

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Marcelo Mesquita de Souza

**O ENSINO HÍBRIDO – *BLENDED LEARNING* – UMA PROPOSTA PARA O
ESTUDO DE CÔNICAS EM CURSOS SUPERIORES**

Belo Horizonte
2021

MARCELO MESQUITA DE SOUZA

**O ENSINO HÍBRIDO – *BLENDED LEARNING* – UMA PROPOSTA PARA O
ESTUDO DE CÔNICAS EM CURSOS SUPERIORES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares

Coorientador: Prof. Dr. Saulo Furletti

Área de concentração: Matemática

Belo Horizonte

2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

S729e Souza, Marcelo Mesquita de
O ensino híbrido – *Blended Learning* – uma proposta para o estudo de cônicas em cursos superiores / Marcelo Mesquita de Souza. Belo Horizonte, 2021.
162 f. : il.

Orientador: João Bosco Laudares

Coorientador: Saulo Furletti

Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Ensino híbrido - Estudo e ensino (Superior). 2. Geometria analítica - Estudo e ensino (Superior). 3. Ensino auxiliado por computador. 4. Internet na educação - Brasil. 5. Tecnologia da informação. 6. Universidades e faculdades - Pesquisa. I. Laudares, João Bosco. II. Furletti, Saulo. III. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. IV. Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 37:681.3

Ficha catalográfica elaborada por Fernanda Paim Brito - CRB 6/2999

Marcelo Mesquita de Souza

**O ENSINO HÍBRIDO – *BLENDED LEARNING* – UMA PROPOSTA PARA O
ESTUDO DE CÔNICAS EM CURSOS SUPERIORES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Prof. Dr. João Bosco Laudares (Orientador/PUC Minas)

Professor Dr. Saulo Furletti (coorientador)
IFMG

Professor Dr. Dimas Felipe de Miranda
PUC MINAS

Prof^ª. Dr^ª. Eliane Scheid Gazire
PUC MINAS

Belo Horizonte, 05 de março de 2021

*“Para tudo há um tempo, para cada coisa
há um momento debaixo dos céus: [...]*
Tempo para plantar e colher o que se plantou.”
(EC. 3, 1-2)

AGRADECIMENTOS

Primeiro agradeço a Deus pelo dom da vida, pela força, esperança; sendo meu refúgio e minha fortaleza em todos os meus desafios, minhas metas instrucionais e por fazer de mim a pessoa que sou hoje.

Aos meus pais, pela educação, pelo meu caráter e valores que levo para toda a minha vida; pelo exemplo que fica guardado na memória, guiando-me nas decisões mais importantes nos enfrentamentos dos desafios.

À minha esposa Viviane, de quem tive apoio em todos os momentos, principalmente, nas horas em que fiquei ausente para fazer a pesquisa; pela força, conselhos, companheirismo, afeto e exemplo de mãe e mulher.

A meu filho Vitor que representa o melhor de mim e pela sua compreensão das horas em que não pude estar presente.

Ao meu orientador, Dr. João Bosco Laudares, pela amizade e pelo apoio na construção de todas as ideias da dissertação.

Ao professor, Dr. Saulo Furletti, coorientador, pelo apoio, contribuições em toda a empreitada e pelo exemplo de profissional.

À Professora Janine Freitas Mota, que me proporcionou um exemplo de dedicação, eficiência e pelo imensurável espírito de colaboração na empreitada desta dissertação.

E, finalmente, agradeço ao meu colega Reinaldo Jacinto Ezequiel pelo apoio e dedicação durante os dois anos de curso.

RESUMO

Esta dissertação apresenta os resultados de uma pesquisa, na qual se organizou um ambiente de Ensino Híbrido – *Blended Learning*, para a área de Geometria Analítica, restrito ao estudo inicial das cônicas: elipse, parábola e hipérbole. Os sujeitos da pesquisa são constituídos por um grupo de 6 alunos do 2º Período de um curso de Licenciatura Plena em Matemática, em uma Faculdade Pública, interior de MG. O objetivo da pesquisa foi observar e analisar, qualitativamente, a performance destes sujeitos, ao resolverem atividades didáticas, num ambiente de Ensino Híbrido, proposto na pesquisa, visando estudar as cônicas, quanto a formato, conceito, definição, construção, manipulação de suas equações, parâmetros e propriedades, com o auxílio de recurso computacional. Para a construção das atividades foram usados parâmetros do Ensino Híbrido – *Blended Learning* – que é estruturado em espaços, denominados estações. Foram elaboradas sete atividades, divididas em três estações. Em todas as atividades o objetivo foi levar o aluno a aprender, auxiliado pelo software GeoGebra, com algum elemento de controle sobre o tempo, lugar, modo e ritmo do estudo. As atividades propostas nas estações ainda exploraram diversas habilidades, como leitura, visualização e interpretação. A análise qualitativa dos resultados evidenciou a forma como os estudantes realizaram as atividades, facilitando a aprendizagem e tornando-a mais eficaz, sem muita manipulação algébrica e dificuldade de construção de gráficos, devido ao auxílio da tecnologia. O produto da pesquisa realizada foi a formatação de um Caderno de Atividades, disponível no Apêndice desta dissertação, para estudantes, professores e interessados no assunto.

Palavras-chave: *Blended Learning*. *Software GeoGebra*. Cônicas.

ABSTRACT

This dissertation presents the results of a research, in which a Hybrid Teaching environment was organized - Blended Learning, for the area of Analytical Geometry, restricted to the initial study of the conics: ellipse, parabola and hyperbola. The research subjects are constituted by a group of 6 students of the 2nd Period of a Full Degree course in Mathematics, in a Public Faculty, interior of MG. The objective of the research was to analyze and analyze, qualitatively, the performance of these subjects, when solving didactic activities, in a Hybrid Teaching environment, proposed in the research, to study studying the conics, as to a format, concept, definition, construction, manipulation of their equations, parameters and properties, with the aid of computational resources. For the construction of the activities, parameters of the Hybrid Teaching - Blended Learning - were used, which are structured in spaces, called stations. Seven activities were carried out, divided into three seasons. In all activities, the objective was to take the student to learn, aided by the GeoGebra software, with some element of control over the time, place, mode and pace of the study. The activities proposed at the stations also explored various skills, such as reading, visualization and interpretation. The qualitative analysis of the results showed how the students performed the activities, facilitating learning and making it more effective, without much algebraic manipulation and difficulty in building graphs, due to the help of technology. The product of the research carried out was the formatting of an Activity Book, available in the Appendix of this dissertation, for students, teachers and those interested in the subject.

Keywords: Blended Learning. GeoGebra software. Conics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo de Rotação por Estações	33
Figura 2 - Sistema READ 180	35
Figura 3 - Modelo de Rotação - Laboratório Rotacional	36
Figura 4 - Modelo de Rotação- Sala de Aula Invertida	38
Figura 5 - O Ciclo da aprendizagem nas <i>Summit Public School</i>	39
Figura 6 - Cônicas de Dandelin	43
Figura 7- Elipse e seus elementos	44
Figura 8 - Cilindro elíptico construído no Winplot 3D	45
Figura 9 - Geometria - Álgebra	47
Figura 10 - Rastro de elipse	48
Figura 11 - Situação 1- hipérbole	49
Figura 12 - Situação 2 - hipérbole	49
Figura 13 - Situação 3 - hipérbole	49
Figura 14 - Situação 4 - hipérbole	49
Figura 15 - Hipérbole interceptando eixo x.....	50
Figura 16 - Hipérbole interceptando eixo y.....	50
Figura 17 - Parábolas.....	51
Figura 18 - Livros didáticos selecionados.....	52
Figura 19 - Cone e suas interseções.....	54
Figura 20 - Excentricidade das cônicas.....	55
Figura 21 - Excentricidade das cônicas.....	55
Figura 22 - Esquema de Integrações das estações.....	61
Figura 23 - Construção do gráfico da elipse por A6.....	71
Figura 24 - Construção do gráfico da elipse por A2.....	72
Figura 25 - Construção do gráfico da elipse por A3.....	72
Figura 26 - Construção do gráfico da elipse por A1.....	79
Figura 27 - Construção do gráfico da elipse por A3.....	80
Figura 28 - Construção do gráfico da parábola por A6	84
Figura 29 - Bola de futebol Americano- A3.....	88
Figura 30 - Pôr do sol- A2	89
Figura 31 - Galáxia- A4	89
Figura 32 - Dirigível - A4	89

Figura 33 - Catedral de Brasília- hipérbole	90
Figura 34 - Parábolas- Catenária- Gaudí.....	90
Figura 35 - Elipse- Coliseu de Roma	91
Figura 36 - Construção do gráfico da elipse por A5.....	93
Figura 37 - Construção do gráfico da elipse por A1.....	93
Figura 38 - Construção do gráfico da hipérbole por A2	97
Figura 39 - Construção do gráfico da hipérbole A3	98
Figura 40 - Construção do gráfico da hipérbole A6	99
Figura 41 - Construção do gráfico da hipérbole A6	103
Figura 42 - Construção do gráfico da hipérbole A6	105

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Modelos do <i>Blended</i>	32
Quadro 2 - Livros utilizados para análise comparativa do tópico da pesquisa.....	52
Quadro 3 - Questões para análise do conteúdo de elipse abordado nos livros.....	53
Quadro 4 - Valoração das Questões.....	53
Quadro 5 - Resultado da análise do estudo de cônicas nos livros.....	57
Quadro 6 - Estações de aprendizagem.....	60
Quadro 7 - Construção e manipulação de cônicas.....	62
Quadro 8 - Identificação de cônicas na natureza.....	63
Quadro 9 - Estação Manipulação e análise.....	64
Quadro 10 - Orientações gerais.....	67
Quadro 11 - Orientações para Estação 1.....	68
Quadro 12 - Orientações para Estação 2.....	68
Quadro 13 - Orientações para Estação 3.....	69
Quadro 14 - Estudo da elipse.....	70
Quadro 15 - Situações elipse.....	71
Quadro 16 - Situações elipse.....	71
Quadro 17 - Situações elipse.....	72
Quadro 18 - Resposta da questão.....	73
Quadro 19 - Resposta da questão.....	73
Quadro 20 - Resposta da questão.....	73
Quadro 21 - Situações elipse.....	73
Quadro 22 - Situações elipse.....	74
Quadro 23 - Situações elipse.....	74
Quadro 24 - Resposta da questão.....	74
Quadro 25 - Resposta da questão.....	74
Quadro 26 - Resposta da questão.....	74
Quadro 27 - Resposta da questão.....	74
Quadro 28 - Resposta da questão.....	75
Quadro 29 - Resposta da questão.....	75
Quadro 30 - Resposta da questão.....	75
Quadro 31 - Resposta da questão.....	76
Quadro 32 - Situações elipse.....	76

Quadro 33 - Situações elipse	76
Quadro 34 - Resposta da questão.....	77
Quadro 35 - Resposta da questão.....	77
Quadro 36 - Estudo da hipérbole.....	78
Quadro 37 - Situações hipérbole	79
Quadro 38 - Situações hipérbole	79
Quadro 39 - Situações hipérbole	80
Quadro 40 - Situações hipérbole	80
Quadro 41 - Resposta da questão.....	81
Quadro 42 - Resposta da questão.....	81
Quadro 43 - Resposta da questão.....	81
Quadro 44 - Situações hipérbole	82
Quadro 45 - Situações hipérbole	82
Quadro 46 - Situações hipérbole	82
Quadro 47 - Resposta da questão.....	83
Quadro 48 - Estudo da parábola	83
Quadro 49 - Resposta da questão.....	84
Quadro 50 - Resposta da questão.....	85
Quadro 51 - Resposta da questão.....	85
Quadro 52 - Resposta da questão.....	85
Quadro 53 - Resposta da questão.....	85
Quadro 54 - Resposta da questão.....	85
Quadro 55 - Situações hipérbole	86
Quadro 56 - Situações hipérbole	86
Quadro 57 - Resposta das questões	87
Quadro 58 - Resposta das questões	87
Quadro 59 - Identificação de Cônicas na Natureza	88
Quadro 60 - Resposta das questões- Autor	91
Quadro 61 - Resposta das questões	91
Quadro 62 - Resposta das questões	92
Quadro 63 - Resposta das questões	92
Quadro 64 - Estudo da elipse	92
Quadro 65 - Resposta das questões	94
Quadro 66 - Resposta das questões	94

Quadro 67 - Resposta das questões	94
Quadro 68 - Resposta das questões	94
Quadro 69 - Resposta das questões	95
Quadro 70 - Resposta das questões	95
Quadro 71 - Resposta das questões	95
Quadro 72 - Resposta das questões	96
Quadro 73 - Resposta das questões	96
Quadro 74 - Resposta das questões	96
Quadro 75 - Resposta das questões	96
Quadro 76 - Estudo da hipérbole.....	97
Quadro 77 - Resposta das questões	98
Quadro 78 - Resposta das questões	98
Quadro 79 - Resposta das questões	99
Quadro 80 - Resposta das questões	99
Quadro 81 - Resposta das questões	100
Quadro 82 - Resposta das questões	100
Quadro 83 - Resposta das questões	100
Quadro 84 - Resposta das questões	100
Quadro 85 - Resposta das questões	101
Quadro 86 - Resposta das questões	101
Quadro 87 - Resposta das questões	101
Quadro 88 - Resposta das questões	101
Quadro 89 - Resposta das questões	102
Quadro 90 - Resposta das questões	102
Quadro 91 - Estudo da parábola	102
Quadro 92 - Resposta das questões	103
Quadro 93 - Resposta das questões	103
Quadro 94 - Resposta das questões	104
Quadro 95 - Resposta das questões	104
Quadro 96 - Resposta das questões	104
Quadro 97 - Resposta das questões	104
Quadro 98 - Resposta das questões	105
Quadro 99 - Resposta das questões	105
Quadro 100 - Resposta das questões	106

Quadro 101 - Resposta das questões	106
Quadro 102 - Resposta das questões	107
Quadro 103 - Resposta das questões	107
Quadro 104 - Resposta das questões	107
Quadro 105 - Resposta das questões	107
Quadro 106 - Resposta das questões	107
Quadro 107 - Resposta das questões	108
Quadro 108 - Resposta das questões	108
Quadro 109 - Resposta das questões	108
Quadro 110 - Resposta das questões	109
Quadro 111 - Resposta das questões	109
Quadro 112 - Resposta das questões	109
Quadro 113 - Resposta das questões	109
Quadro 114 - Resposta das questões	110
Quadro 115 - Resposta das questões	110
Quadro 116 - Resposta das questões	110
Quadro 117 - Resposta das questões	110
Quadro 118 - Resposta das questões	111
Quadro 119 - Resposta das questões	116
Quadro 120 - Resposta das questões	116

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Conceito de elipse	112
Gráfico 2 - Conceito de hipérbole	113
Gráfico 3 - Conceito de parábola	114
Gráfico 4 - Atividade de síntese da elipse.....	115
Gráfico 5 - Atividade de síntese da hipérbole	116
Gráfico 6 - Atividade de síntese da parábola	117

LISTA DE SIGLAS

EaD - Educação a Distância

GAAL - Geometria Analítica e Álgebra Linear

TIC - Tecnologia da informação e Comunicação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Justificativa do trabalho	20
1.2 Objetivos	22
1.2.1 <i>Objetivo Geral</i>	22
1.2.2 <i>Objetivos Específicos</i>	22
1.3 Objeto e sujeito de estudo	23
1.4 Metodologia	23
1.5 Estrutura da dissertação	24
2 BLENDED LEARNING – ENSINO HÍBRIDO	26
2.1 <i>Blended Learning</i> no Ensino Superior	26
2.2 Modelo industrial e a Personalização do ensino no <i>Blended Learning</i>	27
2.3 O ensino <i>on-line</i> e suas possibilidades	30
2.4 Modelos do <i>Blended Learning</i>	31
2.4.1 <i>Modelo Rotação por Estação</i>	33
2.4.2 <i>Modelo Laboratório Rotacional</i>	35
2.4.3 <i>Sala de Aula Invertida- Flipped Classroom</i>	37
2.5 Planejamento do <i>Blended Learning</i>	38
2.6 Avaliação da aprendizagem no <i>Blended Learning</i>: mudando o foco	40
3 ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA: CÔNICAS	42
3.1 Considerações históricas	42
3.2 Informática Educativa e Ensino das Cônicas	44
4 ANÁLISE DO CONTEÚDO DE CÔNICAS EM LIVROS DIDÁTICOS	52
4.1 Análise do tema – Livro 1	54
4.2 Análise do tema – Livro 2	54
4.3 Análise do tema – Livro 3	56
5 CONSTRUÇÃO DAS ATIVIDADES	58
5.1 <i>Blended Learning</i>- Ensino Híbrido	58
5.2 Modelo de Rotação por Estações	59
6 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DE ITENS	65
6.1 1º Encontro: Desenvolvimento das Estações 1 e 2	67
6.2 2º Encontro: Desenvolvimento da Estação 3	69
6.3 Sequência de atividades	69

6.3.1 Desenvolvimento da Estação 1	66
6.3.2 Desenvolvimento da Estação 2.....	87
6..3.3 Desenvolvimento da Estação 3.....	92
7 SÍNTESE DA ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES.....	111
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS	117
REFERÊNCIAS.....	120
APÊNDICES	124

INTRODUÇÃO

A tecnologia tem mudado os formatos organizacionais que alteram a vida das pessoas, redefinindo a forma de interagir e pensar, trazendo novos horizontes e um novo comportamento humano. Esse pensamento pode ser sintetizado, principalmente, na comunicação digital em termos globais, na evolução dos computadores e na internet.

Nesse contexto tecnológico e de mudanças comportamentais, a escola tem tentado responder com inovações pedagógicas e didáticas, assim, “na mediação entre o saber e os métodos de estudo estão os materiais e artefatos tecnológicos, que os professores utilizam para viabilizar a didática.” (LAUDARES; LACHINI, 2001, p.69).

Moran (2007) propõe estabelecer pontes efetivas entre educadores e meios de comunicação. Uma dessas pontes é a utilização das tecnologias como meios facilitadores do ensino e da aprendizagem.

As tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam, medeiam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade, de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidades e atitudes (MORAN, 2007, p. 162).

Historicamente, a matemática e a educação vêm evoluindo e passando por grandes transformações, quebrando barreiras para a ampliação e desenvolvimento do processo ensino e aprendizagem, sob a influência das tecnologias nas diversas configurações metodológicas educacionais.

Diante da realidade educacional contemporânea, nota-se a necessidade de mudanças metodológicas com o intuito de melhoria da aprendizagem. Investigar é uma forma de construir conhecimento, entretanto, investigar na matemática envolve aspectos problemáticos, como preparar o professor e o aluno para tal tarefa (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

Assim, as dificuldades enfrentadas pelos estudantes no aprendizado de matemática deram a direção para a busca por metodologias que proporcionem uma aprendizagem relevante para os alunos do ensino superior; como exemplo de aplicação dessas, citam-se as investigações de Laudares e Lachini (2001) que

apontaram para a matemática com uso da tecnologia, implantando um laboratório o qual denominaram “Laboratório de Cálculo - LABCAL”.

Há uma inovação na informática educativa com a nova metodologia, denominada *Blended Learning* (traduzindo como mistura ou diversificação de ensino ou ainda como Ensino Híbrido), na qual são estabelecidos alguns modelos que ajudam a conduzir as aulas. Os mais usados são Rotação por Estações, Laboratório Rotacional e Sala de Aula Invertida.

O Ensino Híbrido busca desenvolver técnicas, intercalando o ensino *on-line* e o presencial, e tem como foco a personalização do ensino, com o professor fazendo um acompanhamento e mudando a forma de percepção da realidade escolar dos alunos, que, ao longo da aprendizagem, passam a acessar o conteúdo *on-line* em qualquer momento, em qualquer lugar, em vez de depender exclusivamente de professores para instruções.

Conforme Moran (2015, p. 27), o Ensino Híbrido proporciona ampliação do espaço da sala de aula, favorecendo a aprendizagem para além do espaço tradicional, proporcionando experimentos diversificados, de modo que “podemos, com os mesmos ingredientes, preparar diversos ‘pratos’, com sabores muito diferentes”.

Nesse sentido propõe-se a adoção do Ensino Híbrido, em um ambiente que favoreça a aprendizagem significativa, concebida em um processo interativo e personalizado, já que “é possível planejar atividades diferentes para grupos de alunos diferentes, em ritmos distintos e com possibilidade real de acompanhamento pelos professores.” (MORAN, 2015, p. 35).

Desse modo, para o autor, no Ensino Híbrido, os professores passam a ser facilitadores de aprendizagem.

Assim, a partir dessas transformações no ensino e aprendizagem com suporte nas novas tecnologias e materiais concretos se faz a proposta deste trabalho, ancorada na possibilidade de construção de novas práticas educacionais com o Ensino Híbrido, bem como a ampliação de conceitos e relação com as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no contexto do ensino de matemática no ensino superior.

A Geometria Analítica é uma área fértil de possibilidades do uso da informática educativa, especialmente os *softwares* de geometria dinâmica como *GeoGebra*, *Winplot*, entre outros, para explorar a capacidade de visualização dos estudantes com o esboço de gráficos e a interação da álgebra com a geometria. Dessa forma, como

área de estudo, escolheu-se a Geometria Analítica Plana, especificamente o estudo das cônicas, ancorada nas experiências em sala de aula e no laboratório de informática, no uso de tecnologias e ambientes *on-line*, estabelecendo uma prática pedagógica nova que proporcione uma aprendizagem significativa.

As ricas experiências vivenciadas pelo autor da presente pesquisa, quando aluno do curso de Licenciatura Plena em Matemática, juntamente com a observação das dificuldades encontradas pelos acadêmicos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL) foram condutoras no desenvolvimento de um projeto de Geometria Analítica, especificamente o Ensino das Cônicas, explorando a metodologia do *Blended Learning*, basilar desta dissertação, cuja proposta de pesquisa e estudo contemplou algumas atividades com um grupo de 6 alunos do ensino superior de uma instituição pública na cidade de Montes Claros-MG, com o uso das tecnologias computacionais; também foi realizada análise de livros didáticos que tratam de geometria analítica.

Desse modo, um importante resultado desta pesquisa de Mestrado é a construção de um produto educacional como objeto de aprendizagem, abordando o conteúdo sobre cônicas com o uso do *software GeoGebra*.

1.1 Justificativa do trabalho

A Geometria Analítica como integração da geometria e da álgebra traz na sua possibilidade didática a diversidade de métodos, especialmente com uso de tecnologias para exploração da habilidade de visualização e esboço para análise do comportamento das funções no binômio equação-gráfico.

Em consonância com Frota (2013), muitos alunos no curso superior encontram dificuldades de aprendizagens em algumas disciplinas de matemática. Assim, a pesquisa a ser realizada se justifica pela proposição de novas abordagens do conteúdo de cônica – relevante para o ensino superior – servindo de base para algumas disciplinas, como cálculo integral.

Por meio da metodologia do *Blended Learning*, ou Ensino Híbrido, o foco é a aprendizagem do estudante, não mais a transmissão de informação, como o professor tradicionalmente realiza.

A proposta da pesquisa é facilitar o entendimento dos alunos por meio de uma metodologia em pleno desenvolvimento que une a tecnologia *on-line* e presencial. Um

aspecto importante do Ensino Híbrido é promover as vantagens do ensino *on-line* com todos os benefícios da sala de aula tradicional, visando à personalização do ensino.

Tradicionalmente, professores ficam na frente da sala de aula para dar a mesma aula a estudantes com diferentes níveis de aprendizado. Além disso, nas salas de aula mais tradicionais, o tempo é fixo e a aprendizagem é variável. Os alunos passam pelo conteúdo a um ritmo relativamente rígido, com pouca flexibilidade para avançar para algo mais elaborado ou passar mais tempo em tópicos com os quais estão tendo dificuldade. Uma abordagem centrada no aluno muda esse roteiro.

Segundo Laudares (2007), com nova postura do professor e ambiente propício à mudança, a ação docente não permanece mais no centro do processo do ensinar e aprender. O professor é impelido a converter-se em mediador, a mostrar aos alunos os caminhos para atingir a autonomia em relação ao conhecimento. Assim, ambiente e professor integrados são constituintes de um espaço escolar adequado ao desenvolvimento da didática, na perspectiva de mais formação e não apenas informação.

Ensinar e aprender exigem hoje muito mais flexibilidade de espaço, e processos mais abertos de pesquisa e de comunicação. Uma das dificuldades atuais é conciliar a extensão da informação, a variedade das fontes de acesso com o aprofundamento da sua compreensão, em espaços menos rígidos. Têm-se informações demais e dificuldade em escolher quais são significativas e conseguir integrá-las dentro da mente e vida humanas, isto é, partir de onde o aluno está e ajudá-lo a ir do concreto ao abstrato, do imediato para o contexto, do vivencial para o intelectual (MORAN, 1999).

Para Costa e Oliveira (2004, p. 120), uma permanente renovação metodológica demanda um suporte institucional com propostas de políticas e programas de capacitação, além de condições adequadas de trabalho docente e ambientes propícios ao acesso e à produção no contexto das novas tecnologias. Resulta daí a necessidade de outros espaços físicos para a ação acadêmica, não mais reduzida à tradicional sala de aula, mas um ambiente informatizado e de uso intensivo, em que se realize o processo ensino-aprendizagem.

O processo de construção de conhecimento nessa nova realidade acontece quando se integra criticamente a tecnologia de informática no processo educativo, em que o computador, como recurso pedagógico, não goza de autonomia para conclusão do processo ensino/aprendizagem; o que se pretende, então, é que o computador seja

incorporado aos ambientes da escola como uma tecnologia intelectual de grande potencial.

Segundo Frota (2013, p. 71), a tecnologia computacional pode mudar a forma de fazer matemática, contribuindo para o processo de fazer conjecturas, interpretar soluções, estimular a investigação e a descoberta. Entender um ambiente computacional de aprendizagem como uma forma particular de pensamento coletivo que integra aluno, professor-pesquisador, mídia e conteúdos matemáticos confere à visualização uma nova dimensão.

Os dados obtidos com a observação dos sujeitos dessa pesquisa, alunos da licenciatura em matemática, poderão nortear professores e alunos para novas possibilidades educacionais, inclusive em diferentes conteúdos matemáticos, por meio do exemplo do ensino das cônicas, utilizando as tecnologias digitais.

Ao optar pelo *Blended Learning*, que será apresentado nos próximos capítulos, está-se buscando um suporte fortemente ligado ao processo de desenvolvimento da tecnologia educacional. O intento é propor mudança na forma de pensar matemática, com novos horizontes e novas possibilidades para a aprendizagem significativa.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Propor atividades para compreensão de conceitos de cônicas, utilizando a metodologia *Blended Learning* ou Ensino Híbrido para licenciados em Matemática.

1.2.2 Objetivos Específicos

- a) Identificar as características operacionais do *Blended Learning*;
- b) elaborar e testar atividades que desenvolvam habilidades conceituais em cônicas, sem o conhecimento de equações, utilizando metodologia *Blended Learning*;
- c) elaborar e testar atividades que desenvolvam habilidades conceituais em cônicas, com o conhecimento de equações, utilizando a metodologia *Blended Learning*;
- d) identificar o formato de cônicas em imagens na natureza ou no cotidiano;

- e) verificar em livros didáticos de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral como ocorre a abordagem metodológica do conteúdo das cônicas: elipse, hipérbole e parábola;
- f) construir um Caderno de Atividades com o objetivo de apresentar as atividades elaboradas e testadas na pesquisa.

1.3 Objeto e sujeito de estudo

O objeto deste projeto se relaciona com o estudo das cônicas no espaço bidimensional R^2 .

Os sujeitos deste estudo são 6 alunos de nível superior do curso de Matemática de uma faculdade pública de Montes Claros-MG.

1.4 Metodologia

As pesquisas atuais são, em linhas gerais, classificadas em duas grandes vertentes: pesquisa quantitativa e pesquisa qualitativa. Essencialmente, a primeira delas lida com grande número de dados, recorrendo aos métodos estatísticos para análise de maneiras diversas. Podem ser realizadas entrevistas (D'AMBRÓSIO, 2018).

A pesquisa realizada foi qualitativa. Em consonância com D'Ambrósio (2018), as pesquisas qualitativas mantêm o foco no indivíduo com suas particularidades, analisando o seu comportamento diante do ambiente natural e sociocultural.

Ainda que os indivíduos que fazem investigações qualitativas possam vir a selecionar questões específicas à medida que recolhem os dados, a abordagem à investigação não é feita como objetivo de responder a questões prévias ou de testar hipóteses. Privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Em contextos da Educação Matemática, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que se formulem questões que interessem para as quais não se tem resposta pronta, e procuram-se essa resposta de modo tanto possível fundamentado e rigoroso (PONTE, 2016).

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito de atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), o investigador introduz-se no mundo das pessoas que pretende estudar, tenta conhecê-las, dar-se a conhecer e ganhar a sua confiança, elaborando um registro sistemático de tudo aquilo que ouve e observa. O material assim recolhido é complementado com outro tipo de dados, como registros escolares, artigos de jornal e fotografias.

Novas tecnologias metodológicas, devido à Educação a Distância (EaD), não significam que apenas novos procedimentos sejam utilizados. Para Moran (1999, p. 35): “A Internet é um novo meio de comunicação, mas que pode ajudar-nos a rever, a ampliar e a modificar muitas das formas atuais de ensinar e de aprender.”.

Há, em alguns casos, uma releitura de procedimentos típicos da pesquisa em ambientes presenciais nos ambientes a distância. Por exemplo, uma entrevista que normalmente é realizada presencialmente pode tomar novos contornos quando realizada a distância, configurando-se as denominadas entrevistas *on-line* (BORBA; ARAÚJO, 2018).

1.5 Estrutura da dissertação

A estrutura desta dissertação é constituída por oito capítulos; no capítulo 1 aborda-se a introdução em que são apresentados os procedimentos metodológicos da pesquisa, destacando as características da pesquisa qualitativa e o uso das tecnologias.

No capítulo 2, apresentam-se conceitos de *Blended Learning* e relações com o ensino superior, abordando a importância de se buscarem novas estratégias de ensino com novas tecnologias. Apresentam-se ainda uma visão do modelo de educação industrial, especificamente os modelos padronizados com processos e ideias que os alunos deveriam seguir; também o ensino *on-line* e suas possibilidades, alguns modelos de *Blended Learning*, especificamente os rotacionais, abordados nesta pesquisa, seguindo com o planejamento do Ensino Híbrido e a avaliação da aprendizagem desse ensino, mudando o foco para a personalização.

No capítulo 3, apresenta-se o ensino de geometria analítica plana, especificamente o ensino das cônicas, abordando conceitos históricos do ensino de geometria analítica e cônicas. Fechando o capítulo 3, aborda-se a informática educativa no ensino das figuras cônicas, enfatizando a importância dos *softwares* de matemática dinâmica no processo de ensino e aprendizagem das figuras cônicas. Aponta-se para o estudo das Quádricas, como ainda pouco explorada nas disciplinas de nível superior: destacam-se o livro de Quádricas de Miranda e Laudares (2011), as dissertações de Mota (2010), Oliveira (2011) e Anderson (2019).

No capítulo 4, é trazida a análise do conteúdo de cônicas investigado em livros didáticos.

No capítulo 5, apresenta-se a construção das três estações distribuídas em sete atividades propostas para o ensino das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) na metodologia do *Blended Learning*.

No capítulo 6, descreve-se a aplicação das atividades, em que se busca compreender a dinâmica da pesquisa, abordando a construção, manipulação, identificação e análises das cônicas.

No capítulo 7, descreve-se uma síntese da análise da aplicação das atividades.

No capítulo 8, tecem-se as considerações finais em que se procura refletir sobre as contribuições que a metodologia proposta trouxe para o processo ensino-aprendizagem das cônicas no ensino superior.

2 **BLENDED LEARNING – ENSINO HÍBRIDO**

2.1 **Blended Learning no Ensino Superior**

Santos (2018, p. 53), em sua tese de doutorado, assegura que a educação está em um processo de transformação, impulsionado pela globalização e pela facilidade de acesso à informação; assevera, também, que as inovações oferecem um desafio constante, pois estão cada vez mais disponíveis para as diferentes populações, mesmo que, ainda hoje e em muitos lugares, se conviva com a exclusão social resultante dos avanços tecnológicos.

No modelo híbrido, educadores e estudantes podem ensinar e aprender em tempos e locais variados. Principalmente no Ensino Superior, essa realidade está atrelada a uma metodologia de Ensino a Distância (EaD), em que o ensino presencial se mistura com o ensino a distância e, em alguns casos, algumas disciplinas são ministradas na forma presencial e, outras, ministradas apenas a distância. A tecnologia veio como facilitadora da aprendizagem e, com o apoio das plataformas digitais, cada aluno aprende de forma personalizada no seu próprio tempo.

A verdadeira necessidade de atualização das estratégias metodológicas tende a utilizar tecnologias e ambientes virtuais de aprendizagem, capazes de oferecer maior acesso, flexibilidade e qualidade no processo de ensino-aprendizagem (SANTOS, 2018, p. 53).

Seguindo a mesma ideia, o trecho a seguir descreve algumas percepções sobre o momento da Educação Superior,

O Ensino Superior hoje enfrenta grandes desafios para se adaptar às condições de uma realidade diferente, tanto externa como internamente. No nível externo, podemos apontar uma série de transformações importantes que afetam as novas demandas da sociedade para o ensino superior, como resultado das novas tecnologias da informação, globalização econômica e o novo papel do conhecimento em processos produtivos e na flexibilização dos mercados de trabalho (RAMA, 2007, p.5).

O *Blended Learning* é uma inovação para a sala de aula tradicional e melhora no processo ensino-aprendizagem. Especificamente, é a combinação de experiências de aprendizagem flexíveis presenciais e *on-line* dentro das universidades, melhorando, entre outras, a interação social entre os estudantes.

Conforme Matheos (2014), a educação híbrida está emergindo como uma das práticas mais promissoras para transformar e sustentar as instituições universitárias canadenses. A educação híbrida é “a integração orgânica das abordagens e tecnologias presenciais e *on-line* meticulosamente selecionadas e complementares” (MATHEOS, 2014, p. 60). Para Rodrigues (2010), o *Blended Learning* possibilita a utilização de diversos métodos e a colaboração para criação e troca de conhecimentos.

Nas salas de aula do *Blended Learning*, os professores se transformam em facilitadores de aprendizagem, ou seja, em vez de meramente conferir palestras, transferem parte desse trabalho à internet para que possam usar seu tempo de maneira mais produtiva, com reflexão crítica na aprendizagem mais significativa.

Contudo, o *Blended Learning* é mais que simplesmente aulas enriquecidas com tecnologia. Essa metodologia proporciona novas experiências aos alunos do Ensino Superior, de maneira que aprendem no seu ritmo, com algum controle do tempo e espaço educacional, visando ao aprendizado personalizado.

2.2 Modelo industrial e a Personalização do ensino no *Blended Learning*

A sala de aula, como se conhece hoje, tradicionalmente está ligada ao modelo industrial, uma ferramenta criada para treinar os alunos para seguirem modelos padronizados, processos e ideias. Não importa o conteúdo de aprendizagem implantado em uma sala de aula, sua forma abrange uma prática disciplinar construída para a fábrica ou corporação que poderiam, mais tarde, contratar seus estudantes e foram concebidas a partir do modelo da linha de montagem (DAVIDSON, 2011).

Conforme Horn e Staker (2015), a fim de criar um sistema de educação universal que pudesse acomodar muitos estudantes, os educadores se basearam num sistema industrial eficiente. Isso resultou em agrupamentos de estudantes por idade em séries, colocando-os em sala de aula com um professor e padronizando o ensino e a avaliação. A teoria era que, com os estudantes agrupados por nível e, então, reunidos em salas de aulas, os professores poderiam ensinar as mesmas matérias, da mesma maneira e no mesmo ritmo, ou seja, um processo em que as escolas pudessem matricular um número muito grande de estudantes.

Esse modelo industrial instituído em sala de aula, com agrupamentos de idade-série, funcionou por muito tempo espetacularmente bem. Por outro lado, no mundo

atual, em que a maioria dos empregos requer trabalhadores intelectuais com um nível de escolaridade maior, esse modelo é insuficiente. Outra questão levantada por Horn e Heather Staker (2015) é que cada estudante aprende em ritmos diferentes, alguns aprendem de forma mais rápida e outros lentamente. E o ritmo de cada um tende a variar com base na disciplina estudada ou mesmo no conceito.

Em geral, os estudantes têm diferentes aptidões para aprender e assimilar conteúdos, de diversas fontes. Alguns já possuem conhecimentos prévios individualizados de vários níveis, afetando o modo como aprenderão um conceito. Isso significa que todos trazem na bagagem experiências diferentes.

O modelo industrial da educação atual, no qual ensina-se da mesma maneira, com agrupamentos de estudantes em sala de aula, tornou-se um modelo ineficaz de ensino, uma vez que os estudantes de hoje precisam de um sistema centrado neles.

Conforme Bacich (2015), estruturalmente, a escola atual não difere daquela do início do século passado. No entanto, os estudantes de hoje não aprendem da mesma forma que do século anterior. Os estudantes estão cada vez mais conectados às tecnologias digitais, configurando-se como uma geração que estabelece novas relações com o conhecimento e que, portanto, requer que transformações aconteçam na escola. A aprendizagem centrada no estudante cria mecanismos próprios que potencializam a aprendizagem.

A grande difusão do uso das TICs na educação tem potencializado significativamente as comunidades virtuais de aprendizagem, criando novas formas de aprender e ensinar.

De acordo com Huertas (2007), entende-se por tecnologias educacionais todo recurso derivado de aplicações de tecnologias de informação e comunicação para o ambiente educacional, como plataformas *on-line* para aprendizado colaborativo, livrarias digitais, materiais em formato eletrônico, internet, dispositivos móveis, entre outros.

Para Maia e Meirelles (2002), os modelos de aprendizagem que emergem desse contexto demandam uma postura diferente, tanto do aluno quanto do professor, em relação aos métodos tradicionais de ensino.

Conforme Moran (2017), as aprendizagens por experimentação, por *design*, aprendizagem *maker*, com apoio de tecnologias móveis, são expressões atuais da aprendizagem ativa, personalizada, compartilhada. A ênfase na palavra ativa precisa sempre estar associada à aprendizagem reflexiva, para tornarem visíveis os

processos, os conhecimentos e as competências do que se está aprendendo com cada atividade. O bom professor, orientador, mentor é decisivo, e a tecnologia digital também, porque viabilizam todo o processo de aprendizagem de cada estudante.

Os jovens estão cada vez mais conectados às tecnologias digitais, criando novas formas de relações de conhecimento, que requerem mudanças dentro da escola tradicional. De acordo com Bacich (2015), a integração das tecnologias digitais na educação precisa ser feita de modo criativo e crítico, buscando desenvolver a autonomia e a reflexão dos seus envolvidos, para que eles não sejam apenas receptores de informações.

Conforme Horn e Heather Staker (2015), quando se refere ao ensino personalizado, a aprendizagem é adaptada às necessidades particulares de um determinado estudante. O poder do ensino personalizado, entendido dessa forma, é intuitivo. Quando os estudantes recebem ajuda individual de um professor, em vez de ensino em massa para um grupo, os resultados são geralmente muito superiores.

No ensino personalizado, o professor faz mediação quanto ao ritmo do estudo, reformula uma explicação ou fornece um novo exemplo ou uma nova abordagem, com projetos e atividades em grupo.

O Ensino Híbrido é uma proposta metodológica que mescla dois mundos, ou seja, o ensino *on-line* e o presencial. Nos momentos *off-line*, na sala de aula presencial, os alunos estudam em grupos, com os professores e outros colegas, favorecendo as interações pessoais.

O Ensino Híbrido é qualquer programa educacional formal, no qual um estudante aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino *on-line*, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, o lugar, o caminho e/ou o ritmo (HORN; STAKER, 2015).

Ainda, o estudante aprende, pelo menos em parte, em um local físico supervisionado, longe de casa. Em outras palavras, o estudante frequenta uma escola tradicional, com professores ou supervisores. Amiúde, é a escola do bairro, mas, em outros casos, é um centro de aprendizagem que pode até estar instalado no espaço de um *shopping* convertido em um laboratório de informática informal. (HORN; STAKER, 2015, pp. 34, 35).

No ensino *on-line*, é possível se valer das aptidões pessoais, valorizando o uso das tecnologias, o controle do tempo, do local e ritmo de estudo, a tomada de decisões que favoreçam a autonomia do estudante. Nesse momento, é também valorizada a

relação que se constrói por meio do uso das tecnologias digitais entre alunos e professores com a interação e o aprendizado colaborativo.

2.3 O ensino *on-line* e suas possibilidades

No Brasil, o Decreto n. 5.622, de 19 de dezembro de 2005, conceitua, em seu artigo 1º, a Educação a Distância da seguinte forma:

Art. 1º - Para os fins deste Decreto, caracteriza-se a educação a distância como modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorre com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com estudantes e professores desenvolvendo atividades educativas em lugares ou tempos diversos (BRASIL, 2015).

Até a década de 1980, a EaD, em grande parte, era baseada em material impresso enviado para o aluno, para que esse realizasse suas atividades conforme a sua disponibilidade tanto de tempo quanto de local. Com as TICs, foi possível criar outros meios para alterar diversos aspectos da EaD, por exemplo, “as concepções teóricas, as abordagens pedagógicas, as finalidades da EaD e os processos de avaliação da aprendizagem dos alunos” (VALENTE, 2014, p. 83).

A EaD nos últimos anos ganhou força em virtude, principalmente do uso das tecnologias da educação e informação, as quais possibilitam aos alunos realizarem seus estudos recorrendo à internet, fazendo uso de seus computadores, *tablets*, *smartphones* etc.

A modalidade EaD tem atraído cada vez mais alunos, possibilitando a disseminação do ensino superior no Brasil. Por ser mais flexível e, geralmente, mais barata que a sala de aula tradicional, a EaD tem possibilitado o aumento por sua procura.

Em consonância com Moran (2003), a expansão da oferta de cursos na modalidade de EaD possibilitou o desenvolvimento de pesquisas e teorizações que abordaram diferentes aspectos dessa área temática, entre os quais destacam-se: os ambientes virtuais de aprendizagem; as abordagens pedagógicas adotadas em processos formativos; a formatação de cursos nos ambientes virtuais.

Em termos gerais, Moran (2003, p. 39) define a “educação *on-line* como o conjunto de ações de ensino-aprendizagem desenvolvidas por meio telemáticos, como a Internet, a videoconferência e a teleconferência” e aponta as potencialidades

dessa modalidade educativa em cursos que vão desde a educação infantil até a pós-graduação. Novas questões e novos desafios estão surgindo com o avanço da telemática e a utilização de recursos informáticos na criação de cursos *on-line*:

E essas situações nos obrigam a pensar em processos pedagógicos que compatibilizem: a preparação de materiais e atividades adequados; a integração de vários tipos de profissionais envolvidos (professores autores, professores orientadores, professores assistentes e tutores); a combinação de tempos homogêneos e flexíveis, da comunicação em tempo real e em momentos diferentes; as avaliações presenciais e a distância (MORAN, 2003, p. 39-40).

Diante de todas essas possibilidades, encontram-se muitos desafios na EaD, pois exige uma organização maior por parte dos alunos. Assim é preciso desenvolver materiais pedagógicos que atendam às necessidades eventuais dos estudantes e facilitem a sua utilização em ambientes virtuais.

Para Nacarato (2009), o uso inadequado ou pouco explorado de algum material interferirá na aprendizagem matemática e ainda ressalta que o problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como trabalhar com eles. Diante disso, fica evidente a necessidade de diagnosticar a situação do contexto, para desenvolver materiais pedagógicos, tendo em vista a necessidade de trabalhar em ambientes interativos que promovam a exploração matemática.

2.4 Modelos do *Blended Learning*

Nos modelos do *Blended Learning*, há os que promovem uma mudança significativa na estrutura de ensino, também chamados de disruptivos. Esses modelos rompem com as características de uma aula tradicional e não incluem a sala de aula na sua forma plena.

De acordo com Horn e Staker (2015), os modelos disruptivos estão posicionados de modo a transformar o sistema de salas de aula e tornarem-se os motores da mudança no longo prazo, particularmente no nível secundário. Qualquer variedade de Ensino Híbrido deve-se tornar obsoleta, conforme a disrupção pura se torna suficientemente boa. Quando isso ocorrer, o papel fundamental das escolas tradicionais vai se alterar dramaticamente. O foco das escolas será, por exemplo, em oferecer instalações bem cuidadas e com um grande suporte presencial, refeições de

alta qualidade e uma variedade de programas atléticos, musicais e artísticos para que os estudantes queiram estar ali, além de alavancar o uso educacional da Internet.

Ainda, conforme Horn e Stake (2015), outros modelos do *Blended* são chamados de sustentados porque seguem a trajetória de uma sala de aula tradicional e não existe uma mudança significativa na estrutura de ensino da instituição. São equacionados de modo a construir sobre um sistema industrial de sala de aula sustentada, oferecendo melhorias sem, porém, romper com o que já existe. Incorporam-se as principais características do ensino *on-line* e do ensino tradicional.

Os modelos sustentados são de certa forma, mais fáceis de serem implementados, porque sua execução depende mais do professor. Nesse modelo, o professor pode planejar sua aula de maneira menos burocrática e mais fácil, uma vez que conta com recursos digitais e realiza a maioria delas sem depender de outros profissionais da instituição de ensino.

Os modelos disruptivos e os sustentados são contemplados no Quadro 1.

Quadro 1 - Modelos do *Blended*

Sala de aula física		Ensino <i>On-line</i>
Ensino Híbrido		
Modelos	Tipo	Descrição
Sustentados	Rotação por estação	Os alunos rotacionam entre estações em que pelo menos uma tem que ser necessariamente <i>on-line</i> .
	Laboratório Rotacional	O professor da disciplina fica em sala de aula e os estudantes da disciplina ficam no laboratório com um professor-tutor para realizarem as tarefas <i>on-line</i> .
	Sala de aula invertida	Os alunos estudam em casa um conteúdo <i>on-line</i> sugerido pelo professor ou não, aplicam e praticam em sala de aula o que foi estudado.
Disruptivos	Rotação individual	Os estudantes alternam em um esquema individualmente personalizado entre modalidades de aprendizagem.
	Modelo Flex	Tem o objetivo de usar quase exclusivamente matérias <i>on-line</i> para o seu desenvolvimento. O termo refere-se a cursos ou matérias em que o ensino <i>on-line</i> é a espinha dorsal da aprendizagem.
	Modelo à la carte	Inclui qualquer curso ou disciplina que um estudante faça inteiramente <i>on-line</i> , enquanto, também, frequenta uma escola física tradicional.
	Modelo virtual aprimorado	Cursos que oferecem sessões de aprendizagem presencial, mas permitem que os estudantes façam o restante do trabalho <i>on-line</i> , de onde preferirem.

Fonte: Adaptado de Horn e Stake (2015)

A abordagem de rotação é o que geralmente atrai primeiro a atenção dos professores. De acordo com Horn e Stake (2015, p 37), nos modelos de rotação, os alunos revezam as atividades realizadas de acordo com um horário fixo, ou a critério do professor, entre as modalidades de aprendizagem em que pelo menos uma seja *on-line*.

Ainda, conforme os mesmos autores, as formas de organização das salas para os modelos de rotação podem ser Rotação por Estações, Laboratório Rotacional, Sala de aula invertida e Rotação individual.

Nesta pesquisa optou-se pelos modelos sustentados de rotação para serem trabalhados com mais rigor.

2.4.1 Modelo Rotação por Estação

Segundo Bacich (2015, p. 55), neste modelo, os alunos fazem um rodízio em várias estações, em que pelo menos uma estação conta com recursos *on-line*, de acordo com uma agenda de tarefas ou por decisão do próprio professor; as demais podem ser tarefas escritas em papel, pequenos projetos, instrução individualizada ou trabalhos em grupos.



Fonte: Vale e Silva (2018).

É possível observar os estudantes trabalharem de forma colaborativa, mesmo na estação em que estão trabalhando *on-line*. O professor pode trabalhar com grupos específicos de estudantes, as estações são fixas e os estudantes “rotacionam” por elas. A mudança de grupos ou a rotação por estações podem ser definidas pelo professor que avisa o momento de mudança, ou podem ser cronometradas, dependendo dos objetivos a serem alcançados na proposta.

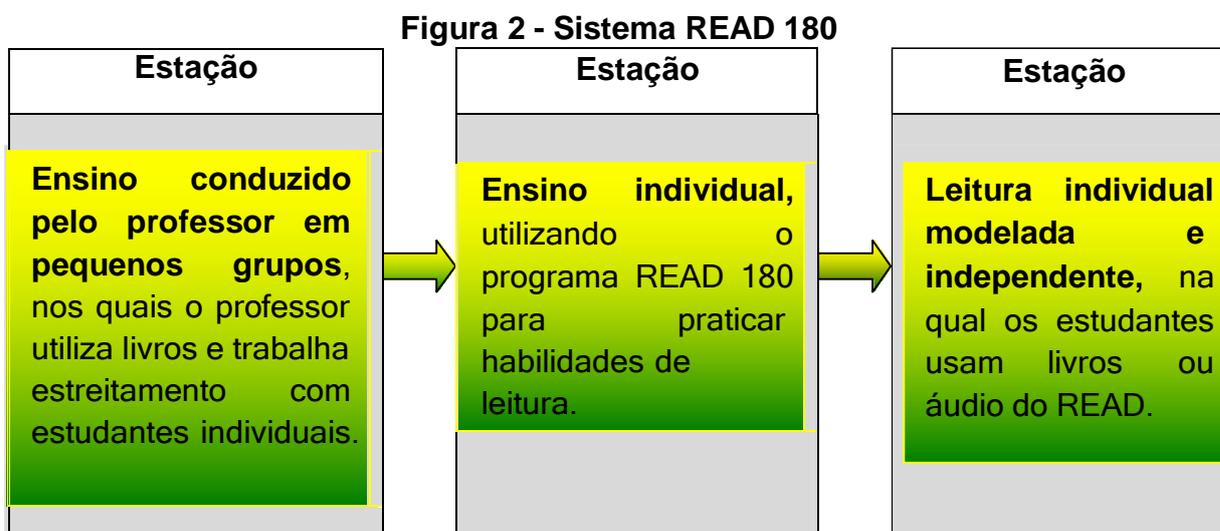
A abordagem de rotação por estação também proporciona momentos em que os recursos utilizados ajudam na personalização do ensino: “A variedade de recursos utilizados, como vídeos, leituras, trabalho individual e colaborativo, entre outros, também favorece a personalização do ensino, pois, como sabemos, nem todos os estudantes aprendem da mesma forma.” (BACICH, 2015, p. 55).

Ainda, conforme a autora, o planejamento desse tipo de atividade não é sequencial, e as tarefas realizadas nos grupos são de certa forma, independentes, mas funcionam de forma integrada para que, ao final da aula, todos tenham tido a oportunidade de ter acesso aos mesmos conteúdos.

De acordo com Andrade e Souza (2016, p 06): “O modelo de Rotação por Estações de Trabalho é um modelo de ensino e aprendizagem em que a forma como estão dispostas as estações de aprendizagem definirá a estrutura deste modelo e cada estrutura pode estar organizada de diferentes maneiras”.

Existem alguns fatores a serem observados na maneira como funcionam as estações, interferindo diretamente nas atividades. Um desses fatores é a quantidade de estações que cada atividade deverá ter. Conseqüentemente, uma turma muito grande de alunos deverá ter uma quantidade maior de estações de aprendizado para cada atividade. O fato de ter muitas estações de aprendizado poderá influenciar positiva ou negativamente na aula.

Em consonância com Horn e Stake (2015, p 38), o exemplo clássico do Modelo de Rotação por estações é o programa READ 180 da Scholastic, que é um dos modelos de mais longa duração e mais amplamente distribuído. O sistema READ 180(Figura 2), voltado para estudantes do ensino fundamental ao médio, cujo desempenho da leitura está abaixo da proficiência, orienta os professores a iniciar e terminar cada sessão da aula com uma discussão que envolva toda a turma. Entre elas, os estudantes se dividem em grupos e alternam entre três estações.



Fonte: Adaptado de Horn e Stake (2015, p 39).

2.4.2 Modelo Laboratório Rotacional

Essa abordagem foi criada em San José, no estado da Califórnia, com o intuito de eliminar a diferença do desempenho acadêmico entre alguns grupos.

Muitas pessoas creditam à Rocketship Education, em San José, Califórnia, a colocação do Laboratório Rotacional no mapa. John Dannes e Preston Smith lançaram a organização de gerenciamento *Charter* (cooperativado), em 2006, para ajudar a eliminar a diferença do desempenho acadêmico entre grupos étnicos e socioeconômicos. (HORN; STAKER, 2015, p. 41).

Ainda, conforme os autores,

O objetivo era ajudar um milhão de estudantes urbanos do ensino fundamental, de baixa renda, a acelerar academicamente sem depender de subsídios externos e arrecadação de fundos para suplementar o financiamento por aluno que suas escolas recebiam do governo (HORN; STAKER, 2015, p. 41).

No Laboratório Rotacional, os estudantes fazem o rodízio em pontos específicos entre um laboratório de informática e a sala de aula, de acordo com uma agenda de tarefas ou por decisão do professor. No laboratório, os estudantes aprofundam, treinam e realizam as atividades *on-line*.

Figura 3 - Modelo de Rotação – Laboratório Rotacional

Fonte: Bacich, 2016a

De acordo com Bacich (2015, p. 55), o modelo de laboratório rotacional começa com a sala de aula tradicional, em seguida, adiciona uma rotação para computador ou laboratório de ensino. Os laboratórios rotacionais, frequentemente, aumentam a eficiência operacional e facilitam o aprendizado personalizado, mas não substituem o foco nas lições tradicionais em sala de aula.

As atividades no laboratório são realizadas de forma individual para que cada estudante consiga solucionar suas dúvidas ou aprofundar seus estudos.

No laboratório rotacional os estudantes que forem direcionados ao laboratório trabalharão nos computadores de forma individual e autônoma, para cumprir os objetivos fixados pelo professor, que estará, com o restante da turma, realizando sua aula da maneira que achar mais adequada. (BACICH, 2015, p. 55).

Este modelo necessita de mais profissionais da instituição de ensino e não depende apenas da atuação do professor em sua sala de aula. A proposta é semelhante ao modelo de rotação por estações, porém, no laboratório rotacional, os alunos se dirigem para o laboratório em que trabalham de forma individual acompanhados por um professor tutor (BACICH, 2015, p. 56).

2.4.3 Sala de Aula Invertida- Flipped Classroom

Conforme Horn e Stake (2015, p 42), o Modelo de Aula Invertida é o que recebeu maior atenção na mídia até agora, nele, inverte-se completamente a função normal da sala de aula.

Após experimentar algo como uma atividade de matemática, os estudantes podem levantar hipóteses e pesquisar sobre elas em casa de forma *on-line*, por meio de recursos audiovisuais, simulações e leituras.

Em uma sala de aula invertida, os estudantes têm lições ou palestras *online* de forma independente, seja em casa, seja durante um período de realização de tarefas. O tempo na sala de aula, anteriormente reservado para instruções do professor, é, em vez disso, gasto no que costumamos chamar de lição de casa, com os professores fornecendo assistência quando necessário. (HORN; STAKE, 2015, p 43).

Os resultados das pesquisas podem ser discutidos e a conclusão é construída por toda turma. Os estudantes constroem sua visão sobre o conhecimento ativando seus conhecimentos prévios e integrando as novas informações com as estruturas cognitivas já existentes para pensar criticamente sobre os conteúdos ensinados.

A sala de aula invertida é o modelo mais simples para dar início à implementação do Ensino Híbrido. É possível aprofundar esse modelo envolvendo descobertas, experimentação, como proposta inicial para os estudantes.

Nesse sentido, Valente (2014, p. 79) destaca que:

Há diferentes maneiras de combinar as atividades presenciais e a distância, sendo a sala de aula invertida ou flipped classroom uma delas. Segundo essa abordagem, o conteúdo e as instruções sobre um determinado assunto curricular não são transmitidos pelo professor em sala de aula. O aluno estuda o material antes de ele frequentar a sala de aula, que passa a ser o lugar de aprender ativamente, realizando atividades de resolução de problemas ou projetos, discussões, laboratórios etc., com o apoio do professor e colaborativamente dos colegas (VALENTE, 2014, p. 79).

Na Figura 4, pode-se visualizar a sala de aula invertida em que os alunos têm uma ou mais disciplinas *on-line* em um ambiente fora da sala de aula em que buscam o conhecimento prévio do conteúdo, em seguida, praticam na escola física com orientação do professor.

Figura 4 - Modelo de Rotação-Sala de Aula Invertida

Fonte: Bacich, 2016b

Conforme Bacich (2015, p. 56), os estudantes desenvolvem atividades de pensamento crítico e têm melhor compreensão conceitual sobre uma ideia quando exploram primeiro um domínio, em seguida, eles têm contato com uma forma clássica de instrução como uma palestra, um vídeo ou a leitura de um texto.

2.5 Planejamento do *Blended Learning*

Segundo Horn e Stake (2015, p 43), a escola pode ser um lugar em que os alunos encontram alegria em aprender. Quando uma escola tem o modelo certo do ponto de vista dos alunos, de modo que se alinha perfeitamente com o que lhes é importante, eles vão para a aula motivados e ávidos pelo aprendizado.

Para Horn e Staker (2015), o ponto de partida para o planejamento, antes de qualquer consideração, é pensar como os alunos pensariam e olhar para a escola por meio dos olhos deles. Quando as escolas estão bem alinhadas com aquilo que importa para elas, os alunos se sentirão motivados para aprender.

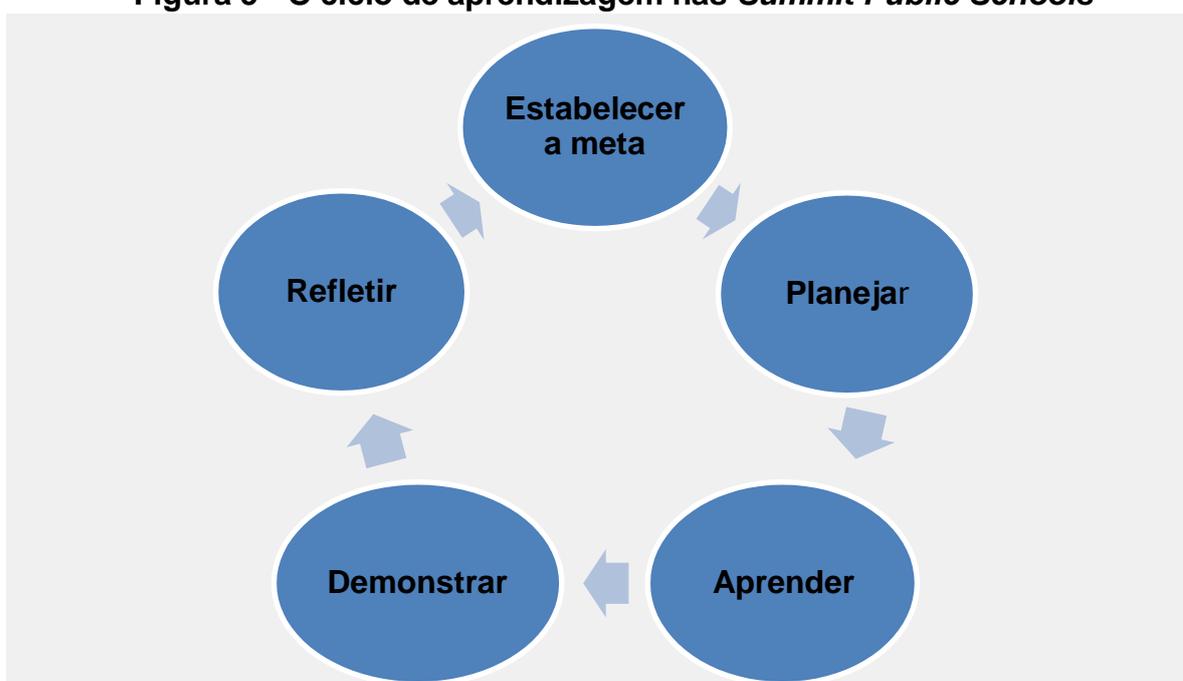
Portanto, a primeira tarefa para as equipes de Ensino Híbrido é entender a perspectiva dos alunos e planejar, tendo a motivação deles como guia, e considerar que o mais importante é motivar os estudantes para aprenderem.

A *Summit Public Schools*, uma rede de *charter schools* na cidade de *Redwood*, na Califórnia-EUA, destaca-se entre as pioneiras em relação a proporcionar experiências que ajudam os estudantes a fazer progresso todos os dias.

É preciso identificar todas as experiências que as escolas precisam fornecer para executar os trabalhos perfeitamente. Para a *Summit Public Schools*, tais experiências incluem ação do aluno, domínio individual, acesso a dados acionáveis e *feedback* rápido, transparência nas metas de aprendizagem, períodos prolongados de tempo de leitura solitária, experiências de trabalho significativas, experiências de orientação acadêmica de grupo positivas (HORN; STAKER, 2015, p. 145).

As *Summit Public Schools* integraram o tempo de ensino personalizado, o ciclo de aprendizagem baseada em projeto, expedições e outros processos e rotinas para todo o seu conjunto de experiências para os alunos conforme aparece na Figura 5.

Figura 5 - O ciclo de aprendizagem nas *Summit Public Schools*



Fonte: Horn e Staker (2015, p.151)

O Ensino Híbrido torna mais fácil para os educadores proporcionarem uma série de experiências acadêmicas e sociais que podem tornar a escola um lugar atrativo para os alunos executarem seus trabalhos.

Ao executar o Ensino Híbrido, gestores, professores e tutores deverão refletir constantemente sobre as práticas ofertadas na instituição, levando em consideração o projeto político pedagógico, as necessidades de formação pedagógica, a infraestrutura da instituição e, finalmente, os estudantes.

Alguns elementos chave em relação à postura dos alunos nas metodologias híbridas são a busca pela autonomia, a personalização do ensino, a educação para o domínio do conhecimento e as relações interpessoais em sala de aula (BACICH, 2015).

Os alunos, professores e gestores devem ser cooperadores no projeto de inovação escolar. Cabendo à equipe de gestão identificar as principais ações que promoverão mudanças significativas no ensino da instituição. A mudança na postura dos alunos é algo progressivo, constante e trabalhado ao longo das aulas.

A instituição de ensino tem o papel de levar o estudante a assumir uma postura ativa, responsável pelo seu conhecimento tanto nos momentos de estudo individual quanto nos momentos coletivos virtuais ou presenciais.

As tecnologias digitais poderão ser utilizadas para estimular e facilitar o processo de aprendizagem, mas cabe aos professores motivarem os alunos como utilizá-las de forma crítica e produtiva.

2.6 Avaliação da aprendizagem no *Blended Learning*: mudando o foco

No Ensino Híbrido, a avaliação é um ponto que precisa ser mudado e reinventado, pois se trata de uma metodologia diferente. No modelo híbrido, não basta enxergar a avaliação somente como momento de seleção entre os alunos aprovados ou reprovados. A avaliação precisa considerar o processo de aprendizagem, dando retornos do resultado ao aluno.

No Ensino Híbrido, o processo de avaliação tem que estar intimamente ligado com a personalização, uma vez que se devem respeitar o ritmo e as características próprias de cada aluno. Conforme Rodrigues (2015), deve-se respeitar os ritmos de apreensão de cada aluno e encontrar outras formas de ensino, quando um método não é suficiente para superar algum obstáculo no processo de aprendizagem.

De acordo com Bacich (2015), para o Ensino Híbrido, a transformação no papel da avaliação deve ocorrer aliada a uma mudança no foco, o qual deve recair sobre o aluno. Ainda, consoante a autora, a verificação de aprendizagem do aluno deve retornar para ele pelo resultado. Esse processo de *feedback* reorienta a prática escolar: conteúdos, formas de abordagem, instrumentos e ferramentas de avaliação,

enfim, todos os componentes da verificação da aprendizagem precisam reagir aos resultados, buscando suprir as demandas dos estudantes.

Conforme Rodrigues (2015), a avaliação na perspectiva de um modelo híbrido, além de estar focada no aluno, para verificação da aprendizagem, também precisa ser parte constante dessa relação de ensino.

Com a avaliação repensada e reintroduzida na escola, o conteúdo, as posturas e as habilidades podem ajudar no desenvolvimento dos grupos de alunos estudados. É possível estabelecer uma sequência de diversas etapas e utilizar a avaliação para verificar, individualmente, como os alunos estão lidando com elas.

A mudança de foco da avaliação é um trabalho complexo, sistemático e de grandes ramificações. Em conformidade com Bacich (2015, p. 128), as possibilidades que o Ensino Híbrido oferece nesse processo estão diretamente ligadas à maneira como a avaliação é colocada para o aluno; e, para o professor, como ela é proposta e analisada.

3 ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA: CÔNICAS

3.1 Considerações históricas

O estudo da Geometria Analítica teve início no século XVII com o filósofo Francês René Descartes, que foi o inventor das coordenadas cartesianas. Descartes, ao relacionar a Álgebra com a Geometria, criou princípios matemáticos capazes de analisar, por meio de métodos analíticos e geométricos, as propriedades do ponto, determinando distâncias entre pontos, localização e pontos de coordenadas, além da equação linear relacionada à reta e à circunferência.

Já a geometria demonstrativa teve início com Tales de Mileto que, no Egito, no século VI a.C., ao admirar a Grande Pirâmide (Quéops) ficou interessado em calcular a altura desse monumento. Consoante Garbi:

Para respondê-la, empregou um método, por ele mesmo criado e que ainda hoje nos cativa pela simplicidade e precisão: plantou sobre a areia, verticalmente, um bastão de madeira, cujo comprimento conhecia, e mediu-lhe a sombra. Após fazer o mesmo com a sombra da pirâmide deduziu-lhe a altura porque sombras e alturas, tanto em pirâmides quanto em bastões, quaisquer que sejam seus tamanhos, são sempre proporcionais. No momento em que a altura de um bastão é igual à sua sombra, a altura da pirâmide também será igual à sombra do monumento (GARBI, 2007, p.205).

Euclides foi o primeiro a utilizar o método, denominado axiomático. No século III a.C., na Universidade de Alexandria, escreveu “Os Elementos”, em 13 livros, sistematizando os conhecimentos da Geometria elementar com os meios que dispunha na época. Dessa maneira, alguns dos seus resultados foram intuitivos, sem demonstração, mas a ideia básica de “Os Elementos” influenciou toda a produção científica, até hoje admirada pelos filósofos e matemáticos, pela pureza do estilo geométrico e pela concisão luminosa da forma, além de as definições, os axiomas ou postulados e os teoremas não aparecem agrupados ao acaso, mas expostos numa ordem perfeita (SILVA, 2015, p. 16).

Na pesquisa que deu origem a esta dissertação, o objeto de estudo ficou limitado à Geometria Analítica Plana com o estudo de cônicas. As curvas cônicas são conhecidas e estudadas há muitos séculos. Os trabalhos mais antigos sobre o assunto foram feitos por Menaechmo, Aristeu e Euclides. Mas foi Apolônio, conhecido como “O Grande Geômetra”, que nasceu por volta de 262 a.C. em Perga, no sul da Ásia Menor e morreu por volta de 190 a.C. em Alexandria, que desenvolveu um estudo

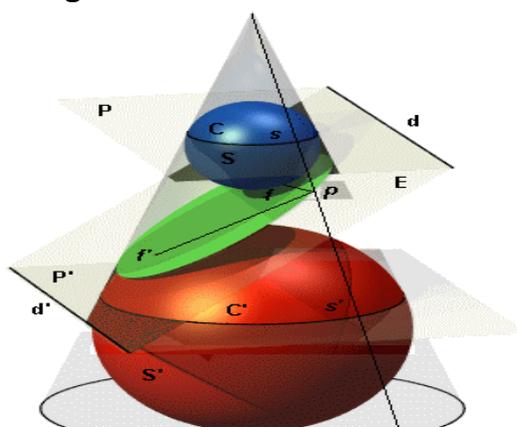
mais completo e detalhado sobre as seções cônicas. Sua grande obra *Seções Cônicas* supera completamente os trabalhos anteriores sobre o assunto (EVES, 1997).

Foi Apolônio que atribuiu às cônicas as designações ainda hoje utilizadas – elipse, parábola e hipérbole, apresentadas como seções de um cone. A sua obra “As cônicas” foi fundamental para estudos posteriores, como é o caso da descoberta de Robert Boyle, em 1662, mostrando que, sob temperatura constante, a função que expressa a relação entre o volume de massa fixa de gás e a pressão exercida sobre ela é hiperbólica; a descoberta de Johannes Kepler, por volta de 1605, sobre as órbitas elípticas descritas pelos planetas em torno do Sol.

Hoje verificam-se diversas situações no mundo real em que são utilizadas as cônicas, como as construções arquitetônicas, antenas, espelhos, lentes, entre outras. Segundo Monteiro (2014), as definições de cônicas, utilizadas atualmente, foram provadas no século XIX, por Germinal Pierre Dandelin (1794-1847), e constituem os chamados teoremas belgas para as cônicas.

O trabalho de Dandelin foi mostrar que dado um plano que secciona um cone, existe uma ou duas esferas que são tangentes ao plano e ao cone, essas são as esferas de Dandelin. Trabalhando com a propriedade das retas tangentes a uma esfera que, dado um ponto externo a uma esfera, é possível traçar duas retas que a tangenciam em pontos distintos, cujas distâncias ao ponto dado são iguais, assim, Dandelin consegue encontrar os focos e verificar a propriedade focal de uma só vez.

Figura 6 - Cônicas de Dandelin



Fonte: Ruas (2010)

Na verdade, o matemático não conseguiu mostrar a propriedade focal para as parábolas, mas Pierce Morton, em 1829, usou uma construção semelhante à de

Dandelin para provar aquela. Diversamente da elipse e da hipérbole, na demonstração da parábola, só haverá uma esfera tangente ao cone e ao plano de corte.

Os pontos em que as esferas tocam o plano são os focos da seção cônica. Cada cônica possui uma esfera para cada foco. Uma elipse tem duas esferas de Dandelin, ambas em uma mesma folha do cone (Figura 6).

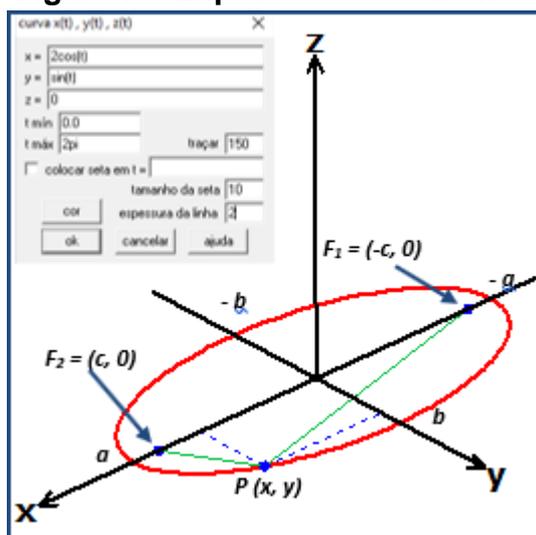
3.2 Informática Educativa e Ensino das Cônicas

Em cursos das áreas exatas, a Geometria Analítica é conteúdo constante no currículo; pode figurar no Plano de Ensino do Cálculo ou estar integrada com Álgebra Linear, denominada de GAAL, ou como uma disciplina autônoma.

Destacam-se obras e textos de Quádricas de Miranda e Laudares. (2011) com várias edições desde 1988. Essas obras e textos permitem a visualização das figuras espaciais, porque os autores fazem uma partição das superfícies com a identificação de curvas de nível e seções transversais.

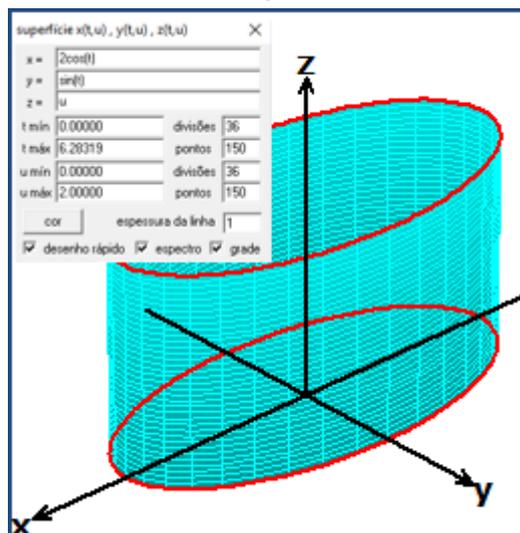
Siqueira (2019) elaborou, em sua pesquisa de mestrado das Cônicas aos Cilindros e Quádricas: a transição do plano para o espaço tridimensional, utilizando também o *software Winplot*, explorando e potencializando as habilidades de visualização espacial dos sujeitos da pesquisa (Figuras 7 e 8).

Figura 7 – Elipse e seus elementos



Fonte: Siqueira (2019, p. 52).

Figura 8 – Cilindro elíptico construído no Winplot 3D.



Fonte: Siqueira (2019, p. 52)

Seguindo a mesma ideia, Mota (2010), em sua pesquisa de mestrado, elaborou atividades com o *software Winplot*, usando a mesma metodologia de Miranda e Laudares (2007), ampliando e facilitando o processo da visualização do traçado de superfícies no espaço.

Desse modo, a informática deve ser entendida como uma nova extensão de memória, a ser desafiada com outros tipos de raciocínio além da linearidade, pela simulação, experimentação, com nova linguagem, que envolva escrita, oralidade, imagem e comunicação instantânea (LÉVY, 1993).

Entretanto, quando se trata de prática docente, pensa-se no medo de o uso da informática na educação ter como consequência o desemprego e a substituição do professor pela máquina:

Esse medo relacionava-se ao fenômeno do desemprego em diversos setores da sociedade devido ao avanço do uso de tecnologia informática. Muitos funcionários eram (e ainda são) demitidos quando as indústrias e outros setores da economia passam a utilizar máquinas computadorizadas mais modernas (BORBA; PENTEADO, 2003, p. 55).

Com o passar do tempo vê-se que a substituição do professor na área educacional não é algo para se preocupar em comparação com outros setores da economia e indústria; o professor tem um papel muito importante em ambientes informáticos.

Em se tratando do uso da tecnologia, a ameaça do desemprego cede lugar à necessidade de lidar com mudanças na prática docente, posto que passa de

transmissor e controlador de conhecimento para colaborador e orientador da aprendizagem significativa.

Contudo, muitos professores ainda temem as mudanças; conforme Miranda e Laudares (2007), resistem em trocar uma aula expositiva, considerada por aqueles um meio eficaz, por um processo mais participativo do estudante, isto é, resiste em adotar uma postura de “orientador” da construção do conhecimento, em substituição à metodologia do “doador” na transmissão do saber, ainda que a sociedade informacional lhe ofereça possibilidades e recursos tecnológicos para facilitar a mediação didática com uso de ferramentas desenvolvidas pela eletrônica e pela microeletrônica.

Seguindo esse pensamento, o professor precisa engendrar novos modelos metodológicos que façam uso das tecnologias existentes, com o objetivo de melhorar a interação com as diversas possibilidades existentes. Por esse motivo, devem melhorar seus conhecimentos e suas atitudes diante dessa nova realidade.

O uso da tecnologia computacional no contexto escolar tem papel fundamental nos dias de hoje, pois favorece a aprendizagem em múltiplos aspectos, visto que o computador se tem tornado um facilitador das atividades, funcionando como um instrumento de experimentação, do desenvolvimento das conjecturas no processo de investigação. Ressalva-se, no entanto, que o computador é um instrumento educacional e não um meio que ensina o aprendiz; uma ferramenta com a qual o estudante desenvolve um aprendizado que ocorre quando uma tarefa é realizada por meio daquele (VALENTE, 1993).

Considerando as possibilidades que o uso das tecnologias digitais traz para o ensino e aprendizagem, torna-se importante a implementação de *softwares* de matemática dinâmica, em salas de aula, particularmente para o ensino da Geometria, em especial, no ensino das seções cônicas, pois a questão problematizadora da pesquisa apresentada, refere-se à exploração do uso da tecnologia para a interpretação gráfica das cônicas. E essas

Compõem um assunto da Matemática antes da época de Euclides ($\pm 325 - 265$ a.C.), percebemos que a maioria dos alunos tem muita dificuldade de compreender os conceitos das mesmas, reduzindo seu conhecimento a simples manipulação e/ou memorização de fórmulas, levando a certo desprezo em relação ao tema pelos alunos (GUERRA; COSTA, 2014, p. 2).

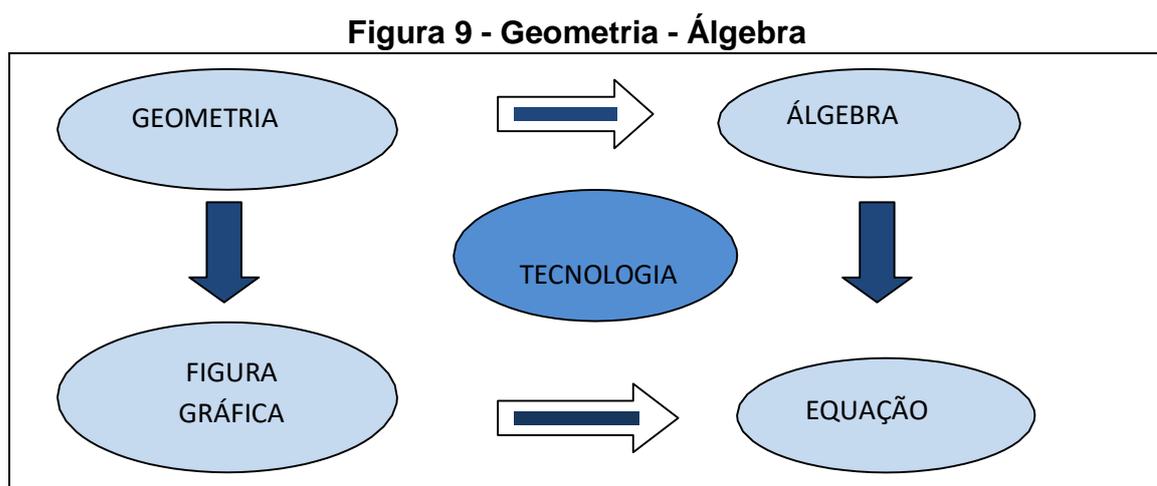
Conforme Borba e Penteado (2002, p. 242), “[...] os *softwares* de Geometria Dinâmica constituem um ambiente que favorece as atividades investigativas na sala de aula. Em especial, esses ambientes servem de base para várias pesquisas sobre demonstração em Geometria”. Com os *softwares* podem-se investigar diferentes soluções de construção para uma mesma cônica.

Para Mota (2010, p. 32), os *softwares* de geometria dinâmica possibilitam a exploração e experimentação pelo movimento das figuras, facilitando a visualização e a compreensão de propriedades das figuras planas e espaciais nos espaços de duas e três dimensões.

A integração da mídia computacional com a geometria analítica possibilita ao aluno uma melhor interpretação das equações e gráficos, visto que a manipulação dos parâmetros da equação favorece a visualização com a dinâmica e amovimentação da figura gráfica.

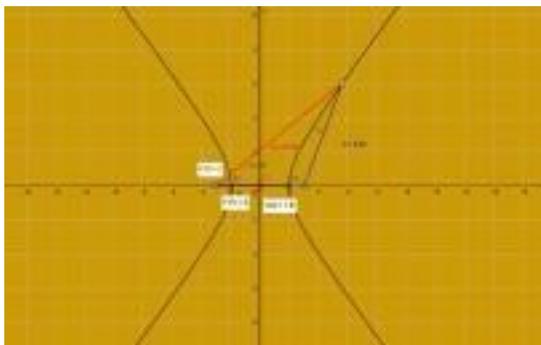
Na Geometria Analítica destacam-se a figura geométrica, a forma de objetos ou imagens da natureza que estejam no espaço e podem ser representados geometricamente, por um gráfico, ou algebricamente, por uma equação matemática. Essa equação tem a função de materializar a Geometria Analítica e conecta a Geometria à Álgebra.

A tecnologia tem a função de ajudar na visualização e interpretação geométrica entre geometria e álgebra, figura gráfica e equação (Figura 9).

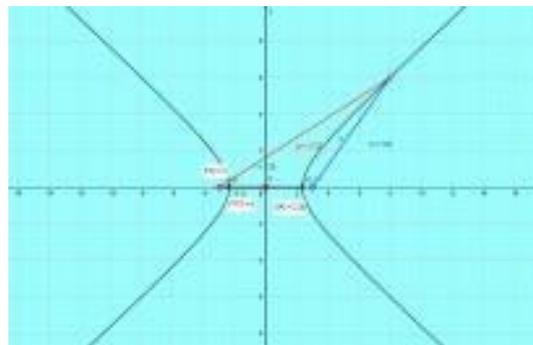


Fonte: Elaborada pelo autor.

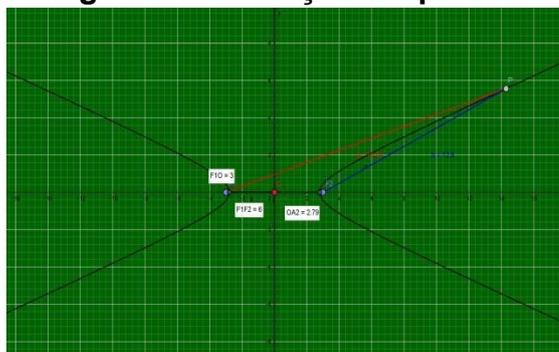
Qualquer tratamento desequilibrado desses dois estudos, por exemplo, com mais ênfase para a Álgebra, poderá algebrizar o estudo da Geometria Analítica,

Figura 11 - Situação 1 hipérbole

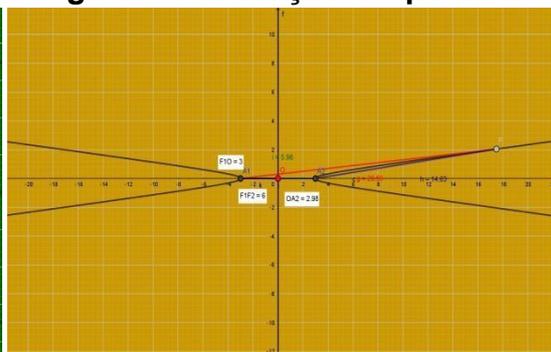
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 - Situação 2 hipérbole

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 - Situação 3 hipérbole

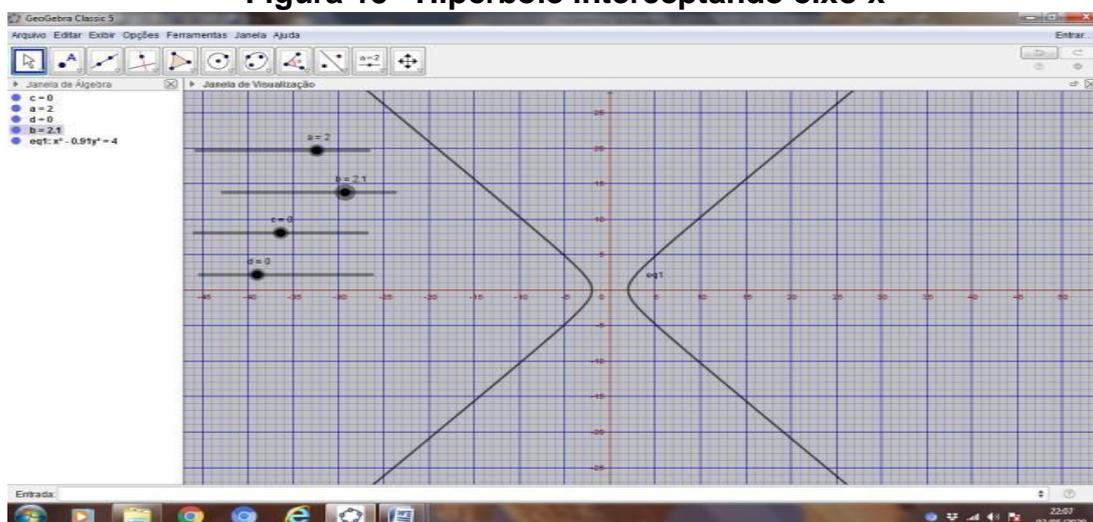
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 - Situação 4 hipérbole

Fonte: Elaborada pelo autor.

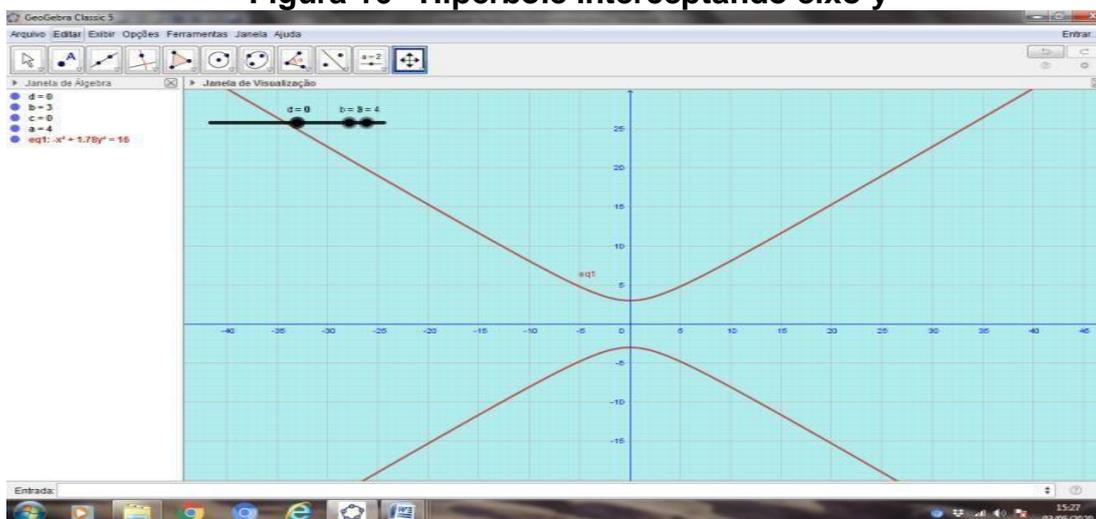
Uma referência ao gráfico com o conhecimento de equações, no estudo e na manipulação de parâmetros das equações, traz um efetivo entendimento das figuras cônicas. Por exemplo, ao variar os parâmetros dada sua equação, o estudante poderá verificar o sentido dos ramos da hipérbole (Figuras 15 e 16).

Figura 15 - Hipérbole interceptando eixo x



Fonte: Elaborada pelo autor.

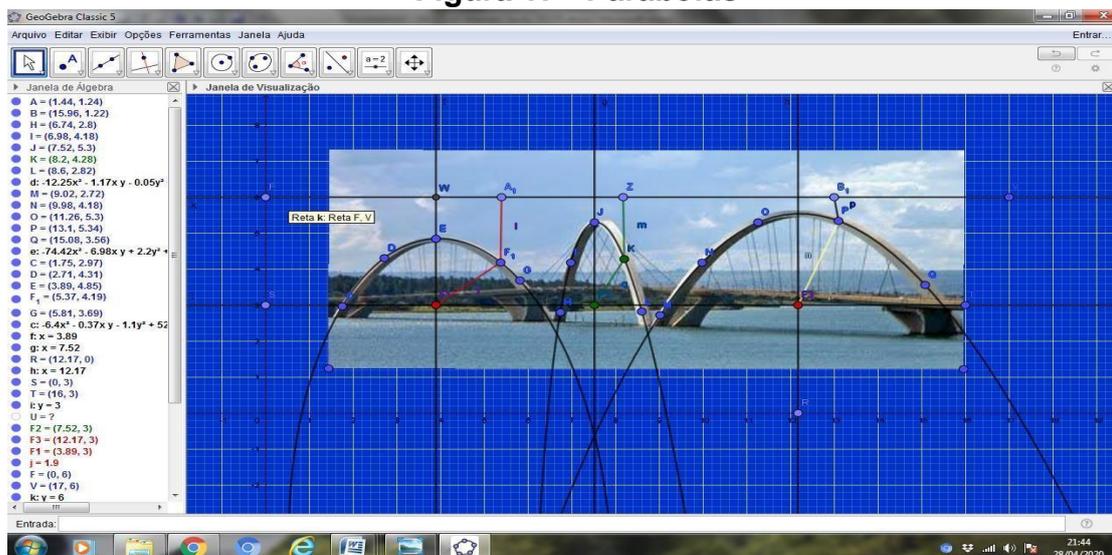
Figura 16 - Hipérbole interceptando eixo y



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na pesquisa realizada, optou-se também por trabalhar as cônicas na natureza ou no cotidiano da vida real, na identificação de uma imagem escolhida, na forma de uma ou mais cônicas, apresentando relações e informações relevantes dos elementos constituintes daquelas, conforme a Figura 17.

Figura 17 - Parábolas



Fonte: Capturada na internet (2020).

Finalmente, é conveniente destacar a importância de se estudarem as cônicas alinhadas ao uso das tecnologias existentes. No levantamento bibliográfico, contatou-se o baixo número de investigações do ensino das cônicas; do mesmo modo que existe um índice ainda mais baixo quando se busca o ensino das cônicas usando a metodologia do Ensino Híbrido.

4 ANÁLISE DO CONTEÚDO DE CÔNICAS EM LIVROS DIDÁTICOS

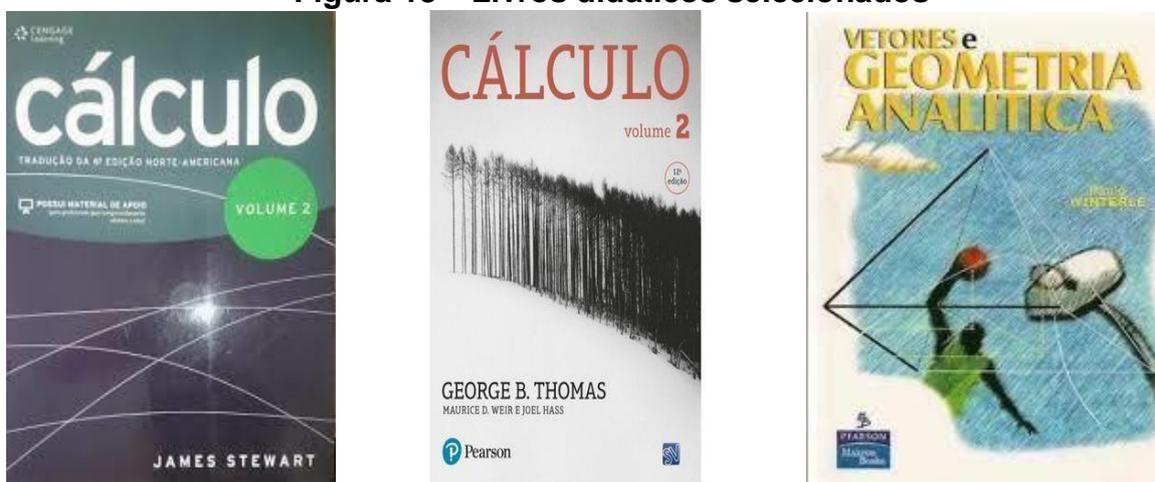
O livro didático é um dos instrumentos utilizados pelo professor na sua prática docente; é um recurso pedagógico importante de apoio que pode ser trabalhado em conjunto com outros recursos para uma melhor compreensão dos alunos.

Analisaram-se três livros didáticos, com diferentes abordagens do conteúdo de cônicas, de livre acesso para estudantes e professores. Torna-se interessante para ampliar os conhecimentos e enriquecer o conteúdo trabalhado de cônicas a análise de alguns livros didáticos.

As diferentes abordagens permitem a percepção das ideias manifestas pelas instituições de ensino superior para desenvolvimento do conteúdo trabalhado, principalmente nos cursos de exatas. O conteúdo Cônicas é um importante pré ou co-requisito para outras disciplinas, principalmente de Cálculo.

Os livros selecionados para análise são apresentados na Figura 18 e no Quadro 2.

Figura 18 – Livros didáticos selecionados



Fonte: Editoras Cengage Learning, Pearson Education do Brasil, Makron Books

Quadro 2 – Livros utilizados para análise comparativa do tópico da pesquisa.

Código	Título	Autor	Editora	Edição	Ano
L1	Cálculo V. 2	James Stewart	Cengage Learning	6ª	2011
L2	Cálculo V.2	George B. Thomas	Pearson Education do Brasil	12ª	2012
L3	Vetores e Geometria Analítica	Paulo Winterle	Makron Books	1ª	2007

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em cada livro, foram feitas uma análise das metodologias dos conteúdos abordados, a verificação e avaliação das atividades; também se analisaram conceitos e demonstrações, referência histórica, contextualização; referência a algum *software* matemático; quantidade de gráficos, profundidade do assunto abordado e equações.

No Quadro 3, apresentam-se as questões levantadas para análise dos livros didáticos selecionados.

Quadro 3 - Questões para análise do conteúdo de elipse abordado nos livros

Categorias	Código	Conteúdo abordado
Categoria 1	Q1	O conteúdo apresenta alguma referência histórica das cônicas?
Categoria 2	Q2	O conteúdo faz referência a algum <i>software</i> de matemática dinâmica?
Categoria 3	Q3	O autor propõe atividades que exploram geometricamente o reconhecimento de uma cônica?
Categoria 4	Q4	No conteúdo, é feita a análise, utilizando a representação algébrica (por meio de equações)?
Categoria 5	Q5	Há uma quantidade de atividades satisfatória em relação à aplicação das cônicas no cotidiano?
Categoria 6	Q6	No conteúdo das cônica são apresentadas situações cotidianas?
Categoria 7	Q7	No estudo sobre as cônicas, o autor faz interdisciplinaridade com outros conteúdos ou disciplinas?
Categoria 8	Q8	No conteúdo de cônicas são apresentadas situações de aplicabilidades na natureza ou fractais?
Categoria 9	Q9	No conteúdo de cônicas são apresentadas situações de aplicabilidades com alguma metodologia inovadora ou Ensino Híbrido (ensinos <i>on-line</i> e presencial)?
Categoria 10	Q10	Há orientação de atividade a ser trabalhada em ambiente informatizado ou híbrido?

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 4 – Valoração das Questões

Valoração das Questões	
Não atende.	1
Atende parcialmente.	2
Atende satisfatoriamente.	3

Fonte: Elaborado pelo autor

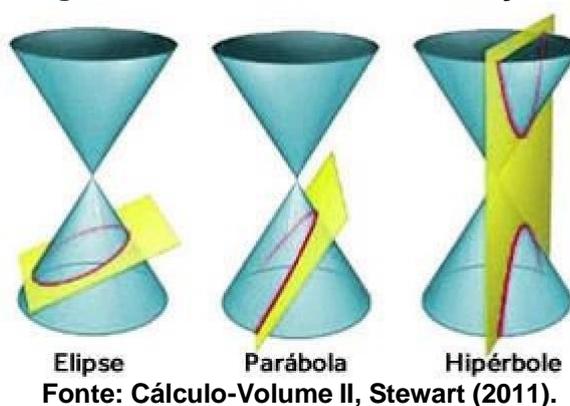
4.1 Análise do tema – Livro I

O livro I consta no Plano de Ensino da disciplina de Cálculo dos cursos de Matemática e Engenharia da Instituição pesquisada.

O autor James Stewart é mestre pela faculdade de Stanford e PhD pela Universidade de Toronto. Tornou-se professor de Matemática na *McMaster University* e seus livros foram traduzidos para diversos idiomas, em diversos países do mundo.

Esse livro se inicia com as definições geométricas de cônicas e são deduzidas suas equações-padrão, que são chamadas de seções cônicas, ou cônicas, porque resultam da interseção de um cone com um plano.

Figura 19 - Cone e suas interseções



Em relação à elipse, o autor a define como um conjunto de pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante. Esses pontos são chamados focos. É dado um exemplo de uma das leis de Kepler, em que as órbitas dos planetas no sistema solar são elipses com o Sol em um dos focos.

A metodologia utilizada pelo autor baseia-se em apresentar equações fazendo sempre comparações com representações geométricas, históricas e cotidianas. O autor não faz referência a *softwares* matemáticos e há poucas demonstrações algébricas e geométricas. Há relevância no estudo de cônicas nessa obra, pois o conteúdo é muito bem estruturado.

4.2 Análise do tema – Livro 2

Nesta obra, as cônicas são abordadas no capítulo 11 - equações paramétricas e coordenada polares, subitem seções cônicas - que se inicia definindo e revisando parábolas, elipses e hipérbolos geometricamente. Essas curvas são chamadas de

seções cônicas ou cônicas, porque são formadas pela secção de um cone duplo com um plano. Esse método da geometria foi a única forma que os matemáticos gregos encontraram para descrevê-las, pois eles não dispunham de ferramentas de coordenadas cartesianas ou polares.

A metodologia utilizada nessa obra baseia-se em apresentar definições das equações com representações geométricas: uma variedade maior de exemplos, mais exercícios de nível médio, mais figuras e melhor fluxo conceitual, bem como mais clareza e precisão. As cônicas são tratadas com profundidade. Os elementos das cônicas são abordados de forma dinâmica.

A excentricidade é abordada no capítulo de cônicas e coordenadas polares.

Figura 20 - Excentricidade das cônicas

DEFINIÇÃO

A excentricidade da elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ($a > b$) é:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

A excentricidade da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ é:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

A excentricidade de uma parábola é $e = 1$.

Fonte: Thomas (2012, p 114)

Figura 21 - Excentricidade das cônicas

(a) uma *parábola* se $e = 1$,

(b) uma *elipse* de excentricidade e se $e < 1$ e

(c) uma *hipérbole* de excentricidade e se $e > 1$.

Fonte: Thomas (2012, p 115)

Nesta obra, encontram-se atividades variadas com exemplos práticos do cotidiano das diversas cônicas. Muitos exercícios de translação de cônicas e uma seção inteira de teoria e exemplos que tratam basicamente de exercícios no cotidiano.

Não foram notadas referências históricas nem a algum *software* matemático aplicado ao conteúdo de cônicas.

O livro 2 consta no Plano de Ensino da disciplina de Cálculo dos cursos de Matemática e Engenharia da Instituição pesquisada.

4.3 Análise do tema – Livro 3

Nesta obra, o tema de cônica é abordado no capítulo 8, que se inicia definindo-a como sendo a interseção de um plano com uma superfície cônica. A diferença é que este livro trata a interseção em comparação a uma geratriz da superfície cônica em questão.

A metodologia baseia-se em muitas representações geométricas e algébricas das cônicas, muitos recursos demonstrativos e comparações cotidianas. Notam-se também citações e referências históricas; por exemplo, a importância do desenvolvimento da astronomia por meio das cônicas, citando Apolônio na Grécia antiga e, mais tarde, os astrônomos Kepler e Galileu, exemplificando por meio de trajetória de um projétil e dos planetas em torno do Sol. É uma obra que dá um tratamento especial à parametrização das cônicas, descrevendo suas definições e equações.

No fim do capítulo 8, de cônicas, a título de ilustrações, o autor traz um tópico chamado Curiosidades, exemplificando a propriedade de reflexão de todas as cônicas.

Como nos outros livros, também não faz referência a nenhum *software* de matemática dinâmica ou outros recursos tecnológicos existentes.

CONCLUSÃO: Ao se analisarem os livros didáticos, a perfeição dificilmente se torna unanimidade entre os analistas. Como aconteceu aqui, é sempre possível pontuar a existência de imperfeições em alguns aspectos, como em sua composição, na forma de apresentação do conteúdo, nas atividades propostas, na falta de recursos pedagógicos disponíveis; em alguns casos, na inadequação à realidade local, também das práticas sociais do grupo escolar em estudo.

Assim, após o estudo e a análise desses 3 livros e aplicando-se as valorações do Quadro 4, foram obtidos os dados apresentados no Quadro 5. O total de pontos obtido por cada livro é, aqui, um mero exercício especulativo e não pode ser assumido como descritor da realidade, mesmo sabendo-se que o livro L1 é adotado em muitas escolas superiores brasileiras.

Quadro 5 - Resultado da análise do estudo de cônicas nos livros

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	total
L1	3	1	3	3	2	2	3	1	1	1	20
L2	2	1	2	3	2	2	2	1	1	1	17
L3	2	1	2	3	3	3	2	1	1	1	19

Fonte: Elaborado pelo autor

5 CONSTRUÇÃO DAS ATIVIDADES

5.1 *Blended Learning*- Ensino Híbrido

As tecnologias digitais começam a fazer parte da rotina escolar, encorajando muitos educadores para a mudança didática. Levy (2000) propõe uma reflexão sobre o papel de tais tecnologias e suas aplicações nessa mudança. O autor ainda afirma que as tecnologias digitais proporcionam acesso rápido a uma grande quantidade de informações, modificando as formas de pensar e de construir conhecimentos.

Uma das possibilidades de uso da tecnologia digital na educação é o Ensino Híbrido, sobre o qual Horn e Staker (2015, p. 34) determinam:

[...] é qualquer programa educacional formal no qual um estudante aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino *on-line*, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, o lugar, o caminho e/ou ritmo (HORN; STAKER, 2015, p. 34).

A referência a um programa de educação formal é importante, visto que exclui casos em que, por exemplo, um estudante joga um *game* educativo no Xbox em casa ou baixa um aplicativo de aprendizagem enquanto está no supermercado, de forma independente de seu programa escolar formal.

No Ensino Híbrido, o conhecimento é construído democraticamente por meio de trabalhos individuais e coletivos. Para que isso aconteça, são necessários um planejamento pedagógico formal e uma infraestrutura bem organizada, como acesso à internet, laboratórios de informática, redes sem fio de qualidade e momentos para a formação de educadores.

Para Bacich (2015), existem interfaces que auxiliam na organização de notas, tarefas, trabalhos, mensagens e fóruns, como o *Moodle Edmodo*, *softwares* livres executados em um ambiente virtual de aprendizagem colaborativa. Nessas interfaces, os alunos podem ter acesso a materiais e mídias disponibilizados pelos professores e tutores, participar de avaliações, de fóruns de discussões, de questionários e testes *on-line*.

Com o desenvolvimento da tecnologia, o futuro das escolas se dará pelo estabelecimento das conexões por meio das plataformas adaptativas, em que os estudantes se tornam agentes ativos no processo ensino-aprendizagem e os professores mediadores e orientadores.

A organização metodológica pelo Ensino Híbrido nesta pesquisa tem por objetivo fazer com que o aluno explore os conceitos de cônicas por meio de construções, utilizando as tecnologias digitais do *software* de geometria dinâmica *GeoGebra*, de maneira que o estudo seja motivador e significativo, levando o estudante a formalizar ideias, conceitos sobre os tópicos abordados.

5.2 Modelo de Rotação por Estações

Uma das primeiras questões realizadas nesta pesquisa foi escolher os modelos do Ensino Híbrido, sua adaptação ao tipo de problema proposto e a instituição na qual foram experimentadas as atividades.

Optou-se pelo Modelo de Rotação por Estações, no qual o aluno faz um rodízio em várias estações sendo que pelo menos uma estação conta com recursos *on-line*, de acordo com uma agenda de tarefas ou por decisão do próprio professor, as demais podem ser tarefas escritas em papel, pequenos projetos, instrução individualizada ou trabalhos em grupos.

Escolheram-se as estações pensando em desenvolver um ensino e aprendizado personalizados pelas diversas experiências que o estudante terá, como acesso a vídeos, textos, dicas e exercícios. Além disso, pode-se receber retorno assíncrono ou síncrono das atividades realizadas.

Em todas as atividades, o objetivo geral é que o aluno aprenda, por meio de tecnologias computacionais, com algum elemento de controle sobre suas atividades. Em alguns momentos, os alunos deverão fazer tarefas *on-line* e presenciais. Nos momentos *on-line*, em que geralmente o aluno estuda sozinho, é possível se valer do potencial das tecnologias para que tenha controle sobre seus estudos, tomando decisões que favoreçam sua autonomia.

Buscando alcançar os resultados esperados, utilizou-se o *software* de matemática dinâmica *GeoGebra* que possui recursos de geometria, álgebra e cálculo. O *GeoGebra* tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo, uma imagem geométrica e outra algébrica do objeto. Além de ser um elemento importante de apoio tecnológico e pedagógico aos professores no aprofundamento da aprendizagem das cônicas.

As atividades não se prendem somente a utilizar o *software GeoGebra*, não é um pensamento biunívoco. O uso da tecnologia não resolverá todos os problemas da

Matemática, o importante é saber utilizar a tecnologia aliada a metodologias como o Ensino Híbrido para o auxílio da aprendizagem.

O uso do *software GeoGebra* para representar e explicitar os passos na resolução de problemas de Geometria Analítica leva o aluno a sentir necessidade de complementar a sua aprendizagem com a demonstração da validade das propriedades geométricas. Isso acontece em razão de o *software* permitir a manipulação dos objetos construídos, preservando as características inerentes, definidas em sua construção, possibilitando também o desenvolvimento da visualização em matemática. À vista disso, favorece o entendimento dos conceitos decônicas.

O estudante pode realizar diversas atividades no seu tempo, mesmo estando em grupo. As atividades propostas nas estações exploram diversas habilidades, como a leitura e produção textual, trabalhos de visualização, interpretação e uso das tecnologias, bem como promovem a relação interpessoal.

Esta pesquisa é constituída de sete atividades, distribuídas nas três estações. O tempo de permanência em cada estação será de acordo com o Quadro 6.

Quadro 6 – Estações de aprendizagem

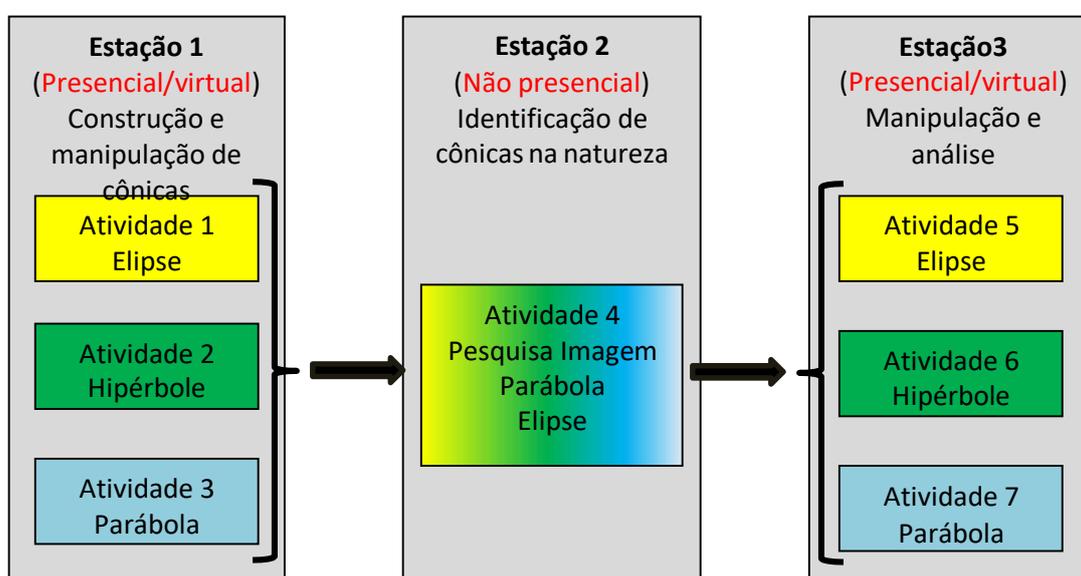
Nº	Estação	Atividade	Tempo	Forma/Local	Recurso Tecnológico
1	Construção e manipulação de cônicas	Desenvolver o traçado, interpretação, visualização manipulação e conceito das cônicas (elipse, parábola e hipérbole) sem o conhecimento de equações.	100 min	Individual Presencial/ virtual	Equipamentos com acesso à: Internet; <i>GeoGebra</i> ; Editor de texto; Buscadores; E-mail.
2	Identificação de cônicas na natureza	Pesquisar e identificar o formato de cônicas em imagens.	50 min.	Individual Não presencial	
3	Manipulação e análise	Identificar, interpretar e manipular alguns elementos das cônicas (elipse, parábola e hipérbole) com o conhecimento de suas equações.	100 min.	Individual Presencial/ virtual	

Fonte: Elaborado pelo autor.

O pesquisador conduzirá da melhor maneira o rodízio dos estudantes em cada estação, respeitando o ritmo de cada aluno, de modo que todos passem pelas 3 (três) estações de aprendizagem. Em todas as estações, os estudantes deverão responder às questões propostas.

Para que o ensino possa alcançar seus objetivos, as tarefas de cada estação funcionam de forma independente, porém, existe uma integração entre aquelas, conforme apresentado na Figura 22, para que os alunos tenham a oportunidade de acessar os conteúdos com diferentes abordagens.

Figura 22 - Esquema da integração das estações



Fonte: Elaborada pelo autor.

O detalhamento das estações de aprendizagem abordando cada uma das atividades, tempo, local de realização e recursos tecnológicos envolvidos, aparecem no Quadro 6.

Estação 1- Construção e manipulação de cônicas

Objetivos

- Reconhecer cônicas e seus elementos;
- desenvolver atividades de construção de cônicas desconhecendo-se as suas equações, utilizando o *software GeoGebra*;
- desenvolver um conceito introdutório para as cônicas.

Metodologia

Na primeira estação de construção e manipulação de cônicas, foram desenvolvidas três atividades; uma atividade para cada cônica estudada. O conteúdo trata do traçado de cônicas, desconhecendo-se as suas equações, seguindo os passos do roteiro de orientações.

O aluno vai construindo, desenvolvendo suas conjecturas e chegando ao conceito de cada cônica. As dúvidas são sanadas pelo professor orientador no decorrer das atividades.

Optou-se por desenvolver as atividades da primeira estação individualmente, com toda a turma separada, em cada computador.

Nesta estação, são abordados a excentricidade e elementos principais das cônicas e a construção conforme aparece no Quadro 7.

Quadro 7 – Construção e manipulação de cônicas

Nº	Estação	Atividades		Conteúdo abordado
1	Construção e manipulação de cônicas	1ª	Elipse	Excentricidade; Elementos principais; Conceito.
		2ª	Hipérbole	
		3ª	Parábola	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Estação 2 – Identificação de cônicas na natureza

Objetivos

- Identificar visualmente representações de cônicas em imagens da natureza;
- representar um esboço para destacar a cônica na imagem escolhida;
- introduzir o conceito, elementos e relações de uma cônica.

Metodologia

A segunda estação é não presencial e foi organizada para o trabalho individual. Espera-se que os acadêmicos acessem *sites* de busca para fazer pesquisas de imagens de animais, plantas, construções e outras figuras encontradas na natureza ou sociedade.

A partir dessa busca, os alunos devem identificar e destacar, na imagem escolhida, a forma de uma ou mais cônicas, apresentando suas informações (conceito; elementos; relações). O Quadro 8 apresenta a síntese sobre essa estação.

Quadro 8 – Identificação de cônicas na natureza

Nº	Estação	4ª Atividade	Conteúdo abordado
2	Identificação de cônicas na natureza.	Pesquisar e identificar o formato de cônicas em imagens.	Conceito; relações existentes.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Estação 3– Atividades de estudo das cônicas quanto a seu gráfico, conhecendo as suas equações

Objetivos

- Desenvolver atividades de traçado de cônicas conhecendo as suas equações, utilizando o *software GeoGebra*;
- identificar as características das cônicas;
- identificar visualmente as posições das cônicas por meio da manipulação dos parâmetros das equações;
- analisar os elementos das cônicas para algumas situações dadas.

Metodologia

Na terceira estação, serão desenvolvidas mais três atividades - como na primeira estação, uma atividade para cada cônica - que deverão ser executadas no laboratório de informática em duplas. Trata-se de atividades guiadas sobre o traçado de cônicas, conhecendo-se as suas equações, seguindo a metodologia e os passos do roteiro de orientações em cada atividade.

Nesse momento, o aluno, deverá aprofundar os conhecimentos sobre as cônicas com a manipulação de parâmetros, elementos e construção, conforme o Quadro 9.

Quadro 9 – Estação Manipulação e análise

Nº	Estação	Atividades		Conteúdo abordado
3	Manipulação e análise	5ª	Elipse	Relação entre parâmetros, elementos e a construção
		6ª	Hipérbole	
		7ª	Parábola	

Fonte: Elaborado pelo autor.

6 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DE ITENS

Os sujeitos da investigação foram 6 estudantes de uma faculdade pública de Montes Claros-MG, que estavam cursando o segundo período de Matemática, matriculados na disciplina Bases do Ensino e da Aprendizagem da Matemática, no ano de 2020.

Levando-se em conta o critério das atividades desenvolvidas, foram apresentados os cadernos de atividades dos 6 alunos que participaram da pesquisa; nesta pesquisa, os 6 alunos foram denominados de: A1, A2, A3, A4, A5 e A6. Essa metodologia foi pensada para promover a autonomia, desenvolver atitudes proativas e diminuir as dispersões.

Devido ao distanciamento social decorrente da pandemia de Coronavírus, toda a atividade foi feita *on-line*. Foram preparadas duas aulas *on-line* para explanação das atividades. Durante todo o desenvolvimento da pesquisa, o papel do professor pesquisador foi de aclarar todas as informações possíveis, assim como os comentários feitos pelos alunos, com menor intervenção admissível.

A atividade sendo feita *on-line*, fizeram-se necessários explicação e detalhamento de todos os passos para melhor interpretação dos alunos. Sendo assim foi confeccionado, além do quadro de orientações, um roteiro direcionador para a realização de todas as atividades da estação. Em todas elas, a autonomia, o local, o ritmo de aprendizagem e a forma de aprendizagem foram percebidos e analisados de maneira precisa e contundente pelo professor orientador.

Nos momentos adidáticos, os alunos conseguiram desenvolver mais significativamente suas autonomias. A maioria dos estudantes participantes conseguiu entregar as atividades no prazo de uma semana e passou para a segunda e terceira estações.

Foi fornecido aos sujeitos da pesquisa um caderno de atividades dividido em três partes. A primeira parte contempla o conteúdo de “cônicas”, em que foi apresentada uma sequência de atividades que aborda as construções, excentricidade e conceitos desconhecendo suas equações, tendo como apoio tecnológico o *software* de matemática dinâmica *GeoGebra*.

A segunda parte contempla Análises de figuras cônicas em imagens cotidianas e na natureza, tendo como apoio tecnológico o *software* de matemática dinâmica *GeoGebra* e *sites* de buscas.

A terceira parte contempla o conteúdo de “cônicas” em que foi apresentada uma sequência de atividades que aborda as construções, manipulações de parâmetros conhecendo as equações, tendo como apoio tecnológico o *software* de matemática dinâmica *GeoGebra*.

As atividades foram apresentadas pelo sistema *on-line*, com a utilização do *software Google Meet* (ou *Hangouts Meet*) que é um aplicativo de videoconferência que permite criar reuniões com várias pessoas interativamente.

A pesquisa foi pensada em duas aulas planejadas para acontecer em dois encontros de duas horas, totalizando quatro horas. Essas aulas foram realizadas para orientar e introduzir a realização das atividades. As atividades aconteceram *on-line* e foi estipulado um prazo para a entrega das atividades, respeitando o ritmo da aprendizagem individual. Em alguns momentos, foi orientado ao aluno “printar” a tela do computador, salvar juntamente com as repostas e gravar em PDF com o nome da estação e do aluno. Também foi orientado ao aluno, assim que terminar a atividade, enviar para o e-mail do pesquisador, anexando também no *Google Classroom* da turma.

Optou-se, por meio da conveniência das aulas *on-line*, que os alunos desenvolvessem os primeiros trabalhos da primeira e segunda, estações, para, somente em seguida, receber as orientações da terceira. Os seis alunos, sujeitos dessa pesquisa, responderam a mais de 90% das atividades. Os encontros aconteceram nos dias 22 e 29 de setembro de 2020.

Foi confeccionado um quadro de orientações gerais como direcionador na realização das atividades, conforme o Quadro 10.

Quadro 10 - Orientações gerais

<p>CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA – 2º PERÍODO DISCIPLINA: Bases do Ensino e da Aprendizagem da Matemática II Prof. Pesquisador: Marcelo Mesquita de Souza</p>
<p>Orientações Gerais</p>
<p>Esta atividade faz parte de uma dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais- PUC- MG.</p> <p>Esta pesquisa é constituída de sete atividades, distribuídas nas três estações. O assunto pesquisado é Geometria Analítica, especificamente cônicas. O aluno deverá participar das três estações. O pesquisador conduzirá da melhor maneira o rodízio dos estudantes em cada estação, de modo que todos passem pelas 3 (três) estações de aprendizagem. Em todas as estações, os estudantes deverão responder às questões propostas.</p> <p>Buscando alcançar os resultados esperados, utilizam-se o <i>software</i> de matemática dinâmica GeoGebra.</p> <p>Estas atividades serão entregues com as respostas digitadas para posterior análise.</p> <p>Tema da dissertação “O ensino híbrido – <i>blended learning</i> – uma proposta para o estudo de cônicas em cursos superiores”.</p> <p align="right"> Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares Orientando: Marcelo Mesquita de Souza </p>

Fonte: Elaborado pelo autor.

6.1 1º Encontro: Desenvolvimento das Estações 1 e 2

Além do quadro de orientações gerais, foi confeccionado um quadro de orientações para a Estação 1 (Quadro 11).

Quadro 11 – Orientações para Estação 1

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA – 2º PERÍODO DISCIPLINA: Bases do Ensino e da Aprendizagem da Matemática II Prof. Pesquisador: Marcelo Mesquita de Souza
Orientações para a Estação 1
<p>A primeira estação de construção e manipulação de cônicas foi elaborada em três atividades. O conteúdo trata do traçado de cônicas, desconhecendo-se as suas equações, seguindo os passos do roteiro de orientações.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- Esta estação utilizará como recurso tecnológico o <i>software GeoGebra</i>. 2- Siga os passos existentes na primeira estação. 3- Responda às questões no próprio arquivo com cor da fonte (letra) diferenciada. 4- Em alguns momentos você deverá “printar” a tela e salvar no arquivo do Word. Esse arquivo com as respostas e todos os “printes” da Estação 1 devem ser enviados para o e-mail marcelomontesclaros@yahoo.com.br, também devem ser anexados no Google Classroom. Grave esse arquivo, em PDF, com o nome ESTAÇÃO1_SeuNome

Fonte: Elaborado pelo autor.

Da mesma forma vista na Estação 1, foi confeccionado um quadro de orientações para a Estação 2, conforme aparece no Quadro 12.

Quadro 12 – orientações para Estação 2

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA – 2º PERÍODO DISCIPLINA: Bases do Ensino e da Aprendizagem da Matemática II Prof. Marcelo Mesquita de Souza
Orientações para a Estação 2
<ol style="list-style-type: none"> 1- Esta estação utilizará como recurso tecnológico o <i>software GeoGebra</i>. 2- Siga os passos existentes na segunda estação. 3- Responda às questões no próprio arquivo com cor de fonte (letra) diferenciada. <p>Em alguns momentos você deverá “printar” a tela e salvar no arquivo do Word. Esse arquivo com as respostas e todos os “printes” da Estação 2 devem ser enviados para o e-mail marcelomontesclaros@yahoo.com.br também devem ser anexados no Google Classroom. Grave esse arquivo, em PDF, com o nome ESTAÇÃO2_SeuNome</p>

Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2 2º Encontro: Desenvolvimento da Estação 3

Assim como nas Estações 1 e 2, para a Estação 3 foi confeccionado um quadro de orientações (Quadro 13) como direcionador aos alunos.

Quadro 13 – Orientações para Estação 3

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA – 2º PERÍODO DISCIPLINA: Bases do Ensino e da Aprendizagem da Matemática II Prof. Pesquisador: Marcelo Mesquita de Souza
Orientações para a Estação 3
<p>Esta estação abordará conhecimentos sobre as cônicas com manipulação de parâmetros, elementos e construção.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- Esta estação utilizará como recurso tecnológico o <i>software GeoGebra</i>. 2- Siga os passos apontados na estação para manipular os parâmetros, elementos e construções existentes na terceira estação. 3- Responda às questões no próprio arquivo com cor de (fonte) letra diferenciada. 4- Em alguns momentos você deverá “printar” a tela e salvar no arquivo do Word. Esse arquivo com as respostas e todos os “printes” da Estação 3 devem ser enviados para o e-mail marcelomontesclaros@yahoo.com.br, também devem ser anexados no Google Classroom. Grave esse arquivo, em PDF, com o nome ESTAÇÃO3_SeuNome

Fonte: Elaborado pelo autor.

6.3 Sequência de atividades

6.3.1 Desenvolvimento da Estação 1

CADERNO DE ATIVIDADES

Quadro 14 - Estudo da elipse

Estação 1	Construção e Manipulação de Cônicas
Atividade 1- Estudo da elipse	
Siga os passos abaixo.	
P(1): Crie dois pontos sobre o eixo das abscissas e um fora do eixo, usando os comandos do botão ELIPSE .	
P(2): Renomeie os pontos sobre o eixo x para (F1, F2) - Foco 1, Foco 2 - o outro ponto somente sobre a elipse para (P) .	
P(3): Use o comando segmento de reta. Crie os segmentos F1P e F2P .	
P(4): Na interseção da elipse com o eixo x , crie dois pontos (A1, A2) .	
P(5): Trace uma mediatriz entre os focos (F1, F2) , para isso, use o botão MEDIATRIZ .	
P(6): Na interseção da elipse com a mediatriz (vértices), crie dois pontos (B1, B2) .	
P(7): Na interseção da mediatriz com o eixo x , crie um ponto e o nomeie de (C)	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Obs.: Se necessário, apague as medições feitas para facilitar a visualização.

Responda:

a) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o ponto P e o foco F1; (PF1).
2. o ponto P e o foco F2; (PF2).
3. os focos F1 e F2; (F1F2).

Arraste o ponto P, tome valores de PF1, PF2 e F1F2 e preencha o quadro abaixo.

	PF1	PF2	PF1 + PF2	F1F2
Situação 1				
Situação 2				
Situação 3				

Obs. Neste momento, “printe” a tela do *GeoGebra* e cole no arquivo do Word que será enviado ao final da atividade.

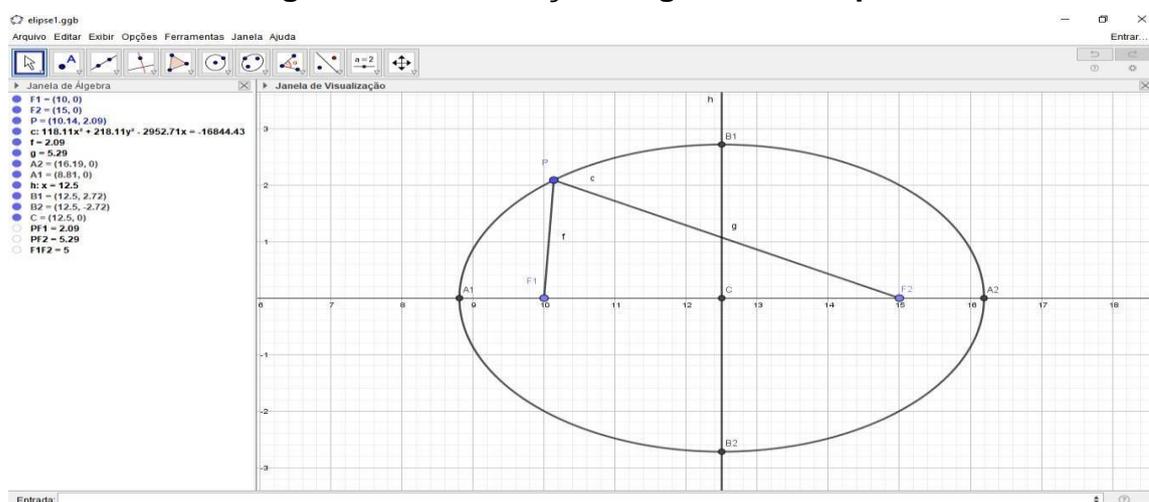
Os participantes não tiveram dificuldades para preencher o quadro e construir a elipse. Por meio dos quadros e gráficos construídos, pode-se concluir que todos os seis alunos entenderam esta questão.

Quadro 15 - Situações elipse

	PF1	PF2	PF1 + PF2	F1F2
Situação 1	2,09	5,29	7,38	5
Situação 2	3,24	2,39	5,63	5
Situação 3	0,68	5,01	5,69	5

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Figura 23 - Construção do gráfico da elipse



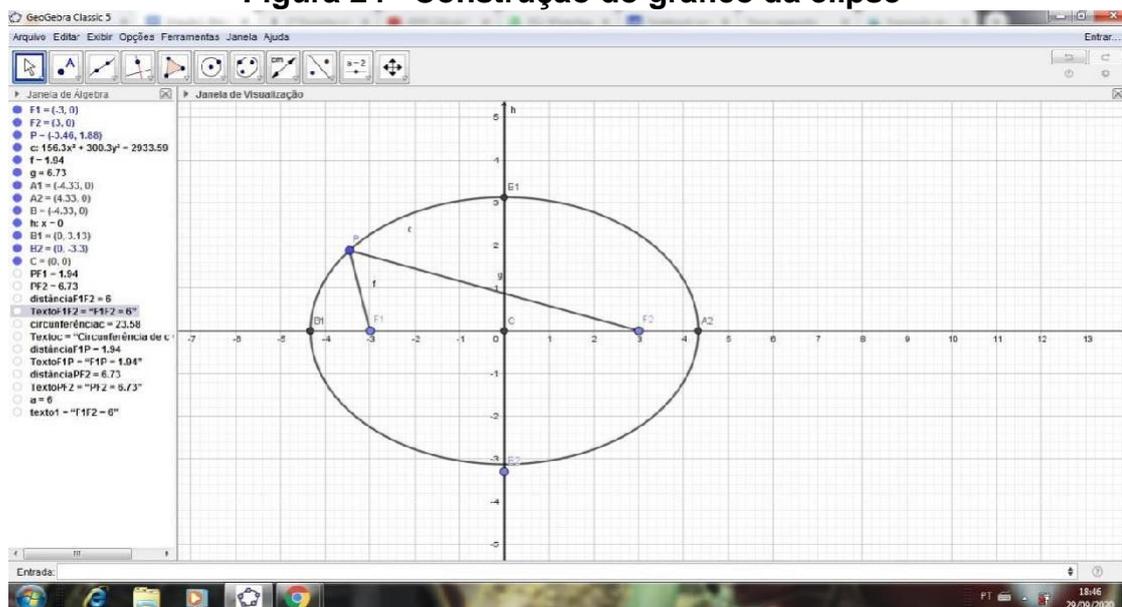
Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 16 - Situações - elipse

	PF1	PF2	PF1 + PF2	F1F2
Situação 1	5,4	3,55	8,95	6
Situação 2	5,94	2,55	8,49	6
Situação 3	1,94	6,73	8,67	6

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Figura 24 - Construção do gráfico da elipse



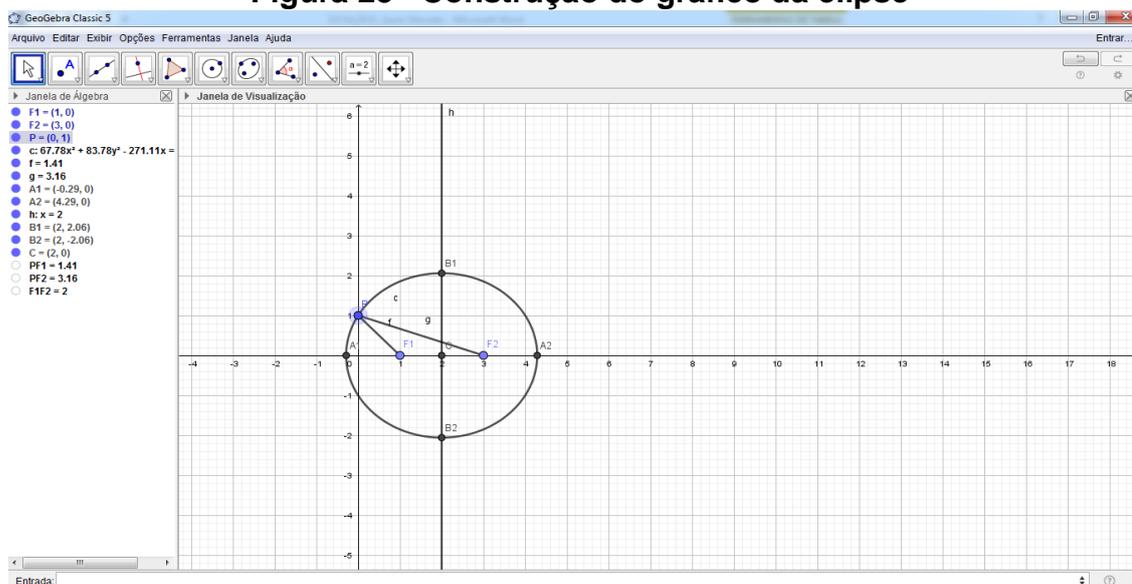
Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 17 - Situações elipse

	PF1	PF2	PF1 + PF2	F1F2
Situação 1	3	3,61	6,61	2
Situação 2	3,16	4,24	7,4	2
Situação 3	1,41	3,16	4,57	2

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Figura 25 - Construção do gráfico da elipse



Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Qual a relação entre a soma das distâncias PF1 e PF2 e a distância entre F1F2?

Quadro 18 - Resposta da questão

Qual a relação entre a soma das distâncias PF1 e PF2 e a distância entre F1F2?
Podemos concluir por desigualdade triangular que: $|PF1| + |PF2| \geq |F1F2|$.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 19 - Resposta da questão

Qual a relação entre a soma das distâncias PF1 e PF2 e a distância entre F1F2? **A soma das distâncias de PF1 e PF2 é sempre maior que a distância entre F1F2.**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 20 - Resposta da questão

Qual a relação entre a soma das distâncias PF1 e PF2 e a distância entre F1F2?
A soma das distâncias de PF1 e PF2 é sempre maior que a distância entre F1F2.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

b) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o ponto P e o foco F1; (PF1).
2. o ponto P e o foco F2; (PF2).
3. os vértices A1 e A2; (A1A2).

Arraste o ponto P, tome valores de PF1, PF2 e A1A2 e preencha o quadro abaixo.

	PF1	PF2	PF1 + PF2	A1A2
Situação 1				
Situação 2				
Situação 3				

Quadro 21 - Situações elipse

	PF1	PF2	PF1 + PF2	A1A2
Situação 1	4,58	4,57	9,15	9,15
Situação 2	6,32	2,83	9,15	9,15
Situação 3	1,05	8,10	9,15	9,15

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 22 - Situações elipse

	PF1	PF2	PF1 + PF2	A1A2
Situação 1	1,94	6,73	8,67	8,67
Situação 2	4,6	7,14	11,74	11,74
Situação 3	2,24	7,19	9,43	9,43

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 23 - Situações elipse

	PF1	PF2	PF1 + PF2	A1A2
Situação 1	1,94	6,73	8,67	8,67
Situação 2	4,6	7,14	11,74	11,74
Situação 3	2,24	7,19	9,43	9,43

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Qual a relação entre as distâncias PF1 e PF2 e a distância entre A1A2?

Quadro 24 - Resposta da questão

Qual a relação entre as distâncias PF1 e PF2 e a distância entre A1A2?

R - A soma de PF1 e PF2 é igual a A1A2.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 25- Resposta da questão

Qual a relação entre as distâncias PF1 e PF2 e a distância entre A1A2?

A soma das distâncias de PF1 e PF2 é a distância de A1A2.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 26- Resposta da questão

Qual a relação entre as distâncias PF1 e PF2 e a distância entre A1A2?

A soma de PF1 e PF2 é igual a A1A2

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Quadro 27- Resposta da questão

Qual a relação entre as distâncias PF1 e PF2 e a distância entre A1A2?

Desconsiderando o arredondamento feito pelo GeoGebra, observa-se que:

$$|PF1| + |PF2| = |A1A2|$$

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

c) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o ponto C e o vértice A1; (CA1) - semieixo maior (**a**).
2. o ponto C e o vértice B1; (CB1) - semieixo menor (**b**).

Arraste os focos F1 e F1 até coincidirem com o ponto **C**.

- O que acontece com as medidas de CA1 e CB1?
- O que acontece com o formato da elipse?

Essas duas questões desencadearam algumas dúvidas, contudo, dos seis alunos, cinco responderam corretamente que as medidas CA1 e CB1 ficam as mesmas, além disso, a elipse se transforma em uma circunferência.

Quadro 28 - Resposta das questões

O que acontece com as medidas de CA1 e CB1?

R - Ficam com a mesma medida.

O que acontece com o formato da elipse?

R - Se transforma em um círculo.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 29 - Resposta das questões

O que acontece com as medidas de CA1 e CB1?

Ficam com a mesma medida.

O que acontece com o formato da elipse?

Ela se transforma em um círculo.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Quadro 30 - Resposta das questões

O que acontece com as medidas de CA1 e CB1?

Fica indefinido.

O que acontece com o formato da elipse?

Não soube responder.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 31- Resposta das questões

O que acontece com as medidas de CA1 e CB1? Os segmentos ficam congruentes.

O que acontece com o formato da elipse? Fica com o formato de uma circunferência.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

d) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o ponto C e o foco F1; (CF1) - Semidistância focal (**c**).
2. os pontos F1 e B1; (F1B1) - Denominado (**a**).

Arraste o foco F2, tome valores para (**c**) e (**a**) e calcule a excentricidade (**e**) da elipse.

	Valor de a	Valor de c	$e = \frac{c}{a}$
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			

Quadro 32 - Situações elipse

	Valor de a	Valor de c	$e = \frac{c}{a}$
Situação 1	4,58	4	0,8734
Situação 2	3,22	2,5	0,7764
Situação 3	5,05	4,5	0,8911

Fonte: Reprodução de atividade feita por A5 – Caderno de Atividades.

Quadro 33 - Situações elipse

	Valor de a	Valor de c	$e = \frac{c}{a}$
Situação 1	5,28	3,5	0,66
Situação 2	10,36	9	0,87
Situação 3	4,6	0,34	0,08

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

O que acontece com o formato da elipse com a excentricidade próxima a zero?

O que acontece com o formato da elipse com a excentricidade próxima a um?

e) Formule com suas palavras um conceito para a elipse. Tome como base a distância do ponto P aos focos e a medida do eixo maior?

No caso da excentricidade, a maioria dos alunos compreendeu o significado do achatamento e esfericidade com a excentricidade próxima a zero ou próximo a um, respectivamente.

Quadro 34 - Resposta das questões

O que acontece com o formato da elipse com a excentricidade próxima a zero? **Fica mais redonda.**

O que acontece com o formato da elipse com a excentricidade próxima a um? **Fica mais côncava.**

Formule com suas palavras um conceito para a elipse. Tome como base a distância do ponto P aos focos e a medida do eixo maior?

É o conjunto dos pontos em que a soma da distância entre eles e os focos serão sempre iguais.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A5 – Caderno de Atividades.

Quadro 35 - Resposta das questões

O que acontece com o formato da elipse com a excentricidade próxima a zero? **Tende para o formato de uma circunferência.**

O que acontece com o formato da elipse com a excentricidade próxima a um? **A elipse se “estica”, o segmento B1B2 cresce menos que o segmento A1A2 quando x cresce.**

Formule com suas palavras um conceito para a elipse. Tome como base a distância do ponto P aos focos e a medida do eixo maior?

Dados dois pontos A e B distintos, elipse é a figura geométrica determinada por todos os pontos C, tais que, a soma das distâncias entre segmentos AC e BC seja resulte em uma constante.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 36 - Estudo da hipérbole

Estação 1	Construção e Manipulação de Cônicas
Atividade 2- Estudo da hipérbole	
Siga os passos abaixo.	
P(1): Use o comando hipérbole. Crie dois pontos distintos sobre o eixo x e um ponto qualquer sobre a hipérbole.	
P(2): Nomeie os pontos sobre o eixo x de (F1) e (F2) - Foco 1 e Foco 2 - e o ponto sobre a hipérbole de (P) .	
P(3): Use o comando interseção de dois objetos. Crie pontos na interseção da hipérbole com eixo x . Basta clicar na hipérbole e no eixo.	
P(4): Nomeie os pontos de interseção da hipérbole com o eixo x de (A1) e (A2) - Vértices.	
P(5): Use o comando mediatriz. Construa a mediatriz entre os focos da hipérbole (F1) e (F2) .	
P(6): Use o comando interseção de dois objetos. Crie um ponto na interseção da mediatriz com eixo x . Nomeie esse ponto de (O) - Centro da hipérbole.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Obs.: Se necessário apague as medições feitas para facilitar a visualização.

Responda:

a) Usando o comando **SEGMENTO**:

1. construa os segmentos F1P e F2P.

Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

2. os focos (F1 e F2) e o ponto P: PF1 e PF2.
3. centro da hipérbole (O) e o vértice (A2) - Semieixo transversal, chamado de **a**

Arraste o ponto P sobre a hipérbole e anote os valores no quadro.

	F1P	F2P	a
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			
Situação 4			

Quadro 37 - Situações hipérbole

	F1P	F2P	a
Situação 1	5,70	2,98	1,36
Situação 2	5,57	3,47	1,05
Situação 3	5,66	4,50	0,58
Situação 4	4,52	1,36	1,58

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

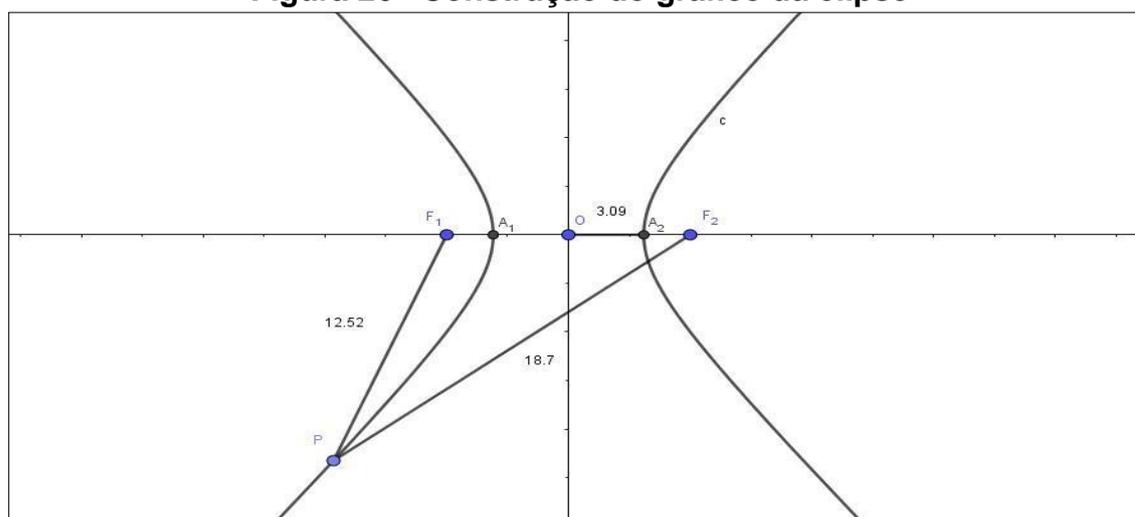
Quadro 38 - Situações hipérbole

	F1P	F2P	a
Situação 1	12,52	18,7	3,09
Situação 2	6,87	15,23	4,18
Situação 3	10,63	19,24	4,3
Situação 4	8,5	12,61	2,06

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

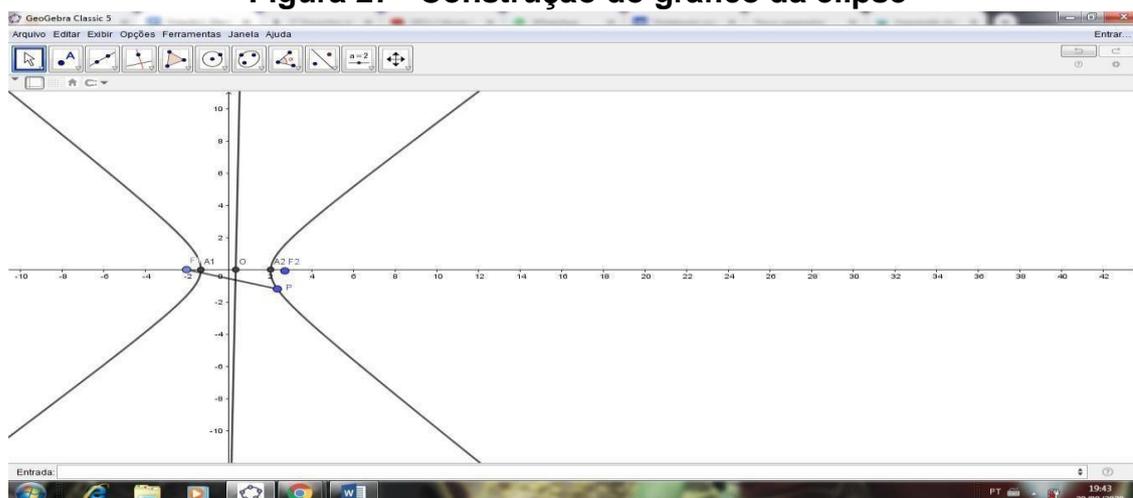
Obs. Neste momento, “printe” a tela do *GeoGebra* e cole no arquivo do Word que será enviado ao final da atividade.

Mais uma vez, os alunos não tiveram dificuldades em estabelecer a construção da cônica, entendendo o significado da proposta. Todos os seis alunos fizeram corretamente.

Figura 26 - Construção do gráfico da elipse

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Figura 27 - Construção do gráfico da elipse



Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Com os valores, preencha o quadro.

	$ F1P - F2P $	$2 \cdot a$ (Eixo transversal)
Situação 1		
Situação 2		
Situação 3		
Situação 4		

Quadro 39 - Situações hipérbole

	$ F1P - F2P $	$2 \cdot a$ (Eixo transversal)
Situação 1	2,72	2,72
Situação 2	2,10	2,10
Situação 3	1,16	1,16
Situação 4	3,16	3,16

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Quadro 40 - Situações hipérbole

	$ F1P - F2P $	$2 \cdot a$ (Eixo transversal)
Situação 1	6,18	6,18
Situação 2	8,36	8,36
Situação 3	8,6	8,6
Situação 4	4,12	4,12

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Qual a relação entre o módulo da diferença das distâncias F1P e F2P e o tamanho do eixo transversal?

Quadro 41 - Resposta da questão

Qual a relação entre o módulo da diferença das distâncias F1P e F2P e o tamanho do eixo transversal?

Sempre serão iguais.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Quadro 42 - Resposta da questão

Qual a relação entre o módulo da diferença das distâncias F1P e F2P e o tamanho do eixo transversal?

R - São sempre iguais.

Fonte: Reprodução de atividade feita A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 43 - Resposta da questão

Qual a relação entre o módulo da diferença das distâncias F1P e F2P e o tamanho do eixo transversal?

São equivalentes.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades.

b) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. os pontos O e A2; (OA2) - Semieixo transversal (**a**).
2. o ponto O e o foco F1; (OF1) - Semidistância focal (**c**).

Arraste o ponto P, tome valores para (**a**) e (**c**) e calcule a excentricidade (**e**) da hipérbole.

	Valor de a	Valor de c	$e = \frac{c}{a}$
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			
Situação 4			

Quadro 44 - Situações hipérbole

	Valor de a	Valor de c	$e = \frac{c}{a}$
Situação 1	4,45	5	1,1236
Situação 2	2,11	5	2,3696
Situação 3	1,78	5	2,8089
Situação 4	1,5	5	3,3333

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Quadro 45 - Situações hipérbole

	Valor de a	Valor de c	$e = \frac{c}{a}$
Situação 1	4,45	5	1,1236
Situação 2	2,11	5	2,3696
Situação 3	1,78	5	2,8089
Situação 4	1,5	5	3,3333

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

O que acontece com o formato da hipérbole com a excentricidade próxima a um?

O que acontece com o formato da hipérbole com a excentricidade tendendo a valores grandes?

Formule com suas palavras um conceito para a hipérbole. Tome como base os focos F1 e F2 e o eixo transversal (2a).

Quadro 46 - Resposta das questões

O que acontece com o formato da hipérbole com a excentricidade próxima a um?

Fica próximo de uma reta no eixo x.

O que acontece com o formato da hipérbole com a excentricidade tendendo a valores grandes?

Fica próximo de uma reta no eixo y.

Formule com suas palavras um conceito para a hipérbole. Tome como base os focos F1 e F2 e o eixo transversal (2a).

É o conjunto dos pontos que o módulo da subtração da distância entre eles e os focos é sempre igual.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades.

Quadro 47- Resposta da questão

O que acontece com o formato da hipérbole com a excentricidade próxima a um? Os ramos da hipérbole convergem para o eixo x .

O que acontece com o formato da hipérbole com a excentricidade tendendo a valores grandes?

Os ramos se convergem para o eixo das ordenadas.

Formule com suas palavras um conceito para a hipérbole. Tome como base os focos F_1 e F_2 e o eixo transversal (2a).

Dados dois pontos A e B distintos, hipérbole é a figura geométrica constituída de todos os pontos C , que não pertençam a reta que contém os pontos A e B , e que a diferença dos módulos entre os segmentos AC e BC seja igual a uma constante.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades

Quadro 48 - Estudo da parábola

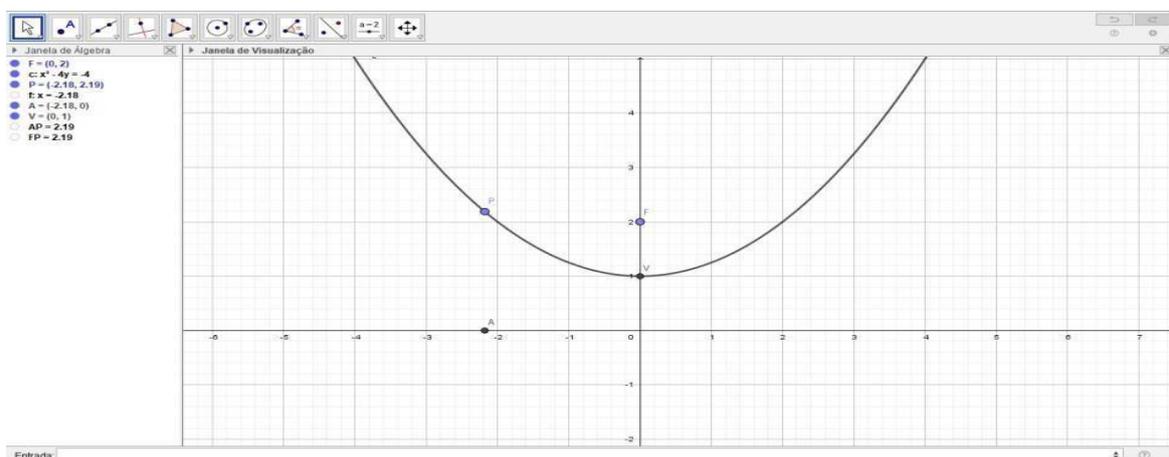
Estação 1	Construção e Manipulação de Cônicas
Atividade 3- Estudo da parábola	
Siga os passos abaixo.	
P(1): Crie um ponto sobre o eixo y e o nomeie de (F).	
P(2): Use o comando parábola. Clique sobre ponto F (foco) e sobre o eixo x (reta diretriz).	
P(3): Crie um ponto sobre a parábola e o nomeie de (P) - Se necessário, movimente o plano cartesiano para melhor visualização.	
P(4): Use o comando reta perpendicular. Clique sobre ponto P e sobre o eixo x .	
P(5): Use o comando interseção de dois objetos. Crie um ponto na interseção da reta perpendicular construída no passo 4 com o eixo x . Basta clicar na reta e no eixo.	
P(6): Clique com o botão direito do mouse na reta perpendicular construída e desabilite a opção “exibir objeto”.	
P(7): Nomeie o ponto criado no eixo x de (A).	
P(8): Use o comando interseção de dois objetos. Crie um ponto na interseção da parábola com o eixo y . Basta clicar na reta e no eixo.	
P(9): Nomeie o ponto criado no eixo y de (V).	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Obs.: Se necessário apague as medições feitas para facilitar a visualização.

Obs. Neste momento, “printe” a tela do *GeoGebra* e cole no arquivo do Word que será enviado ao final da atividade.

Figura 28 - Construção do gráfico da parábola



Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Todos os alunos fizeram corretamente as construções, entendendo os passos e chegando a resultados satisfatórios.

Responda:

a) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o ponto A e o ponto P (AP).
2. o foco F e o ponto P; (FP).

Arraste o ponto P sobre a parábola.

O que acontece com as medidas de AP e FP?

Por meio da visualização, todos os alunos perceberam que as medidas permanecem iguais à medida que arrasta o ponto P sobre o gráfico.

Quadro 49 - Resposta da questão

O que acontece com as medidas de AP e FP?

São sempre iguais.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 50- Resposta da questão

O que acontece com as medidas de AP e FP?

R - São sempre iguais.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 51- Resposta da questão

O que acontece com as medidas de AP e FP?

Elas ficam iguais.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A5 – Caderno de Atividades.

b) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o foco F e o ponto P; (FP).
2. o foco F a diretriz “eixo x”; (Fdiretriz) - Parâmetro.

Arraste o ponto P ao lugar mais próximo da diretriz da parábola, até ficar coincidente com o ponto (V) que é o vértice.

Qual a relação existente entre a medida do parâmetro (Fdiretriz) e a medida (VF) do vértice (V) ao foco (F)?

Quadro 52 - Resposta da questão

Qual a relação existente entre a medida do parâmetro (Fdiretriz) e a medida (VF) do vértice (V) ao foco (F)?

F diretriz é a metade de VF.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Quadro 53 - Resposta da questão

Qual a relação existente entre a medida do parâmetro (F diretriz) e a medida (VF) do vértice (V) ao foco (F)?

R - F diretriz é a metade de VF.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 54 - Resposta da questão

b) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o foco F e o ponto P; (FP).
2. o foco F a diretriz “eixo x”; (Fdiretriz) - Parâmetro.

NOTA: Na entrada quando eu digito “Distância (F, eixo x)” dá ‘comando inválido’, portanto não foi possível criá-lo.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Dos seis alunos, somente um aluno não conseguiu realizar esta atividade, conforme aparece no quadro de respostas. Os alunos perceberam que a medida VF é a metade da medida do parâmetro P.

c) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o ponto A e o ponto P (AP).
2. o foco F e o ponto P; (FP).

Arraste o ponto P sobre a parábola e tome os valores para as medidas de AP e FP quando o ponto A tiver as abscissas indicadas.

Ponto A	Medida AP	Medida FP
x = 3		
x = 2		
x = 1		
x = 0		
x = - 1		
x = - 2		
x = - 3		

Quadro 55 - Situações hipérbole

Ponto A	Medida AP	Medida FP
x = 3	3,41	3,41
x = 2	2,91	2,91
x = 1	2,6	2,6
x = 0	2,5	2,5
x = - 1	2,6	2,6
x = - 2	2,91	2,91
x = - 3	3,41	3,41
x = - 3	3,41	3,41

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1– Caderno de Atividades.

Quadro 56 - Situações hipérbole

Ponto A	Medida AP	Medida FP
x = 3	3	3
x = 2	2,16	2,16
x = 1	1,67	1,67
x = 0	1,5	1,5
x = - 1	1,67	1,67
x = - 2	2,16	2,16
x = - 3	3	3

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Analisando os valores encontrados para as medidas de AP e FP, o que se pode afirmar sobre o eixo y em relação à parábola?

d) Formule com suas palavras um conceito para a parábola. Tome como base a distância do ponto (P) ao foco (F), também do ponto (P) à diretriz.

A maioria respondeu corretamente a essa questão. O aluno A6 respondeu que a interseção entre a parábola e o eixo y é o ponto mínimo da parábola.

Quadro 57- Resposta das questões

Analisando os valores encontrados para as medidas de AP e FP o que se pode afirmar sobre o eixo y em relação à parábola.

A interseção entre a parábola e o eixo y é o ponto mínimo da parábola.

Formule com suas palavras um conceito para a parábola. Tome como base a distância do ponto (P) ao foco (F) também do ponto (P) à diretriz.

Dado um ponto A fixo e uma reta r que não contenha A, e para todos os pontos C pertencentes a r, a parábola é a reunião de pontos B, tais que, se o segmento BC é perpendicular a r e igual ao segmento AB, então B pertence à parábola.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 58- Resposta das questões

Analisando os valores encontrados para as medidas de AP e FP o que se pode afirmar sobre o eixo y em relação à parábola.

O eixo y espelha a parábola.

d) Formule com suas palavras um conceito para a parábola. Tome como base a distância do ponto (P) ao foco (F) também do ponto (P) à diretriz.

É o conjunto dos pontos que a distância a um ponto fixo e a uma reta fixa são iguais.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

P(10):

Grave esse arquivo, em PDF, com o nome **ESTAÇÃO1_SeuNome**.

Anexe esse arquivo como resposta à atividade no Google Classroom.

Envie esse arquivo para o e-mail marcelomontesclaros@yahoo.com.br

6.3.2 Desenvolvimento da Estação 2

Quadro 59- Identificação de Cônicas na Natureza

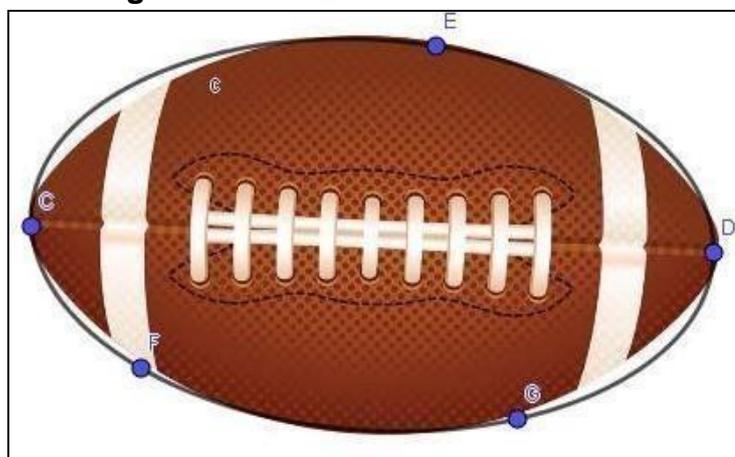
Estação 2	Identificação de Cônicas na Natureza
Atividade 4- Pesquisa e Identificação de Cônicas em Imagens	
Siga os passos abaixo.	
<p>P(1): Busque na internet uma imagem que apresente as características das cônicas e salve no computador.</p>	
<p>P(2): Salve a foto ou imagem como arquivo imagem.</p>	
<p>P(3): Insira a imagem no <i>GeoGebra</i>. Menu principal: Editar > Incluir imagem.</p>	
<p>P(4): Use o comando cônicas por cinco pontos para indicar o formato da cônica na imagem.</p>	
<p>P(5): Execute o comando <i>Print Screen</i>; cole a imagem em um arquivo de texto (Word ou similar).</p>	

Fonte: Elaborado pelo autor.

P(6): No arquivo de texto:

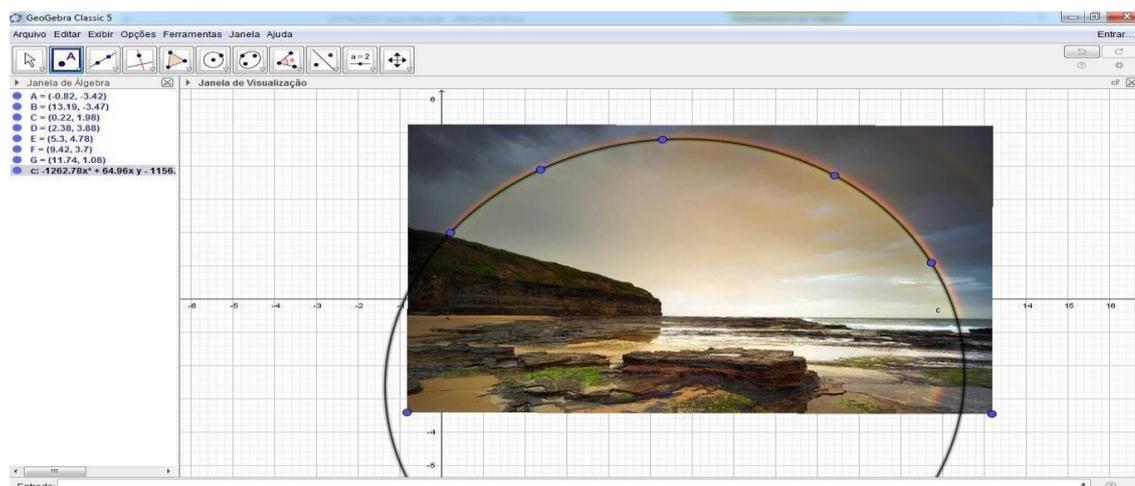
- Identifique nas imagens selecionadas as cônicas na natureza.
- Escreva com suas palavras as características das cônicas apresentadas.
- Justifique o motivo da escolha pela cônica apresentada.

Figura 29 - Bola de futebol Americano



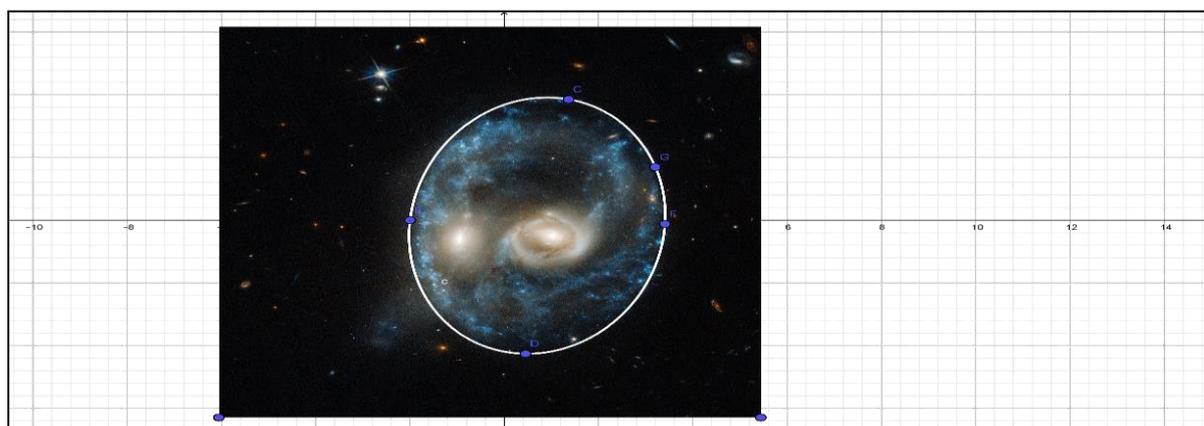
Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Figura 30 - Pôr do sol



Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades

Figura 31- Galáxia



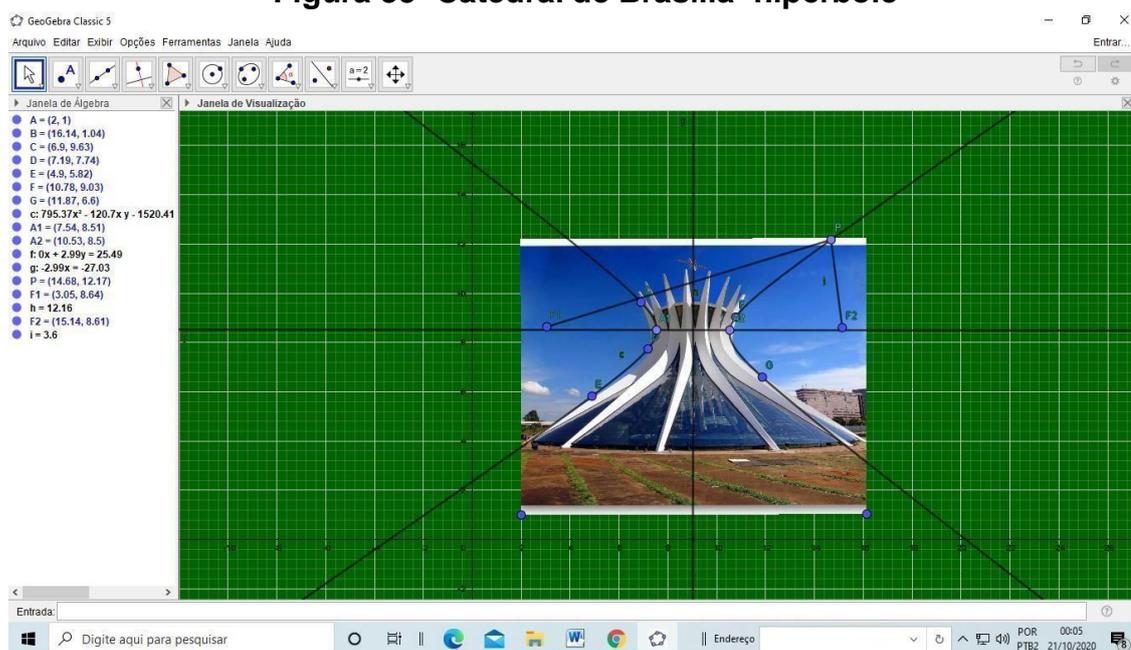
Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades

Figura 32- Dirigível



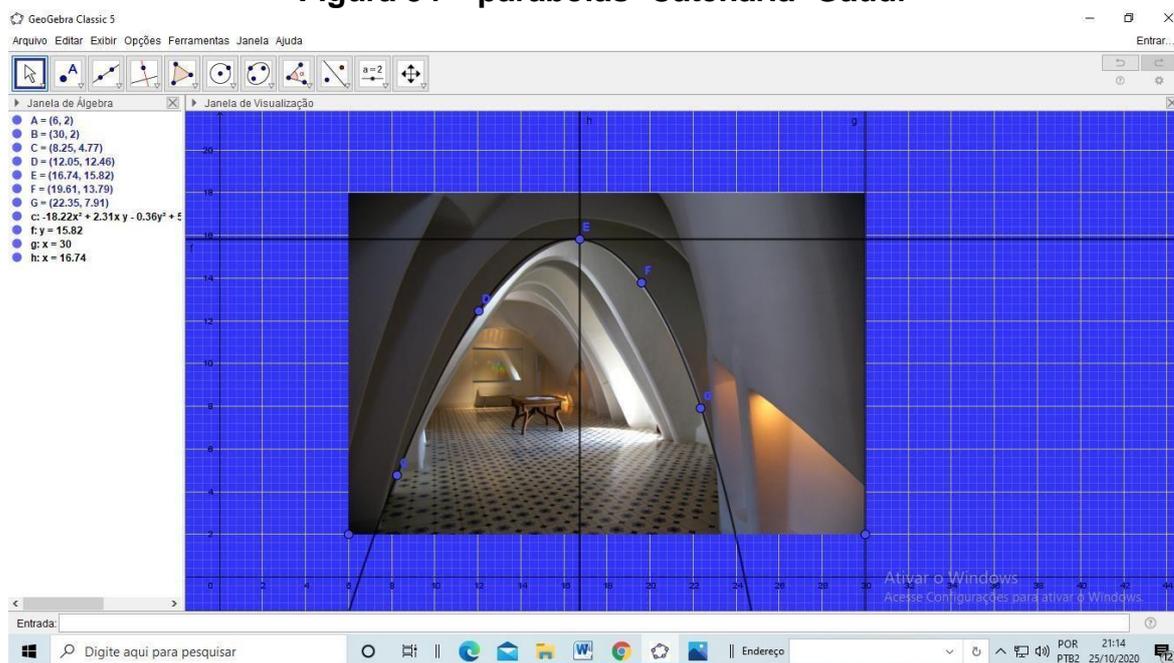
Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades

Figura 33- Catedral de Brasília- hipérbole



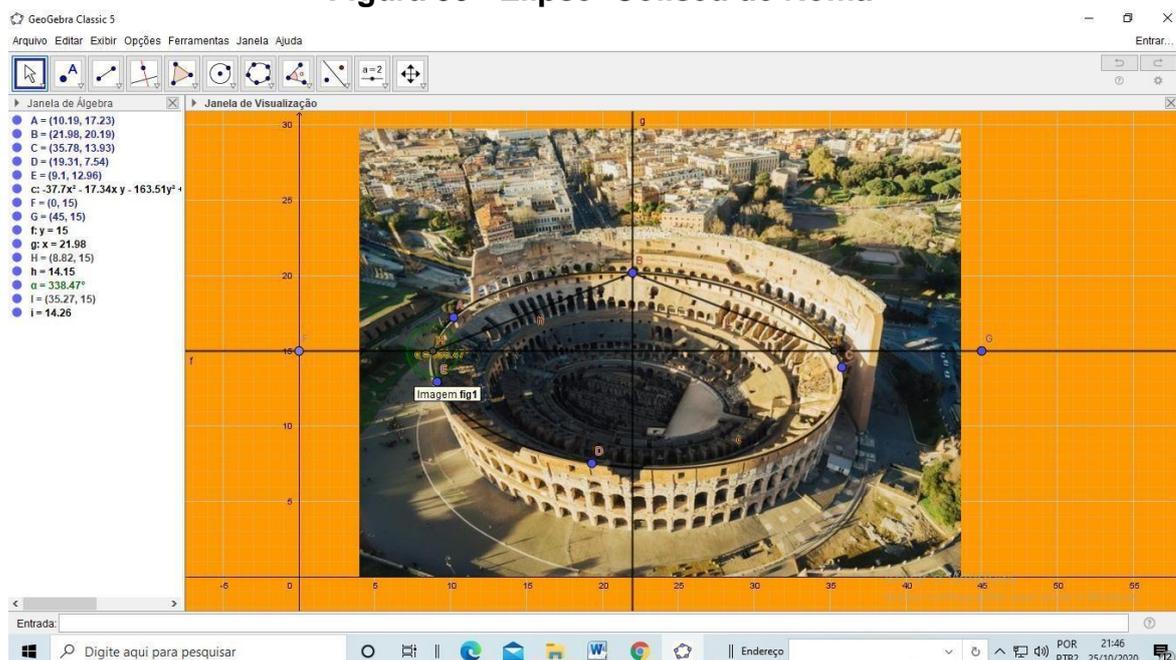
Fonte: Porto, 2007

Figura 34 - parábolas- Catenária- Gaudí



Fonte: Não Trivial, 2017

Figura 35 - Elipse- Coliseu de Roma



Fonte: Pinterest

Quadro 60 - Resposta das questões- Autor

a) Identifique nas imagens selecionadas as cônicas na natureza.

A figura x - Catedral de Brasília são hipérbolas.

A figura y- Catenária - Gaudí são parábolas.

A figura z- Coliseu de Roma é uma elipse.

b) Escreva com suas palavras as características da cônica apresentada.

Resumidamente as cônicas são figuras que se obtêm com cortes de outra figura chamada cone.

c) Justifique o motivo da escolha pelas cônicas apresentadas.

As três são figuras que representam de forma clara e objetiva as cônicas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 61 - Resposta das questões

d) Identifique nas imagens selecionadas as cônicas na natureza.

A bola de futebol americano é igual a uma elipse.

e) Escreva com suas palavras as características das cônicas apresentadas.

É uma figura curva, próxima a um círculo, mas achatada.

f) Justifique o motivo da escolha pela cônica apresentada.

É uma figura fácil para representar.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Quadro 62 - Resposta das questões

- a) Identifique nas imagens selecionadas as cônicas na natureza.
Parábola.
- b) Escreva com suas palavras as características das cônicas apresentadas.
Foco; Diretriz; Parâmetro; Vértice; Eixo de simetria.
- c) Justifique o motivo da escolha pela cônica apresentada.
Pois na minha opinião é a cônica que mais aparece no nosso dia a dia.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 63 - Resposta das questões

- a) Identifique nas imagens selecionadas as cônicas na natureza.
Elipses.
- b) Escreva com suas palavras as características da cônicas apresentadas.
1ª cônica: elipse “tradicional” com orientação mais para a vertical. 2ª cônica: elipse mais “esticada”, com formato oval.
- c) Justifique o motivo da escolha pela cônica apresentada.
Não esperava encontrar essas imagens, gostei da similaridade com uma elipse.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades.

P(7):

Grave esse arquivo, em PDF, com o nome **ESTAÇÃO2_SeuNome**.

Anexe esse arquivo como resposta à atividade no *Google Classroom*.

Envie esse arquivo para o e-mail marcelomontesclaros@yahoo.com.br

6.3.3 Desenvolvimento da Estação 3**Quadro 64 - Estudo da elipse**

Estação 3	Manipulação e análise
Atividade 5- elipse	
Siga os passos abaixo.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

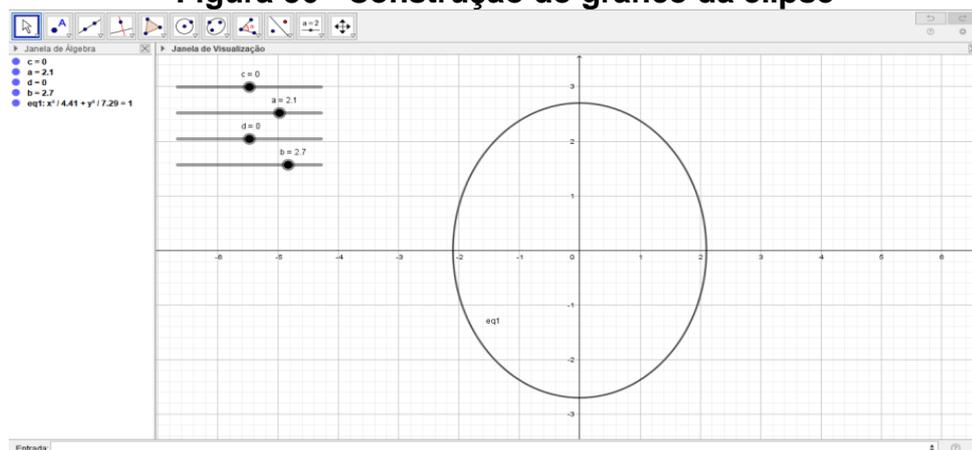
P(1): Plote a equação da elipse no campo de entrada do *GeoGebra*.

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$$

Obs. Neste momento, “printe” a tela do *GeoGebra* e cole no arquivo do Word que será enviado ao final da atividade.

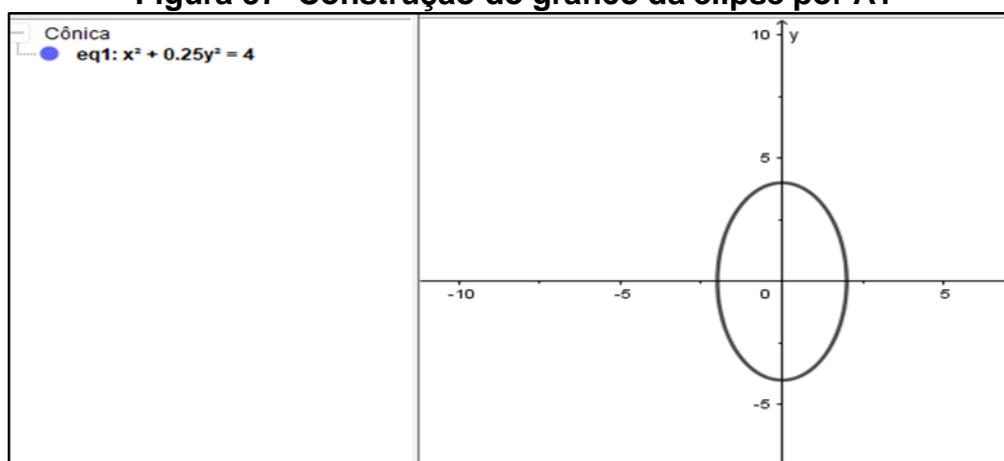
Todos alunos participantes fizeram corretamente essa atividade construindo a cônica por meio da equação dada.

Figura 36 - Construção do gráfico da elipse



Fonte: Reprodução de atividade feita por A5 – Caderno de Atividades.

Figura 37- Construção do gráfico da elipse por A1



Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

P(2): Atribua valor zero para **c** e **d**, com valores quaisquer de **a** e **b**

Responda:

a) A elipse está centrada em que ponto?

Todos os seis alunos entenderam as coordenadas do centro da elipse.

Quadro 65 - Resposta das questões

a) A elipse está centrada em que ponto? **No ponto (0,0)**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 66 - Resposta das questões

a) A elipse está centrada em que ponto? **No ponto (-2,2)**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

P(3): Faça a maior do que **b**, com valores quaisquer de **c** e **d**.

Responda:

- a) O eixo maior da elipse está em que eixo coordenado?
- b) E o eixo menor está em que eixo coordenado?

Todos os seis alunos identificaram os eixos corretamente, bastou visualizar a posição da elipse.

Quadro 67 - Resposta das questões

a) O eixo maior da elipse está em que eixo coordenado? **Eixo x**

b) E o eixo menor está em que eixo coordenado? **Eixo y**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 68 - Resposta das questões

a) O eixo maior da elipse está em que eixo coordenado? **Eixo x**

b) E o eixo menor está em que eixo coordenado? **Eixo y**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

P(4): Faça **a** menor que **b**.

Responda:

- a) O eixo maior da elipse está em que eixo coordenado?
- b) E o eixo menor está em que eixo coordenado?

Todos os seis alunos identificaram os eixos corretamente, bastando visualizar a posição da elipse.

Quadro 69 - Resposta das questões

- a) O eixo maior da elipse está em que eixo coordenado? **R - Eixo y.**
- b) E o eixo menor está em que eixo coordenado? **R - Eixo x.**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

P(5): Faça $c=0$ e varie d , a e b valores determinados.

Responda:

- a) Qual é a posição do centro das elipses?

Quadro 70- Resposta das questões

Qual é a posição do centro das elipses? **R - (0, d)**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 71- Resposta das questões

- a) Qual é a posição do centro das elipses? **Na coordenada (0,2)**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

P(6): Faça $d = 0$ e varie c , a e b valores determinados.

Responda:

- a) Qual é a posição do centro das elipses?

Todos os seis alunos identificaram os eixos corretamente, bastou visualizar a posição da elipse.

Quadro 72 - Resposta das questões

a) Qual é a posição do centro das elipses? **Na coordenada (2,0)**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1– Caderno de Atividades.

Quadro 73 - Resposta das questões

a) Qual é a posição do centro das elipses? **R - (c, 0)**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

SÍNTESE:

a) Com a variação de **a** e **b** o que acarreta à forma da elipse?

a) Com a variação dos valores de **c** e **d** o que altera na posição das elipses?

Quadro 74 - Resposta das questões

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

a) Com a variação de **a** e **b** o que acarreta à forma da elipse?

O a achata horizontalmente e o b achata verticalmente mas sem mudar a sua localização, se colocarmos $a=b=5$ ou $a=b=-5$ ela vira uma circunferência perfeita.

b) Com a variação dos valores de **c** e **d** o que altera na posição das elipses?

O c muda a posição para os lados (horizontalmente) e o d altera a posição para cima ou para baixo (verticalmente).

Quadro 75- Resposta das questões

a) Com a variação de **a** e **b** o que acarreta na forma da elipse?

O a achata horizontalmente e o v verticalmente.

b) Com a variação dos valores de **c** e **d** o que altera na posição das elipses?

O c muda a posição para os lados e o d muda a posição para cima ou para baixo.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades.

P(7):

Grave esse arquivo, em PDF, com o nome **ESTAÇÃO3_SeuNome**.

Anexe esse arquivo como resposta à atividade no Google Classroom.

Envie esse arquivo para o e-mail marcelomontesclaros@yahoo.com.br

Quadro 76 - Estudo da hipérbole

Estação 3	Manipulação e análise
Atividade 6: hipérbole	
Siga os passos abaixo.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

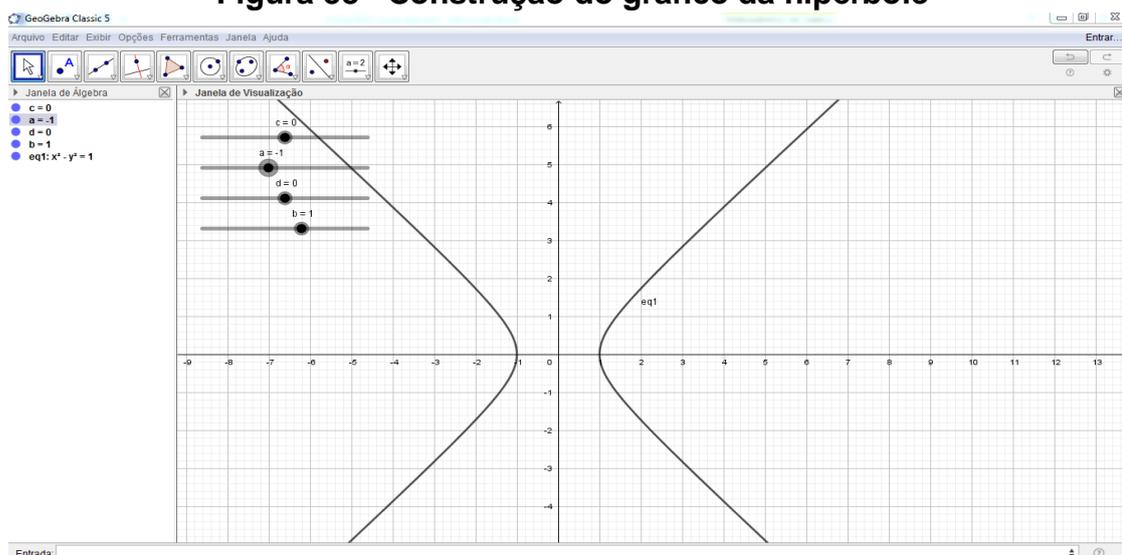
P(1): Plote a equação da hipérbole no campo de entrada do *GeoGebra*:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$$

P(2): Atribua valor zero para **c** e **d** e varie **a** e **b**.

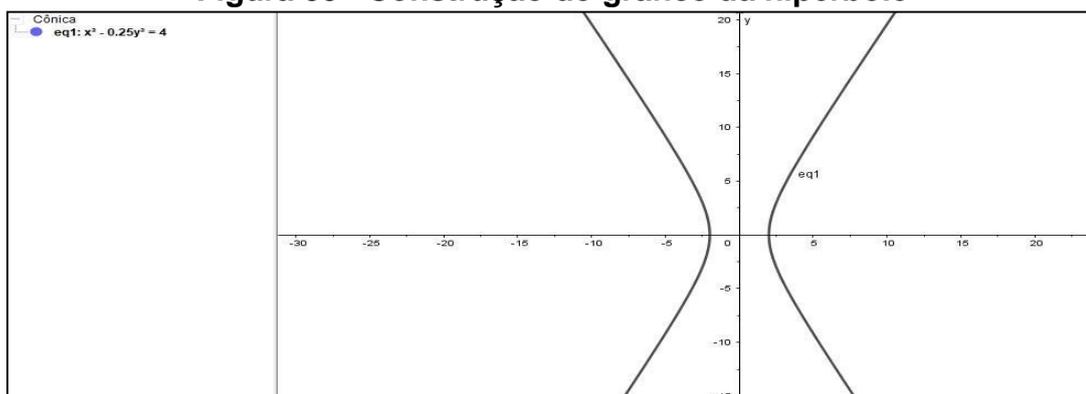
Obs. Neste momento, “printe” a tela do *GeoGebra* e cole no arquivo do Word que será enviado ao final da atividade.

Figura 38 - Construção do gráfico da hipérbole



Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades

Figura 39 - Construção do gráfico da hipérbole



Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Responda:

A hipérbole intercepta qual eixo coordenado e para qual valor?

Todos os seis alunos responderam corretamente, afirmando que a hipérbole intercepta o eixo x, interpretando também as coordenadas onde ocorre a intercepção.

Quadro 77 - Resposta das questões

A hipérbole intercepta qual eixo coordenado e para qual valor?

R - Eixo x. Nos pontos (a, 0) e (-a, 0).

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 78 - Resposta das questões

A hipérbole intercepta qual eixo coordenado e para qual valor? **Intercepta o eixo x nas coordenadas (1,0) e (-1,0).**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

P(3): Plote a equação da hipérbole:
$$-\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$$

P(4): Atribua valor zero para **c** e **d** e varie **a** e **b**.

Responda:

A hipérbole intercepta qual eixo coordenado e para qual valor?

Todos os seis alunos responderam corretamente, afirmando que a hipérbole intercepta o eixo y, interpretando também as coordenadas onde ocorre a intercepção.

Quadro 79 - Resposta das questões

A hipérbole intercepta qual eixo coordenado e para qual valor? **Intercepta o eixo y nas coordenadas (0,1) e (0,-1).**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2– Caderno de Atividades.

Quadro 80 - Resposta das questões

A hipérbole intercepta qual eixo coordenado e para qual valor?

R - Eixo y. Nos pontos (0, b) e (0, -b).

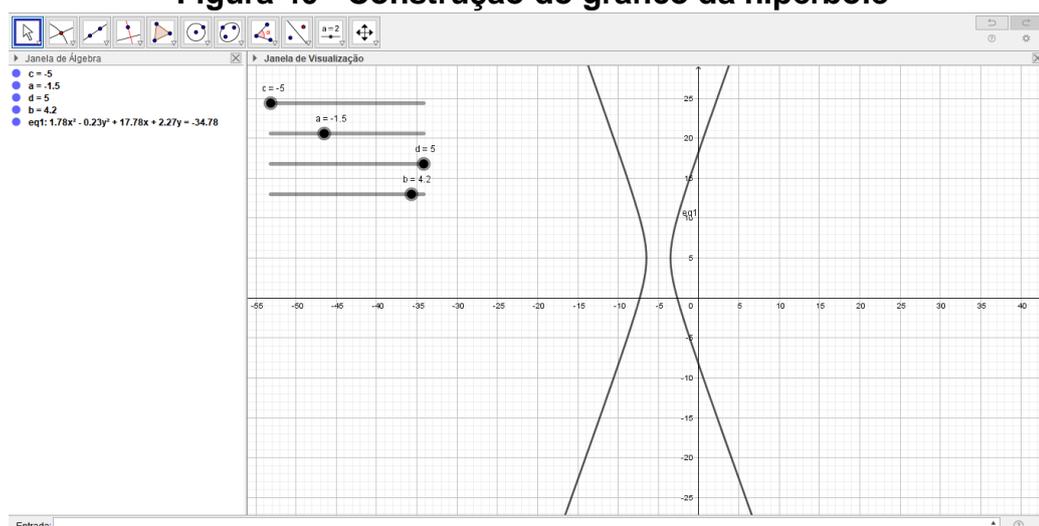
Fonte: Reprodução de atividade feita por A5 – Caderno de Atividades.

P(5) Atribua quaisquer valores para **c** e **d** na equação:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1 \text{ fixando valores para a e b.}$$

Obs. Neste momento, “printe” a tela do *GeoGebra* e cole no arquivo do Word que será enviado ao final da atividade.

Figura 40 - Construção do gráfico da hipérbole



Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Responda:

Qual é a posição das hipérboles plotadas, e interceptam que tipos de reta?

Quadro 81 - Resposta das questões

Qual é a posição das hipérbolas plotadas, e interceptam que tipos de reta?

Os ramos estão posicionados horizontalmente, um para a esquerda e outro para direita. A hipérbole está transladada, intercepta a reta paralela ao eixo x que contém o ponto com o qual a hipérbole foi transladada.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades.

Quadro 82 - Resposta das questões

Qual é a posição das hipérbolas plotadas, e interceptam que tipos de reta?

Centrada no ponto $(-5, 5)$. Não compreendi o que quis dizer com “interceptam que tipos de reta”.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 83 - Resposta das questões

Qual é a posição das hipérbolas plotadas, e interceptam que tipos de reta?

R - Os ramos estão posicionados horizontalmente, um para a esquerda e outro para a direita. Interceptam o eixo x e podem interceptar o eixo y, dependendo dos valores de c e d.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

P (6): Atribua quaisquer valores para a e b na equação:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1 \text{ Fixe valores para c e d.}$$

Responda:

Qual é a posição das hipérbolas plotadas, e interceptam que tipos de reta?

Quadro 84 - Resposta das questões

Qual é a posição das hipérbolas plotadas, e interceptam que tipos de reta?

Os ramos estão posicionados verticalmente, um para baixo outro para cima. A hipérbole está transladada, intercepta a reta paralela ao eixo y que contém o ponto com o qual a hipérbole foi transladada.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades.

Quadro 85- Resposta das questões

Qual é a posição das hipérbolas plotadas, e interceptam que tipos de reta?

Obs.: Eu não sei o que é uma hipérbole plotada e eu não entendi o “que tipo de reta?”

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 86- Resposta das questões

Qual é a posição das hipérbolas plotadas, e interceptam que tipos de reta?

Intercepta a reta paralela ao eixo y e que contém o ponto com o qual a hipérbole foi transladada.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

- Compare as hipérbolas de $P(3)$ e $P(6)$, o que ocorre com os eixo real (transverso) e eixo imaginário (não transverso)?

Quadro 87 - Resposta das questões

Compare as hipérbolas de $P(3)$ e $P(6)$, o que ocorre com o eixo real (transverso) e o eixo imaginário (não transverso)?

R - Se invertem. Em $P(3)$ o eixo real é y e o imaginário é x . Já em $P(6)$ temos o inverso.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

Quadro 88 - Resposta das questões

Compare as hipérbolas de $P(3)$ e $P(6)$, o que ocorre com o eixo real (transverso) e eixo imaginário (não transverso)? O eixo real em $P(3)$ fica paralelo ao eixo y e em $P(6)$ fica paralelo ao eixo x , o eixo imaginário em $P(3)$ fica paralelo ao eixo x e em $P(6)$ fica paralelo ao eixo y .

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

SÍNTESE:

Com a variação de a e b o que acarreta na forma da hipérbole?

Com a variação dos valores de c e d , o que altera na posição das hipérbolas?

Quadro 89 - Resposta das questões

Com a variação de **a** e **b** o que acarreta na forma da hipérbole?

A hipérbole na variação de **a** move-se ela de posição na horizontal e quanto mais próximo de 0 ela fica maior, e **b** aumenta ou diminui o tamanho da “angulação” da própria hipérbole e quanto mais próxima de 0 ela fica menor e se for no 0 ela fica indefinida.

Com a variação dos valores de **c** e **d**, o que altera na posição das hipérbolas?

Ela sobe ou desce com **c**, e com **d** ela vai para a esquerda ou para direita.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 90 - Resposta das questões

Com a variação de **a** e **b** o que acarreta na forma da hipérbole?

“a” diminui a amplitude dos ramos da hipérbole se $|a|$ cresce. Com “b” ocorre o inverso.

Com a variação dos valores de **c** e **d**, o que altera na posição das hipérbolas?

“c” translada a hipérbole de forma paralela ao eixo x.

“d” translada a hipérbole de forma paralela ao eixo y.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

P(7):

Grave esse arquivo, em PDF, com o nome **ESTAÇÃO3_SeuNome**.

Anexe esse arquivo como resposta à atividade no *Google Classroom*.

Envie esse arquivo para o e-mail marcelomontesclaros@yahoo.com.br.

Quadro 91- Estudo da parábola

Estação 3	Manipulação e análise
Atividade 7: parábola	
Siga os passos abaixo.	

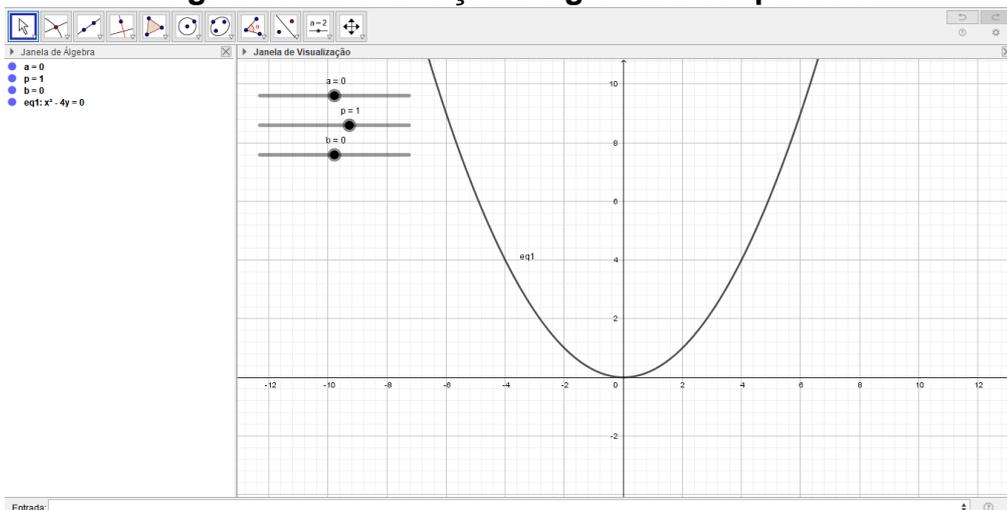
Fonte: Elaborado pelo autor.

P(1): Plote a equação $(x - a)^2 = 4p(y - b)$.

Obs. Neste momento, “printe” a tela do *GeoGebra* e cole no arquivo do Word que será enviado ao final da atividade.

Todos os participantes construíram corretamente o gráfico da parábola.

Figura 41 - Construção do gráfico da hipérbole



Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

P(2): Atribua valor zero para **a** e **b**.

Responda:

Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

Todos os participantes responderam corretamente às coordenadas do vértice da parábola.

Quadro 92 - Resposta da questão

Quais são as coordenadas do vértice da parábola? **(0,0)**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 93 - Resposta da questão

Quais são as coordenadas do vértice da parábola? **R - (0,0).**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades.

P(3) Varie **p**.

Responda:

O que ocorre com a parábola para **p** crescente?

O que ocorre com a parábola para **p** decrescente?

Quadro 94 - Resposta da questão

O que ocorre com a parábola para p crescente?

R - A concavidade fica mais aberta, mais próxima do eixo x .

O que ocorre com a parábola para p decrescente?

R - A concavidade fica mais fechada, mais próxima do eixo y .

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 95- Resposta da questão

O que ocorre com a parábola para p crescente?

Quando $p < 0$ a parábola converge para o eixo y .

Quando $p > 0$ a parábola converge para o eixo x .

O que ocorre com a parábola para p decrescente?

Quando $p < 0$ a parábola converge para o eixo x .

Quando $p > 0$ a parábola converge para o eixo y .

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

P(4): Varie a e b .

Responda:

O que ocorre com o vértice da parábola?

A parábola se desloca para cima ou para baixo no eixo y , variando b . A parábola se desloca para direita ou para esquerda no eixo x , variando a .

Quadro 96 - Resposta da questão

O que ocorre com o vértice da parábola?

a translada o vértice (e a parábola) de forma paralela ao eixo x .

b translada o vértice (e a parábola) de forma paralela ao eixo y .

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 97- Resposta da questão

O que ocorre com o vértice da parábola?

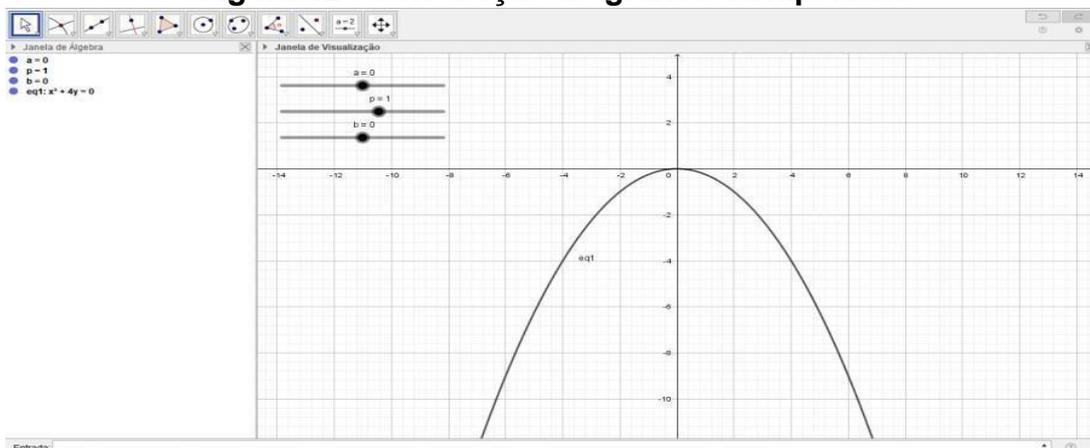
R - Passa para o ponto (a, b) .

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

P(5) Plote a equação $(x - a)^2 = -4p(y - b)$.

Obs. Neste momento, “printe” a tela do *GeoGebra* e cole no arquivo do Word que será enviado ao final da atividade.

Figura 42 - Construção do gráfico da hipérbole



Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Todos os seis alunos construíram corretamente o gráfico da parábola demonstrando que entenderam a proposta da questão.

P(6): Atribua valor zero para **a** e **b**.

Resposta:

Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

Todos os participantes da pesquisa entenderam que as coordenadas do vértice da parábola encontravam-se em (0,0).

Quadro 98 - Resposta da questão

Quais são as coordenadas do vértice da parábola? (0,0)

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 99 - Resposta da questão

Quais são as coordenadas do vértice da parábola? V(0,0)

Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades.

P(7): Varie p .

Responda:

O que ocorre com a parábola para p crescente a um valor de x determinado?

O que ocorre com a parábola para p decrescente?

O objetivo dessas questões é que o aluno entenda que com a parábola para p crescente a um valor x ela converge para o eixo x , ou seja, ela se abre ao contrário; para p decrescente, a parábola converge para o eixo y , ou seja, ela vai se fechando.

Quadro 100 - Resposta das questões

O que ocorre com a parábola para p crescente a um valor de x determinado?

Quando $p < 0$ a parábola converge para o eixo y .

Quando $p > 0$ a parábola converge para o eixo x .

O que ocorre com a parábola para p decrescente?

Quando $p < 0$ a parábola converge para o eixo x . Quando $p > 0$ a parábola converge para o eixo y .

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6– Caderno de Atividades.

Quadro 101 - Resposta das questões

O que ocorre com a parábola para p crescente a um valor de x determinado?

R - A concavidade fica mais aberta, mais próxima do eixo x .

O que ocorre com a parábola para p decrescente?

R - A concavidade fica mais fechada, mais próxima do eixo y .

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

P(8): Varie a e b .

Responda:

O que ocorre com o vértice da parábola?

O objetivo era que os participantes entendessem que a parábola se desloca para cima ou para baixo no eixo y , variando b . A parábola se desloca para direita ou para esquerda no eixo x , variando a . A maioria acertou essa questão.

Quadro 102 - Resposta das questões

O que ocorre com o vértice da parábola? **Ela muda de posição conforme alteramos os valores de a e b, ela vai ou para cima, ou para baixo, ou para esquerda ou para direita.**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A4 – Caderno de Atividades.

Quadro 103 - Resposta das questões

O que ocorre com o vértice da parábola?

R - Passa para o ponto (a, b).

Fonte: Reprodução de atividade feita por A5 – Caderno de Atividades.

Quadro 104- Resposta da questão

O que ocorre com o vértice da parábola? **É transladado (assim como toda a parábola) para qualquer ponto (x,y) nos limites do controle deslizante.**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

P(9): Plote a equação: $(y - a)^2 = 4p(x - b)$.

P(10): Atribua valor **zero** para **a** e **b**.

Responda:

Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

Todos os seis participantes responderam que as coordenadas do vértice no ponto (0,0).

Quadro 105-Resposta da questão

Quais são as coordenadas do vértice da parábola? **(0,0)**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 106 - Resposta da questão

Quais são as coordenadas do vértice da parábola? **(0,0)**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

P (11): Varie **p**.

Responda:

- O que ocorre com a parábola para **p** crescente?
- O que ocorre com a parábola para **p** decrescente?

A maioria respondeu corretamente a essa questão. A parábola se abre no sentido do eixo x para p crescente e a parábola se fecha no sentido do eixo x para p decrescente.

Quadro 107- Resposta das questões

O que ocorre com a parábola para p crescente? Ela fica com uma abertura maior e com a concavidade para a direita.

O que ocorre com a parábola para p decrescente? Ela fica com uma abertura maior e com a concavidade para a esquerda.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

P(12) Varie a e b .

Responda:

O que ocorre com o vértice da parábola?

Variando b , a parábola se desloca sobre o eixo x, para a direita ou para a esquerda. Variando a , a parábola se desloca sobre o eixo y, para cima ou para baixo. A maioria acertou a questão.

Quadro 108- Resposta das questões

O que ocorre com o vértice da parábola? Ela percorre os eixos x e y à medida que movemos os controles deslizantes.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Quadro 109- Resposta da questão

O que ocorre com o vértice da parábola? É transladado (assim como toda a parábola) para qualquer ponto (x,y) nos limites do controle deslizante.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

P(13) Plote a equação: $(y - a)^2 = -4p(x - b)$.

P (14): Atribua valor zero para a e b .

Responda:

Quais são as coordenadas dos vértices da parábola?

Todos os participantes responderam que o vértice da parábola se encontra em (0,0).

Quadro 110- Resposta da questão

Quais são as coordenadas dos vértices da parábola? (0,0)

Fonte: Reprodução de atividade feita por A5 – Caderno de Atividades.

Quadro 111- Resposta da questão

Quais são as coordenadas dos vértices da parábola? V(0,0)

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

Quadro 112 - Resposta da questão

Quais são as coordenadas dos vértices da parábola? (0,0)

Fonte: Reprodução de atividade feita por A3 – Caderno de Atividades.

P(15) Varie p .

Responda:

O que ocorre com a parábola para p crescente?

O que ocorre com a parábola para p decrescente?

A parábola se abre no sentido negativo do eixo x para p crescente e a parábola se fecha no sentido negativo do eixo x , ou seja, para a esquerda para p decrescente.

A maioria dos participantes acertou essa questão.

Quadro 113 - Resposta das questões

O que ocorre com a parábola para p crescente? Quando $p < 0$ a parábola converge para o eixo x . Quando $p > 0$ a parábola converge para o eixo y .

O que ocorre com a parábola para p decrescente?

Quando $p < 0$ a parábola converge para o eixo y . Quando $p > 0$ a parábola converge para o eixo x .

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

Quadro 114 - Resposta das questões

O que ocorre com a parábola para p crescente? Ela fica com uma abertura maior e com a concavidade para a esquerda.

O que ocorre com a parábola para p decrescente? Ela fica com uma abertura maior e com a concavidade para a direita

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

P(16) Varie a e b .

Responda:

O que ocorre com o vértice da parábola?

Variando b , a parábola se desloca sobre o eixo x , para a direita ou para a esquerda. Variando a , a parábola se desloca sobre o eixo y , para cima ou para baixo.

Quadro 115- Resposta da questão

O que ocorre com o vértice da parábola? Ela percorre os eixos x e y à medida que movemos os controles deslizantes.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 116 - Resposta da questão

O que ocorre com o vértice da parábola? É trasladado (assim como toda a parábola) para qualquer ponto (x,y) nos limites do controle deslizante.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

SÍNTESE:

- Com a variação de a e b o que acarreta com a parábola?
- Com a variação de p o que acarreta com a parábola?

Quadro 117- Resposta das questões

Com a variação de a e b o que acarreta com a parábola? A parábola vai para esquerda ou direita, ou para cima ou para baixo.

Com a variação de p o que acarreta com a parábola? Em relação ao eixo x , quando o controle deslizante está maior que zero, ela fica voltada para o lado negativo e com uma abertura cada vez maior, e quando o controle deslizante está menor que zero, ela fica voltada para o lado positivo e com uma abertura cada vez maior.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A2 – Caderno de Atividades.

Quadro 118- Resposta das questões

Com a variação de **a** e **b** o que acarreta com a parábola?

a translada a parábola de forma paralela ao eixo **x**. **b** translada a parábola de forma paralela ao eixo **y**.

Com a variação de **p** o que acarreta com a parábola?

A parábola converge para a reta (chamemos de reta **r**) que a gera ou a reta perpendicular à reta **r**, dependendo da equação que a define.

Fonte: Reprodução de atividade feita por A6 – Caderno de Atividades.

P(17):

Grave esse arquivo, em PDF, com o nome **ESTAÇÃO3_SeuNome**.

Anexe esse arquivo como resposta à atividade no *Google Classroom*.

Envie esse arquivo para o e-mail marcelomontesclaros@yahoo.com.br

7 SÍNTESE DA ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Inicialmente foi feita uma introdução pelo professor pesquisador sobre a metodologia do *Blended Learning*. Nessa introdução, foi explicado o objetivo do trabalho, contemplando o programa de Mestrado Profissional, conceitos de EaD, TICs, como é o ensino-aprendizagem no *Blended Learning*, modelos sustentados e disruptivos, conforme Horn e Staker (2015).

Na primeira atividade sobre cônicas, os alunos tiveram algumas dúvidas para formular as respostas, contudo, por meio da visualização, eles puderam fornecer um conceito para a elipse, mesmo que, em algumas vezes, incompleto. Conseguiram fornecer empiricamente um conceito inicial satisfatório.

Quando perguntados da relação das distâncias da soma das PF1 e PF2 e a distância FF2, foram observadas algumas dificuldades em responder a essa atividade. As respostas não divergiram muito entre os estudantes, os seis alunos responderam que a soma das distâncias PF1 e PF2 deveria ser sempre maior que a distância entre F1F2. O A6 respondeu citando a desigualdade triangular.

O objetivo principal da primeira atividade era trazer ao aluno, de uma forma conjectural, por meio da visualização, que a soma das distâncias de PF1 e PF2 é igual à soma entre A1A2 para, posteriormente, desenvolver um conceito para a elipse.

Com relação ao conceito da elipse, a maioria respondeu corretamente, os erros somaram 12% e quem respondeu corretamente corresponde a 88% (Gráfico 1).

Gráfico 1- Conceito de elipse



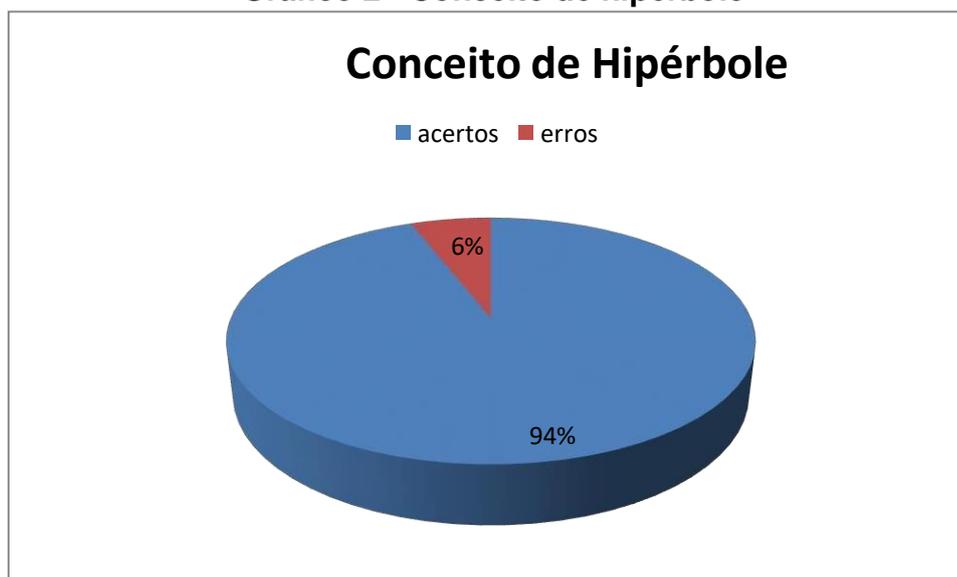
Fonte: Elaborado pelo autor.

A excentricidade foi outro tópico da elipse em que os participantes conseguiram por meio da visualização observar o achatamento e a esfericidade, variando alguns valores.

O objetivo principal da segunda atividade foi, por meio da visualização, que os alunos percebessem que a diferença da distância de F1P e F2P é igual ao tamanho do eixo transversal e, assim, desenvolver uma relação conceitual para a hipérbole, sem conhecimento de sua equação. Como na primeira atividade, esse item foi alcançado satisfatoriamente pelos participantes.

Os alunos tiveram respostas diferentes, porém, dentro do mesmo contexto: dados dois pontos F1 e F2, pertencentes a um plano qualquer, a hipérbole é o conjunto dos pontos desse plano cuja diferença em módulo das distâncias a F1 e F2 é constante igual a $2a$.

Com relação ao conceito da hipérbole, a maioria respondeu corretamente, totalizando 94%, e os que erraram correspondem a 6%, conforme se pode verificar no Gráfico 2.

Gráfico 2 - Conceito de hipérbole

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os alunos perceberam que a hipérbole vai fechando os seus ramos, ficando bem próximo de uma reta coincidente com o eixo x com a excentricidade próxima a um. Os alunos perceberam que a hipérbole vai abrindo seus ramos, ficando próximo de uma reta coincidente com o eixo y , com a excentricidade tendendo para valores grandes.

Na terceira atividade, um dos objetivos foi que os alunos percebessem que o eixo y divide a parábola e é o eixo simetria da parábola. Outro objetivo foi a formulação de um conceito para a parábola como sendo o lugar geométrico em que a distância do ponto P ao foco F e a distância do ponto P a uma reta diretriz são em módulos iguais.

Com relação ao conceito da parábola, a maioria respondeu corretamente, totalizando 94%, e os que erraram correspondem a 6%, conforme se pode verificar no Gráfico 3.

Gráfico 3- Conceito de parábola

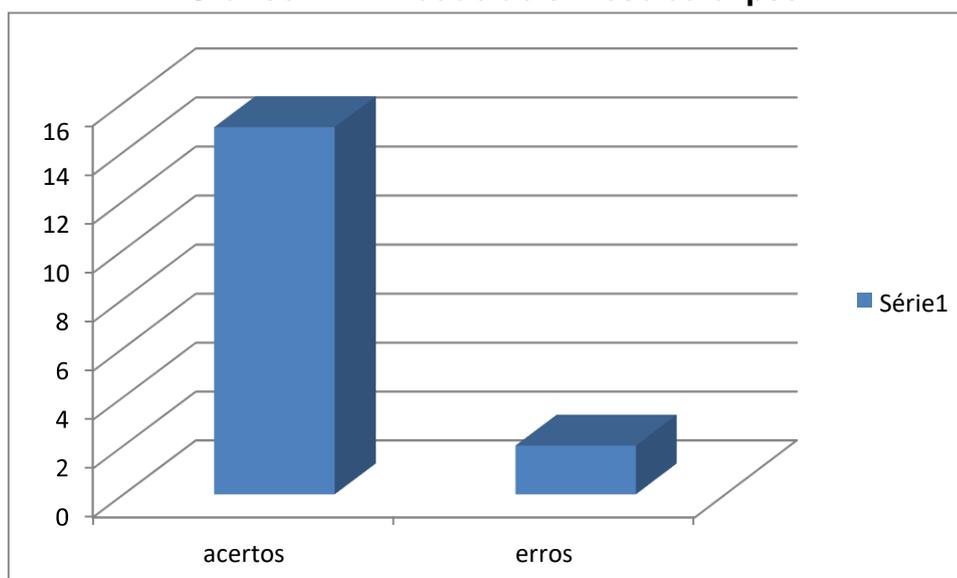
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os objetivos da Estação 2 foram identificar visualmente representações de cônicas em imagens da natureza; representar a imagem escolhida; destacar seus elementos principais; identificar as características e relações de uma cônica. Os alunos pesquisaram em *sites* de busca a imagem ou foto escolhida e, por meio da ferramenta de cônicas, por cinco pontos visualizaram a cônica e suas características próprias.

Nessa estação o autor também confeccionou três figuras encontradas para direcionar melhor o entendimento da estação.

O objetivo da terceira estação foi desenvolver atividades de traçado de cônicas, conhecendo as suas equações, utilizando o *software GeoGebra*, a fim de identificar as características das cônicas. Foi percebido, nessa estação, maior demora dos participantes em entregar as atividades em comparação às outras estações. Outra questão percebida foi maior número de dúvidas em relação a alguns itens.

Na quinta atividade sobre elipse, os alunos conseguiram realizar as atividades sobre as construções, utilizando a manipulação dos parâmetros, com a visualização e conhecimentos adquiridos na primeira estação. O objetivo foi levar o aluno, por meio do uso de tecnologias existentes e seus cognitivos visuais, manipular as partes das equações, contudo, sem se preocupar com resoluções de cálculo muito cansativas. O objetivo desse item foi propor aos alunos um estudo de elipse por meio de análises de construções e manipulação de parâmetros.

Gráfico 4- Atividade de síntese da elipse

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na sexta atividade sobre hipérbole, os alunos participantes realizaram as construções normalmente, sem encontrar grandes dificuldades, realizaram as manipulações de parâmetros, encontraram os interceptos do gráfico com os eixos e algumas coordenadas. Um dos objetivos foi que os participantes percebessem que variando **a** e **b** estariam abrindo ou fechando os ramos da hipérbole; variando **c**, estarão deslocando a hipérbole para a direita ou esquerda no eixo x; e variando **d**, estarão deslocando a hipérbole para cima ou para baixo sobre o eixo y. A maioria dos alunos percebeu essas transformações.

Contudo, houve nos itens P(5) e P(6) algumas dúvidas em relação à pergunta formulada, conforme os alunos A5 e A1. Essas questões geraram muitas dúvidas, o professor orientador teve que intervir para direcionar os participantes. No item P(5), a hipérbole está transladada e intercepta a reta paralela ao eixo x que contém o ponto com o qual a hipérbole foi transladada; por exemplo, se a hipérbole saiu da origem e foi para o ponto (3,4) ela intercepta a reta $y=4$. Alguns alunos registraram que a hipérbole intercepta os eixos, mas isso não é verdade, conforme explicado.

O item P(6) também gerou muitas dúvidas. A hipérbole está transladada, intercepta a reta paralela ao eixo y que contém o ponto com o qual a hipérbole foi transladada; por exemplo, se a hipérbole saiu da origem e foi para o ponto (3,4) ela intercepta a reta $x=3$. Alguns alunos afirmaram que a hipérbole intercepta os eixos, mas isso é inverídico.

Quadro 119 - Resposta da questão

Qual é a posição das hipérbolés plotadas, e interceptam que tipos de reta? **Obs.:**
Eu não sei o que é uma hipérbole plotada e eu não entendi o “que tipo de reta?”

Fonte: Reprodução de atividade feita por A5 – Caderno de Atividades.

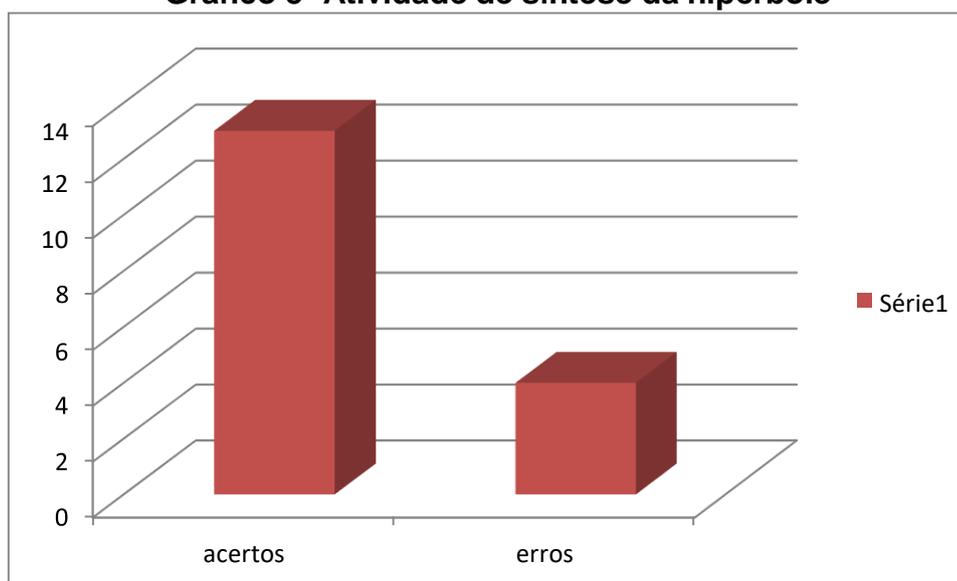
Quadro 120- Resposta da questão

Qual é a posição das hipérbolés plotadas, e interceptam que tipos de reta? **Não entendi essa pergunta.**

Fonte: Reprodução de atividade feita por A1 – Caderno de Atividades.

No final da atividade foi proposta uma síntese, tendo a maioria dos alunos respondido corretamente, conforme o Gráfico 5.

Gráfico 5- Atividade de síntese da hipérbole



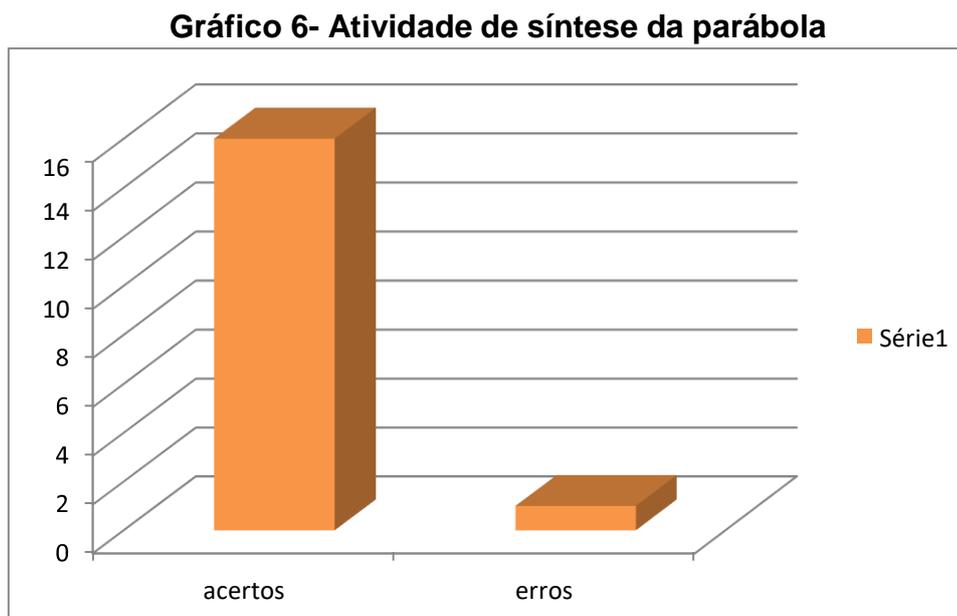
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na sétima atividade sobre parábola não houve nenhuma interferência por parte do professor pesquisador. Os alunos conseguiram desenvolver as construções por meio da manipulação dos parâmetros, perceberam as diversas posições e sentidos que acontecem com a parábola e, finalmente, conseguiram desenvolver uma síntese correta sobre essas variações.

O objetivo era, ao variar **a**, a parábola se desloca sobre o eixo x, para a direita ou para a esquerda. Variando **b**, a parábola se desloca sobre o eixo y, para cima ou para baixo.

Com a variação de p , foram observadas duas situações; a primeira é que a parábola pode abrir ou fechar, dependendo se aumenta ou diminui o seu valor de p . A segunda observação é que o valor de p irá determinar o sentido da parábola, ou seja, dependendo da equação, o valor negativo inverterá o seu sentido.

No final da atividade foi proposta uma síntese e a maioria dos alunos respondeu corretamente (Gráfico 6).



Fonte: Elaborado pelo autor.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa realizada, que gerou esta Dissertação, criou um Produto Educacional, como objetivo de um Mestrado em Ensino, e cuja composição tem atividades para a compreensão dos conceitos das cônicas e exploração das suas equações: a elipse, hipérbole e parábola. A metodologia definida pela Informática Educativa utilizou o *Blended Learning* e o software *GeoGebra* como diversificação didática.

Já no desenvolvimento do conteúdo, dois foram os pilares elaborados na edificação metodológica: (1) exploração do conceito/definição das cônicas e (2) manipulação de parâmetros das equações reduzidas e transladadas dessas.

Os objetivos específicos foram cumpridos, como identificação do instrumento metodológico *Blended Learning* e suas possibilidades de aplicação; desenvolvimento de atividades da geometria dinâmica em Geometria Analítica, como um campo fértil baseado em sua estrutura de tratamento gráfico e de equação (integração da Álgebra e Geometria); identificação em livros-textos o conteúdo do objeto em investigação e seu tratamento metodológico; construção de um Produto Educacional para os cursos que têm as cônicas em seu currículo, contribuindo com os professores como instrumento didático e, com os estudantes, com recurso facilitador de aprendizagem.

A constatação do cumprimento dos objetivos específicos se fez com a apresentação da análise da aplicação das atividades e da síntese dos resultados dessa aplicação, nos capítulos anteriores. Mas, seguem algumas considerações que reforçam o cumprimento dos objetivos definidos.

O Ensino Híbrido, que caracteriza o *Blended Learning*, é uma das tendências da Educação que promove a aprendizagem por experimentação – expressão atual da aprendizagem ativa, seja personalizada, seja compartilhada. Os resultados da aplicação das atividades, edificadas com esse recurso metodológico que compôs o Produto desenvolvido, demonstraram a eficiência do instrumento com ótimo aproveitamento dos sujeitos da pesquisa na execução das atividades propostas.

O uso do *software GeoGebra* facilitou a visualização gráfica e as respostas às questões formuladas, pois os estudantes conseguiram fornecer um conceito/definição das cônicas nas primeiras atividades. Foi realizado um trabalho de identificação conceitual dessas curvas, pois não foi dada a definição previamente, mas, passo a passo, foi exigida a sua elaboração estrutural com os recursos do *software do Blended*.

Já nas últimas atividades, nas quais foram exploradas as equações reduzidas e transladadas da cônicas com a manipulação dos parâmetros dessas equações, verificaram-se dificuldades, especialmente no tratamento das equações transladadas, quanto ao reconhecimento dos novos eixos definidores do gráfico das cônicas. A translação de figuras, apesar de num mesmo espaço, no caso o bidimensional, exige acompanhamento dos movimentos da figura na relação das variáveis e parâmetros quando da composição das equações, que se modificam, mas com a permanência do formato figural. Isto é, a translação, horizontal e vertical, acontece com a curva no seu mesmo design. Há uma mudança posicional a qual exige diferente equação da posição original.

A habilidade de transferência de saberes e sua integração na formulação de novos conhecimentos, característica da Geometria Analítica, que se consolida pela relação de conteúdo algébrico e geométrico, não é de fácil assimilação pelos estudantes. A proposta metodológica apoiada no *Blended Learning* e no software *GeoGebra* se constituiu de um apoio fundamental para o raciocínio analítico de tal integração, o que ficou constatado nos resultados da pesquisa.

A atividade extrassala de aula que exigiu a procura de figuras no mundo real, cuja imagem tem características dos formatos das cônicas, oportunizou para reforçar a habilidade de visualização e reafirmar os parâmetros definidores das cônicas, mas não teve uma participação expressiva dos estudantes. Ficou constatada a dificuldade do estudante em transferir seus conhecimentos teóricos para a prática ou fazer a translação da sala de aula para o mundo real.

Quanto ao objetivo de identificação em livros utilizados como recurso didático em aulas das cônicas, constatou-se uma mesma apresentação do conteúdo nas obras examinadas sem inovação metodológica, especialmente quanto ao *Blended Learning*.

Finalmente, o objetivo da edificação de um Produto Educacional, no estudo realizado para efetivação desta Dissertação, com base na Informática Educativa e no *Blended Learning*, se cumpriu na sua essência. Esse Produto, estruturado nos parâmetros da Informática Educativa e com recursos do *GeoGebra*, software que tem tido ampla divulgação e uso nas aulas de matemática da educação básica e superior, bem como instrumento de pesquisa em Educação Matemática, está disponível para docentes e estudantes no *site* do Mestrado em Ensino da PUCMinas e no Apêndice desta Dissertação.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Maria do Carmo F.; SOUZA, Patricia Rodrigues de. Modelos de rotação do ensino híbrido: estações de trabalho e sala de aula invertida. **E-Tech: Tecnologias para Competitividade Industrial**, Florianópolis, v. v. 9 n. 1, p. 3-16, 2016.

BACICH, Lilian. Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. **Tecnologias, Sociedade e Conhecimento**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 100-103, dez. 2015. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/ojs/>. Acesso em: 07 dez. 2020.

BACICH, Lílian. **Laboratório rotacional**. 2016a. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=W_BoL56QH-o. Acesso em 12 maio 2020.

BACICH, Lílian. **Sala de aula invertida**. 2016b. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=I0hR36mtt2w>. Acesso em 12 maio 2020.

BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello. (Org.). **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

BRASIL. **Decreto nº 5.622, de 19 de dezembro de 2005**. Regulamenta o art. 80 Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases Educação nacional. Brasília, DF: Presidência da República, 2015. Disponível Em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2005/decreto/d5622.htm. Acesso em: 20 jul. 2016.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**. Porto-Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Editora Autentica, 2018.

BORBA, M. C; PENTEADO, M. G. Pesquisas em informática e educação matemática. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p. 239-253, 2002.

CHRISTENSEN, Clayton M.; HORN, Michael B. STAKER, Heather. **Ensino híbrido: uma inovação disruptiva? uma introdução à teoria dos híbridos**. Tradutor Instituto Pensula. Boston: Clayton Christensen Institute, 2013. Disponível em: https://www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensino-hibrido_uma-inovacao-disruptiva.pdf. Acesso em: 21 jun. 2019

COSTA, José Wilson da; OLIVEIRA, Maria Auxiliadora Monteiro (Org.). **Novas linguagens e novas tecnologias: educação e sociabilidade**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2004.

D'AMBRÓSIO, B. Conversas Matemáticas: metodologia de pesquisa ou prática professoral? VI ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2018, Campinas. **Anais [...]**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2018. p. 18- 20.

- DAVIDSON, Cathy N. **Now you see it**: how technology and brain science will transform schools and business for the 21st century. New York: Penguin Books, 2011.
- EVES, Howard. Geometria: **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**: geometria. Tradução Higinio H Domingues. São Paulo: Atual, 1997.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Higinio H. Domingues, São Paulo: Unicamp, 2004.
- FROTA, Maria Clara Resende. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em cálculo. *In*: FROTA Maria Clara Resende; BIANCHINI, Barbára Lutaif; CARVALHO, Ana Márcia F. Tucci .(Org.). **Marcas da educação matemática no ensino superior**. Campinas: Papirus, 2013, p. 71.
- GARBI, G. Gilberto. **O romance das equações algébricas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- GUERRA, E. D. M.; COSTA, M. L. C. DA. O ensino de secções cônicas: uma abordagem utilizando investigações matemáticas mediadas pelo software GeoGebra. *In*: ENCONTRO PARAIBANO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, 8., 2014, Campina Grande. **Anais** [...]. Campina Grande: UEPB, 2014.
- HORN, Michael B.; STAKER, Heather. Blended. **Usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação**. Porto Alegre: Editora Penso, 2015.
- HUERTAS, A. Teaching and learning logic in a virtual learning environment. **Logic Journal of IGPL**, Oxford, v. 15, n. 4, p. 321-331, 2007.
- LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. O uso do computador no ensino de Matemática na Graduação. *In*: LAUDARES, João B. LACHINI, Jonas. (Org.). **A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo**. Belo Horizonte: Ed. Fumarc, 2001. p.68-88.
- LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.
- LÉVY, Pierre. **Cibercultura**. 2. ed. São Paulo: Editora 34, 2000.
- LÉVY, Pierre. **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34, 1999.
- LÉVY, Pierre. **O que é virtual?** São Paulo: Editora 34, 2007.
- MAIA, Marta de Campos; MEIRELLES, Fernando de Souza. Educação a distância: o caso Open University. **RAE-eletrônica**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 1-15, 2002.
- MATHEOS, K. Educação híbrida: a chave da inovação nas universidades canadenses. *In*: REALI, A. M. M. R., e MILL, D. R. S. (Org.). **Educação a Distância etecnologias digitais**: reflexões sobre sujeitos, saberes, contextos e processos. São Carlos: EdUFSCar, 2014. p. 57 – 68.

MIRANDA, Dimas Felipe; LAUDARES, João Bosco. **Quádricas**. Belo Horizonte: Fumarc, UCMG, 2011.

MIRANDA, Dimas Felipe de; LAUDARES, João Bosco. Informatização no Ensino da Matemática: investindo no ambiente de aprendizagem. **Zetetiké**, v. 15, n. 27 p. 71- 88, jan./jun. 2007.

MONTEIRO, Rubens Marinho. **Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o geogebra**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, 2014.

MORAN, José Manuel. **A educação que desejamos novos desafios e como chegar lá**. Campinas: Papyrus, 2007.

MORAN, José Manuel. Contribuições para uma pedagogia da educação online. *In*: SILVA, M. (Org). **Educação online**. São Paulo: Edições Loyola, 2003. p. 39-50.

MORAN, José Manuel. Educação híbrida: um conceito-chave para a educação, hoje. BACICH, Lilian, NETO, Adolfo Tanzi, e TREVISAN, Fernando de Mello. **Ensino Híbrido- Personalização e Tecnologia na Educação** Porto Alegre: Penso 2015, p. 27.

MORAN, José Manuel. **Metodologias ativas e modelos híbridos na educação**. Curitiba: CRV, 2017. p.23-35.

MORAN, José Manuel. **O uso das novas tecnologias da informação e da comunicação na EAD**: uma leitura crítica dos meios. Brasília: MEC, [1999]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/T6%20TextoMoran.pdf>

MOTA, Janine Freitas. **Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

NACARATO, A. M. *et al.* **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

NÃO TRIVIAL. **A Catenária, Gaudí e Confusões de Nomenclatura**. 2017. Disponível em: <https://naotrivial.wordpress.com/2017/03/29/a-catenaria-gaudi-e-confusoes-de-nomenclatura/>. Acesso em 20 out. 2020.

OLIVEIRA, Adilson Lopes de. **Objeto de aprendizagem para desenvolvimento de habilidades de visualização e representação de seções cônicas: atividades para o ensino médio**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

PINTEREST. Coliseu Romano, Roma, Itália. Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/285767538840447952/>. Acesso em 21 out. 2020.

PONTE, João Pedro et al. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2016.

PORTO, C. E. Um estudo comparativo da forma estrutural de dois monumentos religiosos em Brasília: A Catedral e o Estupa Tibetano. **P@ranoá eletrônico**, v.9 15 maio de 2007.

RODRIGUES, L. A. Uma nova proposta para o conceito de blendedlearning. **Interfaces da Educação**, Paranaíba, v. 1, n. 3, p. 5-22, 2010. Disponível em: <https://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces/article/view/628>. Acesso em: 30 jun. 2016.

RUAS, Maria Aparecida. **Geometria Analítica**. Departamento de Matemática. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2010.

SANTOS, Katia Ethienne Esteves dos. **A educação híbrida no processo de ensino-aprendizagem: uma proposta norteadora**. 2018. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2018. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucpr.br/pergamum/biblioteca/img.php?arquivo=/00006a/00006ac0.pdf>. Acesso em: 25 maio 2018.

SILVA, Sérgio Ferreira. **Geometria analítica: caminhos para aprendizagem**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

SIQUEIRA, Anderson Gonçalves. **Das cônicas aos cilindros e quádricas: a transição do plano para o espaço tridimensional**. 2018. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018.

VALE, Leandra Mendes do; SILVA, Valéria Alves. **Rotação por estações: guia completo, por duas professoras**. Silabe, 27 de março de 2018. Disponível em: <https://silabe.com.br/blog/rotacao-por-estacoes/> Acesso em: 20 jun. 2019.

VALENTE, José Armando. **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1993.

VALENTE, José Armando. *Blended Learning* as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. **Educar em Revista**, Curitiba, n. esp. 4, p. 79-97, 2014. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nspe4/0101-4358-er-esp-04-00079.pdf> Acesso em: 06 jun. 2019.

VITALE, Claudio Rama. **La tercera reforma de la educación superior en América Latina**. México: Fundo de Cultura Económica, 2007.

APÊNDICE 1 - LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO (Realizado quando da construção do projeto de pesquisa)

	Tese	A educação híbrida no processo de ensino-aprendizagem: uma proposta norteadora	Katia Ethienne Esteves dos Santos	PUC-PR	PUC-PR	2018	Curitiba-PR	2018
2	Dissertação	Das cônicas aos cilindros e quádras: a transição do plano para o espaço tridimensional	Anderson Gonçalves Siqueira	PUC MG	2018	2018	Belo Horizonte- MG	2018
3	Dissertação	Objeto de Aprendizagem para o Estudo do Conceito de Função e seu Comportamento com Modelos Matemáticos no Ensino Médio e na Educação Profissional Técnica	Aloísio Moisés Dauanny Júnior	PUC-MG	PUC MG	2017	Belo Horizonte- MG	2017
4	Dissertação	As curvas cônicas com o uso do <i>GeoGebra</i>	Graciano Francisco Rodrigues	PROFMAT	Universidade Federal de Alagoas	2015	Maceió-AL	2015
5	Dissertação	Cônicas: Apreciando uma obra prima da Matemática	Luiz Efigênio da Silva	PROFMAT	Universidade Federal do Ceará	2015	Fortaleza-CE	2015
6	Dissertação	Geometria Analítica: caminhos para aprendizagem	Sérgio Ferreira Silva	PUC- RIO	PUC- Rio	2015	Rio de Janeiro-RJ	2015
7	Dissertação	O Ensino Híbrido: processo de ensino mediado por ferramentas tecnológicas	Emílio Bertholdo Neto	PUC-SP	Ponto e Vírgula	2017	São Paulo-SP	2017
8	Dissertação	A plataforma Khan Academy como auxílio ao Ensino Híbrido em Matemática: um relato de experiência	Paulo Marcus Hollweg Corrêa	PROFMAT	Universidade Federal do Rio Grande.	2016	Porto Alegre-RS	2016

9	Dissertação	Geometria Esférica por meio de materiais manipuláveis	Joana D'Arc da Silva Reis	Mestrado	Unesp-SP	2009	São Paulo-SP	2009
10	Dissertação	O Ensino Híbrido como Metodologia do Ensino na Matemática - Geometria Espacial - Pirâmides Regulares	Danielle Angelica da Luz e Silva	UFOP	Universidade Federal Ouro Preto	2018	Ouro Preto-MG	2018
11	Dissertação	Explorando recursos do Geogebra no estudo de quádricas a partir de diferentes representações	Landyne Londero	UFSM	UFSM	2017	Santa Maria-RS	2017
12	Dissertação	Estudo das cônicas: Uma proposta didática com o uso do GeoGebra para o ensino médio	Thiago pardo Severiano	PROFMAT	UFRGN	2017	Natal- RN	2017
13	Dissertação	Planos, Cilindros e Quádricas-Um enfoque no traçado de gráficos com exploração das seções transversais na perspectiva da habilidade de visualização com o <i>software</i> Winplot 3D	Janine Freitas Mota	PUC MG	PUC MG	2010	Belo Horizonte-MG	2010
14	Dissertação	Um estudo didático das cônicas: Quadros, registros e pontos de vistas	Carlos Alberto Fernandes de Siqueira	PUC-SP	PUC-SP	2016	São Paulo-SP	2016
15	Dissertação	Cônicas para o Ensino Médio, da Contextualização à Álgebra.	Marcelo Honório dos Santos	PROFMAT	PROFMAT	2014	Goiânia-GO	2014
16	Dissertação	Resgate do teorema de Dandelin no estudo de Cônicas com GeoGebra	Rubens Marinho Monteiro	UFES	UFES	2014	Vitória- ES	2014
17	Dissertação	Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, Sólidos geométricos e <i>Softwares</i> Educacionais	Renata Aparecida Martins	UNESP	UNESP	2003	Rio Claro-SP	2003

18	Dissertação	Cônicas e Aplicações	Juracélio Ferreira Lopes	Mestrado Profissional	Universidade estadual Paulista- Júlio de Mesquita Filho	2011	Rio Claro-SP	2011
19	Dissertação	O Estudo das Cônicas a partir da Construção Geométrica	Mainara Lenz	Mestrado Profissional	Universidade estadual Paulista- Júlio de Mesquita Filho	2014	Rio Claro-SP	2014
20	Dissertação	A construção do conceito das cônicas aliada ao GeoGebra: o caso da hipérbole	Francisco Gilvan Martins do Nascimento	PROFMAT	Mestrado Profissional	2018	Rio Branco	2018
21	Dissertação	Cônicas e Suas Propriedades Notáveis	Lindomar Duarte de Souza	PROFMAT	Mestrado Profissional	2014	Florianópolis-SC	2014
22	Dissertação	O estudo da circunferência no Ensino Médio: uma proposta utilizando um <i>software</i> livre	Gabriel Rosaboni Vecchi	Mestrado Profissional	Universidade estadual Paulista- Júlio de Mesquita Filho	2015	Rio Claro-SP	2015
23	Dissertação	Ensino híbrido: estado do conhecimento das produções científicas no período de 2006 a 2016	Ivanilda de Almeida Meira Novais	Mestrado	Universidade Estadual de Maringá	2017	Maringá-PR	2017
24	Dissertação	Uma abordagem introdutória de cônicas para o ensino médio por meio do GeoGebra	Marcelo de Moura Costa	PROFMAT	Universidade federal de Juiz e Fora	2013	Juiz de Fora-MG	2013
25	Dissertação	Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concretos	Johann Senra Moreira	PUC-RIO	PUC-RIO	2017	Rio DE Janeiro-RJ	2017

	Dissertação	<i>Software</i> de geometria dinâmica na formação continuada do professor de matemática: estudo das cônicas	Robertson de Carvalho Borges	PROFMAT	Universidade Federal do Acre	2014	Rio Branco-AC	2014
27	Dissertação	Objeto de aprendizagem para desenvolvimento de habilidades de visualização e representação de secções cônicas: atividades para o ensino médio	Adilson Lopes de Oliveira	Mestrado profissional	PUC-MG	2011	Belo Horizonte-MG	2011
28	Dissertação	Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico	João Paulo de Lima	Mestrado profissional	PROFMAT	2014	Mossoró-RN	2014
29	Dissertação	Estudando as cônicas por meio da geometria analítica e da álgebra linear	Josiana Gomes Barbosa Arenhardt	Mestrado	Universidade Federal de Jataí Goiás	2016	Jataí-GO	2016
30	Dissertação	Algumas aplicações do <i>software</i> GeoGebra ao ensino da geometria analítica	Paulo Cezar Camargo Guedes	Mestrado	PROFMAT	2013	Vitória-ES	2013
31	Dissertação	GeoGebra como recurso facilitador do processo de ensino-aprendizagem de Curvas Planas	Cláudio Lourenço Araújo	Mestrado profissional	PROFMAT	2018	Goiânia-GO	2018
32	Dissertação	Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização	Alessandra Hendi dos Santos	Mestrado	Universidade Federal do Paraná.	2014	Curitiba-PR	2014
33	Dissertação	Ensino de derivadas em cálculo i: aprendizagem a partir da visualização com o uso do <i>GeoGebra</i>	José Cirqueira Martins Júnior	Mestrado profissional	UFOP	2015	Ouro Preto	2015
34	Dissertação	Explorando o Ensino Híbrido em física: uma proposta para o ensino de fenômenos ondulatórios utilizando ferramentas multimidiáticas	Rodolfo Henrique de Mello Caversan	Mestrado profissional	Universidade Estadual Paulista	2016	Presidente Prudente	2016

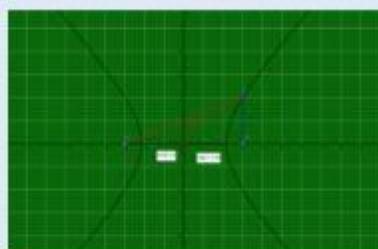
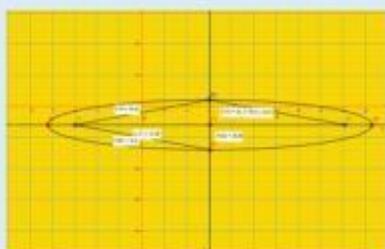
35	Dissertação	WEB 2.0 E CIBERCULTURA: PERSPECTIVAS COMUNICACIONAIS PARA A EDUCAÇÃO ON-LINE	Ana Rosa Costa Cardoso	Mestrado	Universidade Estácio de Sá	2011	Rio de Janeiro-RJ	2011
36	Artigo em Periódicos	Metodologias ativas e modelos híbridos na educação	Jose Moran	USP	YAEGASHI, Solange e outros (Org.)	CRV, 2017, p.23-35.	Curitiba	2017
37	Artigo em Periódicos	O Ensino Híbrido no Contexto das Escolas Públicas Brasileiras: Contribuições e Desafios	Edsom Rogério Silva	UFTO	Revista Porto das Letras	Vol. 03, Nº 01. 2017	Tocantis	2017
38	Artigo em Periódicos	A utilização de TIC no ensino da matemática em escolas estaduais da cidade de Erechim-RS: um diagnóstico	Sabrina Battisti; Nilce Fátima Scheffer	ENEM	ENEM	2016	Erechim	2016
39	Artigo em Periódicos	Ensino híbrido (<i>Blended Learning</i>) potencial e desafios no ensino superior	Sandra Maria Leandro, Elisete Marcia Corrêa	UNICEP	CIET/ EnPED	2018	São Paulo-SP	2018
40	Artigo em Periódicos	Ensino híbrido: um desafio para educação no aprender e ensinar	Jocemar Ribeiro, Luciana Carletti de Medeiros	Sinpro SP	6º Congresso de pesquisa do ensino	2018	São Paulo-SP	2018
41	Artigo em Periódicos	Algumas reflexões sobre o Ensino Híbrido na educação profissional	Eliana Cristina Nogueira Barion; Nádia Cristina de Azevedo Melli	XII WORKSHOP DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DO CENTRO PAULA SOUZA	XII WORKSHOP DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DO CENTRO PAULA SOUZA	2017	São Paulo-SP	2017
42	Artigo em Periódicos	Processos híbridos de ensino e aprendizagem de matemática na educação superior	Evandro Antônio Bertoluci; Aguinaldo Robinson de Souza	Congresso Internacional de Educadores e Tecnologias. EnPED	CIET/ EnPED	2018	Bauru- SP	2018

43	Artigo em Periódicos	Ensino Híbrido- novas perspectivas para aulas de revisão de conteúdo de matemática	Eliana Calixto Santos; Celina Aparecida Almeida Pereira Abar	PUC/SP -	PUC/SP -	2017	Jacareí-SP	2017
44	Artigo em Periódicos	As seções cônicas na Engenharia civil	Fernando Henrique Espíndola Reis; João Mário Andrade Pinto	FEA/FUMEC)	FEA/FUMEC)	2010	São Paulo-SP	2010
45	Artigo em Periódicos	A Utilização de TIC No Ensino da Matemática em escolas estaduais da cidade de Erechim-RS: Um Diagnóstico	Sabrina Battisti; Nilce Fátima Scheffer	UFFS - Campus Erechim RS	XII Encontro Nacional de Educação Matemática 1	2016	Rio Grande do Sul	2016
46	Artigo em Periódicos	O Ensino Híbrido: processo de ensino mediado por ferramentas tecnológicas	Emílio Bertholdo Neto1	Ponto e Vírgula - PUC SP	Ponto e Vírgula - PUC SP	2017	São Paulo-SP	2017
47	Artigo em Periódicos	Metodologias ativas e modelos híbridos na educação	José Moran	YAEGASHI, Solange e outros (Org.)	YAEGASHI, Solange e outros (Org.)	2017	Curitiba-PR	2017
48	Artigo em Periódicos	Informatização no Ensino da matemática: investindo no ambiente de aprendizagem	Dimas Felipe de Miranda João Bosco Laudares	Cempem - FE - Unicamp	ZETETIKÉ	2007	Campinas-SP	2007
49	Artigo em Periódicos	Ensino das cônicas mediado por sua história e pelo uso da geometria dinâmica	Agnaldo da Conceição Esquinhalha	ENEM	SBEM	2010	Salvador-BA	2010
50	Artigo em Periódicos	Geometria Analítica	Katia Frensel - Jorge Delgado	UFMA	UFMA	2011	São Luiz-MA	2011
51	Artigo em Periódicos	Ensino híbrido: uma experiência na educação superior	Cristiane Mendes Netto -Viviane Carvalho Fernandes	Universidade Vale do Rio Doce	Universidade Vale do Rio Doce	2017	Minas Gerais	2017

52	Entrevista	"O Ensino Híbrido é o futuro da educação", diz especialista	Julia Freeland Fisher	Época Negócios	Época Negócios	2017	São Paulo-SP	2017
53	Pôster	Personalização e tecnologia na educação	Lilian Bacich	Instituto Península	Instituto Península	2017	São Paulo-SP	2017
54	Livro	Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática	Marcelo de Carvalho Borba-Jussara de Loiola Araújo		Auten	2018	Belo Horizonte-MG	2018
55	Livro	Objetos de Aprendizagem para o ensino de Matemática: uma Prática Educativa	Dimas Felipe de Miranda et al.		Editora PUC Minas	2019	Belo Horizonte-MG	2019
56	Livro	Marcas da Educação Matemática no Ensino superior	Maria Clara Rezende		Papirus	2013	Campinas-SP	2013
57	Livro	Investigação em Educação Matemática	Dario Fiorentini		Autores associados	2012	Campinas-SP	2012
58	Caderno de Atividades	Caderno de Atividades de Geometria Analítica	Dimas Felipe de Miranda- João Bosco Laudares	PUC- MG	Editora PUC Minas	2013	Belo Horizonte-MG	2013
59	Livro	Investigação Qualitativa em educação	Roberto Bogdan-Sari Biklen		Porto Editora	1994	Porto-Portugal	1994
60	Livro	Investigações Matemáticas na Sala de Aula	João Pedro da Ponte-Joana Brocardo-Hélia Oliveira		Autêntica	2016	Belo Horizonte-MG	2016
61	Livro	Geometria Analítica	Joseph h. Kindle		McGraw- Hill do Brasil	1979	Barueri-SP	1979

APÊNDICE 2

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática
Área de Concentração: Matemática

PRODUTO DA PESQUISA

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

**O ENSINO HÍBRIDO – *BLENDED LEARNING* – UMA PROPOSTA
PARA O ESTUDO DE CÔNICAS EM CURSOS SUPERIORES**

Autor: Marcelo Mesquita De Souza
Orientador: Professor Doutor João Bosco Laudares

APRESENTAÇÃO

As atividades constantes neste caderno de atividades foram desenvolvidas e planejadas de forma a proporcionar aos estudantes de graduação da área de exatas uma experiência inovadora do *Blended Learning*, utilizando apoio tecnológico, aliados à visualização. A proposta apresentada nas atividades busca proporcionar aos estudantes do ensino superior experiências diferenciadas em comparação às utilizadas na sala de aula tradicional.

Um dos objetivos principais das atividades buscou integrar a álgebra com a geometria analítica por meio dos recursos tecnológicos. A tecnologia tem a função de ajudar na visualização e interpretação geométrica entre geometria e álgebra, figura gráfica e equação.

A integração da mídia computacional com a geometria analítica possibilita ao aluno uma melhor interpretação das equações e gráficos. Visto que a manipulação dos parâmetros da equação favorece a visualização com a dinâmica e amovimentação da figura gráfica.

Com a utilização do *software* de matemática dinâmica *GeoGebra*, foi possível ao estudante realizar os processos de construções, interpretações e manipulações, desenvolvendo sua autonomia e a construção de seu próprio conhecimento.

A metodologia utilizada para a realização das atividades consiste em uma sequência de atividades composta por três estações de aprendizagem. Na Estação 1, abordam-se as cônicas elipse, parábola e hipérbole; na Estação 2, abordam-se a identificação de cônicas na natureza; e, na Estação 3, abordam-se novamente as cônicas elipse, parábola e hipérbole. A seguir, apresenta-se o organograma das atividades.

Estação 1: Construção e Manipulação de Cônicas sem o conhecimento de equações

Esta estação foi dividida em três atividades:

- Atividade 1- Estudo da elipse;
- Atividade 2- Estudo da hipérbole;
- Atividade 3- Estudo da parábola.

Estação 2: Identificação de cônicas na natureza

- Esta estação compreende a atividade 4 em que se fazem buscas em *sítes* de cônicas na natureza.

Estação 3: Manipulação e análise de cônicas com o conhecimento de equações

Esta estação foi dividida em três atividades:

- Atividade 5- Estudo da elipse;
- Atividade 6- Estudo da hipérbole;
- Atividade 7- Estudo da parábola.

SUMÁRIO

Equações no GeoGebra.....	137
ESTAÇÃO 1- CONSTRUÇÃO E MANIPULAÇÃO DE CÔNICAS SEM O CONHECIMENTO DE EQUAÇÕES.....	138
1.1 Objetivos.....	138
1.2 Metodologia	138
1.3 Atividade 1- Estudo da elipse.....	139
<i>1.3.1 Construção da elipse.....</i>	<i>139</i>
<i>1.3.2 Sequências de atividades.....</i>	<i>139</i>
1.4 Atividade 2- Estudo da hipérbole.....	142
<i>1.4.1 Construção da hipérbole</i>	<i>142</i>
<i>1.4.2 Sequências de atividades.....</i>	<i>142</i>
1.5 Atividade 3- Estudo da parábola	145
<i>1.5.1 Construção da parábola</i>	<i>145</i>
<i>1.5.2 Sequências de atividades.....</i>	<i>145</i>
2 ESTAÇÃO 2- ATIVIDADE 4- IDENTIFICAÇÃO DE CÔNICAS NA NATUREZA	146
2.1 Objetivos.....	146
2.2 Metodologia	146
2.3 Sequências de atividades.....	146
3 ESTAÇÃO 3- MANIPULAÇÃO E ANÁLISE DE CÔNICAS COM O CONHECIMENTO DE EQUAÇÕES.....	148
3.1 Objetivos.....	148
3.2 Metodologia	148
3.3 Atividade 4- Estudo da elipse.....	149
<i>3.3.1 Definição de elipse</i>	<i>149</i>
<i>3.3.2 Construção da elipse.....</i>	<i>150</i>
<i>3.3.3 Sequências de atividades.....</i>	<i>150</i>
3.4 Atividade 6- Estudo da hipérbole.....	153
<i>3.4.1 Definição de hipérbole.....</i>	<i>153</i>
<i>3.4.2 Construção da hipérbole.....</i>	<i>153</i>
<i>3.4.3 Sequências de atividades.....</i>	<i>153</i>

3.5 Atividade 7 - Estudo da parábola	157
3.5.1 <i>Definição de parábola</i>	157
3.5.2 <i>Construção da parábola</i>	158
3.5.3 <i>Sequências de atividades</i>	158

Equações no GeoGebra

<p>Para a equação da elipse: $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$</p> <p>Na barra de entrada do <i>GeoGebra</i>, digite: $(x-c)^2/a^2+(y-d)^2/b^2=1$.</p>
<p>Para a equação da hipérbole: $\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$</p> <p>Na barra de entrada do <i>GeoGebra</i>, digite: $(x-c)^2/a^2-(y-d)^2/b^2=1$.</p>
<p>Para a equação da hipérbole: $-\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$</p> <p>Na barra de entrada do <i>GeoGebra</i>, digite: $-(x-c)^2/a^2+(y-d)^2/b^2=1$.</p>
<p>Para a equação da parábola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$</p> <p>Na barra de entrada do <i>GeoGebra</i>, digite: $(x-a)^2=4p*(y-b)$.</p>
<p>Para a equação da parábola: $(x - a)^2 = - 4p(y - b)$</p> <p>Na barra de entrada do <i>GeoGebra</i>, digite: $(x-a)^2=-4p*(y-b)$.</p>
<p>Para a equação da parábola: $(y - y)^2 = 4p(x - b)$</p> <p>Na barra de entrada do <i>GeoGebra</i>, digite: $(y-a)^2=4p*(x-b)$.</p>
<p>Para a equação da parábola: $(y - y)^2 = - 4p(x - b)$</p> <p>Na barra de entrada do <i>GeoGebra</i> digite: $(y-a)^2=-4p*(x-b)$.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor.

1 ESTAÇÃO 1 - CONSTRUÇÃO E MANIPULAÇÃO DE CÔNICAS SEM O CONHECIMENTO DE EQUAÇÕES

1.1 Objetivos

- Reconhecer cônicas e seus elementos;
- desenvolver atividades de construção de cônicas desconhecendo-se as suas equações, utilizando o *software GeoGebra*;
- desenvolver um conceito introdutório para as cônicas.

1.2 Metodologia

Para a primeira estação de construção e manipulação de cônicas, foram desenvolvidas três atividades. Será uma atividade para cada cônica estudada. O conteúdo trata do traçado de cônicas, desconhecendo-se as suas equações, seguindo os passos do roteiro de orientações.

O aluno vai construindo e desenvolvendo suas conjecturas e chegando ao conceito de cada cônica. As dúvidas serão sanadas pelo professor orientador no decorrer das atividades.

Optou-se por desenvolver as atividades da primeira estação com toda a turma separada em duplas, em cada computador.

Nesta estação, são abordados a excentricidade e elementos principais das cônicas e a construção, conforme aparece no quadro “Construção e manipulação de cônicas”.

Construção e manipulação de cônicas

Nº	Estação	Atividades		Conteúdo abordado
	Construção e manipulação de cônicas	1ª	elipse	Excentricidade; Elementos principais.
		2ª	hipérbole	
		3ª	parábola	

Fonte: Elaborado pelo autor.

1.3 Atividade 1 - Estudo da elipse

Estação 1	Construção e Manipulação de Cônicas
Atividade 1- Estudo da elipse	
Siga cada passo(P); exemplo: P(1)= passo um	
P(1): Crie dois pontos sobre o eixo das abscissas e um fora do eixo, usando os comandos do botão ELIPSE .	
P(2): Renomeie os pontos sobre o eixo x para (F1, F2) - Foco 1, Foco 2 - o outro ponto somente sobre a elipse para (P) .	
P(3): Use o comando segmento de reta. Crie os segmentos F1P e F2P .	
P(4): Na interseção da elipse com o eixo x, crie dois pontos (A1, A2) .	
P(5): Trace uma mediatriz entre os focos (F1, F2) ; para isso, use o botão MEDIATRIZ .	
P(6): Na interseção da elipse com a mediatriz (vértices), crie dois pontos (B1, B2) .	
P(7): Na interseção da mediatriz com o eixo x, crie um ponto e o nomeie de (C) .	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação: Se necessário, apague as medições feitas para facilitar a visualização.

Responda:

a) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

4. o ponto P e o foco F1; (PF1). _____
5. o ponto P e o foco F2; (PF2). _____
6. os focos F1 e F2; (F1F2): _____

Arraste o ponto P, tome valores de PF1, PF2 e F1F2 e preencha o quadro abaixo.

	PF1	PF2	PF1 + PF2	F1F2
Situação 1				
Situação 2				
Situação 3				

Qual a relação entre a soma das distâncias PF1 e PF2 e a distância entre F1F2?

b) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o ponto P e o foco F1; (PF1). _____
2. o ponto P e o foco F2; (PF2). _____
3. os vértices A1 e A2; (A1A2). _____

Arraste o ponto P, tome valores de PF1, PF2 e A1A2 e preencha o quadro abaixo.

	PF1	PF2	PF1 + PF2	A1A2
Situação 1				
Situação 2				
Situação 3				

Qual a relação entre as distâncias PF1 e PF2 e a distância entre A1A2?

c) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

3. o ponto C e o foco A1; (CA1) - semieixo maior. _____
4. o ponto C e o vértice B1; (CB1) - semieixo menor. _____

Arraste os focos F1 e F1 até coincidirem com o ponto C.

O que acontece com as medidas de CA1 e CB1?

O que acontece com o formato da elipse?

d) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o ponto C e o foco F1; (CF1) - Semidistância focal (c). _____

2. os pontos F1 e B1; (F1B1) - Denominado (a) _____
 Arraste o foco F2, tome valores para (c) e (a) e calcule a excentricidade (e) da elipse.

	Valor de a	Valor de c	$e = \frac{c}{a}$
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			

O que acontece com o formato da elipse com a excentricidade próxima a zero?

O que acontece com o formato da elipse com a excentricidade próxima a um?

e) Formule com suas palavras um conceito para a elipse. Tome como base a distância do ponto P aos focos e a medida do eixo maior.

1.4 Atividade 2 - Estudo da hipérbole

Estação 1	Construção e Manipulação de Cônicas
Atividade 2- Estudo da hipérbole	
Siga cada passo(P); exemplo: P(1)= Passo um	
P(1): Use o comando hipérbole. Crie dois pontos distintos sobre o eixo x e um ponto qualquer sobre a hipérbole.	
P(2): Nomeie os pontos sobre o eixo x de (F1) e (F2) - Foco 1 e Foco 2 - e o ponto sobre a hipérbole de (P) .	
P(3): Use o comando interseção de dois objetos. Crie pontos na interseção da hipérbole com eixo x . Basta clicar na hipérbole e no eixo.	
P(4): Nomeie os pontos de interseção da hipérbole com o eixo x de (A1) e (A2) - Vértices.	
P(5): Use o comando mediatriz. Construa a mediatriz entre os focos da hipérbole (F1) e (F2) .	
P(6): Use o comando interseção de dois objetos. Crie um ponto na interseção da mediatriz com eixo x . Nomeie esse ponto de (O) - Centro da hipérbole.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação: Se necessário apague as medições feitas para facilitar a visualização.

Responda:

a) Usando o comando **SEGMENTO**:

1. construa os segmentos **F1P** e **F2P**.

Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

2. os focos **(F1)** e **(F2)** e o ponto **P**. _____
3. o centro da hipérbole **(O)** e o vértice **(A2)** - Semieixo transversal, chamado de **a**. _____

Arraste o ponto **P** sobre a hipérbole e anote os valores no quadro.

	F1P	F2P	a
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			
Situação 4			

Com os valores, faça:

	$ F1P - F2P $	$2 \cdot a$ (Eixo transverso)
Situação 1		
Situação 2		
Situação 3		
Situação 4		

Qual a relação entre o módulo da diferença das distâncias F1P e F2P e o tamanho do eixo transverso?

b) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. os pontos O e A2; (OA2) - Semieixo transverso (a). _____

2. o ponto O e o foco F1; (OF1) - Semidistância focal (c). _____

Arraste o ponto P, tome valores para (a) e (c) e calcule a excentricidade (e) da hipérbole.

	Valor de a	Valor de c	$e = \frac{c}{a}$
Situação 1			
Situação 2			
Situação 3			
Situação 4			

O que acontece com o formato hipérbole com a excentricidade próxima a um?

O que acontece com o formato da hipérbole com a excentricidade tendendo a valores grandes?

-
-
- c) Formule com suas palavras um conceito para a hipérbole. Tome como base os focos F_1 e F_2 e o eixo transversal (2a).
-
-
-

1.5 Atividade 3 - Estudo da parábola

Estação 1	Construção e Manipulação de Cônicas
Atividade 3- Estudo da parábola	
Siga cada passo(P); exemplo: P(1)= passo um.	
P(1): Crie um ponto sobre o eixo y e o nomeie de (F).	
P(2): Use o comando parábola. Clique sobre ponto F (foco) e sobre o eixo x (reta diretriz).	
P(3): Crie um ponto sobre a parábola e o nomeie de (P) - Se necessário, movimente o plano cartesiano para uma melhor visualização.	
P(4): Use o comando reta perpendicular. Clique sobre ponto P e sobre o eixo x .	
P(5): Use o comando interseção de dois objetos. Crie um ponto na interseção da reta perpendicular construída no passo 4 com o eixo x . Basta clicar na reta e no eixo.	
P(6): Clique com o botão direito do <i>mouse</i> na reta perpendicular construída e desabilite a opção "exibir objeto".	
P(7): Nomeie o ponto criado no eixo x de (A).	
P(8): Use o comando interseção de dois objetos. Crie um ponto na interseção da parábola com o eixo y . Basta clicar na reta e no eixo.	
P(7): Nomeie o ponto criado no eixo y de (V)	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação: Se necessário, apague as medições feitas para facilitar a visualização.

Responda:

- a) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. ponto A e o ponto P (AP). _____

2. o foco F e o ponto P (FP). _____

Arraste o ponto P sobre a parábola.

O que acontece com as medidas de AP e FP?

b) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o foco F e o ponto P (FP). _____

2. o foco F a diretriz "eixo x"; (Fdiretriz) - Parâmetro. _____

Arraste o ponto P ao lugar mais próximo da diretriz da parábola, até ficar coincidente com o ponto (V) que é o vértice.

Qual a relação existente entre a medida do parâmetro (Fdiretriz) e a medida (VF) do vértice (V) ao foco (F)?

c) Usando o comando **DISTÂNCIA**, tome as medidas entre:

1. o ponto A e o ponto P (AP): _____

2. o foco F e o ponto P (FP): _____

Arraste o ponto P sobre a parábola e tome os valores para as medidas de AP e FP quando o ponto A tiver as abscissas indicadas.

Ponto A	Medida AP	Medida FP
x = 3		
x = 2		
x = 1		
x = 0		
x = - 1		
x = - 2		
x = - 3		

Analisando os valores encontrados para as medidas de AP e FP, o que se pode afirmar sobre o eixo y em relação à parábola.

d) Formule com suas palavras um conceito para a parábola. Tome como base a distância do ponto (P) ao foco (F) também do ponto (P) à diretriz.

2 ESTAÇÃO 2 – IDENTIFICAÇÃO DE CÔNICAS NA NATUREZA

2.1. Objetivos

- Identificar visualmente representações de cônicas em imagens da natureza;
- representar um esboço para destacar a cônica na imagem escolhida;
- introduzir o conceito, elementos e relações de uma cônica.

2.2 Metodologia

A segunda estação é não presencial e foi organizada para o trabalho individual. Espera-se que os acadêmicos acessem *sites* de busca para fazer pesquisas de imagens de animais, plantas, construções e outras figuras encontradas na natureza ou sociedade.

A partir dessa busca, os alunos devem identificar e destacar, na imagem escolhida, a forma de uma ou mais cônicas, apresentando suas informações (conceito; elementos; relações). O quadro abaixo apresenta a síntese desta estação.

Identificação de cônicas na natureza

Nº	Estação	4ª -Atividade	Conteúdo abordado
2	Identificação de cônicas na natureza.	Pesquisar e identificar o formato de cônicas em imagens.	Conceito; Relações existentes.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Identificação de Cônicas na Natureza

Estação 2	Identificação de Cônicas na Natureza
Atividade 4- Pesquisa e Identificação de Cônicas em Imagens	
Siga cada passo(P); exemplo: P(1)= Passo um	
P(1): Busque na internet uma imagem que apresente as características das cônicas e salve no computador.	
P(2): Salve a foto ou imagem como arquivo imagem.	
P(3): Insira a imagem no <i>GeoGebra</i> . Menu principal: Editar > Incluir imagem.	
P(4): Use o comando cônicas por cinco pontos para indicar o formato da cônica na imagem.	
P(5): Execute o comando <i>Print Screen</i> ; cole a imagem em um arquivo de texto (Word ou similar).	

Fonte: Elaborado pelo autor.

P(6): No arquivo de texto:

- a) Identifique nas imagens selecionadas as cônicas na natureza.
- b) Escreva com suas palavras as características das cônicas apresentadas.

- c) Justifique o motivo da escolha pela cônica apresentada.

P(7): Salvar e enviar o arquivo de texto para o professor.

3 ESTAÇÃO 3- MANIPULAÇÃO E ANÁLISE DE CÔNICAS COM O CONHECIMENTO DE EQUAÇÕES

3.1 Objetivos

- Desenvolver atividades de traçado de cônicas conhecendo as suas equações, utilizando o *software GeoGebra*;
- identificar as características das cônicas;
- identificar visualmente as posições das cônicas por meio da manipulação dos parâmetros das equações;
- analisar os elementos das cônicas para algumas situações dadas.

3.2 Metodologia

Na terceira estação, serão desenvolvidas mais três atividades, como na primeira estação, uma atividade para cada cônica. A atividade deve ser executada no laboratório de informática em duplas. Trata-se de atividades guiadas sobre o traçado de cônicas, conhecendo-se as suas equações, seguindo a metodologia e os passos do roteiro de orientações em cada atividade.

Nesse momento, o aluno, com o conceito já desenvolvido na primeira estação, deverá aprofundar os conhecimentos sobre as cônicas com a manipulação de parâmetros, elementos e construção, conforme aparece no quadro “Estação manipulação e análise”.

Estação Manipulação e análise

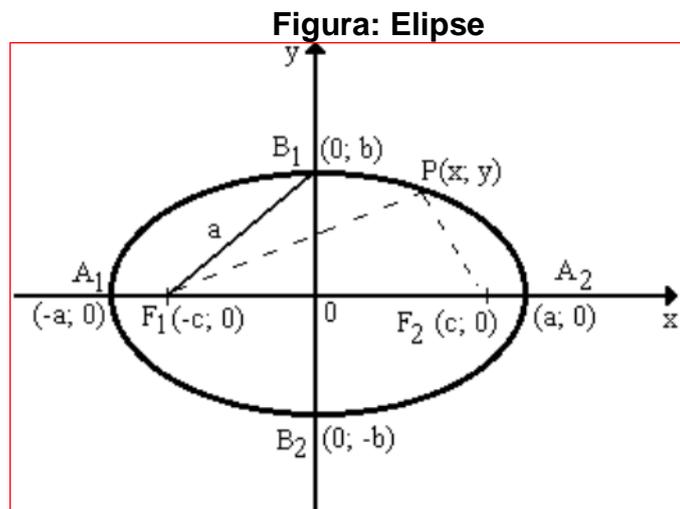
Nº	Estação	Atividades		Conteúdo abordado
3	Manipulação e análise	5ª	elipse	Relação entre parâmetros, elementos e a construção
		6ª	hipérbole	
		7ª	parábola	

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 Atividade 4 - Estudo da elipse

3.3.1 Definição de elipse

Você constatou que a soma das medidas de um ponto até dois focos, F_1 , F_2 , é igual à distância do eixo maior “ $2a$ ”. Essa figura plana elipse é denominada lugar geométrico.

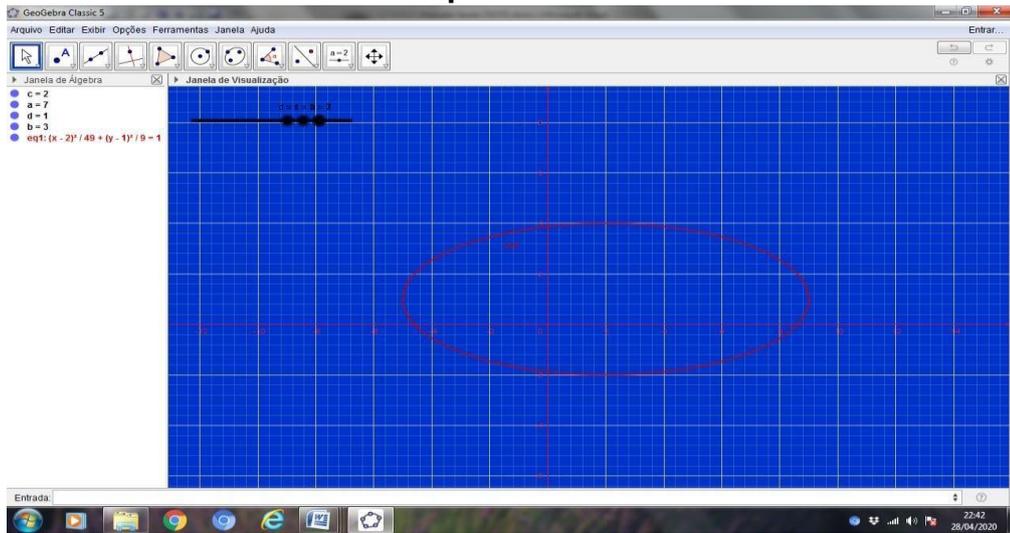


Fonte: Adaptação de Dante, 2004.

EQUAÇÕES DA ELIPSE	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a \geq b > 0$ tem focos $(\pm c, 0)$, onde $c^2 = a^2 - b^2$, e vértices $(\pm a, 0)$
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$a \geq b > 0$ tem focos $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 - b^2$, e vértices $(0, \pm a)$ $\Rightarrow e = \frac{c}{a} \Rightarrow$ Excentricidade, onde $0 < e < 1$
$\frac{(x - xc)^2}{a^2} + \frac{(y - yc)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y - yc)^2}{a^2} + \frac{(x - xc)^2}{b^2} = 1$

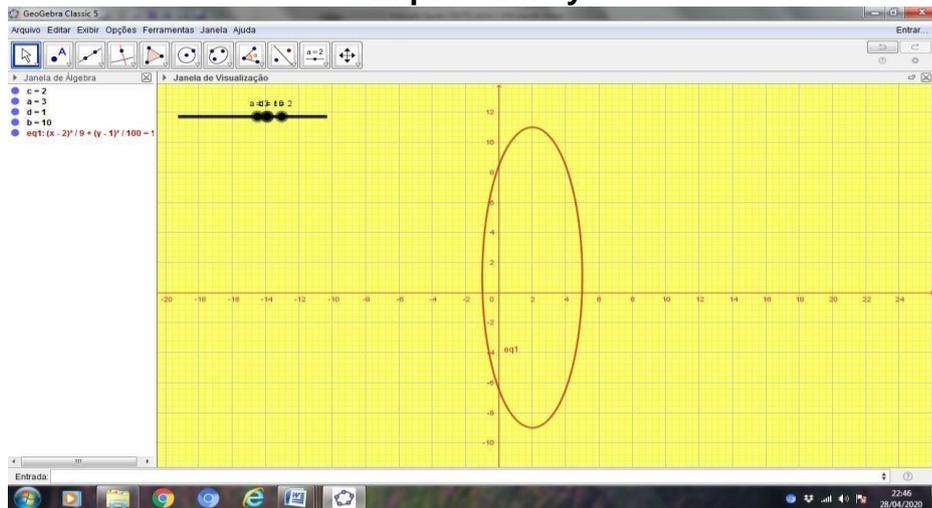
Fonte: Adaptado de Munem- Foulis, 1982

Elipse - eixo x



Fonte: Elaborado pelo autor.

Elipse- eixo y



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.2 Construção da elipse

Estação 3	Manipulação e análise
Atividade 5 - Elipse	
Siga os Passos P(1), P(2)e responda às perguntas	

Fonte: Elaborado pelo autor.

P(1): Plote a equação da elipse: $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1.$

P(2): Atribua valor zero para **c** e **d**, com valores quaisquer de **a** e **b**.

Responda:

- a) A elipse está centrada em que ponto?
-

P(3): Faça **a** maior do que **b**, com valores quaisquer de **c** e **d**.

Responda:

- b) O eixo maior da elipse está em que eixo coordenado?
-

- c) E o eixo menor está em que eixo coordenado?
-

P(4): Faça **a** menor que **b**

Responda:

- a) O eixo maior da elipse está em que eixo coordenado?
-

- b) E o eixo menor está em que eixo coordenado?
-

P(5): Faça **c=0** e varie **d**, **a** e **b** valores determinados.

Responda:

- a) Qual é a posição do centro das elipses?
-

P(6): Faça **d = 0** e varie **c**, **a** e **b** valores determinados.

Responda:

- a) Qual é a posição do centro das elipses?
-

SÍNTESE:

a) Com a variação de **a** e **b** o que acarreta na forma da elipse?

b) Com a variação dos valores de **c** e **d**, o que altera na posição das elipses?

3.4 Atividade 6- Estudo da hipérbole

3.4.1 Definição de hipérbole

Hipérbole

DEFINIÇÃO DA HIPÉRBOLE

É o lugar geométrico de pontos $P(x, y)$ de um plano tal que a diferença, em módulo, de suas distâncias a dois pontos fixos denominados focos é constante.



Onde:

F_1 e F_2 são os focos da hipérbole e $F_1F_2 = 2c$;

A_1, A_2 são os vértices da hipérbole e $A_1A_2 = 2a$. (Também chamado de eixo real ou eixo das abscissas);

$A_1F_1 - A_2F_2 = 2a$;

o eixo que contém os pontos B_1 e B_2 é chamado de eixo imaginário;

B_1, B_2 são os vértices do eixo imaginário.

Fonte: Adaptação de Dante, 2004.

Equações da hipérbole

EQUAÇÕES DA HIPÉRBOLE

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Tem focos $(\pm c, 0)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, e vértices $(\pm a, 0)$, e assíntotas $y = \pm (b/a)x$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ Tem focos $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, e vértices $(0, \pm a)$, e assíntotas $y = \pm (a/b)x$.

Fonte: Adaptação de Munem- Foulis, 1982.

Equações transladadas da hipérbole

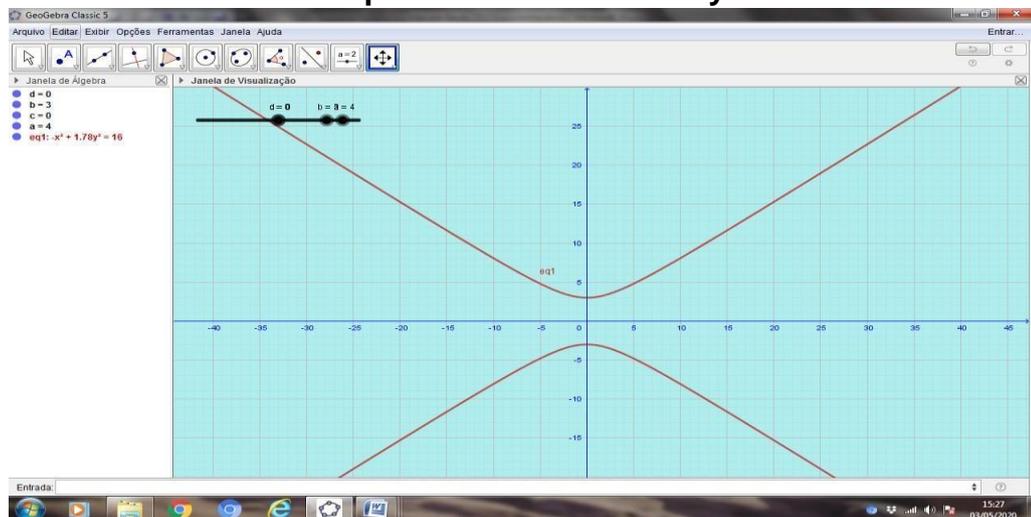
EQUAÇÕES TRANSLADADAS DA HIPÉRBOLE

$$\frac{(x-xc)^2}{a^2} - \frac{(y-yc)^2}{b^2} = 1 \quad \frac{(x-xc)^2}{b^2} - \frac{(y-yc)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$$

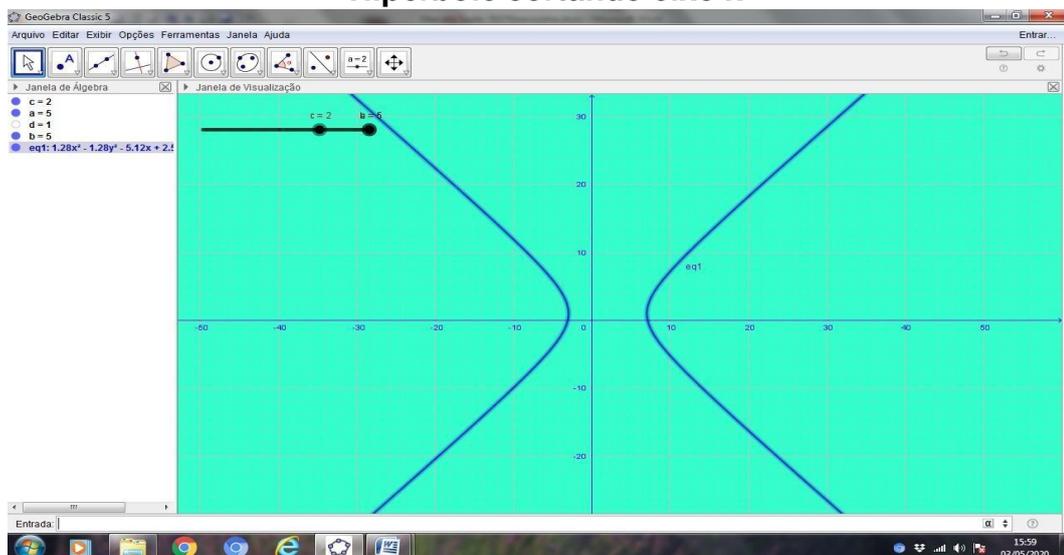
Fonte: Adaptação de Munem- Foulis, 1982.

Hipérbole cortando eixo y



Fonte: Elaborado pelo autor.

Hipérbole cortando eixo x



Fonte: Elaborado pelo autor.

Atividade 6 - Hipérbole

Estação 3	Manipulação e análise
Atividade 6: hipérbole	
Siga os Passos P(1), P(2)..... e responda às perguntas.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

P(1): Plote a equação da hipérbole: $\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$.

P(2): Atribua valor zero para **c** e **d** e varie **a** e **b**.

Responda:

A hipérbole intercepta qual eixo coordenado e para qual valor?

P(3): Plote a equação da hipérbole: $-\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$

P(4): Atribua valor zero para **c** e **d** e varie **a** e **b**.

Responda:

A hipérbole intercepta qual eixo coordenado e para qual valor?

P(5) Atribua quaisquer valores para **c** e **d** na equação:

$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$ fixando valores para **a** e **b**.

Responda:

Qual é a posição das hipérboles plotadas, e interceptam que tipos de reta?

P(6): Atribua quaisquer valores para **a** e **b** na equação:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1 \text{ fixe valores para } c \text{ e } d.$$

Responda:

a) Qual é a posição das hipérbóles plotadas, e interceptam que tipos de reta?

b) Compare as hipérbóles de P(3) e P(6), o que ocorre com o eixo real (transverso) e o eixo imaginário (não transverso)?

SÍNTESE:

Com a variação de **a** e **b**, o que acarreta na forma da hipérbole?

Com a variação dos valores de **c** e **d**, o que altera na posição das hipérbóles?

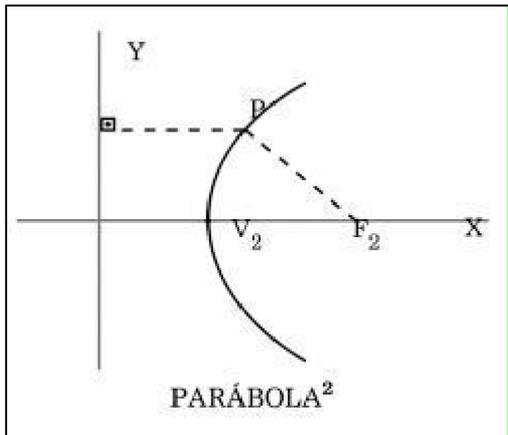
3.5 Atividade 7- Estudo da parábola

3.5.1 Definição da Parábola

Parábola

DEFINIÇÃO DA PARÁBOLA

É o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa d , chamada diretriz, e de um ponto fixo F , não pertencente à diretriz, chamado foco.



Equação da parábola com foco $(0,p)$ e diretriz $y = -p$ é:

$$x^2 = 4py$$

Trocando x e y , obtém-se:

$$y^2 = 4px$$

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

Fonte: Adaptação de Dante, 2004.

Equações transladadas da parábola

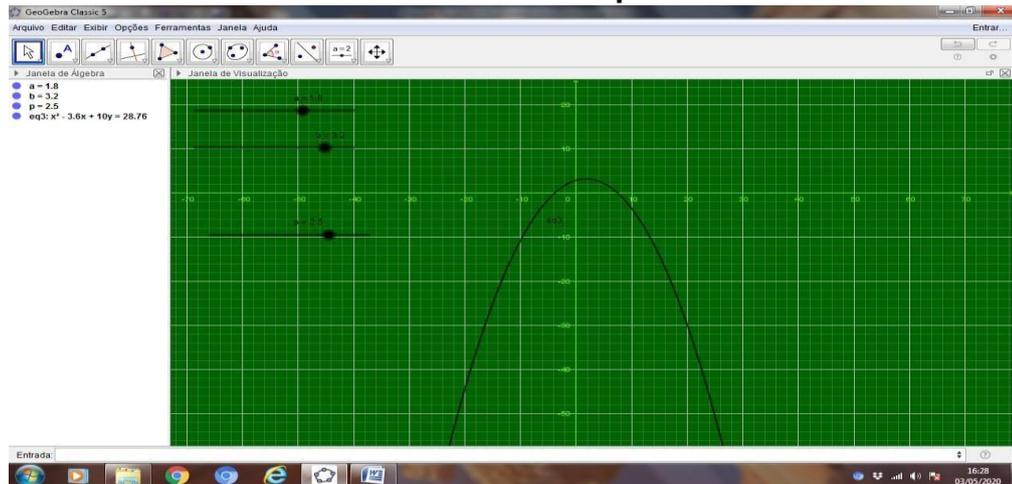
EQUAÇÕES TRANSLADADAS DA PARÁBOLA

$$(x - xc)^2 = 4p(y - yc)$$

$$(y - yc)^2 = 4p(x - xc)$$

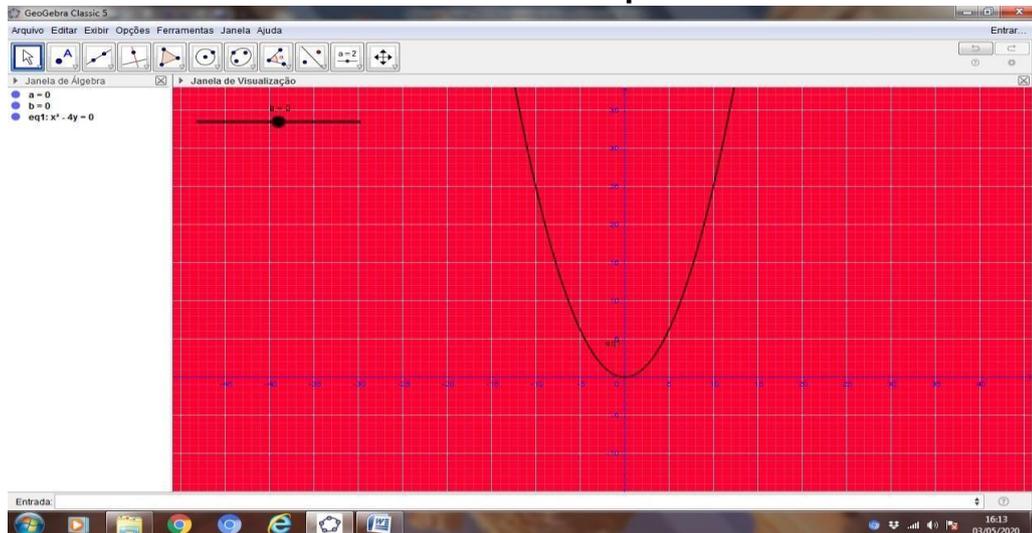
Fonte: Adaptação de Munem- Foulis, 1982.

Parábola concavidade para baixo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Parábola concavidade para cima



Fonte: Elaborado pelo autor.

Parábola

Estação 3	Manipulação e análise
Atividade 7: parábola	
Siga os Passos P(1), P(2)..... e responda às perguntas.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

P(1): Plote a equação $(x - a)^2 = 4p(y - b)$

P(2): Atribua valor zero para **a** e **b**

Responda:

Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

P(3) Varie p

Responda:

a) O que ocorre com a parábola para **p** crescente?

b) O que ocorre com a parábola para **p** decrescente?

P(4): Varie a e b

Responda:

O que ocorre com o vértice da parábola?

P(5): Plote a equação $(x - a)^2 = -4p(y - b)$.

P(6): Atribua valor zero para a e b.

Responda:

Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

P(7): Varie p.

Responda:

- a) O que ocorre com a parábola para **p** crescente a um valor de x determinado?

- b) O que ocorre com a parábola para **p** decrescente?

P(8): Varie **a** e **b**.

Responda:

O que ocorre com o vértice da parábola?

P(9): Plote a equação: $(y - a)^2 = 4p(x - b)$.

P(10): Atribua valor **zero** para **a** e **b**.

Responda:

Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

P(11): Varie **p**.

Responda:

- a) O que ocorre com a parábola para **p** crescente?

- b) O que ocorre com a parábola para **p** decrescente?

P(12) Varie a e b .

Responda:

O que ocorre com o vértice da parábola?

P(13) Plote a equação: $(y - a)^2 = -4p(x - b)$.

P(14):Atribua valor zero para a e b .

Responda:

Quais são as coordenadas dos vértices da parábola?

P(15) Varie p .

Responda:

a) O que ocorre com a parábola para p crescente?

b) O que ocorre com a parábola para p decrescente?

P(16) Varie a e b .

Responda:

O que ocorre com o vértice da parábola?

SÍNTESE:

a) Com a variação de **a** e **b** o que acarreta à parábola?

b) Com a variação de **p** o que acarreta à parábola?
