

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Ensino
Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Eixo Temático: Ensino de Matemática

Jorge da Silva Melo

**CEVIANAS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO:
uma análise de livros didáticos (1970-2019)**

Belo Horizonte
2021

Jorge da Silva Melo

**CEVIANAS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO:
uma análise de livros didáticos (1970-2019)**

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elenice de Souza Lodron Zuin

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Belo Horizonte
2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

M528c Melo, Jorge da Silva
Cevianas notáveis do triângulo: uma análise de livros didáticos (1970-2019) / Jorge da Silva Melo. Belo Horizonte, 2021.
253 f. : il.

Orientadora: Elenice de Souza Lodron Zuin
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Matemática - Estudo e ensino - Investigação. 2. Matemática - Historiografia 3. Geometria - Problemas, questões, exercícios. 4. Professores de matemática - Formação. 5. Livros didáticos. 6. Ótica geométrica. I. Zuin, Elenice de Souza Lodron. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 513:373

Ficha catalográfica elaborada por Elizângela Ribeiro de Azevedo - CRB 6/3393

Jorge da Silva Melo

**CEVIANAS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO:
UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS (1970-2019)**

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Profa. Dra. Elenice de Souza Lodron Zuin – Orientadora (PUC Minas)
Doutorado em Educação Matemática – (PUC-SP)

Profa. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes (UFRN)
Doutorado em Educação (História da Matemática) – (UFRN)

Prof. Dr. Paulo Fernando Braga Carvalho (PUC Minas)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial – (PUC Minas)

Belo Horizonte, 28 de abril de 2021.

*Dedico este trabalho a todos os meus familiares,
em especial, à Beatriz. Sua existência é o reflexo
mais perfeito do poder de Deus em nossas vidas.*

AGRADECIMENTOS

Segundo o “Dicionário Aurélio”, agradecer é retribuir, mostrar reconhecimento. Sendo assim, expresso aqui todo o meu reconhecimento:

Primeiramente a Deus, por ter me dado o dom da vida e condições para alcançar meus objetivos.

Aos meus pais, irmãos, demais familiares e amigos que me incentivaram durante todo o tempo de realização dessa pesquisa compreendendo minhas faltas.

À minha esposa Sulamita de Sá Maia e Melo, amiga e companheira, que me acompanhou incansavelmente durante esta rotina de estudos, por todo seu carinho, compreensão nos momentos de ausência e auxílio nas inúmeras revisões do texto.

À professora Dra. Elenice de Souza Lodron Zuin, não só por acreditar em meu trabalho, mas principalmente por orientar-me com tanta sabedoria. Sendo gentil mesmo ao mostrar meus equívocos, apontando novas possibilidades e caminhos a serem percorridos, pela sua disponibilidade e compreensão. E acima de tudo, pelos ensinamentos de vida, que me oportunizou ser um ser humano melhor.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino, por dividir comigo seus conhecimentos e pelo incentivo.

Aos meus colegas de curso, por fazerem parte desta etapa tão importante da minha vida.

E, finalmente, a Profa. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes e ao Prof. Dr. Paulo Fernando Braga Carvalho, que fizeram parte da banca examinadora, pela sua disponibilidade e valiosas contribuições dadas a este trabalho

A todos, minha eterna gratidão!

[...] A História da Educação Matemática visa a compreender as alterações e permanências nas práticas relativas ao ensino e à aprendizagem de Matemática; a estudar como as comunidades se organizavam no que diz respeito à necessidade de produzir, usar e compartilhar conhecimentos matemáticos e como, afinal de contas, as práticas do passado podem – se é que podem – nos ajudar a compreender, projetar, propor e avaliar as práticas do presente.

(Garnica e Souza, 2012, p. 27).

RESUMO

A presente pesquisa buscou verificar a existência do termo “cevianas” e de tópicos de história relacionados ao Teorema de Ceva nos livros didáticos de Matemática e Desenho Geométrico direcionados ao Ensino Fundamental publicados no período de 1970 a 2019 no Brasil. O intuito foi identificar as permanências e alterações na proposição do ensino das cevianas do triângulo. Para a análise dos livros didáticos, foi realizado um procedimento qualitativo fundamentado na análise de conteúdo, sob as perspectivas de Bardin (2016) e Zuin (2001, 2007). Um dos principais aportes teóricos é Chervel (1990) na discussão da história das disciplinas escolares. Constatou-se que o termo “cevianas” não estava presente em vários livros didáticos de Matemática analisados. Em contrapartida, foi encontrado em livros de Desenho Geométrico. Com relação à abordagem histórica sobre o conteúdo, verificou-se que na maioria dos livros ela era inexistente e, nos poucos em que estava incluída, foi utilizada para apresentação de personagens e datas. Como solução alternativa para suprir algumas lacunas apontadas por este estudo, foi desenvolvido um material paradidático, direcionado às formações inicial e continuada de professores de Matemática, bem como aos professores atuantes no ensino básico. A abordagem focou em tópicos de cunho histórico relacionados às cevianas do triângulo e ao Teorema de Ceva, agregando atividades práticas com recurso de dobraduras, construções geométricas e software de geometria dinâmica GeoGebra.

Palavras-chave: Educação Matemática. História da Matemática. Livros didáticos. Cevianas. Giovanni Ceva.

ABSTRACT

The present research aimed to verify the existence of the term "cevians" and history topics related to the Ceva's Theorem in Mathematics and Geometrical Drawing textbooks addressed to Middle School published in the period from 1970 to 2019 in Brazil. The purpose was to identify the permanences and changes in the proposition of teaching the cevians of the triangle. A qualitative procedure based on content analysis was carried out in order to analyze the textbooks, from the perspectives of Bardin (2016) and Zuin (2001, 2007). One of the main theoretical contributions is Chervel (1990) in the discussion of the history of school subjects. It was found that the term "cevians" was not present in a significant part of the analyzed mathematics textbooks. On the other hand, it was found in Geometrical Drawing textbooks. Regarding the historical approach to the content, it was found that most of the textbooks had no such approach and, in the few that did include it, it was used to present characters and dates. As an alternative solution to fill in some of the gaps pointed out by this study, a study guide was developed, aimed at the initial and continuing education of mathematics teachers, as well as teachers working in primary education. The approach focused on historical topics related to the triangle's cevians and the Ceva's Theorem, adding practical activities using folding, geometric constructions, and dynamic geometry software GeoGebra.

Keywords: Mathematics Education. History of Mathematics. Textbooks. Cevians. Giovanni Ceva.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática	36
Figura 2 – Exame de Artilheiros de Alpoim (1744).....	46
Figura 3 – Etapas cronológicas de Bardin (2016)	51
Figura 4 – Capa do Livro Matemática Curso Moderno, vol. 3	54
Figura 5 – Elementos do Triângulo Fonte: Sangiorgi (1970, p. 205).....	57
Figura 6 – Exercício nº 7, ângulos internos de um triângulo.....	58
Figura 7 – Capa do Livro Matemática Ensino Moderno – 7ª série	60
Figura 8 – Índice do livro Matemática Ensino Moderno	61
Figura 9 – Elementos do Triângulo	64
Figura 10 – Capa do Livro "Matemática" (1981).....	66
Figura 11 – Definições do conceito de triângulo.....	68
Figura 12 – Elementos do triângulo	70
Figura 13 – Exercício nº 13	71
Figura 14 – Exercício nº 10	72
Figura 15 – Ilustração de abertura do capítulo “Geometria Dedutiva”	73
Figura 16 – Capa do Livro "Matemática" (1985).....	74
Figura 17 – Definição de triângulo (Sardella e Matta).....	77
Figura 18 – Mediana, bissetriz e altura (Sardella e Matta - 1985)	78
Figura 19 – Exercício (Sardella e Matta).....	79
Figura 20 – Capa do Livro "Matemática Scipione" (1991).....	81
Figura 21 – Inserção histórica	87
Figura 22 – Ilustração (altura e mediana).....	88
Figura 23 – Capa do Livro “Matemática” (2002).....	88
Figura 24 – Cevianas – Silveira e Marques (2002)	91
Figura 25 – Observações	92
Figura 26 – Representação das três principais cevianas.....	93
Figura 27 – Recorte Histórico	95
Figura 28 – Ilustração de abertura da unidade 18.....	96
Figura 29 – Capa do livro Matemática Teoria e Contexto (2012).....	97
Figura 30 – Cevianas	101
Figura 31 – Altura, mediana e bissetriz.....	100

Figura 32 – Capa do livro Matemática Compreensão e Prática.....	103
Figura 33 – Cevianas: Silveira (2018)	106
Figura 34 – Mediatriz.....	107
Figura 35 – Exercícios cevianas.....	108
Figura 36 – Um pouco de história.....	109
Figura 37 – Capa do Livro Matemática Bianchini – 8º ano (2018).....	111
Figura 38 – Exercícios sobre cevianas	115
Figura 39 – Publicações de Putnoki.....	119
Figura 40 – Cevianas Putnoki (1990)	120
Figura 41 – Cevianas Putnoki (1993)	121
Figura 42 – Estudo dos triângulos, Desenho Geométrico – Vol 3 (2016).....	122
Figura 43 – Desenho Geométrico Ideias e Imagens	123

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Definições Sangiorgi (1970).....	57
Quadro 2 – Quantitativo de exercícios	58
Quadro 3 – Distribuição dos conceitos por nº de páginas	63
Quadro 4 – Definições Name (197?).....	64
Quadro 5 – Quantitativo de exercícios	65
Quadro 6 – Distribuição dos conteúdos.....	67
Quadro 7 – Distribuição dos conceitos por páginas	69
Quadro 8 – Definições Pierro Netto (1981)	69
Quadro 9 – Quantitativo de exercícios	71
Quadro 10 – Distribuição dos conteúdos.....	75
Quadro 11 – Definições Sardella e Matta (1985)	78
Quadro 12 – Quantitativo de exercícios	79
Quadro 13 – Distribuição dos conteúdos na 7ª série	82
Quadro 14 – Conteúdos de Geometria	83
Quadro 15 – Conteúdos de Geometria	84
Quadro 16 – Definições Pierro Netto – 7ª série (1991b).....	85
Quadro 17 – Definições Pierro Netto – 6ª série (1991a).....	86
Quadro 18 – Quantitativo de exercícios	86
Quadro 19 – Distribuição dos conteúdos.....	89
Quadro 20 – Definições Silveira e Marques – 7ª série (2002)	93
Quadro 21 – Quantitativo de exercícios	94
Quadro 22 – Distribuição dos conteúdos por campos da matemática escolar.....	98
Quadro 23 – Definição de Ceviana. Centorión e Jakubovic – 8º ano (2012).....	101
Quadro 24 – Quantitativo de exercícios	101
Quadro 25 – Quadro comparativo entre os sumários de 2015 e 2018.....	104
Quadro 26 – Definições Silveira (2018).....	107
Quadro 27 – Livros aprovados pelo PNLD - 2020.....	110
Quadro 28 – Distribuição dos conteúdos por campos da matemática escolar.....	112
Quadro 29 – Definições Bianchini (2018).....	114
Quadro 30 – Livros didáticos de Desenho Geométrico.....	118
Quadro 31 – Definições Putnoki – (1990).....	120
Quadro 32 – Número de páginas destinadas ao estudo de Geometria.....	125

Quadro 33 – Presença do termo ceviana no livro didático	125
Quadro 34 – Presença do termo ceviana nos livros de Desenho Geométrico.....	126
Quadro 35 – Inserções históricas nos livros didáticos analisados	127
Quadro 36 – Definição de mediana do triângulo	129
Quadro 37 – Definição de altura do triângulo.....	130
Quadro 38 – Definição de bissetriz interna do triângulo	131
Quadro 39 – Quantitativo de exercícios relacionados às cevianas do triângulo.....	132
Quadro 40 – Unidades do Material Paradidático	135
Quadro 41 – Local de residência dos participantes.....	136
Quadro 42 – Faixa etária.....	137
Quadro 43 – Nível de escolaridade dos participantes	137
Quadro 44 – Tipo de escola de cada participante	137
Quadro 45 – Nível de ensino.....	138
Quadro 46 – Tempo de docência em Matemática.....	138
Quadro 47 – Informações fornecidas pelos participantes	139
Quadro 48 – Resposta às questões nº 9 e 10	143
Quadro 49 – Informações que os participantes desconheciam	145

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CBC/MG – Currículo Básico Comum do Estado de Minas Gerais

CEE/MG – Conselho Estadual de Educação de Minas Gerais

CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas

FFCL – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras

FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

MEC – Ministério da Educação e Cultura

MMM – Movimento da Matemática Moderna

PCN's – Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

PREPES – Programa de Especialização para Professores do Ensino Superior da PUC Minas

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PUC Minas – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SBHMat – Sociedade Brasileira de História da Matemática

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

UFF – Universidade Federal Fluminense

UFJF – Universidade Federal de Juiz de Fora

USP – Universidade de São Paulo

Sumário

INTRODUÇÃO.....	15
1 MÚLTIPLAS FACETAS DA HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	26
1.1 A HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA BRASILEIRA APÓS O MMM.....	26
1.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR.....	29
1.3 USO E IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO...	34
2 CULTURA ESCOLAR E O LIVRO DIDÁTICO	39
2.1 CULTURA ESCOLAR: PONTO E CONTRAPONTO.....	39
2.2 HISTÓRIA DAS DISCIPLINAS ESCOLARES E A CULTURA ESCOLAR.....	42
2.3 O LIVRO DIDÁTICO COMO FONTE DE PESQUISA DA CULTURA ESCOLAR	45
3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS.....	50
3.1 ANÁLISE DE CONTEÚDO	50
3.2 LIVRO I – MATEMÁTICA CURSO MODERNO – VOLUME 3 (1970).....	53
3.3 LIVRO II – MATEMÁTICA ENSINO MODERNO (197?).....	60
3.4 LIVRO III – MATEMÁTICA (1981).....	66
3.5 LIVRO IV – MATEMÁTICA 7ª SÉRIE – SARDELLA E MATTA (1985)	74
3.6 LIVRO V – MATEMÁTICA SCIPIONE – CONCEITOS E HISTÓRIAS (1991).....	80
3.7 LIVRO VI – MATEMÁTICA 7ª SÉRIE – ÊNIO SILVEIRA E CLÁUDIO MARQUES (2002).....	88
3.8 LIVRO VII – MATEMÁTICA TEORIA E CONTEXTO (2012).	96
3.9 LIVRO VIII – MATEMÁTICA: COMPREENSÃO E PRÁTICA (2015 – 2018).....	102
3.10 LIVRO IX – MATEMÁTICA BIANCHINI (2018).....	110
3.11 AS CEVIANAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE DESENHO GEOMÉTRICO	116
3.12 ANÁLISE GLOBAL DOS LIVROS DIDÁTICOS.....	124
4 SOBRE O PRODUTO E SUA APLICAÇÃO.....	134
4.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PRODUTO	134
4.2 APLICAÇÃO DO PRODUTO E RESULTADOS	135
CONSIDERAÇÕES FINAIS	147
REFERÊNCIAS:.....	152
APÊNDICE A – FORMULÁRIO DE INSCRIÇÃO NO MINICURSO	160
APÊNDICE B - AVALIAÇÃO DO MINICURSO	163
APÊNDICE C - LIVROS CONSULTADOS.....	164
APÊNDICE D - PRODUTO EDUCACIONAL	167

INTRODUÇÃO

Quando concluí o Ensino Médio, tinha duas opções: cursar Administração de Empresas ou Contabilidade, no entanto, nenhuma delas me agradava. Devido ao anseio de ser professor de Matemática, e como não havia na cidade onde moro a oferta do curso que eu desejava, a minha formação inicial ocorreu na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), no curso de Licenciatura em Matemática. Este foi um período de muito trabalho e aprendizado, pois tive a oportunidade de ver a Matemática com outros olhos. No último período, cursei a disciplina “Introdução à História da Matemática”, descortinando inúmeras indagações que antes haviam sido negligenciadas no decorrer de minha formação; contudo, o enfoque dessa disciplina era mais conteudista.

Recém-formado, retornei à minha cidade natal, Manhuaçu, no interior do Estado de Minas Gerais, e ingressei na rede pública de ensino, para ministrar aulas de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Lecionei na Escola Estadual “Antônio Welerson” e na Escola Estadual “Carlos Nogueira da Gama”, em Manhuaçu e Reduto, respectivamente. Atualmente, sou professor do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais e do Centro Educacional de Manhuaçu.

O meu sentimento era de que a minha formação pouco tinha contribuído para me auxiliar na prática docente. Passei a vivenciar alguns dilemas e, para enfrentá-los, decidi continuar meus estudos retomando alguns porquês que ficaram sem respostas durante meu percurso pela graduação, levando-me a ingressar na Especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, pela Universidade Federal Fluminense (UFF). Aproveitando a ocasião, fiz deste um momento de muito diálogo e constantes reflexões, principalmente em relação à utilização da História da Matemática como recurso pedagógico e ao livro didático.

Ainda assim outros porquês surgiram e passei a observar como o ensino de Geometria, de certa forma, é deficitário e/ou “abandonado” por boa parte dos professores. Também me questionava sobre os motivos que levaram a Geometria a este descaso e por que meus alunos da Educação Básica tinham tanta dificuldade em aprendê-la.

Na busca por respostas para os questionamentos que me intrigavam, ingressei no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

(PUC Minas), o que me oportunizou ampliar minhas concepções em relação às questões educacionais e aos métodos de ensino que visam aprimorar e contribuir para o ensino da Matemática de um modo mais efetivo na Educação Básica e/ou no Ensino Superior.

Em relação ao possível abandono imposto à Geometria, estudos indicam que, no decorrer das décadas de 1960 e 1970, o ensino de Matemática no Brasil foi fortemente influenciado pela tendência do formalismo pedagógico-estrutural, mais conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM), que buscava modificar o ensino, introduzindo novos conteúdos ao currículo (NOBRE, 1996).

Esse movimento foi amplamente divulgado nas mídias de massa, cursos, palestras e grupos de estudos, mas vale ressaltar que foi no livro didático que encontrou seu apogeu, sendo ele o meio de maior importância para a difusão dos ideais modernistas entre os professores.

Os livros didáticos são mencionados em vários trabalhos como os principais instrumentos de divulgação da matemática moderna no Brasil, sobretudo por dois motivos: porque alcançavam os municípios mais afastados dos grandes centros, onde os professores não tinham outras oportunidades de acesso às informações sobre o movimento; porque tinham um impacto direto e imediato na sala de aula. (OLIVEIRA, SILVA e VALENTE, 2011, p.33).

Basicamente, um dos objetivos do MMM era promover a unificação dos três campos do saber por meio de elementos unificadores. No entanto, essa unificação não deve ser confundida com a mera integração mecânica entre esses campos e muito menos com a inclusão de novos conteúdos ou a exclusão dos que já vigoravam (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992).

Corroborando com a ideia apresentada acima, Gomes (2013) afirma que o MMM

[...] tinha, como um de seus principais objetivos, integrar os campos da aritmética, da álgebra e da geometria no ensino, mediante a inserção de alguns elementos unificadores, tais como a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas e o estudo das relações e funções. Enfatizava-se, ainda, a necessidade de conferir mais importância aos aspectos lógicos e estruturais da Matemática, em oposição às características pragmáticas que, naquele momento, predominavam no ensino, refletindo-se na apresentação de regras sem justificativa e na mecanização dos procedimentos. (GOMES, 2013, p.24).

Ainda de acordo com essa autora, em relação à Geometria, infere-se que alguns defensores do MMM propunham trocar a Geometria clássica, inspirada na obra de Euclides (300 a.C), *Os Elementos*¹, pelo enfoque das transformações geométricas, com o estudo de vetores, dos espaços vetoriais e das transformações lineares (GOMES, 2013). Porém, este novo enfoque

¹ Segundo Boyer (1994), “Os Elementos de Euclides” é o texto mais influente de todos os tempos e a obra mais antiga a chegar até a atualidade, perdendo somente para a Bíblia em número de edições publicadas.

resultou em inúmeras lacunas no ensino brasileiro, que podem ser notadas no decorrer da História da Educação Matemática, contribuindo para o que foi denominado como o “abandono do ensino da geometria” (PAVANELLO, 1993) ou, como afirmam Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), a geometria tomou um “caráter eclético”².

Entretanto, pesquisas mais recentes relatam que a Geometria não sofreu um abandono tão extremado, como tinha sido apresentado por alguns autores. Como, por exemplo, Zuin (2001), em sua dissertação de mestrado intitulada “Da Régua e do Compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil”, evidenciou que muitas escolas continuaram ministrando aulas de Geometria e Desenho Geométrico e concluiu que “desde a década de 1980, reconhecido o fracasso da Matemática Moderna, o ensino de geometria voltou a ser valorizado, mas isso não faz com que esse saber retorne tão prontamente às escolas” (ZUIN, 2001, p. 180).

Essa autora ainda acrescenta que se outros pesquisadores afirmavam que a Geometria tinha sido completamente renegada, isto se deveria, entre outros aspectos, ao fato de não terem um olhar mais amplo para os livros didáticos utilizados nas escolas, intitulados de “Educação Artística”, que, na prática, continham Desenho Geométrico no seu corpo textual e, consequentemente, abordavam temas de Geometria:

[...] o ensino das construções geométricas encoberto pelo título “*Educação Artística*” em alguns livros didáticos, evidenciando a valorização de um saber tido como mais importante e adequado, que as lições e atividades na área de artes. Poderíamos inferir que a superioridade do ensino das construções geométricas sobre as atividades específicas dentro da Educação Artística é clara nas escolas que adotaram esses livros, comprovando, igualmente, uma resistência de abolir o ensino das construções geométricas dos seus currículos. (ZUIN, 2001, p. 169).

Na verdade, para Zuin (2002), o que parece ter ocorrido foi um desprestígio da Geometria Euclidiana – com ênfase no Desenho Geométrico, devido à crise que assolava o Ensino de Matemática desde o final do século XIX e que, posteriormente, foi absorvido pelo MMM. A autora ainda expõe que esse desprestígio teria afetado principalmente as escolas públicas, pois as escolas destinadas à “elite”, de um modo geral, continuaram com o ensino de Geometria.

Zuin (2001) não evidencia necessariamente uma elite financeira, mas sim uma elite intelectual, e verificou que, em algumas escolas onde muitos pais eram professores, determinados

² Este termo é decorrente da introdução da linguagem dos conjuntos na Geometria, de conceitos topológicos elementares e tópicos de geometria das transformações, descaracterizando sua abordagem axiomático-dedutiva. (MIGUEL, FIORENTINI E MIORIM, 1992, p.48).

conteúdos continuavam a ser privilegiados. A autora constatou a manutenção das aulas de Desenho Geométrico em escolas públicas mineiras: na década de 1980, no Colégio Municipal Belo Horizonte, e até meados da década de 1990, nas turmas de 7^a e 8^a séries do Colégio Municipal Marconi (ZUIN, 2001, p. 176). Zuin ainda cita colégios particulares em Minas Gerais que mantiveram o Desenho Geométrico, bem como escolas de São Paulo.

Nesta linha de pensamento, Oliveira, Silva e Valente (2011) expõem que

A representação mais forte na Educação Matemática brasileira sobre o tema, nas últimas duas décadas, era expressa pelo trabalho de Pavanello (1989), que, sem pretensão de estudar especificamente a geometria no MMM, associou o abandono da geometria com a proposta de ensino pelas transformações geométricas, bandeira defendida pelo MMM. (OLIVEIRA, SILVA e VALENTE, 2011, p.146-147).

No que concerne à representação do abandono do ensino de Geometria oriundo do MMM, verifica a sua superação e, ainda, de acordo com Oliveira, Silva e Valente (2011), distante dessa ideia de abandono, a Geometria é apresentada com um viés inovador, destacando-se duas abordagens: a primeira

[...] incorpora as transformações geométricas na abordagem de Félix Klein; a segunda, hegemônica, que reforça a geometria euclidiana com uma abordagem diferenciada, seja na incorporação de novos axiomas, assim como na inclusão da geometria experimental. (OLIVEIRA, SILVA e VALENTE, 2011, p.163).

Percebemos também que ao mesmo tempo em que a Geometria é supostamente colocada em um “segundo plano”, Miguel e Brito (1996) já enfatizavam que as abordagens históricas no ensino de Matemática reduziram consideravelmente neste período, deixando marcas que podem ser observadas até os dias atuais.

A exemplo do exposto acima, só tive contato mais próximo com o termo “ceviana” – que está diretamente associado ao *Teorema de Ceva*, o qual leva este nome em homenagem ao matemático italiano Giovanni Benedetto Ceva (1647-1734) – na disciplina de *Tópicos de Matemática na Educação Básica*, ministrada pela professora Dra. Elenice Zuin, ao fazer algumas inserções históricas no decorrer da explanação dos conteúdos. Ao investigar de forma minuciosa o assunto, percebi que este conteúdo não estava presente na minha formação inicial, do mesmo modo que estava ausente na maioria dos materiais didáticos utilizados na minha prática docente, os quais não trazem também qualquer referência histórica sobre o tema.

Imaginando que este seria um caso isolado, resolvi conversar com alguns colegas, também professores de Matemática. Surpreendentemente, eles também apontaram para o desco-

nhecimento histórico sobre o tema. Mais intrigado fiquei ao constatar que na *Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*, considerada a mais completa na área escolar, não há nenhuma citação histórica ou mesmo menção ao termo “cevianas”³. Assim, nossa hipótese inicial era que os livros didáticos de Matemática não trazem o termo “cevianas” e nem apresentam aspectos históricos quando abordam o conteúdo de cevianas do triângulo.

Geralmente, o primeiro lugar em que buscamos o significado, a divisão silábica ou até mesmo a pronúncia de alguma palavra desconhecida, sem sombra de dúvidas, é o dicionário, seja por meio físico ou *on-line*. Essa busca nos permitiu constatar que o termo “ceviana” não está presente em alguns dos dicionários escolares, como é o caso de Bechara (2011).

O *Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa – Novíssimo Aulete* traz a seguinte definição:

Ceviana (ce.vi.a.na) *Geom.* Sf.

1-Reta que corta o vértice de um triângulo e um ponto no lado oposto àquele

2-Segmento de reta que une o vértice de um triângulo ao lado oposto

3- [F.: Fem. Substantivado do adj. *ceviano, der. Do antr. **Giovanni Ceva (1647-1734), matemático italiano.** (AULETE, 2011, p.315, grifos nossos).

O *Minidicionário Aurélio – Século XXI*, publicado em 2000 e 2001, ao contrário de Aulete (2011), não informa que é um vocábulo derivado do nome de Giovanni Ceva.

Em relação aos dicionários específicos de Matemática, somente em alguns exemplares encontramos o termo “ceviana”. Constatamos que havia discordância e incorreções entre as referências históricas expostas por alguns autores, como, por exemplo, no *Microdicionário de Matemática*, de Imenes e Lellis. Nele, ceviana é o

1 - Segmento de reta que liga um vértice de um triângulo a um ponto qualquer do lado oposto.

2 - A altura, mediana e bissetriz do triângulo são cevianas particulares.

3 - O nome ceviana é homenagem a Tommaso Ceva, matemático italiano (1648 – 1736). (IMENES e LELLIS, 2003, p.159, grifos nossos).

No *Dicionário de Matemática*, de Luiz Fernandes Cardoso, tanto na edição de bolso quanto na Edição Páginas Amarelas, o termo ceviana

1 - É um segmento de reta que vai de um vértice do triângulo em direção ao lado oposto, que é a base em relação a ceviana.

³ A única vez que o termo *ceviana* aparece no volume destinado ao estudo da Geometria Plana foi na página 389 em um exercício da Universidade Federal de Pernambuco, sem ter nenhuma relação com o texto disposto na obra.

2 - O ponto onde a ceviana encontra o lado oposto recebe o nome de pé da ceviana. Esse ponto pode ser interno ou externo ao lado, conforme a ceviana seja interna ou externa.

3 - O nome ceviana é uma homenagem ao matemático João Ceva. (CARDOSO, 2008, p.75, grifos nossos).

A incorreção histórica, no dicionário de Imenes e Lellis (2003), refere-se ao fato de que os autores atribuíram o termo “ceviana” a Tommaso Ceva, o qual, na verdade, é um dos irmãos de Giovanni Ceva. Já, no dicionário de Cardoso (2008), o termo é conferido como homenagem a João Ceva – não seria propriamente um erro, uma vez que este autor aportuguesou o nome de Giovanni Ceva, pois Giovanni corresponde ao nome João. Contudo, seria mais adequado que o nome Giovanni Ceva fosse mantido.

D’Ambrosio (1997, p.29) afirma que “uma percepção da História da Matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino” e, neste sentido, a pesquisa aqui proposta tem por objetivo:

- ❖ Realizar uma pesquisa qualitativa, de cunho documental, com foco nos livros didáticos de Matemática e Desenho Geométrico publicados no período de 1970 a 2019.
- ❖ Desenvolver um material paradidático direcionado para a formação docente inicial, bem como para a formação continuada daqueles que estão atuando em sala de aula, abordando principalmente tópicos de cunho histórico relacionados às *cevianas* do triângulo e ao *Teorema de Ceva*, culminando, assim, em um produto educacional.

Nossa pesquisa é de cunho documental, no que concerne aos dados históricos sobre o Teorema de Ceva. Em relação à avaliação dos livros didáticos de Matemática e Desenho Geométrico, o procedimento é qualitativo, fundamentado na análise de conteúdo, sob a perspectiva de Laurence Bardin. Um dos principais aportes teóricos é André Chervel, na discussão da história das disciplinas escolares.

A pesquisa buscou verificar *se há e como* ocorre a apresentação do termo *cevianas* e do *Teorema de Ceva* por autores de livros didáticos publicados no Brasil no período de 1970 a 2019. Para tal, trabalharemos questões da história do ensino de Geometria e do conteúdo das *cevianas* notáveis de um triângulo. Os estudos se concentraram na análise de onze livros didáticos de Matemática e em dezoito livros de Desenho Geométrico. Em ambos os casos, a preferência foi pelo manual do professor, sem, no entanto, excluir o livro do aluno.

Devido ao distanciamento social e ao fechamento de bibliotecas, universidades e escolas, como medidas de contenção da pandemia provocada pela Covid-19 em todo o mundo, foi mais difícil ter acesso a materiais de pesquisa para nossa análise. Os livros foram selecionados entre aqueles que pertenciam ao meu acervo pessoal, a arquivos disponíveis na internet e aos

que tive acesso no acervo da Biblioteca Pública Municipal Prof.^a Custódia Feres Abi-Saber, localizada em Manhuaçu, Minas Gerais, e que, talvez, não sejam os mais representativos em todos os estados brasileiros, no que tange à sua adoção nas escolas. Sendo assim, o *corpus* material foi selecionado de acordo com a acessibilidade que tivemos.

Os livros didáticos de Matemática analisados foram:

- ❖ *Matemática Curso Moderno*, volume 3, de Oswaldo Sangiorgi, publicado em 1970, pela Companhia Editora Nacional.
- ❖ *Matemática Ensino Moderno*, 7ª série, de Miguel Asis Name, publicado em 197?, pela Editora do Brasil.
- ❖ *Matemática – 1º Grau*, 7ª série, de Scipione de Pierro Netto, Magda Terezinha Ângelo, Edson do Carmo, Lilia Maria Faccio, publicado em 1981, pela Editora Saraiva.
- ❖ *Matemática*, 7ª série, de Antônio Sardella e Edison Matta, publicado em 1985, pela Editora Ática.
- ❖ *Matemática Scipione – Conceitos e histórias*, 7ª série, publicado em 1991, pela Editora Scipione.
- ❖ *Matemática Scipione – Conceitos e histórias*, 6ª série, publicado em 1991, pela Editora Scipione.
- ❖ *Matemática*, 7ª Série, de Ênio Silveira e Cláudio Marques, publicado em 1995 e reimpresso em 2002, pela Editora Moderna.
- ❖ *Matemática Teoria e Conceito*, 8º ano, de Marilia Centurión e José Jakubovic, publicado em 2012, pela Editora Saraiva.
- ❖ *Matemática Compreensão e Prática*, 8º ano, de Ênio Silveira, publicado em 2015, pela Editora Moderna.
- ❖ *Matemática Compreensão e Prática*, 8º ano, de Ênio Silveira, publicado em 2018, pela Editora Moderna.
- ❖ *Matemática Bianchini*, 8º ano de Edwaldo Bianchini, publicado em 2018, pela Editora Moderna.

Em relação aos livros didáticos de Desenho Geométrico, a análise se concentrou nos títulos a seguir:

- ❖ *Desenho Geométrico*, de Carlos Marmo e Nicolau Marmo, publicado em 1976, pela Editora Moderna.

- ❖ *Desenho Geométrico*, volumes 2 e 3, de Isaías Marchesi Júnior, publicado em 1986, pela Editora Ática.
- ❖ *Desenho Geométrico*, volume 3, de José Rui Giovanni, Tereza Marangoni Fernandes e Elenice Lumico Ogassawara, publicado em 1987, pela Editora FTD.
- ❖ *Desenho Geométrico*, volume 2 e 3, de Elizabeth Teixeira Lopes e Cecília Fujiko Kanegae, supervisão pedagógica de Pierro Netto, publicado em 1988, pela Editora Scipione.
- ❖ *Geometria e Desenho Geométrico*, volume 3, integrante da coleção Régua e Compasso, de José Carlos Putnoki, publicado em 1990, pela Editora Scipione.
- ❖ *Desenho Geométrico: Texto e Atividades*, volume 3, de Elizabeth Teixeira Lopes e Cecilia Fujiko Kanegae, sob a supervisão pedagógica de Scipione di Pierro Netto, publicado em 1992, pela Editora Scipione.
- ❖ *Elementos de Geometria e Desenho Geométrico*, volume 1, de José Carlos Putnoki, publicado em 1993, pela Editora Scipione.
- ❖ *Desenho Geométrico – Marmo*, volume 1, de Carlos Marmo e Nicolau Marmo, publicado em 1994, pela Editora Scipione.
- ❖ *Desenho Geométrico para o 1º grau*, volume 3, de José Rui Giovanni, Tereza Marangoni Fernandes e Elenice Lumico Ogassawara, publicado em 1996, pela editora FTD.
- ❖ *Desenho Geométrico Conceitos e Técnicas*, volume 3, e Caderno de Atividades, de Elizabeth Teixeira Lopes e Cecilia Fujiko Kanegae, sob a supervisão pedagógica de Scipione di Pierro Netto, ambos publicados em 2000, pela Editora Scipione.
- ❖ *Novo Desenho Geométrico*, de José Rui Giovanni, Tereza Marangoni Fernandes e Elenice Lumico Ogassawara, publicado em 2002, pela editora FTD.
- ❖ *Desenho Geométrico – Edição renovada*, volume 3, de José Rui Giovanni, José Rui Giovanni Jr., Tereza Marangoni Fernandes e Elenice Lumico Ogassawara, publicado em 2010 e 2016, pela editora FTD.
- ❖ *Desenho Geométrico Imagens e Ideias*, volume 3, de Sônia Jorge, publicado em 2019, pela Editora Saraiva.

Os questionamentos iniciais foram:

- 1) No estudo de triângulos, quais tópicos são abordados?
- 2) Como é a distribuição dos conteúdos de Geometria nos livros analisados?
- 3) Há menção ao termo *cevianas* ou ao *Teorema de Ceva*?

- 4) Há abordagem histórica do conceito de cevianas? E de Geometria?
- 5) Como são apresentados os exercícios? Quantos são?
- 6) Existem textos complementares ou indicação de outras fontes de leitura para os professores?

Essas perguntas nos auxiliaram no delineamento e na análise dos livros didáticos. Na revisão de literatura, encontramos dissertações sobre o tema ou que se aproximam da temática. Nossa pesquisa inicialmente se baseou em um levantamento realizado no Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), no qual encontramos nove dissertações, mas consideramos conveniente analisar somente cinco. Os critérios adotados para tal procedimento foram os termos “cevianas” e “Teorema de Ceva”. Tivemos preferência em analisar as pesquisas mais recentes e, coincidentemente, todas são referentes ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Apresentamos, a seguir, uma breve descrição dos trabalhos encontrados.

O primeiro trabalho foi o de Silva (2015), com a dissertação “*Os Teoremas de Menelaus e Ceva*”. O autor tem por objetivo apresentar algumas demonstrações e aplicações dos Teoremas de Menelaus e Ceva dentro de um contexto que possa ser facilmente compreendido pelos alunos do Ensino Médio.

Macedo (2014), em sua dissertação intitulada “*Resgatando alguns teoremas clássicos da Geometria Plana*”, buscou retomar alguns teoremas que podem ser aplicados em triângulos, como é o caso dos Teoremas de Stewart, Menelaus, Ceva e Napoleão. O trabalho é de cunho informativo, pois tem como objetivo torná-los mais divulgados, já que, para a autora, “estes são alguns dos teoremas da Geometria plana que nas últimas décadas foram excluídos de livros didáticos do Ensino Fundamental sem qualquer justificativa” (p.10).

Ferreira (2017), em seu trabalho “*Unificando os conceitos de Menelaus e Ceva*”, teve como objetivo central apresentar os teoremas de Ceva e Menelaus, além de realizar algumas demonstrações e aplicações. O autor utiliza as concepções do matemático inglês John Routh para demonstrar uma unificação dos teoremas que são objeto de seu estudo.

Outra dissertação encontrada foi a de Peixoto (2014), denominada “*O uso do software GeoGebra e suas aplicações no ensino das cevianas básicas*”, que busca apresentar o software GeoGebra como ferramenta importante para o uso em sala de aula, no auxílio do estudo das

alturas, medianas e das bissetrizes notáveis dos triângulos, por meio de realização de construções geométricas e resolução de atividades.

Por fim, o trabalho de Araújo (2014), intitulado “*Cevianas e pontos associados a um triângulo: uma abordagem com interface no ensino básico*”, evidenciou que alguns teoremas e conceitos importantes, como, por exemplo, os teoremas do nosso estudo, não são mencionados nos livros didáticos disponíveis no Guia do Livro Didático de Matemática no PNLD 2014 e que, por consequência, não são utilizados em sala de aula. Araújo (2014) inicialmente tece algumas considerações sobre o ensino da Geometria na Educação Básica para, posteriormente, apresentar os conceitos geométricos.

Todas as pesquisas analisadas trazem, em sua estrutura, uma breve abordagem histórica da vida e obra dos matemáticos. Contudo, Silva (2014) e Ferreira (2017) utilizaram equivocadamente a pintura de outro matemático, afirmando ser uma representação de Giovanni Ceva, mas nossa pesquisa nos leva a crer que trata-se, na verdade, de uma imagem que retrata o matemático e físico italiano Galileu Galilei.

O levantamento nos permitiu constatar que não há trabalhos voltados para a abordagem como a que foi por nós desenvolvida. Nosso trabalho está dimensionado em cinco capítulos, nos quais procuramos descrever o passo a passo do desenvolvimento de nossa pesquisa.

Enfatizamos no primeiro capítulo “*Múltiplas facetas da História na Educação Matemática*” alguns estudos publicados desde o final dos anos 1980 que demonstram uma tentativa de analisar as potencialidades pedagógicas da História na Educação Matemática e as implicações do seu uso em sala de aula, apontando-a não somente como um recurso didático capaz de proporcionar significativas contribuições ao processo de ensino e aprendizagem, mas também seu potencial enquanto agente de transformação na formação dos professores. Neste sentido, acreditamos que a História da Matemática é uma alternativa viável, capaz de auxiliar na solução de alguns dos problemas que temos enfrentado no ensino de Matemática em nosso dia a dia dentro dos muros da escola.

O segundo capítulo, “*Cultura Escolar e o livro didático de Matemática*”, está alicerçado nas ideias de Chervel (1990), sob a perspectiva da História das Disciplinas Escolares. Buscamos evidenciar os livros didáticos de Matemática e de Desenho Geométrico como fontes de pesquisa para a compreensão dos possíveis currículos escolares desenvolvidos em sala de aula. Entendemos que o livro didático, há muito tempo, tem sido um importante suporte para alunos e professores durante o processo de ensino, pois, neste elemento, são encontrados os saberes que devem ser ensinados nesta disciplina, desse modo, a história da matemática escolar está diretamente ligada aos livros didáticos.

No terceiro capítulo, “*Análise do Livro Didático*”, apresentamos os livros utilizados no decorrer de nossa pesquisa, apontando *se há e como* ocorre a apresentação do termo *cevianas* e do *Teorema de Ceva* por autores dos livros didáticos analisados. Recorremos à metodologia de Análise de Conteúdo, fundamentando-nos em Laurence Bardin. Buscamos, dentro das categorias pré-definidas – tais como definição, introdução do conteúdo de *cevianas* do triângulo, aspectos históricos, aplicações, exercícios, número de páginas, indicação de leitura complementar, recursos didáticos – compreender as permanências e alterações no ensino das *cevianas* do triângulo dentro de um determinado período histórico. Livros de Desenho Geométrico também foram analisados, com a finalidade de verificarmos se o termo “*cevianas*” e o contexto histórico foram contemplados pelos autores, já que são tópicos comumente presentes nas obras desse gênero.

No quarto capítulo, “*Sobre o Produto e sua aplicação*”, tratamos da aplicação do produto educacional “*Cevianas notáveis do triângulo: elementos históricos e sugestões de atividades*”, como parte integrante da pesquisa de mestrado. O objetivo é proporcionar um material paradidático que possa ser utilizado nas formações iniciais e continuada de docentes de Matemática, com tópicos de cunho histórico relacionados às *cevianas* do triângulo e ao *Teorema de Ceva*, agregando atividades práticas voltadas ao uso de dobraduras, construções geométricas e de *softwares* de geometria dinâmica. Em tempos de pandemia gerada pela Covid-19, decidimos aplicar um minicurso de forma remota, via *Google Meet*, tendo como foco principal divulgar os resultados da pesquisa e apresentar o material paradidático que construímos.

O minicurso aconteceu no dia 18 de dezembro de 2020, às 17h, contando com a presença de sessenta participantes entre professores de Matemática da Educação Básica e Superior e discentes do curso de Licenciatura em Matemática de onze estados brasileiros e do Distrito Federal, além de um angolano. Foram aplicados dois questionários, um de inscrição e outro de avaliação do minicurso, permitindo-nos coletar inúmeros dados importantes e incluir algumas considerações ao nosso texto. Houve unanimidade entre os participantes em relação ao desejo de que o conteúdo de *cevianas* e o *Teorema de Ceva* sejam abordados nos cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática, uma vez que muitos declaram que esse assunto é de certo modo inédito, pois inexistiam em seus estudos.

E, por último, tecemos as nossas considerações finais.

CAPÍTULO I

MÚLTIPLAS FACETAS DA HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Educação sem ser ancorada na História é uma pregação sem fundamentos, enquanto a História sem ser inserida na Educação é inconclusa. (D'AMBROSIO, 2011a, p.11).

Nas últimas décadas, a História da Matemática vem se consolidando como um campo de pesquisa ligado à Educação Matemática⁴. Vários estudos publicados demonstram uma tentativa de analisar suas potencialidades pedagógicas e as implicações do seu uso em sala de aula, apontando-a não somente como um recurso didático capaz de proporcionar significativas contribuições ao processo de ensino e aprendizagem, mas também como um agente de transformação na formação dos professores.

Para uma melhor argumentação dos assuntos que aqui serão tratados, nos embasamos nos trabalhos de D'Ambrosio (1996, 1997, 2011a, 2011b), Nobre (1996), Mendes (2001, 2006, 2009), Miguel e Brito (1996), Miguel e Miorim (2017), Miguel (1997) e Pinto (2005).

1.1 A História na Educação Matemática Brasileira após o MMM

Com o advento do Movimento da Matemática Moderna no decorrer das décadas de 1960 e 1970, o uso da História da Matemática foi ignorado tanto na prática em sala de aula como na formação do professor de Matemática (MIGUEL E BRITO, 1996).

Para Pinto (2005, p.5)

A excessiva preocupação com a linguagem matemática e com a simbologia da teoria dos conjuntos deixou marcas profundas, [...]. Ao tratar a matemática como algo neutro, destituída de história, desligada de seus processos de produção, sem nenhuma relação com o social e o político, o ensino de Matemática, nesse período, parece ter se descuidado da possibilidade crítica e criativa dos aprendizes. O moderno dessa matemática apresenta-se, para os alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas descolados de sentidos e significados conceituais, uma disciplina abstrata e desligada da realidade.

Segundo Miguel e Miorim (2017), em razão do fortalecimento das críticas às propostas do Movimento da Matemática Moderna, principalmente na segunda metade dos anos 80 do

⁴ De acordo com D'Ambrosio (2011b, p.98), “a História da Matemática no Brasil começa a se identificar como uma área de pesquisa a partir da década de setenta [1970]. Até então, estudos sobre a História da Matemática eram inseridos em outros trabalhos.”.

século passado, vários educadores manifestaram-se a favor da participação da História da Matemática na prática docente. Neste período, testemunhou-se uma grande mobilização pela renovação dos ideais educacionais, impulsionados, principalmente, pelo fim da ditadura militar. Neste sentido, Miguel e Brito (1996, p. 48) argumentam que “com o refluxo deste movimento, assiste-se também um reavivamento do interesse pela história e à tentativa de tornar explícitas as suas potencialidades pedagógicas”.

Estas discussões influenciaram a criação de várias propostas curriculares pelo país, em nível estadual e municipal. Uma das primeiras incisões nesta perspectiva pode ser observada na *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º grau*, do Estado de São Paulo, elaborada pela equipe técnica da *Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP*, cuja primeira edição foi publicada em 1986, sob assessoria dos professores Antônio Miguel e Nilson José Machado. A proposta curricular foi aperfeiçoada e republicada no ano de 1988, por duas vezes consecutivas, e uma em 1991 (SÃO PAULO, 1992).

Esta proposta apresenta características completamente opostas às ideias centrais difundidas pelo ideário modernista, de tal forma que os autores ressaltam o fato de uma proposta curricular não ser caracterizada unicamente por uma lista de conteúdos a serem ensinados (SÃO PAULO, 1992). Nesta direção, sinalizam que os números podem ser estudados, diferentemente de outras abordagens, tendo como recurso o encadeamento histórico,

[...] acompanhando a evolução da noção de número a partir tanto de contagens como de medidas, sem ter ainda as propriedades estruturais claramente visadas, deixando-se guiar pelo fio condutor que a História propicia e trocando assim uma sistematização prematura por uma abordagem mais rica em significados. (SÃO PAULO, 1992, p. 11).

Do mesmo modo, expõem que a Geometria, desde muito cedo, pode ser estudada

[...] a partir da manipulação dos objetos, do reconhecimento das formas mais frequentes, de sua caracterização através das propriedades, da passagem dos relacionamentos entre objetos para o encadeamento de propriedades, para somente ao final do percurso aproximar-se da sistematização. (SÃO PAULO, 1992, p. 11).

Para Miguel e Miorim (2017), pode-se identificar na *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º grau*, do Estado de São Paulo, a participação da história em três momentos distintos: no primeiro, como elemento orientador na organização de trabalho com um tema específico, por exemplo, os números; no segundo, difusão de métodos históricos; e, por último, na discussão de problemas de natureza histórica.

Nesta perspectiva, podem-se citar outras incisões importantes, como, por exemplo, os encontros de Educação Matemática que ocorreram neste período no Brasil; a criação do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista (Unesp) *campus* Rio Claro, nível de Mestrado, no ano de 1984, e Doutorado, em 1993; criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em 1988; e a publicação dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN's), sob responsabilidade do Ministério da Educação (MEC), nos anos de 1997-1998.

É digno de destaque o I Encontro Paulista de Educação Matemática, sediado pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas, em outubro de 1989. Entre as inúmeras atividades que ocorreram neste encontro, vale ressaltar “uma atividade coordenada denominada “Aspectos Históricos no Processo de Ensino Aprendizagem da Matemática”, na qual foi levantado o problema referente à função do estudo da História da Matemática na formação do professor de matemática.” (MIGUEL e BRITO, 1996, p.47).

Em nível nacional, houve um foco maior na publicação dos *Parâmetros Curriculares Nacionais*, constituindo-se como um referencial que orienta a prática escolar tanto na educação pública como privada de todo o país, propondo uma mudança no enfoque dos assuntos ministrados. Para seus autores, os conteúdos não têm fim em si mesmo, do mesmo modo que indicam a História da Matemática como um dos recursos metodológicos que o professor deve utilizar em sala de aula, mostrando aos alunos que a Matemática é “fruto da criação e invenção humanas, [...] não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com o movimento de idas e vindas, com rupturas e paradigmas.” (BRASIL, 1998, p.25).

É evidenciado que

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática têm por finalidade fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros. (BRASIL, 1998, p. 15).

Em meio à comunhão destas ideias, no ano de 1999 foi instituída a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), sendo eleito como seu primeiro presidente um grande expoente da Educação Matemática Brasileira, o professor Dr. Ubiratan D'Ambrosio (ZUIN, 2003).

Contudo, mesmo com tantos estímulos que possibilitariam o desenvolvimento das capacidades relacionadas ao ensino, ainda se percebia um hiato entre as novas propostas educacionais e a atuação do professor. Das justificativas plausíveis para esse distanciamento entre as recomendações e a prática docente, concordamos com Miorim (1998), ao levantar a hipótese

de que este fato ocorreu devido à inserção maçante do ideário modernista na prática educacional, o que teria diretamente contribuído para que as novas propostas educacionais de modificação fossem incorporadas lentamente e de forma gradativa no âmbito escolar. Miorim (1998) constatou, na época do seu estudo, que essa circunstância havia deixado vestígios da influência que teve nas décadas anteriores, de forma que ainda era possível “perceber a presença de suas ideias não apenas nas discussões teóricas sobre o assunto, mas também na prática da Educação Matemática.” (MIORIM, 1998, p.115).

Na concepção de Pinto (2005) ainda não temos como afirmar com exatidão quais influências este movimento pode ter nas práticas pedagógicas de Matemática na atualidade. Os estudos relacionados a essa temática são significativos, principalmente no que se refere às transformações ocorridas no processo de ensino e aprendizagem, ligadas à forma como se concebia a Matemática enquanto disciplina escolar naquele período. Desse modo, esses novos trabalhos⁵ podem auxiliar na “compreensão das práticas escolares atuais, e isso suscita pesquisas que desvelem novas evidências das formas como as ideias desse importante movimento foram incorporadas pelos agentes escolares, especialmente como deram significado à cultura docente.” (PINTO, 2005, p.12).

1.2 A História da Matemática na formação do professor

No Brasil, até a década de 30 do século passado, os professores de Matemática que atuavam no ensino secundário eram autodidatas, alguns oriundos dos cursos de Engenharia e de Magistério, ou seja, estes profissionais não possuíam formação superior específica nas áreas que lecionavam:

Embora saibamos que houve ensino de Matemática desde muito antes, na Colônia, no Império e nas primeiras décadas da República, tendo existido, portanto, professores responsáveis por esse ensino em diversos níveis, o primeiro curso de Matemática estabelecido entre nós foi o da Universidade de São Paulo (USP), no ano de 1934. (GOMES, 2016, p.425-426).

⁵ Para ter uma visão mais ampla e aprofundada sobre o assunto, indicamos a leitura de OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; SILVA, Maria Célia Leme da; VALENTE, Wagner Rodrigues. **O Movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular.** Juiz de Fora/MG: Editora da UFJF, 2011.

A formação em nível superior, específica para professores de Matemática⁶, iniciou-se na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), fundada em janeiro de 1934, sendo um instituto ligado à Universidade de São Paulo (USP). O curso era regulamentado pelo Decreto nº 7.069, publicado em 6 de abril do ano seguinte, que fixava a duração em três anos, organizando-se da seguinte forma:

Art. 9º - Será a seguinte a seriação do curso de Ciencias Mathematicas: **1º anno** - Geometria (analytica e projectiva), Analyse Mathematica (1.^a parte), Physica Geral e Experimental (1.^a parte), Cálculo Vectorial. **2º anno** - Analyse Mathematica (2.^a parte), Mechanica Racional, Physica Geral e Experimental (2.^a parte). **3º anno** - Analyse Mathematica (3.^a parte), Geometria, História da Mathematica. (SÃO PAULO, 1935).

Segundo o decreto referenciado acima, no último ano de curso seria ministrada a disciplina de História da Matemática, contudo, pesquisas como a de Circe Mary Silva da Silva, intitulada “A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e a formação de professores de Matemática”, relatam que não há fundamentações que comprovem que esta disciplina foi mesmo ministrada:

Não encontramos qualquer registro de programa ou evidências de que essa disciplina tenha sido realmente ministrada. A única referência a um conteúdo de História da Matemática aparece no Programa de Análise Matemática do primeiro ano, em 1937, onde lê-se: “Conceito geral de função. Evolução histórica do conceito de função”. (SILVA, 2000, p. 9).

Este fato nos permite supor que, desde a implantação do curso de Matemática, há uma tentativa de inserir a História da Matemática no currículo dos licenciandos, no entanto, algumas situações não favoreceram sua inclusão, como, por exemplo, a escassez de livros adequados, a inexistência de professores com formação específica em História da Matemática ou até mesmo a falta de tradição no seu ensino.

No decorrer dos anos, o curso de Licenciatura em Matemática passou por várias reformulações até chegar nos moldes que hoje conhecemos. Apesar disso, este ainda é muito próximo conceitualmente daquele proposto na primeira metade da década de 1930, conforme pode ser constatado nas análises produzidas pela comissão paritária da SBEM/SBM, publicadas em 2013:

Conceitualmente falando, o curso de Licenciatura atual ainda é muito parecido com o primeiro curso de Matemática, criado na Universidade de São Paulo (USP), em 1934. Na maioria das instituições, as disciplinas ainda são agrupadas em conteúdo específico e conteúdos pedagógicos, com tendência a valorizar mais o primeiro grupo que o

⁶ Segundo Gomes (2016) e Silva (2000), a FFCL era comprometida primeiramente com a pesquisa, havendo uma separação nítida entre a formação específica em Matemática e a preparação pedagógica relacionada à formação de professores para o ensino secundário.

segundo, mesmo em se tratando da formação do professor de Matemática e não do bacharel em Matemática. (SBEM, 2013, p. 13-14).

Desse modo, concordamos com os pesquisadores referenciados em nossa pesquisa a respeito do fato de que a História da Matemática carece de um lugar de destaque na formação inicial e continuada do professor, “por isso recomenda-se que todos os cursos de licenciatura de matemática ofereçam História da Matemática.” (D’AMBROSIO, 1996, p.13).

Zuin (1999) entende que a História da Matemática como disciplina é um elemento indispensável para a formação do futuro do professor,

[...] uma vez que é um recurso decisivo no ensino de Matemática, ao se focar a evolução das ideias, o desenvolvimento dos conceitos, ao se mostrar que a matemática é o resultado de múltiplas colaborações e que este conhecimento foi sendo, paulatinamente, produzido, modificado e reconstruído. (ZUIN, 1999, p. 277).

Contudo, o simples fato de inserir a disciplina de História da Matemática na grade dos cursos de licenciatura em Matemática não assegura ao futuro professor uma formação satisfatória, capaz de surtir efeito em sua *práxis* pedagógica:

[...] tendo em vista que enfoques altamente inadequados ainda se fazem presentes, sobretudo, nos textos frequentemente indicados nas bibliografias dessa disciplina. Muitos textos e abordagens colocam, em primeiro plano, os êxitos obtidos, sem realçar processo de construção dos resultados, que envolve, normalmente, erros, dificuldades, tropeços, fracassos. Frequentemente se negligenciam os contextos socioculturais e político-econômicos, priorizando-se indivíduos e seus talentos ou gênios. (SBEM, 2013, p.14).

Por este ângulo, espera-se que a formação em História da Matemática do professor deva contemplar alguns temas geradores que, na visão de D’Ambrosio (1996), poderiam até constituir-se em um currículo:

1. para situar a matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens;
2. para mostrar que a matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas desenvolvidas pela humanidade;
3. Para destacar que essa matemática teve origem nas culturas da Antiguidade Mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou num corpo de conhecimentos, com estilo próprio;
4. E desde então foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas e se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico. (D’AMBROSIO, 1996, p.10).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática também sinalizam que

[...] o conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos

alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. (BRASIL, 1997, p. 38).

No que diz respeito à presença da História da Matemática na construção do conhecimento matemático do futuro professor, diferentemente do que vem sendo realizado nos cursos de licenciatura, na concepção de Miguel e Brito (1996), esta não deve se constituir somente em mais uma disciplina isolada das demais do currículo. Segundo esses autores, esta ação só fortalece “entre os futuros professores a indesejável separação radical entre a *matemática* e *História da Matemática* e a oposição entre o lógico e o histórico” (MIGUEL e BRITO, 1996, p.49); e eles propõem que aconteça uma participação orgânica da história no decorrer da formação dos licenciandos.

Inicialmente, esta participação orgânica poderia ser entendida como “a tentativa de se exprimir historicidade às disciplinas de cunho específico [...] como uma fonte de problematização” (MIGUEL e BRITO, 1996, p.49), propiciando que os futuros professores construam seus conhecimentos matemáticos com viés histórico e sociocultural. Desse modo, seriam contempladas várias dimensões da História da Matemática e da Educação Matemática, sob os pontos de vista lógico, epistemológico, didático, político, metodológico, entre outros. Assim, é inevitável que os formadores de professores deixem de “destacar e discutir com seus alunos as relações e entre a matemática e cultura, matemática e sociedade, matemática e tecnologia, matemática e arte, matemática e filosofia da matemática.” (MIGUEL e BRITO, 1996, p.49).

D'Ambrosio (1996) corrobora com as ideias propostas por Miguel e Brito (1996) ao frisar que é de suma importância “destacar aspectos socioeconômicos e políticos na criação matemática, procurando relacionar com o espírito da época, com o que se manifesta nas ciências em geral, na filosofia, nas religiões, nas artes, nos costumes, na sociedade como um todo.” (D'AMBROSIO, 1996, p.13).

Pode-se inferir que Miguel e Brito (1996), ao proporem a História como uma fonte de problematização, têm o intuito de conduzir o aluno na direção de novos horizontes e perspectivas, de modo que ele alcance um “*metaconhecimento matemático*”. Ainda para Miguel e Brito (1996), mesmo com tantos defensores e recomendações nos documentos oficiais, é notório que grande parte dos alunos concluintes dos cursos de licenciatura ingressam em sala de aula com poucos conceitos formalizados em relação à História da Matemática nos assuntos que estudaram.

Para muitos, equivocadamente, o simples fato de elencar nomes, datas e locais onde alguns conceitos matemáticos foram criados já demonstra a incorporação da História da Matemática na prática pedagógica. Esta conduta fortalece o argumento de que a formação inicial do professor não tem sido adequada para o seu desempenho profissional. Neste sentido, trazemos Lorenzato (2010):

Ao utilizar a História da Matemática, cabe ao professor não apenas relatar fatos históricos, mas realçar os nexos existentes neles, pois são os nexos que possibilitam uma aprendizagem significativa aos alunos. (LORENZATO, 2010, p.108).

Na concepção de Ubiratan D'Ambrosio, não é necessário que o professor seja um “especialista em História da Matemática” para incorporá-la em sua prática e muito menos apresentar um currículo sequenciado de História da Matemática em sala de aula. Basta fornecer algumas observações ou curiosidades históricas relacionadas ao tópico estudado. Ao realizar esta ação, de certa forma o professor incorporará a História da Matemática em suas aulas. No entanto, não é obrigatório apresentar informações históricas sobre todos os conteúdos a serem estudados (D'AMBROSIO, 1996).

Neste sentido, D'Ambrosio (1996) esclarece que

[...] não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado de História da Matemática. Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Claro, o bom seria que o professor tivesse uma noção histórica da matemática e pudesse fazer um estudo mais sistemático e por isso recomenda-se aos professores em serviço que procurem essa formação. (D'AMBROSIO, 1996, p.13).

Pois,

[...]a falta de informações sobre o desenvolvimento histórico da Matemática e de propostas metodológicas de utilização das mesmas no ensino da matemática escolar são algumas das dificuldades enfrentadas pelos professores que desejam usar a História da Matemática na sala de aula (MENDES, 2006, p.96-97).

Diante do exposto até o presente momento, é importante advertir que de nada adianta falar em formação de professor sem antes realizar uma mudança no que se infere do conceito de formação permanente⁷, tendo em vista que o professor deve permanecer em um processo contínuo de aprendizagem até o fim de sua vida profissional, sendo, nesta perspectiva, impossível considerá-lo como um profissional pronto e acabado (D'AMBROSIO, 1997).

⁷ Na concepção de D'Ambrosio (1997), pode-se entender como formação permanente a ideia de um professor receber um “credenciamento permanente que lhes permite seguir exercendo a profissão rotineiramente, por 30 ou 40 anos seguidos, sempre do mesmo jeito, com aquilo que aprenderam na universidade.” (D'AMBROSIO, 1997, p.98).

Neste sentido, no tópico seguinte buscaremos levantar algumas reflexões acerca do uso e da importância da História da Matemática nas aulas de Matemática na Educação Básica.

1.3 Uso e importância da História nas aulas de Matemática do Ensino Básico

No início do ano de 2019, foi noticiado, em vários veículos de comunicação, que entre os anos de 2007 e 2017 o aprendizado dos conteúdos relativos à disciplina de Matemática dos estudantes matriculados no 3º ano do Ensino Médio, última etapa da Educação Básica, teve uma redução de 0,7 pontos percentuais⁸. Esta pesquisa foi realizada pelo *Movimento todos pela Educação*, embasada nos resultados dos alunos nas avaliações aplicadas pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), do Ministério da Educação (MEC), nos últimos dez anos.

Os dados levantados nessa pesquisa nos permitem inferir que os alunos têm aprendido cada vez menos Matemática com o passar dos anos. Infelizmente, Demo (2018) também chegou a essa conclusão e alerta: “aprender adequadamente matemática já é algo excepcional; normal é não aprender” (DEMO, 2018, p.10). É consensual a concepção de que não há uma única forma de ensinar e aprender Matemática. Desse modo, Gravina e Santarosa (1999) afirmam que a aprendizagem depende de ações que caracterizam o “fazer matemática: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e, enfim, demonstrar.” (p.73).

Para alcançar tais objetivos, os professores podem se valer de várias abordagens, como, por exemplo: História da Matemática, Etnomatemática, Modelagem Matemática, Investigação Matemática, Resolução de Problemas, entre outras, cabendo ao professor analisar qual abordagem utilizar em determinados momentos e não necessariamente se limitando a somente uma. No entanto, acreditamos que a História da Matemática é uma alternativa viável, capaz de auxiliar na solução de alguns dos problemas de ensino de Matemática que temos enfrentado em nosso dia a dia dentro dos muros da escola. Considerando esse panorama, julgamos verdadeira a afirmativa de que

[...] o conhecimento matemático é historicamente construído e, portanto, está em permanente evolução. Assim, o ensino de Matemática precisa incorporar essa perspectiva, possibilitando ao aluno reconhecer as contribuições que ela oferece para compreender as informações e posicionar-se criticamente diante delas. (BRASIL, 1998, p.57).

⁸ Conforme índices do SAEB, no ano de 2007 o quantitativo de estudantes com aprendizado adequado em Matemática na última série do Ensino Médio era de 9,8%, enquanto que em 2017 esse índice caiu para 9,1%. Para maiores esclarecimentos, consulte: <https://www.todospelaeducacao.org.br/uploads/posts/183.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2020.

Inúmeras pesquisas⁹ tendem a avaliar de forma positiva o uso da História da Matemática no ensino, o que também pode ser constatado pelas recomendações presentes nos documentos oficiais, tais como os *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Em muitas situações, este recurso pode ajudar a responder alguns “porquês” e, desse modo, quando utilizado como ferramenta didática, e devidamente problematizado, tem um grande valor formativo, principalmente

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 42).

Segundo a BNCC, “é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para entender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados em situações que proporcionem a reflexão.” (BRASIL, 2017, p. 298).

Nobre (1996) enfatiza: os “porquês” impulsionaram o desenvolvimento da Matemática e, na busca das contradições da ciência, logo surgiram outras contradições, movendo as engrenagens do conhecimento. A título de exemplo, um pensamento que valida este argumento é a diferença entre a matemática produzida pelos egípcios e babilônios, quando comparada à matemática grega. Para esse autor, enquanto os Egípcios e Babilônios perguntavam “como?”, os filósofos gregos passaram a indagar “por quê?”. Desse modo, a Matemática, que até este momento era de caráter prático, passou a ter o seu desenvolvimento direcionado à conceituação, teoremas e axiomas.

Assim, no que se refere à aprendizagem da Matemática, Nobre (1996, p.31) propõe “um tratamento diferenciado a transmissão dos conhecimentos”, ou seja, que tente acompanhar o conceito a ser trabalhado a partir do seu desenvolvimento histórico.

Ainda em relação aos “porquês”, Mendes (2009) conclui:

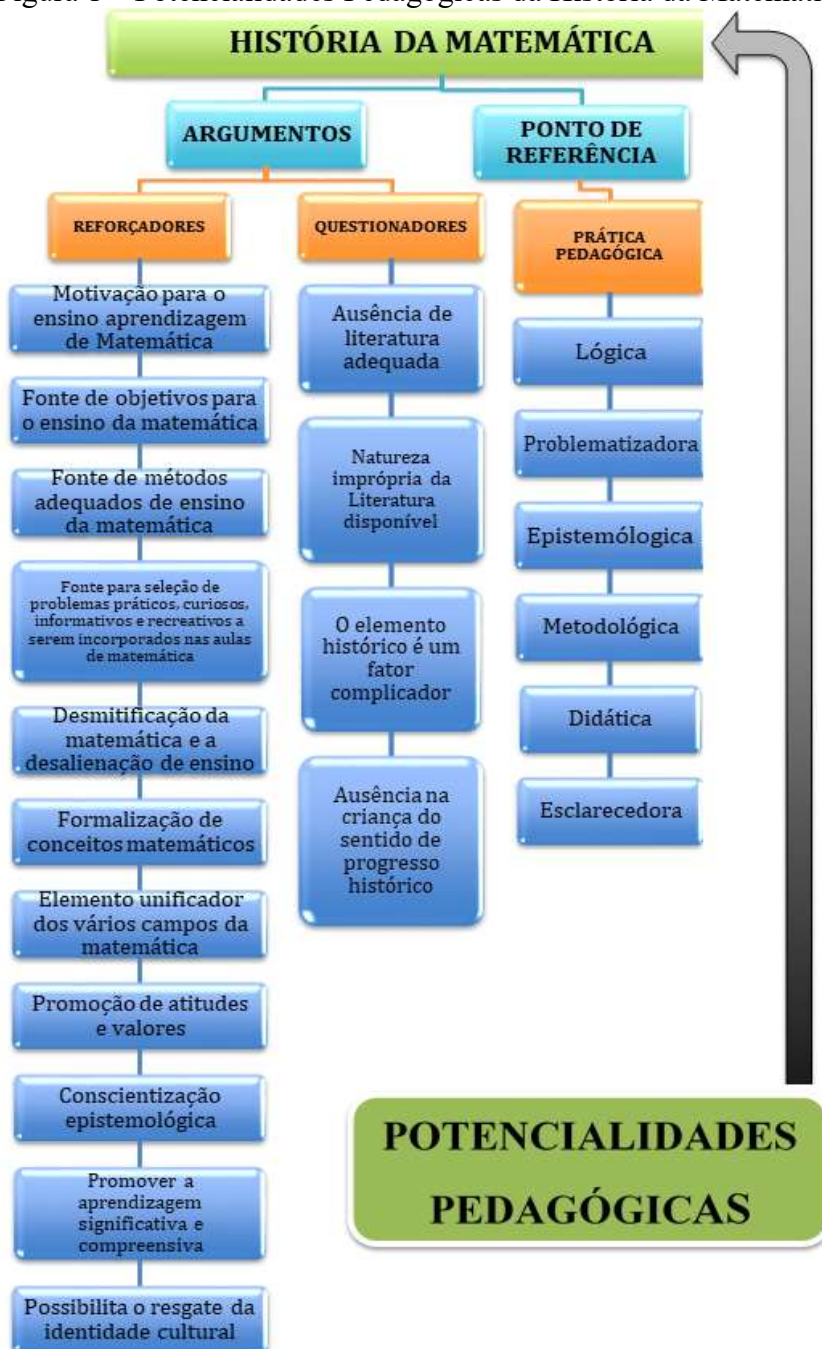
A história pode ser nossa **grande aliada quanto a explicação desses porquês**, desde que possamos incorporar às atividades de ensino-aprendizagem aspectos históricos necessários a solução deste obstáculo. Tais informações históricas devem certamente passar por adaptações pedagógicas que, conforme os objetivos almejados, devem se configurar em atividades a serem desenvolvidas em sala de aula ou fora dela (extraclasse). Além disso, devem recorrer a materiais manipulativos sempre que necessário sem perder de vista que **a aprendizagem deve ser alcançada a partir das experiências e reflexões dos próprios estudantes**. Todavia, devem possuir uma carga

⁹ D’Ambrosio (1996, 1997, 2011), Nobre (1996), Mendes (2001, 2006, 2009), Miguel e Brito (1996), Miguel e Miorim (2017) e Miguel (1997).

muito forte de **aspectos provocadores da criatividade** imaginativa dos estudantes, bem como de **fortes indícios dos aspectos socioculturais que geraram a construção dos tópicos matemáticos abordados na atividade**. (MENDES, 2009, p. 109, grifos nossos).

Não faltam argumentos que buscam validar a participação da história no processo de ensino e aprendizagem. Alguns mais ingênuos atribuem à história um poder mágico capaz de mudar drasticamente o posicionamento do aluno perante a Matemática (MIGUEL, 1997).

Figura 1 – Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática



Fonte: Adaptado de Miguel (1997)

O professor pesquisador Antônio Miguel, em seu trabalho “As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores” (Figura 1), objetivou analisar alguns argumentos muito utilizados no dia a dia e que buscam “reforçar a potencialidade pedagógica da História da Matemática” (MIGUEL, 1997, p.74).

Para este autor, os principais argumentos são aqueles que consideram a história como uma fonte de motivação, objetivos e métodos adequados de ensino, seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas, além de possibilitar a desmistificação e desalienação do ensino de Matemática, agindo como instrumento de formação, promoção do pensamento independente e crítico, atitudes e valores, conscientização epistemológica, possibilitando uma aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática por meio do resgate da identidade cultural (MIGUEL, 1997).

No entanto, se os considerar individualmente, não serão capazes de construir um alicerce sólido que legitime a inclusão da história em sala de aula. O autor externaliza uma preocupação quanto ao posicionamento extremista de que a história tudo ou nada pode e que, na verdade, é mais pertinente buscar um meio termo onde a História da Matemática seja considerada como um norte para a problematização pedagógica.

Na perspectiva de Miguel (1997), não existe uma única História da Matemática, a qual o professor possa usar e abusar, e que quando fragmentada e inserida a conta gotas no ensino seja apropriada ou possua as qualidades necessárias para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem.

Mesmo com tantos pressupostos que incentivam o professor a utilizar a história no contexto didático-pedagógico, cabe certo cuidado, pois, para Mendes (2001), o professor pode guiar-se por dois caminhos: o primeiro, quando a atividade seja revestida de pesquisa; o segundo está relacionado à utilização das informações históricas presentes nos livros, sejam didáticos ou de História da Matemática. No primeiro caminho, está evidente a necessidade de que

[...] sua atividade seja revestida também pela pesquisa. Isso significa ser necessário ao professor levantar na História da Matemática, problemas que necessitem respostas, visando assim torná-los como ponto de partida das atividades pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula. (MENDES, 2001, p.229).

Bem como o segundo caminho

[...] diz respeito à utilização das informações históricas presentes nos livros de História da Matemática ou similares e, a partir de tais informações, elaborar atividades de ensino visando com isso fomentar a construção de noções matemáticas pelo aluno. (MENDES, 2001, p.230).

Neste ponto de vista, Mendes (2001) defende que as atividades históricas são capazes de direcionar os alunos por um processo mais proativo da construção do conhecimento, do mesmo modo que Miguel (1997) acredita que somente uma História da Matemática pedagogicamente orientada, esclarecedora e dinâmica, pode substituir as enfadonhas histórias evolutivas das ideias da Matemática, quase sempre desvinculadas das necessidades que estiveram na base de sua origem e transformação, constituindo um ponto de referência para uma prática pedagógica problematizadora. Somente assim “a educação assume um caminho diferente. Em vez de ensinar a praticidade dos conteúdos escolares, investe-se na fundamentação deles. Em vez de se ensinar o para quê, ensina-se o porquê das coisas.” (NOBRE, 1996, p.31).

CAPÍTULO II

CULTURA ESCOLAR E O LIVRO DIDÁTICO

[...] no campo das disciplinas escolares, faz-se necessário situar um determinado saber pedagógico na cultura escolar que lhe deu vida, mantendo-o, transformando-o, delegando-lhe a um status de maior ou menor valia ou conduzindo-o a extinção dentro currículo. Existe uma cultura escolar que produz as disciplinas escolares e, ao mesmo tempo, uma cultura que é produzida por elas. (ZUIN, 2004, p.2).

Face ao nosso tema de estudo, nos embasamos nos conceitos e nas ideias defendidas pelo historiador francês André Chervel, pesquisador do Service d'Histoire de l'Education – Institut National de Recherche Pédagogique (INPR), em Paris, França, principalmente em seu texto “História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa”.

Acreditamos que tais conceitos são primordiais para a discussão que nos propusemos a fazer, sobretudo no entendimento da Matemática como disciplina escolar, mais especificamente da Geometria, focando em seus “avanços” e “retrocessos” no âmbito educacional brasileiro.

2.1 Cultura escolar: ponto e contraponto

É comum, em nosso cotidiano, vermos a palavra *cultura* ligada a outras palavras que funcionam como adjetivos, exprimindo qualidades ou esboçando características para um conceito tão abrangente como o de cultura, formando expressões como “*cultura contemporânea*”, “*cultura gay*”, “*cultura escolar*”, “*cultura afro-brasileira*”, entre outras (LARAIA, 2001).

Mas antes de adentrarmos nestas “características” determinadas pelo adjetivo, aqui no nosso caso, o adjetivo “*escolar*” na concepção de cultura. Vale a pena mencionar um pouco da história do verbete *cultura*, do latim *cultura*, em alemão *Kultur* ou em inglês, *culture*, que entre o final do século XVIII e início do século XIX era utilizado para simbolizar todos os aspectos culturais de uma comunidade, do mesmo modo que a palavra *civilization*, do francês, buscava representar as realizações materiais de um povo (LARAIA, 2001).

Mas, então, o que é cultura?

Em busca de uma resposta para este questionamento, nos esbarramos na ponta de um *iceberg*. Na trajetória da historiografia, vemos inúmeras mutações do conceito de “cultura”,

todas tendo como alicerce indispensável as ideias de Edward Tylor. O antropólogo britânico Edward Burnett Tylor (1832-1917), em sua obra *Primitie Culture*, publicada em 1871, buscou sintetizar os termos *Kulture* e *civilization*, que, até então, apresentavam uma concepção menos abrangente, como um conjunto de variáveis que quando “entendida em seu amplo sentido etnográfico, é tudo aquilo que em sua complexidade inclui conhecimento, crença, arte, moral, lei, costume e quaisquer outras capacidades e hábitos adquiridos pelo homem como membro da sociedade.”¹⁰ (TYLOR, 1920, p. 1, tradução nossa).

Mesmo com algumas modificações em seu texto original, mas sempre exprimindo as mesmas ideias, esta concepção é até hoje aceita: para Aranha (2002, p.14) “passamos a usar a palavra cultura como resultado de tudo o que o homem produz para construir sua existência. No sentido amplo, antropológico, cultura é tudo o que homem faz, seja material ou espiritual, seja pensamento ou ação”. A autora conclui que “neste sentido pode-se dizer que a cultura é o conjunto de símbolos elaborados por um povo em determinado tempo e lugar. Dada a infinita possibilidade de simbolizar, as culturas são múltiplas e variadas.” (ARANHA, 2002, p.15). Assim, ela pode ser vista como “um sistema compartilhado de valores, de representações e de ação, é a cultura que orienta a forma como vemos e damos inteligibilidade às coisas que nos cercam; e é ela que orienta a forma como agimos diante do mundo e dos acontecimentos.” (MAHER, 2007, p.261).

Voltando ao foco do nosso trabalho, ao analisarmos a instituição escolar e seus materiais (livros, cadernos, provas, leis, decretos e etc.), seus atores (alunos, professores, coordenadores, inspetores, entre outros) e as relações entre eles, fica evidente que tudo isso pode ser classificado como um conjunto de elementos característicos de uma cultura específica, dotada de particularidades, denominada *cultura escolar*.

Na visão de Chervel (1990), o

[...] sistema escolar é detentor de um poder criativo insuficientemente valorizado até aqui é que ele desempenha na sociedade um papel o qual não se percebeu que era duplo: de fato ele forma não somente os indivíduos, mas também uma cultura que vem por sua vez penetrar, moldar, modificar a cultura da sociedade global. (CHERVEL, 1990, p.184).

Nas últimas décadas, este conceito ou campo de pesquisa vem ganhando cada vez mais espaço em âmbito nacional e internacional; historiadores da educação vêm se debruçando sobre

¹⁰“Culture or Civilization, taken in its wide ethnographic sense, is that complex whole which includes knowledge, belief, art, morals, law, custom, and any other capacities and habits acquired by man as a member of society.” (TYLOR, 1920, p.1).

a temática, com o intuito de buscar compreender e descrever a história desta cultura.

No caso restrito da historiografia da Educação Matemática brasileira, podemos citar as valorosas contribuições dos professores Dr. Wagner Rodrigues Valente (UNIFESP), Dr^a. Elenice de Souza Lodron Zuin (PUC Minas), Dr^a. Maria Laura Magalhães Gomes (UFMG), entre tantos outros.

Nesse sentido, não restam dúvidas sobre a extensão da contribuição dos estudos destes pesquisadores para a escrita da História da Educação no Brasil, tanto que o Prof. Dr. Bruno Belhoste do INPR – Paris, ao redigir a apresentação do livro *Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730 a 1930)*, de autoria do professor Dr. Wagner Rodrigues Valente, reconhece a importância deste trabalho e profere os seguintes dizeres:

Preenchendo uma lacuna importante da historiografia da educação brasileira, o livro de Wagner Valente se escreve, pois, num movimento Internacional de pesquisa sobre a história das matemáticas escolares e é sobre este ângulo que gostaria aqui de ressaltar a importância da sua contribuição [...], [...] não somente à história da educação brasileira, mas também a história internacional das ideias e práticas pedagógicas. (BELHOSTE, 1999, p.11-13).

Mas o que viria a ser *cultura escolar*?

Chervel (1990) concebe a cultura escolar como uma cultura cultivada no seio das instituições escolares e ao mesmo tempo em que é gerada também é difundida por esta instituição. Já na concepção de Julia (2001), a cultura escolar pode ser entendida como um conjunto de normas e práticas ordenadas às finalidades do ensino. De um modo mais específico, pode-se definir cultura escolar como sendo

[...] um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo as épocas (finalidades religiosas, sociopolíticas ou simplesmente de socialização) [...]. Enfim, por cultura escolar é conveniente compreender também, quando isso é possível, as culturas infantis (no sentido antropológico do termo), que se desenvolvem nos pátios de recreio e o afastamento que se apresentam em relação às culturas familiares. (JULIA, 2001, p.10-11).

A concepção de cultura escolar, tanto na visão de Chervel (1990) quanto na visão de Julia (2001), tem proximidades no que tange ao interior da escola. No entanto, cabe-nos concordar com Faria Filho *et al.* (2004), ao frisarem que tais concepções divergem em alguns pontos, pois,

Chervel parecia afirmá-la de maneira mais contundente como original e se interessava principalmente pela construção dos saberes escolares. Julia fazia a ênfase da análise recair particularmente sobre as práticas escolares, o que o levava a distinguir entre uma cultura escolar primária e uma cultura escolar secundária. (FARIA FILHO *et al.*,

2004, p.146).

Estes historiadores denunciam uma lacuna na historiografia da Educação, no que se refere às pesquisas dirigidas ao interior da instituição escolar, e acreditam na importância das pesquisas em História das Disciplinas Escolares para o estudo da cultura escolar, de modo que ela

[...] tenta identificar, tanto através das práticas de ensino utilizadas na sala de aula, como através dos grandes objetivos que presidiram a construção das disciplinas, o núcleo duro que pode constituir uma história renovada da educação. Ela abre, em todo caso, para retomar uma metáfora aeronáutica, a “caixa preta” da escola, ao buscar compreender o que ocorre nesse espaço particular. (JULIA, 2001, p. 13).

Ao se adentrar neste espaço, que para Julia foi denominado como a “caixa preta” da escola, descortina-se uma grande quantidade de elementos e possibilidades para uma análise detalhada da cultura escolar – o que nos leva a retomar a epígrafe presente no início deste capítulo, quando Zuin (2004) expõe que, nesse tipo de estudo, é importante localizar um determinado saber pedagógico na cultura que lhe deu vida, pois, assim, conseguiremos compreender suas transformações no decorrer dos tempos.

2.2 História das disciplinas escolares e a cultura escolar

Nas últimas décadas, este campo de pesquisa ganhou destaque como objeto de investigação e trouxe consigo um novo olhar no âmbito dos conteúdos escolares. Um de seus principais representantes, André Chervel, afirma que a História das Disciplinas Escolares não objetiva simplesmente o preenchimento de uma lacuna temporal, mas trata-se de uma nova categoria historiográfica (CHERVEL, 1990, p. 183).

Este pesquisador entende a escola como um espaço de criação do saber, que não deve ser confundido unicamente como um local para a simples reprodução de conhecimentos impostos fora dela. Assim, os conteúdos escolares são concebidos dentro da escola e para a escola, dotados de especificidades e de certa autonomia. É nesta perspectiva que Zuin (2007) esclarece que, à luz deste autor, algumas pesquisas voltadas para o espaço educacional tendem a trilhar novos caminhos.

Diferentemente do que se pode imaginar, o termo “disciplina” nem sempre produziu o significado que se emprega atualmente. Ao longo dos anos, apresentou diferentes sentidos e usos. Chervel (1990) demonstra, em suas pesquisas, que a forma como inferimos o conceito de disciplina é ainda muito recente, sendo possível observar registros de seu surgimento, pelo menos na França, após o fim da Primeira Guerra Mundial, e que, no contexto escolar, seu significado estava intimamente ligado ao sentido de ordem, controle e obediência.

No âmbito escolar,

O termo “disciplina” e a expressão “disciplina escolar” não designam, até o fim do século XIX mais do que a vigilância dos estabelecimentos, a repressão das condutas prejudiciais à boa ordem e aquela parte da educação dos alunos que contribui para isso. (CHERVEL, 1990, p.178).

Zuin (2007) evidencia que a gênese da expressão “disciplina”, ou, do latim tardio, *disciplinare*, está diretamente vinculada ao ato de “controlar, corrigir, disciplinar, ordenar, sujeitar ou submeter à disciplina.” (ZUIN, 2007, p.13).

Julia (2002, p.42) acrescenta que “[...] na Idade Clássica, [a expressão disciplina] comporta muitos sentidos: não significa, de fato, somente uma ação de ensinar, mas também matérias de ensino ou área de ensino, ou simplesmente ensino, método, doutrina e, finalmente, educação.”.

Ao realizar uma rápida pesquisa nos dicionários mais utilizados em nosso país, é comum encontrar inúmeros sentidos para o vocábulo “disciplina”, sendo possível constatar que não há uma diferenciação entre “disciplina” e seus sinônimos. A título de exemplo, o *Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa – Novíssimo Aulete* define “disciplina” como “instrução, ensino dados por um mestre a seu discípulo” ou mesmo como “área do conhecimento humano, esp. aquela que constitui matéria de ensino escolar.” (p.502). Portanto, as definições habitualmente encontradas “de fato não estão de acordo a não ser sobre a necessidade de encobrir o uso banal do termo, o qual não é distinto de seus “sinônimos”, como “matérias” ou “conteúdos” de ensino. A disciplina é aquilo que se ensina e ponto final.” (CHERVEL, 1990, p.177).

Posto isto, acreditamos que compreender a gênese deste conceito tão utilizado em nosso meio faz-se necessário para que possamos interpretar com maior clareza e assertividade os fatos que se revelaram em nossos estudos.

Frequentemente, em relação às pesquisas no âmbito educacional, percebe-se uma maior inclinação para investigar legislações e documentos oficiais, tais como: plano de ensino, instruções e propostas pedagógicas. Por mais que estas fontes possam trazer-nos indícios importantes, no âmbito da história das disciplinas escolares, é necessário buscar outros elementos, pois apenas estas fontes não respondem com clareza a muitas indagações (ZUIN, 2007).

Nesta lógica de pensamento, quando a zona de inquisição se tratar de

[...] um determinado conhecimento ou disciplina de escolarização, a legislação não fornece indícios necessários para que se possa avaliar o processo da sua origem e constituição. Leis e decretos, e mesmo as instruções pedagógicas, estabelecem determinações e objetivos a serem cumpridos, mas que, no entanto, podem não se efetivar dentro do espaço escolar. (ZUIN, 2007, p.13).

Ou seja, para Zuin (2007), por mais que estas fontes possam trazer indicativos relacionados aos saberes escolares, isoladamente elas não são capazes de demonstrar como se estabeleceram e quais foram as mudanças ou permanências ocorridas no decorrer de um determinado tempo. Aceitamos a ideia de que

[...] a disciplina escolar é então constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e motivação e um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funcionam, evidentemente em estreita colaboração, de mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades. (CHERVEL, 1990, p. 207).

André Chervel advoga que as disciplinas escolares são “[...] criações espontâneas e originais do sistema escolar.” (CHERVEL, 1990, p. 184) e, como tal, a escola não vulgariza as ciências ou faz delas uma adaptação para os alunos. Segundo esse autor, a escola constitui o lugar de criação das disciplinas e, por isso, não aceita como válida a concepção de que os saberes escolares sejam inferiores aos saberes acadêmicos, ou seja, inferiores aos saberes estabelecidos pelas instituições universitárias.

Verifica-se também que a escola possui finalidades próprias e estas vão muito além de simplesmente cumprir normativas oficiais. Na visão deste pesquisador, os “conjuntos destas finalidades consigna a escola a sua função educativa” (p.188), ao mesmo tempo que a função das disciplinas escolares “consiste em cada caso em colocar um conteúdo de instrução a serviço de uma finalidade educativa.” (CHERVEL, 1990, p. 188).

Ainda em relação às finalidades, este autor nos convida a refletir se estes objetivos impostos à escola nos textos oficiais são, de fato, as suas finalidades reais e pontua: “não podemos [...] nos basear unicamente nos textos oficiais para descobrir as finalidades do ensino” (p.190), de modo que “[...] o estudo das finalidades não pode, pois, de forma alguma, abstrair dos ensinamentos reais.” (CHERVEL, 1990, p.191).

Entende-se por *ensinos reais* a realidade pedagógica em que a escola está inserida, como, por exemplo, o tipo de clientela que ela recebe, os materiais que utiliza, a formação e o ideário dos professores, sua interlocução com a sociedade que está a sua volta, entre outros. Estas variáveis são fatores que podem interferir diretamente nas finalidades impostas pelos documentos oficiais à escola, posto isto, “[...] a dificuldade desses estudos reside em que se deve manter juntos todos os fios dessa história sem abandonar nenhum deles [...] e não se limitar a um só, sob o risco de interpretações históricas equivocadas.” (JULIA, 2002, p.41-68).

Valendo-se das concepções presentes nos trabalhos de Chervel (1990), Zuin (2004, 2007) e Valente (1999, 2008b), buscaremos, na próxima seção deste estudo, elucidar nossa

intenção em utilizar o livro didático como uma fonte crucial para a escrita da história da cultura escolar.

2.3 O livro didático como fonte de pesquisa da cultura escolar

Segundo Moraes,

[...] começamos a engatinhar pelo caminho da cultura depois do estabelecimento dos conventos dos jesuítas, franciscanos, carmelitas e beneditinos, principalmente os padres da Companhia de Jesus que logo após sua chegada abrem colégios na Bahia e em outras capitais. A instrução e os livros estavam nos conventos. (MORAES, 2006, p. 4).

Desde sua introdução no Brasil, o livro estava a serviço dos ricos e poderosos, guardados para um público seletivo, muito ainda demoraria para a sua democratização de forma que alcançasse uma parcela maior da sociedade. Contudo, ter acesso por si só não tem tanta amplitude, já que os livros continuam caros e a maioria dos alunos das escolas públicas só tem acesso aos livros didáticos e aos de literatura que a escola os obriga a ler.

Por outro lado, sabemos que a educação no Brasil não é de fato inclusiva¹¹, existem muitas crianças e adolescentes fora da escola e ainda há uma grande evasão escolar. Consequentemente, muitos são privados de mais um dos seus direitos – o livro.

O berço da Matemática no Brasil, como disciplina escolar, está atrelado às instituições militares, servindo como suporte para a aquisição de conhecimentos militares, tendo como intuito preparar oficiais capazes de construir fortificações e manusear artefatos de guerra, para que, assim, defendessem o Brasil de ataques inimigos. No entanto, alguns desses cursos demoraram a iniciar suas atividades por inúmeros problemas, como, por exemplo, a *Aula de Fortificações*, a qual onze anos após sua criação, em 1699, ainda não tinha iniciado: entre as alegações, estavam a falta de livros, compêndios e materiais didáticos (VALENTE, 1999).

¹¹ De acordo com os dados coletados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), no ano de 2018, por mais que o acesso à educação teve uma melhora nos últimos anos, ainda há um alto índice de evasão e distorção de idade-série, principalmente no Ensino Médio, abarcando 30,7% dos alunos. Essa situação é ainda mais desigual quando comparamos os índices nacionais aos nordestinos que lideram o *ranking* de analfabetismo. Estima-se que na época da pesquisa havia 11,3 milhões de brasileiros em idade escolar, com 15 anos ou mais de idade, que não conseguiam ler e escrever.

Figura 2 – Exame de Artilheiros de Alpoim (1744)



Fonte: Alpoim (1744)

Nesse contexto, foi nas “primeiras décadas do século XVIII, quando surgem os primeiros textos para escolarização da matemática no Brasil” (VALENTE, 1999, p.21), como é o caso dos livros escritos por Alpoim¹², *Exame de Artilheiros*¹³ (Figura 2), e *Exame de Bombeiros*, respectivamente em 1744 e 1748 (VALENTE, 1999),

Ambos estruturados por meio de perguntas e respostas. Os conteúdos da “arte militar” são precedidos da matemática necessária à sua compreensão. *Exames de artilheiros* compreende três capítulos: Aritmética, Geometria e Artillaria. *Exames de bombeiros*, escrito em dez tratados, têm dos dois primeiros dedicados à geometria e à trigonometria. (VALENTE, 1999, p.48).

Indicando-nos a relevância do livro didático como uma fonte de pesquisa da historiografia da educação matemática, Valente (1999) aponta que “talvez seja a matemática escolar a disciplina que tenha sua história mais intimamente ligada e estampada nos livros didáticos” (VALENTE, 1999, p.20), além do mais, na concepção de Bitencourt (1993), o uso do livro didático não fica restrito somente à sala de aula, sendo também utilizado em muitos casos como fonte de saber “instituído e institucionalizado”, orientando o caminho a ser seguido pelos professores e alunos, como já apontamos anteriormente. “A relação que o professor estabeleceu

¹²José Fernandes Pinto Alpoim nasceu em 14/7/1700, na cidade de Viana do Castelo, situada ao norte de Portugal. Foi engenheiro, arquiteto, militar e professor. Faleceu em 7/1/1765, no Rio de Janeiro, Brasil (AMATI, 2010).

¹³ Corroborando com Valente (1999), D’Ambrosio (2011a) expõe que este foi o primeiro livro de Matemática escrito em solo brasileiro.

com o livro didático escolar tornou-se, portanto, questão para desvendarmos o poder do livro didático na constituição da cultura escolar.” (BITENCOURT, 1993, p.243).

Neste momento, julgamos necessário abrir parênteses para explicar o que estamos considerando como livro ou manual didático – os que são destinados a uso pedagógico por professores e alunos em sala de aula. Na história da Educação, vemos que o manual didático são os livros para a formação de professores ou os livros destinados especificamente para os professores.

De acordo com Lajolo (1996), o verbete *didático*, que neste caso assume a função de adjetivo, qualifica o substantivo (livro) como um tipo específico de obra, o livro didático, que tem sua função diretamente ligada ao processo formal de ensino e aprendizagem. Conclui-se que “didático, então, é o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática.” (LAJOLO, 1996, p.4). Na concepção de Marisa Lajolo,

[...] para ser considerado didático, um livro precisa ser usado, de forma sistemática, no ensino-aprendizagem de um determinado objeto do conhecimento humano, geralmente já consolidado como disciplina escolar. Além disso, o livro didático caracteriza-se ainda por ser passível de uso na situação específica da escola, isto é, de aprendizado coletivo e orientado por um professor. (LAJOLO, 1996, p. 4-5).

Tanto para Zuin (2004) como para Valente (2008b, p.141) é válida a ideia de que, até recentemente, os livros didáticos eram produtos de menor valor, “de segunda mão”, efêmeros e “descartáveis”, após cumprirem a missão de interlocutor do conhecimento. Contudo, “ante os novos tempos de História Cultural, tornaram-se preciosos documentos para escrita da história dos saberes escolares.” (VALENTE, 2008b, p.141).

Nesta pesquisa, nosso olhar se volta para o livro didático de Matemática, tendo-o como um elemento portador dos saberes deste campo disciplinar e que há muito tempo tem sido o mais importante, senão o único, suporte para professores e alunos no processo de aquisição do conhecimento. Nossa concepção vai ao encontro do proposto por Zuin (2004, p.4) ao afirmar que “[...] os manuais escolares foram e continuam sendo um importante instrumento de apoio e orientação dos professores, ditam a apresentação dos conteúdos a serem ministrados, estabelecendo um currículo, que muitas vezes, é fielmente seguido”. Essa visão pode ter levado Valente (2008b) a alegar que a disciplina de Matemática tem sua história mais vinculada aos livros didáticos. Pode-se observar que tal alegação é facilmente verificada quando temos um contato mais profundo, como na pesquisa do Prof. Wagner Rodrigues Valente, pois em sua tese de

doutorado sobre a Matemática escolar no Brasil (1730-1930) ele demonstra que passando pelo surgimento do seu ensino como um saber militar até a sua constituição como disciplina escolar, esta história pode ser narrada pelos livros didáticos, como apresentamos no início desta seção.

Consideramos o manual didático como o produto de uma época que não somente foi capaz de penetrar e interferir na produção de uma cultura escolar como também foi agente de produção capaz de produzir uma cultura, tornando-o uma fonte privilegiada para a pesquisa da História das Disciplinas Escolares, pois a análise de livros didáticos pode contribuir com a escrita de uma história até então desconhecida (CHERVEL, 1990).

Choppin (2002), na época de seu estudo, observou que ainda havia uma parcela dos pesquisadores com pouco interesse pelos manuais antigos e justifica que este fato pode estar relacionado não somente à dificuldade em encontrá-los, mas também pela escassez de alguns materiais, pelo seu estado de conservação e, até mesmo, pela incompletude de alguns. Este mesmo pesquisador afirma que, munido deste material, o historiador pode “[...] observar, a longo prazo, a aparição e as transformações de uma noção científica, as inflexões de um método pedagógico ou as representações de um comportamento social.” (CHOPPIN, 2002, p.15).

A partir das contribuições de André Chervel, os estudos inerentes à historiografia das disciplinas escolares, valendo-se dos manuais didáticos, tomam outros rumos, como já sinalizamos anteriormente, pois “a tarefa primeira do historiador das disciplinas escolares é estudar os conteúdos explícitos do ensino disciplinar” e, para executar esta tarefa, o historiador valer-se-á de uma abundante documentação “[...] à base de cursos, manuscritos, manuais e periódicos pedagógicos.” (CHERVEL, 1990, p.203). Para este teórico, em um determinado período histórico, um certo manual didático se impõe perante os demais, de modo que virá a tornar-se referência a ser seguida para os que forem escritos depois dele. Este fenômeno foi denominado por Chervel (1990) como *vulgata*.

Tratando-se da análise de livros didáticos, no viés da historiografia das disciplinas escolares, especialmente dos conteúdos escolares, tanto Zuin (2007) como Valente (2008b) concordam que é de suma importância a averiguação da *vulgata*¹⁴.

No entendimento de Zuin (2007, p.17), “a *vulgata* evidencia o que foi tomado como válido e legítimo ao longo dos anos no processo de escolarização de um determinado conteúdo ou disciplina”, ou seja, essa padronização pode ser observada ao confrontar obras de um mesmo período, de modo que os exercícios e a forma de abordar os conteúdos nos textos apresentarão mínimas alterações de um para o outro.

¹⁴ Cabe-nos ressaltar que nossa pesquisa não objetiva a averiguação de uma *vulgata* relacionada ao assunto “cevi-
anas”.

Assim,

[...] todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do corpus de conhecimentos, os exemplos utilizados, os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas. (CHERVEL, 1990, p.203).

Vale ainda lembrar que para a análise desse fenômeno não é aconselhável tomar como fonte uma única amostra aleatória de algum manual amplamente divulgado e conhecido, pois corre-se o risco de produzir resultados viciosos, ou seja, poderia produzir uma ideia equivocada da disciplina naquele período. Nesta análise, é necessário considerar o tempo histórico e o espaço dentro dos quais os livros foram produzidos, examinando a sua destinação, os conteúdos apresentados, familiaridades e diferenças, e somente uma análise criteriosa será capaz de evidenciar qual autor impõe um modelo (ZUIN, 2004).

De tempos em tempos, o pesquisador depara-se com um manual inovador que propõe uma nova organização na forma de apresentar um determinado conteúdo, bem como outros modelos de exercícios e metodologias. Somente com uma análise detalhada do conteúdo desse manual ou livro didático será possível indicar de que forma este poderá influenciar ou como ele influenciou as produções que o sucederam. Melhor dizendo, o ponto chave desta conjuntura fica a cargo do historiador ao intentar compreender como e quanto

[...] o aparecimento de uma nova proposta - apresentada num manual audacioso e inédito - foi capaz de fertilizar produções didáticas posteriores e ser apropriado por elas, a ponto de ser constituída uma nova vulgata que, em certa medida, poderá atestar o sucesso da nova proposta contida no manual transformador. (VALENTE, 2002, p.41).

Na visão de André Chervel,

[...] quando uma nova vulgata toma o lugar da precedente, um período de estabilidade se instala, que será apenas perturbado, também ele, pelas inevitáveis variações. Os períodos de estabilidade são separados pelos períodos “transitório”, ou de “crise”, em que a doutrina ensinada é submetida a turbulências. (CHERVEL, 1990, p.204).

Dentro dessa perspectiva, conclui-se que “o livro didático de matemática poderá revelar, inclusive, heranças de práticas pedagógicas do ensino de matemática, presentes em nosso cotidiano escolar hoje.” (VALENTE, 2008b, p.159-160). Mas “é preciso deixar claro que as vulgatas não se eternizam. Elas também se extinguem ou se transformam.” (ZUIN, 2007, p. 17).

CAPÍTULO III

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Se este intervalo de tempo é rico e fértil, então, há que recorrer a análise de conteúdo. (BARDIN, 2016, p. 16).

Neste capítulo, apresentaremos os livros utilizados no decorrer de nossa pesquisa, apontando *se há e como* ocorre a apresentação do termo *cevianas* e do *Teorema de Ceva* por autores dos livros didáticos analisados. Recorrendo à metodologia de Análise de Conteúdo, fundamentando-nos em Laurence Bardin, buscamos dentro das categorias pré-definidas (tais como: definição, introdução do conteúdo de cevianas do triângulo, aspectos históricos, aplicações, exercícios, número de páginas, indicação de leitura complementar, recursos didáticos) compreender as permanências e alterações no ensino das cevianas do triângulo dentro de um determinado período histórico. Para complementar nosso estudo, analisamos livros de Desenho Geométrico, com o intuito de verificar as presenças do termo “ceviana” e de um contexto histórico ligado a este tópico.

3.1 Análise de Conteúdo

Para a realização da pesquisa, com análise qualitativa e foco em livros didáticos, encontramos suporte na teoria de Bardin (2016), no que tange à Análise de Conteúdo, visto que ela se constitui como

[...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção dessas mensagens. (BARDIN, 2016, p.48).

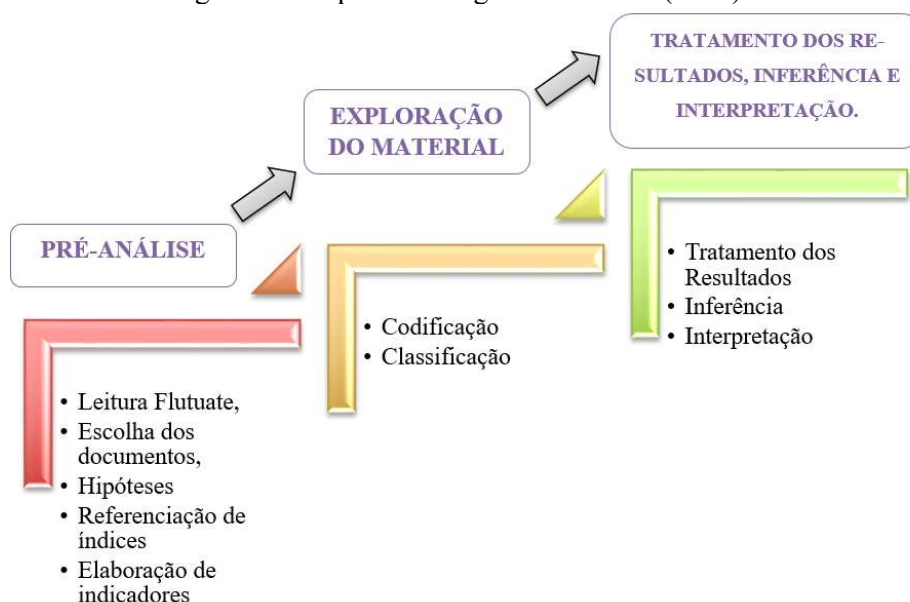
A Análise de Conteúdo é um conjunto de instrumentos metodológicos que vem sendo usado desde os anos 1970 e continua em constante avanço, graças à sua capacidade de adaptação a vários métodos de coleta, tratamento e interpretação dos dados, sendo possível sua utilização nos mais diferentes tipos de pesquisa (BARDIN, 2016).

De acordo com Bardin (2016), a Análise de Conteúdo consiste em um método que procura conhecer aquilo que está por trás das palavras, ir além das aparências, auxiliando na descoberta de fatos e na busca de repostas para determinados problemas. Este tipo de instrumento

proporciona ao pesquisador uma grande possibilidade de trabalho e amplo diálogo com os textos analisados, com o objetivo de estabelecer uma avaliação imparcial, independente das preferências individuais dos pesquisadores.

O método de Análise de Conteúdo, de Laurence Bardin, se constitui de três etapas cronológicas: *pré-análise*; *exploração do material*; *tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação* (BARDIN, 2016, p.125), que podem ser interpretadas como os degraus de uma escada, nos quais o pesquisador vai subindo um a um na obtenção da resposta procurada na pesquisa. A Figura 3 sintetiza as etapas cronológicas da análise de conteúdo, segundo Bardin (2016).

Figura 3 – Etapas cronológicas de Bardin (2016)



Fonte: Adaptado de Bardin (2016)

O primeiro degrau, *Pré-Análise*, pode ser definido como um momento de organização e escolha dos materiais, onde deve-se preparar o material selecionado para análise, objetivando torná-lo operacional e capaz de trazer à tona as ideias iniciais. Neste período, é importante fazer uma leitura ampla e significativa, o que, para Bardin (2016), é chamada de leitura “flutuante”, ou seja, o pesquisador deve ter contato com inúmeros documentos e textos a serem analisados (em nosso caso específico, os livros didáticos, deixando-nos invadir por suas impressões e orientações). Vale ressaltar que, neste momento, também se formulam as hipóteses e os objetivos da pesquisa, além de permitir a elaboração de indicadores que auxiliarão na interpretação final.

Em seguida, temos a *exploração do material*. Nesta segunda parte do processo, Bardin (2016) propõe que sejam realizadas as operações de codificação, enumeração e decomposição, de acordo com as diretrizes anteriormente estabelecidas no início da atividade de pesquisa. Isso permite ao pesquisador “atingir uma representação do conteúdo ou da expressão, suscetível de esclarecer ao analista acerca das características do texto.” (BARDIN, 2016, p.133), ou seja, é nesta fase que os dados brutos são organizados e lapidados, podendo ser a etapa mais demorada e cansativa do processo.

Importa enfatizar que, neste momento, buscamos organizar os manuais didáticos de acordo com o ano de publicação e, posteriormente, categorizá-los conforme os seguintes eixos: definição e introdução do conteúdo de cevianas do triângulo, aspectos históricos, exercícios, número de páginas, indicação de leitura complementar e recursos didáticos utilizados e/ou sugeridos.

A categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, em seguida, por reagrupamento seguindo o gênero (analogia), com critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registro, no caso a análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns destes elementos. (BARDIN, 2016, p.147).

Segundo Bardin (2016), o processo de categorização não se constitui uma etapa obrigatória em todas as análises de conteúdo, mas acreditamos que ela nos auxiliará no desenvolvimento da última etapa, ao passo que evidencia as familiaridades e as diferenças entre os textos didáticos analisados.

Por fim, temos o *tratamento dos resultados obtidos e interpretação*, fase em que o pesquisador retoma seu referencial teórico e busca estabelecer, por meio de deduções lógicas (inferências), interpretações do que antes estava “escondido” sob os documentos selecionados.

Na visão de Bardin (2016, p. 41), inferência é a “operação lógica, pela qual se admite uma proposição em virtude da sua ligação com outras proposições já aceitas como verdadeiras”. Neste contexto, fica claro que o êxito desta etapa da pesquisa está diretamente ligado ao uso desse modo de interpretação e, para isso, é necessário que o pesquisador compreenda de forma sólida o referencial utilizado, bem como as hipóteses delimitadas no início da pesquisa, permitindo-o confrontar seus achados no “*corpus material*” com as hipóteses e validá-las ou refutá-las, alicerçando-se no referencial escolhido.

Consideramos como marco inicial da pesquisa os livros publicados na década de 1970, por coincidir com o momento no qual começaram a ecoar as severas críticas que levariam à

extinção do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Iniciamos nossa análise pelo livro *Matemática Curso Moderno – volume 3*, de Osvaldo Sangiorgi, em sua oitava edição, publicado em 1970. Conforme sinalizamos anteriormente, para a análise dos livros didáticos, buscamos responder as seguintes questões:

- ❖ No estudo dos triângulos, quais tópicos são abordados?
- ❖ Como é a distribuição dos conteúdos de Geometria nos livros analisados?
- ❖ Há menção ao termo “cevianas” ou ao Teorema de Ceva?
- ❖ Há abordagem histórica do conceito de cevianas? E de Geometria?
- ❖ Como são apresentados os exercícios? Quantos são?
- ❖ Existem textos complementares ou indicação de outras fontes de leitura para os professores?

Nossa preocupação com a parte histórica se deve ao fato de o termo “ceviana” ser em homenagem ao italiano Giovanni Benedetto Ceva (1647-1734)¹⁵. Uma ceviana é definida como todo segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo e outra extremidade em um ponto do lado oposto a esse vértice ou ao prolongamento do lado. Altura, bissetriz interna e mediana do triângulo são denominadas “cevianas notáveis”. Ceva foi responsável por redescobrir e publicar o Teorema de Menelau. O teorema, demonstrado por Ceva, estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas de um triângulo sejam concorrentes.

Nas seções seguintes, buscaremos apresentar a análise individual de cada um dos livros que compõem nosso *corpus* documental.

3.2 Livro I – Matemática Curso Moderno – Volume 3 (1970)

O livro *Matemática Curso Moderno – volume 3*¹⁶, de Osvaldo Sangiorgi, foi publicado em 1970, pela Companhia Editora Nacional, sendo esta sua 8ª edição, em capa dura, no formato retangular com dimensões 15 cm x 21 cm. A capa foi construída com elementos geométricos. Não podemos afirmar que esta foi a intenção do autor ou editor, mas o que se verifica é que

¹⁵ Os aspectos históricos da vida e obra de Giovanni Ceva e a demonstração do teorema que leva o seu nome estão desenvolvidos no Produto Educacional (Apêndice D).

¹⁶ Na organização atual do ensino brasileiro, equivale ao 8º ano do Ensino Fundamental.

existe uma ênfase dada à Geometria neste volume. Na escrita do texto, foi utilizada a cor preta, enquanto os títulos e ilustrações estão em vermelho.

Figura 4 – Capa do Livro Matemática Curso Moderno, vol. 3



Fonte: Sangiorgi (1970)

O autor evidencia, no prefácio da obra, que o material por ele construído está

[...] de acôrdo com os Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios, aprovado pela Diretoria do Ensino Secundário, do Ministério de Educação e Cultura, no Curso de Treinamento Básico para Professôres Secundários, realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963 e Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de Matemática, Curso Secundário – 1º Ciclo – terceiro ano ginasial, da Secretaria de Educação de São Paulo, publicadas no Diário Oficial de 19/1/1965. (SANGIORGI, 1970, s.p.).

O livro é composto por quatro capítulos: 1 – Números Reais; estrutura de corpo; 2 – Cálculo Algébrico; estudos dos polinômios; 3 – Estudo das figuras geométricas; 4 – Estudo dos polígonos e da circunferência, acrescido de um apêndice que trata das transformações geométricas planas, cujos conteúdos o autor nomeou de “Grupo das Translações, Grupo das Rotações e Simetrias”, totalizando 314 páginas numeradas. Esse apêndice traz, novamente, os conteúdos que deveriam ser tratados na época do MMM.

No prefácio, o autor busca realizar um diálogo com o aluno e expõe que, no decorrer de seus estudos, no 3º ano, o estudante encontrará uma “porção de coisas novas”. E, após passar pelo primeiro e segundo capítulos, finalmente chegará ao auge do livro, o estudo da Geometria, como o próprio autor diz, o “bom-bocado do livro”.

Por ser uma publicação com ideário nitidamente modernista, tudo leva a crer que o texto conduz a uma ruptura com o modelo de ensino utilizado anteriormente em suas obras: o autor afirma que “agora não será mais necessário que você [aluno] decore enfadonhos teoremas e mais teoremas, contra o que alguns colegas mais adiantados costumavam preveni-lo” e conclui “seja, pois, muito feliz nesta viagem ao maravilhoso país da Geometria.” (SANGIORGI, 1970, prefácio). Nesse sentido, para Silva (2008, p.70), Sangiorgi foi “o primeiro autor a incorporar em sua obra didáticas propostas pelo MMM”.

A primeira parte do livro engloba os dois primeiros capítulos, que são dedicados aos estudos dos números reais e dos polinômios, enquanto a Geometria foi proposta nos dois últimos capítulos, ocupando uma parte significativa da obra. Silva (2008) aponta que o ensino das Transformações geométricas planas, propostas do apêndice do livro, é, de certo modo, inédito ao comparar com as edições anteriores.

Os conteúdos específicos de Geometria versados no livro eram:

Capítulo 3 - Estudo das figuras Geométricas

- Objetivos da Geometria, figuras geométricas planas, curvas fechadas simples, um pouco de topologia;
- Relações e operações com conjuntos de pontos no plano, estrutura de ordem, relação ... estar entre semi-reta, segmento de reta, semi-plano, medidas de segmentos e segmentos congruentes;
- Conceito de ângulo, medidas de ângulos, ângulos congruentes, ângulos complementares, ângulos suplementares;
- Práticas demonstrativas, ângulos formados por duas retas coplanares e uma transversal.

Capítulo 4 – Estudo dos polígonos e da circunferência

- Conceito de polígono, diagonais, estudo dos triângulos, congruência de triângulos;
- Construção lógica da geometria, da necessidade de provas, postulados e teoremas da geometria em estudo, primeiro os teoremas, forma “se-então”, como efetuar uma demonstração logicamente, teorema recíproco de outro teorema, método indireto na demonstração de um teorema, alguns teoremas fundamentais: sobre triângulos, sobre retas paralelas, sobre ângulos, sobre polígonos convexos;
- Quadriláteros: paralelogramos, teoremas fundamentais, trapézio, teoremas fundamentais;
- Circunferência, teoremas fundamentais, círculo ou disco fechado, propriedades das cordas, posições relativas de duas circunferências, posições relativas da reta e circunferência, arcos de circunferência, medidas, propriedades fundamentais entre arcos e cordas, ângulos relacionados com arcos, medidas, polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência.

Apêndice - Transformações geométricas planas

- Grupo das translações, grupo das rotações, simetrias. (SANGIORGI, 1970).

O livro *Matemática Curso Moderno* evidencia a importância da Geometria no terceiro ano ginasial, tanto que os conteúdos deste tópico de ensino ocupam 204 páginas do livro, o que representa aproximadamente 65% da obra, conforme também foi verificado por Silva (2008), ao analisar as edições anteriores do mesmo livro por nós analisado.

Em relação ao Guia destinado para uso dos professores, foi publicado um manual para cada volume da coleção, de forma dirigida e organizada. Segundo Valente (2008a), “Sangiorgi expressou a sua didática da matemática moderna, buscando guiar os professores no trabalho pedagógico com os novos conteúdos. Os Guias apresentavam: “1 – Observações de ordem pedagógica; 2 – Referências bibliográficas; 3 – Respostas às questões propostas no livro” (p. 31). Ainda segundo esse autor, essa coleção pode ser considerada inovadora para sua época, já que “retomou um elemento que há muito [tempo] havia deixado de fazer parte das obras didáticas, para o ensino de matemática: O Livro do Mestre.” (p.30).

- O estudo dos triângulos

O conteúdo de triângulos é apresentado pelo autor na primeira parte do quarto capítulo, tendo como referência os conhecimentos prévios dos alunos ao afirmar que “você já sabe um triângulo é um polígono de três lados.” (SANGIORGI, 1970, p.205). Logo em seguida, o autor define o conceito de triângulos, utilizando a linguagem de conjuntos, característica marcante do MMM.

Em relação aos triângulos, o autor propõe o estudo dos seguintes tópicos, distribuídos em vinte e seis páginas, a saber:

- Conceito de triângulos;
- Elementos principais (ângulos internos, ângulos externos, altura, mediana e bissetriz);
- Classificação quanto ao número de lados e quanto aos ângulos internos;
- Soma das medidas dos ângulos internos;
- Ângulos externos;
- Condição de existência de um triângulo;
- Congruência de triângulos.

- Termo Cevianas

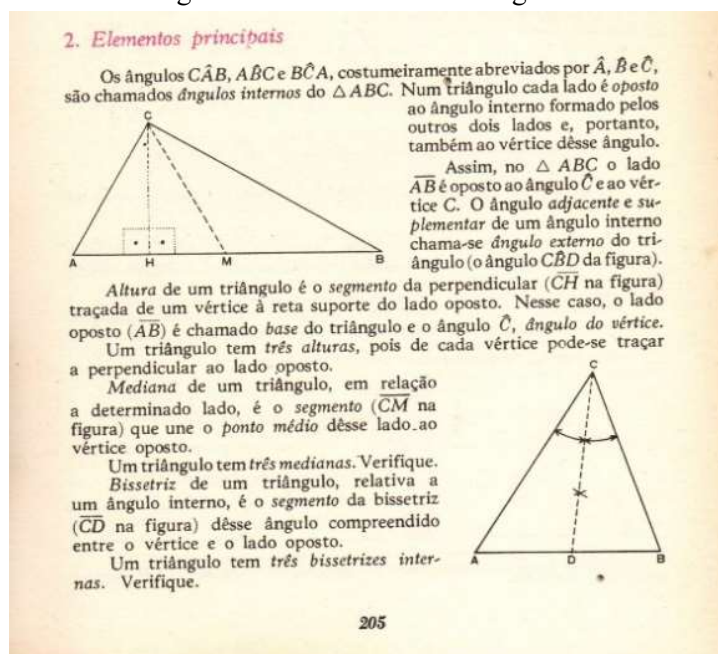
Não há menção do termo “cevianas” no decorrer do texto, mas encontramos “altura”, “mediana” e “bissetriz”.

- Introdução ao conteúdo de Cevianas do Triângulo

Como não foi encontrado o termo “cevianas”, apresentamos a forma como o autor pontuou os “elementos principais” dos triângulos, dentre eles, a altura, a mediana e a bissetriz. Tudo isso está restrito a uma página (Figura 5). O conteúdo é apresentado de forma concisa, sem muitos detalhes. O autor utiliza dois triângulos para evidenciar seus elementos principais. Percebe-se uma preocupação para que o aluno consiga relacionar o conceito com a referida imagem. No final da exposição de uma gama de definições, o aluno é convidado a verificar a

proposição apresentada, fazendo-o confrontar a definição com o modelo que seria construído por ele. Contudo, não existem direcionamentos de modo mais efetivo para que esse processo ocorra.

Figura 5 – Elementos do Triângulo



Fonte: Sangiorgi (1970, p. 205)

- Definições

No Quadro 1, seguem as definições que o autor expõe sobre os elementos principais dos triângulos. Ressaltamos que a definição proposta por Sangiorgi (1970) para a altura de um triângulo está incompleta, pelo fato de não incluir a noção de prolongamento dos lados, como para o caso do triângulo obtusângulo.

Quadro 1 – Definições Sangiorgi (1970)

Elementos do triângulo	
Altura	“[...] é o segmento da perpendicular traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto.”
Mediana	“[...] é o segmento que une o ponto médio desse lado ao vértice oposto.”
Bissetriz	“[...] é o segmento da bissetriz desse ângulo compreendido entre o vértice e o lado oposto.”

Fonte: Sangiorgi (1970, p.205)

- Exercícios

O livro contém 21 exercícios referentes ao estudo de triângulos, organizados em três boxes diferentes: exploratórios, de fixação e testes de atenção. No Quadro 2, podemos compreender melhor como o autor distribuiu o número de exercícios de acordo com os conteúdos nos

diferentes *boxes*. Vale ressaltar que um exercício pode ser incluído em duas categorias diferentes, dependendo da natureza de seu conteúdo.

Quadro 2 – Quantitativo de exercícios

Conteúdos	Tipos de Exercícios		
	Exploratórios	Fixação	Testes de Atenção
Altura, mediana e bissetriz	3	-	-
Classificação	4	1	-
Condição de Existência	1	2	-
Ângulos internos e Ângulos externos	3	6	-
Congruência	1	-	5
Total	12	10	5

Fonte: Dados da pesquisa

No livro, aparece com maior ênfase o conteúdo de ângulos internos e externos de um triângulo em detrimento dos demais, por exemplo, no exercício nº 7, p. 231, são propostos dez “problemas” que têm como objetivo referenciar a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo, que podem ser resolvidos por meio de algoritmos algébricos (Figura 6).

Figura 6 – Exercício nº 7, ângulos internos de um triângulo

7. Resolva os seguintes problemas:

- 1.º) Os ângulos de um triângulo medem, respectivamente, $3x$, $4x$ e $5x$. Determine as medidas desses ângulos.
(Sugestão: $3x + 4x + 5x = 180^\circ \iff 12x = 180^\circ \iff x = 15^\circ$, logo: ...)
- 2.º) Os três ângulos de um triângulo medem, respectivamente: $x + 36^\circ$, $2x - 15^\circ$ e $3x - 40^\circ$. Quanto mede cada um?
- 3.º) Sabendo que num triângulo isósceles a medida de cada um dos ângulos da base é o dobro da medida do ângulo do vértice, determine as medidas dos ângulos desse triângulo.
(Sugestão: se x for a medida do ângulo do vértice, a medida de cada ângulo da base é $2x$ e, portanto, a soma é ...)
- 4.º) Dois ângulos de um triângulo são tais que a soma de suas medidas é 130° e a sua diferença 10° . Quanto mede cada ângulo?
(Sugestão: basta resolver o sistema: $x + y = 130^\circ \wedge x - y = 10^\circ$)
- 5.º) Num triângulo ABC a medida do $\hat{A}$ é o triplo da do $\hat{B}$ e a do $\hat{B}$ é o dobro da do $\hat{C}$. Calcule essas medidas.
- 6.º) Num triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede $\frac{1}{7}$ da medida da soma dos outros dois. Quanto medem os ângulos agudos?
- 7.º) Num triângulo, dois ângulos externos medem 110° e 120° , respectivamente. Quanto medem os ângulos internos desse triângulo?

Fonte: Sangiorgi (1970, p.213)

Como já evidenciamos no Quadro 2, os três exercícios relacionados à altura, mediana e bissetriz foram explanados somente no *box* “exercícios exploratórios”.

Os exercícios exploratórios serviriam como um suporte para explanação e compreensão de alguns conceitos e relações, contudo, relativamente à altura, mediana e bissetriz não há nenhuma informação no decorrer do texto, a não ser as definições.

Para exemplificar a ênfase proposta na obra, é possível observar que o autor explora alguns resultados importantes relacionados aos triângulos, tais como existência e soma das medidas dos ângulos internos. O autor faz o convite: “você, juntamente com todos os colegas de classe, está convidado a explorar a seguinte questão: *Quanto vale, em graus, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer?*” (SANGIORGI, 1970, p.209, grifo nosso). Na mesma página, o autor exibe a figura de um triângulo ABC e, matematicamente, questiona: $m(A) + m(B) + m(C) = ?$. Neste momento, o aluno levantaria hipóteses e buscaria, em seu repertório, possíveis respostas para esta indagação.

Em seguida, o autor solicita ao aluno que, fazendo o uso de um transferidor, encontre os valores aproximados dos ângulos internos e, conseqüentemente, perceba que a soma aproximará de 180° . Para que o aluno conclua que realmente a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , é proposto que seja repetido o mesmo processo em diferentes triângulos. E somente após os alunos realizarem esta “mostração” é que será apresentado formalmente o resultado solicitado para o questionamento.

Os exercícios de fixação podem ser resolvidos aplicando-se diretamente os conceitos abordados no capítulo ou através de manipulação algébrica e geralmente iniciam-se com os comandos “resolva”, “calcule”, “enuncie” etc. Já o box “*Teste de Atenção*” tem como objetivo revisar os tópicos estudados e traz exercícios que solicitam ao aluno assinalar, completar e justificar. Grande parte dos exercícios traduz uma forma mecânica de se trabalhar com o conteúdo.

- Abordagem histórica do conteúdo de cevianas do triângulo

No conteúdo de triângulos, não há nenhuma inserção histórica que possa agregar conhecimento aos tópicos estudados.

- Ilustrações

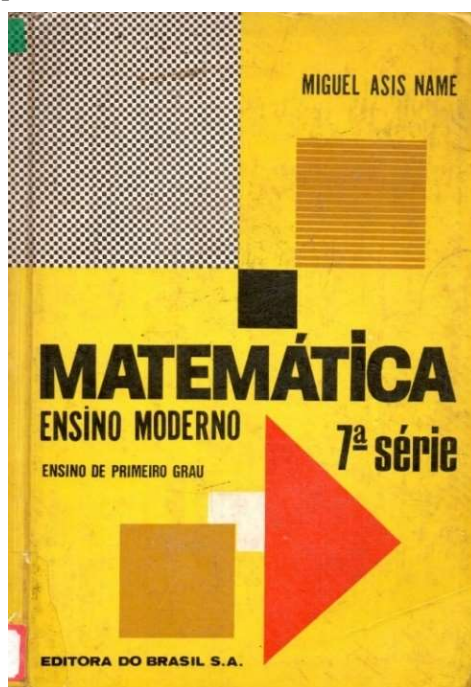
Os triângulos dispostos entre os textos, ao que tudo indica, teriam a função de facilitar a compreensão dos conceitos abordados no capítulo. No entanto, não existem imagens que representem o encontro das cevianas anunciando o incentro, o ortocentro e o baricentro.

- Indicação de leitura complementar

No livro analisado, não foi encontrada nenhuma indicação de leitura complementar.

3.3 Livro II – Matemática Ensino Moderno (197?)

Figura 7 – Capa do Livro Matemática Ensino Moderno – 7ª série



Fonte: Name (197?)

O livro *Matemática Ensino Moderno – 7ª série*¹⁷, de Miguel Asis Name, provavelmente teve sua 2ª edição publicada no início da década de 1970, pela Editora do Brasil, após a promulgação da Lei nº 5692/71. Esta lei, entre as inúmeras mudanças no ensino da época, alterou a nomenclatura das séries, unificando o ensino primário e o ginásial em um único segmento, com duração de oito anos, denominado Ensino de Primeiro Grau. Assim, a 3ª série ginásial passou a ser denominada 7ª série do primeiro grau.

Miguel Name é autor de outras obras, entre elas: *Matemática Atualizada*, *Tempo de Matemática* e *Matemática Funcional*, que tiveram várias edições. Não encontramos dados biográficos do autor¹⁸.

O livro em questão foi editado em capa dura, colorida, com figuras geométricas nas cores branca, amarela, vermelha e preta; as palavras, em tom negro, com dimensões de 16 cm por 24 cm, aproximadamente. No início de cada capítulo, existe a inserção de figuras ilustrativas em tons de laranja e preto, fazendo referência ao conteúdo que será abordado.

¹⁷ O livro pertence ao acervo da Biblioteca Pública Municipal Prof.^a Custódia Feres Abi-Saber, localizada em Manhuaçu – MG. Exemplar nº 2.222.

¹⁸ Até a conclusão deste trabalho, ainda não recebemos a resposta da Editora do Brasil, para a qual solicitamos informações acerca do autor.

O texto é composto por nove capítulos: “1 – Números Reais; 2 – Cálculo Algébrico; 3 – Frações Algébricas; 4 - Equações e sistemas de equações; 5 – Elementos, semi-retas e segmentos; 6 – Ângulos; 7 – Polígonos; 8 – Circunferência e Círculo e 9 – Algumas demonstrações”, totalizando 192 páginas numeradas. No entanto, esta divisão não é contemplada no índice principal (Figura 8) da obra. Neste sentido, reportamo-nos ao subíndice presente em cada capítulo.

Figura 8 – Índice do livro Matemática Ensino Moderno

ÍNDICE	
Números Racionais	11
Números Irracionais	12
Números Reais	14
Monômios	25
Polinômios	27
Valor Numérico de uma Expressão Algébrica	29
Termos semelhantes	32
Operações com Polinômios	35
Produtos Notáveis	44
Fatoração	54
Frações Algébricas	69
Operações com Frações Algébricas	71
Equações Fracionárias	79
Resolução de equações fracionárias em R.	80
Equações Literais do 1.º grau	84
Pares Ordenados	86
Resolução do Sistema do 1.º grau a duas variáveis	89
Problemas do 1.º grau a duas variáveis	96
Ponto — Reta — Plano	101
Figuras Geométricas	102
Ângulos	119
Polígonos	139
Triângulos	146
Congruência de Triângulos	153
Quadriláteros	160
Circunferência e Círculo	171
Algumas demonstrações	185

Fonte: Name (197?)

Constata-se que há uma divisão entre os conteúdos aritméticos, algébricos e geométricos, de maneira que a Geometria foi apresentada na segunda parte do livro, após o aluno estudar todos os tópicos de aritmética e álgebra.

Os conteúdos de Geometria abordados na obra são:

Capítulo V – Elementos, semi-retas e segmentos

1 – Ponto, reta e plano

2 – Figuras Geométricas

- 3 – Posições relativas de retas no plano
- 4 – Semi-retas
- 5 – Segmentos
- 6 – Segmentos Colineares e segmentos consecutivos
- 7 – Segmentos congruentes
- 8 – Segmentos Convexos
- 9 – Semi-planos

Capítulo VI – Ângulos

- 1 – Conceito
- 2 – Interior e exterior de um ângulo
- 3 – Ângulos consecutivos e ângulos adjacentes
- 4 – Medidas de ângulos
- 5 – Ângulos congruentes
- 6 – Bissetriz de um ângulo
- 7 – Ângulo reto e retas perpendiculares
- 8 – Ângulo agudo e ângulo obtuso
- 9 – Ângulos complementares e ângulos suplementares
- 10 – Ângulos opostos pelo vértice
- 11 – Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal

Capítulo VII – Polígonos

- 1 – Poligonais
- 2 – Polígonos
- 3 – Elementos e Classificação dos Polígonos convexos
- 4 – Número de diagonais de um polígono
- 5 – Conceito de triângulo
- 6 – Classificação de triângulos
- 7 – Alturas, medianas e Bissetrizes
- 8 – Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo
- 9 – Congruência
- 10 – Congruência de Triângulos
- 11 – Caso de congruência de triângulos
- 12 – Conceito de quadriláteros
- 13 – Paralelogramos
- 14 – Trapézios
- 15 – Exercícios de Revisão

Capítulo VIII – Circunferência e Círculo

- 1 – Introdução
- 2 – Definição
- 3 – Cordas e diâmetros de uma circunferência
- 4 – Interior e exterior de uma circunferência
- 5 – Círculo
- 6 – Posições relativas entre uma circunferência e uma reta
- 7 – Posições relativas entre duas circunferências
- 8 – Ângulo central
- 9 – Arco
- 10 – Medida de um arco
- 11 – Ângulos inscritos
- 12 – Exercícios de Revisão

Capítulo IX – Algumas demonstrações

- 1 – Postulados e teoremas
 - 2 – Demonstração de alguns teoremas
 - 3 – Exercícios propostos
- (NAME, 197?, p.101-185)

- O estudo dos triângulos

O autor apresenta os tópicos relacionados aos triângulos em, aproximadamente, treze páginas (Quadro 3).

Quadro 3 – Distribuição dos conceitos por nº de páginas

Conceito	Nº de páginas
Conceito de triângulos	$\frac{1}{2}$
Classificação de triângulos	1
Alturas, medianas e bissetrizes	1
Soma dos ângulos internos de um triângulo	$\frac{1}{2}$
Congruência	$\frac{1}{2}$
Congruência de triângulos	6
Exercícios	4

Fonte: Dados da pesquisa

Pelo Quadro 3, existe a hipótese de que o autor tenha buscado dar maior ênfase ao conceito de congruência de triângulos, já que destinou um número maior de páginas para este tópico. Nota-se que a maioria dos conceitos possui uma abordagem reduzida. A título de exemplo, quando o autor expôs a definição de altura, ele afirmou que “cada triângulo possui três alturas” (NAME, 197?, p.148), contudo, não existem outros elementos ou figuras para que o leitor possa visualizá-las em diferentes tipos de triângulos e posições.

- Termo Cevianas

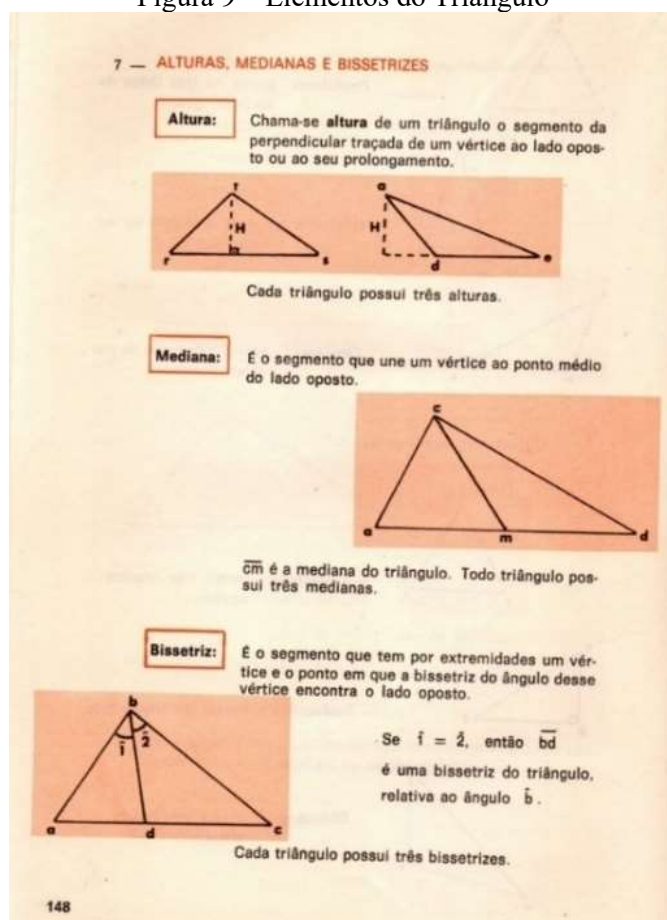
Não foi detectada a presença do termo “cevianas” no texto, porém encontramos os termos “altura”, “mediana” e “bissetriz”.

- Introdução ao conteúdo de Cevianas do Triângulo

Partindo da constatação da inexistência do termo “cevianas” no livro analisado, nos atemos a compreender como o autor introduziu os conceitos de altura, mediana e bissetriz.

O autor inicia o assunto no sétimo tópico, denominado *Alturas, medianas e bissetrizes*, presente no capítulo VII de forma objetiva. Seu ponto de partida é a definição destes elementos, não lançando mão de muitos detalhes ou imagens. Diferentemente de Sangiorgi (1970), Name traz a definição de altura de forma mais completa, inclusive apresentando uma imagem. Curiosamente, o autor nomeia o ponto dos vértices com letra minúscula, ao contrário do convencional, encontrado nos demais livros analisados (Figura 9).

Figura 9 – Elementos do Triângulo



Fonte: Name (197?, p.148)

- Definições

No Quadro 4, selecionamos as definições presentes no corpo do texto que dizem respeito ao tema em estudo:

Quadro 4 – Definições Name (197?)

Elementos do triângulo	
Altura	“[...] é o segmento da perpendicular traçada de um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.”
Mediana	“[...] é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.”
Bissetriz	“[...] é o segmento que tem por extremidades um vértice e o ponto em que a bissetriz do ângulo desse vértice encontra o lado oposto.”

Fonte: Name (197?, p.148)

- Exercícios

Explorando os exercícios propostos pelo autor, foi constatada a presença de doze questões, distribuídas em tópicos. Observa-se que os exercícios tendem a solicitar do aluno a reprodução da teoria apresentada.

O autor intercala um tópico conceitual de Geometria com um pequeno grupo de exercícios propostos. Não existem atividades referentes às alturas, medianas e bissetrizes de um triângulo. A maior ênfase é dada aos conceitos de soma dos ângulos internos e de congruência de triângulos (Quadro 5).

Quadro 5 – Quantitativo de exercícios

Conceito	Nº de exercícios
Conceito de triângulos	1
Classificação de triângulos	2
Alturas, medianas e bissetrizes	0
Soma dos ângulos internos de um triângulo	4
Congruência	1
Congruência de triângulos	4

Fonte: Dados da

pesquisa

Todos os exercícios relacionados ao assunto de congruência dos triângulos possuem o comando *assinale*. Estes são inseridos logo após o tópico, cujo objetivo é encontrar, entre alguns triângulos, os pares que satisfazem o caso de congruência apresentado.

Averiguamos que não existe um equilíbrio na proposição de exercícios sobre os conteúdos do capítulo. Inclusive, não se exploram os conceitos de medianas, alturas e bissetrizes. Por exemplo, o assunto “ângulos” possui uma apresentação mais detalhada, incluindo mais figuras ilustrativas e um número muito maior de atividades a serem executadas pelo aluno, do que o tópico objeto de nossa análise.

- Abordagem histórica do conteúdo de cevianas do triângulo

Não foi encontrado nenhum tópico de História da Matemática.

- Ilustrações

Em relação à temática do nosso estudo, não foi detectada nenhuma ilustração, além de alguns triângulos cuja função é dar suporte à compreensão da teoria. Entretanto, na abertura do capítulo que aborda altura, medianas e bissetrizes há uma imagem que tem por objetivo destacar o tópico estudado – polígonos.

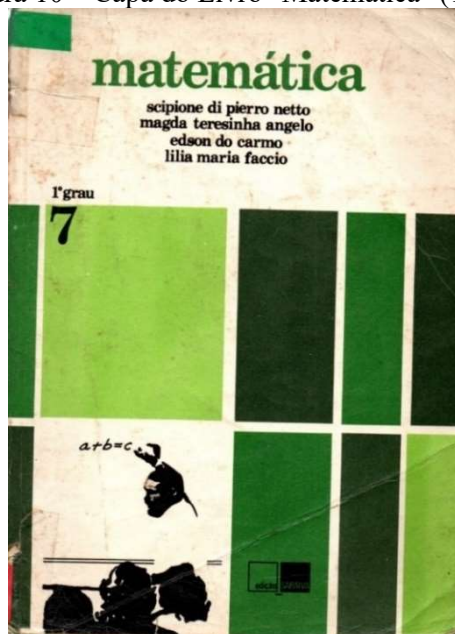
- Indicação de leitura complementar

Durante nossa verificação, não foi constatada a existência de indicação de leitura complementar ou de um referencial bibliográfico.

3.4 Livro III – Matemática (1981)

O livro *Matemática – 7ª série do 1º grau* teve sua 2ª edição publicada em 1981, pela Editora Saraiva, situada em São Paulo. Foi escrito por quatro autores: Scipione di Pierro Netto, Magda Teresinha Angelo, Edson do Carmo e Lilia Maria Faccio, com dimensões de 15 cm por 21 cm¹⁹ (Figura 10).

Figura 10 – Capa do Livro "Matemática" (1981)



Fonte: Pierro Netto *et al.* (1981)

A capa é composta por retângulos em três tons de verde, sendo que em um deles há uma imagem em preto e branco simbolizando um professor e alguns alunos em sala de aula. O título da obra “*matemática*” foi escrito em verde, com letras minúsculas. No interior da obra, o uso da cor verde se repete nos títulos, subtítulos e nas figuras, enquanto no restante do texto a cor predominante é a preta.

O prefácio foi escrito apenas por Pierro Netto, explicitando aos alunos os objetivos da elaboração do material que será utilizado no decorrer de seus estudos na 7ª série. O primeiro deles é ajudar o aluno a aprender Matemática, e o segundo, que na visão do autor, é mais importante, seria auxiliar o professor na árdua tarefa de ensinar o aluno a “aprender a aprender”. E ele reforça: “isso é mais importante em Matemática, valerá mais do que saber alguns truques ou memorizar algumas regras.” (PIERRO NETTO, 1981, prefácio).

¹⁹ O livro pertence ao acervo da Biblioteca Pública Municipal Prof.ª Custódia Feres Abi-Saber, localizada em Manhuaçu – MG.

No entanto, ele também adverte:

[...] será sempre necessário um trabalho sério, que fixe os conceitos e que lhe proporcione habilidades suficientes para enfrentar as questões que a matemática e as disciplinas correlatas lhe apresentarão; por sua vez as séries de exercícios serão variadas e muitas numerosas. Não pensem que aqueles que sabem Matemática passaram por outro caminho. (PIERRO NETTO, 1981, prefácio).

E para guiá-los neste percurso de aprendizagem, a obra foi organizada em quatro momentos: *exposição da matéria, atividades em classe, atividades para casa e atividades complementares*, unindo a experiência do autor mais antigo (Scipione di Pierro Netto) com a vivência profissional dos autores mais novos (PIERRO NETTO, 1981).

A obra é composta por seis unidades, subdivididas em seções:

- Conjunto dos números reais;
- Polinômios;
- Frações algébricas, equações fracionárias e equações literais;
- A reta e o plano cartesiano;
- Sistemas do 1º grau com duas variáveis;
- Geometria Dedutiva.

Os conteúdos foram dispostos em três blocos sequenciados: primeiramente, a aritmética; em sequência, a álgebra; e, por último, o estudo da geometria. Esta forma de apresentação também foi observada nas obras analisadas anteriormente.

O Quadro 6 dispõe a distribuição dos conteúdos:

Quadro 6 – Distribuição dos conteúdos

	Nº de unidades	Nº de páginas
Aritmética	1	17
Álgebra	4	136
Geometria	1	135

Fonte: Dados da pesquisa

A Geometria foi apresentada em um único bloco, subdividida em seis temas principais: “Triângulos – Congruência; Perpendicularismo e Simetria; Paralelismo entre retas; Ângulos dos polígonos; Quadriláteros; Circunferência e Círculo e Construções Geométricas”, ocupando aproximadamente metade da obra (Quadro 6).

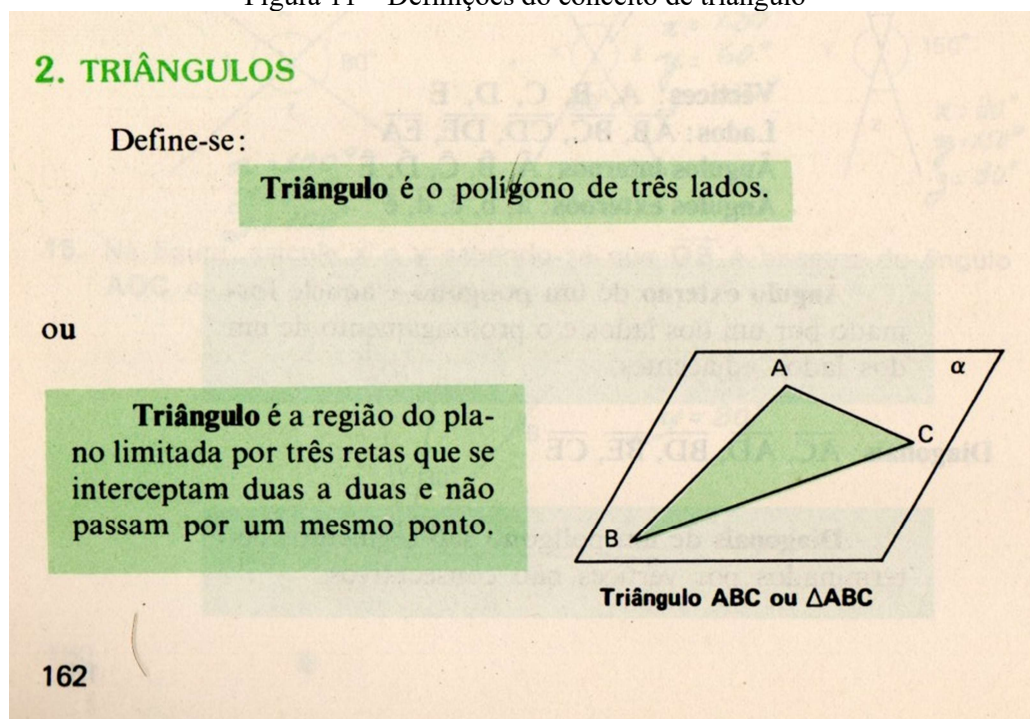
Na introdução do sexto capítulo, *Geometria Dedutiva*, os autores revelam que a tônica dada nas séries anteriores foi direcionada ao tratamento mais informal, ou seja, o aluno teve contato com os conceitos de forma intuitiva (Geometria Intuitiva), e tinha como finalidade “familiarizá-lo com os entes elementares: **ponto, reta, plano**, os subconjuntos da reta, ou seja, as **semi-retas** e os **segmentos de reta**, como também alguns subconjuntos do plano, como os **ângulos** e os **polígonos**.” (PIERRO NETTO *et al.*, 1981, p.156, grifos dos autores).

No livro Matemática – 7ª série, o ponto de partida é a apresentação de alguns princípios fundamentais, denominados pelos autores de “postulados ou axiomas”, e os autores justificam que, mesmo não havendo a pretensão de uma introdução formal da Geometria, apresentaram-na “à semelhança do que fez Euclides (300 anos a.C.) quando Ptolomeu lhe confiou a direção do **ensino matemático** na Universidade de Alexandria.” (PIERRO NETTO *et al.*, 1981, p.156, grifos dos autores).

- O estudo dos triângulos

Os triângulos estão em destaque nesta série, sendo este um suporte ou parte integrante dos conteúdos que se seguem no decorrer do capítulo. Os autores propõem duas definições para o triângulo: uma que o evidencia como uma figura composta por três lados e outra como uma região no plano. Inferimos que a figura do triângulo foi disposta junto às definições, com o intuito de ilustrar e exemplificar um modelo a ser revisitado mentalmente (Figura 11).

Figura 11 – Definições do conceito de triângulo



Fonte: Pierro Netto *et al.* (1981, p.162)

No Quadro 7, sintetizamos como foi a distribuição dos conceitos relacionados aos triângulos no interior do sexto capítulo:

Quadro 7 – Distribuição dos conceitos por páginas

Conteúdos	Número de páginas
Classificação de Triângulos	2
Elementos do triângulo	1
Soma dos ângulos internos de um triângulo	3
Ângulo externo de um triângulo	1
Congruência	10
Demonstração	5
Desigualdade entre lados e ângulos	3
Construção de Triângulos	3

Fonte: Dados da pesquisa

- Termo Cevianas

Foi constatada a inexistência do termo “cevianas” no livro analisado. Os autores as nomearam somente de “altura”, “mediana” e “bissetriz”.

- Definições

No Quadro 8, expomos as definições que os autores apresentam sobre os elementos principais dos triângulos:

Quadro 8 – Definições Pierro Netto (1981)

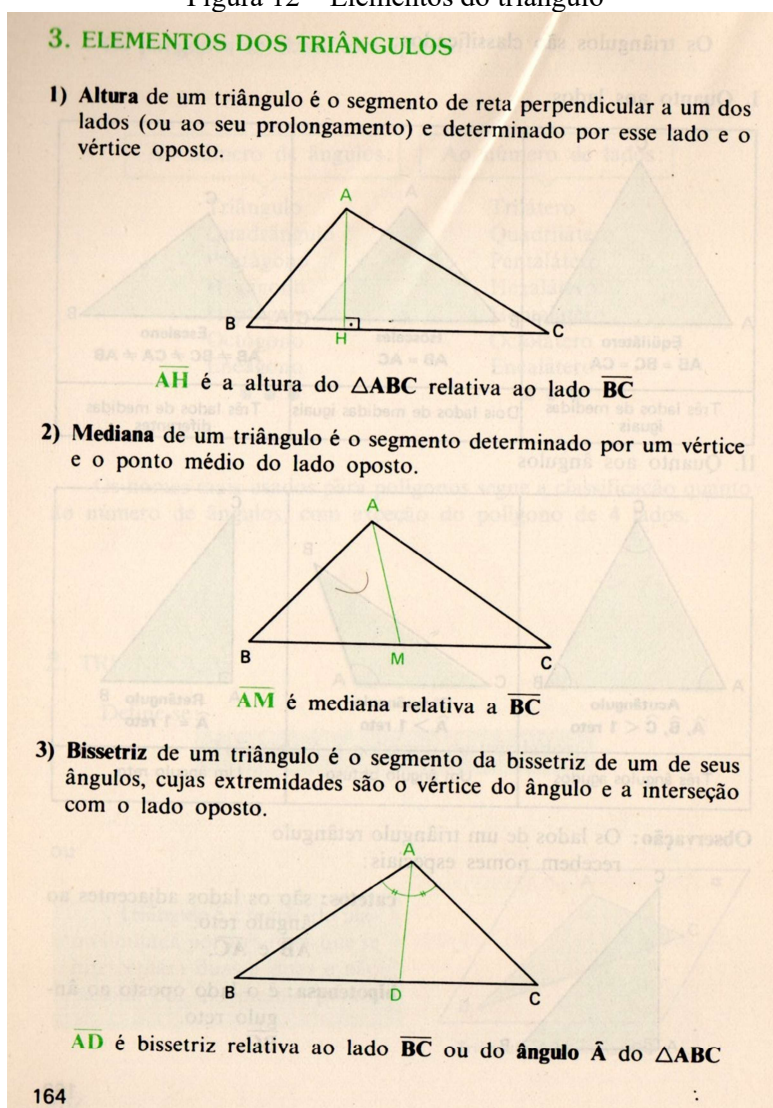
Elementos do triângulo	
Altura	“[...] é o segmento de reta perpendicular a um dos lados (ou ao seu prolongamento) e determinado por esse lado e o vértice oposto.”
Mediana	“[...] é o segmento determinado por um vértice e o ponto médio do lado oposto.”
Bissetriz	“[...] é o segmento da bissetriz de um de seus ângulos, cujas extremidades são o vértice do ângulo e a interseção com o lado oposto.”

Fonte: Pierro Netto *et al.* (1981, p.164).

- Introdução ao conteúdo de Cevianas do Triângulo

Os autores, em um tópico denominado *elementos dos triângulos*, apresentam as cevianas notáveis, embora não utilizem essa terminologia. No caso da altura (Figura 12), em um triângulo $\triangle ABC$ é traçado um segmento perpendicular unindo o vértice A ao ponto H, na base do triângulo, evidenciando que AH é a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado BC, sem, no entanto, demonstrar a existência de outras alturas relativas aos demais lados. Algo semelhante ocorre com a mediana e a bissetriz, sempre tendo como marco inicial o vértice A do triângulo e um ponto de sua base.

Figura 12 – Elementos do triângulo



Fonte: Pierro Netto *et al.* (1981, p.164)

Verificamos, também, que mesmo os autores referenciando que a altura de um triângulo pode ser relativa a um dos lados ou ao seu prolongamento, não há uma figura que ilustre tais situações. Os livros analisados anteriormente possuem uma abordagem bem parecida, tendo a utilizar até o mesmo número de páginas.

- Exercícios

Os autores distribuíram os exercícios em três grupos: *Atividades em Classe*, *Para Casa* e *Complementares*. O primeiro visa o esclarecimento de dúvidas e a iniciação do aluno nas técnicas de cálculo, enquanto as *Atividades para Casa* assumiriam a função de fixar os conceitos aprendidos em sala de aula e, por último, as *Atividades Complementares*, com a finalidade

de enriquecer o conhecimento adquirido, sendo compostas por “questões de concursos, de exames supletivos ou mesmo de vestibulares.” (PIERRO NETTO, 1981, prefácio).

Contabilizamos setenta e cinco exercícios referentes ao estudo dos triângulos, dos quais dezessete estão inseridos no grupo de *Atividades em Classe*, vinte e seis são pertencentes às *Atividades Para Casa* e quinze como *Atividades Complementares*. Os dezessete restantes pertencem ao tópico “*Construções geométricas*” e são denominados pelos autores como atividades em classe e atividades para casa, concomitantemente.

No Quadro 9, buscamos relacionar os exercícios de acordo com o conteúdo em que se insere:

Quadro 9 – Quantitativo de exercícios

Conteúdos	Quantidade de exercícios
Classificação de Triângulos	0
Elementos do triângulo	3
Soma dos ângulos internos de um triângulo Ângulo externo de um triângulo	32
Congruência	3
Demonstração	15
Desigualdade entre lados e ângulos	6
Construção de Triângulos	16

Fonte: Dados da pesquisa

A maioria dos exercícios propostos é tradicional, apesar disso, quando analisados no conjunto da obra, percebemos que são diversificados e com grau de dificuldade crescente. Pode-se dizer que, de certo modo, alguns são até inovadores.

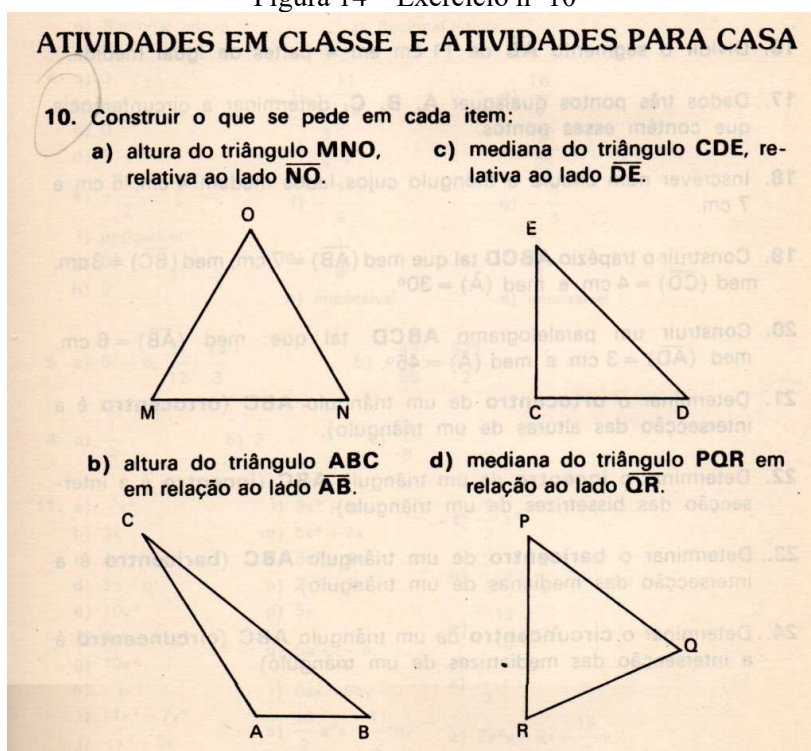
Em relação às alturas, medianas e bissetrizes do triângulo, constatamos três exercícios de cunho reprodutivo, nos quais o aluno deveria julgar as afirmações como verdadeiras ou falsas. Em outro capítulo, é solicitado ao aluno fazer a construção de triângulos e de seus elementos (Figuras 13 e 14), utilizando régua, compasso e transferidor.

Figura 13 – Exercício nº 13

13. Construir a altura relativa ao maior lado do triângulo cujos lados medem 9 cm, 8 cm e 6 cm.

Fonte: Pierro Netto *et al.* (1981, p.288)

Figura 14 – Exercício nº 10



Fonte: Pierro Netto *et al.* (1981, p.287)

Durante a exposição dos conceitos, não há alusão aos pontos notáveis do triângulo, no entanto, no último capítulo, após os autores explorarem os tópicos de construção de triângulos, constam quatro exercícios:

21. Determinar o **ortocentro** de um triângulo ABC (**ortocentro** é a intersecção das alturas de um triângulo).
22. Determinar o **incentro** de um triângulo ABC (**incentro** é a intersecção das bissetrizes de um triângulo).
23. Determinar o **baricentro** de um triângulo ABC (**baricentro** é a intersecção das medianas de um triângulo).
24. Determinar o **circuncentro** de um triângulo ABC (**circuncentro** é a intersecção das mediatrizes de um triângulo). (PIERRO NETTO *et al.*, 1981, p.288, grifos dos autores).

Averiguamos que atividades como as referenciadas acima têm a função de complementar, aplicar os conhecimentos adquiridos e introduzir novos conceitos geométricos. Nesta perspectiva, concordamos com o proposto por Zuin (2001), visto que, na concepção desta autora, o estudo das construções geométricas “propiciam uma maior compreensão e embasamento teórico da Geometria Plana”, dado que “a compreensão de muitos conceitos geométricos se materializa através de construções geométricas.” (ZUIN, 2001, p.15-16).

Nota-se que existe certo “favoritismo” pelo conteúdo de ângulos internos ou externos de um triângulo, já que aproximadamente um terço dos exercícios refere-se a estes tópicos,

como também havia sido constatado nos livros anteriormente analisados. Dois pontos diferenciam esta obra das demais: a quantidade de exercícios e a existência de demonstrações, tanto na apresentação do conteúdo quanto em alguns exercícios.

No final do livro, encontramos respostas para algumas das atividades presentes na obra.

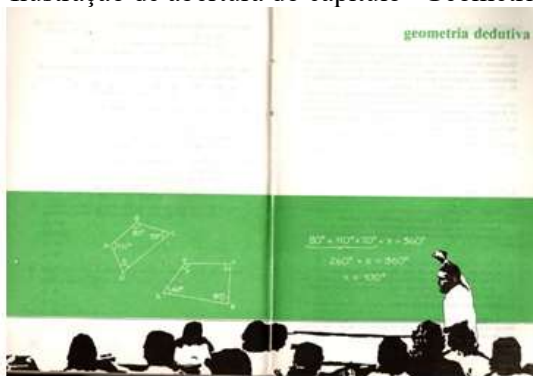
- Abordagem histórica do conteúdo de cevianas do triângulo

Não há elementos históricos que pudessem agregar conhecimento ao conteúdo de triângulos ou cevianas.

- Ilustrações

Em relação à temática do nosso estudo, não foi encontrado nenhum tipo de ilustração, além de inúmeros triângulos com destaque em verde e/ou cinza, cujo compromisso seria oferecer estrutura à compreensão da teoria. Entretanto, na abertura do capítulo “*Geometria Dedutiva*” (Figura 15), que aborda altura, medianas e bissetrizes, há uma imagem que tem por objetivo destacar um dos tópicos estudados – os quadriláteros.

Figura 15 – Ilustração de abertura do capítulo “Geometria Dedutiva”



Fonte: Pierro Netto et al. (1981, p.154-155)

- Indicação de leitura complementar

Não foi detectada a presença de sugestão de leitura complementar ou indicação de um referencial bibliográfico pelos autores.

3.5 Livro IV – Matemática 7ª série – Sardella e Matta (1985)

Figura 16 – Capa do Livro "Matemática" (1985)



Fonte: Sardella e Matta (1985)

O livro *Matemática – 7ª série*²⁰, de Antônio Sardella e Edison da Matta, teve sua 5ª edição (não consumível) publicada em 1985, pela Editora Ática, localizada em São Paulo. A capa da obra é bastante colorida, com dimensões de 20 cm por 27 cm, composta por um fundo na cor prateada e um quadrado subdividido em dois retângulos de mesmo tamanho (azul e verde) e dois quadrados com dimensões distintas (amarelo e vermelho). Também consta na capa uma etiqueta autocolante, indicando que esta obra possui o nº 7505 na *Fundação de Amparo ao Estudante – FAE* e consta no Manual para indicação do livro didático do PNLD de 1987, para uso no triênio 1987-1989 (Figura 16).

O manual do professor foi inserido no início da obra, contendo uma carta de abertura endereçada ao professor, com objetivos e estrutura do livro, sugestão de plano de curso e provas avaliativas, totalizando trinta e uma páginas, numeradas com algarismos romanos.

Os autores esclarecem aos professores que, ao elaborarem este texto didático, levaram em consideração dois critérios fundamentais: o primeiro, de “*não trazer complicações aos alunos*”, permitindo-os escrever um texto simples e de fácil entendimento; o segundo, ser “*um*

²⁰ Este livro foi doado pela E. E. Maria de Lucca Pinto Coelho (antiga Escola Normal Oficial de Manhauçu) para a Biblioteca Pública Municipal Profª Custódia Feres Abi-Saber, conforme registro nº 5683 de 16/11/2004 presente no interior da obra.

auxiliar do professor”, orientando-o na apresentação dos assuntos, com uma parte teórica clara e objetiva, “para, a seguir, explorar exaustivamente essa teoria através de exercícios que vão introduzindo paulatinamente as dificuldades comuns aos nossos alunos. Isso permite uma real e firme fixação dos assuntos estudados.” (SARDELLA e MATTA, 1985, p. III).

No Quadro 10, expomos a forma como ocorreu a divisão dos conteúdos no livro do aluno:

Quadro 10 – Distribuição dos conteúdos

	Número de unidades	Número de páginas
Aritmética	1	7
Álgebra	8	77
Geometria	8	94

Fonte: Dados da pesquisa

O modo como o livro foi organizado propõe uma divisão sequencial dos campos da Matemática, conforme já constatamos nas obras anteriores. A sugestão é de se trabalhar os assuntos de Geometria no terceiro e quarto bimestres. O principal objetivo deste livro seria colocar o aluno em contato com a álgebra e a geometria, que, na concepção dos autores, “são importantes, principalmente porque servem para desenvolver o raciocínio do aluno e, assim, prepará-los para seus estudos em graus mais adiantados.” (SARDELLA e MATTA, 1985, p.III).

Sardella e Matta justificam que

[...] para introduzir o aluno no estudo da Álgebra torna-se necessário fazer uma revisão dos conjuntos numéricos já estudados e ainda fornecer-lhes o conhecimento de mais dois conjuntos: o dos números irracionais e dos números reais. **Dominando o conjunto dos números reais** – que reúne todos os outros conjuntos numéricos - **o aluno estará apto a penetrar no campo da Álgebra**. De modo gradativo, irá avançando neste campo até chegar às equações, aos sistemas e aos problemas do 1º grau, assuntos estes que, embora já abordados na série anterior, podem ser captados agora com uma amplitude muito maior, visto que o aluno dispõe de condições mais abertas de raciocínio. O estudo da Álgebra terá continuidade na 8ª série. **E na sequência lógica proposta neste livro, passamos a desenvolver algumas noções de Geometria**, sem dúvida o meio mais eficaz para despertar a capacidade mental do aluno. Através de exemplos, serão apresentadas inicialmente as noções fundamentais de Geometria, partindo-se em seguida para o aprendizado das figuras mais frequentes e importantes do edifício geométrico: os ângulos, os polígonos e a circunferência. (SARDELLA e MATTA, 1985, p.III, grifos nossos).

O livro é dividido em dezessete unidades, distribuídas em 200 páginas numeradas. Ao final, encontra-se uma lista de exercícios complementares para cada uma das unidades, acrescida de um encarte de resoluções. Os conteúdos de Geometria abordados na obra são:

- Os conceitos fundamentais da Geometria;
- Ângulos;

- Ângulos determinados por duas retas paralelas e uma transversal;
- Polígonos;
- Estudo do triângulo;
- Polígonos convexos;
- O estudo dos quadriláteros convexos;
- Estudo da Circunferência.

Tratando-se de um livro para o uso do professor, encontramos as respostas de todos os exercícios em tom de vermelho. Na edição analisada, há poucas diferenças entre o livro destinado aos alunos e aos professores.

- O estudo dos triângulos

A unidade quatorze é dedicada exclusivamente ao estudo dos triângulos, utilizando quinze páginas para, de forma sequenciada, dissertar sobre: Noção de região triangular; Ângulos internos e externos; Classificação dos triângulos; Relações entre os lados; A mediana, altura e bissetriz; Lei angular de Tales e Congruência de Triângulos. Assim, segundo os autores, ao concluir os estudos destes assuntos, os alunos estariam aptos

[...] a reconhecer:

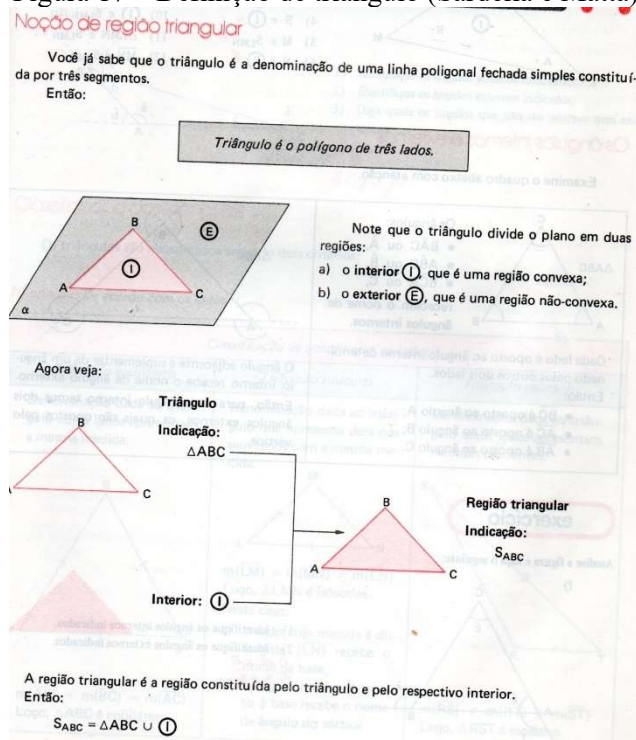
- 1) Uma região triangular.
- 2) Ângulos internos e externos de um ângulo triângulo.

E saberá:

- 3) Classificar os triângulos conforme as medidas dos lados: equilátero, isósceles e escaleno.
- 4) Classificar os triângulos conforme a medida dos ângulos internos: acutângulo, equiângulo, retângulo e obtusângulo.
- 5) Estabelecer a relação entre as medidas dos lados de um triângulo.
- 6) Estabelecer a relação entre as medidas dos ângulos internos de um triângulo, bem como a relação das medidas dos ângulos da base de um triângulo isósceles.
- 7) Estabelecer a relação entre a medida de um ângulo interno e a medida do lado oposto a este ângulo.
- 8) Traçar e distinguir a mediana, a altura e a bissetriz de um triângulo e reconhecer a denominação da intersecção destes segmentos.**
- 9) Distinguir triângulos congruentes conforme os casos: L.A.L; A.L.A; A.L.L₀ e L.L.L. (SARDELLA e MATTA, 1985, p.XII, grifos nossos).

Geralmente, os assuntos são apresentados em tabelas-resumo, com uma linguagem simples e concisa, conforme os autores informam no manual do professor. A definição de triângulo (Figura 17) vem acompanhada da ideia de região triangular, ou seja, dado um plano α e um triângulo ΔABC , o triângulo dividirá o plano em duas regiões: interna e externa (retomando o conceito de convexo e não-convexo trabalhado na unidade anterior). E, assim, conclui que a região triangular (S_{ABC}) é composta pelo triângulo e seu respectivo interior.

Figura 17 – Definição de triângulo (Sardella e Matta)



Fonte: Sardella e Matta (1985, p.143)

Os autores não incluíram em sua obra demonstrações e, muito menos, construções com régua e compasso, mesmo sendo este um dos objetivos, conforme foi ressaltado anteriormente. Estes tópicos ficam restritos ao manual do professor, com algumas inserções em um *box* de informações “que contém material complementar sobre o assunto de cada unidade e cuja aplicação deixamos a critério do professor.” (SARDELLA e MATTA, 1985, p. XV).

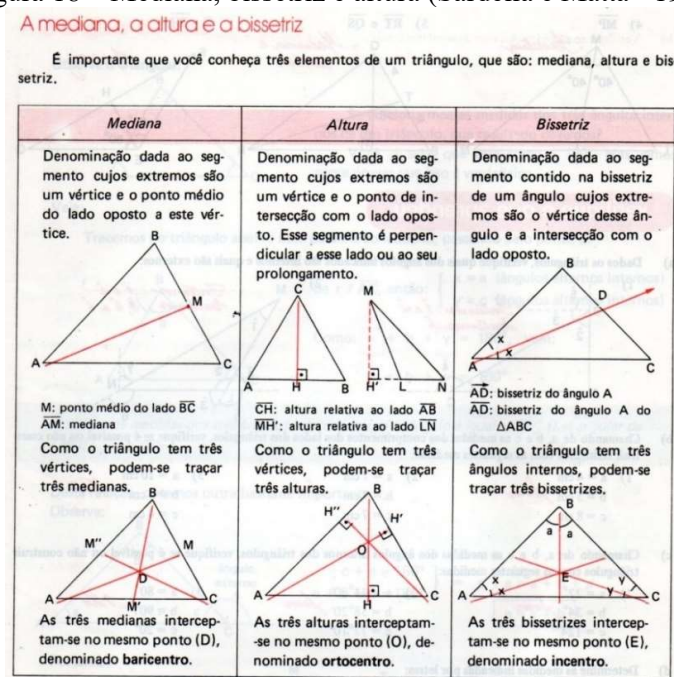
- Termo Cevianas

O termo “cevianas” não foi encontrado na obra.

- Introdução ao conteúdo de Cevianas do Triângulo

Os autores exploraram os conceitos relacionados à altura, mediana e bissetriz de um triângulo em uma tabela (Figura 18) que incorpora imagens ilustrativas para o tópico apresentado:

Figura 18 – Mediana, bissetriz e altura (Sardella e Matta - 1985)



Fonte: Sardella e Matta (1985, p.149)

A proposta dos autores, neste ponto, foi utilizar o recurso visual alicerçado a uma linguagem simples, de forma que o aluno pudesse comparar os elementos e verificar as diferenças. Diferentemente de Sangiorgi (1970), Name (197?) e Pierro Netto *et al.* (1981), Sardella e Matta inserem a conceituação de incentro, ortocentro e baricentro em sua exposição, evidenciando que eles são provenientes das intersecções das três bissetrizes, das três alturas e das três medianas de um triângulo. A maioria dos exercícios tem uma resolução que se apresentaria de forma mecânica.

- Definições

No Quadro 11, estão transcritas as definições que os autores apresentam sobre os elementos principais dos triângulos:

Quadro 11 – Definições Sardella e Matta (1985)

Elementos do triângulo	
Altura	“[...] segmento cujos extremos são um vértice e o ponto de intersecção do lado oposto. Esse segmento é perpendicular a esse lado ou ao seu prolongamento.”
Mediana	“[...] segmento cujos extremos são um vértice e o ponto médio do lado oposto a este vértice.”
Bissetriz	“[...] segmento contido na bissetriz de um ângulo cujos extremos são o vértice desse ângulo e a intersecção com o lado oposto.”
Baricentro	“[...] três medianas interceptam-se no mesmo ponto.”
Ortocentro	“[...] três alturas interceptam-se no mesmo ponto.”
Incentro	“[...] três bissetrizes interceptam-se no mesmo ponto.”

Fonte: Sardella e Matta (1985, p.149).

- Exercícios

Os autores distribuíram os exercícios em três grupos: exercícios (no manual do professor, os autores referem-se a esse grupo como *Exercícios Propostos*), *Verifique o que aprendeu* e *Exercícios Complementares* (incluídos no final do livro).

Contabilizamos trinta e um exercícios referentes ao estudo dos triângulos no livro do aluno, dos quais treze estão inseridos no grupo de *Exercícios Propostos*, sete são pertencentes à categoria *Verifique o que aprendeu* e onze são classificados como *Exercícios Complementares*. No manual do professor, foram encontradas mais quatro atividades, com o título de *Prova Avaliativa*.

No Quadro 12, foi contabilizado o quantitativo de exercícios destinados a cada um dos assuntos integrantes do décimo quarto capítulo. No entanto, salientamos que um exercício pode contemplar dois ou mais assuntos concomitantemente, de acordo com a proposta dos autores.

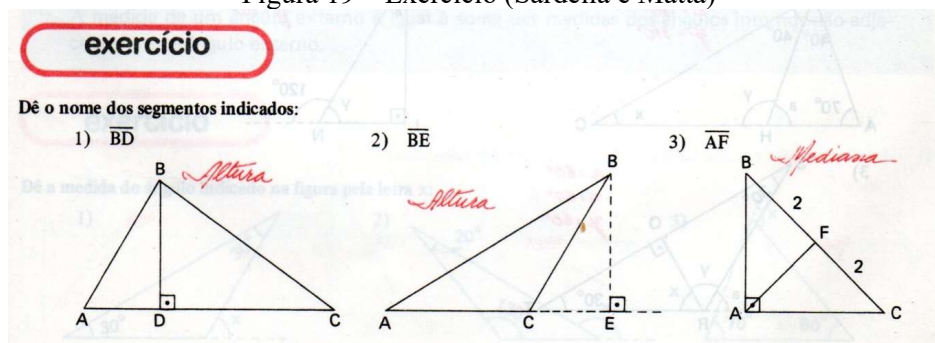
Quadro 12 – Quantitativo de exercícios

Conteúdos	Tipos de Exercícios			
	Propostos	Verifique o que aprendeu	Complementares	Avaliativos
Noção de região triangular	1	-	-	-
Ângulos internos e externos	3	4	11	1
Classificação dos triângulos	5	1	-	2
Relações entre os lados e relação entre os ângulos	3	2	-	-
A mediana, altura e bissetriz	1	-	-	-
Lei angular de Tales	1	-	-	-
Congruência de Triângulos	1	1	-	1

Fonte: Dados da pesquisa

Não há uma distribuição equilibrada dos exercícios no que se refere aos assuntos abordados, privilegiando alguns tópicos e reduzindo outros, como é o caso das medianas, alturas e bissetrizes (Figura 19), que foram apresentadas em um único exercício:

Figura 19 – Exercício (Sardella e Matta)



Fonte: Sardella e Matta (1985, p.149-150)

Constatamos que não foram utilizados números para sequenciar os exercícios, sendo organizados por letras, na maioria das vezes, conduzindo o aluno a um saber mecânico, sem oferecer ou estimular a capacidade de abstração. Os exercícios, em sua maioria, visam:

- a) Analisar uma dada figura utilizando a relação de pertinência ou inclusão;
- b) Identificar os ângulos (internos e externos);
- c) Classificar (nomear) de acordo com as medidas dos lados e de seus ângulos;
- d) Nomear os segmentos (altura, mediana e bissetriz) em um triângulo dado;
- e) Determinar os valores indicados por letras (x ou y).

Não há exercícios resolvidos referentes aos assuntos abordados no capítulo analisado. Contudo, nos demais capítulos, encontramos alguns que foram nomeados de *modelo* ou *exemplo*.

- Abordagem histórica do conteúdo de cevianas do triângulo

Os autores não se ocupam em trazer quaisquer elementos históricos em toda a obra.

- Ilustrações

Foram encontradas figuras de vários triângulos.

- Indicação de leitura complementar

Mesmo se tratando de um manual do professor, não há quaisquer indicações relativas a leituras complementares ou a presença de um referencial bibliográfico.

3.6 Livro V – Matemática Scipione – Conceitos e Histórias (1991)

A coleção *Matemática Scipione – Conceitos e histórias*²¹, de Scipione di Pierro Netto, teve sua 1ª edição (não consumível) publicada em 1991, pela Editora Scipione, localizada em São Paulo. As capas de ambos os livros analisados são bastante coloridas, com dimensões de 20 cm por 27 cm. No da 7ª série, em um plano de fundo em tons de azul, foram inseridas várias imagens em branco que remetem aos antigos gregos e romanos com moedas, tartaruga, símbolos matemáticos em perspectiva e crianças. Os mesmos elementos fazem parte da capa do livro da 6ª série, com diferença somente na cor do plano de fundo.

O que mais nos chama a atenção é a referência artística que o autor buscou inserir, como, por exemplo, o relógio “derretendo”, uma alusão ao pintor espanhol Salvador Dalí (1904-1989)

²¹ O livro da sétima série (manual do professor) analisado pertence ao acervo do autor, e o da sexta série (livro do aluno) foi encontrado próximo a uma lata de lixo.

e à Escola de Atenas, obra do italiano Rafael Sanzio (1483-1520). Em relação à tartaruga, acreditamos que pode estar representando o “Paradoxo de Aquiles e a tartaruga”, atribuído a Zenão de Eléia (489 - 430 a.C) (Figura 20).

Figura 20 – Capa do Livro "Matemática Scipione" (1991)



Fonte: Pierro Netto (1991a, 1991b)

Se tomarmos como referência o viés histórico presente na capa e a alusão proposta no próprio título da coleção, podemos inferir que, juntos, eles podem criar no leitor uma expectativa em relação à utilização e à influência destes elementos históricos ao longo do texto, o que talvez pode não se concretizar totalmente.

As histórias às quais o autor possivelmente se refere, no título da obra, podem não estar diretamente ligadas à História da Matemática, mas sim a um texto onde são apresentados alguns fatos curiosos, nomes e estórias. Este tópico é apresentado no final de cada capítulo, em folhas azuis (Figura 21), diferenciando-se das demais.

No livro da 7ª série, o autor cita algumas informações relevantes, relacionadas a matemáticos importantes, tais como: seu nome, onde viveram, datas e algumas de suas obras. Algumas dessas personalidades mencionadas foram Leonardo Fibonacci (1175-1250), Euclides (300 a.C.) e Pitágoras (586? -500? a.C.) – o que é significativo.

Pierro Netto expõe que buscou inserir uma leitura atrativa aos olhos dos alunos e “sempre que possível curiosa e que de algum modo guardasse uma relação com os assuntos estudados. Essas leituras poderão, conforme opção dos professores, servir para análises de textos, integrando-se com os estudos de Português.” (PIERRO NETTO, 1991b, prefácio).

Nos capítulos destinados ao estudo da Geometria, encontramos as seguintes leituras: Geometria plana: Breve introdução histórica; O que é uma demonstração? Premissas falsas; As demonstrações pelo método indireto; A escola de Pitágoras; e Pitágoras e o retângulo pedreiro. Contudo, não há inserção de nenhuma leitura referente às cevianas do triângulo²².

Um dos recursos metodológicos utilizados na obra consiste em um diálogo entre o professor e o aluno, intitulado de *conversa na sala de aula*. Para o autor, essa forma tem como objetivo “discutir possíveis dúvidas ou reafirmar posições ou conceitos.” (PIERRO NETTO, 1991b, prefácio). No capítulo “Triângulos – congruência”, foi encontrado somente um diálogo referente à congruência de triângulos.

O livro da 7ª série possui 232 páginas numeradas e foi organizado em onze unidades. O da 6ª série contém doze capítulos, distribuídos em 215 páginas. Os capítulos possuem um encadeamento lógico bem próximo uns dos outros, intercalando apresentação do conteúdo, definições, diálogo entre professor e aluno, exercícios e uma leitura. No final do livro, consta um bloco com as respostas de todos os exercícios. O manual do professor possui sete páginas numeradas com algarismos romanos e apresenta somente o plano de curso da obra, sugerindo o número de aulas destinadas a cada assunto, os conteúdos e seus objetivos operacionais.

Por mais que os conceitos geométricos ocupem a maior parte do conteúdo programático para a 7ª série, nota-se que há predileção à Álgebra e, nesse sentido, o autor expõe que “a álgebra ocupa metade ou mais do tempo de duração do curso e a ela devemos um cuidado especial” (PIERRO NETTO, 1991b, prefácio), o que de fato foi constatado ao analisarmos o manual do professor, pois o autor sugere que das 140 aulas programadas, seriam destinadas 78 aulas para o ensino de temas de cunho algébrico e 56 para a Geometria (Quadro 13).

Quadro 13 – Distribuição dos conteúdos na 7ª série

	Nº de capítulos	Nº de páginas	Nº de aulas
Aritmética	1	13	6
Álgebra	5	87	78
Geometria	5	115	56

Fonte: Dados da pesquisa

Na sexta série, o autor reservou os dois últimos capítulos para o ensino de Geometria. Percebe-se que a tônica desta série é voltada para os conteúdos aritméticos e algébricos. Os conteúdos de Geometria propostos em ambos os volumes são (Quadro 14):

²² Não foi possível averiguar as histórias contidas no livro da 6ª série, pois elas foram arrancadas do material analisado.

Quadro 14 – Conteúdos de Geometria

6ª série	7ª série
Capítulo XI – Ângulos: conceitos e relações - O conceito de ângulo - A definição de ângulo - A medida de ângulo - Submúltiplos da medida de ângulos - Operações com medidas de ângulos - Ângulos congruentes - Ângulo raso e ângulo nulo - Ângulos consecutivos e ângulos adjacentes - Retas perpendiculares e ângulos retos - Ângulos agudos e ângulos obtusos - Ângulos complementares - Ângulos opostos ao vértice - Bissetriz de um ângulo Capítulo XVII – Polígonos e seus elementos - Introdução - Regiões no plano - Polígonos - Classificação dos polígonos - Construção de polígonos regulares - Triângulos: elementos e classificação - Soma dos ângulos internos de um triângulo - Alturas, medianas e bissetrizes de um triângulo - Ângulo externo do triângulo - Soma dos ângulos externos do triângulo	Capítulo VII – Triângulos - Congruência - Definição, elementos e segmentos - Soma dos ângulos internos - Medida do ângulo externo - Segmentos e ângulos congruentes - Triângulos congruentes - Casos de congruência - Axiomas e teoremas - Teoremas sobre os triângulos isósceles - Desigualdades entre os lados e ângulos de um triângulo. Capítulo VIII – O paralelismo - Retas coplanares - Ângulos formados por duas retas concorrentes - Ângulos formados por duas retas coplanares e uma transversal - Propriedade fundamental do paralelismo - Consequências da propriedade fundamental do paralelismo - Postulados dos ângulos - Consequências dos postulados dos ângulos - Relações entre os ângulos formados por retas paralelas. Capítulo IX – Ângulos e diagonais de um polígono - Ângulos internos de um triângulo - Ângulos externos de um triângulo - Ângulos internos de um polígono - Diagonais de um polígono - Ângulos externos de um polígono Capítulo X – Quadriláteros - Introdução - Classificação dos paralelogramos - Propriedades gerais dos paralelogramos - Propriedades dos losangos - Propriedades dos retângulos - Classificação dos trapézios - Propriedades dos trapézios Capítulo XI – A circunferência e o círculo - Conceitos - Elementos da circunferência - Circunferência determinada por três pontos não-colineares - Posições relativas: reta e circunferência - Posições relativas: duas circunferências - Ângulos e arcos de uma circunferência - Ângulo central - Ângulo inscrito - Ângulo excêntrico interior - Ângulo excêntrico exterior
(PIERRO NETTO, 1991a, p.6)	(PIERRO NETTO, 1991b, p.5)

A maioria dos assuntos relacionados aos triângulos, cujo estudo iniciou-se na sexta série, reaparece na série seguinte, sendo que alguns conceitos são aprofundados, outros suprimidos e novos incluídos.

- O estudo dos triângulos

O conteúdo de triângulos foi introduzido na sexta série, ocupando um pouco mais da metade do último capítulo do livro, denominado “*Polígonos e seus elementos*”; na sétima série, nosso foco é o capítulo 7, intitulado “*Triângulos – Congruência*”, com vinte e quatro páginas, que visa conceituar os triângulos e seus elementos (bissetrizes, medianas, alturas, ângulos internos e externos), mas o principal seria assimilar e aplicar o conceito de congruência.

Nos dois livros, Pierro Netto define triângulo como “um polígono de três lados” e utiliza um triângulo ABC para identificar seus elementos: os lados ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$), os vértices (A, B e C) e os ângulos internos ($\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$). Há diferença somente na forma de representar os ângulos internos que, na sétima série, são também representados por $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

Em relação aos conteúdos (Quadro 15), verificamos que a maioria dos conceitos abordados na 6ª série são retomados na 7ª série, no entanto, cabe ressaltar que as abordagens se complementam – como, por exemplo, os conceitos de altura, mediana e bissetriz, os quais foram mais bem abordados na sexta série, incluindo figuras que representam a intersecção dos segmentos notáveis e uma quantidade maior de exercícios.

Quadro 15 – Conteúdos de Geometria

Conteúdo	6ª série ²³	7ª série
Definição de triângulo	X	X
Elementos do triângulo	X	X
Classificação de Triângulos	X	-
Altura, mediana e bissetriz	X	X
Soma dos ângulos internos	X	X
Ângulos externos	X	X
Soma dos ângulos externos	X	-
Segmentos e ângulos congruentes	-	X
Congruência de Triângulos	-	X
Axiomas e Teoremas	-	X
Desigualdade entre lados e ângulos	-	X

Fonte: Dados da pesquisa

Na 7ª série, foram inseridos os conteúdos de *Segmentos e ângulos congruentes*, *Congruência de triângulos*, *Axiomas e teoremas* e *Desigualdade entre lados e ângulos*, que não tinham sido inseridos na série anterior. No entanto, em nenhuma das obras o autor menciona o incentro, o baricentro e o circuncentro. Observamos que não existem diferenças significativas quanto ao encadeamento lógico proposto para o conteúdo de triângulos na 7ª série, ao compararmos com outra obra do mesmo autor publicada em 1981.

²³ Nos quadros apresentados no decorrer desta dissertação, a presença do X indica a presença do objeto pesquisado e – (tracinho) a ausência.

- Termo Cevianas

Não encontramos referência ao termo “cevianas” em nenhum dos dois livros analisados.

- Introdução ao conteúdo de Cevianas do Triângulo

Na 6ª série, partindo da afirmação “num triângulo qualquer, podemos traçar segmentos que unam os vértices ao seu lado oposto” (PIERRO NETTO, 1991a, p.204), é introduzido o conceito de altura, mediana e bissetriz, quase no final da seção, utilizando, para isso, duas páginas. Cada um desses segmentos é apresentado separadamente, usando como suporte dois triângulos – um, acutângulo (ABC), e outro, obtusângulo (DEF). Durante a leitura, o aluno é levado a compreender o assunto de forma sequenciada, primeiramente observando as figuras, depois, nomeando os segmentos, e, por último, é revelada a definição formal. Concluindo a apresentação, o autor afirma que cada triângulo possui três alturas, três medianas e três bissetrizes internas, contudo, não inclui nenhuma figura mostrando a intersecção entre as bissetrizes internas.

Na série seguinte, a altura, a mediana e a bissetriz receberam o nome de *segmentos notáveis*, com uma apresentação mais concisa. Partindo da definição, o autor identifica os segmentos presentes nos triângulos (na ordem inversa da que constatamos na sexta série). Por mais que o autor afirme que há, em cada triângulo, três segmentos, ele não inclui figuras que comprovem esta afirmação. Nota-se que, em ambos os livros, não foi exposto que o ponto de encontro entre as alturas, medianas e bissetrizes recebem nomes específicos.

- Definições

Constatamos que, em ambas as séries, não há diferenciação entre as definições propostas pelo autor (Quadro 16 e Quadro 17), salvo na definição de altura, ao afirmar que a perpendicularidade do segmento inclui que este também é perpendicular à reta suporte do lado oposto. Entretanto, não aparece no texto indicação, definição ou imagem relacionada às retas suportes.

Quadro 16 – Definições Pierro Netto – 7ª série (1991b)

Elementos do triângulo	
Altura	“É o segmento de reta determinado por um dos vértices e pela reta suporte do lado oposto, esse segmento é perpendicular ao lado oposto.”
Mediana	“É o segmento de reta determinado por um dos vértices e ponto médio do lado oposto.”
Bissetriz interna	“É o segmento determinado por um vértice e pelo lado oposto a ele, esse segmento divide o ângulo do vértice em dois ângulos de medidas iguais.”

Fonte: Pierro Netto (1991b, p.111).

Quadro 17 – Definições Pierro Netto – 6ª série (1991a)

Elementos do triângulo	
Altura	“É o segmento de reta determinado por um vértice e pela reta suporte do lado oposto; esse segmento é perpendicular à reta suporte do lado oposto.”
Mediana	“Segmento determinado por um vértice e pelo ponto médio do lado oposto.”
Bissetriz interna	“É o segmento de reta que une um vértice ao lado oposto e divide o ângulo interno desse vértice ao meio.”

Fonte: Pierro Netto (1991a, p.205-206).

- Exercícios

O autor teve a preocupação de dividir as seções dos capítulos em duas partes: uma dedicada à explanação dos assuntos e outra destinada a uma pequena quantidade de exercícios. No que diz respeito ao conteúdo de triângulos, foram constatados noventa e dois exercícios, distribuídos em três grupos: *Exercícios*, *Exercícios Conceituais* e *Testes* (Quadro 18).

Quadro 18 – Quantitativo de exercícios

Série	Exercícios	Exercícios Conceituais	Testes	Total
6ª série	24	9	12	45
7ª série	25	12	10	47
Total	49	21	22	92

Fonte: Dados da pesquisa

As listas de atividades foram inseridas na obra de forma sequenciada: primeiro, os intitulados *Exercícios*, sendo incluídos no decorrer dos capítulos, que teriam como finalidade aplicar os conceitos estudados; já os *Exercícios Conceituais* e os *Testes* foram incorporados no final do capítulo. Os exercícios conceituais são apresentados em formato de questões discursivas, com destaque para provas e demonstrações na sétima série, e os *Testes* são de múltipla escolha, com quatro opções de resposta, e abordam alguns dos assuntos estudados na unidade.

Em relação à divisão dos exercícios entre os conceitos de triângulos estudados na 7ª série, constatamos que não houve equilíbrio na distribuição, tendo em vista que todas as questões do bloco *Testes* elencam somente tópicos relacionados à medida dos ângulos internos, ângulos externos e respectivas somas. Nota-se que a ênfase dada à congruência no título do capítulo e na apresentação do conteúdo não se materializa nos exercícios.

Na 6ª série, observa-se algo parecido, já que prevalece a predileção para a noção de ângulos de um triângulo, tanto que dos três exercícios da seção “alturas, medianas e bissetrizes de um triângulo”, dois deles são voltados para o assunto de ângulos.

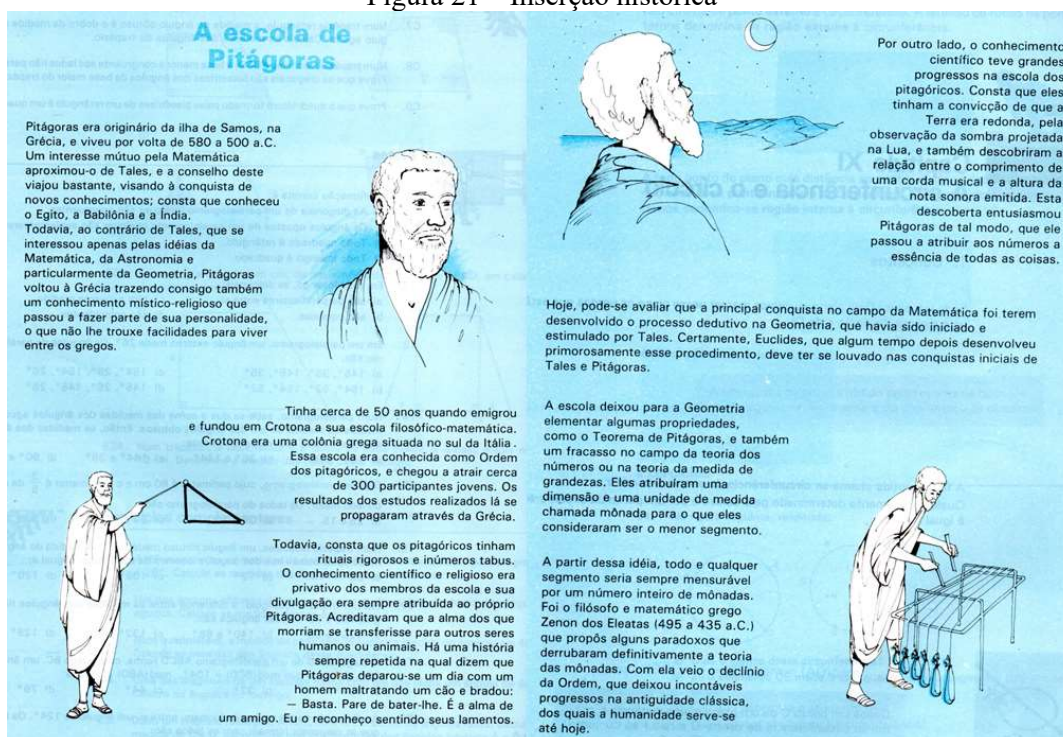
Tanto na 6ª quanto na 7ª série, os exercícios são, em sua maioria, repetitivos e mecânicos, sem apresentar nenhum tipo de contextualização, exigindo a simples memorização de

conceitos. De forma isolada, no caderno de exercícios referente à sexta série, consta uma atividade que propõe a construção da altura, bissetriz e mediana em um dado triângulo, tendo como referencial um ângulo ou um lado. Não foi possível analisar o caderno de exercícios da sétima série porque não tivemos acesso ao mesmo.

- Abordagem histórica do conteúdo de cevianas do triângulo

Constatamos que em ambas as séries há a inclusão de recortes históricos em alguns textos de cada capítulo (Figura 21), nos quais o autor cita breves informações relacionadas à biografia de matemáticos importantes, como, por exemplo: Leonardo Fibonacci (1175-1250), Euclides (300 a.C.) e Pitágoras (586?-500? a.C.). Frisamos que tais inserções históricas, mesmo que concisas, indicam uma relação entre o conteúdo e a História da Matemática, mas não há nenhum tópico de história relacionado às cevianas.

Figura 21 – Inserção histórica



Fonte: Pierro Netto (1991b, p.194-15)

- Ilustrações

Encontramos ilustrações de dois tipos. O primeiro são as figuras que ajudam a organizar os capítulos — são pequenas, em formato quadrangular, em tons de preto e branco, e foram inseridas ao lado esquerdo das páginas, indicando alguns tópicos do texto —, como uma tentativa

de fazer referência a eles (Figura 22). Próximo à apresentação das medianas e alturas, por exemplo, o autor acrescentou a imagem de duas barracas triangulares. O segundo tipo está contido nas leituras no final do capítulo (Figura 21).

Figura 22 – Ilustração (altura e mediana)



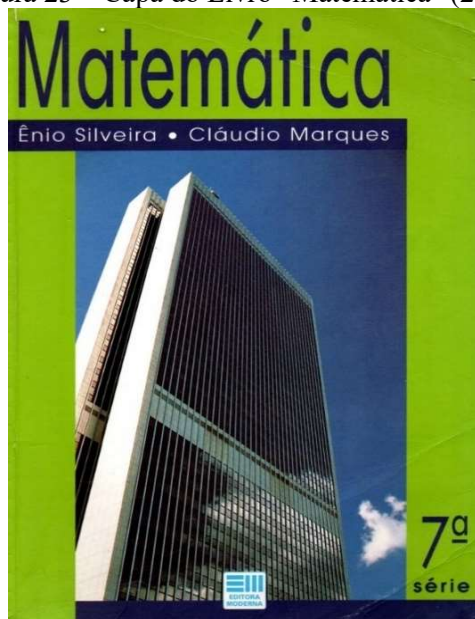
Fonte: Pierro Netto (1991a, p.205)

- Indicação de leitura complementar

Não constam sugestões de leitura complementar e nem a indicação da bibliografia utilizada nas obras.

3.7 Livro VI – Matemática 7ª série – Ênio Silveira e Cláudio Marques (2002)

Figura 23 – Capa do Livro “Matemática” (2002)



Fonte: Silveira e Marques (2002)

A coleção Matemática, de Ênio Silveira e Cláudio Marques, é composta por quatro volumes destinados aos anos finais do Ensino Fundamental (anteriormente de 5ª a 8ª séries). Sua primeira edição foi publicada em 1995, pela Editora Moderna, com o intuito de oferecer um material de qualidade e com certo rigor matemático para as escolas particulares, já que os autores também são professores e proprietários de uma instituição particular de ensino na capital

cearense. Atualmente, esta coleção passa por revisão de quatro em quatro anos e continua sendo editada paralelamente à Coleção Matemática Compreensão e Prática, destinada às escolas públicas, por meio do PNLD. Analisamos a primeira edição do volume correspondente à 7ª série, manual do professor, reimpresso em 2002 (Figura 23).

O livro do aluno possui 296 páginas, distribuídas em 21 unidades e subdivididas em tópicos. No volume destinado ao professor, é acrescido um bloco de orientações, onde são apresentados o currículo dos autores, os objetivos e a estrutura da obra, algumas sugestões de leitura complementar para o aluno, além dos objetivos referentes aos conteúdos desenvolvidos na série. Os capítulos possuem estruturação interna comum, que perpassam pelos seguintes tópicos: *Teoria, Observações, Exercícios de fixação, Tarefas, Cuidado!, Curiosidades e Desafios*.

Além do *box Curiosidades*, que adiciona textos ou lembretes atraentes e curiosos, com o objetivo de enriquecer os assuntos estudados, chamamos a atenção para os itens: *Observações* e *Cuidado!*, os quais são chamadas utilizadas inúmeras vezes no decorrer do texto e servem como explicações que devem ser destacadas na parte da teoria e como alertas para os possíveis erros que podem ser cometidos de forma corriqueira pelos alunos (SILVEIRA e MARQUES, 2002).

No Quadro 19, registramos a distribuição dos conteúdos nos três maiores campos da Matemática:

Quadro 19 – Distribuição dos conteúdos

	Número de unidades	Número de páginas
Aritmética	2	26
Álgebra	11	166
Geometria	8	144

Fonte: Dados da pesquisa

Inferimos que, de certo modo, os autores tiveram a preocupação de estabelecer equilíbrio entre os conteúdos algébricos e geométricos. No manual do professor, encontramos sugestão de tempo destinado a cada uma das unidades, expresso em porcentagem do total de aulas previstas para a série. Assim, para Silveira e Marques (2002), deveriam ser: 5% do desenvolvimento dos assuntos aritméticos, 47% para os algébricos e 48% para a geometria. Nos capítulos de Geometria, o maior percentual foi justamente o conteúdo de triângulos.

No entanto, ao compararmos esta indicação com as informações presentes no Quadro 19, concluímos que ela não se reflete no total de páginas e unidades utilizadas na abordagem dos campos da álgebra e da geometria.

Neste volume, o estudo dos conteúdos de Geometria inicia-se no décimo quarto capítulo, com a revisão dos conceitos de ponto, reta, plano, segmentos etc. e conclui-se com círculo e circunferência no capítulo XXI. Os assuntos versados são:

- Conceitos fundamentais da geometria;
- Ângulos;
- Postulados e teoremas;
- Retas paralelas;
- Triângulos;
- Quadriláteros;
- Polígonos;
- Circunferência e círculo.

Dos livros didáticos por nós analisados, este é o primeiro a conter o termo “cevianas”. Interessados em compreender os motivos ou razões para essa inclusão, quando os autores geralmente não tinham o costume de fazê-lo, resolvemos entrar em contato com os autores. Por e-mail, Ênio Silveira nos esclareceu que tal motivação surgiu devido ao fato de já utilizar esse termo em suas aulas preparatórias para os Colégios Militares:

Fui professor durante muito tempo de cursos preparatórios para Colégios e Academias Militares e questões com esses assuntos eram bem explorados. Quando recebi o convite da Editora Moderna para escrever a nossa primeira Coleção, tive a preocupação de trazer esses assuntos. A Coleção agradou muito as escolas mais exigentes e fez muito sucesso no mercado. (ÊNIO SILVEIRA, por e-mail).

Outro ponto a ser destacado é a relação estabelecida entre a Geometria e o Desenho Geométrico, por meio de construções utilizando régua, transferidor e compasso, não somente no conteúdo de triângulos como também nos demais assuntos. Há algumas situações em que é solicitado ao aluno realizar verificações empíricas e comprovações seguidas dos resultados por meio de demonstrações simples.

- O estudo dos triângulos

Para o estudo dos triângulos, foi reservada uma unidade, subdividida em doze tópicos, contendo 26 páginas, no total, a saber:

- 1) Introdução
- 2) Definição
- 3) Elementos
- 4) Classificação
- 5) Cevianas notáveis**
- 6) Congruência de triângulos
- 7) Casos de congruência
- 8) Relações de desigualdades entre lados e ângulos
- 9) Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo
- 10) Triângulo isósceles – propriedades

- 11) Triângulo retângulo – propriedades
- 12) Construção de Triângulos

Na Introdução, os autores expõem que, neste capítulo, será estudado o mais importante dos polígonos e buscam relacioná-lo às situações de vivência cotidiana dos alunos, ao explicar que o triângulo é a forma geométrica utilizada nas estruturas que exigem rigidez e distribuição de forças, acrescentando como exemplo fotos de estruturas metálicas, tais como: antenas, pontes e telhados. E, por meio de uma figura representando um ΔABC qualquer, definem:

- 1) Triângulo ou trilátero é um polígono que possui três lados
- 2) Pode ser denotado como, $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$
- 3) Uma figura geométrica formada por três segmentos, cujas extremidades são três pontos não-alinhados. (SILVEIRA e MARQUES, 2002, p.193).

A todo instante, Silveira e Marques buscaram utilizar a linguagem matemática adequada ao assunto que está sendo proposto, possibilitando ao aluno que se aproprie dessa linguagem simbólica e possa empregá-la em seu uso cotidiano escolar, já que esta será primordial para a compreensão das várias demonstrações realizadas no decorrer do texto e nas atividades que são propostas.

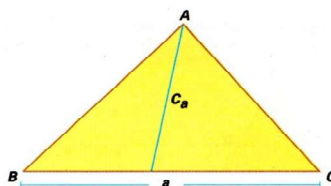
Alguns assuntos, como o Teorema de Pitágoras, que geralmente é estudado no nono ano, foram inseridos neste capítulo e são retomados no volume seguinte, com maior aprofundamento e rigor.

- Termo Cevianas

Figura 24 – Cevianas – Silveira e Marques (2002)

5 CEVIANAS NOTÁVEIS

Denomina-se ceviana a qualquer segmento que une um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.



Fonte: Silveira e Marques (2002, p.196)

Os autores, em consonância com suas vivências profissionais – ligadas à preparação de

alunos interessados em ingressar em Colégios Militares e, também, como já havíamos esclarecido anteriormente, à elaboração de um material que fosse absorvido pelas escolas particulares da época –, incluíram no capítulo destinado ao assunto de triângulos uma seção denominada *Cevianas Notáveis* (Figura 24).

Nessa perspectiva, Ênio Silveira explana que

No estudo de triângulos se faz necessária a apresentação e qualificação da bissetriz de um ângulo interno, da mediana que parte de cada um dos vértices e da altura relativa a cada um dos lados traçada pelo vértice oposto. Resolvemos, à época, abrir um tópico de nome CEVIANAS NOTÁVEIS para apresentar esses importantes segmentos de reta dos triângulos. No decorrer desta apresentação, inserimos também alguns pontos notáveis dos triângulos como baricentro, ortocentro e incentro. (ÊNIO SILVEIRA, por e-mail).

- Introdução ao conteúdo Cevianas do Triângulo

Os autores tomam como ponto de partida a definição e, em seguida, a representação gráfica. Desse modo, após definir e representar o conceito de ceviana em um triângulo (Figura 24), as três cevianas notáveis: mediana, altura e bissetriz, nessa ordem, são apresentadas separadamente, acompanhando o ponto de intersecção entre esses segmentos.

Diferentemente dos livros didáticos anteriormente analisados, constatamos a inclusão das bissetrizes externas e na abordagem do incentro, ao afirmarem que ele também pode ser denominado como centro da circunferência inscrita no triângulo.

Em relação ao ortocentro, a apresentação gráfica foi limitada a evidenciá-lo somente como um ponto interno ao triângulo, deixando a complementação desta informação a cargo do campo *Observações* no final da página (Figura 25):

Figura 25 – Observações



Observações

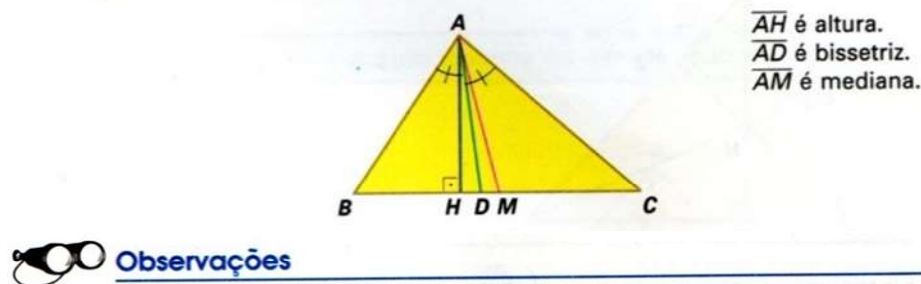
1. No triângulo **acutângulo**, o ortocentro é **interno** ao triângulo.
2. No triângulo **retângulo**, o ortocentro é **vértice** do ângulo reto.
3. No triângulo **obtusângulo**, o ortocentro é **externo** ao triângulo.

Fonte: Silveira e Marques (2002, p.197)

Por fim, os alunos são levados a verificar a representação da altura, mediana e bissetriz partindo de um mesmo vértice do triângulo (Figura 26).

Figura 26 – Representação das três principais cevianas

Verifique na figura a representação de três importantes cevianas.



Observações

1. Num mesmo triângulo, a altura, a bissetriz e a mediana, relativas a um mesmo lado, partem de um mesmo vértice.
2. Qualquer triângulo possui três medianas, três alturas, três bissetrizes internas e três bissetrizes externas.

Fonte: Silveira e Marques (2002, p.198)

Mais uma vez, presenciamos a relevância do *box Observações* para complemento conceitual e enriquecimento da aprendizagem, ao acrescentar uma informação além das dispostas na apresentação teórica: o circuncentro. Contudo, há limitações claras nesta abordagem, uma vez que o conceito de mediatriz não foi exposto e nem foi esclarecido que ela não satisfaz as condições para ser definida como uma ceviana (por mais que isso possa ocorrer em algumas poucas situações, como, por exemplo, no triângulo isósceles).

-Definições

No Quadro 20, expomos as definições propostas pelos autores:

Quadro 20 – Definições Silveira e Marques – 7ª série (2002)

Elementos do triângulo	
Ceviana	“[...] qualquer segmento que une um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.”
Altura	“[...] é o segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto.”
Mediana	“[...] é o segmento de reta que une um dos vértices ao ponto médio do lado oposto.”
Bissetriz interna	“[...] é o segmento da bissetriz de um ângulo interno situado entre o vértice e a interseção com o lado oposto.”
Incentro	“[...] o encontro das bissetrizes internas de um triângulo denomina-se incentro ou centro da circunferência inscrita no triângulo.”
Ortocentro	“[...] o encontro das alturas de um triângulo denomina-se ortocentro.”
Baricentro	“[...] o encontro das medianas de um triângulo denomina-se baricentro ou centro de gravidade.”
Circuncentro	“[...] o ponto de encontro das três mediatrizes dos lados de um triângulo. É o centro da circunferência circunscrita no triângulo.”

Fonte: Silveira e Marques (2002, p.196-199)

- Exercícios

Neste item, exploramos cinquenta e nove exercícios propostos pelos autores, os quais estão divididos em três etapas: *Exercícios de Fixação*, *Tarefas* e *Desafios*. Os *Exercícios de Fixação* (trinta e oito no total) foram inseridos após a apresentação de “um tópico ou pequeno grupo de tópicos” (p.1). São questões discursivas ordenadas em grau crescente de dificuldade e estão diretamente relacionadas com o conteúdo exposto. Para destacá-las da teoria, foram colocadas em um quadro amarelo. Segundo Silveira e Marques (2002), estes exercícios correspondem ao quantitativo mínimo necessário a uma boa aprendizagem.

Ao término do capítulo, encontramos 18 exercícios, dispostos em três quadros na cor laranja, intitulados *Tarefas*, numerados de acordo com sua posição na obra (nesse caso, nº 41, nº 42 e nº 43). Há equilíbrio entre as questões discursivas e de múltipla escolha. Conforme Silveira e Marques (2002, p.1), este bloco constitui-se em uma “sequência de exercícios complementares e de revisão geral dessa unidade. Esses exercícios deverão ser utilizados pelo professor como tarefas de casa, trabalhos em grupo ou estudos para avaliações”. Junto às *Tarefas*, encontramos três *Desafios*, que exigem do aluno um pouco mais de atenção e criatividade no modo em que aplica seus conhecimentos. No Quadro 21, inventariamos o quantitativo de exercícios relacionados aos assuntos propostos na obra. Esclarecemos que deixamos de listar uma questão referente ao bloco *Tarefas*, devido ao seu conteúdo não ser tratado neste capítulo – mediatriz²⁴.

Quadro 21 – Quantitativo de exercícios

Assunto/Tópico	Exercícios de Fixação	Tarefas	Desafio	Total
Definição e elementos	2	--	-	2
Classificação	3	--	-	3
Cevianas Notáveis	5	1	1	7
Congruência e Congruência de Triângulos	6	5	1	12
Desigualdade entre ângulos e lados / Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo	11	9	1	20
Triângulo isósceles e Triângulo retângulo	8	1	-	9
Construção de Triângulos	3	1	-	4

Fonte: Dados da pesquisa

Constatamos que os autores enfatizam mais os tópicos Congruência e Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo. Contudo, isso não compromete o desenvolvimento dos outros assuntos, pois os demais cumprem com seu objetivo: diversas questões solicitam ao

²⁴ O conceito de mediatriz de um segmento foi trabalhado no *Capítulo 14 – Conceitos Fundamentais da Geometria*, na página 148, onde é exposto um passo a passo de como realizar a construção da mediatriz com régua e compasso. Há uma atividade que requer a aplicação deste conceito, de modo que, dado um triângulo, o aluno deveria reproduzi-lo no caderno e traçar as mediatrizes referentes aos seus três lados. Acreditamos ser por este motivo que os autores não retomaram tal conceito, aplicando-o aos estudos dos triângulos na unidade 18.

aluno demonstrar ou provar alguma propriedade ou conceito, bem como construir figuras utilizando régua e compasso.

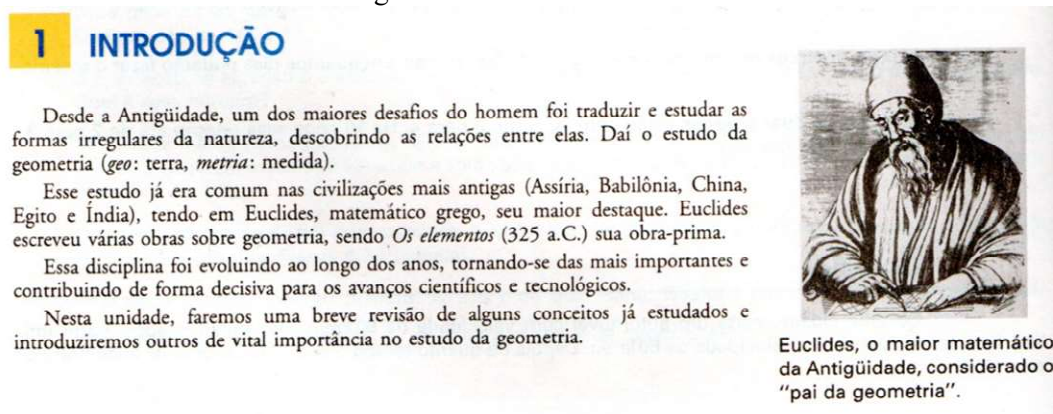
Em relação às cevianas, verificamos sete exercícios, sendo que a maioria deles está presente no bloco *Exercícios de Fixação*; três dessas atividades (nº 6, nº 7 e nº 8) embasam-se no desenho geométrico como forma de ampliação e consolidação dos conceitos.

Mesmo esta obra tendo um caráter inovador, constatamos que algumas atividades visam somente à aplicação das técnicas e propriedades estudadas anteriormente.

- Abordagem histórica do conteúdo de cevianas do triângulo

No livro, como um todo, foram incluídos temas relacionados à História da Matemática na abertura de alguns dos capítulos, seção denominada *Introdução* (Figura 27), em outros, no *box Curiosidades*. Em algumas páginas, também encontramos de forma aleatória, na borda direita, figuras de matemáticos. Os autores buscaram articular estes tópicos ao conteúdo que está sendo estudado, buscando favorecer a compreensão dos estudantes nesses assuntos, pois os textos, além de abordarem aspectos históricos, tentam evidenciar alguns passos do seu desenvolvimento e evolução ao longo dos tempos. Em relação às cevianas, não foi constatada nenhuma evidência histórica.

Figura 27 – Recorte Histórico



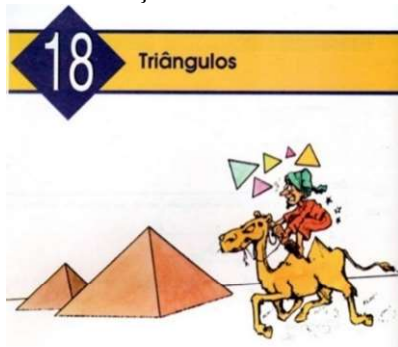
Fonte: Silveira e Marques (2002, p.142)

- Ilustrações

A obra é muito colorida, com uma diagramação limpa e sem exageros. Além dos próprios entes geométricos, em cada uma das unidades existe uma ilustração ocupando um pouco mais da metade da primeira página (Figura 28). Também constatamos, na parte interna dos

capítulos, fotos e ilustrações menores diretamente relacionadas ao conteúdo. Silveira e Marques (2002, quarta capa) pontuam que “fotos e ilustrações com um toque de humor ajudam a enriquecer o aprendizado e viabilizar a aproximação com o universo do aluno”.

Figura 28 – Ilustração de abertura da unidade 18



Fonte: Silveira e Marques (2002, p.192)

- Indicação de leitura complementar

Os autores, fiéis ao objetivo que traçaram, ou seja, “inserir a matemática no dia a dia do estudante” (quarta capa), tiveram a consciência de sugerir leituras complementares nacionais e internacionais para os alunos, como, por exemplo: a *Coleção O Prazer da Matemática* (obra Portuguesa), a *Coleção Contando a História da Matemática*, a *Série Pra que Serve a Matemática*, alguns de *Malba Tahan*, entre outros. O mesmo não se verifica em relação ao professor. No entanto, por meio da bibliografia presente no final da obra, o professor encontrará as obras utilizadas na coleção – Boyer (1974), Eves (1995), Ifrah (1981), Polya (1978), etc, e, a seu interesse, poderá buscá-las para leitura.

3.8 Livro VII – Matemática teoria e contexto (2012).

Nesta seção, analisaremos o livro *Matemática Teoria e Conceito – 8º ano*²⁵, constante no Guia do Livro Didático do PNLD 2014, de Marília Centurión e José Jakubovic, cuja primeira edição foi publicada em 2012 pela Editora Saraiva. Observa-se, na capa (Figura 29), uma nomenclatura diferente das utilizadas nos livros anteriormente analisados, isso se deve ao fato da promulgação da Lei n.º 11.274/2006, que instituiu o Ensino Fundamental de nove anos de duração, com a inclusão de crianças de 6 anos de idade, que antes cursariam o pré-escolar (atual

²⁵ O livro pertence ao acervo do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais – Unidade Manhuaçu.

Educação Infantil) aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Desse modo, os anos finais do Ensino Fundamental, até então turmas de 5ª a 8ª séries, foram seriados do 6º ao 9º anos.

Figura 29 – Capa do livro Matemática Teoria e Contexto (2012)



Fonte: Centurión e Jakubovic (2012)

A obra tem 256 páginas e foi organizada em nove capítulos, divididos em tópicos. Cada um deles, em geral, segue a seguinte estrutura: parte teórica acompanhada de atividades de aplicação, acrescidos de seções especiais: *Você sabia?*, *Pense e responda*, *Pensando em casa*, *Desafios e surpresas*, *Ação* e incentivo ao uso da Calculadora. No final do livro, constam as respostas das atividades.

A seção *Você sabia?* tem o intuito de completar as informações contidas no desenvolvimento teórico, agregando trechos de livros, revistas e jornais, com alguns fatos curiosos ou históricos relacionados ao conteúdo.

O manual do professor difere do livro destinado ao aluno por conter as respostas junto às atividades em vermelho e, ao final, há um complemento pedagógico, no qual constam os objetivos da obra, reflexões acerca do ensino de matemática e observações sobre os conteúdos e atividades estudados nesta série.

No Quadro 22, foi exposta a distribuição de conteúdos por campos da matemática escolar e constatamos que não houve equilíbrio entre a distribuição dos conteúdos, privilegiando os assuntos algébricos em detrimento dos demais.

Quadro 22 – Distribuição dos conteúdos por campos da matemática escolar

	Nº de unidades	Nº de páginas
Números e Operações	1	26
Álgebra	4	95
Geometria	2	84
Grandezas e medidas	1	18
Estatística e Probabilidade	1	13

Fonte: Dados da pesquisa

O estudo da Geometria foi proposto em dois capítulos, na terceira parte do livro, iniciando com os polígonos e terminando no próximo capítulo com a construção de embalagens, conforme a sequência:

Capítulo 7 – Polígonos e medidas de ângulos

1. Tangram
2. Alguns ângulos notáveis
3. Ângulos formados por retas paralelas e transversais
4. Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo
5. Soma das medidas dos ângulos de um polígono convexo

Capítulo 8 – Triângulos, quadriláteros e circunferência

1. Altura, bissetriz e mediana em triângulos
2. Triângulos congruentes
3. Quadriláteros: definições e classificações
4. Propriedade dos paralelogramos
5. Circunferência
6. Ângulos centrais
7. Ângulos inscritos
8. Algumas construções geométricas no plano
9. Construindo embalagens.

Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p. 7-8)

Observamos uma tendência de reduzir e aglutinar alguns temas, não encontramos demonstrações de teoremas e conceitos e, nesse sentido, de acordo com o PNLD 2014, há uma predominância de “validações empíricas dos fatos geométricos mais importantes. Essa escolha não é devidamente explicitada, em especial para o professor, pois se sabe da natureza limitada dessas comprovações em face do método de demonstração lógica.” (BRASIL, 2013, p.56). E, em relação à utilização de construções com régua e compasso, foram apresentadas algumas, como, por exemplo as bissetrizes de um ângulo, mediatrizes de um segmento, perpendiculares e triângulos.

- O estudo dos triângulos

O estudo dos triângulos foi dissolvido entre outros assuntos nas duas unidades que se dedicam à Geometria, sendo introduzido no capítulo sete, junto a outros polígonos, por meio das peças do tangram, sem, no entanto, haver uma definição formal para o que seria um triângulo. Ainda tendo o tangram como suporte, os autores propõem o conceito de congruência de

polígonos por sobreposição das peças e, assim, também exploram os conceitos relacionados aos ângulos internos de alguns polígonos. Em outro momento, os autores dedicam uma seção para a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Nessa linha de pensamento,

O tangram é utilizado como material de apoio didático. Isso se deve ao fato de as formas geométricas que o compõem permitirem inúmeras explorações, como, por exemplo, a construção de polígonos: triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos. Este material é de fácil manuseio e contribui para que os alunos experimentem, explorem intuitivamente, visualizem e contextualizem situações geométricas, o que auxilia no processo de construção do raciocínio lógico-dedutivo e na explicitação formal desse raciocínio. (MORI e ONAGA, 2012, p. 51).

No oitavo capítulo, junto aos conceitos relacionados aos quadriláteros e à circunferência, é proposto o estudo das alturas, medianas, bissetrizes, congruência de triângulos e algumas construções com régua e compasso.

Nota-se que, em certos tópicos, os autores buscaram as noções de simetria axial, desenvolvida nos volumes anteriores (conforme explicitado no manual do professor), para explicar alguns tópicos desta série, tendo como exemplo as propriedades dos triângulos isósceles e equilátero, e defendem essa perspectiva de ensino sob a concepção de que “o professor pode observar e estabelecer logicamente as propriedades de triângulos isósceles e equiláteros pensando em simetria, em vez de usar a congruência de triângulos, facilita o entendimento da turma.” (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2012, p.36). Por mais que haja uma tentativa de inovação, incluindo dobraduras, tópicos de história, entre outros, a abordagem teórica, por vezes, não fornece o devido suporte para esse entrosamento.

- Introdução ao conteúdo de Cevianas do Triângulo

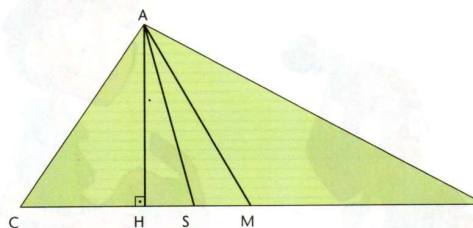
As cevianas são estudadas no item “*Altura, bissetriz e mediana em triângulos*”, inserido no oitavo capítulo. As considerações iniciais são feitas em um triângulo ABC escaleno, traçando-se nele três segmentos $\overline{AH}$, $\overline{AS}$ e $\overline{AM}$, partindo de um vértice em comum A e que intercepta o lado BC (Figura 31)

Figura 30 – Altura, mediana e bissetriz

1

Altura, bissetriz e mediana em triângulos

O triângulo ABC da figura é escaleno: seus três lados têm tamanhos diferentes.



Observe os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{AS}$ e $\overline{AM}$:

- $\overline{AH}$ é perpendicular a $\overline{BC}$.
Por isso, dizemos que $\overline{AH}$ é uma **altura** do triângulo ABC. (É a altura em relação à base $\overline{BC}$.)
- $\overline{AS}$ é um segmento contido na bissetriz do ângulo $\hat{A}$.
Por isso, dizemos que $\overline{AS}$ é uma **bissetriz** do triângulo. (É a bissetriz em relação ao vértice A.)
- $\overline{AM}$ liga o vértice A ao ponto médio de $\overline{BC}$.
Por isso, dizemos que $\overline{AM}$ é uma **mediana** do triângulo. (É a mediana em relação ao lado $\overline{BC}$.)

Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p.166)

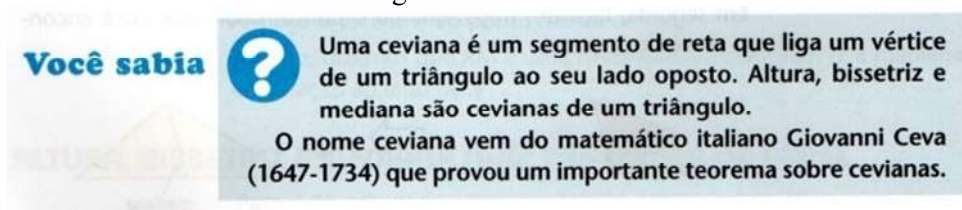
Os autores realizam esta abordagem sem utilizar a definição para os termos altura, mediana e bissetriz e também são omitidas observações importantes, como, por exemplo, as propriedades desses segmentos em outros triângulos, que, por consequência, dificulta ao aluno vislumbrar outras possibilidades de representação, como é o caso das alturas, que podem ser traçadas na parte externa dos triângulos.

Há uma tentativa, por parte dos autores, de usar dobraduras para representar esses segmentos, buscando uma melhor relação entre a teoria presente no livro e constatações empíricas, mas, novamente, é utilizado como modelo o triângulo escaleno, limitando, assim, a ação dessa atividade.

- Termo Cevianas

O termo “ceviana” é referenciado como um fato curioso, inserido no *box Você sabia?* (Figura 30), e visa complementar as informações contidas na obra, no entanto, o termo é introduzido sem a devida interlocução com a teoria estudada.

Figura 31 – Cevianas



Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p.168)

- Definições

No Quadro 23, expusemos a definição de ceviana proposta pelos autores:

Quadro 23 – Definição de Ceviana. Centurión e Jakubovic – 8º ano (2012)

Elementos do triângulo	
Ceviana	“[...] é um segmento de reta que liga um vértice de um triângulo ao seu lado oposto.”

Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p.168)

- Exercícios

As atividades estão dispostas na obra em quatro seções distintas, em acordo com a finalidade pedagógica que os autores designaram: *Pense e Responda*, *Pensando em Casa*, *Desafios e Surpresas* e *Ação*.

A seção *Pense e Responda* foi preparada para ser utilizada em sala de aula, com a tutela do professor, enquanto a *Pensando em Casa*, como o próprio nome indica, concentra atividades que os alunos devem realizar em casa, como atividade extraturno. Os *Desafios e Surpresas*, na visão dos autores, são problemas rotineiros, cuja resolução possibilita o aprofundamento sobre diversos temas, na perspectiva de resolução de problemas. Por último, mas não menos importante, encontramos atividades que são, de certo modo, diferentes das geralmente propostas, exigindo do aluno o trabalho coletivo, por meio de jogos e experiências – este bloco foi denominado *Ação*, sendo somente duas vinculadas ao ensino de Geometria: *Sobre figuras espaciais*, que busca construir embalagens e outra sobre ângulos (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2012). No Quadro 24, foram catalogados sessenta exercícios relacionados ao assunto de triângulos:

Quadro 24 – Quantitativo de exercícios

Assunto/Tópico	Pense e Responda	Pensando em Casa	Desafios e Surpresas	Total
Soma dos ângulos internos do triângulo	9	11	3	23
Altura, mediana e bissetriz	10	9	--	19
Congruência de triângulos	5	5	3	13
Construção geométrica	4	1	--	5

Fonte: Dados da pesquisa

Ao examinar os exercícios, percebemos que quase quarenta por cento deles são destinados a fixar os conceitos de ângulos e soma dos ângulos internos do triângulo, bem como as atividades reservadas às cevianas também são utilizadas como pretexto para esse fim. Entretanto, esse pormenor não compromete o conjunto de atividades, que são bem elaboradas e põem contextualizações condizentes com a maturidade esperada para esta série.

- Abordagem histórica do conteúdo de cevianas do triângulo

Os autores buscaram inserir alguns tópicos de História da Matemática em um *box* denominado “*Um pouco de história*”, o que poderia ter sido explorado com mais detalhes, já que esta apresentação carece de nexos interculturais e, nesse sentido, deveria ir além dos fatos curiosos. Em relação às cevianas, a única referência histórica se reduz a uma frase no tópico *Você sabia?*: “O nome ceviana vem do matemático italiano Giovanni Ceva (1647-1734) que provou um importante teorema sobre cevianas” (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2012, p.168). No entanto, não há nenhum tipo de aprofundamento tanto no livro do aluno como no manual do professor.

- Ilustrações

No decorrer da obra, nos deparamos com vários tipos de ilustrações (figuras, entes matemáticos, fotos, tirinhas e gráficos), que são utilizadas tanto na apresentação dos conceitos como nas próprias atividades.

- Indicação de leitura complementar

A bibliografia sugerida para o professor perpassa os tópicos de Matemática e Educação Matemática, incluindo documentos oficiais, periódicos e *sites*. Para facilitar o trabalho dos professores, os autores inseriram as sugestões dos paradidáticos junto às observações pedagógicas referentes a cada capítulo. E, no final do manual do professor, são recomendados aos alunos vários paradidáticos como: *Contando a História da Matemática*, *Vivendo a matemática*, *Pra que serve matemática*, entre outros.

3.9 Livro VIII – Matemática: Compreensão e Prática (2015 – 2018)

O professor Ênio Silveira publicou sua primeira coleção didática em 1995, intitulada *Matemática*, e, como explicitamos anteriormente, seu objetivo era oferecer um material de qualidade para as escolas particulares. Em 2015, foi convidado pela editora Moderna para elaborar um

projeto voltado às escolas públicas brasileiras e, dessa forma, nasceu a Coleção *Matemática: Compreensão e Prática*, em quatro volumes. A coleção teve sua terceira edição aprovada no Programa Nacional do Livro Didático 2017 (Figura 32, à esquerda). O terceiro volume, referente ao 8º ano do Ensino Fundamental, possui 296 páginas, divididas em doze capítulos, que, por sua vez, são constituídos de seções. Geralmente, cada capítulo tem o intuito de abordar um bloco de conteúdo específico.

Figura 32 – Capa do livro Matemática Compreensão e Prática



Fonte: Silveira (2015); Silveira (2018)

Passados alguns anos, a coleção foi revista, com o objetivo de adaptá-la às novas exigências propostas pelo MEC, em virtude da aprovação da Base Nacional Comum Curricular, a qual estabeleceu os conhecimentos, as competências e as habilidades que devem ser adquiridas em cada etapa da educação básica. Dessa forma, a quinta edição, publicada em 2018, foi aprovada e passou a integrar o Guia do PNLD 2020. O terceiro volume (Figura 32, à direita), referente ao 8º ano do Ensino Fundamental, possui 248 páginas, tendo uma configuração diferente da edição anterior. Ele é dividido em quatro unidades, que, por sua vez, são constituídas de dois ou mais capítulos (SILVEIRA, 2018). No início de cada capítulo, encontra-se uma seção de abertura (*É hora de observar e refletir e Trocando ideias*) com questões interessantes e/ou curiosas. Segundo o PNLD 2020, elas têm como objetivo:

[...] motivar o estudo dos conteúdos que serão tratados. Apesar de essas seções oportunizarem momentos interessantes e questionamentos significativos, em sua maioria,

tais situações são rapidamente abandonadas e os conteúdos são apresentados de maneira diretiva. Observa-se, então, que na metodologia adotada prevalece a apresentação dos conteúdos a partir de exemplos com uma rápida sistematização de conceitos ou procedimentos, seguida de seção de Atividades. (BRASIL, 2018, p.127).

Nesse sentido, o autor expõe que:

A distribuição do conteúdo nesta coleção foi pensada com o intuito de favorecer o desenvolvimento das competências e habilidades da BNCC, tomando como princípio a importância da formação cidadã e integral dos estudantes. Para isso, sugere-se que cada unidade, composta por dois ou mais capítulo, seja trabalhada ao longo de um bimestre. (SILVEIRA, 2018, p. IX).

No quadro comparativo (Quadro 25), descrevemos, de forma geral, através dos índices, as alternâncias e permanências ocorridas nos conteúdos de Geometria nas edições de 2015 e 2018. Para facilitar a compreensão, fizemos o recorte das unidades destinadas exclusivamente à Geometria.

Quadro 25 – Quadro comparativo entre os sumários de 2015 e 2018.

3ª Edição - 2015	5ª Edição - 2018
Capítulo 5 – Retas e ângulos 1. Retas 2. Segmentos de retas 3. Ângulos 4. Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal Capítulo 6 – Polígonos e simetria 1. Polígonos 2. Diagonais de um polígono 3. Ângulos internos e externos de um polígono 4. Simetria Capítulo 10 – Triângulos 1. Triângulo 2. Classificação de triângulos 3. Cevianas Notáveis 4. Casos de congruência de triângulos 5. Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo 6. Propriedades dos triângulos isósceles 7. Propriedades dos triângulos retângulos Capítulo 11 – Quadriláteros 1. Quadriláteros 2. Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo 3. Paralelogramos 4. Trapézios Capítulo 12 – Circunferência e círculo 1. Circunferência e círculo 2. Posições de um ponto em relação a uma circunferência 3. Posições de uma reta em relação a uma circunferência 4. Posições relativas de duas circunferências 5. Segmentos tangentes 6. Arco de circunferência e ângulo central 7. Ângulo inscrito	Unidade II Capítulo 4 – Ângulos e Transformações Geométricas 1. Ângulos 2. Lugares geométricos 3. Transformações geométricas Capítulo 5 – Polígonos 1. Polígonos 2. Diagonais de um polígono 3. Ângulos internos e externos de um polígono 4. Polígonos regulares Capítulo 6 – Probabilidades 1. Possibilidades 2. Probabilidade Unidade III Capítulo 7 – Triângulos e quadriláteros 1. Triângulos 2. Congruência de triângulos 3. Quadriláteros 4. Classificação dos quadriláteros
Fonte: Silveira (2015, p. 6-9)	Fonte: Silveira (2018, p. 6-8)

A Geometria, assim como os outros campos, teve sua abordagem reconfigurada nessa adaptação; desse modo, das cinco unidades destinadas aos assuntos geométricos, restaram somente três, concentrando esses assuntos mais no centro da obra, seguindo quase a mesma ordem adotada pela BNCC para esta série.

As alterações realizadas vão muito além de mudanças na ordem de apresentação dos conteúdos, perpassando também a junção de alguns assuntos em blocos que possuem habilidades em comum e a exclusão e inserção de outros tópicos, como é o caso da conceituação de lugar geométrico e o cálculo de áreas de figuras planas, volumes e capacidades. Entre as exclusões, a mais evidente foi a dos assuntos relacionados à circunferência e ao círculo, que foram integralmente retirados da edição de 2018.

No tópico a seguir, faremos alguns apontamentos acerca das mudanças ocorridas no conteúdo de triângulos.

- O estudo dos triângulos

O autor buscou relacionar o triângulo com as formas triangulares do cotidiano, na tentativa de traçar um paralelo entre o conceito matemático e sua representação visual. Em ambos os volumes, a definição de triângulo desenvolve-se na apresentação de seus elementos (vértices, lados e ângulos), seguida de sua classificação quanto às medidas dos seus lados e quanto às medidas de seus ângulos.

O conteúdo de *Triângulos e Quadriláteros*, que na edição de 2015 tinha um capítulo específico destinado a cada assunto, passou a integrar um mesmo capítulo na edição de 2018. Esta aglutinação interferiu diretamente nos conceitos abordados, assim, em relação aos triângulos, alguns tópicos passaram a não mais integrar esse volume, tais como: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e as propriedades dos triângulos isósceles e retângulos. Talvez seja por isso que o autor inseriu, na borda das páginas, algumas orientações metodológicas direcionadas aos professores, sugerindo-lhes lembrar aos alunos que a soma das medidas dos ângulos internos é 180° , entre outras.

- Termo Cevianas

Em ambos os livros o autor reservou uma seção para apresentação das cevianas: na edição mais antiga, intitulada *Cevianas Notáveis*, e na tiragem atual, *Cevianas Notáveis: mediana, altura e bissetriz* (Figura 33).

Figura 33 – Cevianas: Silveira (2018)

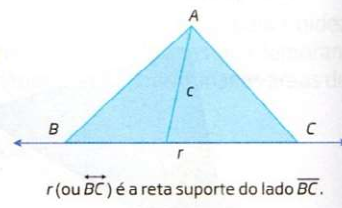
● **Cevianas notáveis: mediana, altura e bissetriz**

Agora, vamos estudar a mediana, a altura e a bissetriz de um triângulo, que são chamadas de cevianas.

Ceviana é qualquer segmento de reta com uma extremidade em um vértice de um triângulo e a outra na reta suporte do lado oposto a esse vértice.

Reta suporte de um segmento de reta é a reta que contém esse segmento.

No triângulo ABC ao lado, c é ceviana relativa ao lado $\overline{BC}$.



r (ou $\overleftrightarrow{BC}$) é a reta suporte do lado $\overline{BC}$.

Fonte: Silveira (2018, p.132)

Não constatamos dessemelhanças na apresentação do conceito de cevianas, mas sim no modo como foi realizada a abordagem, já que na publicação de 2018 essa explanação inicia-se dizendo que “vamos estudar a mediana, altura e bissetriz de um triângulo, que são chamadas de cevianas” (SILVEIRA, 2018, p.132), para, em seguida, conceituar o que seria uma ceviana propriamente dita, ou seja, em sentido inverso à edição de 2015.

Outro ponto a ser levantado é a conceituação e a representação de reta suporte, que poderia evitar possíveis erros de interpretação e compreensão dos demais assuntos relacionados aos triângulos.

- Introdução ao conteúdo de Cevianas do Triângulo

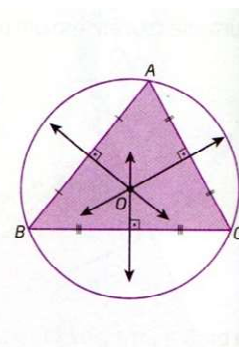
As cevianas notáveis são abordadas separadamente, na mesma ordem em que são referenciadas no título da seção (Figura 33), de forma detalhada, por meio de definições e com figuras representativas, tanto para as cevianas como para o ponto de intersecção entre elas. Em relação à altura, o autor teve o cuidado de evidenciar que o ortocentro é um ponto que pode localizar-se no interior, no exterior ou no vértice do ângulo de um triângulo (neste caso, diferentemente dos outros, não há figura representativa), dependendo do triângulo em questão.

Quando analisamos o livro *Matemática – 7ª série*, do mesmo autor, constatamos que inexistia a apresentação do conceito de mediatriz, mesmo citando o circuncentro. Ao avaliar as publicações de 2015 e 2018, vemos que esta incompletude foi corrigida (Figura 34), permitindo ao aluno inferir com mais clareza que a mediatriz não satisfaz as condições para ser definida como uma ceviana.

Figura 34 – Mediatriz

Observações

- 1 Denomina-se **mediatriz de um segmento** a reta que passa pelo seu ponto médio e é perpendicular à sua reta suporte. Cada lado de um triângulo tem uma mediatriz.
- 2 As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto – chamado **circuncentro (O)** –, que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, isto é, aquela que passa por todos os vértices do triângulo.
- 3 O ortocentro, o incentro, o baricentro e o circuncentro são chamados de **pontos notáveis** de um triângulo.



Fonte: Silveira (2018, p.134)

A forma como Ênio Silveira buscou caracterizar as definições de altura, mediana e bissetriz, nas duas obras, difere dos demais livros didáticos analisados, pois ele conseguiu interligar a definição tradicional desses elementos ao termo “ceviana”.

- Definições

No Quadro 26, relacionamos as definições exploradas pelo autor em sua publicação de 2018. Ao confrontá-las com as definições propostas na edição de 2015, verificamos que não ocorreram mudanças que pudessem alterar o sentido ou a compreensão dessas conceituações.

Quadro 26 – Definições Silveira (2018)

Elementos do triângulo	
Ceviana	“[...] é qualquer segmento de reta com extremidade em um vértice de um triângulo e outra na reta suporte do lado oposto a esse vértice.”
Altura	“[...] é a ceviana que passa por um vértice do triângulo e é perpendicular à reta suporte do lado oposto a esse vértice.”
Mediana	“[...] é a ceviana que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele.”
Bissetriz interna	“[...] é a ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos congruentes.”
Mediatriz	“[...] é a reta que passa pelo seu ponto médio e é perpendicular à sua reta suporte.”
Baricentro	“Em um triângulo podemos traçar uma mediana relativa a cada lado. As medianas se cruzam em um ponto, denominado baricentro (G).”
Ortocentro	“As retas suportes das três alturas se cruzam em um ponto, denominado ortocentro (H).”
Incentro	“As três bissetrizes se cruzam em um ponto, denominado incentro (I), que é o centro da circunferência inscrita no triângulo.”
Circuncentro	“As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto – chamado circuncentro (O) –, que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, isto é, que passa por todos os vértices do triângulo.”

Fonte: Silveira (2018, p. 132-134).

- Exercícios

O autor propõe uma grande quantidade de atividades e exercícios para fixação dos conceitos apresentados (principalmente no bloco *Aplicando*, no final do capítulo), inserindo-os em dois momentos: no final de cada tópico estudado, com o intuito de fixar os conceitos, e

na conclusão do capítulo, de maneira a retomar os assuntos e procedimentos necessários à consolidação do conhecimento. Grande parte das atividades restringe-se a questões que requerem simples aplicação conceitual do que foi trabalhado (mesmo nos casos que podem ser considerados mais complexos).

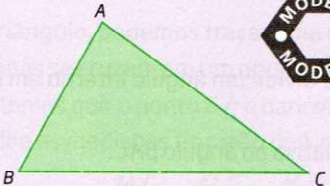
Constatamos uma grande diferença entre o quantitativo de exercícios de uma edição para outra, o que pode estar relacionado à retirada de alguns conceitos e à fusão de outros assuntos no decorrer da revisão do material. Quanto ao tipo e à metodologia empregada nas atividades, estes permanecem inalterados. Em relação às cevianas, verificamos que a redução abarcou cerca de metade das atividades, restando somente seis, nos quais quatro (Figura 35) utilizam como recurso didático a prática de desenho com régua e compasso. No final do capítulo, são inseridas mais duas atividades, solicitando ao aluno relacionar os pontos notáveis estudados à sua ceviana correspondente.

Figura 35 – Exercícios cevianas

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 No caderno, utilizando régua e compasso, construa um triângulo com as medidas do triângulo abaixo, trace suas medianas e determine seu baricentro.



2 Utilizando régua e compasso, construa, no caderno, um triângulo cujos lados meçam 6 cm, 5 cm e 8 cm. Em seguida, trace suas bissetrizes e determine seu incentro.

3 No caderno, desenhe um triângulo cujos lados meçam 7 cm, 4 cm e 6 cm. Em seguida, determine o encontro das alturas desse triângulo (ortocentro).

4 Desenhe, no caderno, um triângulo cujos lados meçam 6 cm, 7 cm e 8 cm e depois:

- trace as mediatrizes dos seus lados, determinando o circuncentro do triângulo. Depois, com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência que circunscreve esse triângulo;
- trace as bissetrizes dos seus ângulos, determinando o incentro do triângulo. Então, com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência inscrita nesse triângulo.

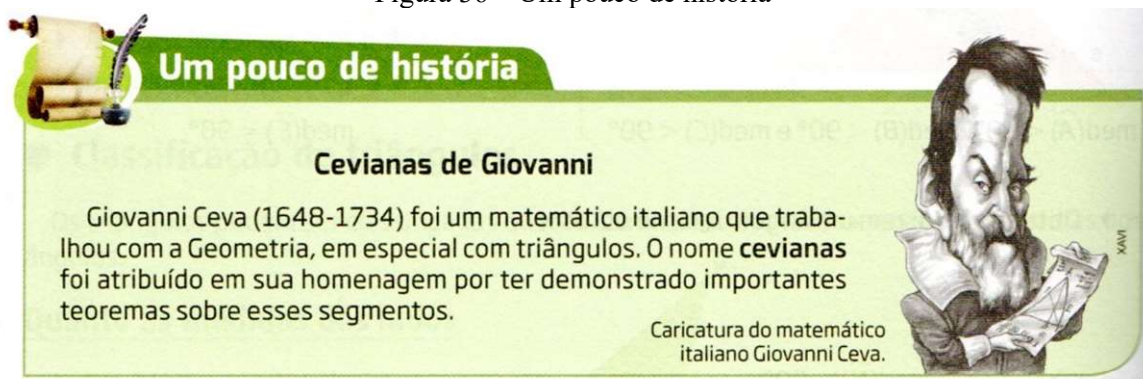
Fonte: Silveira (2018, p.134)

Por último, o autor sugere como desafio que os alunos construam um triângulo acutângulo escaleno e nele os pontos notáveis (baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro), utilizando algum *software* de geometria dinâmica – sem, no entanto, indicar um específico ou descrever os passos de sua construção. Isto poderia dificultar a realização da atividade, uma vez que os alunos, em sua maioria, não possuem esse recurso disponível e muitos professores podem não possuir conhecimentos sobre *softwares* e sobre como utilizá-los. Por outro lado, ao não indicar um *software* específico, o autor deixa o professor livre para escolher um programa de sua preferência.

- Abordagem histórica do conteúdo de cevianas do triângulo

A inclusão de referências históricas ocorre na seção *Um pouco de história*, com informações e fatos históricos que relacionam os conhecimentos matemáticos com alguns personagens importantes. O autor expõe que não pensou em realizar um estudo sistemático da História da Matemática, mas em oferecer elementos importantes que servirão como ponto de partida para a complementação e o aprofundamento dos assuntos matemáticos abordados na parte teórica (SILVEIRA, 2018).

Figura 36 – Um pouco de história



Fonte: Silveira (2018, p. 132)

Em relação às cevianas, na publicação de 2018, detectamos uma breve passagem histórica (Figura 36), intitulada “*Cevianas de Giovanni*”, o que não foi constatado na edição anterior.

Acreditamos que, por mais interessante que seja a incorporação de uma figura representativa (que na passagem acima aconteceu por meio de uma caricatura), faz-se necessário certa prudência. Em nossas pesquisas, não conseguimos encontrar uma representação real desse matemático, e a presença da ilustração pode acarretar em informações equivocadas, uma vez que essa caricatura nos remete a Galileu Galilei e não a Giovanni Ceva.

- Ilustrações

As obras são coloridas e possuem ilustrações de diversos tipos: infográficos, fotografias, pinturas, gráficos estatísticos etc.

- Indicação de leitura complementar

O autor inseriu uma seção no manual pedagógico com o intuito de fazer sugestões de

leituras, revistas, *sites* e laboratórios de Educação Matemática para a formação do professor. No final do livro consta a bibliografia utilizada na obra.

3.10 Livro IX – Matemática Bianchini (2018)

Para compor nossa última seção dedicada à análise de livros didáticos, fizemos uma varredura em todos os livros de Matemática destinados ao 8º ano do Ensino Fundamental aprovados pelo PNLD – 2020, com o objetivo de averiguar a presença do termo “cevianas” e, dentre eles, identificar qual possivelmente estaria mais presente em um número representativo de escolas no ano letivo de 2020. Para chegarmos a esta conclusão, utilizamos os dados estatísticos referentes à aquisição e à distribuição de livros, disponíveis no *site* do FNDE – MEC (Quadro 27).

Quadro 27 – Livros aprovados pelo PNLD - 2020

Título	Editora	Edição/Ano	Contém o termo cevianas?	Quantidade de livros distribuídos ²⁶	
				Alunos	Professores
A conquista da Matemática	FTD	4ª - 2018	Não	1.201.628	25.021
Matemática Bianchini	Moderna	9ª - 2018	Sim	214.108	4.916
Araribá Mais – Matemática	Moderna	1ª - 2018	Não	145.919	3.757
Matemática Compressão e Prática	Moderna	5ª - 2018	Sim	121.588	2.895
Matemática Essencial	Scipione	1ª - 2018	Não	120.775	2.788
Matemática Realidade e Tecnologia	FTD	1ª-2018	Sim, somente em uma observação no manual do professor	125.194	2.556
Geração Alpha Matemática	SM	2ª-2018	Sim	52.728	1.318
Convergência Matemática	SM	1ª-2018	Não	45.961	942
Projeto Teláris	Ática	3ª -2018	Não	242.418	4.896
Trilhas da Matemática	Saraiva	1ª - 2018	Não	51.281	1.347
Apóema	Brasil	2ª - 2018	Não	83.002	1.677

Fonte: Dados da pesquisa

Pelo levantamento de dados, inferimos que o livro *A conquista da Matemática – 8º ano* foi a obra adotada por um número expressivo de professores e será utilizada por quase cinco milhões de alunos nos próximos anos. No entanto, ela não possui nenhuma menção ao termo “cevianas” e, por este motivo, decidimos não analisar essa obra. Deste modo, buscaremos analisar o livro *Matemática Bianchini*, por satisfazer os critérios de investigação que elegemos nesta pesquisa.

²⁶ Dados disponibilizados pelo FNDE – MEC, disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>.

O livro *Matemática Bianchini – 8º ano*²⁷, de Edwaldo Roque Bianchini, nona edição, foi publicado pela editora Moderna no ano de 2018²⁸. A capa traz uma estrela formada em nado sincronizado (Figura 37).

Figura 37 – Capa do Livro Matemática Bianchini – 8º ano (2018)



Fonte: Bianchini (2018)

A obra possui 272 páginas, distribuídas em 12 capítulos, sendo que cada capítulo aborda um bloco de conhecimento específico, conforme as cinco *Unidades Temáticas* propostas pela BNCC. O manual do professor possui os mesmos elementos que o livro do aluno, diferenciando-se apenas pela presença das respostas dos exercícios, destacadas em vermelho (mas em versão reduzida na configuração tipo U²⁹, sendo dimensionado em três vertentes: orientações gerais, específicas e página a página).

²⁷ O volume analisado é o manual do professor utilizado para divulgação.

²⁸ No final deste mesmo ano, o autor veio a óbito na cidade de Lençóis Paulista – SP.

²⁹ Entre as inovações propostas pelo PNLD 2020, está o Manual do Professor em “formato de U” ou em “formato lateral”, onde a página do livro do aluno foi inserida em formato reduzido, e as informações, que geralmente vinham no final do manual, estão dispostas no lado esquerdo, direito e inferior da página. Segundo o PNLD 2020, o objetivo desses formatos “é prover suporte fácil e rápido ao professor em sala de aula, a partir do manuseio do conteúdo disponibilizado ao Estudante.” (p.16). E fixa que deverão:

- a. Apresentar respostas aos exercícios do livro do estudante;
- b. Oferecer orientações gerais sobre atividades a serem trabalhadas no livro do estudante;
- c. Alertar o professor para os pontos essenciais constantes naquela parte específica do livro, correlacionando o conteúdo proposto com o desenvolvimento das habilidades apresentadas na BNCC para o ano de escolarização e componente curricular em questão.” (BRASIL, 2018, p.16).

Os capítulos estão estruturados de modo a facilitar a localização dos assuntos, com os seguintes elementos: *Página de abertura, Apresentação dos conteúdos, Exercícios, Diversificando, Trabalhando a informação, Pense mais um pouco e Para saber mais*. Nesta última seção, encontramos alguns textos que relacionam diversos assuntos atuais com os conteúdos estudados no capítulo e, em outros, o autor insere tópicos de História da Matemática, como forma de ampliar o conhecimento. Dentro de uma mesma divisão, o autor buscou propiciar a articulação entre a unidade temática específica desse capítulo com as outras unidades (BIANCHINI, 2018).

A obra possui um variado conjunto de textos, o que possibilita a comunicação dos conteúdos matemáticos “com quadrinhos, matérias publicadas em diferentes mídias, poemas, cordel, são uma mostra de como a diversidade de gênero textual é explorada ao longo do texto.” (BRASIL, 2018, p.121) de toda a coleção:

No âmbito do conhecimento matemático, o modo como os conteúdos e conceitos são abordados vão ao encontro de uma formação voltada para o sujeito crítico e consciente. E ainda, ressalta-se positivamente a retomada de conceitos ao longo da coleção, frequentemente com ampliações e aprofundamentos. (BRASIL, 2018, p.121).

No Quadro 28, apresenta-se a distribuição dos assuntos entre as unidades temáticas:

Quadro 28 – Distribuição dos conteúdos por campos da matemática escolar

Unidades Temáticas	Nº de capítulos	Nº de páginas
Números	1	27
Álgebra	4	88
Geometria	4	77
Grandezas e medidas	2	38
Estatística e Probabilidade	1	28

Fonte: Dados da pesquisa

Averiguamos que há certo equilíbrio entre os assuntos abordados na unidade temática *Álgebra e Geometria*, contudo, quanto à articulação destes campos, a álgebra possui maior destaque, com uma quantidade superior de capítulos. Em relação à Geometria, são abordados os seguintes assuntos:

CAPÍTULO 2 – Construções geométricas e lugares geométricos

1 - Construções geométricas (partes da reta, construindo segmentos congruentes com régua e compasso, posição de retas e construindo retas paralelas com régua e compasso)

2 - Ângulos (Construindo perpendiculares com régua e compasso)

3 - A circunferência como um lugar geométrico (Pontos equidistantes dos extremos de um segmento, pontos equidistantes de duas retas concorrentes e pontos equidistantes de duas retas paralelas)

CAPÍTULO 7 – Estudo dos triângulos

1 - Cevianas de um triângulo (Mediana, Bissetriz, Altura)

2 - Congruência de triângulos (Casos de congruência de triângulos)

CAPÍTULO 8 – Geometria demonstrativa

1 - Demonstrações geométricas (Noções primitivas e postulados, Teoremas e Congruência de triângulos nas demonstrações geométricas)

2 - Propriedades do triângulo isósceles

3 - Propriedades de um triângulo qualquer

CAPÍTULO 9 – Estudo dos quadriláteros

1 - Quadriláteros (Elementos dos quadriláteros)

2 - Paralelogramos (Propriedades dos paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados)

3 - Trapézios (Propriedades dos trapézios isósceles)

3 - Propriedades da base média do triângulo e do trapézio (Base média do triângulo e Base média do trapézio). (BIANCHINI, 2018, p.6-9).

- O estudo dos triângulos

O estudo dos triângulos é feito no sétimo capítulo. Na abertura, o autor buscou inserir uma referência artística relacionada aos triângulos, a obra *Tempestade de triângulos*, construída com azulejos pelo artista plástico mineiro Alexandre Mancini, em 2013. Os conteúdos abordados no capítulo são: cevianas de um triângulo (mediana, bissetriz e altura), pontos notáveis (baricentro, incentro e ortocentro) e congruência de triângulos. Os objetivos do capítulo são:

- **Conceituar cevianas de um triângulo: mediana, bissetriz e altura.**
- **Estudar e aplicar as cevianas de um triângulo.**
- Conceituar e estudar os casos de congruência de triângulos.
- Aplicar congruência de triângulos em demonstrações de propriedades geométricas.
- Analisar a construção de um hexágono regular com descrição do procedimento por escrito.
- Construir um dodecaedro regular a partir da medida do ângulo central associado a ele.
- Identificar simetria em figuras obtidas por composição de transformações geométricas. (BIANCHINI, 2018, p.160, grifos nossos).

- Termo Cevianas

O termo “ceviana” está presente no sétimo capítulo, em uma seção específica sobre o assunto. Após apresentar a definição, o autor afirma que um triângulo tem infinitas cevianas, porém, há três tipos especiais: as medianas, as bissetrizes e as alturas.

Na edição anterior, publicada em 2015, a palavra “ceviana” não é apresentada no livro do aluno, ficando restrita a algumas observações contidas no Manual do Professor, conforme excerto abaixo:

[...] em seguida, veremos outros elementos do triângulo igualmente importantes conhecidos como cevianas. **Cevianas são segmentos que têm uma das extremidades em um dos vértices do triângulo e outra em um ponto da reta suporte do lado oposto.** A intersecção de cada tipo de ceviana aqui estudada – mediana, bissetriz e altura – constitui um ponto que é o centro geométrico do triângulo: baricentro, incentro e ortocentro, respectivamente. (BIANCHINI, 2015, p.299, grifos nossos).

- Introdução ao conteúdo de Cevianas do Triângulo

Como alguns assuntos foram retirados desse volume, devido à adequação da obra às diretrizes da BNCC, o autor sugere que, caso o professor julgue necessário, retome as principais características e classificações dos triângulos, antes de iniciar o estudo das cevianas. Entretanto, seria importante afixar na sala um cartaz com essas informações, pois, assim, os alunos poderiam consultá-lo ao longo do desenvolvimento da unidade (BIANCHINI, 2018). Dessa forma, Bianchini apresenta a mediana, a bissetriz e a altura de modo a levar o aluno a pensar no traçado dessas cevianas na figura representativa do triângulo e, a partir daí, introduzir a definição desses conceitos.

O autor, ao identificar as alturas de um triângulo, não menciona, no livro do aluno, a propriedade do ortocentro no triângulo retângulo, talvez seja por este motivo que tenha acrescentado a seguinte orientação para o professor:

Das três cevianas, provavelmente a mais conhecida é a **altura**, por estar presente no cálculo da área do triângulo. Ela também é a única das cevianas que pode ficar fora da região interna do triângulo, sendo determinada no prolongamento do lado que se considera. Explore exemplos nos quais isso ocorre. O **ortocentro** é o ponto de intersecção das retas suporte das três alturas de um triângulo e pode ficar fora da região interna do triângulo. Apresente exemplos também. Peça aos alunos que verifiquem onde se encontra o ortocentro no caso de um triângulo retângulo. Espera-se que eles percebam que, nesse caso, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto. (BIANCHINI, 2018, p.163, grifos do autor).

- Definições

No Quadro 29, relacionamos as definições encontradas na obra analisada e verificamos que, como Silveira (2018), Bianchini (2018) buscou inserir, em suas definições, o termo “cevi-ana”:

Quadro 29 – Definições Bianchini (2018)

Elementos do triângulo	
Ceviana	“[...] todo segmento de reta que tem como extremidades um vértice e um ponto da reta suporte do lado oposto.”
Altura	“é a ceviana que une perpendicularmente um dos vértices ao seu lado oposto (ou ao seu prolongamento).”
Mediana	“[...] é toda ceviana que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.”
Bissetriz interna	“[...] é toda ceviana que divide ao meio um dos ângulos internos do triângulo.”
Baricentro	“Todo triângulo possui três medianas que se encontram em um ponto chamado de baricentro.”
Ortocentro	“O ponto de encontro das retas que contêm as alturas é chamado de ortocentro.”
Incentro	“Todo triângulo tem três bissetrizes que se encontram em um ponto chamado de incentro.”

Fonte: Bianchini (2018, p.161-163).

- Exercícios

Foram encontrados doze exercícios relacionados ao conteúdo de cevianas do triângulo; oito no *box Exercícios Propostos* e quatro no *box Exercícios Complementares*. Os *boxes* estão no final do capítulo, tendo o propósito de retomar os assuntos estudados na unidade, por meio de exercícios. Essas atividades, em sua maioria, utilizam como suporte o desenho geométrico, a partir de construções com régua e compasso. Contudo, por mais que no quarto capítulo o autor tenha abordado algumas construções, estas não são suficientes para que tanto o aluno como o professor utilizem este recurso com precisão.

Figura 38 – Exercícios sobre cevianas

EXERCÍCIOS PROPOSTOS
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Em cada um dos triângulos abaixo, o segmento $\overline{AD}$ é mediana, bissetriz ou altura?

a)

altura

c)

mediana,
bissetriz e
altura

b)

bissetriz

d)

bissetriz

2 Desenhe os triângulos pedidos em cada caso e responda às questões.

- Triângulo MNO qualquer. Trace, com régua e compasso, as medianas relativas aos lados $\overline{MO}$ e $\overline{NO}$. Como se chama o ponto em que elas se encontram? *baricentro*
- Triângulo PQR qualquer. Trace, usando transferidor e régua, as bissetrizes dos ângulos $\hat{P}$ e $\hat{R}$. Como se chama o ponto em que elas se encontram? *incentro*
- Triângulo TUV qualquer. Trace, com régua e esquadro, as alturas relativas aos lados $\overline{TU}$ e $\overline{TV}$. Como se chama o ponto em que elas se encontram? *ortocentro*

3 Desenhe um triângulo ABC qualquer e trace a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{B}$ e a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$. Explique como você traçou a bissetriz e a mediana desse triângulo.
construção de figura; Resposta pessoal.

4 No triângulo ABC a seguir, $\overline{AM}$ é a mediana. Determine o perímetro desse triângulo. *9,5 cm*

5 Desenhe um triângulo retângulo RST . Chame de R o vértice onde se encontra o maior ângulo. Com uma régua e um esquadro, trace a altura relativa ao lado $\overline{ST}$ e determine a altura do triângulo relativa ao lado $\overline{RS}$. *construção de figura; Resposta pessoal.*

6 Construa um triângulo ABC que seja escaleno e acutângulo. Com esquadro e régua, trace as três alturas do triângulo. Qual delas é a maior? *a altura relativa ao lado menor*

7 Construa um triângulo ABC isósceles não equilátero. *7. a) e b) construção de figura*

- Trace a mediana relativa à base $\overline{BC}$.
- Trace a bissetriz do ângulo do vértice A .
- A bissetriz coincidiu com a mediana? *sim*
- Trace a altura relativa à base. O que aconteceu com a altura e a mediana? *Elas coincidiram.*

8 *Hora de criar* – Construa um triângulo ABC , retângulo em B , qualquer. Troque com um colega para que cada um trace as três alturas no triângulo construído pelo outro e obtenha o ortocentro H . O que você pode falar sobre os pontos H e B ? Acontece o mesmo com o ortocentro obtido por seu colega? Verifique se aconteceu o mesmo com os outros colegas da classe. *Os pontos H e B coincidem para todos os triângulos retângulos em B .*

Fonte: Bianchini (2018, p.164)

O exercício de número 8 (Figura 38) constitui um vínculo com as orientações que o autor inseriu no assunto de alturas, uma vez que o professor poderá utilizá-lo naquele momento específico, propiciando um debate e a construção coletiva de uma solução. Assim, todos poderão analisar as figuras uns dos outros, elaborando hipóteses e fazendo conclusões acerca do que de fato acontece com o ortocentro obtido. Esta pode ser uma oportunidade para que o professor utilize o mesmo recurso para verificar a localização do ortocentro em outros tipos de triângulos.

No manual do professor, consta um bloco de sugestões de atividades destinadas a cada um dos assuntos trabalhados no livro. No tocante às cevianas, o autor propõe algumas dobraduras e alguns tópicos com régua e compasso para a construção dos pontos notáveis de um triângulo.

- Abordagem histórica do conteúdo de cevianas do triângulo

Por mais que existam inserções históricas na obra, em relação às cevianas não foi constatado tal recurso.

- Ilustrações

A obra dispõe de ilustrações que têm como propósito auxiliar e expandir a compreensão do leitor acerca dos temas estudados, ou seja, elas buscam promover um diálogo com o texto e com os conceitos. Desse modo, constatamos a presença de gráficos, tabelas, fotografias, produções artísticas, entre outras.

- Indicação de leitura complementar

O autor inseriu sugestões de leitura direcionadas para o aluno e também para o professor. As sugestões voltadas aos professores foram organizadas de acordo as Unidades Temáticas da BNCC, tópicos de Educação e de Educação Matemática: Jogos, Tecnologia, Avaliação, História da Matemática, com o intuito de contribuir com a formação continuada e com o desenvolvimento profissional docente.

3.11 As cevianas nos livros didáticos de Desenho Geométrico

No decorrer da nossa pesquisa, nos ocupamos em averiguar *se e como* os autores de livros didáticos de Matemática elaborados para os anos finais do Ensino Fundamental inseriram o termo “cevianas” em suas publicações didáticas. Os livros de Desenho Geométrico não eram alvo de nossa análise em um primeiro momento. Porém, ao ler a dissertação de Zuin (2001), percebi que os livros de Desenho Geométrico por ela analisados apresentavam o termo “cevianas”. Assim, mesmo não sendo o foco inicial de nossa investigação, resolvemos acrescentar este olhar ao nosso trabalho por acreditar que muitos professores de minha geração tiveram pouco ou nenhum contato com esse assunto, não só na Educação Básica como também no Ensino Superior. Uma vez que o “Desenho Geométrico foi sendo abolido das grades curriculares

da grande maioria das escolas, principalmente nas escolas públicas” (ZUIN, 2001, p.58), sobretudo após a promulgação da LDB 5692/1971, que não mais a considerava como uma disciplina obrigatória e outorgava às escolas a autonomia para elaborar e organizar a parte diversificada do seu currículo (ZUIN, 2001).

Nesse sentido, Zuin (2001) expõe que

No Brasil, também vivemos mudanças de programas, elaboração de novas propostas de ensino, sobretudo fazendo-se abandonar o Desenho Geométrico e relegar para um segundo plano o estudo da Geometria. A Geometria Plana e Espacial foi, ao longo das décadas, sofrendo cortes de vários tópicos nos ensinamentos fundamental e médio. (ZUIN, 2001, p.58).

No entanto, mesmo com essa redução, a partir da década de 1980, as editoras continuaram publicando e aperfeiçoando suas coleções. Zuin (2001) discute os pareceres do Conselho Nacional de Educação e, em alguns documentos, os pareceristas apontam a importância do Desenho Geométrico, o que não foi suficiente para despertar a atenção dos dirigentes da educação, de modo que o ensino das construções geométricas retornasse prontamente às salas de aula (ZUIN, 2002).

No final dos anos 1990, surgem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). No PCN de Matemática, destaca-se a importância da utilização do ensino de desenho geométrico:

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas [...], como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. (BRASIL, 1998, p. 51).

E também:

Outro aspecto que merece atenção neste ciclo é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes. É importante que essas atividades sejam conduzidas, de forma que mantenha ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade. (BRASIL, 1998, p. 68 - 69).

Zuin (2001) constatava, na época do seu estudo, que eram “necessários cursos de atualização nestas áreas, para os professores em serviço, e maior conscientização dos coordenadores de cursos de licenciatura em Matemática, de modo a reverter o quadro instalado por tantos anos.” (ZUIN, 2001, p.191). Consideramos que este posicionamento de Zuin é algo que continua válido nos tempos atuais.

Mas, afinal, o que dizem os livros didáticos de Desenho Geométrico acerca das cevianas de um triângulo?

Nos diversos livros aos quais tivemos acesso, verifica-se que o termo “cevianas” permeia quase todos os volumes que possuem temas relacionados aos triângulos. No Quadro 30, buscamos relacionar estes materiais em ordem cronológica:

Quadro 30 – Livros didáticos de Desenho Geométrico

Título/Autor	Ano de Publicação	Editora	Volume	Termo Cevianas
Desenho Geométrico – Carlos Marmo e Nicolau Marmo	1976	Moderna	Único	não
Desenho Geométrico, Isaías Marchesi Júnior	1986	Ática	2 e 3	sim
Desenho Geométrico de Giovanni, Fernandes e Ogassawara	1987	FTD	3	sim
Desenho Geométrico, Elizabeth Teixeira Lopes & Cecília Fujiko Kanegae (Pierro Netto)	1988	Scipione	2 e 3	sim
Geometria e Desenho Geométrico - Coleção Régua e Compasso, Putnoki	1990	Scipione	3	sim
Desenho Geométrico Texto e Atividades, Elizabeth Teixeira Lopes & Cecília Fujiko Kanegae (Pierro Netto)	1992	Scipione	3	não
Elementos de Geometria e Desenho Geométrico, Putnoki	1993	Scipione	1	sim
Desenho Geométrico – Marmo, Marmo e Marmo	1994	Scipione	1	sim
Desenho Geométrico para o 1º grau, Giovanni, Fernandes e Ogassawara	1996	FTD	3	sim
Desenho Geométrico Conceitos e Técnicas, Elizabeth Teixeira Lopes & Cecília Fujiko Kanegae (Pierro Netto)	2000a	Scipione	3	não
Desenho Geométrico Conceitos e Técnicas, Elizabeth Teixeira Lopes & Cecília Fujiko Kanegae (Pierro Netto) – Livro de Atividades	2000b	Scipione	3	sim
Novo Desenho Geométrico, Giovanni, Fernandes e Ogassawara	2002	FTD	3	sim
Desenho Geométrico – Edição Renovada, Giovanni, Giovanni Jr, Fernandes e Ogassawara	2010	FTD	3	sim
Desenho Geométrico, Giovanni, Giovanni Jr, Fernandes e Ogassawara	2016	FTD	3	sim
Desenho Geométrico Imagens e Ideias, de Sônia Jorge	2019	Saraiva	3	sim

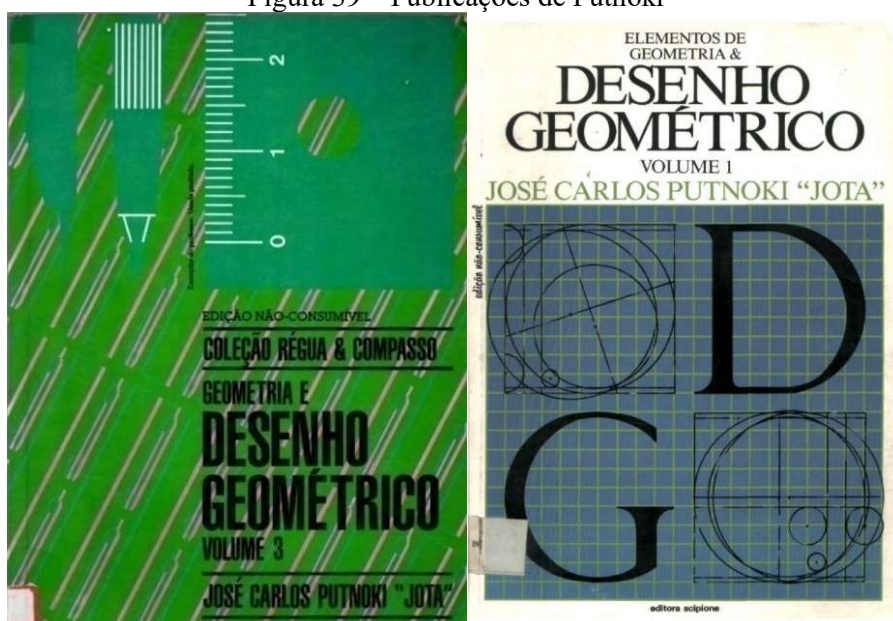
Fonte: Dados da pesquisa

O livro *Desenho Geométrico*, de Isaías Marchesi Júnior, foi publicado pela Editora Ática, em 1986. Detectamos a presença do termo “cevianas” nos volumes 2 e 3. Uma das características marcantes desse livro é que todas as construções são feitas sem a utilização de compasso. Segundo Zuin (2001),

No capítulo dedicado às cevianas do triângulo, a altura é traçada só com a utilização do jogo de esquadros. Como não há a explicação de como se traça uma bissetriz com a utilização do compasso, o incentro de um triângulo será determinado traçando-se as bissetrizes internas com o auxílio do transferidor. O mesmo se dará para a determinação do baricentro, sendo os pontos médios dos lados do triângulo obtidos com a régua graduada. E, assim, se continua em todo o livro, sem a utilização do compasso. (ZUIN, 2001, p.140).

A *Coleção Desenho Geométrico*, de Elizabeth Teixeira Lopes & Cecília Fujiko Kane-gae, editada em 1988 pela Editora Scipione, apresenta o estudo das cevianas em dois momentos. O primeiro, no volume 2, no capítulo intitulado *Triângulos*, que busca apresentar os elementos de um triângulo, a classificação e as cevianas. No terceiro volume, as autoras ampliam estes conteúdos, incluindo, além das cevianas, conceitos, elementos, classificação, propriedades e construção de triângulos. Em 1993, no terceiro volume da segunda edição da *Coleção Desenho Geométrico – Texto & Atividades* (das mesmas autoras e organizado sob a supervisão pedagógica de Scipione de Pierro Netto), que aborda altura, mediana e bissetriz de um triângulo, não foi constatada a presença do termo “cevianas”.

Figura 39 – Publicações de Putnoki

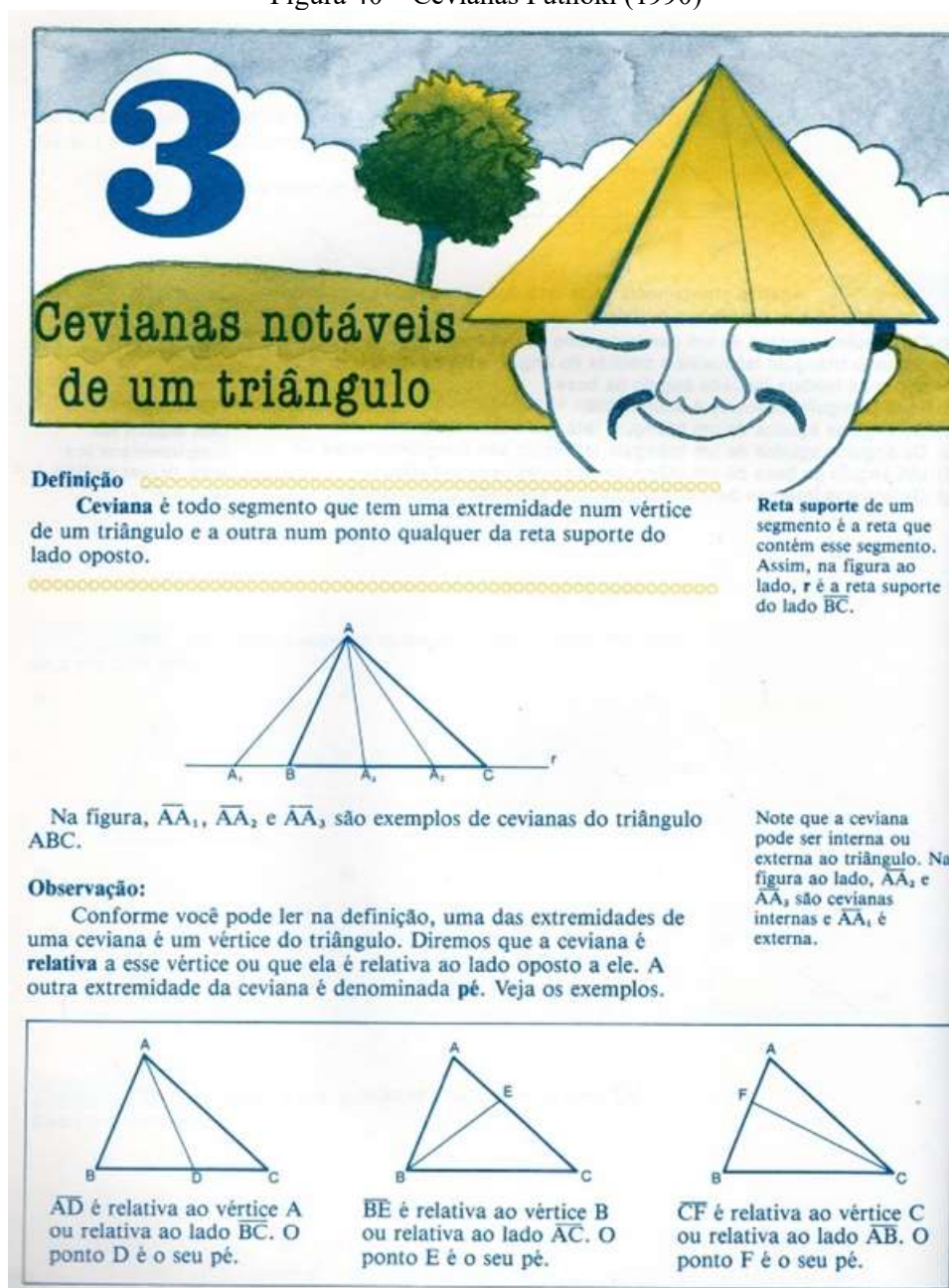


Fonte: Putnoki (1990, 1993)

No início da década de 1990, novas coleções foram publicadas (Figura 39), como é o caso das coleções *Geometria e Desenho Geométrico* e *Elementos de Geometria & Desenho Geométrico*, ambas de José Carlos Putnoki (“Jota”), pela Editora Scipione, sendo a segunda direcionada para o antigo segundo grau.

Na obra *Geometria e Desenho Geométrico*, volume 3, o terceiro capítulo dedica-se exclusivamente ao estudo das cevianas notáveis de um triângulo, no qual o autor buscou relacionar os conceitos de Geometria à prática de Desenho Geométrico (Figura 40).

Figura 40 – Cevianas Putnoki (1990)



Fonte: Putnoki (1990, p.38)

No Quadro 31, visualizam-se as definições apresentadas por Putnoki (1990):

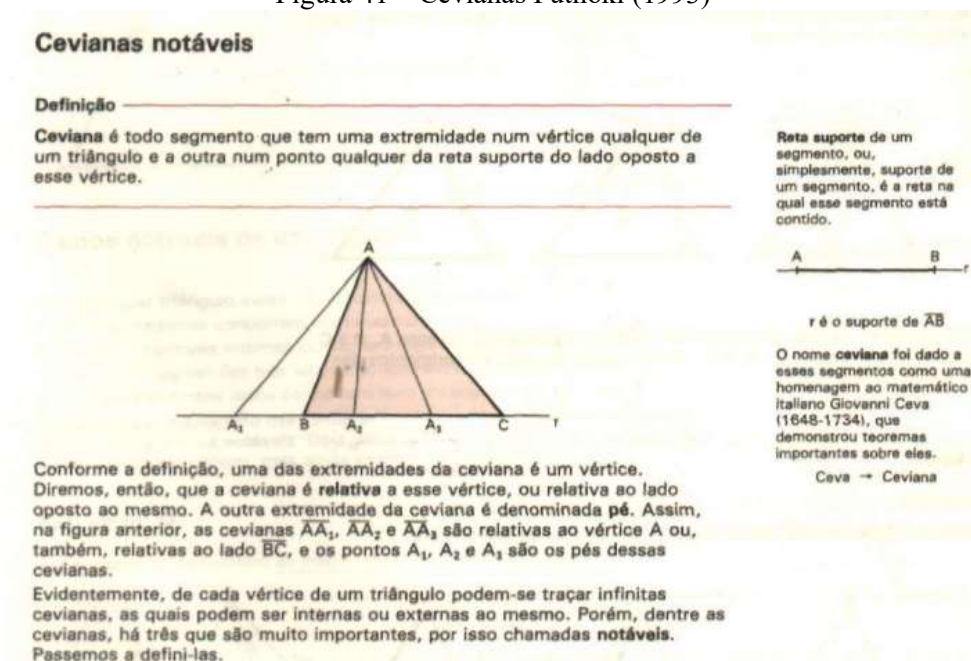
Quadro 31 – Definições Putnoki – (1990)

Elementos do triângulo	
Ceviana	“É todo segmento que tem extremidade num vértice de um triângulo e outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto.”
Altura	“É a ceviana perpendicular a um lado do triângulo ou à reta suporte desse lado.”
Mediana	“É a ceviana que tem o seu pé no ponto médio de um lado do triângulo.”
Bissetriz interna	“É a ceviana que divide um ângulo interno de um triângulo em dois ângulos congruentes.”

Fonte: Putnoki (1990, p.38-41)

O livro *Elementos de Geometria & Desenho Geométrico – volume 1*, aqui referenciado, teve sua quarta edição publicada em 1993. O estudo das cevianas é realizado no décimo sexto capítulo, na seção *Cevianas Notáveis* (Figura 41), cuja abordagem se assemelha com a da publicação de 1990 para o Ensino Fundamental, tanto que as definições propostas pelo autor trazem pequenos acréscimos de termos, como, por exemplo, na definição de bissetriz, ao evidenciar que o ângulo será dividido em dois ângulos adjacentes e congruentes.

Figura 41 – Cevianas Putnoki (1993)



Fonte: Putnoki (1993, p.143).

Em relação à inserção de tópicos de história, verificamos uma nota localizada na margem direita da página 143 (Figura 41), informando que foi dado a estes segmentos o nome “cevianas”, em homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva (PUTNOKI, 1993). No entanto, o mesmo não se verificou no livro *Geometria e Desenho Geométrico*, volume 3, da Coleção Régua e Compasso.

Para Zuin (2001), a partir da década de 1990, ocorreu uma interrupção em relação à metodologia utilizada nos anos anteriores com as publicações de Putnoki, que trabalhavam a teoria da Geometria Plana utilizando dobraduras e algumas inserções históricas. Desse modo, o material didático por ele abordado busca agregar novas tendências da Educação Matemática que advogam a favor da inclusão da História da Matemática no ensino, bem como sugerem atividades que recorrem ao emprego de materiais concretos. Por este ângulo, Putnoki (1990) argumenta que, na Coleção Régua e Compasso,

[...] procurou-se seguir o caminho pelo qual a própria geometria evoluiu historicamente. Assim, nos dois primeiros volumes da coleção, as propriedades geométricas são estabelecidas fundamentalmente com recursos da intuição e da verificação experimental, através das dobraduras ou de resultados gráficos obtidos com régua e o compasso. No terceiro volume é que se apresenta o conceito de demonstração e, a partir daí, gradativamente, procura-se discutir o método dedutivo como meio de expor, de maneira lógica e organizada, os estudos de geometria. (PUTNOKI, 1990, p.5).

Outro livro que continua sendo editado até hoje é a coleção *Desenho Geométrico*, de José Rui Giovanni, Tereza Morangoni Fernandes e Elenice Lumico Ogassawara, publicado em 1987, pela Editora FTD, no qual

[...] os autores iniciam o terceiro volume com as construções fundamentais com régua e compasso. É nesse momento que são definidas as cevianas do triângulo e suas propriedades, passando a construções que envolvem inclusive a medida de uma mediana, altura ou bissetriz relativa a um dos lados, como um dos dados do problema. (ZUIN, 2001, p.135).

Na edição renovada, publicada em 2010, o termo “ceviana” aparece isolado em uma frase no final da página, não havendo nenhum aprofundamento na explanação desse conceito na apresentação das alturas, medianas e bissetrizes. Entretanto, na edição de 2016, os autores abriram duas seções no capítulo dedicado ao estudo dos triângulos para abordar as cevianas e as construções de cevianas e, por último, utilizam estes conceitos para realizar a construção de triângulos (Figura 42).

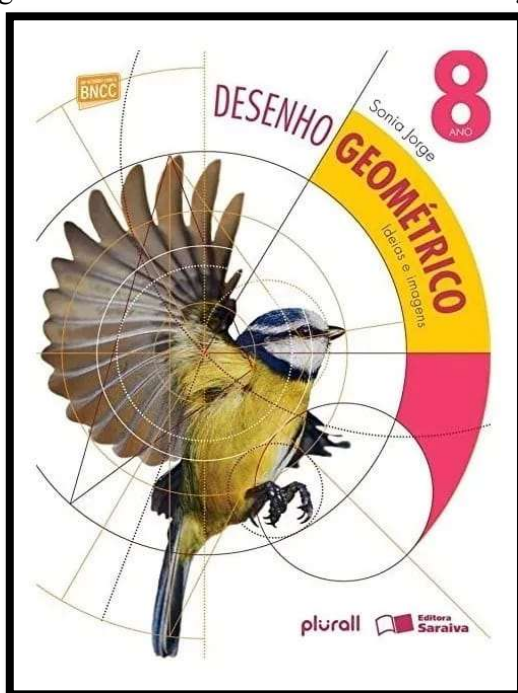
Figura 42 – Estudo dos triângulos, *Desenho Geométrico – Vol 3* (2016)

Tópico 2 – Triângulos	21
Elementos do triângulo	21
Cevianas	22
Pontos notáveis nos triângulos	23
Construção de triângulos	25
1. Construir um triângulo ABC conhecidas as medidas dos três lados	25
2. Construir um triângulo ABC conhecidas as medidas de dois lados e do ângulo formado por esses lados	27
3. Construir um triângulo ABC conhecidas as medidas de um lado e dos ângulos adjacentes a esse lado	28
Construção de cevianas	29
1. Dado um triângulo ABC, traçar a altura relativa a um dos lados	29
2. Dado um triângulo ABC, traçar a mediana relativa a um dos lados	29
3. Traçar a bissetriz interna relativa a um dos ângulos de um triângulo	30
Determinação de pontos notáveis no triângulo	30
1. Determinar o ortocentro de um triângulo	30
2. Determinar o baricentro de um triângulo	31
3. Determinar o incentro de um triângulo	31
Construções de triângulos usando cevianas	32
1. Construir um triângulo isósceles, dadas as medidas da base e da altura	32
2. Construir um triângulo, dadas as medidas de um lado, de um ângulo adjacente e da altura relativa a esse lado	32
3. Construir um triângulo, dadas as medidas de dois de seus lados e da altura relativa a um deles	33
4. Construir um triângulo equilátero, dada a medida da sua altura	34
5. Construir um triângulo isósceles, dadas as medidas da sua altura e de um ângulo da base	35
6. Construir um triângulo, dadas as medidas de dois lados e da mediana relativa a um desses lados	36
Congruência de triângulos	37

Fonte: Giovanni *et al.* (2016, p.4)

Lopes e Kanegae, no início dos anos 2000, lançaram a *Coleção Desenho Geométrico – Conceitos e Técnicas*, com doze volumes – 4 de conceitos, 4 de atividades conceituais e 4 blocos de construções – destinados aos anos finais do Ensino Fundamental. Os autores incluem uma grande quantidade de atividades envolvendo dobraduras, malhas quadriculares e tangram. Não há citação do termo “cevianas” no livro-texto referente ao terceiro volume, no entanto, no caderno de atividades, na página 55, o termo “cevianas” surge em um exercício: “Identifique as cevianas traçadas (altura, mediana ou bissetriz)” e em uma cruzadinha na página 56. (LOPES e KANEGAE, 2000b, p.55-56).

Figura 43 – Desenho Geométrico Ideias e Imagens



Fonte: Jorge (2019)

Por último, temos a coleção *Desenho Geométrico Ideias e Imagens* (Figura 43), de Sônia Jorge, composta por quatro volumes, publicada em 2019. Recentemente, este material passou por uma revisão e foi completamente adaptado para contemplar as habilidades da BNCC. O estudo das cevianas acontece no terceiro capítulo, intitulado “*Os triângulos e as cevianas*”. Na abertura, a autora evidencia a importância do triângulo e ilustra sua rigidez por meio das estruturas triangulares que constituem a Torre de Shukhov, em Moscou. Antes de iniciar o estudo das cevianas, é realizada uma revisão acerca dos elementos, classificação e existência dos triângulos, para, na sequência, serem apresentadas as cevianas e os pontos notáveis dos triângulos.

Em relação à inserção de tópicos de história, há uma nota no *box Você sabia?*, que informa: “O nome ceviana é uma homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva. Ele formulou em 1678, um teorema estabelecendo as condições para que três cevianas sejam concorrentes.” (JORGE, 2019, p.74).

Nota-se que Sonia Jorge busca uma integração entre a Geometria e o Desenho Geométrico, atrelada a alguns tópicos nos quais é empregado o uso da tecnologia. Nesse sentido, Jorge (2019) expõe que o Desenho Geométrico deve caminhar lado a lado com a Geometria, já que ambas as disciplinas possuem características próprias e, ao mesmo tempo, complementares e, por esse motivo, é impossível conceber um curso de Desenho Geométrico sem a inclusão da Geometria e vice-versa.

3.12 Análise global dos livros didáticos

Alguns pesquisadores afirmam que o ensino de Geometria foi, de certo modo, abandonado³⁰, enquanto, para outros, essa disciplina entrou em um processo de desvalorização, em decorrência do Movimento da Matemática Moderna. Entretanto, em nossas análises, ficou evidente que em determinados livros, após o período supracitado, apareciam uma grande quantidade de conteúdos de Geometria, como é o caso das obras de Sangiorgi (1970) e Name (197?). Então, cabe questionar: a Geometria teria sido mesmo “abandonada”?

Para Zuin (2011), o fato de alguns pesquisadores não terem tido um olhar mais amplo para os livros didáticos utilizados nas escolas pode ser um dos fatores que os levaram a chegar à conclusão de que a Geometria não estivesse presente nas escolas. Nesse mesmo caminho, na concepção de Oliveira, Silva e Valente (2011), distante dessa ideia de “abandono”, na verdade, a Geometria passou a ser apresentada com um viés inovador. Desse modo, inferimos não ser possível generalizar que a Geometria sofreu um abandono tão extremado, a ponto de todos os autores de livros didáticos relegá-la a um segundo plano. No entanto, pelo menos nas obras analisadas, nota-se uma tendência de que o ensino de Geometria ocorra após a apresentação dos tópicos aritméticos e algébricos, nessa ordem.

Acreditamos que a relevância dada a um conteúdo específico pode ser mensurada, em certa medida, por meio da contagem do número de páginas relativas ao estudo desse campo do conhecimento. No Quadro 32, relacionamos os livros utilizados em nossa pesquisa, evidenciando o percentual de páginas destinadas ao estudo de Geometria.

³⁰ Segundo Zuin (2001), pode-se citar, como exemplo, os trabalhos de Pavanello (1989) e Nascimento (1994).

Quadro 32 – Número de páginas destinadas ao estudo de Geometria

Autores	Páginas totais do livro	Páginas destinadas ao estudo da Geometria	Percentual
Sangiorgi (1970)	314	204	65%
Name (197?)	192	92	48%
Pierro Netto <i>et al.</i> (1981)	288	135	47%
Sardella e Matta (1985)	265	94	35%
Pierro Netto (1991a)	215	50	23%
Pierro Netto (1991b)	232	115	49%
Silveira e Marques (1995)	296	144	49%
Centurión e Jakubovic (2012)	256	84	33%
Silveira (2015)	296	112	38%
Silveira (2018)	248	63	25%
Bianchini (2018)	272	77	28%

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação à presença do termo “cevidiana” nos livros analisados, constatamos que as obras de Sangiorgi (1970), Name (197?), Pierro Netto *et al.* (1981), Sardella e Matta (1985), Pierro Netto (1991a) e Pierro Netto (1991b) não o mencionaram no texto (Quadro 33).

Quadro 33 – Presença do termo cevidiana no livro didático

Autores	Contém o termo “cevidianas”
Sangiorgi (1970)	–
Name (197?)	–
Pierro Netto <i>et. al.</i> (1981)	–
Sardella e Matta (1985)	–
Pierro Netto (1991a)	–
Pierro Netto (1991b)	–
Silveira e Marques (2002)	X
Centurión e Jakubovic (2012)	X
Silveira (2015)	X
Silveira (2018)	X
Bianchini (2018)	X

Fonte: Dados da pesquisa

Contudo, nos deparamos com seis obras, nas quais os autores, mesmo não acrescentando a palavra “cevidiana” no livro do aluno, incluíram-na no manual do professor. Estas são:

- *Aprendizagem e Educação Matemática*, 7ª série, de Giovanni e Giovanni Jr, publicado em 1990, pela Editora FTD.
- *Praticando Matemática – Edição Renovada*, 8º ano, 3ª edição, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, publicado em 2012, pela Editora do Brasil.
- *Matemática – Coleção Linguagens e Aplicações*, 8º ano, 1ª edição, de Antônio Nicolau Youssef, Clarisse Gameiro e Heloísa Maria Hessel, publicado em 2015, pela Editora Cereja.

- *Praticando Matemática – Edição Renovada*, 8º ano, 4ª edição, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, publicado em 2015, pela Editora do Brasil.
- *Matemática Bianchini*, 8º ano, de Edwaldo Bianchini, publicado em 2015, pela Editora Moderna.
- *Matemática Realidade e Tecnologia*, 8º ano, de Joamir Souza, publicado em 2018, pela Editora FTD.

Em contrapartida, conforme evidenciado no Quadro 34, somente quatro das dezoito obras de Desenho Geométrico analisadas não continham o termo “cevianas”: Marmo e Marmo (1976) e Lopes e Kanegae (1992, 2000a).

Quadro 34 – Presença do termo ceviana nos livros de Desenho Geométrico

Autores	Contém o termo “cevianas”
Marmo e Marmo (1976)	-
Marchesi Júnior (1986a)	X
Marchesi Júnior (1986b)	X
Giovanni, Fernandes e Ogassawara (1987)	X
Lopes e Kanegae (1988a)	X
Lopes e Kanegae (1988b)	X
Putnoki (1990)	X
Lopes e Kanegae (1992)	-
Putnoki (1993)	X
Marmo e Marmo (1994)	X
Giovanni, Fernandes e Ogassawara (1996)	X
Lopes e Kanegae (2000a)	-
Lopes e Kanegae (2000b)	X
Giovanni, Fernandes e Ogassawara (2002)	X
Giovanni <i>et al.</i> (2010a)	X
Giovanni <i>et al.</i> (2010b)	X
Giovanni <i>et al.</i> (2016)	X
Jorge (2019)	X

Fonte: Dados da pesquisa

Araújo (2014) evidencia, em sua dissertação, que alguns teoremas e conceitos importantes, como, por exemplo, as cevianas, não são mencionados nos livros didáticos disponíveis no Guia do Livro Didático de Matemática do PNLD 2014. Contudo, cabe ressaltar que verificamos o contrário, pois o assunto está presente em uma nota no manual do professor do livro *Praticando Matemática – Edição Renovada*, 8º ano, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos, publicado em 2012, assim como no livro *Matemática Teoria e Conceito* – 8º ano, de Marília Centurión e José Jakubovic, na parte destinada ao aluno – ambos aprovados e integrantes do PNLD 2014.

Quando observamos a existência de alguma inserção histórica relacionada às cevianas ou à Giovanni Ceva, nos deparamos com um cenário mais restrito, sendo encontrada somente em duas das onze obras de Matemática investigadas e em três livros de Desenho Geométrico. Quase todas elas aparecem como notas no canto da página ou como pequenas observações em *box* específico para esse fim (Quadro 35).

Em ambos os casos, a História da Matemática é utilizada para apresentação de personagens e datas, não fazendo os nexos necessários ou utilizando-a como uma fonte de problematização do ensino.

Quadro 35 – Inserções históricas nos livros didáticos analisados

	Autores	Notas históricas relativas às cevi- anas	Notas históricas sobre Geometria
Matemática	Sangiorgi (1970)	–	–
	Name (197?)	–	–
	Pierro Netto <i>et al.</i> (1981)	–	X
	Sardella e Matta (1985)	–	–
	Pierro Netto (1991a)	–	X
	Pierro Netto (1991b)	–	X
	Silveira e Marques (2002)	–	X
	Centurión e Jakubovic (2012)	X	X
	Silveira (2015)	–	X
	Silveira (2018)	X	X
	Bianchini (2018)	–	X
Desenho Geométrico	Marmo e Marmo (1976)	–	–
	Marchesi Júnior (1986a)	–	–
	Marchesi Júnior (1986b)	–	–
	Giovanni, Fernandes e Ogassawara (1987)	–	–
	Lopes e Kanegae (1988a)	–	–
	Lopes e Kanegae (1988b)	–	–
	Putnoki (1990)	–	X
	Lopes e Kanegae (1992)	X	X
	Putnoki (1993)	X	X
	Marmo e Marmo (1994)	–	–
	Giovanni, Fernandes e Ogassawara (1996)	–	–
	Lopes e Kanegae (2000a)	–	–
	Lopes e Kanegae (2000b)	–	–
	Giovanni, Fernandes e Ogassawara (2002)	–	–
	Giovanni <i>et al.</i> (2010a)	–	–
	Giovanni <i>et al.</i> (2010b)	–	–
	Giovanni <i>et al.</i> (2016)	–	–
	Jorge (2019)	X	X

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação à abordagem de elementos históricos direcionados à Geometria, percebe-se que os autores buscaram inserir textos e figuras no decorrer das unidades e, em alguns casos, nota-se que foi separada uma pequena seção do capítulo, por vezes denominada *Um pouco de*

História – (Silveira (2015), Silveira (2018)), *Introdução* - (Pierro Netto *et al.* (1981), Silveira e Marques (2002)), *Para Saber mais* – (Bianchini (2018)) ou *Você Sabia?* – (Centurión e Jakubovic (2012) e Jorge (2019)).

O modo como os livros didáticos fundamentam os conceitos matemáticos e, consequentemente, como os autores propõem as definições influencia a forma com que o professor irá abordar o conteúdo, uma vez que boa parte dos docentes utiliza estes textos como um modelo a ser seguido. A seguir, foram apresentadas as definições propostas nos livros de Matemática para cevianas:

“[...] qualquer segmento que une um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.” (SILVEIRA E MARQUES, 2002, p. 193).

“[...] é um segmento de reta que liga um vértice de um triângulo ao seu lado oposto.” (CENTURIÓN E JAKUBOVIC, 2012, p. 186).

“[...] qualquer segmento com uma extremidade em um vértice de um triângulo e outra na reta suporte do lado oposto a esse vértice.” (SILVEIRA, 2015, p.214).

“[...] é qualquer segmento de reta com extremidade em um vértice de um triângulo e outra na reta suporte do lado oposto a esse vértice.” (SILVEIRA, 2018, p.132).

“[...] todo segmento de reta que tem como extremidades um vértice e um ponto da reta suporte do lado oposto.” (BIANCHINI, 2018, p.161).

Seguem as definições de alguns autores de livros de Desenho Geométrico para cevianas:

“[...] é todo segmento cujas extremidades são um vértice do triângulo e um ponto pertencente ao lado oposto a esse vértice (ou ao prolongamento desse lado).” (LOPES e KANEGAE, 1988, p.43).

“[...] é todo segmento que tem uma extremidade num vértice de um triângulo e a outra num lado oposto qualquer da reta suporte do lado oposto.” (PUTNOKI, 1990, p.38).

“[...] é todo segmento que tem uma extremidade num vértice qualquer de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice.” (PUTNOKI, 1993, p. 143).

“[...] é qualquer segmento com extremidade num vértice e com a outra (pé) no lado oposto.” (MARMO e MARMO, 1994, p.116).

“Todo segmento de reta que une um vértice do triângulo ao lado oposto desse vértice, ou ao seu prolongamento [...]” (GIOVANNI, FERNANDES e OGASSAWARA, 2002, p.24).

“[...] segmentos de reta que unem um vértice do triângulo ao lado oposto a esse vértice ao seu prolongamento.” (GIOVANNI *et al.*, 2010, p.21).

“[...] é todo segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo e a outra no lado oposto.” (JORGE, 2019, p.74).

Percebemos que as definições propostas por Marmo e Marmo (1993), Centurión e Jakubovic (2012) e Jorge (2019) para o termo “cevianas” estão incompletas, pois omitem que ela

pode ter uma de suas extremidades no prolongamento de um dos lados do triângulo ou sobre a reta suporte a esse lado – como é o caso das alturas de um triângulo obtusângulo. Estas definições não foram capazes de abarcar todas as situações possíveis e, por este motivo, é presumível que elas levem os leitores à construção de conceitos que podem gerar dupla interpretação ou mesmo equívocos.

Silveira (2015), Silveira (2018) e Bianchini (2018) utilizam o conceito de reta suporte para propor suas definições de ceviana, contudo, somente Silveira (2018) define o que é reta suporte e insere uma figura representativa (Figura 33) que evita possíveis erros de interpretação e compreensão dos demais assuntos relacionados aos triângulos.

Outro ponto observado foi como os autores de livros didáticos definiram altura, bissetriz interna e mediana do triângulo. Constatamos que, entre os autores analisados, somente cinco – Sardella e Matta (1985), Silveira e Marques (2002), Silveira (2015), Silveira (2018) e Bianchini (2018) – inseriram a conceituação de incentro, ortocentro e baricentro em suas exposições, evidenciando que esses elementos são, respectivamente, provenientes das intersecções das três bissetrizes, das três alturas e das medianas de um triângulo.

No tocante à definição de mediana, não foram detectadas divergências no modo como todos os autores a apresentaram (Quadro 36).

Quadro 36 – Definição de mediana do triângulo

Autores	Definição de mediana
Sangiorgi (1970)	“[...] é o segmento que une o ponto médio desse lado ao vértice oposto.”
Name (197?)	“[...] é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.”
Pierro Netto <i>et al.</i> (1981)	“[...] é o segmento determinado por um vértice e o ponto médio do lado oposto.”
Sardella e Matta (1985)	“[...] segmento cujos extremos são um vértice e o ponto médio do lado oposto a este vértice.”
Pierro Netto (1991a)	“Segmento determinado por um vértice e pelo ponto médio do lado oposto.”
Pierro Netto (1991b)	“[...] é o segmento de reta determinado por um dos vértices e ponto médio do lado oposto.”
Silveira e Marques (2002)	“[...] é o segmento de reta que une um dos vértices ao ponto médio do lado oposto.”
Centurión e Jakubovic (2012)	<i>Os autores não definiram formalmente o conceito de mediana de um triângulo.</i>
Silveira (2015)	“[...] é uma ceviana que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele.”
Silveira (2018)	“[...] é a ceviana que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele.”
Bianchini (2018)	“[...] é toda ceviana que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.”

Fonte: Dados da pesquisa

Constatamos que Centurión e Jakubovic (2012) não apresentaram as definições de altura, mediana e bissetriz, preferindo somente conceituá-las e, para isso, utilizaram como recurso

a figura de um triângulo escaleno. A seguir, propuseram a realização de algumas dobraduras, o que propiciou uma lacuna no que tange à formalização desses conceitos junto à construção de uma definição.

Diferentemente dos demais, Silveira (2015), Silveira (2018) e Bianchini (2018) incluem, em suas definições, o termo “ceviana”, aproximando-as das definições encontradas nos livros de Desenho Geométrico.

Como já anunciamos anteriormente, uma definição deve esgotar todas as possibilidades de representação de um determinado conceito – ou seja, todos os conceitos envolvidos nela devem ser claros e objetivos, sem deixar margem para dúvidas ou equívocos. Quando o autor utiliza um termo que não foi devidamente exposto no decorrer do texto, como é o caso da reta suporte, nas publicações de Sangiorgi (1970), Name (197?), Pierro Netto (1991a) e (1991b) (Quadro 37), acreditamos que isso pode dificultar a compreensão e a representação desse objeto matemático.

Quadro 37 – Definição de altura do triângulo

Autores	Definição de altura
Sangiorgi (1970)	“[...] é o segmento da perpendicular traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto.”
Name (197?)	“[...] é o segmento da perpendicular traçada de um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.”
Pierro Netto <i>et al.</i> (1981)	“[...] é o segmento de reta perpendicular a um dos lados (ou ao seu prolongamento) e determinado por esse lado e o vértice oposto.”
Sardella e Matta (1985)	“Segmento cujos extremos são um vértice e o ponto de intersecção do lado oposto. Esse segmento é perpendicular a esse lado ou ao seu prolongamento.”
Pierro Netto (1991a)	“É o segmento de reta determinado por um vértice e pela reta suporte do lado oposto; esse segmento é perpendicular à reta suporte do lado oposto.”
Pierro Netto (1991b)	“É o segmento de reta determinado por um dos vértices e pela reta suporte do lado oposto, esse segmento é perpendicular ao lado oposto.”
Silveira e Marques (2002)	“[...] é o segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto.”
Centurión e Jakubovic (2012)	<i>Os autores não definiram formalmente o conceito de altura de um triângulo.</i>
Silveira (2015)	“[...] é uma ceviana perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo.”
Silveira (2018)	“[...] é a ceviana que passa por um vértice do triângulo e é perpendicular à reta suporte do lado oposto a esse vértice.”
Bianchini (2018)	“[...] é a ceviana que une perpendicularmente um dos vértices ao seu lado oposto (ou ao seu prolongamento).”

Fonte: Dados da pesquisa

Sangiorgi (1970), Name (197?) e Centurión e Jakubovic (2012), mesmo incluindo em sua definição de altura o conceito de reta suporte ou do prolongamento de um dos lados do triângulo, não fazem uso de figuras para expor a ideia proposta. Para Laudares (2013), uma definição sem ilustrações ou descrita somente com a linguagem natural, como apresentado pelos autores citados, por mais completa que seja, pode não auxiliar na compreensão do conceito explicitado na definição.

No Quadro 38, apresentamos as definições de bissetriz interna do triângulo encontradas nos livros analisados:

Quadro 38 – Definição de bissetriz interna do triângulo

Autores	Definição de bissetriz interna
Sangiorgi (1970)	“[...] é o segmento da bissetriz desse ângulo compreendido entre o vértice e o lado oposto.”
Name (197?)	“[...] é o segmento que tem por extremidades um vértice e o ponto em que a bissetriz do ângulo desse vértice encontra o lado oposto.”
Pierro Netto <i>et al.</i> (1981)	“[...] é o segmento da bissetriz de um de seus ângulos, cujas extremidades são o vértice do ângulo e a intersecção com o lado oposto.”
Sardella e Matta (1985)	“[...] é o segmento contido na bissetriz de um ângulo cujos extremos são o vértice desse ângulo e a intersecção com o lado oposto.”
Pierro Netto (1991a)	“[...] é o segmento de reta que une um vértice ao lado oposto e divide o ângulo interno desse vértice ao meio.”
Pierro Netto (1991b)	“[...] é o segmento determinado por um vértice e pelo lado oposto a ele, esse segmento divide o ângulo do vértice em dois ângulos de medidas iguais.”
Silveira e Marques (2002)	“[...] é o segmento da bissetriz de um ângulo interno situado entre o vértice e a intersecção com o lado oposto.”
Centurión e Jakubovic (2012)	<i>Os autores não definiram formalmente o conceito de bissetriz interna de um triângulo.</i>
Silveira (2015)	“[...] é uma ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos congruentes.”
Silveira (2018)	“[...] é a ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos congruentes.”
Bianchini (2018)	“[...] é toda ceviana que divide ao meio um dos ângulos internos do triângulo.”

Fonte: Dados da pesquisa

Julgamos que as definições propostas por Pierro Netto (1991a), Pierro Netto (1991b), Silveira (2015), Silveira (2018) e Bianchini (2018) traduzem com maior assertividade e simplicidade o conceito de bissetriz do triângulo, já que nelas a ideia de que esta ceviana divide o ângulo interno em duas regiões iguais fica mais evidente que nas demais definições.

Com exceção de Centurión e Jakubovic (2012), todos os demais autores dos livros didáticos analisados introduzem o estudo das cevianas do triângulo tendo como alicerce a definição.

Ao analisarmos as imagens destinadas ao tema “cevianas”, chegamos à conclusão de que este recurso, na maioria das vezes, foi utilizado como meio de representar imageticamente as informações descritas no texto. Por exemplo, Silveira (2018) e Bianchini (2018), ao abordarem o conceito/definição de altura e ortocentro do triângulo, fazem a representação destes elementos em diferentes triângulos, buscando oportunizar a ampliação de imagens mentais e a leitura dessas noções, por meio da linguagem não verbal.

Em relação aos exercícios propostos pelos autores, buscamos analisá-los sob a luz da concepção de Chervel (1990), uma vez que esse pesquisador trata os exercícios como uma parte

indispensável da disciplina escolar. Ele ainda complementa que o sucesso de uma disciplina depende diretamente da qualidade desses exercícios.

Verificamos que, nas obras onde os autores destinaram uma unidade/seção específica para estudo das cevianas do triângulo, o percentual de exercícios foi maior que nos demais tópicos referentes ao triângulo. Name (197?) não inseriu nenhuma atividade relacionada ao tópico analisado, havendo um destaque maior para os conceitos de soma dos ângulos internos e congruência de triângulos.

No Quadro 39, confrontamos o quantitativo de exercícios destinados ao estudo dos triângulos com os propostos para o assunto de cevianas. Foram considerados também os autores que não incluem o termo “cevianas”, mas indicam atividades relacionadas à bissetriz, altura e mediana.

Quadro 39 – Quantitativo de exercícios relacionados às cevianas do triângulo

Autores	Total de exercícios destinados às unidades analisadas	Nº de exercícios destinados às cevianas	Percentual
Sangiorgi (1970)	25	3	12%
Name (197?)	12	0	0%
Pierro Netto <i>et al.</i> (1981)	75	9	12%
Sardella e Matta (1985)	35	1	2,8%
Pierro Netto (1991a)	45	3	6,6%
Pierro Netto (1991b)	47	2	4,3%
Silveira e Marques (2002)	59	7	11,8%
Centurión e Jakubovic (2012)	19	19	100%
Silveira (2015)	72	12	16,6%
Silveira (2018)	17	6	35,2%
Bianchini (2018)	23	12	52%

Fonte: Dados da pesquisa

Quando comparamos as edições de 2015 e 2018 do livro *Matemática Compreensão e Prática*, percebemos que quase quarenta por cento dos exercícios são destinados a fixar os conceitos de ângulos e soma dos ângulos internos do triângulo, bem como as atividades reservadas às cevianas também são utilizadas como pretexto para esse fim. Entretanto, não há perda da qualidade das atividades, as quais são bem elaboradas e contextualizadas.

Identifica-se a inclusão de exercícios nos quais a resolução se fixa em uma forma mecânica na maior parte dos livros analisados.

Nota-se, em alguns autores, a tentativa de uso de tópicos de desenho geométrico. “A inserção de atividades com a utilização de régua e compasso, nos livros de Matemática, são significativas na medida em que o livro didático é, muitas vezes, a única referência para o professor.” (ZUIN, 2001, p.191). Esta forma de condução é louvável, mas insistimos que essas

construções não devem ser realizadas de forma apartada dos conceitos geométricos, ou seja, com um fim em si mesmas. Estas construções constituem-se em um recurso extremamente rico para a aprendizagem desses entes geométricos, além de permitir a percepção de novas propriedades e aplicações (ZUIN, 2001).

Neste sentido, percebemos que alguns livros didáticos expõem os conceitos ou utilizam atividades oriundas do Desenho Geométrico, por vezes em quantidade insuficiente e, em algumas situações, de maneira descontextualizada, não estabelecendo os entrelaces necessários entre a Geometria e o Desenho Geométrico. Esta falta de conexão, conseqüentemente, pode dificultar o trabalho docente, já que uma quantidade expressiva de professores teve pouco e/ou nenhum contato com esses assuntos em sua formação (ZUIN, 2001).

CAPÍTULO IV

SOBRE O PRODUTO E SUA APLICAÇÃO

Mais uma vez fui levado a falar de futuro. Mas não somos nós, educadores, responsáveis pela preparação para o futuro? (D'AMBROSIO, 1997, p.60)

Neste capítulo, abordaremos a construção e a aplicação do Produto Educacional intitulado “*Cevianas notáveis do triângulo: elementos históricos e sugestões de atividades*”, como parte integrante da pesquisa de Mestrado que visa proporcionar um material paradidático que possa ser utilizado nas formações inicial e continuada de professores. Foram abordados tópicos de cunho histórico relacionados às *cevianas* do triângulo e ao *Teorema de Ceva*, agregando atividades práticas voltadas ao uso de dobraduras, de construções geométricas e de *softwares* de geometria dinâmica (*GeoGebra*).

4.1 Considerações sobre o Produto

Como parte integrante e obrigatória da pesquisa de Mestrado Profissional da PUC - Minas, o mestrando deve elaborar e aplicar um Produto Educacional que vise contribuir para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

No decorrer da pesquisa, constatamos que os livros didáticos (de autores renomados) mais utilizados em sala de aula não abordavam o termo “cevianas”, do mesmo modo que boa parte dos professores em atuação desconhecia sua existência.

Desse modo, elaboramos um material paradidático intitulado “*Cevianas Notáveis do triângulo: elementos históricos e sugestões de atividades*”, direcionado às formações inicial e continuada de professores de Matemática, bem como aos professores atuantes no Ensino Básico. Abordamos, principalmente, tópicos de cunho histórico relacionados às *cevianas* do triângulo e ao *Teorema de Ceva*, agregando atividades práticas voltadas ao uso de dobraduras, de construções geométricas e de *softwares* de geometria dinâmica.

A estrutura do material, seus conteúdos e objetivos encontram-se no Quadro 40:

Quadro 40 – Unidades do Material Paradidático

Cevianas Notáveis do Triângulo: elementos históricos e sugestões de atividades		
Capítulos	Conteúdos	Objetivos
Apresentação	• Finalidade do Material • Público-alvo	• Apresentar a finalidade e organização do material
Tópicos de História: vida e obra de Giovanni Ceva	• Dados biográficos relacionados a Giovanni Ceva	• Abordar tópicos de história relacionados às cevianas
Ressignificando o conceito de cevianas do triângulo	• Conceituação de Cevianas • Altura do triângulo e o ortocentro • Mediatriz do triângulo e o baricentro • Bissetriz interna do triângulo e o incentro	• Apresentar as cevianas notáveis – altura, mediana e bissetriz, além de seus respectivos pontos de interseção – ortocentro, incentro e baricentro.
Explorando as cevianas e pontos notáveis do triângulo	• Sugestão de atividades utilizando: - Dobraduras - Construções com régua e compasso - Construções com o GeoGebra	• Apresentar uma sequência de atividades, abordando as principais cevianas no triângulo e seus pontos notáveis, por meio de dobraduras, construções geométricas e utilização de <i>softwares</i> de geometria dinâmica (GeoGebra).

Fonte: Elaborado pelo autor

4.2 Aplicação do Produto e Resultados

Partindo da realidade que estamos vivendo – isolados socialmente, como meio de contenção do contágio e da disseminação da Covid-19 –, decidimos aplicar o produto em formato de minicurso a distância, por meio do *Google Meet*. O formulário de inscrição³¹ foi divulgado em diferentes redes sociais, nas quais os interessados deveriam respondê-lo informando um endereço de e-mail e alguns dados relacionados à sua atuação/formação. Desse modo, o *link* de acesso ao minicurso foi enviado somente para os inscritos.

O minicurso aconteceu no dia 18 de dezembro de 2020, de 17h às 19h, contando com a presença 60 participantes, entre professores de Matemática da Educação Básica e Superior e discentes do curso de Licenciatura em Matemática de onze estados brasileiros e do Distrito Federal, além de um angolano (Quadro 41).

³¹ Link de acesso: <https://forms.gle/UJp4f3p7meLyybS37>. O questionário encontra-se no Apêndice A.

Quadro 41 – Local de residência dos participantes

País	Estado	Nº de Participantes
Angola	Não informado	1
Brasil	Amapá	1
	Amazonas	3
	Bahia	1
	Brasília - DF	1
	Ceará	1
	Maranhão	1
	Minas Gerais	43
	Paraná	2
	Pernambuco	1
	Rio de Janeiro	2
	Rio Grande do Norte	1
	São Paulo	2
Total	13	60

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação aos quarenta e três participantes do estado de Minas Gerais, verificamos que eles estão distribuídos em 21 municípios: 8 são de Manhuaçu – local de residência do autor; e os demais, em grande parte, são professores da Rede CTPM (Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais).

Organizamos o minicurso em duas etapas: a primeira, com uma apresentação dos dados iniciais da pesquisa, com seus objetivos, metodologia, livros analisados, tópicos de história, definições e ressignificação das cevianas no triângulo; a segunda voltou-se para a realização de atividades práticas envolvendo dobraduras e construções com *software* de geometria dinâmica. Após o minicurso, foi enviado um formulário para que os participantes pudessem realizar uma avaliação³² do minicurso, com a finalidade de compreendermos a abrangência da atividade realizada e as impressões dos participantes. Para preservarmos a identidade dos integrantes da pesquisa, nomeamos os professores por *P1*, *P2*, *P3*, ..., *P48* e os discentes do curso de Licenciatura em Matemática por *D1*, *D2*, *D3*, ..., *D12*, embora alguns já lecionem na Educação Básica e um deles em um Projeto Social.

Nos quadros 42, 43, 44, 45 e 46, apresentamos alguns aspectos concernentes ao perfil dos participantes do minicurso. As informações foram retiradas da primeira parte do questionário e visam a obtenção de dados como idade, tempo de serviço, nível de atuação e formação dos participantes. Verificamos que, aproximadamente, metade dos participantes tem idade superior a 40 anos (Quadro 42). Consideramos que conhecer a idade dos pesquisados poderia agregar algumas impressões à nossa pesquisa, uma vez que quanto mais avançada, podemos inferir que maior seria a possibilidade de terem tido contato com a Disciplina de Desenho Geométrico.

³² Link de acesso: <https://forms.gle/qsisKv9Niu2hjNLf7>. O questionário encontra-se no Apêndice B.

Quadro 42 – Faixa etária

Faixa Etária	Quantidade de participantes
Até 19 anos	1
De 20 a 24 anos	6
De 25 a 29 anos	6
De 30 a 34 anos	7
De 35 a 39 anos	9
De 40 a 44 anos	12
De 45 a 50 anos	10
Mais de 50 anos	9

Fonte: Dados da pesquisa

A maioria dos participantes que atuam como docentes possui o título de especialista. O quantitativo de professores que possuem somente o curso de Graduação em Matemática é igual aos que concluíram a Pós-Graduação *Scripto Sensu* (Quadro 43). Observamos que há entre os participantes a intenção de alcançar os níveis mais elevados de ensino, tanto que seis docentes estão matriculados em programas de Pós-Graduação *Scripto Sensu*. Contudo, acreditamos que este número ainda é muito pequeno, face à realidade educacional brasileira.

Quadro 43 – Nível de escolaridade dos participantes

Nível de escolaridade	Quantidade de participantes
Ensino Superior (em curso)	12
Ensino Superior Completo	5
Pós-Graduação Lato Sensu (completo)	27
Pós-Graduação Lato Sensu (em curso)	5
Pós-Graduação Stricto Sensu (completo)	5
Pós-Graduação Stricto Sensu (em curso)	6

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação ao tipo de escola, verificamos que dos quarenta e oito docentes, trinta e quatro dedicam-se exclusivamente a ministrar aulas na rede pública de ensino, enquanto onze dividem-se entre a rede pública e a rede privada. Entre os discentes, sete indicaram que estão ministrando a disciplina pela primeira vez ou que já tiveram alguma experiência, seja em substituição docente seja em aulas de reforço (Quadro 44).

Quadro 44 – Tipo de escola de cada participante

Tipo de escola	Quantidade de participantes
Rede pública	34
Rede privada	9
Rede pública e privada	11
Projeto social	1
Em nenhum dos níveis	5

Fonte: Dados da pesquisa

Pelo Quadro 45, podemos constatar que vinte e oito participantes lecionam simultaneamente em turmas do Ensino Fundamental e Médio, quatorze no Ensino Fundamental e dez exclusivamente no Ensino Médio. Somente três docentes atuam no Ensino Superior.

Quadro 45 – Nível de ensino

Nível de Atuação	Quantidade de professores
Ensino Fundamental	14
Ensino Médio	10
Ensino Superior	3
Ensino Fundamental e Médio, concomitantemente	28
Não atua	5

Fonte: Dados da pesquisa

No que diz respeito ao tempo de atuação como docente da disciplina de Matemática, observamos que dezesseis participantes possuem mais de 20 anos de docência; oito, de 16 a 20 anos; e doze, de 11 a 16 anos. Notamos que seis participantes declararam que 2020 foi o primeiro ano que estavam lecionando (Quadro 46).

Quadro 46 – Tempo de docência em Matemática

Faixa etária	Quantidade de participantes
Não atuou	5
Até 1 ano	6
De 1 a 2 anos	2
De 3 a 5 anos	5
De 6 a 10 anos	6
De 11 a 15 anos	12
De 16 a 20 anos	8
Mais de 20 anos	16

Fonte: Dados da pesquisa

A segunda parte do questionário foi composta por questões que buscavam levantar dados acerca dos livros utilizados pelos participantes em dois momentos distintos: 1) livros com os quais estudaram quando eles mesmos eram alunos do Ensino Fundamental; 2) livros que utilizam atualmente em sua prática docente.

Na terceira parte, buscamos averiguar se eles conheciam o termo “cevianas” ou algum tópico de história relacionado a Giovanni Ceva. A seguir, indagamos se nos materiais utilizados por eles o assunto cevianas se fazia presente.

Por último, buscamos a experiência dos participantes com as disciplinas de Desenho Geométrico (DG) e História da Matemática. Procuramos saber também se, em sala de aula, ao ensinar Geometria, os docentes costumavam fazer uso de recursos manipulativos, tais como

dobraduras, GeoGebra ou construções com régua e compasso. Buscamos organizar essas informações no Quadro 47, no qual as respostas dos participantes estão dispostas em grupos, conforme o nível de escolaridade.

Quadro 47 – Informações fornecidas pelos participantes

Participantes	Afirmou conhecer o termo “cevianas”	Afirmou conhecer ou já ouviu falar em Giovanni Ceva	Escolaridade	Observação
D1	X	X	Superior Incompleto	Conheceu o termo “cevianas” pela disciplina de DG, que fez no curso de Licenciatura. Atua em um Projeto Social. Recorda-se de ter estudado com os Livros do Dante.
D2	--	--		Recorda-se de ter estudado com o livro Matemática Bianchini (capa vermelha).
D3	--	--		Informou ter estudado com os livros do Dante.
D4	--	--		Lembra-se de ter utilizado o Livro Matemática Paiva.
D5	--	--		Ainda não atua como professor. Informou ser aplicador em seu país.
D6	X	--		Conheceu o termo “cevianas” pela disciplina de Geometria Básica, que fez no curso de Licenciatura.
D7	--	--		Estudou no livro Matemática e Realidade.
D8	--	--		Informou ter estudado com os livros do Dante.
D9	--	--		Informou ter estudado no livro A Conquista da Matemática.
D10	--	--		Informou ter estudado com os livros do Dante.
D11	--	--		Informou ter estudado com os livros do Dante.
D12	--	--		Informou ter estudado na apostila Cadernos do Futuro.
P1	X	--	Superior Completo	Conheci quando passei a ministrar a disciplina de DG em um colégio particular. Utilizo o material da Rede Pitágoras.
P2	--	--		Informou ter utilizado em suas aulas os livros do Dante e Matemática Paiva.
P3	--	--		Utiliza o livro Matemática Contexto e Aplicações – Dante.
P4	X	--		Estudou na disciplina de DG em um curso técnico. Nos últimos anos, utilizou o livro Matemática Completa.
P5	--	--		Informou ter estudado no livro A Conquista da Matemática e, nos últimos anos, também o utiliza em suas aulas.
P6	X	--	Pós-Graduação Lato Sensu (em curso)	Conheci o termo em um curso de capacitação. Nos materiais que utilizo raramente vi a palavra cevianas.
P7	--	--		Estudou com os livros do Dante. Atualmente, trabalha com as apostilas do Sistema Eleva.

P8	--	--		Atualmente, trabalha com as apostilas do Sistema Positivo.
P9	X	--		Estudei DG no curso de licenciatura na UFJF, não me recordo de tê-lo estudado, mas conheço o termo.
P10	X	X	Pós-Graduação Lato Sensu (Concluído)	Estudei DG no ensino fundamental, nos últimos anos utilizei os livros do Dante e do Bianchini. Afirmou não se recordar de ver o termo nos materiais utilizados.
P11	--	--		Não me recordo de ver esses assuntos nos livros didáticos. Estudou com livros do Bianchini.
P12	X	--		Conheço do livro do Bianchini, que passamos a utilizar esse ano.
P13	X	--		Estudei no livro do Jairo Bezerra e Putnoki.
P14	X	X		Conheço da disciplina de DG, que fiz no ginásio. O termo raramente esteve presente nos materiais didáticos que utilizo, mas o incluo em minhas aulas.
P15	--	--		Estudei nos livros do Dante e atualmente leciono com A Conquista da Matemática.
P16	X	--		Conheci ao lecionar DG na rede particular. Enquanto aluno, lembro de ter usado os livros do Sangiorgi. Nos últimos anos, usei A Conquista da Matemática em minhas aulas e o termo não estava presente.
P17	--	--		Estudei no livro A Conquista da Matemática (capa branca) e atualmente leciono com um mais recente da mesma coleção.
P18	--	--		Trabalho com a coleção Praticando Matemática, não me recordo de ver esse termo nos conteúdos lecionados.
P19	--	--		Estudei no livro a Conquista da Matemática (capa vermelha) e atualmente uso o Sistema Positivo.
P20	--	--		Nos últimos anos, utilizei os livros A conquista da Matemática e Praticando Matemática.
P21	X	X		Conheci em uma disciplina do PREPES – PUC Minas, com a professora Elenice. Utilizo Sistema Positivo.
P22	X	X		Trabalho com a Coleção A Conquista da Matemática e Sistema Positivo.
P23	X	--		Estudei com livro de Álvaro Andriani, aqueles pequenos. Atualmente, utilizo o Sistema Positivo. Raramente o vejo nos livros didáticos.
P24	--	--		Utilizo a Coleção Praticando Matemática.
P25	X	--		Estudei nos livros do Scipione, mas não me recordo de ver esse assunto nele. Esse termo é mais recorrente nos livros de DG.
P26	X	X		Estudei as cevianas na disciplina de DG, quando fiz o antigo ginásio.
P27	X	--		Estudei na disciplina de DG. Utilizo a coleção do Dante e poucas vezes vi esse termo nos livros didáticos.
P28	--	--		Trabalho com o Sistema Positivo de Ensino.
P29	--	--		Estudei no livro a Conquista da Matemática e não me lembro desse termo nos livros que usei ou estudei.
P30	X	X		Estudei com o livro do Castrucci. Já as cevianas em DG na faculdade, no final dos anos 80.

P31	--	--	Pós-Graduação Lato Sensus (Concluído)	Utilizava o Projeto Araribá, esse ano chegou para nós o Livro Matemática Compreensão e Prática. Mas ainda não usamos.
P32	--	--		Trabalho com o Sistema Positivo de Ensino.
P33	X	X		Não me recordo em ter o assunto nos livros que estudei (Álvaro Andrini). Atualmente uso do Dante e Sistema Positivo. Conheci o termo na pós-graduação em Ensino e Matemática no PREPES – PUC Minas.
P34	--	--		Utilizo A Conquista da Matemática.
P35	X	X		No livro que uso (Bianchini, nova edição) tem apenas uma citação sobre o assunto.
P36	X	X		Por meio de pesquisas na internet. Trabalho com o Sistema Positivo.
P37	--	--		Utilizo o Sistema Positivo.
P38	X	--	Pós-Graduação Stricto Sensus (em curso)	Tive contato durante a leitura de inúmeros materiais e, que eu me lembre, esse termo não se encontra presente nos livros didáticos, somente os termos que compõem as cevianas.
P39	--	--		Matemática Bianchini e Sistema Positivo.
P40	X	--		Conheço dos livros de DG. Atualmente uso o livro A conquista da Matemática.
P41	X	X		Utilizo a Coleção Matemática Compreensão e Prática.
P42	--	--	Pós-Graduação Stricto Sensus (Concluído)	Utilizo o livro de Matemática Contexto e Aplicação.
P43	--	--		Utilizo o livro Matemática e Realidade do Iezzi.
P44	--	--		Nos últimos anos, estamos utilizando o Sistema Positivo de Ensino.
P45	X	--		Trabalho com a Coleção A conquista da Matemática. Tive contato com as cevianas no curso superior, na disciplina de Geometria I.
P46	--	--		Utilizo o livro A conquista da Matemática e Matemática Realidade e Tecnologia. Não me recordo de ver esses termos nos livros.
P47	X	X		Não tem nos livros que uso (Praticando Matemática e Sistema Positivo). Conheci por acaso, lendo alguns tópicos de História da Matemática.
P48	--	--		Estudei na Coleção a Conquista da Matemática. Utilizo o Sistema Positivo de Ensino.

Fonte: Dados da pesquisa

Quando indagados sobre os livros que fizeram parte do seu percurso educacional (como alunos ou professores), foram relatadas com maior frequência as seguintes obras:

1º - *A Conquista da Matemática*, de Castrucci, Giovanni e Giovanni Jr – muitos se referiram a ela recordando a cor da capa (vermelha e branca), quando se tratava da experiência enquanto aluno.

2º - *Matemática Bianchini*, de Edwaldo Bianchini.

3º - *Praticando Matemática*, de Álvaro Andrini.

4º - *Matemática e Realidade*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado.

5º - *Matemática Dante*, de Luiz Roberto Dante.

Todas as obras citadas pelos professores foram por nós analisadas no decorrer da pesquisa³³. Quanto ao livro *A Conquista da Matemática*, referente à 7ª série/8º ano, publicado nos anos de 1985, 1989, 1992, 1998, 2002, 2009 e 2018, não foi encontrada nenhuma menção às cevianas.

Em relação ao *Matemática Bianchini*, 2015, o termo “cevianas” apareceu como uma citação no manual do professor, e, na edição de 2018, o autor inseriu uma seção específica, intitulada “*cevianas de um triângulo*”. Nas edições anteriores, com as quais tivemos contato, o termo não estava incluído.

A obra *Praticando Matemática*, publicada nos anos de 1989, 1991 e 2006, no livro destinado ao aluno, não detectamos a presença da palavra “cevianas”, e nas publicações de 2012 e 2015 há algumas observações sobre o assunto destinadas somente ao professor. Tanto na obra *Matemática e Realidade* (1984, 1991 e 2005) quanto em alguns livros de Dante, não foi encontrada nenhuma inserção sobre o assunto.

Nesse sentido, alguns participantes nos relataram:

- “No livro que uso (Bianchini, nova edição) tem apenas uma citação sobre o assunto.” (P35).
- “Estudei no livro *A Conquista da Matemática* e não me lembro desse termo nos livros que usei ou estudei.” (P29).
- “Não me lembro de ver esse termo nos livros.” (P11).
- “Não tem nos livros que uso (*Praticando Matemática e Sistema Positivo*).” (P47).
- “Trabalho com a coleção *Praticando Matemática*, não me recordo de ver esse termo nos conteúdos lecionados.” (P18).
- “Utilizo o livro *A Conquista da Matemática e Matemática Realidade e Tecnologia*. Não me recordo de ver esses termos nos livros.” (P46).
- “Que eu me lembre, esse termo não se encontra presente nos livros didáticos, somente os termos que compõem as cevianas (altura, mediana e bissetriz).” (P38).

Se observarmos as informações dos professores P18 e P47, notaremos que ambos afirmam fazer uso do livro *Praticando Matemática* em suas aulas e que não se lembram de encontrar a palavra “cevianas” neles. Assim, podemos levantar duas hipóteses: a primeira é que eles não encontraram o termo por não trabalharem com turmas de 8º ano; a segunda é que, se atuam na referida série, não tiveram o interesse ou curiosidade em ler as orientações presentes no manual do professor, já que verificamos o contrário.

No que concerne à utilização deste recurso, Silva (2018) analisou o uso do manual presente nos livros didáticos por parte dos professores de Matemática do Ensino Fundamental em

³³ Consta no Apêndice C uma breve descrição desses e de outros livros por nós consultados.

Aracaju, Sergipe, e percebeu que poucos docentes faziam uso deste material. Mesmo sabendo da importância desse recurso, alguns alegaram que não tinham tempo, que as propostas não condiziam com a realidade do estudante ou que já estavam familiarizados com os conteúdos devido ao tempo de regência. Por mais que não possamos generalizar os resultados da pesquisa de Silva (2018), concordamos com esse autor e acreditamos que esta seja uma realidade semelhante em relação aos resultados da nossa investigação.

Outro ponto importante a ser levantando é o quantitativo de pessoas que desconhecem o termo “cevianas” ou que não possuem alguma referência histórica sobre o assunto (Quadro 48).

Quadro 48 – Resposta às questões nº 9 e 10

Resposta	Nº de participantes que	
	afirmaram conhecer o termo “cevianas”	afirmaram conhecer ou já ter ouvido falar em Giovanni Ceva
SIM	26	13
NÃO	34	47

Fonte: Dados da pesquisa

Constatamos que aproximadamente 57% dos participantes afirmaram desconhecer o termo “cevianas”. Alguns justificaram que esse assunto não estava inserido nos livros que utilizaram quando cursavam o Ensino Básico ou o Ensino Superior. Do mesmo modo, este tópico não consta nos materiais didáticos utilizados na prática docente e não se recordam se, em algum momento, esse assunto foi abordado por seus professores.

Em relação aos vinte e seis participantes que demonstraram conhecer a denominação “ceviana”, percebemos que doze revelaram ter estudado ou lecionado a disciplina Desenho Geométrico e, conseqüentemente, manusearam algum material didático destinado a esse assunto.

Abaixo, transcrevemos os trechos que nos levaram a essa conclusão:

- **“Conheço o termo cevianas da disciplina de DG, que fiz no curso de Licenciatura.”** (D1).
- **“Estudei na disciplina de DG em um curso técnico.** Nos últimos anos, utilizei o livro Matemática Completa.” (P4).
- **“Estudei DG no Ensino Fundamental,** nos últimos anos utilizei os livros do Dante e do Bianchini. Não me recordo de ver o termo nos materiais utilizados.” (P10).
- **“Conheço da disciplina de DG,** que fiz no ginásio. O termo raramente esteve presente nos materiais didáticos que utilizo, mas o incluo em minhas aulas.” (P14).
- **“Conheci ao lecionar DG na rede particular.** Enquanto aluno, lembro de ter usado os livros do Sangiorgi. Nos últimos anos, usei A Conquista da Matemática em minhas aulas e o termo não estava presente.” (P16).
- **“Estudei nos livros do Scipione,** mas não me recordo de ver esse assunto nele. **Esse termo é mais recorrente nos livros de DG.”** (P25).
- **“Estudei as cevianas na disciplina de DG,** quando fiz o antigo ginásio.” (P26).

- “**Estudei na disciplina de DG.** Utilizo a coleção do Dante e poucas vezes vi esse termo nos livros didáticos.” (P27).
- “Estudei com o livro do Castrucci. **Já as cevianas em DG na faculdade, no final dos anos 80.**” (P30).
- “**Conheço dos livros de DG.** Atualmente, uso o livro *A conquista da Matemática*.” (P40).

Outras situações também foram apresentadas com menor frequência, como, por exemplo, curso de capacitação, curso de especialização no PREPES – PUC Minas, algumas disciplinas do curso superior, leitura de materiais por conta própria, *WEB*, entre outros.

Em relação aos conhecimentos históricos sobre cevianas ou Giovanni Ceva, verificamos que aproximadamente 80% dos participantes da pesquisa não possuíam nenhuma referência histórica sobre o assunto – do mesmo modo que nos livros analisados.

Sobre a História da Matemática, o participante D1 relata que hoje compreende com mais clareza o que ocorria em sala de aula, quando era aluno da Educação Básica, e conclui: raramente havia algum tópico de história nas aulas de Matemática:

- Lembro que, em alguns livros, sempre aparecia um texto em destaque junto aos conteúdos estudados, que, na maioria das vezes, trazia alguma curiosidade ou fato histórico, mas meus professores nem chegavam a comentar ou solicitar que lêssemos. Na graduação, estou conhecendo um pouco mais sobre esse assunto e também por leituras extras que tenho feito por interesse próprio. (D1).

Acreditamos que o comentário acima pode refletir a realidade de muitos alunos e professores brasileiros. Em meados da década de 1990, Miguel e Brito (1996) já sinalizavam que nos cursos de formação de professores havia pouca ou nenhuma informação histórica sobre as origens e desenvolvimentos dos conteúdos matemáticos. Nesse sentido, inferimos que, mesmo incluindo uma disciplina específica de História da Matemática no currículo da maioria dos cursos de graduação em Matemática, não houve mudanças significativas e no caso das cevianas não é diferente. Mesmo aqueles professores que se interessam pelo assunto encontraram alguns obstáculos, como a falta de cursos direcionados à temática ou materiais mais completos, como também a insuficiência de recursos para prover essa atualização.

Vários participantes indicaram fazer uso de dobraduras, construções com régua e compasso e alguns, com mais frequência, o GeoGebra. Para a participante P35, a dobradura é um recurso simples que permite trabalhar com alguns conceitos matemáticos de forma eficiente:

- Por exemplo, esse ano para ensinar Simetria de Reflexão, utilizei do recurso das dobraduras, de maneira bem simples, porém efetiva. (P35).

Já P1 indica que gostaria de utilizar as dobraduras e, devido às aulas remotas, em tempos de pandemia, preferiu utilizar o GeoGebra:

- Sou professora de Desenho Geométrico para 8º e 9º ano no meu colégio. Eu assumi a disciplina que era dada por uma professora de Artes (formada em Educação Artística). No início, os alunos estranharam um pouco, pois busquei fazer uma aproximação muito maior com a Matemática, mas ainda uso recursos artísticos em vários momentos. Nunca usei dobraduras, mas gostaria de usar. Esse ano usei bastante o GeoGebra nas aulas on-line. (P1)

Em contrapartida, P9 relata que quase não utiliza as metodologias citadas no questionário e expõe uma realidade que inviabiliza o trabalho de muitos professores – a falta de recursos tecnológicos:

- Para ser sincera, quase não faço uso de recursos manipulativos. Principalmente o GeoGebra, não tem como! Pois a sala de informática da minha escola nunca está pronta para os alunos usarem. (P9)

Com o término do minicurso, encaminhamos para os participantes um *link* de acesso à avaliação, contendo cinco questões. Por se tratar de um período conturbado, já que realizamos o minicurso no final do ano letivo e também devido à sobrecarga de trabalho gerada pelo ensino remoto, recebemos o retorno somente de sete participantes.

Quando questionados a respeito das informações proporcionadas pelo minicurso, sobre as quais eles ainda não tinham conhecimento (Quadro 49), constatamos que a maioria já tinha algum entendimento acerca das atividades práticas que realizamos. Em contrapartida, no que diz respeito à definição de cevianas e aos tópicos de História relacionados a Giovanni Ceva, a metade dos participantes os desconhecia. Esse quantitativo foi ainda maior no que se refere ao Teorema de Ceva.

Quadro 49 – Informações que os participantes desconheciam

Quais informações o minicurso proporcionou que você não tinha conhecimento?	
Respostas	Quantitativo
Definição do termo “cevianas”	4
Tópicos de História relacionados a Giovanni Ceva	4
Teorema de Ceva ou Menelau	5
Sugestões de atividades	2

Fonte: Dados da pesquisa

Os sete participantes concordam que o conteúdo cevianas e do Teorema de Ceva deveria ser abordado nos cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática. Muitos declaram que esse assunto é, de certo modo, inédito, pois inexistiam em seus estudos. Nesse sentido, a participante P7 justifica que, em sua grade curricular, havia

“[...] mais matemática pura, como o Cálculo, Equações Diferenciais e Análise. Sem muitas aplicações no dia a dia, não tinha Desenho Geométrico e muito menos contexto histórico.” (P7).

A participante P6 elucida:

- Não tive contato com esses assuntos na Educação Básica, apenas no Ensino Superior (superficialmente). Atualmente, os utilizo em Cursinhos Preparatórios para o ENEM Vestibulares, a falta de familiaridade com esses termos pode gerar insegurança e medo quanto ao desenvolvimento de alguns conteúdos geométricos. (P6).

Um dos participantes sugeriu que poderíamos ter realizado mais atividades práticas, já que fizemos somente a aplicação de um exemplo para cada ceviana notável. Concordamos com ele e nos dispomos a encaminhar o produto final tão logo seja possível, a fim de que ele possa ter acesso a todas as atividades propostas. Outro agradeceu a oportunidade e sugeriu que iniciativas como essa sejam mais frequentes.

A aplicação do produto atendeu às nossas expectativas, no que se refere à participação dos envolvidos e à sua relevância para a validação de algumas de constatações que fizemos no decorrer da pesquisa. No decorrer da apresentação do minicurso, verificamos que alguns professores encontram dificuldade em realizar determinados passos e configurações nas construções utilizando o GeoGebra. Desse modo, incluímos ao produto três *applet on-line*, de modo que os participantes possam acessá-los para realizar as atividades propostas. A análise da aplicação e dos questionários respondidos pelos participantes nos permitiu realizar uma avaliação do produto educacional e de sua reorganização.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O homem não teria alcançado o possível se, repetidas vezes, não tivesse tentado o impossível.
(Max Weber)

Como professor de Matemática das redes pública e privada de ensino, percebo a dificuldade de alguns colegas, principalmente dos municípios mais distantes dos grandes centros, de terem contato com materiais e estudos recentes sobre Ensino de Matemática e História da Matemática. Os poucos livros destas áreas que chegam às escolas muitas vezes ficam inacessíveis dentro de armários na biblioteca. Além do mais, existe, entre alguns professores de Matemática, uma cultura errônea de não continuar se aperfeiçoando e buscando leituras extras (já que, na concepção deles, para lecionar basta “saber matemática”), ficando, na maioria das vezes, restritos ao livro didático.

Durante a realização da pesquisa, para cada hipótese levantada, foram inúmeros os caminhos que surgiram na busca por respostas, em alguns casos, elas se tornaram válidas, em outros, percebi que eram necessários novos embasamentos. Os principais referenciais para a condução da investigação se basearam em Chervel (1990), Julia (2002), Zuin (2001, 2007), Bardin (2017), Landra (2009), entre outros. O objetivo foi realizar uma pesquisa qualitativa, de cunho documental, com foco nos livros didáticos de Matemática, inicialmente, e Desenho Geométrico, posteriormente, publicados no período de 1970 a 2019. Foi verificado *se havia e como* ocorreu a apresentação do termo *cevianas* e de tópicos de História da Matemática relacionados a Giovanni Ceva, por autores de livros didáticos publicados no Brasil, no período em questão.

Nas muitas dissertações que li³⁴, percebi que os autores tendem a afirmar que o objeto de estudo desta pesquisa há muito tempo não compõe os programas curriculares das escolas de educação básica e superior em nosso país, assim como, na maioria das vezes, ele só é abordado em cursos que visam o ingresso em escolas militares ou com foco nas Olimpíadas de Matemática. Outros simplesmente dizem que esse assunto não faz parte do livro didático. No entanto,

³⁴ Posso citar como exemplo os trabalhos de Silva (2015), Araujo (2014) e Macedo (2014).

na revisão de literatura, não foi identificado nenhum(a) pesquisador(a) que verificou como o conteúdo relativo às cevianas estava disposto nos livros escolares.

Nesse sentido, esta pesquisa foi desenvolvida dentro do projeto coordenado por minha orientadora sobre análise de livros didáticos. Ter o livro didático como fonte se tornava relevante por acreditarmos que, por meio dele, seria possível compreender por que tantos alunos e professores alegam desconhecer um conteúdo específico da disciplina escolar [as cevianas do triângulo].

A análise das obras selecionadas permitiu-me verificar que o termo “cevianas” não estava presente em vários livros didáticos de Matemática até meados da década de 1990, fora as raras exceções em que ele aparece como uma nota no manual do professor, como, por exemplo, no livro *Aprendizagem e Educação Matemática*, 7ª série, de Giovanni e Giovanni Jr, publicado em 1990, pela Editora FTD.

Entre os livros analisados, verificamos que as alturas, as medianas e as bissetrizes internas do triângulo aparecem como *cevianas* na publicação do livro *Matemática*, de Ênio Silveira e Claudio Marques, publicado em 1995 e republicado em 2002.

Nos demais livros analisados, publicados depois deste ano, constatamos discretamente uma obra ou outra que inclui o termo “cevianas” em suas publicações, a saber, Centurión e Jakubovic (2012), Silveira (2015, 2018), Bianchini (2018) e Oliveira e Fugita (2018). Contudo, alguns livros que foram muito utilizados no país continuam não incluindo o termo em suas edições atuais, como, por exemplo, *A conquista da Matemática*, de Castrucci e Giovanni Júnior, e *Matemática e Realidade*, de Gelson Iezzi, ambos publicados em 2018. Em contrapartida, de forma expressiva, em quase todos os livros destinados à disciplina de Desenho Geométrico foi detectada a presença do termo “cevianas”.

Em relação à abordagem histórica relacionada a Giovanni Ceva e, consequentemente, às cevianas de um triângulo, verificou-se que nos tópicos presentes nos livros e compêndios de História da Matemática – mais utilizados nos cursos de licenciatura em Matemática³⁵ –, como, por exemplo Eves (2008) e Boyer (1974, 2002), as informações são breves, pouco detalhadas e, por vezes, incompletas, enquanto que em Struik (1989) e Roque (2012) elas são inexistentes.

No que diz respeito aos livros didáticos, verificamos que as notas históricas relacionadas às cevianas são inexistentes nas obras de Sangiorgi (1970), Name (197?), Pierro Netto *et al.*

³⁵ Em um levantamento realizado por Borges (2010, 2016) nos Programas de Ensino da disciplina de História da Matemática, ofertada por doze universidades públicas, foram catalogados 34 livros diferentes de História da Matemática sendo indicados como referência para essa disciplina, de tal forma que os livros-textos *História da Matemática*, de Carl Boyer, *Introdução à História da Matemática*, de Howard Eves, e *História Concisa das Matemáticas*, de Dirk Struik, foram os mais citados, ocupando a 1ª, 2ª e 3ª posição, respectivamente.

(1981), Sardella e Matta (1985), Pierro Netto (1991a, 1991b) Silveira e Marques (2002), Silveira (2015) e Bianchini (2018). Mesmo quando essas notas estão presentes no texto, como em Silveira (2018) e em Centurión e Jakubovic (2012), elas são pouco exploradas, sendo utilizadas apenas para a apresentação de personagens e de datas.

Vale ressaltar que Sangiorgi (1970), Name (197?) e Sardella e Matta (1985) não incluíram nenhum tópico de cunho histórico em toda a obra. Em geral, constata-se que a História da Matemática é pouco valorizada pelos autores dos livros analisados, pois ela é concebida por eles como um complemento informativo, desconsiderando, por vezes, que esta abordagem pode ser utilizada como meio de contextualização das atividades propostas, além de promover a interlocução com outras áreas do conhecimento humano, como, por exemplo, História, Geografia, Física e Engenharia.

A aplicação do produto educacional, através de um minicurso, foi de extrema importância para a mensuração de como o termo “cevianas” não está presente nos cursos de formação de professores de Matemática e que, por consequência, os discentes acabam não tendo acesso a ele nas aulas do Ensino Básico.

Por meio dos aspectos apontados no decorrer da pesquisa, infere-se que a não inclusão deste termo em sala de aula pode estar relacionada à sua omissão por parte dos autores dos livros didáticos. Este posicionamento corrobora com o proposto por Zuin (2001), pois para esta pesquisadora “os livros didáticos, através dos seus autores, influenciam diretamente os currículos, na medida em que os docentes se pautam nesses textos para preparar as suas aulas” (ZUIN, 2001, p.37), principalmente em um país como o nosso, de dimensões continentais e com desigualdades sociais tão aparentes, onde o livro didático ainda é uma das ferramentas/fontes mais utilizadas pelo professor, não só em sala de aula como também fora dela.

Uma pergunta se faz presente: os livros de Desenho Geométrico não poderiam suprir essa lacuna?

Acredito que sim, porém esta disciplina não integra o currículo de boa parte das escolas, principalmente as da rede pública, desde a década de 1970. As diretrizes pedagógicas orientam a fazer a inclusão de alguns tópicos de Desenho Geométrico junto à disciplina de Matemática, sem, no entanto, muitos de nós termos estudado este assunto, na educação básica ou no ensino superior.

Na visão de Demo (2018) fomos “vítimas da aula”, com poucas experiências de aprendizagem e muitos de nós professores ainda fazemos parte dos “tempos modernos” de Charles

Chaplin. Na verdade, é notório que entre a formação inicial e a atuação do professor há um distanciamento, principalmente no que se refere ao que o licenciando aprendeu enquanto discente da licenciatura, pelo método dedutivo, e o que ele realmente deverá ensinar na educação básica, pelo modo intuitivo (LORENZATO, 2010). Os cursos de licenciatura em Matemática ainda mantêm quase as mesmas características que possuíam na época de sua criação, no século passado (SBEM, 2013). Então, cabe perguntar: como esse professor ensinará esta disciplina de forma a entusiasmar e cativar o aluno, conduzindo-o a um processo de ensino e aprendizagem no qual tenha sentido e significado?

Inicialmente, acredito que não há uma receita milagrosa que possa ser seguida, mas julgo importante nos mantermos atualizados, com o intuito de minimizar as brechas que ficaram em nossa formação inicial. Em sequência, compartilho com Laudares (2013) a concepção de que o conceito relacionado a um objeto de conhecimento deve ser explorado antes de se propor a definição formal (ou seja, o inverso do que geralmente fomos ensinados a fazer) – metodologia esta que pode agir como facilitadora da aprendizagem significativa dos alunos –, pois a definição será elaborada de forma espontânea, acompanhando o processo de construção do conhecimento:

A partir da compreensão conceitual o estudante pode alcançar níveis satisfatórios de generalidades e abstração, e então formular a definição. Aprender um conceito requer, pela didática, um planejamento de situações variadas que privilegiem o trabalho com significados ao nível sensível e perceptível do estudante. (LAUDARES, 2013, p.8)

Nessa direção, em relação ao ensino das cевianas, suponho que as atividades envolvendo o uso de dobraduras, construções com régua e compasso e *softwares* de geometria dinâmica, como as aqui propostas no produto educacional, seriam soluções viáveis e possíveis de adaptar à realidade da maioria dos professores, além de propiciarem aos educandos a possibilidade de manusear objetos concretos, construir figuras, observar, levantar hipóteses, confrontar ideias e estabelecer relações, habilidades estas requeridas pela BNCC.

Além do mais, ao permitir que os alunos tenham experiências concretas relacionadas aos assuntos desenvolvidos em sala de aula, temos a oportunidade de levá-los a compreender a importância de provar e/ou demonstrar logicamente as propriedades estudadas, bem como um meio de legitimar ou não as hipóteses por eles levantadas.

Outro recurso importante é a História da Matemática, que oportuniza ao professor meios de evidenciar a Matemática como criação humana em pleno desenvolvimento, e que sua consolidação enquanto ciência perpassa em diferentes tempos e culturas, não sendo restrita a somente alguns poucos personagens (BRASIL, 2017).

Na fase final da escrita desta dissertação, estou ainda mais convencido da necessidade de estudar e compreender a trajetória dos conteúdos integrantes das disciplinas escolares como um dos caminhos para se conhecer os retrocessos e permanências dentro de um contexto específico, com um olhar mais crítico, sob o ponto de vista histórico e metodológico, permitindo-nos inferir sua relação e/ou efeitos provocados no ensino atual.

O estudo aqui realizado seguiu um dos caminhos entre os tantos outros que se apontaram neste vasto horizonte que é uma pesquisa acadêmica. As lacunas presentes, dentro do que não abordei ou, eventualmente, não vislumbrei, poderão ser preenchidas com novas pesquisas, a partir de outras análises e indagações.

REFERÊNCIAS:

- ALPOIM, José Fernandes Pinto. **Exame de Artilheiros**. Lisboa: Oficina de Jozé Antonio Plates. 1744. Disponível: <https://archive.org/details/examedeartilheir00alpo/page/42/mode/2up>. Acesso em: 22 out. 2020.
- AMATI, Wladimir Mendes. **A contribuição de José Fernandes Pinto Alpoim no ensino das técnicas aplicadas a geometria e a ciência no exame de bombeiros**. 2010. 81 f. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.
- ARANHA, Maria Lúcia de Arruda. **Filosofia da Educação**. 2 ed. rev. e ampl. São Paulo: Moderna, 2002.
- ARAÚJO, Genaldo Oliveira de. **Cevianas e pontos associados a um triângulo: uma abordagem com interface no ensino básico**. 2014. 116 f. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014
- AULETE, Caldas. **Novíssimo Aulete Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2011.
- BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BECHARA, Evanildo. **Dicionário da Língua Portuguesa Evanildo Bechara**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2011.
- BELHOSTE, Bruno. Apresentação. In: VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume/FAPESP, 1999.
- BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. **Livro didático e conhecimento histórico: uma história do saber escolar**. 1993. 369f. Tese (Doutorado em História) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.
- BORGES, Marcos Francisco. **Ciência e Religião: reflexões sobre os livros de história da matemática e a formação do professor**. 2010. 264f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.
- BORGES, Marcos Francisco. Um estudo sobre a relação entre a matemática e a religião presente nos livros de história da matemática utilizados em cursos de licenciatura. **HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática**. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2016.
- BOYER, Carl B. **A História da Matemática**. Tradução de Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- BOYER, Carl B. **A História da Matemática**. Tradução de Elza Furtado Gomide. 2. ed. rev. Uta C. Merzabach. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática – 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais-Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997, v. 3.
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Introdução**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 1 dez. 2020.

BRASIL. **Guia de livros didáticos – Matemática: PNLD 2014 (Anos Finais do Ensino Fundamental)** – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013.

BRASIL. **Guia de livros didáticos – Matemática: PNLD 2017 (Anos Finais do Ensino Fundamental)** – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2016.

BRASIL. **Guia de livros didáticos – Matemática: PNLD 2020 (Anos Finais do Ensino Fundamental)** – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2018.

CARDOSO, Luiz Fernandes. **Dicionário de Matemática** – Edição de Bolso. Porto Alegre: L&PM | Lexikon. 2008.

CHERVEL, André. A história das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria e Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990

CHOPPIN, Allan. O historiador e o livro didático. Tradução de Maria Helena Camara Bastos. **História da educação**, Pelotas, v. 6, n.11, p.5-24. 2002.

DADOS ESTATÍSTICOS MEC/FNDE (Programa do Livro Didático). Fev. 2020. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 30 out. 2020.

D'AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática e Educação. *In*: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (Org.) **Cadernos CEDES 40**, Campinas: Papirus, 1996. p. 7-17.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Priorizar História e Filosofia da Matemática. CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011a, Recife. **Anais [...]**, Recife: SBEM/CIEM, 2011. Disponível em: http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2885/1090. Acesso em: 30 agosto 2019.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 1997.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2011b.

DEMO, Pedro. **Atividades de aprendizagem: sair da mania do ensino para comprometer-se com a aprendizagem do estudante**. Campo Grande: Secretaria de Estado de Educação do Mato Grosso do Sul. 2018. Disponível em: <http://www.sed.ms.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/eBook-Atividades-de-Aprendizagem-Pedro-Demo.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2021.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2008.

FARIA FILHO, Luciano Mendes de et al. A cultura escolar como categoria de análise e como campo de investigação na história da educação brasileira. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 1, p. 139-159, jan.-abr. 2004.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio Século XXI Escolar**: o minidicionário da Língua Portuguesa. 5. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio Século XXI Escolar**: o minidicionário da Língua Portuguesa. 4. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.

FERREIRA, Francisco Dias. **Unificando os teoremas de Menelaus e Ceva**. 2017. 64 f. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2017.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; SOUZA, Luzia Aparecida de. **Elementos de história da educação matemática**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. (Coleção PROPG Digital - UNESP). Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/109211>. Acesso em: 25 abr. 2019.

GOMES, Maria Laura Magalhães. **História do ensino da Matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: CAEDUFMG, 2013.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Os 80 anos do primeiro curso de Matemática brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 424-438, 2016.

GRAVINA, Maria Alice. SANTAROSA, Lucila Maria Costi. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. **Informática na Educação: Teoria e Prática**, v. 1, n. 2, p. 73-88, abr. 1999.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 2003.

IBGE. **Pesquisa Nacional Por Amostra de Domicílios (Contínua 2017-2018)**: Educação 2018. Disponível em https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101657_informativo.pdf. Acesso em: 18 maio. 2021.

JULIA, Dominique. Disciplinas escolares: objetivos, ensino e apropriação. In: LOPES, Alice Cassimiro. (Org.). **Disciplinas e integração curricular**: histórias e políticas. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

JULIA, Dominique. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, n. 1, p. 9-44, 2001.

LAJOLO, Marisa. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em aberto**: Brasília, v. 26, n. 69, p.3-7, jan./mar., 1996. Disponível em <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/2061/2030>. Acesso em 2 mar. 2020.

LARAIA, Roque Barros. **Cultura**: um conceito antropológico. 14. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2001.

LAUDARES, João Bosco. **O conceito e a definição em matemática**: aprendizagem e compreensão. XI ENEM, Curitiba, 2013.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2010.

MACEDO, Dirlene Maria Ribeiro. **Resgatando alguns teoremas clássicos da geometria plana**. 2014. 57 f. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2014.

MAHER, Terezinha de Jesus Machado. A educação do entorno para a interculturalidade e o plurilinguismo. In: KLEIMAN, A. B.; CAVALCANTI, M. C. (Orgs.). **Linguística aplicada**: suas faces e interfaces. Campinas (SP): Mercado de Letras, 2007. p.255-270.

MELO, Jorge da Silva. **Informações sobre o livro Matemática 7ª série, de Ênio Silveira e Cláudio Marques**. Destinatário: Ênio Silveira. Fortaleza, 3 ago. 2020. 1 mensagem eletrônica.

MENDES, Iran Abreu; MIGUEL, Antônio; BRITO, Arlete de Jesus; CARVALHO, Dione Lucchesi de. **História da Matemática em atividades didáticas**. 2 ed. rev. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MENDES, Iran Abreu. Construtivismo e História da Matemática: uma aliança possível. SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 4., 2001, Natal. **Anais [...]** Rio Claro, SP: Editora da SBHMat, 2001. p. 228-234.

MENDES, Iran Abreu. **Números: o simbólico e o racional na história**. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

MIGUEL, Antonio; BRITO, Arlete de Jesus. A História da Matemática na formação do professor de matemática. In: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (Org.). **Cadernos CEDES 40**, Campinas: Papirus, 1996. p. 47-61.

MIGUEL, Antonio. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, v. 5, n. 8, p. 73-103, jul/dez. 1997.

MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pró-Posições**, v. 3, n.1 (7), p. 39-54, mar. 1992.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Conteúdos Básicos Comuns: Matemática – Anos Finais do Ensino Fundamental/Ensino Médio**. Belo Horizonte: Secretaria de Estado de Educação, 2008.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo Básico Comum: Matemática – Anos Finais do Ensino Fundamental**. Belo Horizonte: Secretaria de Estado de Educação, 2014.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo Referência Minas Gerais: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Belo Horizonte: Secretaria de Estado de Educação, 2018.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORAES, Rubens Borba de. **Livros e bibliotecas no Brasil colonial**. 2. ed. Brasília: Briquet de Lemos, 2006.

MUNIZ NETO. Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 2.

NOBRE, Sérgio. Alguns “porquês” na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática. In: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (Org.). **Cadernos CEDES 40**, Campinas: Papirus, 1996. p. 39-35.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; SILVA, Maria Célia Leme da; VALENTE, Wagner Rodrigues. **O Movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular**. Juiz de Fora/MG: Editora da UFJF, 2011.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, ano 1, n.1, p. 7-17, 1993.

PINTO, Neuza Berton. Marcas históricas da Matemática moderna no Brasil. In: **Revista Diálogo Educacional**. Curitiba, v. 5, n. 16, p. 25-38, set./dez. 2005. Disponível em: <<https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/7916/7670>>. Acesso em: 15 fev. 2021.

PEIXOTO, Lázaro Fagner de Jesus. **O uso do software geogebra e suas aplicações no ensino das cevianas básicas**. 2015. 104 f. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2015.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÃO PAULO (Estado). **Decreto nº 7.069, de 6 de abril de 1935** Aprova o Regulamento da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.al.sp.gov.br/repositorio/legislacao/decreto/1935/decreto-7069-06.04.1935.html>. Acesso em: 21 out. 2019.

SÃO PAULO (Estado). **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º Grau**. 4 ed. São Paulo: CE/CENP, 1992.

SBEM. A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, **Boletim SBEM**, n. 21, p. 1-42, fev.2013.

SILVA, Josefa Dielle Nunes da. **Manual de livros didáticos de matemática: uso (s) por professores dos anos finais do ensino fundamental (Aracaju/SE)**. 2018. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2018.

SILVA, Circe Mary Maria da. A faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e a formação de professores de Matemática. REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 23., 2000, Caxambu. **Anais [...]**. Caxambu: ANPED, 2000. Disponível em: <http://23reuniao.anped.org.br/trabtit2.htm#gt19>. Acesso em: 8 nov.2019.

SILVA, José Constantino da. **Os teoremas de Menelaus e Ceva**. 130 f. 2015. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

SILVA, Maria Célia Leme da. A Geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. In: VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). **Osvaldo Sangiorgi – um professor moderno**. São Paulo: Editora Annablume/CNPq/GHEMAT, 2008. cap. 3, p.69-93.

SILVEIRA, Ênio. **Inclusão do tópico CEVIANAS no livro didático**. Destinatário: Jorge da Silva Melo. [S. l], 3 ago. 2020. 1 mensagem eletrônica.

STRUIK, Dirk Jan. **História Concisa das Matemáticas**. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. 2. ed. rev. e ampl. Lisboa: Gradiva, 1989.

TYLOR, Edward Burnett. **Primitive culture: researches into the development of mythology, philosophy, religion, language, art, and custom**. 6. ed. Londres: John Murray, 1920. v. 1. Disponível em: <https://archive.org/stream/primitiveculture01tylouoft#page/8/mode/2up>. Acesso em: 10 maio 2020.

VALENTE, Wagner Rodrigues. (Org.). **Osvaldo Sangiorgi – um professor moderno**. São Paulo: Editora Annablume/CNPq/GHEMAT, 2008a.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume/FAPESP, 1999.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, v. 16, n. 30, p. 139-192, jul./dez. 2008b.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Livros didáticos como fontes para a escrita da história da matemática escolar**. Guarapuava: SBHMat, 2007.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Privilegiando os livros didáticos como fontes para o entendimento da escolarização do sistema métrico decimal no século XIX. ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2004, Londrina. **Anais [...]**. (CD-Rom). Londrina: UEL, 2004.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. História da Matemática: considerações no campo educacional. ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Belo Horizonte. **Anais [...]**. (CD-Rom). Belo Horizonte: SBEM-MG, 2003.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações. REUNIÃO ANUAL DA ANPED (Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação), 25., 2002, Caxambu. **Anais [...]**. (CD-Rom), Caxambu: ANPED, 2002.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. 2001. 206 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Aprendendo Matemática através da História. CONGRESSO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 3., 1999, Vitória. **Anais [...]**. Vitória, UFES, 1999. p. 275-282.

Livros Didáticos de Matemática

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**: edição renovada: 8º ano. 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**: edição renovada: 8º ano. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**: 8º ano. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**: 8º ano. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

CENTURIÓN, Marília. JAKUBOVIC, José. **Matemática**: teoria e contexto: 8º ano. São Paulo: Saraiva, 2012.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências**: matemática: 8º ano. São Paulo: Edições SM, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: matemática: 8º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael. **Projeto Araribá mais:** matemática: obra coletiva, Concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editores responsáveis Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva. São Paulo: Moderna, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática:** 8º ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

LONGEN, Adilson. **Projeto Apoema:** matemática: 8º ano. São Paulo. Editora do Brasil, 2018.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática:** Ideias e desafios: 8º ano. São Paulo: Saraiva, 2012.

NAME, Miguel Asis. **Matemática:** ensino moderno: 7ª série. São Paulo: Editora do Brasil, [1972].

OLIVEIRA, Carlos N. C. de; FUGITA, Felipe. **Geração Alpha:** matemática: 8º ano, obra coletiva, desenvolvida e produzida por SM Educação; editora responsável Andrezza Guarsoni Rocha. 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018.

PATARO, Patrícia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial:** 8º ano. São Paulo: Scipione, 2018

PIERRO NETTO, Scipione di *et al.* **Matemática:** 7ª série. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 1981.

PIERRO NETTO, Scipione di *et al.* **Matemática:** 7ª série. São Paulo: Saraiva, 1979.

PIERRO NETTO, Scipione di. **Matemática:** conceitos e histórias: 6ª série. São Paulo: Scipione, 1991a.

PIERRO NETTO, Scipione di. **Matemática:** conceitos e histórias: 7ª série. São Paulo: Scipione, 1991b.

SARDELLA, Antônio. MATTA, Edson da. **Matemática:** 7ª série. 5. ed. São Paulo: Ática, 1985

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática:** curso moderno - para os ginásios. 8. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 3.

SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Trilhas da Matemática:** 8º ano. São Paulo: Saraiva, 2018.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática:** compreensão e prática: 8º ano. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática:** compreensão e prática: 8º ano. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática:** 8º ano. São Paulo: Moderna, 2002.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática:** realidade e tecnologia: 8º ano. São Paulo: FTD, 2018.

Livros Didáticos de Desenho Geométrico

GIOVANNI, José Ruy *et al.* **Desenho geométrico:** edição renovada: São Paulo: FTD, 2010a. v. 3.

GIOVANNI, José Ruy *et al.* **Desenho geométrico:** edição renovada: caderno de atividades. São Paulo: FTD, 2010b. v. 3.

GIOVANNI, José Ruy *et al.* **Desenho geométrico.** São Paulo: FTD, 2016. v. 3.

GIOVANNI, José Rui; FERNANDES, Tereza Marangoni; OGASSAWARA, Elenice Lumico. **Desenho Geométrico: novo**. São Paulo: FTD, 2002. v. 3.

GIOVANNI, José Rui; FERNANDES, Tereza Marangoni; OGASSAWARA, Elenice Lumico. **Desenho Geométrico: 1º grau**. São Paulo: FTD, 1996. v. 3.

GIOVANNI, José Rui; FERNANDES, Tereza Marangoni; OGASSAWARA, Elenice Lumico. **Desenho Geométrico**. São Paulo: FTD, 1987. v. 3.

JORGE, Sonia. **Desenho Geométrico: Ideias e imagens**. São Paulo: Saraiva, 2019. v. 3.

LOPES, Elizabeth Teixeira; KANEGAE, Cecília Fujiko. **Desenho geométrico: conceitos e técnicas**. São Paulo: Scipione, 2000a. v. 3.

LOPES, Elizabeth Teixeira; KANEGAE, Cecília Fujiko. **Desenho geométrico: conceitos e técnicas: caderno de atividades**. São Paulo: Scipione, 2000b. v. 3.

LOPES, Elizabeth Teixeira; KANEGAE, Cecília Fujiko. **Desenho geométrico: texto e atividades**. São Paulo: Scipione, 1992. v. 3.

LOPES, Elizabeth Teixeira; KANEGAE, Cecília Fujiko. **Desenho geométrico**. 6 ed. São Paulo: Scipione, 1988a. v. 2.

LOPES, Elizabeth Teixeira; KANEGAE, Cecília Fujiko. **Desenho geométrico**. 6 ed. São Paulo: Scipione, 1988b. v. 3.

MARCHESI JÚNIOR, Isaías. **Desenho geométrico**. São Paulo: Ática, 1986a. v. 2.

MARCHESI JÚNIOR, Isaías. **Desenho geométrico**. São Paulo: Ática, 1986b. v. 3.

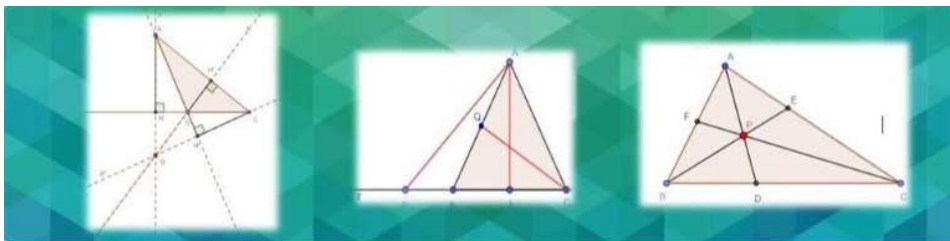
MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau. **Desenho Geométrico: marmo**. São Paulo: Scipione, 1994. v. 1.

MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau. **Desenho Geométrico**. São Paulo: Moderna, 1976.

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**. 4. ed. São Paulo: Scipione, 1993. v. 1.

PUTNOKI, José Carlos. **Geometria e desenho geométrico**. São Paulo: Scipione, 1990. v. 3.

APÊNDICE A – Formulário de Inscrição - Minicurso "Cevianas"



OS DADOS DOS PARTICIPANTES CONTIDOS NESSE FORMULÁRIO NÃO SERÃO
DIVULGADOS PARA TERCEIROS.

*Obrigatório

1. E-mail pessoal: *

2. Qual sua faixa etária ? *

Marque somente uma alternativa.

- até 19 anos
de 20 a 24 anos
de 25 a 29 anos
de 30 a 34 anos
de 35 a 39 anos
de 40 a 44 anos
de 45 a 50 anos
mais de 50 anos

3. Município/UF de Residência *

4. Escolaridade *

Marque somente uma alternativa.

- ☐ Superior Incompleto
☐ Superior Completo
☐ Pós-Graduação Lato Sensu (completo)
☐ Pós-Graduação Stricto Sensu (completo)
☐ Pós-Graduação Lato Sensu (em curso)
☐ Pós-Graduação Stricto Sensu (em curso)

5. Perfil *

Marque somente uma alternativa..

- Professor de Matemática da rede pública
Professor de Matemática da rede privada
Professor de Matemática da rede pública e privada
Discente do curso de Licenciatura em Matemática
Atua como docente: () sim () Não

6. Se você marcou a opção "Discente" na pergunta anterior. Qual período está matriculado? (aceita mais de uma resposta)

Marque todas que se aplicam.

- ☐ 1º
- ☐ 2º
- ☐ 3º
- ☐ 4º
- ☐ 5º
- ☐ 6º
- ☐ 7º
- ☐ 8º
- ☐ Estou formando nesse período

7. Quantos anos você atua como docente de Matemática? *

Marque somente uma alternativa.

- ☐ Não se aplica
- ☐ Meu primeiro ano
- ☐ 1 a 2 anos
- ☐ 3 a 5 anos
- ☐ 6 a 10 anos
- ☐ 11 a 15 anos
- ☐ 16 a 20 anos
- ☐ mais de 20 anos

8. Em quais níveis de ensino? *

Marque somente uma alternativa.

- ☐ Não se aplica
- ☐ Ensino Fundamental
- ☐ Ensino Médio
- ☐ Ensino Fundamental e Médio, concomitantemente.
- ☐ Superior

9. Qual/Quais livros didáticos de matemática você utilizou nos últimos anos? *

10. Você se recorda dos livros de matemática que utilizou enquanto aluno do ensino fundamental?

Cite-os. *

11. Você conhece o termo “cevianas”? Em caso afirmativo, conte-nos de onde. No material didático que você utiliza este termo esta presente? *

12. Tem conhecimento do matemático italiano Giovanni Ceva? *

Marcar apenas uma.

- ☐ Sim
- ☐ Não

13. Na sua época de estudante, teve contato com a disciplina de Desenho Geométrico? História da Matemática? Conte-nos sua experiência e em qual nível de ensino. *

14. Em sala de aula, ao ensinar geometria, costuma utilizar GeoGebra, dobraduras ou construções com régua e compasso? Quando? Caso ainda não seja professor, você teve um momento de reflexão sobre a utilização destes recursos durante seus estudos na graduação? Argumente. *

APÊNDICE B - Avaliação - Minicurso "Cevianas"

*Obrigatório

1. Quais informações o minicurso proporcionou que você não tinha conhecimento? *
Marque todas que se aplicam.

- ☐ DEFINIÇÃO DO TERMO CEVIANAS
- ☐ TÓPICOS DE HISTÓRIA RELACIONADOS A GIOVANNI CEVA
- ☐ TEOREMA DE CEVA E TEOREMA DE MENELAU
- ☐ SUGESTÃO DE ATIVIDADES

2. O minicurso agregou informações relevantes para você? *
Marcar apenas uma opção.

- ☐ Sim
☐ Não

4. Você considera que a temática do Teorema de Ceva deveria ser abordada nos cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática? *
Marcar apenas uma opção.

- ☐ Sim
☐ Não

5. Qual parte do minicurso você considerou mais relevante?
Marque todas que se aplicam.

- ☐ APRESENTAÇÃO DOS LIVROS DE MATEMÁTICA, DESENHO GEOMÉTRICO E DOS DICIONÁRIOS UTILIZADOS NA PESQUISA
- ☐ APRESENTAÇÃO DE DADOS HISTÓRICOS RELATIVOS A CEVIANA E AO GIOVANNI CEVA
- ☐ SUGESTÃO DE ATIVIDADES
- ☐ APRESENTAÇÃO DAS DEFINIÇÕES ACOMPANHADAS DE RECURSOS VISUAIS

5. Espaço para contribuições com críticas e sugestões.

APÊNDICE C - Livros Consultados

No quadro a seguir, inserimos alguns livros que foram consultados no decorrer da análise dos dados coletados no minicurso.

Livro consultado	Termo cevianas	Conteúdo abordado	Observações
<i>Matemática Moderna – 7ª série</i> , de Domênico, Lago e Ens, publicado pela Editora IBEP, s.d.	Não	Altura, mediana e bissetriz.	Os autores não abordaram os pontos notáveis do triângulo.
<i>Matemática - 7ª série</i> , de Antônio Sardella e Edson da Matta, 4ª edição, publicado pela Editora Ática, em 1981.	Não	Altura, mediana e bissetriz e seus respectivos pontos de interseção	Não há diferenças da publicação de 1985, analisado no terceiro capítulo desta dissertação.
<i>Matemática e Realidade – 7ª série</i> , Gelson Iezzi, Antonio Machado e Osvaldo Dolce, publicado pela Editora Atual, em 1984.	Não	Segmentos e pontos notáveis do triângulo	Não há grandes diferenças do proposto na segunda edição, publicada em 1988.
<i>Falando de Matemática: Bonjorno – 7ª série</i> , de Regina Arzenha Bonjorno, José Roberto Bonjorno e Valter Bonjorno, publicado pela Editora IBEP, em 1985.	Não	Altura, mediana e bissetriz, com seus respectivos pontos de encontro.	A altura, mediana e bissetriz, são denominadas de <i>Elementos secundários</i> . O ortocentro foi representado exclusivamente na <u>região interna do triângulo</u> .
<i>Matemática - 7ª série</i> , de Edwaldo Bianchini, 2ª edição revista, publicado pela Editora Moderna, em 1988.	Não	Outros elementos do triângulo: Altura, mediana e bissetriz.	Não há grandes diferenças do proposto na terceira edição. A partir desta edição, a obra deixou de ser consumível.
<i>Praticando Matemática - 7ª série</i> , de Álvaro Andrine, publicado pela editora do Brasil, em 1989.	Não	Elementos notáveis do triângulo.	Os conceitos são brevemente apresentados por meio da definição, não há figura representativa para indicar que o ortocentro também pode ser externo ao triângulo.
<i>A conquista da Matemática – 7ª série, 1º grau</i> , de José Rui Giovanni e Benedito Castrucci, publicado pela Editora FTD, em 1992.	Não	Outros elementos de um triângulo: mediana, altura e bissetriz.	Os exercícios servem para os alunos aplicarem as definições e representar os segmentos nos triângulos dado. Não há figura que demonstre que o ortocentro pode ser um ponto externo ao triângulo.
<i>A conquista da Matemática: Teoria e Aplicação – 7ª série</i> de José Rui Giovanni, José Rui Giovanni Jr e Benedito Castrucci, publicado pela Editora FTD, em 1992.	Não	Altura, Mediana e bissetriz de um triângulo. Pontos notáveis	Definições com imagens representativas. Os exercícios abordam os segmentos notáveis para explorar o conteúdo de ângulos.
<i>Aprendendo Matemática – 7ª série</i> , de José Ruy Giovanni e Eduardo Parente, publicado pela editora FTD, em 1993.	Não	Segmentos notáveis de um triângulo	A apresentação é ancorada nas definições. Os autores não incluíram figuras que demonstra que o ortocentro pode ser um ponto externo ao triângulo. Os exercícios servem para os alunos identificar os segmentos.
			O conteúdo foi proposto por meio definições, com auxílio de algumas construções. A lista de

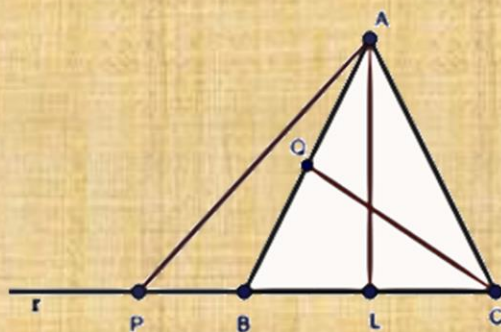
<i>Matemática e Realidade – 7ª série</i> , Gelson Iezzi, Antonio Machado e Osvaldo Dolce, 2ª edição, publicado pela Editora Atual, em 1995.	Não	Segmentos e pontos notáveis do triângulo	exercícios é numerosa, emprega a memorização das definições e construção de alguns triângulos e seus segmentos, e por vezes, o cálculo de ângulos.
<i>Matemática - 7ª série</i> , de Edwaldo Bianchini, 3ª edição, publicado pela Editora Moderna, em 1995.	Não	Outros elementos do triângulo: Altura, mediana e bissetriz.	Os conteúdos é apresentado pelas definições e figuras representativas, juntamente com suas propriedades. Quanto aos exercícios, verificamos que eles tem por objetivo classificar e nomear os segmentos e pontos notáveis.
<i>Tempo de Matemática – 7ª série</i> , de Miguel Asis Name, publicado pela Editora do Brasil, em 1996.	Não	Elementos notáveis do triângulo: altura, mediana e bissetriz (pontos de interseção).	O autor fez um breve resumo com definições e algumas figuras. Não consta a representação do ortocentro exterior ao triângulo.
<i>Novo Bezerra Matemática – 2º grau</i> , volume Único, de Manoel Jairo Bezerra e José Carlos Putnoki, 4ª edição, publicado pela Editora Scipione, em 1997.	Sim	Cevianas e Pontos notáveis do triângulo.	Não tem figuras que represente ortocentro em diferentes triângulos.
<i>A conquista da Matemática – 7ª série</i> , de José Rui Giovanni, José Rui Giovanni Jr e Benedito Castrucci, publicado pela Editora FTD, em 1998	Não	Altura, Mediana e bissetriz de um triângulo.	Os autores trouxeram as definições acompanhadas de várias construções, representando os conceitos geométricos e propõe o uso de dobraduras. Há uma grande quantidade de exercícios, muitos deles, envolvendo ângulos nos triângulos.
<i>Matemática Pensar e Descobrir – 7ª série</i> , de José Ruy Giovanni e José Ryu Giovanni Jr, publicado pela Editora FTD, em 2000.	Não	Altura, mediana e bissetriz, pontos notáveis.	Os assuntos relacionados à geometria são diluídos entre os capítulos. Os autores inseriram a construção uma dobradura na apresentação de cada um dos segmentos.
<i>A conquista da Matemática – 7ª série</i> (Atividades), de José Rui Giovanni, José Rui Giovanni Jr e Benedito Castrucci, publicado pela Editora FTD, em 2000.	Não	Altura, Mediana e bissetriz.	Os exercícios são de aplicação desses segmentos no conteúdo de ângulos.
<i>Matemática Ideias e Desafios – 7ª série</i> , de Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga, 11ª edição, publicado pela Editora Saraiva, em 2002.	Não	Pontos notáveis de um triângulo.	Os segmentos notáveis são apresentados juntamente com sua aplicação direta em resolução de exercícios relacionados à ângulos. Os autores não propõe uso de dobraduras e nem de construção com régua e compasso.
<i>Vontade de Saber Matemática – 8º ano</i> , Joamir Roberto de Souza e Patrícia Moreno Pataro, 1ª edição, publicado pela Editora FTD, em 2012.	Não	Ponto notáveis de um triângulo	Os autores utilizam a construção com régua e compasso como meio de fixar e auxiliar na definição desses elementos.
<i>A conquista da Matemática – 8º ano</i> , de José Rui Giovanni Jr e Benedito Castrucci, 1ª edição, publicado pela Editora FTD, em 2009.	Não	Altura, mediana e bissetriz. Pontos notáveis do triângulo.	Os autores propõe o uso de dobraduras. Há uma grande quantidade de exercícios, muitos deles, envolvendo ângulos nos triângulos.

<i>Geometria Plana: conceitos básicos</i> , Gelson Iezzi, Antonio Machado e Osvaldo Dolce, 2ª edição, publicado pela Editora Atual, em 2011.	Não	Pontos notáveis do triângulos	Os conceitos são expostos por meio de definições, com enfoque nos ângulos formados por estes segmentos nos triângulos.
<i>Projeto Araribá Matemática – 8º ano</i> , Mara Regina Garcia Gay (editora responsável), 4ª edição, publicado pela Editora Moderna, em 2014.	Não	Medianas, alturas, bissetrizes e mediatrizes do triângulo.	Utiliza construção com régua e compasso como recurso para apresentar a definição dos segmentos notáveis, e somente depois, conceitua a interseção entre eles. No manual do professor, os autores sugerem o uso de dobraduras e incluem passos para o seu desenvolvimento.
<i>Projeto Teláris – 8º ano</i> , Luiz Roberto Dante, 2ª edição, publicado pela Editora Ática, em 2016.	Não	Mediana, bissetriz e altura de um triângulo, com seus respectivos pontos de interseção.	Definições e algumas figuras representativas. Em uma orientação no manual do professor, o autor sugere o uso do geogebra para construção do baricentro.
<i>Matemática e Realidade – 8º ano</i> , Gelson Iezzi, Antonio Machado e Osvaldo Dolce, 9ª edição, publicado pela Editora Atual, em 2018.	Não	Pontos notáveis do triângulo e propriedades	A obra foi recentemente adaptada para cumprir as exigências da BNCC. Foi incorporado um capítulo para trabalhar os pontos notáveis. No entanto, não mudanças significativas no modo como o autor abordou as alturas, medianas e bissetrizes, ao compararmos com a publicação de 1995.
<i>Matemática Teláris – 8º ano</i> , de Luiz Roberto Dante, 3ª edição, publicada pela Editora Ática, em 2018.	Não	Mediatriz, mediana, bissetriz do ângulo interno e altura de um triângulo, destacando os pontos notáveis.	Foi inserido um capítulo dedicado ao estudo das construções geométricas com régua e compasso. Há uma boa interlocução com softwares de geometria dinâmica.

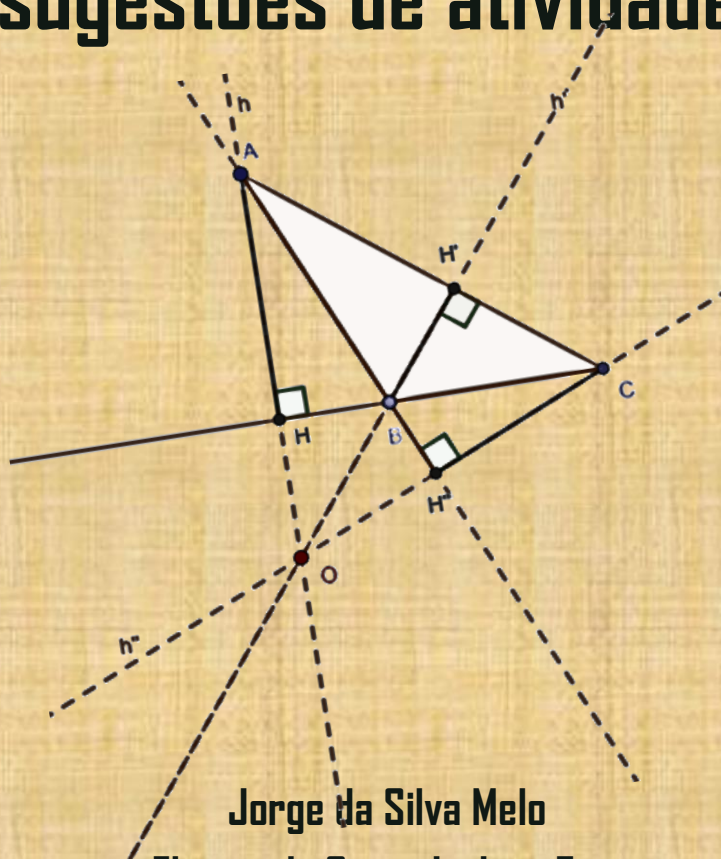
APÊNDICE D - Produto Educacional



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática



Cevianas notáveis do triângulo: Elementos históricos e sugestões de atividades



Jorge da Silva Melo
Elenice de Souza Lodron Zuin

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Jorge da Silva Melo
Elenice de Souza Lodron Zuin

**CEVIANAS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO:
ELEMENTOS HISTÓRICOS
E SUGESTÕES DE ATIVIDADES**

Belo Horizonte
2021

Apresentação

“Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira às quatro da tarde. Ninguém nasce educador ou é marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma, como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática”

(Paulo Freire)

Este Produto Educacional está fundamentado na dissertação de Mestrado intitulada “*Cevianas notáveis do triângulo: uma análise de livros de didáticos (1970-2019)*”, de autoria de Jorge da Silva Melo sob orientação da Prof^a. Dra Elenice de Souza Lodron Zuin, junto ao Programa Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

No decorrer de nossa pesquisa, costatamos que professores de Matemática do Ensino Básico desconheciam o termo cevianas, também identificamos que ele não estava presente na maioria dos livros didáticos de Matemática que analisamos. Em contrapartida, o termo cevianas foi encontrado em livros de Desenho Geométrico.

Em relação a disciplina Desenho Geométrico, a partir de 1970,

No Brasil, também vivemos mudanças de programas, elaboração de novas propostas de ensino, sobretudo fazendo-se abandonar o Desenho Geométrico e relegar para um segundo plano o estudo da Geometria. A Geometria Plana e Espacial foi, ao longo das décadas, sofrendo cortes de vários tópicos no ensino fundamental e médio. O Desenho Geométrico foi sendo abolido das grades curriculares da grande maioria das escolas, principalmente nas escolas públicas. (ZUIN, 2007, p.58).

Estes poderiam ser alguns dos obstáculos que dificultaram o acesso de um número maior de professores a este conhecimento? Na tentativa de suprir algumas lacunas, buscamos desenvolver um material paradidático, direcionado às formações inicial e continuada de professores de Matemática, bem como aos professores atuantes no Ensino Básico. Abordamos, principalmente, tópicos de cunho histórico relacionado às *cevianas* do triângulo e ao *Teorema de Ceva*, agregando atividades práticas voltadas ao uso de dobraduras, construções geométricas e de *softwares* de geometria dinâmica.

Desse modo, também levamos em conta o proposto pela Base Nacional Comum Curricular, ao apontar que

[...] além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, **é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática**. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. (BRASIL, 2017, p.298, grifos nossos).

Este trabalho está dimensionado em quatro capítulos. No primeiro, “*Tópicos de História: vida e obra de Giovanni Ceva*”, alicerçados no trabalho de Landra (2009) buscamos trazer elementos que evidenciassem dados biográficos e alguns aspectos da História da Matemática relacionados ao matemático, físico, geômetra e Engenheiro Hidráulico, Giovanni Benedetto Ceva (1747-1834).

No capítulo seguinte, “*Ressignificando o conceito de cevianas do triângulo*”, apresentamos as cevianas notáveis – altura, mediana e bissetriz, além de seus respectivos pontos de interseção – ortocentro, incentro e baricentro, acrescentando uma demonstração do *Teorema de Ceva*, utilizando a relação entre as áreas dos triângulos.

No terceiro capítulo, “*Explorando as cevianas e pontos notáveis do triângulo*”, propusemos uma sequência de atividades, abordando as principais cevianas no triângulo e seus pontos notáveis por meio de dobraduras, construções geométricas e utilização de *softwares* de geometria dinâmica, evidenciando que não devemos ficar submersos a uma única abordagem, mas sim, percorrer novos horizontes, transitando entre o concreto e o abstrato.

Por último, as nossas considerações finais.

Agradecemos a Denis Cirelli pelas ilustrações das atividades com dobraduras e desenho geométrico. É nossa expectativa que este material possa inspirar e nortear o trabalho de professores no que tange ao ensino das cevianas do triângulo.

Os autores

Caro leitor,

Sabemos que cada um traz consigo, na bagagem, inúmeras vivências e aprendizados, sejam profissionais ou pessoais. Pensando nisso, irei acompanhá-lo durante a leitura, trazendo informações e explicações de algum tópico presente no texto.

Este paradidático foi elaborado para ser uma alavanca para a abertura de novas experiências e conhecimentos, dentre eles, os inerentes à História da Matemática.

Ao longo deste material, representaremos:

- Os pontos por uma letra maiúscula - A , B ou C ,
- A reta que passa pelos pontos A e B por $\overleftrightarrow{AB}$, ou por r .
- O segmento com extremidades A e B por $\overline{AB}$
- A semirreta com origem em A por $\overrightarrow{AB}$.
- Os ângulos por $A\hat{O}B$ ou, simplesmente por $\hat{A}$.
- Um triângulo por ABC ou $\triangle ABC$
- A área do triângulo por S_{ABC}

Boa leitura!



Sumário

1 TÓPICOS DE HISTÓRIA: VIDA E OBRA DE GIOVANNI CEVA	174
1. O TEOREMA DE MENELAU	174
1.2 VIDA E OBRA DE GIOVANNI CEVA	176
2 RESSIGNIFICANDO O CONCEITO DE CEVIANAS DO TRIÂNGULO	183
2. CEVIANAS DO TRIÂNGULO	183
2.1 ALTURAS DE UM TRIÂNGULO	184
2.1.2 ORTOCENTRO	185
2.2 BISSETRIZES INTERNAS DE UM TRIÂNGULO	187
2.2.1 INCENTRO	188
2.3 MEDIANAS DE UM TRIÂNGULO	188
2.3.1 BARICENTRO	189
2.4 TEOREMA DE CEVA	190
2.5 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE CEVA	193
2.5.1 PROPRIEDADES INICIAIS	193
2.5.2 DEMONSTRAÇÃO VIA RELAÇÃO ENTRE ÁREAS	198
3 EXPLORANDO AS CEVIANAS E OS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO ..	206
3.1 CONSTRUÇÕES COM DOBRADURAS	208
3.1.1- ESTUDO DAS CEVIANAS POR MEIO DE DOBRADURAS	209
3.2 CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO	214
3.2.1 Os INSTRUMENTOS DE DESENHO	214
3.2.2 ESTUDO DAS CEVIANAS POR MEIO DAS CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO....	218
3.3 CONSTRUÇÕES COM O GEOGEBRA	240
3.3.1 GEOGEBRA.....	241
3.3.2 ESTUDO DAS CEVIANAS NOTÁVEIS POR MEIO DO GEOGEBRA	243

Capítulo 1

Tópicos de História: Vida e Obra de Giovanni Ceva

CAPÍTULO I

TÓPICOS DE HISTÓRIA: VIDA E OBRA DE GIOVANNI CEVA

Neste capítulo, trazemos os dados biográficos e alguns aspectos da História da Matemática relacionados ao matemático, físico, geômetra e engenheiro hidráulico Giovanni Benedetto Ceva. Ele dedicou parte de sua vida ao estudo da Geometria e tornou-se um personagem importante devido à redescoberta e publicação do *Teorema de Menelau* e à publicação de um teorema semelhante que levou seu nome, *Teorema de Ceva* ou *Teorema das Cevianas*. Retornaremos a mais de quinze séculos antes do nascimento de Giovanni Ceva, para apresentarmos alguns aspectos da vida do matemático Menelau¹ de Alexandria, que publicou um importante teorema que leva seu nome e está relacionado com a colinearidade de três pontos.

A principal referência para a constituição deste capítulo se concentra no trabalho de Landra (2009).

1. O Teorema de Menelau

Estima-se que Menelau de Alexandria tenha nascido no século I d.C., na cidade de Alexandria, no Egito. Pouco se sabe da vida deste astrônomo e geômetra. Grande parte de seus trabalhos se perdeu com o tempo.

Têon de Alexandria (335-405), em um de seus comentários, ao tratar da tabela de cordas de Ptolomeu², atribuiu a Menelau de Alexandria a autoria de alguns trabalhos, como, por exemplo, um tratado em seis volumes que aborda conceitos relacionados às cordas de um círculo.

¹ Tanto Boyer (1994) como Eves (2008) utilizam as formas Menalaus e Menelau. Já Kennedy (1992) utiliza Menelau. Nessa dissertação priorizamos a forma *Menelau*.

² Boyer (1994, p. 119-120) explica que não existem relatos precisos que informem sobre o local e a data de nascimento de Ptolomeu. No entanto, estima-se que seja por volta do final do “primeiro século”. Essa suposição vem do fato de haver algumas observações feitas por Ptolomeu em Alexandria, aproximadamente, entre os “anos de 127 a 151 d. C”. A obra *Syntaxis Mathematica* de sua autoria, é considerada a maior obra produzida na Grécia Antiga e por este motivo, muitos comentadores se referiam a ela como “*magiste*” ou “a maior” diferenciando-a dos trabalhos menores, e mais adiante, nas traduções árabes, recebeu o acréscimo do artigo “Al, *Al-magiste* e posteriormente, passou a ser conhecida como o *Almagesto*”. Neste trabalho está inserido a tábua de cordas de Ptolomeu, fornecendo os valores dos “senos dos ângulos de 0° a 90°, com incrementos de 15” (EVES, 2008, p.203-204), tendo suas ideias geocêntricas aceitas por quatorze séculos até serem contestadas pelo astrônomo e matemático polonês “Nicolau Copérnico (1473-1543) e, mais tarde, pelo alemão Johann Kepler (1571-1630) com a introdução da Teoria Heliocêntrica do sistema solar.”(KENNEDY, 1992, p.28).

De seus trabalhos, somente três livros encontram-se preservados, graças a uma tradução em árabe, denominada *Sphaerica* (Figura 1), que versa sobre esféricos³ e teve grande importância para o desenvolvimento da trigonometria esférica e da astronomia (EVES, 2008).

Figura 1- Frontispício *Sphaerica* de Menelau



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Menelaus_-_Sphaericorum_libri_tres,_1758_-_4920.jpg.

No terceiro livro deste tratado, Menelau aborda o desenvolvimento da geometria esférica e, nele, encontramos o teorema que leva seu nome: *Teorema de Menelau* (figura 2), fazendo-o ser lembrado até os dias atuais por sua importante contribuição à Geometria (EVES, 2008).

Em sua versão simples, o *Teorema de Menelau* pode ser assim definido:

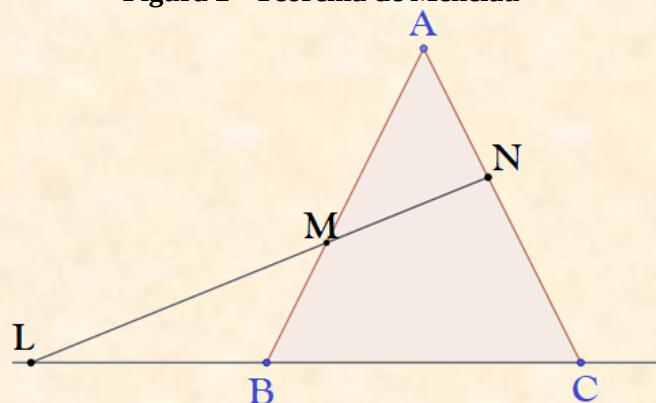
Teorema 1 (Menelau – versão simplificada)⁴ - Dados três pontos, *L*, *M* e *N* (figura 2), respectivamente, em cada um dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ou das retas suporte de um triângulo $\triangle ABC$ qualquer e diferente dos vértices, os pontos *L*, *M* e *N* serão **colineares** se, e somente se,

$$\left(\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}\right) = 1$$

³ No livro I de *Sphaerica*, Menelau desenvolveu os equivalentes esféricos das proposições de Euclides para triângulos planos. Um triângulo esférico era tomado como uma figura formada na superfície de uma esfera. O livro II trata da aplicação da geometria esférica à astronomia (BOYER, 1994).

⁴ Silva (2015) demonstrou em sua dissertação de mestrado o Teorema de Menelau, utilizando quadro recursos diferentes: Teorema de Tales, relação entre as áreas, semelhança de triângulos e por semelhança de triângulos retângulos. Não incluímos aqui estas demonstrações por não ser o foco de nossa pesquisa.

Figura 2 - Teorema de Menelau



Fonte: Elaborada pelo Autor

No entanto, sua versão simplificada, aqui apresentada, não possui recíproca verdadeira, já que se trata de um teorema com a condicionante *se (ida), e somente se (volta)*. Muniz Neto (2012) indica que, neste caso, devemos utilizar razões acrescidas de um sinal, ou seja, razões orientadas. Assim, o *Teorema de Menelau* pode ser reescrito: “seja ABC um triângulo retângulo e A' , B' e C' pontos sobre as retas-suporte dos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, então: $\left(\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}\right) = -1$, se, e só se os pontos A' , B' e C' forem colineares”. (MUNIZ NETO, 2012, p. 160).

Menelau assume o caso plano como bem conhecido e o usa para estabelecer o caso esférico. Pode-se deduzir um montante considerável de trigonometria esférica a partir desse teorema, considerando-se triângulos e transversais particulares. Os recíprocos desses teoremas, no caso plano e no caso esférico, também são verdadeiros. (EVES, 2008, p.204).

1.2 Vida e Obra de Giovanni Ceva

Até recentemente, as datas de nascimento e morte de Giovanni Benedetto Ceva eram incertas. Por meio de uma pesquisa realizada pela italiana Paola Landra (2009), intitulada *Ceva e Manfredi una polemica tra matematici del Settecento*, contatou-se, nos registros⁵ da extinta

5

ATO DE BATISMO DE GIOVANNI BENEDETTO CEVA.

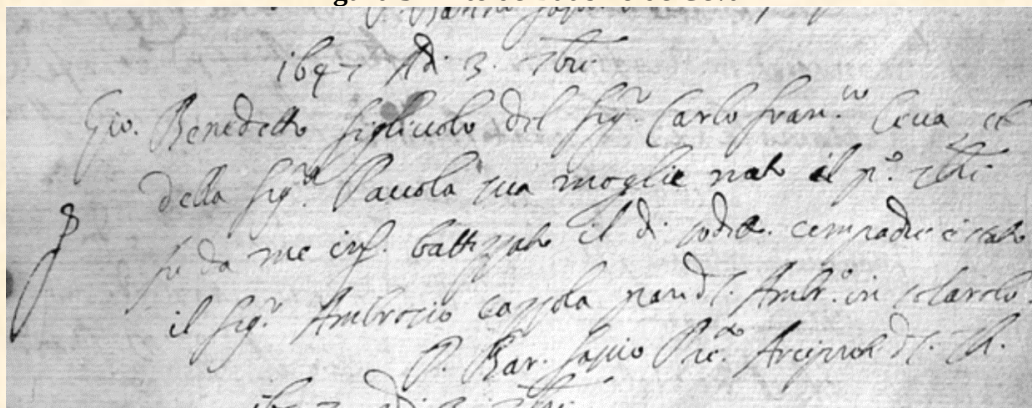
ADMi, ARQUIVO DA EXTINTA PARÓQUIA DE S. TOMASO IN TERRA AMARA, "NASCIMENTOS E CASAMENTOS A PARTIR DO ANO DE 1622 ATÉ O ANO DE 1652".

Em 3 de setembro de 1647

Gio. Benedetto Ceva, filho do Senhor Carlo Francesco e da Senhora Pauola, sua esposa, nascido no dia primeiro de setembro, foi batizado por mim abaixo assinado e o padrinho de batismo foi o Senhor Ambrogio Cazzola paróquia de S. Ambrogio in Solarolo. P. Bartholomeo Fassio Arcipreste preposto de S. Thomaso. (LANDRA, 2009, p. 152, tradução nossa).

Paróquia de São Tomazio, que Ceva teria nascido em Milão, na Itália, no dia primeiro de setembro de 1647 (figura 3), filho de Carlo Francesco Ceva (1610 – 1690) e de Paola Colombo. Sua mãe era descendente de uma linhagem nobre e seu pai tinha negócios relacionados a funções políticas e administrativas, como, por exemplo, compra e venda de imóveis, além de ser cobrador de impostos (LANDRA, 2009).

Figura 3 – Ato de Batismo de Ceva



Fonte: Landra (2009, p.4)

Ceva era o quinto filho uma família numerosa, composta por Laura Maria Francesca Elisabetta Ceva (1640), Clara Giustina Bonaventura Ceva (1642), Iginio Nicolò Ceva (1644), Francesco Ceva (1645), Tommaso Ceva (1648), Tereza Francesca (1650) e Cristoforo Vittore Ceva (1652) e a maioria de seus irmãos seguiram a vida religiosa (LANDRA, 2009).

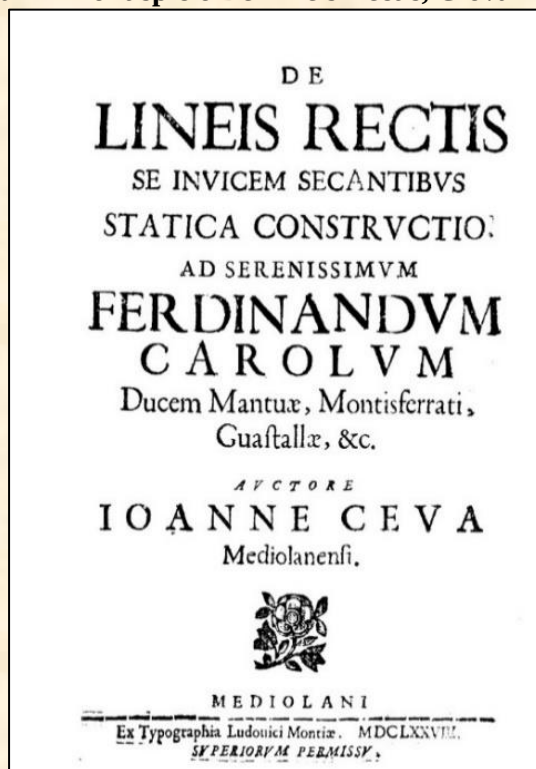
Muito pouco pode se precisar sobre a infância e adolescência de Giovanni Ceva, no entanto, como era oriundo de uma família importante, estima-se que ele tenha estudado no *Collegio dei Gesuiti*, localizado na Via Brera, em Milão. Como alguns de seus irmãos, muito provavelmente, ele teria maior aptidão para ciências exatas, em especial, para matemática, devido a seus trabalhos futuros (LANDRA, 2009).

Landra (2009) sugere que os pais de Ceva se opunham a seus desejos científicos e que, desde cedo, ele estaria junto ao seu pai nas atividades administrativas e políticas em Milão, Gênova e Mântua, atividades estas que o acompanhariam por toda vida. Ao mesmo tempo em que se dedicava a este tipo de trabalho, se envolvia com práticas científicas estudando Geometria e Hidráulica.

Entre os anos de 1670 e 1672, Ceva mudou-se para Pisa com o intuito ingressar na Universidade de Pisa, sendo aluno do ilustríssimo professor de lógica Donato Rossetti (1633 – 1688) e do professor Alessandro Marchetti (1633 – 1714), ambos, membros da Academia de Matemática-Física de Roma. Neste período, Ceva adota o nome de “*Ioanne Ceva Acca-*

Phisycο-mathematicae Romanae Socius”, o que nos leva a crer que, muito provavelmente, Ceva deve ter passado um período em Roma (LANDRA, 2009, p. 9).

Figura 4 - Frontispício De Lineis Rectis, Giovanni Ceva



Fonte: Ceva (1678)

Em 1678, publicou sua obra mais famosa, *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (Estática da construção das linhas retas que cortam outras) (figura 4), que contém o Teorema das Cevianas, também conhecido com o Teorema de Ceva – baseado no Teorema de Menelaus que, nesta época, já havido sido esquecido e pode-se dizer que o mesmo foi redescoberto por Ceva, pois não há evidências de que ele o conhecia (BOYER, 1994).

Eves (2008, p.585) evidencia que exceto “algumas descobertas isoladas como o é o caso do Teorema de Ceva e o Teorema de Commandino, publicado em 1565, poucas contribuições novas foram dadas à geometria sintética⁶ do triângulo e do tetraedro antes do século XIX”. Desse modo, Ceva foi o responsável pela elaboração de um dos resultados mais importantes relacionado à geometria sintética do triângulo desde a Matemática produzida no berço da Grécia Antiga até o século XIX.

⁶ A geometria sintética é um ramo da Matemática que se fundamenta no método axiomático desconsiderando a ideia de medida representada simbolicamente por números – ou seja, sem o uso de coordenadas ou fórmulas.

Figura 5 – Mapa da Itália do século XVII, destacando o Ducado de Mântua



Fonte: <https://www.steinmapas.com/produtos/italia-seculo-xvii-colorido-32>.⁷

No ano de 1683, Ceva recebeu, do Duque de Mântua, a cidadania de Mântua (figura 5), comprovando que ele era valorizado pelos serviços prestados – cidadania esta que, futuramente, foi estendida também a seus filhos. Contudo, mesmo ocupando uma posição administrativa de destaque, como responsável pela economia de Mântua e Montferrat, continuou a dedicar-se a seus estudos científicos (LANDRA, 2009).

Landra (2009) encontrou documentos os quais apontam que, aproximadamente, aos trinta e cinco anos, em 15 de janeiro de 1685, Giovanni Ceva se casa com Cecilia Vecchi e, desta união, nasceram sete filhos: Domitilla Francesca (1687), Carlo Francesco (1688), Massimo Cristoforo (1689), Pietro Antonio (1690), Maria Domitilla (1692), Carlo Francesco (1693)

⁷ O autor concedeu licença para uso da imagem neste trabalho, por e-mail.

e Costantino Innocenzo (1694). No entanto, Maria Domitilla e Carlo Francesco vieram a óbito ainda na infância.

No ano seguinte ao seu casamento, Ceva foi nomeado professor de Matemática na Universidade de Mântua, cargo que exerceu até os últimos dias de sua vida. Além de sua contribuição mais importante, *De lineis rectis*, publicada em 1678, Ceva também publicou:

(1678) - *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*, Ad serenissimum Ferdinandum Carolum Ducem Mantuae, Montisferrati, Guastallae, etc, Mediolani, Ludovici Montiae.

(1682) - *Opuscula mathematica. De potentiis obliquis, de pendulis, de vasis, et de fluminibus*, Montisferrati, Guastallae, etc, Mediolani, Ludovici Montiae.

(1692) - *Geometria motus opusculum geometricum a Ioanne Ceva mediolanensi, In gratiam Aquarum excogitatum. Continet duos libros Primum de Simplici Motu, Alterum de Composito*, Bononiae, Pisarij.

(1710) - *Tria Problemata Geometris proposita, una cum ipsius Ratiocinio in gravitatem omnigeni corporis ostendendam*, Mantuae, Pazzoni.

(1711) - *De re numaria quoad fieri potuit geometricè tractata ad Illustrissimos, et Excellentissimos Dominos Praesidem Quaestoresque hujus Arciducalis Caesaris Magistratus Mantuae, Mantuae, Pazzonum*.

(1715) - *De mundi fabrica unico gravitatis principio innixa, deque flaminibus, quatenus eorum effectus a motu pendentes ethibentur, ac eorum decursus metiri licet, ad Serenissimum Philippum Landgravium Hassiae, Darmstadii, etc. Gubernatorem Plenipotentiarium Civitatis et Status Mantuae, Mantuae, Pazzoni*.

(1716) - *Le conseguenze del Reno, se coll'aderire al progetto de'signori bolognesi si permettesse in Po grande*, Mantova, Pazzoni,

(1717) - *Replica di Giovanni Ceva, commissario dell'arciducal camera di Mantova, e matematico di S. M. Ces., e Catt. in difesa delle sue dimostrazioni, e ragioni, Per le quali non debbasi introdurre Reno in Po, contro la risposta datasi dal sig. dottor Eustachio Manfredi*, Mantova, Pazzoni.

(1721) - *Risposta di Giovanni Ceva alle osservazioni del signor dottor Eustachio Manfredi contro la di lui replica in proposito dell'immissione del Reno in Pò grande, pretesa da' signori bolognesi*, Mantova, Pazzoni.

(1728) - *Opus hydrostaticum Illustrissimo, atque Excellentissimo D. D. Joanni Francisco Pullicano Sac., Caes., Reg., Cath. Majestatis arcano intimo, Austriae superioris status consiliario, Senatus et utriusque Magistratus Mantuae praesidi, etc., Mantuae, Pazzoni*. (LANDRA, 2009, p. 14 -15).

Giovanni Benedetto Ceva veio a óbito⁸, na cidade de Mântua, no dia 13 de maio de 1734, aos 86 anos. Seu corpo encontra-se sepultado na *Iglesia S. Teresa dei Carmelitani Scalzi*

⁸

ATO DE MORTE DE GIOVANNI BENEDETTO CEVA .

ADMn, Registro Civil Eclesiástico, Paróquia de S. *Apollonia*, Livro dos Óbitos, 1615-1735, liv. I, parte III, 40/1734. No décimo terceiro dia de Maio, do ano de mil setecentos e trinta e quatro morreu o ilustríssimo Senhor Giovanni Ceva, viúvo*da digníssima Senhora Cecilia Vecchi em comunhão com a Santa Mãe Igreja, com oitenta e seis anos, confessando-se primeiramente para receber o Sagrado Viático fortalecido pelo Sacramento da Extrema Unção, e cujo cadáver foi sepultado na Túmulo dos pais na Igreja de S. *Teresa dei Carmelitani Scalzi* com as devidas exéquias. Vincentius Pelliciolus Reitor da Igreja Paroquial de *Santa Apollonia* de Mântua.

*É considerado um erro: a esposa de Ceva, de fato, morreu mais tarde, em 1739, ADMn, Registro Civil Eclesiástico, Paróquia de S. *Apollonia*, Livros dos Óbitos, 1736-1797, liv. II, parte 1, 2/1739. (LANDRA, 2009, p.247-248, tradução nossa).

(Igreja de Santa Tereza das Carmelitas Descalças) junto a seus pais. Oito dias após a sua morte, foi-lhe concedida uma homenagem póstuma, por meio de um artigo publicado por Federico Amadei na *Gazzetta di Mantova*⁹, eternizando a figura do ilustre matemático.

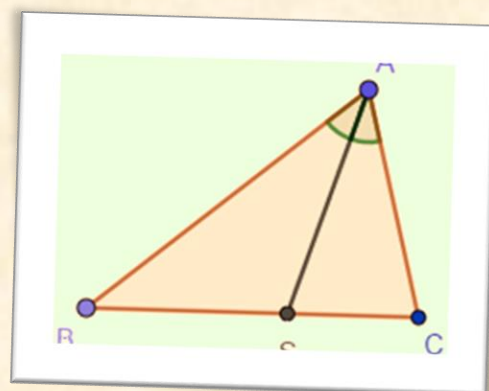
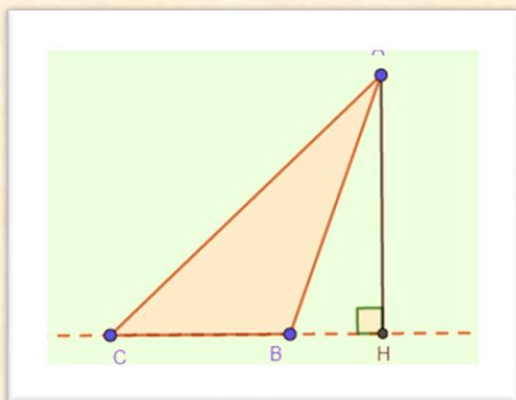
No dia 13, aos 86 anos e 6 meses, faleceu em Mântua, por determinação dos espíritos vitais, Giovanni Ceva, matemático da corte e comissário geral das águas de todo o Estado e, no dia seguinte, após ter sido pintada sobre tela a efígie para a memória perene desse homem literato, foi sepultado na igreja de S. Teresa dei *Carmelitani Scalzi*. Foi famoso tanto pela sua honestidade formidável quanto pela sua profunda doutrina, tendo publicado algumas das suas obras, uma das quais, admirada no mundo inteiro, é intitulada: *De lineis rectis statica constructio*; outra é intitulada: *Geometria Motus*; mas acima de todas aquelas intitulada: *Hydrostatica*. Nesta última, pode-se dizer com certeza que dominou essa ciência e, talvez, até ultrapassou autores renomados que já escreveram sobre o assunto; aliás, a mesma foi enobrecida por ele e transformada nas mais puras leis da geometria. A fama do nosso famoso concidadão já voou por todos os cantos da Europa e a sua particular doutrina dos refluxos, na conhecida controvérsia do Rio Reno, nas terras de Bolonha, onde a intenção era levá-lo para o Rio Pó, não só lhe rendeu os aplausos dos países vizinhos, os quais não tinham interesse que avançasse, mas também das Academias de Londres e Paris, onde o nosso Ceva era muito conhecido. Era um homem de estatura mediana, magro, sempre com um sorriso jovial e amável, quando estava falando, e mantendo uma conversa agradável. (LANDRA, 2009, p. 13 -14, tradução nossa).

⁹ Neste mesmo período, a *Gazzetta di Mantova* publicou o anúncio de sua morte.

**ANÚNCIO MORTUÁRIO DE GIOVANNI BENEDETTO CEVA PUBLICADO NA
“GAZZETTA DI MANTOVA” DO DIA 21 DE MAIO DE 1734. BCMN, GR 122.**

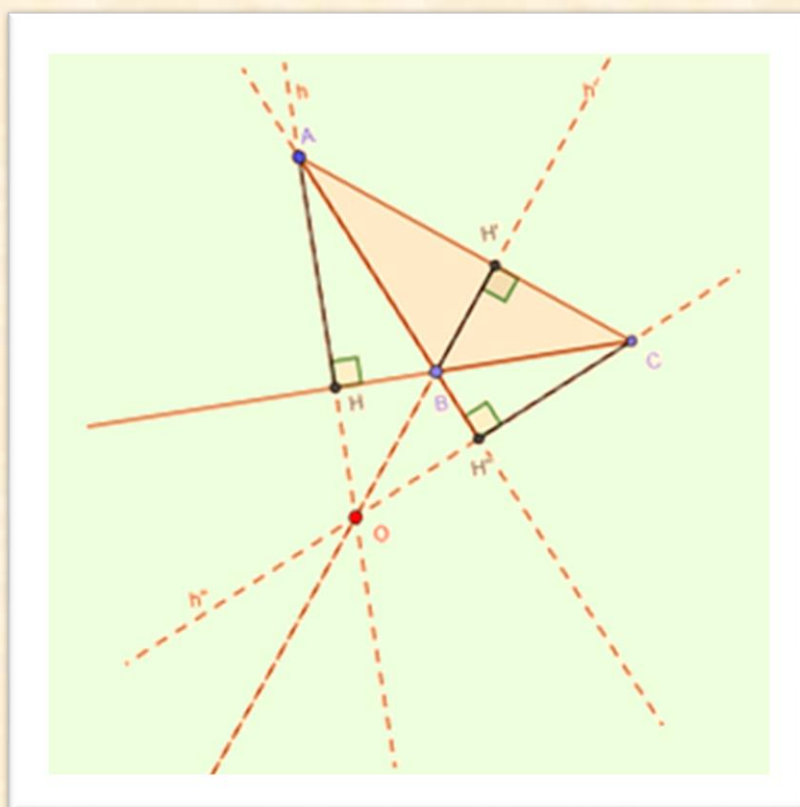
Num. 21. MÂNTUA, 21 de maio de 1734.

Morreu nesta cidade, na semana passada, com mais de oitenta e seis anos, o Sr. Gio: Ceva, Matemático da Corte, e Comissário Geral das Águas deste Estado, conhecido pela sua honestidade formidável e profunda e extraordinária doutrina. Deu demonstração de seu gênio em várias Obras realizadas, como aquelas a seguir: *De Lineis Rectis Statica Constructio*, *De Re Numaria*, *Geometria Motus*; mas, acima de tudo, merece menção especial, *Hydrostatica*, publicada com as duas últimas por meio das nossas Prensas, Ciência na qual se pode dizer que ele não foi bem sucedido de acordo com alguns considerados ‘muito famosos’ mas que, na verdade, foi grandemente enobrecida por ele, e reduzida às mais puras leis da Geometria: Tendo, também, demonstrado que conhecia satisfatoriamente esta matéria, combinando a Teoria com a Prática na construção de Novas estruturas idealizadas por ele concebidas com a finalidade de intervir com êxito no que concerne determinadas margens do rio Pó, considerando difícil o método análogo, em prol da medição das águas correntes. A fama deste ilustre Literato voou além das montanhas, e a sua doutrina particular dos Refluxos na famosa *Controversia del Reno* foi aplaudida, não apenas pelos países vizinhos que tinham interesses, mas também por parte de todos os Intendentes das Nações mais distantes (LANDRA, 2009, p. 248, tradução nossa).



Capítulo 2

Ressignificando o conceito de cevianas do triângulo



CAPÍTULO 2

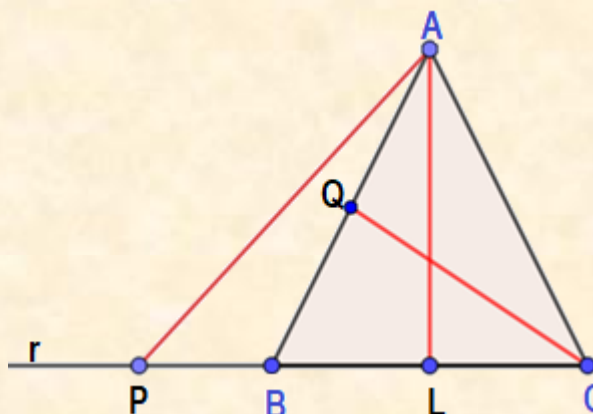
RESSIGNIFICANDO O CONCEITO DE CEVIANAS DO TRIÂNGULO

2. Cevianas do Triângulo

O termo cevianas é decorrente do sobrenome do matemático Giovanni Ceva.

Ceviana é todo segmento que tem extremidade num vértice qualquer de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice.

Figura 6- Cevianas



Fonte: Melo (2021)

Os segmentos $\overline{AL}$, $\overline{AP}$ e $\overline{CQ}$ são cevianas do triângulo ΔABC , ou seja:

- $\overline{AL}$ e $\overline{AP}$ são cevianas relativas ao vértice A ou ao lado $\overline{BC}$
- $\overline{CQ}$ é relativa ao vértice C ou ao lado $\overline{AB}$.
- L , P e Q são chamados de pés dessas cevianas
- r é reta a reta suporte do segmento $\overline{BC}$

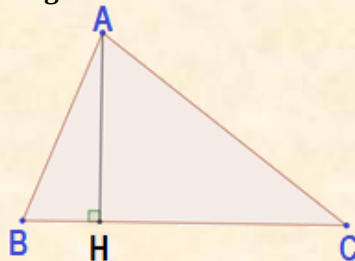
Um triângulo apresenta infinitas cevianas, mas, nos ateremos a apresentar três cevianas notáveis: altura, bissetriz e mediana.

2.1 Alturas de um triângulo

A altura de um triângulo é uma ceviana perpendicular com uma extremidade em um vértice e outra extremidade no lado oposto ao vértice ou ao prolongamento deste lado.

Dado um $\triangle ABC$ qualquer (figura 7), tracemos um segmento de reta com extremidade no vértice A e perpendicular ao lado $\overline{BC}$, seja H o ponto de intersecção do segmento $\overline{AH}$ e o lado $\overline{BC}$ do triângulo. O segmento $\overline{AH}$ é uma ceviana denominada altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$ ou ao vértice A .

Figura 7 – Altura interna



Fonte: Melo (2021)

Neste caso, observe que a altura pertence à região interna do triângulo e não coincide com nenhum de seus vértices.

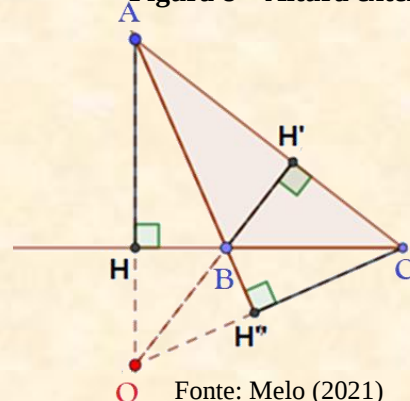
Logo, podemos afirmar que $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ e $\overline{AH}$ é altura relativa ao lado $\overline{BC}$ ou ao vértice A . H é chamado de pé da altura.

No entanto, a altura também pode se localizar na região externa do triângulo (sendo a altura relativa a apenas um dos vértices), quando temos um triângulo obtusângulo e, neste caso, ela será traçada de um vértice unindo-se ao prolongamento do lado oposto a este vértice (figura 8).



No **triângulo obtusângulo**, há alturas externas com uma extremidade no prolongamento dos lados.

Figura 8 – Altura externa



Fonte: Melo (2021)

Todo triângulo possui três alturas, cada uma delas relativa a um dos seus lados (ou vértices).

2.1.2 Ortocentro

Em todo triângulo, as três alturas ou as retas que contém as alturas concorrem em um único ponto, denominado ortocentro do triângulo.

De acordo com o triângulo traçado podemos observar algumas características relacionadas às suas alturas e ao ortocentro. Nas figuras 9, 10 e 11 a seguir, **O** é o ortocentro do $\triangle ABC$.

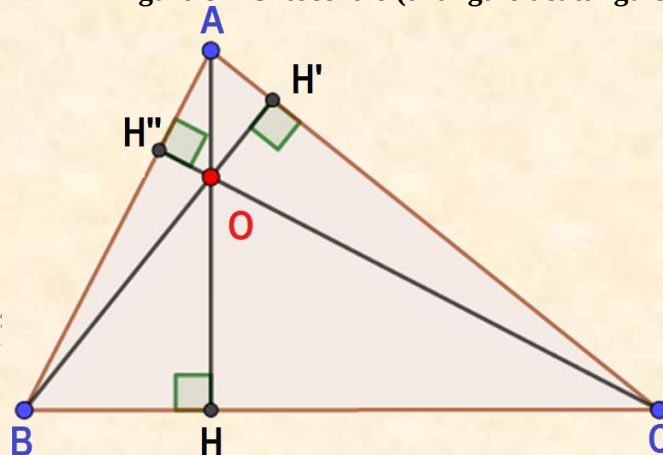
- **Triângulo Acutângulo**

Um triângulo é dito acutângulo quando seus três ângulos internos são agudos. No triângulo acutângulo, o ortocentro sempre é um ponto pertencente à região interna do triângulo.

No **triângulo acutângulo**, o ortocentro é um **ponto interno** ao triângulo



Figura 9 – Ortocentro (triângulo acutângulo)



Fonte: Melo (2021)

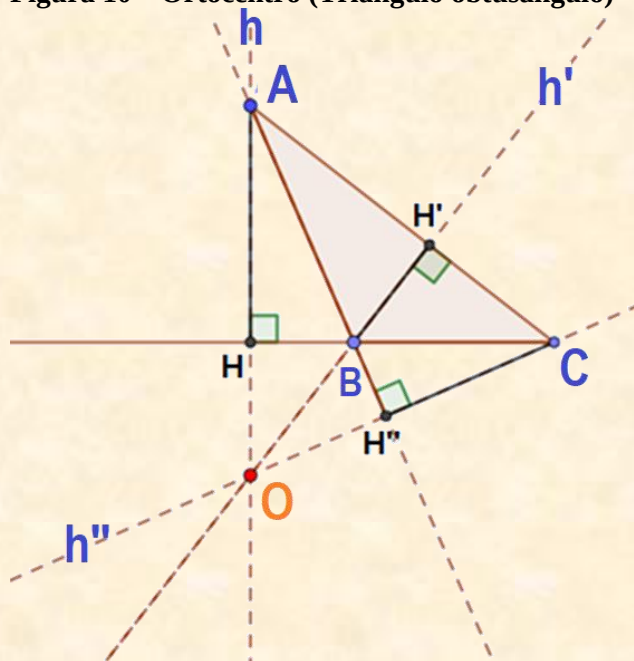
Na figura 9 as cevianas $\overline{AH}$, $\overline{BH'}$ e $\overline{CH''}$ são alturas relativas aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente e **O** é o ortocentro do $\triangle ABC$.

- **Triângulo Obtusângulo**

Um triângulo pode ser classificado como obtusângulo, quando um de seus ângulos internos é obtuso, ou seja, quando um deles possui medida maior que 90° graus e menor que 180° .

No triângulo obtusângulo, as alturas não concorrem, mas sim as retas suporte que contêm as alturas e o ortocentro é ponto exterior ao ΔABC (figura 10)

Figura 10 – Ortocentro (Triângulo obtusângulo)



Fonte: Melo (2021)



Temos que:

- i) $\overline{AH}$ é altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e foi traçada perpendicularmente à reta suporte do segmento $\overline{BC}$.
- ii) $\overline{BH'}$ é altura relativa ao lado $\overline{AC}$ e pertence à região interna do ΔABC .
- iii) $\overline{CH''}$ é altura relativa ao lado $\overline{AB}$ e foi traçada perpendicularmente à reta suporte do segmento $\overline{AB}$.

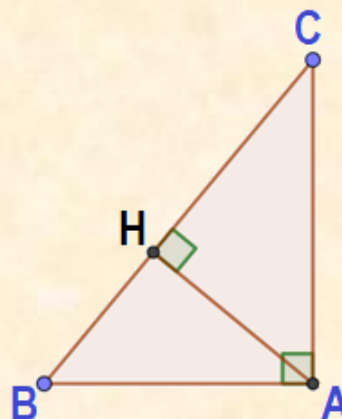
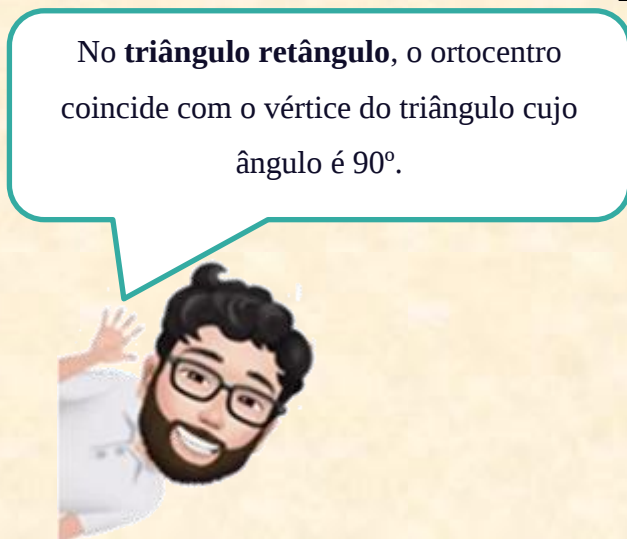
Desse modo, as cevianas $\overline{AH}$ e $\overline{CH''}$ são alturas externas enquanto $\overline{BH'}$ é interna ao triângulo. O ortocentro (O) é um ponto externo no qual, encontra-se as três retas h , h' e h'' que contêm as alturas do ΔABC .

• Triângulo retângulo

Um triângulo é denominado retângulo quando um de seus ângulos mede 90° . Seja um triângulo retângulo ABC , e $\hat{A} = 90^\circ$ (figura 11), as duas alturas $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são coincidentes com

os lados (catetos) e, a terceira altura, $\overline{AH}$, intercepta o lado $\overline{BC}$ (hipotenusa) no ponto H . Nesse sentido, o ortocentro O coincide com vértice A – ponto de encontro das três alturas.

Figura 11 – Ortocentro (Triângulo retângulo)



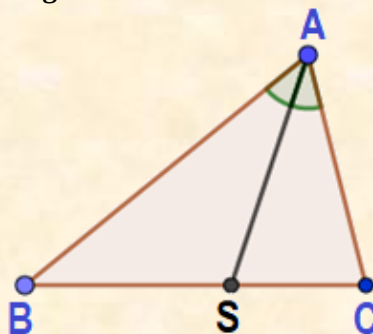
Fonte: Melo (2021)

2.2 Bissetrizes internas de um triângulo

A bissetriz interna de um triângulo é a ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes congruentes.

Dado um $\triangle ABC$ qualquer, tracemos um segmento de reta partindo do vértice A , de modo que este divida o ângulo interno $B\hat{A}C$ em dois ângulos congruentes e encontre o lado $\overline{BC}$ - seja S o ponto de encontro entre a ceviana $\overline{AS}$ e o lado $\overline{BC}$ do triângulo. A ceviana $\overline{AS}$ é chamada de bissetriz interna do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$ ou ao ângulo $B\hat{A}C$ (figura 12).

Figura 12 – Bissetriz interna



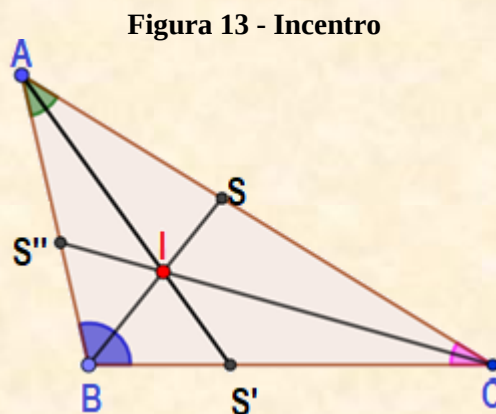
Fonte: Melo (2021)

Todo triângulo possui três bissetrizes internas, cada uma delas relativa a um dos seus lados (ou vértices).

2.2.1 Incentro

Em todo triângulo, as três bissetrizes internas concorrem em um único ponto, denominado incentro.

Traçando-se as três bissetrizes internas no ΔABC (figura 13), teremos:



Fonte: Melo (2021)

Na figura 13, temos que:

- i) $\overline{AS''}$ é bissetriz interna relativa ao lado $\overline{BC}$ ou ao ângulo $\widehat{BAC}$
- ii) $\overline{BS'}$ é bissetriz interna relativa ao lado $\overline{AC}$ ou ao ângulo $\widehat{ABC}$
- iii) $\overline{CS}$ é bissetriz interna relativa ao lado $\overline{AB}$ ou ao ângulo $\widehat{ACB}$
- iv) I é o incentro do ΔABC .

2.3 Medianas de um triângulo

Antes de abordarmos as medianas propriamente ditas, recordaremos o conceito de ponto médio de um segmento.

Um ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, M estiver entre A e B e o segmento $\overline{AM}$ for congruente ao segmento $\overline{MB}$.



Fonte: Melo (2021)

Na figura 14, o ponto M está entre A e B , de modo que divide o segmento $\overline{AB}$ em duas partes, tais que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Logo, podemos afirmar que M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

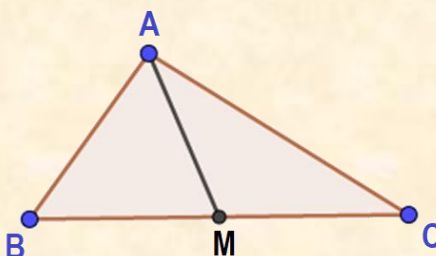
A mediana de um triângulo é a ceviana que possui uma extremidade em um vértice e outra extremidade no ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Dado um $\triangle ABC$ qualquer (figura 15), determinamos M , o ponto médio de $\overline{BC}$ e ligamos, por uma linha reta, A a M . A ceviana $\overline{AM}$ é chamada de mediana do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$ ou relativa ao vértice A .

Dessa forma, podemos dizer que:

Se, M é ponto médio do lado $\overline{BC}$ do triângulo, então, $\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$.

Figura 15 - Mediana



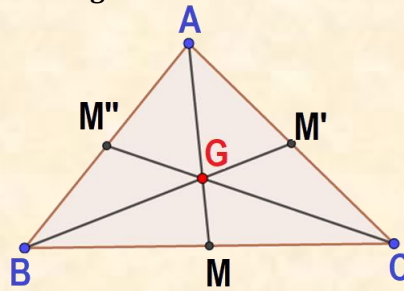
Fonte: Melo (2021)

Todo triângulo possui três medianas, cada uma delas relativa a um dos seus lados.

2.3.1 Baricentro

Em todo triângulo, as três medianas concorrem em um único ponto, denominado baricentro.

Figura 16 – Baricentro



Fonte: Melo (2021)

Na figura 16:

- i. $\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{BC}$
- ii. $\overline{BM'}$ é mediana relativa ao lado $\overline{AC}$
- iii. $\overline{CM''}$ é mediana relativa ao lado $\overline{AB}$
- iv. G é o baricentro do ΔABC .

Em qualquer triângulo, o baricentro divide a mediana em uma razão de 1 para 2, ou seja:

$$\frac{\overline{MG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{M'G}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{M''G}}{\overline{CG}} = \frac{1}{2}$$

Logo na figura 16 temos:

$$* \overline{AG} = 2 \overline{GM} \quad \text{ou} \quad \overline{GM} = \frac{\overline{AG}}{2}$$

$$* \overline{BG} = 2 \overline{GM'} \quad \text{ou} \quad \overline{GM'} = \frac{\overline{BG}}{2}$$

$$* \overline{CG} = 2 \overline{GM''} \quad \text{ou} \quad \overline{GM''} = \frac{\overline{CG}}{2}$$



2.4 Teorema de Ceva

O *Teorema de Ceva*, ou *Teorema das Cevianas*, pode ser considerado como uma extensão do *Teorema de Menelau*, com uma gama maior de aplicações. Ele estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas de um triângulo sejam concorrentes. Esse teorema foi apresentado originalmente em latim, na sua obra *De Lineis Rectis Statica Constructio*,

“com uma iniciação às coordenadas homogêneas” (LANDRA, 2009, p.8, tradução nossa), como pode-se constatar no excerto abaixo:

Se a partir dos vértices EAC de um triângulo [figura 17] traçarmos três retas que se interceptem em um ponto interno F. E, sejam B, K e D, respectivamente, os pontos de intersecção com os lados opostos a esses vértices.

Aplica-se aos vértices E, A e C, respectivamente os pesos I, G e H, de modo que:

$$G : I = ED : DA$$

$$G : H = CB : BA$$

Então, prova-se que:

$$H : I = EK : KC$$

E, além disso, que:

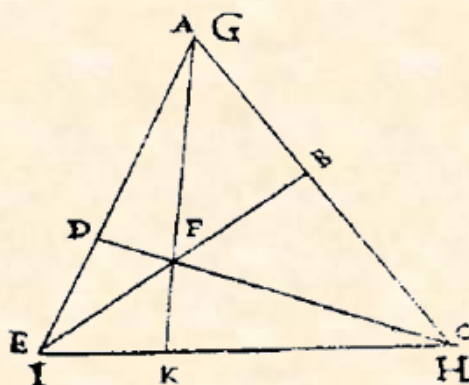
$$I : (G + H) = BF : FE$$

$$H : (I + G) = DF : FC$$

$$G : (I + H) = KF : FA$$

(MERCANTI, 2004, p.218, *apud* Landra, 2009, p.8, tradução nossa) .

Figura 17 – Teorema de Ceva



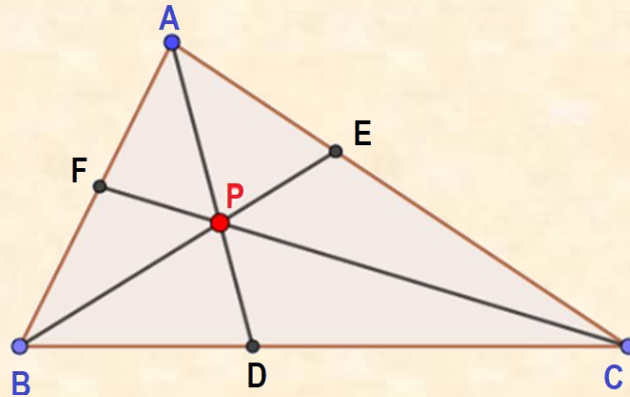
Fonte: Ceva (1678, p. I)

E, desse modo, anunciaremos o *Teorema de Ceva*, tendo como alicerce o proposto por Silva (2015) e Araújo (2014).

Teorema de Ceva (versão simplificada) - Dado $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, e sejam D , E e F , três pontos situados respectivamente sobre as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e . As cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ são *concorrentes*, em um ponto P , se e somente se

$$\left(\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\right) = 1$$

Figura 18 - As cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ são concorrentes no ponto P.



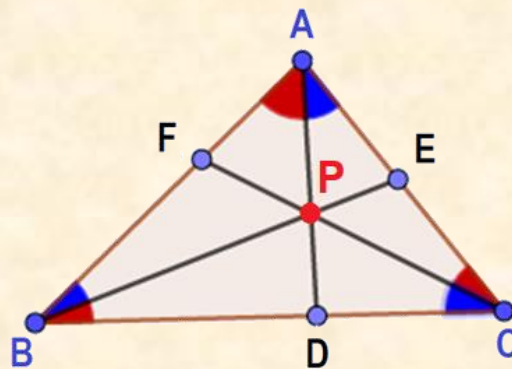
Fonte: Melo (2021)

Também pode ser anunciado em sua versão trigonométrica (figura 19). Nesta versão, busca-se colocar na forma de razão os ângulos internos dos triângulos formados pelas cevianas que concorrem em um único ponto:

Teorema de Ceva (trigonométrico) - Dado ΔABC um triângulo qualquer, e sejam D, E e F, três pontos situados respectivamente sobre as retas $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ e . As cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ são concorrentes, em um ponto P, se e somente se

$$\left(\frac{\text{sen}(\widehat{DAC})}{\text{sen}(\widehat{DAB})} \right) \cdot \left(\frac{\text{sen}(\widehat{EBA})}{\text{sen}(\widehat{EBC})} \right) \cdot \left(\frac{\text{sen}(\widehat{FCB})}{\text{sen}(\widehat{FCA})} \right) = 1$$

Figura 19 – Ceva trigonométrico



Fonte: Melo (2021)

Como consequência têm-se que:

$$\text{sen}(\widehat{DAC}) \cdot \text{sen}(\widehat{EBA}) \cdot \text{sen}(\widehat{FCB}) = \text{sen}(\widehat{DAB}) \cdot \text{sen}(\widehat{EBC}) \cdot \text{sen}(\widehat{FCA})$$

2.5 Demonstração do Teorema de Ceva

Para realizarmos a demonstração do *Teorema de Ceva*, utilizaremos como referencial os trabalhos de Silva (2015), Holanda (2013), Castro (2013) e Thiago (2013). Nossa demonstração basear-se-á na relação entre as áreas dos triângulos. Antes de procedermos à demonstração pelas vias de fato, veremos algumas propriedades de geometria básica que nos serão muito úteis no decorrer da exposição.

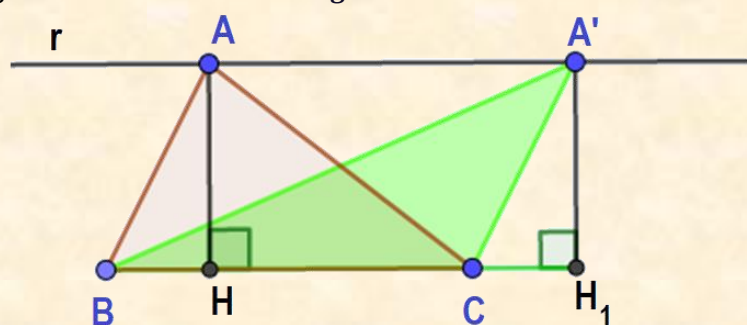
2.5.1 Propriedades iniciais

Propriedade 1

A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base

Dado um $\triangle ABC$ qualquer, a partir de A trace um segmento ortogonal ao lado $\overline{BC}$ dando origem ao segmento $\overline{AH}$. Considere uma reta r , paralela à base do triângulo e que passe pelo ponto A , tendo-a como ponto de referência, construa um novo triângulo com base $\overline{BC}$ e um vértice A' sobre a reta r .

Figura 20 – Área de um triângulo de mesma base e altura



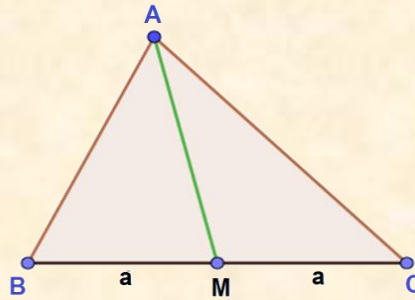
Fonte: Melo (2021)

Na figura 20, movendo-se o ponto A' sobre a reta r , as medidas das alturas dos triângulos formados pelos vértices A' terão sempre as mesmas - assim, as medidas das bases permanecem inalteradas. Desse modo, podemos concluir que $S_{ABC} = S_{A'BC}$. (Designamos por S a área do triângulo)

Propriedade 2

A mediana divide o triângulo em duas regiões que possuem áreas iguais

Figura 21 - Divisão da região de um triângulo por uma mediana

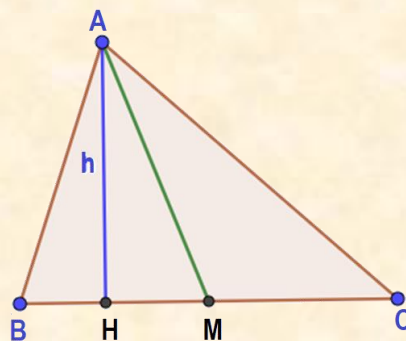


Fonte: Melo (2021)

Em um $\triangle ABC$ qualquer (figura 21), seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, tracemos um segmento de reta com uma extremidade no vértice A e outra extremidade no ponto M , ou seja, $\overline{AM}$. A mediana $\overline{AM}$ dividirá a região S_{ABC} em outras duas regiões equivalentes.

Este resultado pode ser verificado aplicando o conceito de área de triângulos. Designa-se h a altura do $\triangle ABC$, que é a mesma altura dos triângulos menores $\triangle ABM$ e $\triangle AMC$ (figura 22).

Figura 22 - Divisão da região de um triângulo por uma mediana



Fonte: Melo (2021)

Temos que:

$$S_{ABM} = \frac{\overline{BM} \cdot h}{2} \text{ e } S_{AMC} = \frac{\overline{MC} \cdot h}{2}$$

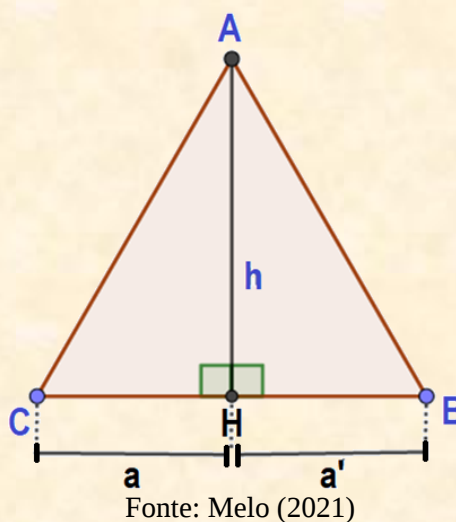
Como M é ponto médio do segmento $\overline{BC}$, temos que $\overline{BM} = \overline{MC}$ e, pela Propriedade 1, podemos concluir que $S_{AMB} = S_{AMC}$.

Propriedade 3

Se dois triângulos têm a mesma altura, então, a razão entre as suas áreas é igual à razão entre suas bases.

Esta propriedade pode ser verificada utilizando-se o cálculo da área dos triângulos ΔCHA e ΔBHA (figura 23).

Figura 23 - Triângulos com mesma altura



Assim, temos que:

$$\text{I - } S_{CHA} = \frac{ah}{2} \quad \text{e} \quad \text{II - } S_{BHA} = \frac{a'h}{2}.$$

Da razão entre as áreas I e II, encontraremos que:

$$\frac{S_{CHA}}{S_{BHA}} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h}{2}} = \frac{ah}{2} \times \frac{2}{a'h} = \frac{a}{a'}$$

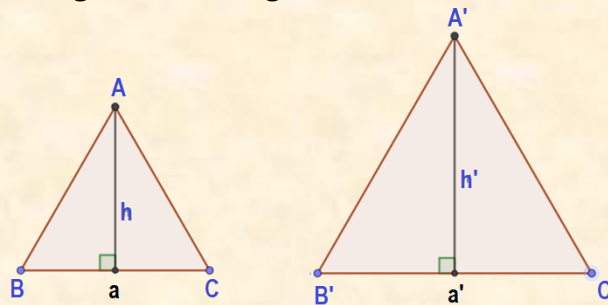
Permitindo-nos concluir que $\frac{S_{CHA}}{S_{BHA}} = \frac{a}{a'}$.

Propriedade 4

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Assim como na demonstração anterior, esta propriedade pode ser verificada utilizando-se o cálculo da área dos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ (figura 24).

Figura 24 - Triângulos semelhantes



Fonte: Melo (2021)

Note que:

A área do ΔABC será: $S_{ABC} = \frac{ah}{2}$

A área do $\Delta A'B'C'$ será: $S_{A'B'C'} = \frac{a'h'}{2}$

Dividindo a área do ΔABC pela área do $\Delta A'B'C'$ teremos:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}} = \frac{ah}{2} \times \frac{2}{a'h'} = \frac{ah}{a'h'}$$

Mas, como $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, temos também que

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = k$$

Assim:
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2$$

Portanto,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$$

Propriedade 5

Se um ponto C está entre dois pontos A e B , então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.

Podemos verificar a propriedade 5 por meio da figura 25.



Fonte: Melo (2021)

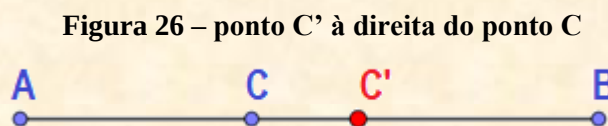
Propriedade 6

Se um ponto está no interior do segmento, então a razão na qual esse ponto divide o segmento define univocamente esse ponto.

Considere o segmento $\overline{AB}$ e um ponto C (figura 26) entre as extremidades. Imaginemos um ponto C' , também pertencente ao segmento $\overline{AB}$. Se os pontos C e C' , satisfazem a relação $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$, então, os pontos, C e C' são iguais ou coincidentes.

De fato, se o ponto C' também pertence ao segmento $\overline{AB}$, então, podemos considerar três possíveis localizações para o ponto C' .

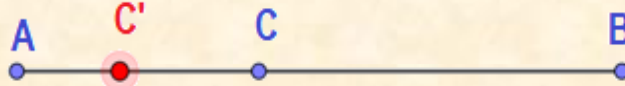
- i) C' pode estar à direita de C .



Fonte: Melo (2021)

Nesse caso, note que $\overline{CA} < \overline{C'A}$ e que $\overline{CB} > \overline{C'B}$, logo a razão $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} > \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$.

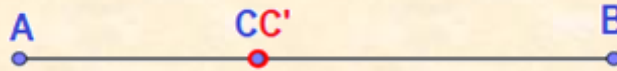
- ii) C' pode estar à esquerda de C .

Figura 27 - ponto C' à esquerda do ponto C 

Fonte: Melo (2021)

Nessa situação, temos que $\overline{CA} > \overline{C'A}$ e que $\overline{CB} < \overline{C'B}$, logo a razão $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} < \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$.

iii) C' pode coincidir com o C .

Figura 28 - ponto C' coincide com o ponto C 

Fonte: Melo (2021)

Observe que quando C' coincide com C , temos que $\overline{CA} = \overline{C'A}$ e que $\overline{CB} = \overline{C'B}$, logo a razão $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$. Assim, $C = C'$.

2.5.2 Demonstração via relação entre áreas

Neste tópico, faremos a demonstração do *Teorema de Ceva* em sua versão simplificada, utilizando como ferramenta a relação entre as áreas do triângulo. Podemos observar que este teorema possui uma condicional *se, e somente se*¹⁰ ($\leftrightarrow$), e sua prova obrigatoriamente terá um caminho de ida e um de volta (a recíproca).

Como já anunciamos anteriormente:

Teorema de Ceva (versão simplificada) - Dado $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, e sejam D , E e F , três pontos situados respectivamente sobre as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$. As cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ são **concorrentes**, em um ponto P , se e somente se

$$\left(\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\right) = 1$$

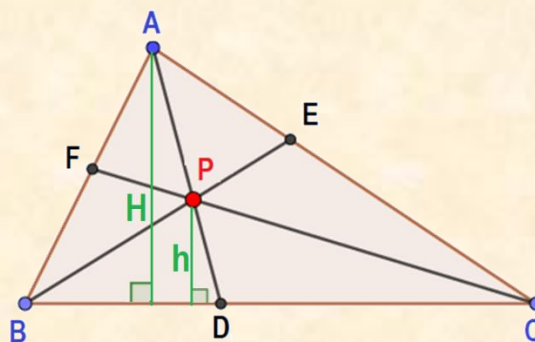
Isso significa que:

¹⁰ Dada duas proposições a e b , a proposição $a \leftrightarrow b$, pode ser lida como: “ a se, e somente se, b ”, “ a é condição necessária e suficiente para b ”, “ b é condição necessária e suficiente para a ” ou “se a , então b e reciprocamente”. A condicional *se, e somente se* será verdadeira quando ambas as proposições são verdadeiras ou ambas forem falsas, caso isso não ocorra, dizemos que o condicional é falso.

I – ($\rightarrow$) Se as três cevianas do $\triangle ABC$ são concorrentes em ponto P , então, o produto entre as razões é igual a 1.

II – ($\leftarrow$) Reciprocamente, se o produto entre as razões é igual a 1, então, as três cevianas do $\triangle ABC$ concorrem em um único ponto P .

Figura 29 – Cevianas de um $\triangle ABC$ qualquer



Fonte: Melo (2021)

Dessa forma, inicialmente vamos assumir que as cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ do $\triangle ABC$ (Figura 29), são concorrentes em um único ponto P e demonstraremos a validade da igualdade:

$$\left(\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\right) = 1$$

Os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$ (figura 29) possuem a mesma altura H em relação às bases $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente.

$$\text{Então, podemos afirmar que: } S_{ADB} = \frac{H \cdot \overline{BD}}{2} \quad \text{e} \quad S_{ADC} = \frac{H \cdot \overline{DC}}{2}.$$

Do mesmo modo, os triângulos $\triangle BDP$ e $\triangle CDP$ (figura 29) possuem a mesma altura h em relação às bases $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente.

$$\text{Então, podemos afirmar que: } S_{BDP} = \frac{h \cdot \overline{BD}}{2} \quad \text{e} \quad S_{CDP} = \frac{h \cdot \overline{DC}}{2}.$$

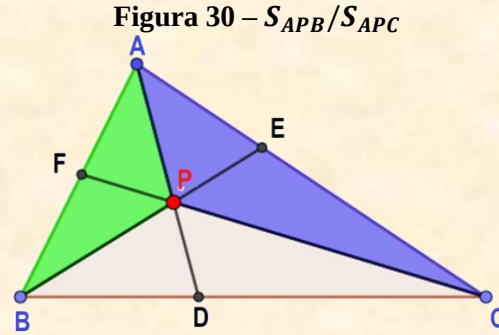
Pela propriedade 3, se dois triângulos têm a mesma altura, então a razão entre as suas áreas é igual à razão entre suas bases. Assim:

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \quad \text{e} \quad \frac{S_{BDP}}{S_{CDP}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

E assim, concluímos que:

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{S_{BDP}}{S_{CDP}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

Isso implica que, observando a relação entre as áreas dos triângulos ΔAPD e ΔAPC (figura 30) podemos escrever que: $\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ (I).



Fonte: Melo (2021)

Pois,

$$\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{S_{ADB} - S_{BDP}}{S_{ADC} - S_{CDP}}$$

Substituindo-se os valores das S_{ADB} , S_{BDP} , S_{ADC} , e S_{CDP} , pelos valores encontrados na figura 28, teremos:

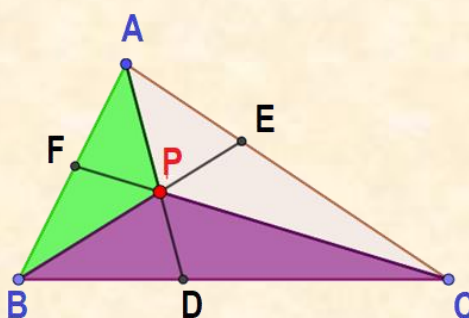
$$\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{\frac{H \cdot \overline{BD}}{2} - \frac{h \cdot \overline{BD}}{2}}{\frac{H \cdot \overline{DC}}{2} - \frac{h \cdot \overline{DC}}{2}}$$

Colocando-se os fatores comuns ($\overline{BD}$ e $\overline{DC}$) em evidência e simplificando a expressão, chegaremos à conclusão de que:

$$\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{\overline{BD} \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{2} \right)}{\overline{DC} \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{2} \right)} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

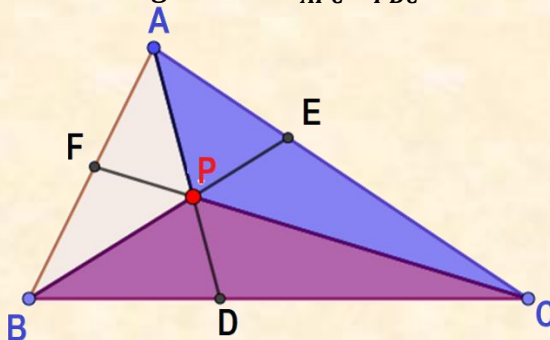
De modo análogo ao demonstrando, observando a relação entre as áreas dos triângulos

ΔBPC e ΔAPB (figura 31), podemos escrever: $\frac{S_{BPC}}{S_{APB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}$ (II).

Figura 31 - S_{BPC}/S_{APB} 

Fonte: Melo (2021)

Na figura 32, observando a relação entre as áreas dos triângulos ΔAPC e ΔBPC , podemos escrever que: $\frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$ (III).

Figura 32 - S_{APC}/S_{BPC} 

Fonte: Melo (2021)

Das relações acima, vimos que:

$$\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \quad (I), \quad \frac{S_{BPC}}{S_{APB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \quad (II), \quad \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \quad (III).$$

Então, multiplicando-se as relações (I), (II) e (III), membro a membro, e eliminando os fatores comuns no segundo membro da igualdade, obtém-se:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{\cancel{S_{APB}}}{\cancel{S_{APC}}} \cdot \frac{\cancel{S_{BPC}}}{\cancel{S_{APB}}} \cdot \frac{\cancel{S_{APC}}}{\cancel{S_{BPC}}} = 1$$

Logo:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1 \quad (*)$$

Até o momento, demonstramos a “ida” do teorema, ou seja, se as três cevianas do ΔABC são concorrentes em um ponto, então, o produto entre as razões é 1. Ainda falta provar a recíproca.

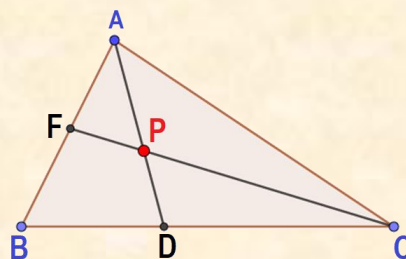


Neste segundo momento, faremos o caminho inverso e provaremos que, se o produto entre as razões é igual a 1, então, as três cevianas concorrem em um único ponto, que designaremos por P .

Inicialmente, vamos assumir que $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1 \quad (*)$ é uma proposição verdadeira, como demonstramos anteriormente.

Em seguida, dado um ΔABC qualquer e que $\overline{AD} \cap \overline{CF} = \{P\}$ (figura 33).

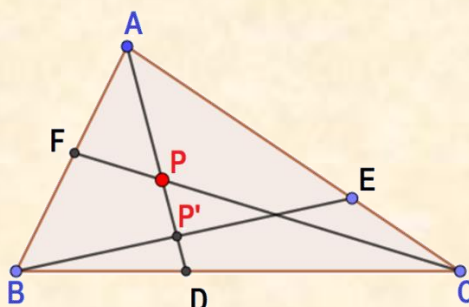
Figura 33 - Recíproca do Teorema de Ceva



Fonte: Melo (2021)

Tomemos um ponto E arbitrário, pertencente ao lado $\overline{AC}$ do triângulo, e tracemos um segmento de reta unindo o vértice B ao ponto E , de modo que corte o segmento $\overline{AD}$ em um ponto P' (Figura 34).

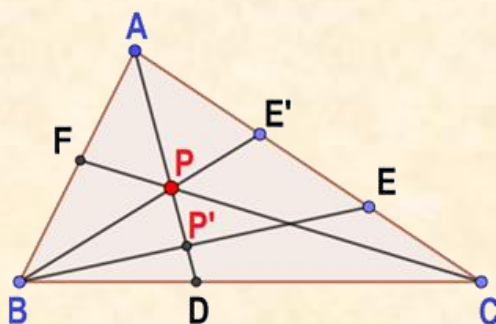
Figura 34 - Recíproca do Teorema de Ceva



Fonte: Melo (2021)

Observe que, ainda não podemos utilizar (*), pois as três cevianas não concorrem em um único ponto, então, tomemos um ponto E' , pertencente ao lado $\overline{AC}$ do triângulo e tracemos um segmento de reta unindo o vértice B ao ponto E' , de modo que passe pelo ponto P (Figura 35).

Figura 35 – Recíproca do Teorema de Ceva



Fonte: Melo (2021)

Pela primeira parte da demonstração do Teorema de Ceva, temos que:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1 \quad (*)$$

Por hipótese, temos que as cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE'}$ e $\overline{CF}$ (figura 35) concorrem no ponto P , então, podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'A}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1 \quad (IV)$$

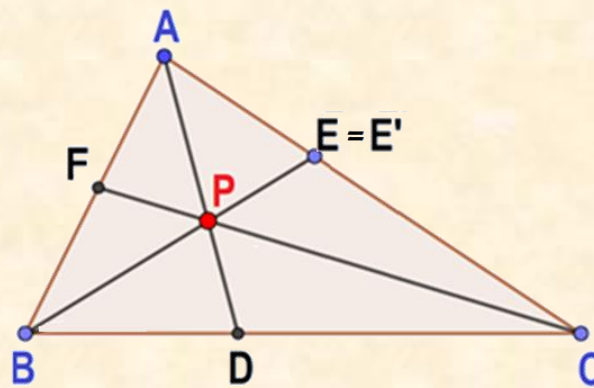
Da razão entre (*) e (IV), temos:

$$\frac{\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}}{\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'A}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'A}}$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'A}}$$

Da razão anterior, utilizando a propriedade 6, podemos concluir que, se um ponto está no interior do segmento, então, a razão na qual esse ponto divide o segmento define univocamente esse ponto (figura 36).

Figura 36 – Recíproca do Teorema de Ceva

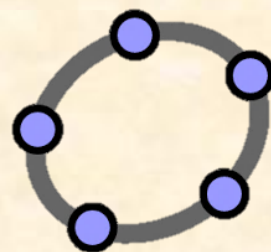
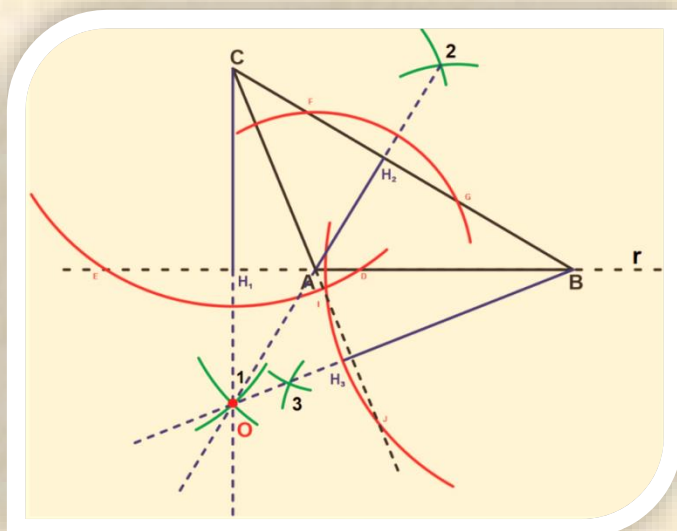


Fonte: Melo (2021)

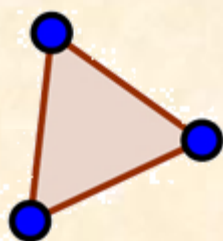
Teremos:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'A}} \leftrightarrow E = E'$$

Logo, as cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, são concorrentes.

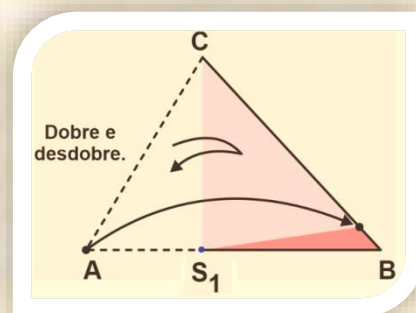
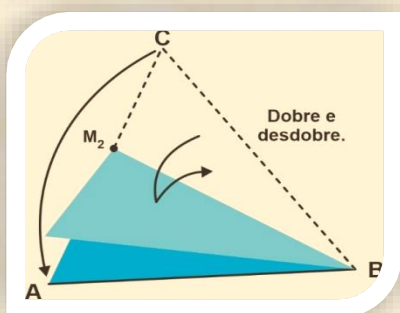


Capítulo 3



GeoGebra

Explorando as cevianas e Pontos notáveis do triângulo



CAPÍTULO 3

EXPLORANDO AS CEVIANAS E OS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Acreditamos que, no Ensino de Geometria, assim como nas demais áreas da Matemática, não devemos ficar submerso a uma única abordagem, mas sim expandindo nossos horizontes, transitando entre o concreto e o abstrato, com o intuito de propiciar aos alunos uma compreensão mais abrangente dos assuntos estudados.

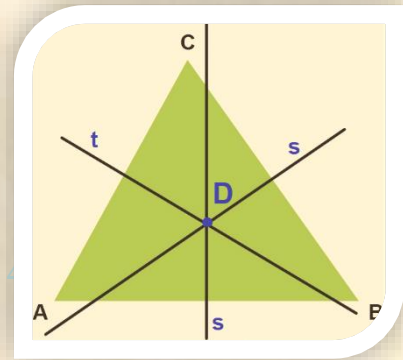
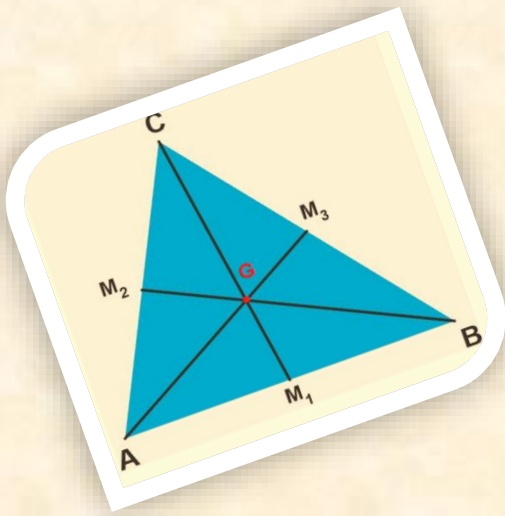
Neste sentido, no presente capítulo, buscamos incluir sugestões de atividades que envolvem as principais cevianas no triângulo e seus pontos notáveis, por meio de dobraduras, construções geométricas e utilização de *softwares* de geometria dinâmica, com as quais o professor tem a autonomia para escolher atividades que serão mais adequadas aos seus objetivos.

Contudo, recomendamos que, antes de se explanar as definições de altura, bissetriz e mediana e seus respectivos pontos de interseção, o professor explore tais segmentos por meio de dobraduras, com o propósito de utilizar essa atividade para a concretização das definições e algumas propriedades. A seguir, seria adequado realizar as construções com régua e compasso, o que pode propiciar aos alunos as ferramentas necessárias para realizar a atividade “*Investigando as cevianas*”. E, por último, caso seja possível, estes assuntos também podem ser explorados utilizando o *GeoGebra*, com o qual o aluno, pode realizar as construções geométricas, caso tenham dificuldade, pode-se consultar os passos fornecidos pelo professor ou, até mesmo, utilizar construções já prontas para realizar uma variedade de testes e fazer inferências, chegando a algumas conclusões, movendo os vértices dos triângulos, alterando sua forma, visualizando, assim, uma infinidade de triângulos, com suas respectivas cevianas.

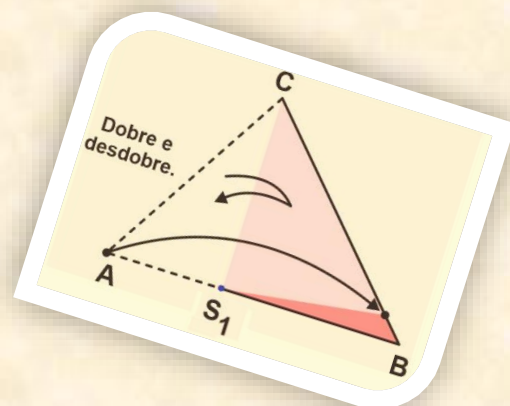
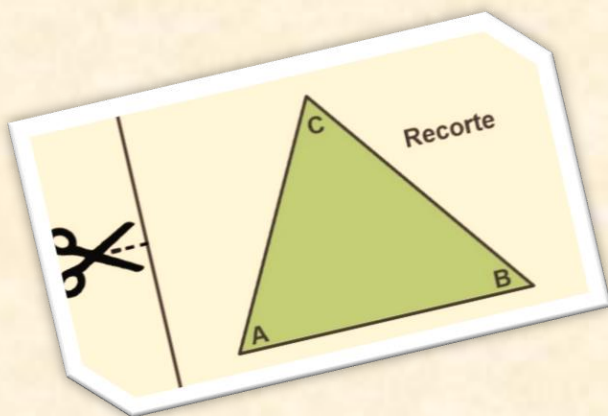
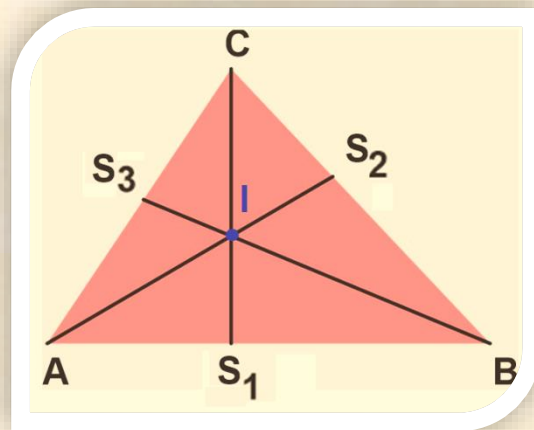
Incluímos neste estudo a mediatriz, mesmo ela não sendo classificada como uma ceviana. Mas, como o encontro das três mediatrizes determina o centro da circunferência circunscrita a um triângulo, ela se faz importante no estudo da Matemática, tendo sua relevância apontada pela BNCC.

Estas atividades foram pensadas para levar os alunos a trabalharem em equipe, manipulando objetos concretos e abstratos, a construir figuras, observarem, analisarem, levantarem hipóteses, confrontarem ideias, dialogarem matematicamente e, assim, espera-se que eles possam chegar a determinadas conclusões com pequenas intervenções do professor, oportunizando-os a aquisição de

[...] competências e habilidades, de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2017, p. 266).



Dobraduras



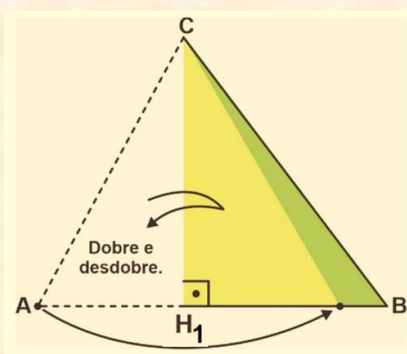
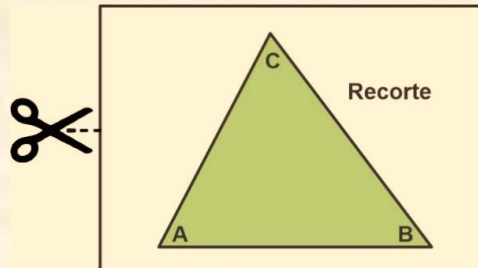
3.1.1 – Estudo das cevianas por meio de dobraduras

ATIVIDADE I	
Material necessário:	Papel A4 (se for possível, utilize uma cor para cada figura), Régua, Tesoura, Lápis e Borracha
Objetivos:	• Conceituar as cevianas de um triângulo: mediana, bissetriz e altura, • Compreender as características desses segmentos • Determinar o ponto de encontro das alturas, medianas e bissetrizes. • Estudar a mediatriz e determinar o incentro
Organização da turma:	Em grupos, de no máximo quatro alunos
Tempo estimado:	duas horas-aula
Ano de escolaridade:	8º ano do Ensino Fundamental
Conteúdo abordado:	Cevianas notáveis e pontos notáveis do triângulo.
Objeto do Conhecimento da BNCC:	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos, Construções geométricas
Habilidades:	EF08MA17, EF08MA15, EF08MA36MG e EF08MA37MG.
Situação proposta: Utilizar dobraduras para apresentar o conceito geométrico de cevianas notáveis e dos pontos de interseção entre elas em diferentes triângulos. (Adaptado do livro <i>Desenho Geométrico – Conceitos e Técnicas</i>, volume 3, de Elizabete Texeira Lopes e Cecília Fujiko Kanegae, 1ª edição, publicado em 2000).	
Desenvolvimento: Distribua os alunos em grupos e entregue quatro folhas de papel A4 para cada grupo, com a finalidade de que seja realizada cada uma das dobraduras separadamente. De acordo com o que os alunos vão construindo as dobraduras, o professor deverá ir anunciando os conceitos geométricos e os indicando na dobradura. Note que nesta atividade, será explorado somente os pontos notáveis internos ao triângulo. Ao final, questione os alunos se uma mediatriz pode ser classificada como uma ceviana, após alguns apontamentos, explique o porquê da mediatriz não ser considerada uma ceviana.	

DETERMINAÇÃO DAS ALTURAS E DO ORTOCENTRO

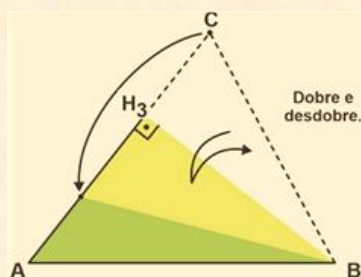
Para o professor: Informar aos alunos que, nesse caso, estamos determinando o segmento de reta perpendicular que parte de um vértice do triângulo e intercepta o lado oposto.

Passo 1 - Em uma folha de papel A4, desenhar um triângulo ABC qualquer (inicialmente, dê preferência ao triângulo acutângulo), nomear os vértices e, depois, recortá-lo. Obs.: Não recortar um triângulo pequeno, pois dificultará as dobras.



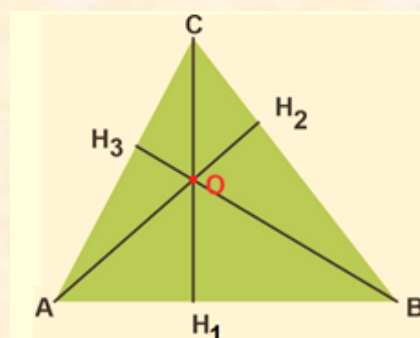
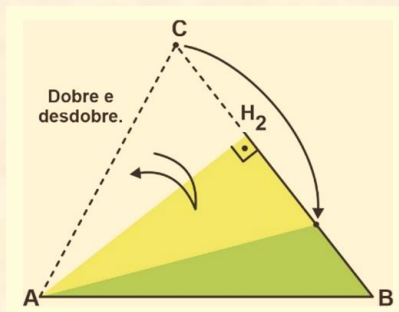
Passo 2 – Dobrar o lado $\overline{AB}$ do triângulo sobre ele mesmo, de modo que o vinco passe pelo vértice C e os vértices A e B não se sobreponham. Com a régua, traçar sobre o vinco o segmento $\overline{CH_1}$ – este segmento é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

Passo 3 - Dobrar o lado $\overline{BC}$ do triângulo sobre ele mesmo, de modo que o vinco passe pelo vértice A e os vértices B e C não se sobreponham. Com a régua, traçar sobre o vinco o segmento $\overline{AH_2}$ – este segmento é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.



relativa ao lado $\overline{AC}$.

Passo 4 - Dobrar o lado $\overline{AC}$ do triângulo sobre ele mesmo, de modo que o vinco passe pelo vértice B e os vértices C e A não se sobreponham. Com a régua, traçar sobre o vinco o segmento $\overline{BH_3}$ – este segmento é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

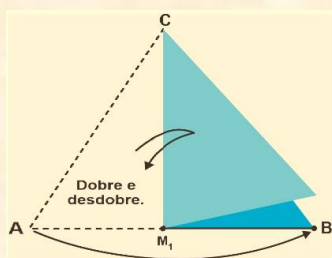
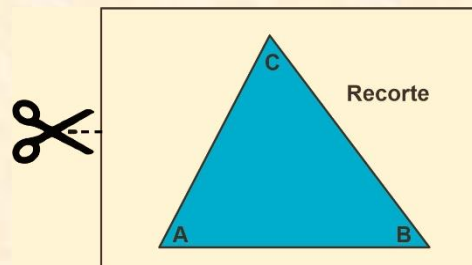


Passo 5 – O ponto de interseção (O) entre as alturas $\overline{CH_1}$, $\overline{AH_2}$ e $\overline{BH_3}$ – é denominado ortocentro do triângulo.

DETERMINAÇÃO DAS MEDIANAS E DO BARICENTRO

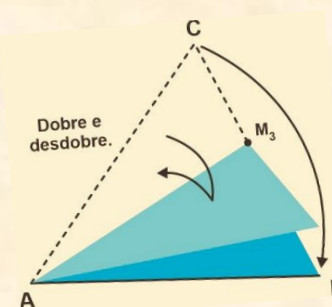
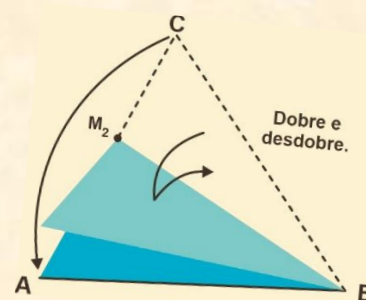
Para o professor: Informar aos alunos que, nesse caso, estamos determinando o segmento de reta que parte de um vértice do triângulo e intercepta o ponto médio do lado oposto.

Passo 1 - Em uma folha de papel A4, desenhar um triângulo ABC qualquer, nomear os vértices e, depois, recortá-lo. *Obs.: Não recortar um triângulo pequeno, pois dificultará as dobras.*



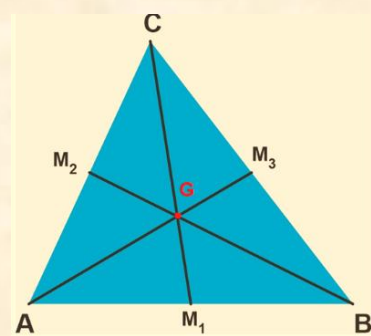
Passo 2 - Dobrar o lado $\overline{AB}$ do triângulo ao meio, de modo os vértices A e B se sobreponham, faça um pequeno vinco. Foi determinado o ponto médio M_1 do lado $\overline{AB}$. Dobrar o triângulo fazendo um vinco que passe pelo vértice C e pelo ponto médio M_1 . Com a régua, traçar, sobre o vinco, o segmento de reta $\overline{CM_1}$ – este segmento é a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.

Passo 3 - Dobrar o lado $\overline{AC}$ do triângulo ao meio, de modo que os vértices A e C se sobreponham, fazer um pequeno vinco. Foi determinado o ponto médio M_2 do lado $\overline{AC}$. Dobrar o triângulo fazendo um vinco que passe pelo vértice B e pelo ponto médio M_2 . Com a régua, traçar sobre o vinco o segmento de reta $\overline{BM_2}$ – este segmento é a mediana relativa ao lado $\overline{AC}$.



Passo 4 - Dobrar o lado $\overline{BC}$ do triângulo ao meio, de modo os vértices B e C se sobreponham, fazer um pequeno vinco. Foi determinado o ponto médio M_3 do lado $\overline{BC}$. Dobrar o triângulo fazendo um vinco que passe pelo vértice A e pelo ponto médio. Com a régua, traçar sobre o vinco o segmento de reta $\overline{AM_3}$ – este segmento é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

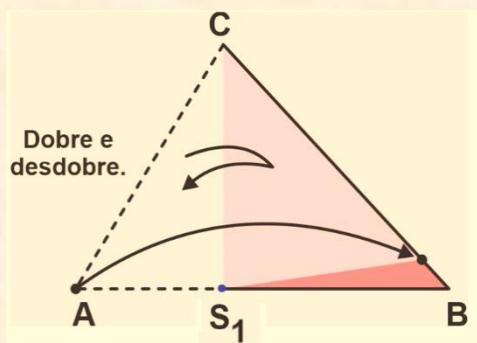
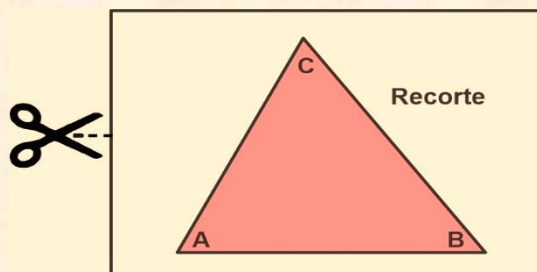
Passo 5 – O ponto de interseção entre as medianas $\overline{CM_1}$, $\overline{BM_2}$ e $\overline{AM_3}$ é denominado baricentro (G) do triângulo.



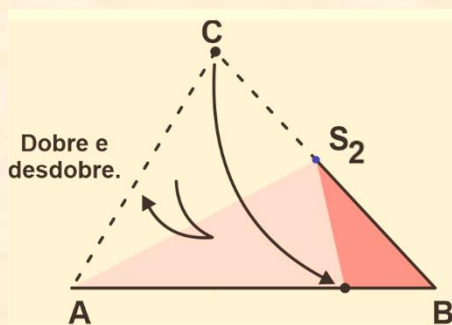
DETERMINAÇÃO DAS BISSETRIZES E DO INCENTRO

Para o professor: Informar aos alunos que, nesse caso, estamos determinando segmento de reta que divide o ângulo em dois ângulos congruentes.

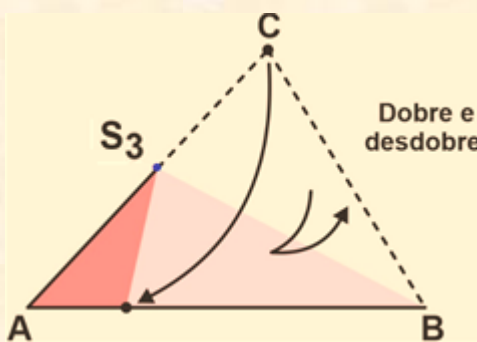
Passo 1 - Em uma folha de papel A4, desenhar um triângulo ABC qualquer, nomear os vértices e, depois, recortá-lo. *Obs.: Não recortar um triângulo pequeno, pois dificultará as dobras.*



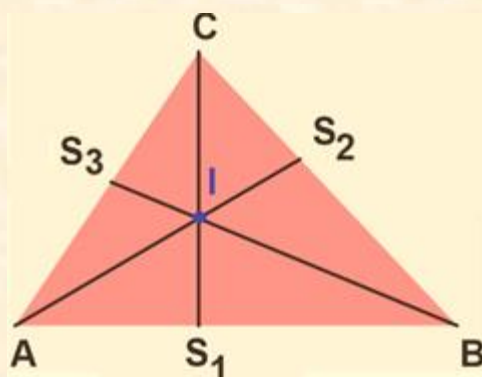
Passo 2 – Dobrar o lado $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{BC}$, de modo que o vinco passe pelo vértice C . Com a régua, traçar sobre o vinco o segmento $\overline{CS_1}$ – este segmento é a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{C}$.



Passo 3 - Dobrar o lado $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{AB}$, de modo que o vinco passe pelo vértice A . Com a régua, traçar sobre o vinco o segmento $\overline{AS_2}$ – este segmento é a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.



Passo 4 - Dobrar o lado $\overline{BC}$ sobre o lado $\overline{AB}$, de modo que o vinco passe pelo vértice B . Com a régua, traçar sobre o vinco o segmento $\overline{BS_3}$ – este segmento é a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{B}$.

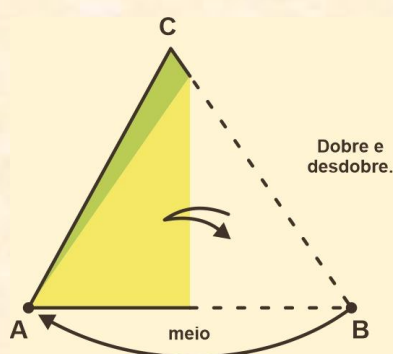
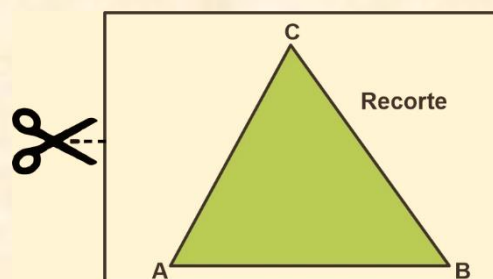


Passo 5 – O ponto de interseção (I) entre as bissetrizes internas $\overline{CS_1}$, $\overline{AS_2}$ e $\overline{BS_3}$ – é denominado incentro do triângulo.

DETERMINAÇÃO DAS MEDIATRIZES E DO CIRCUNCENTRO

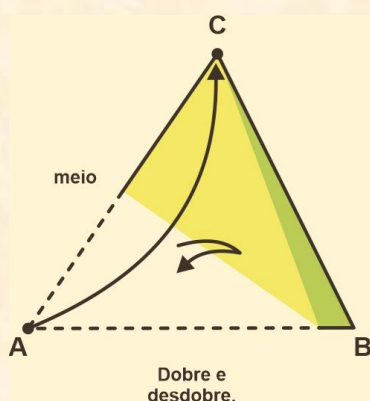
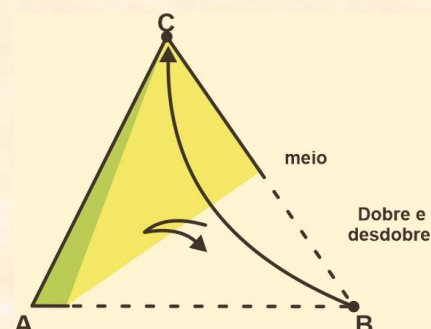
Para o professor: Informar aos alunos que, nesse caso, será determinada a reta perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento.

Passo 1 - Em uma folha de papel A4, desenhar um triângulo ABC qualquer, nomear os vértices e, depois, recortá-lo. *Obs.: Não recortar um triângulo pequeno, pois dificultará as dobras.*



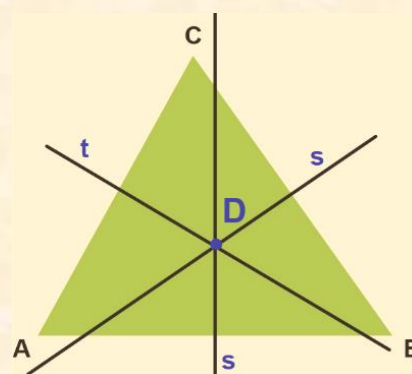
Passo 2 – Dobrar o lado $\overline{AB}$ do triângulo ao meio, de modo os vértices A e B se sobreponham. Com a régua, traçar sobre o vinco a reta r perpendicular – esta reta define a mediatriz relativa ao lado $\overline{AB}$.

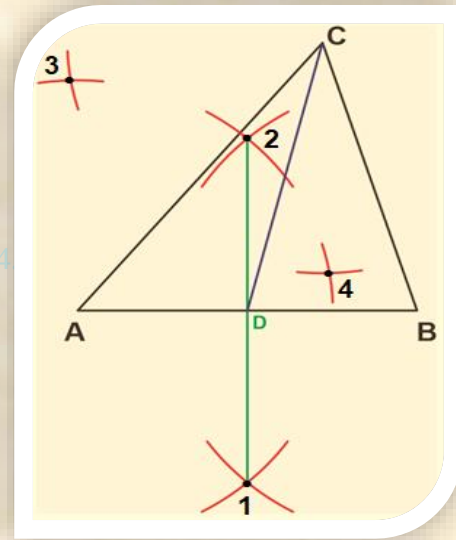
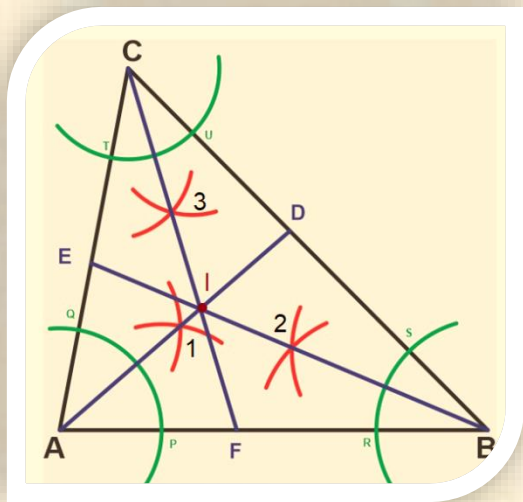
Passo 3 – Dobrar o lado $\overline{BC}$ do triângulo ao meio, de modo os vértices B e C se sobreponham. Com a régua, traçar sobre o vinco a reta s perpendicular – esta reta define a mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$.



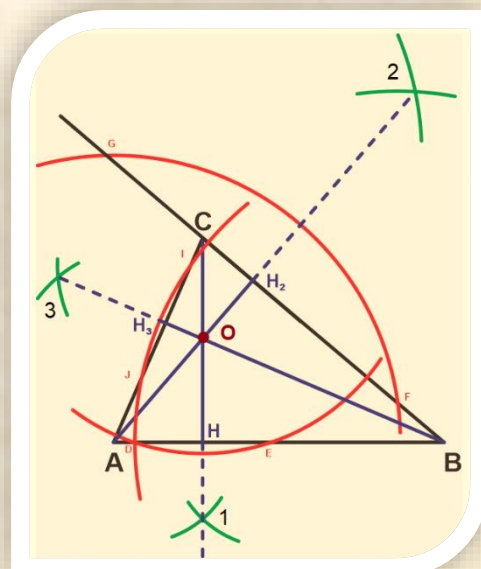
Passo 4 – Dobrar o lado $\overline{AC}$ do triângulo ao meio, de modo os vértices A e C se sobreponham. Com a régua, traçar sobre o vinco a reta t perpendicular – esta reta define a mediatriz relativa ao lado $\overline{AC}$.

Passo 5 – O ponto de interseção (D) entre as mediatrizes r , s e t , é denominado circuncentro do triângulo.





Construções com Régua e Compasso



3.2.1 Os instrumentos de desenho

Para realizarmos as construções geométricas com maior rigor e precisão é necessário o uso de alguns instrumentos básicos, os principais são a régua, compasso, transferidor, lápis e borracha.

- **Lápis**

Existem três tipos de lápis básicos para desenho: o lápis nº 1 ou B, lápis nº 2 ou HB e o lápis nº 3 ou H, sendo estes, utilizados com maior frequência. A escolha do lápis mais apropriado decorre do tipo de composição que irá ser realizada.

- **O lápis nº 1 ou B** é o mais macio, deve ser fase inicial do desenho para criar traços e sombrear figuras.

- **O lápis nº 2 ou HB**, por apresentar um grafite de dureza média, facilita a criação de traços em geral.

- **O lápis nº 3 ou H** apresenta o grafite mais firme permitindo maior precisão dos traços, deve ser usado em desenhos geométricos e técnicos.

Para produzir desenhos com maior definição e nitidez é necessário que o lápis seja bem apontado.

Figura 36 – Lápis



Fonte:

<https://www.areae.com.br/blog/as-diferentes-gradacoes-de-lapis-grafite-a-escala-hb/>

- **Borracha**

Figura 37 - Borrachas

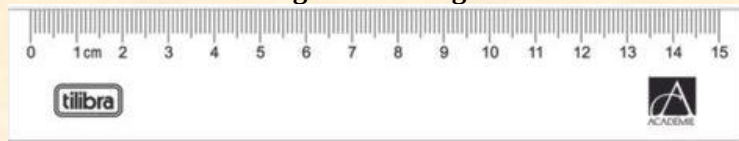


Fonte: <https://www.mercur.com.br/>

As borrachas mais recomendáveis são as brancas ou verdes, devendo ser macias e de comprimento médio.

- **Régua – para traçar retas**

Figura 38 – Régua



Fonte: <https://papelariacriativa.com.br/>

A régua é um objeto que tem como função construir retas, semirretas ou segmentos de reta. Para o Desenho Geométrico, não importa se a régua é graduada ou não, pois o desenho mostra que, independentemente das dimensões dos traçados, seguindo-se os mesmos passos, as construções determinam uma conclusão comum, não fazendo diferença o tamanho dos segmentos.

- **Compasso – para traçar circunferências**

Figura 39 - Compasso



Fonte: Adaptado do Google.

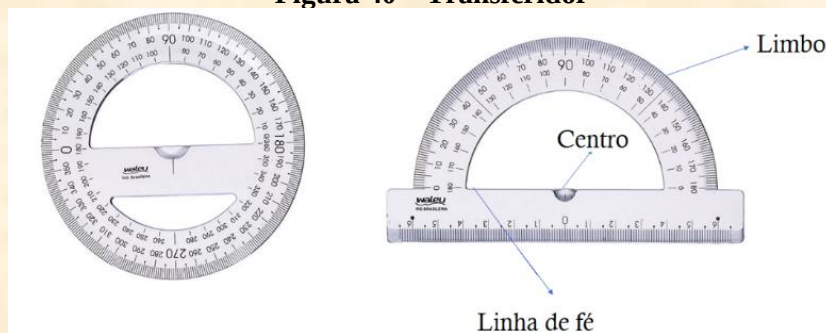
O compasso é um objeto muito importante no Desenho Geométrico, formado por duas hastes e em suas extremidades estão a ponta-seca (de metal) e a de grafite. Essa ferramenta é utilizada na construção de circunferências, arcos, ângulos e transporte de medidas

- **Transferidor – para medir ângulos**

O transferidor é utilizado com a finalidade de medir ângulos e auxilia na sua construção (No Desenho Geométrico, o convencional é fazer o transporte de ângulos com o compasso). Há dois tipos de transferidor: um de meia volta, medindo 180° graus e, outro, de uma volta, com medida de 360° graus. Os transferidores possuem três partes: limbo, linha de fé e centro.

O limbo é a parte do contorno do transferidor, na qual se localiza a graduação. A linha de fé é a reta que passa por 0° e 180° . O centro é ponto médio da linha de fé (figura 40).

Figura 40 – Transferidor



Fonte: Elaborado pelos autores

Para medir a abertura de um ângulo, precisamos seguir alguns passos:

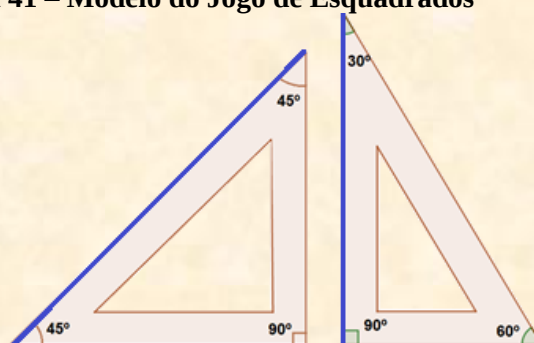
- 1º - É necessário coincidir a linha de fé com um dos lados
- 2º - Deve-se posicionar o centro do transferidor com o vértice do ângulo
- 3ª - Por último, observar o valor da medida do ângulo na graduação.

- **Jogo de esquadros**

Observe que no jogo de esquadros, um dos catetos do triângulo de 30° e 60° é igual a hipotenusa do triângulo de 45° .



Figura 41 – Modelo do Jogo de Esquadros



Fonte: Elaborado pelos autores

Os esquadros têm por função traçar linhas perpendiculares e paralelas como também ângulos. É chamado jogo de esquadros (figura 41) porque existem esquadros de dois tipos: escaleno e isósceles e devem sempre ser manuseados juntos, sendo um fixo e outro móvel.

3.2.2 Estudo das cevianas por meio das construções com régua e compasso

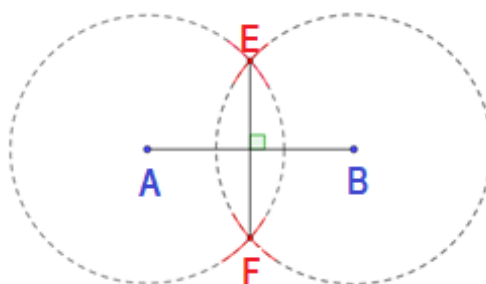
ATIVIDADE I - TRAÇANDO AS CEVIANAS		
Orientação Inicial: Professor, antecipadamente à utilização deste tipo de atividade, aconselhamos que faça uma reflexão a respeito do uso do Desenho Geométrico em suas aulas. Além do mais, é muito complicado se determinar o tempo destinado a execução das atividades, uma vez que, para alcançar os objetivos propostos, será necessário levar em consideração a experiência que os alunos possuem com a régua e compasso. Eles sabem traçar um ponto médio? Sabem traçar uma perpendicular, uma bissetriz? Esses são pré-requisitos básicos. Se os alunos não têm o domínio desses elementos básicos, será fundamental todo um preparo para, finalmente, se chegar às construções das cevianas. Desse modo, será necessário um planejamento do professor e uma preparação para a introdução do Desenho Geométrico. Sugerimos, que seja feita uma abordagem teórica sobre o tema, bem como introduzir conceitos de Desenho Geométrico, apresentando os instrumentos de desenho e algumas construções simples, como de segmentos de reta, circunferências, ponto médio de um segmento, mediatriz, perpendiculares, ângulos, bissetrizes, triângulos para que, assim, os alunos tenham ferramentas necessárias para o bom desenvolvimento da atividade. O preparo é longo e demanda um planejamento durante todo o ano letivo, mas os resultados podem ser satisfatórios.		
Material necessário:	Papel A4 (branco), Régua, Compasso, Lápis e Borracha	
Objetivos:	• Conceituar as cevianas de um triângulo: mediana, bissetriz e altura • Compreender as características desses segmentos • Determinar o ponto de encontro das alturas, medianas e bissetrizes • Estudar a mediatriz e determinar o incentro • Realizar construções geométricas utilizando régua e compasso	
Organização da turma:	Em duplas	
Tempo estimado:	três horas-aula	
Ano de escolaridade:	8º ano do Ensino Fundamental	
Conteúdo abordado:	Cevianas notáveis e pontos notáveis do triângulo.	

Objeto do Conhecimento da BNCC:	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos, Construções geométricas
Habilidades:	EF08MA17, EF08MA15, EF08MA36MG e EF08MA37MG
Situação proposta: Utilizar as construções com régua e compasso, para compreender o conceito geométrico de cevianas notáveis e dos pontos de interseção entre elas em diferentes triângulos.	
Desenvolvimento: Distribua quatro folhas de papel A4 por aluno, de modo que cada uma das atividades possam ser realizadas separadamente. As construções foram expostas passo a passo, aproveite este momento para relembrar e relacionar os conceitos geométricos com as construções realizadas. Explicar aos alunos que a mediatriz não é classificada como uma ceviana, mas, devido ao encontro das três mediatrizes ser o centro da circunferência circunscrita a um triângulo, a mediatriz se faz importante no estudo da Matemática.	



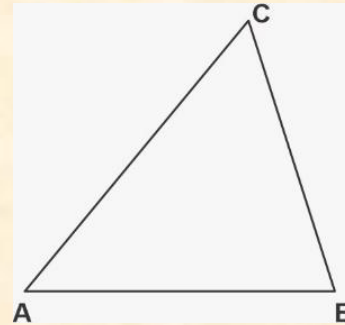
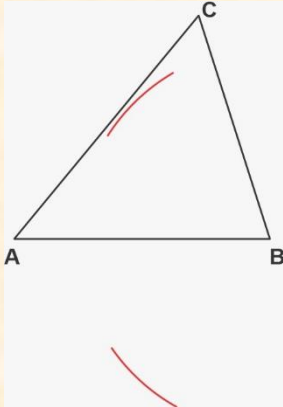
Nas construções a seguir, quando dizemos para traçar um **arco**, na verdade, estamos traçando uma **circunferência** e, no Desenho Geométrico, só representamos parte da circunferência, que é um arco, para não sobrecarregar a construção.

Observe a figura abaixo:



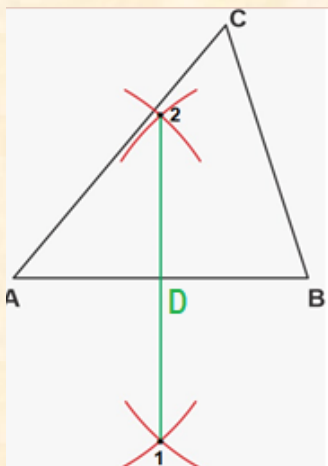
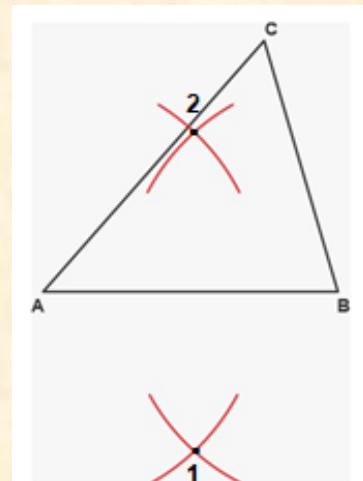
Construir as MEDIANAS de um triângulo e determinar o BARICENTRO

Passo 1 – Construir um triângulo ABC qualquer.



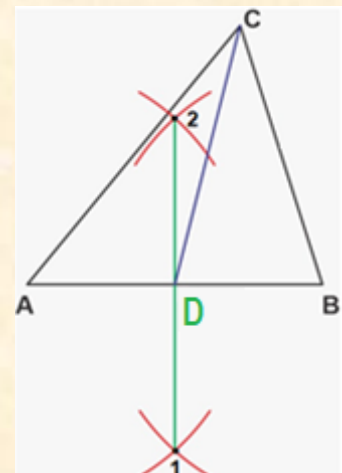
Passo 2 – Com o compasso - centro em B e abertura maior que a metade do segmento $\overline{AB}$, traçar um arco.

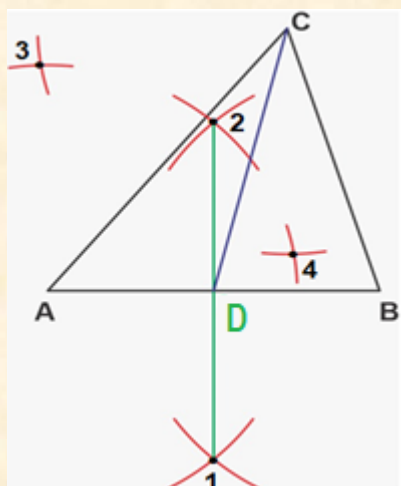
Passo 3 – Centro em A e com a mesma abertura anterior, traçar um arco que intercepta o primeiro nos pontos 1 e 2 .



Passo 4 – Traçar uma reta que passe pela interseção dos dois arcos, unindo os pontos 1 e 2 . Esta reta determina o ponto médio D do segmento $\overline{AB}$.

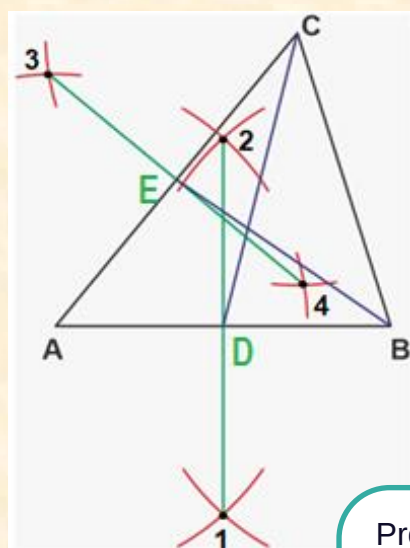
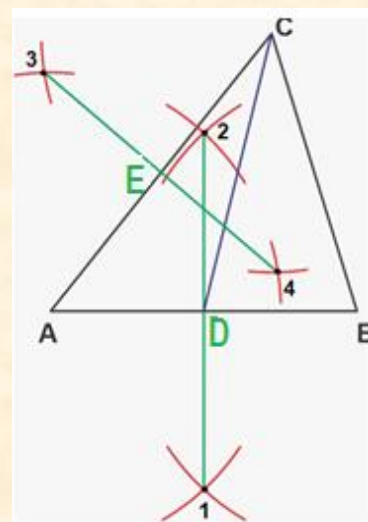
Passo 5 – Traçar a semirreta $\overrightarrow{CD}$. Este segmento de reta é mediana relativa ao segmento $\overline{AB}$.





Passo 6 – Com o compasso – centro em A e abertura maior que a metade do segmento $\overline{AC}$, trace um arco. Centro em C , mesma abertura anterior, trace um arco que intercepta o primeiro em dois pontos, denominados 3 e 4 .

Passo 7 – Traçar uma reta que passe pela interseção dos dois arcos, unindo os pontos 3 e 4 . Esta reta determina o ponto médio, designado por E , do segmento $\overline{AC}$.

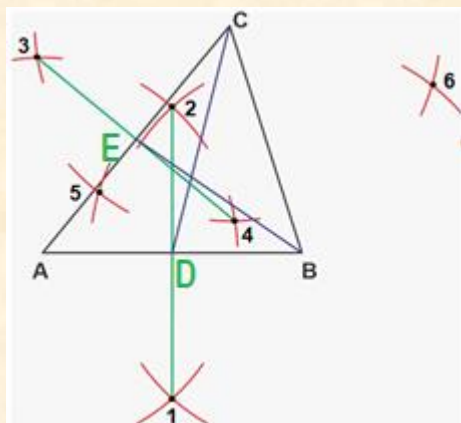


Passo 8 – Traçar a semirreta $\overrightarrow{BE}$. Este segmento de reta é a mediana relativa ao segmento $\overline{AC}$.

Professor,
Como você sabe, apenas o traçado de duas cevianas é suficiente para determinação dos pontos notáveis do triângulo, deste modo, os passos a seguir, para a determinação da terceira ceviana, não seriam necessários.

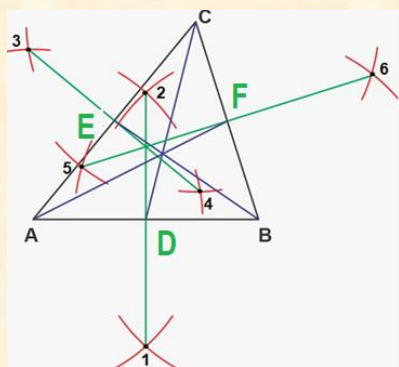
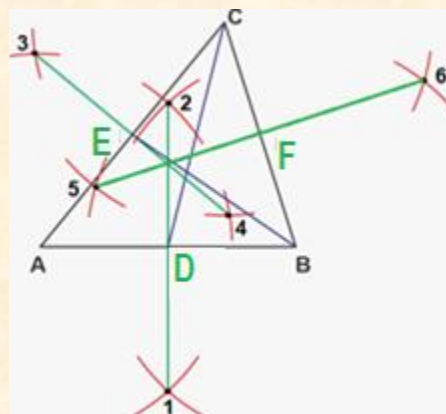


Atenção!



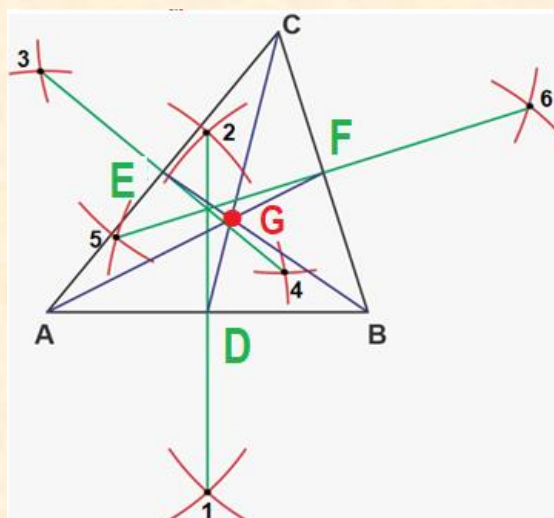
Passo 9 – Com o compasso - centro em C e abertura maior que a metade do segmento $\overline{BC}$, traçar um arco. Centro em B e mesma abertura anterior, traçar um arco que intercepta o primeiro em dois pontos, denotados por 5 e 6.

Passo 10 – Traçar uma reta que passe pela interseção dos dois arcos, nos pontos 5 e 6 e corta o lado $\overline{BC}$, no ponto denominado por F . F é o ponto médio de $\overline{BC}$.



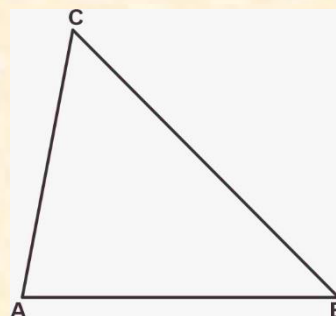
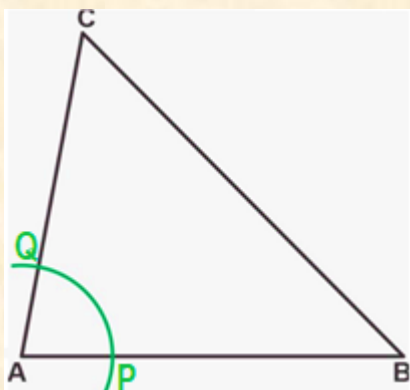
Passo 11 – Traçar a semirreta $\overrightarrow{AF}$. Este segmento de reta é mediana relativa ao segmento $\overline{BC}$.

Passo 12 – O ponto de interseção das três medians do triângulo determina o baricentro do triângulo, nomeado por G .



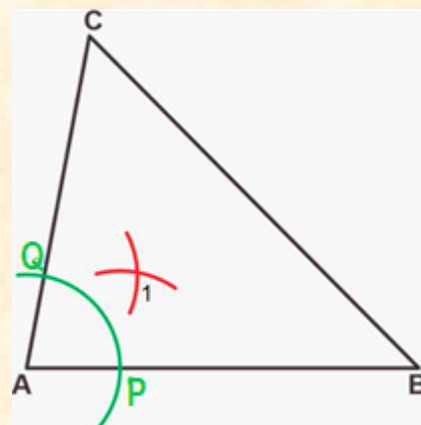
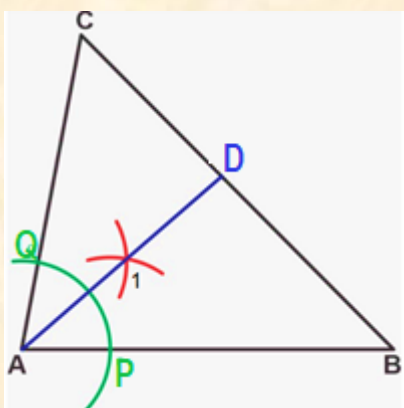
Construir as BISSETRIZES de um triângulo e determinar o INCENTRO

Passo 1 – Construir um triângulo ABC qualquer.



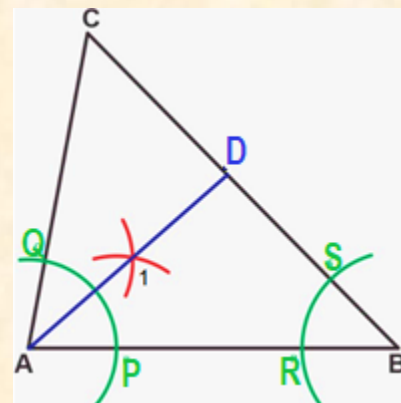
Passo 2 – Com o compasso – centro em A , abertura qualquer, traçar um arco de circunferência que intercepta o lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, em dois pontos, os quais denominamos P e Q , respectivamente.

Passo 3 – Com o compasso – centro em P , traçar um arco. Centro em Q , mesma abertura anterior, traçar um arco que intersepte o arco anterior, no ponto 1 .

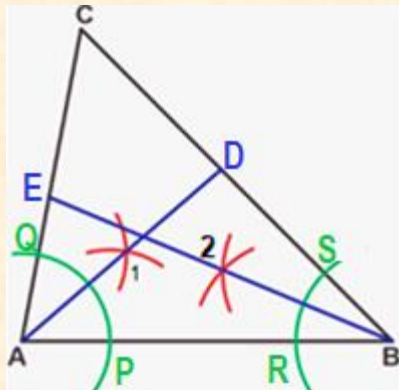
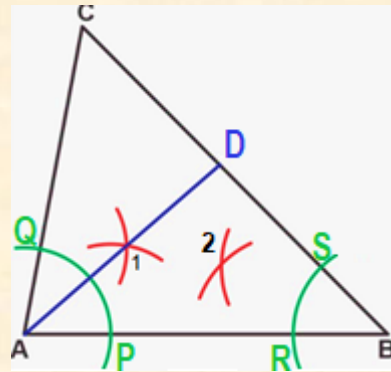


Passo 4 – Traçar um segmento de reta que ligue o vértice A à interseção dos arcos no ponto 1 , até interceptar o lado $\overline{BC}$ em um ponto, denominado D . O segmento $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

Passo 5 – Com o compasso – centro em B , abertura qualquer, traçar um arco de circunferência que intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, em dois pontos, denominados R e S , respectivamente.

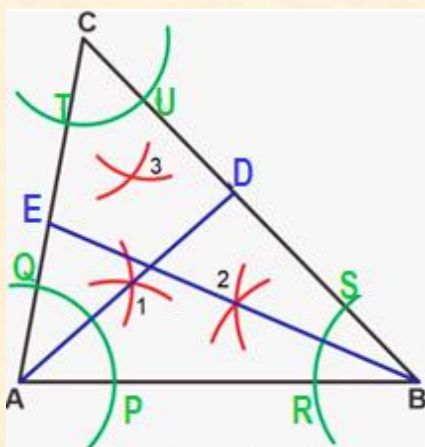
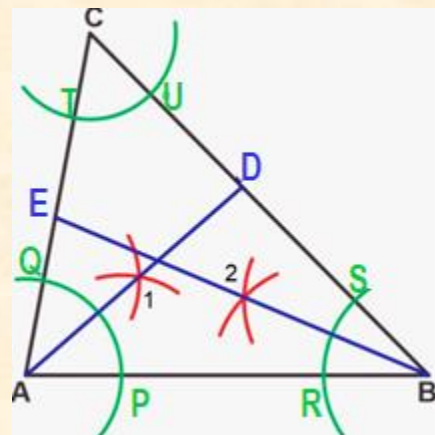


Passo 6 – Com o compasso – centro em R , abertura qualquer, traçar um arco. Centro em S , mesma abertura anterior, traçar um arco que intersepta o primeiro em um ponto denominado 2.



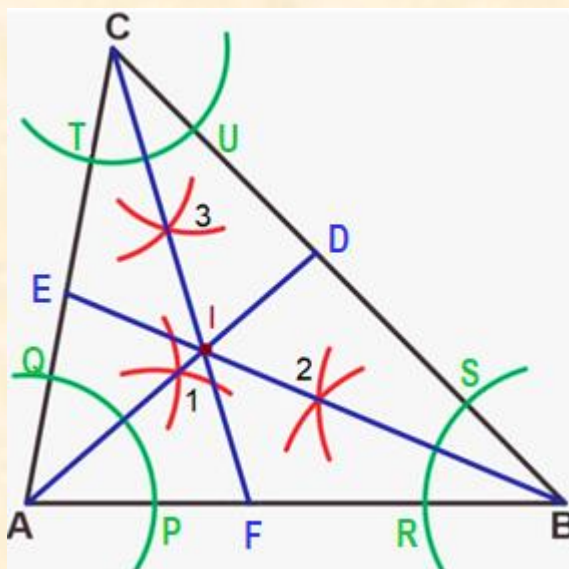
Passo 7 – Traçar um segmento de reta que ligue o vértice B ao ponto 2 de interseção dos arcos até interceptar o lado $\overline{AC}$ em um ponto, denominado E . O segmento $\overline{BE}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{B}$.

Passo 8 – Com o compasso – centro em C , abertura qualquer, traçar um arco de circunferência que intercepta o lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, em dois pontos, denominados T e U , respectivamente.

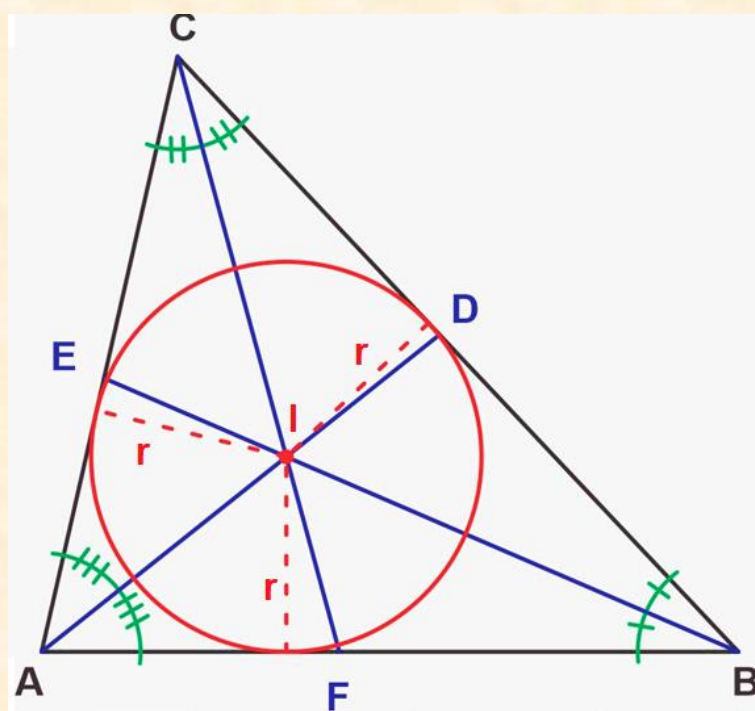


Passo 9 – Com o compasso – centro em T , abertura qualquer, traçar um arco. Centro em U , mesma abertura anterior, traçar um arco que cruze o primeiro em um ponto denominado 3.

Passo 10 – Traçar um segmento de reta que ligue o vértice C à interseção dos arcos no ponto 3, até interceptar o lado $\overline{AB}$ em um ponto, denominado F . O segmento $\overline{CF}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$. O ponto de interseção das alturas determinam o incentro do triângulo, representado por I .

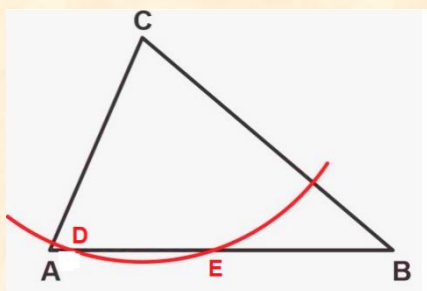
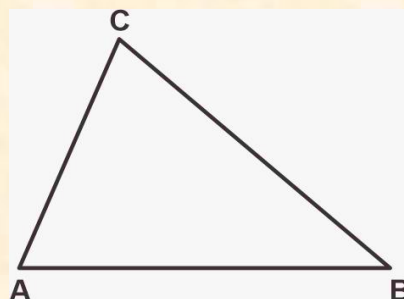


Passo 11 – Traçar uma perpendicular a um dos lados do triângulo, a partir do ponto I – este segmento será o raio da circunferência inscrita ao triângulo.



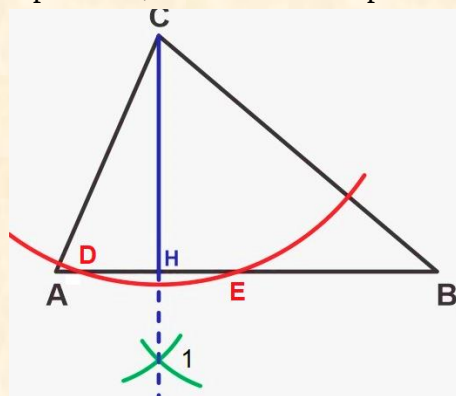
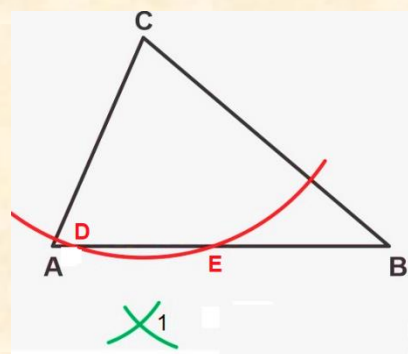
Construir as ALTURAS de um triângulo ACUTÂNGULO e determinar o ORTOCENTRO

Passo 1 – Construir um triângulo acutângulo ABC qualquer.



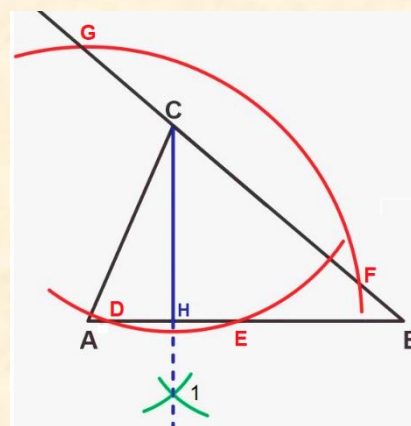
Passo 2 – Com o compasso – centro em C , abertura qualquer, traçar um arco de circunferência que intercepta o segmento $\overline{AB}$ em dois pontos, nomeados D e E . (Advertir ao aluno que, em alguns casos, pode ser necessário traçar um prolongamento do lado do triângulo, ou seja, a reta suporte ao lado do triângulo).

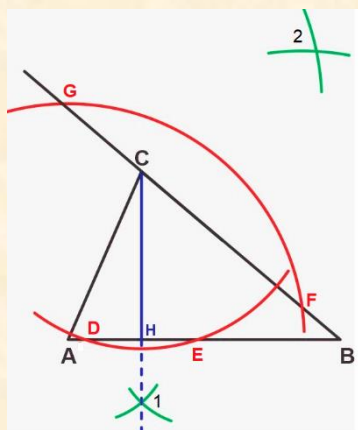
Passo 3 – Com o compasso – centro em D e abertura maior que a metade do segmento $\overline{DE}$, traçar um arco. Centro em E , mesma abertura anterior, traçar outro arco que intercepte o primeiro, determinando o ponto 1 , externo ao triângulo.



Passo 4 – Ligar C ao ponto 1 , na intersecção dos arcos, determinando o ponto H_1 . O segmento $\overline{CH_1}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

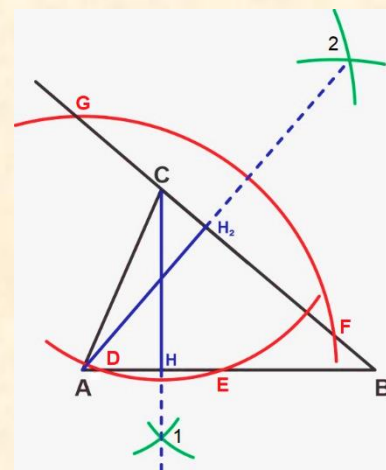
Passo 5 – Com o compasso – centro em A , abertura qualquer, traçar um arco de circunferência que intercepta o segmento $\overline{BC}$ em dois pontos, F e G . Nesse caso, é necessário, traçar o prolongamento do lado – a reta suporte do lado $\overline{BC}$ do triângulo.





Passo 6 – Com o compasso – centro em G e abertura maior que a metade do segmento $\overline{FG}$, traçar um arco. Centro em F , mesma abertura anterior, traçar outro arco que intersepte o primeiro, determinando o ponto 2 externo ao triângulo.

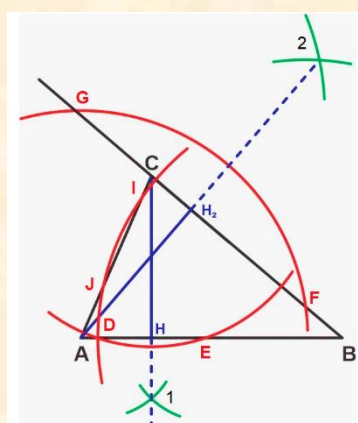
Passo 7 – Ligar A ao ponto 2 na intersecção dos arcos, determinando o ponto H_2 . O segmento $\overline{AH_2}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.



Como lembramos anteriormente, com as duas alturas já é possível determinar o ortocentro.

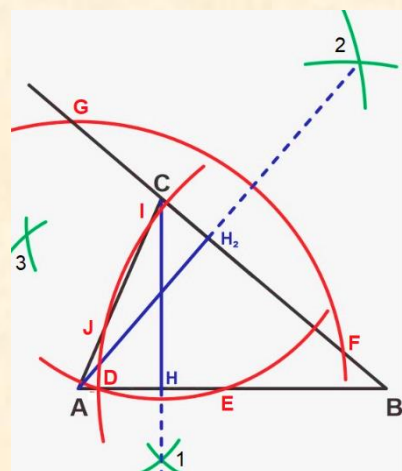


Atenção!

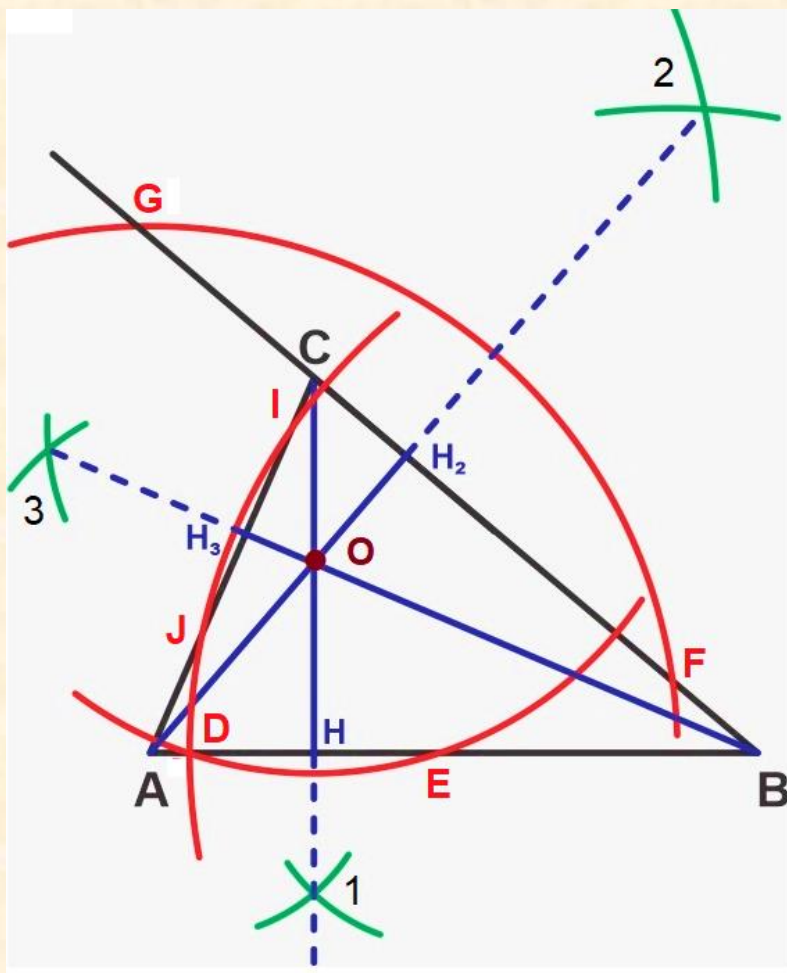


Passo 8 – Com o compasso – centro em B abertura qualquer, traçar um arco de circunferência que intercepta o segmento $\overline{AC}$ em dois pontos, I e J . (Dependendo da abertura feita pelo aluno, será necessário traçar a reta suporte do lado $\overline{AC}$ do triângulo).

Passo 9 – Com o compasso – centro em I e abertura maior que a metade do segmento $\overline{IJ}$, traçar um arco. Centro em J , mesma abertura anterior, traçar outro arco que intersepte o primeiro, determinando o ponto 3, externo ao triângulo.

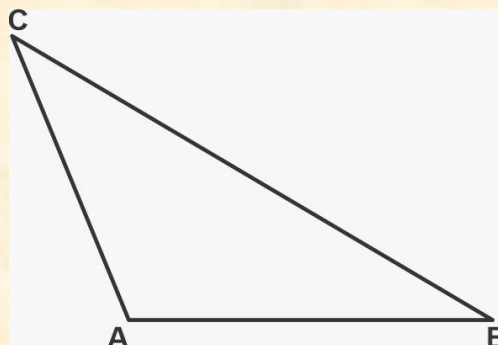


Passo 10 – Ligar B ao ponto 3, na intersecção dos arcos, determinando o ponto H_3 . O segmento $\overline{BH_3}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$. O ponto O de intersecção das alturas é o ortocentro do triângulo.

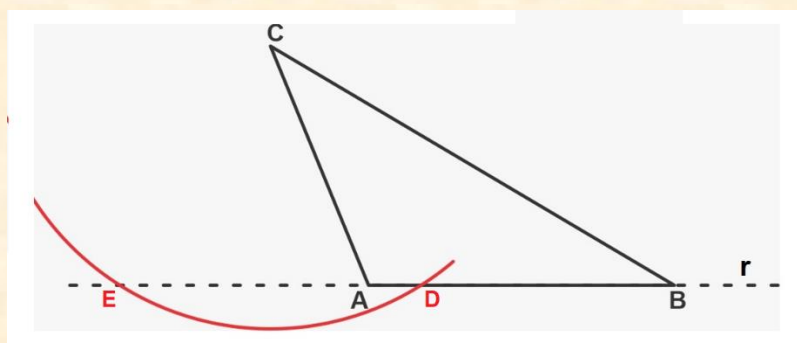


**Construir as ALTURAS de um triângulo OBTUSÂNGULO
e determinar o ORTOCENTRO**

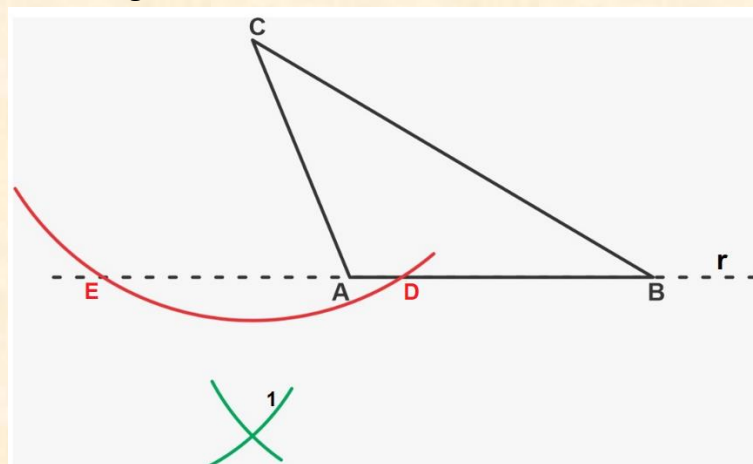
Passo 1 – Construir um triângulo obtusângulo ABC qualquer – sendo $\hat{A}$ o ângulo obtuso.



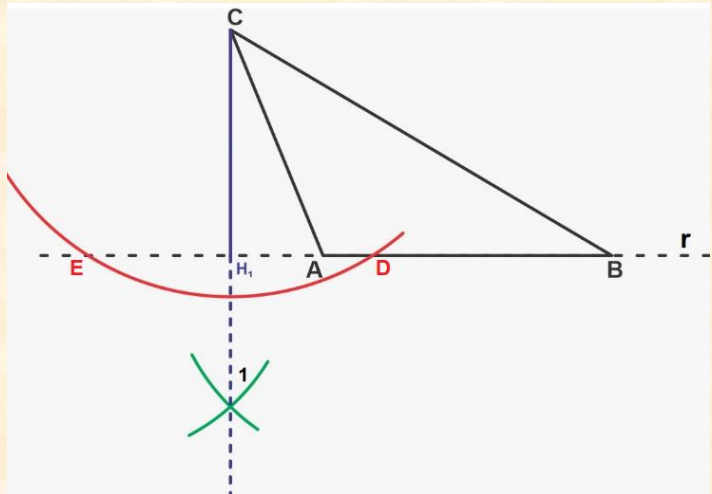
Passo 2 – Traçar a reta suporte, r , do lado $\overline{AB}$ do triângulo. Centro em C , abertura qualquer, traçar um arco de circunferência que intercepta a reta suporte r em dois pontos, denominados D e E .



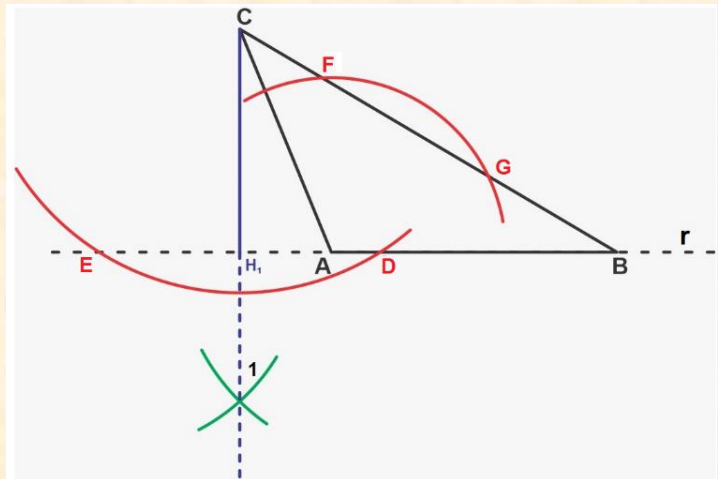
Passo 3 – Com o compasso – centro em D , abertura maior que a metade do segmento $\overline{DE}$, traçar um arco. Centro em E , mesma abertura anterior, traçar um arco que intersepte o primeiro, no ponto **1** externo ao triângulo.



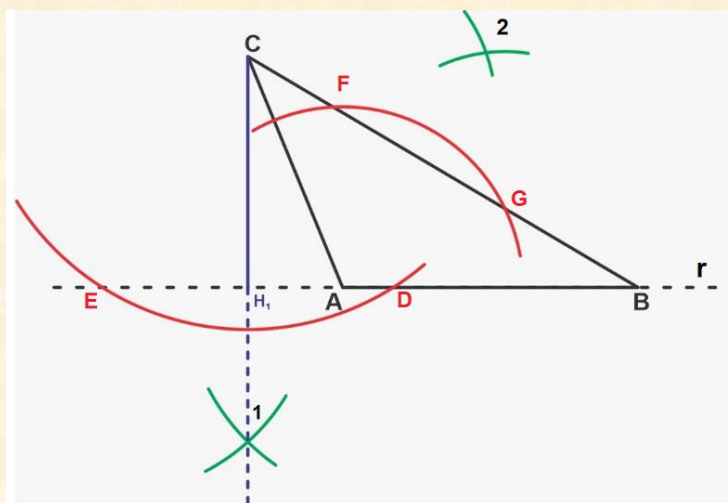
Passo 4 – Ligar C ao ponto 1 , localizado na interseção dos arcos, obtendo um ponto, denominado H_1 no prolongamento do lado $\overline{AB}$. O segmento $\overline{CH_1}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



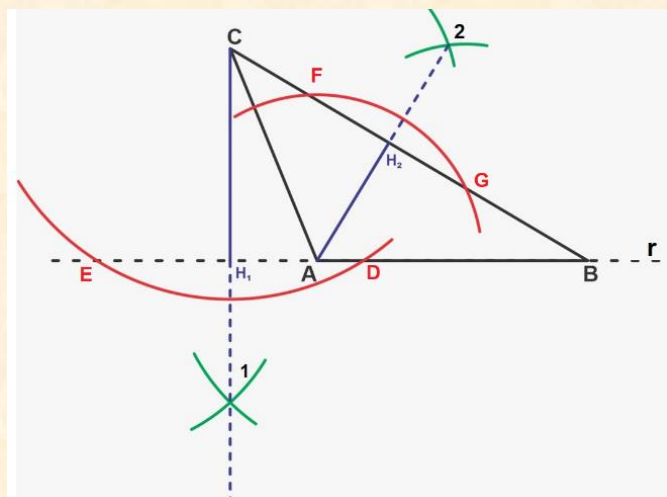
Passo 5 – Com o compasso – centro em A , abertura qualquer, traçar um arco de circunferência que intercepta o segmento $\overline{BC}$ em dois pontos, denominados F e G .



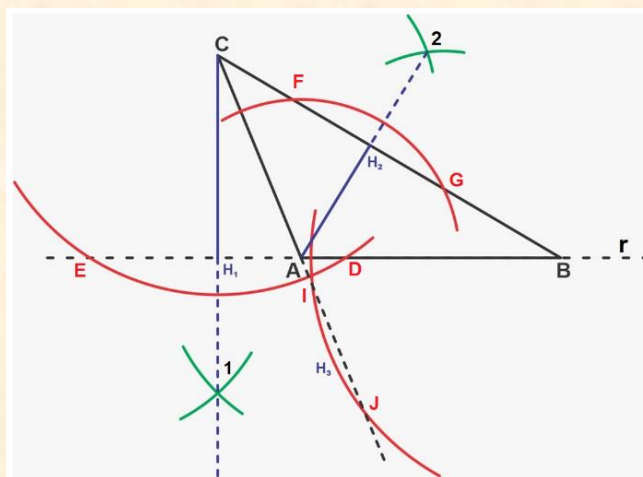
Passo 6 – Com o compasso – centro em G e abertura maior que a metade do segmento $\overline{FG}$, traçar um arco. Centro em F , mesma abertura anterior, traçar um arco que intercepte o primeiro em um ponto, denominado 2 , externo ao triângulo.



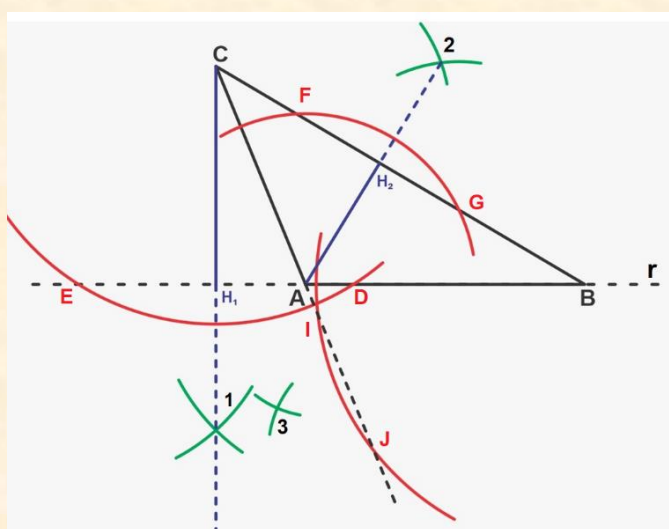
Passo 7 – Ligar A ao ponto 2 da interseção dos arcos, obtendo um ponto em $\overline{BC}$, denominado H_2 . O segmento $\overline{AH_2}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.



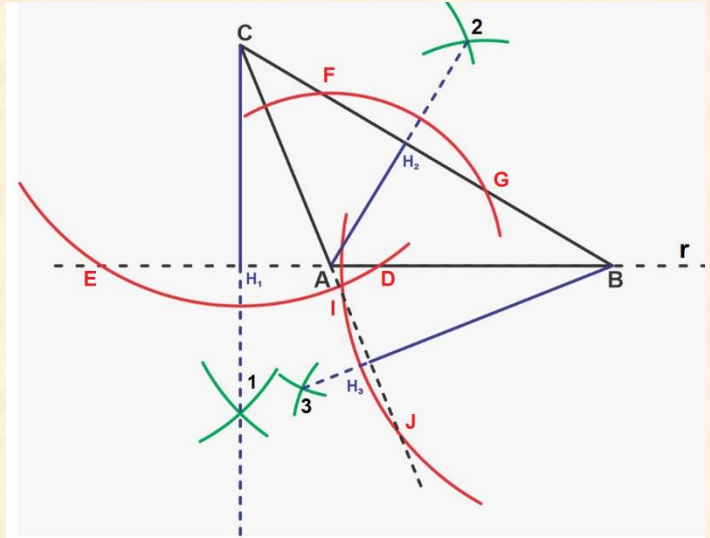
Passo 8 – Com o compasso – centro em B , abertura qualquer, traçar um arco de circunferência que intercepta o segmento $\overline{AC}$ em dois pontos, denominados I e J . (Obs.: Dependendo da abertura feita pelo aluno, será necessário traçar a reta suporte ao lado $\overline{AC}$ do triângulo).



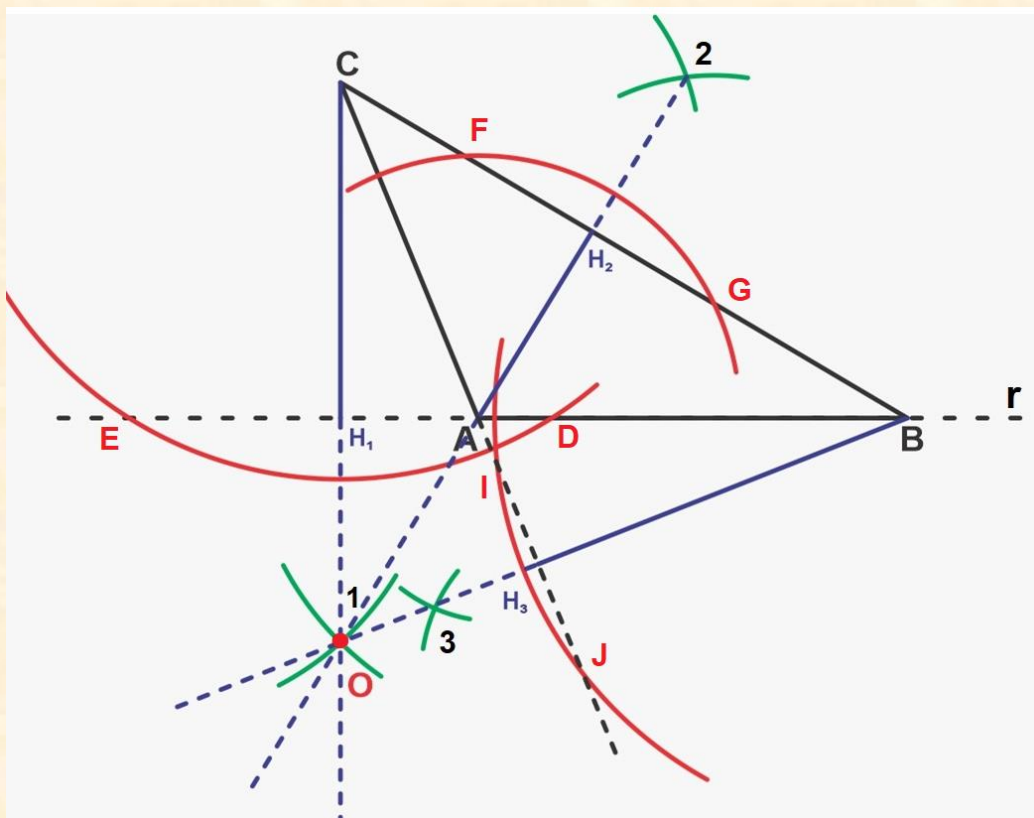
Passo 9 – Com o compasso – centro em I e abertura maior que a metade do segmento $\overline{IJ}$, traçar um arco. Centro em J , mesma abertura anterior, traçar um arco que intersepte o primeiro, determinando o ponto 3, externo ao triângulo.



Passo 10 – Ligar B ao ponto 3 na interseção dos arcos, obtendo um ponto no prolongamento do lado $\overline{AC}$ denominado H_3 . O segmento $\overline{BH_3}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

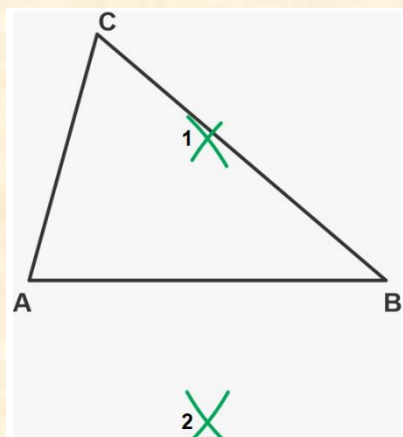


Passo 11 - Prolongando-se as três alturas H_1 , H_2 e H_3 , encontramos o ponto O de interseção entre elas, que é o ortocentro do triângulo.

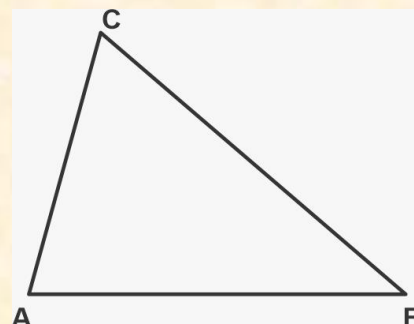


Construir as MEDIATRIZES de um triângulo e determinar o CIRCUNCENTRO

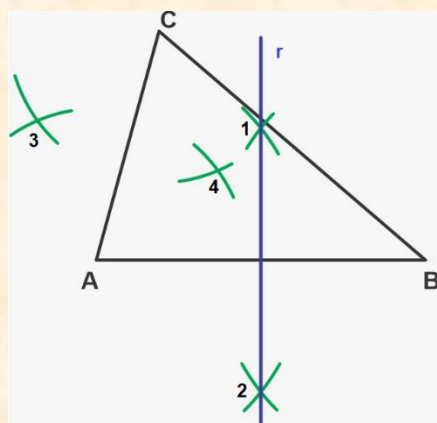
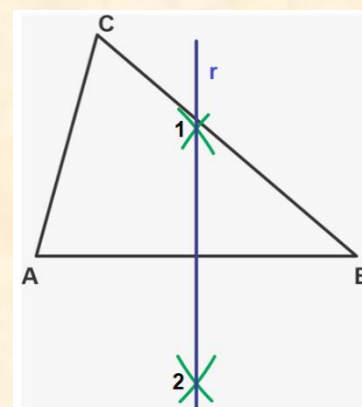
Passo 1 – Construir um triângulo ABC qualquer.



Passo 2 – Com o compasso – centro em A e abertura maior que a metade do segmento $\overline{AB}$, traçar um arco. Centro em B , mesma abertura anterior, traçar outro arco que intersepte o primeiro em dois pontos, denominados 1 e 2 .

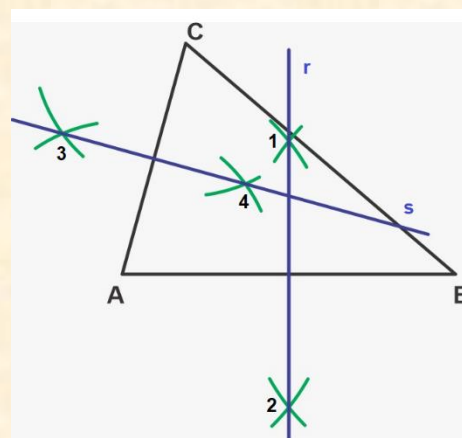


Passo 3 – Traçar uma reta que passe pela intersecção dos arcos nos pontos 1 e 2 (denominar a reta por r). Esta reta é a mediatriz relativa ao segmento $\overline{AB}$.

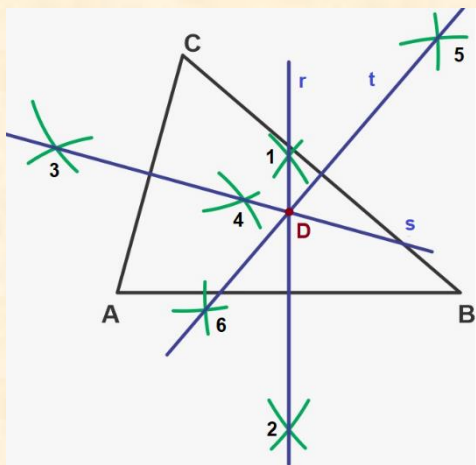
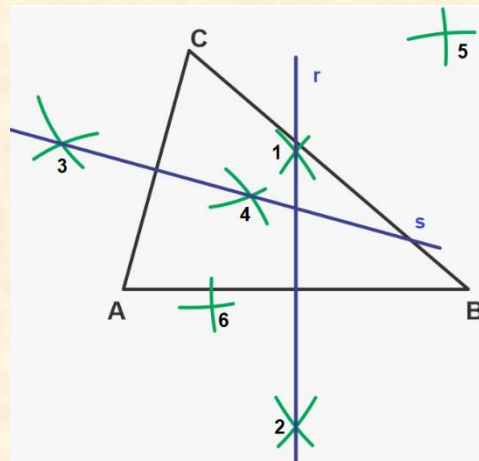


Passo 4 – Com o compasso – centro em C e abertura maior que a metade do segmento $\overline{AC}$, traçar um arco. Centro em A , mesma abertura anterior, traçar outro arco que intersepte o primeiro em dois pontos, denominados 3 e 4 .

Passo 5 – Traçar uma reta que passe pela intersecção dos arcos nos pontos 3 e 4 (denominar a reta por s) Esta reta é a mediatriz relativa ao segmento $\overline{AC}$.

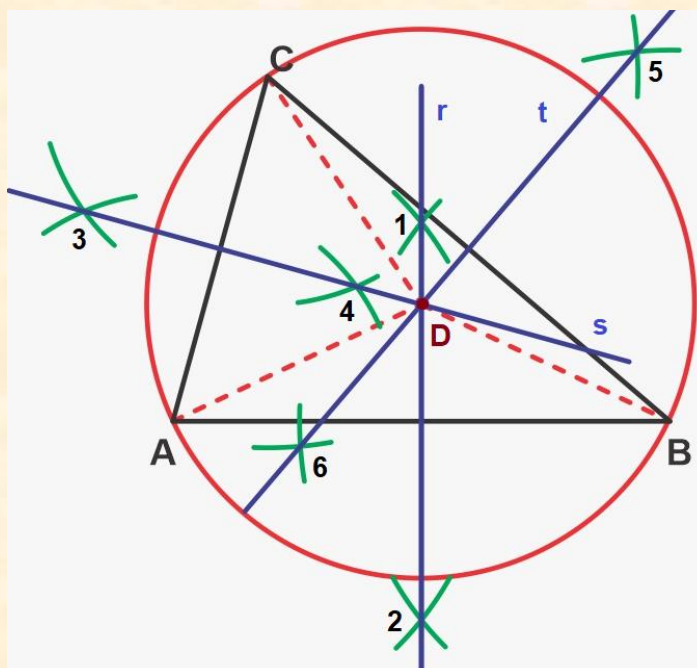


Passo 6 – Com o compasso – centro em B e abertura maior que a metade do segmento $\overline{BC}$, traçar um arco. Centro em C , mesma abertura anterior, traçar outro arco que intersepte o primeiro em dois pontos, determinando-os de 5 e 6.



Passo 7 – Traçar uma reta que passe pela intersecção dos arcos nos pontos 5 e 6, (denominar a reta por t). Esta reta é a mediatriz relativa ao segmento $\overline{BC}$. O ponto de intersecção das três mediatrizes do triângulo determinam o circuncentro, denominado D .

Passo 8 – Com o compasso – centro em D , raio $\overline{DA}$ (ou $\overline{DB}$, ou $\overline{DC}$) traçar uma circunferência – que obrigatoriamente passa pelos pontos (vértices) do triângulo. O circuncentro (D) é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



ATIVIDADE II - INVESTIGANDO AS CEVIANAS	
Material necessário:	Papel A4 (branco), Régua, Compasso, Lápis e Borracha
Objetivos:	• Conceituar as cevianas de um triângulo: mediana, bissetriz e altura • Compreender as características desses segmentos • Determinar o ponto de encontro das alturas, medianas e bissetrizes • Estudar a mediatriz e determinar o incentro • Realizar construções geométricas utilizando régua e compasso
Organização da turma:	Grupos com, no máximo, quatro alunos
Tempo estimado:	três horas-aula
Ano de escolaridade:	8º ano do Ensino Fundamental
Conteúdo abordado:	Cevianas notáveis e pontos notáveis do triângulo.
Objeto do Conhecimento da BNCC:	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos, Construções geométricas
Habilidades:	EF08MA17, EF08MA15, EF08MA36MG e EF08MA37MG
Situação proposta: Utilizar as construções com régua e compasso para investigar o comportamento das cevianas notáveis e dos pontos de interseção entre elas em diferentes triângulos. (Adaptado do livro <i>Matemática Vida</i> – 7ª série, de Bongiovanni, Vissoto e Laureano, publicado em 1998).	
Desenvolvimento: Antes da aplicação desta atividade, o professor deve fazer uma abordagem teórica sobre o tema, bem como introduzir conceitos de Desenho Geométrico, para que os alunos tenham ferramentas necessárias para o bom desenvolvimento da atividade. A sugestão é que o docente distribua os alunos em equipes e entregue uma folha de papel A4 para que seja realizada cada uma das atividades separadamente. Durante a realização da atividade, espera-se do professor uma atitude de incentivo e encorajamento das equipes, com o intuito de que eles possam levantar hipóteses, debater e, por fim, concluir suas observações, sem que o professor, entregue os resultados antecipadamente. Em cada uma das atividades, foi exposto o que se espera dos alunos.	

É uma ceviana?

Desenhe um triângulo **ABC** qualquer.

- a) Marque o ponto médio da base.
- b) Trace uma reta perpendicular que passe pelo ponto médio.
- c) Qual é nome dado a essa reta?
- d) Troque sua construção com a do colega, o triângulo que ele construiu é idêntico ao seu?
- e) O que você pode falar acerca da reta por ele construída?
- f) Esta reta passou por um dos vértices? Devolva a construção ao colega.
- g) Pergunte as outras equipes se o mesmo do item f aconteceu com eles. Anote.
- h) Essa reta pode ser considerada como uma ceviana? Por quê?
- i) Repita o procedimento do item b, as três mediatrizes se encontram em um único ponto?
- j) Qual é nome dado a esse ponto?

Observação: Nesta atividade, almeja-se que os alunos cheguem à conclusão de que a mediatriz não satisfaz as condições para ser classificada como uma ceviana, mesmo que possa acontecer, em alguns casos especiais, e nomeiem o ponto de interseção como circuncentro.

O docente pode prosseguir com a atividade, indicando que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita no triângulo e que essa circunferência contém todos os vértices do triângulo e que, por consequência, a distância entre o circuncentro e qualquer um dos vértices, é a mesma.

Investigando o ponto de interseção das medianas

Desenhe um triângulo **ABC** qualquer e trace as medianas relativas a dois lados:

- a) Qual é nome dado ao ponto de encontro desses segmentos?
- b) Troque sua construção com a do colega e verifique se a mediana relativa ao terceiro lado passa também por este ponto.
- c) O ponto de interseção é interno ou externo ao triângulo?
- d) Ele pode coincidir com algum dos vértices ou dos lados? Por quê?

- e) Utilizando uma régua graduada meça os segmentos de reta que partem do ponto G e encontra os vértices e os lados do triângulo. Anote e depois devolva a construção ao colega.
- f) Compare os resultados encontrados com os dos seus colegas de grupo. Foi observado um padrão? Qual?
- g) O que esse padrão sugere?

Observação: Nesta atividade, é esperado que os alunos possam chegar à conclusão de que o baricentro divide as medianas em dois segmentos que estão na razão de 2 para 1.

Investigando o ponto de interseção das bissetrizes internas

Desenhe um triângulo ABC qualquer e trace as bissetrizes relativas a dois lados:

- a) Qual é nome dado ao ponto de encontro desses segmentos?
- b) Troque sua construção com a do colega e verifique se a bissetriz relativa ao terceiro lado passa também passa por este ponto.
- c) O ponto de interseção é interno ou externo ao triângulo?
- d) Ele pode coincidir com algum dos vértices ou dos lados? Por quê?
- e) Trace um segmento de reta perpendicular à base do triângulo, que passe pelo ponto I . Repita o processo com os demais lados. Utilizando uma régua graduada meça os esses segmentos. Anote e depois devolva a construção ao colega.
- f) Trace uma circunferência com centro em I e que tenha como raio segmento traçado na letra e . Compare os resultados encontrados com os dos seus colegas de grupo. Foi observado um padrão? Qual?
- g) O que esse padrão sugere?

Observação: Nesta atividade, objetiva-se que os alunos concluam que o incentro está à mesma distância dos três lados do triângulo. O docente pode prosseguir com a atividade, indicando que o incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo e que ele está à mesma distância dos três lados do triângulo.

Investigando as alturas de um triângulo

Desenhe três triângulos ABC , um acutângulo, um retângulo e um obtusângulo:

- Trace a altura relativa a um dos lados, em cada um dos triângulos.
- Observe a localização da altura em cada um deles.
- A altura pode coincidir com algum dos lados? Em que situação? Por quê?
- Quais são as outras localizações possíveis da altura em relação ao triângulo?
- Compare os resultados encontrados com os dos seus colegas de grupo. Foi observado um padrão? Qual?
- O que esse padrão sugere?

Observação: Nesta atividade, espera-se que os alunos cheguem à seguinte conclusão: a altura pode ser interna ou externa ao triângulo e, até mesmo, coincidir com uns lados, dependendo do triângulo traçado.

Investigando o ponto de interseção das alturas de um triângulo

Utilize as construções realizadas na atividade de investigação das alturas para responder os questionamentos abaixo:

- Trace a altura relativa ao lado em cada um dos triângulos.
- Qual é nome dado ao ponto de encontro desses segmentos?
- Troque sua construção com um colega e verifique se a altura relativa ao terceiro lado passa também por este ponto.
- O ponto de interseção é interno ou externo aos triângulos?
- Ele pode coincidir com algum dos vértices? Em que caso?
- Anote as constatações dos itens d e e , depois devolva a construção ao colega.
- Compare os resultados encontrados com os dos seus colegas de grupo. Foi observado um padrão? Qual?
- O que esse padrão sugere?

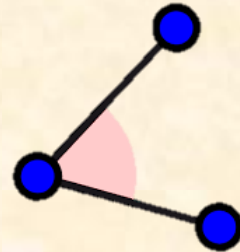
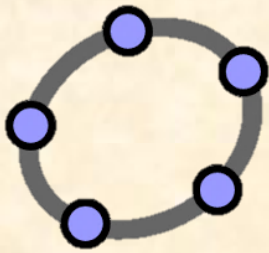
Observação: Com esta atividade, pretende-se que os alunos percebam que o ortocentro pode ser um ponto interno ou externo ao triângulo, bem como coincidir com o vértice do ângulo reto, dependendo do triângulo traçado.

Investigando o que acontece nos triângulos isósceles e equilátero

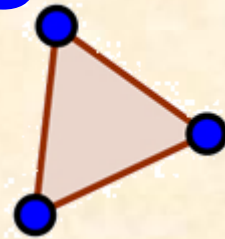
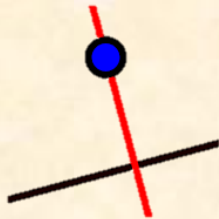
- 1) Desenhe um triângulo isósceles ABC , de modo que o lado $\overline{AB}$ seja igual ao lado $\overline{AC}$.
 - a) Trace a altura, mediana e bissetriz interna relativa à base do triângulo.
 - b) O que você observa?
 - c) Compare os resultados encontrados com os dos seus colegas de grupo. Foi observado um padrão? Qual?
 - d) O que esse padrão sugere?

- 2) Desenhe um triângulo equilátero ABC .
 - a) Trace as três alturas, medianas e bissetrizes internas do triângulo.
 - b) O que você observa?
 - c) Marque o ponto de encontro desses segmentos.
 - d) O que você observa?
 - e) Compare os resultados encontrados com os dos seus colegas de grupo. Foi observado um padrão? Qual?
 - f) O que esse padrão sugere?

Observação: Nesta atividade, é esperado que os alunos constatem que, no triângulo isósceles, as três cevianas notáveis relativas à base coincidem e que, no triângulo equilátero, pelo fato de as três alturas, as três medianas e as três bissetrizes internas coincidirem, o baricentro, incentro e ortocentro também coincidem em um único ponto.

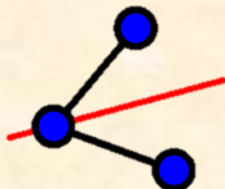


Construções com



4.2 Construções com o GeoGebra

GeoGebra



3.3.1 GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica gratuito que combina construções geométricas, algébricas, gráficos, cálculos e tabelas em um só ambiente. Sua interface é simples e pode ser utilizado tanto no computador como no celular. Outro ponto a ser abordado, consiste na utilização desta ferramenta para a produção de atividades/aplicativos interativos os quais podem ser disponibilizados no domínio GeoGebra como também em páginas da WEB.

Nas construções propostas nesta seção, utilizaremos apenas a janela de visualização, onde aparecem as construções gráficas. Dependendo da turma, o professor poderá usufruir dos demais recursos que o programa disponibiliza.

Antes de iniciar as atividades, o professor deve explorar com os alunos as janelas e suas ferramentas. Caso necessite de um material de apoio, poderá acessar o minicurso¹¹ desenvolvido pelos integrantes do *Grupo PET Matemática - Programa de Educação Tutorial*, sob a orientação da Professora Dra. Carmen Vieira Mathias, da Universidade Federal de Santa Maria.

Professor,

Utilizamos a versão *off-line* do **GeoGebra Classic 6**, para fazer o download e instalá-lo no seu computador ou no Laboratório de Informática, caso a escola o possua basta acessar o endereço eletrônico www.geogebra.org e clicar na aba *Baixar Aplicativos* – fazendo isto, aparecerão os aplicativos disponíveis para *download*. Em seguida, selecione o *GeoGebra Clássic 6*, e o programa será automaticamente baixado em seu computador – siga os passos indicados pelo aplicativo para instalação.



¹¹Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/783/2020/02/Apostila_GeoGebra.pdf. Acesso em: 02. jan. 2021.

Ao acessar a tela inicial do GeoGebra, o usuário visualiza uma gama de funcionalidades distribuídas na Barra de Menus, Barra de Ferramentas, Janela de Álgebra, Caixa de Entrada, Janela de Visualização e Lista de Comandos.

A *Barra de Ferramentas* é composta por onze janelas ou ícones, que concentram todas as ferramentas e comandos necessários, para construção de figuras geométricas. O contorno em destaque indica que o ícone está ativo (figura 42).

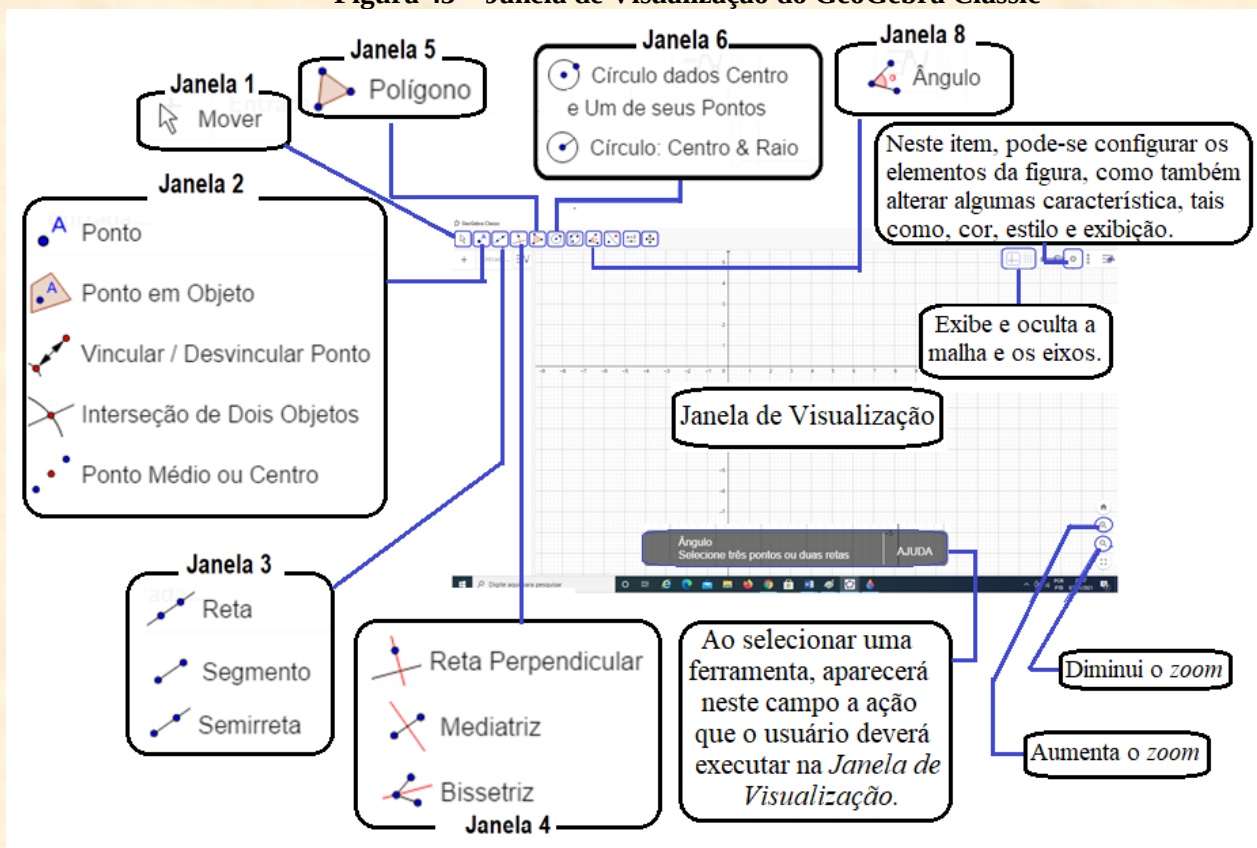
Figura 42 – Barra de Ferramentas



Fonte: Adaptado do GeoGebra

Na figura 43, apresentamos algumas das funcionalidades que serão úteis nesta seção.

Figura 43 – Janela de Visualização do GeoGebra Classic



Fonte: Adaptado do GeoGebra

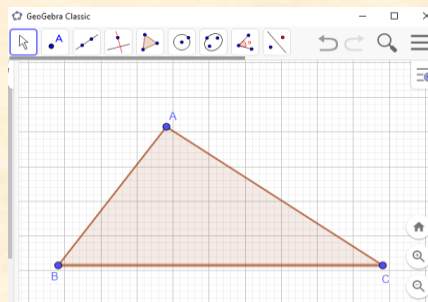
3.3.2 Estudo das cevianas notáveis por meio do GeoGebra

TRAÇANDO AS CEVIANAS NO GEOGEBRA	
Orientação Inicial: Professor, esta proposta é composta por três atividades, seria interessante que antecipadamente à utilização do GeoGebra, que faça uma reflexão a respeito do uso do Desenho Geométrico em suas aulas (ou que os alunos já tenham realizado as atividades propostas na sequência anterior). Sugerimos, que seja feita uma abordagem teórica sobre o tema, bem como realizar algumas construções simples, utilizando o GeoGebra: como de segmentos de reta, circunferências, ponto médio de um segmento, mediatriz, perpendiculares, ângulos, bissetrizes, triângulos para que, assim, os alunos tenham ferramentas necessárias para o bom desenvolvimento da atividade. Explore as semelhanças das figuras feitas no geogebra com as que eles realizaram com régua e compasso. O preparo é longo e demanda um planejamento durante todo o ano letivo, mas os resultados podem ser satisfatórios.	
Material necessário:	Computador com software Geogebra instalado.
Objetivos:	• Conceituar as cevianas de um triângulo: mediana, bissetriz e altura • Compreender as características desses segmentos • Determinar o ponto de encontro das alturas, medianas e bissetrizes • Estudar a mediatriz e determinar o incentro • Realizar construções geométricas utilizando o GeoGebra.
Organização da turma:	Em duplas
Tempo estimado:	três horas-aula
Ano de escolaridade:	8º ano do Ensino Fundamental
Conteúdo abordado:	Cevianas notáveis e pontos notáveis do triângulo.
Objeto do Conhecimento da BNCC:	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos, Construções geométricas
Habilidades:	EF08MA17, EF08MA15, EF08MA36MG e EF08MA37MG
Situação proposta: Utilizar as construções com GeoGebra, para compreender o conceito geométrico de cevianas notáveis e dos pontos de interseção entre elas em diferentes triângulos.	
Desenvolvimento: Realize junto aos alunos a construção das alturas, medianas e bissetriz com seus respectivos pontos de interseção, depois promova debates utilizando as atividades investigativas. Caso seja necessário, apresente o passo a passo das construções. Explique aos alunos que a mediatriz não é classificada como uma ceviana, mas, devido ao encontro das três mediatrizes ser o centro da circunferência circunscrita a um triângulo, a mediatriz se faz importante no estudo da Matemática (a realização deste tópico fica à critério do leitor). <i>Obs.: As figuras presentes nesta atividade foram produzidas pelos autores no software GeoGebra.</i>	

ATIVIDADE I - Passo a passo da construção das bissetrizes e do incentro de um triângulo qualquer no GeoGebra

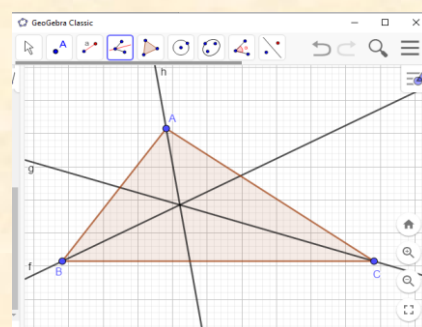
Passo 1 – Construção de um triângulo ABC qualquer.

Na janela 5, ativar a ferramenta  **Polígono** e clicar em três ponto **A**, **B** e **C**, não colineares e, por último, clicar sobre o ponto **A** novamente.



Passo 2 – Construção das bissetrizes relativas aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

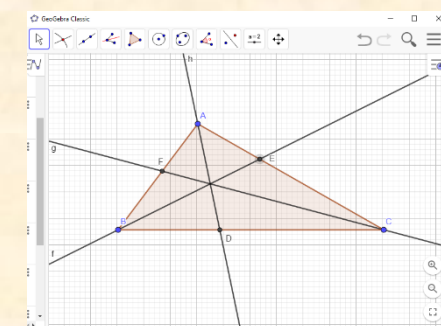
Na janela 4, ativar a ferramenta  **Bissetriz** e clicar sobre os vértices **A**, **B** e **C**, nesta ordem. Posteriormente, clicar sobre os vértices **B**, **C** e **A** e, por último, nos vértices, **C**, **A** e **B**.



Obs.: Não alterar a ordem proposta para os vértices.

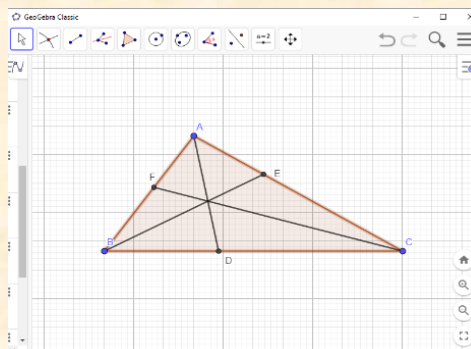
Passo 3 – Determinação do o ponto interseção **D**, **E** e **F** das bissetrizes com o lado oposto.

Na janela 2, ativar a ferramenta  **Interseção de Dois Objetos** e clicar sobre o cruzamento das retas **h**, **f** e **g**, com os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, determinando, assim, os pontos **D**, **E** e **F**, respectivamente.



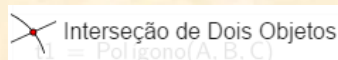
Passo 4 – Determinação das cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, do triângulo.

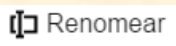
Na janela 3, ativar a ferramenta  **Segmento** e clicar nos pontos **A** e **D**, **B** e **E** e, por último, nos pontos **C** e **F**. Para esconder as retas, clicar com o botão direito do mouse nas retas **h**, **f** e **g**, e desativar a opção  **Exibir Objeto**.

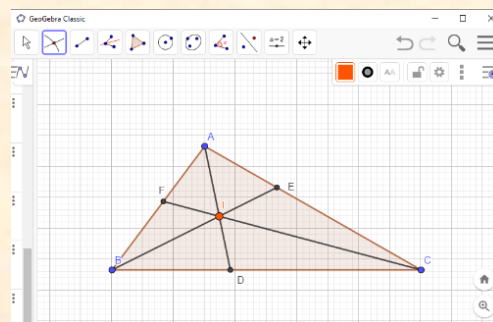


Passo 5 – Determinação do ponto de interseção entre as bissetrizes.

Na janela 2, ativar a ferramenta



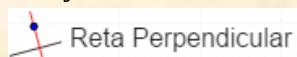
e clicar sobre o cruzamento das cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ – aparecerá um ponto G , clicar com o botão direito do mouse sobre ele e, utilizando a função , o renomear como I – determinando-se, assim, o ponto I (centro).



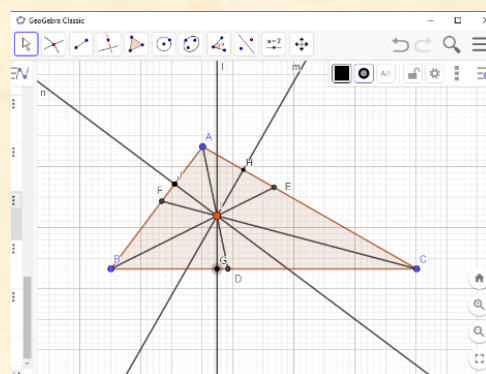
Aproveitar este momento para destacar este ponto alterando seu tamanho e cor.

Passo 6 – Determinando o raio e a circunferência com centro I .

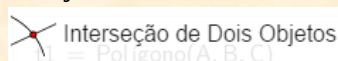
-Na janela 4, ativar a ferramenta



e clicar no ponto I e no lado $\overline{BC}$ do triângulo. Fazer o mesmo com os outros dois lados.

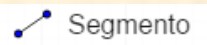


-Na janela 2, ativar a ferramenta

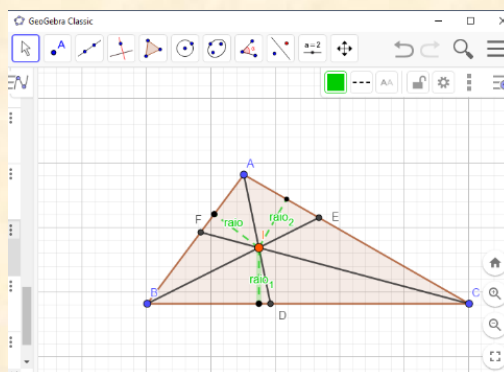


e clicar sobre as retas l e o lado $\overline{BC}$ do triângulo, assim, será criado o ponto G .

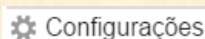
Repetir o mesmo processo, para criar os pontos H e J , sob os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

-Na janela 3, ativar a ferramenta  e clicar nos pontos I e G , I e H e, por último, nos pontos I e J . Para esconder as retas, clicar com o botão direito do mouse sobre as retas l , m e n , e desativar a opção

.

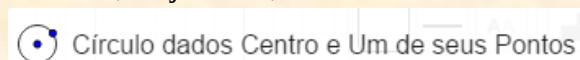


Clicar com o botão direito do mouse sobre o segmento $\overline{IG}$, depois, na opção

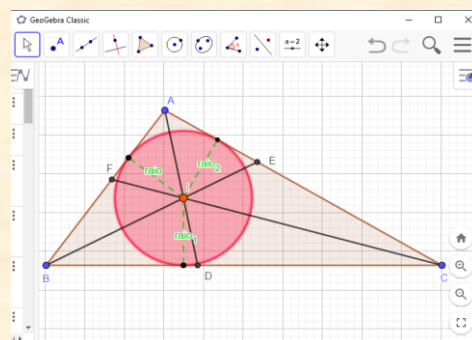


e alterar seu nome (raio), cor e estilo, repetir esse processo com os outros dois segmentos. Por último, clicar sobre os pontos G , H e J , e desativar a função .

-Por fim, na janela 2, ativar a ferramenta



e clicar sobre os pontos I e G , pé da perpendicular no segmento $\overline{BC}$, traçado anteriormente. Uma circunferência d será criada. Na opção configurações, mudar a cor da circunferência.



Investigando as propriedades do incentro

Nossa recomendação é que o professor, utilizando a construção realizada com o auxílio do GeoGebra, leve os alunos a investigarem as propriedades das bissetrizes e do incentro.

Neste sentido, sugerimos que o professor proponha aos alunos as tarefas:

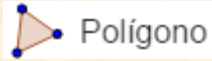
- a) Habilite e desabilite as bissetrizes. Perguntas: É correto afirmar que, para encontramos o incentro de um triângulo, basta obter a interseção entre as bissetrizes internas relativas a dois ângulos? Por quê?
- b) Utilizando a ferramenta  meça os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo. Com a mesma ferramenta, meça os ângulos seccionados pelas bissetrizes. O que você observa?
- c) Movimente os pontos A , B e C , alterando a forma do triângulo. O que você observa em relação ao incentro? E em relação às bissetrizes?
- d) Meça os raios. O que podemos concluir?
- e) Proponha aos alunos que realizem a construção das bissetrizes e incentro do triângulo, recorrendo às ferramentas *Ponto Médio* ou *Centro e Mediatriz*. Depois, discuta os conceitos utilizados e qual a diferença da construção realizada anteriormente.

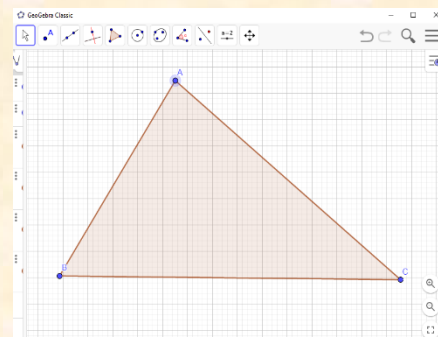
Para o Professor - caso encontre alguma dificuldade em relação à construção, esta atividade também poderá ser realizada como o *applet* disponível em:

<https://www.geogebra.org/m/dgsn3ndq>. Acesso em: 02. jan. 2021.

ATIVIDADE II- Passo a passo da construção das medianas e do baricentro de um triângulo qualquer no GeoGebra

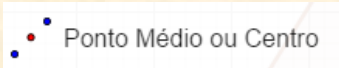
Passo 1 – Construção de um triângulo ABC qualquer.

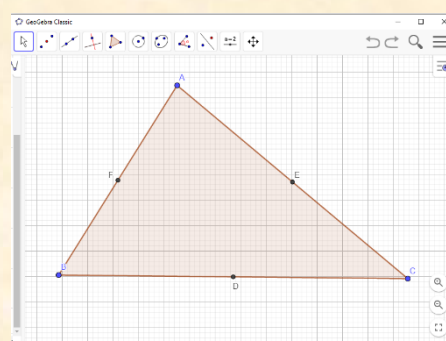
Na janela 5, ativar a ferramenta  e clicar em três pontos A , B e C , não colineares e, por último, clicar sobre o ponto A novamente.



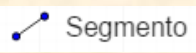
Passo 2 – Determinação do ponto médio dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Na janela 2. Ativar a ferramenta

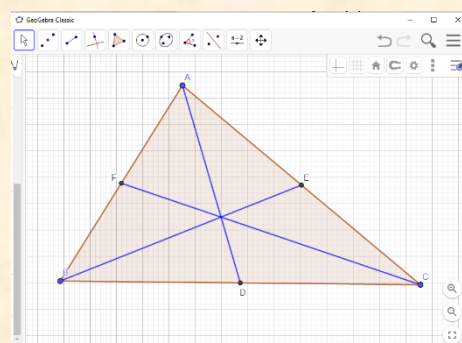
 e clicar sobre os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo, os pontos D , E , e F foram criados.



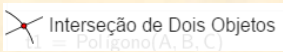
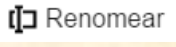
Passo 3 – Determinação das cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, do triângulo.

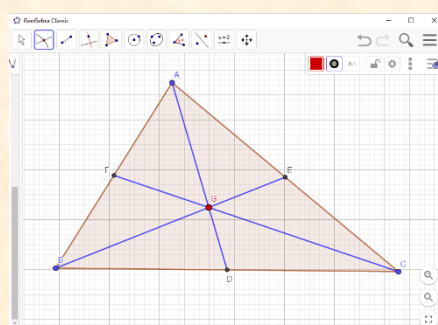
Na janela 3, ativar a ferramenta  e clicar nos pontos A e D , B e E e, por último, nos pontos C e F , assim, aparecerão as três medianas.

Clicar com o botão direito do mouse sobre as medianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, e desativar a opção  **Exibir Rótulo**, depois, alterar a cor desses segmentos.



Passo 5 – Determinação do ponto de interseção entre as medianas.

Na janela 2, ativar a ferramenta  e clicar sobre o cruzamento das cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$. Clicar com o botão direito do mouse no ponto G em utilizando a função  renomeá-lo para I – determinando, assim, o ponto G (baricentro).



Aproveitar este momento para destacar este ponto, alterando seu tamanho e cor.

Investigando as propriedades do baricentro

Na mesma linha anterior, também trazemos como proposta que o professor, utilizando a construção realizada com o auxílio do GeoGebra, leve os alunos a investigarem as propriedades das medianas e do baricentro.

Sugestão de tarefas:

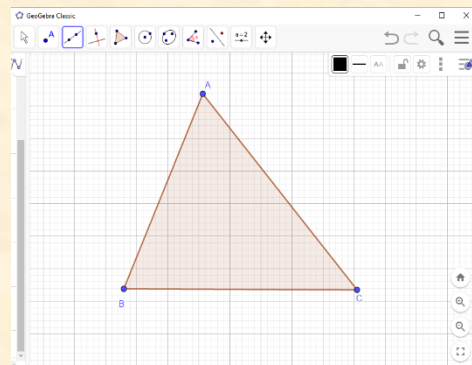
- a) Habilite e desabilite as medianas. É correto afirmar que para encontramos o baricentro de um triângulo, basta obter a interseção entre as medianas relativas a dois lados? Por quê?
- b) Usando a ferramenta segmento, meça a distância $\overline{GA}$ e $\overline{GD}$. Você consegue observar alguma relação entre elas?
- c) Repita o procedimento do item anterior e meça a distância $\overline{GB}$ e $\overline{GE}$ e, depois, $\overline{GC}$ e $\overline{GF}$. É possível perceber alguma relação entre os pares de medidas? Qual?
Dica: para facilitar a observação, construa uma tabela com os dados.
- d) Movimente os vértices **A**, **B** e **C**, do triângulo e veja se esta relação se mantém. Discuta com seus colegas sobre o que perceberam com a movimentação dos vértices.

Para o Professor - caso tenha alguma dificuldade na construção, esta atividade também poderá ser realizada como o *applet* disponível em: <https://www.geogebra.org/m/shptgmvs>.
Acesso em: 02. jan. 2021.

ATIVIDADE III - Passo a passo da construção das alturas e do ortocentro de um triângulo qualquer no GeoGebra

Passo 1 – Construção de um triângulo ABC qualquer.

Na janela 5, ativar a ferramenta  **Polígono** e clique em três pontos A , B e C , não colineares e, por último, clicar sobre o ponto A novamente.

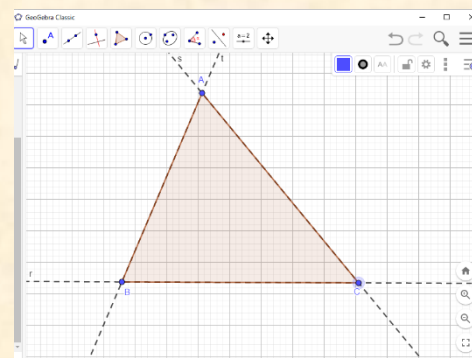


Passo 2 – Traçado da reta suporte dos lados do triângulo ABC.

Na janela 3, ativar a ferramenta  **Reta** e clicar nos pontos A e B , será criada a reta f . Em seguida, clicar sobre os pontos B e C e, por último, nos pontos C e A , criando respectivamente as retas g e h . Depois clicar com o botão direito do mouse sobre a reta suporte do segmento $\overline{BC}$, e em seguida, na opção

 **Configurações**

e alterar seu nome (r , s e t), e estilo (-----), repetir o mesmo processo com as outras duas retas.



Passo 3 – Criação das três retas suporte, perpendiculares, que passam pelos vértices do triângulo e do lado oposto a ele (que contém as alturas do triângulo).

Na janela 4, ativar a ferramenta

 **Reta Perpendicular**

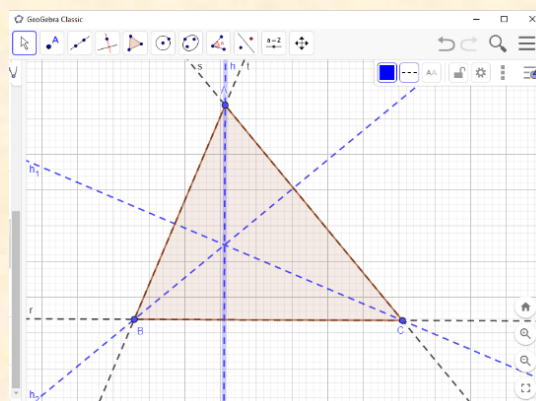
e clicar sobre o ponto A e no lado $\overline{BC}$ do triângulo (em seguida, aparecerá a reta f). Utilizando a mesma ferramenta, clicar no ponto B e no lado $\overline{AC}$ e, por último, no ponto C e no lado $\overline{AB}$, assim, serão exibidas as retas g e j .

Clicar com o botão direito do mouse sobre a reta f , que é perpendicular ao segmento $\overline{BC}$, depois na opção

 **Configurações**

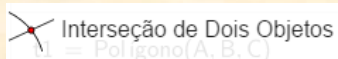
e alterar seu nome (h),

cor (azul) e estilo (-----), repetir o mesmo processo com as outras duas retas, nomeando-as, de h_1 e h_2 , respectivamente.

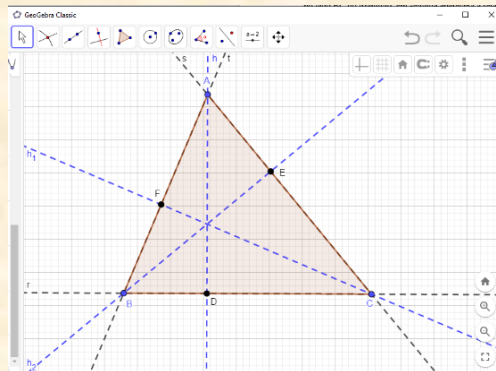


Passo 4 – Determinação do ponto de interseção entre as retas perpendiculares e dos lados dos triângulos (este ponto é denominado pé da altura).

Na janela 2, ativar a ferramenta

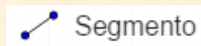


e clicar sobre a reta h e no lado $\overline{BC}$ do triângulo, aparecerá o ponto D . Repetir o processo e serão gerados os pontos E e F .



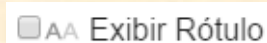
Passo 5 – Determinação das cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, do triângulo.

Na janela 3, ativar a ferramenta

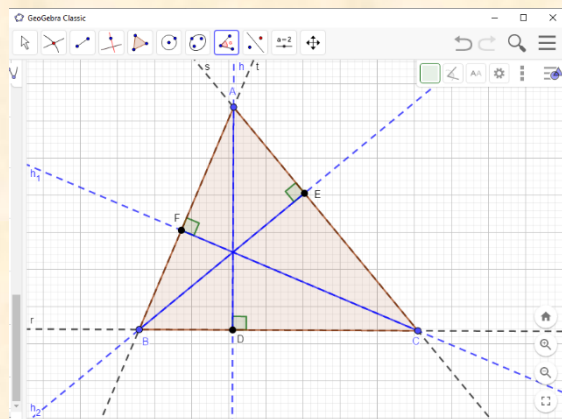


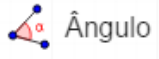
e clicar nos pontos A e D , B e E , e, por último, nos pontos C e F , assim, aparecerão as três alturas do triângulo.

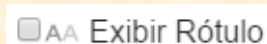
Clicar com o botão direito do mouse sobre as alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, e desativar a opção



, depois, alterar a cor desses segmentos para azul.



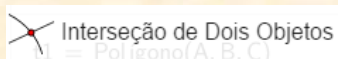
Utilizando a ferramenta  (janela 8), clicar sobre os pontos C , D e A , nesta ordem. Posteriormente, clicar sobre os pontos C , E e A e, por último, nos pontos A , E e B . Em seguida, clicar, com o botão direito do mouse, sobre os ângulos formados e desativar a opção

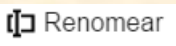


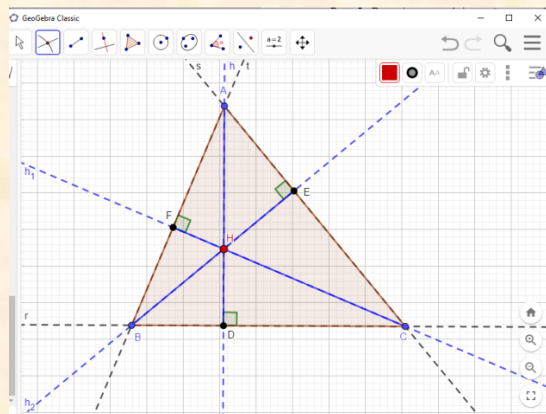
Obs.: Não alterar a ordem proposta para os vértices.

Passo 6 – Determinação do ponto de interseção entre as alturas.

Na janela 2, ativar a ferramenta



e clicar sobre o cruzamento das cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$. Clicar, com o botão direito do mouse, sobre o ponto G e, utilizando a função , o renomeie para H – determinando, assim, o ponto H (ortocentro). Aproveitar este momento para destacar este ponto alterando seu tamanho e cor (vermelho).



Investigando as propriedades do ortocentro

Mais uma proposta de atividade utilizando a construção realizada com o auxílio do GeoGebra, para que os alunos investiguem as propriedades das alturas e do ortocentro do triângulo.

Sugestão:

- e) Habilite e desabilite as alturas. É correto afirmar que para encontramos o ortocentro de um triângulo, basta obter a interseção entre as alturas relativas a dois lados? Por quê?
- f) Movimente os pontos **A**, **B** e **C**, alterando a forma do triângulo, de modo que ele seja retângulo, acutângulo e, depois, obtusângulo. O que você observa em relação as alturas em cada um dos triângulos? E em relação ao ortocentro? Anote.
- g) Discuta com seus colegas e com o professor suas observações.

Para o Professor - caso tenha alguma dificuldade na construção, esta atividade também poderá ser realizada como o *applet* disponível em:

<https://www.geogebra.org/m/mvtdur9q>. Acesso em: 02. jan. 2021.

Considerações Finais

Como já dito inicialmente, esse material foi elaborado com o objetivo de ser utilizado em cursos de licenciatura em Matemática, nos cursos de formação continuada e para os professores que atuam no Ensino Básico.

Esperamos que a abordagem histórica e as sugestões de atividades possam trazer novos caminhos para o ensino e a aprendizagem da Geometria e, especialmente, do tópico triângulos e suas cevianas.

REFERÊNCIAS

- AULETE, Caldas. **Novíssimo Aulete Dicionário contemporâneo da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2011.
- BONGIOVANNI, Vincenzo. LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto e LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática e vida** - 7ª série. São Paulo: Ática, 1998.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Acesso em: 1 dez. 2020.
- CEVA, Giovanni Benedetto. **De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio**. Milão: Ex Typographia Ludouici Montiae, 1678. Disponível em: <https://archive.org/details/ita-bnc-mag-00001346-001/page/n14/mode/2up>. Acesso em: 15 maio 2020.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2008.
- GEOMETRIA (Ceva Menelaus) - Nível 2, aula ministrada por Bruno Holanda. Rio de Janeiro: POTI/IMPA, 9 set. 2013. Publicado por Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=w114WZDS3_Y&feature=embtitle. Acesso em: 5 jun. 2020.
- GEOMETRIA (Teorema de Ceva e Teorema de Menelaus) Nível 3, aula ministrada por Luciano Guimarães Monteiro de Castro. Rio de Janeiro: POTI/IMPA, 25 set. 2013. Publicado por Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=cwk80o6-V5I&t=3622s>. Acesso: 5 jun. 2020.
- LANDRA, Paola. **Ceva e Manfredi**: una polemica tra matematici del Settecento. 2009. 266f. Tesi (Dottorato in Epistemologia Dell'informatica e Mutamenti Sociali) – Politecnico de Milan, Milan, 2009.
- KENNEDY, Edward. **Trigonometria**. São Paulo: Atual, 1992. (Coleção Tópicos de História da Matemática para o uso em sala de aula)
- LOPES, Elizabeth Teixeira. KANEGAE, Cecília Fujiko. **Desenho Geométrico** – Conceitos e Técnicas. São Paulo: Scipione, 2000. v. 3.
- MUNIZ NETO. Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar** (Geometria Euclidiana Plana). Rio de Janeiro: SBM. 2012. v. 2.
- THIAGO, Cícero. **Curso de geometria**. niv.2. aula. 14. Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: https://potiimpa.br/uploads/material_teorico/86bacem5rzoco.pdf. Acesso em: 5 jan. 2020.
- THIAGO, Cícero. **Curso de geometria**: Teorema de Ceva. niv.3. aula. 7. Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/geometria3/Aula07-Teorema_de_Ceva.pdf. Acesso em: 5 jan. 2020.
- ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001. 206 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.