PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DÉBORA FIALHO SODRÉ

O ESTUDO DOS CONCEITOS DE FUNÇÕES COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

BELO HORIZONTE, MG
2021

DÉBORA FIALHO SODRÉ

O ESTUDO DOS CONCEITOS DE FUNÇÕES COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada à Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como exigência parcial para obtenção de título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares

Belo Horizonte
2021

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Sodré, Débora Fialho
S679e O estudo dos conceitos de funções com resolução de problemas / Débora Fialho Sodré. Belo Horizonte, 2021.
116 f. : il.

Orientador: João Bosco Laudares
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Funções (Matemática). 2. Cálculo - Problemas, questões, exercícios. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Livros didáticos - Matemática - Avaliação. 5. Base Nacional Comum Curricular. 6. Professores de matemática - Formação. 7. Matemática - Currículos. 8. Aprendizagem baseada em problemas. I. Laudares, João Bosco. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 51:373.5

Ficha catalográfica elaborada por Fabiana Marques de Souza e Silva - CRB 6/2086

Débora Fialho Sodré

O ESTUDO DOS CONCEITOS DE FUNÇÕES COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada à Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como exigência parcial para obtenção de título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Prof. Dr. João Bosco Laudares - PUC Minas - Orientador

Profª. Dr.ª Janine Freitas Mota - Unimontes

Prof. Dr. Saulo Furletti - IFMG

Belo Horizonte, 17 de setembro de 2021

AGRADECIMENTOS

Primeiramente dedico esse trabalho aos meus pais que me deram suporte para a realização do curso me incentivando e apoiando em todos os momentos.

Em especial quero agradecer ao meu pai Renaldo que embarcou corajosamente nessa jornada comigo, dividindo alegrias, conhecimentos, dificuldades e realizações.

Ao meu marido João pelo apoio incondicional e precioso na construção plena deste trabalho, o meu carinho e minha gratidão.

À minha filha Amanda, motivo maior para minha disposição em seguir em frente, melhorar e me aprimorar.

À minha avó Dirce e minha tia Sônia que vibram por cada pequena vitória minha, me enchendo de amor, perseverança e amparo.

Ao Prof. Dr. João Bosco Laudares pela sábia orientação e pela paciência na condução do desenvolvimento desta dissertação.

RESUMO

A presente dissertação de Mestrado, intitulada O ESTUDO DOS CONCEITOS DE *FUNÇÕES* COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS insere-se no quadro de um Projeto de Pesquisa do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, intitulado: "Nivelamento dos Estudantes de Cursos de Engenharia e sua Integração à Universidade", coordenado pelo Doutor João Bosco Laudares, tendo em vista as dificuldades demonstradas por alunos na disciplina Cálculo Integral e Diferencial. Nesse sentido, a presente pesquisa se propõe a identificar as dificuldades encontradas pelos alunos ingressantes nas Engenharias (sujeitos da pesquisa), contemplando problemas conceituais sobre função linear, função quadrática, função exponencial e função logarítmica, que são pré-requisitos para a disciplina de Cálculo I. Na obtenção de dados buscou-se, em primeiro lugar, identificar em documentos oficiais no Brasil, o que contemplam sobre o ensino de *Função* e, em livros didáticos destinados ao primeiro ano do ensino médio, o modo como esse objeto de conhecimento é sistematizado em relação ao seu conceito. A partir desses estudos, foram criadas e aplicadas quatro de seis atividades planejadas, relacionadas ao *conceito* de *função*, com base no referencial teórico-metodológico da resolução de problemas. A análise dos resultados revela que os alunos apresentam lacunas epistemológicas no conhecimento do conceito de funções, o que requer investimentos na continuidade das pesquisas do Projeto aqui citado, bem como a criação de uma rede de instituições de ensino médio e de ensino superior para projetos de formação de professores.

Palavras-chave: Ensino, Conceito, Resolução de Problemas, Função, Matemática.

ABSTRACT

The present research, named STUDY OF FUNCTION CONCEPTS THROUGH PROBLEM-SOLVING, faces learning difficulties of Engeneering undergraduate students at Differential Integral Calculus' classes. It aims to understand such difficulties, specially concerning linear function, quadratic function, exponential function and logarithmic function, which are prerequisites for studying Calculus.In order to get concrete real data, it focused firstly on identifying brazilian official documents that regulate the undergraduate subject named "Calculus I". It also covered high school teaching books as a means for understanding how this set of mathematical knowledge and skills is structured regarding its foundational concept. From such theoretical standpoint, four of six planned activities related to the problem-solving methodology were done. Analysis of results showed that students have epistemic gap, which requires continued studies on the area, as well as the creation of high school and college institutions specially focused on teacher formation.

Keywords: Teaching, Concept, Problem-solving, Function. Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNMAC	Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional
COBENGE	Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia
EaD	Educação a Distância
ENADE	Exame Nacional de Desempenho de Estudantes
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
FIP	Fundo de Incentivo à Pesquisa
FUMEC	Fundação Mineira de Educação e Cultura
GEEM	Grupo de Estudo do Ensino da Matemática
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacional
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PME	Psycology of the Mathematical Education
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
UNESP	Universidade do Estado de São Paulo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O meu contato com Matemática começou bem cedo, até antes da adolescência. Sendo filha de dois professores da referida disciplina, me habituei a ver em casa livros sobre o assunto, assim como observava meus pais em constante estudo e aprimoramento do conteúdo e realização de suas práticas docentes.

Em 2008, graduei-me em Publicidade e Propaganda e, por influência direta ou indireta dos meus genitores, em 2011, iniciei o curso de Engenharia Civil, me formando em 2017. No decorrer do curso de engenharia, me entusiasmei pelo Cálculo, haja vista a influência familiar e, também, a facilidade na aprendizagem dessa disciplina. Seguindo a trajetória dos meus pais (Engenharia e Ensino de Matemática) e, ainda, por ter habilidade em transmitir o conteúdo para os colegas, enquanto estudante, logo comecei a ministrar aulas particulares, o que me permite, há mais 8 anos, um contato direto com alunos de diferentes lugares do país. Essa experiência se consolidou bastante, reforçando em mim minha opção pelo ensino e menos para atuação na Engenharia Civil propriamente dita.

Tanto quanto aluna quanto investigadora, sempre me despertou atenção as dificuldades manifestadas por alunos e por professores quanto a bons desempenhos na disciplina de Cálculo.

Com base na experiência de ensino e no contato direto com diversos alunos, conjecturo que uma das causas para o insucesso na aprendizagem do Cálculo dos alunos ingressantes no Ensino Superior é a grande defasagem dos conteúdos e conceitos da matemática básica, o que corrobora com o exposto por Santos *et al.* (2016), indicando grande descompasso entre a base da formação matemática (ensino fundamental e médio) e a graduação.

Buscando aprimorar minha prática docente, ingressei, no ano de 2018, no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais e encontrei, na instituição, um cenário mais que adequado às minhas inquietações: desenvolvimento de um Projeto de Pesquisa no referido Programa de Pós-graduação, intitulado: “Nivelamento dos Estudantes de Cursos de Engenharia e sua Integração à Universidade”. Este projeto, financiado pelo Fundo de Incentivo à Pesquisa (FIP) da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-MG), é coordenado pelo Professor Doutor João Bosco Laudares e conta com a colaboração do Professor Doutor Saulo Furletti, o Professor Mestre Renaldo

Sodré, que contribuiu com intervenção voltada para problemas contextualizados de Cálculo Diferencial e Integral e a Professora Mestra Cleicione Cecília Coelho Oliveira, que investigou a respeito de procedimentos algébricos. A presente pesquisa soma-se a esses esforços já empreendidos, investigando sobre os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos de função.

Desde então, juntamente com os mestrandos e professores do referido programa, venho pesquisando e trabalhando o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo e verificando estratégias defendidas por diversos autores, tendo em vista a melhoria do ensino dessa disciplina no Ensino Superior.

Estudos e pesquisas a respeito das dificuldades dos alunos frente a um bom desempenho na disciplina Cálculo encontram-se de acordo no sentido de que essas dificuldades têm origem nas lacunas deixados pelo ensino básico.

De acordo com Rosa (2018), é preciso considerar que a dificuldade de compreensão do conteúdo e o baixo rendimento dos alunos no Cálculo Integral e Diferencial acarretam alto índice de reprovações, levando, muitas vezes, o estudante a abandonar o curso; por isso Rosa (2018) afirma que, apesar da importância dada à disciplina Cálculo Diferencial e Integral no currículo de alguns cursos superiores, ela tem se tornado um desafio para os estudantes que demonstram, turma a turma, período a período, dificuldades cada vez maiores, o que reforça a ideia da complexidade da disciplina para quem a aprende e para quem a ensina. Some-se às justificativas anteriores, que a disciplina Cálculo Integral e Diferencial exige que os alunos tenham se apropriado de habilidades básicas e de procedimentos indispensáveis ao bom desenvolvimento na disciplina, tais como: domínio de procedimentos, isto é, saiba operar com expressões numéricas e algébricas, resolver problemas com o conceito de funções elementares, quais sejam polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Dessa forma, dificuldades dos discentes no estudo de Cálculo I podem surgir das fragilidades adquiridas ao longo do caminho percorrido nas disciplinas de Matemática nos Ensinos Fundamental e Médio, especialmente no que diz respeito às funções elementares. (SANTOS *et al.*, 2016). Diante desse quadro, muitas instituições se preocupam em oferecer aos alunos ingressantes um módulo introdutório ao curso de cálculo que o anteceda (geralmente denominado PréCálculo ou cálculo zero).

As aplicações do Cálculo Diferencial e Integral estão presentes na maioria dos fenômenos mensuráveis, pois os processos de mudanças são inerentes às leis da natureza e compreender essas variações é fundamental para a sobrevivência do homem na Terra. Essa disciplina se concentra nas séries iniciais de diversos cursos do Ensino Superior e exige do aluno diferentes conteúdos estudados em outras temáticas, além de práticas já vividas.

De acordo com Casarin & Rubi (2014), é comum encontrarmos alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem, principalmente em Matemática e áreas ligadas ao cálculo. Essas dificuldades são provenientes de diversas causas, sendo uma delas a defasagem apresentada pelos alunos nos conteúdos e nos conceitos da matemática básica. Fernandes Filho (2001) afirma que “a falta de base do ensino médio, aliada ao insucesso nas notas no primeiro semestre, contribuem para que os alunos desanimem e deixem de estudar e sejam reprovados” (FERNANDES FILHO, 2001, p. 20).

A abordagem defendida por CAVASOTTO (2011), por sua vez, faz questão de reforçar que as maiores dificuldades que os alunos têm no aprendizado de cálculo não estão no conteúdo por ele abordado, mas, sim, na deficiência da base oriunda do ensino médio e fundamental.

Com o objetivo de conhecer o perfil dos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral, Curi e Farias (2008) realizaram uma pesquisa com alunos da Universidade Federal de Campinas, cuja investigação se baseou no comportamento dos estudantes em sala de aula, no tempo de dedicação aos estudos e nas dificuldades de aprendizado que encontram nessas disciplinas. Essa pesquisa constatou deficiências dos alunos nos conhecimentos prévios da matemática básica exigidas para o aprendizado de Cálculo, dificultando, portanto, o entendimento da disciplina.

Estudos realizados por Tontini e Walter (2014) e Silva (2015) mostram que o baixo desempenho apresentado pelos estudantes que ingressam nas universidades, principalmente nas disciplinas que envolvem conceitos matemáticos básicos, pode se configurar como um dos fatores que têm elevado, também, o índice de evasão nos cursos.

A defasagem em relação ao conhecimento matemático básico, apresentada pela maioria dos ingressantes em cursos de graduação, tem se mostrado um problema recorrente nas universidades, preocupando professores, alunos e coordenadores. (MENESTRINA; MORAES, 2011).

Ainda que esse contexto seja algo percebido e vivido no ensino, o *habitus*[1] professoral de um professor de Cálculo não o liberta da necessidade de insistir no processo lógico matemático utilizado na construção do Cálculo, na formalização dos conceitos, na importância dessa ciência como suporte para as outras disciplinas. No entanto, as condições estruturantes das escolas não contribuem para as melhores práticas didáticas, uma vez que o cenário encontrado reflete carga horária reduzida, turmas numerosas e conteúdos programáticos extensos. (LACHINI, 2001)

Diante dos desafios colocados pela prática docente, pelas pesquisas e pelos estudos em andamento no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, foi planejada esta pesquisa, cujo objeto foi identificar as dificuldades dos estudantes que ingressam nos cursos de Engenharia , em relação ao uso dos conceitos das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica que se soma, portanto , ao Projeto de Pesquisa coordenado pelo professor Laudares, que se realiza e se desenvolve com três pesquisas integradas a questão principal: resolução de problemas, procedimentos matemáticos e o estudo do conceito matemático, que é o tema da investigação que gerou esta dissertação.

Isso posto, vale destacar que a presente pesquisa foi direcionada, principalmente, aos estudantes ingressantes de Engenharia, tendo, como principal finalidade, a identificação e análise das principais variáveis que possam influir na adaptação, na permanência e no desempenho dos estudantes no curso.

1.2. Problema da Pesquisa

O ingresso no ensino superior marca o início de uma mudança na vida e na conduta do estudante. No ambiente universitário, o aluno rompe a barreira da passividade criada no ensino médio e “*é cobrado a direcionar e programar com mais liberdade, autonomia e responsabilidade o seu aprendizado”* (BAZZO; VALE PEREIRA, 2013, p. 23). Quais dificuldades alunos ingressantes nos cursos de Engenharia manifestam no processo de aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral?

Partindo do exposto anterior e de questões aqui levantadas, foi construído o seguinte objeto de investigação:

---

[1] **Estruturas objetivas no mundo social que podem coagir a ação dos indivíduos.**

1.2.1. Objeto de Estudo

Buscando compreender as dificuldades encontradas pelos alunos ingressantes nas Engenharias, esta pesquisa tem como **objeto** o estudo de conceitos da matemática básica, envolvendo as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, que são pré-requisitos para o aprendizado da disciplina de Cálculo 1.

1.2.2. Sujeitos da Pesquisa

Os sujeitos desta pesquisa foram estudantes ingressantes nos cursos da Fundação Mineira de Educação e Cultura (FUMEC), matriculados na disciplina de Cálculo 1.

1.3. Objetivo Geral

Contribuir com o desenvolvimento de atividades voltadas para a investigação e para a resolução de problemas, visando o nivelamento dos alunos ingressantes nos cursos de Engenharia, contemplando problemas conceituais sobre função linear, função quadrática, função exponencial e função logarítmica, que são pré-requisitos da disciplina de Cálculo I.

1.3.1. Objetivos Específicos

- Identificar os conceitos fundamentais de funções da Matemática básica estudados pelos alunos de engenharia recém-chegados à universidade, matriculados na disciplina de Cálculo I;
- Identificar em livros da educação básica os problemas e exercícios referentes ao tratamento conceitual sobre as funções investigadas;
- Fazer um diagnóstico com atividades referentes ao conceito de função afim, função quadrática, função exponencial e função logarítmica para estudantes de turmas de Cálculo I na FUMEC;
- Identificar dificuldades apresentadas por alunos ingressantes na universidade, em relação à disciplina Cálculo Diferencial e Integral;

- Elaborar um produto educacional com atividades conceituais das funções estudadas para suporte às aulas de Cálculo I de cursos de Engenharia.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral se concentra nas séries iniciais de diversos cursos do Ensino Superior e exige do aluno diferentes conteúdos estudados em outras temáticas, além de práticas já vividas.

O papel do professor, nesse caso, é mediar e proporcionar meios para o desenvolvimento da aprendizagem. Ressalta-se que estudos de Ponte (2014) corroboram com essa afirmativa, indicando que tarefas matemáticas são a base dos processos de ensino e aprendizagem, devendo estabelecer a formulação e solução de problemas, bem como o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Pode-se, com base no exposto acima, confirmar que é importante representar a Matemática como uma atividade humana em constante desenvolvimento, valorizando o conhecimento, a compreensão e as experiências dos alunos e, em sendo assim, justifica-se essa pesquisa como uma proposta de acolhimento dos alunos ingressantes nas Engenharias, para estudar a sua performance quanto ao domínio dos saberes matemáticos relativamente à compreensão dos principais conceitos, constituintes de uma base para o domínio do conteúdo das disciplinas do curso de engenharia.

Nessa esteira, Laudares (2012) ressalta que trabalhar o conceito, antes da formalização da definição, facilita a aprendizagem significativa. É necessário ativar a estrutura cognitiva do aprendiz para que este adquira e saiba como reter o conhecimento em assimilação. Pais (2001) afirma ser fundamental trabalhar com o aluno os conceitos matemáticos para ativar a sua capacidade de realizar procedimentos de aprendizagem, não se limitando à memorização ou ao adestramento com fórmulas e algoritmos.

Para cumprir seus propósitos e seus objetivos, a presente **dissertação assim se organiza: c**apítulo 1, que traz a introdução, explicita as origens da necessidade desse tipo de pesquisa, apresenta pesquisas que sugerem olhares mais apurados frente às dificuldades que os alunos sentem na disciplina Cálculo, seu objeto e seus ob**jetivos de pesquisa. O c**apítulo 2 contextualiza o recorte da pesquisa, que se assenta sobre o ensino-aprendizagem de Funções na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, no ensino superior**,** bem como destaca conceitos teóricos que fundamentam, sustentam e iluminam as abordagens analíticas, dentre eles a concepção de ensino de matemática, de ensino de matemática na educação superior, outros conceitos matemáticos importantes, com ênfase no conceito de função. No capítulo 3, a pesquisadora buscou estabelecer um diálogo com os documentos oficiais do Brasil, que permitem entender e situar o ensino de matemática no debate teórico-pedagógico. Nesse capítulo foi apresentada uma leitura crítica de como o objeto de ensino função é tratado em dois livros didáticos. A metodologia da pesquisa aqui desenvolvida e o delineamento das atividades que foram aplicadas são apresentadas no capítulo 4. No capítulo 5 é apresentado o cenário da pesquisa, retratada a aplicação, a análise e a reflexão da aplicação de quatro atividades**.** Nas considerações finais, o percurso da pesquisa foi relembrado, com destaque para seu construto teórico e análise do alcance dos objetivos alcançados. Também foram retomadas algumas observações e considerações que ficaram evidentes durante o estudo, seja em relação ao processo ensino-aprendizagem e, em especial, a respeito da origem do elemento causador do fracasso na aprendizagem do objeto de ensino “funções”. A presente dissertação aponta para a necessidade e a importância de que sejam levadas em conta a articulação entre os diferentes segmentos de ensino e a formação de professores, como possibilidade de dirimir os problemas aqui levantados.

O Caderno de Atividades, produto do mestrado profissional, encontra-se no Apêndice.

2. CONTEXTUALIZAÇÂO DO RECORTE DE PESQUISA E SEU APORTE TEÓRICO

2.1. Ensino e Avaliações de Matemática

A Matemática facilita o desenvolvimento do pensamento lógico, sendo essencial para construção de conhecimento também em outras áreas. As Diretrizes Curriculares de Matemática destacam essa importância afirmando que

> a aprendizagem da Matemática, consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significados às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado em apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios. (DIRETRIZES CURRICULARES DE MATEMÁTICA, 2008)

Rodrigues (2005) afirma que o atual ensino da matemática nas escolas é caracterizado pelo formalismo das regras, das fórmulas e algoritmos, bem como pelo caráter rígido para a realização dos cálculos, buscando a exatidão e precisão dos resultados, dando maior ênfase aos procedimentos e menos à compreensão.

Como consequência dessa prática educacional baseada na memorização e na repetição de exercícios, D’ambrosio (1989) afirma que:

> Primeiro, os alunos passam a acreditar que a aprendizagem da matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo os alunos, a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, dos quais não se dúvida ou questiona, e nem mesmo se preocupam em compreender porque funciona. Em geral, acreditam, também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios”. (D’AMBROSIO, 1989, p.16)

Resultados de estudos e pesquisas, como, por exemplo, Rabelo (2013), sinalizam que isto pode se materializar no baixo rendimento dos estudantes brasileiros em avaliações que se constituem como referência de indicadores de qualidade educacional e são implementadas em todos os níveis de ensino. Essas avaliações podem ser nacionais como: Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), Prova Brasil, ou internacionais como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA).

> A análise do desempenho dos estudantes brasileiros nas avaliações educacionais tem revelado profundas deficiências no aprendizado em matemática. Esses resultados sinalizam a necessidade de planejamento do trabalho pedagógico: orientar melhor os processos de construção de conhecimento, buscando desenvolver metodologias e recursos pertinentes para se alcançar os objetivos pretendidos com a educação de qualidade em todos os níveis (RABELO, 2013).

O PISA é organizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) com objetivo principal de avaliar as habilidades e competências necessárias ao final da escolarização básica dos estudantes. O diferencial dessa avaliação é comparar o nível de preparação dos alunos brasileiros com alunos dos 37 países-membros da OCDE, além de 42 países/economias parceiras. (Relatório Brasil no PISA 2018, 2019, p. 20).

As avaliações do PISA ocorrem a cada três anos e compreendem três principais campos de conhecimento: Ciências, Leitura e Matemática. Em se tratando de matemática, o conceito definido pela avaliação do PISA, deve ser visto como

> A capacidade de formular, empregar e interpretar a matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso ajuda os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática desempenha no mundo e faz com que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias (BRASIL NO PISA 2015, 2016, p. 138.)

De acordo os resultados do PISA, os estudantes brasileiros ficaram abaixo da média dos países integrantes da OCDE em todas as edições. Em 2018, ano da edição mais recente, o Brasil participou com uma amostra de 597 escolas e 10691 estudantes avaliados, distribuídos por todo o território nacional. Os resultados mostram que 68,1 % dos estudantes brasileiros avaliados estão nos níveis 1 e 2 em relação aos quatro níveis de pontuação da avaliação. Isso significa, nos parâmetros da OCDE, que não possuem nível básico do conhecimento de matemática. (LIMA et al., 2020)

O SAEB é a avaliação utilizada pelo Governo Federal, a cada dois anos, para medir a aprendizagem dos alunos ao fim de cada etapa de ensino: o 5º e 9º anos do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio. O sistema é composto pelas médias de proficiências em Português e Matemática extraídas da Prova Brasil e pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB).

O SAEB teve as primeiras aplicações realizadas pelo Ministério da Educação (MEC), por intermédio do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) nos anos 1990. Um dos principais objetivos do governo federal com a criação do SAEB foi coletar informações que contribuíssem para que gestores públicos, em todos os níveis, diretores, professores e pesquisadores tivessem uma visão mais abrangente em termos de qualidade da educação básica brasileira.

Dessa forma, os dados do SAEB, até hoje, contribuem para viabilizar ações no âmbito das políticas públicas visando à contínua melhoria da qualidade educacional do país, pois, através delas, pode-se aferir as competências dos alunos e a evolução dessas competências com o decorrer do aprendizado e de maior maturidade dos sujeitos.

2.2. Educação Matemática no ensino superior

O campo de estudo da educação matemática no ensino superior é relativamente novo. Internacionalmente surgiram as primeiras experiências, no encontro anual do *International Group for the Psycology of the Mathematical Education* (PME) com a criação do *Advanced Mathematical Thinking Group.* (ALMEIDA, IGLIORI, 2013).

No cenário nacional, o campo da Educação matemática é bem mais recente, com o primeiro encontro de pesquisadores realizado, em 2000, durante o I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). O grupo de trabalho nomeado de GT4, conta com a participação de vários professores do Ensino Superior de instituições públicas e privadas.

> Desde a criação do grupo de trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior (GT4), [...], o Ensino Superior tem se firmado como uma área sólida de pesquisa em Educação Matemática, que procura explorar as múltiplas facetas do pensamento matemático avançado. (FROTA, BIANCHINI e CARVALHO, 2013, p. 9).

Igliori e Almeida (2013) afirmam que as motivações para os estudos e investigações em Educação Matemática no ensino superior são relativas ao aumento substancial de alunos nas Instituições de Ensino Superior (IES), ao decréscimo de estudantes interessados em cursos de Matemática na graduação e, também, ao aumento do interesse de profissionais que atuam no Ensino Superior, pela Educação Matemática.

2.3. Cálculo diferencial e integral

Pode-se afirmar que o Cálculo explora a “variação e movimento” (ZUIN, 2001, pg.13). O Cálculo possibilita, com a representação matemática, mostrar a dinâmica dos fenômenos.

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina que tem sido objeto de muitos estudos e pesquisas devido à sua grande importância, já que abrange noções da matemática avançada como número real, função infinito, entre outros e também pelos altos índices de reprovações dos estudantes em cursos superiores da área de ciências exatas (IGLIORI, 2009).

Fiorentini (1993) mostra como as pesquisas e estudos sobre o Cálculo têm crescido nos últimos anos, pois até 1991, dentre as produções focadas em Educação Matemática no Brasil, apenas 19% das dissertações e teses tinham como objeto de estudo o ensino superior, e nesses 19%, apenas 10 textos eram direcionados à disciplina do Cálculo.

No entanto, já a partir de 1992 até 2001, observa-se, segundo Cury (2009), a ocorrência de um crescimento nas pesquisas relacionadas ao tema, em que cerca de 42% dos artigos publicados nos anais do Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia (COBENGE) são direcionados ao ensino e à aprendizagem de Cálculo. Para esse pesquisador, a preocupação em direcionar estudos para o ensino da disciplina de Cálculo também ocorreu em congressos específicos de matemática: no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), entre 2002 e 2005, 19% dos artigos tinham a disciplina como assunto principal e no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), entre 2001 e 2004,36% dos trabalhos sobre o Ensino Superior eram focados na referida disciplina.

Internacionalmente, alguns pesquisadores também desenvolveram pesquisas sobre o ensino de Cálculo como David Tall filiado a Warwick University, na Inglaterra, Anna Sierpinska filiada à Concordia University of Edmonton, no Canadá e James

Robert Leitzel, pertencente ao quadro de pesquisadores da Duke University, nos Estados Unidos.

Interessante destacar, de acordo com Oliveira e Raad (2012), que os vários estudos apontam as dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo e, ainda que divirjam quanto à natureza destas barreiras, se de ordem didática ou epistemológica, em algum momento, relacionam e justificam tais dificuldades à alta reprovação na disciplina.

Para auxiliar os alunos e tentar reduzir os problemas enfrentados, muitas instituições de ensino, segundo Rafael (2017), oferecem programas de monitoria, disciplinas preparatórias, cursos de férias, material didático específico e, até, de uma maneira contraditória, reduzem a carga horária e o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral.

Nessa linha de pensamento, Rezende (2003), afirma que:

> Outro instrumento “normal” bastante usual nas instituições de ensino superior para o enfrentamento dos resultados catastróficos no ensino de Cálculo é a realização de cursos “preparatórios” para um curso inicial de Cálculo. É o caso do exemplo, do curso de “Cálculo Zero”, “PréCálculo”, “Matemática Básica”, já tão familiares no nosso meio acadêmico. (REZENDE, 2003, p.13)

2.4. Conceitos matemáticos

A Didática da Matemática é uma das tendências de problematizações da Educação Matemática e, segundo Pais (2001), seu objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com o saber matemático, tanto no nível teórico como na prática educativa experimental.

Vaz (2010) afirma que o conceito é a representação de um objeto pelo pensamento, por meio de suas características gerais. Conceituar é buscar o entendimento de proposições, a partir de situações, sem o objetivo de formalização.

Vinner (1991) utilizou o termo conceito imagem para descrever a parte da memória recordada em um determinado contexto. O conceito imagem inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos da estrutura cognitiva associadas ao conceito. Esses conceitos são apropriados ao longo das experiências e podem mudar a cada novo estímulo. Da função, podemos idealizar conceitos, imagens, ou representações aritméticas, por uma tabela de valores, um gráfico ou uma expressão algébrica. Ainda de acordo com Vinner (1991), o conhecimento da definição não nos garante o total entendimento do conceito, para isso necessitamos de criar também um conceito imagem. Para o autor, o processo de formação do conceito vem de uma ação integrada entre o conceito definição e o conceito imagem.

Para esse autor, muitos professores de diferentes níveis de ensino acreditam que a formação do conceito imagem se dá pelo conceito definição e que seja controlado por este. Mas, para o autor, o processo de formação dos conceitos não é único nem linear. Os conceitos matemáticos começam a ser formados através de vários exemplos e contraexemplos para a formação do conceito imagem, deixando a formalização com a definição, utilizando a simbologia para depois do entendimento conceitual.

Sobre o processo de formação do conceito, Laudares (2013) relata que o primeiro momento de conceituar vem do ato de nomear, atividade essa que necessita da compreensão da linguagem em uma rede de associações na mente a partir de imagens semióticas das palavras. Mas, segundo o mesmo autor, um conceito não se forma apenas com a memorização e a associação de palavras, mas sim, pelo surgimento de um problema ou ponto de partida de uma proposição.

Conforme Pais (2001), assimilar o que significa um conceito é ir além da rasura de uma definição, pois a formalidade do texto de uma definição apresenta somente alguns traços exteriores ao conceito. A definição tem papel importante, mas conceituar é fundamental. Por isso, para o autor, o professor deve trabalhar o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, uma vez que, “por exemplo, a definição de uma figura geométrica por si só não pode traduzir a essência do conceito correspondente”. PAIS (2001, p. 56)

As diferentes representações semióticas de Duval (2009), também se alinham com a aprendizagem conceitual. Para o autor, as representações semióticas são constituídas do emprego de signos, linguagem natural, linguagem formal, escrita algébrica, gráficos cartesianos, tabelas, esquemas e figuras de um objeto matemático. Segundo Duval (2009), a aquisição conceitual de um objeto se dá quando o aluno é capaz de passar da representação de um registro para outro. Na educação matemática, a aquisição conceitual de um objeto se dá, necessariamente, pela aquisição de uma ou mais representações semióticas.

Ademais, de acordo com Davýdov (1982), o nascimento do pensamento teórico matemático acadêmico tem um princípio num tema do currículo da disciplina e deve se iniciar com uma introdução minudenciada, mostrando situações que originaram da necessidade dos respectivos conceitos teóricos.

Em consonância com esse pensamento, Sforni (2004) assegura que o conhecimento da história do conceito matemático é condição para a busca de sua essência na conscientização do seu papel como síntese no intercâmbio do homem com o meio.

Estimular uma didática da Matemática, favorecendo o trabalho com conceitos, pede a elaboração de um espaço de trabalho pela “atividade”, mobilizando os alunos para ação, substituindo a passividade da pedagogia tradicional da aula verticalizada do professor em direção ao aluno. (LAUDARES, 2013)

Outra questão, apontada por Barufi (1999), é a dicotomia entre a Matemática da educação básica e a Matemática do nível superior.

> Para a maioria dos alunos, o conhecimento matemático, desenvolvido anteriormente na escola secundária, pouco ou em nada se relaciona ao apresentado no curso de Cálculo, e o caráter de análise com o qual passa a se defrontar parece constituir uma grande dificuldade. Isto ocorre principalmente quando as questões do Cálculo são apresentadas num contexto formal, logicamente bem estruturado, no qual o conceito de número real é preponderante e o estudo das funções surge como um fim em si mesmo, baseado nas propriedades dos números reais (enquanto corpo ordenado, arquimediano e completo). (BARUFI, p. 5, 1999).

2.5. Considerações históricas sobre a evolução do conceito de função

Com o intuito de compreender o surgimento e evolução histórica do conceito de função, são apresentadas, nesta seção, algumas considerações sob o ponto de vista do historiador russo Youschkevitch (1981), que apontou três etapas importantes para o desenvolvimento do conceito de funções: a Antiguidade, a Idade Média e o período Moderno. Serão também referenciados outros estudiosos como Boyer (1974) e Eves (2004).

2.5.1. O conceito de função na Antiguidade

De acordo com Youschkevitch (1981), a antiguidade foi a primeira fase do surgimento de função. Concepções primitivas de funções podem ser detectadas na história de povos antigos, como por exemplo, a contagem, resultante de uma relação de um conjunto de objetos e uma sequência de números naturais e as quatro operações aritméticas elementares, que são funções de duas variáveis.

Em alguns registros da civilização babilônica, por volta de 2000 a.C, já se entendia, mesmo que primitivamente e, usando a intuição, preliminares do conceito de função, com a evolução de uma álgebra retórica, isto é verbal, sem ainda uma simbologia. São, de fato, conhecidas tábuas sexagesimais de quadrados, de cubos e de raízes quadradas usadas pelos babilônicos na antiguidade, formando uma ideia de correspondência funcional (EVES, 2004).

Os estudos e dados deixados pelos babilônios no que diz respeito à Astronomia também são bons instrumentos para a compreensão do conceito de funções. Segundo Azcaráte e Deulofeu (1996), astrologia e astronomia estavam ligadas, em que profecias se misturavam com observações sistemáticas de vários fenômenos que se repetiam estabelecendo relações aritméticas. Registros mostram algumas dessas relações, como os ciclos de visibilidade de um planeta e o ângulo que ele forma com o sol.

Muitos registros egípcios foram mantidos pelos papiros que descreviam problemas da rotina desse povo, como preço de alimentos e bebidas, comida para animais, quantidade de grãos, entre outros. Segundo Eves (2004), vários desses problemas podiam ser solucionados por uma equação do primeiro grau. O modo de resolução adotado pelos egípcios foi denominado Método da Falsa Posição. Esse método demonstra que os egípcios já dispunham da noção da relação funcional entre duas grandezas.

2.5.2. O conceito de função na Idade média

No século XIV, Nicole Oresme, matemático da escola de Paris, desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes das formas, com a finalidade de representar a intensidade de alguma característica de uma proposição de uma figura geométrica, permitindo uma melhor compreensão da natureza das translações das figuras, da variação das formas e das propriedades. Segundo Azcaráte e Deulofeu (1996), Oresme deu prosseguimento ao estudo dos fenômenos de variação, possibilitando um novo rumo para uma aproximação geométrica.

Boyer (1974) propõe a seguinte indagação de Oresme:

> Por que não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas? Vemos aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos de representação gráfica de funções. Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua; por isso ele traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal, ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade.

Azcaráte e Deulofeu (1996) afirmam que os estudiosos da Idade Média do mundo ocidental, no final do Império Romano até o século XV ou um pouco mais, priorizaram o estudo das variações, especialmente o movimento. As representações de Oresme marcam um passo à frente em direção ao conceito de função. Mas, ao final do período, os autores concluem que o avanço não foi maior devido às limitações de aparato matemático e, também, devido ao elevado grau de abstrações das teorias abordadas.

2.5.3. O conceito de função na Idade moderna

Galileu (1564-1642), importante matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano deu grande contribuição para a evolução do conceito de função, apresentando a possibilidade de uma análise quantitativa pelas representações gráficas. Seu principal campo de estudo foi o movimento, e consequentemente, a velocidade, a aceleração e a distância percorrida. Diferente de Oresme, para quem a teoria pura isenta de experiências era suficiente, Galileu enfatizava a obtenção de resultados vindos da experimentação. Azcaráte e Deulofeu (1996) afirmaram que ao estudar o movimento de maneira quantitativa, pelas experimentações facilitadas pelos objetos de medidas, Galileu permitiu que se definissem leis de grandeza ou função.

O filósofo, físico e matemático francês Decartes (1596 - 1650) contribuiu para a algebrização da Geometria. Segundo Azcaráte e Deulofeu (1996), pela primeira vez e de maneira clara, é defendida a ideia de que uma equação em x e y é uma forma de expressar uma dependência entre quantidades variáveis, podendo calcular, então, os valores de uma variável que correspondem a determinados valores de outras. Outras contribuições foram trazidas por Fermat, Newton, Leibniz, Bernoulli, Euller.

Foi na obra do filósofo e matemático alemão Leibniz (1646-1716), intitulada de *"Methodus tangentium inversa, seu de functionibus"* que foi apresentado, pela primeira vez, o termo “função”. Nesta obra, função toma um sentido de um termo geral para diferentes segmentos ligados a uma curva dada.

Com o matemático e físico Jean Bernoulli (1700-1782) surge explicitamente a primeira definição para o conceito de função como expressão feita com base em análise:

“Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira que seja desta grandeza variável e constante”. (YOUSCHKEVITCH, 1981, p.35)

No século XVIII, o matemático e físico Leonard Euler (1707-1783) foi de grande importância para o desenvolvimento do conceito de funções, pois, inicialmente, definiu as primeiras noções, diferenciando as constantes das variáveis e posteriormente distinguiu as funções contínuas das descontínuas. Em uma das definições para a função de Euller, ele segue Bernoulli, mas substitui a palavra quantidade por expressão analítica.

“Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja, desta quantidade ou números ou quantidades constantes. “ (YOUSCHKEVITCH, 1981, p.36)

Com as contribuições de Fermat, Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, Lagrange e outros foi possível retratar a ideia de função com generalidade suficiente para formular as definições inaugurais do conceito utilizando o termo “Função” até as últimas definições que incorporam a linguagem de conjuntos.

3. UMA ANÁLISE NOS DOCUMENTOS OFICIAIS E LIVROS DIDÁTICOS

3.1. Evolução no ensino de função segundo documentos oficiais brasileiros

O processo de escolarização do conteúdo de Funções, de acordo com Dassie, (2011) teve início com Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, professor de matemática do Colégio Pedro II que, desde sua criação, em 1829, era referência de ensino para os demais institutos de curso secundário existentes no país. Roxo participou de várias reformas para a modernização do ensino secundário de matemática no Brasil, quando o processo de escolarização de Funções teve início.

Apoiado nas ideias do influente matemático alemão Feliz Klein e no primeiro Movimento Internacional de Reforma Curricular da Matemática, no final do século XIX, Euclides Roxo apresentou, primeiramente, à congregação do colégio Pedro II, a unificação das matemáticas com a entrada do conceito de função nas primeiras séries do ensino secundário como elemento unificador da Matemática. Posteriormente, essa proposta foi apresentada ao Ministério da Educação da época, para integrar a educação de todo o país, através da Reforma Capanema. Para Euclides Roxo:

> A noção de função deve ser adotada como ideia axial no ensino de matemática, capaz de estabelecer o elo unificador dos vários assuntos tratados na escola secundária, capaz de estabelecer o elo unificador dos vários assuntos tratados na escola secundária, de modo a ser a alma do corpo em que se organiza a matéria. (ROXO, 1937, P.193 apud BRAGA 2003, p.81).

Roxo (1937) também defendia a relevância do conceito de função ser associado aos objetos da Educação Matemática Básica, bem como à preparação para o Ensino Superior, como ideia vital para o ensino.

Com a falta de apoio de lideranças religiosas e do exército, o então Ministro da Educação, Eduardo Capanema, teve que recuar em vários pontos da proposta, não concretizando, na totalidade, as mudanças propostas por Roxo. O influente Padre Arlindo Vieira, solicitou que a noção de variável e função fosse completamente excluída da 3 série, alegando que crianças de 13 e 14 anos não seriam capazes de aprender tal conteúdo. Eduardo Capanema acatou o pedido do Padre Arlindo Vieira e, em 11 de junho de 1942, decidiu que o conceito de função e variável não faria parte das séries iniciais do ensino secundário. (DASSIE, 2001)

Segundo estudo de Ogliari (2014), as obras didáticas da época, escritas por Roxo e outros autores, não continham o conceito de função nos três primeiros volumes, sendo apresentada uma introdução no quarto volume. De acordo com o autor, de certa forma, o conceito de função foi retirado de grande parte do estudo onde havia relação entre grandezas e variáveis e a exploração de tabelas, equações e gráficos se tornou mais uma ferramenta metodológica para resolução de problemas que envolviam essas relações do que para desenvolver e explorar o conceito de função em si.

No início da década de 60, com o Movimento da Matemática Moderna, surgiram programas para mudanças nos currículos de Matemática do país. No trabalho intitulado Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática, apresentado pela Grupo de Estudo do Ensino da Matemática (GEEM) em 1955, e, posteriormente, aprovado pelo Congresso, o conteúdo de funções continuava estabelecido na quarta série do curso ginasial, mas não mais como um “complemento”, como constava nos programas anteriores.

> A partir de 1975, os currículos de São Paulo, base para todo o país, já introduziram para o ensino fundamental que conceito de relação e função são considerados como pontos unificadores da matemática, havendo preocupação com o estudo da determinação de domínio, contradomínio, imagem e explora ao de gráficos desvinculados da análise de fenômenos (São Paulo, 1981, p12).

Em 1978, a Secretaria de Educação de São Paulo, elabora a Proposta Curricular de Matemática para o 2 º grau, apresentando, para os professores, subsídios para a implementação dessa proposta. A primeira parte desse documento é exclusivamente sobre as funções, com um estudo detalhado sobre elas, apresentando o conceito de funções de duas maneiras: a primeira, com caráter estatístico é sobre “o que a função é”, e a segunda, com caráter dinâmico é sobre o que “a função faz”, orientando o professor, quanto ao melhor procedimento seguir de acordo com o enfoque adotado. O documento também relaciona o estudo de funções com outros assuntos da Matemática e fora dela, alertando os professores sobre a importância da interdisciplinaridade. (DASSIE, 2001)

Em 1986, a Secretaria da Educação do Governo de São Paulo desenvolveu uma nova proposta para o Ensino de Matemática para o 1º e 2º grau, em que são exploradas duas vertentes: atividades práticas ligadas à realidade e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Seguindo esse pensamento, foram desenvolvidas as primeiras noções de funções, contendo um significado real para o aluno. Foram apresentadas 51 situações problemas para exploração do conteúdo de funções em geral, função afim e função quadrática para a aprendizagem sistemática do conceito, além disso a compreensão também podia ser facilitada por meios visuais. (DASSIE, 2001)

Outro ponto importante dessa proposta foi a mudança do papel do estudante, que deveria participar ativamente de sua aprendizagem e o professor deveria orientar e instigar ideias. A partir disso, o ensino de funções sofreu grande transformação, pois se discutia a importância de o assunto ter significado real na vida do aluno. Na proposta, também, foi sugerido que o professor utilizasse recursos visuais como os gráficos para facilitar a aprendizagem. A ordem de estudo sugerida era que primeiramente fosse estabelecida a relação de dependência das variáveis através de uma tabela, depois sua visualização gráfica e, a partir de então, estudava-se domínio, imagem e as leis de associação e, por último, sua definição formal.

Mantendo o espírito inovador da Proposta Curricular para o Ensino do 1º e 2º graus de São Paulo, surge, em 1999, o documento Parâmetros Curriculares Nacional (PCNs), desenvolvido pelo Ministério da Educação, com recomendações dirigidas aos professores, aos coordenadores ou dirigentes escolares do ensino médio e aos responsáveis pelas redes de educação básica e pela formação profissional permanente dos professores de todo o país. Esses parâmetros, não obrigatórios, se atualizaram ao longo dos anos e são referências para o ensino de todo o Brasil. Na disciplina de matemática, sobre as recomendações para o ensino de Funções no Ensino Médio, assim se manifesta:

> “O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática [..]. ” (BRASIL, 2006, p. 121)

Sobre a maneira de ensinar o conteúdo, os PCNs indicam que o aluno compreende melhor o conceito de função quando este está associado a exemplos da vida cotidiana, em que problemas de aplicação não necessariamente devem ser deixados para o final do estudo, mas devem ter motivo e contexto para o aluno aprender funções.

> É importante que o ensino de funções promova ao aluno a capacidade de interligar o assunto a sua vivência, uma vez que “[...] o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. ” (BRASIL, 2000, p. 44)

Os PCNs também sugerem que o ensino e as atividades envolvendo funções tenham, como objetivo, “que o estudante crie a capacidade de associar diferentes conceitos de funções a seus gráficos correspondentes, além de ler e interpretar diferentes linguagens e representações, envolvendo variações de grandezas” (BRASIL, 2002, P.121).

Outro importante documento é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com primeira versão relativa à matemática do Ensino Médio, divulgada em 2015 e segunda versão em 2016, homologada em 2018. Esse documento apresenta sua estrutura em 5 eixos da matemática: Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções.

No documento, o ensino do conceito de funções aparece, explicitamente, apenas no último ano do Ensino Fundamental, sendo que nos anos anteriores o conceito é estudado de forma implícita e introdutória com as regularidades, padrões e variações de grandezas. As habilidades apontadas a partir deste objeto de conhecimento sugerem que os alunos devem: “[...] compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis”. (BRASIL, 2017, p. 269)

No quadro abaixo seguem orientações do BNCC para o ensino do tópico matemático função no Ensino Médio. (NASSER et al., 2016)

Quadro 1 - Orientações da BNCC para o ensino de Função

1º ano ensino médio	2 º ano ensino médio	3 º ano ensino médio
- Compreender função como um tipo de relação de dependência entre duas variáveis, ideias de domínio e de imagem, associando-as a representações gráfica e/ou algébrica. - Reconhecer função afim em suas representações algébrica e gráfica, identificando variação (taxa, crescimento e decrescimento), pontos de intersecção de seu gráfico com os eixos coordenados e o sentido geométrico dos coeficientes da equação de uma reta. - Descrever função linear como um tipo especial de função afim e associá-la a relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas. . - Associar sequências numéricas de variação linear (PA) a funções afins de domínios discretos. - Reconhecer função quadrática em suas representações algébrica e gráfica, considerando domínio, imagem, ponto de máximo ou mínimo, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de intersecção com os eixos.	- Reconhecer função exponencial em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínio, imagem e crescimento e pontos de interseção com os eixos coordenados e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínio discreto. - Reconhecer funções definidas por mais de uma sentença (exemplos: função modular, tabela de imposto de renda etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento. - Reconhecer funções seno e cosseno em suas representações algébricas e gráficas e descrevê-las, considerando domínios de validade, imagem e características especiais como periodicidade, amplitude, máximos e mínimos. - Compreender e descrever transformações que ocorrem na forma gráfica, ao se alterarem os parâmetros da forma algébrica de funções (exemplo: o que ocorre com o gráfico da função $\mathbf{y = ax + b}$ ou $\mathbf{y = b + a.senx}$, (quando se altera o valor de “a” e/ou de b?), com o apoio de tecnologias digitais.	- Utilizar funções para representar situações reais, com ou sem o uso de tecnologias digitais. - Compreender e descrever transformações que ocorrem na forma gráfica, ao se alterarem os parâmetros da forma algébrica de funções (exemplo: o que ocorre com o gráfico da função $\mathbf{y = ax + b}$ ou $\mathbf{y = b + a.senx}$ quando se altera o valor de a e/ou de b?), com o apoio de tecnologia

Fonte: NASSER, Lilian et al, 2016 p. 3

Sobre as funções, vale destacar a preocupação para que aluno consiga transitar em diferentes registros de representações:

“O aluno deve compreender e descrever transformações que ocorrem na forma gráfica, ao se alterarem os parâmetros da forma algébrica de uma função. ” (BRASIL, 2015, p. 161).

3.2. O livro didático de Matemática

O livro didático de matemática constituiu uma fonte de dados para o desenvolvimento da pesquisa. Utilizado como base teórica para estudantes e importante ajuda no trabalho de professores, o livro didático é essencial nos processos de ensino e de aprendizagem e é definido por Richaudeaur (1979) da seguinte maneira: “O livro didático será definido como material impresso, estruturado, destinado ou adequado a ser utilizado num processo de aprendizagem ou formação. ” (RICHAUDEAUR, 1979, p. 5,)

Coppin (2004) destaca que os livros didáticos assumem quatro importantes funções, das quais destacamos a referencial e a instrumental.

Função referencial, em que o livro didático assume uma tradução fidedigna do programa de ensino, constituindo o pilar dos conteúdos educativos. Os conceitos, definições, procedimentos e deduções acompanhados de exercícios e problemas possuem um diferencial didático, o que caracteriza as diferentes obras.

Função instrumental, em que o livro didático é fonte de métodos de aprendizagem, pois o impresso disponibiliza vários exercícios e atividades que contribuem para o processo de memorização de conhecimento do estudante, além da aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades, de métodos de análise ou de resolução de problemas.

Além dessas funções, Carvalho e Lima (2010) destacam que os livros didáticos proporcionam aos alunos aprofundamento e aquisição de conhecimento, além de incentivar a aquisição de habilidades e competências para o alcance da autonomia do estudante. Para o professor, os autores afirmam que os impressos didáticos auxiliam com orientações e textos informativos, possibilitam um melhor planejamento e gestão de aulas, além de favorecer a ampliação de seus saberes didáticos.

É importante ressaltar que tanto para Choppin (2004) como para Carvalho e Lima (2010), o livro didático, hoje, integrado às Novas Tecnologias Informáticas e Computacionais, constitui um suporte didático imprescindível para professor.

A sala de aula é o cenário para que sejam estabelecidas inter-relações entre o professor, o aluno, o livro didático e os saberes disciplinares. Quanto à importância dos livros didáticos para a matemática, Valente (2008) destaca:

> A dependência de um curso de matemática aos livros didáticos, portanto, ocorreu desde as primeiras aulas que deram origem à matemática hoje ensinada na escola básica. Desde os seus primórdios, ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. (VALENTE, 2008, p. 141)

Para Vaz (2010) o livro didático interfere diretamente na didática do professor, que, ao adotar esse material, estabelece uma sintonia com a metodologia do autor.

Zuffi e Pacca (2002) destacam a importância dos livros didáticos e do professor para a formação e aprendizagem do estudante sobre o conceito de Função, pois, segundo as autoras, a análise das concepções de um sujeito sobre o conceito de função só poderá ocorrer depois que ele apresentar um contato com a ideia matematicamente construída, por um livro ou por um professor, uma vez que a noção de variação, que pode ser criada espontaneamente, não é suficiente para a caracterização completa do conceito de funcionalidade.

Nessa pesquisa, foi desenvolvido um estudo da abordagem do conceito de função em 2(dois) livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio. Buscou-se a compreensão e a comparação das metodologias propostas pelos autores, priorizando a identificação do tratamento conceitual da Função polinomial do 1º grau, Função polinomial do 2 º grau, Função Logarítmica, Função Exponencial e Função Trigonométrica.

Pretende-se obter, com esse estudo, respostas para as seguintes perguntas:

1. O autor utiliza uma abordagem conceitual anteriormente à definição de função?
2. Como os autores introduzem, nos textos teóricos deste livro didático, o desenvolvimento conceitual de função?
3. Existem exercícios e tarefas conceituais a respeito de funções neste livro?
4. Quais os tipos de exercícios e tarefas são propostos neste livro didático que privilegiam o conceito de função?

Foram analisadas as seguintes obras:

Quadro 2 - Obras analisadas que abordam o conceito de Função

	Livro	Autor	Editora	Edição	Ano
1	Matemática, Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática	1 ª	2008
2	Matemática, Ciências e Aplicações	Gerson Iezzi Osvaldo Dolce David Degenszajn Roberto Périgo Nilze de Almeida	Saraiva	2 ª	2014

3.2.1. Livro Matemática, Contexto e Aplicações – Luiz Roberto Dante

O autor, Luiz Roberto Dante, docente em Educação Matemática pela Universidade do Estado de São Paulo (UNESP) - Campus Rio Claro, apresenta, na abertura de cada unidade do livro Matemática Contexto e Aplicações, duas páginas que proporcionam o primeiro encontro com os temas e os conceitos que serão abordados.

O capítulo 3 é dedicado à introdução do ensino de Funções e tem 23 páginas, incluindo exercícios distribuídos ao final de cada um dos 12 tópicos. O autor inicia o capítulo com alguns fragmentos históricos sobre a origem das funções, informando que o conceito foi desenvolvido ao longo de muitos anos por vários matemáticos, destacando as definições de Leibniz e Dirichlet.

A seguir, Dante começa o estudo sobre as funções de maneira intuitiva, dando ênfase ao conceito de relação ou associação entre grandezas variáveis e na dependência entre duas grandezas. São apresentados quatro exemplos contextualizados, como a relação entre a quantidade e o preço a pagar na compra de gasolina e a velocidade de um carro em uma rodovia, relacionando tempo e distância.

No primeiro exemplo, o autor relaciona o número de litros de gasolina e preço a pagar, mas ainda não aborda a ideia de que são grandezas e nem a interdependência entre elas. No segundo exemplo, o autor relaciona o perímetro aos lados de um quadrado, evidenciando a relação de dependência entre as grandezas, formalizando, então, que o perímetro é a variável dependente e, ao lado do quadrado, a variável independente. No terceiro e quarto exemplo, é explicitado que uma grandeza está em função da outra, além de mostrar a lei da função em linguagem algébrica.

A partir de então, os próximos tópicos do capítulo formalizam a ideia intuitiva inicial, apresentando a função por meio dos conjuntos, sua definição e introdução das fórmulas matemáticas.

Na parte de construção gráfica, Dante inicia com gráficos já prontos, em que ele mesmo analisa esses dados, sugerindo que o estudante analise outro. Em seguida, ensina a construir os gráficos, fazendo uma tabela de valores com os pares ordenados, fazendo o esboço no gráfico. Vale destacar as caixas de textos intituladas “Para Refletir”, onde o autor insere uma função exponencial e sua representação gráfica e sugere que o aluno reflita sobre porque sua representação gráfica não possui pontos no eixo x e nem pontos onde valores de ordenada negativos, conceitos essenciais da função exponencial.

O conceito de crescimento e decrescimento da função surge antes da definição, através de análise gráfica, com um gráfico de crescimento populacional e outro, de um tanque de água sendo esvaziado, o que indica uma representação de uma curva decrescente. Após essa introdução, é estabelecido que uma função será crescente, pois quanto maior o valor variável independente ($\boldsymbol{x}$), maior será o valor correspondente para a variável dependente $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Foi apresentado o gráfico de uma função afim e, em seguida, um gráfico de uma função quadrática, analisando seu crescimento e decrescimento a partir de valores negativos e positivos de x.

A explicação sobre função inversa, injetora, bijetora e sobrejetora e composta já é iniciada pela definição.

Ao longo do capítulo, alguns exercícios propostos têm a finalidade de descobrir padrões e regularidades algébricas em tabelas de números. No fim do capítulo, são apresentados alguns exercícios comuns em testes de vestibular.

O autor priorizou, nesse capítulo, apresentar o conceito de funções como a variação de uma grandeza associada à variação de outra grandeza.

3.2.1.1. Função afim e linear

No capítulo 4, sobre função afim, o autor enfatiza, inicialmente, o conceito de proporcionalidade, contando brevemente um pouco da história de como esse conceito começou a ser estudado e apresentando algumas situações em que ele está inserido em nosso cotidiano. Como exemplo, ele apresenta um caso particular de função afim: a função linear e sua relação com a proporcionalidade, conceito importante sobre esta função. Esse conceito de proporcionalidade é explorado, também, através de exemplos como nas compras de supermercados e em receitas culinárias.

São apresentados mais exemplos de funções afins envolvendo matemática financeira e o enchimento de um reservatório de água em função da vazão de uma torneira. O conceito de proporcionalidade poderia ter sido melhor explorado se o autor abordasse sobre as funções lineares, logo após os exemplos, dando continuidade ao raciocínio, mas o tema aparece novamente apenas no fim do capítulo.

Após essa motivação inicial, já é introduzida a definição de função afim e os exercícios a seguir privilegiam mais a definição, explorando pouco o conceito. Como houve no capítulo anterior uma introdução sobre conteúdo de funções, o autor evita explicações de conceitos básicos, como domínio, contradomínio, conjunto imagem, entre outros. A função constante também foi explicada através de sua definição.

Destaque para as caixas de texto onde o autor sugere que os alunos reflitam sobre determinados assuntos, como **a reta vertical não é gráfico de uma função. Por quê? Ou por que a função $\boldsymbol{f(x) = b}$ recebe o nome de função constante?**

Adiante, questões de proporcionalidade da função linear são exploradas, como a velocidade de um carro e a distância que ele percorre, proporcional ao tempo. Nos exercícios resolvidos, há interessantes aplicações de proporcionalidade em geometria e matemática financeira, seguidos de exercícios resolvidos que mostram situações onde ocorrem e onde não ocorrem a proporcionalidade. Há também explicação através de gráficos, mostrando diferentes representações para explicar proporcionalidade.

Ao longo do capítulo, há muitos exercícios com diferentes formas de se explorar o conceito da função afim. Apesar do capítulo mostrar diferentes registros semióticos, como representação verbal, gráfica e algébrica, percebe-se que o número de tratamentos é bem maior que o número de conversões desses registros, podendo implicar em uma aprendizagem insuficiente dos conceitos, já que os alunos não são instigados a coordenar diferentes registros de representação de um mesmo objeto.

Poderia, também, ter mais questões com aplicações da função afim, já que alguns exemplos, como os exercícios de 9 a 13, referem-se a essas aplicações, mas exploram, repetidamente, somente a lei de formação. Muitos exercícios repetitivos.

Há uma sugestão de aplicação computacional, que se destina à construção de gráficos da função quadrática. Vale destacar que o Geogebra, *software* utilizado para o traçado de gráficos, no livro, é uma ferramenta facilitadora para o estudo de função.

3.2.1.2. Função quadrática

Dante introduz o capítulo com um pouco da história da criação do conceito de função quadrática por Galileu Galilei, afirma que a função quadrática é uma parábola e dá exemplos práticos de sua utilização como as parábolas das montanhas russas, na arquitetura, na trajetória de projéteis e nos jatos de água de uma fonte.

Ainda na introdução, o autor aborda o conceito de função quadrática em um exemplo de uma área de um centro esportivo e, após explicitar sua definição, dá mais exemplos de situações em que aparece a função quadrática como na geometria, em fenômenos físicos e no esporte.

Dante explora o conceito de parábola através dos gráficos na sessão 7, construindo um gráfico de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$, definindo questões como a concavidade, vértice, máximo e mínimo absoluto e simetria.

Quanto aos exercícios propostos, observou-se que esses abordam questões relacionadas ao dia a dia, mas não dão foco aos conceitos e sim, aos exercícios, com ênfase na repetição e memorização. O autor privilegiou os problemas fechados, com pouco contexto, exigindo apenas cálculo algébrico, em detrimento de problemas abertos contextualizados, em que o conceito de função quadrática seja evidenciado ou atrelado a ele. São poucas as atividades que englobam os conceitos de ponto mínimo e máximo da parábola, os vértices, a concavidade e os pontos de intersecção da parábola com os eixos.

Foi observado, também, que o número de tratamentos é bem maior que o número de conversões, segundo diferenciação de Duval (2009), podendo implicar em uma aquisição dos conceitos incompleta, já que os alunos não são instigados a coordenar diferentes registros de representação de um mesmo objeto.

O autor expôs os conceitos de função quadrática, interligando os seus registros de representações, passando pela língua materna, pela linguagem algébrica e pela linguagem gráfica.

3.2.1.3. Função exponencial

O capítulo inicia contando sobre o conceito de potência estar presente desde a Antiguidade, como no problema 79 do Papiro de Rhind, ao citar potências de base 7. O autor afirma que as sequências de potências de mesma base formam um modelo matemático chamado função exponencial.

Após a motivação inicial, Dante (2008) dá exemplo do clássico problema biológico do crescimento populacional de uma cultura de bactérias e, depois de algumas análises, introduz a representação formal dessa função exponencial.

Houve uma válida revisão sobre potenciação e radiciação, destacando que, apesar do formalismo algébrico, o autor leva o aluno à uma reflexão através das caixas de texto para refletir sobre a pergunta **"Por que o número 0 não tem inverso? "** E pede para completar a sequência de potências logicamente.

Os exercícios desses itens, de forma geral, são sem contexto, mecânicos e repetitivos. Ao abordar, enfim, a função exponencial, o autor já inicia com sua definição e com exercícios propostos de memorização.

A parte gráfica também inicia com o exemplo da função $\mathbf{f(x) = a^x}$ com duas tabelas e os gráficos das funções $\mathbf{f(x) = 2^x}$ (a>1, crescente) e $\mathbf{f(x) = ½^x}$ (0< a <1, decrescente). A partir da análise desses gráficos, Dante (2008) expõe os conceitos da função exponencial como:

> - A curva exponencial passa pelo ponto (0,1)
> - Para a>1 a função é crescente, para ,0 < a<1 a função é decrescente
> - A função exponencial é ilimitada superiormente
> - Para a = 0 e x negativo, não existiria $\mathbf{a^x}$ (não teríamos uma função definida em R) (DANTE, 2008, p.227)

Há, então, um exercício resolvido com dois gráficos, com análise sobre seu crescimento, decrescimento e algumas opções de sentenças, para que o aluno identificasse de que função se tratava.

Os exercícios propostos ou são de análise de gráfico, pedindo para achar a lei de formação ou para fazer cálculos meramente mecânicos. O conceito de função exponencial não foi bem explorado.

No fim do capitulo, foi apresentado o expoente negativo com um gráfico e tratamento formal da definição. No último item está a função exponencial $\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{e^x}$ com apenas sua definição, orientações para que o aluno encontre o número de Euler na calculadora e explanações sobre como a exponencial aparece em vários fenômenos. Os exercícios resolvidos sobre aplicações da função exponencial são só problemas fechados, não priorizando a capacidade interpretativa dos alunos, tratando de uma simples repetição de regras, o que não auxilia a que o aluno entenda o conceito e fique incentivado em estudar funções exponenciais.

Fez falta no capítulo explorar mais o conceito do crescimento ou decrescimento acelerado da função exponencial.

3.2.1.4. Função logarítmica

O autor novamente inicia o conteúdo com um pouco da história dos logaritmos e associa sua utilização a eventos físicos, como o terremoto e a escala Richter. Consta uma discussão, considerando aspectos históricos do surgimento dos logaritmos e indicando situações problemas em que estes são aplicados. Dante prioriza o conceito de que os logaritmos servem para facilitar os cálculos em uma exponencial, com um problema que chega a uma equação exponencial com as bases distintas, cuja solução só é possível mediante aplicação dos conceitos e propriedades dos logaritmos.

Após essa introdução, o conteúdo é definido e exibido numa concepção lógico-dedutiva, sendo apresentado, em termos algébricos formais. Percebe-se que existe um rigor, desde as definições que são abordadas numa linguagem matemática até o entendimento das propriedades, incluindo exemplos resolvidos para os alunos. Depois de apresentar essas propriedades, Dante aponta alguns problemas com foco na Biologia e Química.

O conceito da função logarítmica como função inversa da exponencial aparece logo no início da definição de função logarítmica, através de um diagrama de imagem e domínio. Os gráficos das duas funções simétricos à bissetriz $\mathbf{y = x}$ são apresentados e uma caixa de texto identificada para refletir, pede para que o aluno escreva as coordenadas de alguns pontos simétricos em cada um dos dois gráficos, o que foi uma maneira interessante de fazer com que o aluno observe como se dá essa simetria. Em uma outra caixa de texto, com título de Fique Atento, Dante destaca o conceito de crescimento mais acelerado da função exponencial em relação à função logarítmica quando o “a” é maior que 1.

A função é apresentada mediante a construção de gráficos, mas o autor não faz nenhuma relação dos gráficos com algum problema ou exercício.

Nos capítulos de função exponencial e função logarítmica percebe-se uma exposição da abordagem conceitual e gráfica sem uma maior preocupação em instituir as possíveis conexões entre o conceito e a parte gráfica das funções.

3.2.2. Livro de matemática Ciências e Aplicações

3.2.2.1. Função afim

Para introdução do conceito de função afim, os autores utilizam problemas relacionados ao cotidiano, privilegiando a relação entre variável dependente e independente e já mostram a lei de formação. Não foi esclarecido quando a função afim é o modelo matemático a ser utilizado.

Após os problemas, a definição formal de função afim é apresentada e, em seguida, vem uma breve apresentação da função linear com sua definição.

Há primeiramente uma introdução verbal, em que é mencionado que a representação gráfica de uma função polinomial do 1º grau é uma reta não paralela a nenhum dos eixos coordenados, sendo justificada esta afirmação com semelhança de triângulos.

O coeficiente “a” é relacionado à taxa de variação e ao estudo do sinal da função. O coeficiente “b” ganha significado geométrico, sendo definido como o ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas.

A partir daí, são feitos dois gráficos com os pontos dos interceptos e sem maiores análises. Os conceitos de crescimento e decrescimento poderiam seguir em continuidade, mas são apresentados mais para o final do capítulo. A construção de gráficos não foi bem explorada neste capítulo, não sendo apresentados exemplos contextualizados.

A função constante é apresentada como uma função através de sua definição, gráfico e variação média igual a zero.

Os exercícios propostos exigem resolução mecânica e repetitiva, sempre com o intuito de achar a lei de formação, sem maiores investigações. Os exercícios para construção de gráficos não são contextualizados, nem geram reflexões conceituais.

A função linear tem destaque no capitulo, onde conceitos como proporção e grandezas diretamente proporcionais ganham destaque através de alguns problemas contextualizados, representação gráfica e taxa média para descobrir o coeficiente de proporcionalidade. O conceito de grandezas inversamente proporcionais foi apresentado como complemento em um apêndice, perdendo um pouco a sua importância. Os exercícios e os exemplos foram bem elaborados, facilitando o reconhecimento de situações em que se aplica a proporcionalidade direta e, consequentemente, o conceito de Função Linear.

A propriedade crescimento e decrescimento da função afim é introduzida pela definição, seguida da explicação sobre o coeficiente angular e inclinação da reta. Em seguida, são apresentados alguns exemplos de gráficos, relacionando o coeficiente angular à inclinação da reta tangente.

3.2.2.2. Função quadrática

O capítulo é iniciado com duas situações contextualizadas que envolvem função quadrática. A primeira associa essa função com o cálculo de quantas partidas de futebol um clube realiza em um campeonato e o outro apresenta o cálculo da área de um campo de futebol.

A partir de então, a definição de função quadrática é apresentada e alguns exemplos ilustram quem são os coeficientes dessas funções.

Na sequência são apresentados três gráficos. O primeiro, de uma função quadrática côncava para cima com duas raízes, o segundo, de uma função quadrática côncava para baixo com duas raízes e o terceiro, de uma função côncava para cima que não intercepta o eixo das abscissas.

O nome parábola é apresentado juntamente com o estudo de seu foco, simetria e vértice. Em uma “caixinha” destacada no final da página, há a ligação entre o coeficiente “a” e a concavidade da parábola.

Quatro exercícios são propostos para a construção de gráficos, mas são resolvidos de forma mecânica, sem nenhum estudo adicional.

De forma escrita, é apresentada a definição do que são raízes ou zero da função e a forma resolutiva para a equação do segundo grau. As raízes são apresentadas com três gráficos. Todos côncavos para cima, o primeiro, com duas raízes, o segundo, com apenas uma raiz e o terceiro com nenhuma. Em uma caixa destacada no final da página, as quantidades de raízes são associadas aos valores de discriminante.

Alguns exercícios são apresentados, contando também com problemas contextualizados, explorando apenas o cálculo das funções quadráticas e não o conceito. Como aplicações, os autores sugerem uma situação contextualizada de vendas de acarajé, utilizando uma função quadrática para representar a receita das vendas.

É ensinado construir gráficos, utilizando a fórmula resolutiva da função quadrática e alguns exercícios para a construção desses gráficos.

No fim do capítulo são apresentados exercícios complementares com diferentes registros, mas não há uma compreensão do conceito. Quanto aos exercícios propostos observou-se que os autores abordam questões relacionadas ao dia a dia e contemplam vários tipos de exercícios com ênfase naqueles de repetição e memorização.

3.2.2.3. Função exponencial

Neste capítulo há uma introdução de potenciação e de radiciação. O conteúdo de função exponencial começa com a sua definição e com ela alguns conceitos são expostos de maneira breve.

Assim, como o livro anterior, também é feita a representação gráfica das funções $\mathbf{y = 2^x}$ e $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$ partindo da construção de tabelas. Não há nenhuma análise desses gráficos. A ideia de translação é desenvolvida com um exemplo gráfico com uma análise, mas não é proposto nenhum exercício sobre o tema.

O uso de calculadora é incentivado, quando o número de Euler é apresentado. Também é demonstrado um gráfico de $\mathbf{y = e^x}$ sem nenhuma análise do referido gráfico.

As propriedades de crescimento e de decrescimento são apresentadas de forma gráfica e com linguagem algébrica formal. Os exercícios apresentados são apenas repetições do conteúdo que foi explicado no livro, sem que o aluno tenha que refletir para buscar diferentes formas de pensar o conceito.

Alguns problemas contextualizados são apresentados, como o crescimento de bactérias, juros e crescimento populacional, mas esses problemas pedem apenas cálculo algébrico, onde o conceito de função exponencial não foi evidenciado ou atrelado a eles.

3.2.2.4. Função logarítmica

Este conteúdo está no livro da segunda série. Os autores do livro introduzem o assunto depois de uma revisão sobre função exponencial, utilizando uma situação problema da desvalorização do valor, em relação ao tempo de um caminhão e apresenta uma construção da resolução, com objetivo de entender como funcionam os logaritmos. Os autores descrevem uma função exponencial através dessa situação-problema e, consequentemente, o logaritmo em termos formais. Após essa explicação, alguns exemplos são apresentados explorando essa definição, através de representação algébrica com a identificação de padrões numéricos ou resolução de alguns tipos de problemas.

Ao apresentar as propriedades, apenas um problema interdisciplinar em Química é resolvido. A conceituação dos logaritmos foi pouco explorada, a função logarítmica é apresentada como uma relação de pares ordenados e gráficos sem nenhuma relação com problemas. As equações e as inequações logarítmicas são resolvidas, não envolvendo nenhuma situação problema. A conceituação por aritmética com progressões aritméticas e geométricas também foi pouco explorada, apenas com uma nota histórica, mostrando uma progressão aritmética e outra geométrica, afirmando que a comparação entre as duas gera o conceito de logaritmo.

Os exercícios apresentados são semelhantes aos resolvidos, com situações que não exige dos alunos uma interpretação da que foi apresentada no livro.

Neste capítulo de função exponencial, há uma breve explicitação de como utilizar calculadoras cientificas para determinar, por exemplo, raízes e potências.

4. METODOLOGIA DA PESQUISA E APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES

4.1. A metodologia qualitativa – Conceituação

As pesquisas que se embasam na metodologia qualitativa partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem um sentido próprio, um significado que impede de se ver de imediato (Alves-Mazotti e Gewandsznajder, 2000), necessitando ser descoberto sob um olhar metódico e organizado do investigador, buscando sempre um caminho que leve à interpretação mais fidedigna possível.

No presente trabalho, a primeira etapa foi compreendida de pesquisa bibliográfica, mais precisamente consulta a livros, teses, dissertações, artigos, revistas e sites sobre a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, com o intuito de analisar como as questões com foco no conceito de funções são tratadas. Na segunda etapa, foram desenvolvidas e coletadas algumas questões de matemática básica com foco na conceituação de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica que são pré-requisitos em Cálculo. Na terceira etapa houve o desenvolvimento de um Caderno Diagnóstico que foi aplicado aos estudantes ingressantes em cursos de Engenharia.

4.2. A resolução de problemas como estratégia para o ensino de funções.

A base teórica-metodológica da presente pesquisa assenta-se na metodologia ativa denominada Resolução de Problemas.

Estratégias de ensino referem-se às ações e aos procedimentos escolhidos, assumidos e controlados pelo indivíduo (de aprendizagem, para o aluno; de ensino, para o professor) para resolver uma determinada situação-problema ou um certo desafio. Envolvem tomada de decisões com base no raciocínio, na afetividade e nas interações sociais, para atingir metas (a longo, médio ou curto prazo) e objetivos específicos. Pesquisas têm sugerido que é possível ajudar os alunos a exercer mais controle e refletir sobre seu próprio processo de aprendizagem, através do ensino de estratégias de aprendizagem; enfim elas têm alta probabilidade de melhorar o desempenho dos alunos em qualquer nível e em qualquer disciplina. Isso dito, resolução de problemas é uma estratégia de ensino que objetiva provocar raciocínio através de situações do cotidiano. Consiste no enfrentamento de uma situação nova, exigindo pensamento reflexivo, crítico e criativo a partir dos dados expressos na descrição do problema, uma vez que pode colocar à prova o que se sabe, instigando a buscar ainda mais, o que se pode chamar de pesquisa, como nos ensina Freire:

> [...] não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses que fazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino, continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo, educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade. (FREIRE, 1997, p.29).

Segundo Berbel (1998, p. 142), "a metodologia de resolução de problemas pode ser utilizada sempre que seja oportuno, em situações em que os temas estejam relacionados com a vida em sociedade". O húngaro e professor de Matemática Pólya (1887 – 1985) foi um dos primeiros a publicar uma obra sobre Resolução de Problemas.

> A Matemática não é um esporte para espectadores; não se pode desfrutar dela nem a aprender sem a participação ativa; por isso o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, professores de matemática, especialmente se considerarmos como nosso principal objetivo, o primeiro de nossos objetivos, o de ensinar o estudante a pensar (PÓLYA, 1995, p. 10.)

No ano 2000, Dante (2000) define um problema como sendo "qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-lo" (DANTE, 2000, p. 9) e problema matemático como sendo "qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-lo" (DANTE,2000, p. 10) Não é um novo conceito a ensinar, nem mesmo é parte de um conteúdo, mas é um essencial meio de se fazer matemática. O professor, por sua vez, faz uso da Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação ao propor situações-problema que levem o aluno a se tornar ativo na construção de sua própria aprendizagem e ao proporcionar que o discente assuma um papel de pesquisador nas investigações propostas pelo problema.

Nesse sentido, a proposta de Charnay (1996) é muito pertinente ao afirmar que:

> Só há problema se o aluno percebe uma dificuldade; uma determinada situação que 'provoca problema' para um determinado aluno pode ser resolvida imediatamente por outro (e então não será percebida por este último como sendo um problema). Há então, uma ideia de obstáculo a ser superado (CHARNAY, 1996, p. 46).

O grupo de pesquisa em “Resolução de Problemas e Educação Matemática”, da Universidade Estadual da Paraíba, e o “Grupo de trabalho e estudo em Resolução de Problemas em Educação Matemática”, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho”, coordenado pela Professora Lourdes de la Rosa Onuchic – Doutora em Matemática pela USP- são exemplos de que as discussões sobre o tema são atuais, pertinentes e geram muitos resultados e investigações nas salas de aula.

4.3. APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES

Apresenta-se nesta etapa da pesquisa qualitativa, atividades elaboradas pela pesquisadora, que direcionam os estudantes a resolverem problemas com abordagem conceitual sobre funções.

As atividades apresentadas contemplam os conceitos das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Buscou-se, nessa investigação, apresentar aos alunos problemas que priorizam situações reais, com o intuito de facilitar a rememoração dos conhecimentos prévios sobre esses conceitos, respeitando a orientação teórica-metodológica presente na concepção de resolução de problemas.

Para além da resolução de problemas, essa pesquisa ampara-se em Laudares (2013), que orienta procedimentos relacionados ao pensamento reflexivo, tais como a descrição, a interpretação, a análise e o ato de sintetizar que são, segundo o pesquisador, habilidades que caracterizam a compreensão conceitual. Essa pesquisa buscou oferecer aos alunos atividades que os levam a demonstrar tais habilidades.

Duval (2003) aponta que, na Educação Matemática, a aquisição conceitual de um objeto é necessariamente baseada na capacidade de transitar e converter diferentes registros, sendo assim, priorizou-se atividades que levassem os sujeitos da pesquisa a trabalhar com diferentes representações de objetos matemáticos como leitura, interpretação de texto, expressões e interpretações linguísticas, gráficas, de esquemas e de tabelas.

Em consonância com esse pensamento, Laudares (2013) assegura que a definição formulada apenas algebricamente pode não favorecer o fluir do conceito. Então, buscou-se imprimir nas atividades diferentes tipos de representações, como gráficos e tabelas para que os elementos constituintes do conceito sejam melhor explicitados.

As atividades propostas são exploratórias, em direção à busca do resgate prévio dos conceitos matemáticos, para o alcance, também, da interdisciplinaridade, embasada em Laudares (2013), ao afirmar que o conceito é melhor explorado com diversidade analítica em situações não apenas matemáticas, mas também das ciências físicas, biológicas e da realidade vivida. As atividades também buscaram resgatar o conhecimento prévio dos participantes por uma abordagem da intramatemática, em situações que exploram a própria matemática, como aritmética, álgebra ou representações gráfica e verbal.

Para a elaboração das atividades aqui apresentadas, a pesquisadora pautou-se no Levantamento Bibliográfico realizado em livros didáticos, produzindo questões autorais e uma, apenas, adaptada. Contemplam questões abertas, com sequência de várias perguntas que, uma vez respondidas, ajudam na elaboração da análise dos resultados.

A seguir, fazemos uma descrição das atividades desenvolvidas.

4.3.1. PRIMEIRA ATIVIDADE: Funções, fenômenos e conceito

Quadro 3 - Primeira Atividade

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Função afim • Função quadrática • Função exponencial • Função logarítmica
Descrição da Atividade	A primeira atividade aplicada foi adaptada da dissertação de mestrado: " A Prática Educativa na Introdução do Cálculo com Várias Abordagens em Cursos de Engenharia" de Nancy Tiemi Isewaki (PUC Minas - 2018). Priorizou-se iniciar com essa questão, pois pressupõe-se que ela tenha um menor grau de dificuldade, sendo assim, os alunos ganhariam confiança e ânimo para as demais. A atividade consiste em uma tabela com três colunas, a primeira numerada contendo quatro nomes de fenômenos representados por sua função correspondente: afim, quadrática, logarítmica e exponencial. Na segunda coluna, o nome das funções e, na terceira coluna, os conceitos dessas funções, em linguagem verbal.
Objetivo	O objetivo dessa atividade foi, primeiramente, que aluno, o usando a interdisciplinaridade identificasse a função relacionada ao seu fenômeno. As funções foram apresentadas com variáveis diferentes das usuais x e y. Era objetivo da atividade, também, que o participante associasse cada função com a devida representação descritiva de seu conceito, em consonância com o pensamento de Laudares (2013), afirmando que o primeiro momento do ato de conceituar vem de nomear, compreendendo a linguagem a partir de associações das imagens semióticas das palavras. Era objetivo dessa atividade também investigar se estudante formou um conceito imagem como sugere Vinner (2001) e, através da visualização da fórmula e descrição do conceito evoquem em sua memória a correta associação com o tipo de função.

Primeira Atividade		
Vários modelos de funções podem ser encontrados nas ciências naturais, nas ciências sociais, nas engenharias e em diversas áreas. A tabela abaixo apresenta na coluna da esquerda algumas dessas funções associadas a seus fenómenos. A coluna do meio apresenta o nome das funções e a coluna da direita os conceitos que caracterizam essas funções. Identifique as funções da coluna 1 e numere as outras duas colunas de forma que se estabeleça corretamente a correspondência entre o nome da Função e o seu conceito.		
1 – Cinemática $S = S_0 + v_0t \cdot \frac{at2}{2}$	( ) Função logarítmica	( ) Representa situações em que ocorrem grandes variacões (crescimento ou decrescimento) de forma rápida. É uma funçåo contínua cujo gráfico é representado por uma curva totalmente acima das abscisas.
2 – Matemática Financeira $M = C.(1 + r)^t$	( ) Função Linear	( ) Apresenta urna variação à uma taxa constante, ou seja, trata da representacão de grandezas proporcionais. O gráfico da função é uma reta, o sinal do coeficiente angular indica a inclinação da reta.
3 - Abalos sísmicos $M = \log A - \log A_0$	( ) Função Exponencial	( ) Caracteriza-se como uma função inversa da função exponencial. O gráfico dessa funcão é uma curva assintota ao eixo y, isto é, sua curva nunca “toca" o exo y.
4 - Economia $P(x) = mx+P_0$	( ) Função Quadrática	( ) Função polinomial de grau 2, possui o gráfico definido por uma parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo.

4.3.2. SEGUNDA ATIVIDADE: Viaduto Santa Tereza e função quadrática

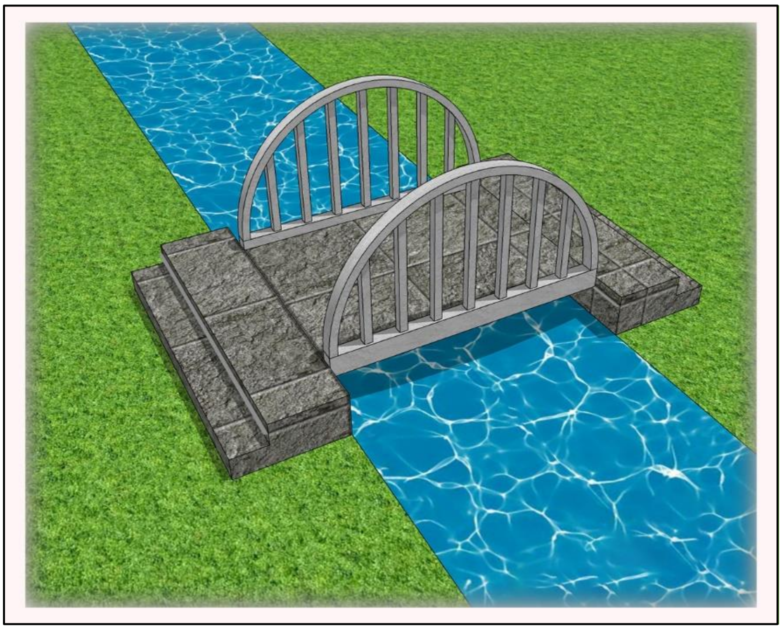
Quadro 4 - Segunda atividade

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos Explorados	• Conceitos da função quadrática
Descrição Da Atividade	A segunda atividade sobre função quadrática foi contextualizada pela representação do arco principal do viaduto de Santa Tereza em Belo Horizonte. O desenho de um projeto de maquete do arco parabólico foi apresentado com algumas de suas medidas.
Objetivos	Nessa atividade, objetivou-se que o aluno demonstrasse conhecimento dos conceitos de máximo e mínimo locais, crescimento e decrescimento e simetria da função quadrática, identificasse através do desenho se tratar de uma função quadrática e posicionasse corretamente os eixos coordenados, encontrando, assim, a equação da parábola. Foi objetivo dessa atividade também, que o estudante conseguisse comparar o arco parabólico do viaduto com a função quadrática, já que Laudares (2013) relata que analogias e comparações são importantes meios para a compreensão conceitual.

Segunda Atividade

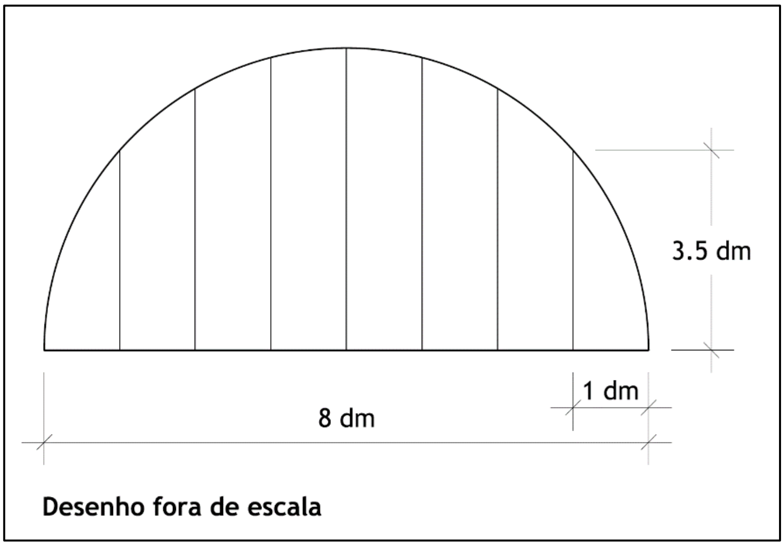
Um professor de engenharia aplicou um trabalho onde os alunos tinham que desenvolver uma maquete inspirada no viaduto de Santa Tereza. A maquete foi construída em arco com 8dm de comprimento e tirantes espaçados a cada 1dm, conforme desenho.

Figura 1 - Maquete do Viaduto de Santa Tereza



Fonte: Elaborado pela Autor

Figura 2 - Desenho técnico do Arco



Fonte: Elaborado pela Autora

Observando a figura do arco responda às perguntas abaixo:
a) O arco do viaduto representa o gráfico de uma função matemática conhecida? Qual?
b) Esse arco representa uma função totalmente crescente?
c) Esse arco representa uma função somente decrescente?
d) Considere o eixo x como a linha de base do viaduto. Para que o gráfico fique simétrico em relação ao eixo vertical, onde você deve posicionar o eixo y?
e) Considerando o gráfico construído conforme o item anterior, encontre a equação do arco parabólico.
f) Descreva os intervalos onde a equação é crescente e decrescente.
g) A função tem valor máximo? E valor mínimo? Se afirmativo, quais são estes valores?

4.3.3. TERCEIRA ATIVIDADE: Energia elétrica e função afim

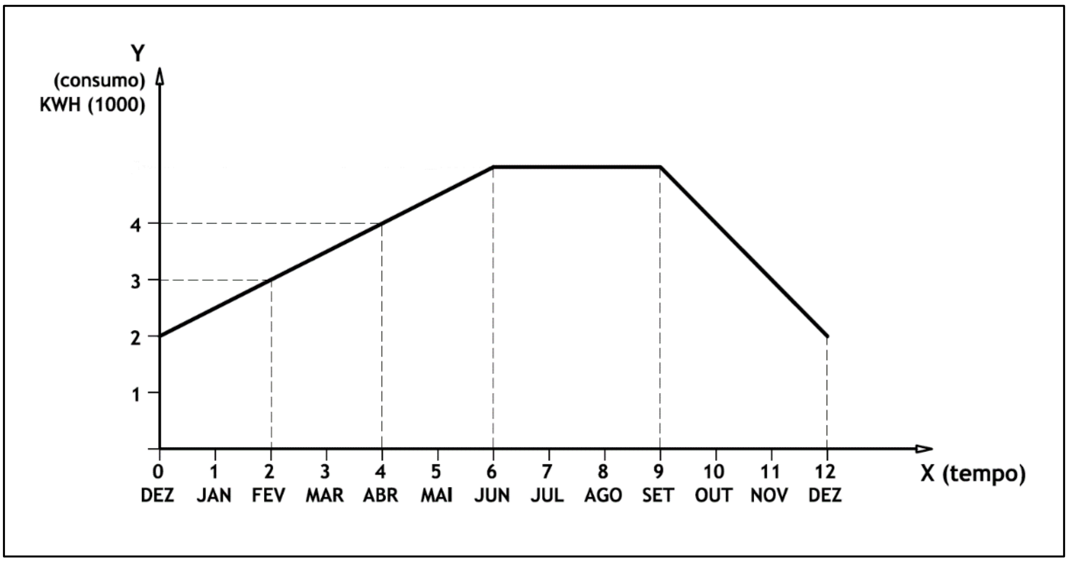
Quadro 5 -Terceira Atividade

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Função afim • Função constante
Descrição da Atividade	A terceira atividade sobre função constante e afim, explora, através de um fenômeno físico, os conceitos destas funções. Foi apresentado um gráfico com o consumo de energia em dezembro de 2019 até dezembro de 2020 e um texto introdutório explicativo contendo mais informações sobre o consumo. O gráfico era composto por função definida por partes composta com duas funções afins e uma constante.
Objetivos	Objetivou-se, nessa atividade, que o aluno interpretasse o gráfico e o texto e apresentasse seus conhecimentos sobre o conceito de função afim e função constante, tais como o conceito de proporcionalidade. Era objetivo desta atividade também que o aluno demonstrasse habilidade em transitar por diferentes registros semióticos, como a escrita em língua natural, escrita algébrica e gráfica. Ao final das perguntas foi pedido também o desenvolvimento das equações.

Continuação da Terceira Atividade
Terceira Atividade

Em dezembro de 2019, o consumo de energia elétrica de uma empresa foi de 2000 kw/h. No primeiro semestre o consumo cresceu linearmente, registrando 4000 kw/h no mês de abril de 2020. No período de junho a setembro, o consumo manteve-se estabilizado. Nos últimos meses do ano, houve uma queda linear no consumo, registrando em dezembro de 2020, a mesma marca de dezembro de 2019. O eixo horizontal é representado pelo tempo em meses e o eixo vertical é representado pelo consumo em kw/h.

Figura 3 - Gráfico de consumo de energia



Fonte: Elaborado pela Autora

Analise o gráfico do consumo nos seguintes intervalos:

Primeiro Intervalo

Dezembro de 2019 a Junho de 2020

a) Neste intervalo determine a razão (divisão) da variação do consumo em relação à variação do tempo.

b) Essa relação é de proporcionalidade direta?

Continuação da Terceira Atividade
c) Se essa razão proporcional tem constante de proporcionalidade positiva, o que você conclui sobre o crescimento ou decrescimento dessa função?
d) No instante inicial, qual o valor do consumo?
e) Determine a equação que representa o consumo neste intervalo.
Segundo Intervalo **Junho de 2020 a Setembro de 2020**
a) O que você pode observar neste intervalo? O consumo aumenta (cresce) ou diminui (decresce)?
b) Qual o consumo de energia registrado neste período?
c) Este valor pode ser considerado como o maior consumo durante todo o período de dezembro de 2019 a dezembro de 2020?
Terceiro Intervalo **Setembro de 2020 a Dezembro de 2020**
a) Qual o valor do consumo em 2020?
b) Considerando que neste período houve uma queda linear do consumo, determine a razão (divisão) da variação do consumo em relação a variação do tempo.
c) Essa relação é de proporcionalidade direta?
d) Se essa razão proporcional tem constante de proporcionalidade negativa, o que você conclui sobre o crescimento ou decrescimento dessa função?
e) Determine a equação que representa o consumo neste intervalo

.

.

4.3.4. QUARTA ATIVIDADE: Bactérias e função exponencial

Quadro 6 - Quarta Atividade

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Potenciação • Função exponencial
Descrição da Atividade	Esta atividade sobre função exponencial foi elaborada com uma situação contextualizada de um fenômeno biológico do crescimento de uma cultura de bactérias. O enunciado relata o momento inicial de observação do crescimento de uma cultura de bactérias e explora horas anteriores ao início dessa observação, para que o estudante trabalhasse com valores de abscissa negativos. Foi pedido que os alunos utilizassem uma calculadora para resolução.
Objetivo	Essa atividade teve como objetivo analisar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o conceito de função exponencial com diferentes representações semióticas, como interpretação de texto, capacidade de construir um gráfico através de dados organizados em uma tabela, registros formais (algébricos, numéricos e simbólicos) e registros da língua natural. Era necessária a identificação de qual era a função e as suas propriedades tais como: crescimento ou decrescimento e gráfico de curva contínua localizado totalmente acima do eixo das abscissas. A equação matemática foi dada com possibilidade maior do estudante de relembrar o conceito imagem da função. A proposta de interdisciplinaridade está presente na atividade já que houve uma contextualização com um problema biológico para representar uma função exponencial, possibilitando analogias para fomentar a heurística. Elementos da intramatemática também estão presentes na atividade, pois os sujeitos da pesquisa precisavam produzir gráfico, desenvolver habilidades aritméticas, algébricas e gerar descrição escrita.

Continuação da Quarta Atividade
Quarta Atividade
Um biólogo observou uma cultura de bactérias e estabeleceu a seguinte lei para seu crescimento Q(T) = 100 x 2^t. Q(t) é o número de bactérias e t o tempo em horas. Consideramos t=0 como a hora inicial da observação, valores de t negativos correspondem às horas anteriores ao início da observação, e valores de t positivos correspondem às horas que sucedem o início da observação.
a) Identifique qual é a variável dependente e a variável independente do estudo.
b) Quantas bactérias existiam após 1h, 2h, 3h, 4h e 10h de observação?
c) Uma vez estabelecido o modelo matemático, podemos calcular a quantidade de bactérias que já existiam em horas anteriores ao início do evento, neste caso usaremos valores de t negativos. Assim, qual o número de bactérias 1 horas antes do evento, 2 notas antes do evento, 3 horas antes do evento e 4 horas antes do evento. Preencha a tabela abaixo.

tempo	bactérias
-4h	
-3h	
-2h	
-1h	
0h (hora inicial da observação)	
1h	
2h	
3h	
4h	
10h	

Continuação da Quarta Atividade
d) Plote, no sistema de eixos, os dados da tabela construída, indicando a variável dependente na vertical e a independente na horizontal. Una os pontos.
e) A curva obtida no gráfico representa uma função do 1º grau (função afim) 2º grau (função quadrática) ou uma curva desconhecida? Justifique sua resposta.
f) As grandezas são proporcionais? Justifique.
g) O que ocorre com as bactérias à medida que o tempo aumenta?
h) O que ocorre com as bactérias à medida que o tempo diminui?
i) O gráfico é crescente ou decrescente?
j) A função intercepta o eixo das ordenadas? Se afirmativo, indique este ponto. O que ele representa em relação à população de bactérias?
k) Essa função admite valores negativos? Justifique sua resposta.

4.3.5. QUINTA ATIVIDADE: Logaritmos com a Torre de Hanoi

Quadro 7 - Quinta Atividade

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Potenciação • Função logarítmica • Função exponencial
Descrição da Atividade	De acordo com Dante (2002), o jogo é um ótimo instrumento didático, pois durante a realização dele, o aluno é desafiado a pensar, estabelecer estratégias, desenvolvendo, dessa maneira, sua autonomia. Sendo assim, a quinta atividade foi desenvolvida com o jogo “Torre de Hanói” que pode ser jogado com um mínimo de três discos e um máximo de oito, de tal forma que, quanto maior o número de discos, maior o número de movimentos mínimos realizados para vencer o jogo, formando assim, uma função exponencial.
Objetivos	Esta atividade foi desenvolvida com o objetivo de explorar a interpretação gráfica e o comportamento das funções exponencial e logarítmica como funções inversas. Os participantes deveriam identificar as variáveis dependentes e independentes e, a partir disso, construir tabelas e gráficos, interpretá-los e relacionar as curvas do estudo com seus respectivos conceitos. Para Vygotsky (1987), os conceitos são construídos pela capacidade que a criança e adolescente têm de abstração e generalização. Nesse sentido, para explorar o conceito das funções exponencial e logarítmica, foi escolhido o jogo Torre de Hanoi, pois leva o aluno a entender simbolização, sequenciamento, generalização e raciocínio lógico.

Continuação da Quinta Atividade
Quinta Atividade

A torre de Hanói é um famoso jogo que consiste em uma base contendo três pinos. Dois pinos ficam vazios e em um dos pinos estão dispostos alguns discos em ordem crescente de diâmetro, debaixo para cima.

O objetivo do jogo é montar a mesma disposição dos discos do primeiro pino para um dos dois outros pinos que estão livres, com a menor quantidade de jogadas (movimentos) possíveis.

A regra impõe que só se pode mover um disco de cada vez, sendo que um disco de maior diâmetro nunca pode ficar em cima de um disco de menor diâmetro.

Figura 4 -Torre de Hanói

Fonte: http://elblogdelapeteconchi.blogspot.com/2013/02/torre-de-hanoi.html

Para determinar a quantidade mínima de movimentos em relação ao número de discos, a fórmula pode ser representada por M(n) = 2^n-1 onde M(n) é a quantidade mínima de movimentos para cada jogada e n é o número de discos.

a) Qual a variável dependente e qual a variável independente?

b) Qual a quantidade mínima de jogadas para 0, 1, 2, 3, 4 e 5 discos?

c) Construa uma tabela que represente a situação do item a.

d) Plote no sistema de eixos os dados da tabela construída, indicando a variável independente na horizontal e dependente na vertical e una os pontos.

Continuação da Quinta Atividade	
e)	A curva obtida no item d corresponde a que tipo de função?
f)	Aumentando o número de discos o que acontece com a quantidade mínima de jogadas?
g)	Construa uma nova tabela invertendo os pares ordenados do item b.
h)	Plote no sistema de eixos os dados da nova tabela construída, considerando agora o número de discos como variável dependente e as jogadas mínimas como variável independente. Una os pontos.
i)	A curva obtida no item h corresponde a que tipo de função?
j)	Como se comportam os valores das funções? Crescem ou decrescem?
k)	Qual das duas curvas cresce mais rapidamente?
l)	Quando, em matemática, trocamos o conjunto do domínio pelo conjunto do contra domínio, qual é o tipo de função?

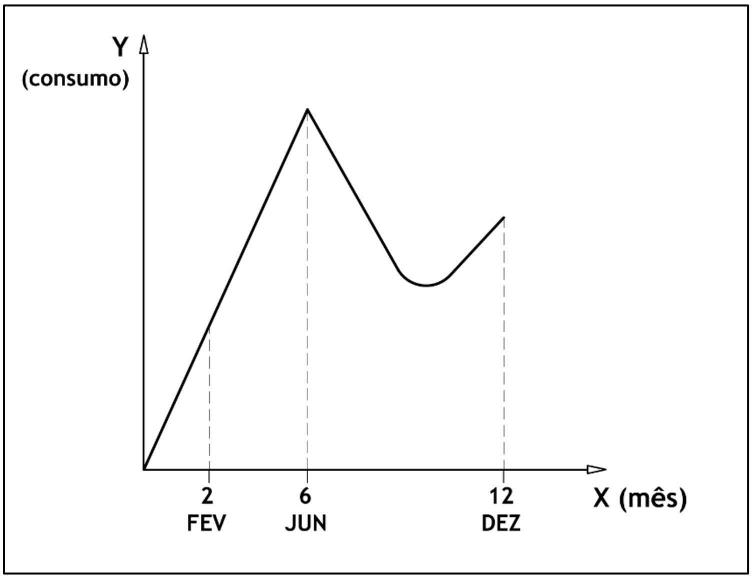
4.3.6. SEXTA ATIVIDADE: Consumo de energia e função de várias sentenças

Quadro 8 - Sexta Atividade

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Função Afim • Função Quadrática
Descrição da Atividade	A atividade consiste num gráfico representando a variação do consumo de energia por duas funções matemáticas e perguntas relacionadas ao conceito dessas funções.
Objetivos	Esta atividade foi desenvolvida com o objetivo de explorar a interpretação gráfica e o comportamento das funções afim e quadrática. O estudante tinha que ser capaz de reconhecer as duas funções que representavam o mesmo fenômeno no gráfico e, a partir de então, responderem perguntas relacionadas aos conceitos dessas funções.
Sexta Atividade	

O gráfico abaixo representa o consumo mensal de água de uma residência no período de 1 ano.

Figura 5 - Gráfico de consumo de água



Fonte: Elaborado pela Autora

Continuação da Sexta Atividade

Quadro 10 - Tabela de consumo de água

Mês	Consumo m³
Fevereiro (2)	4
Agosto (8)	6
Dezembro (12)	6

Geralmente, os fenómenos são variáveis com diversidade de funções matemáticas, que se denomina "função por partes".

a) Esse gráfico representa um fenómeno como duas funções matemáticas, quais são elas?

b) Na primeira parte onde a função é linear, relacione as grandezas e verifique se há uma proporcionalidade direta

c) Na segunda parte a representação do fenómeno é uma curva, qual é o modelo matemático que se aproxima mais dessa representação?

d) Essa proporcionalidade é direta?

e) Determine a equação do consumo.

f) Qual o mês de maior consumo?

g) Em que período o consumo decaiu?

h) Qual o mês de menor consumo?

i) Entre os meses de junho e dezembro, qual foi o menor consumo?

- **Perguntas Avaliativas**

Ao final das atividades, duas perguntas foram feitas a respeito de como o estudante avalia os seus conhecimentos sobre os conceitos de função afim, quadrática, exponencial e logarítmica e de matemática básica.

1. Como você avalia o seu conhecimento em matemática básica?
2. Após a resolução dos exercícios, como você avalia o seu conhecimento sobre os conceitos de função afim, quadrática, exponencial e logarítmica?

5. APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

5.1. Cenário da Pesquisa

As atividades foram aplicadas no dia 26 de abril de 2021 na Universidade FUMEC, em Belo Horizonte/MG. A Instituição de Ensino, fundada em 1963, é composta pela Faculdade de Ciências Empresariais, Faculdade de Ciências Humanas e a Faculdade de Ciências Exatas.

A FUMEC oferece cursos presenciais e Educação a Distância (EaD) de graduação, superiores de tecnologia, pós-graduação *Lato Sensu* (especialização), pós-graduação S*tricto Sensu* (mestrado, doutorado e pós-doutorado) e de extensão.

Na graduação, a área de exatas oferece os cursos de Arquitetura, Designer e mais 9 (nove) cursos de Engenharia. As atividades foram aplicadas em duas turmas de Engenharia Civil na disciplina de Cálculo 1. A primeira turma na parte da manhã e a segunda no período da noite.

As atividades foram aplicadas individualmente, de maneira remota, através da plataforma Google Meet, utilizada pela Universidade. Houve um total de 16 atividades entregues pelos alunos voluntários. Os professores da disciplina cederam 60 minutos para a realização das atividades, assim, devido à limitação do tempo, foram aplicadas apenas 4 atividades, das 6 desenvolvidas na investigação realizada, a serem divulgadas num Caderno de Atividades, como PRODUTO DA PESQUISA.

Cada turma teve uma hora para realizar as atividades, mas, ao final do tempo, a grande maioria não conseguiu acabar, então, foi acrescentado um prazo de mais dois dias para que terminassem em casa e enviassem o trabalho pela plataforma Google Classroom. Esse acréscimo no prazo só foi revelado antes de vinte minutos para o encerramento, para que os alunos não se apressassem demais, com o objetivo de entregar a atividade no horário determinado.

A turma diurna teve, inicialmente, 12 alunos participantes, no entanto, após 15 minutos de atividade, quatro alunos se retiraram da reunião. Apenas dois alunos conseguiram entregar a atividade no final da aula e, após os dois dias estipulados para a entrega da tarefa, foram entregues 8 atividades. A turma noturna contou com a participação de 8 alunos voluntários, sendo que todas as atividades foram enviadas ao final do prazo de entrega.

Inicialmente, a pesquisadora foi apresentada às turmas, podendo dialogar, rapidamente, sobre a importância da matemática básica para um bom entendimento do Cálculo. Em seguida, a mestranda apresentou às turmas seu tema de dissertação e relatou os objetivos da aplicação das atividades.

Foi explicada a importância da fidelidade dos resultados para posterior avaliação das atividades e, então, solicitado que os sujeitos da pesquisa não recorressem a qualquer outro meio de consulta que não fosse a pesquisadora.

É importante ressaltar que os professores da turma de Cálculo ministraram aula revisional sobre funções linear e quadrática para os alunos, já que esse conteúdo faz parte do Plano de Ensino do curso da disciplina na Universidade.

Após esse momento inicial, a pesquisadora leu e explicou cada uma das atividades. Como o objetivo do trabalho era ter uma real dimensão sobre os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema, a pesquisadora tomou o devido cuidado para não ensinar aos alunos como fazer as atividades. Apenas mediou e direcionou os sujeitos da pesquisa, sem indicar diretamente as soluções das dúvidas e dificuldades encontradas.

A turma diurna foi mais participativa, pois apresentou dúvidas e expressou maior interação com a pesquisadora. A turma noturna, por sua vez, permaneceu em silêncio a maior parte do tempo, mesmo a pesquisadora insistindo e perguntando se havia dúvidas ou necessidade de algum esclarecimento.

Os trabalhos foram corrigidos e os resultados foram interpretados de acordo com todo o estudo teórico apresentado.

5.2. Análise dos resultados das atividades

5.2.1. Análise da primeira atividade.

Na primeira atividade, 16 alunos participantes, 8 acertaram e 8 erraram. Os erros foram cometidos pela dificuldade em fazer analogia e identificar as funções, já que elas estavam escritas com variáveis diferentes das usuais.

Ficou evidente, nessa atividade, a dificuldade dos alunos em identificar o conceito das funções através da sua representação verbal, no registro da língua natural. O conceito de função exponencial foi confundido com o de função quadrática, assim como o conceito de função linear com o de função quadrática.

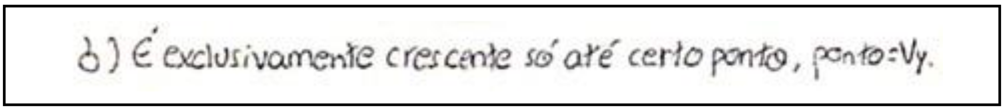
A função logarítmica estava mais evidente, desta forma, os alunos tiveram facilidade em designar seu nome e também seu conceito de função inversa da função exponencial.

5.2.2. Análise da segunda atividade

a) Apenas 5 participantes denominaram função quadrática, outros 4 escreveram função do 2º grau, um aluno chamou a função de parábola e o restante não conseguiu responder.

b) Quanto ao conceito de que a função quadrática cresce e também decresce, de acordo com o intervalo de seu domínio, 11 participantes acertaram, 1 aluno relacionou o crescimento ao y do vértice, outro relacionou o crescimento à concavidade da parábola, outro participante respondeu que a parábola só crescia e 2 participantes não souberam responder.

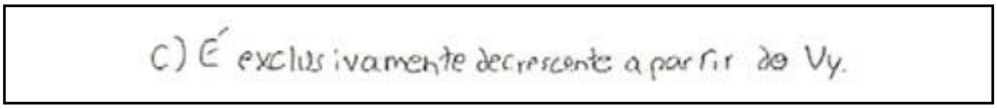
Figura 6 – Resposta de um aluno à questão b


b) É exclusivamente crescente só até certo ponto, ponto=Vy.

Fonte: Dados da pesquisa

c) Quanto ao conceito de crescimento e decrescimento da função quadrática, foi perguntado se a função apenas decresce. 11 participantes responderam corretamente que não, 1 aluno relacionou o decrescimento ao Y do vértice, outro participante respondeu corretamente, mas como errou a pergunta anterior, essa resposta se torna questionável, 3 alunos não souberam responder.

Figura 7 - Resposta de um aluno à questão c


c) É exclusivamente decrescente a partir do Vy.

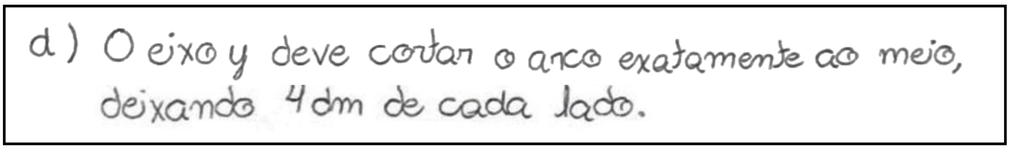
Fonte: Dados da pesquisa

d) Quanto ao posicionamento do eixo vertical para se obter simetria, são registrados 9 acertos, mas os participantes usaram diferentes maneiras de explicar o raciocínio.

Alguns alunos explicaram que o eixo y deveria cortar a figura com 4dm para um lado e 4dm para o outro lado.

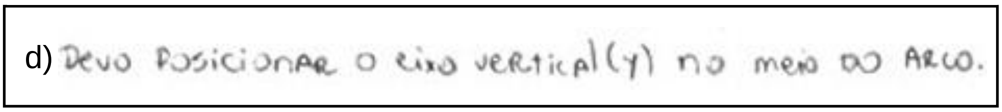
Outro escreveu que se deve posicionar o eixo y no ápice da concavidade do arco. Outros disseram que se deve posicionar o eixo y no meio do arco.

Figura 8 - Resposta de um aluno à questão d


d) O eixo y deve cortar o arco exatamente ao meio, deixando 4dm de cada lado.

Fonte: Dados da pesquisa

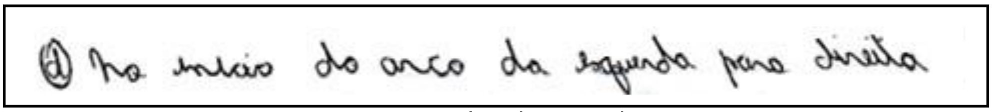
Figura 9 - Resposta de um aluno à questão d


d) DEVO POSICIONAR O EIXO VERTICAL (Y) NO MEIO DO ARCO.

Fonte: Dados da pesquisa

Das 3 respostas erradas, dois alunos escreveram que, para a função ser simétrica, deve-se posicionar o eixo y no início do arco. Quatro alunos não conseguiram responder.

Figura 10 - Resposta de um aluno à questão d


d no inicio do arco da esquerda para direita

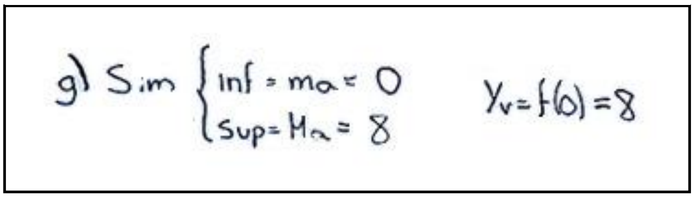
Fonte: Dados da pesquisa

e) Dos 16 sujeitos participantes, apenas dois conseguiram representar algebricamente a função.

f) Em relação ao intervalo de crescimento e decrescimento da função, apenas 2 alunos acertaram, o participante que posicionou o eixo y no início do arco, deu os intervalos com valores positivos para x, os alunos restantes não responderam.

g) Sobre valor máximo e mínimo da função quadrática, os acertos foram poucos, apenas 3 participantes responderam corretamente, dois deles responderam que havia um supremo e um ínfimo com os devidos valores.

Figura 11 - Resposta de um aluno à questão g

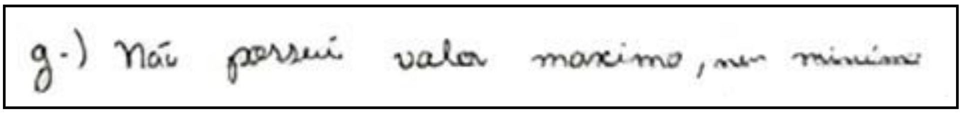


g) Sim $\begin{cases} \text{inf} = m_a = 0 \\ \text{sup} = M_a = 8 \end{cases}$ $y_v = f(0) = 8$

Fonte: Dados da pesquisa

Dois participantes afirmaram haver apenas máximo, 1 participante disse que havia sim, um máximo e um mínimo, mas não deu os devidos valores como pedido, 2 participantes alegaram que não havia máximo ou mínimo e os participantes restantes não souberam responder.

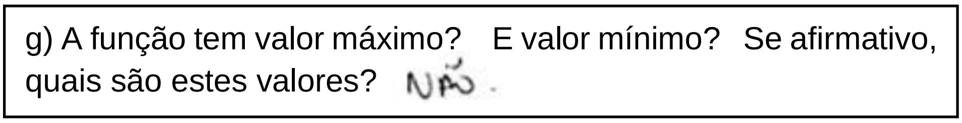
Figura 12 - Resposta de um aluno à questão g



g-) Nãu possui valor maximo, nem mínimo

Fonte: Dados da pesquisa

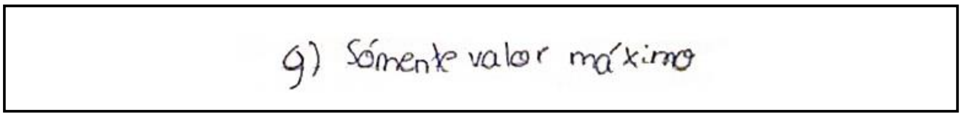
Figura 13- Resposta de um aluno à questão g



g) A função tem valor máximo? E valor mínimo? Se afirmativo, quais são estes valores? NÃO.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 14 - Resposta de um aluno à questão g



g) Sómente valor máximo

Fonte: Dados da pesquisa

Laudares (2013) relata que a descrição, a interpretação, a análise e o ato de sintetizar são habilidades características da compreensão conceitual que o estudante deve privilegiar para conquista do saber matemático.

Neste sentido, na análise dos resultados dessa atividade, a pesquisadora constatou que poucos alunos souberam os conceitos da função quadrática. Percebeu-se que, através da representação gráfica de um arco, a imagem conceito da função quadrática já era internalizada por alguns participantes, mas 6 alunos não conseguiram responder. Interessante ressaltar as diferentes formas de nomear a função quadrática, já que alguns participantes a nomearam também de função do 2 grau e de parábola. Analisando o gráfico, uma boa parte dos participantes conseguiram identificar que a função quadrática cresce e também decresce, mas não conseguiram escrever os intervalos desse crescimento e decrescimento, assim como não identificaram que a função tinha um máximo e um mínimo. O conceito de simetria e posicionamento do eixo vertical teve bom entendimento no geral, apesar de 4 alunos não conseguirem responder e um aluno posicionar o eixo vertical no início do arco.

A definição é a linguagem simbólica do conceito. Laudares (2013) afirma que, ao processar a definição, pelas representações utilizadas, pode ser gerado um espaço no qual os elementos constituintes do conceito se explicitam. Em relação a isso, no último item da atividade, em que foi pedida a lei de formação da função, apenas dois alunos conseguiram desenvolver os cálculos; o restante não respondeu corretamente.

Outro ponto a destacar é que a maioria dos alunos não conseguiram coordenar diferente registros de representação em um mesmo objeto, pois apresentaram muitas dificuldades em obter informações dos gráficos para se representar algebricamente a função, em ler o enunciado na língua materna e representar essas informações no gráfico, o que, segundo Duval(2009), prejudica o entendimento conceitual, pois, para o autor, para um bom entendimento conceitual, é essencial que haja uma articulação entre pelo menos dois registros de representação de um objeto matemático, sendo realizada em um procedimento de conversão.

Para Vinner (2001) o conceito imagem retrata uma estrutura cognitiva total associada ao conceito matemático, representando o conjunto de todas as imagens, propriedades e ou processos que alguma vez, na mente do indivíduo, foram associadas ao conceito. Ao analisar a atividade, percebeu-se que metade dos estudantes não associam a imagem de uma parábola à função quadrática.

5.3. Análise da terceira atividade

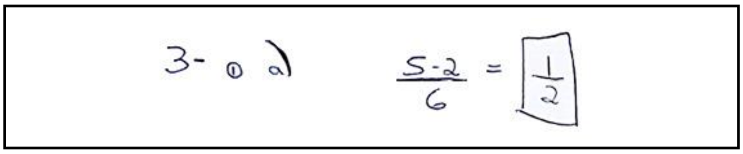
Na leitura da terceira atividade foi percebida uma incoerência na parte 3, letra a. A pergunta seria qual o consumo em dezembro de 2020 e não qual o consumo em 2020. A pesquisadora alertou os participantes e escreveu a nova pergunta no quadro. Ao analisar os resultados da atividade, percebeu-se que alguns participantes fizeram a questão corretamente e outros não corrigiram, quando lhes foi solicitado, resolvendo a questão com a pergunta errada.

Outro ponto a ser lembrado foi sobre a razão de proporcionalidade pedida na questão. A pesquisadora demonstrou no quadro como seria feita essa divisão, utilizando uma função diferente da função da atividade, para não influenciar no resultado. Foi perguntado se tinha alguma dúvida, mas os alunos disseram que não. Quando houve a correção, percebeu-se que muitos participantes não entenderam ou não sabiam calcular essa razão.

5.3.1. Primeira parte da terceira atividade:

a) Dos 16 alunos participantes, apenas 4 conseguiram determinar corretamente a razão da variação do consumo em relação ao tempo.

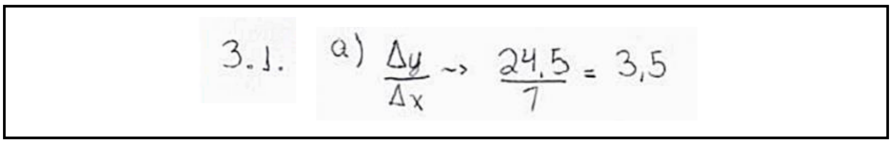
Figura 15 - Resposta de um aluno à questão a



Fonte: Dados da pesquisa

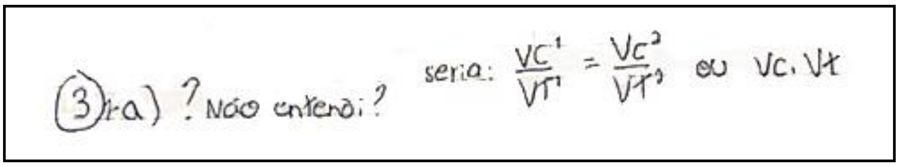
5 alunos deixaram a resposta em branco e dos que tentaram fazer, mas erraram, chamou a atenção um aluno que escreveu que a razão seria $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,mas não conseguiu fazer a divisão e outro, que não entendeu o que foi solicitado.

Figura 16 - Resposta de um aluno à questão a



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 17 - Resposta de um aluno à questão a



Fonte: Dados da pesquisa

b) Mesmo a questão demandando apenas a resposta sim ou não, sem que o aluno tenha que justificar, 6 participantes não responderam. Dos 8 participantes que escreveram sim, apenas 4 conseguiram calcular a razão corretamente no item anterior, o que faz pensar que o restante escreveu que era de proporcionalidade direta, mas sem entender o porquê. Dos dois que colocaram que não era de proporcionalidade direta, vale destacar um aluno que falou que a constante de proporcionalidade não se mantém, sendo que esse aluno nem sequer calculou a constante no item anterior.

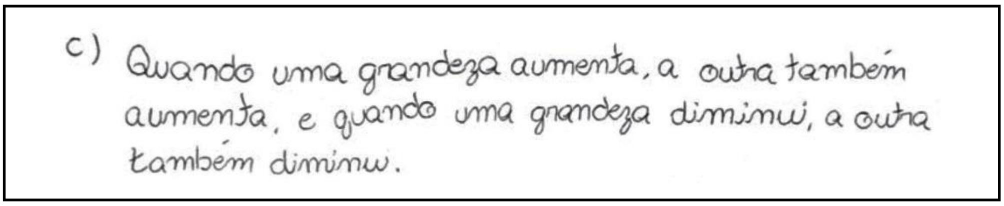
Figura 18 - Resposta de um aluno à questão b


b) Não, a constante de proporcionalidade não se mantém

Fonte: Dados da pesquisa

c) Em relação à constante de proporcionalidade e o coeficiente angular da função, 3 alunos não conseguiram responder, dos 13 alunos que acertaram, 11 demonstraram entender que a função é crescente apenas por interpretarem o gráfico. Nessa questão, apenas dois participantes associaram a constante de proporcionalidade com o coeficiente angular da reta.

Figura 19 - Resposta de um aluno à questão c


c) Quando uma grandeza aumenta, a outra tambem aumenta, e quando uma grandeza diminui, a outra também diminui.

Fonte: Dados da pesquisa

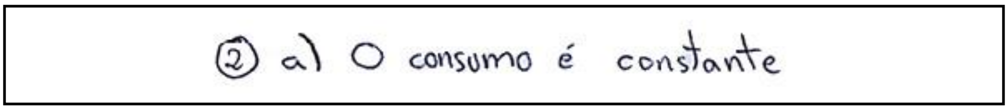
d) Sobre o consumo no instante inicial, bastava observar o gráfico e perceber que o consumo em dezembro de 2019 era de 2000 kwh. Mas vários participantes responderam ser zero.

e) Para a definição formal da equação, dos 16 participantes, 8 não fizeram a questão, 4 tentaram calcular a equação, mas erraram e 4, acertaram.

5.3.2. Segunda parte da terceira atividade

a) Dos 16 participantes, apenas 4 não fizeram a questão, demonstrando que através do gráfico conseguiram acessar o conceito imagem de algo que permanece constante, mesmo não denominando como uma função. Das respostas certas, vale ressaltar que alguns escreveram que o crescimento permanece constante e outros, que permanece estável, demonstrando diferentes formas de nomeação.

Figura 20 - Resposta de um aluno à questão a

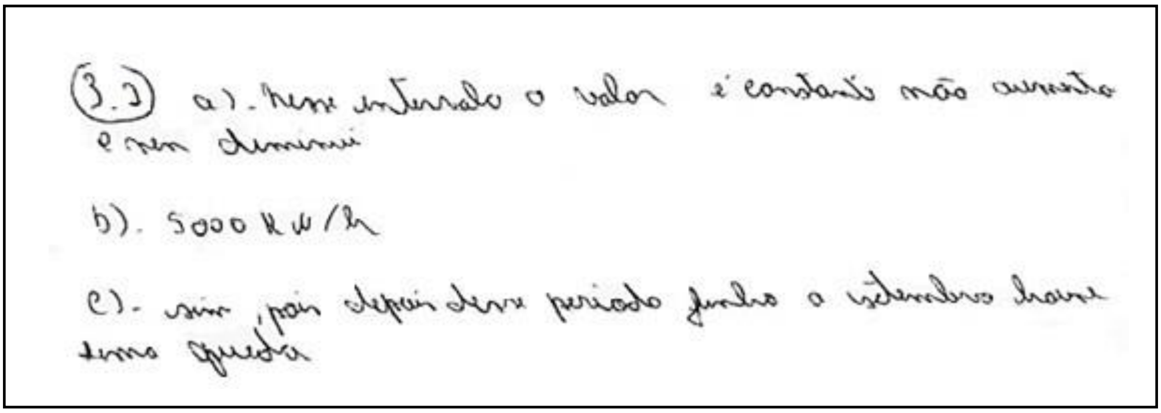

② a) O consumo é constante

Fonte: Dados da pesquisa

Neste item, muitos alunos entenderam que foi pedido o consumo total entre os meses de junho a setembro e multiplicaram 5.000 por 4 meses. Alguns não observaram no gráfico que precisavam multiplicar os kwh por 1000 e multiplicaram 5 por 4. Nesta questão, apenas 3 não fizeram e 2 participantes erraram a resposta.

b) Para saber se era o maior consumo, os alunos poderiam apenas observar o valor da função constante no gráfico. Dos 16 participantes, 9 acertaram, destacando um participante que respondeu que era o maior consumo, mas justificou que nesse período havia uma queda, mesmo afirmando no item anterior que o consumo era constante.

Figura 21 - Resposta de um aluno à questão b


3.2 a). nesse intervalo o valor é constante não aumenta e nem diminui

b). 5000 kw/h

c). sim, pois depois desse periodo junho a setembro houve uma queda

Fonte: Dados da pesquisa

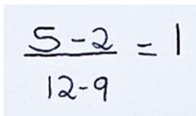
3(três) participantes não fizeram e o restante errou, respondendo que não era o maior consumo.

5.3.3. Terceira parte da terceira atividade

a) Dos 16 sujeitos da pesquisa, 5 fizeram a questão calculando o volume total de todos os meses de 2020, demonstrando que não se atentaram para a explicação da pesquisadora, feita no início da atividade, quando corrigiu a informação que se encontrava errada. Apenas 2 participantes fizeram a questão corretamente e 9 estudantes erraram ou não fizeram a atividade.

b) Dos 16 participantes, 6 não fizeram essa questão e os outros 10 erraram. Desses, vale ressaltar quatro participantes que calcularam a divisão corretamente, porém, utilizando valores positivos, mesmo a reta sendo decrescente.

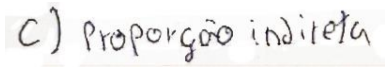
Figura 22 - Resposta de um aluno à questão b



Fonte: Dados da pesquisa

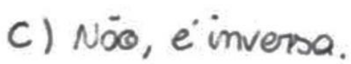
c) Do total de participantes, apenas quatro responderam que se tratava de proporcionalidade direta. O restante ou não fez ou errou. Dos que erraram, dois responderam que era proporcionalidade indireta e outro respondeu que era proporcionalidade inversa.

Figura 23 - Resposta de um aluno à questão c



Fonte: Dados da pesquisa

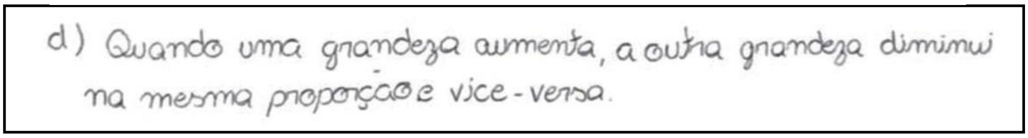
Figura 24 - Resposta de um aluno à questão c



Fonte: Dados da pesquisa

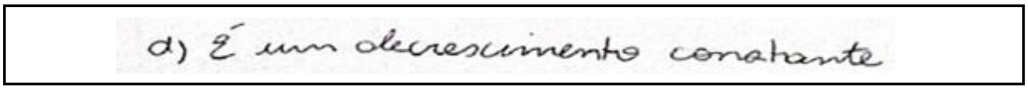
d) Sobre o decrescimento da função, através da observação do gráfico, a maioria dos participantes entendeu que a função decresce, mas não associaram o fato à constante de proporcionalidade e sim, à interpretação visual do gráfico. Um estudante escreveu que era decrescente, pois no gráfico há uma queda. Outra resposta interessante foi que quando uma grandeza aumenta a outra diminui na mesma proporção e outro respondente relatou que o decrescimento é constante. Um dos estudantes que errou escreveu que a cada mês ocorre um aumento de 1000 kw, mesmo com a função decrescente. Outros estudantes falaram que a função é decrescente, mas acharam a constante de proporcionalidade positiva, o que indica que eles não associaram essa constante com o coeficiente angular.

Figura 25 - Resposta de um aluno à questão d



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 26 - Resposta de um aluno à questão d

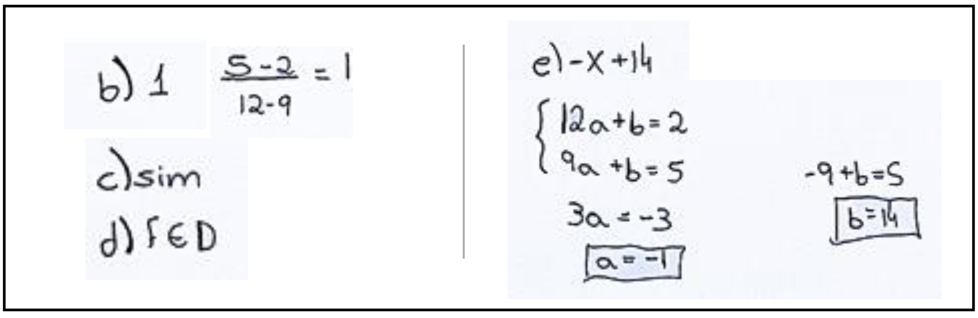


Fonte: Dados da pesquisa

d) A cada mês, ocorre aumento de 1 Kw/h

e) Dos 16 participantes, apenas 3 conseguiram calcular corretamente a expressão algébrica da função, mas acharam a constante de proporcionalidade na letra b, positiva. Dos que erraram ou não fizeram, vale ressaltar que um estudante calculou uma equação com o coeficiente angular positivo.

Figura 27 - Resposta de um aluno à questão e



Fonte: Dados da pesquisa

Sobre essa atividade, foi observado que poucos participantes entendem o conceito de proporcionalidade da função afim e não relacionam a constante de proporcionalidade com o coeficiente angular da reta. Interessante ressaltar que um participante conseguiu calcular a expressão algébrica da função, mas, quando fez a razão de proporcionalidade, achou um número diferente do coeficiente angular e não percebeu que se tratava do mesmo valor. De uma maneira geral, os alunos fizeram uma boa interpretação gráfica em relação à propriedade de crescimento e decrescimento das funções, dando destaque para a função constante, visto que seu conceito foi bem entendido pela maioria dos estudantes. Isto é, a maioria escreveu que a função não cresce nem decresce, mas, sim, permanece constante. A leitura visual do registro gráfico foi mais satisfatória; no entanto, quando necessitou da conversão das informações contidas no gráfico para se obter a fórmula algébrica da função, os alunos demonstraram muita dificuldade.

5.4. Análise da Quarta atividade

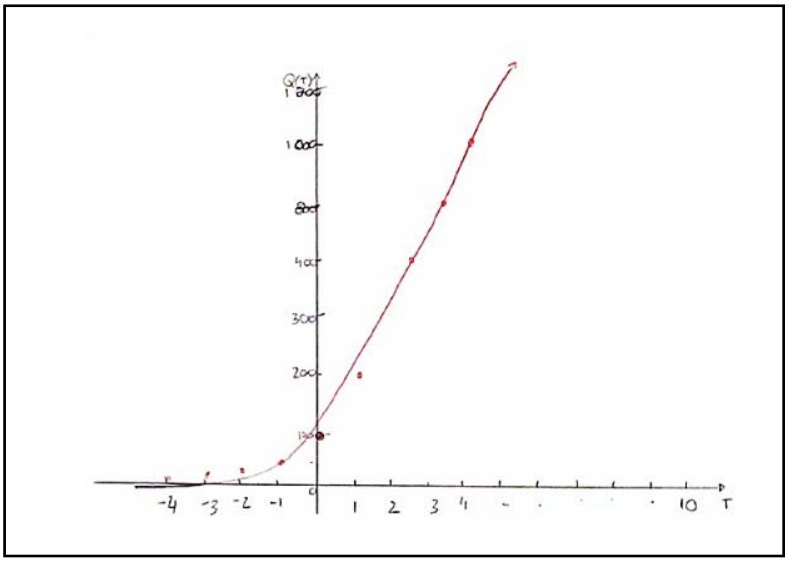
a) Dos 16 participantes, 12 acertaram qual era a variável dependente e qual a variável independente. Apenas 1 participante não respondeu e 3 estudantes erraram a resposta.

b) Para o cálculo de quantas bactérias existiam em determinado tempo, foi liberado o uso de calculadora. Dos 16 alunos participantes, 13 acertaram, sendo que apenas 1 não fez e 2 erraram.

c) Para o cálculo de quantas bactérias existiam com horas negativas (antes do início da observação), 9 participantes calcularam corretamente, 3 não conseguiram fazer e 3 erraram os cálculos. Dos que erraram, vale destacar um aluno que escreveu que “no tempo zero tinha zero bactérias, portanto, os valores antes da observação que seriam negativos, também seria zero”, demonstrando que não soube que, elevando um número ao expoente zero, o resultado é 1.

d) Em relação ao esboço do gráfico, apenas 3 estudantes o fizeram corretamente, 1 participante plotou o gráfico em um software, 8 não fizeram e 4 não desenharam corretamente. Desses, vale destacar três gráficos:

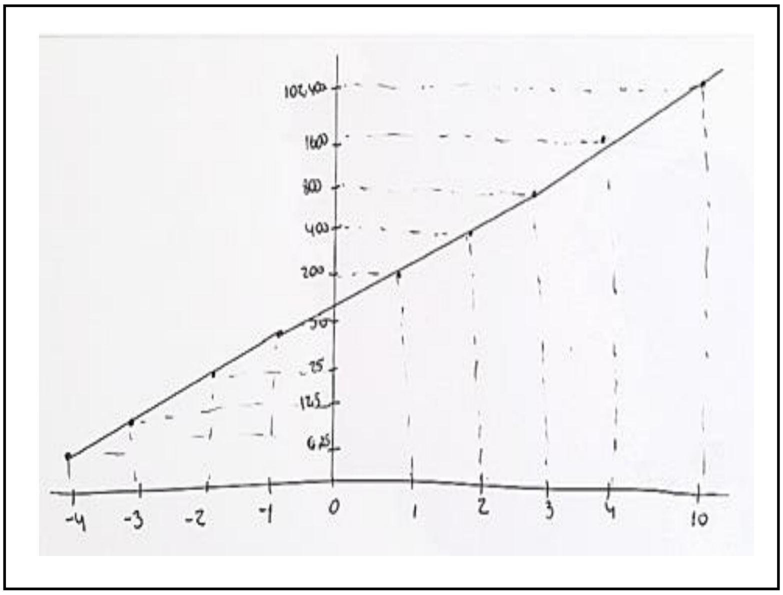
Figura 28 - Resposta de um aluno à questão d



Fonte: Dados da pesquisa

Neste gráfico, as imagens da função com valores do domínio tendendo para o menos infinito de x acabou assumindo valores negativos para o número de bactérias.

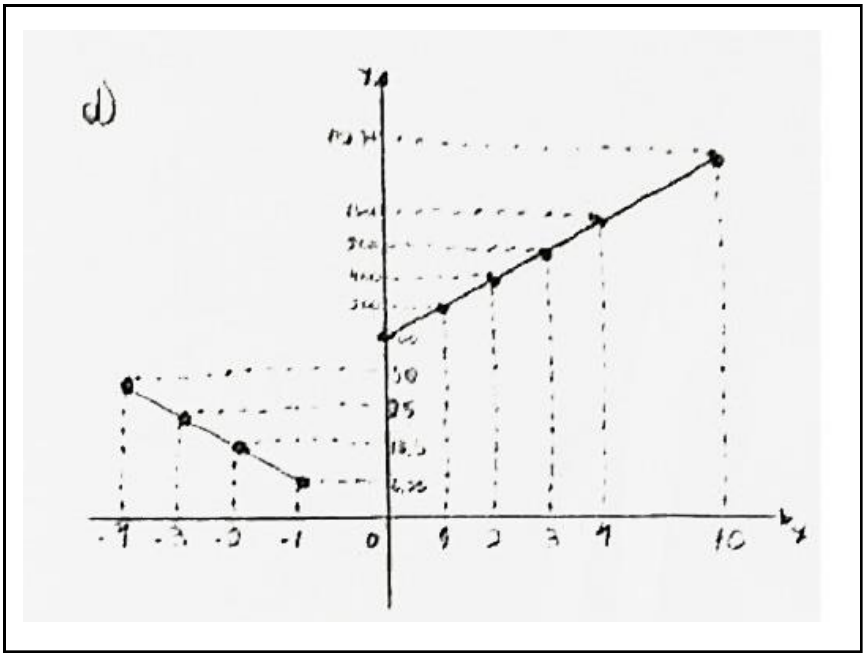
Figura 29 - Resposta de um aluno à questão d



Fonte: Dados da pesquisa

Neste gráfico, o participante esboçou uma função afim, ao invés da função exponencial.

Figura 30 - Resposta de um aluno à questão d



Fonte: Dados da pesquisa

Neste gráfico, o aluno esboçou 2 funções afins, uma decrescente e outra crescente. Esse aluno, ao calcular o número de bactérias com expoentes negativos, achou valores errados. Interessante ressaltar, também, a falta de continuidade da função quando os valores da variável independente x está no intervalo -1 e 0. O mesmo aluno, nos itens anteriores, relata se tratar de uma função crescente e decrescente; mas, em contrapartida, afirmou que, se aumentam as horas, o número de bactérias dobra a cada hora acrescentada e, se diminuem as horas, o número de bactérias cai pela metade a cada hora a menos, demonstrando que o conceito de função contínua e, nesse caso, crescente, não estava bem compreendido.

e) Quando pedido para identificar se a função era do primeiro, segundo grau ou se era uma função desconhecida, apenas 4 alunos relataram se tratar de uma função exponencial, 4 participantes não conseguiram responder e 8 responderam errado. Das respostas erradas, 3 alunos apontaram que se tratava de uma função polinomial do 2 º grau e 5 alunos que era uma função polinomial do 1 º grau.

Figura 31 - Resposta de um aluno à questão e

e) É uma função exponencial, pois a variavel está no expoente.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 32 - Resposta de um aluno à questão e

e) A curva obtida no gráfico representa uma função do 1º grau (função afim), 2º grau (função quadrática) ou uma curva desconhecida? Justifique sua resposta. Função do 1º GRAU.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 33 - Resposta de um aluno à questão e

e) A curva obtida no gráfico representa uma função do 1º grau (função afim), 2º grau (função quadrática) ou uma curva desconhecida? Justifique sua resposta É uma função de segundo grau.

Fonte: Dados da pesquisa

f) Quanto à proporcionalidade das grandezas, muitos alunos relataram se tratar de grandezas diretamente proporcionais, mesmo sem calcular a constante de proporcionalidade.

Figura 34 - Resposta de um aluno à questão f

F- Diretamente Proporcionais,
Pois o aumento de uma grandeza
aumenta a outra e vice versa

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 35 - Resposta de um aluno à questão f

f) diretamente proporcionais,
uma vez que, quanto maior o tempo,
mais bacterias.

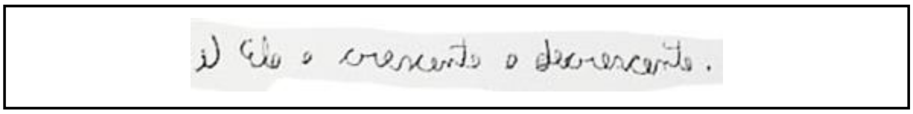
Fonte: Dados da pesquisa

g) Sobre o que ocorre com as bactérias à medida que o tempo aumenta, apenas 2 alunos não fizeram a tarefa, 14 responderam corretamente. Uns escreveram que aumentava e outros que dobrava a cada hora.

h) Sobre o que ocorre com as bactérias à medida que o tempo diminui, 3 alunos não souberam responder e 13 alunos responderam corretamente. Destaca-se um estudante: escreveu que o número de bactérias reduz à metade, a cada hora a menos.

i) Sobre o crescimento ou decrescimento da função, 13 participantes escreveram corretamente que crescia, 2 não fizeram e 3 estudantes escreveram que a função cresce e também decresce.

Figura 36 - Resposta de um aluno à questão i



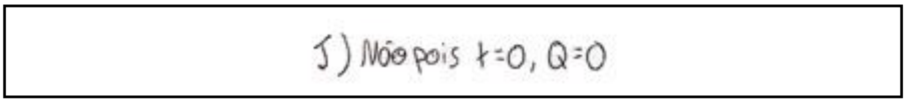
Fonte: Dados da pesquisa

j) A função intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0,100). Em relação a isso, apenas 4 alunos disseram que intercepta nesse ponto, outros 7 participantes não conseguiram responder e 5 erraram. Entre as respostas erradas, vale destacar um aluno que fez o gráfico corretamente, mas respondeu que não interceptava o eixo das ordenadas e outro, confundiu eixo das ordenadas com eixo das abscissas.

Figura 37 - Resposta de um aluno à questão j

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 38 - Resposta de um aluno à questão j



Fonte: Dados da pesquisa

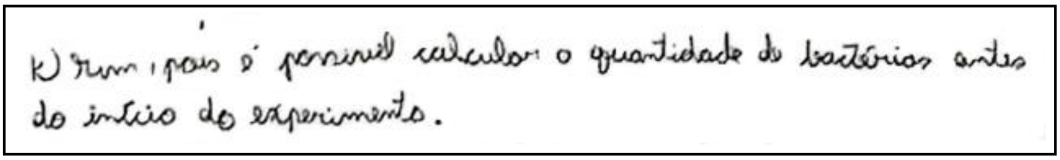
k) Quanto ao gráfico da função exponencial não admitir valores negativos, 5 dos alunos participantes acertaram a questão, informando que não há como ter um número de bactérias negativo. 4 estudantes não responderam e 5 erraram a resposta. Entre as respostas certas, vale destacar um aluno ao escrever que não há como ter um número de bactérias negativo, mas fez o gráfico posicionado um pouco abaixo do eixo das abscissas, enquanto outro participante escreveu que não, mas justificou, escrevendo apenas que o gráfico aumenta. Entre as respostas erradas, está a de um participante ao informar que não poderia falar se teria valores negativos, pois não desenvolveu todas as contas com outros expoentes. Além dessa, outro aluno escreveu que sim, pois é possível calcular a quantidade de bactérias antes do início do experimento, demonstrando que não compreende bem o conceito sobre a função exponencial estar localizada acima do eixo das abscissas.

Figura 39 - Resposta de um aluno à questão k


K) Não, pois não tem como ter bactérias negativas

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 40 - Resposta de um aluno à questão k

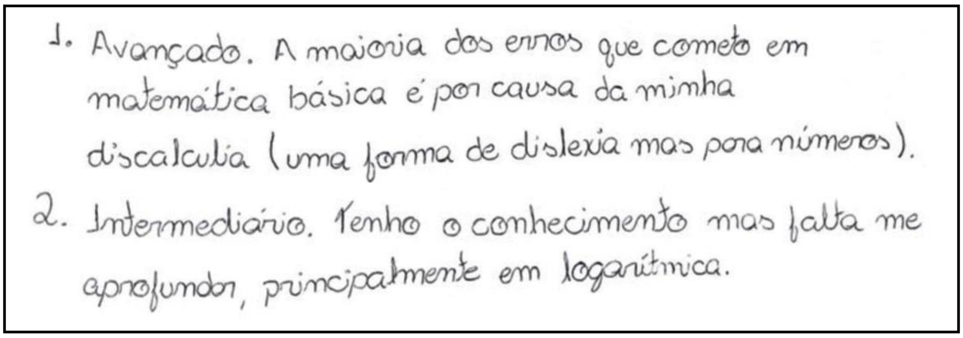

k) sim, pois é possível calcular a quantidade de bactérias antes do início do experimento.

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando o resultado dessa atividade, percebe-se que conceito de função exponencial não foi efetivamente aprendido pela maioria dos participantes da pesquisa. Quando perguntado qual era a função, muitos responderam se tratar de uma função quadrática e afim, demonstrando que, mesmo com a representação algébrica da função e também a gráfica, o conceito imagem não estava internalizado pela maioria dos estudantes. Como a função foi dada, muitos alunos calcularam os valores com diferentes tempos e perceberam o crescimento das bactérias, dobrando a cada hora. O fato de a função exponencial ser uma função contínua, com o gráfico localizado totalmente acima do eixo das abscissas, também não foi bem compreendido. Abrantes (2005), afirma que o pensamento matemático demanda uma lista de ideias e processos, por analogia. Nesse sentido, falta a alguns alunos o desenvolvimento do pensamento matemático, visto que dos 16 participantes, apenas 7 conseguiram responder corretamente ao que foi solicitado, associando que não haveria valores negativos de bactérias, mas 9 alunos dos 16 participantes não conseguiram fazer ou erraram a resposta.

De acordo com Pais (2001), a formação de um conceito não se dá através de apenas um único tipo de situação. O desafio é articular os conceitos principais que não variam com os conceitos já existentes na mente do estudante e que, através disso, ele possa compreender outras situações em que surgem novos conceitos e invariantes. A falta desses conceitos invariantes sobre funções que deveriam ser formados no Ensino básico traz uma barreira para o entendimento e desenvolvimento de novos conceitos que são apresentados aos estudantes na disciplina de Cálculo. As perguntas no final da atividade foram respondidas por todos os alunos.

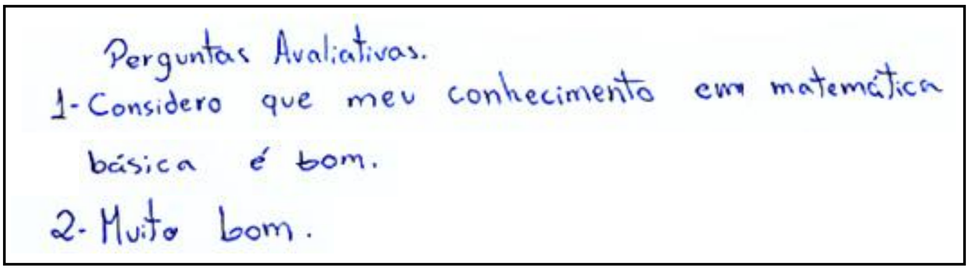
Figura 41 - Resposta de um aluno às perguntas avaliativas


1. Avançado. A maioria dos erros que cometo em matemática básica é por causa da minha discalculia (uma forma de dislexia mas para números).

2. Intermediário. Tenho o conhecimento mas falta me aprofundar, principalmente em logarítmica.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 42 - Resposta de um aluno às perguntas avaliativas

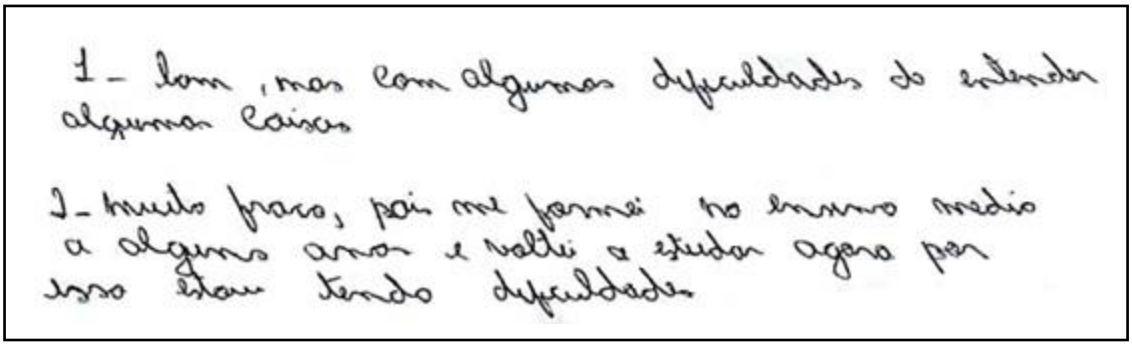

Perguntas Avaliativas.

1- Considero que meu conhecimento em matemática básica é bom.

2- Muito bom.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 43 - Resposta de um aluno às perguntas avaliativas



1- bom, mas com algumas dificuldades de entender algumas coisas

2- muito fraco, pois me formei no ensino medio a alguns anos e voltei a estudar agora por isso estou tendo dificuldades

Fonte: Dados da pesquisa

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação pela pesquisa surgiu por duas vertentes. A primeira pelo ofício da pesquisadora, que ministra aulas particulares de Cálculo há mais de 8 anos para alunos de Engenharia e outros cursos, diagnosticando, assim, ao longo desse tempo, as dificuldades de seus alunos não só em Cálculo, mas na matemática básica.

A segunda motivação surgiu durante o Mestrado em Educação Matemática, com a possibilidade de fazer um Projeto de Nivelamento de Estudantes de Engenharia e sua Integração à Universidade, que definiu pilares para criação de uma metodologia do Cálculo, entre os quais: o trabalho com conceitos, procedimento relativo aos cálculos e a resolução de problemas. A pesquisadora se identificou com o trabalho com os conceitos de matemática básica, em especial, das funções.

Analisando novamente o Objetivo Geral e os Objetivos Específicos propostos para a investigação realizada, entende-se que esses foram cumpridos integralmente, o que demandou esforços pedagógicos, interação e vigilância constante, especialmente, na aplicação das atividades. A pesquisadora assumiu a aplicação das atividades de pesquisa em contexto fora de sua atuação, o que, se exigiu esforços de um lado; de outro, proporcionou novos conhecimentos e revisão de saberes no campo do ensino da matemática e, em especial, do objeto de conhecimento função.

Na esteira do planejamento apresentado, foi elaborado e apresentado um breve levantamento histórico sobre o surgimento do conceito de funções, embasado nos estudos de Youschkevitch (1981), Boyer (1974) e Eves (2004). Para a evolução do ensino de funções nos documentos oficiais foram consultados os PCNs (2000 e 2002) e a BNCC (2018) do Ministério da Educação.

A partir da revisão bibliográfica que trouxe questões relativas ao alto índice de reprovação em Cálculo e sobre a importância da disciplina como base em vários cursos de graduação, propôs-se, como objetivo geral ,o desenvolvimento de atividades visando o nivelamento dos alunos ingressantes nos cursos de Engenharia, contemplando problemas conceituais sobre função afim, função quadrática, função exponencial e função logarítmica, que são componentes do Plano de Ensino da disciplina de Cálculo I de cursos de Engenharia.

Os referenciais teóricos que fundamentaram a Pesquisa, partem de Duval (2009), Pais (2001) e Laudares (2013) que deram sustentação teórica especialmente quanto à compreensão conceitual, com seu desenvolvimento pela resolução de problemas. Foram construídos problemas com as funções em estudo, especialmente para explorar os seus conceitos. As atividades em problemas exploraram variadas representações gráfica, algébrica e expressão verbal.

Os procedimentos da pesquisa aconteceram em duas etapas. A primeira, com uma análise do conteúdo do conceito de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica em dois livros didáticos do Ensino Médio e, na segunda etapa, o desenvolvimento e aplicação de atividades conceituais de funções para estudantes ingressantes de Engenharia.

Nos livros didáticos percebeu-se que os autores se preocuparam em apresentar o conceito das funções com diferentes registros de representação (algébrico, geométrico, verbal e numérico). As tarefas propostas evidenciam poucos problemas com situações reais, sendo que a maioria se restringe a aplicações na geometria, matemática financeira e física. Grande parte dos exercícios utiliza a função como uma expressão, fórmula ou regra. Apesar do conceito de função ser apresentado com diferentes registros, percebe-se que o número de tratamentos é bem maior que o número de conversões desses registros, podendo implicar em uma aquisição dos conceitos incompleta, já que os alunos não são instigados a coordenar diferentes registros de representação de um mesmo objeto, segundo Duval (2009).

Na segunda etapa, foram elaboradas 6 atividades relacionadas ao conceito das funções de função afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Dessas 6 atividades, 4 foram aplicadas em duas turmas, com um total de 16 atividades entregues, considerando as subdivisões em cada unidade de atividade. Após a correção, os resultados foram analisados qualitativamente.

A metodologia de Resolução de Problemas mostrou-se apropriada ao objeto e ao objetivo da pesquisa, uma vez que os desafios nela presentes propiciam identificar os conhecimentos já consolidados e os que ainda se encontram lacunares nos sujeitos da investigação.

Na análise dos resultados, percebeu-se a dificuldade dos alunos em identificar o conceito de funções através de sua representação verbal, no registro de sua língua natural. Os estudantes apresentaram problemas em extrair dados dos gráficos e na sua construção geométrica. Percebeu-se que a grande maioria dos alunos não conseguiram desenvolver bem as atividades, bem como não conseguiram transitar entre diferentes registros, revelando que o conceito das funções não foi efetivamente aprendido.

Apesar das atividades direcionarem os estudantes a resolverem problemas com abordagem conceitual de função, erros de procedimentos tais como cálculos algébricos também foram diagnosticados, como erros de sinal, posicionamento invertido de eixos coordenados, erros de potenciação, coincidindo com os resultados de pesquisas de Cálculo I feitas por Curi e Farias (2008), Tontini e Walter (2014) e Silva (2015), Menestrina; Moraes, 2011, Cavasotto (2011), Santos et al (2016) e Barreto (1995), referenciados nesta pesquisa.

Os estudantes responderam a algumas perguntas para diagnosticar o nível no qual se encontram quanto aos conhecimentos de Matemática. Muitos participantes responderam que apresentam dificuldades no conceito das funções e também em matemática básica, por terem feito o Ensino Fundamental e Médio há mais tempo, outros responderam que estudaram em escolas públicas e, por isso, o baixo rendimento nas atividades.

Essas afirmações confirmam estudo de Barreto (1995) relatando que um dos motivos que leva os estudantes a não conseguir um bom rendimento nas disciplinas de Cálculo é, principalmente, a má formação adquirida na educação básica, onde professores recebem um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica e consequentemente, bastante inseguros.

Um dos estudantes afirmou que essa pesquisa foi importante para “abrir seus olhos” sobre seu real conhecimento, o que se espera tenha acontecido com os demais sujeitos da investigação.

De modo geral, a pesquisa apontou a forte relação entre o que se preconiza que seja ensinado e o material didático que sustenta a formação dos alunos no Ensino Médio. Nos documentos oficiais há preocupação com inovações metodológicas, sendo assim, são necessários investimentos em infraestrutura, capacitação e valorização dos docentes. A análise dos resultados aponta para vários objetos de conhecimento que devem ser priorizados, tanto no ensino médio quanto na elaboração de projetos de nivelamento para ingressantes no ensino superior.

Está disponível para a comunidade acadêmica um Produto, constituído por um Caderno de Atividades, em que as atividades planejadas e as aplicadas durante esta investigação, encontram-se cotejadas e organizadas. As atividades, cinco delas de autoria da pesquisadora e uma outra adaptada, se apresentam como problemas que precisam encontrar uma resposta, uma espécie de desafio cognitivo, que se enquadram no que se orienta, atualmente, na didática de ensino de matemática, como Resolução de Problemas, envolvendo, cada uma delas, conceitos de funções afins: Primeira Atividade: Funções, fenômenos e conceito; Segunda Atividade: Viaduto Santa Tereza e função quadrática, Terceira Atividade: Energia elétrica e função afim; Quarta Atividade: Bactérias e função exponencial; Quinta Atividade: Logaritmos com a Torre de Hanoi e, por último, a Sexta Atividade: Consumo de energia e função de várias sentenças. A sequenciação das atividades favorece a contextualização pedagógica das tarefas. Cada atividade é acompanhada de uma breve descrição, do detalhamento do seu objetivo e dos encaminhamentos didático-pedagógicos necessários à condução do pensamento voltado para a resolução de problemas. O referido Caderno de Atividades representa, assim, um material inédito, que tem potencial para colaborar com professores do Ensino Superior no planejamento didático que contemple o conteúdo função, bem como ajudar professores do Ensino Médio que poderão utilizar as atividades como um suporte ao trabalhar com os discentes sobre os conceitos das funções.

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J E GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. Pioneira, São Paulo, 2000.

AZCÁRATE Gimenez, Carmen e DEULOFEU Piquet, Jordi. **Funciones e Graficas.** 1 reimp. Madrid: Editorial Sínteses, S.A. Coleccion: Matematicas: cultura y aprendizaje. 1996.

BAFURI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese Doutorado. Faculdade de Educação, São Paulo, 1999.

BARRETO, A. **O ensino de cálculo I nas universidades**. Informativo da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 1995.

BAZZO, Walter Antônio; PEREIRA, Luiz Teixeira do Vale. **Introdução à Engenharia** – conceitos, ferramentas e comportamentos. 4. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2013.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BOYER, C. J. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 1984.

BRAGA, Eduardo dos Santos de Oliveira. **Resolução De Problemas No Ensino Da Matemática**: algumas considerações. TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero americana – Vol. 11 - número 1 – 2020

BRASIL. LDB – **Lei de Diretrizes e Bases da Educacional.** Lei 9394/96

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: A Secretaria, 2017.

BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL, Secretaria da educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2006.

CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. Escolha e uso do livro didático. In: **Matemática: Ensino Fundamental.** João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho/coord. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. (Coleção Explorando o Ensino, v. 17)

CASARIN, N. E. F.; RUBI, G. L. **Estratégias para o ensino de Matemática** para suprir defasagens provenientes da educação básica e diminuir a evasão nas

Instituições de Ensino Superior. In: Anais da X Semana de Extensão, Pesquisa e Pós-graduação. Porto Alegre: 2014.

CAVASOTTO, Marcelo; VIALI, Lori. Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar. Boletim Gepem, n. 59, p. 15-33, 2011.

CHARNAY, R. **Aprendendo (com) a resolução de problemas**. In: PARRA, C. (org.). Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 36-47.

CHOPPIN, A. **História dos livros e das edições didáticas**: sobre o estado da arte. Educação e Pesquisa — FEUSP, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set. /dez. 2004.

CUNHA; Maria Helena - **Investigações na aula de Matemática** - Escola Superior de Educação de Viseu.

CURI, R. C.; FARIAS, R. M. S. **Métodos de estudo e sua influência no Desempenho dos alunos em disciplinas de cálculo diferencial e integral**. In: XXXVI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 36., 2008, São Paulo. Anais. São Paulo: ABENGE, 2008.

CURY, Carlos Roberto Jamil & FERREIRA, Luiz Antonio Miguel. **A Judicialização da educação**. Revista CEJ, Brasília, ano XIII, n. 45, abr./jun 2009, pp. 32-45.

CURY, H. N. **Erros, dificuldades e obstáculos em produções escritas de alunos e professores.** In: FROTA, M. C. R., BIANCHINI, B. L., CARVALHO, A. M. F. T. de (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: Papirus, 2013. Cap. 1, p. 15-41.

CURY, H. N. (2004). **"Professora, eu só errei um sinal!":** como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: H. N. CURY, **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**. Porto Alegre: EDIPUCRS.
D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. **SBEM**. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2008.

DANTE, L. R**. Didática da resolução de problemas de matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

DASSIE, Bruno Alves. As propostas pedagógicas de Euclides Roxo para o ensino da Matemática na escola secundária brasileira. Artigo publicado pelo Boletim Gepem, 2011 Disponivel em: https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/522/1/GEPEM_2011_DASSIE.pdf

DAVÝDOV, V. V. Tipos de **Generalización en la Enseñanza**. Havana, Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (FascículoI). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino Domingues. Campinas: Editora da Unicamp,2004.

FERNANDES FILHO, O. P. **O desenvolvimento cognitivo e a reprovação no curso de Engenharia**. In: XXIX COBENGE - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2001, Porto Alegre.

FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. 2007. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e Metodológicos. Campinas : Autores Associados (Coleção Formação de Professores), 2007.

FREIRE, Paulo. ***Pedagogia da Autonomia*****:** saberes necessários à prática educativa. 6ed. São Paulo: Paz e Terra, 1997.

FROTA, Maria Clara Rezende. 2010. **A Diversidade de Estilos de Aprendizagem Matemática na Sala de Aula no Ensino Superior**. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador: s.n., 2010

FROTA, M. C. R. **Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em cálculo.** In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. de (Orgs.). Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior. Campinas: Papirus, 2013. Cap. 3, p. 61-88.

IEZZI, G....[et al.]. **Matemática: ciência e aplicações**, volume 2 e 3: ensino Médio. 7 ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

IGLIORI, Sonia Cristina B. e ALMEIDA, M. V. 2013. **Educação Matemática no Ensino Superior e Abordagens de Tall Sobre o Ensino**: Aprendizagem do Cálculo. 2013, Vol.15.

ISEWAKI, Nancy Tiemi. **A Prática Educativa Na Introdução Do Cálculo Com Várias Abordagens Em Cursos De Engenharia**. Dissertacao de mestrado em Educação à Matemática, Universidade Pontifícia Católica de Minas Gerais, 2019.

LAUDARES; João Bosco **O Conceito E A Definição Em Matemática: Aprendizagem E Compreensão** Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática 2013.

LACHINI, Jonas. **Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

LANCHINI Jonas, LAUDARES, J. B. **A Prática Educativa sob o olhar dos professores de Cálculo**. Belo Horizonte, Fumarc, 2001.

LIMA, Paulo Vinícius Pereira, Geraldo Eustáquio Moreira, Lygianne Batista Vieira; Maria Isabel Ramalho Ortigão, **Brasil no Pisa (2003-2018):** reflexões no campo da Matemática

MELLO, J.C.C.B.S et al. **Mudanças no Ensino de Cálculo I**: Histórico e Perspectivas. Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. 2001.

MENESTRINA, T. C.; MORAES, A. F. **Alternativas para uma aprendizagem Significativa em Engenharia:** Curso de Matemática Básica. Revista Brasileira de Ensino de Engenharia, v.30, n.1, p.52-60, 2011.

NASSER. L. **Educação matemática no ensino superior-GT4 da SBEM texto 2**: ênfase nas pesquisas envolvendo o cálculo. XII Encontro Nacional de Educação Matemática 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5197_4401_ID.pdf. Acesso em 20 fev 2016.

NASSER. Lilian Et al. **Funções no ensino médio**: o que muda com a proposta da base nacional comum curricular? XII Encontro Nacional de Educação 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5197_2682_ID.pdf Acesso em: 23 jun 2021.

OLIVEIRA, M. C. A.; RAAD, M. R. **A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo**. Boletim GEPEM, n. 61, p. 125-137, jul–dez. 2012.

OGLIARI, Lucas Nunes. **O conteúdo de funções na escola:** rastros dos movimentos de reforma nos livros didáticos de matemática do ensino fundamental. 2014. 190 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PISA. Brasil no PISA 2015: **análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros** / OCDE-Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. — São Paulo: Fundação Santillana, 2016. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf. Acesso em 03 nov 2018.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. da. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática**.

PONTE, J. P. da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p.13 – 27.

RABELO, M. L. **Avaliação educacional:** fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. Rio de janeiro: SBM 29 (2013), 30–31.

RAFAEL, R.C. **Cálculo Diferencial e Integral:** um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação. 2017. 103f. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Curso de Pós-graduação em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003.

RICHAUDEAU, F. **Conception et production des manuels scolaires:** guide pratique. Paris: Unesco, 1979.

RODRIGUES, L. L. **A Matemática ensinada na escola e a sua relação com o cotidiano.** Brasília: UCB, 2005.

ROSA, C. de M.; ALVARENGA, K. B.; SANTOS, F. F. T. dos. **Desempenho acadêmico em cálculo diferencial e integral**: um estudo de caso. Revista Internacional de Educação Superior, Campinas, SP, v. 5, p. e019023, 2019. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/riesup/article/view/8653091. Acesso em: 16 out. 2021.

ROXO, Euclides. **A Matemática na Escola Secundária.** São Paulo: Nacional, 1937.

SANTOS, D. M. M., PINTO; G.M.F., SOUZA; I.A., FÉLIX; L.V. - **Atividades de tutoria:** uma alternativa ao fracasso em cálculo diferencial e integral – In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016

SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem Conceitual e Organização do Ensino**: contribuições da Teoria da Atividade. Araraquara, SP: JM Editora, 2004.

SCOZ, B. **Psicopedagogia e a realidade escolar:** o problema escolar de aprendizagem. 10 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002

SILVA, M.A.; et.al. **Dificuldades de aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral:** estudo de caso com alunos do curso de licenciatura em química. In: Congresso de Pesquisa e Inovação da Rede Norte e Nordeste de Educação Tecnológica - V CONNEPI. Alagoas, 2010.

TONTINI, Gérson; WALTER, Silvana. **Pode-se identificar a propensão e reduzir a evasão de alunos?** Ações estratégicas e resultados táticos para instituições de ensino superior. Avaliação, Campinas, v. 19, n. 1, p. 89-110, 2014.

VALENTE, W. R. **Livro didático e educação matemática:** uma história inseparável. In: ZETETIKÉ, Unicamp, v. 16, n. 30, São Paulo, 2008.

VAZ, I. do C. **Os conceitos de limite, derivada e integral** em livros didáticos de cálculo e na perspectiva de professores de matemática e de disciplinas específicas em cursos de engenharia. Belo Horizonte: Cefet, 2010. 176 p. Dissertação (Mestrado) – Mestrado em Educação Tecnológica, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

VINNER, S. **The role of definitions in teaching and learning**. In: Advanced Mathematical Thinking (Ed. David Tall). Kluwer publications, 1991.

WALLE, John A. Van de; KARP, Karen S.; BAY-WILLIAMS, Jennifer M. **Elementary and middle school mathematics**: teaching developmentally. 7ªed. Allyn & Bacon. 2010.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **Le concept de fonction** jusqu´au milieu du XIXe siècle.In:Fragments d´historie des Mathématiques. Brochure A.P.M. E. P. n. 41, p.7-67, 1981.

ZUFFI, E. M. e PACCA, J.L. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função.** Educação Matemática em Revista. Número 9, ano 8, 2001.

ZUIN, E. de S. L. **Cálculo uma abordagem histórica**. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J. B. (Orgs). A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 13-38.

APÊNDICE - PRODUTO

PUC Minas

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DÉBORA FIALHO SODRÉ

PRODUTO DA PESQUISA

O ESTUDO DOS CONCEITOS DE *FUNÇÕES* COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

BELO HORIZONTE, MG

2021

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é obrigatória em vários cursos do Ensino Superior. A grande dificuldade de compreensão do conteúdo e o baixo rendimento dos alunos na disciplina acarretam altos índices de reprovação e até a evasão do curso. Através da minha experiência como professora de aulas particulares e estudo em diversas pesquisas relacionadas ao tema, pude perceber que, em grande parte, essas dificuldades estão ligadas a lacunas na aprendizagem dos conteúdos de matemática básica no Ensino Fundamental e Médio.

Este Caderno Diagnóstico de Atividades faz parte de minha pesquisa desenvolvida no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e Ciências da PUC-MG. Compreende 6 (seis) atividades compostas por questões elaboradas com objetivo de investigar o desempenho dos estudantes a respeito dos conceitos das funções afim, quadrática, logarítmica e exponencial. Desta forma, tem-se um conjunto de atividades que estão disponíveis à comunidade pesquisadora da Educação Matemática Superior, e também a docentes do Ensino Básico.

2. APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES

Buscou-se, nessa investigação, apresentar aos alunos problemas que priorizam situações reais, com o intuito de facilitar a rememoração dos conhecimentos prévios sobre os conceitos de funções.

Laudares (2013) afirma que a descrição, a interpretação, a análise e o ato de sintetizar são habilidades que caracterizam a compreensão conceitual, portanto buscou-se na pesquisa atividades que levem o sujeito a demonstrar tais habilidades.

Partindo da perspectiva teórica de Duval (2009), para quem a Educação Matemática, a aquisição conceitual de um objeto é necessariamente baseada na capacidade de transitar e converter diferentes registros, priorizou-se atividades que levassem os sujeitos da pesquisa a trabalhar com diferentes representações de objetos matemáticos como leitura, interpretação de texto, expressões e interpretações linguísticas, gráficas, de esquemas e tabelas.

Em consonância com esse pensamento, Laudares (2013) assegura que a definição formulada apenas algebricamente, pode não favorecer o fluir do conceito. Então, buscou-se imprimir nas atividades diferentes tipos de representações, como gráficos e tabelas para que os elementos constituintes do conceito sejam melhores explicitados.

As atividades propostas são exploratórias em direção à busca do resgate prévio dos conceitos matemáticos, como também da interdisciplinaridade, embasada em Laudares (2013), que afirma que o conceito é melhor explorado com diversidade analítica em situações não apenas matemáticas; mas também, das ciências físicas, biológicas e da realidade vivida.

As atividades também buscaram resgatar o conhecimento prévio dos participantes pela abordagem da intramatemática, em situações que exploram a própria matemática, como aritmética, álgebra, ou representações gráfica e verbal, segundo o mesmo autor.

O objetivo do desenvolvimento e aplicação das atividades foi o de pesquisar a performance dos estudantes dos períodos iniciais de cursos de Engenharia quanto ao conhecimento de conceitos de funções e identificar possíveis defasagens sobre este conteúdo.

As atividades foram desenvolvidas com base no Levantamento Bibliográfico realizado e de livros didático, com algumas questões autorais e outras adaptadas. Este produto contempla questões abertas, com sequência de várias perguntas elaboradas para facilitar a análise dos dados obtidos.

2.1. PRIMEIRA ATIVIDADE: Funções, fenômenos e conceito

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Função afim • Função quadrática • Função exponencial • Função logarítmica
Descrição da Atividade	A primeira atividade aplicada foi adaptada da dissertação de mestrado: " A Prática Educativa na Introdução do Cálculo com Várias Abordagens em Cursos de Engenharia" de Nancy Tiemi Isewaki (PUC Minas - 2018). Priorizou-se iniciar com essa questão, pois pressupõe-se que ela tenha um menor grau de dificuldade, sendo assim, os alunos ganhariam confiança e ânimo para as demais. A atividade consiste em uma tabela com três colunas: a primeira numerada, contendo quatro nomes de fenômenos representados por sua função correspondente: afim, quadrática, logarítmica e exponencial. Na segunda coluna, o nome das funções e na terceira coluna os conceitos dessas funções, em linguagem verbal.
Objetivo	O objetivo dessa atividade foi, primeiramente, que o aluno, fundamentado na interdisciplinaridade identificasse a função relacionada ao seu fenômeno. As funções foram apresentadas com variáveis diferentes das usuais x e y. Era objetivo da atividade também, que o participante associasse cada função com a devida representação descritiva de seu conceito, em consonância com o pensamento de Laudares (2013), afirmando que o primeiro momento do ato de conceituar vem de nomear, compreendendo a linguagem a partir de associações das imagens semióticas das palavras. Espera-se que o estudante tenha formado um conceito imagem como sugere Vinner (1991) e, através da visualização da fórmula e descrição do conceito, evoquem em sua memória a correta associação com o tipo de função.

Continuação da Primeira Atividade		
Primeira Atividade		
Vários modelos de funções podem ser encontrados nas ciências naturais, nas ciências sociais, nas engenharias e em diversas áreas. A tabela abaixo apresenta na coluna da esquerda algumas dessas funções associadas a seus fenómenos. A coluna do meio apresenta o nome das funções e a coluna da direita os conceitos que caracterizam essas funções. Identifique as funções da coluna 1 e numere as outras duas colunas de forma que se estabeleça corretamente a correspondência entre o nome da Função e o seu conceito.		
1 – Cinemática $S = S_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$	( ) Função logarítmica	( ) Representa situações em que ocorrem grandes variacões (crescimento ou decrescimento) de forma rápida. É uma funçåo contínua cujo gráfico é representado por uma curva totalmente acima das abscisas.
2 – Matemática Financeira $M = C.(1 + r)^t$	( ) Função Linear	( ) Apresenta urna variação à uma taxa constante, ou seja, trata da representacão de grandezas proporcionais. O gráfico da função é uma reta, o sinal do coeficiente angular indica a inclinação da reta.
3 - Abalos sísmicos $M = \log A - \log A_0$	( ) Função Exponencial	( ) Caracteriza-se como uma função inversa da função exponencial. O gráfico dessa funcão é uma curva assintota ao eixo y, isto é, sua curva nunca “toca" o exo y.
4 - Economia $P(x) = mx+P_0$	( ) Função Quadrática	( ) Função polinomial de grau 2, possui o gráfico definido por uma parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo.

2.2. SEGUNDA ATIVIDADE: Viaduto Santa Tereza e função quadrática

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos Explorados	• Conceitos da função quadrática
Descrição Da Atividade	A segunda atividade sobre função quadrática foi contextualizada através da representação do arco principal do viaduto de Santa Tereza em Belo Horizonte. O desenho de um projeto de maquete do arco parabólico foi apresentado com algumas de suas medidas.
Objetivos	Nessa atividade, objetivou-se que o aluno demonstrasse conhecimento dos conceitos de máximo e mínimo locais, crescimento e decrescimento e simetria da função quadrática, identificasse, através do desenho, se tratar de uma função quadrática e posicionasse corretamente os eixos coordenados, encontrando, assim, a equação da parábola. Foi objetivo dessa atividade, também, que o estudante conseguisse comparar o arco parabólico do viaduto com a função quadrática, já que Laudares (2013) relata que analogias e comparações são importantes meios para a compreensão conceitual.

Continuação da Segunda Atividade
Segunda Atividade

Um professor de engenharia aplicou um trabalho onde os alunos tinham que desenvolver uma maquete inspirada no viaduto de Santa Tereza. A maquete foi construída em arco com 8dm de comprimento e tirantes espaçados a cada 1dm, conforme desenho.

Figura 1 – Maquete do Viaduto de Santa Tereza

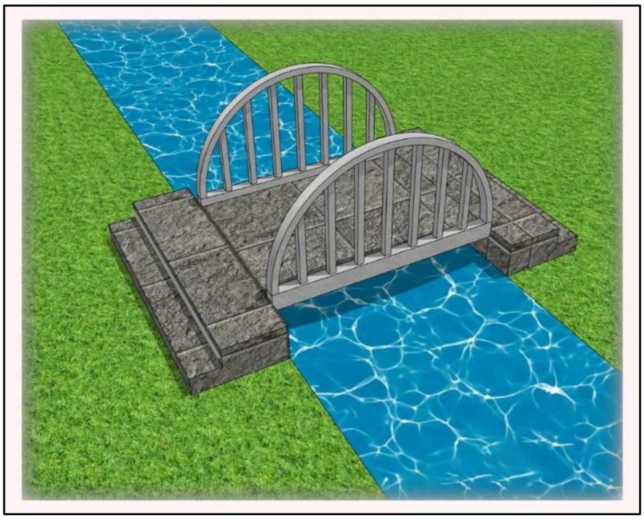
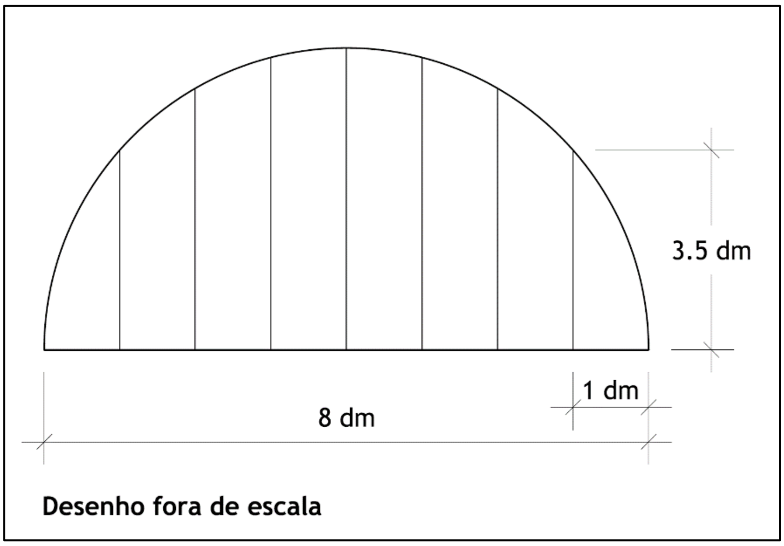


Figura 2 – Desenho técnico do Arco



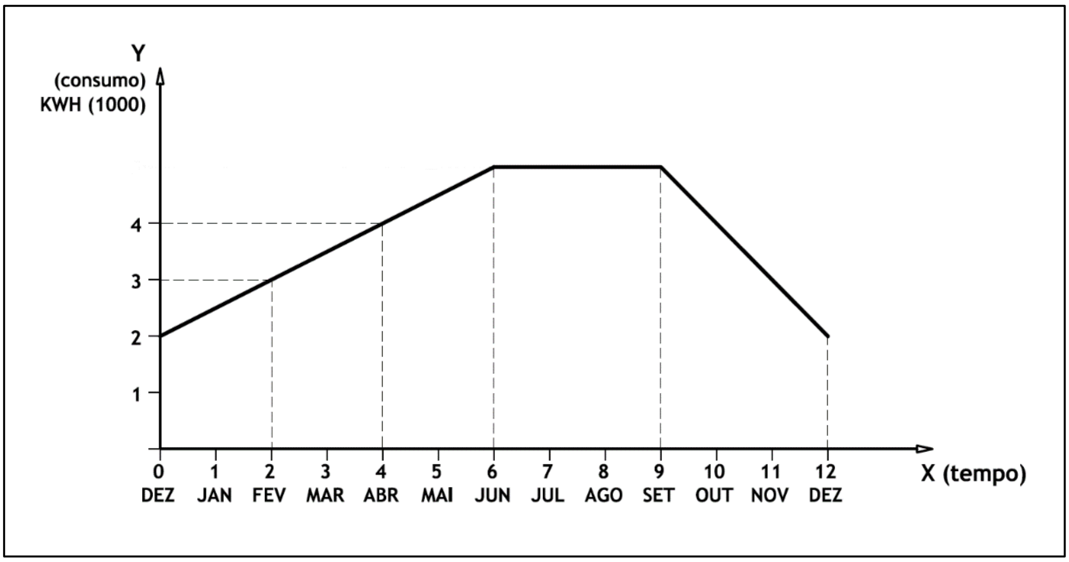
Continuação da Segunda Atividade
Observando a figura do arco responda às perguntas abaixo:
a) O arco do viaduto representa o gráfico de uma função matemática conhecida? Qual?
b) Esse arco representa uma função totalmente crescente?
c) Esse arco representa uma função somente decrescente?
d) Considere o eixo x como a linha de base do viaduto. Para que o gráfico fique simétrico em relação ao eixo vertical, onde você deve posicionar o eixo y?
e) Considerando o gráfico construído conforme o item anterior, encontre a equação do arco parabólico.
f) Descreva os intervalos em que a equação é crescente e decrescente.
g) A função tem valor máximo? E valor mínimo? Se afirmativo, quais são estes valores?

2.3. TERCEIRA ATIVIDADE: Energia elétrica e função afim

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Função afim • Função constante
Descrição da Atividade	A terceira atividade sobre função constante e afim explora, através de um fenômeno físico, os conceitos destas funções. Apresentado um gráfico com o consumo de energia em dezembro de 2019 até dezembro de 2020 e um texto introdutório explicativo, contendo mais informações sobre o consumo. O gráfico era composto por função definida por partes composta com duas funções afins e uma constante.
Objetivos	Objetivou-se, nessa atividade, que o aluno interpretasse o gráfico e o texto e apresentasse seus conhecimentos sobre o conceito de função afim e função constante, tais como o conceito de proporcionalidade. Era objetivo desta atividade também que o aluno demonstrasse habilidade em transitar por diferentes registros semióticos, como a escrita em língua natural, escrita algébrica e gráfica. Ao final das perguntas foi pedido também o desenvolvimento das equações.

Terceira Atividade
Em dezembro de 2019, o consumo de energia elétrica de uma empresa foi de 2000 kw/h. No primeiro semestre o consumo cresceu linearmente, registrando 4000 kw/h no mês de abril de 2020. No período de junho a setembro, o consumo manteve-se estabilizado. Nos últimos meses do ano, houve uma queda linear no consumo, registrando em dezembro de 2020, a mesma marca de dezembro de 2019. O eixo horizontal é representado pelo tempo em meses e o eixo vertical é representado pelo consumo em kw/h.

Figura 3 - Gráfico de consumo de energia



Analise o gráfico do consumo nos seguintes intervalos:

Primeiro Intervalo **Dezembro de 2019 a Junho de 2020**
a) Neste intervalo determine a razão (divisão) da variação do consumo em relação a variação do tempo.
b) Essa relação é de proporcionalidade direta?

Continuação da Terceira Atividade
c) Se essa razão proporcional tem constante de proporcionalidade positiva, o que você conclui sobre o crescimento ou decrescimento dessa função?
d) No instante inicial, qual o valor do consumo?
e) Determine a equação que representa o consumo neste intervalo.
Segundo Intervalo **Junho de 2020 a Setembro de 2020**
a) O que você pode observar neste intervalo? O consumo aumenta (cresce) ou diminui (decresce)?
b) Qual o consumo de energia registrado neste período?
c) Este valor pode ser considerado como o maior consumo durante todo o período de dezembro de 2019 a dezembro de 2020?
Terceiro Intervalo **Setembro de 2020 a Dezembro de 2020**
a) Qual o valor do consumo em 2020?
b) Considerando que neste período houve uma queda linear do consumo, determine a razão (divisão) da variação do consumo em relação a variação do tempo.
c) Essa relação é de proporcionalidade direta?
d) Se essa razão proporcional tem constante de proporcionalidade negativa, o que você conclui sobre o crescimento ou decrescimento dessa função?
e) Determine a equação que representa o consumo neste intervalo

.

.

2.4. QUARTA ATIVIDADE: Bactérias e função exponencial

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Potenciação • Função exponencial
Descrição da Atividade	Esta atividade sobre função exponencial foi elaborada com uma situação contextualizada de um fenômeno biológico do crescimento de uma cultura de bactérias. O enunciado, relata momento inicial de observação do crescimento de uma cultura de bactérias, explorando também horas anteriores ao início dessa observação, para que o estudante trabalhasse com valores de abscissa negativos. Foi pedido que os alunos utilizassem uma calculadora para resolução.
Objetivo	Essa atividade, com várias perguntas, teve como objetivo analisar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o conceito de função exponencial. Foram exigidas diferentes representações semióticas como interpretação de texto, capacidade de construir um gráfico através de dados organizados em uma tabela, registros formais (algébricos, numéricos e simbólicos) e registros da língua natural. Era necessária a identificação de qual era a função e as suas propriedades tais como: crescimento ou decrescimento e gráfico de curva contínua localizado totalmente acima do eixo das abscissas. A equação matemática foi dada com possibilidade maior do estudante de relembrar o conceito imagem da função. A proposta de interdisciplinaridade está presente na atividade, já que houve uma contextualização com um problema biológico para representar uma função exponencial, possibilitando analogias para fomentar a heurística. Elementos da intramatemática também estão presentes na atividade, pois os sujeitos da pesquisa precisavam produzir gráfico, desenvolver habilidades aritméticas, algébricas e gerar descrição escrita.

Continuação da Quarta Atividade
Quarta Atividade
Um biólogo observou uma cultura de bactérias e estabeleceu a seguinte lei para seu crescimento $Q(T) = 100 \times 2^t$. Onde Q(t) é O número de bactérias e t o tempo em horas.   Consideramos t=0 como a hora inicial da observação, valores de t negativos correspondem às horas anteriores ao início da observação, e valores de t positivos correspondem às horas que sucedem o início da observação.
a) Identifique qual é a variável dependente e a variável independente do estudo.
b) Quantas bactérias existiam após 1h, 2h, 3h, 4h e 10h de observação?
c) Uma vez estabelecido o modelo matemático, podemos calcular a quantidade de bactérias que já existiam em horas anteriores ao início do evento, neste caso usaremos valores de t negativos. Assim, qual o número de bactérias 1 horas antes do evento, 2 notas antes do evento, 3 horas antes do evento e 4 horas antes do evento.   Preencha a tabela abaixo.

tempo	bactérias
-4h	
-3h	
-2h	
-1h	
0h (hora inicial da observação)	
1h	
2h	
3h	
4h	
10h	

2.5. QUINTA ATIVIDADE: Logaritmos com a Torre de Hanoi

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Potenciação • Função logarítmica • Função exponencial
Descrição da Atividade	De acordo com Dante (2002), o jogo é um ótimo instrumento didático, pois durante a sua realização, o aluno é desafiado a pensar, estabelecer estratégias, desenvolvendo, dessa maneira, sua autonomia. Sendo assim, a quinta atividade foi desenvolvida com o jogo “Torre de Hanói” que pode ser jogado com um mínimo de três discos e um máximo de oito, de tal forma que, quanto maior o número de discos, maior o número de movimentos mínimos realizados para vencer o jogo, formando, assim, uma função exponencial.
Objetivos	Esta atividade foi desenvolvida com o objetivo de explorar a interpretação gráfica e o comportamento das funções exponencial e logarítmica como funções inversas. Os participantes deveriam identificar as variáveis dependentes e independentes e, a partir disso, construir tabelas e gráficos, interpretá-los e relacionar as curvas do estudo com seus respectivos conceitos. Para Vygotsky (1987), os conceitos são construídos pela capacidade que a criança e o adolescente têm de abstração e de generalização. Nesse sentido, para explorar o conceito das funções exponencial e logarítmica, foi escolhido o jogo Torre de Hanoi, pois leva o aluno a entender simbolização, sequenciamento, generalização e o raciocínio lógico.

Continuação da Quinta Atividade
Quinta Atividade
A torre de Hanói é um famoso jogo que consiste em uma base contendo três pinos. Dois pinos ficam vazios e em um dos pinos estão dispostos alguns discos em ordem crescente de diâmetro, debaixo para cima. O objetivo do jogo é montar a mesma disposição dos discos do primeiro pino para um dos dois outros pinos que estão livres, com a menor quantidade de jogadas (movimentos) possíveis. A regra impõe que só se pode mover um disco de cada vez, sendo que um disco de maior diâmetro nunca pode ficar em Cima de um disco de menor diâmetro. Figura 4 -Torre de Hanói 
Para determinar a quantidade mínima de movimentos em relação ao número de discos, a fórmula pode ser representada por M(n) = 2^n-1 onde M(n) é a quantidade mínima de movimentos para cada jogada e n é o número de discos.
a) Qual a variável dependente e qual a variável independente?
b) Qual a quantidade mínima de jogadas para 0, 1, 2, 3, 4 e 5 discos?
c) Construa uma tabela que represente a situação do item a.

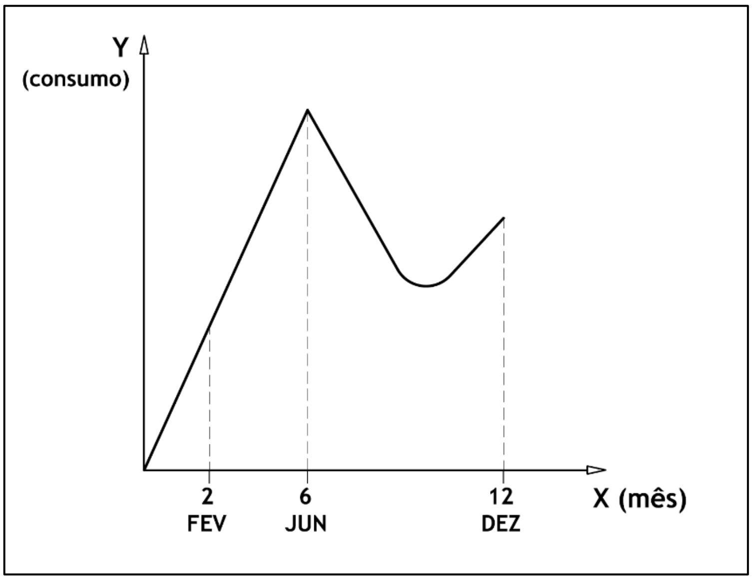
d) Plote no sistema de eixos os dados da tabela construída, indicando a variável independente na horizontal e dependente na vertical, e una os pontos.
e) A curva obtida no item d corresponde a que tipo de função?
f) Aumentando o número de discos o que acontece com a quantidade mínima de jogadas?
g) Construa uma nova tabela invertendo os pares ordenados do item b.
h) Plote no sistema de eixos os dados da nova tabela construída, considerando agora o número de discos como variável dependente e as jogadas mínimas como variável independente. Una os pontos.
i) A curva obtida no item h corresponde a que tipo de função?
j) Como se comportam os valores das funções? Crescem ou decrescem?
k) Qual das duas curvas cresce mais rapidamente?
l) Quando em matemática trocamos o conjunto do domínio com o conjunto do contra domínio que tipo de função?

2.6. SEXTA ATIVIDADE: Consumo de energia e função de várias sentenças

Tópicos Da Atividade	
Conteúdos explorados	• Função Afim • Função Quadrática
Descrição da Atividade	A atividade consiste num gráfico representando a variação do consumo de energia por duas funções matemáticas e perguntas relacionadas ao conceito dessas funções.
Objetivos	Esta atividade foi desenvolvida com o objetivo de explorar a interpretação gráfica e o comportamento das funções afim e quadrática. O estudante tinha que ser capaz de reconhecer as duas funções que representavam o mesmo fenômeno no gráfico e, a partir de então, responderem perguntas relacionadas aos conceitos dessas funções.
Sexta Atividade	

O gráfico abaixo representa o consumo mensal de água de uma residência no período de 1 ano.

Figura 5 – Gráfico de consumo de água



Continuação da Sexta Atividade

Tabela 1 - Tabela de consumo de água

Mês	Consumo m^3
Fevereiro (2)	4
Agosto (8)	6
Dezembro (12)	6

Geralmente, os fenómenos são variáveis com diversidade de funções matemáticas, que se denomina "função por partes".

a) Esse gráfico representa um fenómeno como duas funções matemáticas, quais são elas?

b) Na primeira parte onde a variação é linear, relacione as grandezas e verifique se há uma proporcionalidade direta

c) Na segunda parte a representação do fenómeno é uma curva, qual é o modelo matemático que se aproxima mais dessa representação?

d) Essa proporcionalidade é direta?

e) Determine a equação do consumo.

f) Qual o mês de maior consumo?

g) Em que período o consumo decaiu?

h) Qual o mês de menor consumo?

i) Entre os meses de junho e dezembro, qual foi o menor consumo?

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. SP, Editora Ática, 2002.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais** (Fascículo). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LAUDARES; João Bosco. O conceito e a definição em Matemática: Aprendizagem e Compreensão. Anais do XI **Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2013.

VIGOTSKY, L.S. **Pensamento e Linguagem**, SP, Martins Fontes, 1987.

VINNER, S. The role of definitions in teaching and learning. In: **Advanced Mathematical Thinking** (Ed. David Tall). Kluwer publications, 1991