PUC Minas

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Cleicione Cecilia Coelho Oliveira

CRIAÇÃO E ANÁLISE DA APLICAÇÃO DE ATIVIDADES DE CUNHO PROCEDIMENTAL DE CÁLCULO PARA ESTUDANTES INGRESSANTES EM CURSOS DE ENGENHARIA

Belo Horizonte

2021

Cleicione Cecilia Coelho Oliveira

CRIAÇÃO E ANÁLISE DA APLICAÇÃO DE ATIVIDADES DE CUNHO PROCEDIMENTAL DE CÁLCULO PARA ESTUDANTES INGRESSANTES EM CURSOS DE ENGENHARIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Dr. João Bosco Laudares.

Eixo Temático: Matemática

Belo Horizonte
2021

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

O48c Oliveira, Cleicione Cecilia Coelho
Criação e análise da aplicação de atividades de cunho procedimental de cálculo para estudantes ingressantes em cursos de engenharia / Cleicione Cecilia Coelho Oliveira. Belo Horizonte, 2021.
78 f. : il.

Orientador: João Bosco Laudares
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Matemática - Problemas, questões, exercícios. 2. Álgebra - Estudo e ensino. 3. Cálculo - Estudo e ensino. 4. Cálculo diferencial - Estudo e ensino. 5. Cálculo integral - Estudo e ensino. 6. Aprendizagem por atividades. 7. Prática de ensino. 8. Estudantes de engenharia. I. Laudares, João Bosco. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 51:62

Ficha catalográfica elaborada por Pollyanna Iara Miranda Lima - CRB 6/3320

Cleicione Cecilia Coelho Oliveira

CRIAÇÃO E ANÁLISE DA APLICAÇÃO DE ATIVIDADES DE CUNHO PROCEDIMENTAL DE CÁLCULO PARA ESTUDANTES INGRESSANTES EM CURSOS DE ENGENHARIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências e Matemática.

Eixo Temático: Matemática

Prof. Dr. João Bosco Laudares - PUC Minas (Orientador)

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda - PUC Minas (Banca Examinadora)

Profª. Drª. Eliane Scheid Gazire - PUC Minas (Banca Examinadora)

Belo Horizonte, 30 de abril de 2021.

A minha mãezinha Maria Cecilia Silva (in memoriam), que sempre será minha fonte de inspiração, luz, conforto e paz.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai e minha mãe (em memória), a meu esposo e a toda minha família, pelo incentivo, compreensão e amor.

A PUC Minas, pelo Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, e aos professores, pelo carinho e dedicação, pelas trocas de experiências e ensinamentos que contribuíram não somente para o meu crescimento profissional, mas também para o pessoal.

Ao professor e orientador Dr. João Bosco Laudares, pela amizade, incentivo, força e por toda oportunidade de aprendizagem.

Aos meus colegas de mestrado e companheiros em todos os momentos.

Aos alunos que responderam à Avaliação Diagnóstica.

Ao Centro Universitário de Patos de Minas (UNIPAM) pelo incentivo e por investir em meu crescimento intelectual. A todo corpo docente e discente que compõe o curso de Engenharia Civil, pelo apoio e amizade.

A todos que fizeram parte e contribuíram para concretização desta pesquisa, deixo meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Esta Dissertação apresenta resultados de uma investigação sobre procedimentos algébricos experimentados em estudantes de Engenharia. É parte de um Projeto de Pesquisa de Nivelamento de estudantes de Engenharia e sua integração à Universidade, financiado pelo Fundo de Incentivo à pesquisa da PUC Minas-FIP-PUC. Nesta dissertação, o objeto estudado contempla os procedimentos algébricos: cálculo, algoritmos, operações com produtos notáveis, entre outras operações. Juntamente com esse estudo, o referido Projeto estudou também os conceitos e resolução de problemas do conteúdo básico do Cálculo Diferencial e Integral, em outras duas Dissertações. As referências teóricas que deram suporte ao objeto basearam em obras de autores que estudam as questões do processo ensino e aprendizagem, em especial da introdução do Cálculo Diferencial e Integral. Os sujeitos foram estudantes de uma Escola de Engenharia do interior de Minas Gerais. A análise foi qualitativa, partindo da problematização dos acertos e erros dos exercícios. Verificou-se uma boa *performance* dos estudantes, apesar de alguns erros pontuais nos passos de resolução.

Palavras-chave: Procedimentos algébricos. Estudantes de Engenharia. Nivelamento.

ABSTRACT

This Dissertation presents results of an investigation on algebraic procedures experienced in Engineering students. It is part of a Leveling Research Project for Engineering students and their integration with the University, financed by the Research Incentive Fund of PUC Minas-FIP-PUC. The object studied was algebraic procedures: calculation, algorithms, operations with notable products, among other operations. Together with this study, the referred Project also studied the concepts and problem solving of the basic content of Differential and Integral Calculus, in two other Dissertations. The theoretical references that supported the object were based on works by authors who study the issues of the teaching and learning process of the introduction of Differential and Integral Calculus. The subjects were students of an Engineering School in the interior of Minas Gerais. Due to the COVID-19 pandemic, the activities were applied virtually, making it more difficult for a larger number of students. The analysis was qualitative based on the problematization of the successes and errors of the exercises. There was a good performance of the students, with occasional errors in the resolution steps.

Keywords: Algebraic procedures; Engineering students; Leveling.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADRO

LISTA DE SIGLAS

ABENGE – Associação Brasileira de Educação em Engenharia

COBENGE – Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia

FIP – Fundo de Incentivo à Pesquisa

PUC MINAS – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

UNIPAM – Centro Universitário de Patos de Minas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dentre as ciências vivenciadas na sociedade contemporânea, a Matemática é uma das mais antigas e, por meio do conhecimento matemático, o homem vem tentando compreender e atuar em seu mundo, por isso se percebe aquele relacionado ao cotidiano humano.

A educação, em especial a educação matemática, bem como o próprio fazer matemático, pode ajudar a construir uma humanidade ancorada em respeito, solidariedade e cooperação (D'AMBROSIO, 2012, p.12). Entretanto, há necessidade de se rever a prática docente e as novas tendências de ensino e aprendizagem.

Lachini e Laudares elucidam a conduta do docente como transmissor do conhecimento, em detrimento de um papel de detentor do saber, quando afirmam que:

> O repensar da ação acadêmica aponta para a emergência de novas bases sobre as quais possa ser apoiada e reformulada a conduta do docente, não mais como agente ativo e exclusivo da transmissão do saber, mas como coordenador e facilitador de múltiplas atividades na construção do conhecimento (...) (LACHINI; LAUDARES, 2001, p. 68).

No âmbito da Matemática, Laudares (2004, p. 294) afirma que: "... espera-se do professor a criação de um novo ambiente escolar do questionamento, encorajando o estudante a propor soluções, explorar possibilidades... utilizando a Matemática como instrumental na resolução de problemas".

Para Isewaki (2019), existe uma qualidade do que é necessário para compreensão envolvendo significados matemáticos, como são desenvolvidos e a forma como ocorre em relação ao conhecimento matemático apresentado e construído na escola e no curso de Cálculo.

As dificuldades dos alunos em se tratando dessa importante disciplina foram observadas em meus anos de docência. Iniciei minha prática docente lecionando para alunos do 7º Ano do Ensino Fundamental, também do 1º ano do Ensino Médio em que, desde então, verifiquei que os alunos possuíam muitas dificuldades específicas de interpretação e análise de situações cotidianas e contextualizadas.

Conclui minha graduação em Matemática - Licenciatura Plena - em 2003. Em 2012, o curso de Especialização em Matemática; já a graduação em bacharelado em Engenharia Civil foi concluída em 2013. No ano seguinte, participei do processo seletivo para contratação de professores para o curso de Engenharia Civil do Centro Universitário de Patos de Minas – UNIPAM - tendo sido aprovada, lecionei, até 2019, disciplinas que necessitavam de conhecimentos de matemática básica, tais como Resistência dos Materiais I e Tópicos

Integradores I do 5º período do curso, em que tive a oportunidade de vivenciar as dificuldades e lacunas que os alunos demonstravam em relação a quesitos básicos de Matemática. Em seguida, lecionei a disciplina de Projeto Integrador nos 2º, 3º e 4º períodos do referido curso, em que as mesmas dificuldades foram constatadas.

Em 2018, ingressei no Mestrado de Ensino em Ciências e Matemática do Programa de Pós-graduação na Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC Minas, em busca de aperfeiçoamento didático, aprendizagem de novas técnicas de ensino e aprimoramento dos conteúdos ministrados, tendo como objetivo principal encontrar ferramentas educacionais que permitam minimizar as lacunas apresentadas pelos alunos em sala de aula; além de dar relevância à aplicabilidade do conhecimento adquirido e valorizar a Matemática presente no nosso cotidiano.

É fato que os alunos dos cursos de engenharias são expostos constantemente a situações que necessitam de conhecimentos básicos da Matemática, de modo que o currículo dos cursos de engenharia contempla, com boa carga horária, as disciplinas das ciências exatas: Matemática, Física, entre outras, mas, as dificuldades apresentadas pelos alunos, principalmente em relação à disciplina de Cálculo I, se tornam evidentes, o que influencia no insucesso de disciplinas subsequentes, sejam as tecnológicas ou as demais das ciências exatas: Cálculo II, III, Estatística, Equações Diferenciais, entre outras.

Nos últimos quinze anos, muito se tem refletido, discutido e pesquisado sobre a questão das dificuldades do aprendizado em matemática nas disciplinas básicas dos cursos universitários na área de ciências exatas (MALTA, 2004). Nesse sentido, como estamos inseridos no cotidiano de nossos alunos, se torna necessário buscar novas formas de ensino e trabalhar com metodologias mais dinâmicas que os levem a criar o seu próprio saber.

Realizada uma análise sobre minha prática docente na educação básica e no ensino superior e sobre minhas expectativas quanto à pesquisa, decidi verificar o nível de conhecimento na área de exatas que os estudantes universitários possuem e as dificuldades apresentadas por eles em relação à compreensão dos conceitos fundamentais e dos procedimentos nos cálculos aritméticos e algébricos da matemática básica que afetam o aprendizado de Cálculo em cursos de graduação.

Um erro que parece simples em um cálculo matemático pode demonstrar inúmeras dificuldades imbricadas em operações elementares ou aplicação de fórmulas específicas. (CURY, 2004, p.111)

Fiz parte do Projeto de pesquisa: “Nivelamento de Estudantes de Cursos de

Engenharia e sua Integração à Universidade", realizado em 2020/2021, cadastrado como FIP 2020/24825-1 S. As instituições desenvolvedoras foram a PUC Minas (Mestrado de Ciências e Matemática/Departamento de Matemática e Estatística) e Escola de Engenharia da Universidade FUMEC, com apoio institucional do Fundo de Incentivo à Pesquisa – FIP / PUC Minas. Esta dissertação é parte deste Projeto maior, focada em procedimentos de cálculos.

Conforme Rezende (2020, p.28), diversas instituições de ensino superior estão realizando cursos preparatórios para iniciação da disciplina de Cálculo, cujo objetivo é sanar as lacunas referente a conhecimentos da matemática básica, necessários para realização das técnicas de cálculo.

Nesse caminho, acredita-se que é importante analisar os procedimentos utilizados pelos estudantes, verificando também os erros cometidos, se apresentam o conhecimento da matemática básica.

1.1 Tema

Nas décadas de 1980 e 1990 – como atualmente – as pesquisas de Ensino Superior tentavam diagnosticar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes nos níveis iniciais de ensino, que tinham altos índices de fracasso escolar. (IGLIORI, 2009)

A temática desta Dissertação de Mestrado, nesse contexto do Ensino Superior, visa à criação de atividades procedimentais, relativas aos cálculos algébricos e operacionais, sua aplicação e análise dos resultados.

1.2 Problema da pesquisa

Os problemas envolvendo a forma de aprendizagem da Matemática possuem variáveis, indicando a necessidade de verificar questões relacionadas ao ensino-aprendizagem da Matemática que interferem no índice de reprovação dos alunos em disciplinas dessa área. (SOARES; SAUER, 2004)

Assuntos relacionados ao aumento do índice de reprovação em disciplinas básicas com foco nas disciplinas de Cálculo se tornaram discussões e comunicações informais entre professores das melhores universidades. (MALTA, 2004)

A necessidade de desafiar e motivar os alunos a compreender os procedimentos matemáticos, mostrando que podem aplicá-los não somente dentro das disciplinas de exatas, mas no seu cotidiano, faz com que o interesse para o aprendizado e ensino da Matemática reflita em índices satisfatórios para a disciplina de Cálculo.

Especificamente, nesta Dissertação de Mestrado, problematizou-se o desenvolvimento procedimental.

1.2.1 Objeto de Estudo

O objeto deste estudo se constitui da análise do desenvolvimento procedimental dos conteúdos da matemática básica por meio de elaboração e aplicação de atividades procedimentais.

1.2.2 Sujeitos da pesquisa

Os sujeitos da pesquisa foram 5 (cinco) alunos da disciplina de Cálculo dos cursos de engenharias do Centro Universitário de Patos de Minas-MG (UNIPAM).

1.3 Objetivo geral

Constitui-se como objetivo geral desta pesquisa: Analisar a aplicação de atividades, elaboradas pela autora desta Dissertação, de cunho procedimental de Cálculo para estudantes de cursos de Engenharia.

1.3.1 Objetivos específicos

a) Formular atividades procedimentais.
b) Aplicar as atividades formuladas e estudar seus resultados.
c) Organizar um PRODUTO com atividades procedimentais, visando ao estudo de Cálculo em cursos de Engenharia.

1.4 Justificativa

Justifica-se a realização desta pesquisa pelo fato de os estudantes universitários da área de exatas, principalmente ingressantes de cursos de engenharias, possuírem dificuldades envolvendo conhecimentos matemáticos básicos para a realização dos procedimentos de cálculo.

A maior dificuldade para realizar o avanço da educação está relacionada ao elevado índice de reprovação e evasão. (D'AMBROSIO, 2012)

Para Rezende (2020, p. 15), "...se investigarmos a origem histórica de tal 'fracasso' verificaremos que ele tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo.".

Segundo Santos (2018), os alunos que chegam aos professores do ensino superior demonstram dependência, são passivos, não possuem domínio de conceitos básicos e tão somente capacidade crítica. Ainda para o autor, o trabalho do professor em ensinar conteúdos que exigem alto nível de abstração ao receber alunos inseguros e sem o costume de estudar torna-se desgastante e desafiador. (SANTOS, 2018)

Assim, conforme o comportamento do aluno é essencial para que ocorra um índice satisfatório para Zabala (2007, pág. 31), despertar o aluno para "o que se deve saber" (conceitual), "o que se deve saber fazer" (procedimental) e "como se deve ser" (atitudinal) é essencial para que ocorra um índice um índice satisfatório para o ensino e aprendizagem de Matemática e consequentemente, o de Cálculo. Esta pesquisa foca no procedimental, reconhecendo que as categorias são interativas no processo ensino/aprendizagem.

1.5 Estrutura da Dissertação

Esta pesquisa está estruturada em cinco capítulos. No primeiro – esta introdução, contextualiza-se a trajetória profissional da autora desta Dissertação, explicam-se o tema e problema da pesquisa, o objeto de estudo e os sujeitos envolvidos, assim como os objetivos geral e específicos, seguidos da justificativa para esta pesquisa.

No segundo capítulo, apresenta-se o referencial teórico composto de uma revisão com os aspectos gerais sobre o conhecimento procedimental; conceitos, definições e procedimentos; didática da Matemática no Ensino Superior; e Ensino de Cálculo Diferencial e Integral ou Cálculo.

No terceiro capítulo, apresenta-se a metodologia com abordagem qualitativa e expõem-se as questões que compõem a Avaliação Diagnóstica.

Em seguida, no quarto capítulo, expõem-se a aplicação e análise das atividades; discute-se como a Avaliação Diagnóstica foi elaborada e aplicada, bem como se apresentam as decorrências registradas em uma abordagem qualitativa e análise procedimental.

Enfim, expõem-se, no último capítulo, as Considerações Finais desta pesquisa, resumindo os principais aspectos analisados em cada parte realizada.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Esta Dissertação está, como dito, no contexto de um Projeto de pesquisa maior, que estuda as condições acadêmicas, sociais e econômicas dos estudantes ingressantes em cursos de engenharia, como apresentado na Introdução. Ele tem como objetivo problematizar o ensino de Cálculo Diferencial e Integral com aportes de uma metodologia que privilegia uma aprendizagem da matemática superior mais significativa.

Foram destacados dois pilares para edificação dessa metodologia: tratamento do conhecimento conceitual junto à definição, que formaliza os conceitos, e o conhecimento procedimental.

Duas dissertações, no âmbito do diagnóstico da *performance* dos estudantes dos períodos iniciais de cursos de engenharia, estão sendo desenvolvidas com objeto voltado para a metodologia a ser proposta na pesquisa: (1) conhecimento conceitual e (2) conhecimento procedimental. Os resultados dessas duas dissertações darão suporte à proposição da metodologia.

Esta Dissertação está no âmbito do conhecimento procedimental, dessa forma, são apresentados alguns aportes de referencial teórico sobre o tema.

2.1 Conhecimento Procedimental

Junto ao conhecimento conceitual e atitudinal, o conhecimento procedimental é desenvolvido com atividades que caracterizam procedimentos que o estudante realiza para sua aprendizagem significativa. (Zabala, 2007)

Os núcleos temáticos curriculares são a base e o instrumento sobre os quais o conhecimento é tratado. No caso dos procedimentos, os conteúdos da Aritmética e da Álgebra, na educação básica, e o Cálculo Diferencial e Integral, na educação superior, são muito explorados, relativamente ao desenvolvimento de métodos de cálculo e de desenvolvimento de algoritmos.

O processo de ensino e aprendizagem em Matemática tem se limitado a exercícios repetitivos e sem compreensão do que se exercita, desvalorizando o conhecimento procedimental, muitas vezes criticado e tachado como degeneração da Matemática. Mas com o conceito, a demonstração e as proposições fundamentais da estrutura matemática, os procedimentos trabalhados com qualidade integralizam o saber matemático. (Zabala, 2007)

O desenvolvimento do conhecimento procedimental se dá pela exploração de atividades que envolvam:

a) algoritmos;
b) estratégias, processos ou esquemas de diferentes cálculos;
c) uso de propriedades operacionais;
d) exercícios de treinamentos ou mecanização;
e) resolução de equações e inequações;
f) coleta e organização de dados e informações na construção de Bancos de dados;
g) trabalho com fórmulas e padrões.

Analisando cada uma dessas atividades, adaptadas de Zabala (2007, pág. 43-46) e aplicadas ao Cálculo, pode-se entender melhor o conhecimento procedimental.

Os **algoritmos** surgem na matemática para descrever as regras para as equações algébricas, mas eles podem ser aplicados em qualquer sequência de ações finitas que buscam a resolução de um problema. Os termos definidores do algoritmo são: sequência, etapas ou passos numa estrutura lógica.

Já as **estratégias, processos ou esquemas de diferentes cálculos** são desenvolvidos como uma via com instrumentos para consecução de uma tarefa ou função, dependendo do grau de importância do objetivo a ser alcançado. Por tarefas se compreendem ações de curto prazo, de resolução mais mecanizada e com uma operação bem definida. Já as funções são ações de um grau superior de desenvolvimento e com mais exigência conceptiva e operacional. Mas, tarefas ou funções são componentes de estratégias ou processos de cálculo.

O uso de propriedades operacionais se faz quando uma determinada proposição pode ter suas características trabalhadas de uma maneira concreta e com operações que se direcionam aos cumprimentos dos objetivos da proposição.

Os exercícios de treinamentos ou mecanização são essenciais para que o estudante possa desenvolver seu raciocínio dedutivo. Mas é fundamental fazer a distinção entre um problema e um exercício: “um problema é reconhecido por: processo de reflexão, tomada de decisão, situação nova e aberta, exploração de um contexto”; “exercício é identificado por: procedimentos automáticos, habilidade mecânica de repetição, treinamento de modelo, trabalho com fórmula/ padrão” (LAUDARES *et al.*, 2017, p 95).

O conhecimento procedimental em Matemática, especificamente na Álgebra, compreende a **resolução de equações e inequações**, que também são denominadas, atualmente, de modelos na representação algébrica. Mas um modelo pode também ser representado por um gráfico, uma tabela de números ou por uma expressão verbal.

A coleta e organização de dados com a utilização da informática computacional na criação de Bancos de dados para análise e tomada de decisão estratégica no mundo corporativo e na vida real podem caracterizar um conhecimento procedimental.

O trabalho com fórmulas ou padrões se faz com prioridade na Álgebra, Aritmética e na Estatística, na formulação de modelos pela matematização ou com maior refinamento pela modelagem.

De modo geral, os procedimentos acontecem com **atividades,** predominando o apelo à memorização, desvirtuando a concepção do conhecimento procedimental, isto é, exercita-se a memória de curto prazo, necessária em determinadas situações de aprendizagem, mas quando somente é usada para memorizar em espaço de curta utilização, se tem uma desvalorização do procedimental. A memória de longo prazo é a essência de uma aprendizagem com compreensão. Os procedimentos, quando criados e desenvolvidos numa perspectiva da aquisição de habilidades intelectuais, possuem seu lugar no espaço de formação dos estudantes quanto à aquisição de habilidades cognitivas, tanto na memória de curto quanto de longo prazo.

Uma discussão atual traz parâmetros para debates referentes à informática educativa no contexto da educação matemática, relativamente à informatização dos processos de cálculo, abreviando o uso de procedimentos pelos usuários. A esses caberia o desenvolvimento de habilidades computacionais e de análise e interpretação dos processos e modelos, entretanto, a informática educativa não vai anular o conhecimento procedimental – usará um processo integrado: procedimento e informática – dependendo das situações trabalhadas, pode-se obter eficácia na aquisição do conhecimento pelo estudante.

Estilos de aprendizagem se relacionam a distintos hábitos de pensamento matemático na manipulação dos objetos matemáticos diferenciados em conexões lógicas. Frota (2001), no ensino superior, ao pesquisar as estratégias de aprendizagem de estudantes universitários, identificou que esses não recorriam a representações visuais nem traçavam gráficos no cálculo de integrais. A mesma autora defende a agregação de outras estratégias operacionais junto aos cálculos de integrais, derivadas e limites, como tabelas, gráficos, diagramas para integração do conhecimento. (FROTA, 2001)

A mobilização de várias formas de pensamento matemático e a representação de ideias matemáticas tanto pelo trabalho conceitual quanto pelo procedimental trazem benefícios ao desenvolvimento e criação da cognição pelos estudantes.

Assim, integrar os vários tipos de conhecimento conceitual, procedimental e atitudinal com experimentações e explorações, fazer relações e executar processos, usar a intuição junto a formalização, fazer conjecturas e comunicar ideias certamente vão atingir o sucesso da educação integral: pensamento e ação em atividades.

O “objeto de aprendizagem” está em uso frequente para o desenvolvimento da autorregulação da aprendizagem dos estudantes, o que traz a possibilidade de automatizar processos de cálculo e de algoritmos, segundo Peres (2009).

Dessa forma, o uso de tecnologias tem reduzido os cálculos operacionais, o que não invalida o estudante de tratar o conhecimento procedimental, pois o processo de informatização exige o domínio da concepção dos processos procedimentais para o uso da ferramenta tecnológica.

Assim, a informática não vai invalidar a aquisição do conhecimento procedimental pelo estudante que, ao tratar conceito e o procedimento de maneira integrada, facilita-se a aquisição do pensamento e das ideias em matemática.

Finalmente, em se tratando dos obstáculos alusivos à aprendizagem, remete-se aos erros cometidos pelos alunos (CAVASOTTO; VIALI, 2011). Feita uma verificação e classificação dos erros cometidos, verifica-se muitas vezes que os erros são de cálculos e há necessidade de intensificar o trabalho com os procedimentos algébricos para que aumente o entendimento dos conceitos estabelecidos. (PEREIRA FILHO, KAIBER; LÉLIS, 2012)

Os conhecimentos procedimentais exigem, primeiramente, familiaridade no uso de símbolos, que representam ideias matemáticas, ou seja, o conhecimento de fórmulas e algoritmos. No segundo momento, os conhecimentos procedimentais consistem na operacionalização matemática, que pressupõe o domínio de regras e algoritmos, ou de cálculos usados para resolver tarefas matemáticas e, sob esse aspecto, assumem o caráter linear que conduz a um ensino passo a passo. (FROTA, 2001)

Saber ler e interpretar na disciplina da Matemática, bem como tratar a simbologia com os processos de cálculos são suportes para aproximação do conhecimento real do pensamento e do conhecimento matemático (MALTA, 2004). Destarte, o domínio procedimental é um apoio para o desenvolvimento da capacidade de compreender os conceitos e as definições.

2.2 Conceito, definição e os procedimentos

A estrutura da Matemática compreende várias proposições, as principais, entre elas, são o axioma, postulado, conceito, definição, demonstração (teorema).

A formalização se faz ao enunciar uma verdade sem demonstração (axioma), ou definir um conhecimento com base em suas propriedades e executar demonstrações com rigor lógico, criando todo o conteúdo teórico dedutivo.

Mas a compreensão na matemática muitas vezes pode ser conseguida sem o rigor de uma definição simbólica ou um teorema com deduções estritamente teóricas, utilizando a conceituação, que pode ser considerada uma explicação, uma aproximação, um tratamento no contexto da definição.

Dessa forma, o conceito pode antecipar a definição com a análise de situações didáticas, nas quais o professor trabalha com o estudante temáticas problematizadas da vida real, da tecnologia, dos fenômenos físicos, sociais, econômicos, facilitando o acesso ao saber com aproximações, analogias, comparações, imitações, conjecturas a serem justificadas posteriormente.

Trata-se de analisar a vizinhança das proposições com significado no nível do estudante. A partir do entendimento conceitual, podem-se alcançar generalidades e abstrações e, então, formular a definição.

Aprender um conceito se faz com significados no nível sensível e perceptível do estudante na relação do concreto e do abstrato. Assim, Pais (2015, p.55) descreve que: "Conceito são ideias gerais a abstratas desenvolvidas no âmbito de uma específica área de conhecimento (...) algo em permanente processo de devir".

Mas, em relação à definição, esse autor ressalta que: "Definir é necessário, mas é muito menos que conceituar, porque o texto formal de uma definição só pode apresentar alguns traços exteriores ao conceito". (PAIS, 2015, p.56)

Conceituar é uma construção mental muitas vezes obtida pela manipulação e operação de uma classe de objetos materiais, nos quais se internalizam os parâmetros conceituais que se originam de relações interações, comparações.

Pais (2015) denomina "estado de devir" como estratégias numa dinâmica de passos, idas e vindas no plano subjetivo do estudante ao descobrir novos horizontes para compreender um conceito. Para aquisição do conhecimento se requerem tanto a conceituação quanto a definição e o domínio procedimental.

A estrutura da Matemática pode ser gradualmente trabalhada pelo estudante, iniciando com o conceito e cálculos simplificados e, depois, aprofundando com a manipulação de definições – já no nível de formalização – demonstrações acompanhadas do procedimental.

A integração do conhecimento conceitual, do conhecimento procedimental, da habilidade de formular uma definição constitui a base cognitiva do entendimento do processo de aprendizagem do estudante.

Dessa forma, o processo de estudo da Matemática requer um equilíbrio da memorização e do raciocínio, da manipulação de algoritmos e dos cálculos com o exercício do conhecimento procedimental e o trabalho do conceito e da definição.

2.3 Didática da Matemática no Ensino superior

A didática delineia o processo de ensino-aprendizagem e trata dos preceitos científicos que orientam a atividade educativa, tornando-a mais eficiente, precedendo todas as etapas do ensino.

A didática da Matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS, 2015, p.11)

Por isso, na elaboração, execução e avaliação de planos de ensino, faz-se necessária a clareza da função da escola e dos educadores, efetivamente comprometidos com a formação da cidadania e com a formação profissional – objetivo dos cursos superiores. A função da escola é (1) garantir valor dos conteúdos como meios para a formação do cidadão consciente e do trabalhador qualificado, competente e crítico e (2) promover a articulação entre objetivos, conteúdos, metodologias e avaliação no processo ensino-aprendizagem.

Os métodos de ensino superior, ancorados na didática dos cursos superiores da área de ciências exatas, são fundamentados em dois aspectos: conceber o estudante como protagonista no processo de aprendizagem e potencializar o professor para inovações do ensino.

Quanto aos estudantes universitários, estão sendo realizadas investigações relativas à deficiência da assimilação dos conteúdos de matemática básica, que são requisitos à continuidade dos estudos da matemática superior da área de Ciências Exatas. Esta Dissertação está inserida numa pesquisa que está sendo desenvolvida, como já mencionado, cujo objeto é fazer diagnóstico dessa relação da matemática básica com a matemática superior.

O aumento do número de estudantes que deparam com dificuldades na mudança existente entre o ensino médio e o ensino superior é questão crucial no ensino universitário de Matemática. (PALIS, 2009)

O aluno, ao ingressar em um curso superior, espera informações sobre os objetivos de cada disciplina que vai estudar para construção sequencial de seu conhecimento sobre a futura profissão. Se não receber orientação sobre os motivos pelos quais utilizará os conhecimentos em Cálculo Diferencial, em Geometria e em Física para as disciplinas de formação profissional, ficará mais difícil se aperceber da real importância de cada uma delas. (SANTOS, 2009, p.36)

O aluno, ao chegar à universidade apresentando um desempenho não satisfatório na área de exatas, em disciplinas que exijam conhecimentos matemáticos, precisa perceber que deverá mudar sua postura em relação aos aspectos anteriores para sua formação superior. (JESUS, 2018)

No ensino superior, grande parte das preocupações converge para as disciplinas iniciais da área de exatas. (MALTA, 2004). Para Rosa, Alvarenga e Santos (2019, p.25), "O estudante ingressa na universidade com muitas expectativas em termos de aprendizagem, e quando não consegue ter um desempenho acadêmico satisfatório, sente-se perdido, desmotivado".

Já quanto ao professor e a sua didática, é requerida uma disposição para reflexão permanente referente à diversificação de métodos à procura de atingir cada estudante nas suas necessidades de compreensão do significado dos conceitos e dos princípios, num processo constante de elaboração pessoal.

As sequências de conteúdo conceitual ou procedimental, para atingimento de uma formação autêntica, são desenvolvidas por atividades para o trabalho do estudante sob orientação do professor, segundo Zabala (2007), por algumas condições:

a) partir de situações significativas e funcionais;
b) envolver criação e interpretação de modelos da ciência e da tecnologia;
c) trabalhar com processo gradual para encorajamento com etapas das mais simples as mais complexas;
d) ajudar em diferentes graus e prática guiada numa ação colaborativa, mas favorecendo a autonomia e a busca do trabalho independente.

A didática leva em conta os conhecimentos prévios do estudante e como foram estabelecidos, cabendo ao professor fazer sua ressignificação, especialmente nas disciplinas iniciais dos cursos da área de ciências exatas como Cálculo, Geometria Analítica, álgebra Linear; e estruturar a didática por atividades que levem à construção mental das ideias e processos com significância.

2.4 Ensino de Cálculo Diferencial e Integral ou Cálculo

O alto índice de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral chama atenção dos educadores matemáticos e da academia, com crescimento de estudos e pesquisas para diagnósticos e proposições a fim de melhorar os processos de ensino.

O professor de Cálculo, baseado nas deficiências dos conhecimentos prévios dos estudantes e na falta de apoio para produção de material, bem como para inovações de sua prática educativa, faz uma redução de sua didática para apenas ensinar procedimentos, passo a passo de resolução de atividades propostas, justificando uma matemática exclusivamente procedimental e, muitas vezes, limitada à memorização de sequências de passos no trabalho com algoritmos e cálculo operacionais. (FROTA, 2017)

A problematização que orbita a disciplina de Cálculo I provoca reflexões no sentido de repensar as didáticas atuais, apontando para mudanças metodológicas uma vez que se torna evidente a impossibilidade de aceitar que tudo continue como está, conforme Cavasotto e Viali (2011). Sobre o ensino de Cálculo, ainda conforme esses autores, apesar de estar sendo realizadas pesquisas contemplando essa disciplina, os índices de reprovações e propostas de metodologias alternativas não são as únicas preocupações, mas a compreensão dos tipos de obstáculos específicos que os alunos não conseguem ultrapassar. (CAVASOTTO; VIALI, 2011)

Lachini (2001) ressalta que os motivos do insucesso da aprendizagem do Cálculo são partilhados entre professor e aluno. A eficiência didática exige uma diversidade metodológica contemplada não só com procedimentos, que são vistos com uma exacerbada algebrização, um processo denominado mecânico ou de treinamentos, mas contemplada também com resolução de problemas e tratamento de modelos.

Em cursos de engenharia, é papel fundamental a interdisciplinaridade para contextualização, visto que a matemática se presta como um serviço, produção de ferramentas para o estudo das disciplinas tecnológicas.

Assim, é necessário diferenciar Cálculo de Análise Matemática, uma vez que essa contempla todo processo dedutivo rigoroso matemático. Em cursos da área de serviço da Matemática, principalmente nas ciências exatas, a preocupação metodológica contempla apenas aquelas deduções necessárias à compreensão dos processos e princípios matemáticos, para uso na aplicação das disciplinas de cunho profissional.

Para compensar essa redução da dedução matemática, cabe ao professor, no seu planejamento, contemplar com intensidade atividades de resolução de problemas, modelagem, especialmente na interpretação de modelos, um trabalho interdisciplinar, uma produção conceitual e um tratamento procedimental com e sem uso da tecnologia informática.

Assim, a expressão “Matemática como curso de serviço” tem sido utilizada para as disciplinas curriculares de matemática ministradas em graduações diferentes da licenciatura e bacharelado em Matemática. O debate sobre matemática como curso de serviço tem sido intensificado, especialmente pela Associação Nacional de Educação em Engenharia- ABENGE em seus eventos científicos, como o Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia-COBENGE. As discussões temáticas envolvendo conteúdo de Matemática e Ciências têm sido realizadas por engenheiros-professores, professores de Matemática, de Física e professores das disciplinas tecnológicas de formação profissional. Essa atuação de diferentes profissionais reflete a inserção natural da Matemática nos currículos dos cursos de Engenharia e na formação técnica/tecnológica do engenheiro.

Assim, para uma eficiência e eficácia do processo de ensino da Matemática, há que se criar um novo espaço para um ambiente de aprendizagem que incentive os alunos a desenvolverem aplicações da Matemática, com resolução de problemas, tratamento de modelos pela matematização dos fenômenos, e sua modelagem com o uso do suporte da Informática Educativa (*softwares* da geometria dinâmica, por exemplo), *sites, applets,* entre outros recursos.

Finalmente, a integração das atividades do conhecimento conceitual e do conhecimento procedimental em Cálculo Diferencial e Integral favorece o entendimento matemático e insere o estudante na área científica das ciências exatas, formando mais que um técnico, isto é, um tecnólogo que compreenda os princípios científicos da estruturação dos modelos da engenharia, com constante reelaboração mental dos conteúdos trabalhados.

3 METODOLOGIA

Esta pesquisa é qualitativa e composta por questões que direcionam os alunos a fazerem uso de procedimentos matemáticos para resolução dessas questões.

Augusto *et al.* (2013) descrevem que a pesquisa qualitativa se preocupa em demonstrar de forma detalhada os fenômenos e os elementos que constituem a pesquisa. Segundo os autores, "... a validade da pesquisa qualitativa não se dá pelo tamanho da amostra, ..., mas, sim pela profundidade com que o estudo é realizado.".

O conhecimento envolvendo a aritmética e a álgebra são fatores essenciais para resolução das questões propostas, pois a Avaliação Diagnóstica é composta por 12 (doze) questões, sendo 9 (nove) questões algébricas e 3 (três) aritméticas, constituída por 9 (nove) abertas e 3 (três) de múltipla escolha.

Para Lins e Gimenez (1997, p.12), "A aritmética e a álgebra constituem, junto com a geometria, a base da matemática escolar.". Os autores enfatizam que a álgebra é composta por equações, inequações, funções etc., e a aritmética segue com os números, as quatro operações fundamentais, tabuada etc.

Para resolver a avaliação diagnóstica, foi solicitado aos alunos que realizassem as questões com muita atenção, fazendo as análises necessárias, com uso de seus conhecimentos matemáticos e que registrassem o seu raciocínio e procedimentos, mesmo que não tivessem certeza da sua resposta.

As questões seguem padrões com abordagem procedimental:

(1) Simplificar uma função racional com produtos notáveis.

(2) Calcular o valor numérico por substituição de um valor numa expressão algébrica.

(3) Resolver inequação do 1º Grau.

(4) Resolver inequação do 2º Grau.

(5) Resolver uma equação irracional.

(6) Calcular uma expressão aritmética com potências e radicais.

(7) Racionalizar uma fração com radical no denominador.

(8) Resolver uma equação do 3º grau reduzindo para 1º e 2º graus.

(9) Resolver as expressões algébricas aplicando as identidades fundamentais.

(10) Resolver aplicando a ordem das operações algébricas e verificar o papel dos parênteses.

(11) e (12) Simplificar a expressão o máximo possível.

Em cada questão apresentada, constam os objetivos e quais conhecimentos matemáticos se espera que o aluno possua para realização dos cálculos.

(01) **Questão 1:** Simplificar a expressão: $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right).\left(a+b-\frac{a^2}{a-b}\right).\frac{1}{b}$

- Conteúdo: Simplificação de frações algébricas

- Objetivos:
  - ✓ Reconhecer e desenvolver produtos notáveis.
  - ✓ Aplicar os produtos notáveis na resolução dos cálculos.
  - ✓ Simplificar uma expressão algébrica usando outros conhecimentos já adquiridos.
  - ✓ Conhecer os tipos de fatoração.
  - ✓ Identificar os tipos de operações matemáticas a serem utilizadas para realização dos cálculos.

- Desenvolvimento

Nesta questão foi solicitado que o aluno simplificasse uma função racional com uso de conhecimento matemáticos relacionados ao conteúdo de produtos notáveis. Para isso, ele precisa compreender estes conteúdos:

- ✓ operações com números fracionários;
- ✓ potenciação;
- ✓ propriedade distributiva;
- ✓ simplificação de fração;
- ✓ propriedades de produtos notáveis.

(02) **Questão 2:** Calcular o valor da expressão $\mathbf{x = z}$

$$z = \frac{2{,}44 - y^2}{1 - y^2} \qquad \text{para} \quad y = 1{,}2$$

- Conteúdo: Simplificação de frações algébricas

- Objetivos:
  - ✓ Reconhecer uma expressão algébrica.

- ✓ Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica.
- ✓ Realizar a substituição de valores em expressões algébricas.
- ✓ Reconhecer e determinar os números negativos e números nas formas decimal e fracionária.
- ✓ Efetuar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros e fracionários.

➢ Desenvolvimento

Nesta questão, pede-se que o aluno calcule o valor numérico por substituição de um valor numa expressão algébrica. Para isso, ele precisa compreender estes conteúdos:

- ✓ substituição de valores em uma expressão algébrica;
- ✓ potenciação;
- ✓ operações com números inteiros e fracionários.

(03) **Questão 3:** Resolver a inequação: $\frac{1}{2} - x \geq 2x - \frac{1}{4}$

➢ Conteúdo: Inequação do 1º grau

➢ Objetivos:

- ✓ Interpretar e identificar os símbolos de desigualdades.
- ✓ Reconhecer inequações do 1º grau com uma incógnita.
- ✓ Calcular o valor numérico da incógnita da inequação.
- ✓ Identificar o conjunto solução.

➢ Desenvolvimento

Nesta questão, foi solicitada a resolução de uma inequação do 1º grau, para a qual, há necessidade de compreensão destes conteúdos:

- ✓ operações com números inteiros e fracionários;
- ✓ sinais de desigualdade;
- ✓ simplificação;
- ✓ conjunto numérico.

(04) **Questão 4:** Resolver a inequação: $4x - x^2 \leq 0$

- Conteúdo: Inequação do 2º grau

- Objetivos:
  - ✓ Identificar uma equação do 2º grau.
  - ✓ Perceber na sua formatação os símbolos de desigualdades.
  - ✓ Calcular o conjunto solução.

- Desenvolvimento

  Esta questão requer que aluno resolva uma inequação do 2º grau; nessa atividade, precisa compreender estes conteúdos:
  - ✓ operações com números inteiros e fracionários;
  - ✓ sinais de desigualdade;
  - ✓ sinal da função correspondente;
  - ✓ conjunto solução;

(05) **Questão 5:** Calcular a solução da equação irracional $6 - \sqrt{x^2 - 9} = 2$

- Conteúdo: Equação irracional
- Objetivos:
  - ✓ Identificar equações irracionais.
  - ✓ Reconhecer que todo radical pode ser escrito na forma de potência com expoente fracionário.
  - ✓ Simplificar radicais com a extração de fatores do radicando.

- Desenvolvimento

Nesta questão, foi solicitado que o aluno resolvesse uma equação irracional. Para tal, ele precisa compreender estes conteúdos:
  - ✓ operações com números inteiros;
  - ✓ radiciação;
  - ✓ potenciação;
  - ✓ raízes de uma equação.

(06) **Questão 6:** Simplificar a expressão: $\left[\dfrac{a^6 \, . \, \sqrt{b^{18}}}{\sqrt{a^6}. \, b^{12}}\right]^{\frac{1}{3}}$

- Conteúdo: Potenciação e Radiciação

- Objetivos:
  - ✓ Identificar potenciação e radiciação de radicais.
  - ✓ Reconhecer que toda potência com base positiva e expoente fracionário pode ser escrita na forma de radical.
  - ✓ Perceber que radicais podem ser representados por uma potência de base positiva e expoente fracionário.
  - ✓ Identificar a radiciação como operação inversa da potenciação.
  - ✓ Identificar os termos de raiz.
  - ✓ Efetuar cálculo envolvendo radicais.
  - ✓ Aplicar corretamente suas propriedades e simplificar.

- Desenvolvimento

A questão exige conhecimentos matemáticos para realizar o cálculo de uma expressão aritmética com potências e radicais. Dessa forma, o aluno precisa compreender estes conteúdos:

  - ✓ radiciação e suas propriedades;
  - ✓ potenciação e suas propriedades;
  - ✓ simplificação.

(07) **Questão 7**: Racionalizar o denominador da fração: $\dfrac{7}{\sqrt{8}}$

- Conteúdo: Racionalização de denominadores

- Objetivos:
  - ✓ Identificar racionalização de denominadores.
  - ✓ Racionalizar expressões envolvendo operações com radicais.
  - ✓ Compreender o processo de racionalização de expressões evolvendo radicais.

- Desenvolvimento

Para racionalizar uma fração com radical no denominador, como foi solicitado, o aluno deve fazer uso de conhecimentos de alguns conteúdos, como estes:

- ✓ radiciação e suas propriedades;
- ✓ potenciação e suas propriedades;
- ✓ simplificação.

(08) **Questão 8:** Resolver a equação do 3º grau reduzindo para equações do 1º e 2º graus:

$$x^3 - x^2 = 0$$

- Conteúdo: Equação do 3º grau

- Objetivos:
  - ✓ Identificar equação do 3º grau.
  - ✓ Reduzir a equação de 3º grau para equações do 1º grau e 2º grau.
  - ✓ Reconhecer os termos.
  - ✓ Identificar as raízes.
  - ✓ Calcular as soluções.

- Desenvolvimento

Nesta questão, é solicitado que o aluno resolva uma equação do 3º grau reduzindo para 1ºgrau e 2º grau. Para isso, ele precisa compreender estes conteúdos:

- ✓ equações de 1º grau, 2º grau e 3º grau;
- ✓ raízes da equação.

(09) Questão 9: Esta questão foi adaptada de Axler (2016): Sem usar a calculadora, Maria Clara efetuou o cálculo de 43 x 37, conforme registrado abaixo:

$$\boxed{\begin{aligned} 43 \times 37 &= (40 + 3) \times (40 - 3) \\ &= 40^2 - 3^2 \\ &= 1600 - 9 \\ &= 1591 \end{aligned}}$$

Utilizando técnicas matemáticas, e sem a calculadora, registre seu raciocínio para as seguintes sentenças:

a) 78×62

b) $(50 - 6)^2$

c) $(25 + 9)^2$

- Conteúdo: Identidades algébricas e suas aplicações

- Objetivos:
  - ✓ Reconhecer o método para realização do cálculo.
  - ✓ Calcular mentalmente.
  - ✓ Identificar as operações matemáticas.

- Desenvolvimento

Pede-se que o aluno resolva as expressões algébricas aplicando as identidades fundamentais. Para isso, ele precisa compreender estes conteúdos:

- ✓ operações matemáticas;
- ✓ potenciação;
- ✓ ideia clara de ordenação;
- ✓ estratégias de cálculo mental.

(10) **Questão 10.** Esta questão foi adaptada de Axler (2016): Em um grupo de estudos, Ana Cecília propôs um desafio aos colegas: "Descobrir quantas soluções matemáticas podem ser encontradas em uma mesma sentença, ao inserir um par de parênteses em diferentes posições na expressão matemática: $6 + 3x4 + 5x2$".

Após várias discussões e resoluções, os colegas encontraram cinco soluções diferentes, conforme registros abaixo:

Solução 1: (6 + 3x4 + 5x2) = 28

Solução 2: 6 + (3x4 + 5) x2 = 40

Solução 3: (6 + 3) x4 + 5x2 = 46

Solução 4: 6 + 3x (4 + 5x2) = 48

Solução 5: 6 + 3x (4 + 5) x2 = 60

Com base nos registros apresentados pelo grupo de estudos, quantas soluções diferentes podem ser encontradas, ao inserir apenas um par de parênteses em posições diferentes, para a expressão: 19 – 12 – 8 – 2? É obrigatório apresentar a posição em que os parênteses foram colocados, bem como o valor numérico correto da solução encontrada para cada proposta.

a) 2 Soluções diferentes.
b) 5 Soluções diferentes.
c) 8 Soluções diferentes.
d) 10 Soluções diferentes.
e) 12 Soluções diferentes.

- Conteúdo: Expressões algébricas

- Objetivos:
  - ✓ Identificar as ordens das operações.
  - ✓ Reconhecer a importância dos parênteses em uma resolução matemática.
  - ✓ Efetuar cálculos com números inteiros.

- Desenvolvimento

Resolver e reconhecer a ordem das operações algébricas e o papel dos parênteses foi o solicitado para esta questão, que precisa da compreensão destes conteúdos:

- ✓ números inteiros;
- ✓ operações com números inteiros;
- ✓ estudo dos sinais.

(11) **Questão 11:** Esta questão foi adaptada de Stewart (2016): Assinale (F) para sentenças matemáticas falsas e (V) para sentenças verdadeiras, fazendo a correção das alternativas erradas.

a) (   ) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$

b) (   ) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

c) (   ) $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

d) (   ) $\frac{1+TC}{C} = 1 + T$

e) (   ) $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}} = \frac{1}{a-b}$

- Conteúdo: Equação algébrica

- Objetivos:
  - ✓ Reconhecer o tipo de equação.
  - ✓ Resolver as sentenças usando conhecimentos matemáticos.
  - ✓ Identificar o procedimento a usado para realização dos cálculos.

- Desenvolvimento

Nesta questão, o aluno deverá simplificar as equações algébricas dadas. Para isso, ele precisa compreender estes conteúdos:

Operação com números fracionários.

- ✓ radiciação;
- ✓ produtos notáveis;
- ✓ simplificação.

(12) **Questão 12.** Esta questão foi adaptada de Axler (2016): Isabela, Rodrigo, Jordana, Jéssica e Rafaela são estudantes de engenharia e foram desafiados pelo professor para verificar se as expressões matemáticas I e II, descritas abaixo, foram simplificadas de forma correta.

I. $(a + 2) . (a - 2) . (a^2 - 4) = (a^4 - 16)$

II. $$\frac{\frac{a-t}{b-c}}{\frac{b+c}{a+t}} = \frac{a^2-t^2}{b^2-c^2}$$

Após efetuar os devidos cálculos e simplificações, os quatro estudantes apresentaram as conclusões que se seguem. Assinale a conclusão correta e registre no quadro a seguir os cálculos que você realizou para comprovar a sua resposta.

a) Rafaela afirmou que é impossível simplificar as expressões matemáticas I e II.
b) Isabela concluiu que apenas a expressão I foi simplificada de forma correta.
c) Rodrigo concluiu que apenas a expressão II foi simplificada de forma correta.
d) Jordana concluiu que as expressões I e II foram simplificadas de forma errada.
e) Jéssica concluiu que as expressões I e II foram simplificadas de forma correta.

- Conteúdo: Expressões algébricas

- Objetivos:
  - ✓ Identificar expressão algébrica.
  - ✓ Simplificar as expressões, identificando qual conteúdo matemático aplicar.
  - ✓ Reconhecer qual prática matemática usar.

- Desenvolvimento

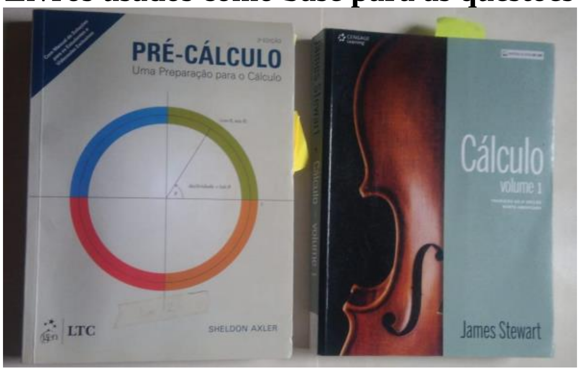
  Para simplificar as expressões algébricas o máximo possível, como solicitado, o aluno precisa possuir estes conhecimentos matemáticos:
  - ✓ operações com números inteiros;
  - ✓ estudo dos sinais;
  - ✓ potenciação;
  - ✓ operação com números fracionários;
  - ✓ simplificação.

4 APLICAÇÃO E ANÁLISES DAS ATIVIDADES

Apresenta-se nesta etapa da pesquisa a análise dos resultados encontrados na resolução de questões que compõem a avaliação diagnóstica. Para tal intento, aplicou-se a avaliação no dia 14 de dezembro de 2020 a 05 (cinco) alunos matriculados no 4º período do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário de Patos de Minas – UNIPAM, aos quais foi explicado que a avaliação faz parte da pesquisa desenvolvida no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-MG e que se dá por questões elaboradas com o intuito de analisar a abordagem procedimental dos conteúdos da Matemática utilizada no ensino de Cálculo.

As questões foram 08 (oito) diretas, 03 (três) tomadas dos livros de Sheldon Axler e 01 (uma) do livro de James Stewart, ilustrados na Figura 1.

Figura 1 - Livros usados como base para as questões de 09 a 12



Fonte: Elaborada pela Autora (2020)

Os sujeitos da pesquisa, os quais foram identificados como estudantes: A, B, C, D e E, foram orientados a resolver as questões sem consulta a qualquer tipo de material, sem utilização de calculadora e realizadas individualmente.

Mesmo a aplicação sendo realizada remotamente, foi possível monitorar os alunos no momento da resolução das questões.

Em seguida, foram interpretados os dados. dispondo de uma abordagem qualitativa, fundamentada nos procedimentos dos cálculos matemáticos.

> Na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si – que são pontuados em uma prova de avaliação de aprendizagem-, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem. (CURY, 2018, p. 65)

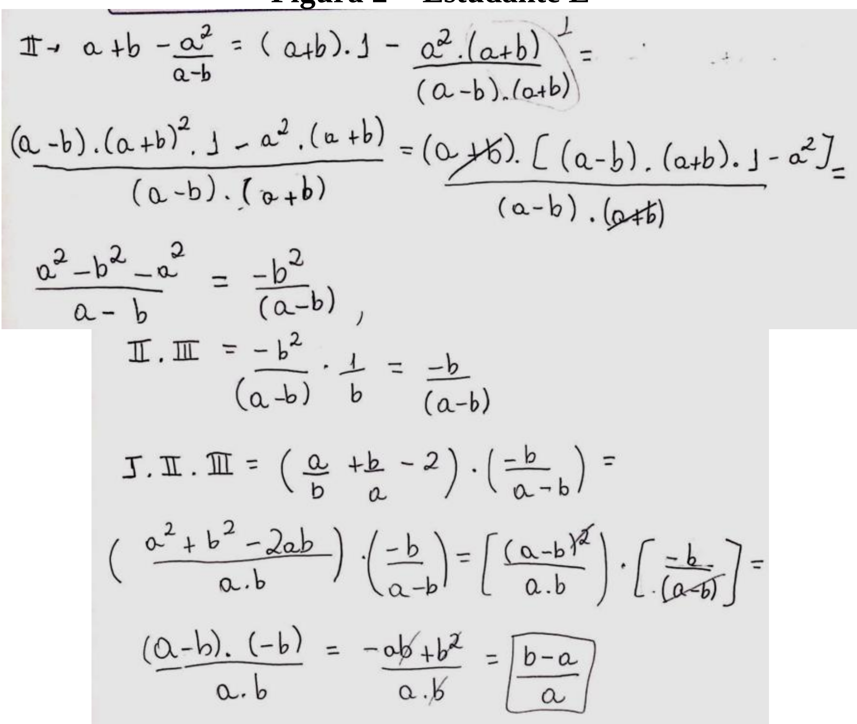
Fez-se a análise levando em conta os procedimentos, acertos e erros cometidos pelos estudantes.

4.1 Questão 01

Na Questão 01, os estudantes precisavam demonstrar conhecimentos relacionados ao conteúdo de simplificação de uma expressão racional envolvendo produtos notáveis; sendo uma questão de álgebra.

Tratando-se de observar a forma procedimental que os estudantes desenvolveram a questão, nota-se que o estudante E, na resolução, utilizou diversos conhecimentos matemáticos já adquiridos e chegou à resposta correta para a questão, conforme demonstrado na Figura 2.

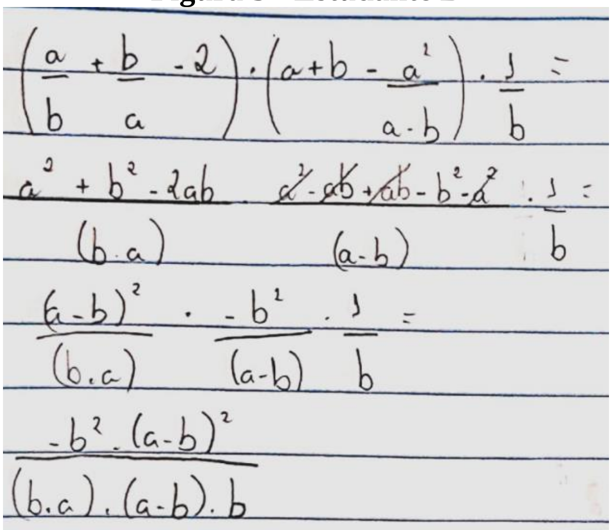
Figura 2 - Estudante E



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Verificou-se que o estudante B conseguiu resolver usando produtos notáveis, mas, mesmo assim, não chegou à resposta correta, conforme a Figura 3.

Figura 3 - Estudante B



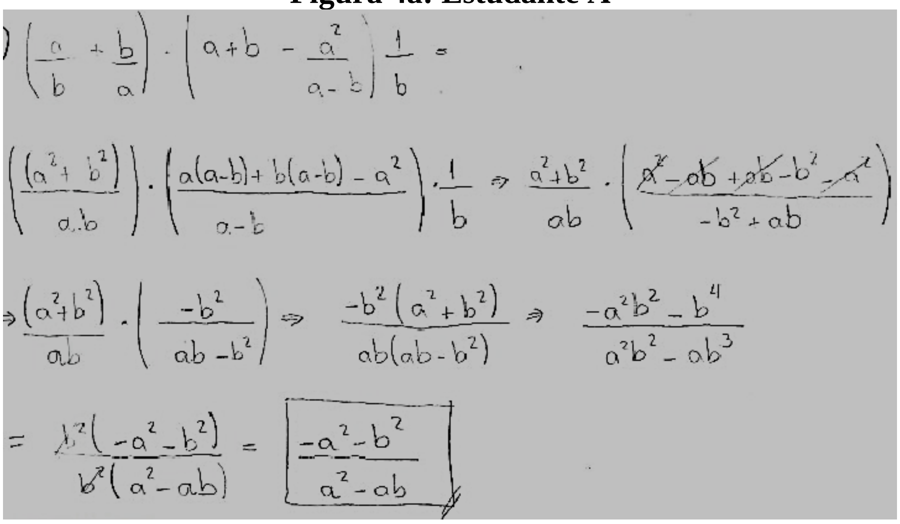
Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Nota-se que os procedimentos matemáticos realizados demonstram que o estudante possui conhecimento suficiente para resolver uma função racional com produtos notáveis; mas como o enunciado da questão refere-se à simplificação da expressão dada, a qual não foi realizada, não se chegou à resposta correta.

Deve-se observar nas Figuras 4a, 4b e 4c que os procedimentos adotados pelos estudantes A, C e D não seguiram um cálculo matemático que envolve produtos notáveis e a operações com números racionais.

Nessa situação, percebe-se que o estudante A não observou que faltava um número que fazia parte da expressão, errando, portanto, a questão.

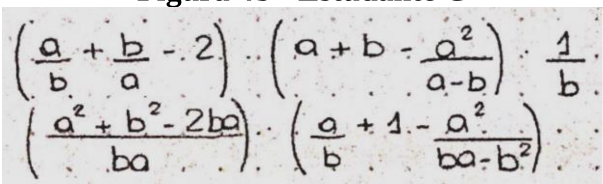
Figura 4a: Estudante A



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Verifica-se na Figura 4b que o cálculo matemático em relação à multiplicação entre números racionais, que deve ser realizada multiplicando numerador por numerador e denominador por denominador, não foi realizado pelo estudante.

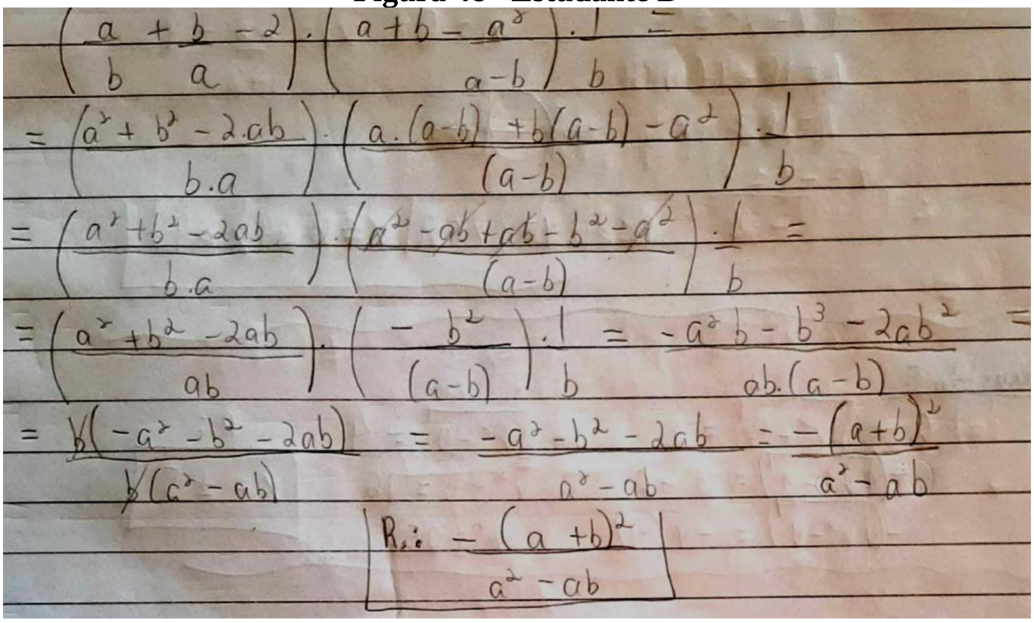
Figura 4b - Estudante C



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Nota-se que, ao realizar o cálculo matemático envolvendo a multiplicação e divisão entre frações, o estudante D seguiu procedimentos que o levou à resposta incorreta da questão. Mesmo diante do exposto, observa-se que ele possui conhecimento matemático em relação a produtos notáveis os quais aparecem no final dos cálculos realizados.

Figura 4c - Estudante D



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

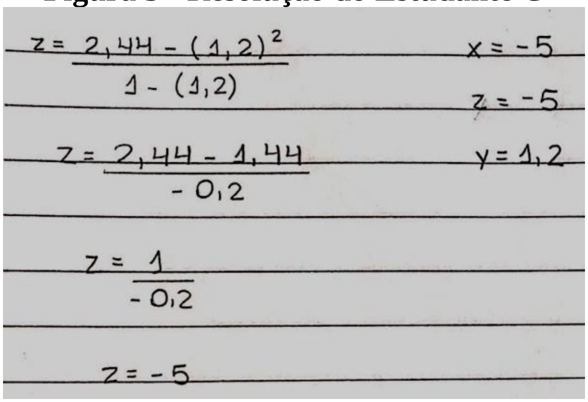
Em grande parte das resoluções, percebe-se que os estudantes demonstraram dificuldades de identificar as operações matemáticas a serem utilizadas e de fazer uso dos conhecimentos já adquiridos para realização dos cálculos. A questão exige o conhecimento das propriedades das operações com números fracionários, sendo que, para a resolução, o cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) serve de facilitador para, assim, chegar ao desenvolvimento do quadrado da diferença e pela simplificação dos termos, seguindo as propriedades de multiplicação e simplificação de números racionais.

4.2 Questão 02

Para a Questão 02, era necessário realizar o cálculo do valor numérico por substituição de um valor numa expressão algébrica, em que o uso de conhecimentos da matemática básica era suficiente para resolução da questão.

Verificou-se que os estudantes não encontraram dificuldades para resolvê-la e todos usaram esses procedimentos matemáticos, com um exemplo na Figura 5.

Figura 5 - Resolução do Estudante C



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

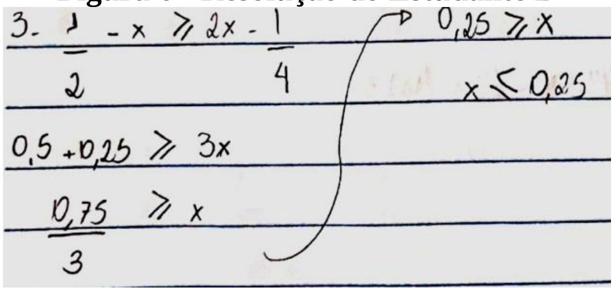
Tais procedimentos matemáticos demonstraram que os estudantes conseguiram reconhecer uma expressão algébrica e realizar operações que envolvem números inteiros e fracionários, assim como substituição e potenciação.

4.3 Questão 03

A Questão 03 consiste em resolver uma inequação do 1º grau e calcular o valor numérico da incógnita da inequação.

Conforme os procedimentos realizados pelos estudantes, percebeu-se que foram aplicados de forma correta os conhecimentos matemáticos que fazem parte da resolução de uma inequação do primeiro grau. A Figura 6 demonstra a resolução da questão realizada pelo estudante B que, nesse caso, observou que o procedimento realizado está pautado no cálculo com números decimais.

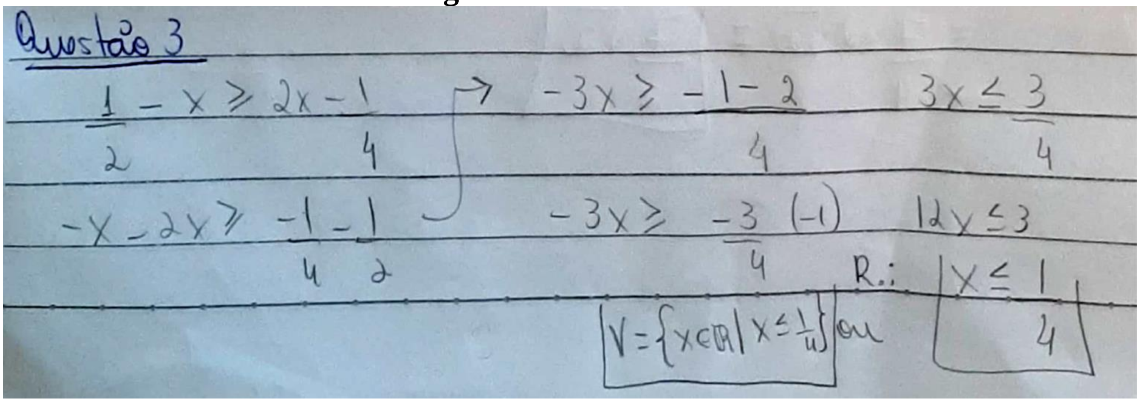
Figura 6 - Resolução do Estudante B



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Na Figura 7, verificou-se que o procedimento estabelecido pelos demais estudantes foi o cálculo com números fracionários e realizado o estudo dos sinais para obtenção do conjunto solução.

Figura 7 - Estudante D



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

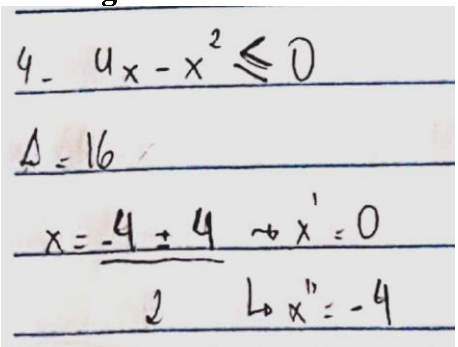
Tratando-se de inequação do 1º grau, pode-se afirmar que os estudantes compreenderam o que lhes foi proposto, pois isolaram as variáveis conservando a regra dos sinais e, assim, efetuando os cálculos com uso de conhecimentos já adquiridos como operações com números fracionários e decimais.

4.4 Questão 04

A Questão 04 propõe a resolução de uma inequação do 2º grau, devendo realizar o cálculo com o objetivo de formular o conjunto solução. Para a resolução, os estudantes poderiam usar um procedimento para encontrar o conjunto solução da questão, como utilizar a fórmula de Bhaskara para calcular as raízes.

Nas Figuras 8a e 8b, extraídas da Avaliação Diagnóstica, verifica-se que o estudante B e o estudante D resolveram a questão utilizando o Teorema de Bhaskara. Percebe-se que, no momento do estudo dos sinais da fórmula de Bhaskara, o aluno B não realizou esse estudo de forma correta, o que o levou ao erro; as raízes são 0 e 4, e ele encontrou -4.

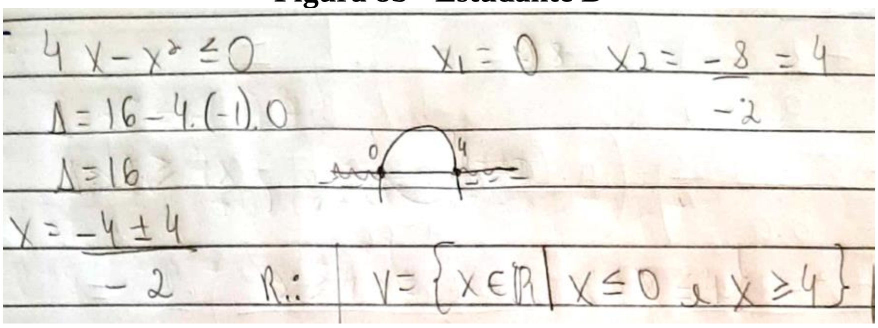
Figura 8 - Estudante B



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Em relação à resolução do estudante D, os cálculos foram aplicados corretamente de acordo com o procedimento matemático usado.

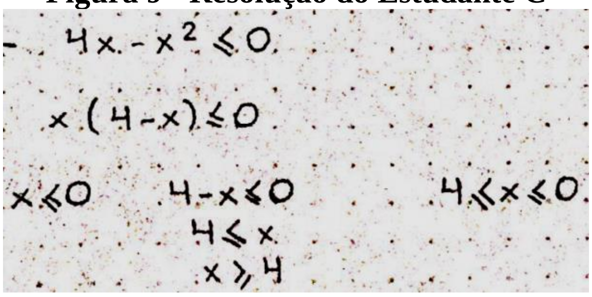
Figura 8b - Estudante D



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Em relação aos estudantes A e C, esses resolveram colocando o termo comum em evidência. Nota-se na Figura 9 que esses alunos identificaram a inequação do segundo grau, mas realizaram o cálculo de forma incorreta.

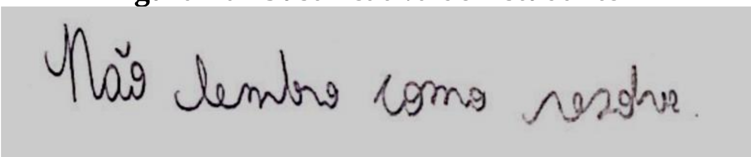
Figura 9 - Resolução do Estudante C



Fonte: Dados a pesquisa (2020)

Percebeu-se que o estudante E não conseguiu aplicar os conhecimentos adquiridos a serem adotados para resolução da questão, como consta na Figura 10.

Figura 10 - Justificativa do Estudante E



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

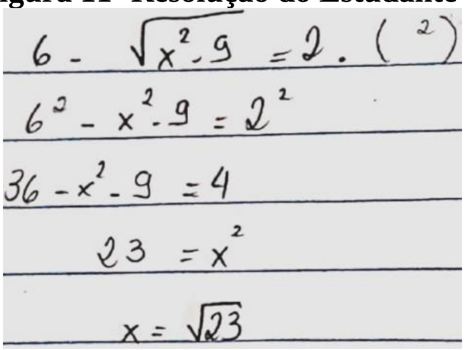
No entanto, verifica-se que dois dos estudantes compreenderam a questão fazendo uso de conhecimentos que possuíam e observando o sinal de desigualdade que determina a solução da inequação do segundo grau.

4.5 Questão 05

A Questão 05 foi elaborada para que o estudante demonstrasse a capacidade de desenvolver os cálculos utilizando os conhecimentos sobre equação irracional. Para resolução da questão, os conhecimentos sobre radiciação e potenciação tornam-se necessários para obter o resultado correto.

Notou-se que dos estudantes, somente um deles não conseguiu desenvolver a equação irracional, conforme Figura 11. Para isso, precisa-se deixar o termo que contém o radical isolado em um lado da igualdade para assim poder elevar os dois lados da igualdade ao quadrado, de forma a eliminar o radical da equação.

Figura 11- Resolução do Estudante B



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Observou-se que os outros estudantes seguiram o mesmo procedimento matemático, observado na Figura 12, para resolver a questão, utilizando conceitos de radiciação para encontrar as raízes da equação.

Figura 12 - Procedimento matemático do Estudante E

$$6-\sqrt{x^2-9}=2 \rightarrow \left(\sqrt{x^2-9}\right)^{\cancel{2}}=(-4)^2 \rightarrow$$

$$x^2-9=16 \rightarrow x^2=16+9 \rightarrow x^2=25 \rightarrow \boxed{x=\pm 5}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Procedimentalmente, a resposta é correta, mas, por ser equação irracional, raiz estranha pode ter sido introduzida ao se levar ao quadrado, porém nenhum aluno atinou para verificar a validade da resposta para a equação original. Por isso, a compreensão dos conteúdos já vistos em todo o processo de ensino de Matemática é essencial para ser utilizada em diversas situações que envolvem os procedimentos usados para resoluções matemáticas.

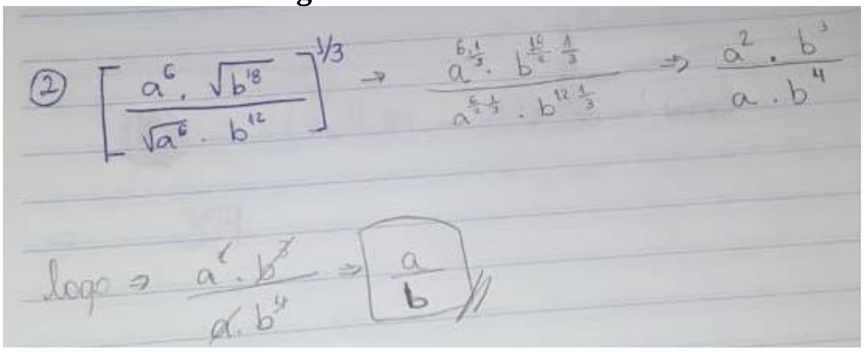
4.6 Questão 06

Na Questão 06, propõe-se que se realizem os cálculos de uma expressão envolvendo radicais, devendo aplicar suas propriedades e a simplificação.

Verifica-se que os estudantes não apresentaram dificuldades para desenvolver os cálculos da questão, uma vez que os procedimentos matemáticos utilizados foram pautados em conhecimentos já adquiridos. Contudo, utilizaram procedimentos diferentes para obter a resposta correta.

Na Figura 13, os estudantes A, D e E desenvolveram a questão extraindo o radical das raízes, transformando potências; usaram as propriedades de potenciação, calcularam e simplificaram a expressão.

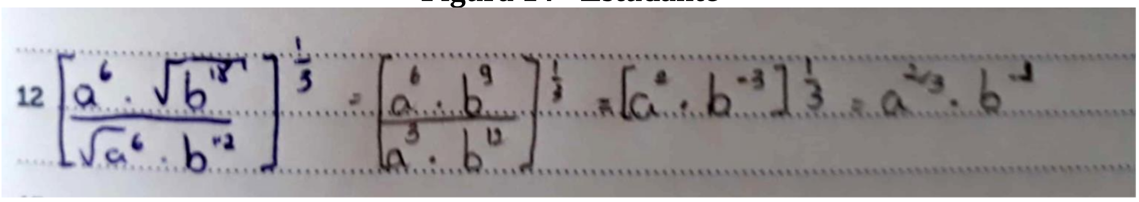
Figura 13 - Estudante A



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Constatou-se, na Figura 14, que, no momento de realizar o cálculo aplicando a propriedade da divisão entre potências, o estudante realizou o procedimento dividindo as potências em vez de subtrair.

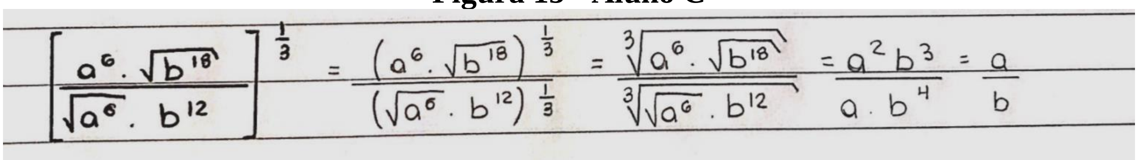
Figura 14 - Estudante



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Infere-se que o procedimento matemático realizado para a questão mostrada na Figura 15 enfatiza o uso da propriedade de radiciação.

Figura 15 - Aluno C



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

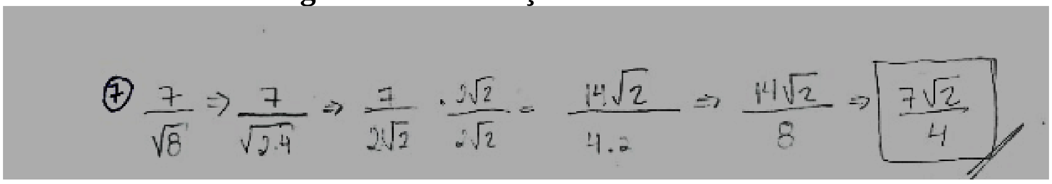
Notou-se que o desempenho dos estudantes em relação à questão demonstrou conhecimentos que permitem ser aplicados a qualquer situação que se refira à simplificação de uma expressão com potências e radicais.

4.7 Questão 07

Na Questão 07, avaliaram-se os procedimentos básicos para o desenvolvimento da racionalização de denominador que consiste em obter uma fração com denominador racional.

Dois estudantes não tiveram dificuldades em resolver essa questão. A Figura 16 apresenta a resolução.

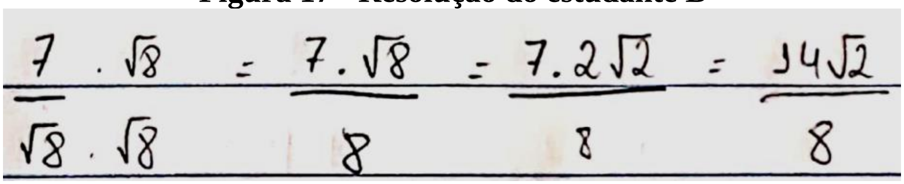
Figura 16 - Resolução do estudante A



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Para chegar ao resultado, esse aluno seguiu o procedimento de fatoração do radical para depois racionalizar e simplificar o máximo possível a fração. Na Figura 17, o estudante B iniciou o cálculo racionalizando, em seguida, fatorou o radical e não simplificou a fração.

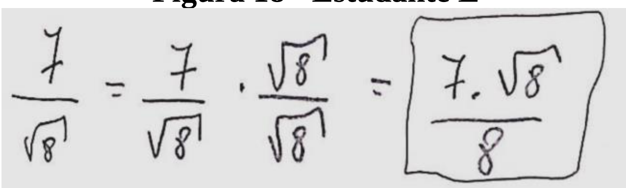
Figura 17 - Resolução do estudante B



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Verificou-se que alguns critérios para racionalizar o denominador de uma fração foram adotados pelos estudantes C e E.

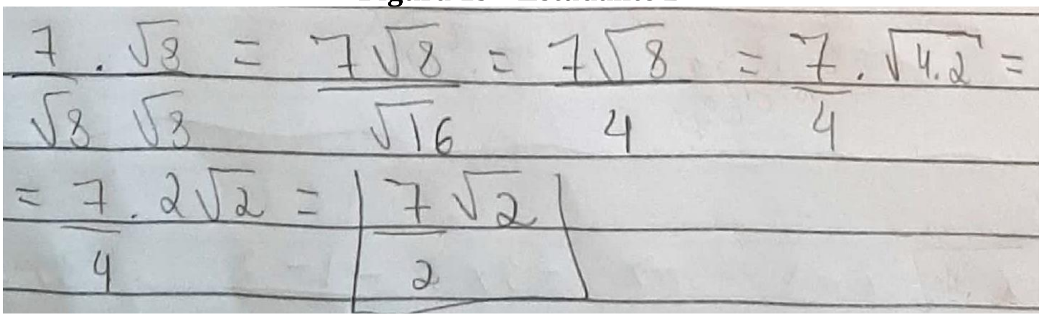
Figura 18 - Estudante E



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Analisou-se o processo utilizado pelo estudante D e detectou-se um erro de multiplicação entre radicais, em que, ao realizar o cálculo, foi feita a soma e não a multiplicação dos radicandos como procedimento correto, conforme a Figura 19.

Figura 19 - Estudante D



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

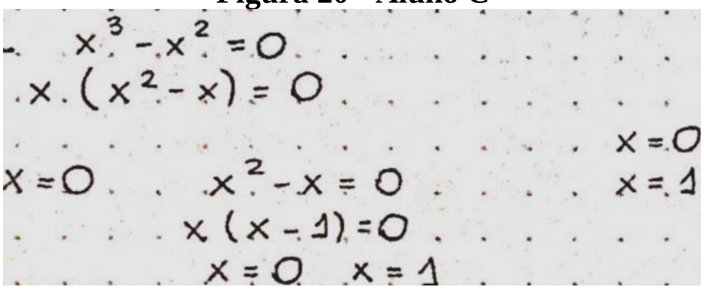
Ressalta-se que, mesmo com respostas diferentes, o conceito de racionalização de denominador em uma fração foi desenvolvido de forma correta. Um dos estudantes (D) não fez a racionalização corretamente e os demais estudantes A, B, C e E não simplificaram como poderiam.

4.8 Questão 08

A Questão 08 consiste em resolver uma equação do terceiro grau reduzindo para primeiro grau e segundo grau. O estudante deve identificar a equação como sendo de terceiro grau e calcular as possíveis soluções.

Apresenta-se, na Figura 20, os procedimentos matemáticos realizados para os cálculos da questão, sendo que todos os estudantes usaram os mesmos procedimentos.

Figura 20 - Aluno C



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

A equação dada é uma equação do 3º grau incompleta, o que permite resolver colocando em evidência os seus termos. Nesse caso, o ideal seria ter colocado o x^2 em evidência, contudo, o modo desenvolvido pelos alunos está correto.

4.9 Questão 09

Na Questão 09, adaptada de Axler (2016), foi pedido fazer o cálculo sem o uso de calculadora. Dentre os procedimentos adotados o uso das operações de adição, subtração e multiplicação seguidas de suas propriedades são critérios fundamentais para resolver o que se pede.

A questão dada é a seguinte:

Figura 21 - Questão 09

Sem usar a calculadora Maria Clara efetuou o cálculo de 43 x 37, conforme registrado abaixo: (Adaptado AXLER, 2016)

$$\begin{aligned} 43 \times 37 &= (40 + 3) \times (40 - 3) \\ &= 40^2 - 3^2 \\ &= 1600 - 9 \\ &= 1591 \end{aligned}$$

Utilizando técnicas matemáticas, e sem a calculadora, registre seu raciocínio para as seguintes sentenças:

a) 78 x 62

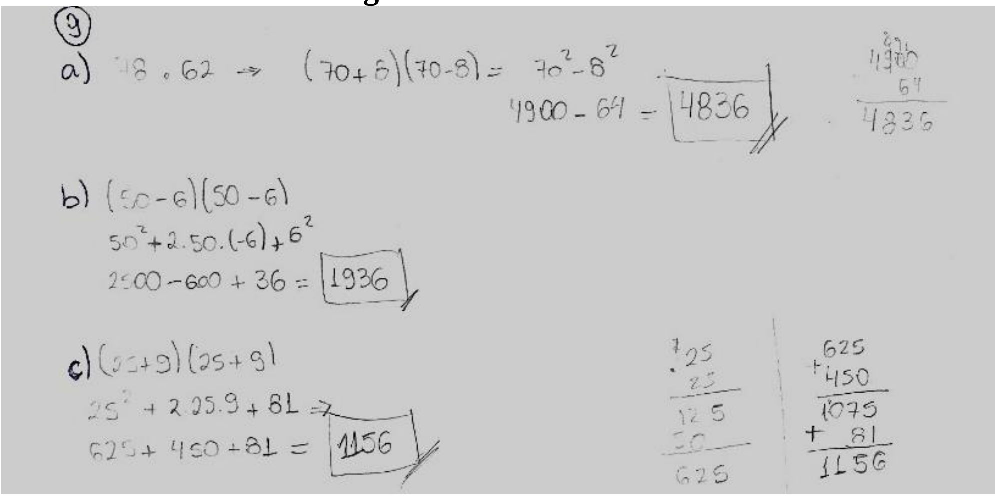
b) $(50 - 6)^2$

c) $(25 + 9)^2$

Fonte: Adaptada de Axler (2016)

Os estudantes adotaram procedimentos diferentes, mas alguns chegaram à resposta correta. A Figura 22 demonstra os procedimentos e o uso de conhecimentos matemáticos facilitadores para as resoluções, em que o estudante teve um bom desempenho na resolução, o que chama a atenção são os procedimentos utilizados: potenciação e produtos notáveis.

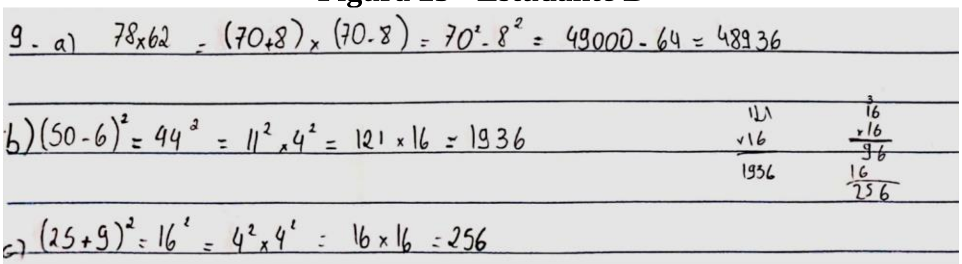
Figura 22 - Estudante A



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

A Figura 23 demonstra que a interpretação e verificação da operação a ser usada é de suma importância na efetivação dos cálculos: o conhecimento da matemática básica que envolve potenciação.

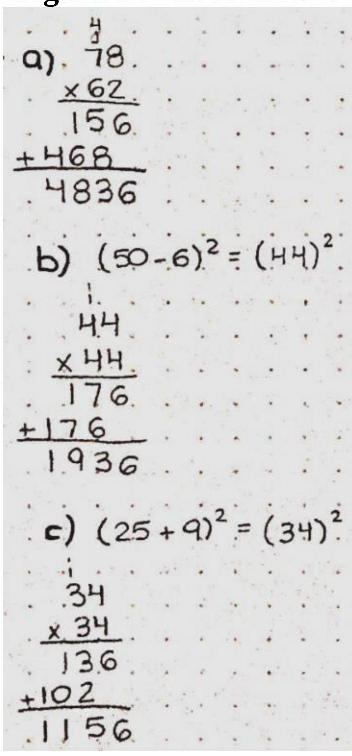
Figura 23 - Estudante B



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Nesse caso, o estudante não cumpriu com o enunciado exemplificado, mas, como foi pedido que realizasse os cálculos sem o uso da calculadora, percebe-se que foi utilizado o procedimento convencional de multiplicação dos números.

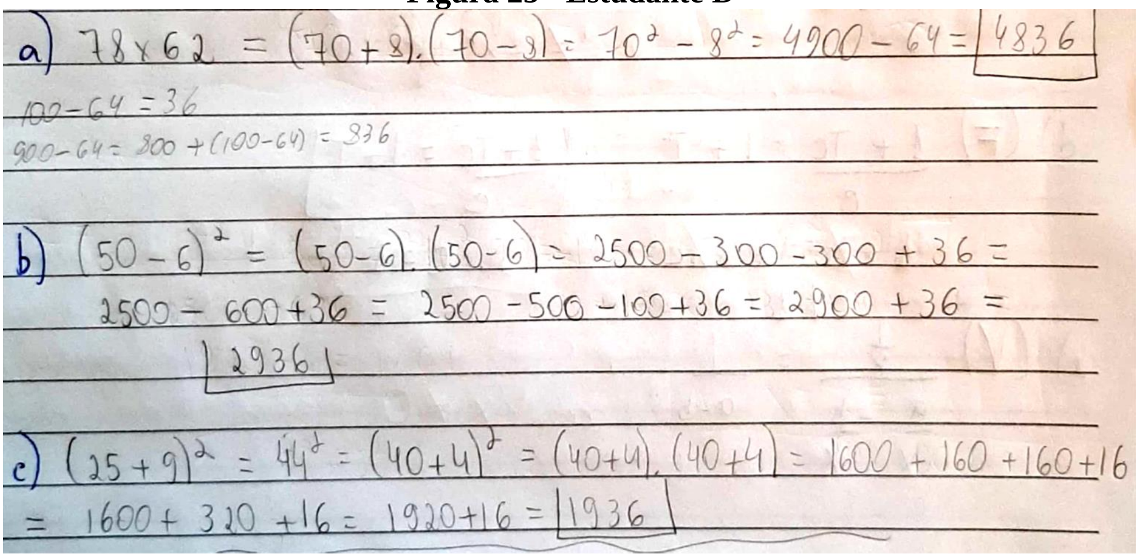
Figura 24 - Estudante C



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Na Figura 25, por meio dos procedimentos demonstrados, nota-se que o estudante na alternativa (c) fez uso do conhecimento de produtos notáveis, sem perceber nem conferir seu resultado.

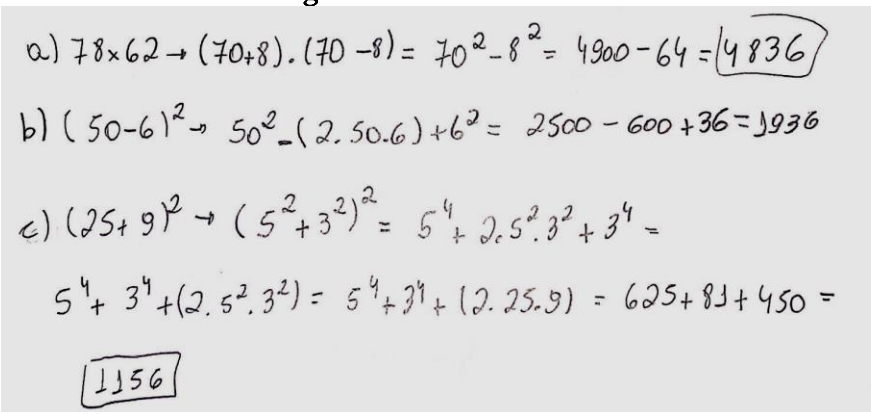
Figura 25 - Estudante D



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Destaca-se na Figura 26 os procedimentos matemáticos usados para o desenvolvimento da questão; para obtenção dos resultados enfatizam-se o conhecimento em potenciação e suas regras.

Figura 26 - Estudante E



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Ressalta-se que mesmo que a questão exija conhecimentos da matemática básica, os estudantes demonstraram certa dificuldade em resolver. Os critérios e procedimentos adotados se dão pela interpretação da questão.

4.10 Questão 10

A Questão 10, adaptada de Axler (2016), foi elaborada para que o estudante demonstrasse a capacidade de efetuar os cálculos por meio da manipulação de parênteses, encontrando valores distintos para a expressão. O procedimento exige conhecer as operações fundamentais.

Observa-se na Figura 27 que o estudante precisa dar a devida importância aos parênteses, visto que sua posição interfere diretamente no resultado.

Figura 27 - Questão 10

Em um grupo de estudos, Ana Cecília propôs um desafio aos colegas: "Descobrir quantas soluções matemáticas podem ser encontradas em uma mesma sentença, ao inserir um par de parênteses em diferentes posições na expressão matemática: 6 + 3x4 + 5x2".

Após várias discussões e resoluções, os colegas encontraram cinco soluções diferentes, conforme registros abaixo:

Solução 1: (6 + 3x4 + 5x2) = 28

Solução 2: 6 + (3x4 + 5) x2 = 40

Solução 3: (6 + 3) x4 + 5x2 = 46

Solução 4: 6 + 3x (4 + 5x2) = 48

Solução 5: 6 + 3x (4 + 5) x2 = 60

Com base nos registros apresentados pelo grupo de estudos, quantas soluções diferentes podem ser encontradas, ao inserir apenas um par de parênteses em posições diferentes, para a expressão: 19 – 12 – 8 – 2? É obrigatório apresentar a posição em que os parênteses foram colocados, bem como o valor numérico correto da solução encontrada para cada proposta. (Adaptado AXLER, 2016)

a) 2 Soluções diferentes
b) 5 Soluções diferentes
c) 8 Soluções diferentes
d) 10 Soluções diferentes
e) 12 Soluções diferentes

Fonte: Adaptada de Axler (2016)

A Figura 28 demostra a resolução do estudante D, sendo que os demais seguiram o mesmo procedimento para realização dos cálculos.

Figura 28 - Estudante D

(19 - 12 - 8 - 2) = -3 Alternativa B → 5 soluções diferentes
19 - (12 - 8 - 2) = 17 mas eu encontrei apenas 4
19 - 12 - (8 - 2) = 1 possíveis.
19 - (12 - 8) - 2 = 13 Obs: as outras 6 configurações
resultam em -3.

Fonte: Dados da pesquisa (2020)

O desempenho dos estudantes nesta questão não foi bom, já que, ao inserir os parênteses em diferentes posições da expressão, eles conseguiram fazê-lo de forma a calcular somente as operações de adição e subtração de números inteiros, esquecendo que poderiam colocar os parênteses de forma a calcular usando a multiplicação.

4.11 Questão 11

A Questão 11, adaptada de Stewart (2016), necessita do procedimento de simplificação de expressões algébricas.

A questão é a seguinte:

Figura 29 - Questão 11

Assinale (F) para sentenças matemáticas falsas e (V) para sentenças verdadeiras, fazendo a correção das alternativas erradas. (Adaptado de STEWART, 2016)

a) ( ) $(p+q)^2 = p^2 + q^2$

b) ( ) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

c) ( ) $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

d) ( ) $\frac{1+TC}{C} = 1 + T$

e) ( ) $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}} = \frac{1}{a-b}$

Fonte: Adaptada de Stewart (2016)

Para resolução das alternativas, torna-se necessário verificar algumas propriedades matemáticas que envolvem potenciação, radiciação e cálculo envolvendo fração. Deve-se comparar a igualdade e fazer a correção das alternativas falsas.

Nota-se que, para a alternativa (a), o estudante deve possuir conhecimento em produtos notáveis. O quadrado da soma de dois números não é igual à soma dos quadrados desses números.

Na Figura 31, os estudantes fizeram a verificação de igualdade desenvolvendo o quadrado da soma de dois termos e a soma de dois quadrados.

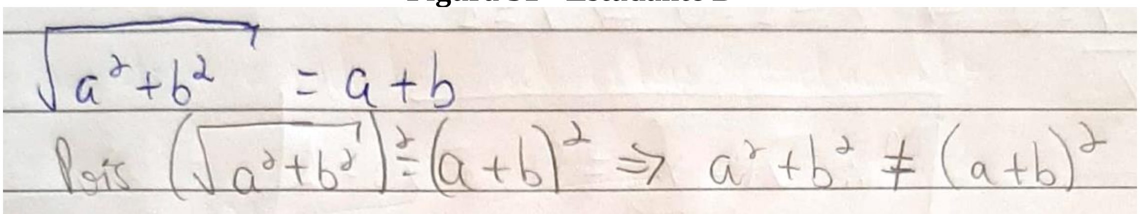
Figura 30 - Estudante E

$(p+q)^2 = p^2 + q^2 \to (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$

Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Observa-se que, para a alternativa (b), deve-se aplicar o conhecimento matemático de radiciação. Como mostra a Figura 31, os estudantes resolveram usando o procedimento de elevar os dois membros da igualdade ao quadrado e assim eliminar o radical, verificando que a igualdade é falsa.

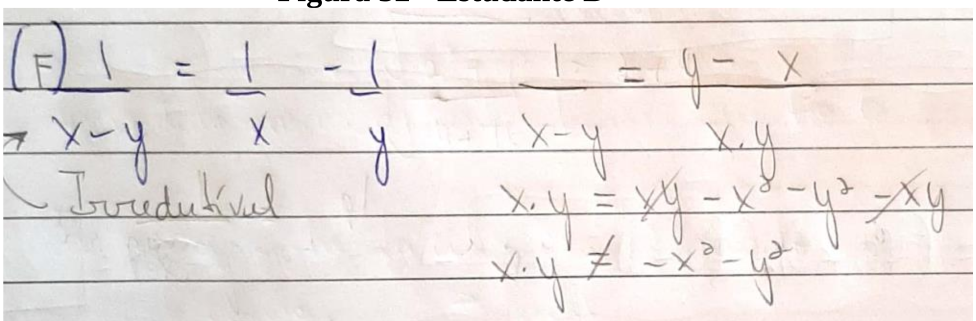
Figura 31 - Estudante D



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Trata-se de resolver a diferença das duas frações, calculando o m.m.c., o que o estudante fez corretamente.

Figura 32 - Estudante D



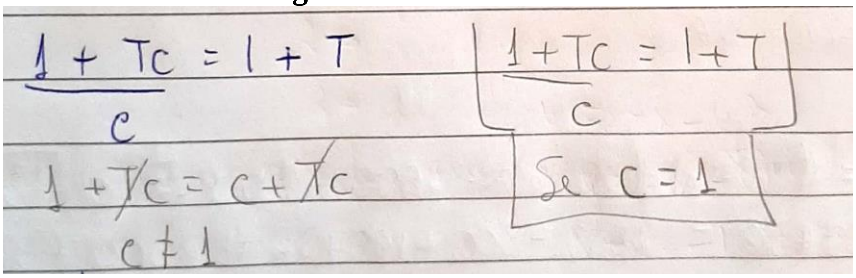
Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Pelos resultados dos estudantes, evidencia-se que os conteúdos da matemática básica foram identificados como facilitadores para a resolução da verificação da sentença.

Mostra-se na alternativa (d) uma sentença envolvendo operação com números fracionários: trata-se de resolver usando alguns procedimentos matemáticos como multiplicação cruzada e pela simplificação dos termos comuns para chegar ao resultado correto.

Analisaram-se os procedimentos e foi percebido que os estudantes conseguiram resolver corretamente a expressão descrita, assim representada na Figura 33.

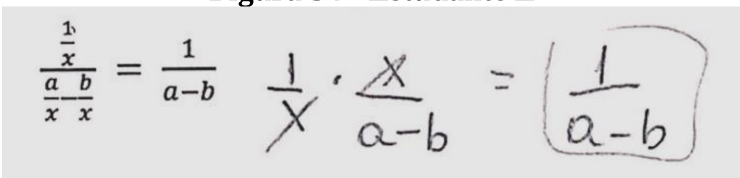
Figura 33 - Estudante D



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Na alternativa (e) tem-se a igualdade:

Figura 34 - Estudante E



Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes fizeram a inversão da primeira fração e simplificaram, mostrando que a igualdade é verdadeira. Mas, aqui, como em outras partes nesta dissertação, aluno algum atinou por estabelecer as adequadas condições, no caso: $x \neq 0$ e $a \neq b$, no domínio real. Assim, vê-se que as categorias procedimental, conceitual e também a atitudinal são importantes em todo o processo.

Esta questão, no entanto, exigiu e a maioria dos alunos cumpriu o objetivo e aplicou vários conhecimentos básicos de procedimentos, tais como radiciação, produtos notáveis e operações com fração.

4.12 Questão 12

A Questão 12 foi adaptada de Axler (2016) em que foram fornecidas duas expressões matemáticas em que se pede para verificar se as simplificações foram realizadas corretamente.

Nota-se que para a sentença (I) existem alguns procedimentos diferentes para resolução, um deles é o uso do conteúdo de produtos notáveis ou propriedade distributiva.

Figura 35 - Questão 12

Isabela, Rodrigo, Jordana, Jéssica e Rafaela são estudantes de engenharia e foram desafiados pelo professor para verificar se as expressões matemáticas I e II, descritas abaixo, foram simplificadas de forma correta.

I. $(a+2).(a-2).(a^2-4) = (a^4-16)$

II. $\dfrac{\frac{a-t}{b-c}}{\frac{b+c}{a+t}} = \dfrac{a^2-t^2}{b^2-c^2}$

Após efetuar os devidos cálculos e simplificações, os quatro estudantes apresentaram as seguintes conclusões. Assinale a conclusão correta e registre no quadro a seguir os cálculos que você realizou para comprovar a sua resposta: (Adaptado AXLER, 2016)

a) Rafaela afirmou que é impossível simplificar as expressões matemáticas I e II.
b) Isabela concluiu que apenas a expressão I foi simplificada de forma correta.
c) Rodrigo concluiu que apenas a expressão II foi simplificada de forma correta.
d) Jordana concluiu que as expressões I e II foram simplificadas de forma errada.
e) Jéssica concluiu que as expressões I e II foram simplificadas de forma correta.

Fonte: Adaptada Axler (2016)

Observa-se que os estudantes conseguiram identificar a aplicação dos produtos notáveis, mas erraram na conta final, na última passagem, fazendo a multiplicação pela propriedade distributiva e errando, assim, as contas no final. Mas verificou-se que ela não é verdadeira.

Figura 36 - Estudante B

I $(a+2).(a-2)(a^2-4) = a^4-16$ (F)

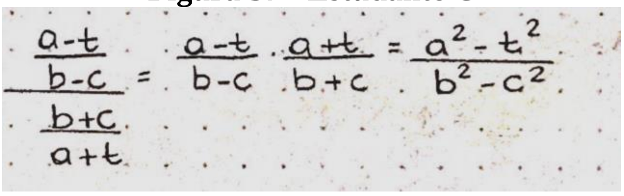
$(a^2-\cancel{2a}+\cancel{2a}-4).(a^2-4) = (a^2-4).(a^2-4) = a^4-4a^2-4a^2+16 = a^4-8a^2+6$

Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Para a sentença (II), torna-se necessário o conhecimento sobre as propriedades que envolvem operações com números fracionários. Apresentou-se uma divisão de frações, em que o numerador e o denominador são compostos por frações. Assim, dividir uma fração desse formato significa multiplicar por uma invertida.

Em relação ao desenvolvimento realizado pelos estudantes, registrado na Figura 37, a aplicação do procedimento usado na resolução seguiu em manter a primeira fração (numerador) e multiplicar pelo inverso da segunda (denominador).

Figura 37 - Estudante C



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

4.13 Registros

Em relação à Avaliação Diagnóstica, houve relatos relacionados à dificuldade em algumas questões e julgando-a de nível médio a alto.

Em se tratando das questões da Avaliação Diagnóstica, os estudantes relataram que encontraram dificuldades em resolver algumas, como descritas no Quadro 1.

Quadro 1 - Dificuldades nas questões

Estudantes	**Questões**
A	Não houve
B	9, 10 e 11
C	1 e 6
D	6 e 10
E	1, 4, 8, 9 e 11

Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Enfatiza-se que, apesar das dificuldades, os alunos descrevem que os conteúdos matemáticos exigidos para resolução das questões são quesitos básicos para disciplina de Cálculo e para graduandos em engenharia.

Observou-se que os estudantes conseguiram perceber a importância do conhecimento da matemática básica para resolver situações que apresentam o uso de técnicas e procedimentos matemáticos que são essenciais à disciplina de Cálculo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos específicos da Pesquisa foram cumpridos, pois foram formuladas atividades de cunho procedimental e foram aplicadas, sendo seus resultados analisados.

Esta investigação, como explicitado na Introdução, juntamente com mais duas da análise do Conceito e da Resolução de Problemas da Matemática Superior e Básica fazem parte de um Projeto de Pesquisa "Nivelamento de estudantes de Engenharia e sua integração à Universidade".

Muitas pesquisas são realizadas para diagnosticar o nível dos estudantes ingressantes nas universidades brasileiras, bem como oferecer estratégias de ensino e aprendizagem para esses, seja na revisão dos conceitos básicos, seja nos procedimentos da Matemática Básica ou da disciplina Cálculo I.

Esta investigação teve como objeto estudar os procedimentos mais usados pelos alunos nas disciplinas de Matemática e Física, especialmente. Constataram-se erros dos procedimentos algébricos relativos às operações que exigiram uma *performance* maior nos cálculos, como manejar os símbolos matemáticos.

Mas, de uma maneira geral, os estudantes acertaram as questões, mostrando um bom desenvolvimento operacional. As questões não envolveram complexidade em cálculos, pois o objetivo era diagnosticar os requisitos mínimos, fundamentais para os cursos da área exatas.

Espera-se que os resultados obtidos possam contribuir para melhoria do ensino da matemática básica dos cursos da área de Ciências Exatas e de Engenharia.

REFERÊNCIAS

AUGUSTO, Cleiciele Albuquerque; SOUZA, José Paulo de; DELLAGNELO, Eloise Helena Livramento; CARIO, Silvio Antonio Ferraz. Pesquisa Qualitativa: rigor metodológico no tratamento da teoria dos custos de transação em artigos apresentados nos congressos da Sober (2007-2011). **RESR**, Piracicaba-SP, v. 51, n. 4, p. 745-764, Out/Dez 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/resr/v51n4/a07v51n4.pdf. Acesso em 21 jul. 2020.

AXLER, Sheldon. **Pré-Cálculo uma preparação para o cálculo**. Tradução de Maria Cristina Varriele e Naira Maria Balzaretti. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

CAVASOTTO, Marcelo; VIALI, Lori. Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar. **Boletim GEPEM** nº 59- Jul/Dez 2011. Disponível em: http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/11894/2/Dificuldades_na_aprendizagem_de_calculo_o_que_os_erros_podem_informar.pdf. Acesso em: 12 jan. 2020.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

CURY, Helena Noronha. "Professora, eu só errei um sinal!": como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. *In*: **Disciplinas matemáticas em cursos superiores:** reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática da Teoria à Prática.** Campinas: Papirus, 2012.

FROTA, Maria Clara Resende. Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo. *In*: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas Lachini. (org.). **Educação matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

FROTA, Maria Clara. Teoria e prática na aprendizagem de Cálculo**. Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 20, n. 28, p. 21-38, 2017.

IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. *In*: FROTA, Maria Clara Resende; NASSER, Lilian (org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, pp. 11-26, 2009.

ISEWAKI, Nancy Tiemi. **A prática na introdução do Cálculo com várias abordagens em Curso de Engenharia.** Belo Horizonte, 2019. 150p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática e Ciências) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

JESUS, Marcos Antônio Santos. As atitudes e desempenho em Cálculo Diferencial e Integral de Estudantes de Engenharia. *In*: GODOY, Elenilton Vieira; GERAB, Fábio (org.). **Ensino e aprendizagem de matemática na educação superior**: inovações, propostas e desafios. Rio de Janeiro: Alta Books, 2018. 320 p.

LACHINI, Jonas. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo. *In*: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. (org.). **Educação Matemática:** a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001, p.146-190.

LACHINI, Jonas. LAUDARES, João Bosco. O uso do computador no ensino de matemática na graduação. *In*: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. (org.). **Educação Matemática:** a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

LAUDARES, João Bosco. A matemática e a estatística nos cursos de graduação da área tecnológica e gerencial: um estudo de caso dos cursos da PUC Minas. *In*:: CURY, Helena Noronha. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

LAUDARES, João Bosco; MIRANDA, Dimas Felipe de; REIS, Júlio Paulo Cabral dos; FURLETTI, Saulo. **Equações diferenciais e transformadas de Laplace**. Belo Horizonte: Editora Artesã, 2017.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectiva em aritmética e álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas-SP: Papirus, 1997.

MALTA, Iaci. Linguagem, leitura e matemática. *In*: CURY, Helena Noronha (org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

PALIS, Gilda de La Rocque. Pesquisa sobre a Própria Prática no Ensino Superior de Matemática. *In*: FROTA, Maria Clara Resende; NASSER, Lilian (org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Brasília: SBEM, 2009. p. 203-221.

PEREIRA FILHO, Albano Dias; KAIBER, Carmen Teresa; LÉLIS, Flávio Roldão de Carvalho. Categorização e análise de erros Cálculo Diferencial e Integral. *In*: COBENGE – CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, XL., 2012, Belém - PA . **Anais eletrônicos**... Belém. Disponível em: < http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2012/artigos/104513.pdf > Acesso em: 08 jan. 2020.

PERES, Gilmer Jacinto. **Um objeto de apoio à aprendizagem autorregulada em problemas de máximo e mínimo**. 2009. 145f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

REZENDE, Wanderley Moura. **Dificuldades com o ensino de cálculo uma cartografia simbólica**. Curitiba: Appris, 2020.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 467 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROSA, Chaiane de Medeiros; ALVARENGA, Karly Barbosa; SANTOS, Fabiano Fortunato Teixeira dos**.** Desempenho Acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral: um estudo de caso. **Revista Internacional de Educação Superior**. Campinas, SP, v. 5, 2019. DOI: 10.20396/riesup.v5i0.8653091.Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/riesup/article/view/8653091/19035. Acesso em 10 dez. 2019.

SANTOS, Raimundo Nonato Souza dos. **Contribuição do curso de nivelamento em Matemática na disciplina de Cálculo I**. 2018. 80f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/bitstream/tede/6814/6/Disserta%c3%a7%c3%a3o_Raimundo Santos_PPGECIM. Acesso em 12 jan. 2020.

SANTOS, Janice Valia de Los. **Formação básica em engenharia**: a articulação das disciplinas pelo cálculo diferencial e integral. 2009. 202 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SOARES, Eliana Maria do Sacramento; SAUER, Laurete Zanol. Um novo olhar sobre a aprendizagem de Matemática para a Engenharia. *In*: CURY, Helena Noronha (org.). **Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004, p.245-270.

STEWART, James. **Cálculo**. Tradução de Helena Maria Ávila de Castro. Revisão técnica Eduardo Garibaldi. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 680p. 1 v.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto alegre: Artmed, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A: AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CLEICIONE CECILIA COELHO OLIVEIRA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

BELO HORIZONTE, MG
2020

Caro Aluno,

Esta avaliação diagnóstica faz parte de minha pesquisa desenvolvida no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-MG. Dar-se por questões elaboradas com intuito de analisar a abordagem procedimental utilizada no ensino de Cálculo.

Realize as questões com muita atenção, faça as análises necessárias para resolver a avaliação diagnóstica usando seus conhecimentos. Pede-se que registre o seu raciocínio e procedimentos, mesmo que não tenha certeza da sua resposta.

Somente os registros serão analisados, logo, nenhum participante terá sua identidade mencionada.

Agradeço, desde já, por sua participação.

Atenciosamente,

Cleicione Cecilia Coelho Oliveira

PONTIFÍCA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

MESTRADO EM ENSINO DE CÊNCIAS E MATEMÁTICA

PESQUISA: Criação e análise da aplicação de atividades de cunho procedimental de Cálculo para estudantes ingressantes em cursos de Engenharia

QUESTÕES POR CONTEÚDO – PROCEDIMENTOS

(1) Simplificar uma função racional com produtos notáveis.

(2) Calcular o valor numérico por substituição de um valor numa expressão algébrica.

(3) Resolver inequação do 1º Grau.

(4) Resolver inequação do 2º Grau.

(5) Resolver uma equação irracional.

(6) Cálculo de uma expressão aritmética com potências e radicais.

(7) Racionalizar uma fração com radical no denominador.

(8) Resolver uma equação do 3º grau reduzindo para 1º e 2º graus.

(9) Resolver as expressões algébricas aplicando as identidades fundamentais.

(10) Resolver aplicando a ordem das operações algébricas e verificar o papel dos parênteses.

(11) Simplificar a expressão o máximo possível.

(12) Simplificar a expressão o máximo possível.

Questão 01: Simplificar uma função racional com produtos notáveis.

Simplificar a expressão: $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right).\left(a+b-\frac{a^2}{a-b}\right).\frac{1}{b}$

Desenvolvimento

Questão 02: Calcular o valor numérico por substituição de um valor numa expressão algébrica.

Calcular o valor da expressão x = z

$z = \dfrac{2{,}44 - y^2}{1 - y}$ para y = 1,2

Desenvolvimento

Questão 03: Resolver inequação do 1º Grau.

Resolver a inequação: $\frac{1}{2} - x \geq 2x - \frac{1}{4}$

Desenvolvimento

Questão 04: Resolver inequação do 2º grau.

Resolver a inequação: $4x - x^2 \leq 0$

Desenvolvimento

Questão 05: Resolver uma equação irracional

Calcular a solução da equação irracional 6 - $\sqrt{x^2 - 9} = 2$

Desenvolvimento

Questão 06: Cálculo de uma expressão aritmética com potências e radicais.

Simplificar a expressão: $\left[\dfrac{a^6 \,.\, \sqrt{b^{18}}}{\sqrt{a^6}.\ b^{12}}\right]^{\frac{1}{3}}$

Desenvolvimento

Questão 07: Racionalizar uma fração com radical no denominador.

Racionalizar o denominador da fração: $\frac{7}{\sqrt{8}}$

Desenvolvimento

Questão 08: Resolver uma equação do 3º grau reduzindo para 1º e 2º graus.

Resolver a equação do 3º grau reduzindo para equações do 1º e 2º graus:

$$x^3 - x^2 = 0$$

Desenvolvimento

Questão 09: Resolver as expressões algébricas aplicando as identidades fundamentais.

Sem usar a calculadora Maria Clara efetuou o cálculo de 43 x 37, conforme registrado abaixo: (Adaptado AXLER, 2016)

$$\begin{aligned} 43 \times 37 &= (40 + 3) \times (40 - 3) \\ &= 40^2 - 3^2 \\ &= 1600 - 9 \\ &= 1591 \end{aligned}$$

Utilizando técnicas matemáticas, e sem a calculadora, registre seu raciocínio para as seguintes sentenças:

a) 78 x 62

b) $(50 - 6)^2$

c) $(25 + 9)^2$

Questão 10: Reconhecer a ordem das operações algébricas e o papel dos parênteses.

Em um grupo de estudos, Ana Cecília propôs um desafio aos colegas: "Descobrir quantas soluções matemáticas podem ser encontradas em uma mesma sentença, ao inserir um par de parênteses em diferentes posições na expressão matemática: 6 + 3x4 + 5x2".

Após várias discussões e resoluções, os colegas encontraram cinco soluções diferentes, conforme registros abaixo:

Solução 1: (6 + 3x4 + 5x2) = 28

Solução 2: 6 + (3x4 + 5) x2 = 40

Solução 3: (6 + 3) x4 + 5x2 = 46

Solução 4: 6 + 3x (4 + 5x2) = 48

Solução 5: 6 + 3x (4 + 5) x2 = 60

Com base nos registros apresentados pelo grupo de estudos, quantas soluções diferentes podem ser encontradas, ao inserir apenas um par de parênteses em posições diferentes, para a expressão: 19 – 12 – 8 – 2? É obrigatório apresentar a posição em que os parênteses foram colocados, bem como o valor numérico correto da solução encontrada para cada proposta. (Adaptado AXLER, 2016)

a) 2 Soluções diferentes
b) 5 Soluções diferentes
c) 8 Soluções diferentes
d) 10 Soluções diferentes
e) 12 Soluções diferentes

Questão 11: Simplificar as expressões algébricas.

Assinale (F) para sentenças matemáticas falsas e (V) para sentenças verdadeiras, fazendo a correção das alternativas erradas. (Adaptado de STEWART, 2016)

a) ( ) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$

b) ( ) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

c) ( ) $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

d) ( ) $\frac{1+TC}{C} = 1 + T$

e) ( ) $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}} = \frac{1}{a-b}$

Questão 12: Simplificar a expressão o máximo possível.

Isabela, Rodrigo, Jordana, Jéssica e Rafaela são estudantes de engenharia e foram desafiados pelo professor para verificar se as expressões matemáticas I e II, descritas abaixo, foram simplificadas de forma correta.

III. $(a + 2).(a - 2).(a^{2} - 4) = (a^{4} - 16)$

IV. $$\frac{\frac{a-t}{b-c}}{\frac{b+c}{a+t}} = \frac{a^{2}-t^{2}}{b^{2}-c^{2}}$$

Após efetuar os devidos cálculos e simplificações, os quatro estudantes apresentaram as seguintes conclusões. Assinale a conclusão correta e registre no quadro a seguir os cálculos que você realizou para comprovar a sua resposta: (Adaptado AXLER, 2016)

a) Rafaela afirmou que é impossível simplificar as expressões matemáticas I e II.
b) Isabela concluiu que apenas a expressão I foi simplificada de forma correta.
c) Rodrigo concluiu que apenas a expressão II foi simplificada de forma correta.
d) Jordana concluiu que as expressões I e II foram simplificadas de forma errada.
e) Jéssica concluiu que as expressões I e II foram simplificadas de forma correta.

Memória de Cálculo Sentença I	**Memória de Cálculo Sentença II**

APÊNDICE B: PRODUTO EDUCACIONAL

CRIAÇÃO E ANÁLISE DA APLICAÇÃO DE ATIVIDADES DE CUNHO PROCEDIMENTAL DE CÁLCULO PARA ESTUDANTES INGRESSANTES EM CURSOS DE ENGENHARIA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Organização: Cleicione Cecilia Coelho

Orientador: Dr. João Bosco Laudares

APRESENTAÇÃO

Esta Avaliação Diagnóstica é resultado da pesquisa de mestrado intitulada “Criação e análise da aplicação de atividades de cunho procedimental de cálculo para estudantes ingressantes em cursos de engenharia”, cujo objetivo foi elaborar uma proposta de verificação do conhecimento procedimental de estudantes ingressantes em cursos de Engenharia, através de questões que contempla os procedimentos algébricos: cálculo, algoritmos, operações com produtos notáveis, entre outras operações que constitui a Matemática básica, problematizando o ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

Após realizar a aplicação de uma avaliação diagnóstica para estudantes ingressantes do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário de Patos de Minas – UNIPAM, foi possível verificar os procedimentos matemáticos utilizados para resolução das questões propostas, analisando os erros e acertos cometidos pelos estudantes.

Logo, esta Avaliação Diagnóstica contempla questões procedimentais. Zabala (2007, pág. 31) diz que, despertar o aluno para “o que se deve saber” (conceitual), “o que se deve saber fazer” (procedimental) e “como se deve ser” (atitudinal) é essencial para que ocorra um índice satisfatório para o ensino e aprendizagem de Matemática e, consequentemente, o de Cálculo.

A análise das questões foi fundamentada em procedimentos dos cálculos matemáticos.

QUESTÕES POR CONTEÚDOS - PROCEDIMENTOS

As questões se dão por conteúdos matemáticos com foco no procedimental.

Assim, em cada questão apresentada, constam os objetivos relacionados aos conhecimentos matemáticos que se espera do aluno para realização dos cálculos.

Questão 01: Simplificação de frações algébrica

- Objetivos:
  - ✓ Reconhecer e desenvolver produtos notáveis.
  - ✓ Aplicar os produtos notáveis na resolução dos cálculos.
  - ✓ Simplificar uma expressão algébrica usando outros conhecimentos já adquiridos.
  - ✓ Conhecer os tipos de fatoração.
  - ✓ Identificar os tipos de operações matemáticas a serem utilizadas para realização dos cálculos.

Questão 01: Simplificar uma função racional com produtos notáveis.

Simplificar a expressão: $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right).\left(a+b-\frac{a^2}{a-b}\right).\frac{1}{b}$

Desenvolvimento

Questão 02: Simplificação de frações algébricas

- Objetivos:
  - ✓ Reconhecer uma expressão algébrica.
  - ✓ Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica.
  - ✓ Realizar a substituição de valores em expressões algébricas.
  - ✓ Reconhecer e determinar os números negativos e números nas formas decimal e fracionária.
  - ✓ Efetuar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros e fracionários.

Questão 02: Calcular o valor numérico por substituição de um valor numa expressão algébrica.

Calcular o valor da expressão x = z

$z = \frac{2{,}44 - y^2}{1 - y}$ para y = 1,2

Desenvolvimento

Questão 03: Inequação do 1° grau

- Objetivos:
  - ✓ Interpretar e identificar os símbolos de desigualdades.
  - ✓ Reconhecer inequações do 1º grau com uma incógnita.
  - ✓ Calcular o valor numérico da incógnita da inequação.
  - ✓ Identificar o conjunto solução.

Questão 03: Resolver inequação do 1º Grau.

Resolver a inequação: $\frac{1}{2} - x \geq 2x - \frac{1}{4}$

Desenvolvimento

Questão 04: Inequação do 2° grau

- Objetivos:
  - ✓ Identificar uma equação do 2º grau.
  - ✓ Perceber na sua formatação os símbolos de desigualdades.
  - ✓ Calcular o conjunto solução.

Questão 04: Resolver inequação do 2º grau.

Resolver a inequação: $4x - x^2 \leq 0$

Desenvolvimento

Questão 05: Equação irracional

- Objetivos:
  - ✓ Identificar equações irracionais.
  - ✓ Reconhecer que todo radical pode ser escrito na forma de potência com expoente fracionário.
  - ✓ Simplificar radicais com a extração de fatores do radicando.

Questão 05: Resolver uma equação irracional.

Calcular a solução da equação irracional 6 - $\sqrt{x^2 - 9} = 2$

Desenvolvimento

Questão 06: Potenciação e Radiciação

- Objetivos:
  - ✓ Identificar potenciação e radiciação de radicais.
  - ✓ Reconhecer que toda potência com base positiva e expoente fracionário pode ser escrita na forma de radical.
  - ✓ Perceber que radicais podem ser representados por uma potência de base positiva e expoente fracionário.
  - ✓ Identificar a radiciação como operação inversa da potenciação.
  - ✓ Aplicar corretamente suas propriedades e simplificar.

Questão 06: Cálculo de uma expressão aritmética com potências e radicais.

Simplificar a expressão: $\left[\dfrac{a^6 \,.\, \sqrt{b^{18}}}{\sqrt{a^6} .\, b^{12}}\right]^{\frac{1}{3}}$

Desenvolvimento

Questão 07: Racionalização de denominadores

- Objetivos:
  - ✓ Identificar racionalização de denominadores.
  - ✓ Racionalizar expressões envolvendo operações com radicais.
  - ✓ Compreender o processo de racionalização de expressões evolvendo radicais.

Questão 07: Racionalizar uma fração com radical no denominador.

Racionalizar o denominador da fração: $\frac{7}{\sqrt{8}}$

Desenvolvimento

Questão 08: Equação do 3°grau

- Objetivos:
  - ✓ Identificar equação do 3º grau.
  - ✓ Reduzir a equação de 3º grau para equações do 1º grau e 2º grau.
  - ✓ Reconhecer os termos.
  - ✓ Identificar as raízes.
  - ✓ Calcular as soluções.

Questão 08: Resolver uma equação do 3º grau reduzindo para 1º e 2º graus.

Resolver a equação do 3º grau reduzindo para equações do 1º e 2º graus:

$$x^3 - x^2 = 0$$

Desenvolvimento

Questão 09: Identidades algébricas e suas aplicações

- Objetivos:
  - ✓ Reconhecer o método para realização do cálculo.
  - ✓ Calcular mentalmente.
  - ✓ Identificar as operações matemáticas.

Questão 09: Resolver as expressões algébricas aplicando as identidades fundamentais.

Sem usar a calculadora Maria Clara efetuou o cálculo de 43 x 37, conforme registrado abaixo: (Adaptado AXLER, 2016)

$$\begin{aligned} 43 \times 37 &= (40 + 3) \times (40 - 3) \\ &= 40^2 - 3^2 \\ &= 1600 - 9 \\ &= 1591 \end{aligned}$$

Utilizando técnicas matemáticas, e sem a calculadora, registre seu raciocínio para as seguintes sentenças:

d) 78×62

e) $(50 - 6)^2$

f) $(25 + 9)^2$

Questão 10: Expressões algébricas

- Objetivos:
  - ✓ Identificar as ordens das operações.
  - ✓ Reconhecer a importância dos parênteses em uma resolução matemática.
  - ✓ Efetuar cálculos com números inteiros.

Questão 10: Reconhecer a ordem das operações algébricas e o papel dos parênteses.

Em um grupo de estudos, Ana Cecília propôs um desafio aos colegas: “Descobrir quantas soluções matemáticas podem ser encontradas em uma mesma sentença, ao inserir um par de parênteses em diferentes posições na expressão matemática: 6 + 3x4 + 5x2”.

Após várias discussões e resoluções, os colegas encontraram cinco soluções diferentes, conforme registros abaixo:

Solução 1: (6 + 3x4 + 5x2) = 28

Solução 2: 6 + (3x4 + 5) x2 = 40

Solução 3: (6 + 3) x4 + 5x2 = 46

Solução 4: 6 + 3x (4 + 5x2) = 48

Solução 5: 6 + 3x (4 + 5) x2 = 60

Com base nos registros apresentados pelo grupo de estudos, quantas soluções diferentes podem ser encontradas, ao inserir apenas um par de parênteses em posições diferentes, para a expressão: 19 – 12 – 8 – 2? É obrigatório apresentar a posição em que os parênteses foram colocados, bem como o valor numérico correto da solução encontrada para cada proposta. (Adaptado AXLER, 2016)

f) 2 Soluções diferentes
g) 5 Soluções diferentes
h) 8 Soluções diferentes
i) 10 Soluções diferentes
j) 12 Soluções diferentes

Questão 11: Equação algébrica

- Objetivos:
  - ✓ Reconhecer o tipo de equação.
  - ✓ Resolver as sentenças usando conhecimentos matemáticos.
  - ✓ Identificar o procedimento a usado para realização dos cálculos.

Questão 11: Simplificar as expressões algébricas.

Assinale (F) para sentenças matemáticas falsas e (V) para sentenças verdadeiras, fazendo a correção das alternativas erradas. (Adaptado de STEWART, 2016)

f) ( ) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$

g) ( ) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

h) ( ) $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

i) ( ) $\frac{1+TC}{C} = 1 + T$

j) ( ) $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}} = \frac{1}{a-b}$

Questão 12: Expressões algébricas

- Objetivos:
  - ✓ Identificar expressão algébrica.
  - ✓ Simplificar as expressões, identificando qual conteúdo matemático aplicar.
  - ✓ Reconhecer qual prática matemática usar.

Questão 12: Simplificar a expressão o máximo possível.

Isabela, Rodrigo, Jordana, Jéssica e Rafaela são estudantes de engenharia e foram desafiados pelo professor para verificar se as expressões matemáticas I e II, descritas abaixo, foram simplificadas de forma correta.

V. $(a + 2).(a - 2).(a^2 - 4) = (a^4 - 16)$

VI. $\dfrac{\frac{a-t}{b-c}}{\frac{b+c}{a+t}} = \dfrac{a^2-t^2}{b^2-c^2}$

Após efetuar os devidos cálculos e simplificações, os quatro estudantes apresentaram as seguintes conclusões. Assinale a conclusão correta e registre no quadro a seguir os cálculos que você realizou para comprovar a sua resposta: (Adaptado AXLER, 2016)

f) Rafaela afirmou que é impossível simplificar as expressões matemáticas I e II.
g) Isabela concluiu que apenas a expressão I foi simplificada de forma correta.
h) Rodrigo concluiu que apenas a expressão II foi simplificada de forma correta.
i) Jordana concluiu que as expressões I e II foram simplificadas de forma errada.
j) Jéssica concluiu que as expressões I e II foram simplificadas de forma correta.

Memória de Cálculo Sentença I	Memória de Cálculo Sentença II

REFERÊNCIAS

AXLER, Sheldon. **Pré-Cálculo uma preparação para o cálculo**. Tradução de Maria Cristina Varriele e Naira Maria Balzaretti. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

STEWART, James. **Cálculo**. Tradução de Helena Maria Ávila de Castro. Revisão técnica Eduardo Garibaldi. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 680p. 1 v.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto alegre: Artmed, 2007.

APÊNDICE C: LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Nº	Tipo	Título	Autores	Programa	Instituição	Revista Evento Editora	Publicação	Cidade	Ano
01	Livro	Objeto de aprendizagem para o ensino de Matemática: uma prática educativa	Dimas Felipe de Miranda [*et al*]		PUCMG	Editora PUC MINAS	2019	Belo Horizonte	2019
02	Livro	Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates	Maria Clara Rezende Frota e Lilian Nasser (Org.)			SBEM	2009	Recife	2009
03	Livro	Ensino e aprendizagem em matemática na educação superior: inovações, propostas e desafios	Elenilton Vieira Godoy e Fábio Gerab (Organizadores)			Alta Books	2018	Rio de Janeiro	2018
04	Livro	Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas	Helena Noronha Cury (Org.)		PUCRS	EDIPUCRS	2004	Porto Alegre	2004
05	Livro	Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo	Jonas Lachini, João Bosco Laudares (Org.)			FUMARC	2001	Belo Horizonte	2001
06	Livro	Marcas da educação matemática no ensino superior	Maria Clara Rezende Frota [*et al.*]			Papirus	2013	São Paulo	2013
07	Livro	Didática da Matemática uma análise de influência francesa	Luiz Carlos Pais			Autêntica	2015	Belo Horizonte	2015
08	Livro	Técnicas de ensino: porque não?	Ilma Passos Alencastro Veiga[*et al.*]			Papirus	2011	São Paulo	2011
09	Livro	Educação Matemática da teoria à prática	Ubiratan D'Ambrosio			Papirus	2012	Campinas-SP	2012
10	Livro	Ousadia criativa nas práticas de educadores matemáticos	Beatriz Silva D'Ambrosio e Celi Espasandin Lopes			Mercado de Letras		São Paulo	2015
11	Livro	Informática Educativa	Marlene de Alencar Dutra; Tatiana Santos da Paz Coordenação: Cassandra Ribeiro Joye			UAB/IFCE		Ceará	2015

12	Livro	Dificuldades com o ensino de cálculo uma cartografia simbólica	Wanderley Moura Rezende			Appris	2020	Curitiba	2020
13	Livro	Informática e Educação Matemática	Marcelo de Carvalho Borba, Miriam Godoy Penteado			Autêntica	2016	Belo Horizonte	2016
14	Livro	Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos	Helena Noronha Cury			Autêntica	2018	Belo Horizonte	2016
15	Livro	Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos	Dário Fiorentini e Sérgio Lorenzato			Autores Associados	2012	Campinas-SP	2012
16	Livro	Laboratório de Educação Matemática na Formação de Professores	Fredy Coelho Rodrigues, Eliane Scheid Gazire			Appris	2015	Curitiba	2015
17	Livro	Técnicas de ensino: Por que não?	Ilma Passos Alencastro Veiga (org.)			Papirus	2011	Campinas-SP	2011
18	Livro	Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI	Romulo Campos Lins e Joaquim Gimenez			Papirus	1997	Campinas-SP	1997
19	Tese	Introdução a noções de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio no contexto das TIC's: implicações para prática do professor que ensina matemática	Maria Margarete do Rosário Farias	Doutorado	Universidade Estadual Paulista	Universidade Estadual Paulista	2015	Rio Claro-SP	2015
20	Tese	Material para o ensino de cálculo diferencial e integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche	Marcio Vieira de Almeida	Doutorado	PUC SP	PUC SP	2017	São Paulo	2017
21	Tese	Formação básica em engenharia: a articulação das disciplinas pelo cálculo integral e diferencial	Janice Valia de Los Santos	Doutorado	PUC SP	PUC SP	2009	São Paulo	2009
22	Tese	O comprometimento do estudante e a aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I	Maria Cristina Bonomi Barufi	Doutorado	USP	USP	1999	São Paulo	1999
23	Tese	O diálogo matemático e o processo de tomada de	Laurete Zanol Sauer	Doutorado	UFRGS	UFRGS	2004	Porto Alegre	2004

		consciência da aprendizagem em ambientes telemáticos							
24	Tese	O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica	Wanderley Moura Rezende	Doutorado	USP	USP	2003	São Paulo	2003
25	Dissertação	Cálculo Diferencial e Integral: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação	Rosane Cordeiro Rafael	Mestrado	UFJF	UFJF	2017	Juiz de Fora	2017
26	Dissertação	Matemática para Engenharia: Unidades de Ensino Potencialmente Significativas para superar lacunas em Matemática básica	Bruna Cavagnoli Boff	Mestrado	UCS	UCS	2017	Caxias do Sul-RS	2017
27	Dissertação	Contribuições do Curso de Nivelamento em Matemática na disciplina de Cálculo I	Raimundo Nonato Souza dos Santos	Mestrado	Universidade Federal do Amazonas	Universidade Federal do Amazonas	2018	Manaus	2018
28	Dissertação	A prática educativa na introdução do cálculo com várias abordagens em cursos de engenharia	Nancy Tiemi Isewaki	Mestrado	PUC MG	PUC MG	2019	Belo Horizonte	2019
29	Dissertação	O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral	Marcos Antônio Barbosa	Mestrado	PUC PR	PUC PR	2004	Curitiba	2004
30	Dissertação	Indicadores de permanência na educação superior: o caso da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I	Kelly Amorim Gomes	Mestrado	UNILASALLE	UNILASALLE	2015	Canoas	2015
31	Dissertação	O comprometimento do estudante e a aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I	Guilherme Mendes Tomaz dos Santos	Mestrado	UNILASALLE	UNILASALLE	2014	Canoas	2014
32	Dissertação	Cálculo Diferencial: Uma abordagem Histórico-Social e possibilidades de introdução no Ensino Médio	Cristiano José Rocha Ferreira de Oliveira	Mestrado	UFG	UFG	2018	Catalão	2018
33	Dissertação	Análise do desempenho da alunos calouros de Engenharia na disciplina de Cálculo	Edinéia Zarpelon	Mestrado	UTFPR	UTFPR	2016	Ponta Grossa	2016

		Diferencial e Integral I: Um estudo de caso na UTFPR							
34	Artigo	Dificuldades na aprendizagem de cálculo: que os erros podem informar	Marcelo Cavasotto		PUC RS	Boletim GEPEM	2011		2011
35	Artigo	Categorização e Análise de erros cálculo diferencial e integral	Albano Dias Pereira Filho		ULB	Cobenge	2012	Belém	2011
36	Artigo	A implantação da disciplina de Pré-Cálculo como política pedagógica de permanência nos cursos de graduação do Centro Tecnológico da UFSC	Mayara Teodoro Bellettini e Stefani de Souza		UFSC	Colóquio Internacional de Gestão Universitária	2018	Campus UTPL	2018
37	Artigo	Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo	Benedito Antonio da Silva		PUC SP	PUC SP	2011	São Paulo	2011
38	Artigo	Reflexões sobre a disciplina de Matemática Fundamental e o aprendizado de Cálculo em cursos de engenharia	Márcio Pilotti, Gládis Franck da Cunha, Roselice Parmegiani	Congresso		Cobenge	2014	Juiz de Fora	2014
39	Artigo	Dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: proposta de um Curso de Nivelamento	Franciele Buss Frescki Priscila Pigatto	Simpósio	UTFPR	Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e 34Tecnologia	2009	Paraná	2009
40	Artigo	Teoria e Prática na Aprendizagem de Cálculo	Maria Clara Rezende Frota	Periódico	PUC MG	BOLEMA	2007	Rio Claro-SP	2007
41	Artigo	Descrições de programas livres e gratuitos para o ensino da Matemática	Josué Antunes de Macêdo, Samara Neves de Almeida, Marcos Rincon Voelzke	Periódico	PUC MG	ABAKÓS	2016	Belo Horizonte	2016
42	Artigo	Práticas educativas de cálculo: um mapa teórico das pesquisas publicadas em anais de eventos de Educação Matemática	Joice Rejane Pardo Maurell, Alessandro da Silva Saadi, Celiane Costa Machado, Elaine Corrêa Pereira	Periódico	PUC SP	EMP	2020	São Paulo	2020

43	Artigo	Conhecimentos especializados para ensinar Cálculo em Engenharias: uma análise de artigos do Cobenge	Jeferson Gomes Moriel Junior, André Pereira de Alencar	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017
44	Artigo	Estudo de metodologias de ensino visando uma aprendizagem mais significativa em disciplinas de engenharia	Antônio C. V. de Oliveira, Ana Marta Souza, Elaine G. Assis, Éverton N. Oliveira	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017
45	Artigo	Estudo preliminar para introdução de Software Algébrico Computacional no Ensino de Cálculo Diferencial	Erlon Mendes, Júlio Alexandre de Matheucci e Silva Teixeira *et al.*	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017
46	Artigo	Metodologia Ativa no Ensino de Engenharia: uma experiência continuada com alunos e professores do Laboratório de Cálculo	Juliana Capanema Ferreira Mendonça, Raquel Leite Barbosa *et al.*	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017
47	Artigo	Pré-Cálculo: Uma ferramenta para nivelamento de conhecimentos matemáticos no curso de Engenharia Elétrica do IFPB	Raquel Leite Barbosa *et al.*	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017
48	Artigo	Processo de ensino e Aprendizagem em Engenharia: uma Proposta para a Estruturação do Ensino de física e Cálculo no curso de Engenharia civil da Uniarp	Liane da Silva Bueno e Patrícia de Deus e Silva	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017
48	Artigo	Projeto de ensino para Reduzir a Retenção nas Disciplinas de Matemática dos Cursos de Engenharia	Etereldes Gonçalves Júnior e Alessandro Mattedi	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017
50	Artigo	Quick Math: uma ferramenta dinâmica e interativa para o estudo da matemática básica e do Cálculo 1	Alessandra Macedo de Souza *et al.*	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017
51	Artigo		Juliana Capanema Ferreira Mendonça *et al.*	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017

		Uma experiência inovadora em sala de aula: aprendizagem significativa nas aulas de Cálculo Diferencial							
52	Artigo	Uso de *softwares* para auxílio educacional em Cursos de Engenharia Civil no Brasil: um Mapeamento sistemático	Denis da Silva Passos *et al.*	Congresso		COBENGE	2017	Joinville-SC	2017
53	Artigo	Educação em Engenharia: Uma proposta de ensino de Cálculo pela teoria das situações didáticas	Márcia Azevedo Campos	Congresso		COBENGE	2018	Salvador -BA	2018