PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

JONATHAN WEVERTON SILVA BUÉRI

ANÁLISE DE FENOMENOS FÍSICOS NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM EM CURSOS DE ENGENHARIA

BELO HORIZONTE, MG

2019

JONATHAN WEVERTON SILVA BUÉRI

ANÁLISE DE FENOMENOS FÍSICOS NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM EM CURSOS DE ENGENHARIA

Dissertação apresentada ao Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares

BELO HORIZONTE, MG

2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Buéri, Jonathan Weverton Silva
B928a Análise de fenômenos físicos no ensino de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em cursos de engenharia / Jonathan Weverton Silva Buéri. Belo Horizonte, 2019.
117 f. : il.

Orientador: João Bosco Laudares
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Cálculo - Estudo e ensino. 3. Cálculo - Problemas, questões, exercício. 4. Matemática - Estudo e ensino. 5. Aprendizagem por atividades. 6. Estratégias de aprendizagem. 7. Estudantes de engenharia. I. Laudares, João Bosco. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU:517.91

Ficha catalográfica elaborada por Fabiana Marques de Souza e Silva – CRB 6/2086

SIB PUC MINAS

.

JONATHAN WEVERTON SILVA BUÉRI

ANÁLISE DE FENOMENOS FÍSICOS NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM EM CURSOS DE ENGENHARIA

Dissertação apresentada ao Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Matemática

____

Prof. Dr. João Bosco Laudares – PUC Minas – (Orientador)

____

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – UFOP – (Banca Examinadora)

____

Prof[a]. Dr[a]. Elenice de Souza Lodron Zuin – PUC Minas – (Banca Examinadora)

Belo Horizonte, 14 de junho de 2019.

Dedico essa dissertação às minhas avós Carmozita e Helena, que são os meus mais fortes exemplos de como educar, e, a minha professora Ivani Ribeiro que, com toda sua competência e sabedoria, me iniciou no universo da Matemática.

AGRADECIMENTOS

O conhecimento deve ser utilizado para instruir pessoas e formar cidadãos. Nessa linha, me sinto no dever de agradecer ao meu irmão Pablo, que é uma pessoa que transcende os limites da palavra especial. Devo a ele a gratidão pelas instruções que me mostra, mesmo não entendendo algumas coisas do mundo e a cultura a seu redor.

À minha mãe Leila, por todos os valores transmitidos a mim durante a história, por me apoiar quase sempre, por se dedicar à mim diariamente, tornando possível o estudo e a progressão profissional, agradeço à ela também por me mostrar a direção quando me falta a compreensão. Ao meu pai Ronaldo, por ser amigo acima do compromisso paterno, pelo desenvolvimento de um perfil disciplinado e pelos valiosos ensinamentos sobre o funcionamento da vida.

À minha tia Estefânia que passou parte do seu tempo fazendo a minha educação e criação, para que eu fosse uma boa pessoa. Agradeço-a também por ter nos presenteado com a vinda do meu afilhado David, que hoje tanto me alegra e se tornou um grande amigo.

A minha ilustre avó Carmozita pela inspiração humana que é, e pela companhia que faz com tanto amor e carinho. Devo à ela a estrutura e a base familiar que me fez chegar até aqui.

Ao meu orientador, professor e Dr. João Bosco Laudares, que me apoiou desde o início desta caminhada, me direcionou de forma significativa em uma linha de pesquisa em consonância com a temática em estudo, que me guiou durante as orientações e se dedicou para que isso fosse possível.

Á minha primeira professora de matemática, Ivani Ribeiro, pelo respeito ao meu saber primário, pela aceitação das minhas diferentes maneiras de solucionar problemas, e pela docência que me influenciou e influencia até hoje.

E finalmente, à minha namorada e companheira Jéssica, que esteve ao meu lado durante todo este tempo de estudo, me ajudando e me incentivando a continuar.

“O esforço supera o talento se o talento não se esforçar”.

(autor desconhecido)

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma pesquisa sobre a análise de fenômeno físico com Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem, utilizando diferentes representações. A metodologia foi qualitativa e empírica com utilização de uma sequência de oito atividades desenvolvidas para a resolução de um problema físico de decaimento exponencial e estruturadas por passos. Utilizando a técnica de grupos de controle, com o emprego do mesmo problema e mesma metodologia, comparamos o desempenho de dois diferentes grupos de estudantes: (1) o primeiro estudou o tema durante as aulas de EDO, com uma metodologia de ensino que, a partir da EDO, modela o fenômeno com equações e interpretação gráfica, além da verbalização do comportamento dos modelos; para o outro grupo (2) foi utilizado o método tradicional da resolução do problema durante as aulas de cálculo do curso de engenharia, sem interpretação dos modelos e sem estudo por passos. Foram analisadas características do pensamento matemático avançado que os participantes da pesquisa, utilizaram na resolução do mesmo problema, com diferentes metodologias. A partir dos dados obtidos na aplicação das atividades, fez-se uma análise, que permitiu inferir importantes informações da resolução dos dois grupos diferentes de estudantes, sendo o desempenho melhor dos estudantes que tiveram a metodologia de passos com a interpretação dos diversos modelos de equações. Os resultados obtidos pelos estudantes do grupo 1 evidenciaram que a "metodologia de passos com análise de modelos", mostrou-se mais significativa que os métodos tradicionais de ensino de EDO de primeira ordem, comparados aos resultados do grupo 2. Foi avaliado o conteúdo e as atividades de quatro livros-texto de EDO e Cálculo, com o objetivo de identificar a metodologia para o conteúdo de EDO, relativamente à resolução de problemas de fenômenos físicos. Na análise dos livros, ficou evidenciado um livro de EDO que apresenta a metodologia experimentada e um livro de Cálculo com aportes desta metodologia.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo. Equações Diferenciais Ordinárias. Análise de Fenômenos Físicos. Educação Matemática. Grupo de Controle.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A história do ser humano exibe a sua necessidade de entender o meio em que se vive, expõe sua busca por respostas aos problemas cotidianos e mostra a contínua procura do entendimento de sua natureza. Esse comportamento natural do homem ganha ênfase quando o cenário é uma sala de aula de Matemática (D'AMBRÓSIO, 2012).

Uma das formas utilizadas para gerar entendimento sobre as questões da natureza deste ser é o estudo da Matemática, com Equações Diferenciais, que marca presença em vários modelos da Engenharia, Matemática, Economia, Física, Biologia, entre outras áreas do saber. Essa flexibilidade de aplicações faz com que o tema se torne objeto de estudo de pesquisadores como Bassanezi (1988), Pozo (2003), Laudares (2017), entre outros

> Na verdade poderíamos dizer que a quantidade de equações que possuem soluções explícitas é praticamente nula, se comparada àquelas que não têm soluções, por mais liberais que sejamos quanto às operações aceitáveis. A importância do estudo de tais equações estão no que podemos aprender delas e na utilização que delas fazemos para analisar as demais. (BASSANEZI e FERREIRA, 1988, p. 23).

A presença das Equações Diferenciais em artigos, dissertações e teses demonstra a sua relevância. O surgimento de novas tecnologias tem motivado os pesquisadores a utilizarem recursos gráficos e computacionais para auxiliarem os alunos na compreensão de problemas e para desenvolver novas metodologias de trabalho para os profissionais da área de Educação, uma vez que a forma tradicional de ensino é questionada ao ser comparada com outras que, de alguma forma, se mostram mais significativas.

O interesse do autor pelo tema se deu durante o curso de Engenharia, pois pode vivenciar e compreender a dificuldade de aprendizagem dos tópicos de Cálculo (em especial Equações Diferenciais), causada, muitas vezes, pela aplicação de apenas uma forma de ensino e uma única abordagem, uma forma de receituário, o que gera desconforto e desinteresse em muitos estudantes, culminando numa lacuna de conhecimento matemático. Intensificou-se o interesse durante o curso e Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), pois, durante as disciplinas do curso o autor pode entender a proeminência do conhecimento em “Educação” para estarem preparados para o ensino.

Portanto, buscou-se na pesquisa desenvolvida, aplicar para dois grupos diferentes de estudantes o mesmo problema com a mesma metodologia, envolvendo a aplicação de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, com base num referencial teórico estruturado, de interpretação de modelos com diferentes representações. A metodologia utilizou a técnica de grupos de controle, muito comum em pesquisas experimentais.

Segundo Machado (2008, p. 50), “um dos problemas encontrados por professores de Cálculo, é que alguns estudantes não conseguem ler, resolver problemas, compreender e interpretar os resultados matemáticos”. Diante dessa afirmação, compreende-se que professores passam por dificuldades durante o ensino de Cálculo. Contudo, aplica-se, nesta pesquisa, formas variadas de representações para resolução de problemas com EDOs, com objetivo de contribuir para trazer uma forma diferenciada de didática à melhoria da compreensão e aprendizagem significativa do estudante das ciências exatas.

1.1 Tema

O Cálculo Diferencial e Integral estuda principalmente os fenômenos físicos, a partir da análise dos movimentos e variações. Uma parte importante desse Cálculo trata das Equações Diferenciais, as quais tem seu estudo desenvolvido por profissionais da área de ensino de Cálculo (LAUDADES et. al, 2017).

As pesquisas em Educação Matemática das últimas décadas trazem uma preocupação central, que é a produção de significados matemáticos para o que é ensinado na sala de aula. Uma das formas de se alcançar a significação é fazer uso de diferentes linguagens durante a resolução de problemas, bem como trabalhar com exemplos que estejam ligados à vida “extra-escolar” (situações reais) dos estudantes. Logo, compreende-se a pertinência do tema desta pesquisa, onde trabalha-se com a resolução de problemas físicos possíveis no mundo real, e busca-se a aplicação de diferentes tipos de linguagens e abordagens.

Para um professor alcançar um bom trabalho, entre outras ações, ele precisa integrar diversas maneiras de pensar, para permitir aos alunos, a produção de conjecturas ante os problemas apresentados, o que claramente levará a superação de erros, dificuldades e obstáculos (GIMENEZ E LINS, 2006).

1.2 Problema da Pesquisa

Dentre as matérias dos cursos de exatas, o Cálculo é uma das disciplinas que mais exige estudo e dedicação dos discentes, entretanto, observa-se que as taxas de reprovação nesta disciplina são significativas.

> A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral vem se configurando, ao longo dos anos, em praticamente em todas as Instituições do Ensino Superior do país, dentre aquelas que mais reprovam. Os índices de reprovação nesta disciplina são, em geral, muito altos, prejudicando o rendimento dos estudantes e atrasando seu curso universitário (LUZ, 2011, p. 5).

Os motivos do insucesso nas disciplinas de Cálculo são variados, uma vez que se observa, dentre outras, o despreparo de alunos, a má utilização de técnicas de ensino, a insistência em métodos tradicionais e a adoção de políticas públicas institucionais (LACHINI, 2001).

Visto esse cenário e o somando às experiências deste autor nos cursos de Engenharia e Educação Matemática, formula-se o problema de pesquisa, que é, a busca por uma forma mais significativa de solucionar problemas físicos que envolvem Equações Diferenciais Ordinárias (EDO’s), trabalhando com diferentes linguagens para gerar compreensão.

1.2.1 Objeto de Estudo

Essa pesquisa tem como objeto o estudo das metodologias de resolução de problemas de fenômenos físicos e análise de seu comportamento, com Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem.

1.2.2 Sujeitos da Pesquisa

Os participantes dessa pesquisa são os estudantes do ensino superior de cursos de Engenharia.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Analisar a metodologia de estudo de fenômenos físicos com Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem em cursos de Engenharia, com utilização da técnica de pesquisa de grupo controle.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Realizar um levantamento bibliográfico de obras relacionadas ao tema EDO.
- Selecionar livros-texto para uma análise do método e conteúdo aplicado.
- Identificar em livros-texto a metodologia utilizada para solução de problemas de fenômenos físicos, envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias.
- Selecionar um problema de fenômenos físicos que envolva EDO.
- Construir uma sequência de atividades a partir do problema de fenômeno físico selecionado.
- Implementar as atividades que constituem o objeto de pesquisa com alunos do Ensino Superior.
- Tratar os dados da pesquisa, separando os resultados dos alunos que utilizam a metodologia tradicional dos estudantes que trabalham com a metodologia de análise de modelos.
- Avaliar e comparar o desempenho dos estudantes que utilizam o “método tradicional” e “método com análise de modelos por passos”.

1.4 Justificativa

O ensino de Matemática na educação básica e superior, não raramente, segundo Pantoja (2008), tem gerado aversão nos alunos no que diz respeito ao estudo dos saberes inerentes à ciência Matemática. Buscar e pensar alternativas para mitigar este problema tem sido o tema de estudo de inúmeras pesquisas da área de Educação Matemática.

> O estudo de Equações Diferenciais tem atraído a curiosidade de vários matemáticos nos últimos séculos, e tem sido uma das áreas de maior desenvolvimento, mesmo assim muitas questões interessantes ainda estão em aberto, esperando que um bom modelo seja criado para poder explicá-las. É assim o desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia. (ALVES, 2008, p. 27).

Justifica-se essa pesquisa pela importância do estudo de EDO's e pela necessidade de alcançarmos a interdisciplinaridade nas salas de aula com a resolução de problemas de fenômenos físicos. Bassanezi ressalta essa interação:

> dentro da Matemática Aplicada as Equações Diferenciais têm um papel relevante na ligação e interação com outras ciências, desde sua origem em problemas ligados à Física e recentemente como ferramenta indispensável à Biologia com todas suas ramificações, compartilhando amplamente com alguns ramos da Química, Engenharia e Economia. (BASSANEZI, 2011, p. 12).

As Equações Diferenciais são estudadas em cursos de Engenharia, Economia, Matemática, entre outros, devido a sua importância no modelamento de fenômenos, sejam eles naturais ou não. Por meio de uma Equação Diferencial, pode-se modelar uma diversidade de problemas e fenômenos científicos e tecnológicos (LAUDARES et. al, 2017, p. 23).

Bassanezi destaca também que "as Equações Diferenciais constituem um tópico vastíssimo na Matemática, que pode ser abordado de maneiras diversas, dependendo do objetivo proposto" (BASSANEZI, 2011, p. 11). Neste caso, trata-se as Equações Diferenciais Ordinárias como ferramentas para resolução de problemas físicos, com utilização de múltiplas representações e com interação de diferentes disciplinas: geometria analítica, cálculo, álgebra linear

Segundo Pozo (2008, p. 44), "o ensino de Matemática justifica-se, em parte, por representar um treinamento de estratégias de raciocínio e de pensamento que, supostamente, poderiam ser generalizadas a outras áreas do currículo e à vida diária". Uma sólida aprendizagem de Equações Diferenciais, contribui para a criatividade, a intuição, a capacidade de análises críticas, entre outras habilidades.

As dificuldades encontradas na resolução de um problema podem estar associadas às falhas na compreensão, associadas às falhas no entendimento da linguagem e, por isso, há necessidade de uma representação mental global para alcançar as ideias base para resolver problemas (LOURIVAL FILHO, 2011).

Portanto, desenvolve-se essa pesquisa devido às inquietações levantadas e pela busca de uma metodologia mais significativa na resolução de problemas físicos, com envolvimento de EDO's.

1.5 Breve síntese da estrutura da dissertação

A estrutura inicia-se pelo capítulo um, que é a introdução da pesquisa realizada, em seguida, apresenta-se o capítulo dois, com a fundamentação teórica da pesquisa realizada, onde expõem-se parâmetros dos pesquisadores de educação matemática acerca da Matemática no ensino superior, das Equações Diferenciais Ordinárias, dos conceitos e importância do ensino de EDO, da resolução de problemas, das múltiplas formas de representações e da diferenciação entre o conceito matemático e o procedimento.

Na sequência, no terceiro capítulo, apresenta-se a metodologia, onde fica registrado a classificação da pesquisa e o seu tipo. Ainda neste capítulo são dados sobre a criação e os objetivos do produto deste trabalho. No quarto capítulo apresentam-se resultados da análise de quatro livros-texto, restringindo-se ao tema Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, buscando-se avaliar o seu conteúdo, suas atividades e a indicação das ferramentas tecnológicas atuais.

No quinto capítulo, expõem-se as análises das atividades aplicadas à 155 alunos de cursos de Engenharia, e, por fim, no sexto capítulo, registram-se as considerações finais desta pesquisa.

2 ESTUDO DE FENÔMENOS FÍSICOS COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: REPRESENTAÇÕES E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM ANÁLISE DE MODELOS

> As Equações Diferenciais constituem um dos mais notáveis sucessos do intelecto humano, tanto como um corpo de teorias matemáticas como ferramenta de análise indispensáveis no exercício da atividade profissional e científica (...). (BASSANEZI; FERREIRA JÚNIOR, 1988, prefácio).

Neste capítulo do trabalho, expõe-se de forma direta, a base teórica sobre a qual a pesquisa está apoiada. Primeiramente, faz-se a introdução do cenário do ensino de Matemática no nível Superior, com foco em Cálculo e Equações Diferenciais Ordinárias. Em seguida, registra-se o conceito e a importância do ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), posteriormente, trabalha-se um dos temas mais importantes dessa investigação, que é a resolução de problemas, antecedido da teoria de múltiplas representações, e, finalmente, é registrada a relevância da formalização dos conceitos.

A Educação Matemática é a área do conhecimento que traz consigo uma característica de multidisciplinaridade e vem ocupando há décadas com problemas relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática, em particular, do Cálculo Diferencial e Integral em nível universitário, que é foco principal dessa dissertação (ANTONIO DA SILVA, 2011).

2.1 Educação Matemática no Ensino Superior: Pensamento Matemático Avançado

Ao longo da história da humanidade, o pensamento matemático alcançou significativos patamares, essa evolução do pensamento matemático tornou possível o desenvolvimento de uma variedade de representações, e que possuem diferentes registros (VAZ, 2010).

As pesquisas em Educação Matemática, tanto nacionais quanto internacionais dedicam suas atenções às dificuldades dos discentes em Cálculo. Em geral, estes estudos buscam entender as causas e gerar estratégias para alcançar melhorias.

Segundo Nasser, Geneci e Torraca (2015), “em alguns casos são oferecidas atividades concomitantes de monitoria ou mesmo cursos de Fundamentos ou Complementos de Cálculo. Entretanto, a solução para minimizar esse problema ainda está por ser encontrada”.

Ainda segundo essas autoras, o ensino tradicional do Cálculo é feito através de aulas quase que puramente expositivas, onde o centro das atenções é a fala, a locução, o diálogo do professor, e os conteúdos são oferecidos como prontos e inquestionáveis, sem fazer ligação com nenhuma situação real vivida pelo discente.

Onuchic e Allevato (2005) defendem que as matérias que envolvem a Matemática sempre apresentaram dificuldades no processo de aprendizagem. Ainda indicam que em muitos debates que foram provocados no último século sobre esse tema, as discussões traziam à superfície que o ensino de Matemática deveria ser mais significativo, ou realista, onde o discente tivesse a condição de entender, viver e usar a matéria durante o seu cotidiano, durante suas atividades profissionais ou não profissionais. Esses debates acabam por apontar alternativas de melhoria na qualidade do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Rezende (2003) afirma, na sua tese de doutorado, que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo.

Ainda com relação às causas que implicam em muitas reprovações em Cálculo, Reis (2001), registra que

> as causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus [Ensino Fundamental e Ensino Médio], de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e consequentemente, bastante inseguros. (p. 4)

Essa colocação de Reis (2001) retrata a opinião de diversos professores, mestres e doutores que atuam no ensino superior, com matérias ligadas à Matemática.

Como tratamento da dificuldade do ensino de Cálculo, uma das questões mais presentes nas produções acadêmicas é a utilização de diferentes formas de representação de um problema, juntamente com a aplicação de diferentes linguagens durante a transição de informações do educador para os alunos.

> Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em Matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. (DUVAL, 2016, p. 30).

Uma outra proposta, para otimizar o ensino de Cálculo nas faculdades, que tem como objetivos o trabalho da autonomia dos alunos e repensar as formas de avaliação tradicional:

> ao pensar a avaliação tradicional, somos levados a buscar alternativas que possibilitem maior autonomia do educando, refletindo suas reais aspirações, sua criatividade e sua capacidade de se expressar a respeito dos conhecimentos adquiridos. (SILVA FREITAS, et al., 2018, p.79).

Para Souza (2013), há muito autores que afirmam que o entendimento e significação é o objetivo tanto de alunos como de professores. Para haver ensino com aprendizado, o professor precisa compreender a Matemática a ser lecionada e também, de alguma forma, analisar e ter conhecimento sobre o pensamento dos seus alunos, isto é, o desenvolvimento do pensamento matemático avançado (PMA).

Segundo a mesma pesquisadora, qualquer curso, seja ele parte do ensino básico ou do ensino superior, é munido de um plano educacional a ser executado, com bibliografia definida e prescrita ao profissional. Se o professor não compreender a matemática e tampouco compreender seus alunos, ele será apenas um locutor nas salas de aula, um repetidor ou um replicador de livros didáticos. Suas aulas são repetições de ideias de terceiros e dessa forma não ocorrerá a aprendizagem com entendimento. Impactando também na desmotivação dos alunos, que é tema mencionado por Frota (2009) em suas pesquisas.

Sabe-se que muitos fatores podem influenciar positivamente na aprendizagem dos alunos, tais fatores são apontados por pesquisas da área de Educação Matemática, que, por sua vez, sugerem ao professor a exploração desses elementos. Frota (2009) expõe em uma das suas investigações, que a motivação é muito importante para a evolução do estudante.

> A motivação do aluno, por exemplo, é um fator que contribui para a aprendizagem, compreendendo as expectativas de desempenho que o

> aluno tem, fundamentadas em uma autoavaliação das próprias capacidades e na avaliação dos colegas, professores, familiares, bem como na importância ou valor que atribui à tarefa, ou seja, o valor da meta. (FROTA, 2009, p.61).

Para Souza (2013, p.32), existem dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo, entretanto, esse problema não é nacional, “não é exclusivo da sociedade brasileira, também nos países desenvolvidos é uma realidade, visto que trabalhos sobre esse tema têm sido publicados e recebido merecido destaque por parte da literatura especializada...”.

Tall (2002) compreende que a possibilidade de definição formal e dedução são fatores que distinguem o pensamento matemático avançado do pensamento matemático elementar. Cursos de graduação, geralmente, apresentam uma forma final da teoria deduzida, em vez de permitir que o aluno participe do processo de criação.

O mesmo autor diz que a Matemática pode ser entendida como conhecimento cultural construído por diferentes sociedades e, por isso, a sua evolução pode ser influenciada por fatores relacionados ao contexto social. Assim, toda teorização da psicologia do pensamento matemático deve ser analisada com base no contexto da atividade cognitiva e do meio cultural onde vive o sujeito. Ele ainda concorda que as características que distinguem o pensamento matemático elementar do pensamento matemático avançado são: a complexidade e a forma como são tratados. A diferença está na maneira pela qual a complexidade envolvida nestes processos de pensamento é gerenciada pelo sujeito. O quadro a seguir, com base na obra de Bertolazi e Savioli (2018) nos ajuda a compreender os processos do PMA.

Quadro 1: processos do pensamento matemático avançado

Processos Envolvidos no Pensamento Matemático	
Representação:	Analisar, classificar, conjecturar, definir, descobrir, induzir, intuir, manipular símbolos, modelar, reconhecer símbolos, traduzir, verificar, visualizar.
Abstração:	Generalizar, formalizar, sintetizar, provar.

Fonte: Adaptado de Bertolazi e Savioli, 2018.

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias: a questão dos pré-requisitos

> Por conhecimentos prévios definimos os pré co requisitos para o estudo da Equação Diferencial. A sua própria denominação – diferencial – traz a necessidade de ferramentas operacionais de Cálculo, envolvendo derivadas e integrais, bem como cálculos algébricos, ao se resolver uma derivada ou uma integral. Já suas aplicações – resolução de problemas e interpretação de modelos – requerem algum saber básico de ciências diversas como Física, Química, Biologia e Economia, entre outras. Especialmente para a análise gráfica das equações, que definem os modelos, recorremos à Geometria Analítica e aos gráficos de funções: seja traçado de esboço, seja para o estudo do comportamento dos fenômenos apresentados em forma gráfica. (LAUDARES et. al, 2017, p.23).

O trabalho desenvolvido, na pesquisa realizada, se fundamentou em duas perspectivas, uma delas é a resolução de problemas físicos envolvendo equações diferenciais e, a outra, é o teste da aplicação de múltiplas representações, que são as representações gráficas/geométricas, escrita e simbólicas pelas Equações Diferenciais Ordinárias.

Bassanezi e Ferreira (1988) defendem que as Equações Diferenciais integram uma importante ferramenta de resolução de problemas, diversos desses problemas são originados de fenômenos naturais relacionados à Engenharia, Economia, Biologia, Química, Ecologia, dentre outras áreas do conhecimento e de outros ramos da Física, além da Mecânica Clássica, que serviu como fonte motivacional para o estudo dessas equações, desde a sua origem no século XVII até a primeira metade do século XX.

> As equações constituem um conteúdo necessário ao estudo da ciência, a partir do momento que se aplicam a ela. Entretanto, para aplicar um conteúdo matemático é preciso conhecê-lo, compreender seus conceitos, sua teoria, suas técnicas de manipulação, além de desenvolver uma habilidade na criação e desenvolvimento de modelos matemáticos. (SOUZA, 2013, p.20).

Antes de conceituar as Equações Diferenciais Ordinárias, é importante registrar que existem requisitos básicos necessários ao desenvolvimento do estudo dessas equações, além disso, um bom conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral, em especial em relação aos conceitos de derivadas e integrais são indispensáveis. É possível trazer, como exemplo, segundo Laudares, et. al. (2017), essa afirmação ao mesmo tempo em que propõem fazer uso dessas equações como um instrumento capaz de dar continuidade à compreensão dos conceitos.

> A resolução das equações diferenciais traz a exigência como pré-requisito dos conceitos de derivada e integral, e numa via de mão dupla, é instrumento para reforçar a compreensão desses, mesmo como atividade de resolução de problemas e iniciação a modelagem. (LAUDARES, et. al. 2017, p. 1).

Para Stewart (2012), o sucesso nas matérias de Cálculo depende, em grande parcela, do domínio sobre as ferramentas e conceitos matemáticos que precedem o ensino do Cálculo propriamente dito. Em sua obra ele cita algumas áreas do conhecimento matemático que, no seu ponto de vista, são suma importância para a evolução positiva nas matérias de Cálculo, que são: entendimento das ferramentas e manipulações algébricas, conhecimento acerta da geometria analítica, domínio de funções e trigonometria.

Domingos (2006), ao observar as dificuldades dos discentes do curso de Matemática no nível superior, explica que parte do insucesso está ligado pela baixa compreensão dos conceitos matemáticos, e cita funções e derivadas como conteúdos que apresentam os mais altos índices de dificuldades entre os estudantes. Observa-se aqui, então, uma coerência com os demais autores mencionados anteriormente.

Outro requisito para estudo dessas equações em Cálculo, encontrado nas obras de Bassanezi e Ferreira (1988) e Boyce e DiPrima (2010) é a álgebra linear, embora muitos autores trabalham EDO sem mencionar essa importância.

Para Rezende (2003), a falta de requisitos perpassa também outras áreas do ensino superior, do trecho a seguir extrai-se a ideia de que falta uma base para os estudantes. Faz-se então, muito importante o domínio dos pré-requisitos para chegar ao sucesso em Cálculo e EDO.

> É verdade que falta tudo isto ao nosso aluno recém-egresso do Ensino Médio. Mas também é verdade que a tal 'falta de base' não é um problema específico do ensino de Cálculo. A 'base' que falta aqui, para o ensino de Cálculo, também faz falta para o ensino de outras disciplinas do curso superior, e nem por isso os seus resultados são tão catastróficos como os do Cálculo.
> [...] Note ainda que os resultados de Matemática Básica são bem parecidos com os de Cálculo 1, o que dá a falsa impressão de que o problema de Cálculo está condicionado realmente pela 'falta de base' do aluno. O que não é verdade. O que se pode concluir tão somente, a partir desses resultados, é o que todos já sabiam: que os alunos de Matemática carecem de uma formação 'básica' de Matemática[...]. (REZENDE, 2003, p. 17-18).

A ausência do domínio sobre os pré-requisitos em Cálculo, foi responsável pelo surgimento das matérias de “pré-cálculo”, muitas vezes denominadas “Introdução ao Cálculo” ou “Fundamentos de Cálculo”, que são comumente encontradas nas universidades. Luz (2011) pesquisou em sua dissertação uma proposta para mudanças do curso de Introdução ao Cálculo, onde ela expõe que trabalhou com estudantes que traziam muitas limitações, a nível de pré-requisitos e conceituações básicas envolvidas, desde a escolarização básica. Ao final de sua pesquisa, a mesma revela pontos de melhoria ligados às múltiplas representações, tema este que também é trabalhado com exclusividade neste capítulo. Isto posto, parte-se para a apresentação do conceito de Equação Diferencial.

2.3 Conceito e Relevância do Ensino das EDO’s

De acordo com Vaz (2010), o conceito é a representação de um objeto pelo pensamento, por meio de suas características gerais. Conceituar é alcançar o entendimento de estudos pretendidos a partir de situações de onde não há a formalização. O objeto desta pesquisa necessita o domínio de conceitos matemáticos, tais como taxa de variação, integral e a interpretação da derivada como coeficiente angular da reta tangente.

Uma equação diferencial é aquela que é composta de uma função não conhecida (incógnita) com pelo menos uma de suas derivadas diferenciais (LAUDARES et. al, 2017).

Quadro 2: tabela de função, derivada e diferencial

Função:	$y = f(x)$
Derivada:	$\frac{dy}{dx} = f'(x)$
Diferencial:	$dy = f'(x)dx$

Fonte: Adaptado de Laudares 2017.

Segundo o mesmo autor, Equação Diferencial Ordinária é um tipo específico de equação diferencial, cuja função-solução é de apenas 1 (uma) variável independente, do tipo y = f(x).

Ao realizar uma modelagem, com uma certa frequência, aparecem equações que envolvem as variações das quantidades presentes (variáveis) e que são primordiais na situação analisada. Assim, as leis que regem os fenômenos podem ser representadas por equações de variações. Quando as variações são instantâneas e o fenômeno se desenvolve continuamente, as equações são denominadas Equações Diferenciais. Além disso, quando a função incógnita da Equação Diferencial depende apenas de uma variável independente, tem-se uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) (JAVARONI, 2007).

As Equações Diferenciais são estudadas por diversos cursos, devido, principalmente pelo seu valor no modelamento de fenômenos, sejam eles naturais ou artificiais. Pode-se acrescentar que muitos problemas científicos e tecnológicos são modelados com utilização de uma EDO (LAUDARES et. al, 2017).

Ainda, segundo o mesmo autor, espera-se que um estudante, ao se trabalhar com as EDOs nos diversos cursos aos quais ela compõe o currículo, que desenvolva habilidades de Cálculo, capacidade de traçar e interpretar graficamente, identificar as relações entre a Matemática e os fenômenos, resolver integrais e derivadas e desenvolver por fim, as habilidades de análise.

Para entendimento dos fenômenos físicos e resolução das Equações Diferenciais Ordinárias, é capital que o estudante domine as técnicas de resolução de integral e derivada, bem como o procedimento, que se fundamenta na aplicação de tal derivada como taxa de variação e coeficiente angular da reta tangente a uma curva.

2.4 Resolução de Problemas

Neste capítulo registra-se a base teórica referente à resolução de problemas, à qual se apoia essa pesquisa. Considerando a dificuldade dos estudantes e a relevância deste tema para o ensino e aprendizagem de Cálculo, dedica-se algumas laudas à essa explicação.

> Os alunos normalmente têm mais dificuldades naqueles problemas em que não há um único procedimento bem definido para chegar à solução. Acredito que não ocorreram muitos avanços na área de resolução de problemas após a estratégia em quatro estágios proposta por George Pólya. (STEWART, 2012, p. VII).

A citação de James Stewart é partilhada por muitos pesquisadores da atualidade, onde resumidamente ele expõe que, caso não haja um procedimento definido para alcançar a resposta de tal problema, o aluno terá entraves durante a tentativa de resolução. O mesmo autor reconhece também que, o último avanço considerável na resolução de problemas foi proposto por Pólya[1], no século passado, que sugere na sua obra, uma estratégia baseada em quatro etapas de resolução, essa proposta é explorada em diversos livros-texto, algumas vezes com versões diferentes, como preferiu Stewart na sua obra Cálculo Volume 1 (2012) e será exposta nesta pesquisa.

A palavra *problema* pode tomar diversos significados dependendo do contexto que é colocado, então, acrescenta-se ao início desse capítulo uma definição do tema, fazendo utilização de uma clássica definição, que identifica o *problema* aqui em questão como “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”. (POZO, 2008, p. 15).

Pela definição acima, pode-se extrair que, caso haja variação de sujeitos, a situação pode deixar de ser um problema, devido aos níveis de conhecimento.

> “uma situação somente pode ser concebida como um problema, na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos”. (POZO, 2008, p. 16).

Assim sendo, não é possível determinar, em geral, se uma tarefa escolar é um problema de fato, ou uma atividade de solução imediata, pois isso depende da experiência e dos conhecimentos prévios de quem executa e dos objetivos estabelecidos (POZO, 2008).

---

[1] Geoge Pólya foi um matemático, nasceu em Budapeste, Hungria, no dia 13 de Dezembro de 1887. Ele fez contribuições fundamentais para a análise combinatória, teoria dos números, resolução de problemas, análise numérica e teoria da probabilidade. George Pólya, morreu em 7 de setembro de 1985, Palo Alto, na Califórnia.

Pólya sugere que resolver um problema é buscar a solução para algo que apenas fora imaginado, pois

> resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente por meios adequados. (PÓLYA, 1995, p.1).

Para Barros Filho (2012), saber matemática é de vital importância para a população de um país, pois essa relação está ligada com o desenvolvimento técnico científico do próprio país. Quando se começou a exigir dos estudantes a compreensão da Matemática, veio à tona a metodologia de aprendizagem por solução de problemas.

Gazire (1988, p. 124) destaca: “se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido”. Ou seja, os alunos, utilizando as suas experiências com resolução de problemas, terá condições de construir seu próprio conhecimento.

Gazire vai ao encontro do que expos David Hilbert[2], que é citado também por James Stewart (2012), quando registra: “um problema matemático deve ser difícil a ponto de nos desafiar, mas não inacessível, a ponto de zombar de nossos esforços”.

Stewart (2012) ainda sugere que ao propor problemas com níveis de dificuldade elevado em tarefas e avaliações, o profissional necessita corrigi-los e valoriza-los com um viés diferenciado, focando na apreciação das ideias que levam à resposta e a aplicação dos princípios de resolução de problemas mais importantes.

Menciona-se no trecho anterior uma proposta para correção de avaliações, com isso, adentra-se em novos temas de grande relevância nas academias, sobretudo na Educação Matemática, que são as concepções de ensino e os modelos de trabalho que são adotados pelos profissionais em sala de aula. Registra-

[2] David Hilbert foi um matemático Alemão, nasceu em 23 de janeiro de 1862, e morreu em 14 de fevereiro de 1943, cujo trabalho em geometria teve a maior influência no campo desde Euclides. Depois de fazer um estudo sistemático dos axiomas da geometria Euclidiana. Hilbert contribuiu a vários ramos da matemática, incluindo a teoria algébrica do número, análise funcional, físicas matemáticas, e os cálculos de variações.

se a seguir as bases teóricas para a avaliação e condução das atividades que foram aplicadas durante essa pesquisa.

Para Barros Filho (2012), os modelos de ensino centrados no aluno, possuem base nas condições das teorias cognitivas e construtivistas, onde o papel do professor é de gerar condições para que os alunos alcancem o conhecimento. Com base nisso, adota-se nesta pesquisa uma abordagem em que o pesquisador trabalhará com a descoberta guiada, onde seu trabalho não se resume à observação, tendo também possibilidade de estimular os participantes da pesquisa a explorar o problema dado num caminho que leve à solução.

Em síntese, pode-se dizer que, resolver um exercício é diferente de solucionar um problema, onde, neste segundo, é necessário passar por um processo de reflexão com tomadas de decisão, seguindo uma sequência de passos. A tabela a seguir diferencia exercício de problema (LAUDARES, et. al., 2017).

Quadro 3: diferenciação de exercícios e problemas

Exercício	Problema
Procedimentos automáticos	Processo de reflexão
Habilidade mecânica de repetição	Tomada de decisões
Treinamento e modelo	Situação nova e aberta
Há uma forma padronizada	Existência de contexto
Resolver uma Equação Diferencial	**Resolver um problema geométrico ou de fenômeno físico**

Fonte: Adaptado de Laudares, et. al., (2017, p.95).

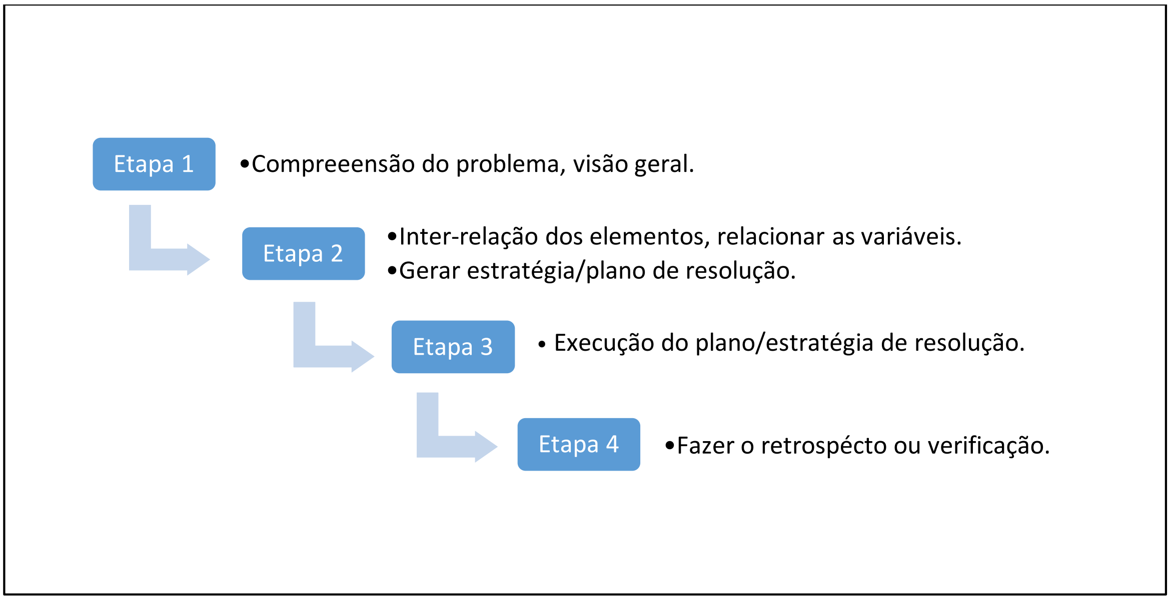
O estudante, ao iniciar a busca por uma solução, pode, constantemente, variar a sua forma de encarar o problema. Durante esse processo, é natural a mudança de posição, alterando sua concepção acerca da situação observada. É comum que o indivíduo se corrija durante a evolução da solução, muitas vezes, provando seu equívoco inicial. A percepção do problema é ainda mais diferente quando se está próximo da solução (PÓLYA, 1995).

Apresenta-se aqui, a teoria de George Pólya, presente em sua obra de 1995, que é adotada por muitos autores e pesquisadores da atualidade, incluindo James Stewart (2012) e Laudares (2017), como um produto de sucesso na resolução de problemas, que se baseia no seguinte: pode-se dividir em quatro fases a busca pela solução de um problema, embora não haja metodologia padrão para tal, essas quatro fases são detalhadas a seguir.

A primeira fase de trabalho é a compreensão do problema, onde busca-se alcançar uma visão clara sobre o que é necessário. A segunda fase é o entendimento sobre a inter-relação dos itens, em outros termos, seria entender como a incógnita está ligada aos outros dados, esse entendimento leva o estudante a ter uma ideia da resolução, traçando-se uma estratégia para execução. A terceira fase de trabalho é a execução do plano/estratégia e a quarta e última fase é onde acontece a retrospectiva da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (PÓLYA, 1995).

O esquema abaixo se trata de uma representação gráfica das fases da resolução de problemas, proposta por Pólya.

Figura 1: esquema Gráfico da Proposta de Resolução de Problemas de George Pólya.



Fonte: Adaptado de Pólya, (1995, p. 2).

Das etapas do esquema acima, destaca-se a etapa 4, pois, uma vez que o plano ou estratégia de resolução foi executada, faz-se necessário sua verificação, uma vez que é comumente encontrado falhas por falta de atenção ou simples erros de primeira ordem, como erros de sinais ou de unidades de medida. A verificação do procedimento para alcançar uma compatibilização do problema com o cálculo, é algo que tem o potencial de garantir que o seu trabalho não seja em vão, aprovando a sua assertividade e consequentemente o sucesso da resolução do problema. Para o caso de não aprovação será esta a etapa responsável por dar-lhe a oportunidade da correção.

2.5 Múltiplas Representações

> *"A visualização é um processo através do qual as representações mentais podem ganhar vida"*
>
> *Tommy Dreyfus*

Quando se trata de múltiplas representações, um nome surge como referência, Raymond Duval. Nascido na França, é o filósofo e psicólogo que desenvolveu durante sua carreira, importantes estudos relacionados à Psicologia Cognitiva, trabalhando pelo Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM), que fica em Estrasburgo, na França.

Busca-se aqui, ressaltar o papel importante das representações como ferramenta que permite existir relações entre o pensamento humano e os objetos matemáticos. As múltiplas representações podem ser a chave para gerar entendimento e significação para os conceitos matemáticos.

Sob o olhar de Duval, analisar o conhecimento matemático é o mesmo que analisar o sistema de produção de suas representações, pois, o processo de pensar em Matemática e buscar a visualização estão intrinsicamente conectados à utilização das diversas formas de representações, então, a abordagem cognitiva adotada por Duval, que está diretamente ligada ao "funcionamento" matemático, torna sua teoria operatória por excelência (MACHADO, 2016).

Segundo Lévy (2008), a história das mídias sempre caminhou junto com a história do desenvolvimento humano. Este mesmo autor aponta três técnicas em sua pesquisa, que estão associadas à memória e ao conhecimento, são elas:

- Oralidade
- Escrita
- Informática

A oralidade é uma forma de entender a memória. Nas palavras de Lévy (2008, p.77): "na oralidade primária, a palavra tem como função básica a gestão da memória social".

> A partir da propagação da escrita nos séculos XVII e XVIII, na Europa, e com a propagação do livro no formato semelhante ao que conhecemos hoje, é que se permitiu que a memória fosse estendida de modo qualitativamente diferente em relação à outra tecnologia da inteligência, a oralidade. (LUZ, 2011, p.58).

São exemplos de representações na Matemática, "os variados sistemas de numeração, as variadas formas de visualização e também argumentação visual, gráficos, diagramas e os esquemas, as escritas algébricas e formais ou mesmo a linguagem natural". (LUZ, 2011, p. 46).

Ainda sob este ponto de vista a mesma autora coloca que, a escrita permitiu que o saber pudesse ser estocado, consultado e comparado, tornando-se objeto suscetível de análise e exame. Além disso, pode-se entender que a escrita também é uma forma de estender a memória, embora de maneira diferente, se comparada com a oralidade.

> As representações na escrita, diferentemente da narrativa, tendem a perdurar, mais ainda quando se passa dos manuscritos para o impresso, possibilitando uma divulgação mais intensa dos signos na sociedade. Da mesma forma que a escrita, devemos entender a informática. Ela é uma nova extensão da memória, com algumas diferenças em relação às outras tecnologias da inteligência já que permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação, e em uma nova linguagem que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea (LUZ, 2011).

Lévy (2008) registra a simulação como uma imaginação auxiliada por computador. Ele também considera que a informática é uma potente ferramenta que pode ajudar o raciocínio.

Utilizar a ideia de múltiplas representações é adotar um modelo de aquisição de conhecimento que tem como fundamento o pensamento moderno, ou seja, a existência de um sujeito cognoscente, um objeto cognoscível e uma teoria dual dos signos.

Duval (2016) define dois tipos diferentes de registros, os quais são colocados na tabela a seguir:

Quadro 4: classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.

Registros	Representação Discursiva	Representação Não Discursiva
Multifuncionais: Os tratamentos não são algoritmizáveis	**Língua Natural:** Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: * Argumentação a partir das observações de crianças * Dedução válida a partir de definição ou de teoremas	**Figuras geométricas planas ou perspectivas:** (Configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) * Apreensão operatória e não somente perceptíveis * Construção com instrumentos
Monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos	**Sistema de Escritas:** Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: * Argumentação a partir das observações de crianças * Dedução válida a partir de definição ou de teoremas	**Gráficos Cartesianos:** * Mudança de sistemas de coordenadas * Interpolação; Extrapolação.

Fonte: Adaptado de Duval (2016).

Pela tabela acima percebe-se que os registros de representações não possuem a mesma natureza. Os monofuncionais foram gerados com finalidades específicas de tratamento, enquanto os registros plurifuncionais foram desenvolvidos com a língua natural (DUVAL, 2009).

Ainda segundo Duval (2009, p;14), “a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”.

De acordo com Luz (2011), no processo de aprendizagem, não se deve confundir um objeto com a sua representação. Entretanto, ao contrário de outras áreas do saber, o acesso aos objetos matemáticos é facilitado com o uso de múltiplas representações.

> [...] apesar da importância que se é dada, o esboço de curvas ainda é tratado quase que exclusivamente por meio da junção de pontos localizados no plano cartesiano, pontos obtidos por intermédio de substituições na expressão Matemática correspondente. Para uma nova equação, mesmo pertencendo à mesma família de curvas, todo o procedimento ponto a ponto é repetido, sem que, na maioria das vezes, qualquer relação seja feita com alguma outra curva. (MORETTI, 2009, p.150)

Moretti (2009) classifica o estudo das curvas em três procedimentos, a saber:

(1) O procedimento por pontos

(2) O procedimento de extensão de um traçado

(3) O procedimento de interpretação global das propriedades figurais

O **procedimento por pontos** é o mais comum em livros-texto: obtêm-se as coordenadas dos pontos por meio da substituição na expressão algébrica ou com base em tabela de valores da função e são localizados num sistema cartesiano. No entanto, segundo Moretti (2009), “não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente” (p.151).

Este mesmo autor ainda acrescenta: o procedimento (2) de extensão do traçado do gráfico corresponde à união dos pontos por traços, delineando o gráfico. Contrariamente ao (1), o procedimento (3), o conjunto traçado/eixo forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Segundo Moretti (ibid.), este procedimento permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão algébrica. Como diz Duval, “nesse tipo de tratamento não estamos em presença da associação ponto um par de números, mas a associação variável visual da representação unidade significativa da escrita algébrica” (DUVAL, 1988, apud MORETTI, 2009).

Para ter uma melhor compreensão das palavras de Duval com relação ao esboço (3) de esboço de curvas para o caso das funções do tipo.

Quadro 5: relação entre variáveis visuais e unidades simbólicas.

Variáveis Visuais	Valores	Unidades Simbólicas Correspondentes
Sentido da inclinação	Ascendente	Coeficiente > 0 [ausência do símbolo -]
	Descendente	Coeficiente < 0 [presença do símbolo -]
Ângulo com os eixos	Ângulo simétrico	Coeficiente Var. = 1
	Ângulo menor que 45°	Coeficiente Var. > 1
	Ângulo maior que 45°	Coeficiente Var. < 1
Posição sobre o eixo	Corta acima	Acrescenta uma constante +
	Corta abaixo	Acrescenta uma constante -
	Corta na origem	Não tem correção Aditiva

Fonte: Adaptado de Duval, 2009.

Segundo Duval (2009), a interpretação global das propriedades figurais é cognitivamente relevante para a compreensão em Matemática e distinta das outras formas de procedimento, em razão do procedimento de interpretação global permitir a apreensão dos valores visuais da figura-forma (esboço de traçados retos ou curvos), bem como sua modificação. Outros dois procedimentos permitem apenas a leitura pontual dos gráficos, sendo que, o sujeito fica preso à figura-fundo (campo quadriculado determinado por uma orientação bidimensional).

Stewart (2013) representa em um dos seus livros de Cálculo, quatro maneiras para representar uma função, são elas:

- Verbalmente: descrição através do uso de palavras
- Numericamente: utilização de tabelas de valores

- Visualmente: utilização de gráficos

- Algebricamente: utilização de fórmula explícita

Flores (2006) cita que as múltiplas representações são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. Por isso, é necessário passar por várias formas de representação de um mesmo objeto para se ter sucesso nas atividades de aprendizagem.

2.6 Conceito Matemático e o Procedimento

Alguns conceitos matemáticos se fazem necessário para uma boa exploração do conteúdo de EDO, e também para alcançar a significação, alguns exemplos são: conceito do que é lei física, representação das taxas de variação das equações diferencias, derivadas e integrais. A conceituação diferencia-se do procedimento, uma vez que este está relacionado aos cálculos das equações presentes nos conteúdos.

> A relevância didático-pedagógica de se discutir interpretações referentes a conceitos matemáticos deve ser explicitada desde a etapa inicial da formação docente em Matemática. O processo para compreender um determinado conceito matemático envolve a construção e o estabelecimento de relações de significados, o entendimento de situações em que o mesmo pode ser aplicado e formas diferenciadas para representá-lo. Por exemplo, uma função polinomial de 1º grau, pode ser apresentada na forma algébrica, verbal, numérica ou gráfica. Essas diferentes formas de representação envolvendo o mesmo conceito matemático, instigam organizações mentais que podem estimular operações de generalização, possibilitando a construção e formação do pensamento abstrato. (BERTOLAZI e SAVIOLI, 2018, p.33)

Os objetivos da Educação Matemática são múltiplos e difíceis de serem caracterizados, porém, de uma forma mais global, poderiam ser colocados em dois grupos:

a) Objetivos de natureza pragmática, que têm em vista a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem Matemática.

b) Objetivos de cunho cientifico, que têm em vista o desenvolvimento da Educação Matemática como campo de investigação e produção de conhecimento. (FIORENTINI e LORENZATO, 2009).

A Educação Matemática trabalha com a elaboração de conceitos e teorias, levando em consideração as peculiaridades do saber matemático. Com o objetivo de aumentar os índices de compreensão dos educandos sobre os conceitos matemáticos, seu foco está sobre o desenvolvimento de práticas pedagógicas, fazendo o uso de teorias que surgem através das pesquisas acadêmicas (PAIS, 2015).

Pais (2015) diferencia o saber do conhecimento da seguinte forma:

- Saber matemático: não é dependente de uma validação pessoal, pois é uma ciência com teorias estruturadas em um contexto próprio.

- Conhecimento: o conhecimento parte da visão individual e subjetiva do sujeito, de sua experiência ou vivencia.

Segundo o mesmo autor, é essencial entendermos essa diferença, pois é um dos objetivos principais da didática, partir de um entendimento pessoal, para chegar no estatuto da objetividade, em outros termos seria: partir do “conhecimento” para alcançar o “saber”.

Luz (2011) sugere que, no ensino da Matemática da escola básica ao superior, é comum se encontrar uma grande ênfase no registro algébrico. No caso específico do Cálculo, existe uma tendência de apresentar o conceito – objeto matemático – na língua natural e em registro algébrico-formal. A partir daí, há uma grande ênfase de tratamento no registro algébrico-formal em quase todos os tópicos relativos ao conteúdo específico. Em alguns casos são feitas representações no registro gráfico, com conversões normalmente realizadas num único sentido: do registro algébrico-formal para o registro gráfico.

Conceituar exige uma ação, através de uma atividade mental, pois segundo Bicudo e Garnica (2003), dar conceito não se trata de uma descoberta fruto de uma clarividência conseguida por graça ou casuisticamente, mas a conseqüência de um árduo trabalho mental de perseguição à verdade. Trata-se de um processo lógico que privilegia as descrições dos objetos matemáticos e das relações e estruturas que os unem.

A partir da compreensão do conceito, o educando se permite chegar em uma definição Matemática, esse processo é titulado por Vaz (2010) como busca da formalização dos conceitos, ou, em outras palavras, dar forma ao conceito utilização na Linguagem Matemática.

Ao pensar a definição em Matemática, busca-se a formalização de conceitos, numa explicação precisa, isto é, busca-se dar forma ao conceito, a partir da utilização da Linguagem Matemática, também entendida e explicada nos estudos da semiótica (VAZ, 2010).

> É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino de Matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. (DUVAL, 2009, p. 11).

Os procedimentos devem visar a construção de um raciocínio matemático que englobe os conceitos matemáticos e seus processos de resolução, que desenvolva uma maneira significativa diante de diversas situações-problema que estão postas dentro e fora da sala de aula. Deve-se exterminar a visão de procedimento como simples metodologia para que, desta forma, a apreensão se perpetue mais facilmente (VAZ, 2010).

3 ANÁLISE DE CONTEÚDO E DA APRESENTAÇÃO METODOLÓGICA DAS EDO’S DE PRIMEIRA ORDEM EM LIVROS-TEXTO

Almeja-se aqui, neste capítulo, expor os resultados de uma análise efetuada, acerca de quatro livros-texto, listados a seguir, que abarcam o conteúdo das Equações Diferenciais Ordinárias e da sua exposição metodológica. Essa avaliação se limita ao conteúdo, metodologia aplicada por cada autor e sobre as atividades presentes neles.

Quadro 6: livros-texto analisados

Livro	Título	Autores	Volume	Editora	Ano
1	Equações Diferenciais	Dennis G. Zill Michael R. Cullen	1	Pearson	2001
2	Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.	William E. Boyce Richard C. DiPrima.	Único	Livros Técnicos e Científicos	2010
3	Cálculo	James Stewart	2	Cengage Learning	2013
4	Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace.	João B. Laudares Dimas F. de Miranda Júlio P. Cabral dos Reis Saulo Furletti	Único	Artesã	2017

Fonte: O autor.

Segundo Melo (2002), o ensino superior tem voltado seu olhar para a valorização tecnicista, trabalhando uma forma pronta de resolver problemas, colocando à disposição dos alunos listas extensas de exercícios que visam de forma indireta uma memorização metodológica, receita que se perde em curto período de tempo.

> Os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, na maioria das vezes, tem sido “ensinados e aprendidos” por meio de aulas que valorizam a memorização e a aplicação de técnicas, regras e algoritmos. Dessa forma, os professores tem a convicção que o conteúdo foi “ensinado” e os alunos tem a convicção de que o conteúdo foi “aprendido”. No entanto, observa-se, no Ensino Superior, que o curso de Cálculo Diferencial e Integral I,

> considerado básico nos cursos da área de ciências exatas, apresenta um índice muito alto de abandono e repetência. (MELO. 2002, p.10).

Trabalha-se a seguir na identificação dos métodos e conteúdo de cada um dos livros texto explorados.

3.1 Análise do Livro-texto 1

A primeira análise foi feita sobre a obra de Dennis G. Zill e Michal R. Cullen, que tem como título “Equações Diferenciais”. Apesar de divulgado em dois volumes, limita-se este exame ao volume 1, capítulos 1, 2 e 3, que tratam das Equações Diferenciais de Primeira Ordem e suas aplicações.

Segundo o prefácio da obra, sua terceira edição tenta alcançar um equilíbrio entre os conceitos e a apresentação do material, além de trazer mudanças significativas feitas para reforçar e modernizar alguns aspectos do texto, quando comparada às suas edições anteriores. (ZILL e CULLEN, 2001).

A estrutura do capítulo principal (Capítulo 2) é dividida em tópicos, oito tópicos, precedidos de sua revisão e dos exercícios de revisão. O capítulo primeiro se trata de uma introdução às Equações Diferenciais (ED), e, no terceiro capítulo, são apresentadas as aplicações de ED de primeira ordem, estes últimos dois, também contam com uma seção de “revisão” e outra de “exercícios de revisão”.

O primeiro capítulo traz as terminologias que serão utilizadas para trabalhar o tema, a classificação das EDs pela ordem, pela linearidade ou não-linearidade, além de nove exemplos que registram tipos variados de equações e sua (ou suas) soluções. Em alguns exemplos estão presentes figuras de gráficos que ilustram o conjunto de soluções do referido exemplo. Esta primeira parte do capítulo é findada com uma sequência de 53 exercícios. Observa-se nesta primeira seção, que predomina-se uma forma semelhante à utilizada obra de Boyce e DiPrima de expor o conteúdo, que consiste em explicação textual, simbologias matemáticas e teoremas.

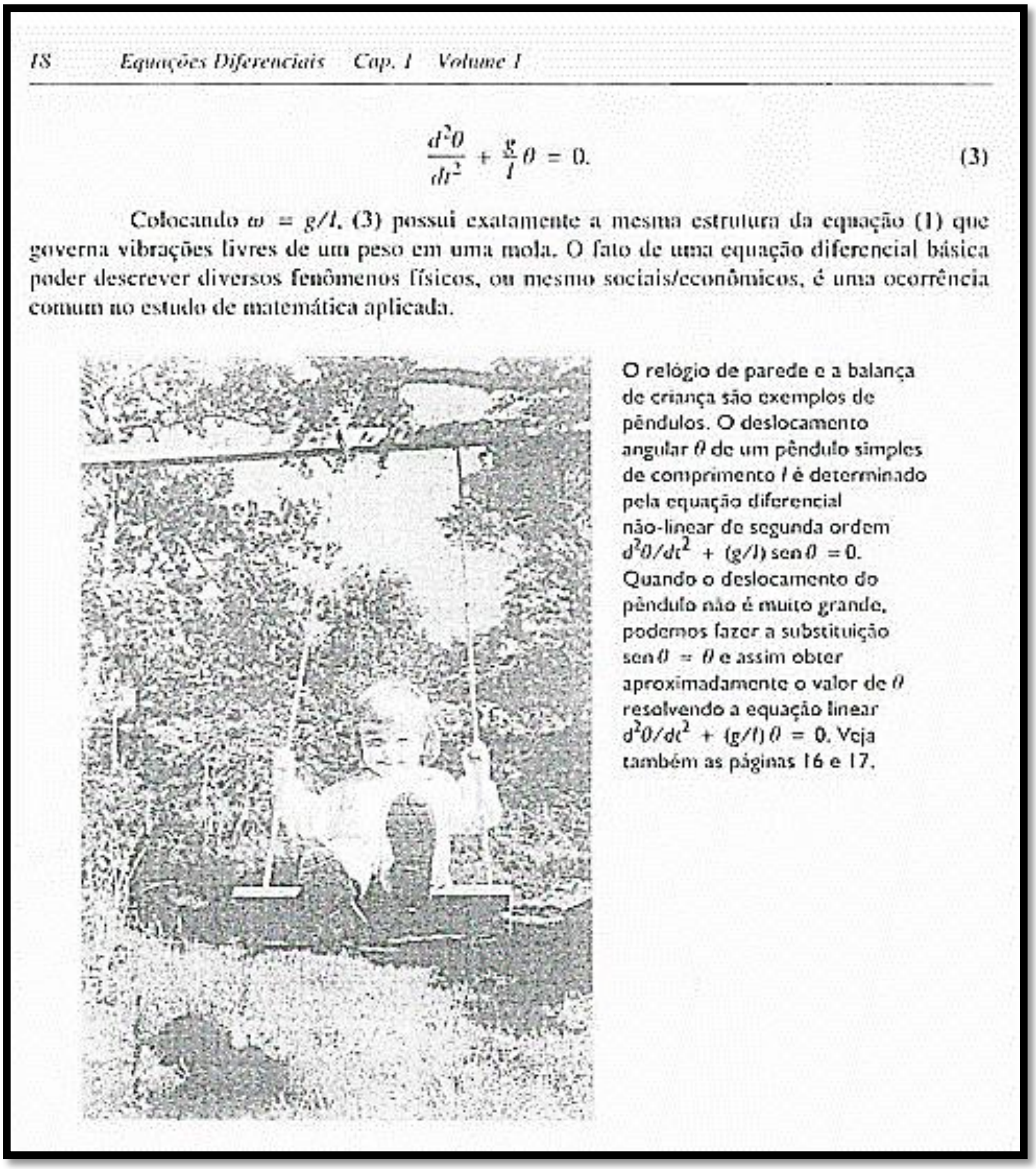
Adiante, no mesmo capítulo, na seção 1.2 da obra, está presente uma série de doze modelos matemáticos, que modelam sistemas ou fenômenos em termos matemáticos. O autor faz parecer simples o início da modelagem, resumindo-a em duas etapas:

(i) Identificar as variáveis que são responsáveis pela mudança do sistema

(ii) Registrar um conjunto de hipóteses razoáveis sobre o sistema

Apesar desta obra ser a mais antiga de todos analisadas, percebe-se que seus exemplos são ricos e bem ilustrados. Nota-se a busca pela contextualização dos problemas, otimizando a didática do produto. O capítulo é finalizado com uma segunda lista de exercícios (22 atividades), uma seção breve de revisão do capítulo e, um terceiro arranjo de atividades, na seção denominada “exercícios de revisão”, composta por 20 atividades e problemas.

Figura 2: exemplos de contextualização e ilustração de problemas.



18 *Equações Diferenciais* *Cap. 1* *Volume I*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \qquad (3)$$

Colocando $\omega = g/l$, (3) possui exatamente a mesma estrutura da equação (1) que governa vibrações livres de um peso em uma mola. O fato de uma equação diferencial básica poder descrever diversos fenômenos físicos, ou mesmo sociais/econômicos, é uma ocorrência comum no estudo de matemática aplicada.

O relógio de parede e a balança de criança são exemplos de pêndulos. O deslocamento angular θ de um pêndulo simples de comprimento l é determinado pela equação diferencial não-linear de segunda ordem $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\operatorname{sen}\theta = 0$. Quando o deslocamento do pêndulo não é muito grande, podemos fazer a substituição $\operatorname{sen}\theta = \theta$ e assim obter aproximadamente o valor de θ resolvendo a equação linear $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\theta = 0$. Veja também as páginas 16 e 17.

Fonte: Livro Equações Diferenciais, Zill e Cullen (2001, p.18).

No segundo capítulo da obra, estão presentes os principais conceitos e conteúdo do tema EDO. A iniciação se dá com o resumo do capítulo, uma repetição daquilo que está registrado no sumário, e com o registro dos conceitos importantes para continuidade da aprendizagem, tais conceitos são colocados como pré-requisitos.

Neste ponto, segue-se o mesmo padrão de transmissão de informações que o primeiro capítulo. Difere-se do primeiro livro nas ilustrações e gráficos, que são melhores explorados por Zill e Cullen.

Com relação aos exercícios deste segundo capítulo, percebe-se grandes sequências de atividades, cujas soluções estão limitadas à aplicação de apenas uma técnica. Por exemplo, o enunciado da seção 2.2 é “nos problemas de 1-40, resolva a equação diferencial dada por separação de variável”. Esse exemplo é capaz de resumir todas as listas de exercícios do capítulo, onde nota-se uma preocupação excessiva do autor com a metodologia de ensino através da repetição, memorização de uma fórmula de resolução.

Nas seções seguintes, dentro do mesmo capítulo, os gráficos e imagens aparecem com menor frequência, e os teoremas e linguagem matemática se faz mais presente. Os autores resumem o seu método de resolução em cinco etapas (QUADRO 7). Nota-se que o resumo da metodologia não é colocada de maneira simples, gerando dificuldades aos leitores que não sejam especialistas em linguagem matemática.

Quadro 7: resumo do método de resolução de ED de primeira ordem.

Resolvendo uma Equação Linear de Primeira Ordem	
(i)	Para resolver uma equação linear de primeira ordem, primeiro coloque-a na forma (1).
(ii)	Identifique P(x) e encontre o fator de integração: $e\int P(x)dx$

(iii)	Multiplique a equação obtida em (i) pelo fator de integração: $_{e}\int P(x)dx\,\frac{dy}{dx}\ +\ \mathrm{P(x)}\ _{e}\int P(x)dx_{y}\ =\ _{e}\int P(x)dx_{f(x).}$
(iv)	O lado esquerdo da equação em (iii) é a derivada do produto do fator de integração e a varável dependente y, isto é, $\frac{dy}{dx}\,[_{e}\int P(x)dx_{y} = {}_{e}\int P(x)dx_{f(x)dx\,+\,ce}$
(v)	Integre ambos os lados da equação encontrada em (iv).

Fonte: Adaptado do Livro Equações Diferenciais, Zill e Cullen (2001, p.70-71).

O terceiro capítulo registra um conteúdo mais avançado das EDO, que são as aplicação destas. Subdivido em três tópicos, sempre seguidos de uma revisão e uma lista de exercícios de revisão:

- Trajetórias Ortogonais
- Aplicações de equações lineares
- Aplicações de equação não-lineares

Os autores não utilizam métodos de incentivo ou estímulo para os estudantes, por outro lado, percebe-se a busca pela utilização de estratégias de ensino diversificadas. As respostas das atividades de números ímpares estão presentes ao final do livro de 450 páginas.

A diversificação do cenário de aplicação, para elaboração das situações-problema e exercícios deste segundo livro, geram maior interação dos leitores com o mundo real (contextualização) e também impacta diretamente em uma multidisciplinaridade, uma vez que os enunciados levam à diversos ramos da Matemática, o que, ao olhar do pesquisador, formam o seu ponto didático mais presente.

3.2 Análise do Livro-texto 2

O segundo dos quatro exames foi feito sobre a obra nomeada como Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, dos autores William E. Boyce e Richard C. DiPrima, na sua nona edição, elaborada no ano de 2010, da editora LTC (Livros Técnicos e Científicos Editora), do estado do Rio de Janeiro.

Tomou-se como objeto de análise, somente o capítulo segundo do livro, intitulado Equações Diferenciais de Primeira Ordem. Porém, é importante relatar que, no primeiro capítulo do livro, há a introdução ao tópico Equações Diferenciais (ED), com exposição de alguns exemplos para ilustrar, além da colocação de algumas atividades relacionadas à este tópico. Em seguida, mas ainda no mesmo capítulo, é explicada a classificação das Equações Diferenciais e são colocadas duas laudas sobre notas histórias acerca do surgimento e evolução das EDs.

A estrutura do capítulo divide o conteúdo em nove tópicos e a exposição do conteúdo é feita, basicamente, através de exposições textuais acompanhadas de uma utilização intensa de simbologias e teoremas, comumente dominada apenas por estudantes da Matemática, Física e Engenharias, que estão em nível mais avançado de ensino.

Há presença discreta de gráficos neste capítulo, que contam, além das curvas das equações, com exploração de campos e direções, por outro lado, nota-se a ausência de ilustrações e tabelas, que tornariam o livro mais atrativo e aliviaria a leitura, impactando em maior didática, que é o objetivo da obra.

Quanto às atividades, posicionadas ao final de cada uma das nove seções, há uma enorme gama de problemas e exercícios. É perceptível a preocupação do autor em abordar de diferentes maneiras os conceitos matemáticos, entretanto, observa-se várias sequências de modelos semelhantes, cuja resolução seguiria uma mesma técnica. O extrato da obra a seguir mostra exemplos das repetições, e também registra a busca por diferentes abordagens (nos problemas de 9 à 20).

Figura 3: exemplos de repetição de exercícios com mesma técnica de resolução.

PROBLEMAS Em cada um dos Problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$
2. $y' = x^2/y(1+x^3)$
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
4. $y' = (3x^2 - 1))(3 + 2y)$
5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$

Em cada um dos Problemas de 9 a 20:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado em forma explícita.

(b) Desenhe o gráfico da solução.

(c) Determine (pelo menos aproximadamente) o intervalo no qual a solução está definida.

9. $y' = (1 - 2x)y^2, \quad y(0) = -1/6$
10. $y' = (1 - 2x)/y, \quad y(1) = -2$
11. $x\,dx + ye^{-x}dy = 0, \quad y(0) = 1$
12. $dr/d\theta = r^2/\theta, \quad r(1) = 2$
13. $y' = 2x/(y + x^2y), \quad y(0) = -2$
14. $y' = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$
15. $y' = 2x/(1 + 2y), \quad y(2) = 0$
16. $y' = x(x^2 + 1)/4y^3, \quad y(0) = -1/\sqrt{2}$
17. $y' = (3x^2 - e^x)/(2y - 5), \quad y(0) = 1$
18. $y' = (e^{-x} - e^x)/(3 + 4y), \quad y(0) = 1$
19. $\operatorname{sen} 2x\,dx + \cos 3y\,dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3$
20. $y^2(1 - x^2)^{1/2}dy = \operatorname{arcsen} x\,dx, \quad y(0) = 1$

Fonte: Livro Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Boyce e DiPrima (2010, p.36).

O autor utiliza, em alguns problemas, uma técnica para estimular o aluno no caminho correto, o que certamente é bastante interessante do ponto de vista educacional. Nota-se estes estímulos abaixo:

Figura 4: utilização de estímulos ao aluno.

Alguns dos resultados pedidos nos Problemas de 21 a 28 podem ser obtidos resolvendo-se a equação dada analiticamente ou gerando-se gráficos de aproximações numéricas das soluções. Tente formar uma opinião sobre as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

21. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y), \qquad y(0) = 1$$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

Fonte: Livro Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Boyce e DiPrima (2010, p.36).

Contempla-se também, problemas com exposições de situações reais, envolvendo exemplares exploram as ciências naturais, onde busca-se a contextualização dos conceitos físicos e matemáticos. Abrangendo também a multidisciplinaridade que é sugerida e desejada nos campos da Educação Matemática atual. Entretanto, critica-se a criatividade dos problemas que, por enfatizarem situações semelhantes podem causar a monotonia e consequentemente o desinteresse dos discentes, além disso, outro fator que pode gerar perda do interesse é a não exploração das ilustrações.

Figura 5: sequência de problemas com situações semelhantes.

PROBLEMAS

1. Considere um tanque usado em determinados experimentos em hidrodinâmica. Depois de um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta com uma concentração de 1 grama por litro. Para preparar o tanque para o próximo experimento, ele é lavado com água fresca fluindo a uma taxa de 2 litros por minuto, e a solução bem misturada flui para fora à mesma taxa. Encontre o tempo gasto até a concentração de tinta no tanque atingir 1% de seu valor original.
2. Um tanque contém inicialmente 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de γ gramas por litro de sal entra no tanque a uma taxa de 2 litros por minuto, e a mistura bem mexida sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma expressão para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t em termos de γ. Encontre, também, a quantidade limite de sal no tanque quando $t \to \infty$.
3. Um tanque contém inicialmente 100 galões de água fresca. Joga-se, então, água contendo $\frac{1}{2}$ libra de sal por galão a uma taxa de 2 galões por minuto e permite-se que a mistura saia do tanque à mesma taxa. Após 10 minutos, para-se o processo e joga-se água fresca no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, com a mistura deixando o tanque, novamente, à mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque ao final de 10 minutos adicionais.
4. Um tanque, com capacidade de 500 galões, contém originalmente 200 galões de água com uma solução de 100 libras de sal. Está entrando no tanque, a uma taxa de 3 galões por minuto, água contendo 1 libra de sal por galão, e permite-se que a mistura saia do tanque a uma taxa de 2 galões por minuto. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante antes do momento em que a solução começa a transbordar. Encontre a concentração de sal (em libras por galão) no tanque no instante em que vai começar a transbordar. Compare essa concentração com a concentração-limite teórica se o tanque tivesse capacidade infinita.
5. Um tanque contém 100 galões de água e 50 onças[*] de sal. Água contendo uma concentração de sal de $(\frac{1}{4})[1 + (\frac{1}{2})\text{sen}\,t]$ onças por galão entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, e a mistura sai do tanque à mesma taxa.
   (a) Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
   (b) Desenhe o gráfico da solução por um período de tempo longo o suficiente para que você veja o comportamento final do gráfico.
   (c) O comportamento da solução para períodos longos de tempo é uma oscilação em torno de um nível constante. Qual é esse nível? E qual é a amplitude da oscilação?
6. Suponha que um tanque contendo um determinado líquido tem uma saída perto do fundo. Seja $h(t)$ a altura da superfície do líquido acima da saída no instante t. O princípio de Torricelli[2] diz que a velocidade v do fluxo na saída é igual à velocidade de uma partícula em queda livre (sem atrito) caindo da altura h.

Fonte: Livro Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Boyce e DiPrima (2010, p.46).

Por fim, observa-se que as respostas das atividades se fazem presentes ao final do livro. O que é um fator positivo, pois estimula o aluno na busca pelo acerto, e, no caso de insucesso, automaticamente o estudante é submetido à inquietações que podem leva-lo à pesquisa exploratória em busca do erro e sua correção.

3.3 Análise do Livro-texto 3

O livro de James Stewart, Cálculo, volume 2, na sua sétima edição (norte-americana), publicada pela editora Cengage Learning em 2013, foi a terceira obra a ser analisada pelo pesquisador, escolhida também pela sua popularidade nas universidades brasileiras. Registra-se a seguir os resultados dessa análise.

Já no prefácio, no tópico de "filosofia do livro", encontra-se registros que deixam claro o objetivo da obra e o perfil do autor.

> A arte de ensinar, disse Mark Van Doren, é a arte de auxiliar a descoberta. Eu tentei escrever um livro que auxilie os estudantes a descobrirem o cálculo – tanto seu poder prático quanto sua surpreendente beleza. [...] minha intenção é transmitir ao estudante uma noção da utilidade do cálculo e desenvolver a competência técnica, mas também me esforço para propiciar certo apreço pela beleza intrínseca do tema. Newton indubitavelmente experimentou uma sensação de triunfo quando fez suas grandes descobertas. Quero que os estudantes compartilhem um pouco desse entusiasmo.
> A ênfase concentra-se na compreensão dos conceitos. Acredito que quase todos concordam que este deve ser o principal objetivo do ensino do cálculo. De fato, o ímpeto para o movimento atual de reforma do cálculo veio da Conferência de Tulane, em 1986, que formulou como primeira recomendação: concentrar-se na compreensão de conceitos. Tentei atingir esse objetivo por meio da Regra dos Três: "**Os tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente". A visualização, a experimentação numérica e gráfica e outras abordagens mudaram o modo como ensinamos o raciocínio conceitual de maneiras fundamentais.** A Regra dos Três foi expandida para tornar-se a Regra dos Quatro, enfatizando também o ponto de vista verbal ou descritivo. (STEWART, 2013, p. IX).

Embora não haja um capítulo dedicado à introdução das Equações Diferenciais, há antes de tudo, uma curta divisão chamada de teste de verificação, que, segundo o autor, tem intenção de diagnosticar falhas que você (leitor do livro) posa ter em áreas específicas da Matemática, que são vistas como pré-requisitos para a matéria de EDO (Álgebra, Geometria Analítica, Trigonometria e Funções). Após cada teste é possível conferir as respostas (STEWART, 2013).

O livro-texto de Stewart apresenta, no seu capítulo 9 (primeiro capítulo do volume 2) o tema Equações Diferenciais, em comparação com os livros anteriores, percebe-se que o capítulo é mais compacto que os demais, porém, apesar de ter um número de laudas menor dedicado ao tema, há separação por tópicos (como o livro de Zill e Cuellen), precedida por uma seção de exercícios, denominada “problemas quentes”.

A obra trata inicialmente do tema modelagem com ED, campos de direções e método de Euler e equações separáveis e, na sequência, registra-se os modelos para crescimento populacional, seguido do tópico de equações lineares e, por fim, o “sistema predador-presa”.

A diferença entre os livros-texto registrados anteriormente e este não está no conteúdo que é apresentado, mas sim, na maneira de trabalhar tal conteúdo. É nítida a preocupação do autor em utilizar diferentes formas de linguagem e registros para tornar o livro mais didático. Outros aspectos, que se ressaltam, são a exploração das ilustrações, a ênfase na contextualização dos problemas e situações, a utilização de diversos tipos de representações para transmissão das ideias. Toda essa preocupação e preparação do objeto pode ser exemplificada em apenas uma figura (Fig. 6):

Figura 6: exemplos de utilização de diferentes representações para a transmissão de conceitos matemáticos.

EXEMPLO 1

(a) Esboce o campo de direções para a equação diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Use a parte (a) para esboçar a curva solução que passa pela origem.

SOLUÇÃO

(a) Podemos começar calculando a inclinação em vários pontos na seguinte tabela:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	. . .
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	. . .

Agora, podemos desenhar pequenos segmentos de reta com essas inclinações nesses pontos. O resultado é o campo de direções mostrado na Figura 5.

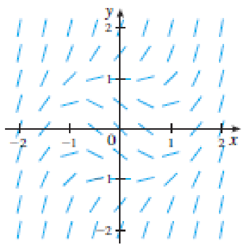


FIGURA 5

(b) Podemos começar na origem e nos mover para a direita na direção do segmento de reta (que tem inclinação -1). Continuamos a desenhar a curva solução de maneira que ela se mova paralela aos segmentos de reta próximos. A curva solução resultante é exposta na Figura 6. Voltando para a origem, desenhamos a curva solução para a esquerda da mesma maneira.

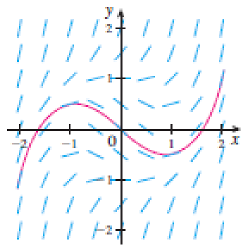


FIGURA 6

Quanto mais segmentos desenharmos no campo de direções, mais clara se tornará a figura. É claro que é tedioso calcular as inclinações e desenhar segmentos de reta para um número muito grande de pontos manualmente, mas os computadores facilitam essa tarefa. A Figura 7 apresenta um campo de direções mais detalhado, desenhado por um computador, para a equação diferencial no Exemplo 1. Isso nos permite desenhar, com uma precisão razoável, as curvas solução exibidas na Figura 8 com intersecções com o eixo y iguais a -2, -1, 0, 1 e 2.

TEC O *Module 9.2A* mostra os campos de direções e as curvas solução para várias equações diferenciais.

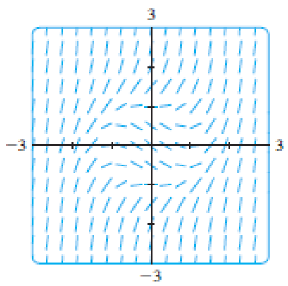


FIGURA 7

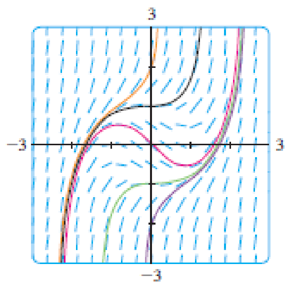


FIGURA 8

Depois disso, vamos ver como campos de direções dão uma percepção das situações físicas. O circuito elétrico simples, mostrado na Figura 9, contém uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) que produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ amperes (A) em um instante t. O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms [Ω] e um indutor com indutância de L henrys (H).

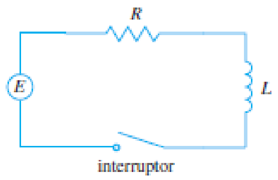


FIGURA 9

Fonte: Livro Cálculo, volume 2, James Stewart, 2013, p.532.

Em um único exemplo foram explorados: exposição textual, utilização de simbologias matemáticas e expressões, representação por tabela, representação gráfica somente de campos de direção, representação gráfica de campos de direção com representação de curvas, representação de situação através de um circuito elétrico (desenhos). Além de trazer, na página subsequente, um breve relato histórico sobre a vida de Leonhard Euler.

É visto que a linguagem utilizada na obra de Stewart é uma linguagem de fácil entendimento, com menos ênfase em teoremas, que busca trazer leitores não especialistas nas simbologias matemáticas (como alunos das Engenharias e demais cursos das áreas afins da Matemática) ao entendimento dos conceitos.

Há utilização e estímulos à utilização de recursos tecnológicos atuais, como ferramentas computacionais algébricos, calculadora gráfica, a internet e dispositivos móveis. Entretanto, a ferramenta principal, presente no conteúdo, foi elaborada pelo autor, é conhecida com TEC (Tools for Enriching Calculus), disponível no website https://www.stewartcalculus.com/tec/, onde se fazem presentes diversas informações sobre tópicos do livro em questão, elementos de obras anteriores, além de documentos sobre a história da Matemática e outras atualizações.

No que tocam às atividades, problemas e exercícios, observa-se uma pluralidade de situações problemas, que contextualizam o tema, trazendo para a realidade do estudante e, claro, complementam a obra. As situações-problema vão desde temas ligados ao mercado financeiro até às áreas da Física e da Biologia.

Existem duas seções inseridas no capítulo, que expõem “projetos aplicados”. Essas duas seções estimulam educadores e alunos a trabalharem a Matemática de maneira exploratória, o que vai ao encontro do que foi colocado pelo autor no prefácio, que está em busca de auxiliar na descoberta. Esse tipo de iniciativa é relevante na busca por resultados nos métodos de ensino-aprendizagem. Destacou-se, nesta pesquisa, que o ensino, através de explorações, é uma boa ferramenta de interação aluno-professor e aluno-saber matemático.

É interessante destacar que, mesmo nas atividades de exploração, a obra incentiva a utilização de recursos tecnológicos (FIG. 7). Outro ponto de destaque é a diversificação de metodologia de cobrança nas atividades. Mesmo sendo um livro puramente de Cálculo, há cobranças na forma textual e até mesmo, verdadeiro ou falso (FIG. 8). Por fim, verificou-se que há respostas somente dos exercícios de numeração ímpar.

Figura 7: estímulo à utilização de elementos tecnológicos para realização de atividades exploratórias.

4. Seja t_2 o instante no qual a bola volta para a Terra. Para a bola do Problema 3, calcule t_2 usando um gráfico da função altura $y(t)$. Qual é mais rápida, a subida ou a descida?

5. Em geral, não é fácil encontrar t_2 porque é impossível resolver a equação $y(t) = 0$. Podemos, entretanto, usar um método indireto para determinar se a subida ou a descida é mais rápida; determinamos se é positivo ou negativo. Mostre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

onde$x = e^{pt_1/m}$. Então mostre que $x > 1$ e a função

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

estão aumentando para $x > 1$. Use esse resultado para decidir se $y(2t_1)$ é positivo ou negativo. O que você pode concluir? A subida ou a descida é mais rápida?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

Fonte: Livro Cálculo, volume 2, James Stewart, 2013, p.548.

Figura 8: utilização de diferentes metodologias de avaliação.

9 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma equação diferencial?
(b) O que é a ordem de uma equação diferencial?
(c) O que é uma condição inicial?
2. O que você pode dizer sobre as soluções da equação $y' = x^2 + y^2$ apenas olhando para a equação diferencial?
3. O que é um campo de direções para a equação diferencial $y' = F(x, y)$?
4. Explique como o método de Euler funciona.
5. O que é uma equação diferencial separável? Como você a resolve?
6. O que é uma equação diferencial linear de primeira ordem? Como você a resolve?
7. (a) Escreva a equação diferencial que expresse a lei de crescimento natural. O que ela diz em termos da taxa de crescimento relativo?
(b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?
(c) Quais são as soluções dessa equação?
8. (a) Escreva a equação logística.
(b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?
9. (a) Escreva equações de Lotka-Volterra para modelar populações de peixes (P) e tubarões (T).
(b) O que essas equações dizem sobre cada população na ausência da outra?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.
2. A função $f(x) = (\ln x)/x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.
3. A equação $y' = x + y$ é separável.
4. A equação $y' = 3y - 2x + 6xy - 1$ é separável.
5. A equação $e^x y' = y$ é linear.
6. A equação $y' + xy = e^y$ é linear.
7. Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to\infty} y = 5$.

Fonte: Livro Cálculo, volume 2, James Stewart, 2013, p.569.

3.4 Análise do Livro-texto 4

A quarta obra analisada se trata do livro-base desta pesquisa, intitulada Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace, dos autores João B. Laudares, Dimas F. de Miranda, Júlio Paulo C. dos Reis e Saulo Furletti. O livro em questão foi publicado pela editora Artesã no ano de 2017.

A arquitetura do livro foi elaborada de forma que a obra fosse dividida em partes, a primeira trata das Equações Diferenciais Ordinárias, a segunda, registra transformada de Laplace e, a terceira, expõe um conjunto de atividades com utilização de informática. O exame limita-se à primeira parte, mais precisamente aos 4 primeiros capítulos do tema EDO, que trazem os tópicos da primeira ordem.

O primeiro capítulo registra definições de EDO, classificação das mesmas pela ordem e pela linearidade. Em seguida, são abordados os tipos de solução para as equações diferenciais, precedidas de uma lista de sete exercícios propostos. Até esta parte do livro, ele se difere dos outros pela forma de exposição diversificada e simples dos conteúdos, há utilização de gráficos monocromáticos, explicações textuais, utilização de simbologias matemáticas. Denota-se que há uma preocupação, desde o início, com a aplicação de linguagem diversificada e simples.

Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem é o título do segundo capítulo do livro. Este capítulo traz um modelo de exposição que, até então, é exclusivo. Um resumo de cinco métodos de resolução é exposto de forma sintetizada em apenas 1 quadro, em uma página.

Após a síntese elaborada no quadro, faz-se a uma exploração detalhada de cada um dos métodos. O primeiro dos métodos é denominado “separação de variáveis”, com seis exemplos detalhadamente explicados.

O método 2, é denominado equações diferenciais redutíveis a separação de variáveis, por mudança de variável. Explicado com utilização de diversidade de linguagem, textos, simbologias, organização das ideias por passos. Há uma organização das ideias através de uma sequência didática.

Figura 9: síntese de métodos de resolução utilizada no livro 4.

TIPO DE EQUAÇÃO

NÃO LINEARES / LINEARES

1º MÉTODO: BÁSICO

- Separação de variáveis: s.v.

A Equação Diferencial tipo:

$$f(x)dx = g(y)dy \rightarrow \int f(x)dx = \int g(y)dy$$

2º MÉTODO

- Redutível à s.v. por mudança de variável dos tipos:

I) $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right) \rightarrow \dfrac{y}{x} = u$

ou $y = ux \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = u + \dfrac{du}{dx}x$

II) $\dfrac{dy}{dx} = f(x \pm y) \rightarrow u = x \pm y$

ou $y = u \mp x \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \mp \dfrac{dx}{dx} = \dfrac{du}{dx} \mp 1$

3º MÉTODO

- Cálculo da primitiva de Equação Diferencial exata ou de diferencial total

$$\underbrace{M(x,y)}_{a}\,dx + \underbrace{N(x,y)}_{b}\,dy = 0$$

Condição: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Solução: $\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial x}[u(x,y)]}_{a}dx + \underbrace{\dfrac{\partial}{\partial y}[u(x,y)]}_{b}dy = 0$

$u(x,y) = \int \dfrac{\partial}{\partial x}[M(x,y)]dx + g(y)$ ou ainda

$u(x,y) = \int \dfrac{\partial}{\partial y}[N(x,y)]dy + h(x)$

FATOR INTEGRANTE

- Usar fator integrante se $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

EXCLUSIVAMENTE LINEARES

4º MÉTODO: Homogênea

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

Por separação de variável

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int -P(x)dx \rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx$$

$y = e^{-\int P(x)dx + c}$ ou $y = ce^{-\int P(x)dx}$

5º MÉTODO – Não Homogênea

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y(x) = Q(x)\ ; \quad Q(x) \neq 0$$

a) Usando fator integrante

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$$y = [I(x)]^{-1}\left(\int Q(x)I(x)dx + c\right)$$

b) usando variação de parâmetros (Lagrange)

$$\begin{cases} y(x) = u(x)y_h(x) \ \text{(h = homogênea)} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}y_h + u\dfrac{dy_h}{dx} \end{cases}$$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

- Redutível à linear

$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = y^n Q(x);\ n \neq 0\ e\ n \neq 1$

$y^{-n}\dfrac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$

Substituição de variável

$y^{-n+1} = z \rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$ ou

$y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx}$

A equação com esta substituição fica linear em z

$\dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$; resolver a Equação Diferencial em z e voltar para y.

Fonte: Livro EDO e Transformada de Laplace, Laudares et al., 2017, p.38.

A metodologia 3 trata a resolução de equações diferenciais exatas ou de diferencia total. É iniciada com um exemplo e explanação dos passos que serão seguidos, novamente, observa-se a busca pela diversificação da linguagem, optando pela alternativa de escrita mais objetiva.

O método 4, denominado resolução de equações diferenciais lineares, traz duas definições explicadas de forma detalhada, seguidas de exemplos e uma nova sequência de resolução organizada por passos e plotadas em esquemas gráficos. Passos estes que são descritos verbalmente e com auxílio de equações e simbologias matemáticas. Percebe-se que não há uma predominância de teoremas.

A última metodologia exposta no capítulo segundo é a Resolução de equação diferencial de Bernoulli. Novamente, os autores optam pela objetividade e simplicidade, deixando no início a definição e os cinco passos para alcançar a resolução. Em seguida, é apresentado um quadro com explanação detalhada da resolução.

Na seção final do capítulo em questão, se apresenta uma lista de "exercícios propostos" com indicação de qual metodologia será utilizada, o que pode ser visto como uma forma de estímulo ao estudante, e outra lista particular na qual se indica a aplicação de vários métodos para resolução.

Resoluções de problemas geométricos e físicos são o tema principal do capítulo 3 da obra. Neste capítulo, predomina-se a explicação de situações-problema, as quais são expostas através de diversas representações. Fazem-se presentes esquemas gráficos, organização do raciocínio por listas de passos, gráficos, tabelas, além dos tradicionais verbetes e teoremas matemáticos.

Outro tópico do capítulo são os campos de direções que, em outras obras, são expostos apenas através de equações e gráficos, diferentemente desta, que utiliza, além dessas duas representações, tabelas numéricas, sequência de passos, esquemas e construção textual do conceito. Certamente, a exploração dessas diferentes formas de representação impactam na significação didática.

O quarto capítulo expõe a "resolução de problemas de fenômenos físicos com equações diferenciais de 1ª ordem". Adotando um nível de detalhamento elevado, há inicialmente, exposições sobre:

- Conceito de fenômenos
- Matematização de fenômenos
- Metodologia de resolução de problemas com fenômenos
- Técnicas de representação e interpretação de problemas
- Aplicações à Física e demais disciplinas tecnológicas

Após o registro teórico destes tópicos, os autores revelam uma sequência de resolução de problemas de fenômenos físicos com EDO. Tal sequência foi sintetizada em uma lista de passos, que, segundo os autores, podem variar em função do problema que é trabalhado.

Problemas resolvidos foram postos como exemplos, deve-se ressaltar que alguns deles buscam a interatividade com o leitor, que é induzido a registrar suas observações em certos pontos do capítulo. Os modelos em questão foram resolvidos de forma detalhada e com utilização de múltiplas linguagens, os gráficos das equações solução foram plotados e, após isso, foi solicitado ao estudante um texto sobre o entendimento do fenômeno, com a intenção de o fazer refletir sobre aquele procedimento que acabou de estudar. Outro ponto que se ressalta é a multidisciplinaridade dos problemas físicos, explora-se: eletricidade, termodinâmica, mistura, crescimento exponencial, crescimento populacional, entre outros.

Na seção que encerra o capítulo, há uma síntese dos problemas de fenômenos físicos com equações diferenciais de 1ª ordem. Os autores novamente trabalham com a exposição de um esquema exclusivo que organiza as equações base dos fenômenos físicos. E, por fim, apresenta-se os problemas propostos, situações de cinco tipos diferentes que exigem do leitor, praticar a metodologia presente no livro. À exemplo da primeira obra examinada, esta registra as respostas de todos os exercícios ao final do livro.

3.5 Considerações sobre a análise dos Livros-texto

Apresenta-se aqui as considerações do pesquisador e o quadro comparativo a propósito dos quatro o livros analisados. A primeira obra, dos autores Boyce e DiPrima, apresenta relatos históricos sobre a evolução do tópico Equações Diferenciais, há uma preocupação dos autores em utilizar diferentes formas de abordagem e oferecer estímulos aos leitores. Por outro lado, observou-se que a exploração de ferramentas gráficas e linguagens semióticas não foram tão significativa quanto poderia. Além disso, foi visto a repetição de exercícios com ênfase em uma mesma técnica de resolução, dando base aos dois principais pontos negativos do livro em questão.

A segunda análise foi dada sobre a obra de Zill e Cullen, denominada Equações Diferenciais. O livro traz o conteúdo dividido por tópicos, e uma característica didática semelhante à obra de Boyce e DiPrima, entretando, se difere por registrar exemplos mais ricos, melhor contextualização dos problemas físicos, maior número e melhores ilustrações, além de uma exploração mais intensa dos recursos gráficos. Estes pontos se destacam mais quando leva-se em consideração que essa obra foi escrita a mais tempo que a primeira. A crítica principal vai para a metodologia dos exercícios, que é voltada para a repetição intensa de modelos semelhança alta.

A obra de Stewart se destaca muito das demais, principalmente pela utilização de diversas ferramentas tecnológicas. Sua proposta de diversificação ensino parte de uma diversificação de abordagens, utilização de várias formas de linguagens alcançam um patamar diferente de didática. Destaca-se também a interação com a computação, a utilização de estímulos, sugestões de utilização de calculadoras gráficas e outros dispositivos móveis.

O quarto livro analisado, se trata do livro-base desta pesquisa, que registra uma inovadora forma de expor o tema EDO. A representação dos exemplos de forma compacta em quadros e utilizando diferentes abordagens é o seu principal ponto forte. Entretanto, essa obra ainda explora recursos tecnológicos, gráficos diversos, e uma interessante proposta didática para o ensino da resolução de problemas físicos envolvendo EDO. Não há repetição de exemplos semelhantes e há uma diversificação rica de modelos. A sugestão de reflexão pós resolução é positiva.

Um resumo da análise dos quatro livros-texto pode ser visto no quadro a seguir:

Quadro 8: análise dos livros-texto.

Livro / Autores / Item Analisado	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4
	Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.	Equações Diferenciais	Cálculo	Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace.
	William E. Boyce Richard C. DiPrima.	Dennis G. Zill Michael R. Cullen	James Stewart	João B. Laudares Dimas F. de Miranda Júlio P.C. Reis Saulo Furletti
Diversificação de abordagens	A	A	A	A
Utilização de estímulos	A	D	A	A
Problemas com situações reais	A	A	A	A
Exposição leve de teoremas	D	D	A	A
Exploração de recursos gráficos	C	B	A	A
Ilustrações e tabelas	D	A	B	A
Diversificação de exercícios	D	D	A	A
Recursos tecnológicos	C	B	A	A

Legenda:

A: Forte presença do item no livro-texto.

B: Pouca presença do item no livro-texto.

C: Quase nenhuma presença do item no livro-texto.

D: Nenhuma presença do item no livro-texto.

4 METODOLOGIA

Para pesquisar precisa-se confrontar dados, buscar evidências, comparar as informações adquiridas sobre determinado tema com o conhecimento teórico sobre o mesmo. Essa comparação não é dada pronta, está fixada daquilo que intriga o pesquisador, que é o problema, fruto este da inquietação ou curiosidade relacionada à realidade como ela se apresenta.

Em Educação Matemática, o ensino está ligado às técnicas de observação e reflexão em constante transformação na pesquisa. O contato com estudantes é um terreno fértil de objetos de pesquisa, de conteúdos e comportamentos que geram inquietações particulares, que podem levar o professor para o status de pesquisador. Não há ensino sem pesquisa e

> pesquisa sem ensino. Esses que fazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino contínuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade. (FREIRE 1996, p. 32)

4.1 Classificação da Pesquisa

A pesquisa apresentada, se enquadra no grupo das pesquisas qualitativas, pois, segundo D'Ambrósio, as pesquisas qualitativas mantêm o foco no indivíduo com suas particularidades, analisando o seu comportamento diante do ambiente natural e sociocultural. Esse tipo de pesquisa também é chamado de etnográfica ou participante, inquisitiva ou naturalística (D'AMBROSIO, 2012).

Neste tipo de pesquisa, professores e estudantes podem ser sujeitos ou objetos de pesquisa. O pesquisador, neste tipo de pesquisa toma o papel de observador, recorrendo as informações, conhecimentos e experiências que já teve, como auxiliares no processo de compreensão do fenômeno em investigação.

Optou-se pela pesquisa de caráter qualitativa para obtenção dos dados de forma descritiva, através de aplicação de atividades, alcançando assim um contato direto com o objeto de pesquisa. Entretanto, essa pesquisa possui muitas vertentes da pesquisa quantitativa, uma delas é a utilização da técnica de pesquisa experimental, grupo de controle. Contudo, pode-se afirmar que a pesquisa aqui presente é mista, com sua essência em pesquisa qualitativa. A análise dos dados permitirá inferir sobre o ambiente, a metodologia de execução das atividades propostas e interpretar os resultados.

Optou-se pela transposição da técnica da análise de grupos de controle, comum das pesquisas experimentais quantitativas, para ser a técnica desta pesquisa qualitativa.

4.2 Pesquisa Experimental: grupos controle

De modo geral, a pesquisa polo experimento traz condições de uma boa análise científica. A pesquisa experimental determina um objeto de estudo e partir daí, seleciona as variáveis que seriam capazes de influenciá-la, define as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto. (GIL, 2002).

A pesquisa experimental requer controle e observação, que é posto por Gonsalves (2003):

> Pesquisa experimental é aquela que se refere a um fenômeno que é produzido de forma controlada, submetendo os fatos à experimentação (verificação), buscando, a partir daí, evidenciar as relações entre os fatos e as teorias. Herança do positivismo sociológico, esse tipo de pesquisa exige sua observação sistemática dos resultados para estabelecer correlações entre os efeitos e causas. (GONSALVES, 2003, p. 66).

Segundo Gil (2002), embora seja difícil realizar pesquisas experimentais com objetos sociais (pessoas, grupos ou instituições), é possível, e não há necessidade de ser manipulada em laboratórios, ela pode ocorrer em qualquer lugar, desde que apresente as propriedades:

a) **manipulação**: precisa ter algo para manipular pelo menos uma das características dos elementos estudados.

b) **controle:** o pesquisador precisa introduzir um ou mais controles na situação experimental, sobretudo, criando um grupo de controle.

c) **distribuição aleatória**: a designação dos elementos para participar dos grupos de controle precisa ser feita aleatoriamente.

Ao se trabalhar com grupo de controle, ou seja, pesquisa experimental, é comum que o pesquisador tente controlar todos os fatores, exceto a variável de tratamento (ou variável experimental). Partindo do pressuposto que há sucesso ao se controlar os fatores extrínsecos, então, a pesquisa pode presumir que as mudanças observadas na variável dependente, são devidas à variável independente.

A pesquisa experimental constitui o delineamento com prestígio nos meios científicos. Consiste essencialmente em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis capazes de influenciá-lo e definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto. Trata-se, portanto, de uma pesquisa em que o pesquisador é um agente ativo, e não um observador passivo (GIL, 2002).

Moreira e Caleffe exemplificam e explicam as pesquisas experimentais da seguinte forma:

> As pesquisas experimentais nas escolas podem revelar causa e efeito e conhecimento que nos capacita a predizer e controlar eventos. A metodologia clássica do experimento é: dois ou mais grupos são selecionados aleatoriamente. Esses grupos, digamos grupo A e grupo B, recebem diferentes tratamentos. Ao grupo A poderiam ser ministradas aulas tradicionais em uma determinada disciplina, enquanto o grupo B estaria fazendo amplo uso de computadores. Após um tempo, os dois grupos são testados para verificar se ocorreram diferenças na aprendizagem. Se forem encontradas diferenças entre os grupos, diremos que as diferenças são devidas aos tratamentos. A pesquisa experimental é cuidadosamente delineada para controlar todas as variáveis, exceto aquelas variáveis cujas relações estão sendo exploradas. (MOREIRA e CALEFFE, 2008, p. 78).

A partir de Moreira e Caleffe, como se tem explicado na citação literal, é permitido aplicar as categorias da pesquisa experimental na Educação Matemática, com parâmetros ou características analíticas da pesquisa experimental a partir de grupos de controle. Essa prática consiste em analisar o desempenho de dois grupos de indivíduos, escolhidos de forma aleatória ou não, porém, de mesmo nível universitário.

A pesquisa em questão se baseou em categorias de dois grupos de controle, um grupo de alunos que trabalhou com o método tradicional de ensino de EDO e outro grupo que já estudava dentro da metodologia por passos e análises de modelos de equações e sua representação gráfica junto à resolução da EDO. Aos dois grupos aplicou-se uma atividade de resolução de um problema de fenômeno físico que envolveu em sua resolução, Equações Diferenciais Ordinárias; o tempo disponibilizado para resolução da atividade é similar para ambos os grupos, entretanto, houve variação nas abordagens e posteriormente avaliou-se o desempenho dos grupos.

A aleatoriedade se dá devido ao fato de não se ter escolhido alunos específicos para a participação. Além do pesquisador desconhecer todos eles, os discentes foram convidados e embora a maioria tenha optado pela interação com a atividade, outros agradeceram a oportunidade.

4.3 O professor e a criação de atividades

Segundo Barros Filho (2012), o papel do professor consiste em estabelecer condições para os alunos adquiram conhecimentos, concedendo-lhes um senso de autonomia e de crítica, além disso, o aluno tem papel ativo na sua aprendizagem, deve participar de investigações e de resolução de problemas.

Ao desenvolver sua prática educativa, um professor faz uso da habilidade de desenvolver problemas apropriados para o nível em que se encontram seus discentes. Nessa pesquisa, essa habilidade foi aplicada, uma vez que se fez necessária a utilização de atividades para coletar os dados, essas foram escolhidas com base no objeto de estudo, no público alvo e foram adaptadas aos desenhos das abordagens para comparação.

O aparecimento de um problema se dá quando procuramos maneiras ou meios para conseguir um objetivo imediato, ocupando a maioria de nossa mente com buscas constantes de uma solução satisfatória (PÓLYA, 1995).

A dificuldade na resolução de algumas atividades é percebida logo após o momento em que se apresenta, portanto, vê-se que o método de apresentação está totalmente ligado ao sucesso da ação. Além disso, resolver problemas requer, além do conhecimento, uma certa prática, citada no trecho a seguir:

> Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática.(...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom ‘resolvedor de problemas’, tem que resolver problemas. (PÓLYA, 1995, p. 65).

Portanto, o educador deve insistir com a aplicação constante de atividades problema, buscando não ser displicente na aplicação de fórmulas e processos operatórios. Isto posto, cita-se novamente um dos objetivos dessa pesquisa, que é a busca de uma metodologia significativa para resolução de problemas físicos envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias.

4.3.1 Criação das Atividades / Produto

O planejamento desta pesquisa, desde a sua concepção, traz como base o livro-texto Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace: análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas, e a proposta fundamental está em testar a metodologia de ensino de Equações Diferenciais Ordinárias presente em tal livro. Esse texto didático foi desenvolvido durante 5 anos dentro de um grupo de pesquisa (GRUPIMEM) até chegar à sua primeira edição impressa.

O produto dessa dissertação foi elaborado seguindo a mesma abordagem de ensino do livro-base, que consiste em uma abordagem operacional do cálculo da solução de uma EDO. Buscou-se alcançar uma sequência didática organizada por etapas que proporcionam a consecução dos cálculos e a interpretação dos modelos obtidos, tanto na forma de equações, quanto na forma de gráficos, com uma didática diversificada para o ensino e aprendizagem de EDOs. A resolução da EDO, foi obtida pelo desenvolvimento de um modelo matemático, que se configura como um problemas de fenômeno físico.

Apresenta-se, a seguir, o conceito de um fenômeno físico a ser investigado, estruturado por um problema determinado, isto configurando uma atividade.

Um fenômeno físico pode ser caracterizado através da manifestação de mudanças geradas por um agente físico, químico, social, ou outro que esteja inserido num processamento dinâmico. Observa-se a evolução deste fenômeno, através de movimentos, experiências e percepções. Os termos a seguir caracterizam a concepção de um fenômeno:

- Ação
- Movimento
- Variação
- Mudança (LAUDADES, et. al. 2017).

Ainda segundo estes autores, um fenômeno é um objeto que acontece no espaço, no tempo, que pode ser dimensionado por um observador, em outras palavras, é um objeto que depende de ação, está inserido em um processo de interações. O fenômeno pode ser **natural** ou **artificial**.

- **Fenômeno natural:** aquele que é provocado pela natureza física, que não depende de ação humana qualquer para existir, por exemplo, a ação dos ventos, a força gravitacional, as perdas e ganhos gerados pelo decorrer do tempo, os movimentos dos rios.

- **Fenômeno artificial:** aquele que é provocado pelo ser humano, cuja existência é dependente da intervenção do homem, por exemplo, o movimento de motores, energia das baterias, aquecimento de resistências, geração de energia utilizando a força dos ventos.

Com base nestas definições, escolheu-se um problema para ser aplicado aos alunos participantes da pesquisa realizada, um problema envolvendo um fenômeno físico natural, ou seja, que não depende da ação humana para acontecer. O fenômeno em questão consiste do decaimento de massa, que acontece de forma exponencial, ocasionado simplesmente pela ação do tempo. Contudo, determinou-se um enunciado que servirá de ponto de partida para a resolução das atividades do produto.

A resolução do problema do fenômeno físico selecionado foi estruturado em etapas (atividades), para trazer uma melhor compreensão do desenvolvimento e performance dos estudantes.

A **primeira atividade** do produto desta pesquisa, consiste em matematizar o fenômeno descrito no enunciado, para isso, seria necessário ter todo o conhecimento prévio acerca de equações diferenciais, que foi exposto no capítulo anterior.

O enunciado elaborado determina um fenômeno que é um processo natural em ação, que é perceptível pela observação. Contudo, para chegar aos parâmetros divulgados no tópico seria necessária uma observação analítica e com utilização de instrumentação avançada, o que não será necessário pelo fato de os parâmetros já estarem determinados no enunciado. Em outros termos, não foi exigida a presença do estudante no campo empírico para determinação da lei física, uma vez que esta foi dada no enunciado.

Entretanto, traduzir o processo inerente ao fenômeno em uma Linguagem Matemática simbólica constitui o que é chamado aqui de *matematizar o fenômeno físico*.

Nesta primeira etapa do problema escolhido, buscou-se exigir do pesquisado, a ação analítica sobre o enunciado, registrando o que se percebe somente através da leitura e observação do que se lê. Além do registro, se faz importante determinar e nomear as grandezas (tempo, massa, volume, velocidade, etc.) presentes no enunciado do problema, e que serão trabalhadas nas etapas subsequentes.

Registra-se no Quadro 9 o enunciado do problema físico aplicado e as questões da primeira etapa da atividade.

Quadro 9: enunciado e síntese das questões da etapa 1 do produto da pesquisa.

Enunciado: O elemento químico “radium” se decompõe naturalmente em proporção direta à quantidade presente, ou seja, sua velocidade de decomposição (variação da massa no tempo) é diretamente proporcional à quantidade presente. A massa inicial da amostra é de 200g. O elemento químico em questão, leva 250 anos para decompor 10% da sua massa. Faça o que se pede nos passos a seguir:
Atividade 1: Matematização da Lei Física a) Identifique as grandezas envolvidas no problema: b) Determinar as variáveis. Utilizando variáveis, nomeie as grandezas envolvidas no problema: c) Identifique as variáveis independentes e as dependentes: d) Expresse a lei física, matematicamente, a partir de uma derivada:

Fonte: Dados da pesquisa.

As duas últimas questões da etapa 1 sugerem a determinação de dependência de cada variável presente no fenômeno, e o registro da lei física que rege o problema.

Segundo Laudares et. al, (2017, p.97), “lei física: é expressa, matematicamente, pela análise da correlação das variáveis envolvidas e dos parâmetros”.

A determinação de dependência se faz importante porque exige interpretação e entendimento do que se lê no tópico expresso. Já a lei física é fundamenta para a continuidade da resolução, por isso, elaborou-se uma estratégia para não quebrar tal continuidade, nomeia-se aqui de estímulo.

O estímulo consiste na intervenção do pesquisador que, naquele momento de demanda do aluno, sai do papel de observador e passa a ser um facilitador das conjecturas criadas pelos próprios discentes. Guiando de maneira sutil o pensamento e criando questões que excitam provocações de pensamentos matemáticos ligados ao objeto de estudo.

Caso o aluno, mesmo com estímulo do pesquisador, não conseguisse determinar a lei física do problema proposto, essa resposta foi entregue para que fosse possível a continuidade, a partir do estímulo, registra-se toda intervenção do facilitador para ser objeto de análise em um segundo momento.

A **segunda atividade** da pesquisa também é fundamental para entendimento, para encontrar a solução da equação diferencial ordinária originada da lei física. Essa tarefa consiste na identificação das condições iniciais e de contorno, ambos presentes no enunciado. Com essas informações extraídas, pode-se partir de uma solução genérica e chegar a uma solução particular.

Quadro 10: síntese da etapa 2 do produto da pesquisa.

Atividade 2: Condições dadas Identifique e expresse a condição inicial e a condição de contorno: Ou seja, verificar e registrar, qual é a quantidade de massa do elemento “radium”, no tempo t = 0 anos? E no tempo t = 250 anos?

Fonte: O autor.

As condições iniciais são entendidas como aquelas que podem ser extraídas de um instante determinado. A conotação “inicial” é sugerida visto que a variável independente, geralmente é a grandeza “tempo”, logo, a condição inicial, geralmente será aquele no instante t = 0 (tempo igual à zero), vale lembrar que a unidade de medida é extraída da situação, podendo ser horas, minutos, anos, dias, meses, etc.

As condições de contorno são entendidas como aquelas situações onde a variável independente possui valores diferentes da condição inicial, geralmente são as condições para um tempo diferente de zero. Podendo um mesmo problema físico apresentar várias condições de contorno em um mesmo enunciado. Extraindo-se as condições inicias e as condições de contorno, configura-se uma PVC (problema de valor inicial) e um PVC (problema de valores de contorno).

A arquitetura elaborada, ou o design, traz uma **terceira atividade,** que tem o seu foco voltado para a matemática operacional, com objetivo testar a capacidade de desenvolvimento de cálculo do pesquisado. Verificando sua habilidade de utilização de processos convencionais, tais como o domínio das propriedades logarítmicas, a manipulação de derivadas e o entendimento das taxas de variação.

O pensamento matemático avançado se faz necessário nesta etapa do processo, uma vez que o estudante está submetido à uma situação que exigirá, entre outras atitudes, a análise, a definição, a intuição, o domínio sobre o cálculo integral, a utilização de simbologias e a visualização da resolução. A abstração, como já registrado nesta dissertação, é parte do pensamento matemático avançado e está incluso em diversos pontos dessa etapa.

Quadro 11: síntese da etapa 3 do produto da pesquisa.

Atividade 3: Determinação da massa em função do tempo
a) Resolva a equação diferencial originada da lei física:
b) Aplique as condições iniciais e de contorno para determinar a equação:

Fonte: O autor.

Na primeira parte (letra a), exige-se o desenvolvimento da equação diferencial ordinária, neste caso, foi determinado um problema que envolveria na sua solução uma EDO de primeira ordem.

Na segunda parte (letra b), o aluno deveria aplicar os dados registrados na etapa 2, nota-se aqui a ligação, o envolvimento e a sequência que fora projetada para a resolução deste problema. O sucesso nesta segunda parte implicaria na determinação de equações relevantes, já trazendo respostas concretas para parte do problema físico em questão. Em contrapartida, o insucesso, desconhecimento ou má interpretação da etapa anterior prejudicaria de forma direta a resolução desta.

A continuidade da resolução leva o estudante ao questionamento sobre um meio termo. Uma vez que a **quarta atividade** questiona o discente sobre o cálculo da meia-vida do elemento Radium. Vista a determinação da equação geral do problema, não seria de grande dificuldade essa resolução, entretanto, lembra-se que o pensamento matemático avançado se faz importante para evolução do processo.

O objetivo desta etapa foi, além de gerar mais parâmetros e informações para os processos subsequentes, avaliar o raciocínio lógico do estudante, pois a essa altura, para dar andamento neste procedimento bastaria um exame sobre as questões anteriores, e uma sintetização de cálculo através de raciocínio lógico. A partir daí, a solução estaria limitada à processos algébricos básicos.

Quadro 12: síntese da etapa 4 do produto da pesquisa.

Atividade 4: cálculo da meia-vida do elemento Utilizando a equação da atividade 3, calcule o tempo (tempo expresso em anos) para decomposição da metade da massa inicial (meia-vida) do elemento “radium”.

Fonte: O autor.

O fenômeno, sendo um processo contínuo de variação com movimento, se manifesta por uma configuração dimensional, ou seja, que pode ser medida, pode ser modelada por uma leitura caracterizada pela utilização das unidades de medida. Em outros termos, pode-se dizer que os fenômenos se oferecem à medição, podendo ser expressos qualitativamente ou quantitativamente, através dos modelos medidos (LAUDARES et.al., 2017).

Na **quinta atividade,** pede-se aos estudantes a determinação das equações definidoras do problema, ou seja, as equações modelo. Em outros termos, seria o mesmo que pedir “as relações matemáticas expressas por uma variável independente (que, neste caso, seria o tempo) e outras variáveis dependentes” (neste caso, massa e velocidade).

De acordo com Laudares et. al. (2017), o fenômeno pode ser matematizado, também, utilizando as derivadas das variáveis que definem a variação e o movimento, expressando em cada situação problema, um tipo de derivada, ou velocidade.

Quadro 13: síntese da etapa 5 do produto da pesquisa.

Atividade 5: formulação de modelos

Equações definidoras do fenômeno

Formule os modelos de equações que se pede, e, substitua nos modelos o valor da constante encontrada.

a) Velocidade de decomposição em função da massa: (EQUAÇÃO 1)
b) Velocidade de decomposição da massa em função do tempo: (EQUAÇÃO 2)
c) Variação da massa em função do tempo: (EQUAÇÃO 3)

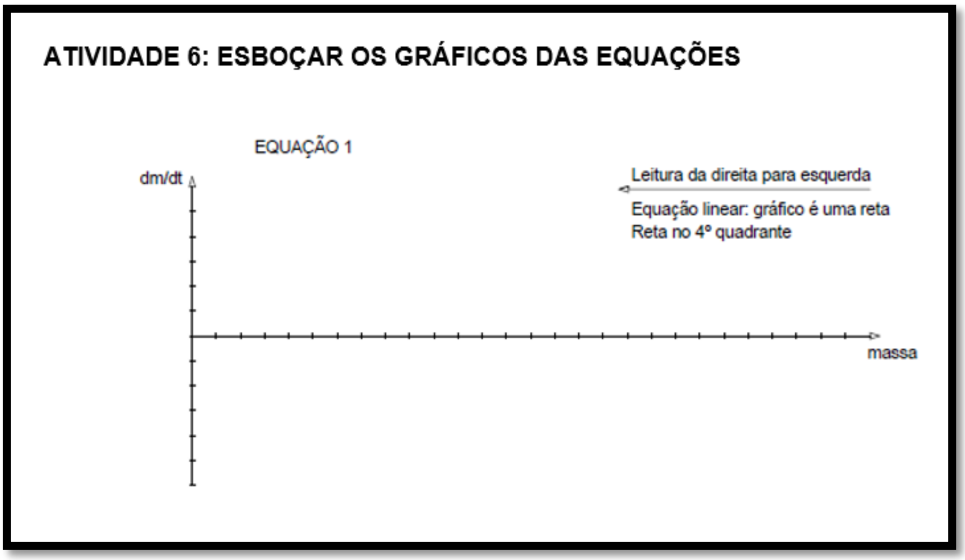
Fonte: O autor.

Buscou-se, na **sexta atividade,** trabalhar as noções de visualização dos alunos, por isso, nesta etapa o produto envolve o desenvolvimento do pensamento geométrico, o trabalho com as diversas formas de representações e a abstração de transportar uma informação simbólica para uma informação gráfica bidimensional. Sabe-se que a geometria é bastante importante no processo cognitivo, podendo reforçar com uma citação de Almouloud.

> A geometria envolve três formas de processo cognitivo que preenchem específicas funções epistemológicas: visualização para exploração heurística de uma situação complexa; construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo em que as ações realizadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados; raciocínio, que é o processo que conduz a prova e explicação. (ALMOULOUD, 2004, p. 98).

Uma vez que as equações foram modeladas na atividade anterior, as elaborações dos gráficos seriam questão de conhecimento matemático e maturidade matemática suficiente para ter uma visão geométrica capaz de desenhar os gráficos das equações. Entretanto, por se tratar de um processo conhecidamente complexo, projetamos as respostas dos gráficos para disponibilizar, no caso de insucesso do discente. A disponibilidade das respostas dos gráficos torna possível a análise dos mesmos, é nesta linha de raciocínio que o método de ensino do livro-base busca trabalhar, por acreditar no sucesso do processo de ensino-aprendizagem.

Figura 10: fragmento que sintetiza a questão da etapa 6 do produto da pesquisa.



Fonte: Atividade produto desta pesquisa, elaborado pelo autor.

A Figura 10 ilustra um dos gráficos solicitados na atividade 6 do produto, entretanto, a atividade solicita outros dois gráficos, que são exatamente a representação das três equações modelo definidoras do fenômeno que seriam encontradas na atividade número 6.

A Matemática possui instrumentos simbólicos adequados para modelar o fenômeno físico estudado, podendo descrevê-los de forma sintética, ainda assim, é importante lembrar que há outras formas de se trabalhar a explicação, e acredita-se que essas alternativas devem ser melhor exploradas dentro de sala de aula. Uma delas é a descrição do processo com a utilização de palavras, e não simbologias, expressando-o de maneira natural, que pode ser oral ou escrita.

Pensando nesta mesma linha e indo ao encontro da metodologia de ensino do livro-base desta pesquisa, projeta-se as duas últimas atividades do produto, que têm como objetivo buscar os registros que corroboram com o entendimento dos discentes sobre todo o fenômeno físico estudado.

A **sétima atividade** consiste em um questionamento sobre situações específicas do fenômeno estudado. Algumas respostam poderiam ser extraídas dos gráficos e outras dependiam diretamente de um exame sobre a resolução e a interpretação do problema proposto.

Quadro 14: síntese da etapa 7 do produto da pesquisa.

Atividade 7: questionário para análise descritiva do fenômeno a) Por que o gráfico dm/dt é uma reta? b) Quanto o tempo cresce, no gráfico dm/dt, o que ocorre com a velocidade de decomposição? c) Analise os gráficos de dm/dt quanto à variação de sinal (positivo e negativo) e de valores. d) Dê o valor da velocidade de decomposição no tempo inicial nos gráficos dm/dt. e) Dê o comportamento da variação de massa em relação ao tempo, no gráfico, para um tempo crescente. f) Lendo todos os gráficos, para m=1,5kg, verifique o tempo e a velocidade de decomposição. g) Determine o valor mínimo da massa para o um tempo crescente. h) Em qual tempo a massa é a maior? i) A massa pode chegar a ser 0 (zero) com o passar do tempo? j) A massa poderá ser maior do que a quantidade no tempo t=0 anos?

Fonte: O autor.

Ao responder as 10 perguntas do questionário, o aluno estaria se preparando para a oitava questão.

A **oitava e última atividade** consiste na descrição sintética do fenômeno físico estudado. Um pequeno texto poderia bastar para explicar o que se entendeu do problema como um todo.

Quadro 15: síntese da etapa 8 do produto da pesquisa.

Atividade 8: descrição na forma textual Com base nas respostas das questões acima, descreva num texto, de forma detalhada, o seu entendimento do fenômeno do problema, comparando os gráficos e as equações. (Mínimo de 10 linhas)

Fonte: O autor.

As elaborações de um texto ao final da execução das atividades colaboram com o pesquisador, no sentido do entendimento do aluno. Compreender o pensamento de um estudante é tarefa complexa e que se torna ainda mais abstrusa quando os dados se limitam à equações, desenhos e simbologias. A expressão por palavras se faz indispensável para esse tipo de análise.

Em síntese pode-se resumir a engenharia deste produto com o que se expressa no Quadro 15. No livro-base da pesquisa os autores dividem a resolução do problema do fenômeno físico em passos, na pesquisa realizada designou-se cada passo como sendo uma atividade.

Quadro 16: Síntese da engenharia do produto, processo de resolução de problemas matemáticos envolvendo fenômenos físicos com cálculo de EDO.

Enunciado:
Apresentação de dados Questões
Processo de resolução:
1ª atividade: matematização da lei física **2ª atividade:** condições iniciais e condições de contorno **3ª atividade:** resolução da equação diferencial ordinária **4ª atividade:** cálculos solicitados, cálculo da meia-vida **5ª atividade:** modelos das equações do fenômeno **6ª atividade:** representação gráficos do fenômeno **7ª atividade:** questionário a atividade desenvolvida **8ª atividade:** descrição sintética do fenômeno através de um texto breve

Fonte: Adaptado de Laudares et. al. (2017, p.98).

5 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DE SEUS RESULTADOS

Registra-se, neste capítulo, a análise quantitativa e qualitativa, bem como os resultados da aplicação das atividades que compõem o produto dessa dissertação. As atividades foram aplicadas na primeira semana do mês de setembro do ano de 2018, o local de aplicação foi a Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), para alunos do ensino superior dos seguintes cursos:

- Engenharia Civil
- Engenharia Elétrica
- Engenharia Mecânica
- Engenharia Química

Figura 11 - Registro das turmas no momento da aplicação da sequência de atividades (produto desta pesquisa)

Fonte: Arquivo pessoal.

A atividade foi aplicada para cada uma das turmas citadas anteriormente, separadamente, e em horários distintos. Cada grupo de alunos teve a mesma disponibilidade de tempo para tentar solucionar as questões, o tempo determinado foi de sessenta minutos. Além disso, tomou-se o cuidado de escolher os estudantes que participaram deste exercício de pesquisa, garantindo que todo eles estivessem em um mesmo momento escolar, cujo momento foi a fase “posterior/recente” do tema Equações Diferenciais Ordinárias do curso de Cálculo, em outros termos, os estudantes estavam inseridos e pautados no mesmo momento do curso de Cálculo.

As turmas de Engenharia Mecânica e Engenharia Química fizeram as atividades no mesmo dia, 3 de setembro de 2018. Já a turma de Engenharia Elétrica fez as atividades no dia seguinte (4 de setembro de 2018), e, a turma de Engenharia Civil executou as atividades no 6 de setembro de 2018. Findando, assim, a aplicação para as quatro turmas ne mesma semana.

Para empregar a técnica de pesquisa experimental ou grupo controle, é fundamental a distinção dos grupos analisados em algum parâmetro. Nesta pesquisa, a diferenciação entre os grupos trabalhados se dá pela metodologia de ensino que estava sendo aplicada a cada um dos grupos. Determinaremos e caracterizaremos a partir deste ponto, os grupos A e B.

- **Grupo A:** Estudantes que trabalharam com a metodologia de ensino de ensino de EDO do livro Equações Diferenciais Ordinárias e Transformada de Laplace (livro-base).

- **Grupo B:** Estudantes que não trabalharam com a metodologia de ensino do livro-base.

Essa separação dos grupos se deu de forma natural, uma vez que os alunos dos cursos de Engenharia Química e Engenharia Mecânica eram alunos de um professor (determinado aqui como PROFESSOR 1), que adotou o livro-base para lecionar o Ensino de EDO. Já os alunos dos cursos de Engenharia Civil e Engenharia Elétrica eram alunos de outros professores (denominados aqui como PROFESSOR 2 e PROFESSOR 3, respectivamente).

5.1 Participantes da pesquisa: separação por turma

A pesquisa foi aplicada para uma população total de 155 estudantes, sendo esse grupo separado nas seguintes turmas:

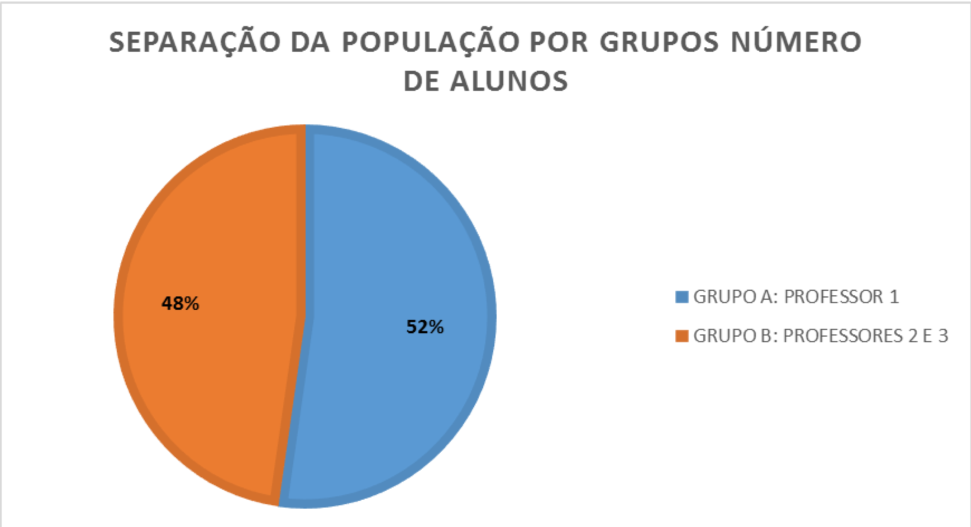
Quadro 17: quantidade de alunos por curso.

Curso	Quantidade de Alunos
Engenharia Civil	30
Engenharia Elétrica	44
Engenharia Mecânica	58
Engenharia Química	23

Fonte: Elaborado pelo autor.

A distribuição acima, por si só, indica apenas a quantidade de alunos de cada curso que participou da pesquisa, entretanto, para se aprofundar nas análises, é importante a separação dessa mesma população por professor, e, consequentemente, por metodologia de ensino, como apresenta-se a seguir:

Figura 12: representação gráfica da população pesquisada, separação por professores.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela representação gráfica acima, pode-se concluir que há um balanceamento quantitativo entre o grupo A e o grupo B, sendo que o grupo A é composto por 81 discentes e o grupo B, por 74.

A partir desta primeira análise toma-se como base das apreciações descritas neste documento, o fato de que, em quantidade de integrantes, os dois conjuntos de estudantes que participaram dessa pesquisa são praticamente iguais, com uma variação delta percentual entre os dois grupos de apenas 9% (considerando o número de integrantes).

Além disso, na intenção de tornar a análise limpa e direta, quando é uma possibilidade, trabalha-se com dados percentuais dos próprios grupos, eliminando assim o fator da diferença numérica entre um grupo e outro.

Antes do próximo tópico, apresenta-se um resumo deste último trecho:

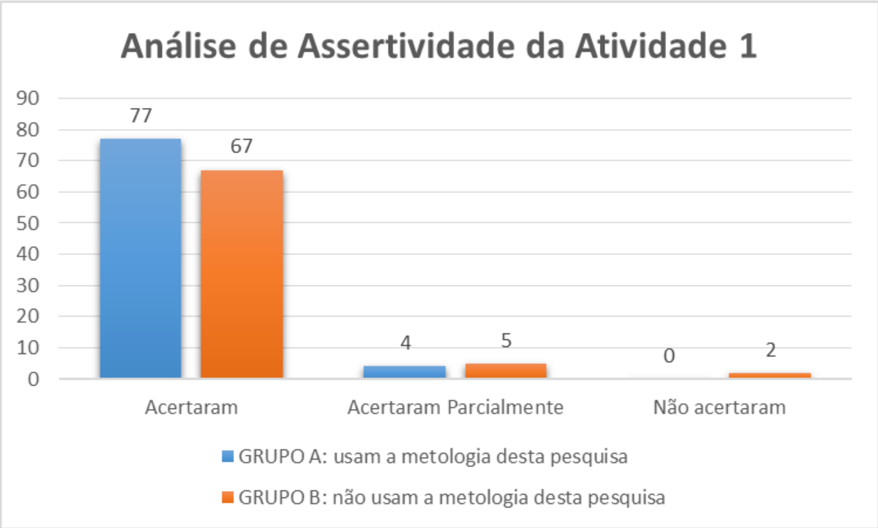
Grupo A: 81 alunos do PROFESSOR 1, grupo este que utiliza a metodologia desta pesquisa nas aulas de EDO.

Grupo B: 74 alunos dos PROFESSORES 2 e 3, grupo este que não utiliza a metodologia desta pesquisa nas aulas de EDO.

5.2 Análise da atividade 1

Limitando a nossa visualização à primeira atividade, que tinha como tarefa principal, encontrar a lei física que está por trás do problema, percebemos uma pequena vantagem em número de acertos do grupo A, os resultados numéricos dessa análise podem ser observados no gráfico a seguir:

Figura 13: representação gráfica da assertividade na atividade 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em termos percentuais pode-se afirmar que:

- 95% do Grupo A teve sucesso na primeira atividade.
- 90% do Grupo B teve sucesso na primeira atividade.

Enquanto nenhum integrante do grupo A errou totalmente a primeira etapa, 2,7% do grupo B errou totalmente a solução da atividade 1.

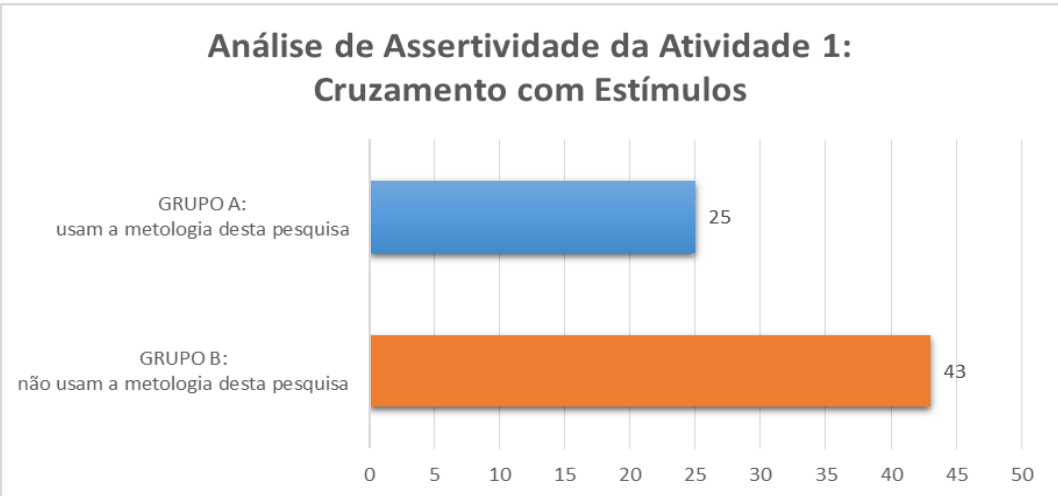
5.3 Análise da primeira da atividade: cruzamento com os estímulos

Os dados da análise anterior indicam que 77 alunos do grupo A e 67 do grupo B acertaram a resolução da primeira atividade. É importante observarmos também a quantidade de estudantes que necessitaram de estímulo para alcançar a resposta correta.

No grupo A, 25 alunos precisaram ser estimulados para continuar, ou seja, 32% dos estudantes que tiveram sucesso nessa etapa, contaram com auxílio do pesquisador.

Já no grupo B, 43 alunos precisaram ser estimulados para encontrar o caminho correto e chegar a solução, em outros termos, 64% dos estudantes que tiveram sucesso nesta atividade, contaram com auxílio do pesquisador. Essa diferença expressiva nos diz que os alunos que adoram a metodologia do livro tiveram mais facilidade em encontrar a lei física no problema aplicado.

Figura 14: representação gráfica da assertividade na atividade 1 – cruzamento com os estímulos distribuídos.

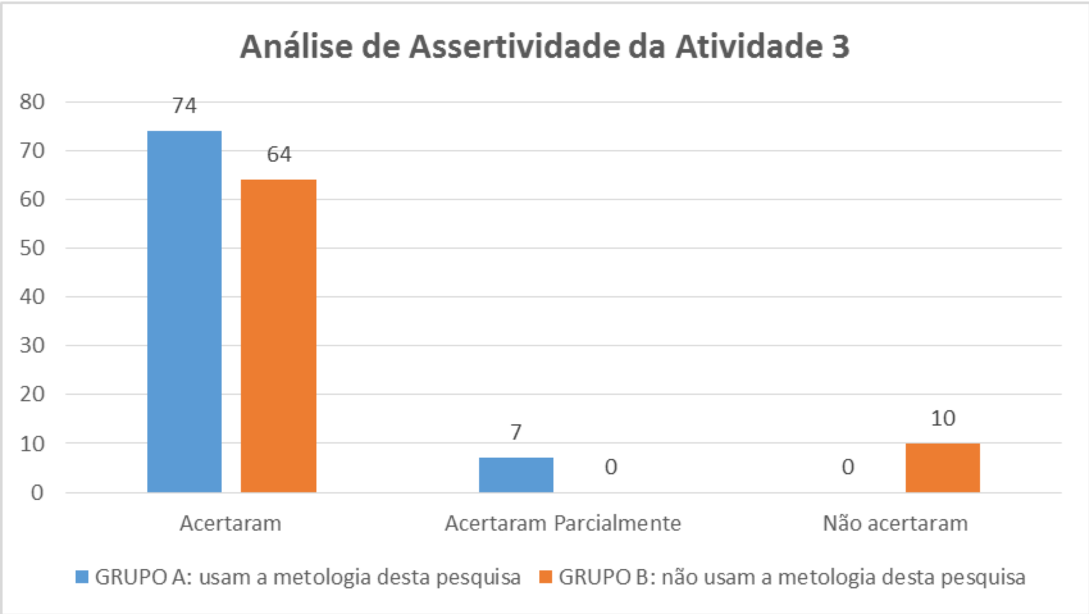


Fonte: Elaborado pelo autor.

5.4 Análise da atividade 3

A terceira atividade do produto tem grande importância, pois nele o estudante necessitou resolver a equação diferencial ordinária, exercendo a habilidade procedimental, partindo da lei física e finalizando com a aplicação das condições iniciais e de contorno, condições estas que foram expressas no enunciado do problema físico e registrado na atividade 2. Analisaremos a seguir o desempenho dos discentes.

Figura 15: representação gráfica da assertividade na atividade 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O índice de sucesso nesta etapa da atividade fora consideravelmente bom em ambos os grupos, nota-se pelo gráfico 4, que a maioria teve sucesso na resolução, entretanto, fazer o cruzamento com a quantidade de estímulos é relevante, pois isso é um indicativo do nível de autonomia, independência e maturidade matemática do pesquisado.

Dos 74 alunos do grupo A, que acertaram a atividade 3, 41% foi estimulado.

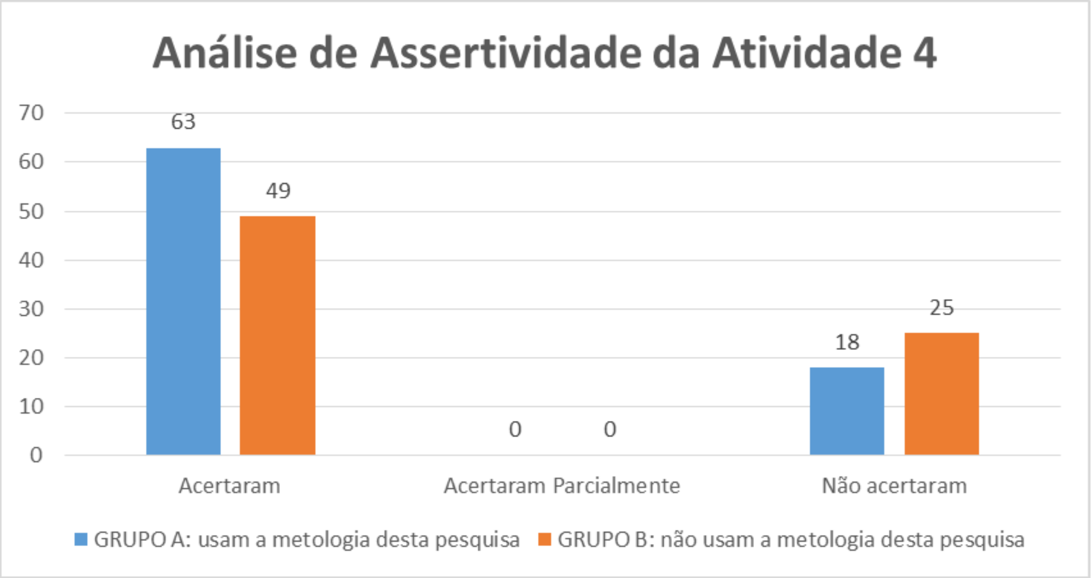
Dos 64 alunos do grupo B, que acertaram a atividade 3, 80% foi estimulado.

Do Grupo B, 10 alunos, mesmo com estímulos, não acertaram a terceira questão.

5.5 Análise da atividade 4

Em problemas de decaimento exponencial, como o problema proposto nesta pesquisa, é muito comum que a observação de questões envolva o cálculo da meia-vida do “elemento” em questão, esse cálculo foi exigido na atividade de número 4 da pesquisa.

Figura 16: representação gráfica da assertividade na atividade 4.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se uma mudança na configuração gráfica desta atividade, se comparado com os anteriores. Nota-se que uma quantidade muito maior de alunos não acertou a questão exposta na quarta etapa. Abaixo apresenta-se o índice de erros por grupos, utilizando dados percentuais.

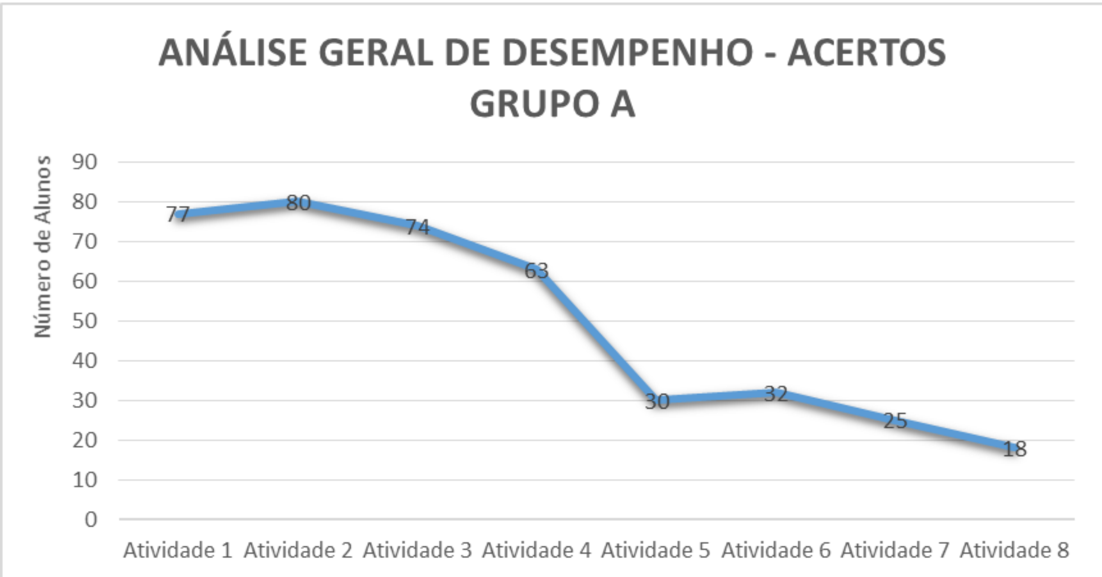
- 22% do grupo A errou a quarta questão.
- 34% do grupo B errou a quarta questão.

Novamente, vemos que os alunos do grupo A se saíram melhor na resolução da questão. Outro ponto interessante é que não registramos nenhum ponto para solução parcial da meia-vida, ou acertaram, ou erraram.

5.6 Análise de desempenho geral do GRUPO A

Considera-se que os dados da análise anterior são sinais para aumentar a atenção para uma possível queda de desempenho na resolução, ou também, um indicador de dificuldade ou lacuna no ensino. Com isso, faz-se importante para o entendimento do indicador anterior e entendimento geral do problema, a análise do desempenho geral dos grupos, esse exame é apresentado na sequência.

Figura 17: representação gráfica do desempenho geral do Grupo A.



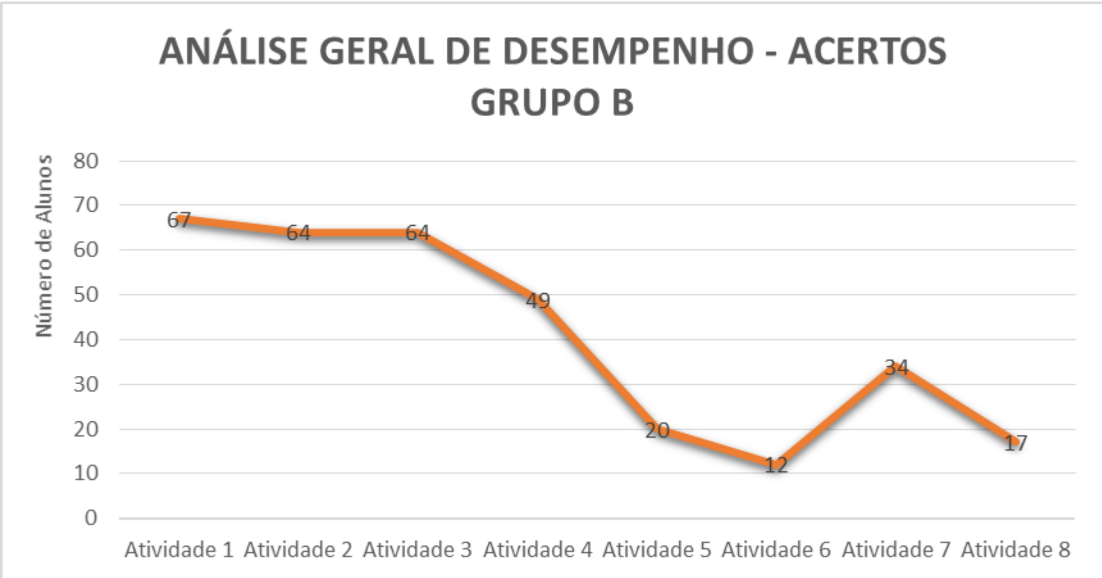
Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela curva eu se apresenta no Gráfico 6, podemos afirmar que o indicador da análise anterior realmente era um ponto de alerta, pois notamos uma forte queda no número de acertos a partir da quarta etapa da atividade. Certamente essa queda deve ser analisada individualmente, entretanto, antes de prosseguir com o exame da curva é relevante verificarmos se essa mesma configuração se repete no grupo B.

5.7 Análise de desempenho geral do GRUPO B

Para melhorar a base do exame da etapa anterior, faz-se necessário a verificação do cenário no Grupo B. portanto, registra-se a seguir os resultados da mesma análise, para o grupo de estudantes que não utilizam a metodologia do livro-base nas aulas de Cálculo.

Figura 18: representação gráfica do desempenho geral do Grupo B.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Verifica-se, pela curva registrada no Gráfico 6, que a mesma situação de queda de desempenho observada no grupo A, acontece também com os alunos do grupo B. Essa confirmação é extraída pela observação dos números e da forte inclinação entre a atividade 4 e a atividade 5 da pesquisa.

O primeiro fator a ser apontado acerca das últimas duas análises é que, independente da metodologia que fora utilizada dentro de sala de aula, os resultados dos estudantes apontam para uma certa dificuldade na atividade 5, dificuldade essa que é muito maior que nas atividades anteriores. Em consonância com o referencial teórico, o problema detectado pode estar ligado a diversas fontes, pretende-se nesta pesquisa encontrar argumentos que ajudem a entender esse problema.

A quinta atividade da pesquisa que foi aplicada consiste em formular os modelos de equações que definem o fenômeno físico presente na questão, entretanto, faremos uma análise dedicada a esse ponto da pesquisa.

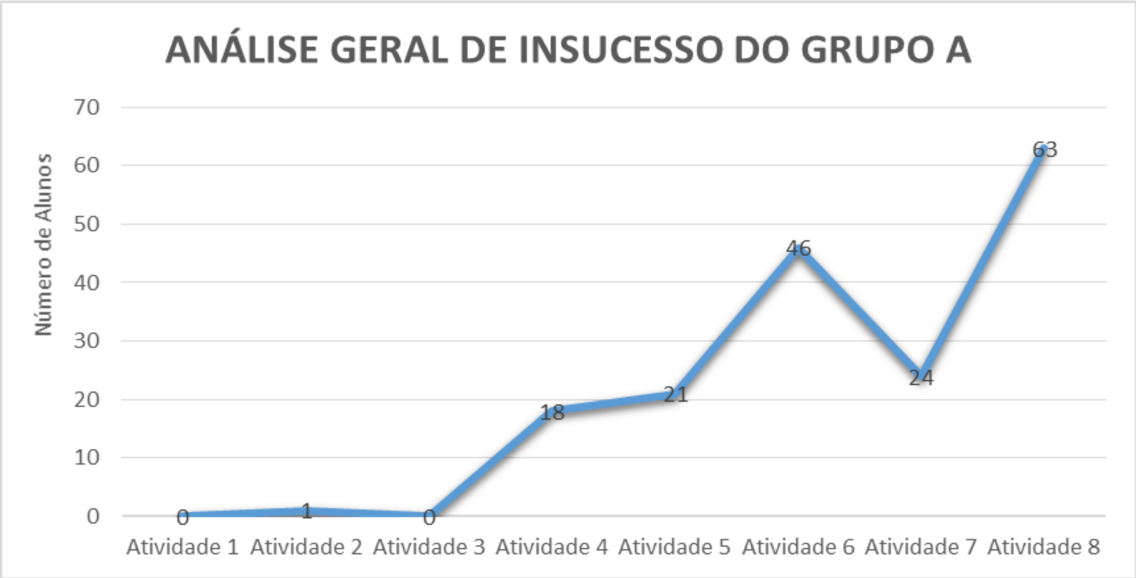
Na atividade 7, embora o sucesso tenha sido baixo nos dois grupos, o número de acertos do grupo B foi superior quando comparado ao grupo A. A quantidade de acertos do grupo B é superior pelo fato dos alunos desde grupo terem apresentado forte dificuldade em elaborar os gráficos (atividade 6), por isso, como estímulo, o pesquisador disponibilizou uma maior quantidade de gráficos prontos, e solicitou ao grupo B que seguissem para a atividade sete, executando somente a interpretação dos gráficos disponibilizados.

A seguir, como elemento complementar dessa análise, registra-se a curva de insucesso dos pesquisados, mantendo a separação por grupos para termos o controle.

5.8 Análise geral do insucesso do GRUPO A

A informação apresentada a seguir, traz a quantidade de alunos que erraram totalmente as questões ou, por algum motivo, deixaram a questão sem resposta. É dado complementar para um exame final posterior.

Figura 19: representação gráfica do insucesso geral do Grupo A.



Fonte: Elaborado pelo autor.

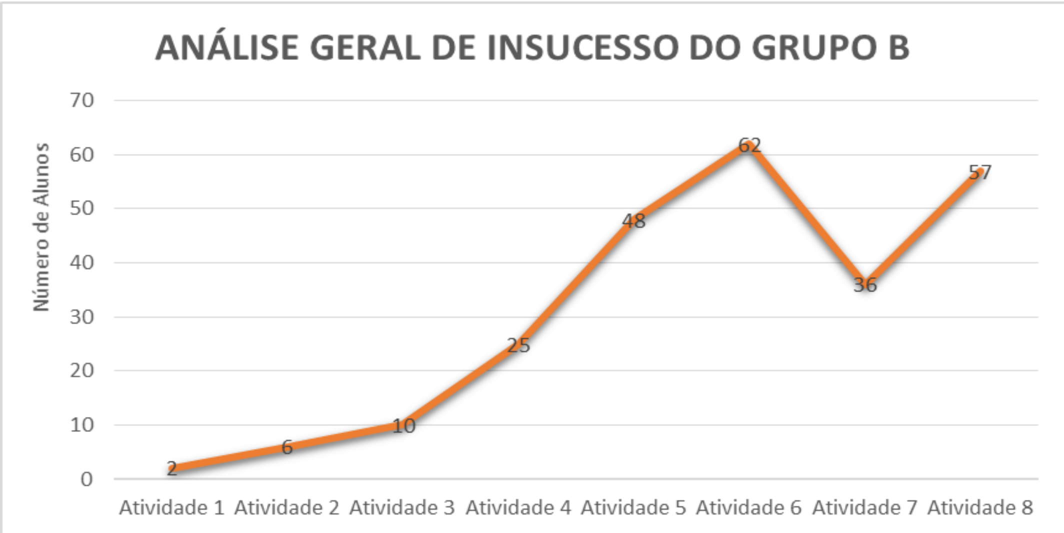
Pela curva que é representada no gráfico da figura 19, nota-se claramente uma elevação acentuada do número de alunos que erraram as questões, da atividade 4 em diante. Pode-se afirmar que, pelo menos, 22% dos estudantes não tiveram sucesso na resolução das propostas após o quarto passo. Vejamos a seguir se o mesmo cenário se faz presente na curva do grupo B, que é formado por alunos que não adotaram o método de ensino no livro-base.

Em segundo lugar, com maior número de erros, é a sexto atividade, esse dado será muito considerado neste trabalho, visto que tal atividade diz respeito à interpretação das equações e elaboração dos gráficos, portanto, dedicaremos um trecho exclusivamente para a análise da etapa 6.

5.9 Análise geral do insucesso do GRUPO B

Registra-se abaixo a quantidade de alunos do grupo B, que não alcançaram o sucesso na resolução de cada atividade aplicada.

Figura 20: representação gráfica do insucesso geral do Grupo B.



Fonte: Elaborado pelo autor.

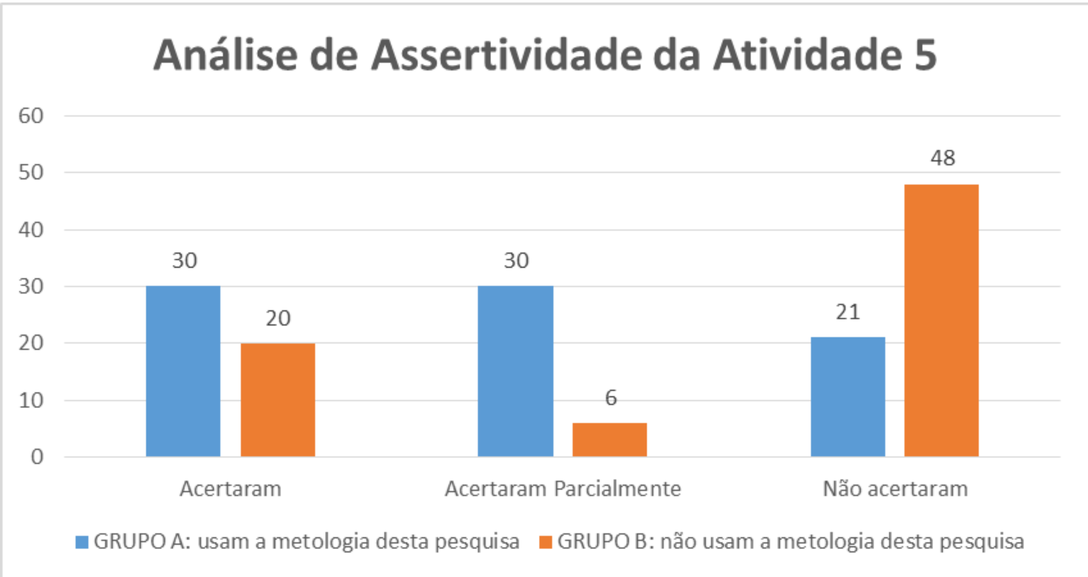
Nota-se uma aguda semelhança entre essa as curvas dos gráficos das figuras 19 e 20, porém, a curva do grupo B inicia uma inclinação mais forte a partir da terceira atividade. Outro ponto interessante, a ser examinado, é que na atividade 5 a quantidade de erros está muito próxima daquela na atividade 6, diferentemente do grupo anterior. Levaremos em consideração esses dados adiante.

Explorando com mais intensidade os dados da curva, verifica-se outra sutil diferença entre os dois grupos, trata-se da etapa cujo o número de insucesso fora maior. No grupo A, o maior ponto de insucesso é o último, o que podemos atribuir também ao tempo de execução, entretanto, no grupo B o ponto de maior dificuldade que se desenhou no gráfico foi a atividade 6, que se trata da elaboração dos gráficos do problema. Devido a este fator também, dedica-se uma análise exclusiva às ultimas atividade da pesquisa.

5.10 Análise da atividade 5

Conforme registrado nas explorações anteriores, a etapa 5 da pesquisa é determinante, uma vez que um bom entendimento e execução dela é primordial para ter sucesso nos passos futuros. Então, apresenta-se abaixo os resultados da análise desta atividade.

Figura 21: representação gráfica da assertividade na atividade 5.



Fonte: Elaborado pelo autor.

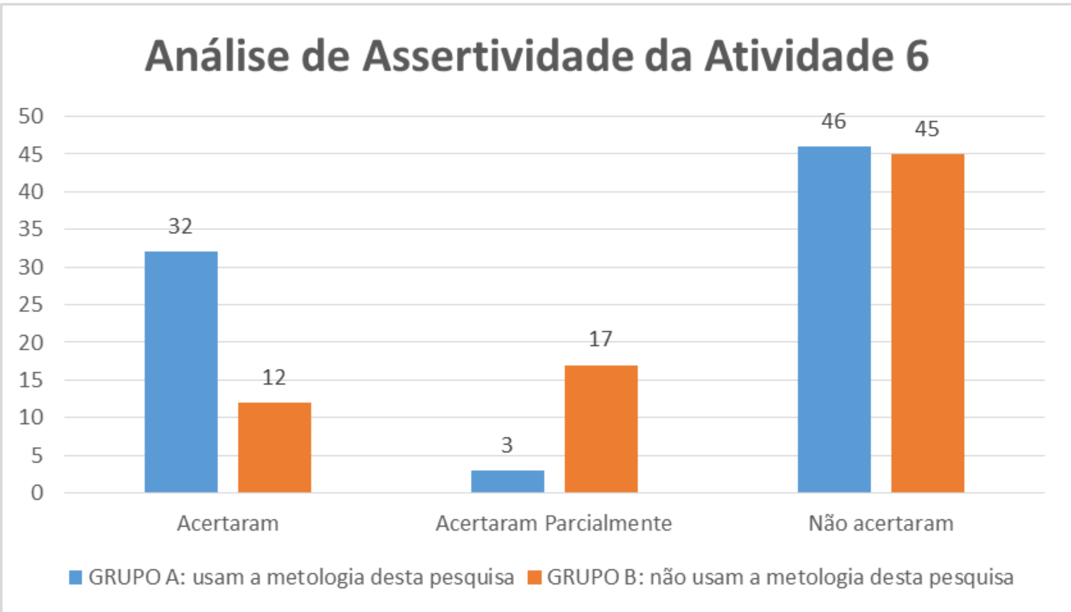
Observa-se, pelo gráfico acima, que 74% do Grupo A resolveu pelo menos uma das três equações solicitadas. Ao passo que apenas 35% do Grupo B acertou pelo menos um dos modelos da quinta tarefa, ou seja, a maior parte dos alunos que não adotam a metodologia desta pesquisa em suas aulas, não acertou nenhum dos modelos solicitados, vale registrar que, nas atividades anteriores, o modelo estaria presente.

Durante a resolução desta parte da atividade, os alunos acionaram com considerável intensidade o pesquisador, na maioria das vezes os alunos demonstravam insegurança e não falta de conhecimento, todos aqueles que estruturaram uma pergunta, pareciam ter ciência do que estava sendo pedido, porém, ao que tudo indica, uma grande insegurança causava instabilidade e não permitia o registro de suas ideias. Alguns deles apelaram para a ajuda e solicitaram as respostas da quinta tarefa para seguir adiante na resolução.

5.11 Análise da atividade 6

A etapa de número 6 da pesquisa também é considerada como tradicional. O referencial teórico deste documento aponta para dificuldades com a elaboração e interpretação de gráficos. Nesta etapa, surgiram elementos que garantiram a condição de verificar tais afirmações. Então, inicia-se essa análise pelo gráfico geral.

Figura 22: representação gráfica da assertividade na atividade 6.



Fonte: Elaborado pelo autor.

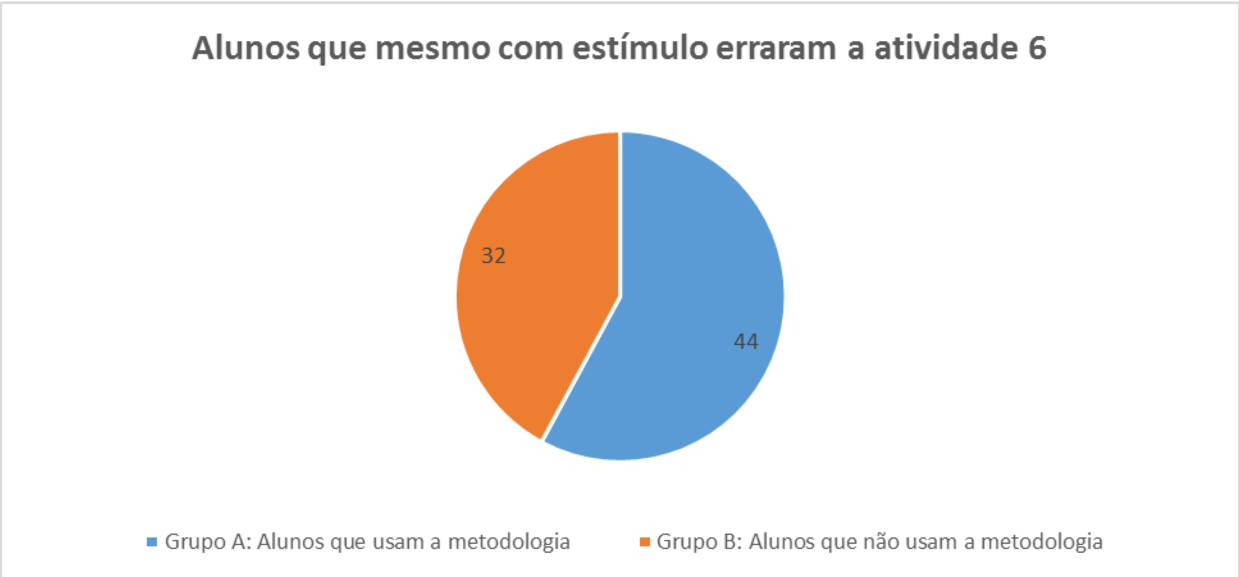
Não é necessário um exame tão aguçado sobre representação, para perceber que ele está similar aos anteriores, é simples distingui-lo dos anteriores, entretanto, faz-se algumas ponderações que são significativas.

As duas colunas predominantes na figura (FIG. 22), confirma que a elaboração de gráficos é um grande ponto de dificuldade dos alunos de Engenharia, independente de qual metodologia está sendo aplicada em sala de aula. Alguns documentos estudados durante a pesquisa sugerem que essa dificuldade tem base no Ensino Fundamento e no Ensino Médio, contudo, fica a questão: o que pode ser feito para preencher essa lacuna do conhecimento que está nítida?

Também nesta fase, verificamos que a quantidade de estímulos distribuídos pelo pesquisar foi muito mais intensa que nas fases anteriores, salvo a primeira atividade, que é considerado, um ponto de partida e é natural que surjam mais questionamentos. Vejamos, a seguir, um cruzamento de informações que nos dará mais solidez para concluirmos.

Notemos abaixo uma representação quantitativa dos estudantes de cada grupo que, mesmo recebendo estímulos do pesquisador, não tiveram sucesso na elaboração dos gráficos que formam a sexta etapa.

Figura 23: representação gráfica do cruzamento estímulos x erros na atividade 6.



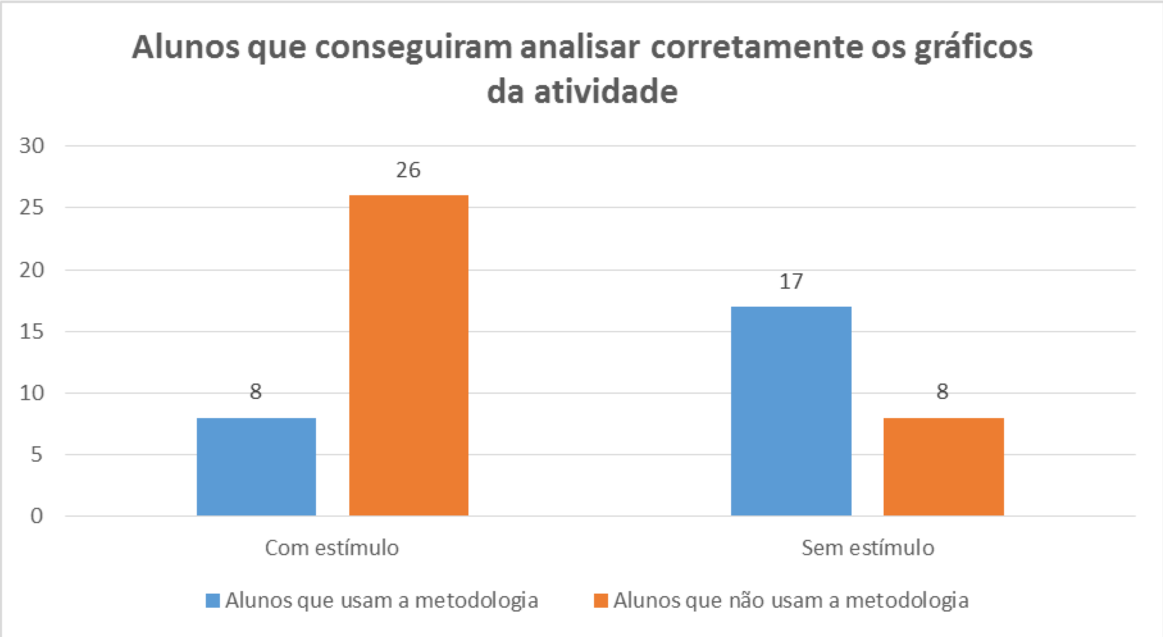
Fonte: Elaborado pelo autor.

É evidente e preocupante a expressividade do resultado do exame sobre os gráficos. Uma vez que quase 50% dos 155 alunos que participaram desta pesquisa, mesmo recebendo estímulos orientativos sobre a elaboração, não completam com sucesso o esboço do gráfico. Sabe-se a respeito deste tema, que não é recente a dificuldade dos estudantes na elaboração de gráficos, porém, vejamos a seguir como se comportam os pesquisados somente na interpretação e na leitura dos gráficos.

5.12 Análise da interpretação dos gráficos

Além de examinar a habilidade de elaboração gráficos, essa pesquisa teve interesse de verificar a aptidão dos estudantes de Engenharia com relação à interpretação de um gráfico. Para isso acontecer, foi necessário criar uma estratégia de incentivo na aplicação, que consistiu em disponibilizar os gráficos prontos para os alunos que não os traçasse por conta própria; com isso, todos teriam condições de realizar uma interpretação.

Figura 24: Representação gráfica da análise correta dos gráficos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

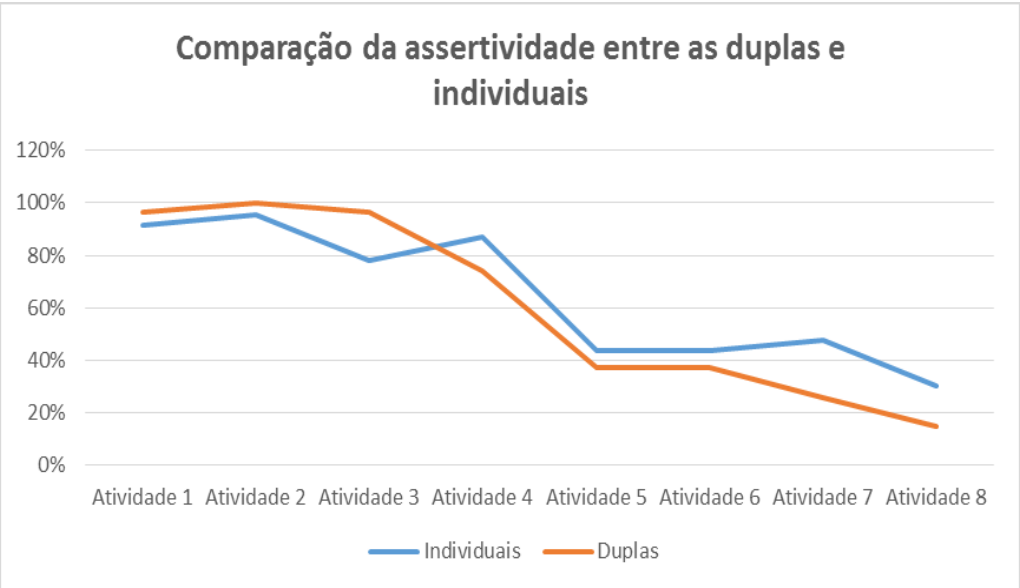
Verifica-se, pelo exposto no gráfico acima (Figura 24), que 25 alunos, 17 do Grupo A e 8 do grupo B, conseguiram analisar os gráficos corretamente, sem a necessidade de receber o menor tipo de estímulo. É importante registrar que esse grupo alunos, que representam apenas 16% do total de estudantes que participaram da pesquisa, viriam a responder corretamente o questionário, mesmo que essa atividade viesse a seguir um procedimento tradicional de aplicação, porém, a metodologia defendida por essa pesquisa sugere o estímulo, uma forma de incentivar o aluno a pensar na direção correta.

Com a aplicação dos estímulos, vemos que um novo grupo de alunos se soma ao primeiro que obtivera sucesso na análise dos gráficos. O resultado indica que 34 alunos conseguiram concluir as análises dos gráficos com assertividade, após receber estímulos do pesquisador, 8 estudantes do grupo A e 26 estudantes do grupo B. Esse grupo não teria o mesmo sucesso caso não houvesse os estímulos. Esse resultado traz uma importante questão: **vale a pena inserir pequenos estímulos às avaliações tradicionais para os alunos que estão próximos de encontrar as respostas consigam alcançá-las?**

5.13 Comparação do rendimento duplas vs individuais

A seguir, compara-se o desempenho das duplas de discentes, com os resultados dos alunos que fizeram as atividades individualmente.

Figura 25: gráfico da comparação de desempenho (duplas x individuais).



Fonte: Elaborado pelo autor.

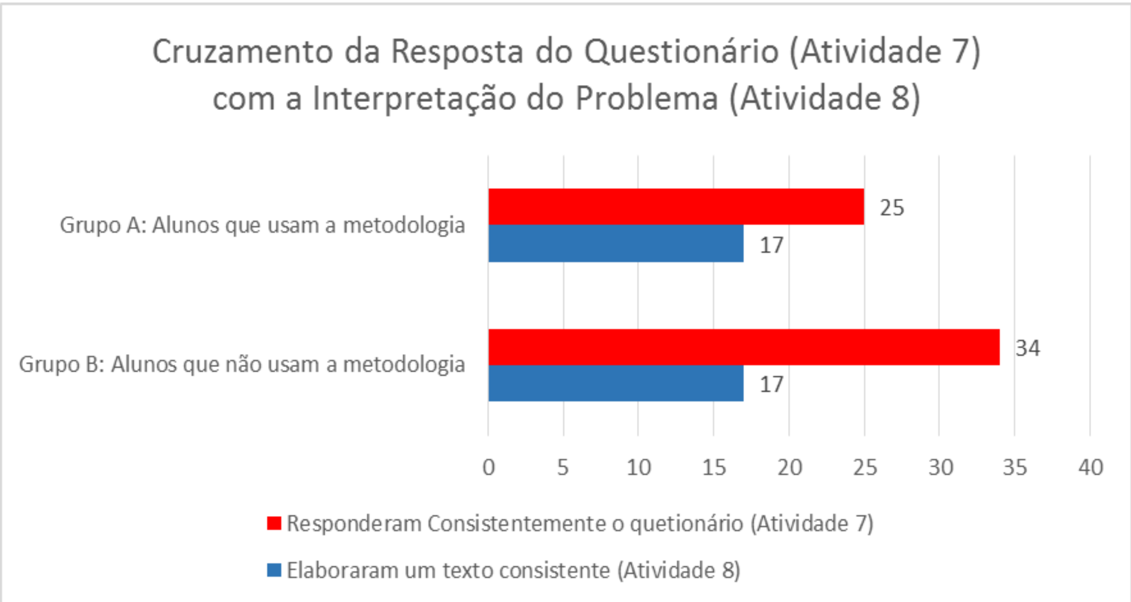
Com o exame do gráfico acima, percebemos que não há uma diferença significativa que nos exponha superioridade de desempenho entre os alunos executarem as atividades em dupla ou individualmente. Ainda percebe-se que na maior parte da atividade aplicada, o desempenho dos alunos que fizeram individualmente fora superior quando comparado com as duplas.

5.14 Cruzamento da atividade 7 com a atividade 8

As duas últimas atividades não buscaram conhecer a habilidade dos pesquisados sobre o cálculo ou sobre o desenvolvimento de expressões. Estes focaram na interpretação do problema, portanto, aqueles alunos que não conseguiram concluir os passos anteriores, receberam as respostas dos modelos e os gráficos já plotados, para somente interpretá-los.

A sétima atividade consistiu em responder 10 questões sobre o problema física exposto. Pressupunha-se que o aluno que respondesse o questionário teria uma boa base para a elaboração de um texto explicativo sobre o problema que acabara de resolver. Apresenta-se no Gráfico 15 o resultado dessa análise.

Figura 26: Análise da atividade 7, cruzamento com a atividade 8.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Entende-se pelo exposto no gráfico anterior (Figura 26), que:

Grupo A:

- 68% dos alunos que responderam ao questionário, obtiveram sucesso na elaboração de um texto que explica o comportamento do fenômeno físico à medida que sua evolução acontece.

Grupo B:

- 50% dos alunos do grupo B que responderam ao questionário, elaboraram um texto consistente explicando o comportamento do fenômeno físico à medida que sua evolução acontece.

Este exame se torna ainda mais sólido quando verificamos o grupo de alunos que não respondeu ao questionário de forma consistente, ou seja, aqueles que responderam parcialmente as indagações da sétima atividade ou que foram sucintos na elaboração das respostas. Registra-se abaixo o resultado dessa análise:

Grupo A:

- Um total de 56 alunos não respondeu ao questionário da atividade 7 de forma consistente, destes 56, apenas 1 aluno foi capaz de desenvolver um texto dissertativo explicando o fenômeno observado no problema.

Grupo B:

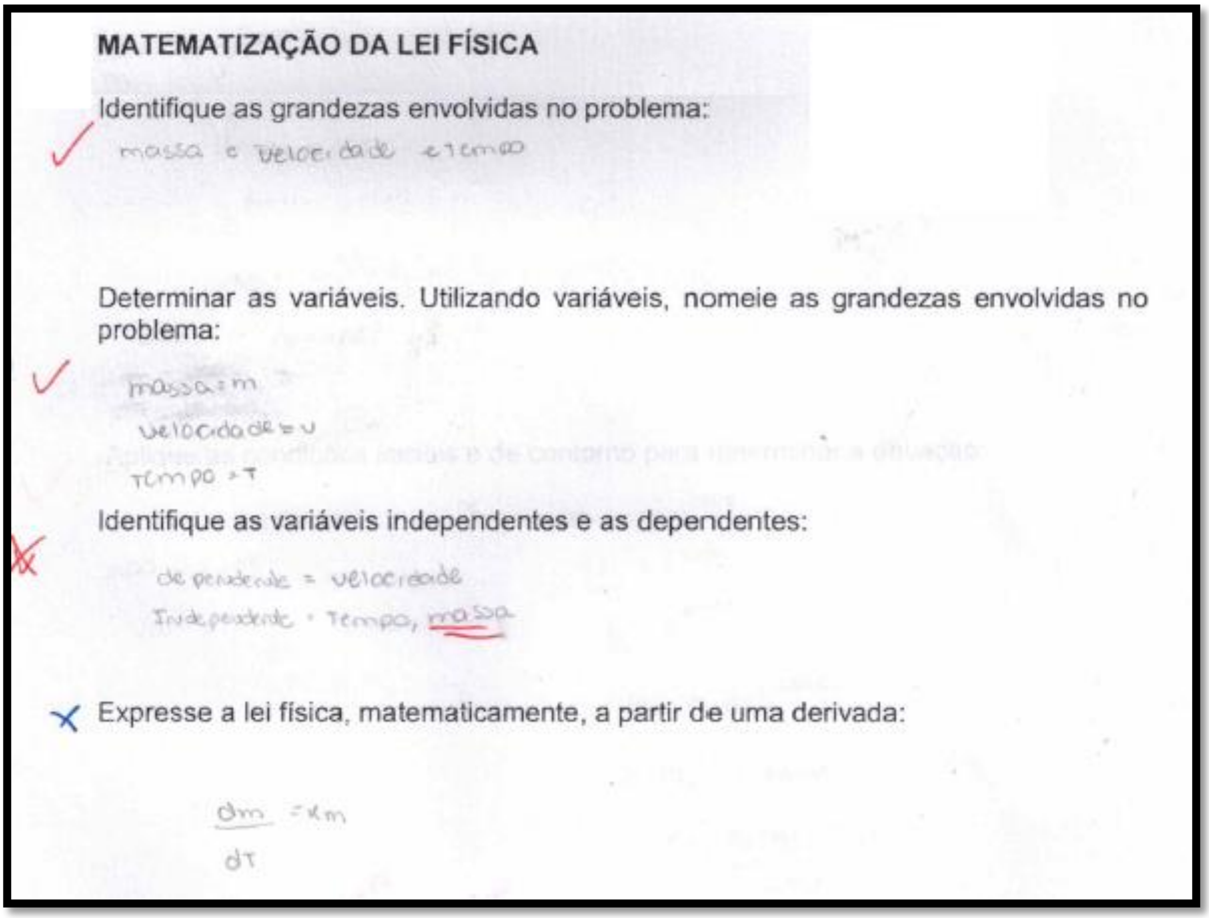
- Um total de 40 discentes não respondeu ao questionário da atividade 7 de forma consistente, destes 40, nenhum estudante foi capaz de desenvolver um texto dissertativo explicando o fenômeno observado no problema.

Com esses resultados, fica evidenciado que a elaboração de um questionário pode ajudar os alunos no entendimento do problema físico, gerando fundamentos, inclusive, para elaborar o texto explicativo do fenômeno (atividade 8).

5.14 Análise qualitativa e extratos da atividade 1

Na busca pela compreensão dos erros mais cometidos pelos pesquisados, trazemos alguns extratos das atividades, seguidos por uma análise qualitativa dos possíveis motivos relacionados.

Figura 27: Extrato da atividade 1, resposta parcial.



MATEMATIZAÇÃO DA LEI FÍSICA

Identifique as grandezas envolvidas no problema:

massa e velocidade e tempo

Determinar as variáveis. Utilizando variáveis, nomeie as grandezas envolvidas no problema:

massa = m
velocidade = v
tempo = T

Identifique as variáveis independentes e as dependentes:

dependente = velocidade
Independente = Tempo, massa

Expresse a lei física, matematicamente, a partir de uma derivada:

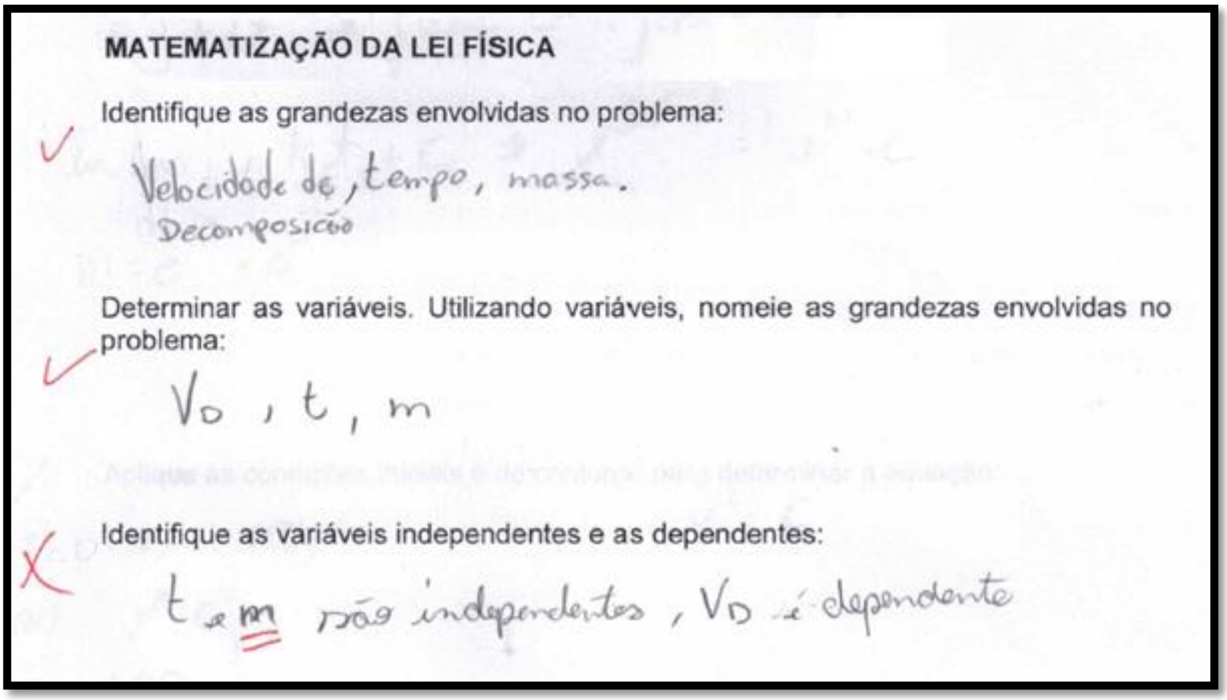
$$\frac{dm}{dT} = km$$

Fonte: Extrato da atividade aplicada na pesquisa.

No fragmento acima, registra-se os principais erros cometidos na primeira etapa da atividade. Iniciando pela identificação das grandezas presentes no problema físico, alguns participantes não anotaram todas as grandezas do problema, deixando de lado principalmente a constante de proporcionalidade. Durante a aplicação da pesquisa na sala de aula, surgiram algumas indagações sobre essa taxa ser ou não ser uma grandeza.

Na fase de determinação das variáveis não registramos erros, apenas alguns alunos deixaram de nomear grandezas devido ao fato de não as terem considerado no primeiro passo. Em seguida, como podem perceber na Figura 27, verificamos que os alunos parecem fazer confusão ao racionar sobre a dependência e independência das variáveis, demonstrando uma certa falta de domínio sobre a interpretação do problema físico. Nota-se também, na Figura 28, que mesmo alguns alunos que identificam todas as grandezas envolvidas no fenômeno, ainda tem dificuldade em distinguir variáveis dependentes das independentes.

Figura 28: extrato da atividade 1, conflito entre independência e dependência das grandezas.



MATEMATIZAÇÃO DA LEI FÍSICA

Identifique as grandezas envolvidas no problema:

Velocidade de, tempo, massa.
Decomposicão

Determinar as variáveis. Utilizando variáveis, nomeie as grandezas envolvidas no problema:

V_D , t , m

Identifique as variáveis independentes e as dependentes:

t e m são independentes , V_D é dependente

Fonte: Extrato da atividade aplicada na pesquisa.

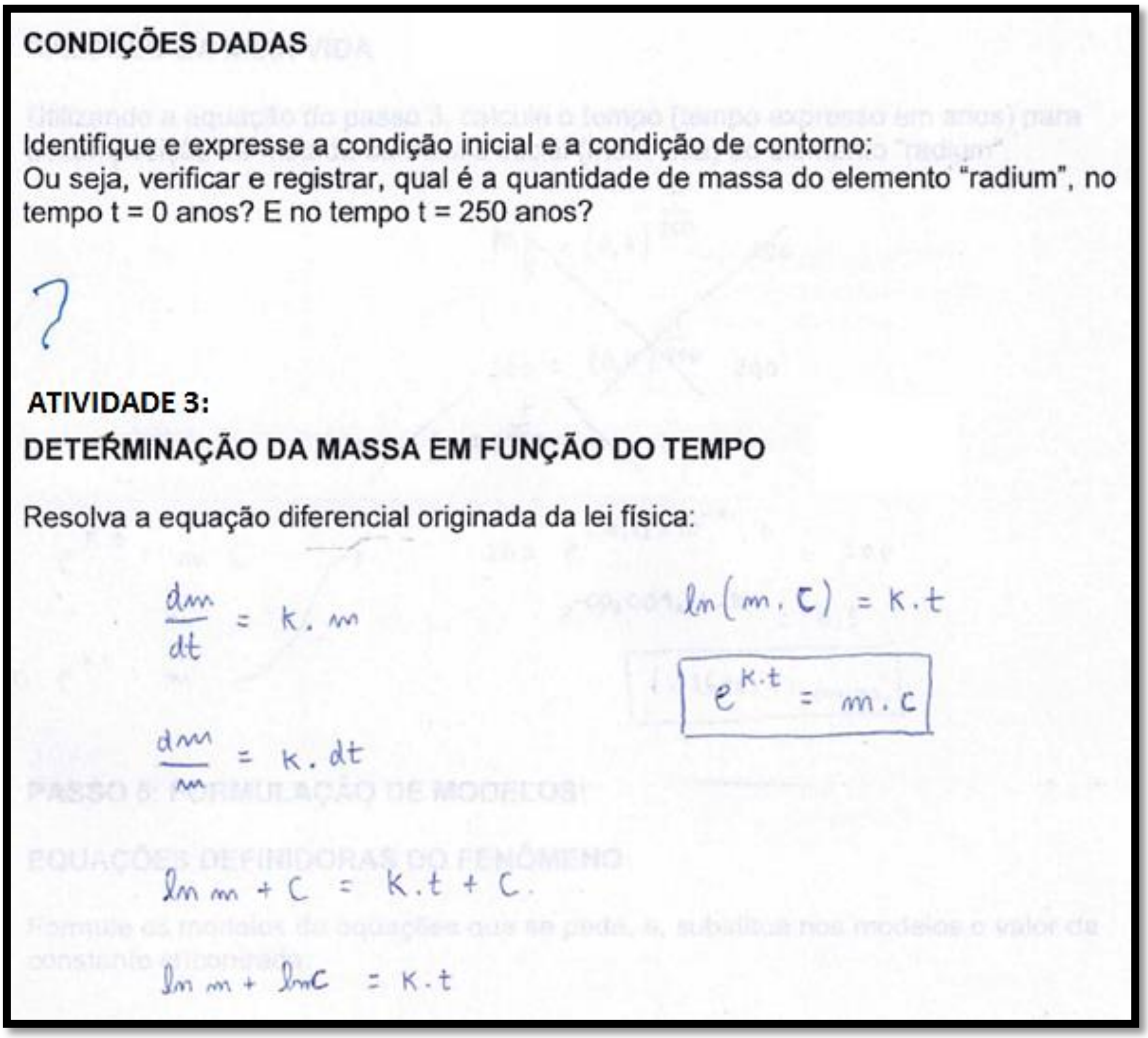
A grandeza “massa” foi considerada independente, embora ela apareça em muitos problemas como uma determinante fixa, em problemas de decaimento de massa ela se torna uma variável dependente, pois à medida que o tempo corre existirá uma variação da mesma em função de sua decomposição. Alguns alunos não consideraram desta forma, gerando erros parciais em suas atividades.

5.15 Análise qualitativa e extratos da atividade 2

Embora pareça simples a segunda etapa da pesquisa de campo, 11 alunos não acertaram a questão, ou em outros termos, 7% do total de participantes errou essa questão, sendo 1 aluno do grupo A e 10 alunos do grupo B.

Na figura a seguir, extraída da atividade de uma dupla de alunos do grupo B, nota-se que a atividade fora ignorada, não deixando nenhuma anotação registrada (a interrogação é um sinal da correção do pesquisador). Percebe-se, na etapa a seguir, que os participantes seguiram uma organização considerável, demonstrando conhecimento sobre o tema, porém, talvez a falta de atenção, levou ao insucesso na etapa 2.

Figura 29: extrato das atividades 2 e 3, exemplo de desatenção.



CONDIÇÕES DADAS

Identifique e expresse a condição inicial e a condição de contorno:
Ou seja, verificar e registrar, qual é a quantidade de massa do elemento "radium", no tempo t = 0 anos? E no tempo t = 250 anos?

?

ATIVIDADE 3:
DETERMINAÇÃO DA MASSA EM FUNÇÃO DO TEMPO

Resolva a equação diferencial originada da lei física:

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot m$$

$$\frac{dm}{m} = k \cdot dt$$

$$\ln m + C = k \cdot t + C$$

$$\ln m + \ln C = k \cdot t$$

$$\ln(m \cdot C) = k \cdot t$$

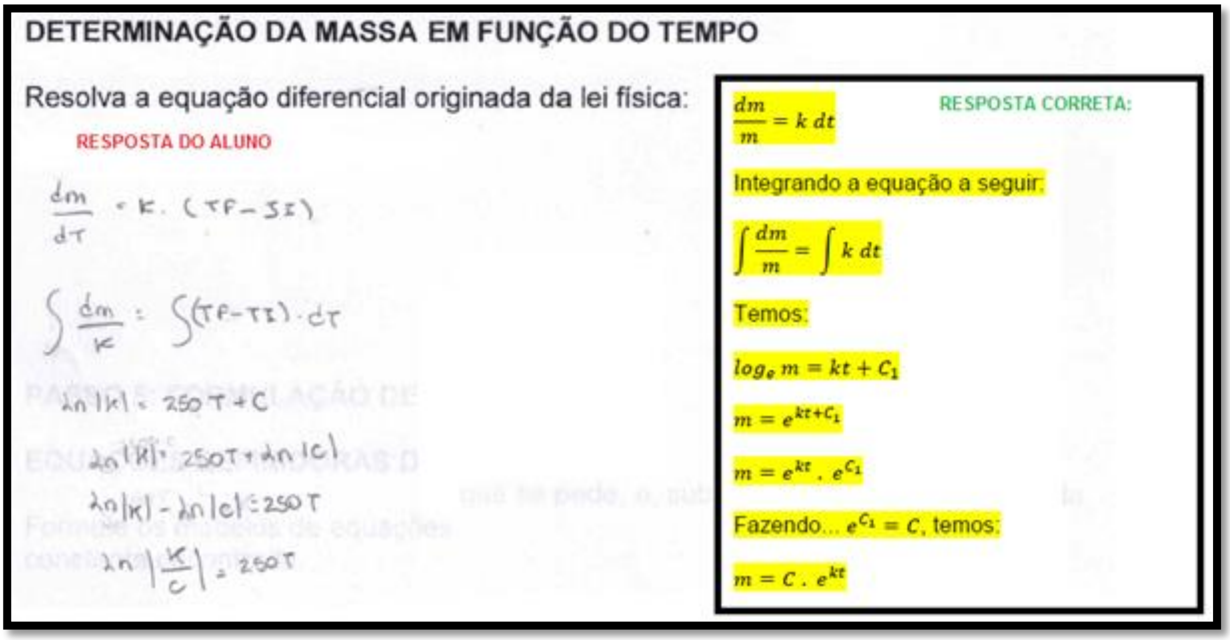
$$\boxed{e^{k \cdot t} = m \cdot C}$$

Fonte: Extrato de atividade aplicada na pesquisa.

5.16 Análise qualitativa da atividade 3

Escolhemos o exemplo a seguir para externar um modelo de erro que se repetiu em algumas atividades. Comparando a resolução equivocada do aluno, com o que seria o processo correto destacado (em amarelo), percebe-se que existe uma coerência entre um processo e outro, em outros termos, há um indicativo de que o aluno tinha ideia do que precisaria ser feito, entretanto, executou de forma incorreta.

Figura 30: extrato da atividade 3, exemplo de execução incorreta.



DETERMINAÇÃO DA MASSA EM FUNÇÃO DO TEMPO

Resolva a equação diferencial originada da lei física:

RESPOSTA DO ALUNO

$$\frac{dm}{dT} = K.(TF - TI)$$

$$\int \frac{dm}{K} = \int (TF - TI) \cdot dT$$

$$\ln|K| = 250\,T + C$$

$$\ln|K| = 250T + \ln|C|$$

$$\ln|K| - \ln|C| = 250\,T$$

$$\ln\left|\frac{K}{C}\right| = 250T$$

RESPOSTA CORRETA:

$$\frac{dm}{m} = k\,dt$$

Integrando a equação a seguir:

$$\int \frac{dm}{m} = \int k\,dt$$

Temos:

$$\log_e m = kt + C_1$$

$$m = e^{kt+C_1}$$

$$m = e^{kt} \, . \, e^{C_1}$$

Fazendo... $e^{C_1} = C$, temos:

$$m = C \, . \, e^{kt}$$

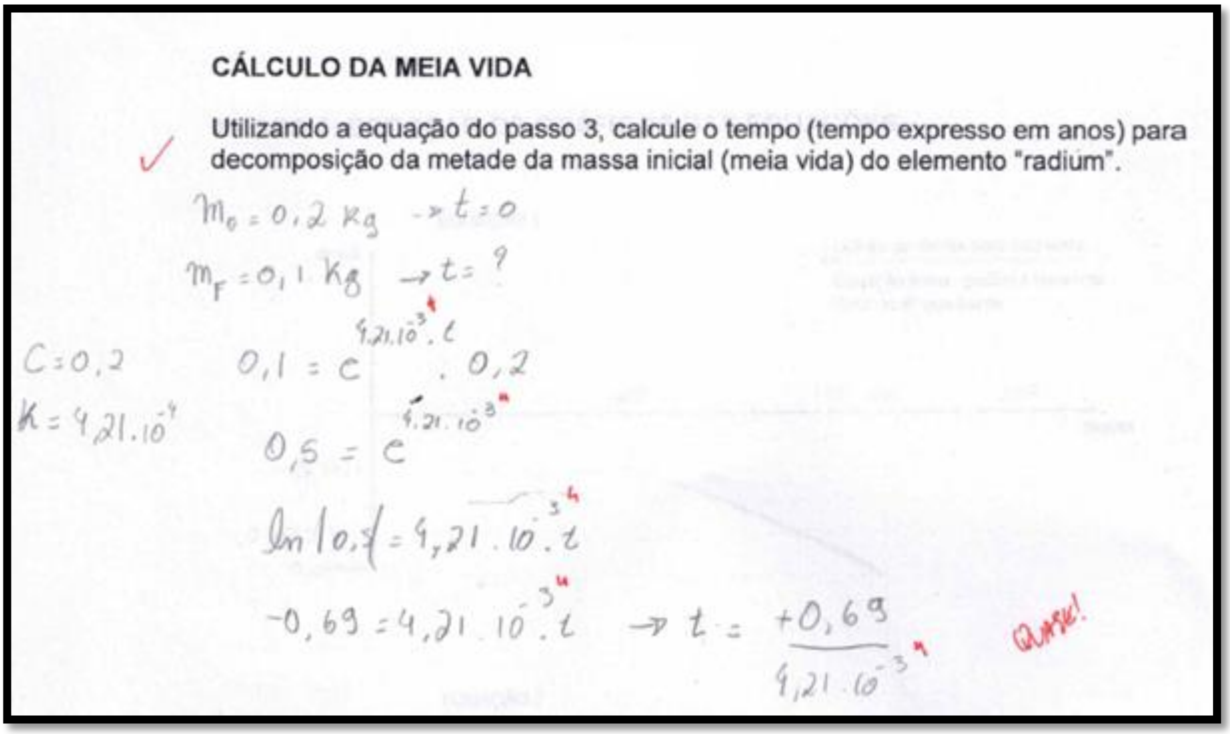
Fonte: Extrato da atividade aplicada na pesquisa.

Saber o procedimento que precisa ser executado e não saber executá-lo indica que a informação, de alguma forma, foi transmitida do educador para o estudante, entretanto, ao que tudo indica, ainda falta a este aluno, a habilidade matemática que se adquire com o exercício da prática, e também, a segurança para executar corretamente. Essa ausência de segurança foi perceptível em muitos participantes da pesquisa, durante a aplicação das atividades.

5.17 Análise qualitativa da atividade 4

Já fora mencionado anteriormente que a quarta atividade desta sequência é tradicional entre os problemas físicos que envolvem o decaimento exponencial. Nesta mesma etapa da sequência didática, detectamos, por algumas vezes, um equívoco tão comum quanto a questão do cálculo da meia-vida.

Figura 31: extrato da atividade 4, erro comum.



Fonte: Extrato da atividade aplicada na pesquisa.

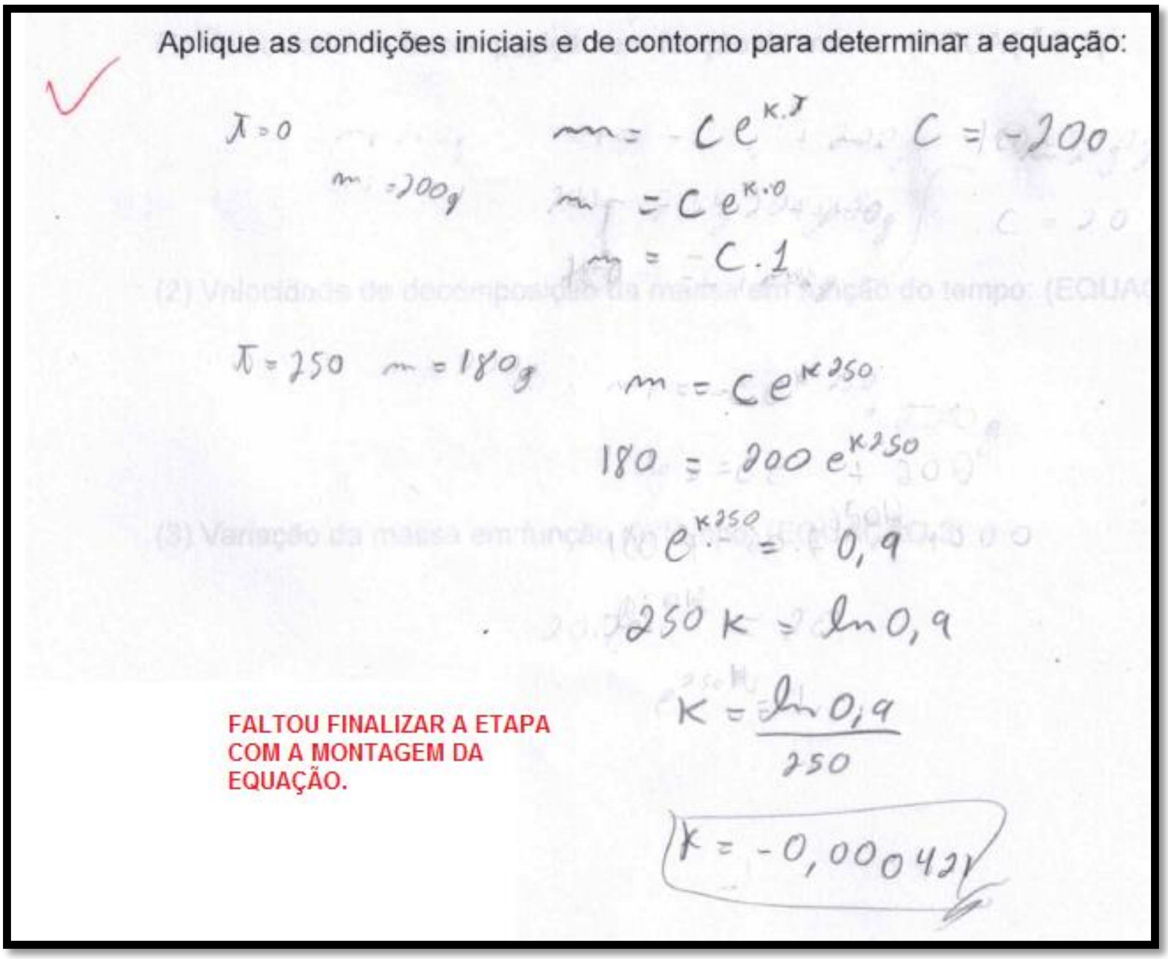
Nota-se, no extrato acima, que o estudante se precaveu a ponto de registrar o valor das variáveis à esquerda da sua resolução, para não ter que voltar na página anterior para conferir. Esse é um indicativo de que ele buscava a agilidade na resolução. Entretanto, durante a evolução de sua equação, repetidas vezes ele adotou o valor incorreto para a variável “k”, utilizando o expoente “-3” sendo que o valor correto estaria ao lado, com o expoente “-4”. Outro ponto relevante é que o resultado final é expresso pelo aluno em forma de fração, desprezando também a unidade de medida que foi solicitada no enunciado, esse fator também é bastante comum na rotina dos profissionais da área de Educação.

Pode-se inferir dessa situação algumas possíveis fontes causadoras dos erros, que são resumidas na seguinte lista:

- Excesso de confiança por já ter realizado esse tipo de procedimento outras vezes.
- Pressa para encontrar o resultado e terminar a atividade.
- Desatenção do estudante.

Um outro exemplo como este pode ser visto na figura 32, o pesquisado conseguiu determinar o valor correto para todas as variáveis, entretanto, não julgou necessário finalizar a atividade com a montagem da equação completa. Podemos atribuir esse fato aos mesmos motivos listados anteriormente.

Figura 32: extrato da atividade 3, erro comum.


Aplique as condições iniciais e de contorno para determinar a equação:

$t = 0$ $m = 200g$ $m = Ce^{k.t}$ $C = 200$

$m = Ce^{k.0}$

$m = C.1$

$t = 250$ $m = 180g$ $m = Ce^{k250}$

$180 = 200e^{k250}$

$e^{k250} = 0,9$

$250k = \ln 0,9$

$k = \dfrac{\ln 0,9}{250}$

$\boxed{k = -0,000421}$

FALTOU FINALIZAR A ETAPA COM A MONTAGEM DA EQUAÇÃO.

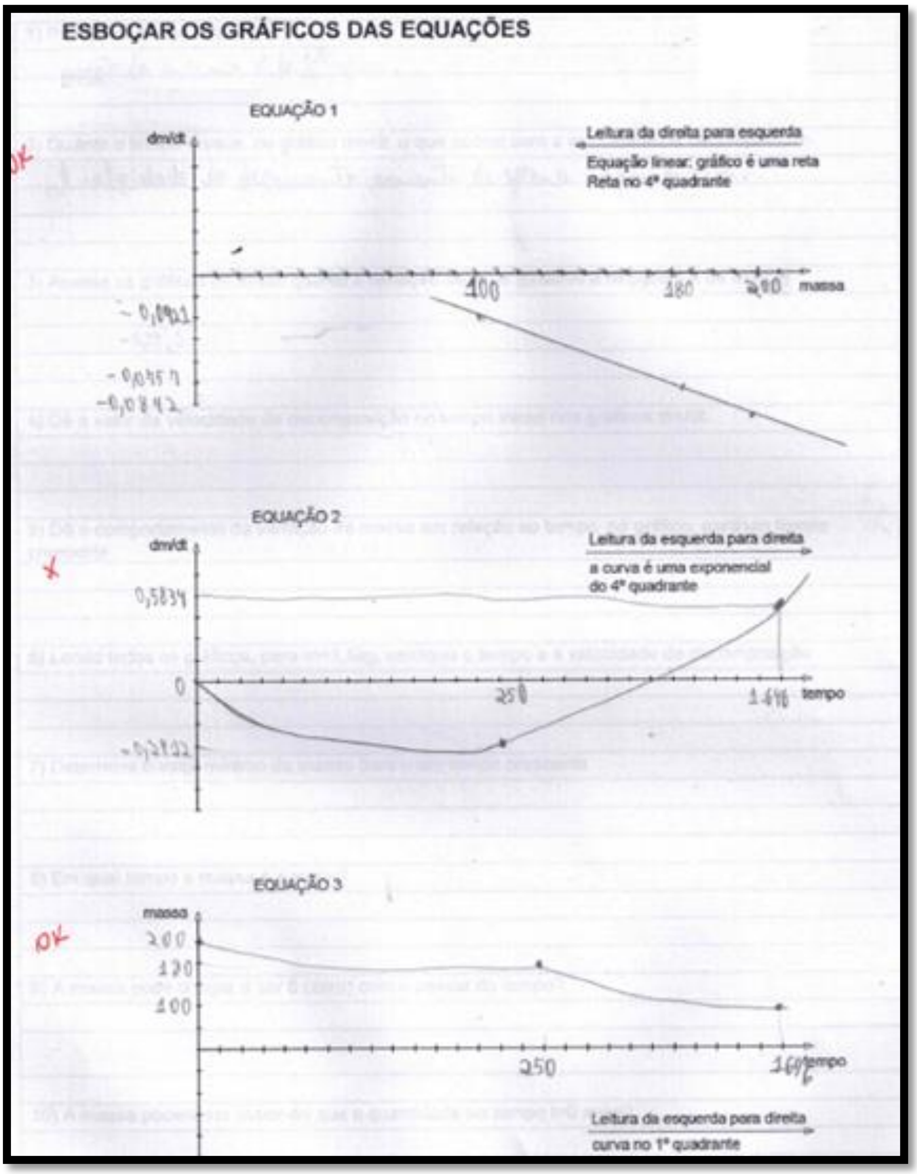
Fonte: Extrato da atividade aplicada na pesquisa.

5.18 Análise qualitativa da atividade 6 (gráficos)

Como registrado anteriormente, os gráficos constituem o ponto de maior dificuldade da atividade aplicada. Dos alunos que esboçaram os gráficos, dois registros nos chamaram a atenção. Destaco-os a seguir.

O primeiro registro é de uma participante (Aluna FM) que demonstrou bastante segurança nas resoluções e na interpretação dos gráficos, contudo, ela desprezou a informações deixadas ao lado dos eixos cartesianos, sugerindo que a curva apareceria no 4º quadrante.

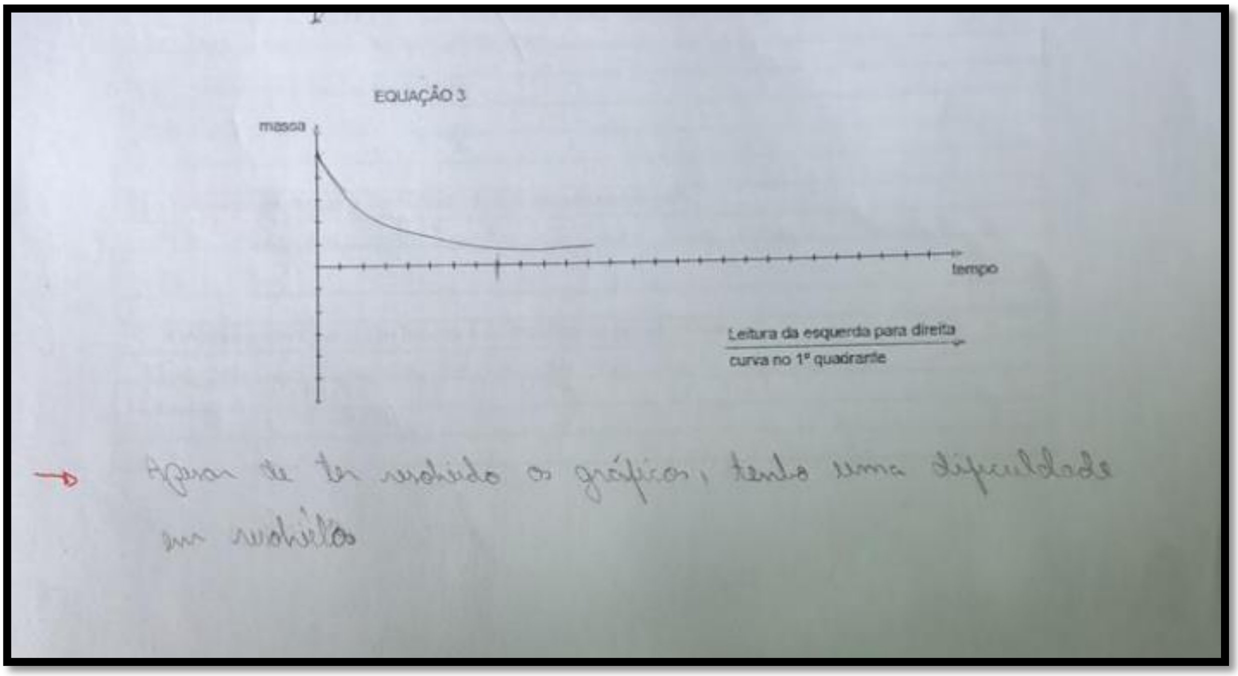
Figura 33: Extrato da atividade 6, erro comum.



Fonte: Extrato da atividade da aluna FM.

O segundo ponto, que merece destaque, é um relato espontâneo de um participante. O aluno LL do curso de Engenharia Química, deixou, ao final de sua resolução correta dos três gráficos, a seguinte frase: “apesar de ter resolvido os gráficos, tenho uma dificuldade em resolvê-los”.

Figura 34: extrato da atividade 6, erro comum.

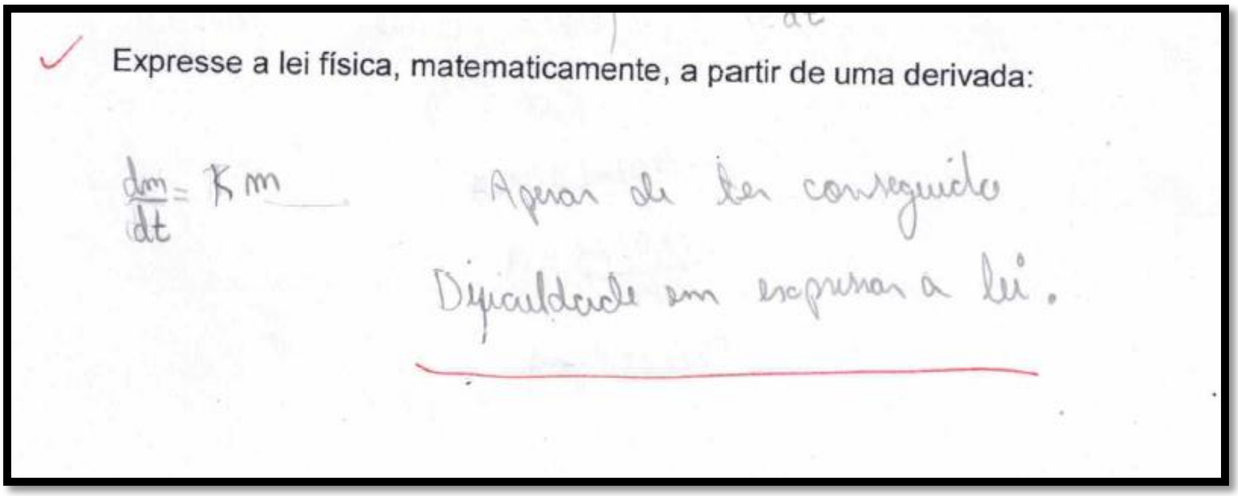


Fonte: Extrato da atividade do aluno LL.

Este relato confirma algumas indagações do pesquisador. Uma delas é sobre a complexidade de visualizar e desenhar os gráficos das questões que envolvem Equações Diferenciais Ordinárias. O exposto pelo aluno LL indica que mesmo aqueles estudantes que conseguem alcançar as respostas, que já possuem um certo domínio das manipulações algébricas, apresentam dificuldades neste ponto. Certamente essa etapa do processo cognitivo geométrico deve ser trabalhado com mais ênfase durante o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que constituem a base para a formação acadêmica e profissional de todos.

A determinação da lei física que rege o problema também foi apontada como uma das etapas de maior dificuldade da atividade. Observa-se na Figura 35 que o pesquisado conseguiu resolver a questão, determinando com sucesso a lei física, e sem a necessidade de estímulos, entretanto, se sentiu inseguro e registrou sua dificuldade para chegar na resposta.

Figura 35: extrato da atividade, relato de dificuldade.



Expresse a lei física, matematicamente, a partir de uma derivada:

$\frac{dm}{dt} = Km$

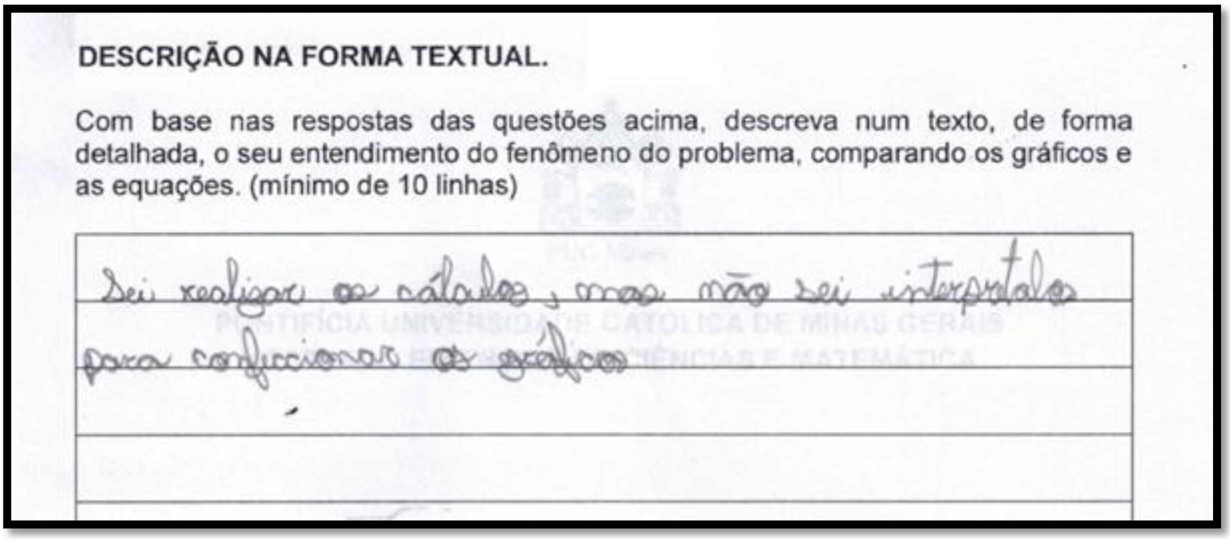
Apesar de ter conseguido

Dificuldade em expressar a lei.

Fonte: Extrato da atividade.

Outros relatos semelhantes foram observados durante as análises. Um deles explica uma situação na qual o aluno consegue entender o fenômeno, elabora os cálculos de EDO, seguindo o que foi visto nas aulas de Cálculo, porém, não consegue interpretar os resultados dos seus cálculos para confeccionar os gráficos.

Figura 36: extrato da atividade 8, relato de aluno.



DESCRIÇÃO NA FORMA TEXTUAL.

Com base nas respostas das questões acima, descreva num texto, de forma detalhada, o seu entendimento do fenômeno do problema, comparando os gráficos e as equações. (mínimo de 10 linhas)

Sei realizar os cálculos, mas não sei interpretá-los

para confeccionar os gráficos

Fonte: Extrato da atividade aplicada na pesquisa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta investigação, buscou-se analisar a performance de dois grupos de estudante em atividades com resolução de um problema de fenômeno físico. Tal sequência de atividades foi trabalhada sobre um problema de decaimento exponencial, entretanto, pode-se aplicar a diferentes problemas que envolvem em sua resolução as Equações Diferenciais Ordinárias.

O produto dessa pesquisa foi desenvolvido para trabalhar com alunos do Ensino Superior, que se constituíram participantes da mesma.

Previamente à etapa de campo, foi realizado um levantamento bibliográfico, buscando as obras mais utilizadas de EDO: artigos, dissertações e teses que tratam do tema desta pesquisa. Deste acervo, o pesquisador selecionou quatro obras didáticas, que foram submetidos à um exame criterioso sobre sua metodologia de ensino e conteúdo dos capítulos que tratavam exclusivamente de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem.

A avaliação destas quatro obras apontou dois destaques, em primeiro lugar, a modernização do livro Cálculo de James Stewart, que explora os recursos tecnológicos melhor que todos os outros, e, em segundo lugar, a metodologia de ensino proposta na obra Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace, no que tange o tema desta pesquisa, constituindo base da pesquisa realizada. Ambas as obras se assemelham nas questões de diversidade de representações, na abordagem de ensino voltada para a significação matemática e contextualização, na exploração de ferramentas gráficas e diversificação de exemplos em suas atividades.

Selecionou-se um problema físico de decaimento exponencial como elemento para desenvolvimento da sequência de atividades. Este problema foi uma adaptação de um modelo contido no livro-base. A partir dessa definição, o autor construiu o produto dessa dissertação, um Caderno contendo uma sequência de oito atividades, que foi aplicada aos participantes dessa pesquisa. Antecedendo a aplicação das atividades, houve um planejamento e, que implicou na antecipação de possíveis situações durante o tempo do pesquisador na sala de aula, definindo, por exemplo, que seriam dados estímulos aos estudantes para prosseguir nas atividades. Estes estímulos foram fundamentais na análise da resolução do problema proposto.

Pós pesquisa de campo, uma considerável quantidade de dados vieram à luz. Todos estes dados tiveram um tratamento qualitativo, que foi elaborado com a ajuda de softwares de organização e análise de dados. Os dados foram separados por grupos que foram controlados, caracterizando a principal particularidade desta pesquisa do tipo qualitativa, mas agregado a análise por grupo-controle, técnica comum nas pesquisas experimentais (quantitativas). Essa separação consistiu em reunir os alunos em dois grupos distintos, o primeiro grupo foi formado pelos alunos que adotavam durante suas aulas de Cálculo, a metodologia de ensino por etapas, com posterior análise dos modelos e registro textuais do problema elaborado. Esta metodologia está no livro-base desta pesquisa. O segundo grupo foi formado por discentes que, em suas aulas rotineiras, tiveram a metodologia de ensino tradicional para aprendizagem do conteúdo de EDO, sem uma ênfase na interpretação de modelos.

A organização dos dados coletados em campo e a separação por grupos tornou possível a medição do desempenho de cada grupo, bem como a comparação entre as duas concepções de metodologias presentes na pesquisa (tradicional e método com análise por passos).

Organizados em tabelas e gráficos, os números levaram o pesquisador a considerar que o ensino da aplicação de fenômenos com Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem é mais signigicativo quando utiliza-se a metodologia por passos e com análise de modelos, uma vez que os alunos deste grupo mostraram um melhor aproveitamento que os outros que trabalhavam com a metodologia tradicional, o que foi demonstrado no capítulo de análise dos dados.

Entretanto, conclui-se que, apesar do desempenho do grupo 1 ter sido mais significativo que do grupo 2, os estudantes demonstraram ter dificuldades durante a resolução das equações definidoras dos modelos e, principalmente, na elaboração e interpretação dos gráficos. Pode-se inferir que esta abordagem inovadora de estudo da aplicação de EDO, trouxe as dificuldades apresentadas pois, exigiu uma análise interpretativa crítica que os estudantes não são levados a fazer num tratamento apenas de resolução das EDO.

O tratamento dos dados não se efetivou por uma modelagem estrita, mas trouxe uma interpretação de modelos, na sua forma de equações e gráficos, complementada por uma descrição do procedimento do modelo, o que caracteriza em Educação Matemática por verbalização. Nesta etapa final do processo de resolução do problema, o estudante pode aprender a fazer uma síntese e descrevê-la em linguagem própria sem utilização da simbologia matemática.

Assim, a metodologia por passos, caracterizando uma analítica do problema com a diversificação de técnica da sua resolução: procedimento de cálculo da EDO e interpretação dos modelos, esta precedida pelo traçado dos gráficos das funções que modelam o fenômeno, exigem do estudante a elaboração de síntese integradora do entendimento do fenômeno com o tratamento do conceito de taxa de variação da derivada presente na EDO. Desta forma, se integra conceito, pelo entendimento do comportamento do fenômeno, e procedimento, pelo cálculo da EDO com a determinação das equações advindas da equação-solução da EDO, para equacionar a modelagem. Os modelos são compostos, então, de equações, gráficos e verbalização, que constituem uma fase da modelagem com resolução de problema.

Em suma, conclui-se pelos dados obtidos na investigação realizada, que o método de ensino de EDO, pela interpretação de modelos empregado no livro-base da pesquisa, parece contribui significativamente para o processo de aprendizagem de resolução de problemas com EDO.

A metodologia de ensino de EDO por passos, com análise de modelos, pode ser utilizada para a resolução de outros problemas que contêm fenômenos físicos, com as devidas adaptações. Outros problemas de fenômenos físicos podem ser encontrado em Laudares et. al. (2017), livro-base desta pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. et al. A Geometria no Ensino: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, n. 27, p. 94-108, set./out./nov./dez. 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2018.

ALVES, M. B. **Equações Diferenciais Ordinárias em um curso de Licenciatura de Matemática – formulação, resolução de problemas e introdução à modelagem Matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, PUC-MG, Belo Horizonte: 2008.

BARROS FILHO, A. A. **A resolução de problemas físicos com Equações Diferenciais Ordinárias lineares de 1ª e 2ª ordem:** análise gráfica com o software Maple. 2012. 217 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, PUC-MG, Belo Horizonte: 2012.

BASSANEZI, R. C. e W. C. FERREIRA Jr., **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BASSANEZI, R. C., **Equações Diferenciais Ordinárias:** um curso introdutório, São Paulo: Coleção BC&T UFABC, 2011.

BERTOLAZI, K. S.; SAVIOLI, A. M. P. das D. Sistemas de equações lineares: perspectivas conceituais e didáticas. **Álgebra linear sob o ponto de vista da Educação Matemática**. / Bárbara Lutaif Bianchini, Silva Dias Alcântara Machado (orgs.), São Paulo: Livraria da Física, p 33-50, 2018.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. **Filosofia da Educação Matemática.** 3. ed. rev. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Tendências em Educação Matemática 4)

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23. ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2012.

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. In: **XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, Setúbal, 2006.

DUVAL, Raymond. Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática:** registros representações semióticas. Campinas: Papirus, 2016. Cap. 1, p.11-34.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machadado, S. D. A. (Org) **Aprendizagem em Matemática** – Registros de Representação Semiótica, Campinas: Papirus, 2009. p. 11-33.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**. 3 ed. São Paulo: Autores Associados. 2009. (Coleção formação de professores).

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em Matemática: História, epistemologia, aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, v. 19, n. 26, p. 77-102. 2006.

FILHO, Lourival. A. F. **Estratégias Usadas Pelos Alunos da Educação de Jovens e Adultos na Resolução de Problemas Aritméticos**. 2011. 144 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, PUC-MG, Belo Horizonte: 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FROTA, Maria Clara Rezende. Estilos de aprendizagem matemática e autocontrole do processo de aprendizagem. In: M.C.R. e Nasser, L (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates, p. 59-79. Recife: SBEM, 2009.

GAZIRE, E. S. **Resolução de Problemas:** perspectivas em Educação Matemática, 1988. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIMENES, J. LINS R. C. **Perspectiva em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 2006.

GONSALVES, E. P. **Conversas sobre iniciação à pesquisa científica**. 4. ed. Campinas, São Paulo: Alínea, 2003.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica:** possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. 2007. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro: 2007.

LACHINI, J. (2001) Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo. In: LAUDARES, J. B. LACHINI, J. (Org.). **A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p.146-190.

LAUDARES, J. B.; MIRANDA, D. F.; REIS, J. P. C.; FURLETTI, S. **Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace:** Análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas Atividades com softwares livres. 1a. ed. Belo Horizonte: Artesã, 2017. v. 1. 319 p.

LEVY, P. **As Tecnologias da Inteligência**: O Futuro do Pensamento na Era da Informática. Rio de Janeiro: 34, 2008. 208p.

LUZ, V. M. da. **Introdução ao Cálculo:** uma proposta associando pesquisa e intervenção. UFRJ, 2011. 149p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

MACHADO, R. M. **A visualização na resolução de problemas de Cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP**. Campinas, SP: 2008. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representações semióticas. Campinas: Papirus, 2016. Cap. 1, p. 11-34.

MELO, José Manuel Ribeiro de. **Conceito de Integral:** Uma proposta Computacional para seu Ensino e Aprendizagem. São Paulo, 2002. 180f. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP.

MOREIRA, H.; CALEFFE, Luiz G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2 ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MORETTI, T. M. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: Machadado, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática** – Registros de Representação Semiótica, Campinas, Papirus, 2009, p. 149-160.

NASSER, Lilian; GENECI, Alves de Souza; TORRACA, Marcelo André Abrantes. **Aprendizagem de Cálculo**: Dificuldades e sugestões para a superação. In: Conferência Internacional de Educação Matemática, XIV, 2015, Chiapas, México. **CIAEM**... Chiapas, México: [s.n.], 2015. p. 1. v. 1. Disponível em: www.pg.im.ufrj.br/pemat/38%20Valeria%20Luz.pdf. Acesso em: 20 abril de 2018.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In. BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 2. Ed. São Paulo: Cortez, p. 123-231, 2005.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. 136p.

PANTOJA, L. F. L. **A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares**. 2008. 105f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

PÓLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: interciência, 1995, 196p.

PÓLYA, G. **O ensino por meios de problemas**. RPM - SBM, Rio de Janeiro, 1995.

POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2008.

REIS, F. da S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros-texto. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, 2001.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2003.

SILVA FREITAS, J.; SCHIMIGUEL, J.; SALLUM, W. G. **O portfólio e as tecnologias de informação e comunicação:** um relato de experiência sobre a avaliação formativa. Tecnologias Digitais: desafios, possibilidades e relatos de experiência. Brasília, Ibict, p. 79-90. 2018.

SILVA, B. ANTONIO, Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. In: **Revista Educação Matemática em Pesquisa.** São Paulo, v.13, n.3, p. 393-413, 2011.

SOUZA, C. Rodrigues de. **Uma abordagem do ensino de cálculo, incentivando o desenvolvimento de estilos de aprendizagem e proporcionando o entendimento das técnicas de integração.** 2013. 137p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, PUC-MG, Belo Horizonte: 2013.

STEWART, J. **Cálculo**: Volume 1. Tradução técnica Antônio Carlos Moretti, Antônio Carlos Gilli Martins, Revisão técnica Helena Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2012, 583p.

STEWART, J. **Cálculo**: Volume 1. Tradução Helena Maria Ávila de Castro, Revisão técnica Eduardo Garibaldi. São Paulo: Cengage Learning, 2013, 680p.

TALL, D. **The psychology of advanced mathematical thinking**. In. TALL, D. Advanced mathematical thinking. Netherland: Kluwer, 2002. P.3-21.

VAZ, I. do C. **Os conceitos de limite, derivada e integral em livros-texto de Cálculo e na perspectiva de professores de matemática e de disciplinas específicas em cursos de engenharia**. Belo Horizonte: Cefet, 2010. 176 p. Dissertação (Mestrado) – Mestrado em Educação Tecnológica, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. V1. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

PUC Minas

APÊNDICE:

Levantamento Bibliográfico e Sequência de Atividades

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA SOLUCIONAR UM PROBLEMA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL:

ENUNCIADO DO PROBLEMA:

O elemento químico “radium” se decompõe naturalmente em proporção direta à quantidade presente, ou seja, sua velocidade de decomposição (variação da massa no tempo) é diretamente proporcional à quantidade presente.

A massa inicial da amostra é de 200g.

O elemento químico em questão, leva 250 anos para decompor 10% da sua massa.

Faça o que se pede nas atividades a seguir:

ATIVIDADE 1:

MATEMATIZAÇÃO DA LEI FÍSICA

A) Identifique as grandezas envolvidas no problema:

B) Determinar as variáveis. Utilizando variáveis, nomeie as grandezas envolvidas no problema:

C) Identifique as variáveis independentes e as dependentes:

D) Expresse a lei física, matematicamente, a partir de uma derivada:

ATIVIDADE 2:

CONDIÇÕES DADAS

A) Identifique e expresse a condição inicial e a condição de contorno, ou seja, verificar e registrar, qual é a quantidade de massa do elemento “radium”, no tempo t = 0 anos? E no tempo t = 250 anos?

ATIVIDADE 3:

DETERMINAÇÃO DA MASSA EM FUNÇÃO DO TEMPO

A) Resolva a equação diferencial originada da lei física:

B) Aplique as condições iniciais e de contorno para determinar a equação:

ATIVIDADE 4:

CÁCULO DA MEIA-VIDA

A) Utilizando a equação da atividade 3, calcule o tempo (tempo expresso em anos) para decomposição da metade da massa inicial (meia-vida) do elemento “radium”.

ATIVIDADE 5:

FORMULAÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS

EQUAÇÕES DEFINIDORAS DO FENÔMENO: Formule os modelos de equações que se pede, e, substitua nos modelos o valor da constante encontrada.

A) Velocidade de decomposição em função da massa:
(EQUAÇÃO 1)

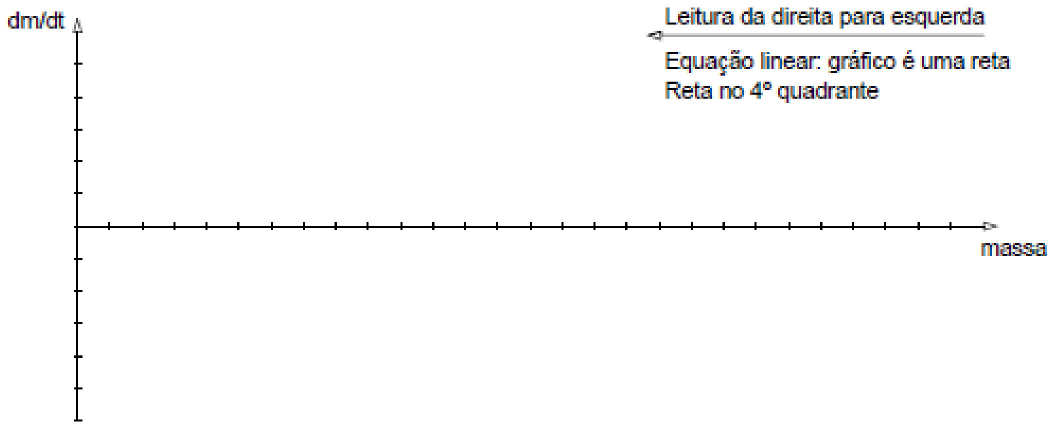
B) Velocidade de decomposição da massa em função do tempo: (EQUAÇÃO 2)

C) Variação da massa em função do tempo:
(EQUAÇÃO 3)

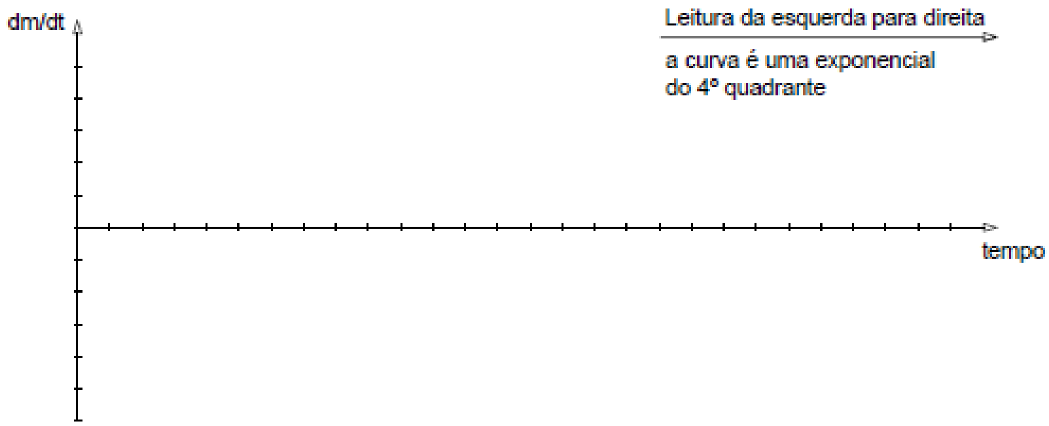
ATIVIDADE 6:

ESBOÇAR OS GRÁFICOS DAS EQUAÇÕES

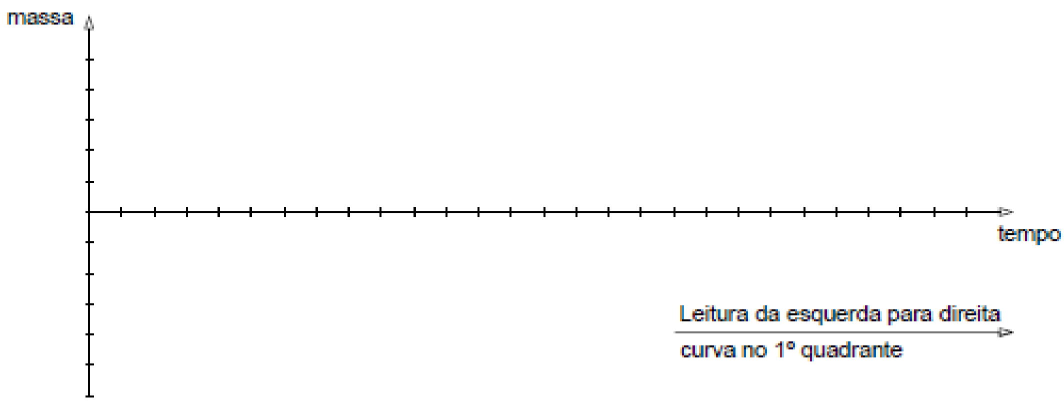
EQUAÇÃO 1



EQUAÇÃO 2



EQUAÇÃO 3



ATIVIDADE 7:

QUESTIONÁRIO SOBRE A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES.

A) Por que o gráfico dm/dt é uma reta?

B) Quanto o tempo cresce, no gráfico dm/dt, o que ocorre com a velocidade de decomposição.

C) Analise os gráficos de dm/dt quanto à variação de sinal (positivo e negativo) e de valores

D) Dê o valor da velocidade de decomposição no tempo inicial nos gráficos dm/dt.

E) Dê o comportamento da variação de massa em relação ao tempo, no gráfico, para um tempo crescente.

F) Lendo todos os gráficos, para m=1,5kg, verifique o tempo e a velocidade de decomposição

G) Determine o valor mínimo da massa para o um tempo crescente

H) Em qual tempo a massa é a maior?

I) A massa pode chegar a ser 0 (zero) com o passar do tempo?

J) A massa poderá ser maior do que a quantidade no tempo t=0 anos?

ATIVIDADE 8:

DESCRIÇÃO NA FORMA TEXTUAL.

Com base nas respostas das questões acima, descreva num texto, de forma detalhada, o seu entendimento do fenômeno do problema, comparando os gráficos e as equações. (mínimo de 10 linhas)