

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Antonio Márcio de Freitas

**DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE ANÁLISE VIBRACIONAL  
DE BAIXO CUSTO**

Belo Horizonte

2013

Antonio Márcio de Freitas

**DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE ANÁLISE VIBRACIONAL  
DE BAIXO CUSTO**

Dissertação a ser apresentada ao Programa de Mestrado em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Professor Dr. Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior

Belo Horizonte

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

F866d Freitas, Antônio Márcio de  
Desenvolvimento de um sistema de análise vibracional de baixo custo /  
Antônio Márcio de Freitas Belo Horizonte, 2013.  
98f.: il.

Orientador: Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior  
Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

1. Vibração - Medição. 2. Processamento de sinais. 3. Amortecimento  
(Mecânica). I. Magalhães Júnior, Pedro Américo Almeida. II. Pontifícia  
Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 620.178.5

Antonio Márcio de Freitas

**DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE ANÁLISE VIBRACIONAL  
DE BAIXO CUSTO**

Dissertação a ser apresentada ao Programa de Mestrado em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

---

Professor Dr. Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior (Orientador) - PUC Minas

---

Professor Dr. Denilson Laudares Rodrigues (Coorientador) - PUC Minas

---

Professor Dr. Claysson Bruno Santos Vimieiro - PUC Minas

---

Professor Dr. Roberto Galery - Representante Externo - UFMG

Belo Horizonte, 12 de julho de 2013

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a várias pessoas que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho e aquelas que me incentivaram neste período.

Ao Professor Pedro Américo de Almeida Magalhães Jr. por ter aceitado a tarefa de me orientar após o trabalho já iniciado. Seu incentivo e ajuda foram fundamentais para conclusão desta pesquisa.

Ao Professor Denilson Laudares Rodrigues, meu coorientador, que me incentivou a ingressar nesta linha de pesquisa e muito me auxiliou durante a fase de aquisição e tratamento dos dados iniciais.

A minha esposa Lorena, pelo apoio, companheirismo e compreensão.



*Todo caminho da gente é resvaloso.  
Mas também, cair não prejudica demais – a  
gente levanta, a gente sobe, a gente volta!...  
O correr da vida embrulha tudo, a vida é assim:  
esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e  
depois desinquieta.  
O que ela quer da gente é coragem."  
João Guimarães Rosa*

## RESUMO

O estudo de vibrações desperta a atenção dos pesquisadores desde a antiguidade. O desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, das leis de Newton e recentemente dos computadores e do Método dos Elementos Finitos forneceram as ferramentas para a análise de sistemas complexos com milhares de graus de liberdade. Houve então nos últimos anos um grande aumento na utilização de sistemas de medição da vibração nos mais diversos campos da engenharia. O objetivo deste trabalho foi desenvolver um sistema de medição de vibrações de baixo custo, utilizando sensores, placas coletoras de dados e processamento numérico em computador. Foram realizados ensaios de determinação do amortecimento estrutural e medição de vibração de uma estrutura submetida a carregamento harmônico. Os resultados indicaram uma boa consistência dos dados para o ensaio de amortecimento. O programa de aquisição e tratamento de dados opera de forma adequada significando que este sistema simples pode ser utilizado para determinação de frequências naturais de equipamentos e estruturas em geral. Entretanto, o processamento de sinais com aplicação de filtros e integração numérica para se obter a velocidade e o deslocamento da vibração precisa ser aperfeiçoado, quando comparado com os resultados obtidos em analisadores de vibração profissionais. Mesmo assim, os resultados obtidos apresentaram um erro menor de 10%.

Palavras-chave: Vibração. Processamento digital de sinais. Analisadores. Amortecimento.

## **ABSTRACT**

The study of properties and effects of vibrational phenomena has been interesting mankind since the ancient ages. The development of the differential and integral calculus, the Newton's laws and recently, the evolution of computers and the finite element method techniques provided the tools to process and analyze vibrational systems with thousands degrees of freedom. Nowadays the use of vibration analyzers has been growing very fast. The goal of this research is the development of low-cost vibrational analysis system, using sensor, data acquisition board and a computer. Tests of structural damping e vibration of a structure under steady-state forces were performed. The results showed good accuracy for structural damping tests and the system can be used to determine the natural frequencies of structures and equipment. However, the filtering and the numeric integration routines needs some improvements, when the results are compared to the professional vibration analyzers outputs. Nevertheless, the errors were always below 10 %.

Keywords: Vibration. Digital signal processing. Analyzers, Damping.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Colapso da Ponte Takoma Narrows .....	19
Figura 2 - Formação de vórtices no tabuleiro da Ponte Takoma Narrows .....	19
Figura 3 - Vibração de um sistema massa-mola-amortecedor com 1GL.....	22
Figura 4 - Força Excitadora e resposta do sistema. ....	25
Figura 5 – Variação de $X$ e $\emptyset$ com a razão de frequências. ....	26
Figura 6 - Carregamento dinâmico em uma viga biapoiada.....	27
Figura 7 – Sinal composto de 2 senóides de frequências diferentes. ....	31
Figura 8 – Relação entre os domínios do tempo e frequência .....	31
Figura 9 – Configurações típicas de acelerômetros. ....	33
Figura 10 - Montagem tradicional de acelerômetros de compressão.....	34
Figura 11 – Descrição dos componentes de um acelerômetro. ....	34
Figura 12 – Esquema do sistema de aquisição e tratamento dos dados. ....	36
Figura 13 – Sinal de 30 Hz captado com frequência de amostragem de 35 Hz.....	38
Figura 14 – Sinal de 30 Hz captado com frequência de amostragem de 120 Hz.....	38
Figura 15 – Espectro de frequência da figura 13.....	39
Figura 16 – Espectro de frequência da figura 14.....	39
Figura 17– Curva de atenuação de um filtro passa-baixa com frequência de corte 30%.....	40
Figura 18 – Curva de atenuação de um filtro passa-alta com frequência de corte 50%.....	41
Figura 19 – Curva de atenuação típica de um filtro passa-banda com frequências de corte de 30% e 50%.....	41
Figura 20 – Curva de atenuação típica de um filtro rejeita-banda com frequências de corte de 30% e 50%.....	42
Figura 21 - Sistema de decimação.....	43
Figura 22 - Sistema de interpolação.....	44
Figura 23 – Curva de histerese típica de amortecimento .....	46
Figura 24 – Curvas típicas de amortecimento.....	50
Figura 25 – Amortecimento Fluídico.....	51
Figura 26 – Gráfico típico de um sistema subamortecido.....	53
Figura 27 – Variação do decremento logarítmico.....	54
Figura 28 – Representação geométrica da Regra do Trapézio.....	55

Figura 29 – Forma geral da aplicação múltipla da Regra do Trapézio. ....	56
Figura 30 – Utilização simultânea da Regra de 1/3 e da Regra de 3/8 de Simpson. ....	58
Figura 31 – Parâmetros de um movimento oscilatório senoidal .....	61
Figura 32 – Diagrama de blocos do processo de medição.....	62
Figura 33 – Alguns tipos de analisadores espectrais de sinais. ....	64
Figura 34 – Arquitetura de um Analisador de Vibrações baseado em FPGA. ....	65
Figura 35 – Fotografia da estrutura ensaiada.....	66
Figura 36 – Esquema de montagem do excitador.....	67
Figura 37 – Foto em detalhe do excitador. ....	68
Figura 38 – Ficha técnica do acelerômetro Kistler. ....	68
Figura 39 – Foto do Condicionador de Sinais utilizado. ....	69
Figura 40 – Placas de aquisição de dados PCI 6251 e USB 6251 N. I. ....	69
Figura 41 – Martelo de Impacto.....	71
Figura 42 – Montagem do ensaio de calibração do acelerômetro.....	73
Figura 43 – Vibrações flexionais numa viga biapoada. ....	73
Figura 44 – Espectro de frequências – Ensaio de amortecimento no1. ....	76
Figura 45 – Detalhe ampliado do valor do espectro de frequências.....	76
Figura 46 – Ensaio de Amortecimento no 1. ....	77
Figura 47 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio no 1. ....	77
Figura 48 – Ensaio de Amortecimento no 2. ....	78
Figura 49 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio no 2. ....	78
Figura 50 – Ensaio de Amortecimento no 3. ....	79
Figura 51 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio no 3. ....	79
Figura 52 – Ensaio de Amortecimento no 4. ....	80
Figura 53 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio no 4. ....	80
Figura. 54 – Ensaio de Amortecimento no 5. ....	81
Figura 55 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio no 5. ....	81
Figura 56 – Ensaio de Amortecimento no 6. ....	82
Figura 57 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio no 6. ....	82
Figura 58 – Montagem do sistema de aquisição de dados. ....	84
Figura 59 – Condicionador e Placa de Aquisição USB 6251 NI. ....	85
Figura 60 – Placa de aquisição e computador com software. ....	85
Figura 61 – Força excitadora $F_0$ x rotação do motor.....	86
Figura 62 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 1.....	90

Figura 63 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 4.....	90
Figura 64 – Gráfico deslocamento x tempo – Teste nº 7.....	91
Figura 65 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 10.....	91
Figura 66 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 12.....	92
Figura 67 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 15.....	92
Figura 68 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 18.....	93

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	Frequências naturais da viga testada.....	75
TABELA 2	Dados do ensaio de amortecimento nº 1.....	77
TABELA 3	Dados do ensaio de amortecimento nº 2.....	78
TABELA 4	Dados do ensaio de amortecimento nº 3.....	79
TABELA 5	Dados do ensaio de amortecimento nº 4.....	80
TABELA 6	Dados do ensaio de amortecimento nº 5.....	81
TABELA 7	Dados do ensaio de amortecimento nº 6.....	82
TABELA 8	Dados de impacto por tipo de ponta do martelo.....	83
TABELA 9	Cálculo dos coeficientes médios de amortecimento.....	83
TABELA 10	Resumo dos ensaios de carregamento dinâmico da viga.....	89

## **LISTA DE SIGLAS**

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas

IEEE - Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos

ISO - International Organization for Standardization

N.I – National Instruments

H P – Hewlett Packard

## LISTA DE SIMBOLOS

A - área

$A_{rms}$  – amplitude da aceleração (rms)

C – constante

c – constante de amortecimento

$c_c$  - constante de amortecimento crítico

$c_d$  - coeficiente de arraste

$c_{eq}$  - coeficiente de amortecimento equivalente

$D_{pp}$  – amplitude da aceleração pico a pico

$d_n$  - deflexão

E – módulo de elasticidade do material

F – força

$F(t)$  – força excitadora dinâmica

f – frequência (hz)

$f_y$  – limite de escoamento do material

$f_u$  – limite de ruptura do material

$I_x, I_y$  – Momento de inércia

L - comprimento

k – rigidez

m – massa

r – razão de amortecimento

t – tempo

v – velocidade

x – deslocamento

$\delta$  – decremento logarítmico

$\omega$  – frequência angular (rad/s)

$\omega_n$  – frequência natural (rad/s)

$\omega_d$  – frequência amortecida (rad/s)

$\zeta$  – razão de amortecimento

$\phi$  – ângulo de fase

T – período

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	15
1.1 Apresentação.....	15
1.2 Objetivos .....	16
1.3 Objetivos específicos.....	16
1.4 Justificativa.....	16
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	22
2.1 Breve revisão teórica das equações de vibração .....	22
2.2 Transformadas de Fourier .....	28
2.3 Processamento digital de sinais.....	30
2.3.1 Introdução .....	30
2.3.2 Captação de sinais - acelerômetros .....	32
2.3.3 Aquisição e tratamento dos sinais .....	36
2.3.4 Filtros .....	40
2.4 Janelamento .....	42
2.5 Decimação .....	43
2.6 Interpolação .....	44
2.7 Amortecimento estrutural.....	44
2.7.1 Tipos de amortecimento .....	45
<u>2.7.1.1 Amortecimento interno .....</u>	<u>45</u>
<u>2.7.1.2 Amortecimento viscoelástico ou viscoso .....</u>	<u>46</u>
<u>2.7.1.3 Amortecimento histerético .....</u>	<u>50</u>
<u>2.7.1.4 Amortecimento estrutural.....</u>	<u>51</u>
<u>2.7.1.5 Amortecimento fluídico .....</u>	<u>51</u>
2.7.2 Métodos de determinação do amortecimento. ....	52
<u>2.7.2.1 Método do decremento logarítmico.....</u>	<u>52</u>
2.8 Integração numérica .....	54
2.8.1 A regra do trapézio.....	55
2.8.2 A regra de Simpson.....	57
<u>2.8.2.1 Regra 1/3 de Simpson.....</u>	<u>57</u>
<u>2.8.2.2 Regra 3/8 de Simpson.....</u>	<u>58</u>
2.9 Estado da arte.....	59
3 METODOLOGIA UTILIZADA .....	66
3.1 Descrição da estrutura ensaiada .....	66
3.2 Sistema de excitação da estrutura.....	67
3.3 Sensores .....	68
3.4 Condicionador de sinais.....	68
3.5 Placa de aquisição de dados.....	69
3.6 Computador e <i>software</i> de processamento numérico .....	69
3.7 Desenvolvimento do programa para tratamento dos dados .....	70
4 ENSAIOS REALIZADOS .....	71
4.1 Determinação do fator de amortecimento da viga biapoiada.....	71
4.1.1 Estrutura ensaiada .....	71
4.1.2 Determinação das frequências naturais de vibração transversal da viga	73
4.1.3 Resultados dos ensaios de amortecimento.....	77
4.2 Medição das vibrações na estrutura ensaiada .....	84

<b>4.2.1 Procedimento utilizado .....</b>	<b>84</b>
<b>4.2.2 Cálculo da força excitadora (<math>F_{(t)}</math>) em função da rotação do motor. ....</b>	<b>86</b>
<b>4.2.3 Resumo dos ensaios executados.....</b>	<b>87</b>
<b>5 CONCLUSÃO .....</b>	<b>94</b>
<b>5.1 Desenvolvimentos futuros a serem implementados no sistema. ....</b>	<b>95</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>96</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Apresentação

A investigação dos fenômenos associados a vibração e conseqüentemente os trabalhos para sua avaliação e medição não são recentes. Desde que a humanidade começou a se interessar pela música o interesse pela vibração foi despertado. A música era muito apreciada pelos chineses, hindus, japoneses e egípcios já em 4000 a.C. Os instrumentos de corda foram encontrados em tumbas egípcias construídas a cerca 3000 a.C.

Durante todos esses anos, vários estudiosos deram importantes contribuições para o estudo da vibração, tais como Pitágoras e Aristóteles na antiguidade, Mersenne, Galileu, Newton, Bernoulli, D'Alembert, Euler e Lagrange, nos séculos XVII e XVIII. Com o desenvolvimento do Cálculo Integral e Diferencial por Newton, bem como da segunda lei de movimento, foram desenvolvidas as ferramentas necessárias para derivar as equações de movimento de um corpo em vibração. A solução teórica para o problema da corda vibratória foi desenvolvida pelo matemático inglês Brook Taylor em 1713, que também apresentou o famoso teorema para séries infinitas. Daniel Bernoulli, Jean D'Alembert e Leonard Euler aperfeiçoaram a solução com a introdução de derivadas parciais. (RAO, 2008).

Antes do desenvolvimento dos computadores digitais, os estudos de sistemas vibratórios eram simplificados com poucos graus de liberdade, resultando em modelos mais grosseiros. Com o aumento da velocidade de processamento, simultaneamente dos métodos computacionais, como o Método dos Elementos Finitos, proporcionaram ferramentas para análises de sistemas complexos com milhares de graus de liberdade, com precisão rapidez inimagináveis até alguns anos atrás.

## 1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver um sistema de medição e análise de vibrações, utilizando equipamentos simples, como placa coletora de dados, condicionador de sinal e um computador utilizando um software numérico, tratar esses dados de forma a obter os mesmos resultados obtidos com um equipamento profissional, vendido no mercado. Cita-se como vantagem o baixo custo do sistema proposto e facilidade de utilização.

## 1.3 Objetivos específicos

Construir um sistema de análise vibracional de baixo custo, capaz de adquirir e processar os sinais coletados e gerar dados de deslocamento, velocidade ou aceleração no domínio do tempo e espectro de frequência.

Desenvolver um programa em MatLAB para auxiliar na medição e análise de vibrações mecânicas.

Adquirir conhecimento do funcionamento de um analisador de vibrações e das técnicas experimentais de medição e tratamento dos sinais.

Construir, no laboratório de dinâmica, uma estrutura isostática composta por uma viga biapoiada e um excitador harmônico, capaz de gerar carregamentos dinâmicos na viga, cujos resultados podem ser calculados através de equações simplificadas.

Realizar ensaios para determinação do amortecimento estrutural e medição de vibrações na estrutura isostática.

## 1.4 Justificativa

Apesar de amplamente estudado nos últimos anos, o estudo da vibração ainda tem importância muito grande, pois está relacionado com as mais variadas atividades humanas.

Na música, a vibração é a principal fonte de som dos instrumentos musicais, sejam eles de corda, tambores, ou instrumentos de sopro. O funcionamento de um instrumento de corda é baseado na teoria das cordas estacionárias. A frequência

das ondas sonoras emitidas pelas cordas depende fundamentalmente do comprimento das mesmas, da tração a que estão submetidas e da sua densidade linear, que é a razão entre sua massa e seu comprimento. Desde modo, obtém-se a grande variedade de notas alterando-se algumas destas características. Por exemplo, cordas mais longas produzem sons mais graves, cordas mais grossas também. Existem instrumentos que possuem cordas com o mesmo comprimento, mas a tensão e a espessura variam, como a guitarra. Outros instrumentos possuem as cordas com o mesmo comprimento e diâmetro, variando apenas a tensão, como a cítara e a lira. Por último há aqueles em que as três características variam, como o piano.

Nos instrumentos de sopro a fonte do é provocado pela vibração de uma coluna de ar. Em alguns instrumentos a coluna de ar é contida por um ou mais tubos e a variação do timbre é obtida pela variação do comprimento efetivo do tubo, seja por meio de válvulas (pistões) ou variando o utilizando um tubo deslizante (trombone de vara) ou mesmo pela introdução de furos ao longo do comprimento do tubo (flautas).

Nos instrumentos de percussão a fonte de som também é vibratória, nos mais comuns, também chamados de membranofones, o som é gerado por uma membrana esticada que quando recebem um impacto ou raspagem vibram emitindo um som característico. Existem ainda aqueles instrumentos de percussão indiretamente percutidos seja por agitação ou fricção (chocalhos e reco-reco, por exemplo).

O piano que é um instrumento de corda, muitas vezes é classificado como instrumento de percussão, pois a vibração da corda é provocada pelo impacto de um martelo quando o pianista aciona uma das teclas.

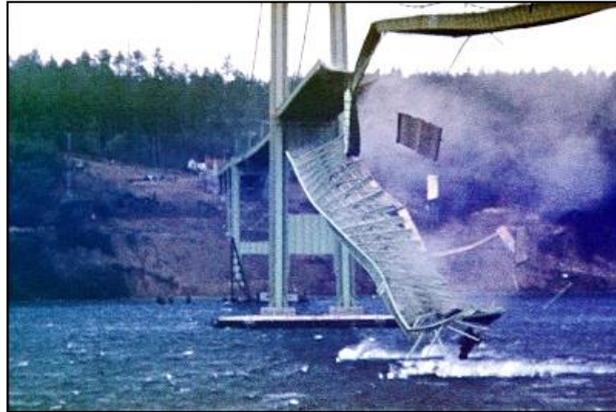
Na engenharia, o conhecimento da vibração é essencial nos projetos de máquinas, estruturas e fundações. As máquinas modernas trabalham com velocidades cada vez maiores, na busca de maior eficiência e produtividade. Com isto, a importância de um projeto mais cuidadoso, que leva em conta as solicitações dinâmicas é fundamental. Isto pode ser notado na produção de veículos que tendem a ser cada vez mais leves e operarem com velocidades cada vez maiores. No ramo da mineração, por exemplo, as peneiras vibratórias que antigamente funcionavam com acelerações de 3g, hoje atingem 5 g.

Na engenharia de estruturas, o estudo do amortecimento e das frequências naturais, durante a fase de projeto, bem como das respostas da estrutura às solicitações dinâmicas, sejam aquelas geradas por pessoas, equipamentos, ventos ou terremotos, são cada dia mais importantes. Isto porque as estruturas ficaram mais elevadas. A utilização de aços e concretos cada vez mais resistentes permitiu que estas estruturas ficassem, ao mesmo tempo, mais esbeltas.

O projeto de uma estrutura para suportar cargas dinâmicas tais como bombas centrífugas, compressores, turbinas, motores de combustão interna, geradores, peneiras e alimentadores vibratórios, requer um conhecimento adequado sobre vibrações mecânicas. Este conhecimento é essencial para uma avaliação consistente do grau de amortecimento, das frequências naturais principais, do deslocamento nos pontos críticos da estrutura, e do sistema de ligações.

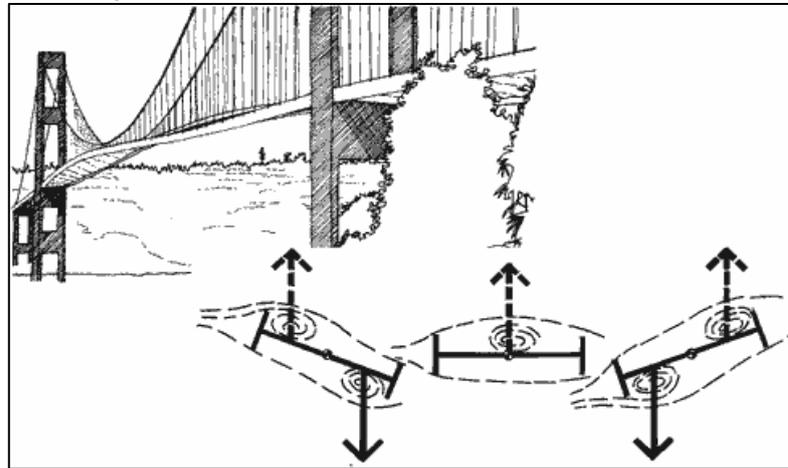
O exemplo mais didático sobre o colapso de uma estrutura submetida a um carregamento dinâmico foi a queda da Ponte de *Takoma Narrows*, no dia 7 de novembro de 1940. Desde a sua inauguração, no dia 1º de julho de 1940, a ponte apresentou problemas de flexibilidade elevada e, devido à forma de seu tabuleiro. Quando era atingida por ventos de 42 mph (67 km/h), vibrava acentuadamente. Estudos realizados na época mostraram que, o desmoronamento foi provocado por um fenômeno linear: a ressonância resultante do efeito de vórtice, causado pela passagem vento no sentido perpendicular a sua seção transversal, Esta seção tinha a forma de um I na posição horizontal, o que propiciava a formação do vórtice de Karmán. Esta hipótese foi descartada em 1990, por Lazer e McKenna, com a publicação do artigo “Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges”. Neste trabalho, os autores ressaltam que as causas do colapso não poderiam ser provocadas por ressonância devido à inconstância das forças externas e levantaram a hipótese que a torção que tracionava e comprimia os cabos da ponte era gerada por fenômenos não lineares. Zill apresenta um modelo similar simplificado ao modelo de Lazer e McKenna.

**Figura 1 - Colapso da Ponte Takoma Narrows**



Fonte: ELLIOT, 1940

**Figura 2 - Formação de vórtices no tabuleiro da Ponte Takoma Narrows**



Fonte: WASHINGTON STATE DEPARTMENT OF TRANSPORTATION

Nos últimos anos é cada vez mais importante o estudo dos efeitos da vibração sobre o corpo humano, quando submetido a solicitações dinâmicas de máquinas e veículos, como também por ferramentas industriais. Com o aumento na utilização dos analisadores de vibração, verificado nos últimos anos, uma grande quantidade de estudos nesta área tem sido publicados.

As vibrações transmitidas aos membros superiores do corpo humano por pela utilização constante de ferramentas elétricas manuais têm levado ao aparecimento de doenças funcionais conhecidas como síndrome da vibração mão-braço. G. MOSCHIONI e colaboradores (2011) pesquisaram as discrepâncias entre os dados de vibrações transmitidas ao corpo humano declarados pelos fabricantes de equipamentos, com medições diretas e pesquisa em banco de dados específicos. Utilizou-se o método proposto na norma ISO 5349 e o Guia para expressão de

incertezas em medições (GUM) também da ISSO. Foram comparadas as variabilidades previstas e as realmente observadas nos testes.

Na indústria também é encontrada uma grande variedade de equipamentos que são monitorados continuamente quanto ao nível vibracional de suas partes. Geralmente, mede-se apenas o nível global, não tendo indicação do espectro de frequências. Podemos citar bombas, moinhos, motores, e outros equipamentos de grande porte, que pela sua importância no processo produtivo são monitorados continuamente. O modo de se fazer este monitoramento é similar ao proposto neste estudo, apenas feito de forma mais simplificada. Instalam-se acelerômetros nos pontos de controle e, por meio de cabos e placas adequadas e um computador dotado de um software, o nível de vibração global daquele ponto pode ser monitorado continuamente. Este sistema mais simples, também é de custo muito inferior a um sistema complexo, com todas as funcionalidades de um analisador de vibrações, capaz de fazer o espectro de frequências do sinal e ainda compará-lo com um espectro de referência registrado para aquele ponto de medição. Técnicas auxiliares na análise modal também são encontradas em muitos aparelhos, dentre elas as mais importantes são: a representação gráfica do Círculo de Nyquist e o Diagrama de Bode. Isto evidencia a importância do conhecimento dos sistemas de aquisição e tratamento de dados, como o apresentado neste trabalho.

A Metrologia foi outra importante ferramenta utilizada nesta pesquisa, pois se trabalhou com um sistema de medição. A avaliação correta dos valores de medição obtidos (mensurando) é o objetivo central de todo o trabalho. A análise sistêmica do nosso sistema de medição é típica, compreendendo de três elementos funcionais que se repetem em praticamente todos os sistemas.

Por último, é importante ressaltar a importância do estudo dos Métodos Numéricos, onde as bases para a elaboração deste trabalho foram apresentadas. As Séries e Transformadas de Fourier são as ferramentas indispensáveis para o tratamento dos dados coletados.

O sistema pode ser definido em três módulos funcionais:

- O sensor/transdutor que é o acelerômetro;
- A unidade de tratamento do sinal, que é dividida em três partes: o condicionador de sinal, a placa coletora de dados e o software de processamento numérico;
- O dispositivo mostrador que é a tela do computador.

O sinal captado pelo transdutor normalmente é um sinal de baixa energia, difícil de ser diretamente indicado. A unidade de tratamento do sinal, além da amplificação da potência do sinal, pode assumir as funções de filtragem e processamento, etc.

O dispositivo mostrador recebe o sinal amplificado e tratado, e, através de recursos mecânicos, eletromecânicos, eletrônicos ou outro qualquer, transforma-o em um número inteligível pelo usuário. Produzindo então, uma indicação direta perceptível (ALBERTAZZI, 2004).

Por último, é importante conhecer os elementos fundamentais de um analisador de vibrações. A partir de um sistema de coleta de dados e de seu tratamento digital, com a utilização de filtros, pode-se executar estas funções fundamentais utilizando um computador dotado de um software adequado.

Um equipamento comercial tem custo muito elevado e, muitas vezes, a maioria das suas funções disponíveis não são utilizadas. Então, é feito um grande investimento em hardware e software para se utilizar apenas suas funções básicas. Por exemplo, o caso de uma verificação dinâmica de uma estrutura existente. Muitas vezes necessita-se apenas determinar o amortecimento e medir o deslocamento em alguns pontos para permitir uma análise dinâmica e propor uma solução de projeto.

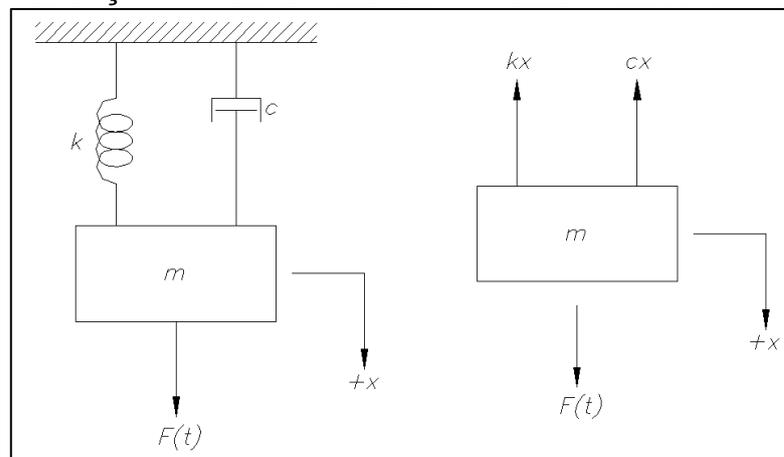
## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Breve revisão teórica das equações de vibração

Na engenharia, qualquer sistema vibratório seja ele um equipamento, dispositivo ou estrutura, que são sistemas contínuos, são sempre modelados inicialmente de uma maneira simplificada, discretizado na forma de um sistema massa-mola com poucos graus de liberdade. Na maioria das vezes, este modelo simplificado é suficiente para descrever com relativa precisão o sistema. Os resultados são obtidos de forma bastante rápida e geralmente proporcionam uma informação importante e relativamente confiável. Em seguida, o modelo é aperfeiçoado gradativamente, para se obter resultados mais precisos, utilizando sistemas com vários graus de liberdade, modelados em softwares de elementos finitos.

O sistema mais simples é um sistema massa-mola com um grau de liberdade, representado conforme a figura 03. Esta figura representa um sistema de vibração livre de um grau de liberdade. Vibração livre, devido a fato de que não existe excitação contínua no sistema ( $F(t)=0$ ). Após uma excitação inicial, seja de deslocamento ou velocidade inicial, o sistema terá a amplitude do movimento reduzida até cessar completamente a oscilação devido ao amortecimento.

**Figura 3 - Vibração de um sistema massa-mola-amortecedor com 1GL**



Fonte: RAO, 2008.

A solução para este sistema de 1GL com amortecimento viscoso, que discutiremos mais adiante, é obtida a partir da segunda Lei de Newton, aplicada ao diagrama de corpo livre indicado na figura 03. Nestes sistemas, a vibração é sempre modelada a partir das três grandezas indicadas na figura. A elasticidade que está relacionada à propriedade de armazenar energia e também associada à deformação elástica que o corpo sofre. A massa também se relaciona com a capacidade de armazenar energia cinética, ao potencial gravitacional e o amortecimento. O amortecimento é uma resistência que sempre se opõe ao movimento, devido às resistências passivas.

O modelamento matemático de um sistema vibratório de 1 GL pode ser encontrado em praticamente todos os livros de vibrações, bem como os de equações diferenciais. Foi adotada, de forma sucinta, a solução descrita por RAO (2008). A equação do movimento livre ( $F(t)=0$ ) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0 \quad (1)$$

onde  $m$  é a massa do sistema,  $c$  é o coeficiente de amortecimento,  $k$  é a constante elástica da mola e  $x$  é o deslocamento.

Para resolver a equação acima foi admitida uma solução na forma:

$$x(t) = C \cdot e^{st} \quad (2)$$

onde:  $C$  e  $s$  são constantes indeterminadas. Substituindo esta função na equação 1, foi obtida a equação característica:

$$m \cdot s^2 + c \cdot s + k = 0 \quad (3)$$

cujas raízes são :

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (4)$$

Essas raízes são duas soluções para a equação 1:

$$x_1(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t} \quad e \quad x_2(t) = C_2 \cdot e^{s_2 t} \quad (5)$$

Deste modo, a solução geral para a equação 1 é dada por uma combinação das duas soluções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  :

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 \cdot e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \quad (6)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias, determinadas pelas condições de contorno do sistema. Posteriormente, serão discutidos os diversos tipos de amortecimento.

O modelo matemático para um sistema de um GL submetido a vibração excitada harmonicamente será analisado a seguir.

Quando uma força  $F(t)$  excita o sistema, a equação do movimento é também determinada pela segunda Lei de Newton, representada pela equação 7.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = F(t) \quad (7)$$

Esta equação diferencial linear é não homogênea. Então, sua solução geral é obtida pela soma da solução homogênea  $x_h(t)$  e da solução particular  $x_p(t)$ . Como a vibração livre desaparece com o tempo, devido ao amortecimento, a partir de desde momento, apenas solução particular representará a vibração em regime permanente. A excitação dada por  $F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$  a equação do movimento fica:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (8)$$

A solução particular da equação 8, também é harmônica, foi admitida da seguinte forma:

$$x_p(t) = X \cdot \cos(\omega \cdot t - \emptyset) \quad (9)$$

onde:  $X$  e  $\emptyset$  são constantes a determinar, que denotam a amplitude e o ângulo de fase da resposta, respectivamente. Substituindo a equação 9 na equação 8, obtém-se:

$$X [(k - m \cdot \omega^2) \cdot \cos(\omega \cdot t - \emptyset) - c \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \emptyset)] = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (10)$$

Utilizando as seguintes relações trigonométricas

$$\cos(\omega t - \emptyset) = \cos \omega t \cdot \cos \emptyset + \text{sen} \omega t \cdot \text{sen} \emptyset$$

$$\text{sen}(\omega t - \emptyset) = \text{sen} \omega t \cdot \cos \emptyset - \cos \omega t \cdot \text{sen} \emptyset$$

na equação 10, e igualando os coeficientes de  $\cos \omega t$  e  $\text{sen} \omega t$  em ambos os lados da equação, obtém-se:

$$X[(k - m\omega^2) \cdot \cos \emptyset + c\omega \cdot \text{sen} \emptyset] = F_0$$

$$X[(k - m\omega^2) \cdot \text{sen} \emptyset - c\omega \cdot \cos \emptyset] = 0 \quad (11)$$

A solução da equação acima resulta nas equações 12 e 13.

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} \quad (12)$$

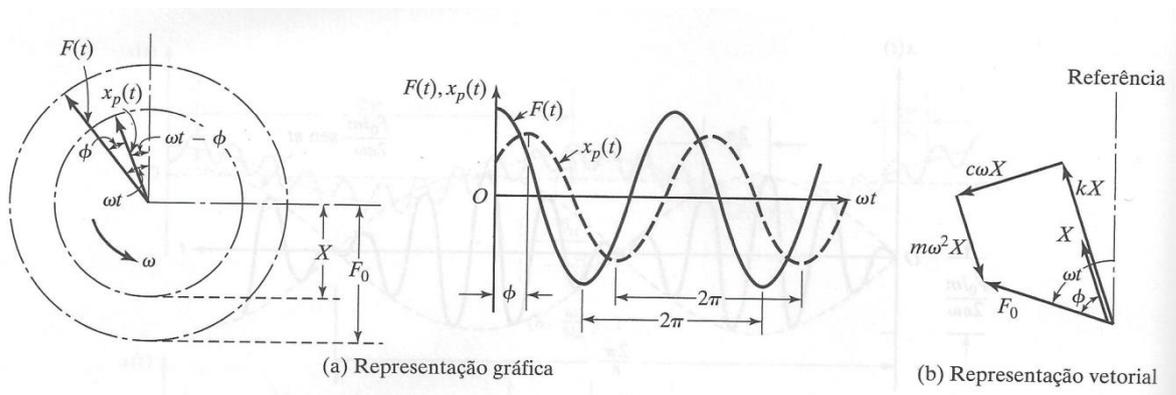
$$\emptyset = \text{tg}^{-1} \left( \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (13)$$

Inserindo as expressões de  $X$  e  $\phi$  acima na equação 9 resulta na equação 14, que é a solução particular da equação 8.

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \text{tg}^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)\right) \quad (14)$$

A figura 4 mostra o comportamento da Força excitadora e da resposta do sistema em regime permanente.

**Figura 4 - Força Excitadora e resposta do sistema.**



Fonte: RAO, 2008.

Os diversos termos da equação 10 são mostrados de forma vetorial na figura 4(b). Dividindo o numerador e denominador da equação 12 por  $k$  e fazendo-se as seguintes substituições:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{frequência natural não amortecida};$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} : \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n,$$

$$\delta_n = \frac{F_0}{k} = \text{deflexão devido a força estática } F_0,$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \text{razão de frequências}$$

obtem-se:

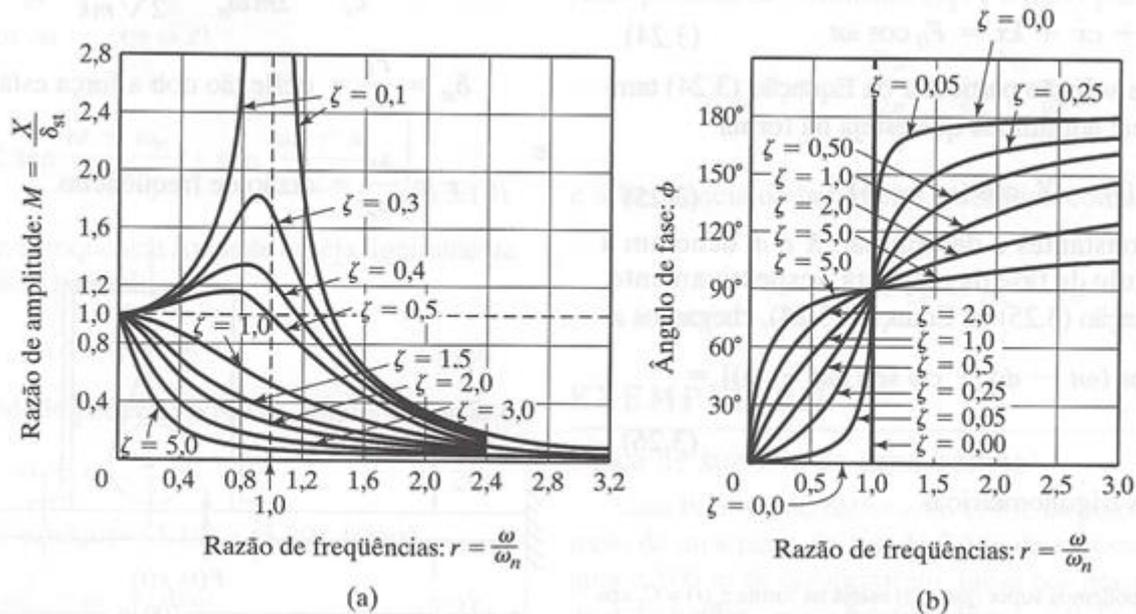
$$\frac{X}{\delta_n} = \frac{1}{\left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (15)$$

e

$$\vartheta = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{\frac{2\varepsilon\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right\} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \quad (16)$$

A quantidade  $M=X/d_{st}$  é denominada fator de amplificação ou coeficiente de amplitude. O gráfico das variações do fator de amplificação e do ângulo de fase com a razão de frequências pode ser observado na figura 5.

**Figura 5 – Variação de X e  $\vartheta$  com a razão de frequências.**



Fonte: RAO, 2008

Para um sistema de um GL submetido a uma excitação harmônica causada por um desbalanceamento rotativo, como neste estudo, ilustrado na figura 6, a solução teórica será detalhada a seguir.

O motor elétrico dotado de uma polia, na qual é fixado um segmento de anel, usinado preso por dois parafusos, constitui a massa excêntrica que excita a viga por meio da força centrífuga. Denotando por  $M$  a massa total do sistema e por  $m_{exc}$  a massa excêntrica desbalanceada, a força centrífuga será dada por:

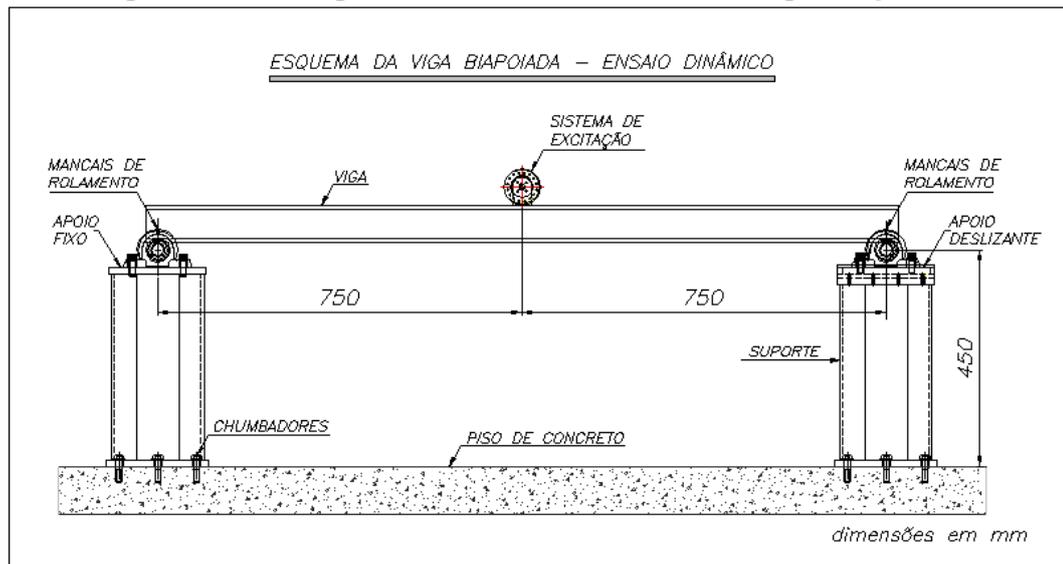
$$F_0 = m_{exc} \cdot e \cdot \omega^2 \quad (17)$$

onde:  $\omega$  é a velocidade angular e  $e$  excentricidade da massa.

Portanto, a equação do movimento será escrita por:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = m_{exc} \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \quad (18)$$

**Figura 6 - Carregamento dinâmico em uma viga biapoiada.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

A solução desta equação é dada por:

$$x_p(t) = X \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \varnothing) = \text{Im} \left[ \frac{m_{exc} \cdot e}{M} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \cdot |H(i\omega)| e^{(i\omega t - \varnothing) i\omega t} \right] \quad (19)$$

onde:  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida e  $X$  e  $\varnothing$  são a amplitude máxima do movimento e o ângulo de fase da vibração, respectivamente, dados por:

$$X = \frac{m_{exc} \cdot e \cdot \omega^2}{[(k - M \cdot \omega^2)^2 + (c \cdot \omega^2)]^{1/2}} = \frac{m_{exc} \cdot e}{M} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \cdot |H(i\omega)| \quad (20)$$

e

$$\varnothing = \text{tg}^{-1} \left( \frac{c \cdot \omega}{k - M \cdot \omega^2} \right) \quad (21)$$

As equações acima podem ser reescritas utilizando as relações  $r = \omega/\omega_n$ ,  $\zeta = c/c_c$  e  $c_c = 2 \cdot M \cdot \omega_n$ , resultando em:

$$\frac{M \cdot X}{m \cdot e} = \frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2]^{1/2}} = r^2 \cdot |H(i\omega)| \quad (22)$$

e

$$\varnothing = \text{tg}^{-1} \left( \frac{2 \cdot \zeta \cdot r}{1 - r^2} \right) \quad (23)$$

As equações 22 e 23 serão utilizadas no experimento da viga apoiada para determinação dos parâmetros de vibração em cada um dos ensaios realizados.

## 2.2 Transformadas de Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier descobriu no início do século XIX que qualquer função periódica, por mais complicada que seja, pode ser representada como a soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente. Existem alguns requisitos para que essa afirmação seja totalmente verdadeira. Portanto, qualquer função  $f(x)$  pode, segundo Fourier, ser escrita na forma da soma de uma série de funções seno e cosseno da seguinte forma geral:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (24)$$

Fourier conseguiu achar uma forma simples e elegante de calcular esses coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  da seguinte forma. Por exemplo: para se determinar o coeficiente  $a_3$ , multiplica-se ambos os lados da equação por  $\text{sen}(3x)$ .

Assim:

$$f(x) \cdot \text{sen}(3x) = a_0 \cdot \text{sen}(3x) + a_1 \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(3x) + a_2 \cdot \text{sen}(2x) \cdot \text{sen}(3x) + a_3 \cdot \text{sen}^2(3x) + \dots + b_1 \cdot \cos(x) \cdot \text{sen}(3x) + b_2 \cdot \cos(2x) \cdot \text{sen}(3x) + \dots,$$

verifica-se que todas as médias do lado direito da equação são nulas, exceto o termo correspondente a  $a_3$ . Então:

$$f(x) \cdot \text{sen}(3x) = \frac{1}{2} \cdot a_3 \quad (25)$$

Fazendo-se o mesmo para todos os valores de  $n$  em  $\text{sen}(nx)$  e  $\cos(nx)$ , verifica-se que:

$$a_0 = f(x) = \text{média de } f(x);$$

$$a_n = 2 \cdot \text{média de } f(x) \cdot \text{sen}(nx);$$

$$b_n = 2 \cdot \text{média de } f(x) \cdot \cos(nx);$$

Calculando todas essas médias, encontram-se todos os coeficientes da Série de Fourier.

A Transformada de Fourier de um sinal  $x(t)$  é definida por:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (26)$$

onde  $x(t)$  é uma função real no tempo e  $X(\omega)$  é uma função complexa da frequência.

As condições para a existência da Transformada de Fourier são complicadas, porém é suficiente que a função  $x(t)$  seja absolutamente integrável. Os sinais encontrados na prática não apresentam esta dificuldade. Entretanto, sinais idealizados, tais como sinais senoidais que atuam indefinidamente no tempo, apresentam dificuldades para sua normalização.

A Transformada de Fourier é a ferramenta essencial para se obter a transformação do sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência. Esta representação, denominada espectro de frequência, é a maneira mais usual de representar as características de um sinal captado. Através do espectro de frequência pode-se avaliar as diversas frequências componentes do sinal e a magnitude de cada um destes componentes.

Em um ensaio dinâmico, a resposta à excitação captada pelo acelerômetro, que é um sinal analógico, é discretizada em uma série de pontos no tempo pelo hardware utilizado, como por exemplo, a placa coletora de dados. Mas, a obtenção da função que caracteriza o sinal utilizando diretamente a Transformada de Fourier, como indicado na equação 25, torna-se, às vezes, muito difícil. Uma solução encontrada para se obter o espectro de frequência, denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT), na qual a integral da equação 25 é substituída pelo somatório:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{\frac{i2\pi nm}{N}} \quad m = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (27)$$

onde  $x(n)$  é o conjunto de pontos que representa o sinal no tempo e  $N$  é o número de pontos amostrados. Evidentemente, que quanto maior o número de pontos amostrados melhor a resolução do espectro de frequências e maior o tempo computacional gasto.

Visando-se otimizar a utilização da Transformada Discreta de Fourier, J. W. Cooley (IBM) e J. W. Tukey (Bell Labs) desenvolveram em 1965 um algoritmo para executar a equação 26 de forma mais rápida, reduzindo o trabalho computacional, que foi denominado de Transformada Rápida de Fourier. O algoritmo da FFT divide a sequência  $x(n)$  em duas sequências menores, uma com os coeficientes de índices par e outra com os coeficientes de índices ímpar. Calculando a DFT para cada uma delas e depois combinando-as de modo a se obter a DFT da sequência completa. Para se resolver a DFT de uma amostra de  $N$  pontos são necessárias  $2 \cdot N^2$

multiplicações reais, enquanto utilizando-se o algoritmo da FFT são necessárias  $4.N.(\log_2 N)$  multiplicações reais. Portanto, para uma amostra de 1000 pontos o número de multiplicações para se resolver a DFT é de 2.000.000, enquanto para se resolver utilizando FFT são necessárias 39.863 multiplicações, isto é aproximadamente 50 vezes menor.

## **2.3 Processamento digital de sinais**

### **2.3.1 Introdução**

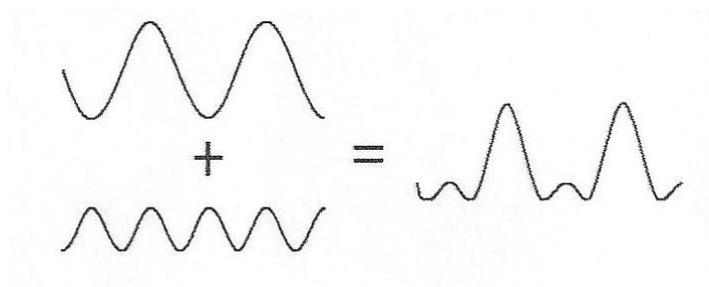
A análise e processamento de sinais elétricos constitui uma área fundamental da engenharia. Mesmo quando o problema não é especificamente elétrico, sempre que é necessário se fazer alguma medição, utilizando algum tipo de transdutor, a saída do medidor é sempre um sinal elétrico. Dentro os diversos tipos de transdutores pode-se citar os acelerômetros e células de carga na engenharia mecânica, os eletrodos, utilizados em exames cardiológicos, na medicina e medidores de pH e condutividade, na química.

É muito vantajoso se transformar os parâmetros físicos em sinais elétricos, porque desta forma pode-se trabalhar estes sinais nos domínios do tempo, da frequência e modal. Para isto se utiliza os vários equipamentos disponíveis no mercado e no caso deste estudo, um software de processamento numérico.

Registrar um parâmetro no domínio do tempo significa registrar o seu valor constantemente num certo intervalo de tempo. Por exemplo, registrar uma oscilação de um sistema durante um determinado tempo e representá-la num gráfico deslocamento versus tempo. Trabalhando com sinal elétrico, tem-se a vantagem de poder ajustar o ganho para obter valores mais perceptíveis e calibrar a medição.

Utilizando FFT, o sinal da figura 7 pode ser decomposto num gráfico de 3 dimensões. Neste gráfico, a abcissa é a amplitude do sinal, uma das ordenadas é o tempo, mostrando o sinal do domínio do tempo, e a outra ordenada é a frequência, mostrando o sinal no domínio da frequência. A forma como estes domínios se relacionam pode ser vista de uma maneira muito simplificada na figura 8.

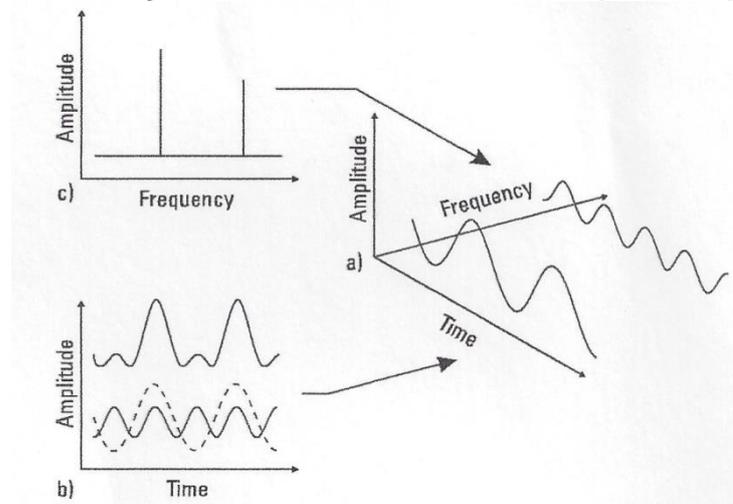
**Figura 7 – Sinal composto de 2 senóides de frequências diferentes.**



**Fonte: HP AGILENT.**

Analisar o espectro de frequência de um sinal é de extrema importância, pois somente neste domínio é possível notar a presença de sinais de pequena amplitude, junto com aqueles de grande amplitude. Muitas vezes se utiliza escala logarítmica para facilitar a percepção destes sinais de pequena amplitude.

**Figura 8 – Relação entre os domínios do tempo e frequência.**



**Fonte: HP AGILENT.**

Mas a análise de um sinal no domínio da frequência não se restringe a análise espectral e é muito utilizada na análise do comportamento de sistemas mais complexos, como estruturas e equipamentos, para se determinar como esses sistemas respondem a uma determinada solicitação. Por exemplo, como uma estrutura se deformará quando solicitada por ventos, ou como uma barreira acústica absorverá um sinal sonoro.

Por último, o Domínio Modal completa a gama de análises que podem ser estudadas. O objetivo da Análise Modal é determinar a forma e a magnitude das deformações estruturais em cada modo distinto de vibração, que uma vez determinados, nos indica como podemos alterar a vibração global de uma estrutura ou equipamento. Isto pode ser feito alterando a rigidez e/ou o amortecimento da estrutura em determinados pontos. A relação entre os domínios modal, do tempo e frequência não é tão direta quanto a relação entre os domínios do tempo e da frequência, pois esta é influenciada pelas propriedades da estrutura/equipamento, independentemente da excitação.

### **2.3.2 Captação de sinais - acelerômetros**

Em projetos de acelerômetros, os elementos piezoelétricos são arranjados de tal forma que eles sejam submetidos a uma carga na forma de uma massa ou um conjunto de massas e, ainda, de uma mola ou anel pré-tensionado. Toda essa montagem é assentada numa base, com o sistema massa mola preso ao topo e protegida por um invólucro protetor resistente.

#### **Tipos de acelerômetros piezoelétricos**

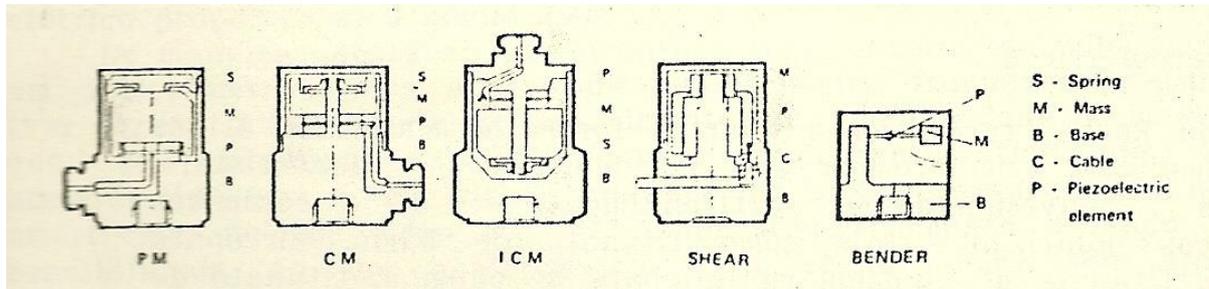
Quando submetidas à vibração, as massas exercem uma força variável sobre os elementos piezoelétricos que é diretamente proporcional à vibração. Para frequências que se situem bem abaixo da frequência de ressonância da montagem, a aceleração da massa será idêntica à aceleração da base, e o nível de saída será proporcional à aceleração a que o acelerômetro foi submetido.

As tensões e deformações resultantes do elemento piezoelétrico podem ser:

- a) - cisalhamento da espessura;
- b) - cisalhamento superficial;
- c) - compressão da espessura;
- d) - compressão transversal.

O projeto e a denominação de acelerômetros variam de acordo com o modo de deformação. Os cinco tipos de projetos de acelerômetros piezoelétricos são mostrados na figura 9.

**Figura 9 – Configurações típicas de acelerômetros.**



Fonte: BRUEL & KJAER, 1986.

O tipo compressão é o mais comumente usado, porque favorece uma maior sensibilidade para uma dada frequência de ressonância em relação a outros projetos, e é de construção extremamente resistente. Nessa categoria temos os seguintes tipos:

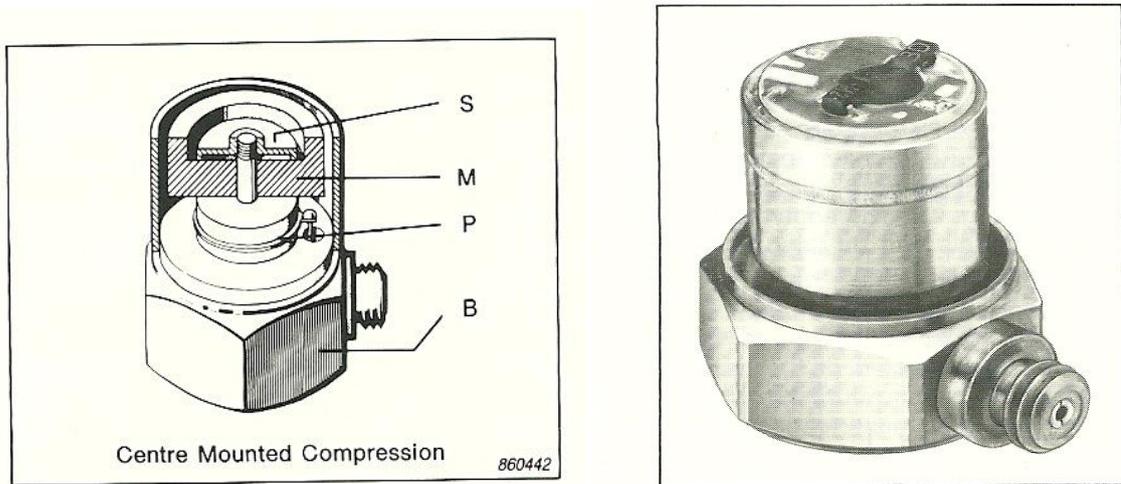
PM – O tipo de montagem periférica possui alta razão sensibilidade-massa e altas frequências de ressonância. A sensibilidade acústica, a sensibilidade a forças na base e a sensibilidade a transientes de temperatura são um pouco mais elevadas, devido ao seu invólucro fazer parte do sistema massa mola. O sistema massa mola pré-carregado é menos rígido que o invólucro para não influenciar o desempenho do acelerômetro por condições externas que estejam afetando a parede do invólucro.

CM – O tipo de montagem central combina as propriedades de resistência e alta frequência de ressonância de projeto PM com um isolamento mecânico intensificado entre o elemento sensor (sistema massa mola básico) e o invólucro do acelerômetro, que age apenas como capa protetora.

ICM – O tipo de montagem de centro invertido proporciona um melhor isolamento de forças na base em relação ao projeto CM, mas sofre leve redução na frequência de ressonância devido à elasticidade das paredes que suportam o elemento sensor.

O tipo cisalhamento pode ser reduzido em tamanho, proporcionando a construção de acelerômetros em miniatura. Ele pode ser isolado das influências adversas do meio transmitidas através do invólucro e possuir frequência ressonante razoavelmente alta. Acelerômetros anulares de cisalhamento podem ter como base uma forma central triangular. Massas sísmicas são solidamente conectadas através de anéis pré-carregados de alta tensão, os quais aumentam a sensibilidade, a frequência de ressonância e a temperatura máxima de operação, enquanto melhora a linearidade do sinal de saída e a sensibilidade de forças na base.

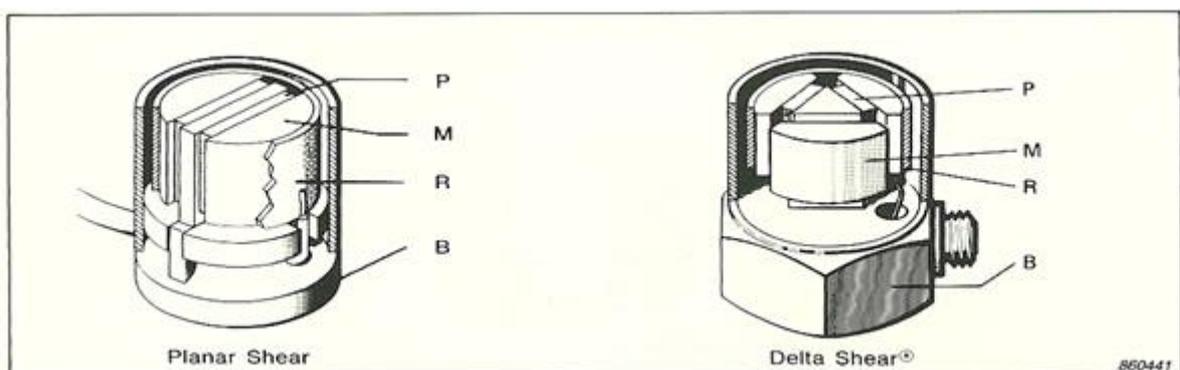
**Figura 10 - Montagem tradicional de acelerômetros de compressão.**



Fonte: BRUEL & KJAER, 1986.

O acelerômetro tipo Bender tem sensibilidade extremamente alta, particularmente onde respostas de baixa frequência são importantes. Os efeitos das forças são acentuados através da massa suporte.

**Figura 11 – Descrição dos componentes de um acelerômetro.**



Fonte: BRUEL & KJAER, 1986.

## **Calibração**

Para calibrar um acelerômetro de vibração é preciso determinar com precisão a sua sensibilidade (em mV/g ou pC/g) em várias frequências de interesse. O teste de calibração envolve o acoplamento do acelerômetro diretamente a um calibrador considerado padrão com certificado de calibração. Conecta-se um terminal do acelerômetro e faz-se a condução do par acoplado com um excitador de vibrações em vários níveis de frequências e aceleração (g). Desde que os acelerômetros sejam acoplados, executando o mesmo movimento, a calibração padrão do acelerômetro pode ser precisamente "transferida" para o acelerômetro de teste a ser calibrado.

Duas variáveis devem ser percorridas para uma completa verificação de um transdutor:

- a) amplitude - calibração estática (frequência constante)
- b) frequência - calibração dinâmica (amplitude constante)

Cada uma destas variáveis deve ser aumentada de forma monotônica, em intervalos, para a coleta da resposta do transdutor, em 2 ciclos percorrendo o domínio 0-máximo-0-máximo-0. A mudança de um nível para outro deve ser feita sem choques e sem a parada do equipamento, para não invalidar a caracterização de histerese ou repetibilidade.

Não cabe aqui, incluir o relatório completo da calibração feita nos acelerômetros utilizados nos testes, apenas citar que foi utilizado um *shaker* modelo 394C06 e o mesmo sistema de coleta e processamento de dados, descritos no capítulo 4. Os resultados apresentaram erros inferiores a 1%.

Foi feita a opção por uma configuração alternativa, medindo-se a aceleração através das grandezas fundamentais de espaço e tempo: a frequência da estimulação já é conhecida e tem a precisão do cristal do microprocessador. Todos os processos aplicados até a aceleração mecânica final podem deslocar a fase da vibração, mas não a frequência, que, portanto, não necessita ser adquirida. A estimulação é harmônica simples, e os pulsos são totalizados entre duas passagens pelo zero do gerador de frequência, gerando uma amplitude pico-a-pico da posição em relação à mesa. A partir da amplitude do deslocamento e da frequência, a amplitude da aceleração RMS é calculada pela fórmula:

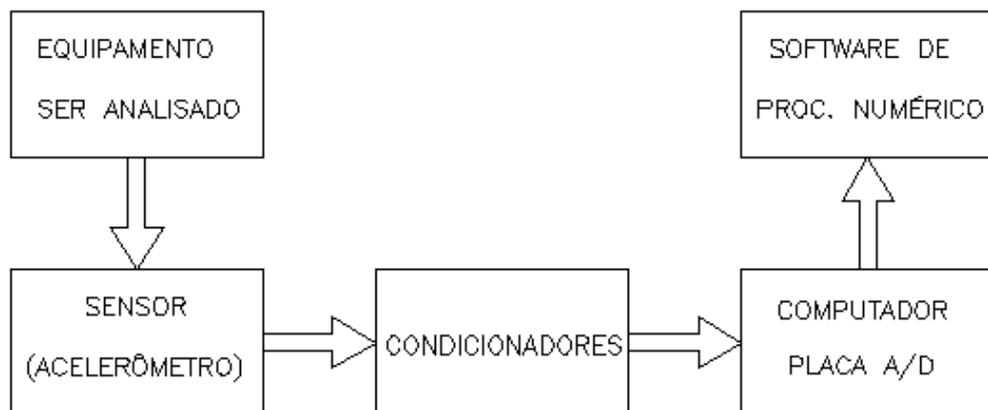
$$A_{rms} = D_{pp}^2 \cdot \omega \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (28)$$

e serve de referência ao acelerômetro em teste. Esta relação será válida se for possível conseguir que o movimento da mesa seja uma senoide simples, com baixa distorção harmônica.

### 2.3.3 Aquisição e tratamento dos sinais

Um sistema de aquisição de dados pode ser esquematizado genericamente como ilustrado na figura 12.

**Figura 12 – Esquema do sistema de aquisição e tratamento dos dados.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

O processo ou sistema é o objeto em análise, seja uma estrutura, equipamento, ou uma fonte sonora, por exemplo. Neste caso, o objeto da medição é a aceleração da estrutura ou equipamento. Os sensores são os acelerômetros, descritos no item anterior. Foi utilizado também um condicionador de sinal, para amplificar, atenuar ou filtrar o sinal coletado. No caso de análise vibracional sua utilização é quase sempre necessária, visto que o sinal é bastante fraco e precisa ser amplificado. Em seguida, o sinal passa por uma placa eletrônica conversora A/D, que como o nome indica converte o sinal analógico em digital, permitindo o processamento através de softwares numéricos em um computador.

Existem placas no mercado que já são fornecidas com uma espécie de condicionador, dispensando o uso deste equipamento. Essas placas podem ser instaladas no gabinete, tal como a placa PCI 6251 da *National Instruments* usada

neste experimento, ou podem ser externas, conectadas ao computador por uma porta USB, por exemplo.

Finalmente, utilizando-se softwares específicos, os dados são trabalhados e os resultados da medição, seja no domínio do tempo ou da frequência, podem ser visualizados e analisados.

### **Amostragem do Sinal**

Cuidados especiais devem ser tomados no processo de amostragem. A escolha incorreta da frequência de amostragem, por exemplo, pode levar a resultados e, conseqüentemente, conclusões completamente erradas.

O erro mais comum denominado *aliasing*, ocorre devido à escolha incorreta da frequência de amostragem. Por isto, é importante destacar aqui, o teorema de “Nyquist-Shannon”, que pode ser resumido da seguinte forma:

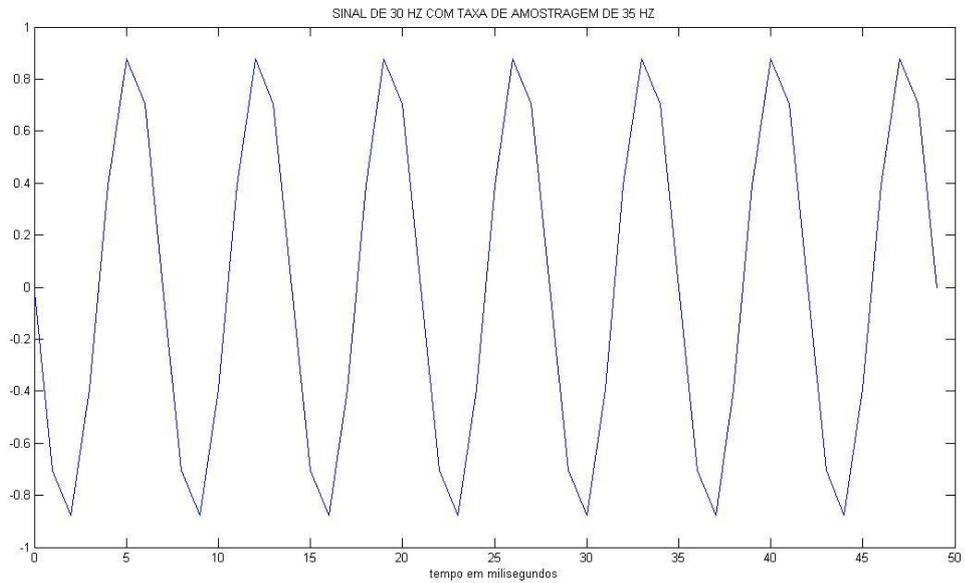
***“A frequência de amostragem de um sinal analógico, para que possa ser reconstituído com o mínimo de perda de informação, deve ser igual ou maior a duas vezes a maior frequência do espectro deste sinal.”***

Seja  $B$  a maior frequência do espectro de um sinal a ser amostrado, a frequência de amostragem,  $f_s$ , deste sinal deve ser pelo menos igual a  $2B$ . Na prática, foi utilizado sempre  $f_s > 4B$ .

Para ilustrar o fenômeno de *aliasing*, são mostrados a seguir dois gráficos do sinal no tempo captados com taxas de amostragem diferentes. Um sinal na frequência de 30 Hz, capturados com taxa de amostragem de 35 Hz (figura 13) e com taxa de amostragem de 120 Hz (figura 14).

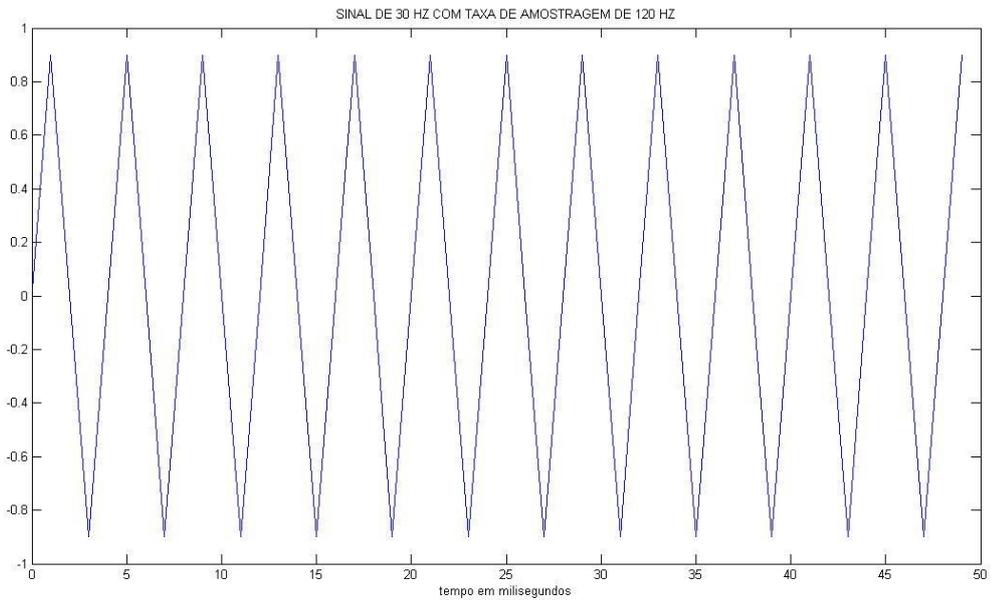
Comparando-se as figuras 13 e 14 pode-se notar que, na figura 13, devido à baixa taxa de amostragem o gráfico apresenta uma forma assimétrica. Comparando os gráficos do espectro de frequência do mesmo sinal com estas duas taxas de amostragem, nota-se que o espectro de frequência do sinal da figura 15 indica uma frequência da oscilação completamente incorreta (5 Hz), captada em uma frequência de amostragem de 35 Hz. Entretanto, com a taxa de amostragem de 120 Hz, o espectro de frequência da figura 16 apresenta o valor correto, 30 Hz.

**Figura 13 – Sinal de 30 Hz captado com frequência de amostragem de 35 Hz.**

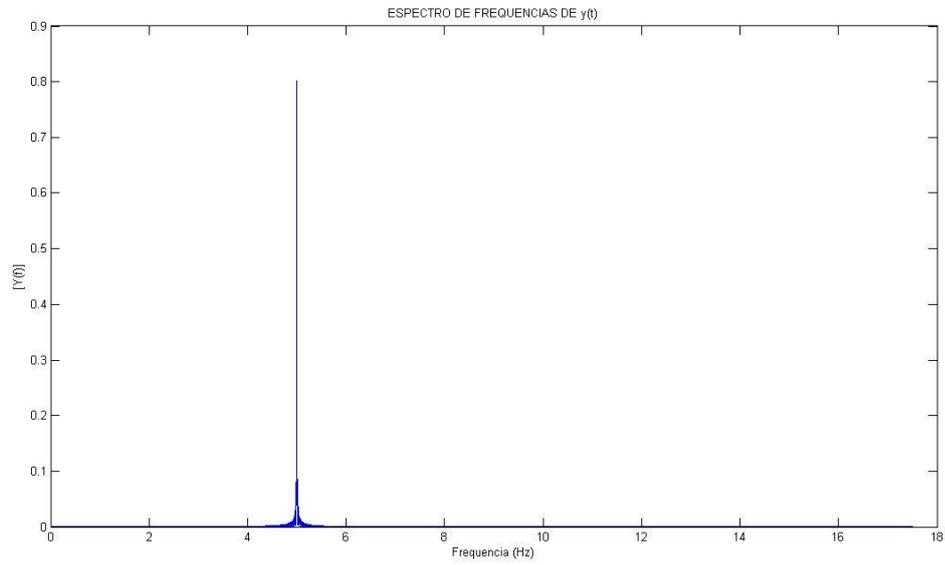


**Fonte: Elaborado pelo autor.**

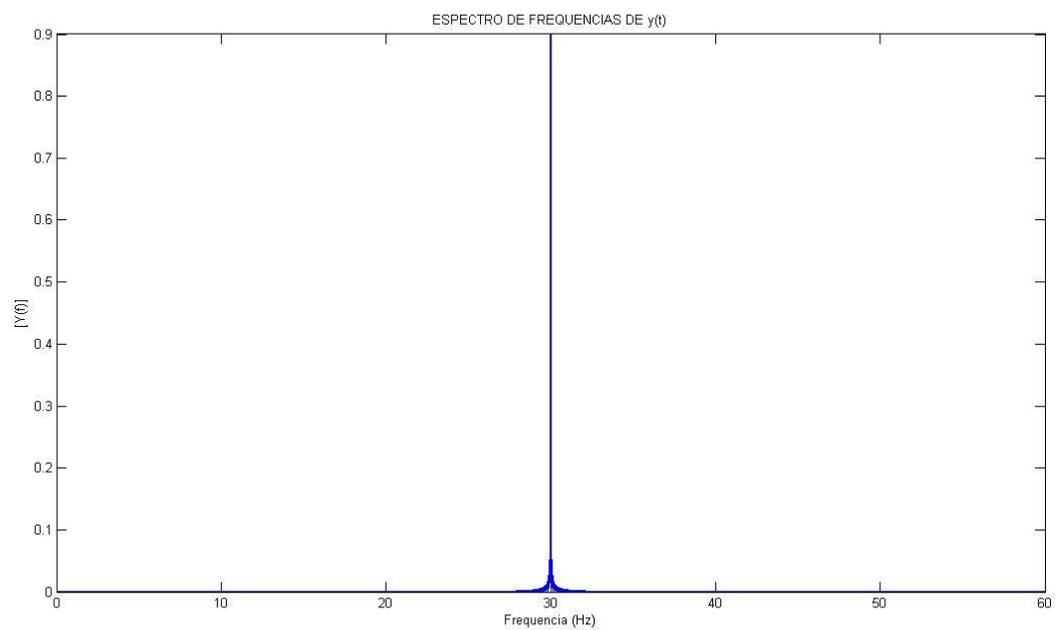
**Figura 14 – Sinal de 30 Hz captado com frequência de amostragem de 120 Hz.**



**Fonte: Elaborado pelo autor.**

**Figura 15 – Espectro de frequência da figura 13.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 16 – Espectro de frequência da figura 14**

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.3.4 Filtros

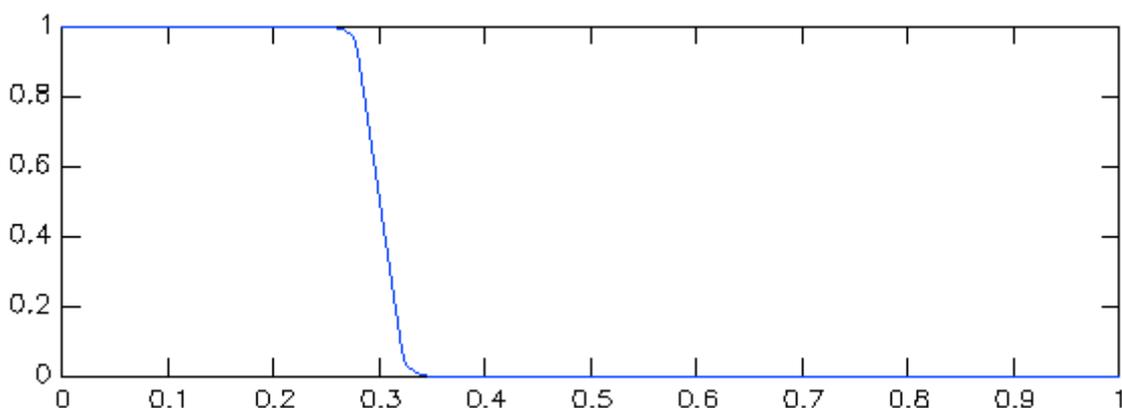
Os filtros têm a finalidade de permitir a passagem de certos componentes de um sinal numa determinada faixa de frequência, retendo os componentes não desejados. Eles podem ser analógicos ou digitais. Os filtros analógicos constituem um tipo de dispositivo elétrico que utiliza circuitos, que podem ser ativos ou passivos

Os filtros digitais são obtidos por meio de algoritmos que executam funções aplicadas ao sinal digitalizado. Essas funções dependem de como são tratadas as entradas de sinal no domínio da frequência. Normalmente, os filtros deixam passar livremente algumas frequências enquanto retêm ou atenuam outras. Eles são denominados como filtros passa-baixa, passa-alta, filtro passa-banda, filtro rejeita-faixa.

#### a) Filtros Passa-baixa ou Lowpass

Esses filtros deixam passar as frequências a partir de 0 Hz até um limite escolhido e retêm ou atenuam as frequências não desejadas acima deste limite, que podem ser chamadas de ruído. A figura 17 mostra uma curva de atenuação típica de um filtro passa-baixa, com frequência de corte de 30%.

**Figura 17– Curva de atenuação de um filtro passa-baixa com frequência de corte 30%.**

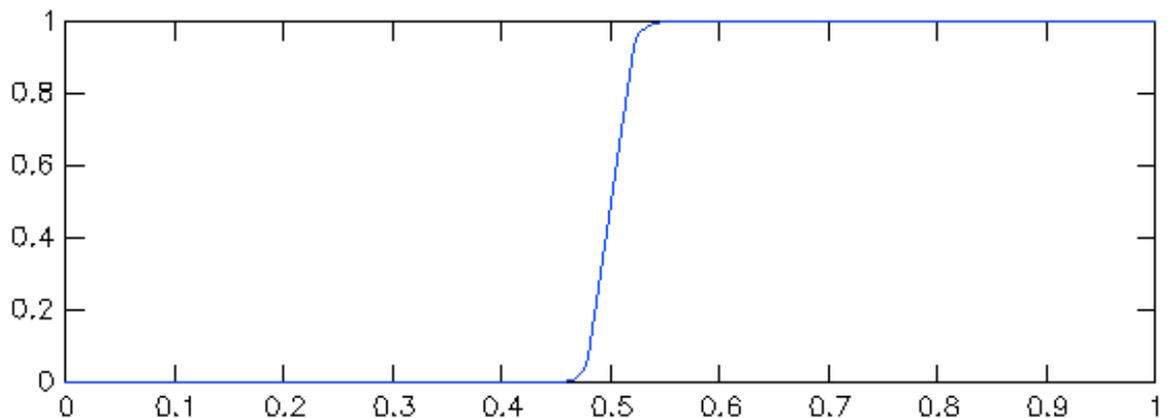


Fonte: WEEKS, 2010.

**b) Filtros Passa-alta ou Highpass**

De modo contrário, os filtros passa-alta impedem ou atenuam frequências abaixo de um certo limite (*cutoff*) e deixam passar as frequências superiores.

**Figura 18 – Curva de atenuação de um filtro passa-alta com frequência de corte 50%.**

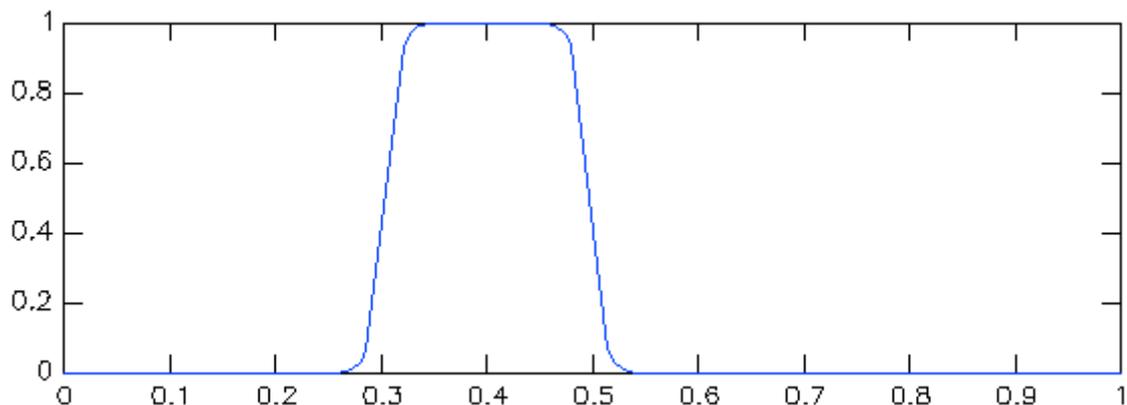


Fonte: WEEKS, 2010.

**c) Filtros Passa-banda ou Bandpass**

Esses filtros deixam passar as frequências compreendidas em uma banda, limitadas por uma frequência de corte inferior e outra superior. A figura 19 mostra a curva de atenuação típica de um filtro passa-banda, com frequência inferior de corte de 30% e frequência de corte superior de 50%.

**Figura 19 – Curva de atenuação típica de um filtro passa-banda com frequências de corte de 30% e 50%.**



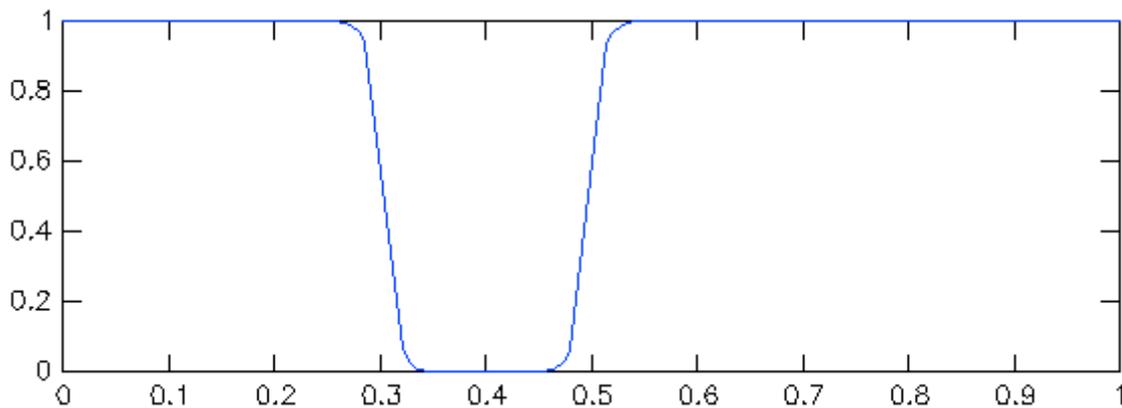
Fonte: WEEKS, 2010.

#### d) Filtros Rejeita-Banda ou Bandstop

Funciona de modo inverso ao filtro passa-banda, pois neste as frequências compreendidas entre o limite inferior e superior da banda são eliminadas ou atenuadas. A figura 20 mostra a curva de atenuação típica do filtro rejeita-banda.

Existem ainda outros tipos de filtros, como diferenciadores, passa-tudo e adaptativos, que não serão descritos aqui.

**Figura 20 – Curva de atenuação típica de um filtro rejeita-banda com frequências de corte de 30% e 50%.**



Fonte: WEEKS, 2010

## 2.4 Janelamento

No processamento digital de sinais trabalha-se com uma amostra finita de dados, isto pode resultar numa forma de onda truncada, com algumas características diferentes do sinal original. O janelamento, *windowing*, é uma maneira de aumentar as características espectrais do sinal captado, minimizando as formas de onda truncadas. Além disso, é importante para definição do período de observação do sinal, podendo ainda ser utilizado para separação de um sinal de baixa amplitude de outro de grande amplitude em frequências muito próximas. O janelamento é representado por uma função, portanto, aplicar um janelamento no sinal significa multiplicar o sinal por esta função.

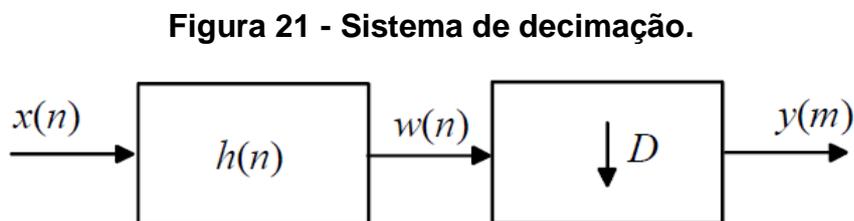
Existem vários tipos de janelas e algumas delas já estão implementadas em programas como o LabVIEW e o MatLAB, tais como:

- a) Janela retangular
- b) *Hanning*
- c) *Hamming*
- d) Kaisal-Bessel
- e) Triangular
- f) *Flaptop*
- g) Exponencial

A definição do tipo de janela a ser utilizada depende de algum conhecimento prévio do sinal a ser analisado. Quando isto não é possível, é necessário experimentar métodos diferentes e optar pelo que melhor se adapta à necessidade.

## 2.5 Decimação

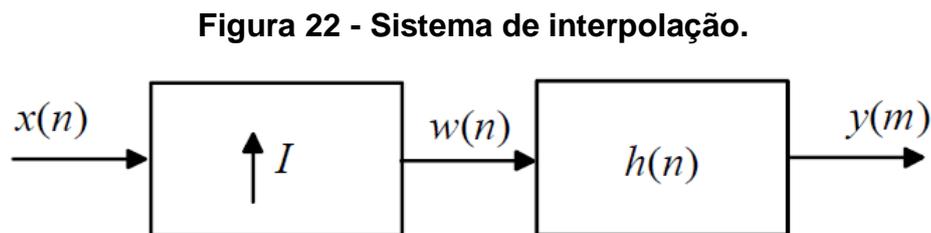
Muitas vezes, para se evitar o *aliasing* capta-se o sinal com frequência muito superior à necessária, isto implica num número excessivo de amostras. A decimação é um processo para reduzir o número de amostras a serem amostradas por um fator  $D$  inteiro. Normalmente, não podemos simplesmente reduzir o número de amostras a serem processadas, sendo necessária a utilização de um filtro passa-baixa, conforme indicado no esquema da figura 21.



Fonte: SÁ, 2001.

## 2.6 Interpolação

De forma inversa à decimação, a interpolação consiste em aumentar a frequência de amostragem de um sinal de um fator inteiro  $I$ , conforme indicado no esquema da figura 22. A interpolação e a decimação são operações duais.



Fonte: SÁ, 2001.

## 2.7 Amortecimento estrutural

O amortecimento é o meio pelo qual a energia mecânica de um sistema é dissipada, principalmente pela geração de calor e energia. Ele determina a amplitude da vibração na ressonância e o tempo em que o fenômeno persiste depois de cessada a excitação.

O estudo do amortecimento tem importância fundamental na engenharia mecânica e civil. Na engenharia mecânica e metalúrgica, por exemplo, no caso de danos ocorridos em uma peça, seja por impacto ou choque térmico, a tensão induzida na mesma provoca a nucleação e o aparecimento de trincas e micro trincas, que prejudicam as propriedades do material, reduzindo sua vida útil.

A monitoração da propagação dessas trincas pode ser feita monitorando-se o amortecimento do material, que aumenta devido ao atrito entre as superfícies destas trincas. Este monitoramento é também usualmente aplicado em análise de dano de máquinas e motores.

No caso da engenharia civil, destacam-se as aplicações na engenharia de estruturas, onde o estudo da integridade das mesmas, quando submetidas a esforços dinâmicos, tem cada vez mais importância. Além das aplicações bem conhecidas no cálculo de edifícios submetidos ao carregamento de vento e de

abalos sísmicos, cada dia torna-se mais importante seu estudo em aplicações menos evidentes, como carregamentos dinâmicos, oriundos de equipamentos industriais, tais como peneiras vibratórias, compressores, motores, ventiladores, etc. Até mesmo solicitações dinâmicas oriundas de pessoas se movimentando em uma determinada frequência em uma academia de ginástica em um andar de um edifício, pode causar desconforto nos andares adjacentes. Por isto, alguns países já elaboraram normas para se considerar adequadamente essas solicitações. Portanto, prédios que antes só necessitavam de análise estática, passaram a exigir também a análise dinâmica para o seu dimensionamento adequado. Neste aspecto, o amortecimento entra como um item de importância neste cálculo.

### **2.7.1 Tipos de amortecimento**

O amortecimento pode ser classificado de três formas:

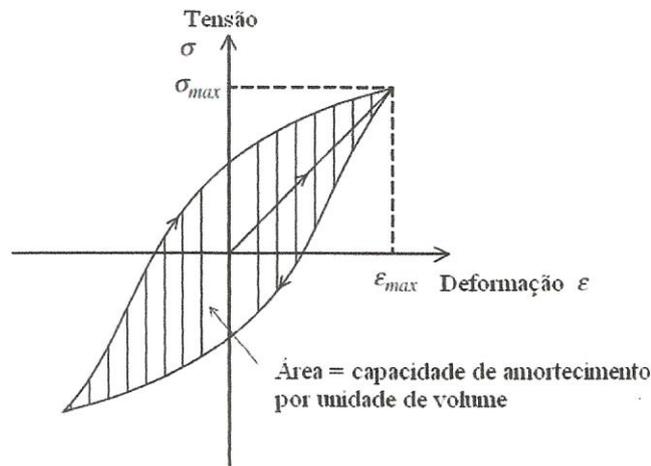
- a) Amortecimento interno ou atrito interno;
- b) Amortecimento estrutural;
- c) Amortecimento fluídico.

#### **2.7.1.1 Amortecimento interno**

O amortecimento interno ou atrito interno está associado a defeitos de microestrutura, tais como impurezas, contornos de grão do material, efeitos causados por gradientes locais de temperatura, efeitos magnéticos, movimento de discordâncias do material, etc.

Utilizam-se dois modelos para se representar o amortecimento interno: o amortecimento viscoelástico e o amortecimento histerético. Atualmente, o termo histerético é considerado inadequado, porque ambos apresentam uma curva de histerese, fenômeno onde a tensão  $\sigma$  e a deformação  $\epsilon$ , são relacionadas como mostrado na figura 23.

**Figura 23 – Curva de histerese típica de amortecimento.**



Fonte: DE SILVA, 2007.

O amortecimento por unidade de volume, chamado de  $d$  é dado pela integral cíclica:

$$d = \oint \sigma \cdot \varepsilon \quad (29)$$

Todo amortecedor tem uma curva de histerese correspondente. Neste caso, a integral cíclica da tensão com o respectivo deslocamento, que corresponde à área da curva de histerese é igual ao trabalho realizado pela força de deslocamento. O resultado da integral é a energia dissipada em cada ciclo do movimento.

### **2.7.1.2 Amortecimento viscoelástico ou viscoso**

Como sabemos, o movimento de um sistema pode ser descrito por equações diferenciais, baseadas na Lei de Newton, de acordo com o número de graus de liberdade (GDL), isto é do número de variáveis independentes necessárias para descrever o sistema.

No modelo viscoelástico admite-se que o amortecimento é de natureza viscosa e a força de amortecimento viscoso,  $F$ , é proporcional a velocidade  $dx/dt$ , ou  $v$ , e pode ser expressa como:

$$F = c \cdot \frac{dx}{dt} \quad (30)$$

onde  $c$  é uma constante de proporcionalidade e  $dx/dt$  é a velocidade de deslocamento de uma massa em relação ao um ponto fixo.

Um sistema com um grau de liberdade com um amortecedor viscoso é mostrado na figura 3. Seja  $x$  a medida do deslocamento em relação à posição de equilíbrio da massa  $m$ , aplicando-se a Lei de Newton para a equação de movimento obtém-se:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -c \cdot \frac{dx}{dt} - k \cdot x \Rightarrow m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0 \quad (1)$$

Para a solução da equação acima, adotou-se uma solução da forma:

$$x(t) = C \cdot e^{st} \quad (2)$$

onde  $c$  e  $s$  são constantes indeterminadas.

A equação característica do movimento tem a seguinte forma:

$$s_{1,2} = \frac{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk})}{2m} = \frac{c}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (4)$$

Essas raízes  $s_1$  e  $s_2$  representam as seguintes soluções para a equação diferencial:

$$x_1(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t} \quad e \quad x_2(t) = C_2 \cdot e^{s_2 t} \quad (5)$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 \cdot e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \quad (6)$$

Pode-se, então, definir um parâmetro importante que é o amortecimento crítico  $c_c$ , que é o valor da constante de amortecimento  $c$ , para o qual o radical da equação 6 torna-se zero:

$$\left(\frac{c_c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \text{ou} \quad c_c = 2 \cdot m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \cdot \sqrt{k} \cdot m = 2 \cdot m \omega_n \quad (31)$$

O fator de amortecimento  $\zeta$  é definido como a razão entre a constante de amortecimento e o amortecimento crítico:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (32)$$

Reescrevendo a equação do amortecimento crítico  $c_c$  em função do fator de amortecimento  $\zeta$  :

$$\frac{c}{2 \cdot m} = \frac{c}{c_c} \cdot \frac{c_c}{2 \cdot m} = \zeta \cdot \omega_n \quad (33)$$

Pode-se finalmente, reescrever as raízes e, por conseguinte, a solução geral da equação diferencial em termos do fator de amortecimento  $\zeta$ :

$$s_{1,2} = \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \cdot \omega_n \quad (34)$$

$$x(t) = C_1 \cdot e \left( -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \cdot \omega_n + C_2 \cdot e \left( -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \cdot \omega_n \quad (35)$$

Conclui-se então que, o comportamento da solução e a natureza das raízes  $s_1$  e  $s_2$  depende do módulo do fator de amortecimento  $\zeta$ . Quando  $\zeta=0$  resulta no caso particular de vibrações não amortecidas.

Para o caso de  $\zeta \neq 0$ , considera-se os três casos seguintes:

a) Sistema subamortecido, quando  $\zeta < 1$  ou  $c < c_c$  ou  $\frac{c}{2 \cdot m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$  (36)

Neste caso  $\zeta^2 - 1 < 0$  e as raízes  $s_1$  e  $s_2$ , podem ser escritas como:

$$s_1 = \left( -\zeta + i \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \cdot \omega_n \quad (37)$$

$$s_2 = \left( -\zeta - i \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \cdot \omega_n \quad (38)$$

e a solução da equação diferencial pode ser escrita da seguinte forma:

$$x(t) = C_1 \cdot e \left( -\zeta + i \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \cdot \omega_n \cdot t + C_2 \cdot e \left( -\zeta - i \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \cdot \omega_n \cdot t \quad (39)$$

$$x(t) = e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \left\{ C_1 \cdot e^{i \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t} + C_2 \cdot e^{-i \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t} \right\} \quad (40)$$

$$x(t) = e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \left\{ (C_1 + C_2) \cdot \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \text{sen} \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t \right\} \quad (41)$$

$$x(t) = e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \left\{ \left( C_1 \cdot \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t + C_2 \cdot \text{sen} \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \cdot \omega_n \cdot t \right\} \quad (42)$$

$$x(t) = X \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \text{sen} \left( \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t + \phi \right) \text{ ou}$$

$$x(t) = X_0 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t + \phi_0\right) \quad (43)$$

Para as condições iniciais:  $x(0) = x_0$  e  $dx/dt (t=0) = dx_0/dt$ , pode-se determinar  $C_1'$  e  $C_2'$ :

$$C_1' = x_0 \text{ e } C_2' = \frac{\left(\frac{dx_0}{dt} + \zeta \cdot \omega_n \cdot x_0\right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (44)$$

Deste modo, a solução geral da equação diferencial para o sistema subamortecido fica:

$$x(t) = e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \left[ x_0 \cdot \cos\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t + \frac{\frac{dx_0}{dt} + \zeta \cdot \omega_n \cdot x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n} \cdot \text{sen}\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t \right] \quad (45)$$

A equação 45 descreve um movimento harmônico amortecido, cuja frequência angular vale:

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \quad (46)$$

onde:  $\omega_d$  é chamada de frequência de vibração amortecida. Nota-se que a frequência de vibração amortecida é sempre menor que a frequência de vibração não amortecida  $\omega_n$ . O caso do sistema de vibração subamortecido é o mais importante no estudo de vibrações mecânicas, porque é o único em que o movimento permanece oscilatório.

b) Sistema criticamente amortecido, quando  $\zeta = 1$  ou  $c = c_c$  ou  $\frac{c}{2 \cdot m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

A solução apresenta duas raízes  $s_1$  e  $s_2$  iguais, que são:  $s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2 \cdot m} = -\omega_n$

e a solução da equação diferencial é:  $x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\omega_n \cdot t}$

para as mesmas condições iniciais do caso anterior, as constantes terão os seguintes valores:

$$C_1 = x_0$$

$$C_2 = \frac{dx_0}{dt} + \omega_n \cdot x_0$$

e a solução final fica então:  $x(t) = \left[ x_0 + \left( \frac{dx_0}{dt} + \omega_n \cdot x_0 \right) \cdot t \right] \cdot e^{-\omega_n \cdot t} \quad (47)$

c) Sistema supermortecido, quando  $\zeta > 1$  ou  $c > c_c$  ou  $\frac{c}{2 \cdot m} > \sqrt{\frac{k}{m}}$

A solução apresenta duas raízes reais distintas dadas por:

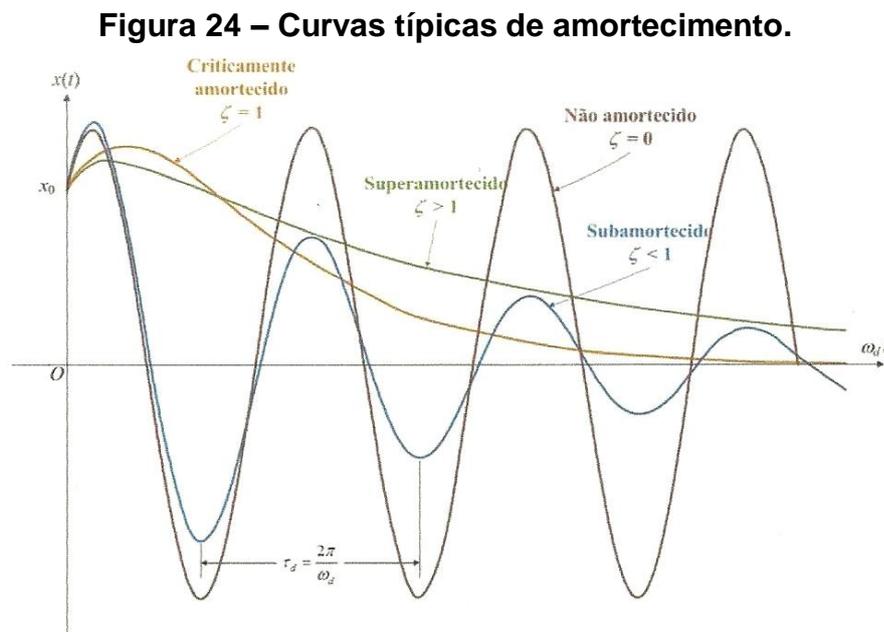
$$s_1 = \left( -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \cdot \omega_n < 0$$

$$s_{12} = \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \cdot \omega_n < 0$$

Para este caso a solução geral da equação diferencial pode ser escrita por:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t} + C_{12} \cdot e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t} \quad 48$$

A equação 48 é de um movimento não periódico, independentemente das condições iniciais do sistema. Como as raízes  $s_1$  e  $s_2$  serão sempre negativas, a amplitude do movimento diminui exponencialmente com o tempo, conforme pode ser observado na figura 24.



Fonte: ZILL, 2003

### 2.7.1.3 Amortecimento hysterético

Quando a força de amortecimento não depende primordialmente da frequência de excitação o amortecimento é dito hysterético. Neste caso, a constante de amortecimento  $c$  pode ser expressa em termos de uma constante de amortecimento equivalente dada por:

$$c_{eq} = c/\omega \quad (49)$$

a qual é válida para um movimento de frequência harmônica  $\omega$ .

A Força de amortecimento, portanto, será :  $F = -\frac{c}{\omega} \cdot \frac{dx}{dt}$

#### **2.7.1.4 Amortecimento estrutural**

O amortecimento estrutural é resultado da dissipação de energia mecânica causada pela fricção devido ao movimento relativo entre os componentes e por impacto ou contato intermitente nas articulações de um sistema mecânico ou estrutura. Isto significa que é muito difícil descrever o comportamento deste tipo de amortecimento num modelo matemático generalizado. A dissipação da energia pode ser representada pelo modelo proposto por Coulomb, e a força que se opõe ao movimento é sempre oposta ao vetor velocidade é dada por:

$$F = \mu \cdot N \quad (50)$$

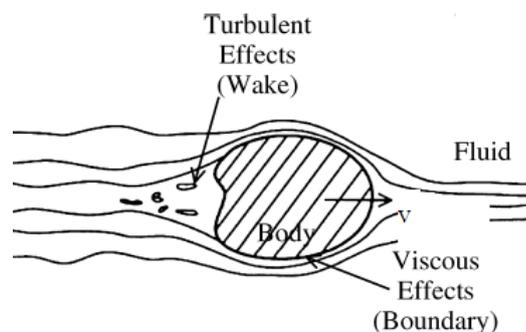
onde:  $\mu$  é o coeficiente de atrito entre as superfícies e  $N$  é a força normal entre elas.

#### **2.7.1.5 Amortecimento fluídico**

Corresponde a um componente mecânico movendo-se em um fluido. A força de arraste é função da densidade do fluido,  $\rho$ , de uma constante de arraste  $c_d$ , que é função do Número de Reynolds e da geometria do componente, e da velocidade relativa,  $v$ .

$$F = 1/2 \cdot c_d \cdot \rho \cdot v \quad (51)$$

**Figura 25 – Amortecimento Fluídico.**



Fonte: DE SILVA, 2007.

### **2.7.2 Métodos de determinação do amortecimento.**

Existem vários métodos para determinação do amortecimento estrutural e é muito difícil encontrar um valor preciso para o amortecimento de um equipamento ou uma peça complexa, devido aos vários tipos de amortecimento e das interações entre as diversas partes do mesmo.

Os principais métodos para avaliação do amortecimento são:

- a) Método do Decremento Logarítmico;
- b) Método da Meia Banda;
- c) Método da Resposta de um Impulso;
- d) Método do Laço de Histerese;
- e) Método do Fator de Amplificação.

Neste trabalho foi desenvolvido apenas o método mais utilizado, que é o Método do Decremento Logarítmico.

#### **2.7.2.1 Método do decremento logarítmico**

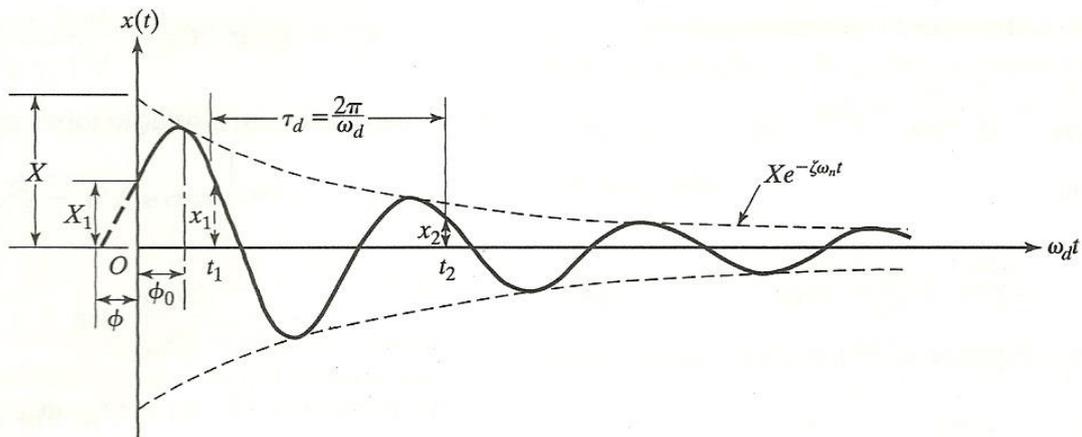
O decremento logarítmico representa a taxa de redução da amplitude de uma vibração livremente amortecida. É calculado como o logaritmo natural da razão entre duas amplitudes sucessivas.

No desenvolvimento das equações da resposta ao um movimento de um sistema de um grau de liberdade foi visto que a amplitude de um sistema subamortecido, pode ser expressa como:

$$x(t) = X_0 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t + \phi_0\right) \quad (43)$$

Foram tomadas duas amplitudes  $x_1$  e  $x_2$  nos respectivos tempos  $t_1$  e  $t_2$ , medidas com um ciclo de diferença entre elas, conforme mostrado na figura 26.

**Figura 26 – Gráfico típico de um sistema subamortecido.**



Fonte: COSSOLINO, 2010.

Pode-se, então, calcular a razão entre as amplitudes  $x_1$  e  $x_2$  através de:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_0 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t_1} \cdot \cos(\omega_d \cdot t_1 - \phi_0)}{X_0 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t_2} \cdot \cos(\omega_d \cdot t_2 - \phi_0)} \quad (52)$$

Mas  $t_2 = t_1 + \tau_d$  onde  $\tau_d = 2 \cdot \pi / \omega_d$  é o período da vibração amortecida. Conseqüentemente  $\cos(\omega_d \cdot t_2 - \phi_0) = \cos(2 \cdot \pi + \omega_d \cdot t_1 - \phi_0)$  e a razão acima pode ser escrita de forma simplificada:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t_1}}{e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot (t_1 + \tau_d)}} = e^{\zeta \cdot \omega_n \cdot \tau_d} \quad (53)$$

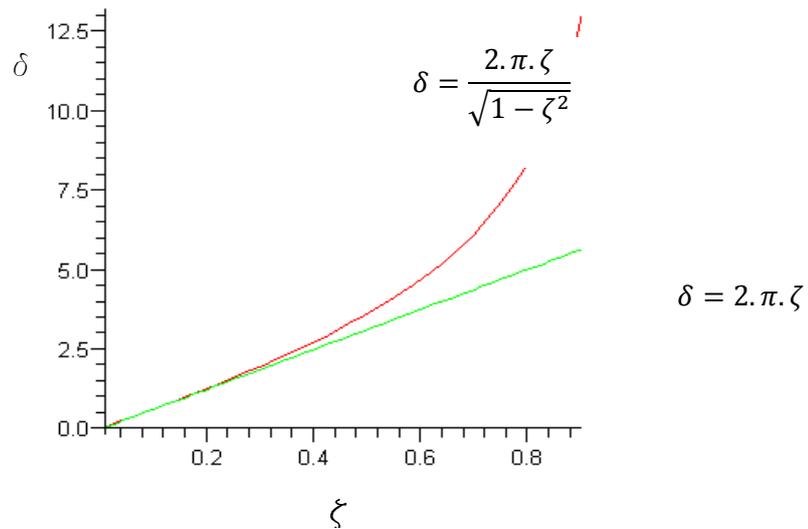
O decremento logarítmico  $\delta$  é então calculado:

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \zeta \cdot \omega_n \cdot \tau_d = \frac{\zeta \cdot \omega_n \cdot 2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_n} = \frac{2 \cdot \pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (54)$$

Se o amortecimento é pequeno, o decremento logarítmico  $\delta$  pode ser aproximado:

$$\delta \approx 2 \cdot \pi \cdot \zeta \quad (55)$$

Pode-se avaliar, então, a variação do decremento logarítmico  $\delta$  é avaliada em função da razão de amortecimento  $\zeta$ , conforme as duas equações acima, a exata e a aproximada. Pode-se notar que, para razão de amortecimento inferior a 0,3 praticamente não há diferença entre ambas as curvas (figura 27).

**Figura 27 – Variação do decremento logarítmico.**

**Fonte: Elaborado pelo autor.**

De modo similar pode-se calcular o decremento logarítmico medindo-se dois valores de amplitude separados por um número inteiro de ciclos  $n$  qualquer, através da fórmula:

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right) \quad (56)$$

## 2.8 Integração numérica

Como o sinal medido pelo transdutor é a aceleração, é necessário integrar num determinado intervalo de tempo os dados coletados para se obter a velocidade e posteriormente integrar novamente para se obter o deslocamento do processo em análise.

Existem vários métodos numéricos que podem ser utilizados para se executar a integração numérica de dados discretos, tal como o Método de Newton-Cotes e suas variantes como a Regra do Trapézio, as Regras de Simpson, Método das diferenças finitas, Método de Runge-Kutta, Método de Wilson e o Método de Newmark.

O método mais comum de integração numérica é o de Newton-Cotes, que utiliza o artifício de substituir uma função complicada ou uma série de dados tabulados por uma função mais simples, que seja facilmente integrável:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx \quad (57)$$

em que:  $f_n(x)$  é um polinômio da forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1(x) + \dots + a_{n-1}(x)^{n-1} + a_n(x)^n \quad (58)$$

onde  $n$  é o grau do polinômio.

Existem formas abertas e fechadas das fórmulas de Newton-Cotes. As formas fechadas são aquelas nas quais os extremos da integração são conhecidos e nas formas abertas, os extremos se estendem além do intervalo dos dados.

### 2.8.1 A regra do trapézio

A Regra do Trapézio é a primeira forma fechada de aplicação da fórmula de Newton-Cotes. Nela o polinômio utilizado na equação 58 é um polinômio de primeiro grau:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx \quad (59)$$

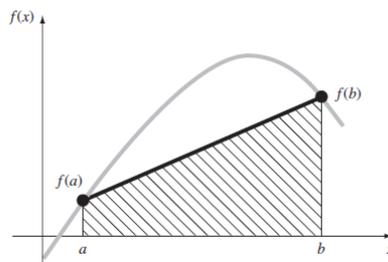
Sendo assim, aplicar a regra do trapézio consiste em aproximar o valor da integral ao da área do trapézio formado pela reta definida por  $f_1(x)$  conforme a equação:

$$f_1(x) = f_a + \frac{f_b - f_a}{b - a} \cdot (x - a) \quad (60)$$

e a integral de  $f_1(x)$  resulta em:

$$I = (b - a) \cdot \frac{f_a + f_b}{2} \quad (61)$$

**Figura 28 – Representação geométrica da Regra do Trapézio.**



Fonte: CHAPRA e CANALE, 2011.

Para reduzir o erro gerado pela aplicação da regra do trapézio (figura 28), utiliza-se o artifício de dividir o intervalo a-b em diversos segmentos e então aplica-se a regra do trapézio em cada segmento. As áreas calculadas são então somadas, fornecendo o valor da integral para o intervalo inteiro, conforme indicado na figura 29. A área da integral é dividida em n segmentos de mesma largura h e portanto, designando **a** e **b** por  $x_0$  e  $x_n$  a integral total pode ser escrita por:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \quad (62)$$

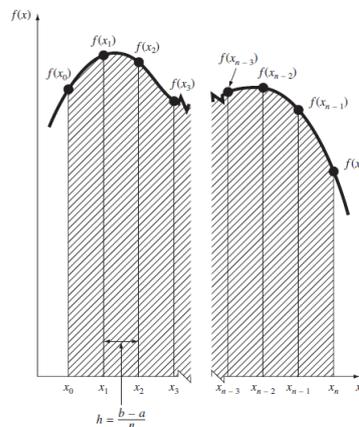
Substituindo-se cada integral pela regra do trapézio, obtém-se

$$I = h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \cdot \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \quad (63)$$

e, agrupando

$$I = \frac{h}{2} \cdot \left[ f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \quad (64)$$

**Figura 29 – Forma geral da aplicação múltipla da Regra do Trapézio.**



Fonte: CHAPRA e CANALE, 2011.

O erro na aplicação múltipla da regra dos trapézios é obtido pela soma dos erros individuais em cada segmento e pode ser calculado de forma aproximada pela equação:

$$E_a = \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2} \cdot f'' \quad (65)$$

onde:  $f''$  é o valor médio da segunda derivada no intervalo  $x_0$  e  $x_n$ . Observando-se a equação acima, conclui-se que quando dobra-se o número de segmentos no intervalo estudado, o erro de truncamento reduz-se a um quarto.

## 2.8.2 A regra de Simpson

Outra maneira de se melhorar a acurácia da integração alternativa a citada acima de se aplicar a regra do trapézio em intervalos menores é utilizar um polinômios de grau superior para ligar os pontos. Neste sentido a Regra 1/3 de Simpson a Regra 3/8 de Simpson, que utilizam polinômios de grau superior são uma boa alternativa.

### 2.8.2.1 Regra 1/3 de Simpson

Utiliza um polinômio interpolador de segundo grau

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

Se a e b forem designados por  $x_0$  e  $x_2$  e se  $f_2(x)$  for representado por um polinômio de Lagrange

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot f(x_2) \quad (66)$$

e a integral se torna:

$$I = \int_a^b \left[ \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot f(x_2) \right] dx \quad (67)$$

Após a integração e manipulação algébrica a fórmula se reduz a:

$$I \cong \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)] \quad (68)$$

O erro de truncamento na aplicação da Regra 1/3 de Simpson para um único segmento é:

$$E_t = - \frac{(b - a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\varepsilon) \quad (69)$$

Onde  $\varepsilon$  é um ponto no intervalo entre a e b, portanto a Regra 1/3 de Simpson apresenta um erro menor que a regra do Trapézio.

### 2.8.2.2 Regra 3/8 de Simpson

De maneira análoga a regra 1/3 de Simpson, utiliza um polinômio de Lagrange de ordem 4, que pode ser ajustado em 4 pontos:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$$

Após a integração e manipulação algébrica a fórmula do trapézio se reduz a:

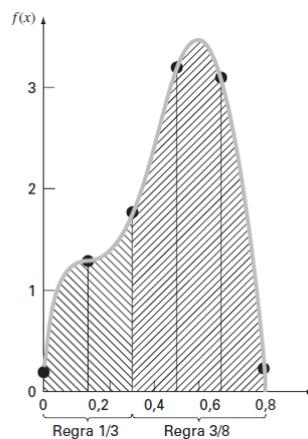
$$I \cong \frac{3h}{8} \cdot [f(x_0) + 3 \cdot f(x_1) + 3 \cdot f(x_2) + f(x_3)] \quad (70)$$

O erro de truncamento na aplicação da Regra 3/8 de Simpson para um único segmento é:

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} \cdot f^{(4)}(\varepsilon) \quad (71)$$

portanto, inferior à Regra 1/3 de Simpson. Entretanto, usualmente a Regra 1/3 de Simpson é preferida, pois alcança uma boa acurácia com três pontos em vez dos quatro necessários na Regra de 3/8. Contudo, a Regra de 3/8 é útil quando o número de segmentos é ímpar. A figura 30 ilustra a aplicação simultânea das Regras de 1/3 e 3/8 de Simpson.

**Figura 30 – Utilização simultânea da Regra de 1/3 e da Regra de 3/8 de Simpson.**



Fonte: CHAPRA e CANALE, 2011.

## 2.9 Estado da arte

Nos últimos anos, inúmeros artigos têm sido publicados sobre aplicação de sistemas de coleta e tratamento de dados de vibração utilizando equipamentos diversos, aplicados nas mais diferentes áreas. Cabe mencionar alguns com relação mais direta ao objeto deste estudo. Inicialmente, trabalhos relacionados à medição e efeito da vibração no corpo humano têm aumentado significativamente nos últimos anos. Como consequência houve a edição de normas técnicas, visando regulamentar os processos de medição e as condições do trabalho humano, quando submetidos a solicitações dinâmicas, seja sob o efeito do local de trabalho ou pelo manuseio de equipamentos.

Pode-se classificar a exposição humana a sistemas vibratórios em três tipos:

- a) - vibrações transmitidas simultaneamente a todo o corpo ou a uma grande parte dele, tais como: ruídos de elevada intensidade no ar ou na água, induzindo excitações no corpo;
- b) - vibrações transmitidas ao corpo humano como um todo através de superfícies de contato, tais como pelos pés, pelas nádegas ou pelas costas. Por exemplo, a pessoa se encontra em pé, assentado ou recostado em um equipamento como veículo ou em uma estrutura próxima a uma fonte geradora de esforços dinâmicos;
- c) - vibrações transmitidas a partes específicas do corpo humano, tais como membros e cabeça. Neste caso podemos citar vibrações transmitidas por alavancas, cabos, pedais, suportes de cabeça e pelas ferramentas manuais.

As normas da série ISO 2631(19997) são as mais utilizadas para a medição e determinação da adequabilidade das condições de trabalho. Elas são divididas em três partes: a primeira parte (ISO 2631-1) de especificações gerais, a segunda parte (ISO 2631-2) trata de vibrações contínuas e choques induzidos ao corpo humano por edificações, na faixa de frequência de 1 a 80 Hz, e a parte final, (ISO 2631-3) trata da avaliação da exposição humana a vibração vertical na faixa de frequência de 0,1 a 0,63 Hz.

Para avaliação da exposição humana a vibração transmitida pelas mãos, foram editadas as normas ISO 5349 (2001), partes 1 e 2. Estas partes identificam os principais parâmetros a ser medidos, a metodologia de medição e de interpretação dos resultados. No Brasil a norma regulamentadora nº15 do MTE, no seu anexo 8

estabelece os níveis máximos de vibração ocupacional utilizando os dados das normas ISO 2631 e ISO 5349.

Na representação de um sinal vibratório, podem ser obtidos valores de maneiras distintas que são:

- a) - o valor de pico, que é o valor máximo, mas não dá qualquer indicação sobre a duração ou tempo do movimento. Ele é importante na caracterização de impactos de curta duração;
- b) - o valor médio apenas indica a média da oscilação, sem qualquer relação com a realidade do movimento;
- c) - o valor de pico a pico, indica a amplitude máxima do movimento e é utilizado para análise de elementos de máquina submetidos a solicitações críticas do movimento;
- d) - o valor eficaz ou valor da raiz média quadrática (rms), que é a raiz quadrada dos valores quadrados médios, calculados conforme a equação 72. Esta é a medida mais importante porque indica a energia contida no movimento vibratório e, portanto, o valor do potencial destrutivo da vibração.

Quando o sinal atua por um tempo significativo é também denominada aceleração equivalente;

$$a_{eq} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T a^2(t) dt} \quad (72)$$

onde:

$a_{eq}$  = aceleração equivalente;

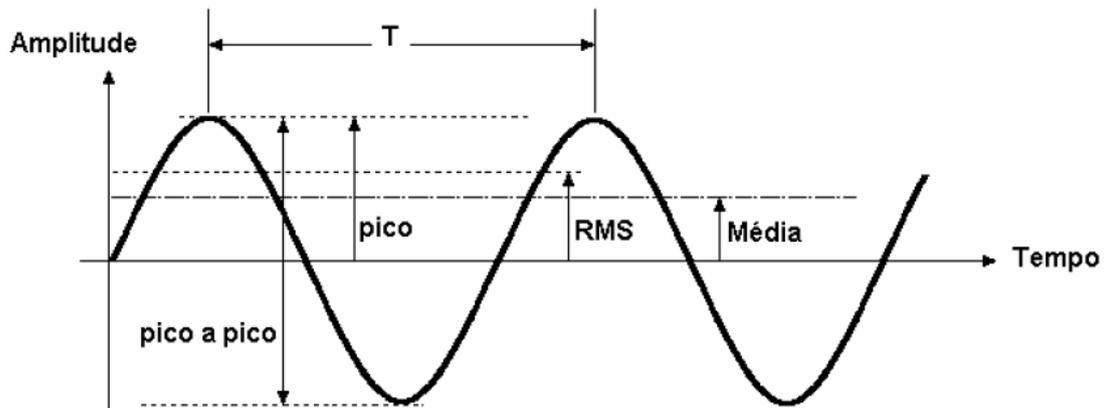
T = período (tempo de medição);

$a(t)$  = aceleração instantânea no tempo t.

Para um sinal senoidal, como indicado na figura 31, as relações matemáticas entre estes valores são:

- a) - Amplitude de pico = X
- b) - Amplitude pico-a-pico = 2.X
- c) - Amplitude equivalente = 0,707.X
- d) - Amplitude média = 0,637.X

**Figura 31 – Parâmetros de um movimento oscilatório senoidal**



Fonte: BRUEL & KJAER, 1988.

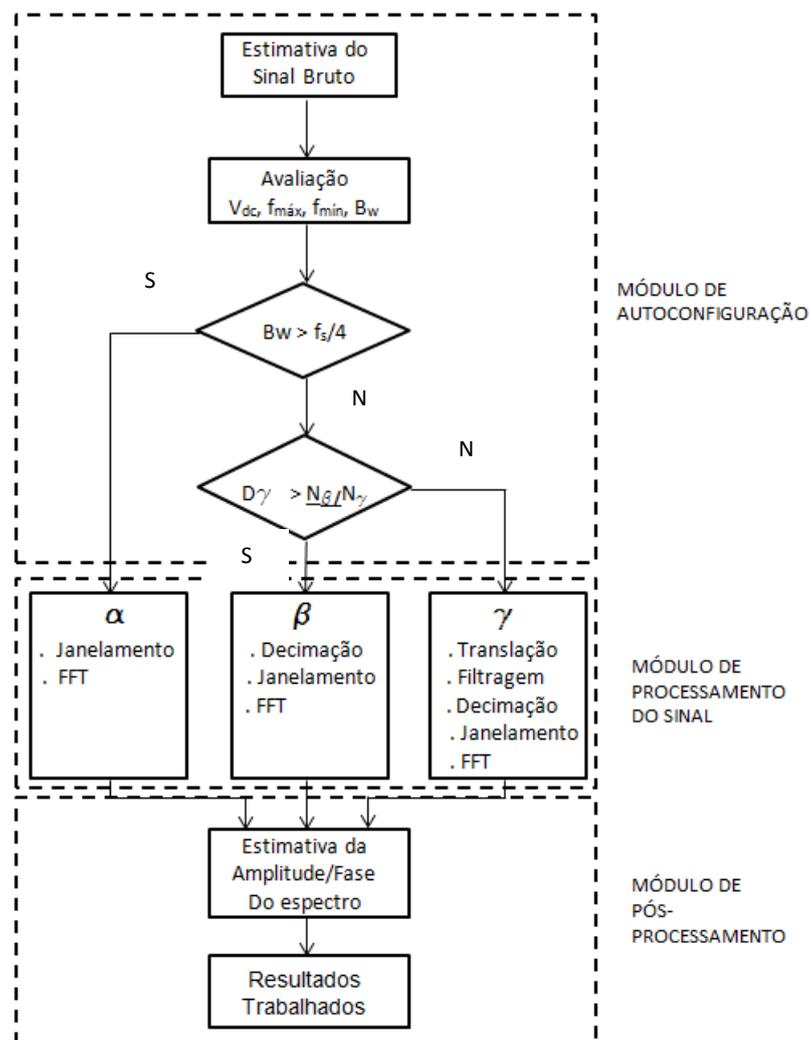
Não é escopo deste trabalho, entrar em detalhes sobre a técnica de medição e controle dos efeitos da vibração no corpo humano especificamente, cabe apenas citar a importância deste tipo de estudo.

Muitos pesquisadores têm utilizado a técnica de implementar Instrumentação Virtual (VI) para medição em tempo real de fenômenos físicos, inclusive vibração. BILSKI e colaboradores (2005), implementaram instrumentação virtual para um analisador de espectro em tempo real, utilizando técnica similar a desenvolvida neste trabalho, sem nenhum hardware especializado, com placas de aquisição de dados DAQ da National Instruments e o software Labview. É importante notar que, a utilização do software Labview, facilita sobremaneira a execução da tarefa, porque possui um conjunto de ferramentas próprias para uma solução adequada em tempo real. A vantagem de se trabalhar em tempo real é que, no sistema tradicional o processamento ocorre após a aquisição dos dados e em tempo real é possível conduzir ambos os processos simultaneamente. Neste caso, o principal problema é a necessidade de se fazer o tempo de execução das operações do software iguais ao tempo de aquisição do hardware. Por isso foi necessária a criação de um *buffer* na memória do computador que armazena os dados, a partir das iterações do programa.

Para se executar a análise espectral de um sinal, independentemente do tipo de analisador, é necessário definir alguns parâmetros de medição, por exemplo: número de amostras, frequência de amostragem, janelamento, etc. A precisão das medições obtidas dependem fortemente dos valores assumidos para estes parâmetros, como consequência o usuário precisa ser perito para fixar estes valores

e ainda avaliar eventuais erros oriundos de uma má escolha. Mas, por outro lado, os valores ótimos destes parâmetros não podem ser estabelecidos sem o conhecimento do sinal. BETTA e colaboradores (1998) desenvolveram um procedimento para a escolha automática dos parâmetros ótimos e processar o sinal. Este procedimento foi implementado numa arquitetura que utiliza múltiplos processadores digitais de sinal, configurando então um analisador de FFT inteligente, capaz de adaptar os parâmetros citados com base no espectro do sinal. O processo adotado por BETTA e colaboradores (1998), mostrado na figura 32, é composto de algoritmos diferentes que podem ser agrupados em três módulos principais: módulo de autoconfiguração, módulo de processamento do sinal e módulo de pós-processamento.

**Figura 32 – Diagrama de blocos do processo de medição.**

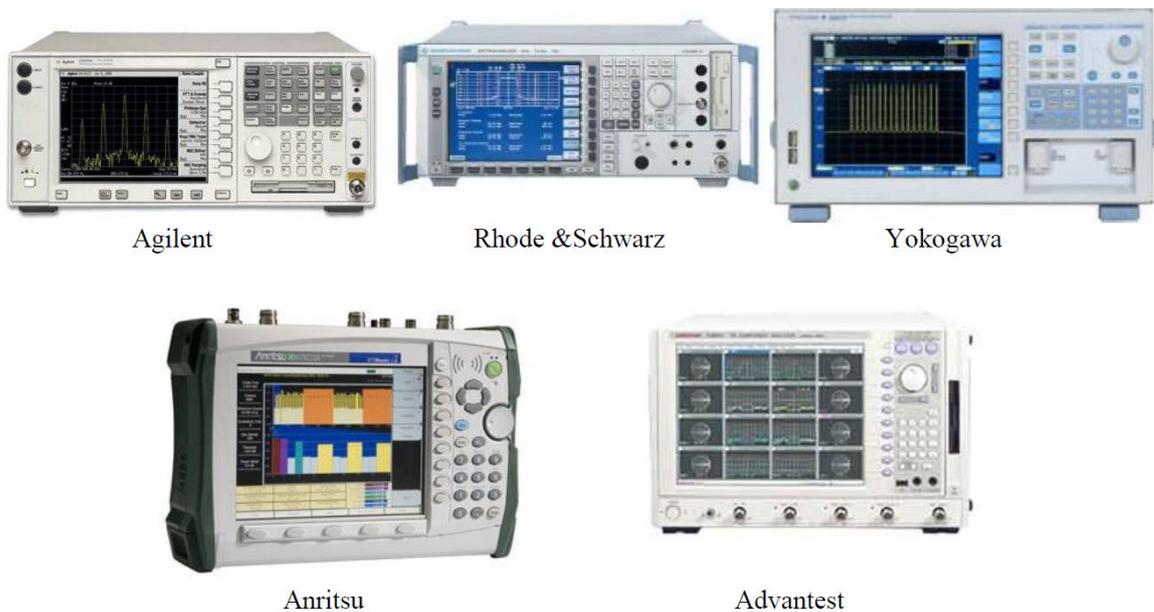


Fonte: BETTA *et al.*, 1998.

Desde que escolhas adequadas de parâmetros de coleta só podem ser feitas se o sinal for conhecido, uma estimativa grosseira do espectro é a primeira atividade do módulo de autoconfiguração. Um FFT preliminar é executado em amostras adquiridas com a frequência de amostragem máxima permitida pela placa ( $f_s$ ) num número de pontos  $N_0$ , utilizando uma janela de sinal que privilegia a detectabilidade a resolutibilidade. A amplitude do espectro é analisada para determinar as frequências mínima e máxima ( $f_{\min}$ ,  $f_{\max}$ ), a largura de banda ( $B_w = f_{\max} - f_{\min}$ ) e o eventual valor de **dc** ( $V_{dc}$ ). Se  $B_w$  é maior que  $f_s/4$  a única possibilidade de melhorar a resolução é executar o final da FFT num ponto superior ( $N_\alpha > N_0$ ) (algoritmo  $\alpha$ ). Caso contrário ( $B_w < f_s/4$ ), existem duas possibilidades: decimação (algoritmo  $\beta$ ) e translação do sinal a baixas frequências seguida de decimação (algoritmo  $\gamma$ ). Esses algoritmos são executados no módulo de processamento de sinal. A configuração do módulo de pós processamento depende fortemente da aplicação, visto que o resultado da medição é função da utilização que se deseja. Os algoritmos a serem executados nas amostras das FFTs finais dependem da informação desejada, tais como: visualização da amplitude e fase do espectro em cada passo do processamento, visualização do espectro condicionado a certos parâmetros prefixados, etc.

PICCOLLI (2010) recomenda que um pré-processamento seja realizado analogicamente pela instrumentação, antes da digitalização do sinal. Deste modo, preservam-se algumas características importantes do sinal e melhora-se a qualidade da análise. Quando um analisador processa o sinal no domínio da frequência, separa a energia do sinal em várias faixas de frequência. Esta separação é executada através de um conjunto de filtros, e os analisadores são classificados de acordo com o tipo de filtro que empregam. Atualmente, os analisadores são largamente utilizados em tempo real. A maior parte dos analisadores espectrais fabricados atualmente se destina prioritariamente a aplicações em eletrônica e telecomunicações. Alguns destes instrumentos são ilustrados na figura 33.

**Figura 33 – Alguns tipos de analisadores espectrais de sinais.**

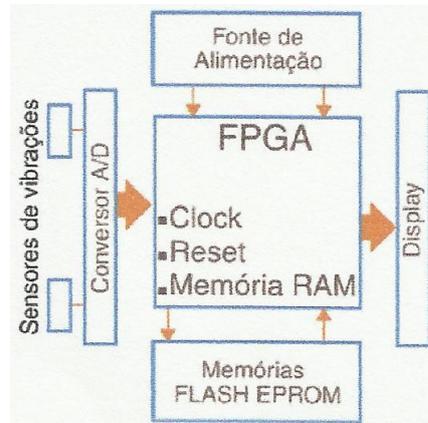


**Fonte: PICOLI, 2010.**

Cita-se também a técnica de processamento de sinais de vibrações mecânicas em dispositivos FPGA (*Field Programmable Gate Array*), apresentada por COSTA e MATHIAS (2008), cujo resultado é uma biblioteca de funções matemáticas de pré-processamento, filtragem, janelamento e transformada de Fourier (FFT). Os FPGAs foram introduzidos no mercado há cerca de 20 anos e caracterizam-se como dispositivos eletrônicos reconfiguráveis, cuja arquitetura é definida pelo projetista. Já os microprocessadores não permitem tal reconfiguração. Utiliza a tecnologia CMOS (*Complementary Metal-Oxide Semiconductor*) que é a mais utilizada para fabricação de circuitos integrados.

Por utilizar um hardware totalmente dedicado, permitindo o processamento paralelo das funções matemáticas e por não utilizar sistema operacional, os FPGAs são sistemas mais rápidos que sistemas que utilizam microprocessadores convencionais. COSTA e MATHIAS (2008), desenvolveram um algoritmo DSP (*Digital Signal Processor*) e com a utilização do MATLAB com o SIMULINK são desenvolvidos algoritmos em arquivos **.m** em duas etapas. Na primeira etapa o algoritmo é desenvolvido e simulado em ambiente MATLAB e na segunda etapa este algoritmo é convertido para uma linguagem de descrição de hardware e é implementado no FPGA, através do software *DSP Builder*, da Altera. A arquitetura de um analisador de vibrações baseado em FPGA pode ser vista na figura 34.

**Figura 34 – Arquitetura de um Analisador de Vibrações baseado em FPGA.**



Fonte: COSTA e MATHIAS, 2008.

Resumidamente, pode-se descrever o seu funcionamento da seguinte forma: o conversor A/D é responsável pela transformação do sinal de vibração analógico em digital, o bloco FPGA executa o cálculo no domínio do tempo do valor eficaz (RMS), valor de pico, valor médio, curtose, fator de forma e fator de crista, além dos quantitativos do espectro de frequências, por meio da TFT. Também armazena os dados em banco de dados na memória RAM e é responsável pela exibição dos dados em display. Na memória EPROM fica armazenada a configuração do bloco FPGA. Este analisador pode ser utilizado na prática diária da manutenção de motores elétricos, máquinas rotativas em geral, com um banco de dados associado a falhas conhecidas gerando informações importantes em tempo real.

### 3 METODOLOGIA UTILIZADA

Para desenvolvimento deste trabalho foi utilizada uma estrutura simples, constituída de uma viga I biapoiada, birrotulada, numa tentativa de se obter uma estrutura perfeitamente isostática, cujo cálculo das deformações e parâmetros modais pode ser feito com facilidade. No centro desta viga, um carregamento dinâmico é gerado por um pequeno motor dotado de uma polia com uma massa excêntrica, cuja rotação pode ser ajustada eletricamente gerando uma série de sinais harmônicos. O sistema de aquisição dos dados de vibração é composto de um ou mais acelerômetros, cabos, condicionador de sinal, placa A/D e um software de processamento numérico. Os dados obtidos são comparados com os dados teóricos obtidos no cálculo conforme desenvolvimento da teoria vista no capítulo 2.

#### 3.1 Descrição da estrutura ensaiada

Para a construção da estrutura foi utilizada uma viga I de perfil laminado, padrão americano de três polegadas de primeira alma ( I 76 x 8,04 kg/m), montada sobre eixos e mancais de rolamento, para se obter uma rótula nos apoios, sendo um apoio com restrição ao deslocamento horizontal e outro livre. O mancal direito montado sobre uma placa metálica, cujo deslocamento horizontal é permitido e que se apoia numa placa de UHMW (polietileno de ultra alto peso molecular) de baixo coeficiente de atrito (figura 35). Estas características tornam o modelo muito próximo de um modelo teórico de uma viga biapoiada estaticamente determinada. Desta forma, os mancais de rolamento permitem o giro e o mancal direito permite o deslocamento horizontal, formando assim uma estrutura isostática.

Características do Perfil :

Peso real do perfil = 124 N

Propriedades:  $A=10,80 \text{ cm}^2$   $I_x=105,10 \text{ cm}^4$   $I_y=18,90 \text{ cm}^4$

Aço ASTM A-36 :  $f_y = 250 \text{ MPa} = 25 \text{ kN/cm}^2$

$f_u = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2$

$E = 205 \text{ GPa} = 20580 \text{ kN/cm}^2$

**Figura 35 – Fotografia da estrutura ensaiada.**

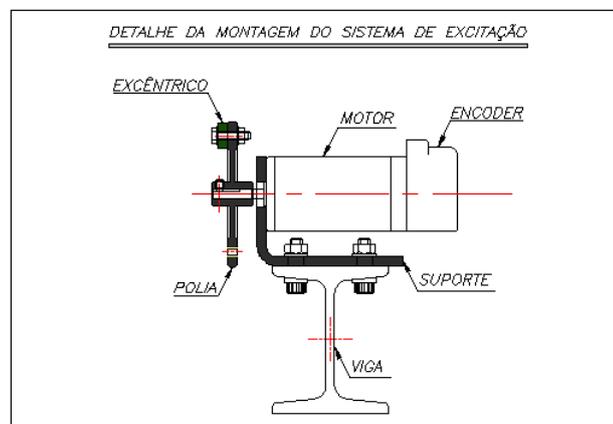


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.2 Sistema de excitação da estrutura

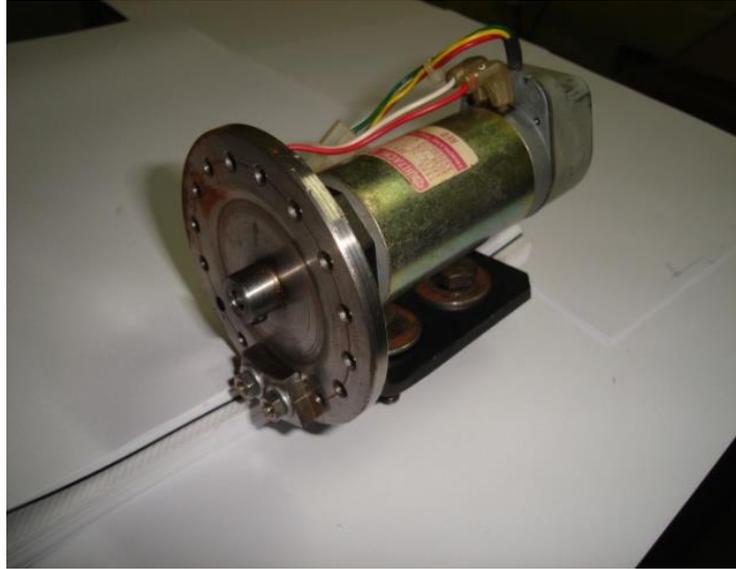
A excitação harmônica foi feita por meio de um motor de corrente contínua, Hitachi tipo 004A321E, para voltagem de até 24 volts, dotado de um *encoder*. Um suporte em L fixado no flange dianteiro do motor foi aparafusado na mesa superior da viga. Na extremidade do eixo do motor foi montada uma polia de aço com 75 mm de diâmetro, totalmente usinada, dotada de 16 furos para fixação das massas excêntricas, por meio de parafusos. A variação na rotação do motor é obtida pela variação da tensão na alimentação (figuras 36 e 37).

Figura 36 – Esquema de montagem do excitador.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 – Foto em detalhe do excitador.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.3 Sensores

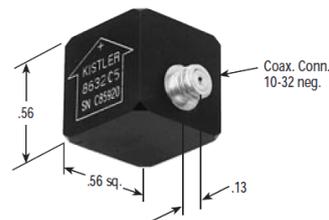
Foram utilizados acelerômetros piezoelétricos Kistler 8632C10, número de série C 122014, com sensibilidade de 483 mV/g, instalado no ponto central da mesa inferior da viga (figura 38).

Figura 38 – Ficha técnica do acelerômetro Kistler.

#### 8632C SERIES

#### ACCELERATION

**Low Impedance PiezoBEAM.** High sensitivity, lightweight accelerometer. Cubic configuration provides flexibility during installation. Hard anodized for ground isolation. PiezoBEAM "C" features include extended frequency response and optimized thermal performance.



Request Data Bulletin K8.8632C for more details.

SPECIFICATIONS		8632C5	8632C10	8632C50
Acceleration range	<i>g</i>	±5	±10	±50
Acceleration limit	<i>g</i>	±8	±16	±80
Threshold	<i>g</i> <sub>rms</sub>	0.00012	0.00028	0.001
Sensitivity, ±5%	mV/ <i>g</i>	1,000	500	100
Resonant frequency (nom.)	kHz	9	22	22
Frequency response, ±5%	Hz	0.5 to 3k	0.5 to 5k	0.5 to 7k
Phase shift, 5°	Hz	4 to 2k	4 to 2k	4 to 4k
Time constant (nom.)	s	1	1	1
Shock (0.2 ms pulse), max.	<i>g</i>	7,000	10,000	10,000
Transverse sensitivity	%		≤1	
Linearity	%		±1	
Operating temperature range	°F		30 to 150 (@ 4mA excitation)	
Temperature coefficient of sensitivity	%/°F	-0.02	+0.04	+0.04
Ground isolation	MΩ	10	10	10
Output impedance	Ω	<500	<500	<100
Power supply	mA & VDC	2 to 20 (constant current) & 18 to 30		
Weight	<i>g</i>		6.0	

Fonte: KISTLER.

### 3.4 Condicionador de sinais

Foi utilizado um condicionador de Sinais, marca PCB (figura 39), ajustado para: frequência de corte = 1 K,  
Bias = OFF,  
Ganho ajustado de 1 a 5, conforme o tipo de ensaio.

**Figura 39 – Foto do Condicionador de Sinais utilizado.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.5 Placa de aquisição de dados

Utilizaram-se os dois modelos de placa 6251 da *National Instruments*, uma PCI e outra USB. Características: 16 bits, 1 MS/s (multichannel), 16 entradas analógicas (figura 40).

**Figura 40 – Placas de aquisição de dados PCI 6251 e USB 6251 N. I.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.6 Computador e *software* de processamento numérico

O processamento dos dados foi feito em um microcomputador com o *software* Matlab 2008 instalado. Não foi utilizada a medição em tempo real. Inicialmente, os dados foram coletados, utilizando um *software* sem nenhum tratamento. Os dados foram salvos em arquivos extensão **.mat**. Em seguida, utilizando um outro programa, os dados foram processados, através das rotinas de FFT e filtragem para obtenção do espectro de frequências. Posteriormente, através de um processo de integração numérica, obteve-se a velocidade e o deslocamento da vibração imposta à estrutura.

### **3.7 Desenvolvimento do programa para tratamento dos dados**

A transformação da medida da aceleração, captada pelos acelerômetros instalados na estrutura, para um valor de deslocamento que é a medida desejada, foi obtida por meio de um processo de integração numérica. Numa primeira integração obteve-se o sinal da velocidade e em seguida, após uma segunda integração, o deslocamento.

Este processo de integração dupla do sinal da aceleração gera algumas dificuldades. A primeira delas é que para se evitar erros na integração, duas condições iniciais devem ser conhecidas, tais como velocidade e posição inicial. Não é possível na prática fazer a medição destas condições iniciais. Foi necessário, portanto, contornar este problema com a utilização de filtragem.

Normalmente, quando um sinal de aceleração é integrado, ele apresenta um componente DC. Um filtro de alta frequência pode remover este componente. De maneira análoga, após o sinal de velocidade ser integrado para obter o sinal do deslocamento. Pode-se, nesta etapa, utilizar outro filtro passa alta, contornando o problema de geração de erros causados pela falta de informações das condições iniciais.

## 4 ENSAIOS REALIZADOS

Foram executados dois tipos de ensaio. No primeiro, um ensaio modal, cujo objetivo foi determinar experimentalmente a frequência natural da viga e comparar os dados com os dados calculados segundo a teoria.

No segundo tipo de ensaio, o excitador com massa excêntrica de 18 gramas e nos testes finais com massa excêntrica de 8 gramas teve sua rotação alterada para valores diferentes em cada bateria de testes, através da variação da tensão de alimentação do motor. Os sinais da vibração imposta na estrutura foram captados pelos acelerômetros. Dependendo dos resultados o ganho no condicionador de sinais foi alterado de 5, nos testes iniciais, para 2 nos testes finais. Esses dados foram adquiridos num primeiro programa.

Em seguida, num segundo programa, os dados foram processados executando as funções de FFT, filtragem do sinal, janelamento e integração numérica para obtenção do deslocamento. Os resultados obtidos foram então comparados com os dados calculados de acordo com a teoria revista no capítulo 2.

### 4.1 Determinação do fator de amortecimento da viga biapoiada

#### 4.1.1 Estrutura ensaiada

A estrutura descrita no capítulo anterior (figura 6) foi ensaiada inicialmente para determinação do seu grau de amortecimento. Neste ensaio, a solicitação dinâmica foi executada com golpes de um martelo de impacto da PCB Piezotronics, ilustrado na figura 41.

**Figura 41 – Martelo de Impacto**



Fonte: PCB PIEZOTRONICS.

O martelo de impacto é um elemento importante na prática de ensaios de determinação de parâmetros modais da estrutura em análise. O tamanho, comprimento do braço e o material do martelo juntamente com a velocidade de impacto, determinam a amplitude e frequência da força aplicada. Nos seis ensaios realizados foi utilizado o martelo de impacto da PCB Piezotronics modelo 08C01, com as seguintes características:

- |                                 |                    |
|---------------------------------|--------------------|
| a) - Sensibilidade:             | 11,2 mV/N          |
| b) - Range da medição :         | $\pm 444$ N (pico) |
| c) - Frequência de ressonância: | $\geq 15$ kHz      |
| d) - Não linearidade:           | $\leq 1$ %         |
| e) - Sensor:                    | quartzo            |
| f) - Selagem:                   | epóxi              |
| g) - Massa:                     | 100 g              |
| h) - Diâmetro da cabeça:        | 1,57 cm            |
| i) - Diâmetro do pino:          | 0,63 cm            |

Este martelo possui quatro tipos diferentes de pontas para a cabeça de impacto, de durezas variadas, que podem ser utilizadas para variar a rigidez do impacto:

- Ponta dura: de aço inoxidável
- Ponta média: de plástico
- Ponta macia: de borracha
- Ponta super macia: de borracha (menor dureza)

Para medição, foi utilizado o mesmo sistema citado no capítulo anterior; acelerômetro Kistler 8632C10, Condicionador de sinal, Placa PCI 6251 National Instruments. O condicionador de sinais ajustado com ganho = 1, frequência de corte = 1 K, Bias = OFF.

Antes de serem executadas as medições, o sistema foi calibrado por meio de um *Hand-Held Shaker* - PCB Model 394C06, ilustrado na figura 42, com as seguintes características:

$$f = 159,2\text{hz}$$

$$\text{aceleração} = 1.00 \text{ g rms}$$

$$\text{velocidade} = 0,39 \text{ in/s rms}$$

$$\text{deslocamento} = 0,39 \text{ mil rms}$$

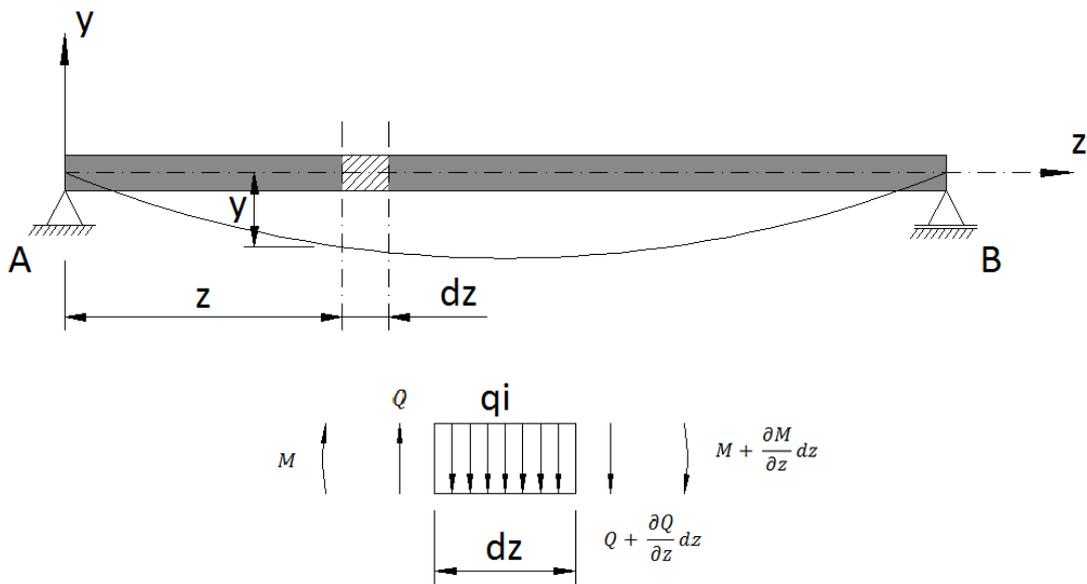
Figura 42 – Montagem do ensaio de calibração do acelerômetro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.1.2 Determinação das frequências naturais de vibração transversal da viga

Figura 43 – Vibrações flexionais numa viga biapoada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No esquema da figura 43, supondo desprezíveis as forças de inércia de rotação do elemento e a influência do esforço cortante sobre a deflexão, a equação diferencial da deflexão ( $y$ ) de uma viga biapoiada pode ser escrita da seguinte forma:

$$EI \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (73)$$

onde:

$E$  = módulo de elasticidade do material

$I$  = momento de inércia da seção transversal

$\rho$  = densidade do material

$A$  = área da seção transversal do material

A solução periódica mais simples da equação 73 é chamada de vibração fundamental ou forma natural, na qual a função da deflexão da viga vibrante varia com o tempo segundo a harmônica:

$$Y = \psi(z) \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t + \phi) \quad (74)$$

A função  $\psi(z)$  que descreve as distribuições das deflexões (amplitudes) máximas em vários pontos da viga, também é chamada de modo da vibração fundamental.

Substituindo a equação 74 em 73 e simplificando  $\text{sen}(\omega_n \cdot t + \phi)$ , obtemos:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - k^4 \cdot \psi = 0 \quad (75)$$

onde:

$$k^4 = \frac{\rho \cdot A \cdot \omega_n^2}{E \cdot I} \quad (76)$$

A solução geral da equação 73 é:

$$\psi(z) = A \cdot \cos(k \cdot z) + B \cdot \text{sen}(k \cdot z) + C \cdot \cosh(k \cdot z) + D \cdot \text{senh}(k \cdot z) \quad (77)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são as constantes de integração, determinadas a partir das condições de contorno.

Para uma viga biapoiada, as condições nos apoios serão:

$$\text{para } x=0 \quad \psi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi''(0) = 0$$

$$\text{para } x=L \quad \psi(L) = 0 \quad \text{e} \quad \psi''(L) = 0$$

Partindo destas condições, tem-se:

$$A + C = 0; \quad B \cdot \text{sen}(k \cdot L) + D \cdot \text{senh}(k \cdot L) = 0$$

$$-A + C = 0; \quad -B \cdot \text{sen}(k \cdot L) + D \cdot \text{senh}(k \cdot L) = 0$$

onde se conclui que:

$$A = C = D = 0$$

$$B \cdot \text{sen}(k \cdot L) = 0$$

como  $B \neq 0 \Rightarrow \text{sen}(k \cdot L) = 0$ . Esta equação é denominada equação de frequência e dela obtém-se :

$$k_i \cdot L = i \cdot \pi \quad (i = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

Reescrevendo a equação 76, obtém-se a igualdade:

$$k_i^4 = \frac{\rho \cdot A \cdot \omega_{ni}^2}{E \cdot I} = \frac{m \cdot \omega_{ni}^2}{E \cdot I}$$

e assim determina-se a frequência natural circular:

$$\omega_{ni} = k_i^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}} = \frac{i^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}} \quad (78)$$

e a frequência em Hz, será calculada, portanto, pela fórmula:

$$f_{ni} = \frac{i^2 \cdot \pi}{2 \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}} \quad (79)$$

Pode-se então calcular as 10 primeiras frequências naturais não amortecidas da viga em teste utilizando as equações 78 e 79 acima e os seguintes dados:

$$E = 20.580 \text{ kN/cm}^2 \quad (2.100.000 \text{ kgf/cm}^2) = 20,58 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$I = 105,4 \text{ cm}^4 = 1,051 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$m = \text{massa da viga} = 12,65 \text{ kg}$$

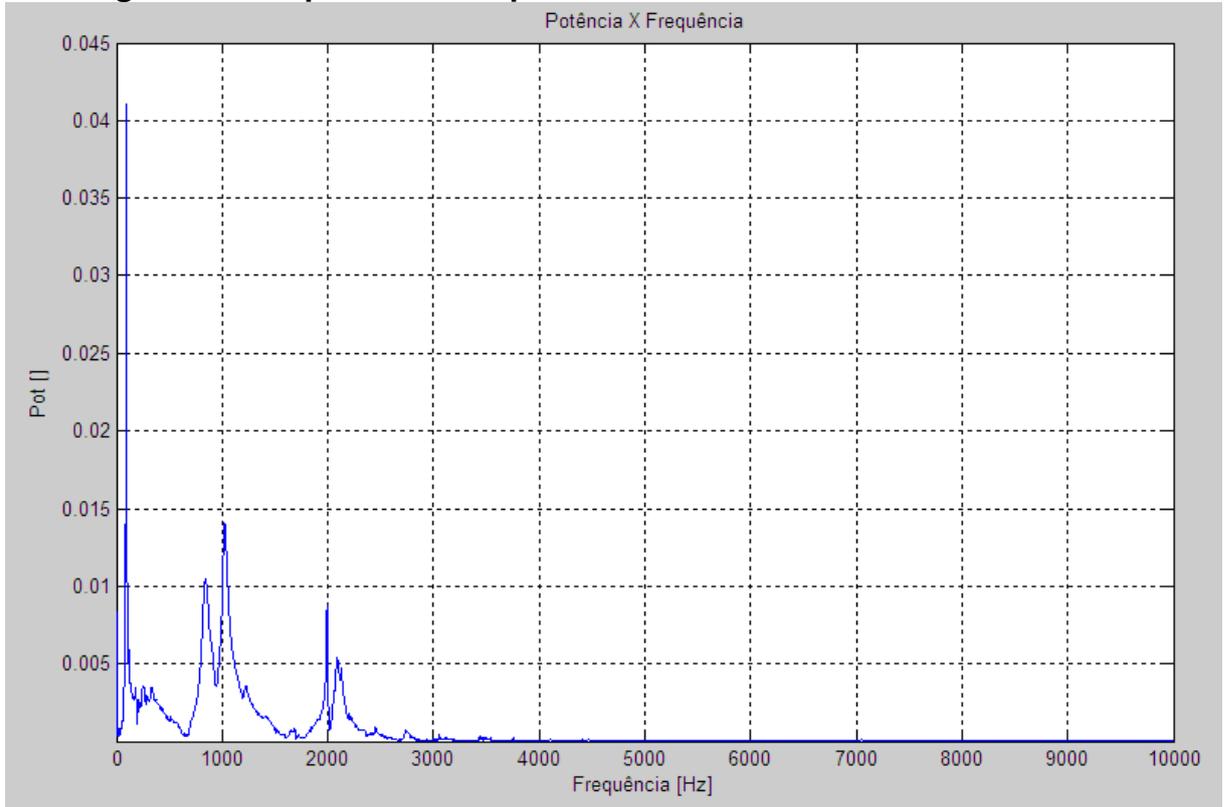
$$L = 1,50 \text{ m}$$

A tabela 1 mostra os valores calculados para as dez primeiras frequências naturais da viga. Observa-se que o valor calculado para a primeira frequência natural foi detectado com boa precisão no ensaio de amortecimento estrutural (figuras 44 e 45), ou seja, 91,3 Hz (valor teórico), contra 92,8 Hz (ensaio). Portanto, com um erro de apenas 1,6%.

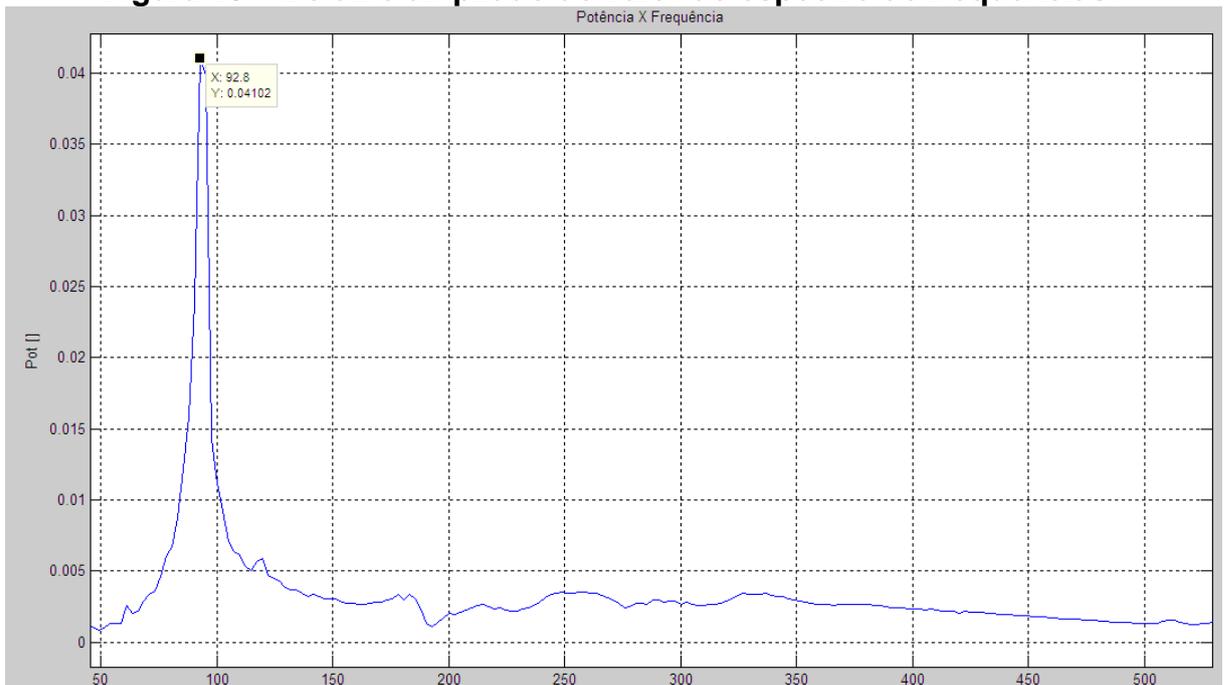
**Tabela 1 - Frequências naturais da viga testada**

Freq.	Unid	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_{ni}$	rad/s	573,58	2.294	5.162	9.177	14.340	20.649	28.106	36.709	46.460	57.358
$f_{ni}$	Hz	91,29	365,2	821,6	1.461	2.282	3.286	4.473	5.842	7.394	9.129

Fonte: Elaborado pelo autor

**Figura 44 – Espectro de frequências – Ensaio de amortecimento n°1.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

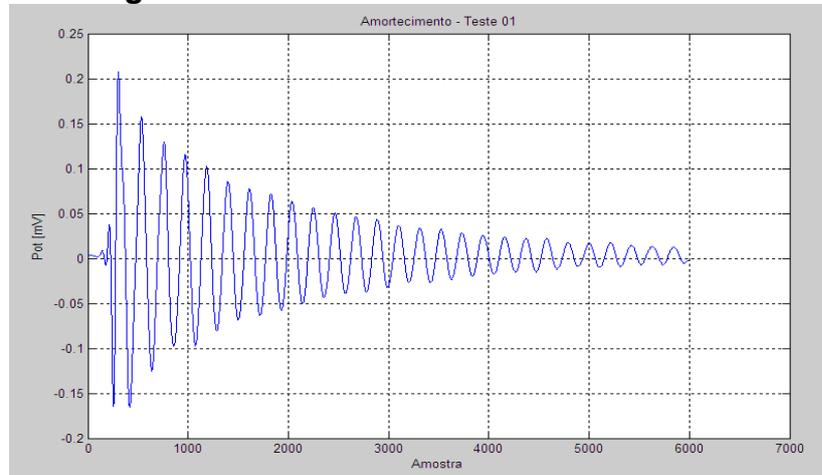
**Figura 45 – Detalhe ampliado do valor do espectro de frequências.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 4.1.3 Resultados dos ensaios de amortecimento

#### Ensaio nº 1: – Martelo de impacto com ponta de aço.

**Figura 46 – Ensaio de Amortecimento nº 1.**



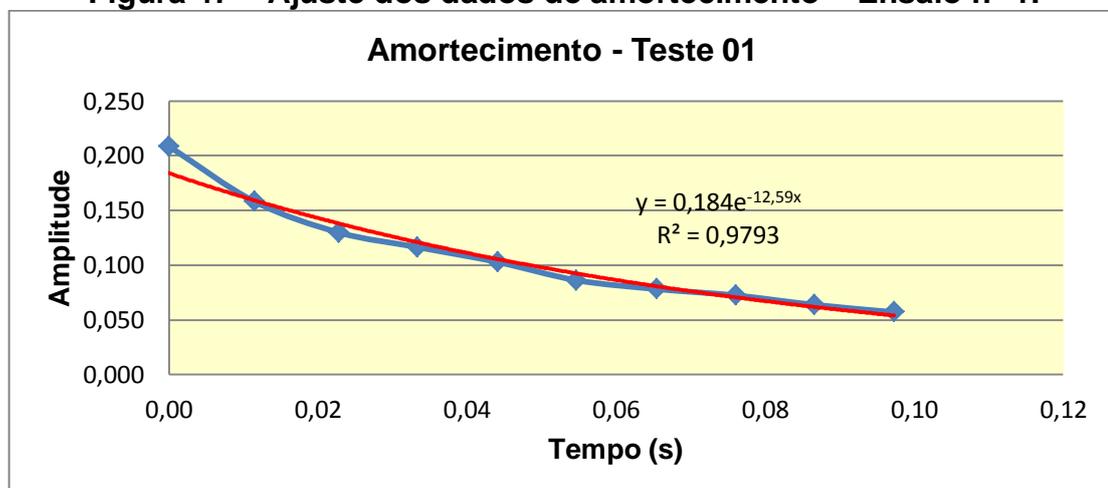
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Tabela 2 - Dados do ensaio de amortecimento nº 1**

i	Número da amostra	$\Delta A$	t (s)	$\Delta t$ (s)	Amplitude	$\Delta A$	$\delta$	$\xi$
1	304		0,00000	0,00000	0,20850			
2	534	230	0,01150	0,00000	0,15800	0,05050	0,2773	0,0441
3	760	226	0,02280	0,01130	0,12980	0,02820	0,1966	0,0313
4	971	211	0,03335	0,01055	0,11640	0,01340	0,1090	0,0173
5	1186	215	0,04410	0,01075	0,10280	0,01360	0,1242	0,0198
6	1398	212	0,05470	0,01060	0,08617	0,01663	0,1765	0,0281
7	1613	215	0,06545	0,01075	0,07814	0,00803	0,0978	0,0156
8	1826	213	0,07610	0,01065	0,07231	0,00583	0,0775	0,0123
9	2036	210	0,08660	0,01050	0,06379	0,00852	0,1254	0,0200
10	2250	214	0,09730	0,01070	0,05703	0,00676	0,1120	0,0178

Fonte: Dados da Pesquisa

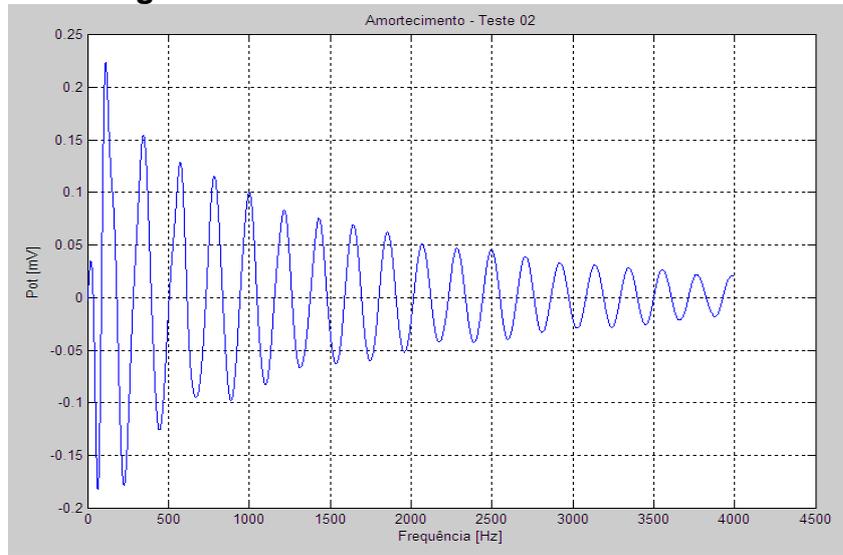
**Figura 47 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio nº 1.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Ensaio nº 2 – Martelo de impacto com ponta de aço**

**Figura 48 – Ensaio de Amortecimento nº 2.**



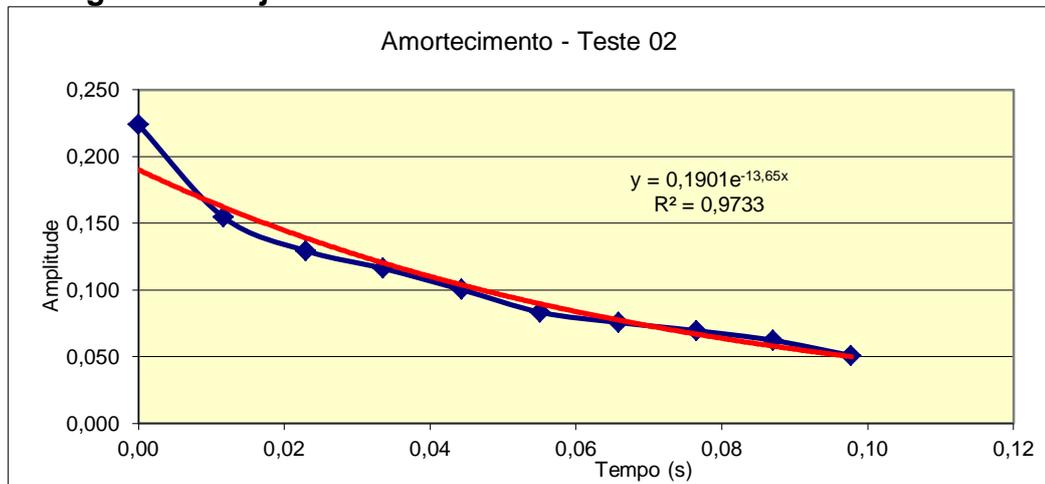
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Tabela 3 – Dados do ensaio de amortecimento nº 2**

i	Número da amostra	$\Delta A$	t (s)	$\Delta t$ (s)	Amplitude	$\Delta A$	$\delta$	$\xi$
1	114		0,00000	0,00000	0,22380			
2	347	233	0,01165	0,01165	0,15450	0,06930	0,37056	0,0590
3	574	227	0,02300	0,01135	0,12920	0,02530	0,17883	0,0285
4	785	211	0,03355	0,01055	0,11610	0,01310	0,10691	0,0170
5	1001	216	0,04435	0,01080	0,10010	0,01600	0,14828	0,0236
6	1217	216	0,05515	0,01080	0,08320	0,01690	0,18492	0,0294
7	1431	214	0,06585	0,01070	0,07560	0,00760	0,09579	0,0152
8	1645	214	0,07655	0,01070	0,06940	0,00620	0,08557	0,0136
9	1855	210	0,08705	0,01050	0,06220	0,00720	0,10953	0,0174
10	2069	214	0,09775	0,01070	0,05080	0,01140	0,20246	0,0322

Fonte: Dados da Pesquisa

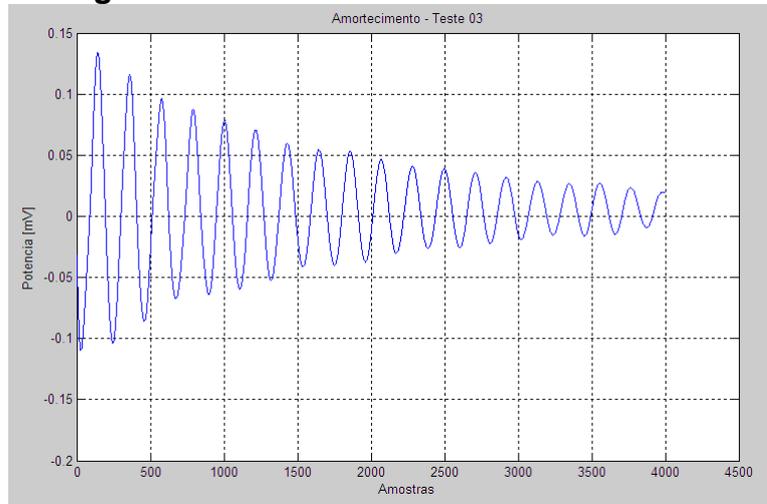
**Figura 49 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio nº 2.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Ensaio nº 3 – Martelo de impacto com ponta média (plástico).**

**Figura 50 – Ensaio de Amortecimento nº 3.**



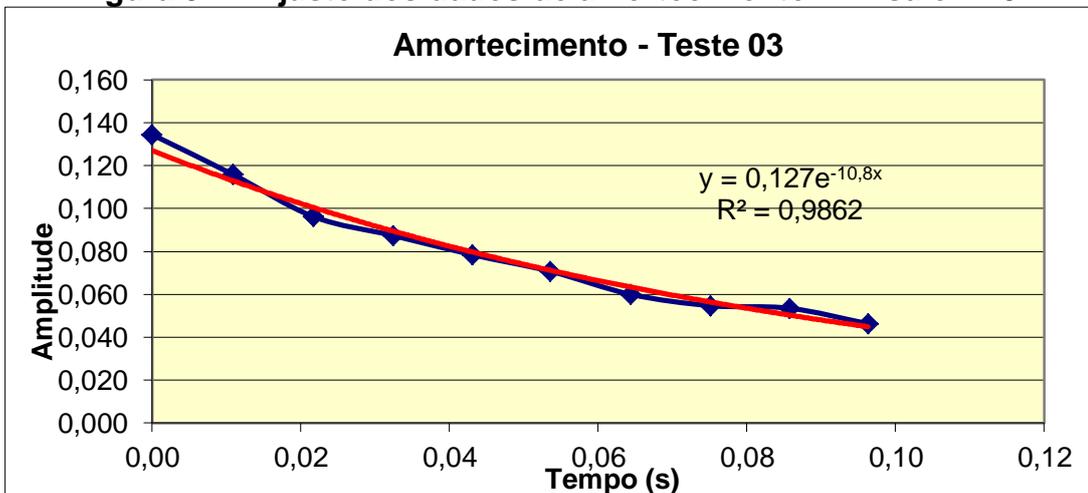
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Tabela 4 – Dados do ensaio de amortecimento nº 3**

i	Número da amostra	$\Delta A$	t (s)	$\Delta t$ (s)	Amplitude	$\Delta A$	$\delta$	$\xi$
1	143		0,00000	0,00000	0,13440			
2	360	217	0,01230	0,01230	0,11590	0,01850	0,14809	0,0236
3	577	217	0,02315	0,01085	0,09620	0,01970	0,18630	0,0297
4	791	214	0,03385	0,01070	0,08740	0,00880	0,09593	0,0153
5	1005	214	0,04455	0,01070	0,07840	0,00900	0,10867	0,0173
6	1215	210	0,05505	0,01050	0,07070	0,00770	0,10338	0,0165
7	1430	215	0,06580	0,01075	0,60000	-0,52930	-2,13848	-0,3403
8	1646	216	0,07660	0,01080	0,05470	0,54530	2,39507	0,3812
9	1858	212	0,08720	0,01060	0,05350	0,00120	0,02218	0,0035
10	2069	211	0,09775	0,01055	0,04630	0,00720	0,14454	0,0230

Fonte: Dados da Pesquisa.

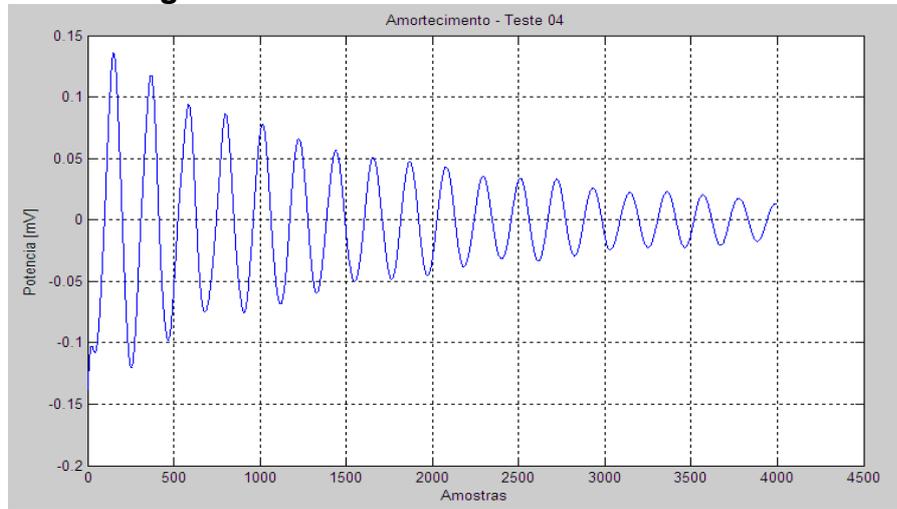
**Figura 51 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio nº 3.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Ensaio nº 4 – Martelo de impacto com ponta média (plástico).**

**Figura 52 – Ensaio de Amortecimento nº 4.**



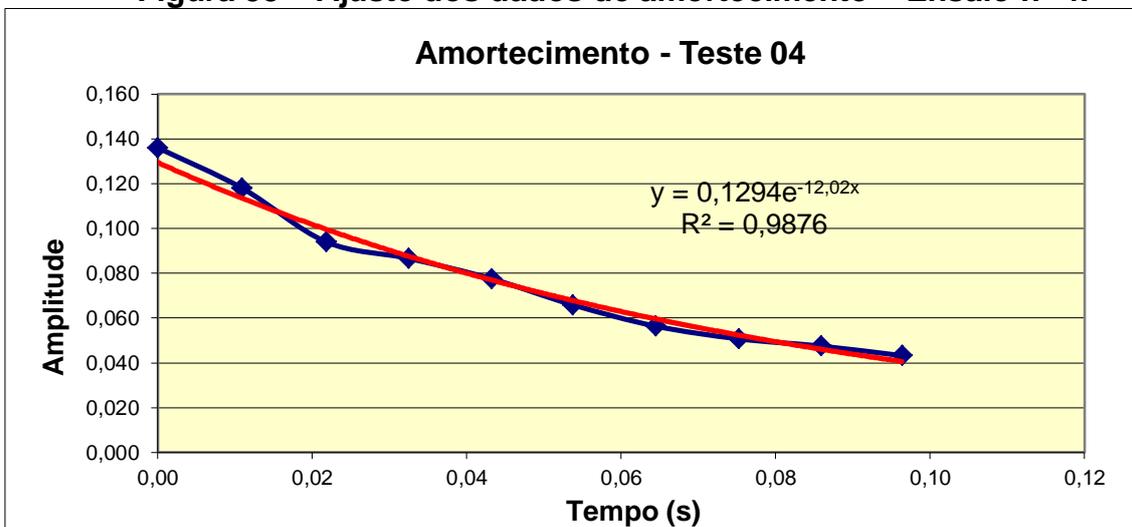
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Tabela 5 – Dados do ensaio de amortecimento nº 4.**

i	Número da amostra	$\Delta A$	t (s)	$\Delta t$ (s)	Amplitude	$\Delta A$	$\delta$	$\xi$
1	151		0,00000	0,00000	0,13600			
2	369	218	0,01275	0,01275	0,11800	0,01800	0,14197	0,0226
3	587	218	0,02365	0,01090	0,09400	0,02400	0,22739	0,0362
4	801	214	0,03435	0,01070	0,08660	0,00740	0,08199	0,0130
5	1015	214	0,04505	0,01070	0,07754	0,00906	0,11051	0,0176
6	1225	210	0,05555	0,01050	0,06591	0,01163	0,16250	0,0259
7	1440	215	0,06630	0,01075	0,05640	0,00951	0,15582	0,0248
8	1656	216	0,07710	0,01080	0,05070	0,00570	0,10654	0,0170
9	1869	213	0,08775	0,01065	0,04747	0,00323	0,06583	0,0105
10	2079	210	0,09825	0,01050	0,04320	0,00427	0,09426	0,0150

Fonte: Dados da Pesquisa.

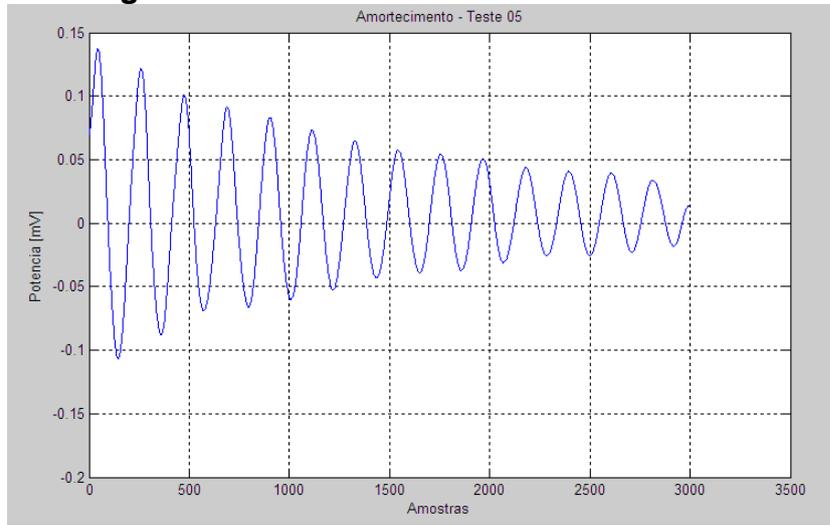
**Figura 53 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio nº 4.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Ensaio nº 5 – Martelo de impacto com ponta média (plástico).**

**Figura. 54 – Ensaio de Amortecimento nº 5.**



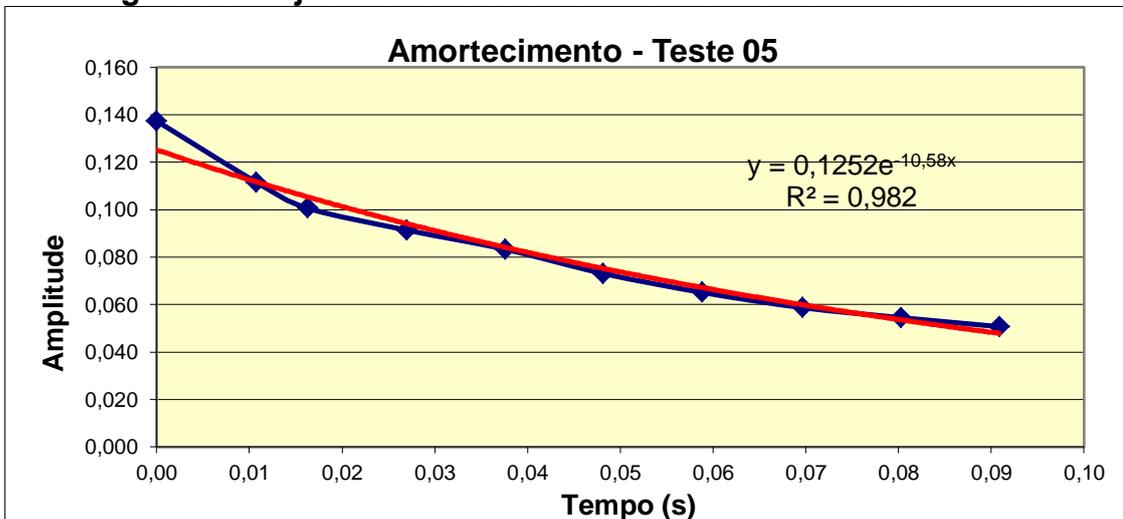
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Tabela 6 – Dados do ensaio de amortecimento nº 5.**

i	Número da amostra	$\Delta A$	t (s)	$\Delta t$ (s)	Amplitude	$\Delta A$	$\delta$	$\xi$
1	45		0,00000	0,00000	0,01374			
2	260	215	0,00730	0,00730	0,11160	-0,09786	-2,09461	-0,3334
3	476	216	0,01810	0,01080	0,00700	0,10460	2,76901	0,4407
4	690	214	0,02880	0,01070	0,09140	-0,08440	-2,56934	-0,4089
5	903	213	0,03945	0,01065	0,08330	0,00810	0,09280	0,0148
6	1114	211	0,05000	0,01055	0,07310	0,01020	0,13062	0,0208
7	1328	214	0,06070	0,01070	0,06510	0,00800	0,11590	0,0184
8	1544	216	0,07150	0,01080	0,05870	0,00640	0,10348	0,0165
9	1756	212	0,08210	0,01060	0,05450	0,00420	0,07424	0,0118
10	1968	212	0,09270	0,01060	0,05070	0,00380	0,07227	0,0115

Fonte: Dados da Pesquisa

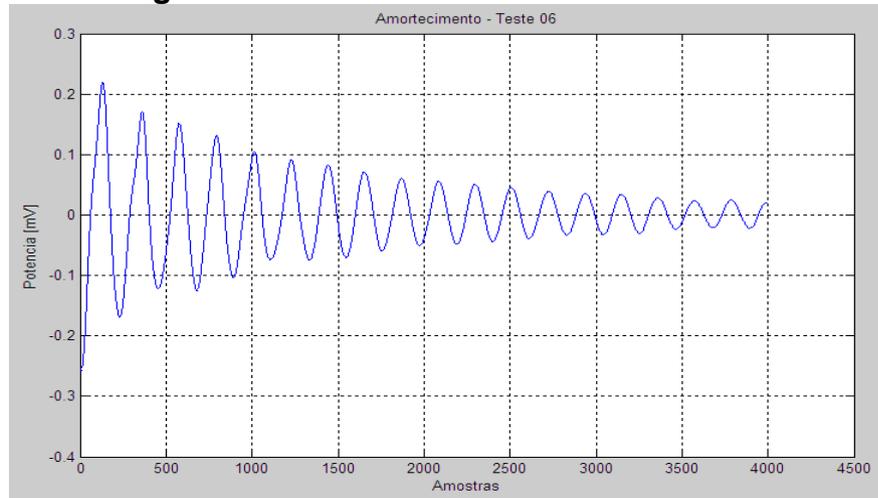
**Figura 55 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio nº 5.**



Fonte: Elaborado pelo autor

## Ensaio nº 6 – Martelo de impacto com ponta de aço.

### Figura 56 – Ensaio de Amortecimento nº 6.



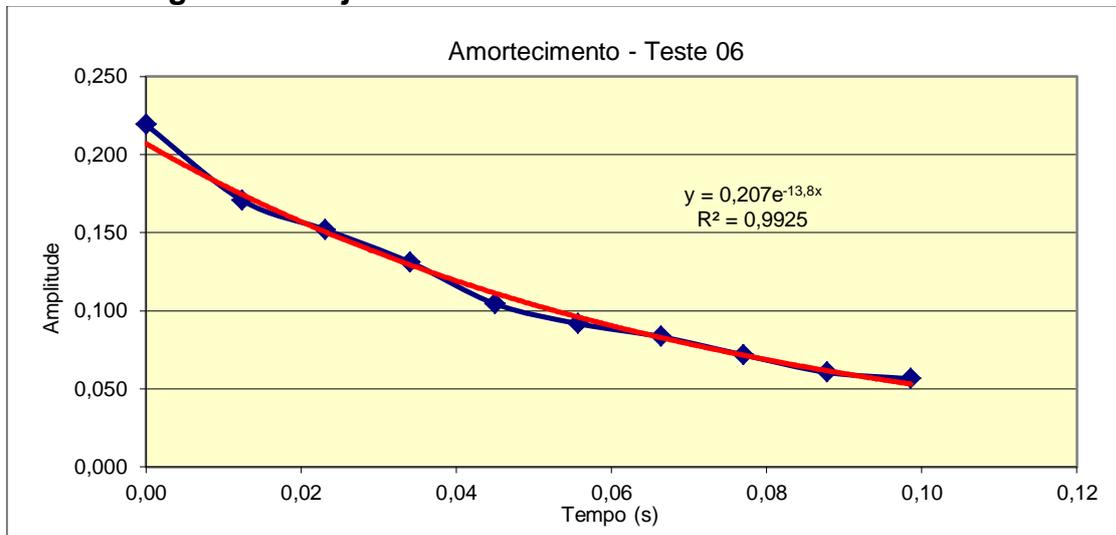
Fonte: Elaborado pelo autor.

### Tabela 7 – Dados do ensaio de amortecimento nº 6.

i	Número da amostra	$\Delta A$	t (s)	$\Delta t$ (s)	Amplitude	$\Delta A$	$\delta$	$\xi$
1	132		0,00000	0,00000	0,21910			
2	362	230	0,01240	0,01240	0,17070	0,04840	0,24962	0,0397
3	576	214	0,02310	0,01070	0,15190	0,01880	0,11669	0,0186
4	795	219	0,03405	0,01095	0,13100	0,02090	0,14803	0,0236
5	1014	219	0,04500	0,01095	0,10440	0,02660	0,22697	0,0361
6	1228	214	0,05570	0,01070	0,09170	0,01270	0,12971	0,0206
7	1442	214	0,06640	0,01070	0,08330	0,00840	0,09607	0,0153
8	1654	212	0,07700	0,01060	0,07170	0,01160	0,14996	0,0239
9	1870	216	0,08780	0,01080	0,06050	0,01120	0,16985	0,0270
10	2086	216	0,09860	0,01080	0,05640	0,00410	0,07017	0,0112

Fonte: Dados da Pesquisa.

### Figura 57 – Ajuste dos dados de amortecimento – Ensaio nº 6.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Compilados os dados dos seis ensaios e separando-os por tipo de ponta utilizada para o impacto, foram gerados os dados da tabela 8.

**Tabela 8 – Dados de impacto por tipo de ponta do martelo.**

Ensaio	Potência Máxima (mV)	Fator de Amortec. ( $\zeta$ ) n=10	Ensaio	Potência Máxima (mV)	Fator de Amortec. ( $\zeta$ ) n=10
1	0,2085	0,02292	3	0,1344	0,01885
2	0,2238	0,02622	4	0,1360	0,02080
6	0,2191	0,02400	5	0,1374	0,01763
Média:	0,2171	0,02438		0,1359	0,01909

Fonte: Dados da Pesquisa.

Separando os dados dos ensaios feitos com a ponta dura do martelo (ensaios 1,2 e 6) dos dados dos ensaios com a ponta média (ensaios 3, 4 e 5), pode-se concluir o seguinte:

- a energia transferida média à viga com impactos feitos com martelo com a ponta dura 0,2171 mV foi superior a energia média transferida quando o martelo estava com a ponta média, 0,1359 mV, portanto cerca de 37% menor.
- o fator de amortecimento calculado a partir dos dez primeiros picos de vibração também variou de 0,02438 para os ensaios com ponta dura, contra 0,01909 para os ensaios com ponta média, portanto, cerca de 21% menor.
- a energia de impacto variou de teste para teste, considerando que foi feito por mão humana.

**Tabela 9 – Cálculo dos coeficientes médios de amortecimento dos 6 ensaios.**

Coeficientes		1	2	3	4	5	6	Media
Decremento Logaritmico	$\delta =$	0,12620	0,16476	0,11841	0,12742	0,11077	0,15078	0,13306
Fator de Amortecimento	$\xi =$	0,02009	0,02622	0,01885	0,02080	0,01763	0,02400	0,02127

Fonte: Dados da Pesquisa.

Como mostrado na tabela 9, apesar de ter sido utilizado um martelo de impacto com a ponta de metal e com uma ponta de silicone, os gráficos de amortecimento tiveram um comportamento bastante semelhantes, resultando em um fator de amortecimento médio ( $\zeta$ ) de 0,0213. Este valor foi utilizado no cálculo das deformações esperadas na viga submetida aos diversos carregamentos dinâmicos.

Foi necessária a utilização de um filtro do tipo passa-baixa, com frequência de corte de 300 Hz, para limpeza dos sinais de frequência muito alta que causavam ruído no espectro.

## 4.2 Medição das vibrações na estrutura ensaiada

A etapa final do desenvolvimento deste trabalho culmina com a medição das vibrações impostas nesta estrutura pelo excitador dinâmico, já descrito no item 3.2. Nas medições complementares foram feitos alguns ensaios utilizando a placa 6251 USB, conforme o esquema mostrado na figura 58.

**Figura 58 – Montagem do sistema de aquisição de dados.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

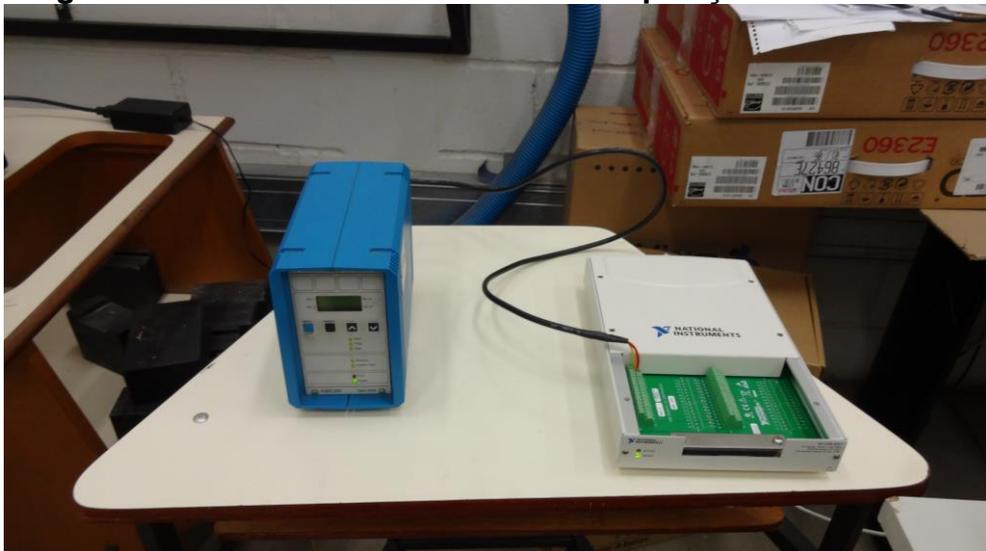
### 4.2.1 Procedimento utilizado

Uma fonte de CC alimenta o motor com tensão variando de 0 a 24 V. Para cada ajuste da tensão a rotação do motor é aferida com um tacômetro. Um acelerômetro fixado no ponto médio da viga capta o sinal que passa em seguida pelo condicionador, onde se ajusta o ganho adequado. O sinal após o condicionador passa pela placa coletora (Figuras 59 e 60) da *National Instruments*, que digitaliza o sinal, discretizando-o no tempo. Os dados são inicialmente armazenados no computador, conforme os parâmetros definidos no programa **aqdata.m**. Esses parâmetros são principalmente: a taxa de aquisição de dados (20.000

amostras/segundo) e a quantidade de amostras coletadas a cada medição (150.000 amostras). Portanto, cada medição durava 7,5 segundos.

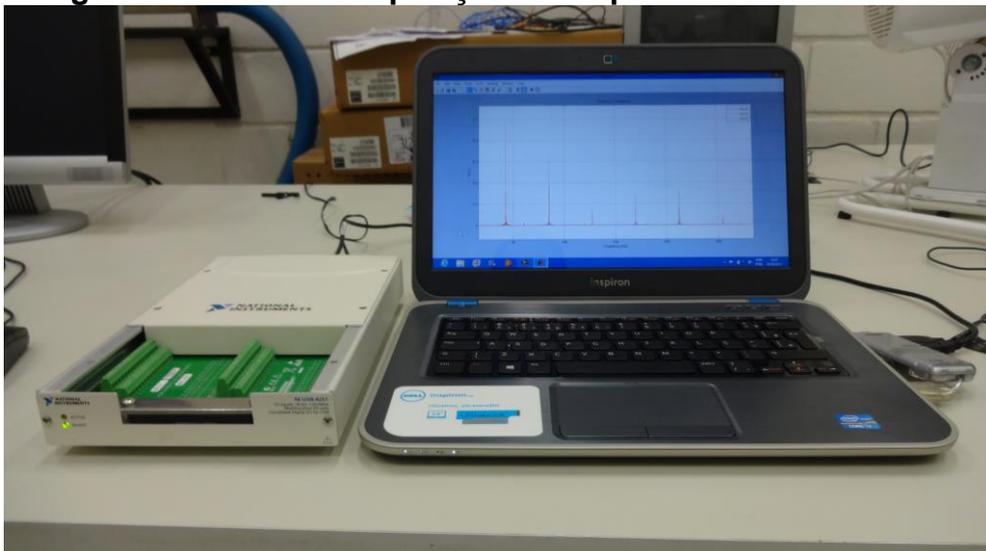
Na primeira bateria de ensaios foram colocados três acelerômetros na estrutura: um no ponto médio da viga (acc2), outro a um quarto do comprimento total do lado direito (acc1) e outro sob o mancal direito (acc3). Para simplificar o tratamento dos dados nesta fase inicial de desenvolvimento do programa, foram tratados apenas os dados do acelerômetro instalado no ponto médio do comprimento da viga (acc2).

**Figura 59 – Condicionador e Placa de Aquisição USB 6251 NI.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 60 – Placa de aquisição e computador com software.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a aquisição, os dados foram tratados num segundo programa que os processou, executando as seguintes funções:

- Geração do gráfico da potência do sinal (aceleração) x tempo.
- Geração do espectro de frequências.
- Filtragem do sinal através da aplicação de um filtro passa-baixa.
- Geração do gráfico do sinal filtrado aceleração x tempo.
- Integração numérica para obtenção dos gráficos: velocidade x tempo e deslocamento x tempo.

#### 4.2.2 Cálculo da força excitadora ( $F_{(t)}$ ) em função da rotação do motor.

O valor de  $F_{(t)}$  é calculado pela expressão:

$$F_{(t)} = m_{exc} \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (80)$$

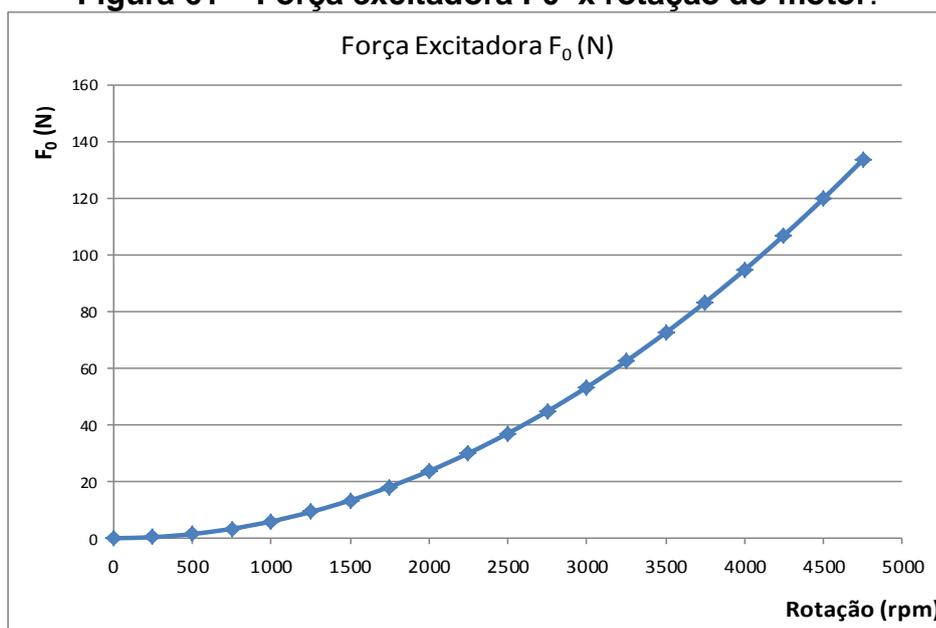
onde :  $m_{exc}$  é a massa excêntrica fixada na polia do motor

$r$  é o raio do centro da massa excêntrica

$\omega$  é a velocidade angular do motor.

Foram executados 20 testes, sendo 11 com massa excêntrica de 18 gramas e 9 testes com massa excêntrica de 8 gramas, conforme pode ser observado na tabela 10. O módulo de  $F_{(t)}$ , denominado de  $F_0$ , em função da rotação para a massa excêntrica de 18 gramas pode ser avaliado na figura 61.

**Figura 61 – Força excitadora  $F_0$  x rotação do motor.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 4.2.3 Resumo dos ensaios executados.

Para o processamento dos dados coletados foi necessário inserir no programa os valores de sensibilidade de cada acelerômetro conforme abaixo:

Sensibilidade do acelerômetro 1 :	483,0 mV/g
Sensibilidade do acelerômetro 2 :	503,7 mV/g
Sensibilidade do acelerômetro 3 :	478,6 mV/g

Para o cálculo dos deslocamentos da viga em cada condição de excitação dos ensaios, foram usados os valores abaixo:

Rigidez da viga (K) :	4,161 x 10 <sup>6</sup> N/m
Primeira frequência natural da viga :	573,58 rad/s
	91,29 Hz
Excentricidade da massa desbalanceada :	0,030 m

Os cálculos dos deslocamentos apresentados na tabela 10, foram executados para o ponto médio da viga, onde estava acoplado o acelerômetro nº 2. Por isso, na tabela o valor do deslocamento é o mesmo para os testes feitos com o motor girando na mesma rotação. O módulo da força excitadora variou de apenas 5,84 N, para rotação de 993 rpm ( $\omega = 103,987 \text{ rad/s}$ ) até 73,37 N, para rotação de 3520 rpm ( $\omega = 368,614 \text{ rad/s}$ ), com a massa excêntrica de 18 gramas (testes nº 1 a 11).

Acima desta rotação e com a massa excêntrica de 18 gramas, ocorreu a saturação do acelerômetro, gerando dados confusos, impossíveis de serem trabalhados. Isto foi provocado, possivelmente, não devido a deformação excessiva, pois como mostrado na tabela, a deformação máxima era de 0,03 mm. O que ocorreu nestas rotações elevadas, foi uma agitação no mancal direito, provocado pelo batimento da chapa fixada sob a viga. Esta chapa se apoia na placa de UHMW, e é contida lateralmente duas pequenas cantoneiras. Entre esta placa de apoio e as cantoneiras laterais existe uma folga, pois esta é uma construção soldada.

Sendo assim para os testes realizados com rotação mais elevada, foram tomadas as seguintes providências: redução da massa excêntrica, deixando apenas os dois parafusos fixados na polia e redução do ganho do condicionador de sinais de 5 para 2 (testes nº 12 a 20).

A medição da amplitude do deslocamento foi feita pico a pico, analisando o gráfico deslocamento x tempo para cada um dos ensaios. Para cada grupo de 2 ou

três ensaios com o excitador na mesma rotação, foi apresentado apenas um gráfico do deslocamento. Assim para os testes 1, 2 e 3, por exemplo, apenas o resultado do teste nº 1 está ilustrado nas páginas seguintes.

O valor da amplitude dos deslocamentos foi adquirido com o auxílio da ferramenta de cursor de dados do MatLAB, que indica o valor da abcissa (tempo) e da ordenada (deslocamento), quando se aproxima o cursor do mouse do ponto desejado. Pode-se notar que todos os gráficos dos deslocamentos produzidos pelo programa de processamento do sinal, ainda apresenta uma variação (tremida) na forma da onda. Isto é um indicativo que os parâmetros de filtragem devem ser melhorados. Devido a esta variação pode-se concluir que o valor adquirido desta forma pode variar se outro pico da onda for escolhido para aquisição do dado.

Esta variação na forma do sinal se apresentou maior em alguns testes, e menor em outros. Esta perturbação no sinal, possivelmente foi aumentada por que trabalhamos com amplitudes muito baixas.

No cálculo das deformações foi utilizado o valor médio para o fator de amortecimento ( $\zeta = 0,02127$ ). É importante ressaltar que este baixo valor do fator de amortecimento resultou num valor de frequência amortecida ( $\omega_d = 573,45 \text{ rad/s}$ ) muito próximo do valor da frequência não amortecida ( $\omega = 573,58 \text{ rad/s}$ ). Isto indica que o cálculo do deslocamento poderia ter sido feito adotando-se o valor da frequência não amortecida, que os dados seriam também muito próximos.

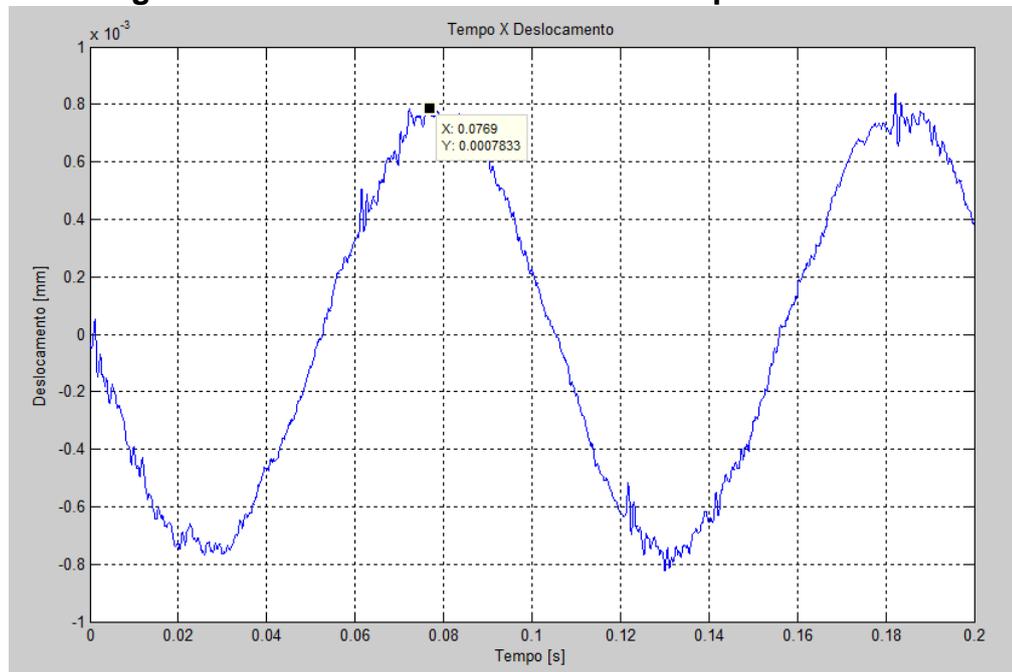
**Tabela 10 – Resumo dos Ensaios de Carregamento Dinâmico da Viga**

RESUMO DOS ENSAIOS DE CARREGAMENTO DINÂMICO - VIGA BIAPOIADA													
Sensibilidade Acelerômetro 1 :		483,0		mV/g									
Sensibilidade Acelerômetro 2 :		503,7		mV/g									
Sensibilidade Acelerômetro 3 :		478,6		mV/g									
Rigidez da Viga (K) :		4,161E+06		N/m									
Frequência Natural da viga :		573,58		rad/s									
Raio médio do segmento excêntrico :		0,030		m									
Teste	Rotação (rpm)	Frequência de Excitação (Hz)	Frequência de Excitação (rad/s)	Massa $m_{exc}$ (g)	Força Excit. $F_0$ (N)	Flecha est. $\hat{O}_{est}$ (mm)	Fator de Amortec. $\zeta$	Frequência Amortec. $\omega_d$	Razão de Amortec. $r = \omega/\omega_n$	Desloc. X calculado (mm)	Desloc. X medido (mm)	Erro $\Delta$ (%)	
1	993	16,550	103,987	18	5,839	1,403E-03	0,02127	573,450	0,181	1,451E-03	1,566E-03	7,34	
2	993	16,550	103,987	18	5,839	1,403E-03	0,02127	573,450	0,181	1,451E-03			
3	993	16,550	103,987	18	5,839	1,403E-03	0,02127	573,450	0,181	1,451E-03			
4	2566	42,767	268,711	18	38,991	9,371E-03	0,02127	573,450	0,468	1,200E-02	1,318E-02	8,95	
5	2566	42,767	268,711	18	38,991	9,371E-03	0,02127	573,450	0,468	1,200E-02			
6	2566	42,767	268,711	18	38,991	9,371E-03	0,02127	573,450	0,468	1,200E-02			
7	3132	52,200	327,982	18	58,089	1,396E-02	0,02127	573,450	0,572	2,073E-02	2,234E-02	7,22	
8	3132	52,200	327,982	18	58,089	1,396E-02	0,02127	573,450	0,572	2,073E-02			
9	3132	52,200	327,982	18	58,089	1,396E-02	0,02127	573,450	0,572	2,073E-02			
10	3520	58,667	368,614	18	73,373	1,763E-02	0,02127	573,450	0,643	3,000E-02	3,18E-02	5,59	
11	3520	58,667	368,614	18	73,373	1,763E-02	0,02127	573,450	0,643	3,000E-02			
12	3663	61,050	383,588	8	35,314	8,487E-03	0,02127	573,450	0,669	1,533E-02	1,690E-02	9,28	
13	3663	61,050	383,588	8	35,314	8,487E-03	0,02127	573,450	0,669	1,533E-02			
14	3663	61,050	383,588	8	35,314	8,487E-03	0,02127	573,450	0,669	1,533E-02			
15	4398	73,300	460,557	8	50,907	1,224E-02	0,02127	573,450	0,803	3,433E-02	3,576E-02	4,01	
16	4398	73,300	460,557	8	50,907	1,224E-02	0,02127	573,450	0,803	3,433E-02			
17	4398	73,300	460,557	8	50,907	1,224E-02	0,02127	573,450	0,803	3,433E-02			
18	4719	78,650	494,173	8	58,610	1,409E-02	0,02127	573,450	0,862	5,438E-02	5,868E-02	7,34	
19	4719	78,650	494,173	8	58,610	1,409E-02	0,02127	573,450	0,862	5,438E-02			
20	4719	78,650	494,173	8	58,610	1,409E-02	0,02127	573,450	0,862	5,438E-02			

Fonte: Elaborado pelo autor

**Teste 1 – Rotação = 993 rpm**

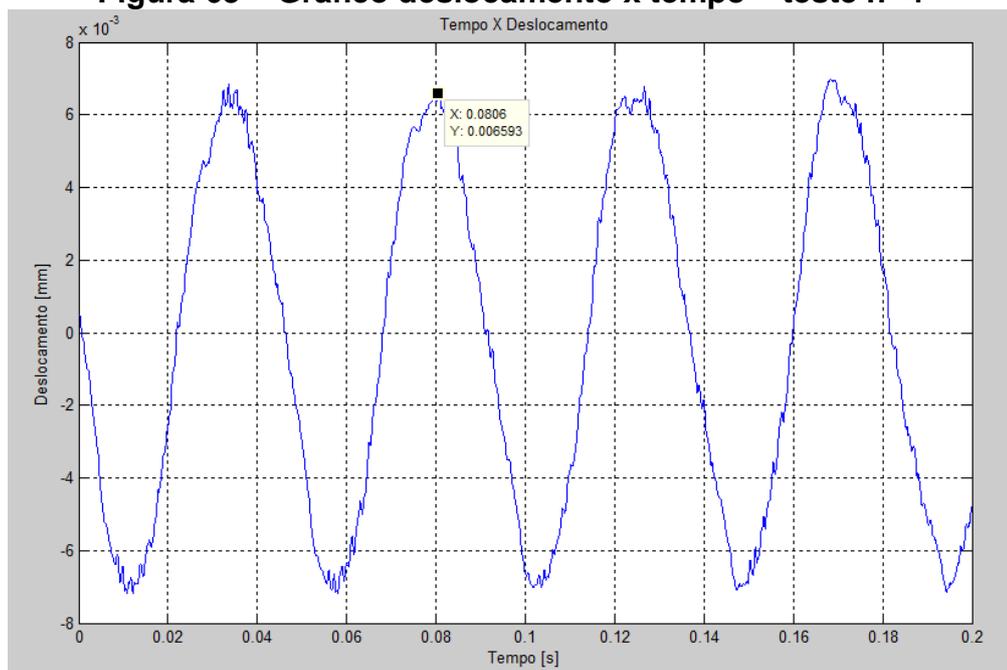
Ganho do condicionador = 5

**Figura 62 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 1**

Fonte: Elaborado pelo autor

**Teste 4 - Rotação = 2566 rpm**

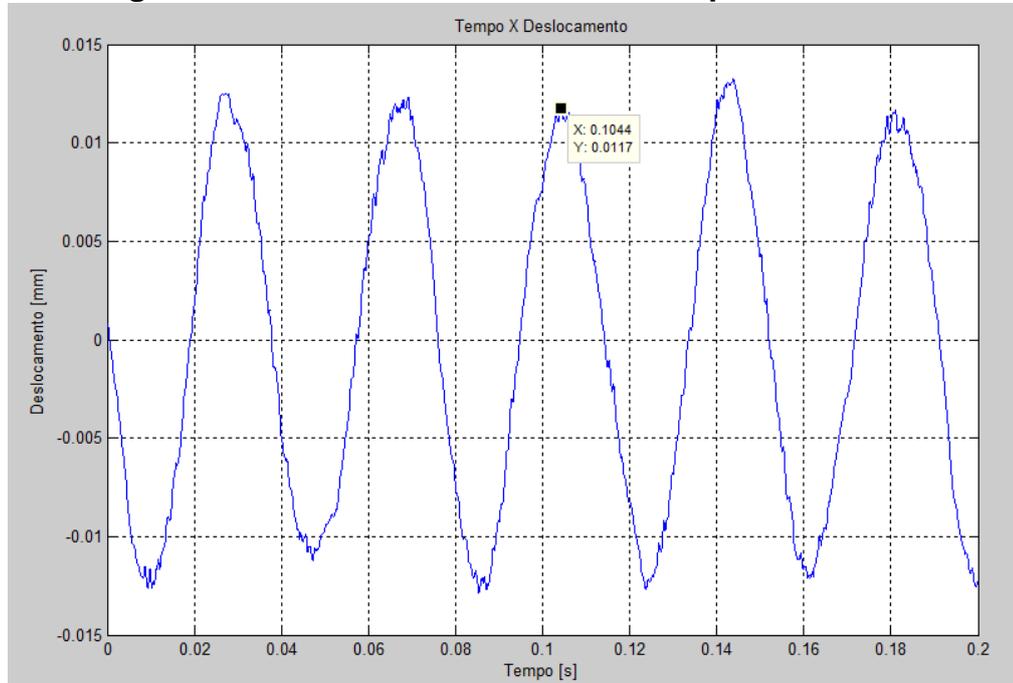
Ganho do condicionador = 5

**Figura 63 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 4**

Fonte: Elaborado pelo autor

**Teste 7 - Rotação = 3132 rpm**

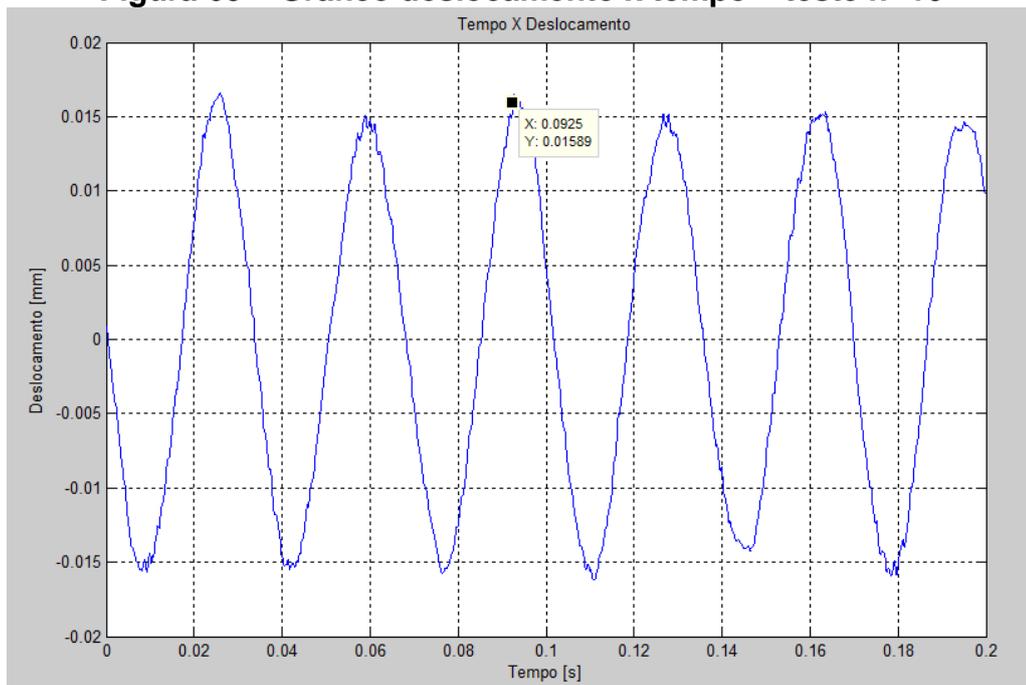
Ganho do condicionador = 5

**Figura 64 – Gráfico deslocamento x tempo – Teste nº 7**

Fonte: Elaborado pelo autor

**Teste 10 - Rotação = 3520 rpm**

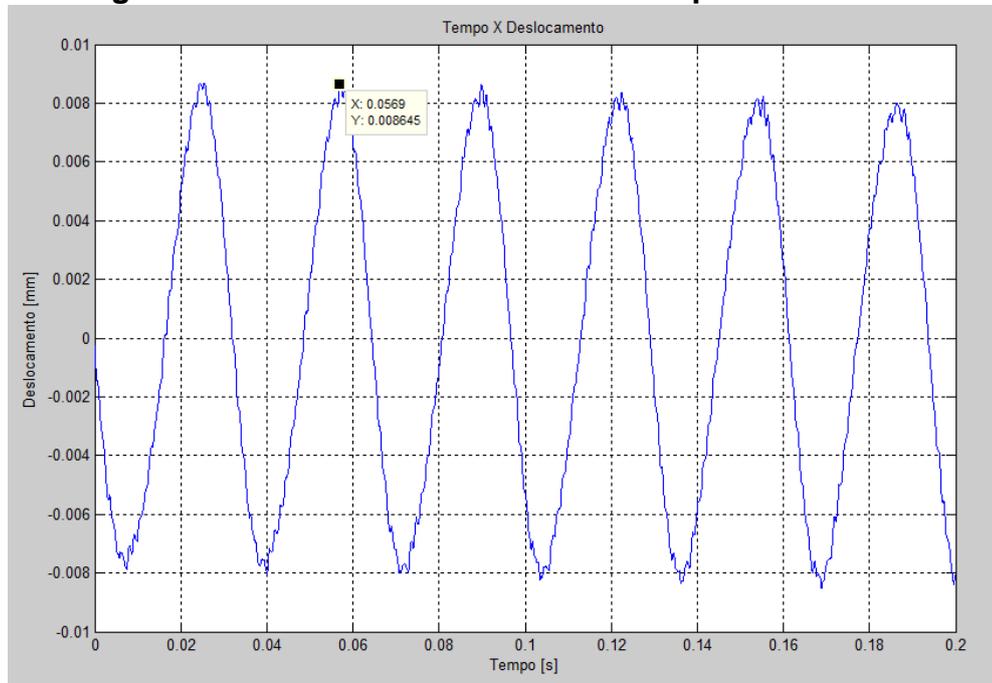
Ganho do condicionador = 5

**Figura 65 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 10**

Fonte: Elaborado pelo autor

**Teste 12 - Rotação = 3663 rpm**

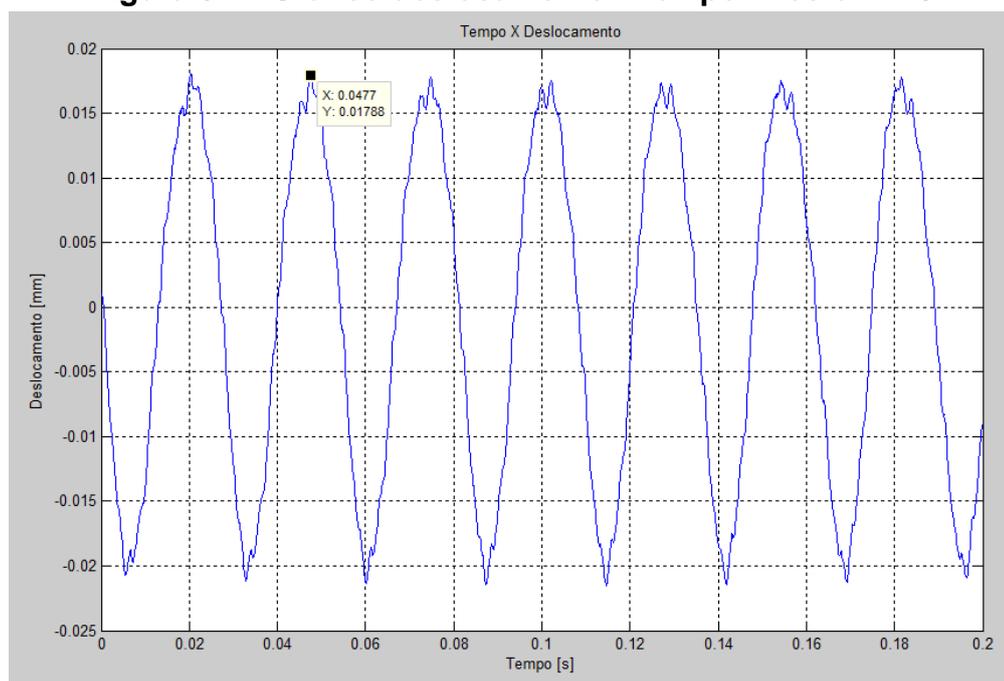
Ganho do condicionador = 2

**Figura 66 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 12**

Fonte: Elaborado pelo autor

**Testes 15 - Rotação = 4398 rpm**

Ganho do condicionador = 2

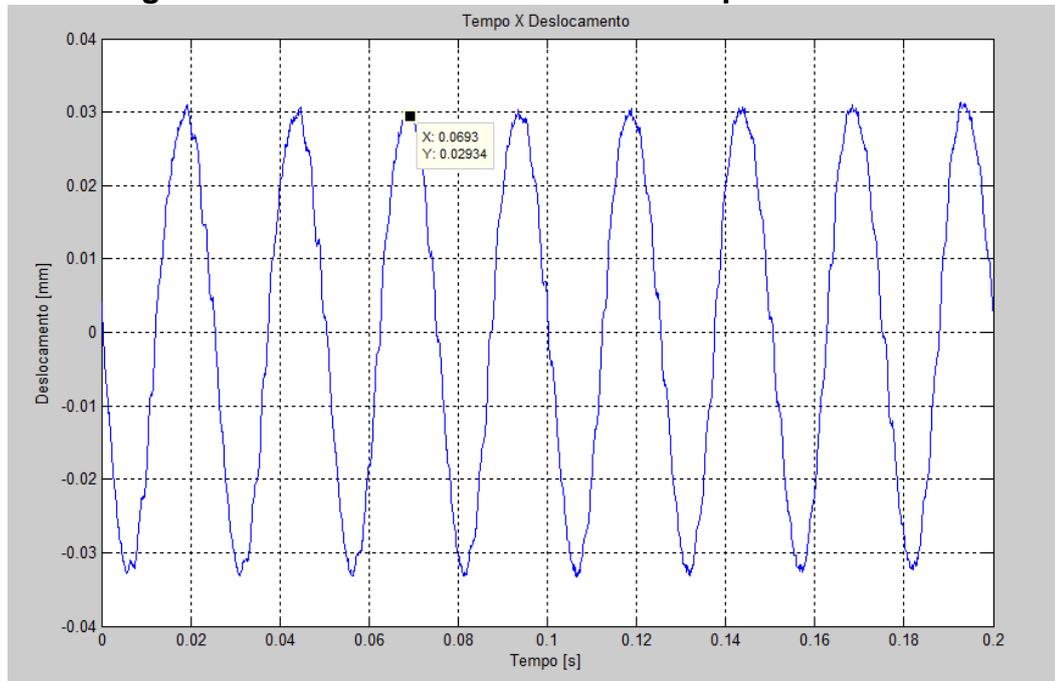
**Figura 67 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 15**

Fonte: Elaborado pelo autor

**Teste 18 - Rotação = 4719 rpm**

Ganho do condicionador = 2

**Figura 68 – Gráfico deslocamento x tempo – teste nº 18**



Fonte: Elaborado pelo autor

## 5 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos com o equipamento montado conforme descrito nos capítulos anteriores, indicam uma boa consistência dos dados para o ensaio de amortecimento da estrutura.

Na coleta dos dados, houve sempre uma perturbação no sinal, causado por um modo com frequência muito alta, o que foi solucionado com aplicação de um filtro passa baixa. A diferença entre o resultado teórico e experimental de 1,6 % corrobora a avaliação inicial feita a partir dos gráficos de amortecimento, que se mostraram muito consistentes em todos os ensaios realizados.

Isto indica que o programa de coleta e tratamento dos dados opera de forma adequada, significando que este sistema simples já pode ser utilizado para determinação de frequências naturais de equipamentos e estruturas em geral. Este é um dos objetivos principais deste trabalho, pois forneceu dados importantes de projetos de edificações de aço e de concreto armado, constituindo uma ferramenta indispensável para garantia da qualidade de projetos de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos.

A segunda parte do programa, que processa o sinal com a aplicação de filtros e integração para se obter a velocidade e o deslocamento da vibração, necessita de uma melhoria. Esta parte do programa apresenta uma dificuldade maior, devido a falta dados de condições iniciais e as rotinas que são utilizadas para contornar este problema. Os gráficos finais de velocidade x tempo e deslocamento x tempo ainda não apresentam qualidade comparável aos equipamentos comerciais. Isto sugere que é necessária uma melhoria das rotinas de aplicação dos filtros ou de seus parâmetros.

Outro fator prejudicial aos ensaios é que trabalhamos com deslocamentos muito pequenos e em consequência baixa potência de sinal. Sendo assim, os ruídos captados representavam um fração proporcionalmente elevada do sinal, desde modo a porção limiar do sinal, que sempre é desprezada em todos os sistemas comerciais por meios de filtros passa alta, ainda deve estar interferindo nesta fração.

A implementação de uma rotina de janelamento automático na porção de interesse do sinal também facilitará muito a utilização do sistema. No seu estágio atual, o janelamento é feito após análise do primeiro gráfico gerado, para então prosseguir com as demais rotinas do programa. A determinação do intervalo de

janelamento é feita cotejando o gráfico inicial deslocamento x tempo. Então define-se o intervalo e digitando estes valores o programa prossegue na rotina de filtragem do sinal e aplicação do algoritmo de FFT.

Consideramos o resultado geral positivo, pois os dados se mostraram consistentes na maioria dos ensaios, o que indica que apesar de ser necessário fazer melhorias, ficou claro que o sistema funciona e poderá ser utilizado no futuro para avaliação de estruturas submetidas a solicitações dinâmicas de forma confiável.

### **5.1 Desenvolvimentos futuros a serem implementados no sistema.**

Considerando a importância deste estudo, e a utilidade de um sistema de aquisição de dados de vibrações que possa ser utilizado nas situações mais diversas das atividades da engenharia, é importante implementar as melhorias citadas acima no sistema e melhorar ainda os seguintes pontos:

- implementar rotina de janelamento automático no programa, atualmente é necessário fazer análise visual do sinal e selecionar no segundo programa a janela de dados a ser tratada;
- verificar aquisição de placa com condicionador de sinal. Para utilização no campo, o sistema ficará mais prático se não houver a necessidade de instalar o condicionador de sinais;
- melhorar o equipamento de ensaio instalado, substituindo a viga por um perfil de menor inércia e aumentando a massa excêntrica, aumentando desta forma o sinal a ser captado pelos acelerômetros;
- juntar ambos os programas; o de coleta e o de processamento do sinal, possibilitando ganho efetivo de tempo;
- compilar o programa que opera em MatLAB em linguagem C, por exemplo, após todas as melhorias.

## REFERÊNCIAS

- Agilent Technologies. **The Fundamentals of Signal Analysis**. Application Note 243. Site: <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5952-8898E.pdf>
- Agilent Technologies. **The Fundamentals of Modal Analysis**. Application Note 243-3. Site: <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5954-7957E.pdf>
- Almeida, Márcio Tadeu. **Vibrações Mecânicas para Engenheiros**. Editora Edgar Blucher Ltda. São Paulo – Brasil, 1987.
- Almeida, Rogerio Rosa. **Análise de vibrações em sistemas estruturais para pisos mistos, com joists submetidos a atividades humanas rítmicas**. Dissertação de Mestrado. UERJ. Rio de Janeiro. 2008.
- Betta, Giovanni. D'Apuzzo, Massimo. Liguori, Consolatina. Pietrosanto, Antonio. **An Intelligent FFT-Analyzer**. IEEE Transactions on instrumentation and measurement. Vol 47, N° 5, 1998.
- Bilski, Piotr. Winiiecki, Wieslaw. **A Low-Cost Real-Time Virtual Spectrum Analyzer**. IEEE. IMTC 2005. Instrumentation and Measurement Technology Conference. Ottawa, 2005.
- Bruel & Kjaer. **Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers**. Theory and Application Handbook. Bruel & Kjaer. Naerum. 1986.
- Carvalho, Fábio Wagner Leão de. **Procedimento experimental para avaliação do fator de amortecimento em estruturas**. Dissertação de Mestrado. UFMG. Belo Horizonte. 2002.
- Chapman, Stephen J. **Programação em Matlab para Engenheiros**. 1ª. Edição. Editora Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2003.
- Chapra, Steven C., Canale, Raymond P. **Métodos numéricos para Engenharia**. 5ª edição. Editora McGraw-Hill, São Paulo, 2008.
- Cossolino, L.C, Pereira, A.H.A, Amortecimento: **Classificação e métodos de determinação**, Nota Técnica da ATCP Engenharia, 2010, São Paulo, Brasil.
- Costa, César da, Mathias, Mauro Hugo. **Análise de vibrações mecânica com FPGA**. Eletrônica aplicada nº 429. 2008.
- De Silva, Clarence W., **Vibration Damping Control and Design**, CRC Press, Vancouver. Canadá, 2007.
- HAYES, Monson H. **Digital Signal Processing**. 1ª. Edição. Editora McGraw-Hill, New York, 1999.
- ISO 2631-1 – **Mechanical vibration – Evaluation of human exposure to whole-body vibration**. Part 1: General requirements.

ISO 2631-2 – **Mechanical vibration – Evaluation of human exposure to whole-body vibration**. Part 2: Continuous and shock-induced vibrations in buildings (1 to 80 Hz).

ISO 2631-3 – **Mechanical vibration - Evaluation of human exposure to whole-body vibration**. Part 3: Evaluation of exposure to whole-body z-axis vertical vibration in the frequency range 0,1 to 0,63 Hz.

ISO 5349-1 – **Mechanical vibration – Measurement and evaluation of human exposure to handtransmitted vibration** – Part 1: General requirements.

ISO 5349-2 – **Mechanical vibration – Measurement and evaluation of human exposure to handtransmitted vibration** – Part 2: Practical guidance for measurement at the workplace.

Lazer, A. C.; McKenna, P. J. Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis. SIAM. Filadélfia. Vol. 32 nº 4. 1990.

Matsumoto, ÉliaYathie. **Matlab6 Fundamentos de Programação**. 2ª. Edição. Editora Érica. São Paulo. 2001.

Moschioni, G.; Saggin, B.; Tarabini, M. **Prediction of data variability in hand-arm vibration measurements**. Measurement (44). 2011.

Picoli, 2010 - **Análise e Diagnóstico de vibrações** – Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande. Site: <http://www2.ee.furg.br/picoli/apostila/unidade7.pdf>\_ Acesso em 07/03/2013.

RAO, Singiresu, **Vibrações Mecânicas**, 5ª. Edição. Editora Editora Pearson Educacional do Brasil. São Paulo, 2009.

Sá, J. P. Marques de. **Processamento de Sinal**. Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, Porto. Portugal. 2001

Thorby, Douglas, **Structural Dynamics and Vibration in Practice**, Oxford, UK, 2008.

Ximenes, Gilmar Machado, **Gestão ocupacional da vibração no corpo humano. Aspectos técnicos e legais relacionados a saúde e segurança**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Fluminense. 2006.

Weeks, Michael, **Digital Signal Processing Using Matlab and Wavelets**, 2ª.Edição.Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, MA, EstadosUnidos. 2010.

Zill, Dennis G. Equações **Diferenciais com Aplicações em Modelagem**, Editora Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2003.

[http://en.wikipedia.org/wiki/File:TacomaNarrowsBridgeCollapse\\_in\\_color.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:TacomaNarrowsBridgeCollapse_in_color.jpg). Acesso em 07/03/2013.

<http://www.wsdot.wa.gov/TNBhistory/Machine/machine3.htm>. Acesso em 07/03/2013.

<http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5952-8898E.pdf>. Acesso em 10/03/2013.

<http://www.pcb.com/Products/>. Acesso em 14/03/2013.

<http://search.ni.com/nisearch/app/main/p/bot/no/ap/global/lang/pt/pg/1/q/6251/>. Acesso em 13/10/2011.

[http://www.datasheets.org.uk/8632C10\\*\\_datasheet.html](http://www.datasheets.org.uk/8632C10*_datasheet.html). Acesso em 13/10/2011.