos exemplos e exercícios propostos, encontram-se uma demonstração do teorema, uma aplicação do teorema para calcular a altura de um triânguo equilátero e, por fim, o cálculo da diagonal de um quadrado. Neste sentido, há poucos exemplos sobre o tema. Contudo, totalizam 50 o número de exercícios propostos.Os exercícios não possuem nenhuma figura geométrica, sendo baseados em aplicação de fórmulas algébricas (figura 10).

Figura 10 - Exercícios, segundo Quintella

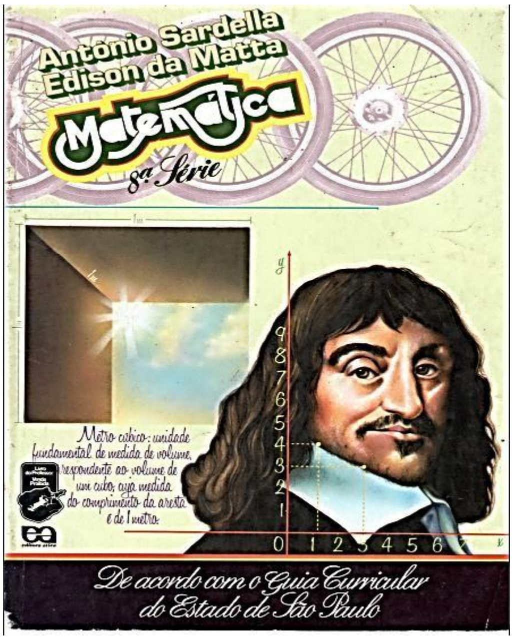
3. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20cm e a projeção de um dos catetos, 4cm. Calcular a altura relativa à hipotenusa. *Resp.:* 8cm
4. Num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa mede 6cm e um dos segmentos que determina na hipotenusa mede 4cm. Calcular a hipotenusa. *Resp.:* 13cm
5. Num triângulo retângulo um dos catetos mede 6cm e sua projeção sôbre a hipotenusa mede 4cm. Calcular a hipotenusa. *Resp.:* 9cm
6. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 30cm e a projeção de um dos catetos sôbre ela vale $\frac{4}{5}$ daquêle comprimento. Calcular a altura relativa à hipotenusa. *Resp.:* 12cm
7. Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo em que um dos catetos mede 20cm e o outro vale 3/4 do primeiro. *Resp.:* 25cm
8. A soma dos catetos de um triângulo retângulo vale 21m e a hipotenusa tem 15m. Calcular os catetos. *Resp.:* 9m e 12m
9. A hipotenusa de um triângulo retângulo tem 26m e a razão entre os catetos é 5/12. Calcular os catetos. *Resp.:* 10m e 24m
10. A hipotenusa de um triângulo retângulo tem 13m e a diferença entre os catetos é de 7m. Calcular os catetos. *Resp.:* 5m e 12m
11. O perímetro de um triângulo retângulo tem 30m e a hipotenusa, 13m. Calcular os catetos. *Resp.:* 5m e 12m

Fonte: Quintella (1963, p. 105)

Quintella utiliza-se pouco de ilustrações do triângulo retângulo.

3.3 Matemática – 8ª série, Antônio Sardella e Edison da Matta – 1981

Figura 11 - Capa do Livro Matemática, 8ª série



Fonte: Antônio Sardella e Edison da Matta (1981)

Analisamos a 1ª edição do livro *Matemática 8ª série* (livro do professor), publicada em 1981, pela Editora Ática, com sede em São Paulo.

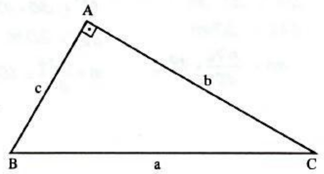
Edison da Matta possui graduação em licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática pela Faculdade Associadas do Ipiranga, mestrado em Educação pela Universidade de São Paulo. Não encontramos informações sobre Antônio Sardella.

O livro possui 216 páginas numeradas, com dezoito unidades, sendo que, o “Teorema de Pitágoras” é encontrado na unidade 13. Os autores fazem a abordagem do tema em 9 páginas e já iniciam com a definição do teorema. Não existe nenhuma menção histórica sobre o mesmo. A demonstração do teorema é realizada através das relações métricas no triângulo retângulo (figura 12 e 13).

Figura 12 - Demonstração do Teorema

O TEOREMA DE PITÁGORAS

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, tendo estas medidas todas a mesma unidade.



Se o $\triangle ABC$ é retângulo, então: $a^2 = b^2 + c^2$

Fonte: Antônio Sardella e Edison da Matta (1981, p. 170)

Figura 13- Continuação da demonstração

Demonstração:

Sabe-se que:

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= a \cdot m \\ c^2 &= a \cdot n \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{estas equações, obtém-se:}]{\text{adicionando membro a membro}} \begin{aligned} b^2 &= a \cdot m \\ c^2 &= a \cdot n \\ \hline b^2 + c^2 &= a \cdot m + a \cdot n \end{aligned}$$

Como: $a = m + n$, vem:

$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Então não se esqueça:

$$\begin{pmatrix}\text{medida da}\\\text{hipotenusa}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\text{medida de}\\\text{um cateto}\end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix}\text{medida do}\\\text{outro cateto}\end{pmatrix}^2$$

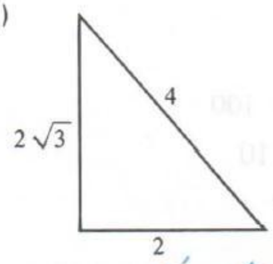
Fonte: Antônio Sardella e Edison da Matta (1981, p. 171)

Entre exercícios e exemplos são apresentados cerca de 50. Quanto ao triângulo retângulo, este é ilustrado em posições diversificadas nos exercícios. Os autores procuram integrar a geometria e a álgebra, através do tema e apresentaram as aplicações do Teorema, como diagonal do quadrado e altura de um triângulo equilátero. Existem exercícios utilizando a geometria, também exercícios que englobam a geometria e as fórmulas algébricas conforme consta na figura 14.

Figura 14 - Exercícios, segundo Matta e Sardella

c) Verifique se os triângulos são retângulos:

1)



Resolução:

$(4)^2 \overset{?}{=} (2)^2 + (2\sqrt{3})^2$

$16 \overset{?}{=} 4 + 12$

$16 = 16$ (V)

Resposta: É retângulo.

Fonte: Antônio Sardella e Edison da Matta (1981, p. 172)

Uma das questões os autores relacionaram o tema equação do 2º com o Teorema de Pitágoras (figura 15)

Figura 15 - Exercícios com equação do 2º grau

6) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são expressas, em metros, pelas raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$. Logo, podemos afirmar que:

a. ( ) seu perímetro é 20 m.

b. ( ) a hipotenusa mede 9 m.

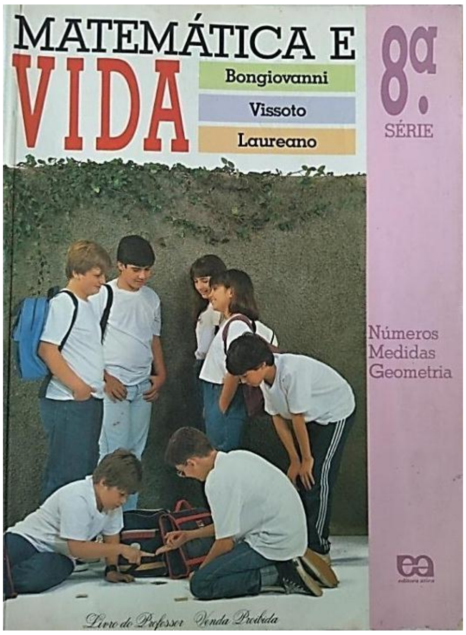
c. (X) os catetos medem 4 m e 5 m.

d. ( ) os catetos medem 9 m e 20 m.

Fonte: Antônio Sardella e Edison da Matta (1981, p. 178)

3.4 Matemática e Vida – 8ª série, Vicenzo Bongiovanni, Olímpio Rudinin Vissoto Leite e José Luiz Tavares Laureano – 1990

Figura 16- Capa do Livro Matemática e Vida



Fonte: Bongiovanni, Laureano e Leite (1990)

O livro *Matemática e Vida*, destinado à 8ª série, publicado em 1990, 1ª edição, é da Editora Ática em São Paulo. O livro possui 304 páginas numeradas. Analisamos o exemplar do professor, vale ressaltar que o livro do aluno possui 248 páginas.

Vicenzo Bongiovanni é licenciado em Matemática pela USP, mestre em Matemática pela PUC-SP e professor de Matemática da educação básica e Ensino Superior. Olímpio Rudinin Vissoto Leite é licenciado em Matemática pela USP, pós-graduado em Matemática Aplicada pela USP e professor da educação básica e 3º Ensino Superior. José Luiz Tavares Laureano é licenciado em Matemática pela Fundação Santo André, pós-graduado em Administração da produção pelas Faculdades Santana e São Paulo e professor de Matemática em educação básica e Ensino Superior.

O livro possui escritas e figuras coloridas, sendo constituído por quatro capítulos, sendo, o quarto sobre relações métricas nos triângulos, neste capítulo encontra-se o “Teorema de Pitágoras”. No índice, o referido tema está desenvolvido através das seguintes unidades:

- Unidade 33 - Geometria experimental: semelhança de triângulos
- Unidade 34 - Geometria dedutiva: triângulos semelhantes
- Unidade 35 - Relações métricas num triângulo retângulo
- Unidade 36 - Aplicando o “Teorema de Pitágoras”

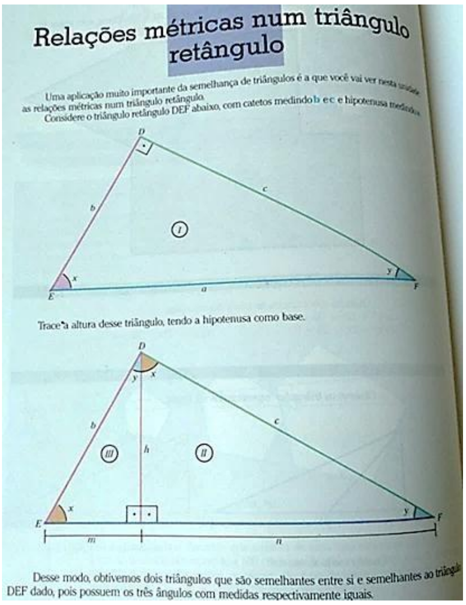
No livro, treze páginas são dedicadas à abordagem do tema “Teorema de Pitágoras”. Os autores utilizam a semelhança de triângulos, após estabelecerem cinco relações métricas no triângulo retângulo, em seguida, deduziram o teorema algebricamente.

Seguem as aplicações mais importantes do “Teorema de Pitágoras”, segundo os autores:

i) Diagonal do quadrado
ii) Altura do triângulo equilátero

Para a demonstração os autores utilizam a semelhança de triângulos (figuras 17, 18 e 19).

Figura 17 - Demonstração do “Teorema de Pitágoras”



Relações métricas num triângulo retângulo

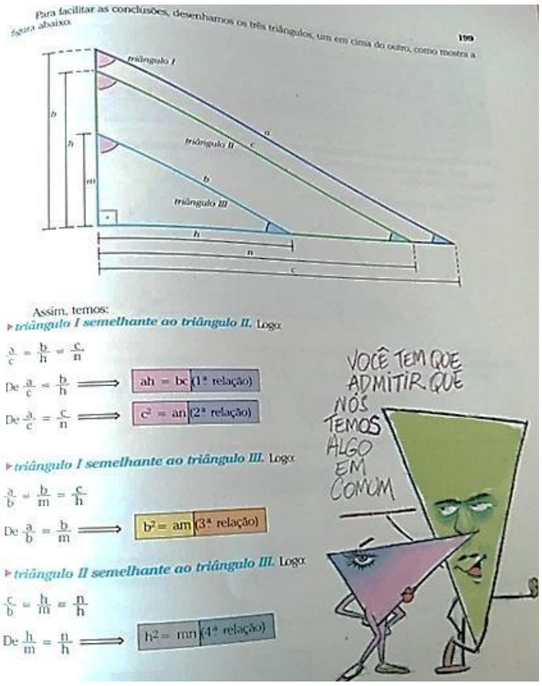
Uma aplicação muito importante da semelhança de triângulos é a que você vai ver nesta
as relações métricas num triângulo retângulo.
Considere o triângulo retângulo DEF abaixo, com catetos medindo b e c e hipotenusa

Trace a altura desse triângulo, tendo a hipotenusa como base.

Desse modo, obtivemos dois triângulos que são semelhantes entre si e semelhantes ao
DEF dado, pois possuem os três ângulos com medidas respectivamente iguais.

Fonte: Bongiovanni, Laureano e Leite (1990, p. 198)

Figura 18 - Continuação demonstração



Para facilitar as conclusões, desenhamos os três triângulos, um em cima do outro, como mostra a figura abaixo.

199

Assim, temos:

▸ *triângulo I semelhante ao triângulo II.* Logo:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n}$$

De $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Longrightarrow$ $\boxed{ah = bc \text{ (1ª relação)}}$

De $\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Longrightarrow$ $\boxed{c^2 = an \text{ (2ª relação)}}$

▸ *triângulo I semelhante ao triângulo III.* Logo:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}$$

De $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Longrightarrow$ $\boxed{b^2 = am \text{ (3ª relação)}}$

▸ *triângulo II semelhante ao triângulo III.* Logo:

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

De $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Longrightarrow$ $\boxed{h^2 = mn \text{ (4ª relação)}}$

Fonte: Bongiovanni, Laureano e Leite (1990, p. 199)

Figura 19 - Continuação da demonstração

Adicionando membro a membro, as relações 2ª e 3ª, temos:

$$+\begin{cases} b^2 = am \\ c^2 = an \end{cases}$$

$$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$$

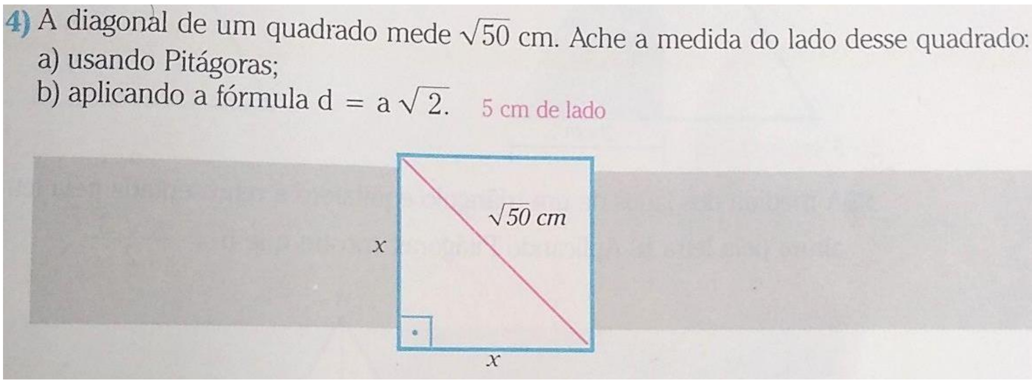
Como $m + n = a$, vem: $\boxed{b^2 + c^2 = a^2 \text{ (5ª relação - teorema de Pitágoras)}}$

Fonte: Bongiovanni, Laureano e Leite (1990, p. 200)

Não consta nenhuma menção histórica durante o desenvolvimento do tema, os autores limitam-se somente a demonstrar o teorema.

No livro, não há exemplos e constam vinte e sete exercícios. Na maioria dos exercícios, usam a geometria e a aplicação de fórmulas algébricas (figuras 20 e 21).

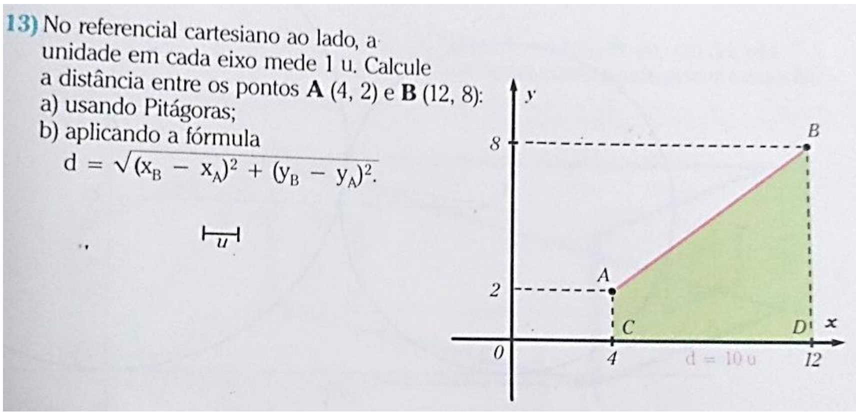
Figura 20 – Exercício



4) A diagonal de um quadrado mede $\sqrt{50}$ cm. Ache a medida do lado desse quadrado:
a) usando Pitágoras;
b) aplicando a fórmula $d = a\sqrt{2}$. 5 cm de lado

Fonte: Bongiovanni, Laureano e Leite (1990, p. 205)

Figura 21 – Uso do Teorema para cáculo de distância entre dois pontos

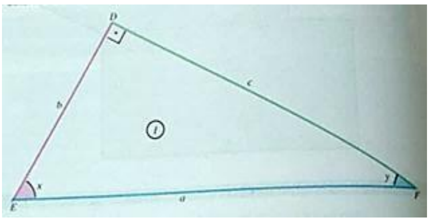


13) No referencial cartesiano ao lado, a unidade em cada eixo mede 1 u. Calcule a distância entre os pontos **A** (4, 2) e **B** (12, 8):
a) usando Pitágoras;
b) aplicando a fórmula
$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Fonte: Bongiovanni, Laureano e Leite (1990, p. 207)

Basicamente, na maioria das ilustrações, indica-se uma única posição do triângulo retângulo (figura 22).

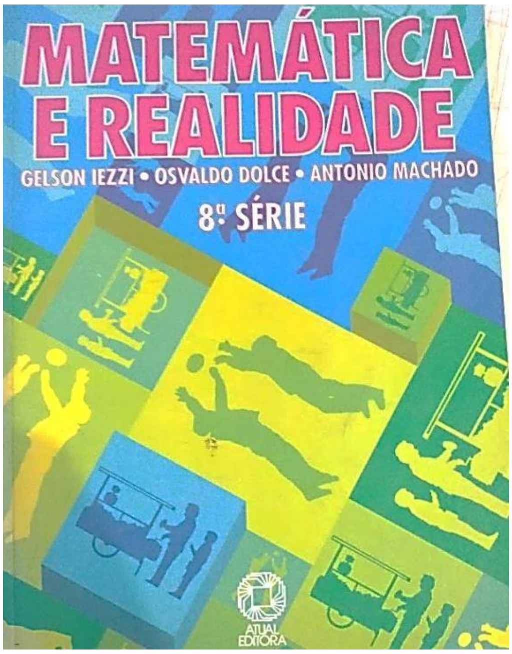
Figura 22 – Ilustração do triângulo retângulo



Fonte: Bongiovanni, Laureano e Leite (1990, p. 198)

3.5 Matemática e Realidade – 8ª série, Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado - 1996

Figura 23- Capa do Livro Matemática e Realidade



Fonte: Dolce, Iezzi e Machado (1996)

Analisamos a 3ª edição do livro *Matemática e Realidade – 8ª série*, publicada em 1996 pela Atual Editora Ltda, com sede em São Paulo. O livro possui 237 páginas numeradas, sendo que, a partir da página 223, são apresentadas as respectivas respostas dos exercícios constantes no livro.

Gelson Iezzi é engenheiro metalúrgico pela USP, licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP, professor em cursos pré-vestibulares e em faculdades em São Paulo e autor de vários livros de Matemática para a Educação Básica e superior.

Antônio Machado é licenciado em Matemática pela USP, mestre em Estatística pela USP e professor assistente do Instituto de Matemática e Estatística-USP. Autor de vários livros.

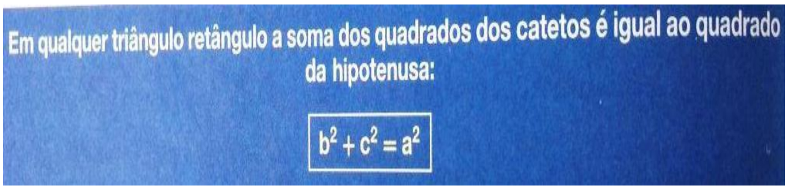
Osvaldo Dolce é engenheiro civil pela Escola Politécnica da USP, ex-professor da rede oficial do Estado de São Paulo, ex-professor de matemática de cursos pré-vestibulares e autor de vários livros.

O livro está impresso com escrita e figuras coloridas sendo constituído por quatro unidades, divididas em vinte oito capítulos. Na quarta unidade e no capítulo 19, encontraremos as relações métricas nos triângulos e o “Teorema de Pitágoras”. Este é encontrado no índice, precisamente no capítulo 19, dividido da seguinte forma:

- Elementos de um triângulo retângulo
- Semelhanças no triângulo retângulo
- Relações métricas no triângulo retângulo
- Aplicações notáveis do “Teorema de Pitágoras”

A abordagem do tema “Teorema de Pitágoras” é realizada em dez páginas. A demonstração é feita inicialmente com semelhança de triângulo, após as relações métricas no triângulo retângulo e, finalmente, chega-se ao teorema.

Figura 24 - Definição do Teorema

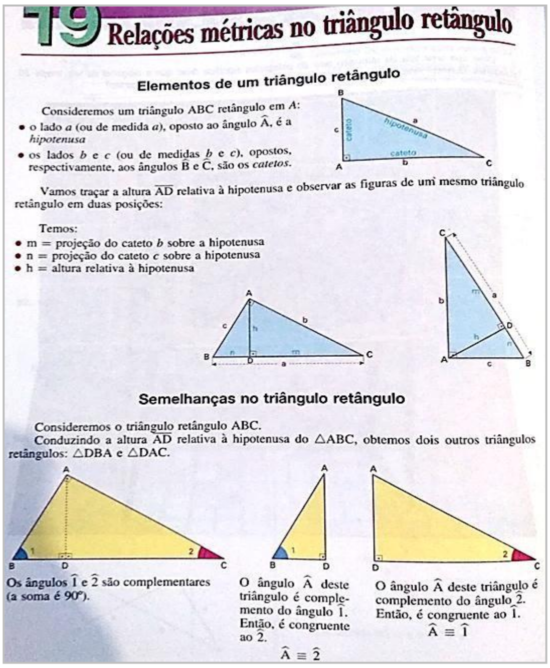


Em qualquer triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa:

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

Fonte: Dolce, Iezzi e Machado (1996, p.154)

Figura 25 - Demonstração do “Teorema de Pitágoras”



19 Relações métricas no triângulo retângulo

Elementos de um triângulo retângulo

Consideremos um triângulo ABC retângulo em A:

- o lado a (ou de medida a), oposto ao ângulo $\hat{A}$, é a *hipotenusa*
- os lados b e c (ou de medidas b e c), opostos, respectivamente, aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são os *catetos*.

Vamos traçar a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa e observar as figuras de um mesmo triângulo retângulo em duas posições:

Temos:

- m = projeção do cateto b sobre a hipotenusa
- n = projeção do cateto c sobre a hipotenusa
- h = altura relativa à hipotenusa

Semelhanças no triângulo retângulo

Consideremos o triângulo retângulo ABC.

Conduzindo a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa do $\triangle ABC$, obtemos dois outros triângulos retângulos: $\triangle DBA$ e $\triangle DAC$.

Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são complementares (a soma é 90°).

O ângulo $\hat{A}$ deste triângulo é complemento do ângulo $\hat{1}$. Então, é congruente ao $\hat{2}$.

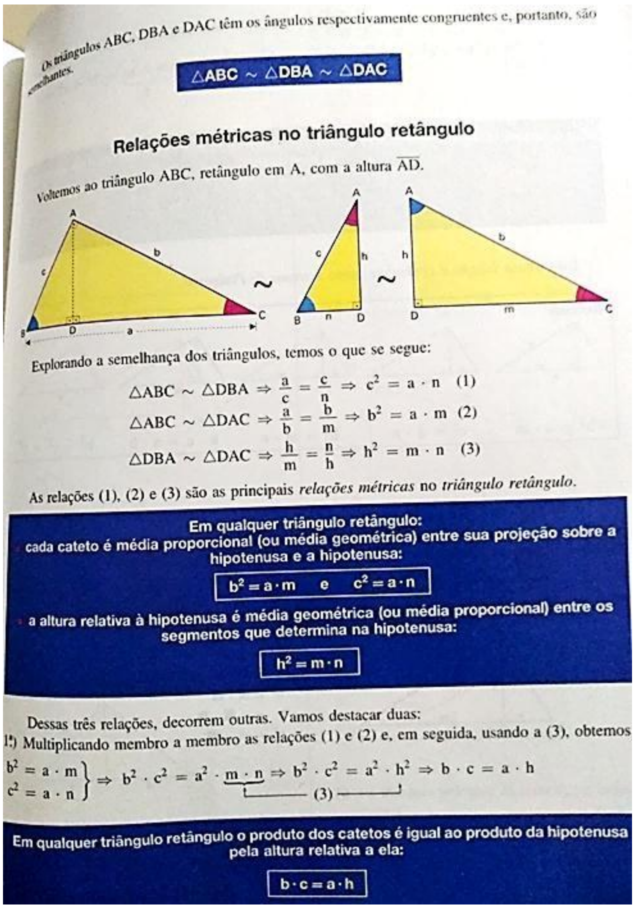
$\hat{A} \equiv \hat{2}$

O ângulo $\hat{A}$ deste triângulo é complemento do ângulo $\hat{2}$. Então, é congruente ao $\hat{1}$.

$\hat{A} \equiv \hat{1}$

Fonte: Dolce, Iezzi e Machado (1996, p.152)

Figura 26 - Continuação demonstração



Os triângulos ABC, DBA e DAC têm os ângulos respectivamente congruentes e, portanto, são semelhantes.

$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

Relações métricas no triângulo retângulo

Voltemos ao triângulo ABC, retângulo em A, com a altura $\overline{AD}$.

Explorando a semelhança dos triângulos, temos o que se segue:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \quad (1)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \quad (2)$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) são as principais *relações métricas* no *triângulo retângulo*.

Em qualquer triângulo retângulo:

- **cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa:**

$$\boxed{b^2 = a \cdot m \quad \text{e} \quad c^2 = a \cdot n}$$

- **a altura relativa à hipotenusa é média geométrica (ou média proporcional) entre os segmentos que determina na hipotenusa:**

$$\boxed{h^2 = m \cdot n}$$

Dessas três relações, decorrem outras. Vamos destacar duas:

1ª) Multiplicando membro a membro as relações (1) e (2) e, em seguida, usando a (3), obtemos:

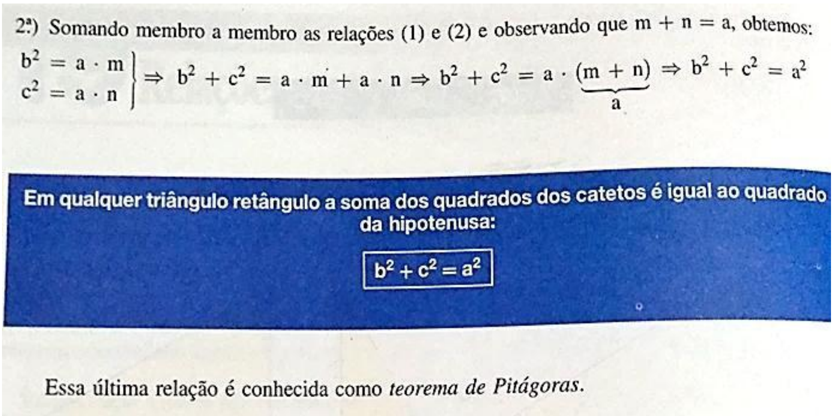
$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{m \cdot n}_{(3)} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

Em qualquer triângulo retângulo o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela:

$$\boxed{b \cdot c = a \cdot h}$$

Fonte: Dolce, Iezzi e Machado (1996, p.153)

Figura 27 - Continuação demonstração



2ª) Somando membro a membro as relações (1) e (2) e observando que m + n = a, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot \underbrace{(m + n)}_{a} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Em qualquer triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa:

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

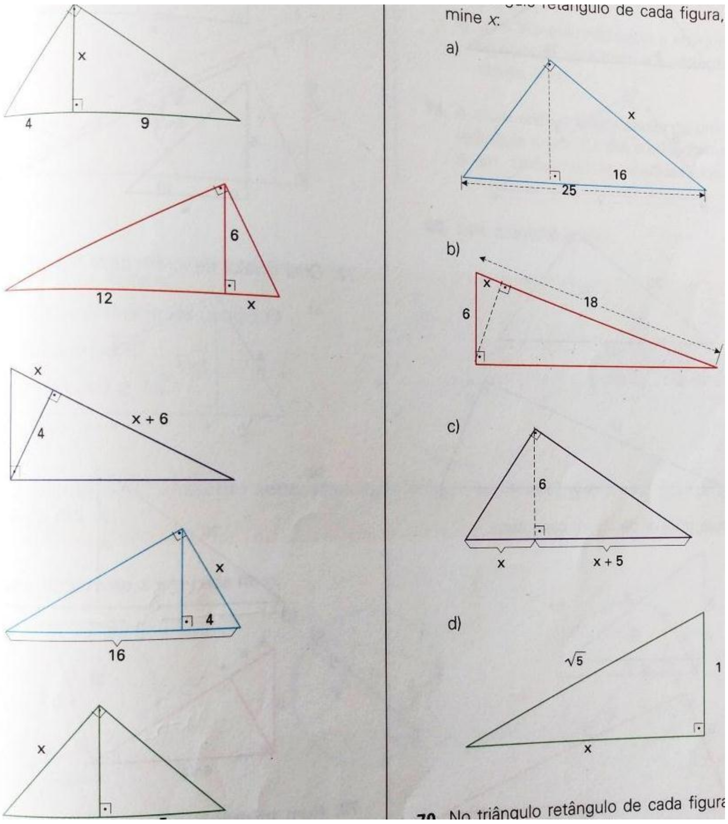
Essa última relação é conhecida como *teorema de Pitágoras*.

Fonte: Dolce, Iezzi e Machado (1996, p.154)

Para a demonstração utiliza-se a semelhança de triângulos (figuras 25, 26 e 27). Não consta nenhuma menção histórica durante o desenvolvimento do tema. Os autores não utilizam exemplos e passam diretamente para os exercícios propostos num total de trinta e quatro exercícios. Estas figuras geométricas, contudo, seguem um mesmo padrão para a aplicação de fórmulas algébricas. Os autores geralmente colocam o triângulo e estabelecem uma incógnita a ser calculada (figura 28).

O triângulo retângulo é apresentado em posições diversificadas nos exercícios e durante a abordagem do tema.

Figura 28 – Posições diversificadas do triângulo retângulo



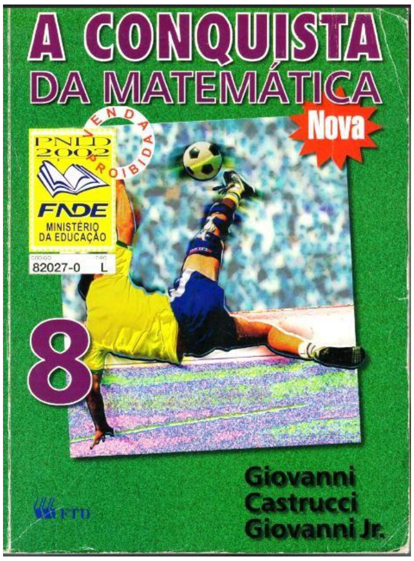
Fonte: Dolce, Iezzi e Machado (1996, p.155)

Os autores apresentaram as aplicações, que, segundo eles, são as mais importantes do “Teorema de Pitágoras”:

- Diagonal do quadrado
- Altura de um triângulo equilátero

3.6 A Conquista da Matemática, Benedito Castrucci, José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Júnior - 1998

Figura 29 - Capa do livro “A Conquista da Matemática”



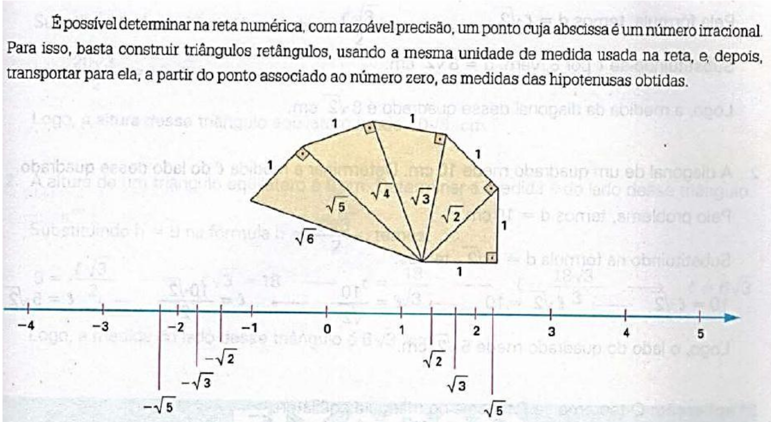
Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998)

Analisamos a 1ª edição do livro *A Conquista da Matemática* para a 8ª série, publicada em 1998, pela Editora FTD Ltda, com sede em São Paulo. O livro possui 304 páginas numeradas, com doze capítulos. A partir da página 298, são apresentadas as respostas dos exercícios propostos.

José Ruy Giovanni é bacharel e licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, foi professor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio. Benedito Castrucci, bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP), ex-professor de Matemática da Pontifícia Universidade Católica e da Universidade de São Paulo, ex-professor de escolas públicas e particulares do Ensino Fundamental e Médio. José Ruy Giovanni Jr. é licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), professor de Matemática em escolas de do Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

É abordado no capítulo 8, em 15 páginas, há cinco exemplos sobre o teorema e 37 exercícios. Os autores utilizaram dois exercícios, sendo o primeiro para calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados 1. Sem mencionar que $\sqrt{2}$ é um número irracional e no segundo exercício instrui como montar uma reta numérica que contenha alguns números irracionais através do Teorema (figura 30).

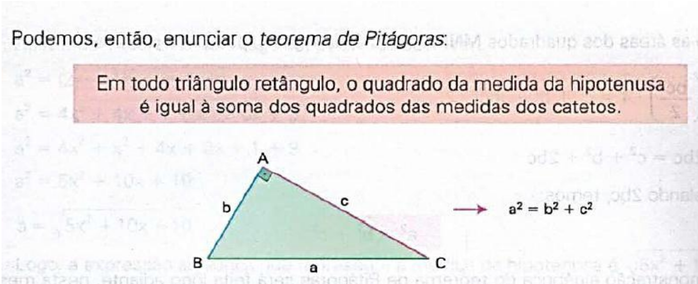
Figura 30 - Construção de númerros irracionais



É possível determinar na reta numérica, com razoável precisão, um ponto cuja abscissa é um número irracional. Para isso, basta construir triângulos retângulos, usando a mesma unidade de medida usada na reta, e, depois, transportar para ela, a partir do ponto associado ao número zero, as medidas das hipotenusas obtidas.

Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998, p. 203)

Figura 31 - Definição do teorema



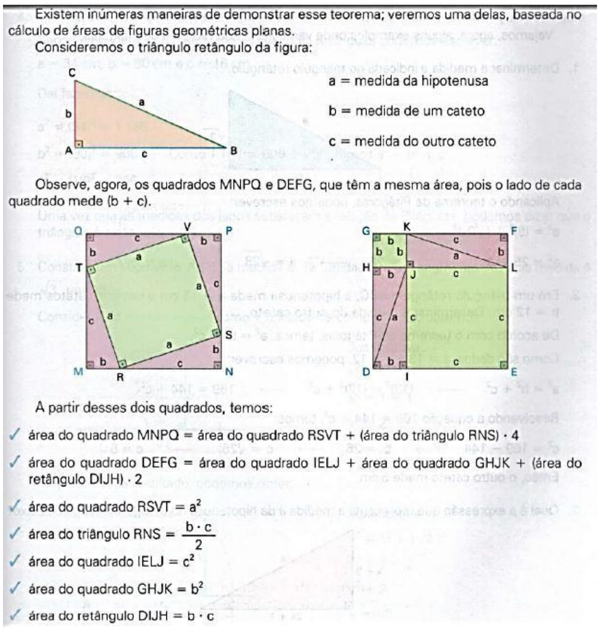
Podemos, então, enunciar o *teorema de Pitágoras*:

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998, p.197)

A demonstração do teorema é realizada através do cálculo de áreas (figuras 32, 33).

Figura 32 - Demonstração do teorema



Existem inúmeras maneiras de demonstrar esse teorema; veremos uma delas, baseada no cálculo de áreas de figuras geométricas planas.

Consideremos o triângulo retângulo da figura:

a = medida da hipotenusa

b = medida de um cateto

c = medida do outro cateto

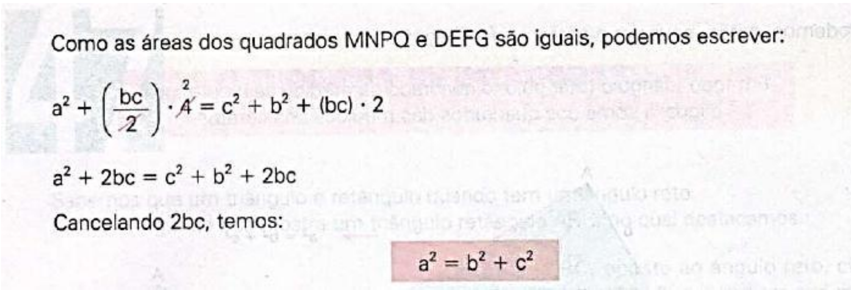
Observe, agora, os quadrados MNPQ e DEFG, que têm a mesma área, pois o lado de cada quadrado mede (b + c).

A partir desses dois quadrados, temos:

- ✓ área do quadrado MNPQ = área do quadrado RSVT + (área do triângulo RNS) · 4
- ✓ área do quadrado DEFG = área do quadrado IELJ + área do quadrado GHJK + (área do retângulo DIJH) · 2
- ✓ área do quadrado RSVT = a^2
- ✓ área do triângulo RNS = $\frac{b \cdot c}{2}$
- ✓ área do quadrado IELJ = c^2
- ✓ área do quadrado GHJK = b^2
- ✓ área do retângulo DIJH = $b \cdot c$

Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998, p.197)

Figura 33- Continuação da demonstração do teorema



Como as áreas dos quadrados MNPQ e DEFG são iguais, podemos escrever:

$$a^2 + \left(\frac{bc}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{4}^{2} = c^2 + b^2 + (bc) \cdot 2$$

$$a^2 + 2bc = c^2 + b^2 + 2bc$$

Cancelando 2bc, temos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998, p.198)

Os autores fazem um comentário sobre a história, relatando que os egípcios utilizaram uma corda de 13 nós para construir cantos em ângulos retos e relatam onde Pitágoras nasceu. Informam que ele provou o “Teorema de Pitágoras”.

Quanto ao triângulo retângulo, este é apresentado em posições diversificadas nos exercícios. No livro, verifica-se a utilização em conjunto da geometria e álgebra, e as aplicações do Teorema, como diagonal do quadrado e altura de um triângulo equilátero. Os exercícios, geralmente, envolvem a geometria com aplicação de fórmulas algébricas, também problema contextualizado, como o indicado na figura 34.

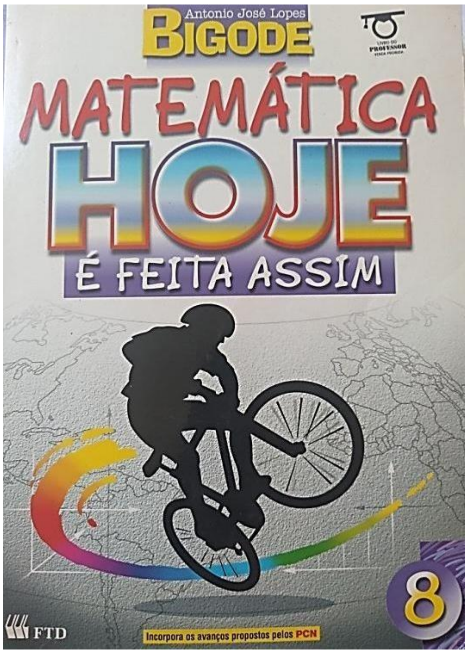
Figura 34 - Exemplo de Problema

1 Para ir de sua casa ao ponto de ônibus, uma pessoa andava 120 m em linha reta até a esquina e dobrava à esquerda numa rua perpendicular, por onde andava mais 160 m. Certo dia, descobriu que podia atravessar um terreno que separava sua casa do ponto de ônibus e passou a fazer esse trajeto em linha reta. Nessas condições, quantos metros essa pessoa passou a andar?

Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998, p.211)

3.7 Matemática hoje é feita assim – 8ª série, Antônio José Lopes Bigode – 2000

Figura 35 - Capa do Livro Matemática Hoje é Feita Assim



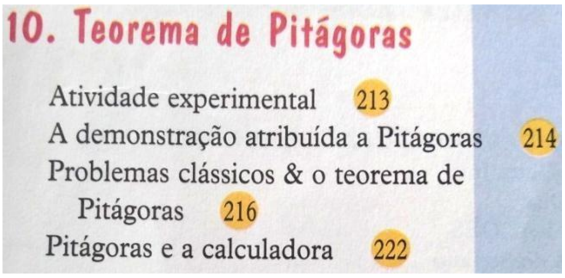
Fonte: Bigode (2000)

A 1ª edição do livro *Matemática hoje é feita assim*, para a 8ª série, foi publicada em 2000, pela Editora FTD S.A. com sede em São Paulo. O livro possui 335 páginas numeradas. Foi analisado o exemplar do professor, que possui 56 páginas a mais que o livro do aluno.

Antônio José Lopes nasceu em São Paulo no ano de 1984. É professor de Matemática, jornalista especializado em popularização das Ciências e Divulgação Científica, autor de livros didáticos de Matemática para o Ensino Básico, autor de livros de Metodologia da Matemática para formação de professores, pesquisador em Didática da Matemática e formador de professores, graduado em Licenciatura em Matemática, pela USP, e Doutor em Didática das Ciências e da Matemática pela Universidade Autônoma de Barcelona, na Espanha.

A obra se apresenta com escritas coloridas. Na capa, consta que esta incorpora os avanços propostos pelos PCNs. O livro possui quatorze capítulos, sendo o décimo sobre o “Teorema de Pitágoras”.

Figura 36 – Índice - localização do “Teorema de Pitágoras”



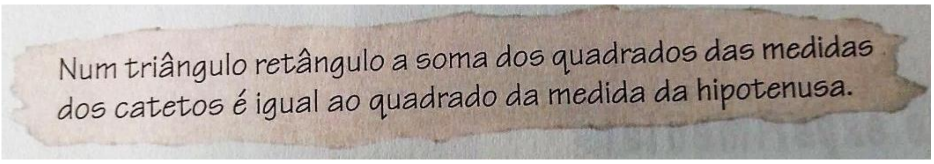
10. Teorema de Pitágoras

Fonte: Bigode (2000, p. 7)

O autor aborda, em dezesseis páginas, o “Teorema de Pitágoras”. Iniciou o tema com uma atividade experimental (utilizando folha de papel, régua, tesoura e calculadora), mostrando que, em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

A demonstração do teorema é realizada através da semelhança de triângulos (figuras 38 e 39).

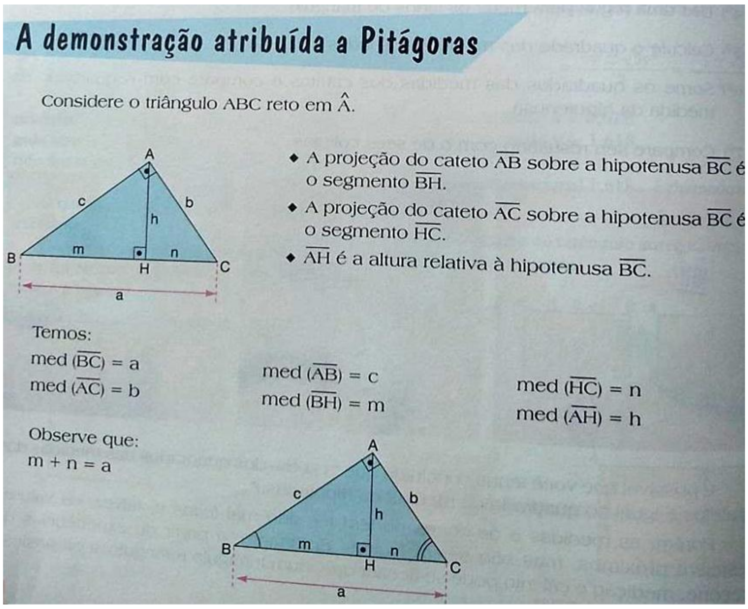
Figura 37 - Definição do Teorema



Num triângulo retângulo a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Fonte: Bigode (2000, p. 214)

Figura 38- Demonstração do “Teorema de Pitágoras”



A demonstração atribuída a Pitágoras

Considere o triângulo ABC reto em $\hat{A}$.

- A projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ é o segmento $\overline{BH}$.
- A projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ é o segmento $\overline{HC}$.
- $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa $\overline{BC}$.

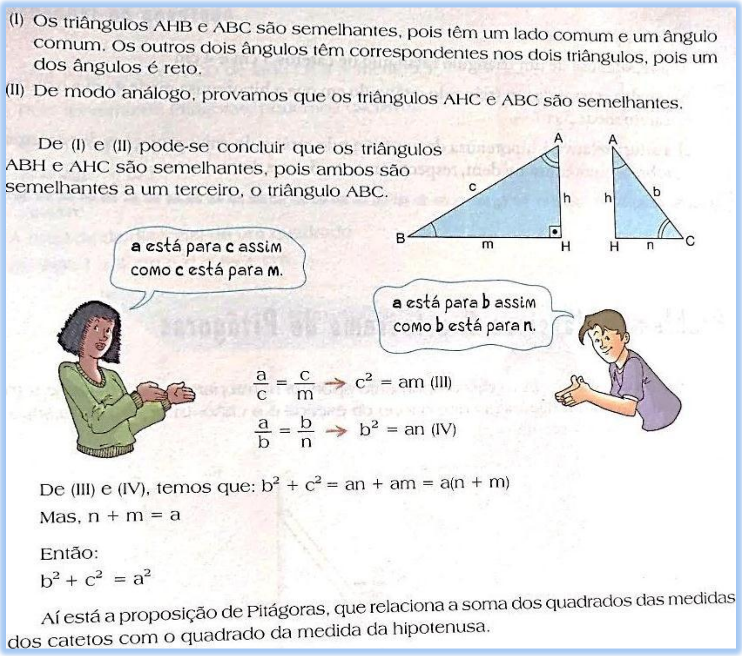
Temos:

med $(\overline{BC}) = a$
med $(\overline{AC}) = b$
med $(\overline{AB}) = c$
med $(\overline{BH}) = m$
med $(\overline{HC}) = n$
med $(\overline{AH}) = h$

Observe que:
$m + n = a$

Fonte: Bigode (2000, p. 214)

Figura 39 - Continuação da demonstração



(I) Os triângulos AHB e ABC são semelhantes, pois têm um lado comum e um ângulo comum. Os outros dois ângulos têm correspondentes nos dois triângulos, pois um dos ângulos é reto.

(II) De modo análogo, provamos que os triângulos AHC e ABC são semelhantes.

De (I) e (II) pode-se concluir que os triângulos ABH e AHC são semelhantes, pois ambos são semelhantes a um terceiro, o triângulo ABC.

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = am \text{ (III)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = an \text{ (IV)}$$

De (III) e (IV), temos que: $b^2 + c^2 = an + am = a(n + m)$

Mas, $n + m = a$

Então:

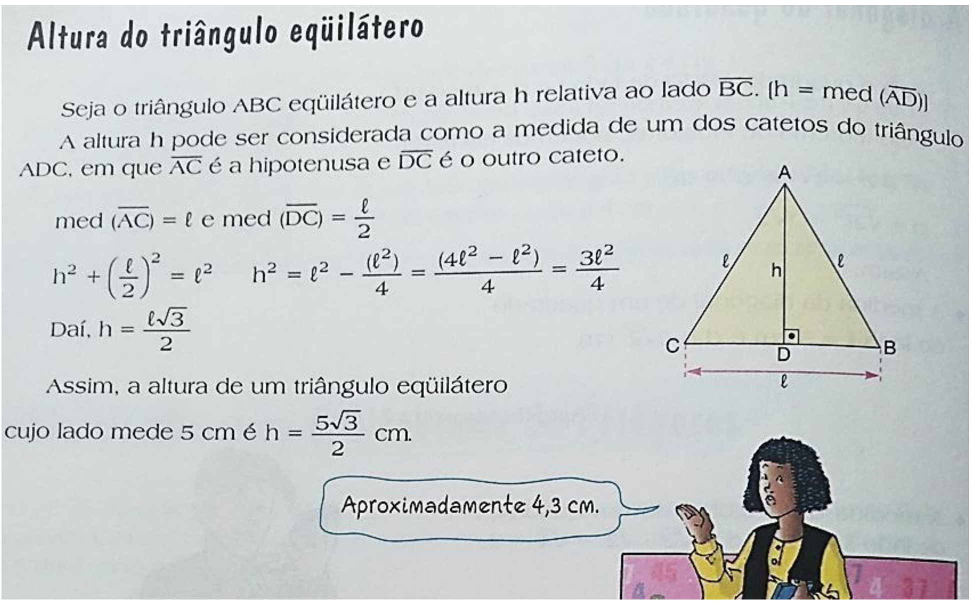
$b^2 + c^2 = a^2$

Aí está a proposição de Pitágoras, que relaciona a soma dos quadrados das medidas dos catetos com o quadrado da medida da hipotenusa.

Fonte: Bigode (2000, p. 215)

O autor indica algumas aplicações do Teorema, incluindo a altura do triângulo equilátero, a diagonal do quadrado e distância entre dois pontos (figuras 40, 41, 42).

Figura 40 - Aplicações do Teorema



Altura do triângulo eqüilátero

Seja o triângulo ABC eqüilátero e a altura h relativa ao lado $\overline{BC}$. $(h = \text{med}(\overline{AD}))$

A altura h pode ser considerada como a medida de um dos catetos do triângulo ADC, em que $\overline{AC}$ é a hipotenusa e $\overline{DC}$ é o outro cateto.

$\text{med}(\overline{AC}) = \ell$ e $\text{med}(\overline{DC}) = \frac{\ell}{2}$

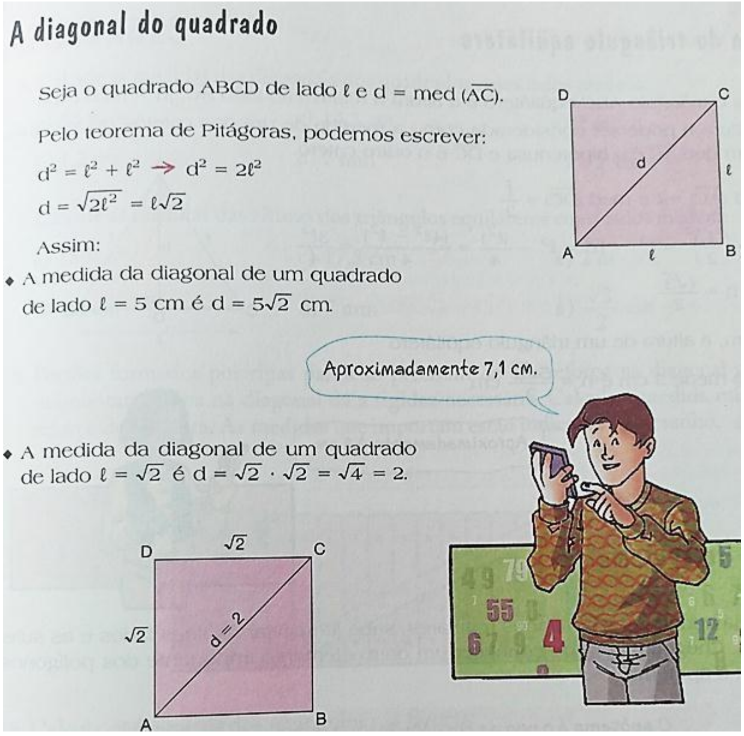
$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \qquad h^2 = \ell^2 - \frac{(\ell^2)}{4} = \frac{(4\ell^2 - \ell^2)}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$

Daí, $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Assim, a altura de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 5 cm é $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

Fonte: Bigode (2000, p. 218)

Figura 41 - Continuação das Aplicações do Teorema



A diagonal do quadrado

Seja o quadrado ABCD de lado ℓ e $d = \text{med}(\overline{AC})$.

Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \rightarrow d^2 = 2\ell^2$

$d = \sqrt{2\ell^2} = \ell\sqrt{2}$

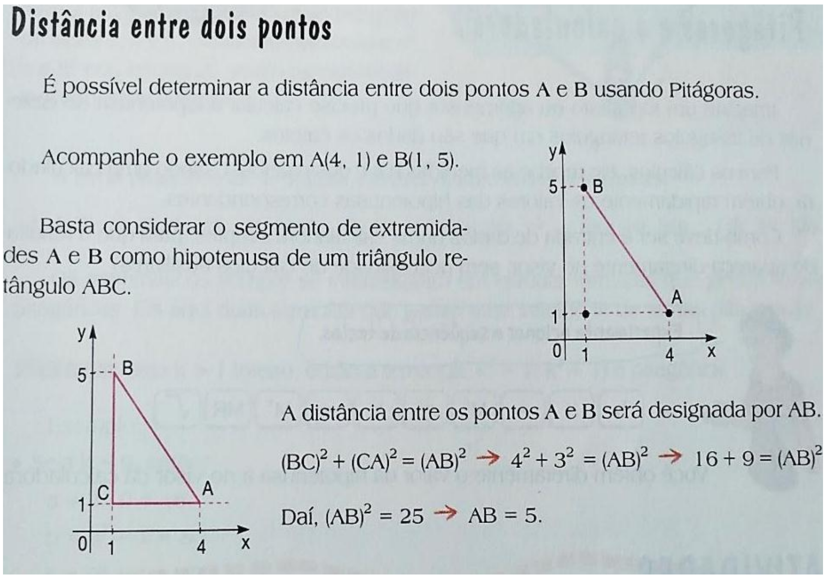
Assim:

- A medida da diagonal de um quadrado de lado $\ell = 5$ cm é $d = 5\sqrt{2}$ cm.

- A medida da diagonal de um quadrado de lado $\ell = \sqrt{2}$ é $d = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$.

Fonte: Bigode (2000, p. 217)

Figura 42 - Continuação das Aplicações do Teorema



Distância entre dois pontos

É possível determinar a distância entre dois pontos A e B usando Pitágoras.

Acompanhe o exemplo em A(4, 1) e B(1, 5).

Basta considerar o segmento de extremidades A e B como hipotenusa de um triângulo retângulo ABC.

A distância entre os pontos A e B será designada por AB.

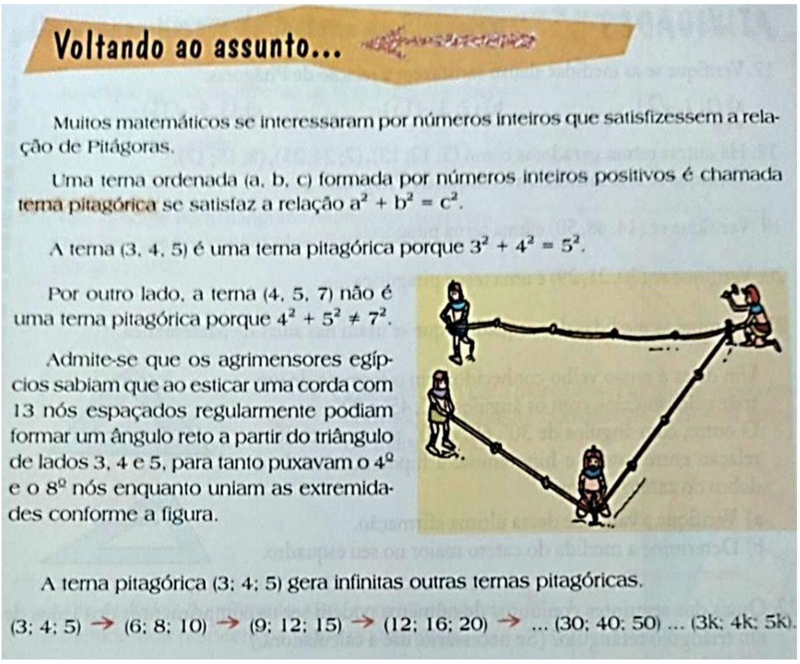
$(BC)^2 + (CA)^2 = (AB)^2 \rightarrow 4^2 + 3^2 = (AB)^2 \rightarrow 16 + 9 = (AB)^2$

Daí, $(AB)^2 = 25 \rightarrow AB = 5$.

Fonte: Bigode (2000, p. 221)

O autor relata como os egípcios obtinham um ângulo reto com auxílio de um triângulo retângulo utilizando a corda de treze nós. Em seguida, traz informações sobre Pitágoras, onde nasceu e a existência da sociedade secreta “pitagórica”. Além disso, indica que o trabalho de Pitágoras foi transmitido pelos seus discípulos. Bigode também inclui a informação de que os antigos agrimensores egípcios utilizavam a corda de 13 nós, que era elaborada segundo o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, o que leva a crer que conheciam a relação entre a hipotenusa e os catetos (figuras 43, 44).

Figura 43 - Corda de treze nós



Voltando ao assunto...

Muitos matemáticos se interessaram por números inteiros que satisfizessem a relação de Pitágoras.

Uma terna ordenada (a, b, c) formada por números inteiros positivos é chamada terna pitagórica se satisfaz a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

A terna (3, 4, 5) é uma terna pitagórica porque $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Por outro lado, a terna (4, 5, 7) não é uma terna pitagórica porque $4^2 + 5^2 \neq 7^2$.

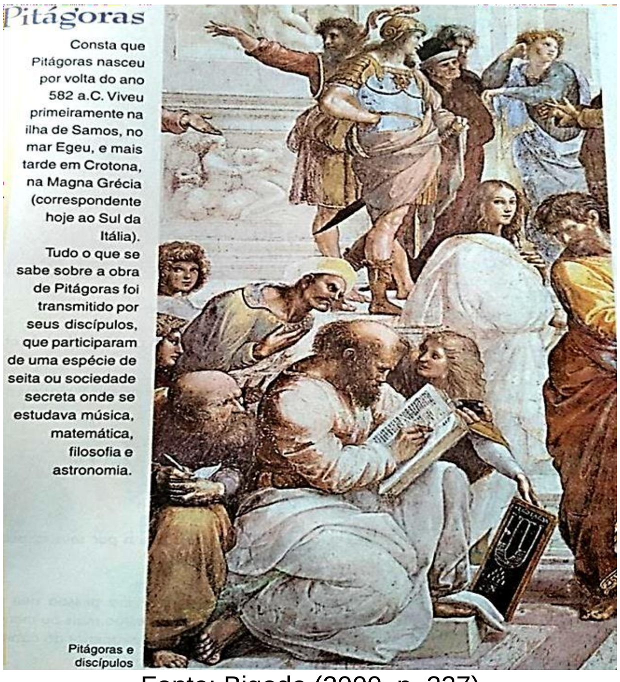
Admite-se que os agrimensores egípcios sabiam que ao esticar uma corda com 13 nós espaçados regularmente podiam formar um ângulo reto a partir do triângulo de lados 3, 4 e 5, para tanto puxavam o 4º e o 8º nós enquanto uniam as extremidades conforme a figura.

A terna pitagórica (3; 4; 5) gera infinitas outras ternas pitagóricas.

(3; 4; 5) → (6; 8; 10) → (9; 12; 15) → (12; 16; 20) → ... (30; 40; 50) ... (3k; 4k; 5k).

Fonte: Bigode (2000, p. 223)

Figura 44 - Dados sobre Pitágoras

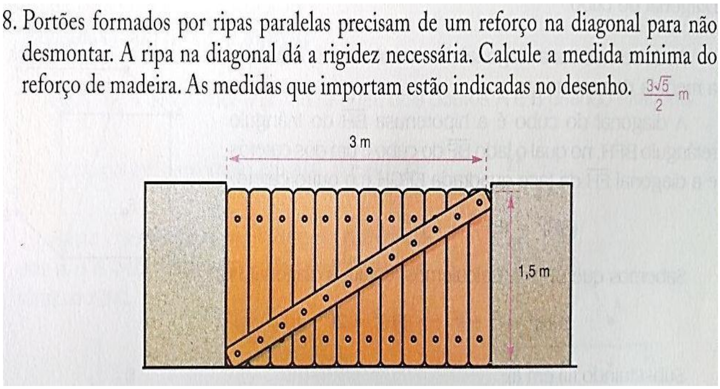


Fonte: Bigode (2000, p. 227)

O autor informa que foram catalogadas mais de 370 demonstrações diferentes, entre elas, a de Euclides de Alexandria (III a.C), do hindu Bhaskara, de Leibniz e de Leonardo da Vinci.

No desenvolvimento do tema, há três exemplos e trinta e seis exercícios, um deles mostra uma aplicabilidade do teorema em uma montagem de um portão (figura 45). Inicialmente os exercícios vêm com figuras geométricas e restando ao discente aplicar fórmulas algébricas. Em seguida o autor disponibiliza alguns exercícios que são aplicações de fórmulas algébricas sem figuras geométricas.

Figura 45 - Exercício

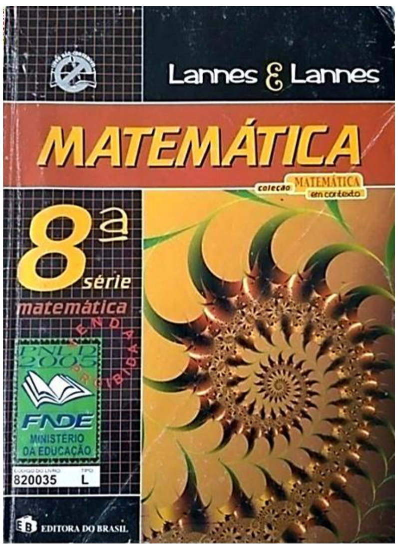

8. Portões formados por ripas paralelas precisam de um reforço na diagonal para não desmontar. A ripa na diagonal dá a rigidez necessária. Calcule a medida mínima do reforço de madeira. As medidas que importam estão indicadas no desenho. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ m

Fonte: Bigode (2000, p. 219)

Há várias representações do triângulo retângulo em posições diferentes, ao longo do texto e nos exercícios.

3.8 Matemática, v.4, Rodrigo Lannes e Wagner Lannes- 2001

Figura 46 - Capa do Livro Matemática



Fonte: Lannes e Lannes (2001)

A 1ª edição do livro *Matemática*, volume 4, foi publicada em 2001, pela Editora do Brasil em São Paulo. O livro possui 208 páginas numeradas, está vinculado ao PNLD.

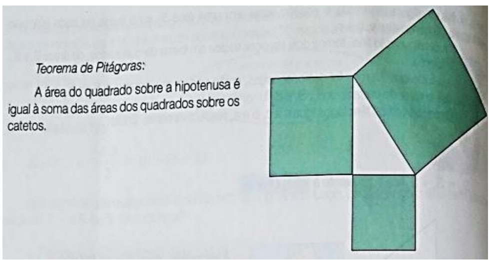
Wagner Lannes é mestre em Matemática Pura, pela Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG. Atualmente, atua como professor associado da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. No seu currículo, na Plataforma Lattes, é informado que ele possui experiência nas áreas de Matemática, Educação e História, com ênfase em História das Ciências, Ensino-Aprendizagem e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação Matemática. Rodrigo Lannes é licenciado em Matemática, pelo Centro Universitário de Belo Horizonte - Uni-BH - e cursou Especialização em Educação Matemática pela mesma instituição.

O livro analisado possui escrita colorida e, na capa, consta que está autorizado pelo Ministério da Educação. Este volume é constituído por seis unidades, sendo a primeira unidade intitulada “Teorema de Pitágoras e os números irracionais”. Os autores dedicam onze páginas para a abordagem deste tema, fazem a demonstração do teorema utilizando área de figuras, ou seja, as áreas dos quadrados cujos lados se apoiam na hipotenusa e nos catetos.

Os autores apresentam a definição do teorema incluindo uma ilustração (figura 47), que também é utilizada na demonstração.

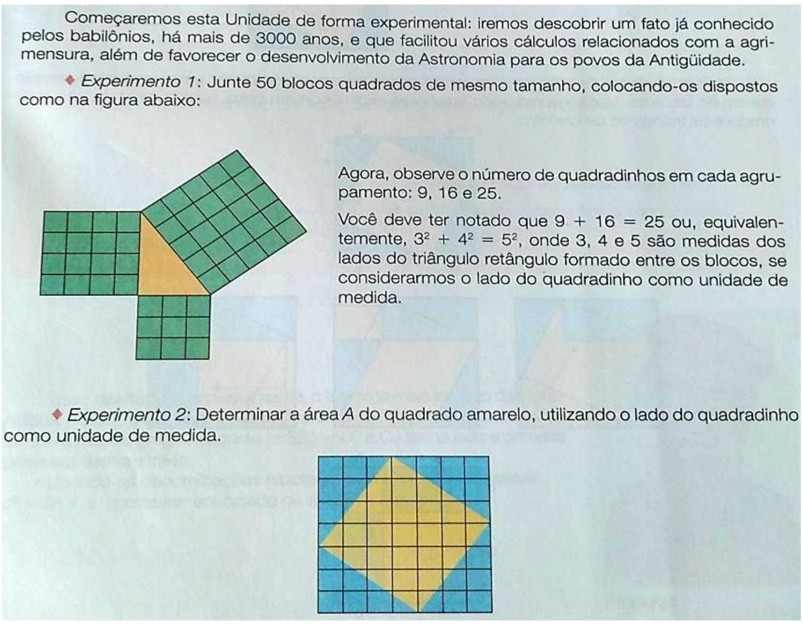
São indicados três experimentos (figuras 48, 49) para se verificar o teorema.

Figura 47 - Definição do Teorema



Fonte: Lannes e Lannes (2001, p.10)

Figura 48 - Demonstração do “Teorema de Pitágoras”



Começaremos esta Unidade de forma experimental: iremos descobrir um fato já conhecido pelos babilônios, há mais de 3000 anos, e que facilitou vários cálculos relacionados com a agrimensura, além de favorecer o desenvolvimento da Astronomia para os povos da Antigüidade.

◆ *Experimento 1*: Junte 50 blocos quadrados de mesmo tamanho, colocando-os dispostos como na figura abaixo:

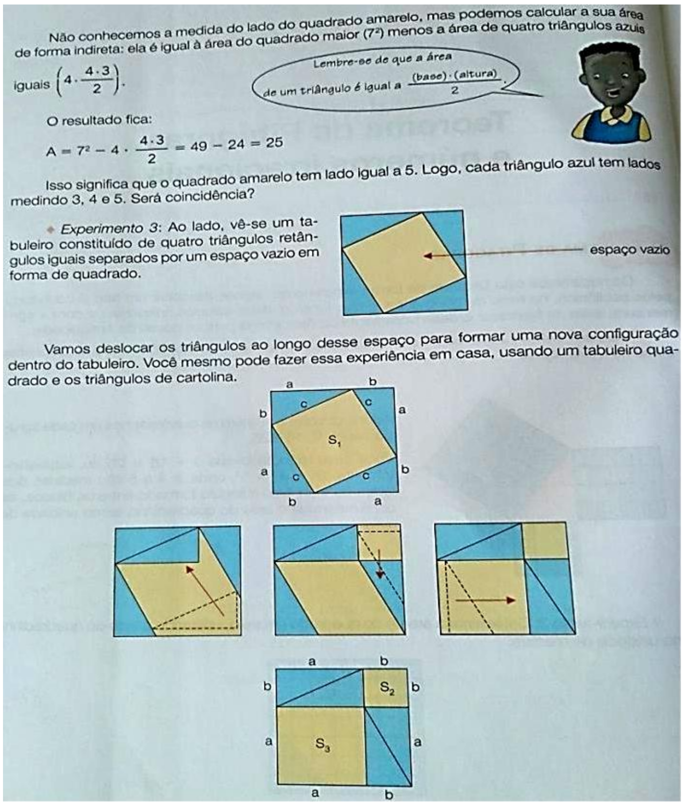
Agora, observe o número de quadradinhos em cada agrupamento: 9, 16 e 25.

Você deve ter notado que $9 + 16 = 25$ ou, equivalentemente, $3^2 + 4^2 = 5^2$, onde 3, 4 e 5 são medidas dos lados do triângulo retângulo formado entre os blocos, se considerarmos o lado do quadradinho como unidade de medida.

◆ *Experimento 2*: Determinar a área *A* do quadrado amarelo, utilizando o lado do quadradinho como unidade de medida.

Fonte: Lannes e Lannes (2001, p.7)

Figura 49 - Continuação da demonstração



Não conhecemos a medida do lado do quadrado amarelo, mas podemos calcular a sua área de forma indireta: ela é igual à área do quadrado maior (7^2) menos a área de quatro triângulos azuis iguais $\left(4 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}\right)$.

Lembre-se de que a área de um triângulo é igual a $\frac{(\text{base}) \cdot (\text{altura})}{2}$

O resultado fica:

$$A = 7^2 - 4 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 49 - 24 = 25$$

Isso significa que o quadrado amarelo tem lado igual a 5. Logo, cada triângulo azul tem lados medindo 3, 4 e 5. Será coincidência?

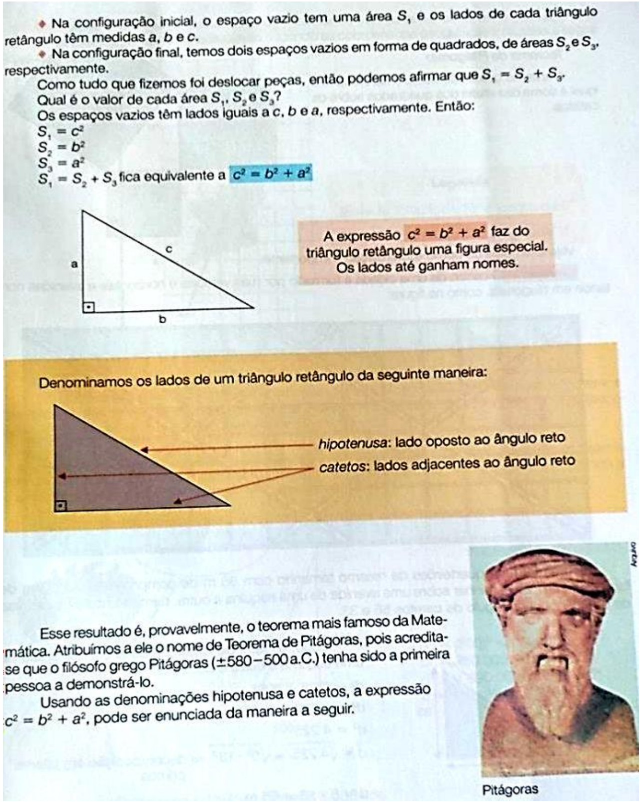
◆ *Experimento 3*: Ao lado, vê-se um tabuleiro constituído de quatro triângulos retângulos iguais separados por um espaço vazio em forma de quadrado.

espaço vazio

Vamos deslocar os triângulos ao longo desse espaço para formar uma nova configuração dentro do tabuleiro. Você mesmo pode fazer essa experiência em casa, usando um tabuleiro quadrado e os triângulos de cartolina.

Fonte: Lannes e Lannes (2001, p.8)

Figura 50 - Continuação da demonstração


◆ Na configuração inicial, o espaço vazio tem uma área S_1 e os lados de cada triângulo retângulo têm medidas *a*, *b* e *c*.
◆ Na configuração final, temos dois espaços vazios em forma de quadrados, de áreas S_2 e S_3, respectivamente.
Como tudo que fizemos foi deslocar peças, então podemos afirmar que $S_1 = S_2 + S_3$.
Qual é o valor de cada área S_1, S_2 e S_3?
Os espaços vazios têm lados iguais a *c*, *b* e *a*, respectivamente. Então:
$S_1 = c^2$
$S_2 = b^2$
$S_3 = a^2$
$S_1 = S_2 + S_3$ fica equivalente a $c^2 = b^2 + a^2$

A expressão $c^2 = b^2 + a^2$ faz do triângulo retângulo uma figura especial. Os lados até ganham nomes.

Denominamos os lados de um triângulo retângulo da seguinte maneira:

hipotenusa: lado oposto ao ângulo reto
catetos: lados adjacentes ao ângulo reto

Esse resultado é, provavelmente, o teorema mais famoso da Matemática. Atribuímos a ele o nome de Teorema de Pitágoras, pois acredita-se que o filósofo grego Pitágoras (±580–500 a.C.) tenha sido a primeira pessoa a demonstrá-lo.
Usando as denominações hipotenusa e catetos, a expressão $c^2 = b^2 + a^2$, pode ser enunciada da maneira a seguir.

Pitágoras

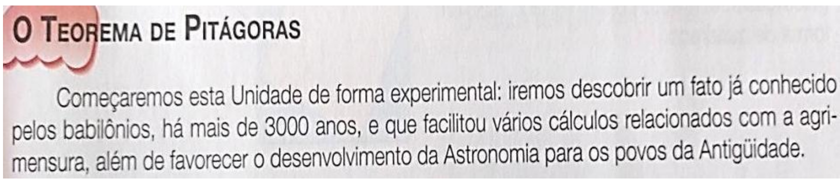
Fonte: Lannes e Lannes (2001, p. 9)

Na sequência, os autores destacam algumas aplicações do teorema transcritas a seguir:

i. distância entre dois pontos
ii. altura do triângulo equilátero
iii. diagonal do retângulo

Os autores anunciam que os babilônios já tinham conhecimento sobre o teorema. Em outro momento, informações sobre Pitágoras e as regras da escola pitagórica – além de informar que eram vegetarianos, indicam que não admitiam a existência de números com uma representação decimal infinita e desordenada, ou seja, não reconheciam os números irracionais (figuras 51, 52).

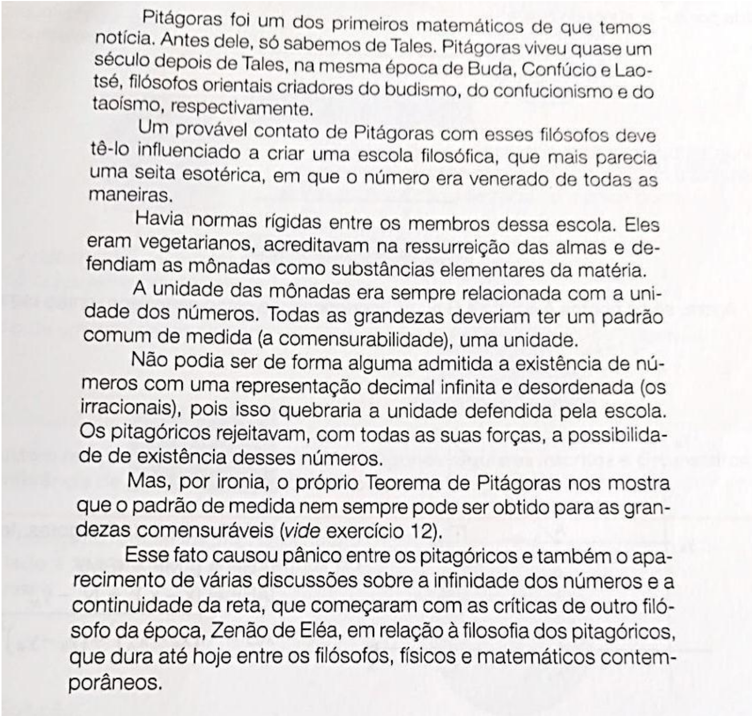
Figura 51 - Abordagem histórica


O TEOREMA DE PITÁGORAS

Começaremos esta Unidade de forma experimental: iremos descobrir um fato já conhecido pelos babilônios, há mais de 3000 anos, e que facilitou vários cálculos relacionados com a agrimensura, além de favorecer o desenvolvimento da Astronomia para os povos da Antigüidade.

Fonte: Lannes e Lannes (2001, p. 7)

Figura 52 - Continuação abordagem histórica



Pitágoras foi um dos primeiros matemáticos de que temos notícia. Antes dele, só sabemos de Tales. Pitágoras viveu quase um século depois de Tales, na mesma época de Buda, Confúcio e Lao-tsé, filósofos orientais criadores do budismo, do confucionismo e do taoísmo, respectivamente.

Um provável contato de Pitágoras com esses filósofos deve tê-lo influenciado a criar uma escola filosófica, que mais parecia uma seita esotérica, em que o número era venerado de todas as maneiras.

Havia normas rígidas entre os membros dessa escola. Eles eram vegetarianos, acreditavam na ressurreição das almas e defendiam as mônadas como substâncias elementares da matéria.

A unidade das mônadas era sempre relacionada com a unidade dos números. Todas as grandezas deveriam ter um padrão comum de medida (a comensurabilidade), uma unidade.

Não podia ser de forma alguma admitida a existência de números com uma representação decimal infinita e desordenada (os irracionais), pois isso quebraria a unidade defendida pela escola. Os pitagóricos rejeitavam, com todas as suas forças, a possibilidade de existência desses números.

Mas, por ironia, o próprio Teorema de Pitágoras nos mostra que o padrão de medida nem sempre pode ser obtido para as grandezas comensuráveis (*vide* exercício 12).

Esse fato causou pânico entre os pitagóricos e também o aparecimento de várias discussões sobre a infinidade dos números e a continuidade da reta, que começaram com as críticas de outro filósofo da época, Zenão de Eléa, em relação à filosofia dos pitagóricos, que dura até hoje entre os filósofos, físicos e matemáticos contemporâneos.

Fonte: Lannes e Lannes (2001, p.29)

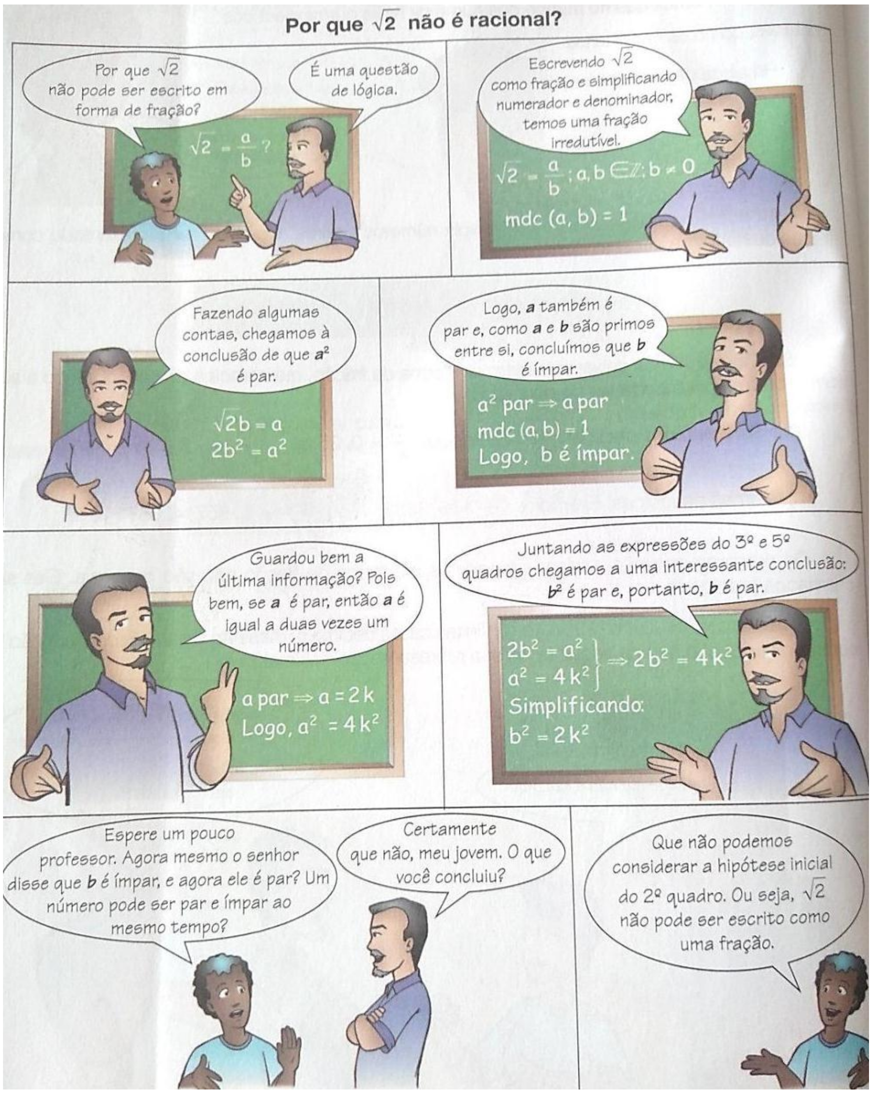
Os autores incluem seis exemplos, oito exercícios e três experimentos. Os oito exercícios são variados, sete utilizam figura geométrica juntamente com fórmulas algébricas, sendo que, em um há aplicação somente de fórmulas algébricas. Existem problemas contextualizados, um deles com utilização de coordenadas geográficas, para o qual é necessário o aluno desenhar um triângulo retângulo e aplicar o Teorema.

Existem várias representações do triângulo retângulo em posições diferentes. Eles introduzem os números irracionais através do “Teorema de Pitágoras”, utilizando o triângulo retângulo de catetos com medidas 1. A introdução dos números irracionais neste livro, se inicia com o questionamento sobre a raiz quadrada de 2, sendo mostrado que não era possível, este número, ser colocado em forma de fração e sim com várias casas decimais de forma infinita. Neste momento, eles sugeriram a utilização da calculadora.

Após os autores relembraram quais são os números naturais, os números negativos, os racionais, em seguida, expressam o cálculo da hipotenusa com os catetos de lado 1. Explicam a representação decimal finita e a dízima periódica, mostrando que, os números que não podem ser escritos em forma de fração, são os irracionais.

Demonstra-se que √2 é um número irracional (figura 53)

Figura 53 - Demonstração

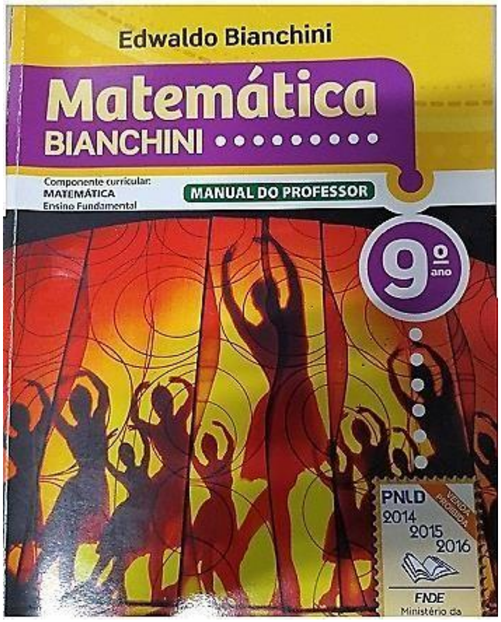


Fonte: Lannes e Lannes (2001, p.20)

Se compararmos com a abordagem dos números irracionais no livro de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998), verificamos que é totalmente diferente, pois eles utilizaram somente dois exercícios, sendo o primeiro calcular a hipotenusa com os catetos de medida 1, sem mencionar que o resultado da hipotenusa era um número irracional. No segundo exemplo, eles explicaram como montar uma reta numérica com alguns irracionais, através da utilização do Teorema.

3.9 Matemática, Bianchini - 2011

Figura 54 - Capa do Livro Matemática Bianchini



Fonte: Bianchini (2011)

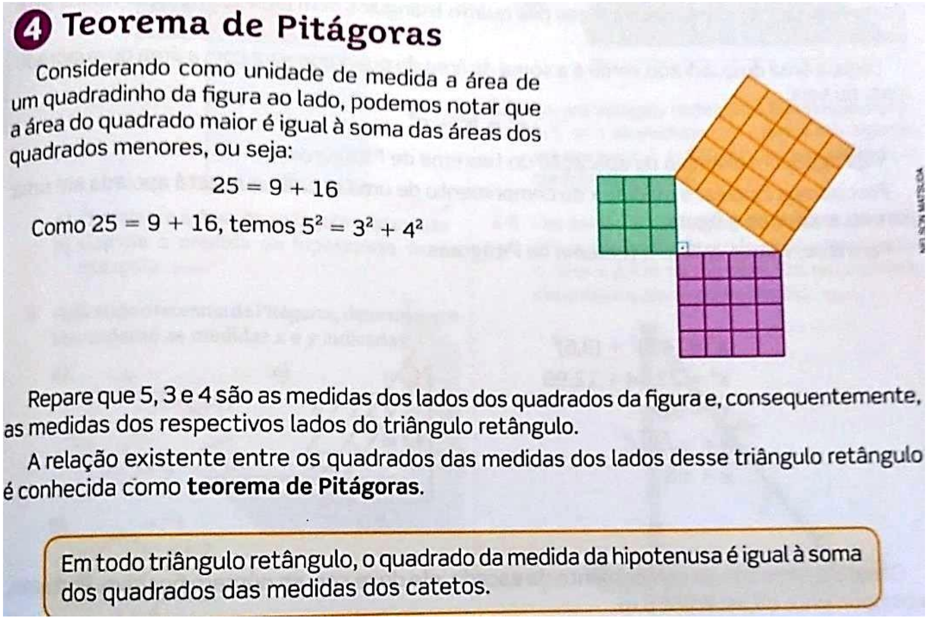
Matemática Bianchini, 9º ano, é de autoria de Edwaldo Bianchini. Analisamos a 7ª edição, lançada em 2011 pela editora Moderna. Bianchini é licenciado Ciências pela Universidade da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru, em São Paulo. No livro, ele também é apresentado como professor de Matemática da rede pública de ensino do Estado de São Paulo, nos ensinos fundamental e médio, por 25 anos.

Na capa do livro, observamos que este passou pelo crivo do PNLD – Programa Nacional do Livro Didático – apoiado pelo Ministério da Educação. Segundo o autor, é utilizada a História da Matemática nos capítulos do livro, especificamente nos subtópicos de cada capítulo, com o nome *Para saber mais*, no qual encontra-se a história.

O livro de Bianchini possui nove capítulos, sendo que, na maioria destes, há dois itens, nomeados por ***para saber mais*** (nesta seção, apresenta, entre outras coisas, textos sobre Geometria e a História da Matemática para enriquecer e aprofundar diversos conteúdos matemáticos) e ***diversificando*** (propõe ao aluno que entre em contato com atividades que envolvem temas variados).

A definição do teorema é realizada com apoio na ilustração convencionalmente utilizada, contendo um triângulo de lados 3, 4 e 5 (figura 55).

Figura 55 - Definição “Teorema de Pitágoras”



4 Teorema de Pitágoras

Considerando como unidade de medida a área de um quadradinho da figura ao lado, podemos notar que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores, ou seja:

$$25 = 9 + 16$$

Como $25 = 9 + 16$, temos $5^2 = 3^2 + 4^2$

Repare que 5, 3 e 4 são as medidas dos lados dos quadrados da figura e, consequentemente, as medidas dos respectivos lados do triângulo retângulo.

A relação existente entre os quadrados das medidas dos lados desse triângulo retângulo é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Fonte: Bianchini (2011, p. 143)

O “Teorema de Pitágoras” é abordado no capítulo 5 do livro, intitulado “Triângulos retângulos”. Inicia-se com alguns aspectos históricos, informando onde nasceu Pitágoras, os lugares que ele viajou e sobre os pitagóricos.

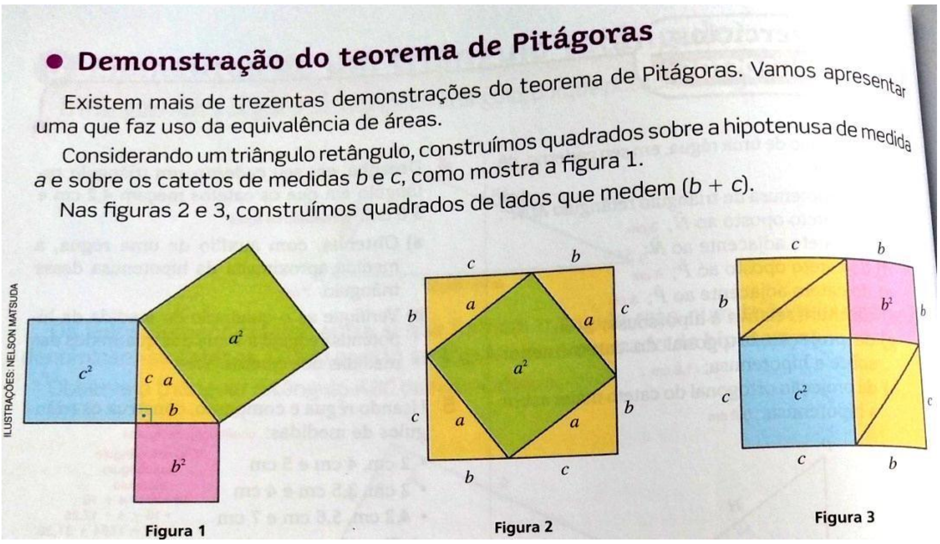
No tópico “para saber mais”, Bianchini menciona os triângulos pitagóricos. Informa que, dado o triângulo retângulo de lados 3, 4, 5 e sendo dada uma constante k, (com k pertencente ao conjunto dos números inteiros positivos), tomando 3k, 4k, 5k, os triângulos cujos lados possuem estas medidas serão triângulos pitagóricos.

Bianchini explora a geometria, a álgebra (a notação algébrica da fórmula do “Teorema de Pitágoras”) e a aritmética (em alguns exercícios, solicitando o uso da calculadora), utilizando o teorema.

Neste livro, o autor abordou o tópico em dez páginas. No conteúdo que antecede o “Teorema de Pitágoras”, o autor introduziu elementos de um triângulo retângulo. Informa que: “os lados perpendiculares entre si que formam o ângulo reto num triângulo retângulo denominam-se catetos. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa.” (BIANCHINI, 2011, p. 142).

Após a apresentação do “Teorema de Pitágoras”, existe uma demonstração do mesmo através de equivalência de áreas, ou seja, usa-se a geometria (figura 56).

Figura 56 - Demonstração do “Teorema de Pitágoras”



● **Demonstração do teorema de Pitágoras**

Existem mais de trezentas demonstrações do teorema de Pitágoras. Vamos apresentar uma que faz uso da equivalência de áreas.

Considerando um triângulo retângulo, construímos quadrados sobre a hipotenusa de medida *a* e sobre os catetos de medidas *b* e *c*, como mostra a figura 1.

Nas figuras 2 e 3, construímos quadrados de lados que medem (*b* + *c*).

Fonte: Bianchini (2011, p. 144)

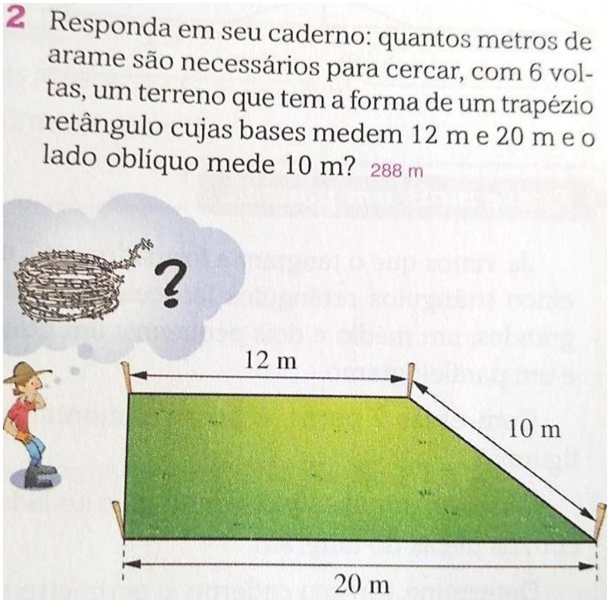
Em seguida, o autor informa que a área do quadrado verde é a soma da área do quadrado azul com a área do quadrado rosa, ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Há apenas um breve comentário histórico sobre a vida de Pitágoras (onde nasceu, que viajou pelo Egito, pela Babilônia e Índia), mas não há informações sobre povos antigos que já tinham conhecimento sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

Os exercícios são bem variados, alguns com a aplicação direta do “Teorema de Pitágoras”. Também há alguns problemas nos quais se espera do aluno a aplicação da geometria e, após, a resolução algébrica. Um dos exercícios apresenta contextualização (figura 57).

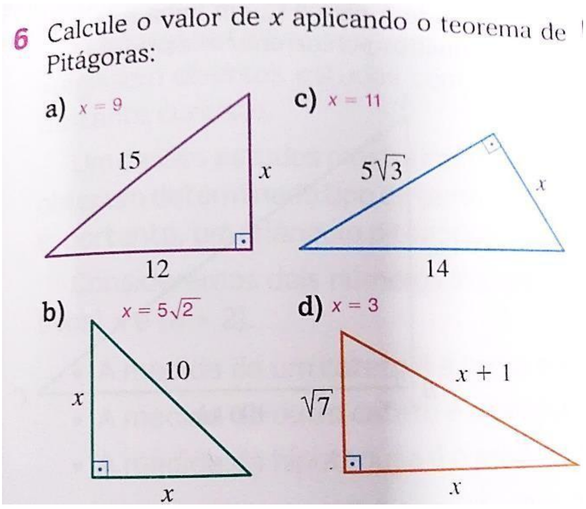
Figura 57 – Exercício contextualizado



Fonte: Bianchini (2011, p. 145)

Quanto à utilização do triângulo retângulo, o autor o apresenta em posições diversas somente nos exercícios (figura 58).

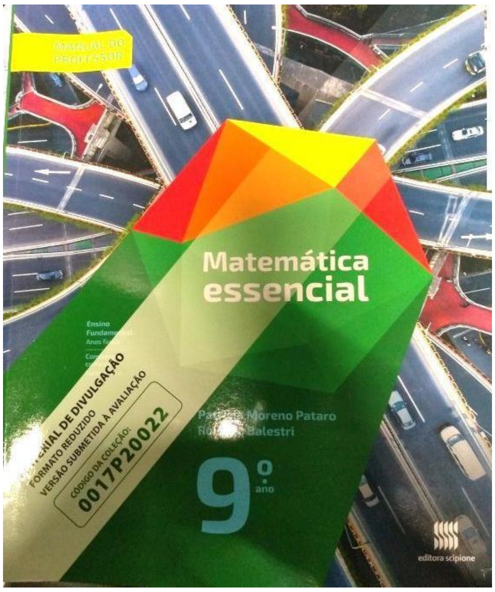
Figura 58 - Exercícios propostos



Fonte: Bianchini (2011, p. 145)

3.10 Matemática essencial, de Patrícia Moreno Pataro e Rodrigo Balestri - 2018

Figura 59 - Capa do Livro Matemática essencial



Fonte: Balestri e Pataro (2018)

A 1ª edição do livro *Matemática essencial*, 9º ano, de Balestri e Pataro, foi publicada em 2018, pela editora Scipione. O exemplar analisado é o manual do professor destinado ao 9º ano do Ensino Fundamental com 304 páginas.

Este livro pertence a uma coleção que está organizada em quatro volumes, destinados aos anos finais do Ensino Fundamental. O livro está apresentado em 12 capítulos organizados em tópicos e subtópicos, obedecendo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As sessenta e quatros primeiras páginas são destinadas ao professor, com orientações, como é a divida a coleção. É destacado que o livro está fundamentado na BNCC e verifica-se que há indicações de sites e livros para que o professor possa complementar suas aulas.

Sobre os autores, Patrícia Rosana Moreno Pataro é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR), especialista em Estatística pela UEL-PR e atuou como professora da rede particular de ensino. Rodrigo Dias Balestri é licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR), especialista em Educação Matemática pela UEL-PR, especialista em Física para o novo ensino médio pela UEL-PR, mestre em Ensino de Ciências e Educação

Matemática pela UEL-PR e professor da rede pública de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

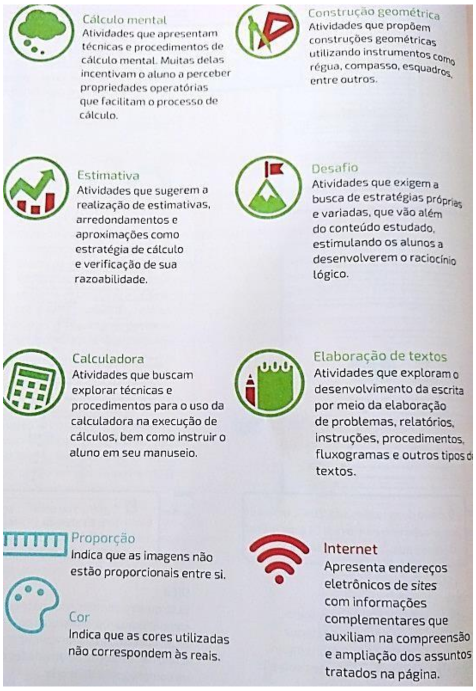
Na apresentação da estrutura do livro do aluno, é indicado que, em cada capítulo, existem alguns tópicos, sinalizados por ícones, como:

> - ***pensando nisso*** - onde são sugeridos questionamentos que objetivam resgatar o conhecimento prévio do aluno, assim como estabelecer intuitivamente relações entre o assunto abordado e alguns conteúdos matemáticos.
>
> - ***abertura do capítulo*** - no início de cada capítulo, duas páginas apresentam um assunto relacionado ao conteúdo que será estudado. Nelas, há informações que se referem a outras áreas do conhecimento, expostas por meio de textos, fotografias.
>
> - ***conteúdo*** - sempre que possível, abordamos uma situação contextualizada para iniciar o trabalho com um novo conteúdo.
>
> - ***atividades*** - são propostas atividades referentes aos conteúdos abordados no capítulo, dispostas de maneira organizada e em nível crescente de dificuldade. As atividades atendem às exigências da BNCC ao trabalharem com estimativa e aproximação, investigação e conjectura, elaboração de problemas.
>
> - ***matemática em destaque*** - essas atividades trazem um texto e, por vezes, recursos gráficos que envolvem algum tema curioso relacionado à realidade do aluno e a outras áreas do conhecimento.
>
> - ***explorando o que estudei*** - localizada após a última seção atividades do capítulo, oferece aos alunos a oportunidade de refletir sobre o que aprendeu durante o trabalho com o conteúdo estudado. Ao responder às questões, eles terão a oportunidade de explicitar as principais ideias abordadas e fazer uma autoavaliação do seu processo de aprendizagem.
>
> - ***cidadania: explore essa ideia*** - tem o objetivo de trabalhar os temas contemporâneos elencados na BNCC. As situações abordadas nessa seção são estruturadas por um texto e cenas ilustradas, gráficos para ajudar na compreensão do texto.
>
> - ***explorando tecnologias*** - organizada ao final do volume, a seção apresenta exemplos e propostas de atividades que desenvolvem conceitos estudados nos capítulos por meio do uso dos programas de comutador *Geogebra* .

- ***sugestões de livros e sites*** - encontrada ao fim de cada volume, essa seção traz sugestões de livros e sites que permitem aos alunos enriquecer e complementar o trabalho realizado com os conteúdos em sala de aula. (BALESTRI e PATARO, 2018, p. 5, 6, 7, 8).

Na figura 60, está detalhado cada um dos ícones que aparecem no livro:

Figura 60 - ícones



Fonte: Balestri e Pataro (2018, p. X)

Na apresentação, os autores relatam a importância da Matemática e sua utilidade no cotidiano:

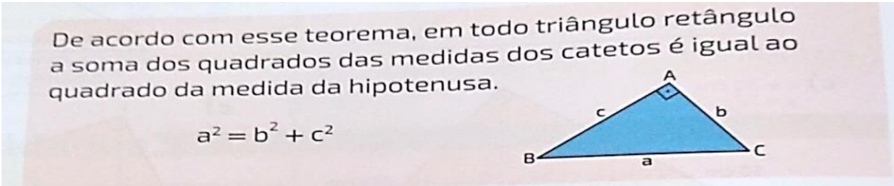
> Você já observou como a Matemática está presente em nosso dia a dia? Conferir o troco em uma compra, observar uma obra de arte, planejar um passeio e preparar uma receita são alguns exemplos de situações em que a Matemática é utilizada como ferramenta indispensável.
>
> Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo a explorar a Matemática, dando significado a suas ideias de modo que você seja capaz de utilizá-las. Procuramos abordar os conteúdos e as situações de maneira prazerosa, trabalhando sua autonomia e criatividade e possibilitando a você que argumente e tome decisões. (BALESTRI e PATARO, 2018, p. 3).

Conforme os autores, o livro foi elaborado para que o discente seja um sujeito crítico no processo aprendizagem da disciplina, visualizando cada conteúdo ou, pelo menos, na maioria dos conteúdos, a utilidade prática da Matemática no dia a dia.

No sumário, o “Teorema de Pitágoras” está no capítulo 9, no qual primeiramente os autores trabalham com relações métricas no triângulo retângulo e, posteriormente, apresentam o teorema. Constata-se que o livro inicia com a aritmética, após, é focada a parte algébrica e, por último, o estudo da geometria. Para o “Teorema de Pitágoras”, foram destinadas cinco páginas.

Os autores apresentam a definição do teorema (figura 61) e sua demonstração através de relações métricas.

Figura 61 - Definição do “Teorema de Pitágoras”

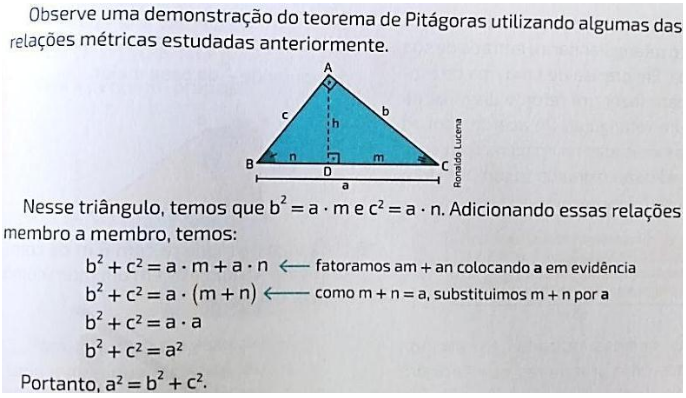

De acordo com esse teorema, em todo triângulo retângulo a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: Balestri e Pataro (2018, p. 194)

Figura 62 - Dois Exemplos

Exemplo 1


Observe uma demonstração do teorema de Pitágoras utilizando algumas das relações métricas estudadas anteriormente.

Nesse triângulo, temos que $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$. Adicionando essas relações membro a membro, temos:

$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$ ⟵ fatoramos am + an colocando a em evidência

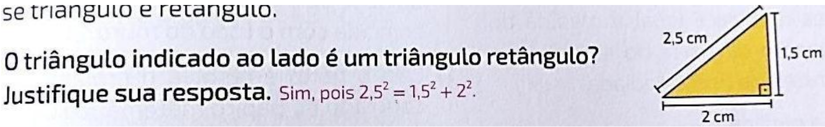
$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$ ⟵ como m + n = a, substituímos m + n por a

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

$b^2 + c^2 = a^2$

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

Exemplo 2


se triângulo é retângulo.

O triângulo indicado ao lado é um triângulo retângulo? Justifique sua resposta. Sim, pois $2{,}5^2 = 1{,}5^2 + 2^2$.

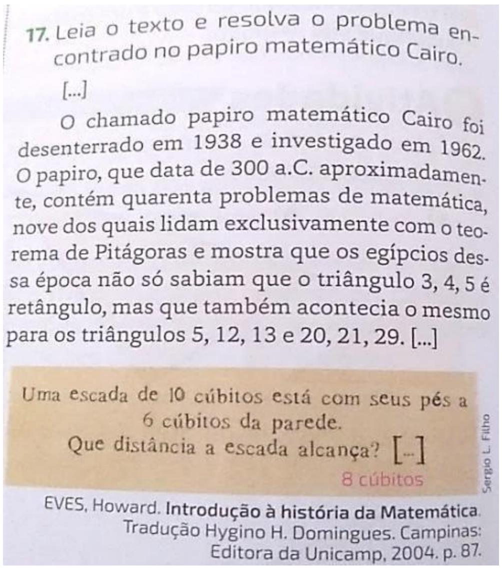
Fonte: Balestri e Pataro (2018, p. 195)

Encontra-se, no início do capítulo, breve comentário sobre a vida de Pitágoras, informando que ele foi o primeiro a demonstrar o teorema, apesar de os babilônios e os egípcios já o utilizarem. Deste modo, os autores indicam que os povos antigos já tinham conhecimento sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Não há menção à existência do tablete Plimpton 322.

A seguir, há exercícios propostos, ora chamados de atividades. Inicialmente, uma atividade para aplicar algebricamente o "Teorema de Pitágoras". Na sequência, explora-se o tema com alguns problemas, nos quais constam desenhos definidos (com a representação do triângulo retângulo).

No exercício 17, os autores utilizam a História da Matemática, tratando do Papiro do Cairo, para indicar a aplicação do Teorema no antigo Egito (figura 63).

Figura 63 - Atividade 17



17. Leia o texto e resolva o problema encontrado no papiro matemático Cairo.

[...]

O chamado papiro matemático Cairo foi desenterrado em 1938 e investigado em 1962. O papiro, que data de 300 a.C. aproximadamente, contém quarenta problemas de matemática, nove dos quais lidam exclusivamente com o teorema de Pitágoras e mostra que os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21, 29. [...]

Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que distância a escada alcança? [...]

8 cúbitos

Sergio L. Filho

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 87.

Fonte: Balestri e Pataro (2018, p. 196)

Existem mais dois problemas contextualizados, um relatando sobre uma porteira e outro sobre uma viga, sendo que ambos exigem uma interpretação e a resolução inclui uma aplicação do Teorema.

Quanto à utilização do triângulo retângulo, nas 12 atividades indicadas, os triângulos são apresentados em várias posições diferentes.

3.11 Análise Geral dos livros selecionados

A análise dos livros foi voltada para verificar:

I) Como é demonstrado o "Teorema de Pitágoras"

Observamos se os autores utilizam, para demonstrar o teorema, as relações métricas no triângulo retângulo ou aplicação de área.

II) Como é o desenvolvimento do conteúdo com relação a abordagem histórica

Neste item, visualizamos se os autores fizeram alguma menção à História da Matemática.

III) Tipos de soluções nos exemplos e exercícios propostos

Nos exercícios, identificamos se havia a inclusão de problemas, nos quais seriam necessários uma interpretação e equacionamento, ou se eram somente aplicação direta do teorema. Exercícios envolvendo a geometria e a aplicação do teorema era outro aspecto a ser identificado, além de proposição de atividades com material concreto.

IV) Ilustrações do triângulo retângulo.

Verificamos o posicionamento dos triângulos retângulos, ou seja, se os triângulos foram apresentados em diversas posições ou se o livro ilustra o triângulo retângulo sempre da mesma forma.

Com relação à ***definição*** do “Teorema de Pitágoras” nos livros analisados, verificamos que:

- Maeder, para definição, não utilizou nenhuma ilustração e, para demonstração, usou as relações métricas no triângulo retângulo.
- Quintella, como Maeder, traz somente a definição sem incluir quaisquer ilustrações do triângulo retângulo. Para demonstração, inicia-se com relação métrica no triângulo retângulo e finaliza com semelhança de triângulos.
  Sardella e Matta indicaram a definição por escrito e utilizaram uma figura. Para demonstração, empregaram as relações métricas.
- Bongiovanni; Laureano e Leite utilizaram fórmula algébrica e demonstraram o teorema através de semelhança de triângulos.
- Dolce; Iezzi e Machado indicaram a definição por extenso e fórmula algébrica; para a demonstração, utilizaram a semelhança de triângulos.
- Castrucci, Giovanni e Giovanni Jr. definem o teorema usando uma figura, a definição por extenso e fórmula algébrica. Para demonstração, utilizaram área de figuras.

- Bigode apresentou a definição sem incluir figuras e a demonstração foi realizada através da semelhança de triângulos.
- Lannes e Lannes apresentam a definição acompanhada de figura geométrica. Para demonstração, utilizaram área de figuras.
- Bianchini apresenta a definição e uma figura geométrica. Para demonstração, utilizou área de figuras.
- Balestri e Pataro indicaram a definição por extenso, incluindo fórmula algébrica e figura geométrica. Para demonstração, se valeram das relações métricas.

Segundo nosso ponto de vista, a definição do “Teorema de Pitágoras” se apresenta de uma forma mais fácil de ser assimilada nos livros dos autores Balestri e Pataro (2018), Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998) e Sardella e Matta (1981).

Os autores que fizeram a demonstração do “Teorema de Pitágoras” mais próximas da comumente atribuída a Pitágoras foram:

- Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998);
- Lannes e Lannes (2001);
- Bianchini (2011)

Destacamos os livros de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998) e de Lannes e Lannes (2001) em relação à introdução dos números irracionais através do “Teorema de Pitágoras” – como indicado anteriormente na figura 30. Como já foi dito anteriormente, a proposta apresentada sobre os números irracionais são diferentes entre os dois livros, pois, no primeiro livro, existem dois exercícios sobre o assunto; no segundo, os autores relembram quais são os números naturais, os números negativos, os racionais e, em seguida, indicam o cálculo da hipotenusa em um triângulo retângulo com catetos de medida igual a 1. Lannes e Lannes (2001) explicam a representação decimal finita e a dízima periódica, chegando à conclusão que os números, que não podem ser escritos em forma de fração, são irracionais. Além disso, demonstram que o número $\sqrt{2}$ é irracional.

Bigode (2000) iniciou a abordagem do teorema através de uma atividade experimental, com utilização de folha de papel, régua, tesoura e calculadora. A atividade tem o objetivo de mostrar que, em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Lannes e Lannes (2001) também indicaram três experimentos (figuras 48, 49) para se verificar o teorema.

Com relação à demonstração atribuída a Bhaskara, nenhum dos autores utilizou uma demonstração parecida com a dele.

No tocante à aplicação do "Teorema de Pitágoras", observa-se que o mais comum é a apresentação da altura do triângulo equilátero e da diagonal do quadrado. No entanto, os livros de Bigode (2000) e Lannes e Lannes (2001) são os únicos, entre os demais analisados, que incluem também a distância entre dois pontos para a aplicação do teorema.

Tendo em vista os pontos já mencionados que analisamos nas obras, outro item a ser observado é a quantidade de páginas que cada autor dedicou ao tema pesquisado (quadro 1).

Quadro 1 - Quantidade de páginas destinadas ao "Teorema de Pitágoras"

Autores	Páginas totais do livro	Páginas sobre o tema	Percentual de páginas sobre o tema
Maeder (1948)	276	8	2,89%
Quintella (1963)	205	3	1,46%
Sardella e Matta (1981)	216	9	4,16%
Bongiovanni; Laureano e Leite (1990)	248	13	5,24%
Dolce; Iezzi e Machado (1996)	237	10	4,21%
Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998)	304	15	4,93%
Bigode (2000)	335	16	4,77%
Lannes e Lannes (2001)	208	11	5,28%
Bianchini (2011)	272	10	3,67%
Balestri e Pataro (2018)	304	5	1,64%

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao observarmos a quantidade de páginas destinadas ao tema nos livros, verificamos que os dois livros analisados, das décadas de 1940 e 1960, não exploravam muito o Teorema.

Os livros analisados, publicados entre 1998 e 2018, têm um número maior de páginas dedicadas ao "Teorema de Pitágoras". Entretanto, na obra de Balestri e Pataro, de 2018, apenas 5 páginas são destinadas ao referido teorema.

No quadro 2, apresentamos a presença de abordagem histórica nos livros analisados. É importante salientar que, quando nos referimos aos aspectos históricos estamos considerando também os livros nos quais não existe uma abordagem consistente. Alguns autores incluem apenas notas históricas.

Quadro 2 - Abordagem histórica nos livros analisados

AUTORES	Dados sobre Pitágoras	Menção a outros povos que conheciam a relação entre a hipotenusa e os catetos	Menção ao Plimpton 322
Maeder (1948)	–	–	–
Quintella(1963)	–	–	–
Sardella e Matta (1981)	–	–	–
Bongiovanni; Laureano e Leite (1990)	–	–	–
Dolce; Iezzi e Machado (1996)	–	–	–
Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998)	X	X	–
Bigode (2000)	X	X	–
Lannes e Lannes (2001)	X	X	–
Bianchini(2011)	X	–	–
Balestri e Pataro (2018)	X	X	–

Legenda: Sinal "x", sim; sinal "–", não
Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se que, entre os dez livros analisados, os que foram editados a partir do ano de publicação dos PCN's, trazem alguma menção história ao desenvolver o tema. A inclusão de aspectos históricos pode estar relacionada à valorização da história presente nos PCN de Matemática.

Bianchini (2011) faz um breve comentário histórico sobre a vida de Pitágoras, mas não relata que povos antigos já tinham conhecimento sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

Já, Balestri e Pataro (2018) apresentam um relato sobre a vida de Pitágoras e mencionam que os babilônios e os egípcios conheciam o teorema. Indicam que o Papiro do Cairo, encontrado no Egito, inclui nove problemas envolvendo as relações entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Deste modo, de certa forma, apontam que os povos antigos tinham entendimento de algumas propriedades do triângulo retângulo.

Lannes e Lannes (2001) apresentam um parágrafo informando que os babilônios já tinham conhecimento sobre o teorema. Bigode (2000) utiliza-se de alguns elementos da História da Matemática para a abordagem do tema e, ao mencionar a corda de 13 nós utilizada no Egito, evidencia o conhecimento sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos em um período anterior a Pitágoras, apesar deste pormenor não ficar explícito no seu texto.

Identificamos, nos livros analisados, mesmo os que apresentam alguma referência histórica, esta fica restrita a breves notas com um caráter informativo. Somente Balestri e Pataro (2018) incluem um exercício que traz uma informação sobre o Papiro do Cairo e um problema contido neste papiro para que o aluno resolva.

A corda de 13 nós, utilizada pelos egípcios, só é mencionada nos livros de Bigode (2000), Lannes e Lannes (2001) e Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr (1998). Nenhum dos autores faz referência direta ao tablete Plimpton 322, nem menciona outros povos, além dos babilônios e egípcios, que também tinham conhecimento sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

Quadro 3– Disposição das informações históricas sobre Pitágoras e o Teorema

AUTORES	Página inteira	Em um box colorido	No início do capítulo	Nota de rodapé
Maeder (1948)	–	–	-	–
Quintella(1963)	–	–	-	–
Sardella e Matta (1981)	–	–	-	–
Bongiovanni; Laureano e Leite (1990)	–	–	-	–
Dolce; Iezzi e Machado (1996)	–	–	-	–
Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998)	X	-	-	–
Bigode (2000)	X	-	-	–
Lannes e Lannes (2001)	X	-	-	–
Bianchini(2011)	-	-	x	–
Balestri e Pataro (2018)	-	-	x	–

Elaborado pelo o autor

Segundo Chervel (1990), os exercícios fazem parte da constituição da disciplina, entretanto, as qualidades dos mesmos influenciam no sucesso da disciplina.

Neste sentido, elaboramos o quadro 4 para indicar o número de exemplos e exercícios propostos nos livros analisados.

Quadro 4 - Exemplos e exercícios propostos sobre o “Teorema de Pitágoras”

AUTORES	Exemplos	Exercícios propostos	Uso da Geometria	Material concreto
Maeder (1948)	5	24	-	–
Quintella(1963)	2	50	-	–
Sardella e Matta (1981)	5	53	X	–
Bongiovanni; Laureano e Leite (1990)	0	27	X	–
Dolce; Iezzi e Machado (1996)	0	34	X	–
Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998)	5	37	X	–
Bigode (2000)	3	36	X	X
Lannes e Lannes (2001)	3	8	X	X
Bianchini (2011)	1	17	X	X
Balestri e Pataro (2018)	2	25	x	X

Legenda: Sinal “x”; sim, sinal “–“, não
Fonte: Dados da pesquisa

Em relação aos exemplos, tendo em vista o quadro 4, podemos perceber que os dez livros apresentam poucos exemplos, exceto Maeder (1948), Sardella e Matta (1981) e Castrucci; Gionvanni e Giovanni Júnior (1998).

Com relação aos exercícios propostos, somente o livro de Lannes e Lannes (2001) inclui um número menor de exercícios. Os autores que apresentaram problemas contextualizados foram: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998), Bigode (2000), Lannes e Lannes (2001), Bianchini (2011) e Balestri e Pataro (2018). Os autores Maeder (1948) e Quintella(1963) não empregaram figuras geométricas nos exercícios.

Sardella e Matta (1981), Bongiovanni, Laureano e Leite (1990) e Dolce, Iezzi e Machado (1996) utilizaram, nos exercícios, integração de geometria e aplicação de fórmula geométrica.

Como pode ser observado no quadro 4, a utilização de materiais concretos está proposta por Bianchini (2011), Lannes & Lannes (2001), Bigode (2000) e Balestrie e Pataro (2018). Em relação a esta proposta temos:

- Bigode (2000) utilizou folha de caderno para recortar um triângulo retângulo e somar os quadrados das medidas dos catetos deste triângulo e observar o resultado. Usou calculadora para calcular raiz quadrada, ambas as atividades com a sugestão de serem individuais.

- Lannes e Lannes (2001) utilizaram tabuleiro quadrado, cartolina para montar um quebra cabeça e mostrar o Teorema. Em outra atividade, usam caixa de papelão quadrados de mesma espessura e colocaram areia, em seguida, tiram a areia que estava no quadrado dos lados dos catetos e colocaram no quadrado formado pela medida da hipotenusa, assim enchendo todo o quadrado oriundo da medida da hipotenusa. Nesta atividade, utilizaram também cola, tesoura. Em uma terceira situação, foi utilizada a calculadora para calcular raiz quadrada. Para todas as propostas dessas situações, os autores indicam que sejam realizadas individualmente pelos alunos.

- Bianchini (2011) utilizou calculadora para descobrir valores de catetos em uma atividade em dupla. Também indicou a utilização de papel quadriculado para desenhar triângulo retângulo.

- Balestri e Pataro (2018) utilizaram computador para calcular raiz quadrada, com a proposta de que a realização desta atividade seja individual.

Ressaltamos que Bianchini (2011), Lannes & Lannes (2001), Bigode (2000) e Balestrie e Pataro (2018) também incluem alguns exercícios com uso de calculadora, que é um diferencial em relação aos demais.

Quanto às ilustrações do triângulo retângulo nos livros didáticos analisados, percebemos que os autores, a partir dos anos1996, utilizaram os triângulos retângulos em várias posições – visto que a diversificação do posicionamento propicia um maior discernimento do discente para a localização da hipotenusa e dos catetos. Entre os livros mais antigos, apenas o de Sardela e Matta (1981) contém ilustrações de triângulos retângulos em posições distintas.

No quadro 5, indicamos como foi realizada a integração de ilustrações dos triângulos retângulos, nos livros didáticos analisados, em relação à sua posição.

Quadro 5 - Uso do triângulo retângulo em diversas posições.

AUTORES	Uso do triângulo retângulo em diversas posições
Maeder (1948)	Três triângulos numa mesma posição
Quintella (1963)	Somente um exemplo e, os 50 exercícios, não possuem nenhuma ilustração de triângulo.
Sardella e Matta (1981)	Diversas posições do triângulo
Bongiovanni; Laureano e Leite (1990)	Triângulo retângulo em uma única posição
Dolce; Iezzi e Machado (1996)	Diversas posições do triângulo
Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998)	Diversas posições do triângulo
Bigode (2000)	Diversas posições do triângulo
Lannes e Lannes (2001)	Diversas posições do triângulo
Bianchini (2011)	Vários posicionamentos do triângulo retângulo, facilitando a localização da hipotenusa e dos catetos
Balestri e Pataro (2018)	Triângulos em várias posições diferentes

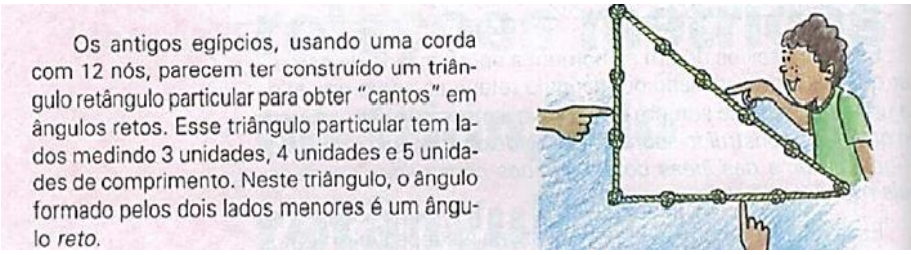
Fonte: Elaborado pelo autor

Nos livros mais antigos, os autores não usufruíram da exposição do triângulo, isto é, existem poucos exemplos com a utilização do triângulo e o mesmo ocorre em relação aos exercícios.

Enfim, como pudemos verificar, o “Teorema de Pitágoras” foi um tópico que permaneceu em todos os livros analisados, com variação grande do número de páginas dedicadas a esse conteúdo. É necessário destacar que os autores Maeder (1948), Quintella (1963), Sardella e Matta (1981) e Balestri e Pataro (2018) utilizaram-se das relações métricas no triângulo retângulo para demonstrar o “Teorema de Pitágoras”. No entanto, os autores, Bongiovanni (1990), Dolce; Iezzi e Machado (1996) e Bigode (2000) utilizaram semelhança de triângulos. Já Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998), Lannes e Lannes (2001) e Bianchini (2011) empregaram a área de figuras para a demonstração do teorema. Deste modo, os autores realizam a demonstração de formas distintas.

No livro *A conquista da Matemática,* de Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998), percebe-se um equívoco quando os autores citam que os egípcios utilizavam a corda de 12 nós (figura 64), o correto é a corda de 13 nós. Tal erro supõe a contagem apenas dos nós aparentemente visíveis, contudo, o 13º nó se sobrepõe ao 1º nó, para formar o triângulo de lados 3, 4 e 5.

Figura 64 - Corda de nós



Os antigos egípcios, usando uma corda com 12 nós, parecem ter construído um triângulo retângulo particular para obter "cantos" em ângulos retos. Esse triângulo particular tem lados medindo 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades de comprimento. Neste triângulo, o ângulo formado pelos dois lados menores é um ângulo *reto*.

Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998, p.196)

Não foi nosso intuito pesquisar as demonstrações do Teorema e sim como os autores realizaram o desenvolvimento do conteúdo; se utilizaram a História da Matemática como suporte na introdução do conteúdo ou ao longo do texto, não deixando o mérito exclusivamente para Pitágoras, pois povos antigos já possuíam conhecimento sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos no triângulo retângulo.

CAPÍTULO IV

DO PRODUTO E SUA APLICAÇÃO

O Produto Educacional é parte integrante da dissertação elaborada, sendo uma das exigências do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas. Este foi desenvolvido com o intuito de fornecer informações para as formações inicial e continuada de professores de Matemática, tendo em vista proporcionar mais conhecimentos sobre a História da Matemática como suporte para auxiliar o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Nosso produto, intitulado como *“Teorema de Pitágoras”: aspectos históricos e sua apresentação em Livros Didáticos,* visa, principalmente, abordar alguns aspectos históricos relevantes sobre nosso tema de pesquisa. Um dos objetivos foi informar que povos, antes de Pitágoras, já tinham conhecimento da relação entre a hipotenusa e os catetos num triângulo retângulo, ou seja, deixamos uma indagação que o mérito sobre este Teorema não é somente de Pitágoras. Incluímos também algumas demonstrações do teorema e os resultados da análise dos dez livros didáticos que constam na presente dissertação.

No quadro 6, apresentamos a estrutura do produto.

Quadro 6 - Estrutura do Produto

Unidade	Conteúdo	Objetivos
Apresentação	A finalidade	Apresentar a proposta do material
Pitágoras e o Teorema: aspectos históricos	Abordagem histórica do “Teorema de Pitágoras”	Fornecer dados sobre Pitágoras e conhecimento de outros povos sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos em um triângulo retângulo. Apresentar algumas demonstrações para o teorema.
Enfoque da História da Matemática nos PCN e BNCC	A importância da abordagem histórica	Informar sobre as orientações contidas nesses documentos.
“Teorema de Pitágoras” nos livros didáticos analisados	Como o conteúdo é abordado pelos autores	Identificar as características de cada livro sobre o tema
Análise geral dos livros analisados	Uma visão geral sobre as dez obras analisadas	Apresentar considerações sobre as abordagens relativas ao “Teorema de Pitágoras” nos livros analisados

Fonte: Elaborado pelo autor

Os livros analisados para o desenvolvimento do material foram:

- MAEDER, Algacyr Munhoz. Curso de Matemática. 4ª ed. 1948.
- QUINTELLA, Ary. Matemática para a quarta série ginasial. 46ª ed., 1963.
- SARDELLA, Antônio; MATTA, Edison. Matemática, 8ª série, 1981.
- BONGIOVANNI, Vicenzo; LAUREANO, José Luiz Tavares; LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto. Matemática e Vida, 8ª série. 1ª ed., 1990.
- DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; MACHADO, Antônio. Matemática e Realidade, 8ªsérie. 3ª ed., 1996.
- CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI, José Ruy e JUNIOR, José Rui Giovanni. A Conquista da Matemática, 1998.
- BIGODE, Antônio José Lopes. Matemática hoje é feita assim, 2000.
- LANNES, Rodrigo; WAGNER, LANNES. Matemática. 1ª ed., 2001. v. 4.
- BIANCHINI, Edwaldo. Matemática: Bianchini, 9º ano. 7ª ed., 2011.
- BALESTRI, Rodrigo e PATARO, Patrícia Moreno. Matemática essencial, 9º ano.1ª ed., 2018.

No quadro 5, indicamos como ficou dimensionado produto. Pretendemos oferecer aos professores de Matemática, estudantes desta área e afins, mais subsídios para o conteúdo “Teorema de Pitágoras” e indicar como este tópico é apresentado em alguns livros didáticos.

Segundo Zuin (2003), é importante a formação continuada dos professores, ainda mais para aqueles docentes que não desfrutaram, durante a licenciatura, da disciplina História da Matemática. Neste sentido, pretendemos que, através produto educacional elaborado, os docentes possam ter mais conhecimentos do contexto histórico, repassando esses conhecimentos aos seus alunos e possam proporcionar algumas mudanças no ensino do “Teorema de Pitágoras”.

4.1 - A aplicação do Produto Educacional

O Produto Educacional, oriundo dessa dissertação, foi aplicado, através de um minicurso direcionado a doze alunos do Mestrado de Ensino em Ciências e Matemática da PUC Minas. Todos são professores de Matemática atuantes no Ensino Básico e/ou Ensino Superior.

Seguindo as normas da universidade, com as medidas de isolamento social devido à pandemia da Covid-19, o minicurso foi realizado através de videoconferência pela Plataforma Canvas, que é a utilizada pela PUC Minas para o Regime Letivo Remoto nos cursos de pós-graduação. A plataforma permitiu não só um minicurso com a participação direta dos mestrandos, como o preenchimento imediato dos questionários aplicados e disponibilizados on-line para os mesmos.

No minicurso foi destacada a importância da História da Matemática no Ensino Básico. Em relação aos aspectos históricos sobre o teorema inicialmente, apresentamos dados sobre Pitágoras, da comunidade pitagórica e a possível demonstração do teorema. Em seguida, como o teorema está disposto nos *Elementos* de Euclides. Em outro momento, informações sobre o Plimpton 322 – tablete de argila, encontrado na região do Iraque, o qual, através de vários estudos, indica que muito antes do nascimento de Pitágoras, os babilônios já tinham conhecimento sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos no triângulo retângulo. Posteriormente, informações sobre outros povos que conheciam a relação entre hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo, seguidas de algumas demonstrações do referido teorema.

Delineamos, também, a temática da História da Matemática nos PCN de Matemática e na BNCC, e os dados e resultados da nossa análise de livros didáticos do Ensino Fundamental, como apresentados anteriormente.

Ao final do minicurso, sugerimos leituras do paradidático *Descobrindo o "Teorema de Pitágoras",* de autoria de Luiz Márcio Imenes, com o intuito de darmos subsídios para os docentes terem outra fonte para ministrar as aulas sobre o tema e livros que tratam da História da Educação Matemática no Brasil.

Foram elaborados dois questionários para serem aplicados aos professores participantes do minicurso, um inicial e o, outro, final. No primeiro, buscamos informações sobre como os professores trabalhavam o conteúdo “Teorema de Pitágoras” em suas aulas. O segundo teve como objetivo obter uma avaliação dos participantes em relação ao minicurso.

Questionário inicial

1- Você já trabalhou o tema “Teorema de Pitágoras” em sala de aula?
2- Você utilizou a História da Matemática para lecionar o tópico “Teorema de Pitágoras” em sala de aula? Em caso afirmativo, qual foi a abordagem?
3- Você utiliza ou utilizou algum paradidático para desenvolver o conteúdo “Teorema de Pitágoras”? Em caso afirmativo, qual?

Apresentaremos as opiniões relativas aos questionários aplicados durante o minicurso, mantendo em sigilo a identificação dos participantes.

No quadro 7, o resultado relativo às respostas dos participantes ao questionário aplicado antes do início do minicurso.

Quadro 7 – Resultados da análise do questionário inicial

QUESTÕES	RESPOSTAS
1	12 afirmaram que, como docentes, já trabalharam com o “Teorema de Pitágoras” no Ensino Básico
2	4 relataram que utilizaram a Historia da Matemática para lecionar o tópico
3	4 disseram que utilizaram algum paradidático para desenvolver este conteúdo

Fonte: elaborado pelo o autor

Baseado no questionário inicial, diante das respostas dos participantes, podemos verificar que todos já trabalharam com o conteúdo “Teorema de Pitágoras” nos ensinos fundamental ou médio. No entanto, verificamos que oito não utilizaram a História da Matemática para o desenvolvimento do tema. Os quatro professores que afirmaram fazer alguma abordagem histórica transmitiram aos seus alunos dados sobre a vida de Pitágoras, sendo que dois deles também mencionaram a corda de 13 nós, utilizada pelos egípcios para medição de terrenos. Inferimos que os docentes se basearam nas notas históricas apresentadas nos livros didáticos. Essa inferência se fundamenta na nossa comprovação na análise dos livros, ao verificarmos que são muito reduzidas as informações históricas no capítulo referente ao "Teorema de Pitágoras".

Com relação ao trabalho com paradidático para desenvolver o conteúdo, quatro disseram que utilizaram, entretanto, somente uma pessoa soube informar o título do paradidático adotado, que foi "A Missão: equações do segundo grau com uma Incógnita", de Egídio Trambaiolli Neto.

Como foi informado, o segundo questionário aplicado, priorizou verificar como os participantes avaliaram o minicurso entre outros aspectos.

Questionário Final

1- O minicurso acrescentou informações desconhecida para você? Em caso afirmativo, descrevê-las.
2- O minicurso mudou sua visão sobre algum aspecto relativo importância da História da Matemática na formação docente? Por quê?
3- O minicurso mudou sua visão sobre a análise de livros didáticos. Por quê?
4- Você considera pertinente o desenvolvimento deste tema, na perspectiva apresentada no minicurso, nos cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática?
5- Existe algum item que você considera pertinente acrescentar no desenvolvimento do tema apresentado?
6- Qual parte do minicurso você considerou mais relevante?
7- Espaço para críticas e sugestões

No quadro 8, estão dispostos os resultados relativos às respostas dos participantes ao questionário aplicado ao final do minicurso.

Quadro 8 - Resultados da análise do questionário final

Questões	Respostas
1	Apenas um professor informou que não obteve informação desconhecida do minicurso, contudo, os demais onze participantes informaram que tiveram informações novas. Nove professores descreveram que as novidades foram as demonstrações apresentadas, sendo que dois enfatizaram o Plimpton 322.
2	Todos os participantes foram unânimes sobre a importância da História da Matemática na formação docente. A maioria relatou que a história é um facilitador para a aprendizagem
3	Todos foram unânimes em dizer que mudaram a visão sobre análise de livro didático, porque perceberam a diferença que um conteúdo sofre ao longo do tempo.
4	Todos os participantes concordaram que a temática apresentada é importante na formação inicial e continuada de professores de Matemática. Os argumentos, na sua maioria, foram em relação à defasagem do conhecimento dos docentes sobre a História da Matemática.
5	Dos participantes do minicurso, oito disseram que não tinham nenhum item a acrescentar no desenvolvimento tema. Os demais sugeriram um intervalo menor entre as publicações dos livros analisados e explicitar como fazer uma análise de livro.
6	Nove relataram que o mais relevante foram as informações sobre os povos antigos já possuírem conhecimento sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos. Os demais três participantes consideraram que as outras demonstrações do Teorema apresentadas e as informações sobre o Plimpton 322 foram as que mais agregaram novos conhecimentos a eles.
7	Dois participantes sugeriram aumentar o tempo do minicurso e pesquisar em instituições do Ensino Superior como é feita a abordagem da disciplina História da Matemática. Os outros dez participantes não ofereceram outras propostas.

Fonte: Elaborado pelo autor

O retorno do minicurso foi positivo, pois a maioria dos participantes considerou a temática interessante e uma novidade, visto que desconheciam muitos dos aspectos apresentados. Somente dois participantes afirmaram saber da existência do tablete Plimpton 322.

Através do minicurso, ficou patente que é necessária a implementação da História da Matemática nos cursos de formação inicial e continuada para professores de Matemática, pois foi perceptível a falta de conhecimento da história por parte dos professores presentes.

Os próprios participantes alegaram ter poucas informações históricas sobre “Teorema de Pitágoras”, sobre o Plimpton 322, ignorando que os babilônios já tinham conhecimento sobre a relação entre a medida da hipotenusa e a medida dos catetos antes mesmo do nascimento de Pitágoras.

Outro ponto a ser ressaltado foi o interesse dos participantes pela análise dos livros didáticos, como o conteúdo é apresentado pelos diversos autores. Consideramos que perceber como um determinado tópico é apresentado nos livros, ao longo do tempo, auxilia na reflexão sobre a prática em sala de aula e traz mais conhecimentos para o professor em relação à História da Matemática Escolar.

A aplicação do Produto Educacional confirmou a importância do desenvolvimento da nossa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar esta pesquisa, muitas vezes, pensei que não chegaria até aqui. Contudo, com o passar do tempo, o texto foi sendo construído página por página. Ao desenvolver esta pesquisa, foram surgindo dúvidas e algumas mudanças foram realizadas, sendo necessária a busca de novas fontes e outros fundamentos teóricos.

Na utilização da fundamentação teórica são relevantes os estudos de André Chervel, Elenice Zuin e, para o desenvolvimento do Produto Educacional, Carl Boyer, Howard Eves, entre outros autores, para contribuir com as formações inicial e continuada de docentes de Matemática e também para os professores em serviço.

No Produto Educacional, um dos nossos intuitos foi mostrar que o mérito dado a Pitágoras teve origem em povos que viveram mais de mil anos antes dele. Entretanto, pondo uma dúvida se realmente este matemático foi o mentor da demonstração deste teorema, uma vez que, naquela época, era comum denominar os teoremas em referência a outras pessoas, ou seja, a demonstração mais conhecida que chegou até nós poderia ter sido elaborada por algum seguidor de Pitágoras e ele teria colocado este nome no Teorema para agraciar Pitágoras.

Uma peça-chave para a pesquisa foram os livros didáticos. Estes permitiram verificar como um conteúdo escolar é explorado em certa época por um determinado autor. Como já afirmamos anteriormente, essa percepção pode dar suporte aos educadores para continuar com a manutenção da sua forma de ensinar o conteúdo, ou modificá-la, ou acrescentar outras atividades e métodos para aplicá-lo aos discentes.

Foi muito importante para o meu crescimento profissional poder realizar uma análise mais apurada de livros didáticos e verificar o quanto, às vezes, os professores costumam fazer a escolha de um livro didático sem ter um olhar mais crítico e reflexivo para determinados aspectos.

Ao longo das análises dos livros, observamos mudanças na apresentação do conteúdo, sendo que, nas obras analisadas, editadas a partir publicação dos PCN de Matemática, encontramos algumas menções históricas no tema estudado. Essa é uma mudança, mas não é tão significativa. Nas discussões com a minha orientadora, chegamos à conclusão que, em relação à História da Matemática, seria significativo se o livro indicasse que, antes de Pitágoras, outros povos já tinham conhecimento de que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma do quadrado das medidas dos catetos e que os autores fizessem menção ao Plimpton 322. Inferimos que só mencionar dados sobre a vida de Pitágoras e o teorema é algo menor, no sentido de concentrar o mérito apenas em Pitágoras, sem indicar outros personagens.

Após a análise dos livros, considero de suma importância a abordagem histórica para a introdução do tema, também a aplicabilidade da geometria para a construção e desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Reforçamos a necessidade da História da Matemática para a apresentação dos conteúdos matemáticos, para delinear como o surgimento de um tema chegou até a atualidade, quais foram os processos, quais pessoas realmente participaram da sua construção, por fim, como o conteúdo pode ser apresentado para próximas gerações de discentes.

Tendo em vista as lacunas na formação de professores, como já salientamos anteriormente, foi nosso objetivo elaborar um material para dar uma partida inicial auxiliando os docentes a traçarem novos caminhos e novas formas de lecionar o conteúdo pesquisado. Nosso intuito foi dar ênfase à história, estimulando que os professores façam uma análise mais detalhada ao procederem à escolha do livro didático nas escolas e, no caso de o livro não trazer informações suficientes, que o docente possa fazer uso de outras fontes confiáveis.

Assim, como fui educado num sistema tradicional por muitos anos, repassei para os meus discentes a mesma maneira que aprendi. Agora, que pude adquirir mais conhecimentos de alguns aspectos da História da Educação e da História da Matemática, através do Mestrado, obtendo uma visão mais ampla sobre a necessidade de vislumbrar um conteúdo a partir da sua abordagem histórica, é meu desejo compartilhar este estudo com outros educadores. Temos consciência de que nossas constatações são em um sentido restrito porque nos fixamos na análise de dez livros, abarcando um período longo.

Agradeço a minha orientadora por toda atenção, tendo em vista as várias vezes que discutimos sobre o desenvolvimento da pesquisa, a respeito do contexto histórico do tema, sobre as análises dos livros e conclusões. Aqui deixo minha enorme gratidão pela experiência e convivência com minha orientadora.

Tenho ciência de que a presente pesquisa traz apenas alguns elementos para um caminho a ser seguido na abordagem sobre o “Teorema de Pitágoras”. Há muitos outros caminhos a serem investigados, com outras visões a serem analisadas.

Finalizando, deixo uma questão a ser investigada sobre o tema:

Quais autores utilizam, na explanação do conteúdo, a aritmética, a álgebra e a geometria de forma conjunta para abordar o “Teorema de Pitágoras”?

REFERÊNCIAS

AMORIM, Maria da Paz Nunes. **Uma abordagem de generalização do Teorema de Pitágoras numa turma do 9º ano do Ensino Fundamental**. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática** - 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica, 2017.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria e Educação**, n. 2, p. 177-229,1990.

CORRÊA, Rosa Lydia Teixeira. O livro escolar como fonte de pesquisa em História da Educação. **Cadernos Cedes**, ano XX, n. 52, p. 11-24, nov. 2000.

COSTA, Renata Alves; ZUIN, Elenice de Souza Lodron. O "Teorema de Pitágoras" sob uma perspectiva histórica: uma análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental no Brasil. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. **Diálogos entre a pesquisa e a prática educativa**. (CD-Rom). Belo Horizonte: SBEM, 2007.

COSTA, Renata Alves; ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Análise de livros didáticos de Matemática: investigando a abordagem histórica do "Teorema de Pitágoras" em livros do Ensino Fundamental. ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2003, Belo Horizonte. **Anais** [...] (CD-Rom). Belo Horizonte: SBEM-MG, 2003.

D'AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática e Educação. **Cadernos Cedes**, 40, p.7-17,1996.

JESUS, Aralan Gessé Ribeiro. **Pitágoras:** estendendo a dimensão do teorema. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.

LAJOLO, Marisa. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, ano 16, n. 69, p. 2-9, jan./mar.1996.

LONGEN, Adilson. **Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da Educação Matemática.** 404 f. Tese (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John; VALDÉS, Juan E. Nápoles. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006

MUNAKATA, Kazumi. Livro didático como indício da cultura escolar. **História da Educação**, v. 20, n. 50, p. 119-138, set./dez. 2016.

MUNAKATA, Kazumi. O livro didático e o professor: entre a ortodoxia e a apropriação. In: MONTEIRO, Ana Maria F. C.; GASPARELLO, Arlette Medeiros; MAGALHÃES, Marcelo de Souza (Orgs.). **Ensino de História**: sujeitos, saberes e práticas. Rio de Janeiro: Mauad X, 2007. p. 137-147.

NASCIMENTO, Van Eudes Farias. **Demonstrações do Teorema de Pitágoras**. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2018.

NOBRE, Sérgio. Alguns “Porquês” na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática. **Cadernos Cedes,** n. 40, p. 29-35,1996.

PRATA FILHO, Gilson Abdala. **Teorema de Pitágoras a partir da História da Matemática**: análises epistemológicas de atividades em turmas do 9º ano da rede pública. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018

SILVA, Georgiane Amorim. **Estudo histórico e pedagógico sobre ternos pitagóricos à luz de Eugéne Bahier**. 116f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, v.16, n. 30, p. 139-161, 2008.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. História da Matemática: considerações no campo educacional. ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2003, Belo Horizonte. **Anais** [...] (CD-Rom). Belo Horizonte: SBEM-MG, 2003.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Livros didáticos como fontes para a escrita da História da Matemática Escolar**. Guarapuava: SBHMat, 2007.

LIVROS DIDÁTICOS

BALESTRI, Rodrigo; PATARO, Patrícia Moreno. **Matemática essencial, 9º ano**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**: Bianchini, 9º ano. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim** – 8ª série. São Paulo: FTD, 2000.

BONGIOVANNI, Vicenzo; LAUREANO, José Luiz Tavares; LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto. **Matemática e Vida**, 8ª série. 1. ed. São Paulo: Ática, 1990.

DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade**, 8ª série. 3. ed. São Paulo: Atual, 1996.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática e realidade – 8ª série**. São Pauilo: Atual,1996.

LANNES, Rodrigo; WAGNER, LANNES**. Matemática**. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2001. v. 4.

MAEDER, Algacyr Munhoz. **Curso de Matemática – 4ª série ginasial**. 4. ed. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1948.

QUINTELLA, Ary. **Matemática para a quarta série ginasial**. 46. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional,1963.

SARDELLA, Antônio; MATTA, Edison da. **Matemática, 8ª série**. São Paulo: Ática, 1981.

APÊNDICE A

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

“Teorema de Pitágoras”: Aspectos históricos e sua presença em livros didáticos de Matemática

REINALDO JACINTO EZEQUIEL

ELENICE DE SOUZA LODRON ZUIN

2021

“Teorema de Pitágoras” : Aspectos históricos e sua presença em livros didáticos de Matemática

Reinaldo Jacinto Ezequiel

Elenice de Souza Lodron Zuin

APRESENTAÇÃO

Este material foi elaborado tendo como origem a dissertação "Teorema de Pitágoras" em livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, desenvolvida no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, sob a orientação da professora Dra. Elenice de Souza Lodron Zuin.

Temos como objetivo colaborar com as formações inicial e continuada de professores de Matemática, a partir de uma perspectiva centrada na História da Matemática, focalizando o tema "Teorema de Pitágoras".

Iniciamos com a história sobre Pitágoras e a existência da relação dos catetos com a hipotenusa, muito antes de este filósofo grego nascer, resgatando as contribuições feitas por povos antigos. Em seguida, apresentamos alguns aspectos referentes à importância da utilização da História da Matemática presente nos PCN de Matemática e na BNCC.

Relativamente ao conteúdo "Teorema de Pitágoras", incluímos os resultados da análise de dez livros didáticos, nos quais foram verificados os aspectos metodológicos, a presença de abordagem histórica, recursos visuais e exercícios propostos.

Desejamos que esses apontamentos possam contribuir para um repensar sobre as práticas da sala de aula e que auxilie nas formações inicial e continuada de docentes, também servindo de guia aos professores atuantes no Ensino Básico.

autores

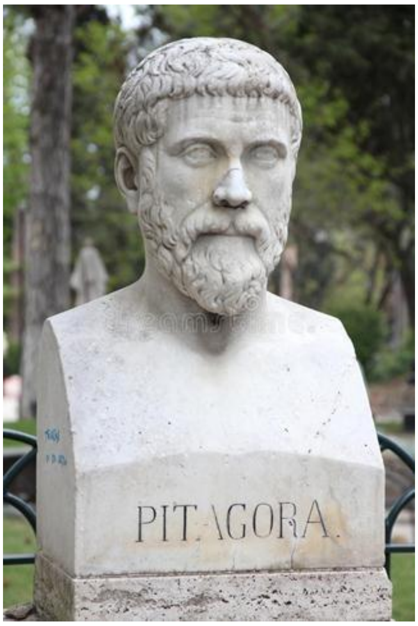
SUMÁRIO

Capítulo I

Pitágoras e o “Teorema de Pitágoras”: aspectos históricos

Pitágoras nasceu aproximadamente em 570 a.C. na Grécia, na ilha egeia de Samos. Ele teria sido aluno de Tales de Mileto, o qual contribuiria para seu interesse pelas matemáticas. Pitágoras foi enviado ao Egito para complementar sua formação, porém, em uma guerra entre o Egito e a Pérsia, ele foi aprisionado e conduzido a Mesopotâmia. Como ele não era um egípcio, teve certa imunidade e oportunidade de ter acesso aos conhecimentos dos babilônios (PÉREZ, 2009).

Figura 1 - Busto de Pitágoras no Parque Villa Borghese, Roma, Itália



Fonte: https://www.dreamstime.com

Pitágoras, após retornar de sua longa viagem, foi para Samos e reuniu um grupo de pessoas, fundando uma Ordem. Por fatores políticos, transferiram-se para Crotona, uma colônia grega localizada no sul da Itália. Lá, ficou estabelecida sua escola que, posteriormente, foi denominada Escola Pitagórica. Neste local, os estudos focavam a aritmética, geometria, astronomia e mú-

sica. O grupo de pessoas formava uma irmandade com ritos secretos e cerimônias (PÉREZ, 2009; EVES, 2004).

> **Com o tempo, a influência e as tendências aristocráticas da irmandade tornaram-se tão grandes que forças democráticas do sul** da **Itália destruíram o local da escola fazendo com que a confraria se dispersasse. Pitágoras teria fugido para Metaponto, onde morreu talvez assassinado, com uma idade aproximadamente de 75 anos. A irmandade, embora dispersa, continuou a existir por, pelo menos, mais dois séculos. (EVES, 2004, p. 97).**

Conforme Eves (2004), na comunidade pitagórica, tudo se baseava em números inteiros, ou seja, as características do homem e da matéria. Os ensinamentos da escola pitagórica eram orais e as atribuições das descobertas eram creditadas ao fundador – o que dificulta saber quais descobertas matemáticas foram realmente realizadas por Pitágoras ou por um membro da irmandade. Desse modo, fica a dúvida sobre as origens do "Teorema de Pitágoras", poderia ter sido idealizado por um de seus discípulos e o nome do teorema foi apenas para reverenciá-lo?

> A tradição é unânime em atribuir a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje conhecida universalmente pelo seu nome – que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. (EVES, 2004, p. 103).

Sabe-se que Pitágoras não deixou nenhuma obra escrita, porém, "suas ideias foram levadas adiante por um grande número de discípulos entusiastas" e Filolau de Tarento teria sido o primeiro a escrever sobre o pitagorismo. (BOYER, 2012, p.48).

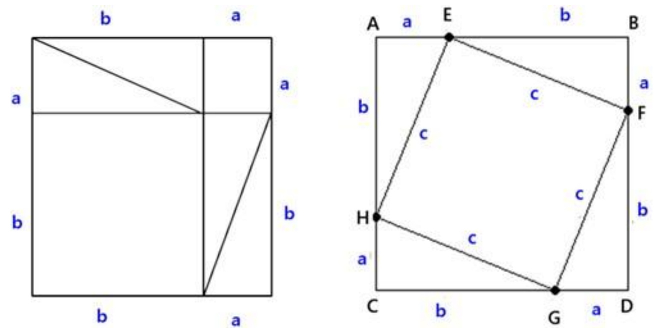
Segundo Eves (2004), o teorema já era conhecido pelos povos babilônios dos tempos de Hamurabi (1800 – 1750 a. C). Esse fato indica que, mais de 1000 anos antes de Pitágoras, já se tinha conhecimento da relação da hipotenusa com os catetos num triângulo retângulo, contudo, a primeira demonstração do teorema teria sido feita mesmo por Pitágoras?

O autor nos remete que a demonstração feita por Pitágoras, ou algum de seus discípulos, sugerindo que teria sido uma demonstração por decomposição (figura 2).

> Denotemos por a, b, c os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, e consideremos os dois quadrados da figura anexa, cada um de lados iguais a a + b [figura 2]. O primeiro quadrado está decom-

> posto em seis partes - a saber, os dois quadrados sobre os catetos e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. O segundo quadrado está decomposto em cinco partes – a saber, o quadrado sobre a hipotenusa e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. Subtraindo-se iguais de iguais, conclui-se que o quadrado sobre a hipotenusa corresponde à soma dos quadrados sobre os catetos. (EVES, 2004, p. 103).

Figura 2 - Demonstração do "Teorema de Pitágoras" por decomposição



Fonte: Ilustração de Elenice Zuin (2019)

Sabe-se que, ao longo do tempo, surgiram várias demonstrações do teorema. O professor de matemática americano Elisha Scott Loomis (1852-1940) realizou uma catalogação de 370 demonstrações que foram publicadas no seu livro The Pythagorean Proposition (EVES, 2004).

Entre as evidências remotas das denominadas "ternas pitagóricas", encontradas milênios antes de Cristo, temos o Egito, com os seus agrimensores, que utilizavam a corda de 13 nós, dividida em espaçamentos iguais através de um nó. Essa técnica indica que utilizavam o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 para a construção de ângulos retos, para medir ou delimitar terrenos.

Conforme Boyer (2012), textos antigos existiam na Índia, denominados por Sulbasutras - das três versões existentes, uma delas é denominada Apastamba, que pode ter sido escrita na época de Pitágoras. Nela, verifica-se que há "regras para a construção de ângulos retos por meio de ternas de cordas cujos comprimentos formem tríades pitagóricas, como 3, 4, 5, ou 5, 11 e 13, ou 8, 15 e 17, ou 12, 35 e 37." (p.141-142). Contudo, há dificuldade em datar esses documentos, sendo impossível afirmar que estas regras hindus têm alguma relação com a utilizada pelos estiradores de corda no antigo Egito (BOYER, 2012).

Segundo Eves (2004), o Papiro Matemático Cairo, que data aproximadamente de 300 a.C., contém quarenta problemas matemáticos, sendo nove envolvendo o “Teorema de Pitágoras”. Além disso, os egípcios “não só sabiam que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21 e 29.” (p. 87). Esse fato pode reforçar as evidências de que milênios antes disso, os egípcios conheciam e utilizavam a relação entre a hipotenusa e os catetos num triângulo retângulo, como no uso da corda de treze nós.

1.1 Plimpton 322

Embora tenhamos indicativos do conhecimento dos egípcios e hindus sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo, existe uma evidência de que pode ser muito mais antigo entre os babilônios. A placa Plimpton 322 é uma tábua de argila, parcialmente quebrada, medindo cerca de 13 cm de largura, 9 cm de altura, e 2 cm de espessura, existindo relatos de que ela foi encontrada em um lugar desconhecido no deserto do Iraque. Possui escrita cuneiforme com registros da matemática babilônica, com numeração sexagesimal. Este é um dos milhares de documentos matemáticos que sobreviveram do antigo Iraque – também chamado de Mesopotâmia (ROBSON, 2002, p. 106).

Segundo Eves (2004) e Boyer (2012), um dos principais tabletes de argila da Babilônia estudado é exatamente Plimpton 322. Este tem escritas que foram realizadas no período Babilônico Antigo (entre 1900 a.C. e 1600 a.C.). Contudo, Eleanor Robson (2001) sugere que a Plimpton 322 teria sido elaborada entre 1822 a.C. e 1784 a.C.

Os primeiros a analisarem e realizarem estudos sobre este tablete e outros tabletes babilônicos foram o matemático e historiador austro-estadunidense Otto Edouard Neugebauer (1899-1990) e o assiriologista (estudo arqueológico) americano Abraham Sachs (1915-1983), que publicaram um livro no ano de 1945.

Segundo Robson (2002), a tábua de argila recebeu a identificação Plimpton 322 devido ao seu primeiro proprietário ocidental, George Arthur Plimpton (1835-1936). Ele fez uma doação de toda a sua coleção livros e objetos históricos para a Universidade de Columbia, Nova Iorque, em meados da década de 1930. Ele teria comprado o tablete do comerciante Edgar James Banks, por volta de 1922, por dez dólares. Banks relatou que a placa de argila foi escavada em um sítio arqueológico chamado Senkereh no sul do Iraque (antiga Larsa). Na Universidade de Columbia, a placa recebeu a identificação de “Plimpton 322”.

A tábua Plimpton 322 (figura 3) não está completa, “perdeu-se um pedaço de todo o seu lado esquerdo devido a uma rachadura, além disso, posteriormente foi danificada com a perda de uma lasca profunda em seu lado direito, à altura da metade e por um descamamento no canto superior esquerdo.” (EVES, 2004, p. 63).

Figura 3 - Plimpton 322

Fonte: http://rcristo.com.br/2018/11/13/conheca-plimpton-322

> Exames revelaram a existência de cristais de uma cola moderna ao longo da rachadura do lado esquerdo. Isso sugere que a tábula provavelmente estava inteira quando foi desenterrada e que posteriormente se quebrou, tendo havido uma tentativa de colar as duas partes que, por fim acabaram se separando. Assim, é possível que a parte que falta ainda exista mas que, como uma agulha num palheiro, perdeu-se em algum lugar entre as coleções dessas tábulas antigas. (EVES, 2004, p.63).

Uma das hipóteses para que os babilônios utilizassem a base 60 é que sessenta é o menor número com doze divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60 e deste modo, muitas frações poderiam ser representadas de uma forma mais simples (ABDULAZIZ, 2010).

Os estudos de Neugebauer e Sachs conduzem à “tradução” dos caracteres cuneiformes da tabela da Plimpton 322 (figura 4). Eles afirmam que não é certa a origem do tablete, sendo sugerido por Mendelsohn que a mesma se tratava de uma “conta comercial” (NEUGEBAUER e SACHS, 1945). Eles reconhecem que a interpretação do texto é difícil e pode não ter uma correspondência exata com a tradução realizada. O problema da tradução refere-se também aos títulos que aparecem no início de cada coluna.

Figura 4- Tradução da Plimpton 322 em numeração sexagesimal por Neugebauer e Sachs

Obverse	I	II	III	IV
1	[*ta-k*]i-*il-ti ṣi-li-ip-tim*	íb-si₈ sag	íb-si₈ *ṣi-li-ip-tim*	mu-bi-im
2	[*ša in-*]*na-as-sà-ḫu-ú-*[*m*]*a* sag	*i-. . .-ú*		
3	[1,59],15	1,59	2,49	ki-1
4	[1,56,56],58,14,50,6[105],15	56,7	3,12,1[108]	ki-2
5	[1,55,7],41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	ki-3
6	[1],5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	ki-4
7	[1],48,54,1,40	1,5	1,37	ki[-5]
8	[1],47,6,41,40	5,19	8,1	[ki-6]
9	[1],43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	ki-7
10	[1],41,33,59,3,45	13,19	20,49	ki-8
11	[1],38,33,36,36	9,1[106]	12,49	ki-9
12	[1],35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	ki-10
13	[1],33,45	45	1,15	ki-11
14	[1],29,21,54,2,15	27,59	48,49	ki-12
15	[1],27,3,45	7,12,1[107]	4,49	ki-13
16	[1],25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	ki-14
17	[1],23,13,46,4[0]	56	53[109]	ki[-15]

Fonte: Neugbauer e Sachs (1945, p. 38)

Como pode ser observado na figura 3, o tablete Plimpton 322 possui três colunas quase completas. Entretanto, existe uma quarta incompleta, é uma coluna de caracteres à direita, ao longo da parte quebrada.

A figura 5 indica uma transcrição da Plimptom 322 para o sistema de numeração decimal e, o que está em vermelho, seriam algumas discordâncias em relação ao que estava escrito. A tabela apresentaria alguns pequenos erros.

Na figura 5, temos “u” e “l”, representando os catetos, e “d”, a hipotenusa.

Figura 5 - Transcrição do tablete Plimpton 322 para a numeração decimal

row	u	d	d^2	u^2	$L = d^2 - u^2$	$\ell = \lfloor\sqrt{L}\rfloor$	ℓ^2
1	119	169	28561	14161	14400	120	14400
2	3367	11521	132733441	11336689	121396752	11018	[121396324]
3	4601	6649	44209201	21169201	23040000	4800	23040000
4	12709	18541	343768681	161518681	182250000	13500	182250000
5	65	97	9409	4225	5184	72	5184
6	319	481	231361	101761	129600	360	129600
7	2291	3541	12538681	5248681	7290000	2700	7290000
8	799	1249	1560001	638401	921600	960	921600
9	541	769	591361	292681	298680	546	[298116]
10	4961	8161	66601921	24611521	41990400	6480	41990400
11	45	75	5625	2025	3600	60	3600
12	1679	2929	8579041	2819041	5760000	2400	5760000
13	25921	289	83521	671898241	-671814720	[-]	[-]
14	1771	3229	10426441	3136441	7290000	2700	7290000
15	56	53	2809	3136	-327	[-]	[-]

Fonte: https://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html

De acordo com Eves (2004), é complicado esclarecer a exceção da segunda linha, entretanto, nos demais casos, já se pode esclarecer. Existe a hipótese de, no sistema sexagesimal, a escrita do 9, quando deveria ser 8, pode ser um erro com o estilo ao se escreverem esses números em escrita cuneiforme. Assim, o número na linha 13 (25921) é o quadrado do valor correto, ou seja, o quadrado de 161, e, o da última linha, 53, é metade do valor correto, que seria 106.

> Um terno de números inteiros, como (3, 4, 5), cujos termos são lados de um triângulo retângulo, é chamado terno pitagórico. Se o único fator inteiro positivo comum aos elementos de um terno pitagórico é a unidade, então esse terno se diz primitivo. Assim (3, 4, 5) é um terno pitagórico primitivo, ao passo que (6, 8,10) não é. Um dos grandes feitos matemáticos dos gregos, posterior muitos séculos à tábula Plimpton 322, foi mostrar que todos os ternos pitagóricos primitivos (a, b, c) são dados parametricamente por
>
> $a = 2uv \qquad b = u^2 - v^2 \qquad e \qquad c = u^2 + v^2$
>
> onde u e v são primos entre si, um é par o outro é impar e u>v . Assim, para u=2 e v=1, obtemos o terno primitivo a=4, b=3 e c=5. (EVES, 2004, p. 64-65).

A representação dos dados da tábua por $a = 2uv$; $b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$, sendo $u > v$, u e v primos entre si (um, par; outro, impar), está disposta no quadro 1.

Quadro 1- “Ternas Pitagóricos” do tablete Plimpton 322
transcritos para a numeração decimal, completando os dados

A	b	C	U	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Fonte: De acordo com Eves (2004, p.65)

Para identificar a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo, destacamos as duas primeiras linhas da tabela. Temos 120, 119 e 169 e, em seguida, 3456, 3367 e 4825. Verifica-se que:

(120)2 + (119)2 = (169)2

(3456)2 + (3367)2 = (4825)2

Desde a primeira publicação sobre a interpretação para a Plimpton 322, por Otto Neugebauer e Abraham Sachs, em 1945, vários pesquisadores realizaram estudos sobre a famosa placa de argila, sugerindo outros procedimentos na sua construção.

As discussões sobre o significado do texto da Plimpton 322 não chegam a um consenso. Eleanor Robson publicou um artigo em 2001 no qual discorda sobre os estudos que afirmam que a tábua seja trigonométrica, porque se conhece o conceito de ângulo no período da Antiga Babilônia. Contudo, em um estudo, relativamente recente, Mansfield e Wildberger (2017) indicam que a Plimpton 322 se constitui em uma tabela trigonométrica baseada na proporção. Os autores concordam que a tabela “é um dos artefatos científicos mais sofisticados do mundo antigo, contendo 15 fileiras de triplas pitagóricas aritmeticamente complicadas.” (MANSFIELD e WILDBERGER, 2017, p. 395).

Para estes estudiosos, existe uma complexidade maior na tabela e ela não pode ser considerada como um texto escolar, como era propagado, mas sim uma tabela trigonométrica construída de um modo desconhecido até então. Defendem, ainda, que a tabela pode ter sido desenvolvida com base em um retângulo e não num triângulo retângulo.

Deve ficar claro que a tabela não contém uma demonstração do "Teorema de Pitágoras", mas fica evidente o saber matemático dos povos antigos. Independentemente da forma como foi construída, a Plimpton 322 indica um conhecimento avançado e confirma que, entre os babilônios, era conhecida a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo ou da diagonal, base e altura em um retângulo – o que se traduz em um tipo semelhante de figuras.

Não se sabe ao certo a utilização dessas tabelas. Fica evidente que a análise da Plimpton 322 mostra os exames minuciosos que algumas tábulas matemáticas babilônicas antigas devem ser submetidas.

Há evidências do conhecimento do teorema na China através do documento matemático Chou Pei Suang Ching. A data é incerta, alguns indicam 1200 a.C, outros, o século I de nossa era. Contudo, o "Teorema de Pitágoras" aparece neste documento – "um teorema que os chineses tratavam algebricamente." (BOYER, 2012, p.133).

Segundo Eves (2004) e Boyer (2012), uma demonstração do teorema seria a que consta no Livro I dos Elementos de Euclides, escritos por volta de 300 a.C., relativa à proposição 47, sendo o diagrama (figura 6) denominado "capelo franciscano", "moinho de vento", "cauda de pavão" ou "cadeira de noiva", pois a forma do diagrama remete a essas imagens.

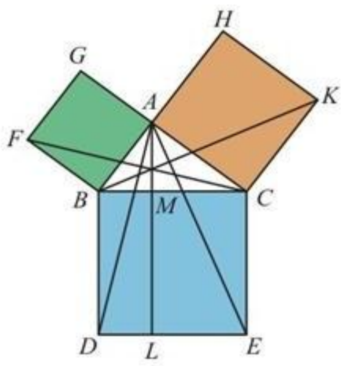
Nos Elementos, livro I, temos a proposição:

Proposição 47

Em triângulos retângulos, o quadrado construído sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados construídos sobre os outros lados que fazem o ângulo reto . (EUCLIDES, 1855).

A demonstração da proposição I-47 resume-se em determinar a igualdade entre o quadrado ABFG e o retângulo BDLM (figura 6). A demonstração se fundamenta em definição, axioma e outras proposições anteriores.

Figura 6 - Representação utilizada por Euclides



Fonte: http://obaricentrodamente.com/2011/04/o-teorema-de-pitagoras-segundo-euclides.html

A recíproca é a Proposição I – 48:

Se o quadrado feito sobre um lado de um triângulo for igual aos quadrados dos outros dois lados; o ângulo compreendido por estes dois lados será reto. (EUCLIDES, 1855).

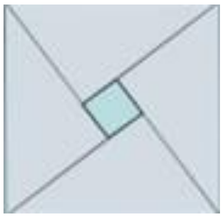
1.2 Algumas demonstrações do “Teorema de Pitágoras” que podem ser trabalhadas em sala de aula

1.2.1 – A demonstração de Bhaskara Akaria (1114-1185)

Bhaskara Akaria nasceu na cidade de Vijaijapura, na Índia. Foi o mais importante matemático do século XII em seu país e considera-se que seu livro mais conhecido é “Lilavati”. Neste, encontram-se os denominados “ternos pitagóricos”. O nome do livro é uma homenagem à filha de Bhaskara (EVES, 2004; BOYER, 2012).

Segundo Eves (2004), Bhaskara realizou uma prova utilizando a decomposição do quadrado sobre a hipotenusa em quatro triângulos, sendo cada um deles congruentes ao triângulo dado, mais um quadrado de lado igual à diferença entre os catetos do triângulo dado (figura 7). Bhaskara não ofereceu nenhuma explicação para o seu procedimento, colocou somente a palavra “Veja”.

Figura 7 - Representação utilizada por Bhaskara

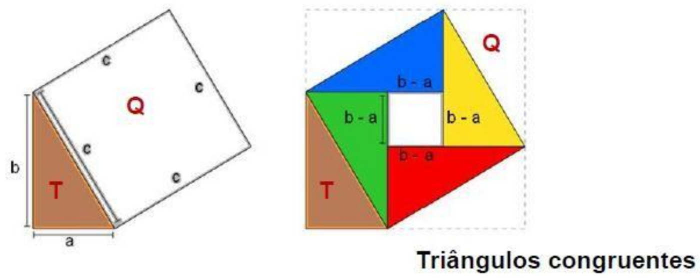


Fonte:www.osfanstasticosnumerosprimos.com.br/011-estudos-146-teorema-de-pitagoras-por-bhaskara

Esta é uma prova que se fundamenta na área das figuras. Podemos verificar que sendo “c” a hipotenusa e “a” e “b” os catetos do triângulo, chegaríamos a:

$$c^2 = 4.\frac{ab}{2} + (b-a)^2 \ \text{ ou } \ c^2 = a^2 + b^2$$

Figura 8 - Prova do teorema



$A_Q = c^2 \longrightarrow A_Q$ = área dos triângulos + área do quadrado

$$A_Q = 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2 = 4\frac{ab}{2} + b^2 - 2ab + a^2$$

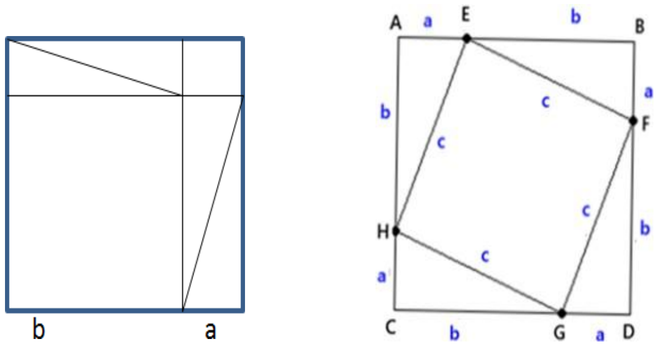
$$A_Q = b^2 + a^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Fonte: Elaborado por Elenice Zuin (2019)

1.2.2 – Demonstração atribuída a Pitágoras

Figura 9 – Representação geométrica da demonstração



Fonte: Ilustração de Elenice Zuin (2019)

Sejam o quadrado ABCD, cujo lado tem a medida "a + b", e o quadrado EFGH, inscrito no quadrado ABCD, cujo lado tem a medida "c" (figura 9).

A área do quadrado ABCD é (a + b) (a + b) = $(a + b)^2$

As áreas dos triângulos AEH, EBF, FDG e GCH são iguais a $\frac{a.b}{2}$

A área do do quadrado EFGH é c^2

Deste modo, temos que

a área do quadrado ABCD = área dos 4 triângulos + área do quadrado EFGH

$$\text{área do quadrado ABCD} = 4.\frac{a.b}{2} + c^2 = 2ab + c^2$$

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

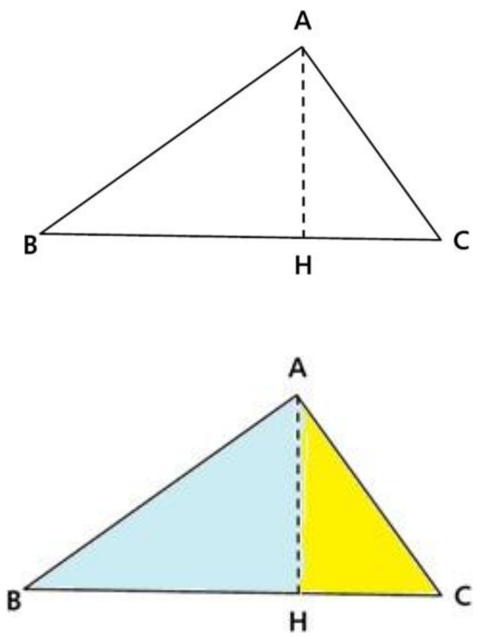
(ZUIN, 2019).

1.2.3 – Uma prova através de triângulos semelhantes

Nesta prova, a fundamentação está na proporcionalidade dos lados de dois triângulos semelhantes. Em outras palavras, em dois triângulos semelhantes a proporção entre dois lados quaisquer é a mesma.

Seja o triângulo retângulo em A. Traçando a altura relativa ao vértice A, obtemos o ponto H no lado BC (figura 10).

Figura 10 – Triângulo retângulo ABC



O triângulo ABH é semelhante ao triângulo ABC, pois

- o ângulo ABC = ângulo AHB = 90º (já que AH é a altura relativa ao lato BC)

- o ângulo ABH é comum aos dois triângulos, logo, o ângulo BAH = ângulo ACB

critêrio AAA (ângulo, ângulo, ângulo)

O triângulo ACH é semelhante ao triângulo ABC, pois

- o ângulo ABC = ângulo ahc = 90º (já que AH é a altura relativa ao lato BC)

- o ângulo ACH é comum aos dois triângulos, logo, o ângulo CAH = ângulo ABC

critêrio AAA (ângulo, ângulo, ângulo)

Deste modo, temos que:

- em relação aos triângulos ABC e ABH

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \quad \text{e} \quad (AB)^2 = BC\,.\,BH \quad (1)$$

- em relação aos triângulos ABC e ACH

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \quad \text{e} \quad (AC)^2 = BC\,.\,CH \quad (2)$$

Somando (1) + (2),

$$(AB)^2 + (AC)^2 = BC\,.\,BH + BC\,.\,CH$$

$$(AB)^2 + (AC)^2 = BC\,(BH + CH)$$

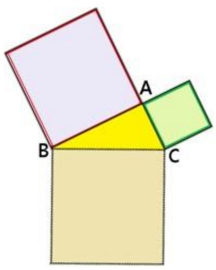
Mas $BH + CH = BC$, logo

$$(AB)^2 + (AC)^2 = BC\,(BC)$$

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

Ou seja, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma das medidas dos quadrados dos catetos, sendo representada geometricamente pela figura a seguir.

Figura 11 – Representação geométrica do “Teorema de Pitágoras”



Fonte: Ilustração de Elenice Zuin (2019)

CAPÍTULO II

O enfoque à História da Matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Base Nacional Comum Curricular

Neste capítulo, focaremos como a História é indicada nos PCN de Matemática e na BNCC, com o intuito de colaborar no processo de formação inicial e continuada do professor de Matemática.

Os PCNs para o 3º e 4º cicios do Ensino Fundamental (hoje quatro últimos anos do Ensino Fundamental) foram publicados oficialmente em 1998 pelo Ministério da Educação. Eram destinados à formação inicial e continuada de professores, abrangendo todas as disciplinas.

Para a Matemática, o documento explicita:

> [...] o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação. (BRASIL, 1998, p.15).

Nesta citação, vimos o detalhe de compreender o mundo, desse modo, podemos dizer que não é possível entender o presente negando o passado. Nesse sentido, comparece a história para alcançarmos como a Matemática do passado chegou até nós, sendo que, muitas vezes, um determinado tópico foi elaborado e passou por transformações e processos até chegar ao presente.

Segundo os PCN de Matemática, a História

> Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem Matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 1998, p. 23).

Assim destaca-se, novamente, a importância da História da Matemática e ressaltamos que não podemos usá-la somente para a apresentação de fatos ou datas de nascimento de matemáticos.

Uma das características da Matemática, segundo os PCN de Matemática, é que ela formaliza-se como uma compreensão e atuação no mundo do conhecimento. Produz, nessa área do saber, como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.

Mostra-se que a Matemática não está pronta e acabada, ou seja, ela não é um conhecimento imutável e verdadeiro. Deste modo, ela é passível de mudança ao longo do tempo, sendo gravada pela sua História.

Como um recurso,

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p.42).

Assim, vê-se a importância do processo histórico, no qual nos auxilia no ensino/aprendizagem dos tópicos da Matemática escolar, desenvolvidos ao longo do tempo, o que permite perceber que o conteúdo hoje apresentado passou por outras etapas.

> Os conteúdos a serem trabalhados podem estar numa perspectiva mais ampla, ao procurar identificá-los como formas e saberes culturais, cuja assimilação é essencial para que produza novos conhecimentos. (BRASIL, 1998, p. 49).

Os PCN estimulam a utilização da História da Matemática como auxílio para o ensino/aprendizagem da Matemática. Auxilia no esclarecimento de ideias matemáticas que os discentes constroem durante a vida escolar, respondendo a alguns porquês desta disciplina.

Em relação à Base Nacional Comum Curricular – BNCC – publicada em dezembro de 2017, para o Ensino Fundamental, verifica-se que não existe uma orientação mais efetiva para o emprego de uma abordagem histórica da Matemática. Constatam-se breves menções a este recurso.

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a História da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. (BRASIL, 2017, p. 298).
>
> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. (BRASIL, 2017, p. 299).

Embora a referência à História seja pontual, fica evidente a necessidade da utilização da História da Matemática como auxílio no ensino/aprendizagem da disciplina. A abordagem histórica possui um papel relevante, dando aos alunos outros conhecimentos, propiciando para que tenham uma visão mais ampla da origem dos conteúdos vistos na atualidade.

Em relação às competências gerais a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental, a BNCC destaca que se deve:

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2017, p. 9).

Neste sentido, poderia se vislumbrar a questão histórica em uma dimensão mais ampla, inclusive, em relação aos saberes matemáticos. No tocante, especificamente, às competências a serem desenvolvidas na Matemática, o documento sinaliza:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p. 267).

Neste contexto, podemos dizer que existe um direcionamento que se pauta na discussão da pluralidade cultural, ainda que isto não seja um destaque. Podemos verificar que a dimensão dada à História da Matemática é maior nos PCN de Matemática do que na BNCC, embora, no primeiro documento, esta orientação não seja extensa e nem haja indicações de leituras para os professores, como evidencia Zuin (2003).

Capítulo III

O “Teorema de Pitágoras” nos livros didáticos

Apresentamos, neste capítulo, como o tema foi desenvolvido nos dez livros analisados. Selecionamos cinco livros publicados antes dos PCN’s e outros cinco a partir de 1998, indicados a seguir:

1. MAEDER, Algacyr Munhoz. Curso de Matemática. 4ª ed. São Paulo: Melhoramentos, 1948.
2. QUINTELLA, Ary. Matemática para a quarta série ginasial. 46ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1963.
3. MATTA, Edison; SARDELLA, Antônio. Matemática, 8ª série. 1ª. ed. São Paulo: Edi-tora Ática, 1981.
4. BONGIOVANNI, Vicenzo; LAUREANO, José Luiz Tavares; LEITE, Olímpio RudininVissoto. Matemática e Vida, 8ª série. 1ª ed. São Paulo: Ática, 1990.
5. DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; MACHADO, Antônio. Matemática e Realidade, 8ªsérie. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1996.
6. CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI, José Ruy; JUNIOR, José Ruy Giovanni. A Conquista da Matemática. 1ª ed. São Paulo: Editora FTD, 1998.
7. BIGODE, Antônio José Lopes. Matemática hoje é feita assim. São Paulo: FTD, 2000
8. LANNES, Rodrigo; WAGNER, LANNES. Matemática, volume 4. 1ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2001.
9. BIANCHINI, Edwaldo. Matemática: Bianchini, 9º ano. 7ª ed. São Paulo: Moderna, 2011.
10. BALESTRI, Rodrigo e PATARO, Patrícia Moreno. Matemática essencial, 9º ano. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2018.

A análise dos livros foi voltada para averiguar como é tratado o “Teorema de Pitágoras” nessas obras. Verificamos os aspectos metodológicos, abordagem histórica, recursos visuais, exemplos e exercícios propostos.

I) Como é definido o “Teorema de Pitágoras”

Observamos se os autores utilizam, para demonstrar o teorema, as relações métricas no triângulo retângulo ou aplicação de área.

II) Como é o desenvolvimento do conteúdo com relação a abordagem histórica

Em relação à abordagem histórica, o aspecto mais relevante se situa no fato de os autores indicarem, ou não, que a ideia da relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo já era conhecida por outros povos antes da época de Pitágoras.

III) Exercícios propostos e tipos de soluções nos exemplos

Quanto aos exemplos e exercícios incluídos nos livros didáticos, foi verificado se os mesmos são repetitivos, com execução mecânica; se existem problemas contextualizados, nos quais seriam necessários interpretação e equacionamento; se há atividades que levem o aluno a fazer verificações através da álgebra e/ou da geometria ou alguma atividade com material concreto.

IV) Ilustrações do triângulo retângulo

No destaque para a posição do triângulo retângulo, o objetivo é observar se o triângulo é ilustrado em posições diferentes ou se é apresentado sempre de uma mesma forma. Esse é um aspecto relevante, pois, se o triângulo é apresentado apenas na mesma posição, isso pode dificultar o reconhecimento da hipotenusa e dos catetos em triângulos retângulos pelos discentes.

A análise foi pautada em Zuin (2007).

Inicialmente, destacamos o número de páginas de cada livro e quantas páginas são dedicadas ao conteúdo “Teorema de Pitágoras” (quadro 1).

Quadro 1 - Quantidade de páginas destinadas ao “Teorema de Pitágoras”

AUTORES	Páginas totais do livro	Páginas sobre o tema	Percentual de páginas sobre o tema
Maeder (1948)	276	8	2,89%
Quintella (1963)	205	3	1,46%
Sardella e Matta (1981)	216	9	4,16
Bongiovanni; Laureano e Leite (1990)	248	13	5,24%
Dolce; Iezzi e Machado (1996)	237	10	4,21%
Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998)	304	15	4,93
Bigode (2000)	335	16	4,77%
Lannes e Lannes (2001)	208	11	5,28%
Bianchini (2011)	272	10	3,67%
Balestri e Pataro (2018)	304	5	1,64%

Fonte: Elaborado pelos autores

Constatamos que os dois livros analisados, das décadas de 1940 e 1960, dedicavam um número menor de páginas ao “Teorema de Pitágoras”. Os livros analisados, publicados entre 2000 e 2011, possuem um número maior de páginas abordando o referido tópico.

Contudo, pode-se observar que o conteúdo é apresentado em apenas cinco páginas na obra de Balestri e Pataro, de 2018, que é inferior ao primeiro livro analisado, publicado em 1948.

Quanto à definição do “Teorema de Pitágoras” nos livros, identificamos que:

- Maeder, para definição, não utilizou nenhuma ilustração e, para demonstração, usou as relações métricas no triângulo retângulo.
- Quintella, como Maeder, traz somente a definição sem incluir quaisquer ilustrações do triângulo retângulo. Para demonstração, inicia com relação métrica no triângulo retângulo e finaliza com semelhança de triângulos.
- Sardella e Matta indicaram a definição por escrito e utilizaram uma figura. Para demonstração, empregaram as relações métricas.
- Bongiovanni; Laureano e Leite utilizaram fórmula algébrica e demonstraram o teorema através de semelhança de triângulos.
- Dolce; Iezzi e Machado indicaram a definição por extenso e fórmula algébrica; para a demonstração, utilizaram a semelhança de triângulos.
- Castrucci, Giovanni e Giovanni Jr. definem o teorema usando uma figura, a definição por extenso e fórmula algébrica. A demonstração foi apresentada com a utilização de área de figuras.
- Bigode apresentou a definição sem incluir figuras e, a demonstração, e semelhança de triângulos.
- Lannes e Lannes apresentam a definição acompanhada de figura geométrica. Para demonstração, utilizaram área de figuras.
- Bianchini apresenta a definição e uma figura geométrica. Para demonstração, utilizou área de figuras.
- Balestri e Pataro indicaram a definição por extenso, incluindo fórmula algébrica e figura geométrica. Para demonstração, se valeram das relações métricas.

Segundo nosso ponto de vista, a definição do “Teorema de Pitágoras” foi apresenta de uma forma mais simples de ser entendida pelos alunos no livro dos autores

Balestri e Pataro (2018), Castrucci; Giovanni; Giovanni Jr (1998) e Sardella e Matta (1981).

Os autores que fizeram a demonstração do “Teorema de Pitágoras” mais próxima da comumente atribuída a Pitágoras foram:

- Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998), Lannes e Lannes (2001),Bianchini (2011).

Destacamos os livros de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998) e de Lannes e Lannes (2001) em relação à introdução dos números irracionais através do “Teorema de Pitágoras”, a proposta apresentada sobre os números irracionais são diferentes entre os dois livros, pois no primeiro livro existem dois exercícios sobre o assunto, já no segundo os autores relembraram quais são os números naturais, os números negativos, os racionais e em seguida expressou o cálculo da hipotenusa com os catetos de lado 1. Explicou a representação decimal finita e a dízima periódica, assim mostrou que os números que não podem ser escritos em forma de fração são os irracionais. Também demonstrou que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Bigode (2000) iniciou a abordagem do teorema através de uma atividade experimental, com utilização de folha de papel, régua, tesoura e calculadora. A atividade tem o objetivo de mostrar que, em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. Lannes e Lannes (2001) também indicaram três experimentos para se verificar o teorema.

Com relação à demonstração atribuída a Bhaskara, nenhum dos autores utilizou uma demonstração parecida com a dele.

No tocante à aplicação do “Teorema de Pitágoras”, observa-se que o mais comum é a apresentação da altura do triângulo equilátero e da diagonal do quadrado. No entanto, os livros de Bigode (2000) e Lannes e Lannes (2001) são os únicos, entre os demais analisados, que incluem também a distância entre dois pontos para a aplicação do teorema.

No quadro 2, apresentamos a presença de abordagem histórica nos livros analisados. Contudo nem sempre existe uma abordagem consistente no livro, pois, alguns autores acrescentam somente breves notas históricas.

Quadro 2 - Abordagem histórica nos livros analisados

AUTORES	Dados sobre Pitágoras	Menção a outros povos que conheciam a relação entre a hipotenusa e os catetos	Menção ao Plimpton 322
Maeder (1948)	–	–	–
Quintella(1963)	–	–	–
Sardella e Matta (1981)	–	–	–
Bongiovanni; Laureano e Leite (1990)	–	–	–
Dolce; Iezzi e Machado (1996)	–	–	–
Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998)	X	X	–
Bigode (2000)	X	X	–
Lannes e Lannes (2001)	X	X	–
Bianchini(2011)	X	–	–
Balestri e Pataro (2018)	X	X	–

Fonte: Elaborado pelos autores

Entre os dez livros analisados, os que foram editados após a publicação dos PCN’s apresentam algum aspecto histórico sobre o “Teorema de Pitágoras”. Esta inclusão poderia estar relacionada à valorização da história presente nos PCN de Matemática.

Mais particularmente, Bigode (2000) acrescenta notas históricas um pouco mais completas que os outros autores. Indica que, no antigo Egito, os agrimensores empregavam a corda de treze nós, o que leva a crer que conheciam as relações entre a hipotenusa e os catetos a partir de um retângulo de lados 3, 4 e 5. Em outro momento, inclui algumas informações sobre Pitágoras. Bigode, antes de definir o teorema, informa a catalogação de mais de 370 demonstrações para a proposição apresentada.

Lannes e Lannes (2001), em três linhas, relatam que os babilônios conheciam o teorema e, posteriormente, também em três linhas, trazem a seguinte informação: "... o teorema mais famoso da Matemática. Atribuímos a ele o nome de "Teorema de Pitágoras", pois acredita-se que o filósofo grego Pitágoras (±580-500 a.C.) tenha sido a primeira pessoa a demonstrá-lo." (LANNES e LANNES, 2001, p. 9).

Bianchini (2011) faz apenas uma menção a Pitágoras, porém não indica que povos antigos já tinham conhecimento sobre a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

Balestri e Pataro (2018) incluem algumas informações sobre a vida de Pitágoras e indicam que os babilônios e os egípcios tinham conhecimento do Teorema. Mencionam o Papiro do Cairo, encontrado no Egito, que traz nove problemas envolvendo as relações entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

Nos livros analisados, verificamos que, mesmo os que integram uma abordagem histórica, no geral, estas são pequenas notas com um caráter informativo. Apenas Balestri e Pataro (2018) apresentam um exercício que inclui uma informação sobre o Papiro do Cairo e um problema contido neste papiro para que o aluno resolva.

Somente nos livros de Bigode (2000), Lannes e Lannes (2001) e Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr (1998) é indicada a corda de 13 nós, utilizada pelos egípcios.

Nenhum dos livros analisados fez alguma menção ao tablete de argila Plimpton 322, o qual indica que os babilônios já tinham conhecimento das relações entre a hipotenusa e os catetos em um triângulo retângulo. Em nenhum dos livros, foram apontados outros povos, além dos egípcios e dos babilônios, que já conheciam esta relação.

No quadro 3, indicamos o número de exemplos e exercícios, a inclusão de exercícios que envolvem a geometria e atividades com material concreto presentes nas obras analisadas.

Quadro 3 - Exemplos e exercícios propostos sobre o “Teorema de Pitágoras”

AUTORES	Exemplos	Exercícios propostos	Uso da geometria	Material concreto
Maeder (1948)	5	24	_	–
Quintella(1963)	2	50	_	–
Sardella e Matta (1981)	5	53	X	–
Bongiovanni; Laureano e Leite (1990)	0	27	X	–
Dolce; Iezzi e Machado (1996)	0	34	X	–
Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998)	5	37	X	–
Bigode (2000)	3	36	X	X
Lannes e Lannes (2001)	3	8	X	X
Bianchini(2011)	1	17	X	X
Balestri e Pataro (2018)	2	25	X	X

Fonte: Elaborado pelos autores

Quanto aos exemplos, pelo quadro 3, verificamos que os dez livros incluem poucos exemplos, com exceção de Maeder (1948), Sardella e Castrucci(1981) e Castrucci; Gionvanni e Giovanni Júnior (1998). Em relação aos exercícios propostos, apenas o livro de Lannes e Lannes (2001) contém um número menor de exercícios. Os autores que apresentaram problemas contextualizados foram: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998);, Bigode (2000), Lannes e Lannes (2001);, Bianchini (2011) e Balestri e Pataro (2018).

Já os autores Maeder (1948) e Quintella(1963) não utilizaram nos exercícios figuras geométricas.

Os autores Sardella e Matta (1981), Bongiovanni; Laureano e Leite (1990) e

Dolce; Iezzi e Machado (1996) utilizaram nos exercícios integração de geometria e aplicação de fórmula geométrica.

A inserção de alguns exercícios que envolvem o uso de calculadora está presente em Bianchini (2011), Lannes & Lannes (2001), Bigode (2000) e Balestrie e Pataro (2018).

Os materiais concretos utilizados pelos autores foram:

-Bigode (2000) utilizou folha de caderno para recortar um triângulo retângulo e somar os quadrados das medidas dos catetos deste triângulo e observar o resultado. Usou calculadora para calcular raiz quadrada, ambas as atividades foram individuais.

-Lannes e Lannes (2001) utilizaram tabuleiro quadrado, cartolina para montar um quebra cabeça e mostrar o Teorema. Em outra atividade utilizaram caixa de papelão quadrados de mesma espessura e colocaram areia, em seguida tiraram a areia que estava no quadrado dos lados dos catetos e colocaram no quadrado formado pela medida da hipotenusa, assim enchendo todo o quadrado oriundo da medida da hipotenusa. Nesta atividade utilizaram também cola, tesoura. Em uma terceira situação foi utilizado a calculadora para calcular raiz quadrada. Todas as situações foram individuais.

- Bianchini (2011) utilizou calculadora para descobrir valores de catetos em dupla a atividade. Também utilizou papel quadriculado para desenhar triângulo retângulo.

-Balestri e Pataro (2018) utilizaram computador para calcular raiz quadrada, esta atividade foi individual.

Ressaltamos que Bianchini (2011), Lannes & Lannes (2001), Bigode (2000) e Balestrie e Pataro (2018) também incluem alguns exercícios com uso de calculadora, que é um diferencial em relação aos demais.

No quadro 4, indicamos como foi realizada a integração de ilustrações dos triângulos retângulos, nos livros didáticos analisados, em relação à sua posição. Consideramos que o fato de o triângulo ser apresentado em posições diversificadas auxilia o reconhecimento do triângulo retângulo, da hipotenusa e dos catetos.

Quadro 4 – Apresentação do triângulo retângulo em diversas posições

AUTORES	Uso do triângulo retângulo em diversas posições
Maeder (1948)	Três triângulos numa mesma posição
Quintella (1963)	Um exemplo e os 50 exercícios não possuem nenhuma ilustração de triângulo.
Sardella e Matta (1981)	Diversas posições do triângulo
Bongiovanni; Laureano e Leite (1990)	Triângulo retângulo em uma única posição
Dolce; Iezzi e Machado (1996)	Diversas posições do triângulo
Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998)	Diversas posições do triângulo
Bigode (2000)	Diversas posições do triângulo
Lannes e Lannes (2001)	Diversas posições do triângulo
Bianchini (2011)	Vários posicionamentos do triângulo retângulo,
Balestri e Pataro (2018)	Triângulos em várias posições diferentes

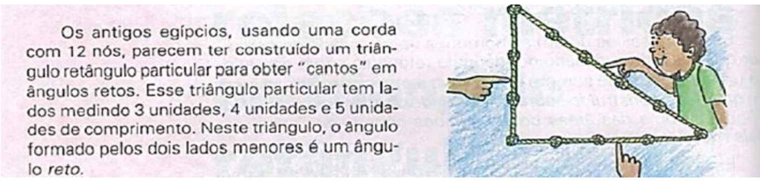
Fonte: Elaborado pelos autores

Pelo quadro 4, identifica-se que, nos livros analisados publicados a partir de 1996, são incluídas ilustrações de triângulos retângulos em várias posições, com exceção de Sardella e Matta (1981).

Ao situarmos as demonstrações do teorema, os autores Maeder (1948), Quintella (1963), Sardella e Matta (1981) e Balestri e Pataro (2018) utilizaram-se das relações métricas no triângulo retângulo para demonstrar o "Teorema de Pitágoras". No entanto, os autores, Bongiovanni (1990), Dolce; Iezzi e Machado (1996) e Bigode (2000) utilizaram semelhança de triângulos. Já Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998), Lannes e Lannes (2001), e Bianchini (2011) usaram área de figura para a demonstração do teorema. Deste modo, os autores realizam a demonstração de formas distintas.

No livro A conquista da Matemática, de Castrucci; Giovanni e Giovanni Jr. (1998), percebe-se um equívoco quando os autores citam que os egípcios utilizavam a corda de 12 nós (figura 12), o correto é a corda de 13 nós. Tal erro supõe a contagem apenas dos nós aparentemente visíveis, contudo, o 13º nó se sobrepõe ao 1º nó, para formar o triângulo de lados 3, 4 e 5.

Figura 12 - Corda de nós



Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998, p.196)

De um modo geral, foi possível verificar que, no tocante às obras analisadas o "Teorema de Pitágoras" foi um conteúdo que permaneceu nos livros didáticos.

Considerações finais

Buscamos evidenciar alguns aspectos históricos relacionados ao “Teorema de Pitágoras” e apresentar como o referido teorema se apresenta em dez livros didáticos. Não tivemos como objetivo esgotar o assunto. Existem centenas de provas para o teorema e algumas delas podem ser incluídas em atividades para os alunos. Apresentamos algumas demonstrações que podem ser trabalhadas em sala de aula, inclusive com adaptações para serem utilizados materiais manipuláveis.

No apêndice, trazemos algumas informações sobre o paradidático “Descobrindo o “Teorema de Pitágoras”” de Luiz Márcio Imenes. A edição analisada é do ano de 1994, contudo, no mercado, existe edição mais recente. Nosso intuito foi indicar um material que apresenta outros desdobramentos para o ensino e a aprendizagem deste tópico.

Esperamos que os nossos apontamentos sejam um ponto de partida para que os professores possam ter mais conhecimentos sobre o tema e enriquecerem suas aulas.

REFERÊNCIAS

ABDULAZIZ, Abdulrahman A. The Plimpton 322 Tablet and the babylonian method of generating pythagorean triples. Mathematics: History and Overview, Cornell University, 2010. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1004.0025. Acesso em: 20 nov. 2020.

BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução de Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática - 3º e 4º ciclos do En-sino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica, 2017.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

ELEMENTOS DE EUCLIDES. Dos seis primeiros livros, do undecimo e duode-cimo da versão latina de Frederico Commandino. Coimbra: Imprensa da Univer-sidade, 1855. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html. Acesso em: 8 mar. 2019.

IMENES, Luiz Márcio. Descobrindo o "Teorema de Pitágoras". 10. ed. São Paulo: Scipione, 1994.

MANSFIELD, Daniel F.; WILDBERGER, Norman J. Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. Historia Mathematica, v. 44, n. 4, p. 395-419, nov. 2017.

PÉREZ, Miguel A. Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes. Madrid: Vision Libros, 2009.

ROBSON, Eleanor. Words and pictures: new light on Plimpton 322. American Mathematical Monthly, 109 (2), p.105-120, feb. 2002.

ROBSON, Eleanor. Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322. Historia Mathematica, v. 28, n.3, p.167-206, aug. 2001.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Tópicos de História da Matemática. Belo Horizonte: PUC Minas, 2019. (texto digitado)

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Livros didáticos como fontes para a escrita da História da Matemática Escolar. Guarapuava: SBHMat, 2007.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. História da Matemática: considerações no campo educacional. ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2003, Belo Horizonte. Anais [...] (CD-Rom). Belo Horizonte: SBEM-MG, 2003.

LIVROS DIDÁTICOS

BALESTRI, Rodrigo; PATARO, Patrícia Moreno. Matemática essencial, 9º ano. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

BIANCHINI, Edwaldo. Matemática: Bianchini, 9º ano. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BIGODE, Antônio José Lopes. Matemática hoje é feita assim – 8ª série. São Paulo: FTD, 2000.

BONGIOVANNI, Vicenzo; LAUREANO, José Luiz Tavares; LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto. Matemática e Vida, 8ª série. 1. ed. São Paulo: Ática, 1990.

DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; MACHADO, Antônio. Matemática e Realidade, 8ª série. 3. ed. São Paulo: Atual, 1996.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. Matemática e realidade – 8ª série. São Pauilo: Atual, 1996.

LANNES, Rodrigo; WAGNER, LANNES. Matemática. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2001. v. 4.

MAEDER, Algacyr Munhoz. Curso de Matemática – 4ª série ginasial. 4. ed. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1948.

QUINTELLA, Ary. Matemática para a quarta série ginasial. 46. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional,1963.

SARDELLA, Antônio; MATTA, Edison da. Matemática, 8ª série. São Paulo: Ática, 1981

APÊNDICE B

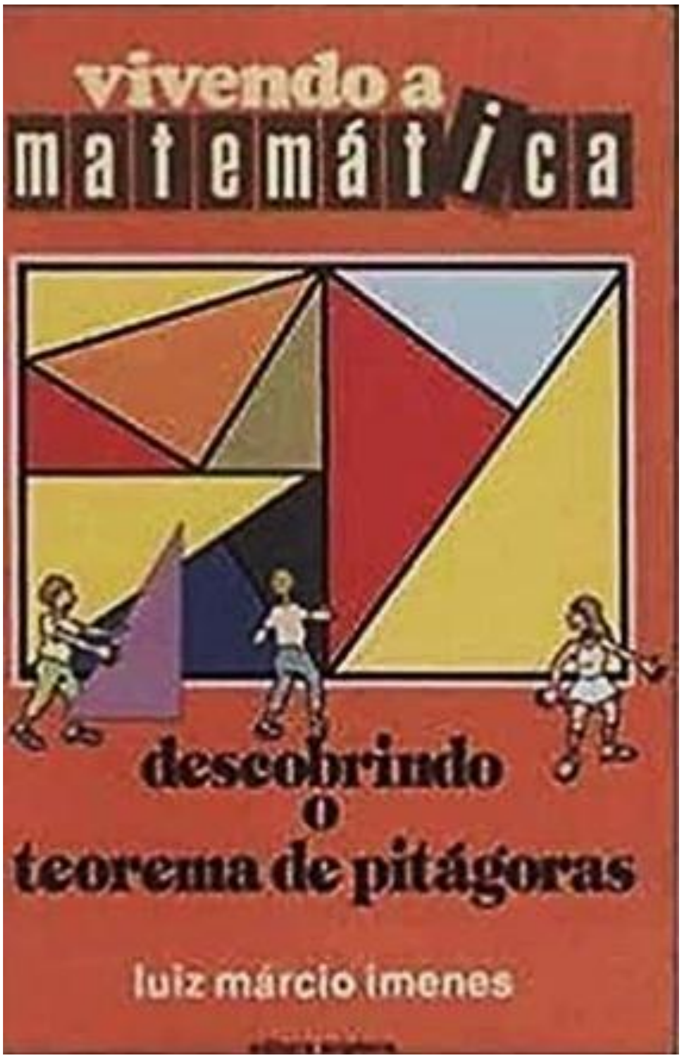
IMENES, Luiz Márcio. Descobrindo o “Teorema de Pitágoras”. 10. ed, São Pau-lo: Scipione, 1994.

No livro há vinte e um tópicos distribuídos da seguinte maneira:

- O primeiro bate papo
- Um quebra-cabeça diferente
- A construção do quebra-cabeça
- Vamos montar o quebra-cabeça
- Uma relação entre áreas
- Em linguagem matemática
- A tesoura do telhado e o “Teorema de Pitágoras”
- O triângulo retângulo e o mestre de obras
- O esquadro dos arquitetos egípcio
- Vamos construir um esquadro egípcio?
- Pitágoras e a Escola Pitagórica
- A genialidade dos pitagóricos
- O detetive e a Matemática
- Usando o método dedutivo
- 370 demonstrações diferentes
- Outro modo de ver as coisas

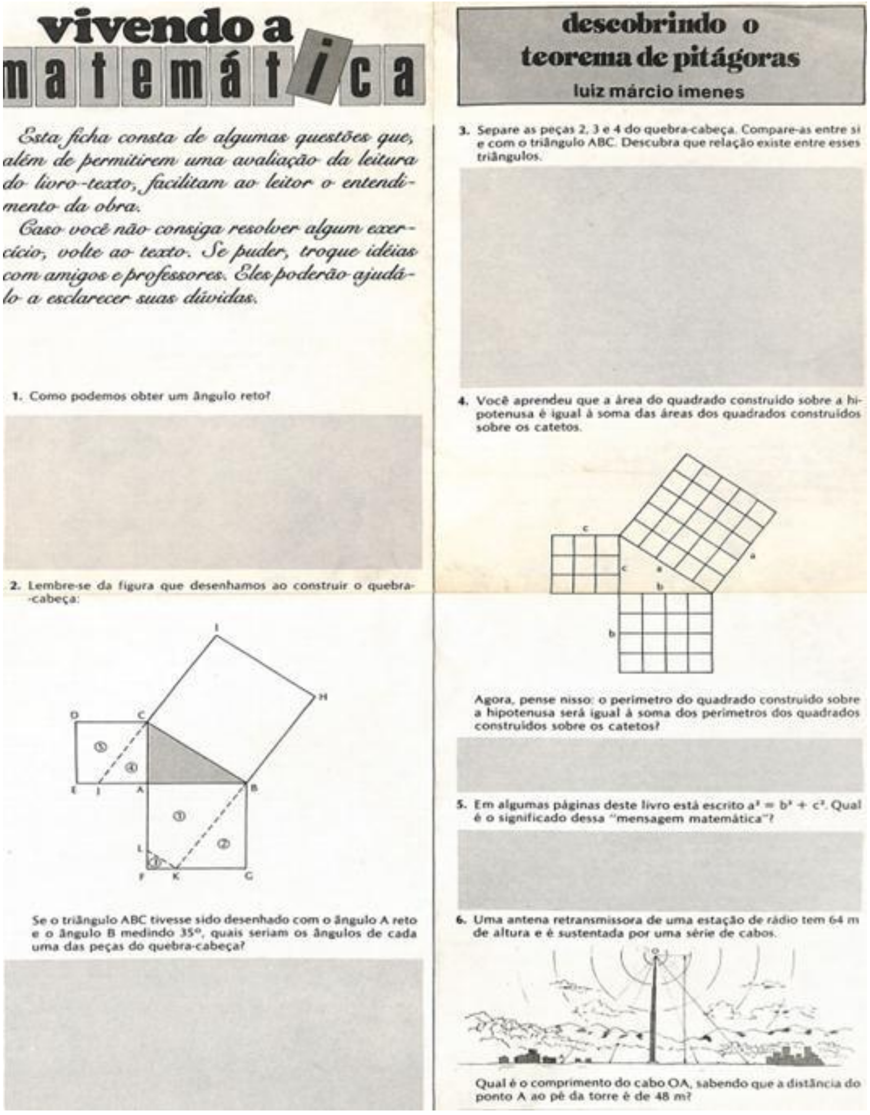
- Os números pitagóricos
- A diagonal do quadrado
- Raízes quadradas em espiral
- A importância da Matemática - Para você ler um pouco mais...

Figura 12 – Capa do paradidático “Descobrindo o “Teorema de Pitágoras”” (1994)



Fonte: Imenes (1994)

Figura 13 - Ficha de questões



vivendo a matemática

Esta ficha consta de algumas questões que, além de permitirem uma avaliação da leitura do livro-texto, facilitam ao leitor o entendimento da obra.

Caso você não consiga resolver algum exercício, volte ao texto. Se puder, troque idéias com amigos e professores. Eles poderão ajudá-lo a esclarecer suas dúvidas.

1. Como podemos obter um ângulo reto?

2. Lembre-se da figura que desenhamos ao construir o quebra-cabeça:

Se o triângulo ABC tivesse sido desenhado com o ângulo A reto e o ângulo B medindo 35°, quais seriam os ângulos de cada uma das peças do quebra-cabeça?

descobrindo o teorema de pitágoras

luiz márcio imenes

3. Separe as peças 2, 3 e 4 do quebra-cabeça. Compare-as entre si e com o triângulo ABC. Descubra que relação existe entre esses triângulos.

4. Você aprendeu que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Agora, pense nisso: o perímetro do quadrado construído sobre a hipotenusa será igual à soma dos perímetros dos quadrados construídos sobre os catetos?

5. Em algumas páginas deste livro está escrito $a^2 = b^2 + c^2$. Qual é o significado dessa "mensagem matemática"?

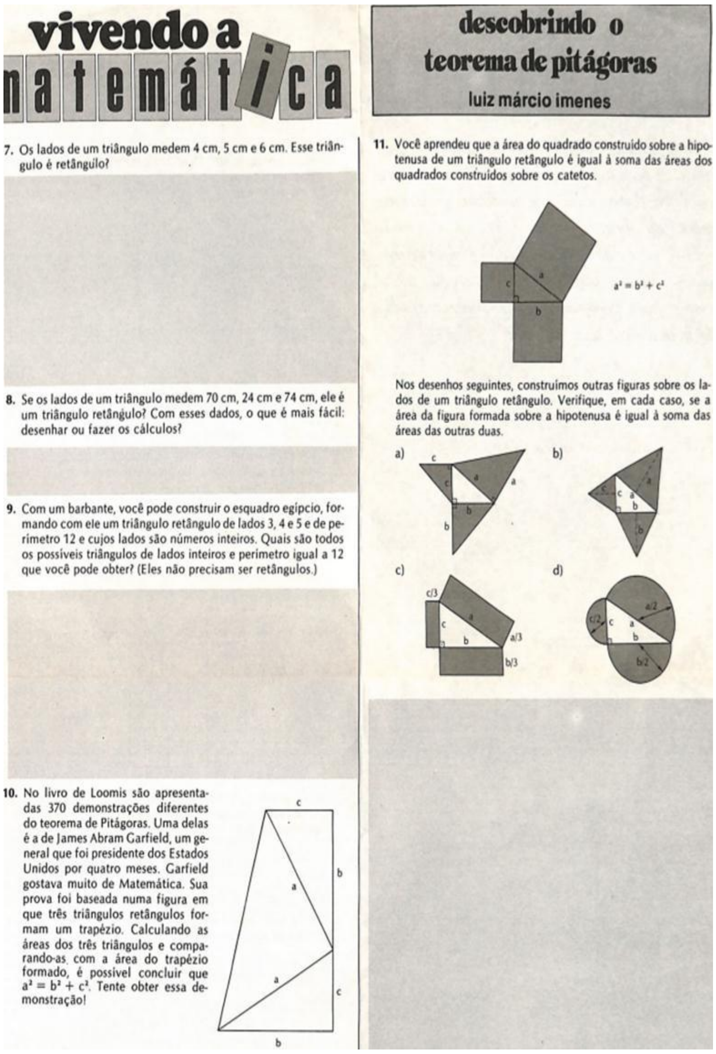
6. Uma antena retransmissora de uma estação de rádio tem 64 m de altura e é sustentada por uma série de cabos.

Qual é o comprimento do cabo OA, sabendo que a distância do ponto A ao pé da torre é de 48 *m*?

Fonte: Imenes (1994)

Segue abaixo a segunda parte da ficha que acompanha o livro. Esta tem o intuito de revisar o conteúdo apresentado no livro.

Figura 14 - Ficha do paradidático “Descobrindo o “Teorema de Pitágoras”” (1994)


vivendo a matemática

7. Os lados de um triângulo medem 4 cm, 5 cm e 6 cm. Esse triângulo é retângulo?

8. Se os lados de um triângulo medem 70 cm, 24 cm e 74 cm, ele é um triângulo retângulo? Com esses dados, o que é mais fácil: desenhar ou fazer os cálculos?

9. Com um barbante, você pode construir o esquadro egípcio, formando com ele um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 e de perímetro 12 e cujos lados são números inteiros. Quais são todos os possíveis triângulos de lados inteiros e perímetro igual a 12 que você pode obter? (Eles não precisam ser retângulos.)

10. No livro de Loomis são apresentadas 370 demonstrações diferentes do teorema de Pitágoras. Uma delas é a de James Abram Garfield, um general que foi presidente dos Estados Unidos por quatro meses. Garfield gostava muito de Matemática. Sua prova foi baseada numa figura em que três triângulos retângulos formam um trapézio. Calculando as áreas dos três triângulos e comparando-as com a área do trapézio formado, é possível concluir que $a^2 = b^2 + c^2$. Tente obter essa demonstração!

descobrindo o teorema de pitágoras

luiz márcio imenes

11. Você aprendeu que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

$a^2 = b^2 + c^2$

Nos desenhos seguintes, construímos outras figuras sobre os lados de um triângulo retângulo. Verifique, em cada caso, se a área da figura formada sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das outras duas.

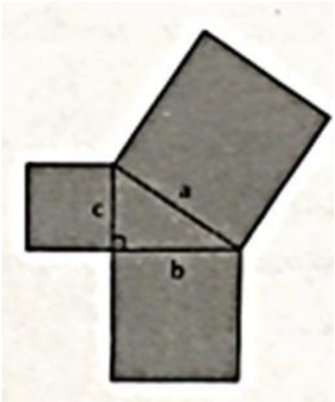
a) b) c) d)

O autor inicialmente mostra, no dia a dia, a formação do ângulo reto, a presença das linhas verticais e horizontais nos objetos e construções, tais como, na parede de uma casa, nas portas, janelas.

Segundo Imenes (1994), nas pirâmides egípcias, nos palácios orientais, nos templos gregos, os arquitetos e construtores usaram o triângulo retângulo, por ter um ângulo reto, sendo utilizado como esquadro.

Em seguida, o autor orienta a montagem de um quebra-cabeça, utilizando lápis, borracha, régua, esquadro, tesoura etc. O objetivo é montar a figura de um triângulo retângulo e os quadrados sobre a hipotenusa e os catetos, como na figura abaixo:

Figura 15 - Quebra cabeça



Fonte: Imenes, 1994

No final da tarefa, colocam-se os quadrados constituídos pelos catetos dentro do quadrado oriundo do lado da hipotenusa e comprova o “Teorema de Pitágoras”.

Imenes (1994), informa sobre a utilização do teorema pelos carpinteiros, para a construção de telhado, ao montar uma tesoura do telhado.