

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Fernando Gontijo Bernardes Júnior

**TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO EM GRUPO APLICADA AO
PLANEJAMENTO ESTRATÉGICO DE EMPRESAS DE ENERGIA ELÉTRICA**

Belo Horizonte
2011

Fernando Gontijo Bernardes Júnior

**TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO EM GRUPO APLICADA AO
PLANEJAMENTO ESTRATÉGICO DE EMPRESAS DE ENERGIA ELÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Petr Iakovlevitch Ekel

Co-orientadora: Profa. Dra. Roberta Oliveira Parreiras

Co-orientador: Prof. Dr. Illya Kokshenev

Belo Horizonte
2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

B518t Bernardes Júnior, Fernando Gontijo
Tomada de decisão multicritério em grupo aplicada ao planejamento estratégico de empresas de energia elétrica / Fernando Gontijo Bernardes Júnior. Belo Horizonte, 2011.
102f.: il.

Orientador: Petr Iakovlevitch Ekel
Co-orientadora: Roberta Oliveira Parreiras
Co-orientador: Illya Kokshenev
Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica.

1. Processo decisório. 2. Consenso. 3. Sistemas difusos. 4. Planejamento estratégico. I. Ekel, Petr Iakovlevitch. II. Parreiras, Roberta Oliveira. III. Kokshenev, Illya. IV. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. V. Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 658.012.4

Fernando Gontijo Bernardes Júnior

**TOMADA DE DECISÃO MULTICRITERIO EM GRUPO BASEADA EM
RELAÇÕES DE PREFERÊNCIA *FUZZY* APLICADA AO PLANEJAMENTO
ESTRATÉGICO DE EMPRESAS DE ENERGIA ELÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Prof. Dr. Petr Iakovlevitch Ekel (Orientador) – PUC Minas

Prof. Dra. Roberta Oliveira Parreiras (Co-Orientadora) – PUC Minas

Prof. Dr. Illya Kokshenev, Dr. (Co-Orientador) – PUC Minas

Prof. Dr. Douglas Alexandre Gomes Vieira – UFMG

Belo Horizonte, 06 de dezembro de 2011

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus.

Ao Prof. Petr Iakovlevitch Ekel, pelos valiosos ensinamentos e exemplo de simplicidade.

À Profa. Roberta Oliveira Parreiras, pela orientação, pela prontidão em esclarecer minhas dúvidas além da incansável dedicação empenhada no sucesso deste trabalho.

A todos que de alguma forma contribuíram para tornar este trabalho possível.

À CAPES pelo financiamento.

“For Those About to Rock We Salute You”
AC/DC

RESUMO

Neste trabalho, são estudados métodos para a tomada de decisão multicritério em grupo, levando-se em conta os seguintes aspectos do processo decisório: estruturação do problema; discussão entre os especialistas para a formação de consenso; modelagem das preferências; agregação das preferências individuais; geração de recomendações para o problema com base na análise multicritério do modelo matemático construído pelo grupo. Ênfase é dada à aquisição de preferências individuais e à formação de preferências coletivas. São propostos dois procedimentos para o tratamento das preferências individuais na formação do modelo das preferências coletivas, que permitem aos especialistas expressar não somente suas certezas, mas também suas incertezas. Um dos procedimentos apoia o processo de construção de um modelo das preferências coletivas, a partir da agregação ponderada das preferências individuais, sendo os pesos influenciados pelo nível de concordância e o nível de confiabilidade dos julgamentos de cada especialista. O outro procedimento corresponde a um esquema de consenso, que permite supervisionar a discussão entre os especialistas guiando-os em direção a um consenso. Ambos procedimentos fazem uso dos índices de concordância, consenso suave e incomparabilidade, sendo este último uma contribuição do presente trabalho, para o tratamento das discordâncias de opiniões e dos julgamentos duvidosos. A aplicabilidade das metodologias é demonstrada por meio da resolução de problemas de decisão associados ao planejamento estratégico em empresas de energia elétrica.

Palavras Chave: Tomada de Decisão Multicritério em Grupo; Esquema de Consenso; Relações de Preferência *Fuzzy*; Estruturas de Preferência; Planejamento Estratégico.

ABSTRACT

In this work, methods for multiperson multicriteria decision making are investigated taking into account the following aspects of the decision making process: problem structuring; the supervision of the discussion process between experts for the formation of consensus; modeling the expert's preferences; aggregation of the individual preferences; generation of advices based on multicriteria analysis of the mathematical model constructed by the group. The input of individual preferences and the collective preferences formation are emphasized. Two procedures are proposed for the treatment of individual preferences in shaping the model of collective preferences. They allow the experts to express not only their convictions, but also their doubts. One of the procedures supports the process of building a model of collective preferences, through the weighted aggregation of individual preferences, where the weights are influenced by the concordance level and the reliability level of the judgments presented by each expert. The other procedure corresponds to a consensus scheme, which enables one to supervise the discussion among the experts, guiding them towards a consensus. Both methods make use of a concordance index and a soft consensus index to deal with discordant opinions. They also make use of an incomparability index, which is a contribution of this work, for dealing with the unreliable judgments. The applicability of the methodologies is demonstrated through the resolution of decision problems associated with strategic planning in electric energy companies.

Keywords: Multicriteria Decision Making in Group, Consensus Scheme, Fuzzy Preference Relations, Preference Structures, Strategic Planning.

LISTA DE SIGLAS

AHP - *Analytic Hierarchy Process*

CEMIG - Companhia Energética de Minas Gerais

ELECTRE - *Elinúnation Et Choix Traduisant Ia Réalité*

MAUT - *Multiple Attribute Utility Function*

OWA - *Ordered Weighted Averaging*

PROMETHEE - *Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*

RBF - *Relação Binária Fuzzy*

RPFAR – *Relação de Preferência Fuzzy Aditivamente Recíproca*

RPFNR – *Relação de Preferência Fuzzy Não Recíproca*

WAM - *Weighted Arithmetic Mean*

WGM - *Weighted Geometric Mean*

LISTA DE SIMBOLOS

C	conjunto de critérios de decisão de natureza quantitativa ou qualitativa
c_i	i -ésimo critério de decisão
$Cons_i$	índice de consenso coletivo associado ao i -ésimo critério, calculado considerando apenas julgamentos com nível aceitável de incomparabilidade
$cycle$	variável utilizada para armazenar o ciclo atual na execução do esquema de consenso
E	conjunto de especialistas responsáveis por avaliar as alternativas do grupo X segundo os critérios do grupo C
$elast$	vetor que armazena o índice do último especialista convidado a rever sua opinião
$EHC_i(x_k, x_l)$	subgrupo de especialistas cujo julgamento das alternativas x_k e x_l para o i -ésimo critério apresenta nível de comparabilidade maior do que $mincomp$
$ELC_i(x_k, x_l)$	subgrupo de especialistas cujo julgamento das alternativas x_k e x_l para o i -ésimo critério apresenta nível de comparabilidade menor do que $mincomp$
e_y	y -ésimo especialista
G	relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> global
I	relação de indiferença <i>fuzzy</i>
$I(x_k, x_l)$	valor da relação de indiferença <i>fuzzy</i> entre as alternativas x_k e x_l
I_i	relação de indiferença <i>fuzzy</i> associada ao i -ésimo critério
$ICMP(x_k, x_l)$	índice de comparabilidade entre as alternativas x_k e x_l
$IDSC_i^{y,z}(x_k, x_l)$	índice de discordância entre a opinião dos especialistas e_y e e_z para o i -ésimo critério
$IDSCM_i^{y,z}$	índice de discordância média entre a opinião dos especialistas e_y e e_z para o i -ésimo critério, calculado considerando-se somente julgamentos com nível aceitável de incomparabilidade

$IDSCMe_i^y$	índice de discordância média entre a opinião do especialista e_y em relação ao grupo para o i -ésimo critério, sendo considerado no cálculo somente julgamentos com nível aceitável de incomparabilidade
$IDM_i^{v,G}$	índice de discordância média do grupo de especialistas para o i -ésimo critério, sendo considerado no cálculo somente os julgamentos com nível aceitável de incomparabilidade
$ICNC_i^{y,z}(x_k, x_l)$	índice de concordância entre a opinião dos especialistas e_y e e_z para o i -ésimo critério
$ICNCM_i^{y,z}(x_k, x_l)$	índice de concordância média entre a opinião dos especialistas e_y e e_z para o i -ésimo critério
$ICNS_i(x_k, x_l)$	índice de consenso para o i -ésimo critério
J	relação de incomparabilidade <i>fuzzy</i>
$J(x_k, x_l)$	valor da relação de incomparabilidade <i>fuzzy</i> entre as alternativas x_k e x_l
J_i	relação de incomparabilidade <i>fuzzy</i> associada ao i -ésimo critério
$J_{i,y}$	relação de incomparabilidade <i>fuzzy</i> associada ao i -ésimo critério, fornecida pelo y -ésimo especialista
$maxcycles$	máximo número de ciclos de processos de discussão
$maxinvitations$	número máximo de vezes que cada especialista pode ser convidado a rever sua opinião
$mincomp$	nível de comparabilidade mínimo aceitável
$mincons$	nível de consenso mínimo aceitável
N	classe de operadores nebulosos de negação ou complemento
P	relação de preferência estrita <i>fuzzy</i>
$P(x_k, x_l)$	valor da relação de preferência estrita <i>fuzzy</i> entre as alternativas x_k e x_l
P_i	relação de preferência estrita <i>fuzzy</i> associada ao i -ésimo critério
$P_{i,G}$	relação de preferência estrita <i>fuzzy</i> , representativa das preferências do grupo para o i -ésimo critério,
$P_{i,y}$	relação de preferência estrita <i>fuzzy</i> associada ao i -ésimo critério, fornecida pelo y -ésimo especialista
q	número de critérios pertencentes ao conjunto C
n	número de alternativas pertencentes ao conjunto X

R	relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i>
R^c	complemento da relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> R
R^d	relação dual da relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> R
R^{-1}	relação inversa da relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> R
$R(x_k, x_l)$	valor da relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> , para o par de alternativas (x_k, x_l)
$\mu_{R^{-1}}(x_k, x_l)$	relação inversa entre as alternativas de solução x_k e x_l
R_i	relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> associada ao i -ésimo critério
$R_{i,y}$	relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> associada ao i -ésimo critério, fornecida pelo y -ésimo especialista
$R_{i,G}$	relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> , representativa das preferências do grupo para o i -ésimo
RR	relações de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> com reciprocidade aditiva
$RR(x_k, x_l)$	valor da relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> com reciprocidade aditiva, para o par de alternativas (x_k, x_l)
v	número de especialistas pertencentes ao conjunto E
X	conjunto das alternativas ou possíveis soluções do problema
x_k	k -ésima alternativa de solução
XND	conjunto solução do problema de decisão
$w_{i,y}$	peso do i -ésimo critério para a tomada de decisão
$\mu_{I_i}(x_k, x_l)$	função de pertinência da relação de indiferença <i>fuzzy</i> para o par de alternativas (x_k, x_l) , relativa ao i -ésimo critério
$\mu_{J_i}(x_k, x_l)$	função de pertinência da relação de incomparabilidade <i>fuzzy</i> para o par de alternativas (x_k, x_l) , relativa ao i -ésimo critério
$\mu_{ND_i}(x_k)$	função de pertinência do conjunto <i>fuzzy</i> de soluções não-dominadas, definido para o i -ésimo critério
$\mu_{P_i}(x_k, x_l)$	função de pertinência da relação de preferência estrita <i>fuzzy</i> para o par de alternativas (x_k, x_l) , relativa ao i -ésimo critério

$\mu_{R_i}(x_k, x_l)$	função de pertinência da relação de preferência não-estrita <i>fuzzy</i> para o par de alternativas (x_k, x_l) , relativa ao i -ésimo critério
$\mu_{R_{i,G}}(x_k, x_l)$	função de pertinência da relação de preferência <i>fuzzy</i> coletiva
$\mu_{RR}(x_k, x_l)$	função de pertinência da relação de preferência <i>fuzzy</i> aditivamente recíproca entre as alternativas x_k e x_l para o i -ésimo critério
$\lambda_{i,y}$	peso associado à opinião do especialista e_y na formação das preferências coletivas para o i -ésimo critério,
$\phi_{in}(x_k)$	fluxo de entrada em cada nó x_k de um grafo
$\phi_{out}(x_k)$	fluxo de saída de cada nó x_k de um grafo
$\phi(x_k)$	fluxo de rede em cada nó x_k de um grafo

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	15
2.	COLOCAÇÃO E ANÁLISE DE PROBLEMAS DE TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO EM GRUPO NO CONTEXTO DO PLANEJAMENTO ESTRATÉGICO: UMA VISÃO GERAL.....	21
2.1	Estruturação do problema de decisão multicritério	21
2.2	Métodos de decisão multicritério	24
2.3	Extensão de métodos de decisão multicritério para ambientes de grupo	27
2.4	Considerações finais.....	29
3.	MODELAGEM DA PREFERÊNCIA EM AMBIENTE <i>FUZZY</i>	30
3.1	Conjuntos <i>fuzzy</i>	30
3.2	Relações binárias <i>fuzzy</i>	33
3.3	Modelagem dos julgamentos por meio da relação binária <i>fuzzy</i>	34
3.4	Tipos de relações de preferência não-estrita <i>fuzzy</i>	38
3.5	Consistência dos julgamentos	40
3.6	Considerações finais.....	41
4.	CONSTRUÇÃO DE RELAÇÕES DE PREFERÊNCIA <i>FUZZY</i>	43
4.1	Construção de preferências.....	43
4.1.1	Análise e comparação de quantidades <i>fuzzy</i>	45
4.2	Funções de transformação para uniformização de preferências.....	46
4.3	Procedimento para completar relações de preferência <i>fuzzy</i> com reciprocidade aditiva.....	48
4.4	Correção da inconsistência das relações de preferência <i>fuzzy</i> com reciprocidade aditiva.....	50
4.5	Considerações finais.....	53
5.	MÉTODOS DE TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO BASEADOS EM MODELOS $\langle X, R \rangle$	54
5.1	Procedimento para escolha baseado na construção da relação de preferência estrita <i>fuzzy</i>	54
5.2	Procedimento de escolha baseado no cálculo do fluxo de rede	57
5.3	Considerações finais.....	59
6.	DECISÃO EM GRUPO BASEADA NA CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE MODELOS $\langle X, R \rangle$	61
6.1	Agregação das relações de preferência <i>fuzzy</i>	61
6.2	Índice de comparabilidade	64
6.3	Índices de concordância e discordância	65
6.4	Índice de consenso	66
6.5	Esquema de consenso.....	66
6.5.1	Procedimento para esquema de consenso dinâmico.....	68
6.6	Procedimento para agregação de preferências individuais.....	73
6.6.1	Procedimento para solução de problemas de tomada de decisão com estrutura hierárquica	75
6.7	Considerações finais.....	78

7.	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	79
7.1	Decisão multicritério em ambiente de grupo com consenso.....	79
7.1.1	<i>Exemplo de aplicação.....</i>	79
7.2	Problemas de tomada de decisão com estrutura hierárquica	91
7.2.1	<i>Exemplo de aplicação.....</i>	91
8.	CONCLUSÕES	96
	REFERÊNCIAS	99

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, tem-se notado que o ambiente de negócios dos diversos setores econômicos vem sofrendo transformações de diferentes naturezas. Uma dessas transformações está associada com a própria velocidade com que o ambiente tem se transformado. O aumento dessa velocidade torna o ambiente de negócios mais instável e o futuro das empresas mais imprevisível. Paralelamente, um número crescente de empresas tem percebido que, para alcançar vantagens competitivas ou simplesmente sobreviver no setor em que atua, é necessário ser flexível e estar frequentemente se adaptando, num esforço constante de aproveitar as oportunidades e evitar as ameaças que surgem no ambiente de negócios (LIAUTAUD, 2002).

Neste contexto, o planejamento estratégico tem sido reconhecido como uma ferramenta indispensável na gestão das organizações para lidar com a elaboração de planos de ações (ou estratégias) que permitam alcançar os objetivos estratégicos colocados para a empresa. Segundo (MINTZBERG et al., 2000), planejar é decidir antecipadamente o que fazer, de que maneira fazer, quando fazer e quem deve fazer, para o alcance de uma situação desejada. Nesse sentido, o planejamento estratégico é definido como o processo gerencial que desenvolve e mantém uma adequação razoável entre os objetivos e recursos da empresa e as mudanças e oportunidades de mercado (KOTLER, 1992). É o ponto de partida da administração estratégica dentro das organizações, sendo também o meio para adotar medidas decisivas e resultados na condução pró-ativa da gestão das organizações (MINTZBERG, 1994). Trata-se de um processo contínuo, durante o qual, são definidos e revisados a missão da organização, a visão de futuro, os objetivos e os projetos de intervenção que visam a mudança desejada.

No ambiente das empresas de energia elétrica, esta ótica não é diferente, como se pode confirmar, por exemplo, pelas palavras do presidente da Eletrobrás, divulgadas em (LOPES, 2010):

É com grande satisfação que torno público o Planejamento Estratégico Corporativo do Sistema Eletrobrás para o período 2010-2020.

Encaro este esforço de tantos colaboradores de nossas empresas como um autêntico marco na história do Sistema Eletrobrás, uma ponta de lança do Plano de Transformação que estruturamos e vimos desenvolvendo a partir das orientações estratégicas recebidas do Sr. Ministro de Minas e Energia, por ocasião da posse da Diretoria que lidero desde março de 2008.

Passamos a ter no Planejamento Estratégico uma bússola capaz de apontar o melhor futuro a ser buscado pelo Sistema Eletrobrás. Insere-se assim esta ferramenta, de uma vez por todas, no processo permanente de gestão, com a missão de reinventar –

e nos reinventar – diante de novas oportunidades e desafios, a cada reconfiguração do ambiente externo.

Por sua elaboração participativa e pelos sucessivos níveis de avaliação e aprovação, este Plano Estratégico alinha todas as visões diretamente comprometidas com o projeto de alçar a Eletrobrás à condição de uma mega empresa, com presença global, capaz de liderar a expansão do setor elétrico brasileiro e alavancar o desenvolvimento sustentável do País.

Já conquistamos fundamentos sólidos e cabe-nos agora erguer sobre eles a complexa estrutura de estratégias, planos de ação e iniciativas, que permitam renovar nossas empresas, integrá-las cada vez mais e comprometê-las definitivamente com os requisitos de rentabilidade e sustentabilidade que a sociedade do século XXI exige das grandes organizações. (LOPES, 2011, p.5).

Nessas palavras encontram-se referências a todos os elementos motivadores dos esforços despendidos neste trabalho: o reconhecimento de que o planejamento estratégico é um processo de alta complexidade e grande importância para a sobrevivência das empresas de energia elétrica no mercado; a necessidade de realizar um planejamento de longo prazo, levando em conta as incertezas de diferentes naturezas; a necessidade de realizar o planejamento estratégico em um ambiente cooperativo e multidisciplinar com a contribuição de pessoas que podem ocupar diferentes níveis hierárquicos.

É possível identificar na literatura vários trabalhos que tratam problemas de tomada de decisão associados com o planejamento estratégico nas empresas do setor elétrico. Por exemplo, as referências (HÄMÄLÄINEN; SEPPÄLÄINEN, 1986), (KEENEY, 1992), (GUNGOR; ARIKAN, 2000) e (NEVES et al., 2009) tratam especificamente problemas de planejamento energético e análise de políticas públicas. Pela análise da literatura, é possível perceber que a colocação dos problemas estratégicos na forma de problemas de tomada de decisão multicritério envolve dificuldades de diferentes naturezas, como por exemplo:

- a) as decisões estratégicas nas empresas do setor elétrico têm impacto no cotidiano de milhões de pessoas e centenas de empresas, não podendo ser avaliadas sob somente um ponto de vista. Assim, normalmente o planejamento estratégico envolve a participação de diferentes *stakeholders* na tomada de decisão, seja na etapa de modelagem e coleta de dados do problema ou no momento da decisão em si;
- b) as decisões estratégicas normalmente envolvem a avaliação, comparação, priorização e ordenação de iniciativas estratégicas segundo critérios de diferentes naturezas que podem se interrelacionar de diferentes maneiras (com diferentes níveis de compensação) (LOKEN, 2007);

- c) no planejamento estratégico, é comum haver a necessidade de se processar informações com alto grau de incerteza. Essas incertezas podem ser causadas, por exemplo, pela dificuldade dos especialistas (geralmente, os diretores da empresa) envolvidos definirem metas estratégicas para a empresa consensualmente; a dificuldade de se formalizar alguns dados e informações de natureza qualitativa importantes para a decisão; a impossibilidade de se fazer previsões precisas e confiáveis para o futuro; a falta de informações confiáveis sobre o comportamento do ambiente de negócios.

É importante salientar que a correta representação e o tratamento adequado das incertezas é extremamente relevante para o sucesso da iniciativa estratégica. Uma ampla discussão sobre a capacidade dos conjuntos *fuzzy* tratarem adequadamente as incertezas de diferentes naturezas pode ser encontrada em (EKEL, et al., 1997). Aqui, optou-se pela modelagem da preferência humana por meio das relações de preferência *fuzzy*, que possibilita a obtenção de soluções satisfatórias mesmo utilizando informações com alto grau de incerteza (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). Além disso, outro aspecto vantajoso da modelagem da preferência humana por meio de relações de preferência *fuzzy* está associado com o fato de que ela oferece diferentes formas de construir modelos da preferência coletiva a partir das informações fornecidas pelos especialistas (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011).

No que se refere à necessidade de incorporar as opiniões de diferentes especialistas e *stakeholders* nas decisões estratégicas, a tomada de decisão em grupo deve ser vista como uma aliada na solução dos problemas gerenciais complexos trazendo multidisciplinaridade de conhecimentos e minimizando a responsabilidade de um único especialista fornecer toda a informação necessária para a resolução do problema. Quando se fala em tomada de decisão em grupo, dois tipos de ambientes de grupo podem ser distinguidos:

- a) ambiente de decisão com estrutura hierárquica, em que vários especialistas atuam como consultores, fornecendo suas opiniões, mas a decisão é tomada por apenas uma pessoa que detém o direito e a responsabilidade pela decisão final;
- b) ambiente de decisão com estrutura democrática, em que um grupo de especialistas tem o direito de afetar diretamente a decisão final e compartilham a responsabilidade pelas consequências dessa decisão.

Ainda referindo-se à tomada de decisão em grupo, é possível distinguir duas grandes classes principais de ferramentas de apoio ao processo de formação das preferências coletivas:

- c) os esquemas de consenso, que consistem em procedimentos que regulam o processo dinâmico e iterativo de discussão entre especialistas, que procuram minimizar as discordâncias entre suas opiniões, sob a supervisão de um moderador humano ou computacional;
- d) os procedimentos de agregação das preferências individuais para a construção de preferências coletivas, que levam em consideração aspectos como os diferentes níveis de experiência, de conhecimento e de autoridade dos especialistas ou os diferentes níveis de concordância entre as opiniões dos especialistas.

Levando-se em conta o que foi exposto, e através do estudo das técnicas de tomada de decisão multicritério em grupo baseadas na modelagem da preferência humana por meio das relações de preferência *fuzzy*, o **objetivo amplo** deste trabalho é desenvolver procedimentos para apoiar o processo de decisão que se origina no contexto do planejamento estratégico em empresas de energia elétrica.

Os **objetivos específicos** consistem em desenvolver:

- a) mecanismos que enriqueçam o processo de modelagem das preferências, permitindo aos especialistas atribuir níveis de confiabilidade aos seus julgamentos;
- b) mecanismos que permitam o tratamento de preferências discordantes e de julgamentos com baixo nível de confiabilidade;
- c) procedimentos adequados para apoiar a tomada de decisão em ambientes democráticos e em ambientes com estrutura hierárquica.

Assim, este trabalho contém uma revisão teórica que abrange os seguintes assuntos: colocação de problemas de decisão multicritério; modelagem da preferência humana por meio de relações binárias *fuzzy*; métodos para análise multicritério dos modelos $\langle X, R \rangle$; extensão dos métodos de análise multicritério para permitir a participação de múltiplos especialistas; ferramentas e procedimentos para apoiar o processo de discussão entre especialistas e a construção de modelos de preferências coletivas. Além disso, apresenta a descrição de dois

procedimentos metodológicos que são **contribuições** deste trabalho. O primeiro apóia a formação de preferências coletivas baseadas na agregação de preferências individuais. O segundo apóia o processo de discussão entre os especialistas pelo consenso. A originalidade dos procedimentos propostos está associada com a criação dos índices de comparabilidade e incomparabilidade, que se baseiam na relação de incomparabilidade *fuzzy* e com a aplicação desses índices para o tratamento das informações com baixo nível de confiabilidade.

Alguns dos resultados alcançados foram também publicados no artigo (PARREIRAS, R.; EKEL, P. e BERNARDES JR., F., 2011a) e estão sendo descritos no seguinte manuscrito, que se encontra em processo de revisão (PARREIRAS, R.; EKEL, P. e BERNARDES JR., F., 2011b)

Esta revisão teórica e a descrição dos procedimentos que estão sendo propostos estão organizadas nesta dissertação da seguinte maneira:

a) Capítulo 2: Colocação e Análise de Problemas de Tomada de Decisão Multicritério em Grupo no Contexto do Planejamento Estratégico: Uma Visão Geral.

Apresenta uma visão geral do procedimento para colocação do problema de tomada de decisão multicritério e discute as principais abordagens para a análise dos problemas de tomada de decisão multicritério.

b) Capítulo 3: Modelagem da Preferência em Ambiente Fuzzy.

Aborda o emprego dos conjuntos *fuzzy* na modelagem da preferência humana.

c) Capítulo 4: Construção de Relações de Preferência Fuzzy.

Introduz os meios indiretos de construir relações de preferência *fuzzy* por meio de diferentes formatos de expressão da preferência. Além disso, descreve a abordagem disponível atualmente na literatura para tratamento de relações de preferência *fuzzy* incompletas (ou seja, que não foram completamente preenchidas pelos especialistas) e para correção de relações de preferência *fuzzy* inconsistentes.

d) Capítulo 5: Métodos de Tomada de Decisão Multicritério Baseados em Modelos $\langle X, R \rangle$.

São apresentados dois métodos de tomada de decisão multicritério baseados na exploração dos modelos $\langle X, R \rangle$.

e) Capítulo 6: Decisão em Grupo Baseada na Construção e Análise de Modelos $\langle X, R \rangle$.

Este capítulo apresenta modelos e métodos para a solução de problemas de tomada de decisão em grupo. Além disso, descreve dois procedimentos para o tratamento das preferências dos especialistas no ambiente de tomada de decisão em grupo. Mais especificamente, apresenta um esquema de consenso e um procedimento para processamento e agregação das preferências individuais para formação da preferência coletiva.

f) Capítulo 7: Exemplos de Aplicação

Neste capítulo é demonstrada a aplicação dos procedimentos para trabalhar com problemas de decisão em grupo, além da solução de problemas com as metodologias propostas.

g) Capítulo 8: Conclusões

Aqui são apresentadas as conclusões gerais deste trabalho e são indicados os possíveis passos para as pesquisas futuras.

2. COLOCAÇÃO E ANÁLISE DE PROBLEMAS DE TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO EM GRUPO NO CONTEXTO DO PLANEJAMENTO ESTRATÉGICO: UMA VISÃO GERAL

A área da tomada de decisão multicritério tem como principal meta auxiliar o homem, neste contexto, denominado decisor, a fazer escolhas em presença de ambiguidades, bifurcações e incertezas a partir da construção e expressão de suas preferências, para que sua decisão esteja mais coerente com seus interesses.

Nas decisões associadas com o planejamento estratégico, são frequentes as situações em que a necessidade de alcançar simultaneamente diferentes objetivos por meio de uma decisão gera contradições do tipo: a alternativa a é preferida à b , considerando-se algumas de suas características, e não preferida, considerando-se outras. Em tais circunstâncias, um único ponto de vista é insuficiente para incluir toda a informação necessária e todas as contradições inerentes à decisão. Aí reside a importância de se considerar vários critérios (PARREIRAS, 2006) e de convidar especialistas de diferentes áreas para contribuírem com seus conhecimentos sobre as correspondentes áreas (NGWENYAMA; BRYSON; MOBOLURIN, 1996).

Levando-se em conta os argumentos apresentados acima, neste capítulo são apresentadas algumas noções gerais associadas com a colocação e análise de problemas de decisão multicritério no ambiente em grupo. Ênfase é dada a colocação dos problemas de decisão associados com o planejamento estratégico no ambiente de grupo.

2.1 Estruturação do problema de decisão multicritério

Os problemas de tomada de decisão em grupo considerados neste trabalho envolvem os seguintes elementos básicos:

- a) um conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de alternativas ou possíveis soluções para o problema;
- b) um conjunto $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ de critérios de natureza quantitativa e/ou qualitativa;
- c) um conjunto $E = \{e_1, e_2, \dots, e_v\}$ de especialistas responsáveis por avaliar as alternativas do grupo X segundo os critérios do grupo C .

No contexto das decisões estratégicas, o conjunto X deve apresentar iniciativas ou projetos estratégicos que levem a empresa a alcançar os objetivos estratégicos estabelecidos para a empresa. O conjunto C de critérios deve ser definido de forma a permitir avaliar o nível em que as alternativas propostas estão alinhadas com os objetivos e as metas definidas pela empresa em seu planejamento estratégico. O conjunto de especialistas E são as pessoas responsáveis por julgar esses critérios para cada alternativa de forma a encontrar qual é a alternativa que atenderá ao conjunto de metas definidas no planejamento estratégico da forma mais eficiente possível.

Na literatura, foram identificadas várias metodologias que podem ser utilizadas para apoiar os especialistas na etapa de estruturação de problemas de decisão, por exemplo, Delphi, *Tradeoff Analysis Method* (WARFIELD, 1994), *SODA-Strategic Options Development and Analysis* (CORRÊA, 1996), *Pensamento Focado em Valor (Value-Focused Thinking)*, (KEENEY, 1992), etc. Dentre estas, a metodologia *Pensamento Focado em Valor* se destaca com características bastante apropriadas para tratar os problemas de tomada de decisão associados com o planejamento estratégico. Sua principal vantagem sobre as demais abordagens reside no fato de que ela inclui mecanismos que estimulam os especialistas a criarem soluções para o problema (que, neste caso, correspondem às iniciativas estratégicas) alinhadas com os objetivos que se desejam alcançar por meio da tomada de decisão (PARNELL, 2007).

No contexto do planejamento estratégico, é comum que o presidente e os diretores coloquem para a empresa múltiplos objetivos estratégicos. Para que seja possível avaliar o nível de alinhamento entre as iniciativas estratégicas e os objetivos estratégicos da empresa, esses objetivos devem ser desdobrados em critérios de diferentes naturezas (exemplo: critério econômico, critério técnico, critério político, etc.). A metodologia *Pensamento Focado em Valor* tem sido utilizada em uma série de situações de decisão, inclusive nas decisões associadas com o planejamento estratégico. Em (PARNELL, 2007), é feita uma revisão bibliográfica apresentando 15 trabalhos onde a metodologia foi utilizada para ajudar especialistas a identificarem os critérios adequados para a tomada de decisão e a criarem (ou identificarem) as possíveis soluções para problemas relacionados à alocação de recursos, planejamento estratégico, operações militares entre outros. A seguir, esta metodologia é descrita de maneira simplificada em quatro etapas principais:

Etapa 1: colocação dos objetivos gerais por cada especialista envolvido no processo decisório.

Etapa 2: desdobramento dos objetivos gerais em objetivos específicos convidando cada especialista a responder a seguinte pergunta: em quais aspectos é desejável alcançar os objetivos gerais? Para representar o conjunto dos objetivos específicos associados com cada objetivo geral, é comum utilizar a representação por estruturas hierárquicas como no exemplo da compra de um carro para uma família representado na Figura 1.

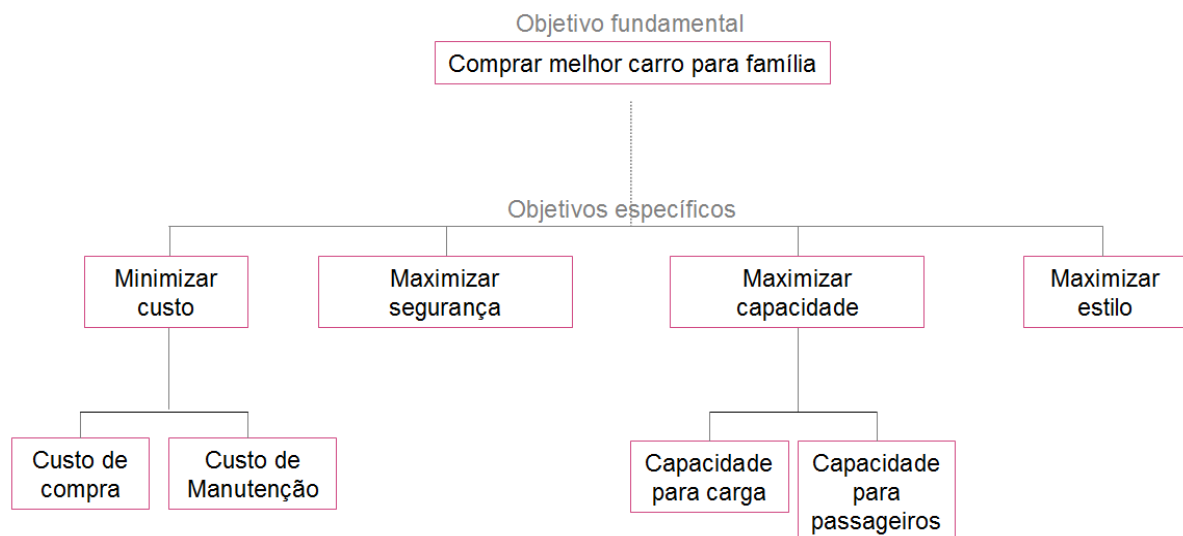


Figura 1: Estrutura hierárquica de objetivos para o exemplo de compra de um carro
Fonte: Elaborada pelo autor

Etapa 3: definição do conjunto de critérios, que devem ser colocados pelos especialistas, tentando responder a seguinte pergunta: como é possível avaliar se as alternativas são capazes de satisfazer/ajudar a alcançar os objetivos (não é correto colocar critérios pensando apenas em distinguir as alternativas).

Etapa 4: criação de possíveis soluções para o problema, procurando responder a seguinte pergunta para os objetivos específicos: como é possível alcançar cada objetivo específico? É importante indicar que, antes de os especialistas conseguirem gerar respostas que possam ser aceitas como soluções para o problema, é natural que eles gerem respostas que correspondem a *objetivos mediadores*. Os objetivos mediadores são objetivos que, quando satisfeitos levam a satisfação parcial de pelo menos um objetivo específico. Nesta etapa, para representar as respostas dadas pelos especialistas normalmente é utilizada a *rede de meios e fins* como no exemplo da Figura 2.

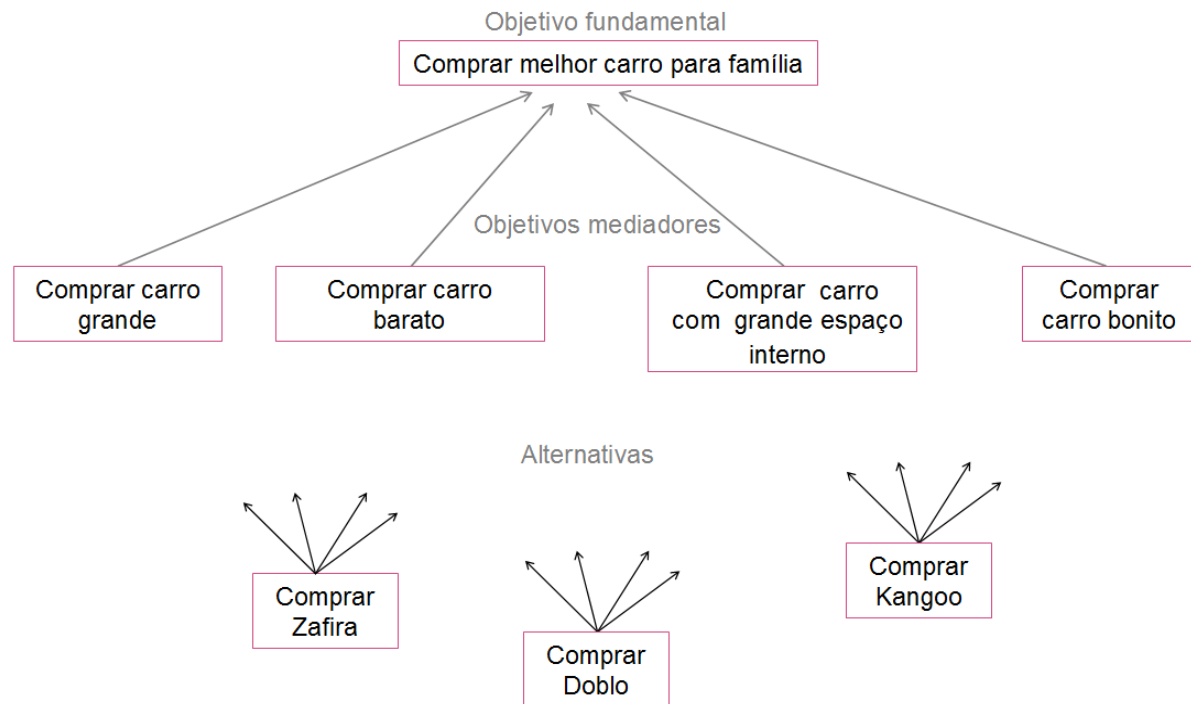


Figura 2: Rede de meios e fins para o exemplo da compra de um carro para uma família
Fonte: Elaborada pelo autor

É natural que, após a geração das alternativas, seja necessário rever e melhorar os critérios definidos na Etapa 3 ou os objetivos específicos e gerais definidos nas Etapas 2 e 1, respectivamente. Quando já existem algumas soluções pré-definidas, estas também podem ser utilizadas para inspirar a definição dos critérios. Todas as etapas do processo de estruturação do problema devem ser repetidas várias vezes, até que os especialistas julguem o modelo como satisfatório. Por outro lado, mesmo após a colocação e análise do problema, se a recomendação gerada não for considerada satisfatória pelo grupo, pode ser necessário voltar ao processo de estruturação do problema para melhorar a colocação original do problema.

2.2 Métodos de decisão multicritério

Tendo sido especificados os elementos básicos do problema de decisão descritos na Seção 2.1, diferentes abordagens podem ser utilizadas para a modelagem das preferências dos especialistas e análise do problema. Entre as possíveis abordagens presentes na literatura vale destacar:

- a) os métodos baseados na teoria da utilidade (MIRANDA; ALMEIDA, 2004) e (KEENEY, et al., 1976).
- b) os métodos baseados na construção e análise do modelo $\langle X, RM \rangle$, onde RM representa um conjunto de relações multiplicativas de preferência (SAATY, 1991);
- c) os métodos baseados na construção e análise do modelo $\langle X, R \rangle$, onde R representa um conjunto de relações de preferência *fuzzy* (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). Estamos incluindo nesta categoria métodos de decisão baseados em hipóteses e justificativas bastante diversas, como os métodos de decisão baseados na aplicação do procedimento de escolha proposto por Orlovsky (ORLOVSKY, 1978) e os métodos baseados na construção e exploração das relações de *outranking* (ou métodos da Escola Francesa). Embora originalmente a relação de *outranking* tenha sido proposta em um contexto independente da teoria da modelagem das preferências por relações de preferência *fuzzy*, é possível encontrar na literatura vários estudos em que as relações de *outranking* são analisadas e definidas como relações de preferência *fuzzy* (veja, por exemplo (PERNY; ROY, 1992)).

Os métodos baseados na teoria da utilidade têm sido extensivamente aplicados em diversas áreas. Esta teoria, também conhecida como *Multiple Attribute Utility Function* (MAUT) foi idealizada por cientistas americanos e, por isso, recebe também o nome de Escola Americana. A abordagem da Escola Americana pressupõe a existência de uma função *utilidade* global (ou multiatributo) que atribui um valor escalar a cada alternativa e permite com isso ordená-las a partir da simples ordenação desses valores (KEENEY, et al., 1976). O processo de construção dessa função envolve dois estágios: inicialmente, são construídas para cada critério as funções utilidade que atribuem notas (valor escalar de caráter cardinal) a cada alternativa. Posteriormente essas funções são agregadas originando a função utilidade global.

A classe dos métodos baseados na construção e análise do modelo que, neste trabalho, está sendo chamado de modelo $\langle X, RM \rangle$ corresponde ao método conhecido na literatura como *Analytic Hierarchy Process* (AHP) (SAATY, 1991) e suas variações, por exemplo, (LOOTSMA, 1995). O AHP se fundamenta em uma teoria simples, amplamente conhecida e bem fundamentada da Álgebra Linear, mais especificamente na estrutura matemática das matrizes (de comparações) consistentes e na habilidade de seus auto-vetores principais em aproximar os pesos reais subjacentes àquelas matrizes. Esses pesos aproximados refletem o

mérito relativo das alternativas, e são usados para ordená-las e auxiliar na seleção de uma solução específica ou na previsão de um resultado.

Finalmente, conforme foi indicado logo acima, a classe de métodos de decisão multicritério baseada na construção e na análise dos modelos $\langle X, R \rangle$ inclui métodos que processam as relações de preferência *fuzzy* (inclusive as relações de *outranking*) segundo abordagens muito distintas, como por exemplo, a partir do cálculo dos fluxos de entrada e saída e do fluxo de rede (métodos da família PROMETHEE (BRANS; VINCKE; MARESCHAL, 1986)), o cálculo dos índices de concordância e discordância entre critérios (métodos da família ELECTRE (ROY, 1991)), a construção do conjunto de soluções não-dominadas (métodos baseados no procedimento de escolha de Orlovsky (ORLOVSKY, 1978)).

Os métodos dessa classe exigem a construção de um conjunto R de relações de preferência *fuzzy* que reflete as preferências do(s) especialista(s), segundo os diferentes critérios. Ao trabalhar com modelos $\langle X, R \rangle$, o especialista pode expressar suas preferências diretamente através do formato das relações de preferência *fuzzy* ou, alternativamente, o especialista pode usar outros formatos para expressar suas preferências e obter indiretamente as relações de preferência *fuzzy*, aplicando-se funções de transformação adequadas (HERRERA-VIEDMA, et al., 2002) e (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011) ou outros mecanismos como as funções de preferência dos métodos da família Promethee (BRANS; VINCKE; MARESCHAL, 1986). Tendo sido construídas as relações de preferência para todos os critérios, diferentes métodos de análise dos modelos $\langle X, R \rangle$ podem ser aplicados para gerar uma recomendação para o problema de decisão.

Uma grande vantagem das abordagens baseadas na construção e análise dos modelos $\langle X, RM \rangle$ e $\langle X, R \rangle$ sobre os métodos baseados na teoria da utilidade está associada com o fato de que o processo de construção de relações de preferência multiplicativas e o processo de construção das relações de preferência *fuzzy* são mais flexíveis do que o processo de construção das funções utilidade. Essa flexibilidade está associada com dois fatores:

- a) os modelos $\langle X, RM \rangle$ e $\langle X, R \rangle$ permitem que os especialistas escolham diferentes formatos para expressarem suas preferências. As informações expressas nos diferentes formatos são utilizadas para construir as relações de preferência multiplicativas e as relações de preferência *fuzzy*;
- b) os formatos das relações de preferência multiplicativas e das relações de preferência *fuzzy* permitem aos especialistas se expressarem com preferências

intransitivas e oferecem também ferramentas para ajudá-los a corrigir as inconsistências dos julgamentos.

Por outro lado, os métodos baseados na construção e análise dos modelos $\langle X, R \rangle$ têm como vantagem sobre as demais abordagens a possibilidade de se tratar as incertezas das avaliações das alternativas de uma maneira mais justificada (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). Além disso, conforme será discutido no Capítulo 5, a construção de relações de preferência *fuzzy* não recíprocas permite refletir no modelo o nível de confiabilidade aos julgamentos. Este nível de confiabilidade pode ser explorado para avaliar a qualidade da informação fornecida pelos especialistas, evitando com isso a supervalorização de informações duvidosas nas discussões dos especialistas e no processo de construção das preferências coletivas. A reciprocidade multiplicativa das relações de preferência multiplicativas impede a incorporação dessa informação na própria matriz de comparações.

2.3 Extensão de métodos de decisão multicritério para ambientes de grupo

Embora os métodos clássicos de decisão multicritério tenham sido originalmente propostos para o contexto da decisão individual, o reconhecimento de que na prática tais métodos devem considerar informações fornecidas por grupos de especialistas motivou a extensão de tais métodos para o ambiente de grupo.

Por exemplo, em (LAI; WONG; CHEUNG, 2002), é descrita uma metodologia para utilizar o método AHP no contexto em que vários especialistas são convidados a avaliar entre diversos *softwares* qual o melhor. Segundo os autores de (LAI; WONG; CHEUNG, 2002), o AHP pode ser adaptado às decisões em grupo de várias maneiras e citam quatro formas de adaptar o método: consenso, voto, agregação por média geométrica das preferências individuais ou dos resultados individuais (cada especialista resolve o problema individualmente e as respostas finais são agregadas). Assim, se o consenso não puder ser alcançado pelos especialistas, ainda é possível utilizar o voto dos especialistas. Caso o consenso não seja atingido e os especialistas estejam relutantes em utilizar o voto, utiliza-se a média geométrica das opiniões individuais. Caso o grupo possua objetivos significativamente distintos e não exista qualquer tipo de consenso, pode-se pedir que cada especialista resolva o problema individualmente de acordo com suas preferências e os resultados sejam agregados através de uma média.

Segundo (MACHARIS, et al., 2004), no caso do método PROMETHEE, o tratamento de problemas em grupo pode ser realizado pela soma ponderada dos fluxos de rede individuais resultando no fluxo de rede do grupo. A partir desse ponto, o processo de resolução do problema funciona da mesma forma que para a decisão individual.

Em (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011), os métodos de decisão multicritério baseados no procedimento de escolha proposto por Orlovsky são estendidos seguindo três modos de agregação diferentes para permitir a inclusão das opiniões dos diversos especialistas na construção e na análise dos modelos $\langle X, R \rangle$. Os diversos modos de agregação permitem que as discussões (painéis) dos especialistas sejam organizadas de diferentes formas: com foco nas alternativas separadamente; com foco nos critérios ou com foco nas soluções para o problema.

Além dessas três iniciativas mencionadas acima, em que os diferentes autores estendem os diferentes métodos de tomada de decisão para o ambiente de decisão em grupo, na literatura existem muitos outros trabalhos que seguem esta mesma direção. Em geral, nos diversos trabalhos, é possível perceber os esforços para se suprir as diferentes necessidades e vencer as dificuldades inerentes ao ambiente de grupo (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). Entre as necessidades e dificuldades reconhecidas na literatura e já discutidas e atacadas por diferentes autores é possível citar:

- a) é comum na prática que pontos de vistas distintos e interesses parcialmente discordantes entre os especialistas dificultem a construção de uma recomendação única para o problema que seja satisfatória para o grupo (ARVAI, J.L.; GREGORY, R.; MCDANIELS, T.L, 2001) e (ALONSO et al., 2010);
- b) muitas vezes é necessário que os diferentes níveis de conhecimento e de experiência dos especialistas sejam respeitados na geração de uma recomendação para o problema (CHICLANA, et al., 1998) e (ALONSO et al., 2009);
- c) o ambiente de grupo pode ter uma estrutura democrática, em que todos os especialistas têm o direito de afetar a decisão final ou uma estrutura hierárquica, onde existe apenas um especialista com autoridade para tomar decisão e os demais devem atuar apenas como consultores (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011);

- d) os especialistas muitas vezes têm dificuldades em expressar suas opiniões sobre todas as alternativas e/ou sobre todos os critérios relevantes para a decisão (HERRERA-VIDEIRA, et al., 2007);
- e) os especialistas às vezes não fornecem informações sobre suas preferências com nível satisfatório de consistência (SAATY, 1991), (ARNOTT, 1998) e (HERRERA, et al., 2004).
- f) os especialistas às vezes não conseguem fornecer julgamentos com nível aceitável de confiabilidade (HERRERA, et al., 2004). A abordagem que tem sido utilizada para tratar essa situação, quando as preferências são modeladas e processadas como relações de preferência *fuzzy*, consiste em completar a matriz de comparações assumindo que o decisor deveria agir de maneira perfeitamente racional e consistente. Essa abordagem, aspectos de sua utilização e suas limitações serão discutidas no Capítulo 4.

2.4 Considerações finais

Neste capítulo, foram abordadas questões associadas com a colocação e estruturação dos problemas de tomada de decisão multicritério associados com o planejamento estratégico. Além disso, foram descritas de uma maneira geral as diferentes abordagens existentes na literatura para a modelagem e análise de tais problemas no ambiente com um especialista ou com um grupo de especialistas. Entre elas foi descrita a abordagem baseada na construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$, que será estudada mais profundamente nos próximos capítulos.

3. MODELAGEM DA PREFERÊNCIA EM AMBIENTE *FUZZY*

É sabido que o pensamento humano não segue um conjunto de regras definidas, sendo nebuloso, ambíguo e subjetivo. Uma forma encontrada para enriquecer os modelos matemáticos da preferência humana, de tal modo que eles passem a refletir as incertezas e ambiguidades inerentes aos julgamentos humanos, é por meio da utilização dos conjuntos *fuzzy* e da lógica *fuzzy* (ZADEH, 1965). Na literatura é possível encontrar diversos casos em que os conjuntos *fuzzy* são utilizados para representar as preferências dos decisores na tomada de decisão multicritério. Por exemplo, em (EKEL, 1999) são descritos métodos de análise multicritério dos modelos $\langle X, R \rangle$ baseados na escolha de Orlovsky. Em (KAHRAMAN; KAYA, 2010), a avaliação das alternativas é feita por meio de valores *fuzzy*. A ordenação das alternativas é baseada na ordenação das estimativas *fuzzy* agregadas e ponderadas para os diferentes critérios.

Neste capítulo, inicialmente são apresentados os conceitos básicos sobre conjuntos *fuzzy* (unidimensionais e bidimensionais), que serão úteis para o entendimento da teoria associada com a modelagem da preferência humana em ambiente *fuzzy*.

Conforme foi mencionado anteriormente, neste trabalho são consideradas técnicas para a resolução de problemas de tomada de decisão multicritério em grupo, a partir da colocação e análise dos modelos $\langle X, R \rangle$. Neste capítulo, é estudada a modelagem da preferência em ambiente *fuzzy* por meio de relações binárias *fuzzy*. Também é descrita a maneira como a relação de preferência estrita *fuzzy*, utilizada pelos métodos de decisão baseados no procedimento de escolha proposto por Orlovsky, está inserida na estrutura das relações de preferência *fuzzy* (FODOR; ROUBENS, 1994).

3.1 Conjuntos *fuzzy*

Na teoria dos conjuntos clássicos, um questionamento quanto a pertinência de um elemento em determinado conjunto admite como resposta os valores 1, caso ele pertença ao conjunto, e 0, caso não pertença. Na teoria dos conjuntos *fuzzy* ou conjuntos nebulosos, o limite entre os conjuntos não é bem definido, e os elementos possuem um grau de pertinência a cada conjunto (podendo inclusive pertencer a diversos conjuntos com graus de pertinência distintos). Dado um conjunto universo X , o grau com que um elemento $x \in X$ pertence a um conjunto *fuzzy* A é definido pela função de pertinência $\mu_A(x) : X \rightarrow [0,1]$. Esta representação

possibilita uma transição gradual entre a pertinência completa $\mu_A(x) = 1$ e a ausência completa de pertinência $\mu_A(x) = 0$. A Figura 3 contém um exemplo de conjunto *fuzzy* que reflete o conceito “temperatura confortável”. O conjunto representa a temperatura de 25 °C no ambiente como sendo perfeitamente compatível com o conceito de confortável e, à medida que a temperatura se distancia deste valor, o seu nível de compatibilidade com esse conceito decresce linearmente.

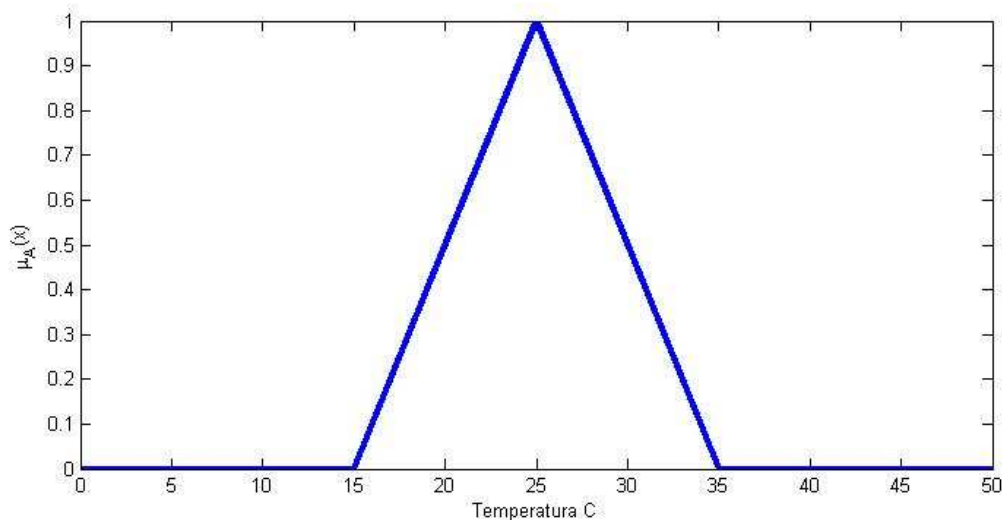


Figura 3: Conjunto *fuzzy* temperatura confortável

Fonte: Elaborada pelo autor

É possível implementar a interação entre os conjuntos *fuzzy* através de operações similares às operações de união, interseção e complemento dos conjuntos clássicos. A interseção, entre dois conjuntos A e B , que resulta em um conjunto C , pode ser representada da seguinte forma $C = A \cap B$. A pertinência ao conjunto C é dada por $\mu_C(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$, onde T representa a classe de operadores nebulosos conhecida como T-norma, que satisfazem as seguintes condições (JANG, et al., 1997):

- a) condição de fronteira: $T(0,0) = 0, T(x,1) = T(1,x) = x$;
- b) monotonicidade: $T(w,x) \leq T(y,z)$, se $w \leq y \wedge x \leq z$;
- c) propriedade comutativa: $T(x,y) = T(y,x)$;
- d) propriedade associativa: $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$.

A união entre dois conjuntos *fuzzy*, $C = A \cup B$, resulta em um conjunto *fuzzy* cuja função de pertinência pode ser definida como $\mu_C(x) = U(\mu_A(x), \mu_B(x))$, sendo que U corresponde ao operador de união em ambiente *fuzzy*. Os operadores nebulosos que implementam a operação de união recebem o nome de T-conorma e satisfazem as seguintes condições (JANG, et al., 1997):

- a) condição de fronteira : $U(1,1)=1, U(0,x)=U(x,0)=x$;
- b) monotonicidade: $U(w,x) \leq U(y,z)$ se $w \leq y \wedge x \leq z$;
- c) propriedade comutativa: $U(x,y) = U(y,x)$;
- d) propriedade associativa: $U(x, U(y,z)) = U(U(x,y), z)$.

O operador nebuloso de complemento ou negação consiste em uma função $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$, que respeita as seguintes propriedades (JANG, et al., 1997):

- a) condição de fronteira: $N(0)=1, N(1)=0$;
- b) monotonicidade: $N(x) \geq N(y)$, se $x \leq y$;
- c) involução: $N(N(x))=x$;
- d) propriedade associativa: $N(x, N(y,z)) = N(N(x,y), z)$.

Quando os operadores T , U e N respeitam a propriedade

$$T(x,y) = N(U(N(x), N(y))) \quad (1)$$

e também a propriedade

$$U(x,y) = N(T(N(x), N(y))), \quad (2)$$

esses três operadores constituem uma tripla (T, U, N) de De-Morgan. Neste caso, dado um operador T-norma e um operador de negação, sempre é possível obter seu N-dual T-conorma através da Equação (1) ou, de maneira similar, um operador T-norma pode ser obtido a partir de operador T-conorma, através da Equação (2).

3.2 Relações binárias *fuzzy*

Uma relação binária *fuzzy* (RBF) A definida no conjunto universo X é um conjunto *fuzzy* bidimensional cuja função de pertinência é dada por $\mu_R : X \times X \rightarrow [0,1]$. Dada uma relação R e o par ordenado de elementos $(x_k, x_l) \in X \times X$ (o termo “par ordenado” é utilizado aqui para dizer que os pares (x_k, x_l) e (x_l, x_k) correspondem a dois elementos distintos), as relações inversa $\mu_{R^{-1}}$, dual μ_{R^d} e complementar μ_{R^c} podem ser definidas da seguinte forma (FODOR; ROUBENS, 1994):

- a) $\mu_{R^{-1}}(x_k, x_l) = \mu_R(x_l, x_k)$;
- b) $\mu_{R^d}(x_k, x_l) = 1 - \mu_R(x_l, x_k)$;
- c) $\mu_{R^c}(x_k, x_l) = 1 - \mu_R(x_k, x_l)$.

Na prática, é comum representar a relação binária *fuzzy* por meio de uma matriz quadrada ou por meio de um dígrafo como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo: Dado o conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, considere que os elementos são inter-relacionados como segue: $R(x_1, x_1) = R(x_2, x_2) = R(x_3, x_3) = 1$; $R(x_1, x_2) = 0,4$; $R(x_2, x_1) = 1$; $R(x_1, x_3) = 0,5$; $R(x_3, x_1) = 1$; $R(x_2, x_3) = 0,7$; $R(x_3, x_2) = 0,7$. A correspondente RBF pode ser representada por meio do dígrafo representado na Figura 4 ou por meio da seguinte matriz quadrada:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 \\ 1 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,7 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3)$$

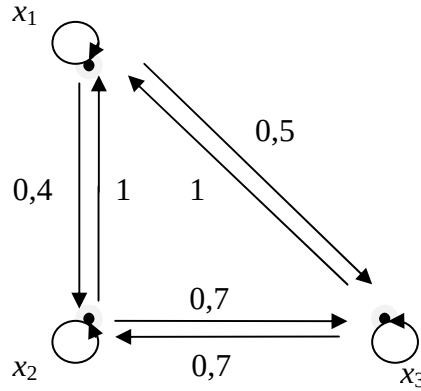


Figura 4: Exemplo de representação de relação binária *fuzzy* por meio de dígrafo
Fonte: Elaborada pelo autor

Abaixo são exibidas algumas propriedades geralmente usadas, na literatura sobre modelagem da preferência, para caracterizar as relações binárias nebulosas (JANG, et al., 1997):

- a) propriedade reflexiva: $\mu_R(x_k, x_k) = 1, \forall x_k \in X$;
- b) propriedade irreflexiva: $\mu_R(x_k, x_k) = 0, \forall x_k \in X$;
- c) propriedade simétrica: $\mu_R(x_k, x_l) = \mu_R(x_l, x_k), \forall x_k, x_l \in X$;
- d) propriedade T-assimétrica: $T(\mu_R(x_k, x_l), \mu_R(x_l, x_k)) = 0, \forall x_k, x_l \in X$;
- e) propriedade T-anti-simétrica $T(\mu_R(x_k, x_l), \mu_R(x_l, x_k)) = 0 \rightarrow x_k \neq x_l, \forall x_k, x_l \in X$;
- f) propriedade T-transitiva: $T(\mu_R(x_k, x_l), \mu_R(x_l, x_m)) \leq \mu_R(x_k, x_m), \forall x_k, x_l, x_m \in X$;
- g) propriedade de completude: $U(\mu_R(x_k, x_l), \mu_R(x_l, x_k)) = 1 \rightarrow x_k \neq x_l$.

3.3 Modelagem dos julgamentos por meio da relação binária *fuzzy*

As relações de preferência *fuzzy* são consideradas como um caminho fundamentado e prático (ORLOVSKY, 1978) e (HORIUCHI; TAMURA, 1998) para a modelagem das preferências, tendo sido utilizadas em diversos trabalhos como, por exemplo, em (TANINO, 1990), (CHICLANA, et al., 2003), (PEDRYCZ; GOMIDE, 1998), (EKEL, et al., 2000) e (TONG; BONISSONE, 1980). Na literatura sobre modelagem da preferência, é possível distinguir quatro tipos principais de relações de preferência *fuzzy*, sendo cada uma associada a um diferente tipo de julgamento. Se um decisor é convidado a comparar duas alternativas

$x_k, x_l \in X$ para um dado critério, é esperado que ele faça um dos seguintes julgamentos (FODOR; ROUBENS, 1994).

- a) x_k e x_l são indiferentes;
- b) x_k é estritamente melhor do que x_l ;
- c) x_l é estritamente melhor do que x_k ;
- d) x_k e x_l são incomparáveis (um decisor pode não ser capaz de comparar as alternativas devido a falta de informações ou devido a existência de informações conflitantes).

Essas respostas permitem distinguir três tipos de julgamento: indiferença, preferência estrita e incomparabilidade. Também é possível considerar um quarto tipo de julgamento que corresponde à preferência não-estrita, que pode ser formalmente definida como a união dos julgamentos de indiferença e de preferência estrita. A relação de preferência não-estrita *fuzzy* reflete no intervalo unitário o nível de preferência fraca da alternativa x_k sobre a alternativa x_l ou seja, ela indica o quanto a alternativa x_k é melhor ou tão boa quanto a alternativa x_l .

Assim, dado um critério de decisão c_i pertencente a C , esses quatro tipos de julgamentos podem ser modelados através das seguintes RBFs (FODOR; ROUBENS, 1994):

- a) relação de indiferença *fuzzy* I_i ,
- b) a relação de preferência estrita *fuzzy* P_i ,
- c) a relação de preferência não-estrita *fuzzy* R_i (por definição $R_i = P_i \cup I_i$),
- d) a relação de incomparabilidade *fuzzy* J_i .

Suas respectivas funções de pertinência, que são $\mu_{I_i}(x_k, x_l)$, $\mu_{P_i}(x_k, x_l)$, $\mu_{R_i}(x_k, x_l)$ e $\mu_{J_i}(x_k, x_l)$, quantificam no intervalo $[0,1]$ a credibilidade ou a intensidade desses quatro tipos de julgamento para cada par $(x_k, x_l) \in X \times X$. É desejável que as RBFs I , P , R e J apresentem determinadas propriedades para que elas sejam capazes de modelar os correspondentes julgamentos, como mostra a QUADRO 1 (FODOR; ROUBENS, 1994).

QUADRO 1
Propriedades das relações de preferências binárias (FODOR, et al, 1994)

Relação Binária	Propriedades Básicas
Preferência estrita (P)	Assimétrica (e irreflexiva)
Indiferença (I)	Simétrica e Reflexiva
Preferência fraca (R)	Assimétrica (e irreflexiva)
Incomparabilidade (J)	Simétrica e Reflexiva

Fonte: Elaborada pelo autor

Para modelos de preferência baseados em relações binárias *fuzzy*, é possível definir I_i , P_i e J_i exclusivamente em termos da relação de preferência não-estrita *fuzzy* R_i (FODOR; ROUBENS, 1994).

Considerando que I_i corresponde a todos os pares x_k e x_l de alternativas que satisfazem simultaneamente às condições $(x_k, x_l) \in R_i$ e $(x_l, x_k) \in R_i$, então a relação de indiferença pode ser representada como

$$I_i = R_i \cap R_i^{-1}, \quad (4)$$

onde R_i^{-1} é a relação inversa de R_i .

De forma similar, dado que $P_i(x_k, x_l)$ implica que $R_i(x_k, x_l)$ e $N(R_i(x_l, x_k))$, a preferência estrita pode ser determinada como (FODOR; ROUBENS, 1994):

$$P_i = R_i \cap R_i^d, \quad (5)$$

onde R_i^d é a relação dual de R_i .

Finalmente, como a relação $J_i(x_k, x_l)$ implica que $N(R_i(x_k, x_l))$ e $N(R_i(x_l, x_k))$, a relação de incomparabilidade é dada por (FODOR, et al., 1994):

$$J_i = N(R_i) \cap R_i^d. \quad (6)$$

Portanto, tendo em mãos os valores de $R_i(x_k, x_l)$ e $R_i(x_l, x_k)$, é possível estimar I_i , P_i e J_i utilizando (4), (5) e (6), respectivamente. Como se pode notar, essas três expressões requerem a seleção de um operador T-norma. Infelizmente, como foi discutido em vários trabalhos, por exemplo, em (DE BAETS; FODOR, 1997), não é simples selecionar um operador T-norma para implementar ao mesmo tempo (4), (5) e (6), quando se deseja preservar algumas propriedades desejáveis da estrutura de preferências. De fato, um resultado negativo demonstrado em (ALSINA, 1985) indica que, se uma tripla De Morgan é utilizada para representar o complemento, a interseção e a união das relações binárias *fuzzy*, então a igualdade

$$Z = (Z \cap W) \cup (Z \cap N(W)) \quad (7)$$

não é satisfeita por nenhuma relação binária *fuzzy* Z e W . Supondo-se que Z corresponde a R_i e W como R_i^d , então tem-se que as relações (4), (5) e (6) são inconsistentes para qualquer relação de preferência *fuzzy*, se for usado o mesmo operador t-norma para implementar as duas operações da interseção em (7). Este resultado demonstrado em (ALSINA, 1985) motivou a pesquisa por abordagens axiomáticas para a construção das estruturas de preferência *fuzzy* de forma a solucionar essa inconsistência. Os trabalhos (DE BAETS; FODOR, 2003) e (FODOR; ROUBENS, 1994) refletem alguns esforços nesta direção.

Entre as T-normas que podem ser utilizadas neste contexto (FODOR; ROUBENS, 1994), o operador min foi selecionado para implementar a interseção em (4) e em (6), como mostram as equações abaixo:

$$\mu_{I_i}(x_k, x_l) = \min\{\mu_{R_i}(x_k, x_l), \mu_{R_i}(x_l, x_k)\}, \quad (8)$$

$$\mu_{J_i}(x_k, x_l) = \min\{1 - \mu_{R_i}(x_k, x_l), 1 - \mu_{R_i}(x_l, x_k)\}. \quad (9)$$

Ao mesmo tempo, a T-norma de Lukasiewicz foi escolhida para implementar a interseção em (5), que resulta na seguinte expressão:

$$\mu_{P_i}(x_k, x_l) = \max\{\mu_{R_i}(x_k, x_l) - \mu_{R_i}(x_l, x_k), 0\}. \quad (10)$$

É importante indicar que outros pares de T-normas podem ser utilizados (FODOR; ROUBENS, 1994). As vantagens dessa seleção de operadores (conforme mostram as expressões (8), (9) e (10)) estão associadas com os seguintes aspectos:

- a) as expressões (8) e (10) são coerentes com o modelo de preferência proposto por Orlovsky e com o procedimento de escolha de Orlovsky (ORLOVSKY, 1978), o qual tem sido aplicado com sucesso na solução de problemas de decisão multicritério (EKEL, et al., 1998), (EKEL, et al., 2009) e (EKEL, et al., 2006) individuais ou em grupo (PARREIRAS, et al., 2010), (PARREIRAS, et al., 2011) e (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011);
- b) as expressões (8), (9) e (10) permitem desenvolver uma forma intuitiva para que um decisor humano avalie diretamente as relações de preferência *fuzzy* (este assunto será abordado mais adiante neste capítulo).

3.4 Tipos de relações de preferência não-estrita *fuzzy*

Quando se fala em relações de preferência não-estrita *fuzzy*, existe mais de um formato para a codificação da preferência do decisor no intervalo unitário. O esquema de codificação aplicado na definição das relações de preferência *fuzzy* não-recíprocas (RPFNR), que serão utilizadas aqui na definição de nossos modelos $\langle X, R \rangle$, é coerente com as seguintes condições (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011):

- a) se $\mu_{R_i}(x_k, x_l) = 1$ e $\mu_{R_i}(x_l, x_k) = 1$, então x_k é indiferente a x_l ;
- b) se $\mu_{R_i}(x_k, x_l) = 1$ e $\mu_{R_i}(x_l, x_k) = 0$, então x_k é estritamente preferido a x_l ;
- c) se $\mu_{R_i}(x_k, x_l) = 0$ e $\mu_{R_i}(x_l, x_k) = 1$, então x_l é estritamente preferido a x_k ;
- d) se $\mu_{R_i}(x_k, x_l) = 0$ e $\mu_{R_i}(x_l, x_k) = 0$, então x_k e x_l não são comparáveis;
- e) as entradas da diagonal principal são preenchidas com 1 devido a propriedade da reflexibilidade de $\mu_{R_i}(x_k, x_l)$.

Avaliações intermediárias entre as descritas anteriormente também são permitidas. Elas podem ser representadas da seguinte maneira:

- a) se $0 < \mu_{R_i}(x_k, x_l) < 1$ e $\mu_{R_i}(x_l, x_k) = 1$, então x_l é fracamente preferido à x_k ;
- b) se $\mu_{R_i}(x_k, x_l) = 1$ e $0 < \mu_{R_i}(x_l, x_k) < 1$, então x_k é fracamente preferido a x_l ;
- c) se $0 < \mu_{R_i}(x_k, x_l) < 1$ e $\mu_{R_i}(x_l, x_k) = 0$, então x_k é fracamente preferido à x_l e, ao mesmo tempo, x_k e x_l possuem um grau de incomparabilidade;
- d) se $\mu_{R_i}(x_k, x_l) = 0$ e $0 \leq \mu_{R_i}(x_l, x_k) < 1$, então x_l é fracamente preferido à x_k e, ao mesmo tempo, x_k e x_l possuem um grau de incomparabilidade.

Essas relações de preferência não-estrita *fuzzy* podem ser diretamente ou indiretamente construídas pelos especialistas. No caso de o decisor optar por estimar diretamente os níveis de preferência, é útil observar que as expressões (8), (9) e (10) delimitam uma relação entre os valores de $\mu_{R_i}(x_k, x_l)$ e $\mu_{R_i}(x_l, x_k)$. O operador min da expressão (8) estabelece que o menor valor entre $\mu_{R_i}(x_k, x_l)$ e $\mu_{R_i}(x_l, x_k)$ corresponde ao nível de indiferença entre as alternativas x_k e x_l . O operador T-norma de Lukasiewicz na expressão (10) define que a diferença entre $\mu_{R_i}(x_k, x_l)$ e $\mu_{R_i}(x_l, x_k)$ corresponde ao nível de preferência de x_k e x_l . O operador min na expressão (9) estabelece que o menor valor entre $1 - \mu_{R_i}(x_k, x_l)$ e $1 - \mu_{R_i}(x_l, x_k)$ corresponde ao nível de incomparabilidade associado às alternativas x_k e x_l .

Além disso, em relação ao processo de construção de RPFNRs, é importante ressaltar que, se o método de decisão utilizado para analisar as relações de preferência *fuzzy* não admitir o julgamento de incomparabilidade entre as alternativas, o decisor deve reconsiderar todos os julgamentos que possuem incomparabilidade. Em outras palavras, o decisor deve procurar mais informações de modo que possa aumentar o grau de certeza associado com seu julgamento (reduzindo o nível de incomparabilidade associado com seus julgamentos ao nível zero).

Outro esquema de codificação comumente usado na literatura corresponde às relações de preferência *fuzzy* aditivamente recíprocas (RPFAR). Uma RPFAR consiste de um tipo específico de relação de preferência *fuzzy* que satisfaz a condição de reciprocidade aditiva como segue:

$$\mu_{RR_i}(x_k, x_l) + \mu_{RR_i}(x_l, x_k) = 1, \forall x_k, x_l \in X. \quad (11)$$

Os julgamentos expressos neste formato podem ser interpretados a partir das seguintes regras:

- a) $\mu_{RR_i}(x_k, x_l) = 0,5$ significa que x_k é indiferente em relação a x_l ;
- b) $0 \leq \mu_{RR_i}(x_k, x_l) < 0,5$ significa que x_l é preferível a x_k ;
- c) $0,5 < \mu_{RR_i}(x_k, x_l) \leq 1$ significa que x_k é preferível a x_l ;
- d) as entradas da diagonal principal são preenchidas com 0,5, uma vez que cada elemento é igual a ele mesmo e logo indiferente a ele mesmo;
- e) devido à reciprocidade aditiva, quando um especialista fornece um valor para $\mu_{RR_i}(x_k, x_l)$, o valor de $\mu_{RR_i}(x_l, x_k)$ passa a ser automaticamente $1 - \mu_{RR_i}(x_k, x_l)$.

3.5 Consistência dos julgamentos

Uma importante vantagem dos modelos da preferência que comportam as comparações dos pares de alternativas, como é o caso das relações de preferência *fuzzy* e das relações multiplicativas (CHICLANA, et al., 2009), está na simplicidade da pergunta que é colocada aos especialistas: em cada momento o especialista deve indicar qual é a melhor entre duas alternativas. No entanto, conforme discutido em (CHICLANA, et al., 2007), as comparações dos pares de alternativas dá ao especialista a liberdade de fornecer conjuntos de julgamentos inconsistentes.

Na literatura sobre modelagem da preferência, a consistência tem sido associada à seguinte situação: se x_k é preferível a x_l e a alternativa x_l é preferível a x_m , então x_k deve ser obrigatoriamente preferível a x_m garantindo assim a coerência ordinal (CHICLANA, et al., 2008). Este conceito de consistência, considerado o mais suave possível para aplicações reais, pode ser colocado para o caso da RPFNR como:

$$\text{se } \mu_{R_i}(x_k, x_l) \geq \mu_{R_i}(x_l, x_k) \text{ e } \mu_{R_i}(x_l, x_m) \geq \mu_{R_i}(x_m, x_l), \quad (12)$$

então $\mu_{R_i}(x_k, x_m) \geq \mu_{R_i}(x_m, x_k), \forall x_k, x_l, x_m \in X$.

Este conceito de consistência mínima, o qual é denominado na literatura como transitividade fraca, pode ser enriquecido, levando em conta também os níveis de preferência associados aos julgamentos. A consistência cardinal respeita a proporção de preferência de uma alternativa sobre a outra. Para o caso da RPFNR, a transitividade max-min, que é dada por

$$\mu_{R_i}(x_k, x_l) \geq \min(\mu_{R_i}(x_k, x_m), \mu_{R_i}(x_m, x_l)), \forall x_k, x_m, x_l \in X, \quad (13)$$

e a transitividade fraca (dada pela expressão (12)) são as condições de consistência mais comuns (sendo obviamente a transitividade max-min mais restritiva do que a transitividade fraca) (CHICLANA, et al., 2008) e (PENEVA; POPCHEV, 2003).

Para o caso da RPFAR, a propriedade da transitividade aditiva, que é dada por

$$(\mu_{RR_i}(x_k, x_l) - 0,5) = (\mu_{RR_i}(x_k, x_m) - 0,5) + (\mu_{RR_i}(x_m, x_l) - 0,5), \forall k, m, l \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (14)$$

foi considerada uma das mais intuitivas condições para atestar a consistência de relações de preferência *fuzzy* (TANINO, 1984) e (HERRERA, et al., 2004). Em (CHICLANA, et al., 2004), foi demonstrado que existe uma correspondência numérica exata entre a transitividade multiplicativa das preferências multiplicativas e a transitividade aditiva das relações de preferência *fuzzy* com reciprocidade aditiva. Vale notar que a transitividade aditiva corresponde a um nível de consistência mais rigoroso do que a transitividade fraca. A transitividade fraca pode ser escrita para o caso da RPFAR como segue:

$$\text{se } \mu_{RR_i}(x_k, x_l) \geq 0,5 \text{ e } \mu_{RR_i}(x_l, x_m) \geq 0,5, \text{ então } \mu_{RR_i}(x_k, x_m) \geq 0,5, \forall x_k, x_l, x_m \in X. \quad (15)$$

3.6 Considerações finais

Neste capítulo foi estudada a modelagem da preferência em ambiente *fuzzy* por meio das relações binárias *fuzzy*. Foram definidos e caracterizados os julgamentos de indiferença, de preferência estrita e de incomparabilidade. Como será visto no Capítulo 6, a relação de

incomparabilidade *fuzzy* desempenha um papel fundamental nos procedimentos de apoio à decisão em grupo que estão sendo propostos neste trabalho. A importância da relação de preferência estrita *fuzzy* ficará mais evidente no Capítulo 5, onde são descritos métodos para análise de problemas de tomada de decisão multicritério. No capítulo seguinte serão apresentadas as maneiras indiretas de se construir as relações de preferência não-estrita *fuzzy*, de tal modo que elas possam refletir as preferências dos especialistas.

4. CONSTRUÇÃO DE RELAÇÕES DE PREFERÊNCIA *FUZZY*

Na etapa de construção das preferências individuais, com base na avaliação e comparação das alternativas, deve ser considerado natural que cada especialista sinta-se mais à vontade para expressar suas preferências usando um formato específico de representação das preferências. No entanto, ao permitir que cada especialista escolha a melhor forma de expressar suas preferências, torna-se necessário uniformizar a informação, reescrevendo-a em um formato mais geral (CHICLANA, et al., 1998) e (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). A seguir, quatro diferentes formatos são descritos: vetor de ordenação, vetor de valores de utilidade, relação de preferência multiplicativa e estimativas *fuzzy*. Esses quatro formatos, adicionados aos formatos estudados no capítulo anterior, RPFAR e RPFNR, são os mais comumente usados nas aplicações das diversas áreas (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). Levando-se em conta que aqui a RPFNR é utilizada como este formato mais geral, este capítulo apresenta também as funções de transformação que permitem a conversão das informações expressas nos diferentes formatos para o formato de RPFNR.

4.1 Construção de preferências

A escolha do formato para a expressão das preferências deve ser individual e subjetiva, sendo geralmente baseada em aspectos como: apelo intuitivo, nível de precisão desejado, facilidade de compreensão ou facilidade de avaliação da preferência. Os autores de (HERRERA-VIEDMA, et al., 2002) distinguem quatro tipos de estruturas de preferência. No trabalho (ZHANGA, Q.; CHENA, J.C.H.; CHONG, 2004), são consideradas quatro possibilidades adicionais. Conforme indicado acima, aqui são considerados quatro principais formatos, os quais (junto com as relações de preferência *fuzzy*) são considerados suficientes para cobrir a necessidades das aplicações reais.

a) ordenação das alternativas

Quando um decisor encontra dificuldades em acessar quantitativamente o nível de suas preferências, é vantajoso usar informação de caráter puramente ordinal. A ordenação das alternativas desde a melhor até a pior pode ser representada como um vetor

$O_i = [O_i(x_1) \dots O_i(x_n)]$, sendo $O_i(x_k)$ uma função de permutação que retorna a posição da alternativa x_k entre os valores $\{1, 2, \dots, n\}$ (CHICLANA, et al., 1998).

b) vetor com os valores utilidade

Um tipo muito importante de função utilidade cardinal é fundamentada nas diferenças dos níveis de preferência (ou seja, em uma escala intervalar das alternativas) de tal modo que, dada uma função utilidade mensurável $U_i(x): X \rightarrow [0, 1]$, se a seguinte condição é satisfeita (KEENEY, et al., 1976)

$$U_i(x_k) - U_i(x_m) > U_i(x_l) - U_i(x_k), \quad (16)$$

então podemos inferir que a diferença entre os níveis de preferência $U_i(x_k)$ e $U_i(x_m)$ é maior do que a diferença entre os níveis de preferência $U_i(x_l)$ e $U_i(x_k)$.

c) relação de preferência multiplicativa

A relação de preferência multiplicativa pode ser representada como uma matriz $n \times n$ positiva recíproca RM_i refletindo na forma de uma razão a intensidade da preferência entre as alternativas de acordo com a abordagem do *Analytic Hierarchy Process* (SAATY, 1991). Cada entrada $RM_i(x_k, x_l)$ dessa matriz recíproca representa a intensidade de preferência e pode ser interpretada como “ x_k é $RM_i(x_k, x_l)$ vezes mais dominante do que x_l ” (SAATY, 1991). Aplicando-se a condição de reciprocidade multiplicativa, tendo obtido o valor $RM_i(x_k, x_l)$, $RM_i(x_l, x_k)$ é automaticamente inferida como

$$RM_i(x_l, x_k) = 1 / RM_i(x_k, x_l). \quad (17)$$

Embora a relação de preferência multiplicativa acomode a intransitividade das preferências, é desejável coletar julgamentos consistentes. Se o processamento das matrizes for por meio da aplicação dos métodos de análise de modelos $\langle X, R \rangle$ baseados no procedimento de escolha proposto por (ORLOVSKY, 1978), então é necessário que as preferências do decisor satisfaçam pelo menos a transitividade fraca, que pode ser escrita para o caso das relações multiplicativas da seguinte forma:

se $RM_i(x_k, x_l) \geq 1$ e $RM_i(x_l, x_m) \geq 1$, então $RM_i(x_k, x_m) \geq 1, \forall x_k, x_l, x_m \in X$. (18)

No entanto, é importante indicar que, do ponto de vista da racionalidade dos julgamentos do decisor, a perfeita consistência da relação de preferência multiplicativa está associada com a propriedade transitividade multiplicativa, a qual é dada por (SAATY, 1991):

$$RM_i(x_k, x_l) = RM_i(x_k, x_m) \cdot RM_i(x_m, x_l), \quad \forall k, l, m \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (19)$$

d) **estimativas fuzzy**

Os elementos de X podem ser avaliados com o uso de estimativas *fuzzy* $F_i(x_1), \dots, F_i(x_n)$, sendo $\mu_{F_i}(x_k)$ a função de pertinência da estimativa *fuzzy* usada para avaliar a alternativa x_k , segundo o critério c_i . A estimativa *fuzzy* $\mu_{F_i}(x_k)$ refere-se ao número *fuzzy* que pode ser diretamente definido pelo especialista ou indiretamente especificado pelo especialista por meio de termos linguísticos de um conjunto TL como, por exemplo, $TL(c_i) = \{\text{baixa qualidade, media qualidade, alta qualidade}\}$. Neste último caso, assume-se que cada um dos termos linguísticos tenha sido previamente modelado como uma estimativa *fuzzy*. A literatura apresenta diferentes técnicas adequadas para a construção de estimativas *fuzzy* correspondentes a termos linguísticos, a partir do conhecimento de um ou mais especialistas ou a partir do processamento de dados (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011).

4.1.1 **Análise e comparação de quantidades fuzzy**

Ao contrário dos números reais, os números *fuzzy* não têm uma ordem natural. A idéia geral associada à análise e comparação de quantidades *fuzzy* é convertê-las em números reais e basear a comparação nesses números. No entanto, as abordagens baseadas nesse tipo conversão apresentam sérias limitações. Freeling defende esse ponto de vista através da citação (FREELING, 1980): “pela redução de toda nossa análise a um único número, nós perdemos muita informação que com premeditação foi preservada nos cálculos”. Essa informação à qual Freeling se refere corresponde às incertezas, que os conjuntos *fuzzy*

modelam em si mesmos. A experiência mostra que frequentemente aparecem situações (EKEL, et al., 1998), nas quais não é possível distinguir plenamente todas as alternativas, criando situações de incerteza. Esses casos podem ocorrer devido à insuficiência ou até mesmo ausência de informação, igualdade de preferência entre alternativas ou dificuldade de expressar explicitamente a preferência sobre as mesmas.

Para superar as dificuldades indicadas acima, é possível utilizar uma abordagem mais natural para o tratamento das incertezas, baseada no conceito de função de pertinência da relação de preferência *fuzzy* generalizada (CANHA et al., 2007). Conforme colocado em (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011), este conceito é baseado no índice de comparação introduzido por Orlovsky.

Em (EKEL, et al., 2006), essas matrizes são construídas indiretamente, a partir das estimativas *fuzzy* $F_i(x_k)$ fornecidas pelos especialistas para cada alternativa. Por exemplo, dadas as estimativas $F_i(x_k), i = 1, \dots, q, k = 1, \dots, n$, com funções de pertinência $\mu_{F_i}(x_k)$, se o i -ésimo critério está associado com a maximização, os elementos de R_i são definidos como segue:

$$\mu_{R_i}(x_k, x_l) = \sup_{\substack{x_k, x_l \in X \\ f_i(x_k) \geq f_i(x_l)}} \min\{\mu_{F_i}(f_i(x_k)), \mu_{F_i}(f_i(x_l))\}, \quad (20)$$

$$\mu_{R_i}(x_l, x_k) = \sup_{\substack{x_k, x_l \in X \\ f_i(x_l) \geq f_i(x_k)}} \min\{\mu_{F_i}(f_i(x_k)), \mu_{F_i}(f_i(x_l))\}. \quad (21)$$

Em (20) e (21), os termos $f_i(x_k)$ e $f_i(x_l)$ representam cada possível valor do conjunto universo em que estão definidas as estimativas *fuzzy* $\mu_{F_i}(x_k)$ e $\mu_{F_i}(x_l)$. Se o k -ésimo critério está associado com a minimização, então (20) e (21) estão escritas para os casos em que $f_i(x_k) \leq f_i(x_l)$ e $f_i(x_l) \leq f_i(x_k)$, respectivamente. Mais detalhes e exemplos sobre a utilização das expressões (20) e (21) podem ser encontradas em (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011).

4.2 Funções de transformação para uniformização de preferências

Conforme indicado anteriormente, em decisões individuais ou em grupo, quando formatos diferentes de preferência são utilizados pelos decisores para expressar suas preferências, a informação deve ser uniformizada através de funções de transformação. Estas

funções de transformação devem converter informações heterogêneas, que podem ser quantitativas ou qualitativas, binárias ou *fuzzy*, ordinais ou cardinais em relações de preferência *fuzzy*, que representam um formato mais geral para modelar a preferência (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011).

Em (CHICLANA, et al., 1998), é possível encontrar diferentes funções de transformação para converter um vetor com a ordenação das alternativas ou um vetor com os valores de utilidade associados em relações de preferência *fuzzy* com reciprocidade aditiva. Uma função de transformação para converter preferências multiplicativas em relações de preferência *fuzzy* com reciprocidade aditiva é proposta em (CHICLANA, et al., 2001).

Conforme foi indicado anteriormente, neste trabalho optou-se por trabalhar com o formato de RPFNR devido à possibilidade de se representar a incomparabilidade das alternativas neste formato de preferência. Esta propriedade é utilizada mais adiante para representar o grau de credibilidade dos julgamentos fornecidos pelos especialistas. A QUADRO 2 apresenta funções de transformação propostas em (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011) para a construção de RPFNRs, a partir dos diferentes formatos de representação das preferências. É necessário indicar que elas são definidas para critérios de maximização (se o critério em estudo for de minimização, então as direções dos sinais das inequações que aparecem nas funções de transformação devem ser invertidas).

QUADRO 2

Funções de Transformação para a conversão de informação expressa em diferentes formatos para RPFNR.
(PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011)

Formato de preferência original	Função de Transformação
Vetor com a ordenação de todas alternativas	$\mu_R(x_k, x_l) = H_1(O(x_k), O(x_l)) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{O(x_l) - O(x_k)}{2(n-1)}, & \text{se } O(x_k) > O(x_l) \\ 1, & \text{se } O(x_k) \leq O(x_l) \end{cases}$
Vetor dos valores de utilidade em um intervalo de escala	$\mu_R(x_k, x_l) = H_2(U(x_k), U(x_l)) = \begin{cases} 1 + U(x_k) - U(x_l), & \text{se } U(x_k) < U(x_l) \\ 1, & \text{se } U(x_k) \geq U(x_l) \end{cases}$
Relações de preferências multiplicativas	$\mu_R(x_k, x_l) = H_3(RM(x_k, x_l), RM(x_l, x_k)) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} \log_m \frac{RM(x_k, x_l)}{RM(x_l, x_k)}, & \text{se } \log_m RM(x_k, x_l) < 0 \\ 1, & \text{se } \log_m RM(x_k, x_l) \geq 0 \end{cases}$

Relações de preferência fuzzy com reciprocidade aditiva	$\mu_R(x_k, x_l) = H_4(\mu_{RR}(x_k, x_l), \mu_{RR}(x_l, x_k)) =$ $\begin{cases} 1 + \mu_{RR}(x_k, x_l) - \mu_{RR}(x_l, x_k), & \text{se } \mu_{RR}(x_k, x_l) < 0.5 \\ 1, & \text{se } \mu_{RR}(x_k, x_l) \geq 0.5 \end{cases}$
---	---

Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 Procedimento para completar relações de preferência fuzzy com reciprocidade aditiva

Não é raro ocorrer na prática que um determinado especialista não consiga fornecer os julgamentos envolvendo todos os pares de alternativas ou não consiga manter sua consistência ao realizar as comparações entre as alternativas. Uma forma (talvez um pouco ditatorial) de tratar este problema consiste em solicitar ao especialista que julgue uma quantidade restrita de alternativas e deixar que as demais sejam preenchidas de acordo com algum critério de transitividade (MA, et al., 2006) e (CHICLANA, et al., 2008). Assim, os especialistas devem fornecer as comparações de tal modo que pelo menos uma vez cada um dos elementos é comparado com outro e deixar lacunas em branco na matriz de comparações. Estas lacunas são preenchidas de forma a respeitar a transitividade das demais avaliações da matriz.

A técnica proposta por (HERRERA, et al., 2004) pressupõe que, quando o decisor se expressa usando o formato de RPFAR, seus julgamentos devem satisfazer a transitividade aditiva. A partir desta suposição o especialista não precisa preencher toda a matriz de comparações e sim apenas uma parte. Assim, dado o conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, bastaria ele fornecer no mínimo um julgamento envolvendo cada alternativa, como por exemplo: $x_1 \prec x_2$, $x_3 \succ x_2$ e $x_4 \prec x_3$. Todas as demais combinações de pares de alternativas iniciais são estimadas a partir da propriedade de transitividade aditiva. Obviamente, uma vez que a transitividade aditiva é garantida, automaticamente a transitividade fraca também o é (PENEVA; POPCHEV, 2003), o que torna a matriz apropriada para utilizar o procedimento de escolha proposto por Orlovsky.

Exemplo: Considere que um especialista deve avaliar um conjunto de quatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, levando-se em conta um critério c_1 . Desta forma, se o especialista fornece os seguintes julgamentos: x_1 é levemente preferível a x_2 , x_3 é levemente preferível a x_2 e x_4 é muito preferível a x_3 , estes julgamentos podem ser refletidos, por exemplo, pelos seguintes valores numéricos: $\mu_{RR_1}(x_1, x_2) = 0,52$, $\mu_{RR_1}(x_2, x_3) = 0,55$,

$\mu_{RR_1}(x_3, x_4) = 0,9$. Pela reciprocidade aditiva, tem-se que: $\mu_{RR_1}(x_2, x_1) = 0,48$; $\mu_{RR_1}(x_3, x_2) = 0,45$; $\mu_{RR_1}(x_4, x_3) = 0,1$. Aplicando-se a transitividade aditiva (14) para calcular $\mu_{RR_1}(x_1, x_3)$, por exemplo, obtemos:

$$(\mu_{RR_1}(x_3, x_1) - 0,5) = (\mu_{RR_1}(x_3, x_2) - 0,5) + (\mu_{RR_1}(x_2, x_1) - 0,5). \quad (22)$$

Substituindo-se os valores de $\mu_{RR_1}(x_3, x_2)$ e $\mu_{RR_1}(x_2, x_1)$ na expressão acima, temos: $\mu_{RR_1}(x_3, x_1) = 0,43$. Aplicando-se a transitividade aditiva para preencher os demais julgamentos faltantes, é possível obter a seguinte RPFAR:

$$RR_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,52 & 0,57 & 0,97 \\ 0,48 & 0,5 & 0,55 & 0,95 \\ 0,43 & 0,45 & 0,5 & 0,95 \\ 0,03 & 0,05 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

A matriz construída acima satisfaz completamente a transitividade aditiva e, por consequência, a transitividade fraca. Embora esta metodologia possa ser utilizada para os casos em que o especialista não consegue comparar todas as alternativas, sua aplicação exige que se tenha o seguinte cuidado: é sabido que os formatos de preferência baseados em comparações de pares de alternativas limitam a percepção global que os especialistas têm do conjunto de alternativas a apenas duas alternativas de cada vez. Sabe-se também que isso pode levá-lo a manifestar preferências instáveis e julgamentos inconsistentes (discussões mais amplas sobre este problema podem ser encontradas, por exemplo, em (TVERSKY; SIMONSON, 1993)). Tendo em vista que nem sempre é válida a hipótese de que o especialista possui preferências perfeitamente consistentes, existem casos em que esta tecnologia simplesmente não pode ser aplicada.

4.4 Correção da inconsistência das relações de preferência *fuzzy* com reciprocidade aditiva

Outra forma de se minimizar a inconsistência das relações de preferência *fuzzy* é proposta por (MA, et al., 2006). Para utilizar esta técnica os especialistas devem representar seus julgamentos por meio de relações de preferência *fuzzy* com reciprocidade aditiva (aqui representada pela matriz RR). Com base na RBF inicial RR , é criada outra relação *fuzzy* B que respeita integralmente a transitividade aditiva (e, por consequência, a transitividade fraca). A matriz B é utilizada para alterar gradualmente a matriz de preferências inicial (RR) de forma que esta também respeite a transitividade fraca.

As seguintes definições são necessárias para executar o procedimento proposto por (MA, et al., 2006):

- a) h - número de interações (execuções do procedimento) até que se atinja a transitividade fraca;
- b) Δt - variação do valor da pertinência dos elementos $\mu_{RR}(x_k, x_l)$ em cada interação h do procedimento durante a execução dos passos. É interessante que este valor seja pequeno ($0,01 \leq \Delta t \leq 0,1$, por exemplo) para preservar ao máximo a matriz inicial RR do especialista;
- c) $t = h\Delta t$ - valor que regula a participação da matriz RR e da matriz B na matriz final $\tilde{RR}$. Quando maior o valor de h , maior o valor de t e como consequência maior a modificação da matriz inicial em favor da matriz transitiva B . O valor de t varia no intervalo $[0,1]$, onde 0 indica predominância completa da matriz RR e 1 predominância completa da matriz B na matriz final $\tilde{RR}$.

Passo 1: criar a matriz RR pelo especialista.

Passo 2: criar a relação de preferência *fuzzy* B , que respeita a transitividade aditiva. Para a criação dessa matriz é aplicado um resultado do Teorema 2 de (MA, et al., 2006), que pode ser sintetizado na aplicação das duas fórmulas abaixo à relação de preferência fornecida inicialmente pelo especialista:

$$\mu_{B^*}(x_k, x_l) = 0,5 + \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^n \mu_{RR}(x_k, x_m) - \sum_{m=1}^n \mu_{RR}(x_l, x_m) \right), \quad \forall k, l \in \{1, \dots, n\}. \quad (24)$$

Quando a equação (24) é utilizada a fim de se encontrar uma matriz transitiva, é necessário monitorar os valores de $\mu_{B^*}(x_k, x_l)$ da seguinte forma: caso $\mu_{B^*}(x_k, x_l) \geq 0 \quad \forall k, l \in \{1, \dots, n\}$, então a matriz B^* é a relação de preferência fuzzy com consistência aditiva B . Caso existam elementos menores do que zero na matriz B^* , a mesma deve ser corrigida a fim de que seus elementos estejam dentro do intervalo $[0,1]$, pela aplicação da expressão a seguir:

$$\mu_{B^{**}}(x_k, x_l) = \frac{\mu_{B^*}(x_k, x_l) + a}{1 + 2a}, \quad \forall k, l \in \{1, \dots, n\}, \quad (25)$$

onde

$$a = \max \left\{ \left| \mu_{B^*}(x_t, x_s) \right| \mid \mu_{B^*}(x_t, x_s) < 0, \quad t, s \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

A aplicação da expressão (25) resulta em uma RPFAR com transitividade aditiva, a qual é aqui representada pelo símbolo B^{**} .

Passo 3: construir a matriz sintética $\tilde{RR}$ por meio da seguinte equação:

$$\tilde{RR}^h = (1-t)RR + tB. \quad (26)$$

A matriz $\tilde{RR}^h$ representa a matriz inicial dos especialistas corrigida a cada iteração h segundo o tamanho escolhido para o passo Δt .

Passo 4: criar a matriz $QN_{(h)}^{(1)}$ utilizando a matriz $\tilde{RR}^h$. Este passo tem o intuito de verificar se as alterações realizadas no passo anterior foram suficientes para corrigir a transitividade da matriz inicial.

A matriz $QN_{(h)}^{(1)} = \mu_{QN_h^1}(x_k, x_l), \forall x_k, x_l \in X$ nada mais é do que uma versão da de relação de preferência inicial RR , reescrita de tal modo que se $\mu_{RR}(x_k, x_l) > 0,5$, então $\mu_{QN_h^1}(x_k, x_l) = 1$ e se $\mu_{RR}(x_k, x_l) \leq 0,5$, então $\mu_{QN_h^1}(x_k, x_l) = 0$. Na matriz $QN_{(h)}^{(1)}$, os

elementos com valores iguais a 1 indicam que x_k é preferida (estritamente) em relação a x_l . Esta preferência é representada no grafo pelo arco que parte de x_k em direção a x_l . O valor zero nos indica que não há preferência entre x_k a x_l . No grafo, a ausência da preferência entre duas alternativas é refletida pela ausência do arco ligando o par correspondente de alternativas. É possível verificar que, caso a relação de preferência RR possua transitividade fraca, (MA, et al., 2006) demonstra que na matriz associada $QN_{(h)}^{(1)}$ os dígrafos não possuem caminhos triplos, ou seja, passos de comprimento 3 entre os elementos x_k e x_l .

De posse desta propriedade é possível utilizar a matriz associada $QN_{(h)}^{(1)}$ para verificar a transitividade fraca da matriz RR . A matriz associada pode ser transformada na matriz atingível "reachable matrix" D , que é a terceira potência da matriz associada $QN_{(h)}^{(1)}$, $D = QN_{(h)}^{(3)}$. Assim uma matriz RR possui transitividade fraca caso todos os elementos da diagonal principal da matriz atingível associada sejam iguais a zero. Qualquer outro valor indica que a matriz RR não possui transitividade fraca.

Passo 5: verificar a existência da transitividade fraca na matriz RR pelo cálculo de $con_{(h)}$ através da equação

$$con_{(h)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n s_k (s_k - 1)$$

onde

$$s_k = \sum_{l=1}^n \mu_{QN_h^{(1)}}(x_k, x_l). \quad (27)$$

A matriz RR possui transitividade fraca quando $con_{(h)} = 0$.

Passo 6: verificar se a matriz $RR^{\sim h}$ satisfaz a condição de transitividade fraca. Se esta condição for satisfeita, finaliza-se o procedimento. Caso contrário, então é necessário fazer $h = h + 1$ e retornar ao passo 3.

O procedimento pode ser repetido quantas vezes forem necessárias até que se obtenha a transitividade fraca, no entanto, deve-se utilizar esta metodologia com cautela. Um número de interações elevado indica uma elevada modificação da RPFAR inicialmente construída

pelo especialista. Em um caso extremo pode ocorrer uma completa substituição da matriz inicial pela matriz transitiva B . Assim, é interessante estabelecer previamente um número máximo de interações ou um nível aceitável de alterações na matriz inicial. Caso este comportamento não seja observado qualquer esforço de solução do problema pode ser em vão uma vez que a matriz excessivamente alterada na direção da transitividade pode perder todo o significado intrinsecamente desenhado pelo especialista deixando o resultado sem um sentido prático.

4.5 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados cinco formatos de representação das preferências: ordenação, valor da utilidade, relação de preferência multiplicativa, estimativa *fuzzy*, relação de preferência *fuzzy* (não recíprocas e com reciprocidade aditiva). Foram também descritos os caminhos para se converter as informações expressas nos diferentes formatos de preferência para a RPFNR, que está sendo utilizada neste trabalho como base para a construção do modelo $\langle X, R \rangle$. Em particular, foi descrita a técnica utilizada para processamento de relações de preferência *fuzzy* incompletas, expressas no formato RPFAR. Conforme foi discutido, embora esta técnica possa ser utilizada para tratar os casos em que os especialistas encontram dificuldades em comparar os pares de alternativas, a validade de seus resultados depende de que seja satisfeita a condição de que este especialista possua preferências perfeitamente consistentes, o que nem sempre é verdade.

5. MÉTODOS DE TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO BASEADOS EM MODELOS $\langle X, R \rangle$.

A literatura apresenta diferentes procedimentos que podem ser utilizados para gerar recomendações em situações de decisão. Muitos deles baseiam-se na exploração de modelos $\langle X, R \rangle$. No entanto, é importante destacar que cada procedimento baseia-se em diferentes suposições e possui suas próprias justificativas, sendo natural que gerem recomendações diferentes. Assim, é atribuída ao decisor a responsabilidade de selecionar o procedimento mais adequado para gerar as recomendações conforme suas necessidades e expectativas. A seguir são descritos dois métodos de decisão multicritério baseados em duas abordagens distintas para a escolha e ordenação das alternativas a partir da exploração das relações de preferência *fuzzy*. Um dos métodos baseia-se na construção da relação de preferência estrita *fuzzy* e do conjunto *fuzzy* de soluções não-dominadas (ORLOVSKY, 1978). O outro método baseia-se no cálculo do fluxo de rede do grafo correspondente à relação de preferência *fuzzy* (BRANS; VINCKE; MARESCHAL, 1986). Embora na literatura existam outros procedimentos de escolha baseados na exploração de relações de preferência *fuzzy*, estes dois certamente são os que se tornaram mais populares, tendo encontrado aplicação em diferentes áreas (EKEL, et al., 1997), (EKEL, et al., 1998) e (MACHARIS, et al., 2004).

5.1 Procedimento para escolha baseado na construção da relação de preferência estrita *fuzzy*

Como mencionado anteriormente, o procedimento de escolha de Orlovsky utiliza a relação de preferência estrita *fuzzy*, dada pela Equação (10), para escolher as alternativas (ORLOVSKY, 1978). Como $\mu_{P_i}(x_l, x_k)$ descreve o conjunto de todas as alternativas x_k que são estritamente dominadas por x_l (considerando apenas o i -ésimo critério), em que o complemento $\mu_{P_i^c}(x_l, x_k)$ corresponde ao conjunto de alternativas que não são dominadas por x_l . Assim, para encontrar o conjunto de alternativas do conjunto X que não são dominadas por nenhuma outra alternativa, é suficiente obter a interseção dos conjuntos *fuzzy* $\mu_{P_i^c}(x_l, x_k)$ para cada alternativa x_k pertencente a X , conforme mostra a seguinte expressão

$$\mu_{ND_i}(x_k) = \min_{x_l \in X} \{1 - \mu_{P_i}(x_l, x_k)\} = 1 - \max_{x_l \in X} \mu_{P_i}(x_l, x_k), \quad (28)$$

que corresponde na realidade ao conjunto *fuzzy* de soluções não-dominadas. Uma escolha natural para um problema monocritério baseado nesta abordagem deve ser o conjunto de alternativas (ORLOVSKY, 1978)

$$XND_i = \left\{ x_k^* \in X \mid \mu_{ND_i}(x_k^*) = \max_{x_k \in X} \mu_{ND_i}(x_k) \right\}. \quad (29)$$

É válido ressaltar que as alternativas que satisfazem $XND_i = \{x_k^* \in X \mid \mu_{ND_i}(x_k^*) = 1\}$ podem ser consideradas como a solução não *fuzzy* para o problema de decisão.

Se for necessário ordenar todas as alternativas pertencentes a X , a sequência dos subgrupos de alternativas não-dominadas pode ser construída de forma que $XND^1 \succ XND^2 \succ \dots \succ XND^t$, onde $\succ$ significa “melhor que”. XND^1 é computado considerando o grupo original X de alternativas (e a correspondente RPFNR). XND^2 é encontrado considerando as alternativas de X , exceto as alternativas pertencentes a XND^1 (o que requer eliminar as linhas e colunas correspondentes na RPFNR original) e assim por diante (KULSHRESHTHA; SHEKAR, 2000). A vantagem de se utilizar este procedimento para ordenar as alternativas está no fato de que ele permite obter a ordenação das alternativas coerente com a ordenação implícita na transitividade fraca da RPFNR original (KULSHRESHTHA; SHEKAR, 2000).

As expressões (10), (28) e (29) podem ser utilizadas para solucionar problemas tanto de escolha quanto de ordenação e não se restringem a problemas monocritério (EKEL, et al., 2008). A extensão do procedimento de escolha proposto por Orlovsky, para a consideração de vários critérios pode ser feita por meio de diferentes técnicas (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). Neste trabalho é considerada uma técnica que envolve a construção de uma relação de preferência *fuzzy* global a partir da agregação das relações de preferência *fuzzy* $R_1, R_2, \dots, R_q$. Esta agregação pode ser realizada utilizando-se diferentes operadores de agregação, como por exemplo o operador min, o operador OWA e o operador média aritmética ponderada (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). Neste trabalho optou-se por utilizar o operador média aritmética ponderada, conforme mostra a expressão a seguir:

$$\mu_G(x_k, x_l) = \sum_{i=1}^q w_i \mu_{R_i}(x_k, x_l), \forall x_k, x_l \in X, \quad (30)$$

onde os pesos $w_1, w_2, \dots, w_q$ satisfazem as condições $w_i \in [0,1]$ $\sum_{i=1}^q w_i = 1$.

O uso deste operador é adequado para as situações em que existe um caráter compensatório entre os critérios, no sentido de que uma má avaliação de uma alternativa segundo um critério pode ser compensado por uma boa avaliação segundo outro critério. É possível controlar o nível de compensação entre os critérios pelo ajuste adequado dos pesos. Na prática, os especialistas podem tentar definir diretamente os pesos dos critérios ou, alternativamente, podem fazer uso do método AHP para gerar os pesos indiretamente.

Tendo em mãos a relação de preferência não-estrita *fuzzy* G , as expressões (10), (28) e (29) podem ser diretamente aplicadas à matriz global gerando o conjunto *fuzzy* de alternativas não-dominadas que cumpre o papel do conjunto de Pareto (ORLOVSKY, 1978). Este mesmo procedimento para ordenar as alternativas em um problema de decisão monocritério pode ser utilizado para ordenar as alternativas em problemas multicritério.

Exemplo: Considerando a relação de preferência não-estrita *fuzzy* agregada

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0,8 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

que reflete as comparações entre as alternativas x_1 , x_2 e x_3 . As expressões (10) e (28), aplicadas em sequência geram a relação de preferência estrita

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

e o conjunto *fuzzy* de soluções não-dominadas

$$\mu_{ND}(x_k) = [0,2 \quad 0 \quad 1]. \quad (33)$$

A partir de (33) é possível selecionar a alternativa x_3 como a melhor solução e também como a solução não *fuzzy* para o problema de escolha em questão.

A segunda melhor alternativa pode ser obtida considerando a seguinte relação de preferência *fuzzy* reduzida (que é derivada da relação não-estrita apresentada em (31)):

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Novamente, por meio da aplicação das expressões (10) e (28) em sequência, é possível construir a seguinte relação de preferência estrita *fuzzy*:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,7 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

e, em seguida, o conjunto *fuzzy* de soluções não-dominadas

$$\mu_{ND}(x_k) = [0,3 \quad 1], \quad (36)$$

que permite selecionar a alternativa x_2 como a segunda melhor solução.

5.2 Procedimento de escolha baseado no cálculo do fluxo de rede

A análise de modelos $\langle X, R \rangle$ baseada no cálculo do fluxo de rede exige que sejam agregadas as relações de preferência segundo os diferentes critérios. Esta agregação normalmente é realizada por meio do operador de agregação média aritmética ponderada conforme mostra a expressão (30).

Considerando-se a representação da relação de preferência *fuzzy* global ou agregada G por meio de um grafo (dígrafo), tem-se que entre cada par de nós (x_k, x_l) sempre existem dois arcos, sendo um associado à $G(x_k, x_l)$ e o outro à $G(x_l, x_k)$, como mostra a Figura 5.

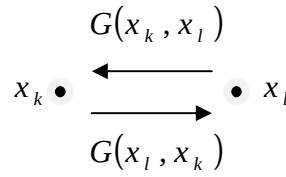


Figura 5: Arcos representando a relação de preferência global entre x_k e x_l .

Para este grafo, o fluxo de saída ϕ_{out} e o fluxo de entrada ϕ_{in} de cada nó são dados, respectivamente, por

$$\phi_{out}(x_k) = \sum_{\forall x_l \in X} G(x_k, x_l) \quad (37)$$

e

$$\phi_{in}(x_k) = \sum_{\forall x_l \in X} G(x_l, x_k). \quad (38)$$

O valor de $\phi_{out}(x_k)$ corresponde a uma medida da superioridade de x_k em relação às demais alternativas. Analogamente, o valor de $\phi_{in}(x_k)$ reflete uma medida da inferioridade de x_k em relação às demais alternativas. A diferença entre esse dois fluxos, ou seja, o fluxo de rede de cada nó $x_k \in X$, que é dado por

$$\phi(x_k) = \phi_{out}(x_k) - \phi_{in}(x_k), \quad (39)$$

reflete a superioridade efetiva de x_k em relação às demais alternativas. Assim, a ordenação final das alternativas é definida de tal modo que:

- a) se $\phi(x_k) > \phi(x_l)$, então x_k é preferido à x_l ;
- b) se $\phi(x_k) = \phi(x_l)$ então x_k é indiferente à x_l .

Exemplo: Dada a relação de preferência *fuzzy* agregada

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 \\ 1 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

aplicando-se as expressões (37), (38) e (39), é possível calcular o fluxo de saída, o fluxo de entrada e finalmente, o fluxo de rede para cada alternativa conforme mostra a QUADRO 3. A ordenação do fluxo de rede de cada alternativa

$$\phi(x_2) > \phi(x_3) > \phi(x_1) \quad (41)$$

permite ordená-las como:

$$x_2 \succ x_3 \succ x_1. \quad (42)$$

QUADRO 3
Representação do fluxo de entrada e saída de um dígrafo

Alternativas	Fluxo de Saída $\phi_{out}(x_k)$	Fluxo de Entrada $\phi_{in}(x_k)$	Fluxo de Rede $\phi(x_k)$
x_1	$0,5 + 0,4 = 0,9$	$0,4 + 1 = 1,4$	$0,9 + 1,4 = -0,5$
x_2	$1 + 0,7 = 1,7$	$0,4 + 0,7 = 1,1$	$1,7 - 1,1 = 0,6$
x_3	$1 + 0,7 = 1,7$	$0,5 + 0,7 = 1,2$	$1,7 - 1,2 = 0,5$

Fonte: Elaborado pelo autor

5.3 Considerações finais

Existe um grande número de métodos de tomada de decisão multicritério na literatura. Vários deles vêm sendo amplamente utilizados nas diferentes áreas. Os métodos baseados na exploração de modelos $\langle X, R \rangle$ apresentam algumas propriedades que os tornam adequados para a análise e solução de problemas de planejamento estratégico:

- a) eles permitem a modelagem e o tratamento das incertezas de diferentes naturezas de forma mais justificada;
- b) eles permitem aos especialistas expressarem suas preferências usando diferentes formatos;
- c) eles permitem modelar as relações entre critérios por meio dos diferentes operadores de agregação;
- d) a literatura inclui diferentes maneiras de estender tais métodos para o ambiente de decisão em grupo, o que permite convidar as diferentes gerências e especialistas dos diferentes departamentos para contribuírem com seus conhecimentos e experiência para as decisões estratégicas.

Este último tópico será estudado mais profundamente no próximo capítulo.

6. DECISÃO EM GRUPO BASEADA NA CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE MODELOS $\langle X, R \rangle$.

Neste capítulo, são apresentadas formas de se estender as técnicas baseadas em modelos $\langle X, R \rangle$ também para a decisão em grupo. Nesta extensão, os operadores de agregação aparecem como uma importante ferramenta que pode ser utilizada para agregar as matrizes de opiniões individuais de forma a preservar as características importantes destas opiniões também na matriz coletiva.

Ao longo deste capítulo, são apresentados também os índices de comparabilidade, concordância e consenso como ferramentas adicionais que possibilitam avaliar o nível de confiabilidade da opinião dos especialistas e a harmonia das mesmas. Estas informações servem ainda como um controle de qualidade das informações fornecidas pelos especialistas e são a base para o desenvolvimento dos dois procedimentos propostos neste trabalho: um esquema de consenso dinâmico, apropriado para guiar o processo decisório quando há necessidade de promover o consenso entre os especialistas, e um procedimento ditatorial voltado para a tomada de decisão hierárquica (ou seja, quando vários especialistas participam do julgamento das alternativas e apenas um especialista possui autoridade para tomar a decisão).

6.1 Agregação das relações de preferência *fuzzy*

Na literatura, é possível identificar vários métodos para agregar as opiniões individuais de forma a gerar recomendações para o problema de tomada de decisão levando-se em conta as contribuições dos vários especialistas. Por exemplo, em (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011) são estudados os seguintes modos de agregação:

- a) agregação das avaliações das alternativas feitas por cada especialista;
- b) agregação das relações de preferência *fuzzy* por critério construídas por cada especialista;
- c) agregação dos resultados obtidos por cada especialista (valores cardinais correspondentes às avaliações globais das alternativas).

Neste trabalho foi dada ênfase ao estudo da segunda abordagem listada acima, que permite fazer a extensão dos métodos de construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$ a partir da agregação das relações de preferência *fuzzy* para cada critério. Segundo esta abordagem, os especialistas podem avaliar as alternativas utilizando qualquer formato de preferência que possa ser convertido em relações de preferência *fuzzy* (HERRERA-VIEDMA, et al., 2002) e (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). As informações fornecidas são uniformizadas, através da conversão em relações de preferência *fuzzy*, e são agregadas na relação de preferência *fuzzy* coletiva para cada critério. Posteriormente, é possível aplicar um método de análise de modelos $\langle X, R \rangle$ para gerar a recomendação para o problema.

Diferentes operadores de agregação podem ser utilizados para gerar uma relação de preferência *fuzzy* coletiva (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). Os operadores geralmente utilizados para agregar as relações de preferência não-estritas *fuzzy* individuais em uma relação coletiva são: operador min, o operador média ordenada ponderada – em inglês, *ordered weighted average* (OWA) (Yager, 1988), o operador média aritmética ponderada – em inglês, *weighted arithmetic mean* (WAM) e o operador média geométrica ponderada – em inglês, *weighted geometric mean* (WGM). Um aspecto relevante para a escolha do operador de agregação envolve a consideração de determinados interesses do grupo (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011), como por exemplo: se o grupo concorda que o conteúdo da opinião é mais importante que o autor, pode ser útil utilizar o operador mínimo ou o operador OWA, nos quais os pesos não dependem da fonte, mas da posição de cada elemento na ordenação individual de todos os demais elementos. Por outro lado, se alguns especialistas precisam ser privilegiados (mais do que algumas opiniões), então é interessante utilizar os operadores média aritmética ponderada ou média geométrica ponderada.

A seguir são apresentadas as expressões para implementação dos operadores de agregação mais comuns:

a) operador média aritmética ponderada

O operador média aritmética ponderada permite que a opinião negativa (ou positiva) de um especialista sobre uma alternativa seja compensada pela opinião (positiva) ou negativa de outro especialista. O uso de pesos distintos permite controlar a taxa de compensação entre as opiniões dos diversos especialistas. Neste procedimento, a preferência coletiva $\mu_{R_{i,G}}(x_k, x_l)$ corresponde ao somatório das relações de preferência *fuzzy* individuais $\mu_{R_{i,y}}(x_k, x_l)$ onde $y = 1, 2, \dots, v$, conforme mostra a expressão abaixo:

$$\mu_{R_{i,G}}(x_k, x_l) = \sum_{y=1}^v w_y \mu_{R_{i,y}}(x_k, x_l), \quad (43)$$

onde os pesos que representam o coeficiente de importância da opinião de cada especialista satisfazem $0 \leq w_y \leq 1$, $y=1,2,\dots,v$ e $\sum_{y=1}^v w_y = 1$.

b) operador média geométrica ponderada

O operador média geométrica ponderada também possui um comportamento compensatório, embora este comportamento seja mais fraco do que o do operador WAM. O operador WGM pode ser implementado pela seguinte equação (PENEVA; POPCHEV, 2003):

$$\mu_{R_{i,G}}(x_k, x_l) = \prod_{y=1}^v (\mu_{R_{i,y}}(x_k, x_l))^{w_y}, \quad (44)$$

onde os pesos que representam o coeficiente de importância da opinião de cada especialista satisfazem $0 \leq w_y \leq 1$, $y=1,2,\dots,v$ e $\sum_{y=1}^v w_y = 1$.

c) operador *min*

O operador *min* possui um comportamento não compensatório, que conserva sempre a opinião mais pessimista (que corresponde aos julgamentos com níveis mais baixos de preferência) entre as opiniões de todos os especialistas. O operador WGM pode ser implementado pela seguinte equação (PENEVA; POPCHEV, 2003):

$$\mu_{R_{i,G}}(x_k, x_l) = \min_{1 \leq y \leq v} \mu_{R_{i,y}}(x_k, x_l). \quad (45)$$

d) operador média ordenada ponderada

O operador de agregação média ordenada ponderada obtém um resultado intermediário entre os operadores *min* e *max*, sendo caracterizado por um comportamento mais compensatório que o operador *min* e menos compensatório do que o operador *max*

através do ajuste apropriado dos pesos. Outro aspecto interessante do operador OWA está associado com o fato de que este permite especificar os pesos indiretamente, utilizando quantificadores linguísticos como “*maioria*”, “*minoría*”, “*pelo menos*”, etc. A aplicação do operador OWA para agregação das relações de preferência *fuzzy* é descrita pela seguinte equação (YAGER, 1995):

$$\mu_{R_{i,G}}(x_k, x_l) = OWA(\mu_{R_{i,1}}(x_k, x_l), \dots, \mu_{R_{i,v}}(x_k, x_l)) = \sum_{i=1}^v w_i b_i, \forall x_k, x_l \in X, \quad (46)$$

onde b_i representa o i -ésimo maior valor entre o conjunto $\mu_{R_{i,1}}(x_k, x_l), \dots, \mu_{R_{i,v}}(x_k, x_l)$ e os pesos satisfazem as condições $0 \leq w_y \leq 1, y=1,2,\dots,v$ e $\sum_{y=1}^v w_y = 1$.

6.2 Índice de comparabilidade

Para que a agregação das opiniões individuais resulte em uma matriz coletiva de boa qualidade é interessante avaliar se os julgamentos individuais que participarão desta agregação são confiáveis. Níveis altos de hesitação nos julgamentos individuais podem indicar especialistas despreparados para lidar com o assunto em questão e influenciar negativamente as conclusões obtidas através da análise da matriz coletiva.

Neste trabalho é proposto o uso de um índice de comparabilidade para avaliar a qualidade dos julgamentos individuais. Este índice corresponde ao complemento da relação de incomparabilidade *fuzzy* (veja expressão (9)) associado com a relação de preferência não-estrita *fuzzy* $R_{i,y}$, conforme a seguinte expressão:

$$\mu_{J_{i,y}^c}(x_k, x_l) = 1 - \mu_{J_{i,y}}(x_k, x_l) = \max\{\mu_{R_{i,y}}(x_k, x_l), \mu_{R_{i,y}}(x_l, x_k)\}. \quad (47)$$

Baseado na equação (47) pode-se definir o índice global de comparabilidade para cada par de alternativas como um conjunto *fuzzy* que corresponde à interseção de todas as relações de comparabilidade obtidas através do operador *min* como segue:

$$ICMP_i(x_k, x_l) = \min_{1 \leq y \leq v} \mu_{J_{i,y}^c}(x_k, x_l). \quad (48)$$

O índice de comparabilidade pode ser entendido como um índice de credibilidade e apresenta várias aplicações interessantes para o processo de tomada de decisão em grupo. Este índice permite identificar os pares de alternativas nos quais os especialistas encontraram maior dificuldade para apresentar um julgamento além de permitir separar os julgamentos que apresentaram níveis baixos de confiabilidade. O índice também permite identificar dois grupos de especialistas: os especialistas confiantes em seus próprios julgamentos e os especialistas que forneceram julgamentos com hesitação. Esta informação pode ser aproveitada para guiar o processo de discussão entre os especialistas promovendo os fluxos de informação entre os dois grupos de especialistas e será discutida com mais detalhes adiante.

6.3 Índices de concordância e discordância

Os índices de concordância e os índices de discordância medem, respectivamente, a similaridade e a diferença entre as opiniões dos especialistas. Eles podem ser utilizados, por exemplo, para definir subgrupos de especialistas com opiniões próximas ou para identificar o especialista cuja opinião é mais distante das opiniões dos demais especialistas e são muito úteis para a determinação do nível de consenso do grupo.

Na literatura, para estimar o nível de discordância entre as opiniões de dois especialistas tem sido utilizadas expressões que permitem comparar as relações de preferência não-estrita *fuzzy* fornecidas pelos especialistas. Tendo em vista que o nível de incomparabilidade não reflete níveis de preferência dos especialistas, mas o nível de confiabilidade da informação, quando são admitidos julgamentos com níveis não nulos de incomparabilidade, torna-se necessário avaliar a discordância considerando separadamente as relações de preferência e indiferença. Assim, uma forma simples de se estimar o nível de discordância entre as preferências de dois especialistas y e z , para o i -ésimo critério, expressa por meio de RPFNR, é por meio da seguinte expressão:

$$IDSC_i^{y,z}(x_k, x_l) = \frac{1}{2} \left(\frac{(|\mu_{P_{i,y}}(x_k, x_l) - \mu_{P_{i,z}}(x_k, x_l)| + |\mu_{P_{i,y}}(x_l, x_k) - \mu_{P_{i,z}}(x_l, x_k)|)}{2} + \right. \\ \left. \frac{(|\mu_{I_{i,y}}(x_k, x_l) - \mu_{I_{i,z}}(x_k, x_l)| + |\mu_{I_{i,y}}(x_l, x_k) - \mu_{I_{i,z}}(x_l, x_k)|)}{2} \right) \quad (49)$$

A concordância entre as preferências de dois especialistas pode ser estimada para cada par de alternativas por meio do seguinte índice:

$$ICNC_i^{y,z}(x_k, x_l) = 1 - IDSC_i^{y,z}(x_k, x_l). \quad (50)$$

A expressão a seguir permite calcular a concordância média por critério:

$$ICNCM_i^{y,z} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1 \wedge l > k}^n ICNC_i^{y,z}(x_k, x_l). \quad (51)$$

6.4 Índice de consenso

Consenso pode ser definido como uma concordância unânime entre todos os membros de um grupo envolvidos em determinada discussão. No entanto, essa definição é excessivamente rígida por permitir distinguir apenas dois estados (HERRERA, et al., 2000) a existência ou a inexistência de concordância unânime. Para casos práticos, é razoável utilizar a noção de índice de *consenso suave*, que permite avaliar no intervalo unitário níveis de concordância parcial dentro do grupo. O índice de consenso suave atinge seu valor máximo (1) quando ocorre o consenso, ou seja, a concordância é unânime; atinge seu valor mínimo (0) quando não há nenhuma concordância dentro do grupo; atinge níveis entre 0 e 1 quando os especialistas concordam apenas parcialmente. Assim, uma possível forma de se estimar o nível de consenso no grupo é agregando $ICNCM_i^{y,z}$, $y=1,2,...,v$, com o uso do operador média aritmética (KACPRZYK; FEDRIZZI; NURMI, 1992):

$$ICNS_i = \frac{1}{v} \sum_{y=1}^v ICNCM_i^{y,z}. \quad (52)$$

6.5 Esquema de consenso

Atingir o consenso das opiniões em um grupo, ou ao menos um nível aceitável deste, é um processo trabalhoso que envolve diversas rodadas de interação entre os participantes. É

dado o nome de Esquema de Consenso a este processo no qual são promovidas diversas rodadas de discussão e negociação ao final das quais se espera que os especialistas do grupo cheguem a uma conclusão unânime a partir da modificação das opiniões iniciais dos especialistas em prol dos interesses do grupo (MARTÍNEZ; MONTERO, 2007). Geralmente, este processo de discussão é interrompido quando qualquer das seguintes condições é atingida (EKEL, et al., 2009):

- a) um nível aceitável de consenso entre os especialistas é alcançado;
- b) o número máximo de interações previamente especificado é alcançado;
- c) o mesmo especialista permanece como o mais discordante após diversas interações subsequentes e o moderador não consegue persuadir o especialista a mudar ou rever sua opinião;
- d) em aplicações reais, o prazo determinado para discussão das alternativas é expirado e o processo é então interrompido.

No esquema de consenso aqui proposto, adicionalmente às condições acima, o moderador deve especificar o nível mínimo de comparabilidade aceitável (*mincomp*) e o nível mínimo de consenso (*mincons*). Durante o processo de discussão, é considerado natural que o índice de consenso possa atingir um nível aceitável antes que o índice global de comparabilidade o faça. Neste caso, não é obrigatório continuar o processo de discussão até que o índice de comparabilidade atinja um nível aceitável, uma vez que o par de comparações associado a um nível inaceitável de comparabilidade pode ser ignorado durante a construção da RPFNR coletiva.

Deve ser notado que a definição de um valor baixo para *mincons* pode causar a interrupção da discussão antes que um nível satisfatório de concordância seja alcançado. Por outro lado, um valor muito alto para *mincons* pode fazer com que a discussão se estenda desnecessariamente. De qualquer forma, quando são consideradas condições adicionais para interromper a discussão, como o número máximo de ciclos do processo de discussão (*maxcycles*), o parâmetro *mincons* pode ter um valor alto, como $0,8 \leq \text{mincons} \leq 1$. Desta forma, quando o grupo leva muito tempo para alcançar um nível aceitável de consenso, a condição de número máximo de interações garante uma melhor distribuição de tempo entre os critérios em estudo (considerando que o modelo de consenso proposto deve ser repetido para cada um dos critérios pertencentes a C).

Finalmente, na situação quando um especialista permanece como o membro menos concordante do grupo por vários ciclos subsequentes do processo de discussão, o parâmetro *maxinvitations* é utilizado para prevenir a polarização da discussão por um pequeno grupo de especialistas. O parâmetro *maxinvitations* armazena o número máximo de vezes que cada especialista pode ser convidado sucessivamente pelo moderador a rever ou justificar sua opinião (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011). É interessante que o valor do parâmetro *maxcycles* deve ser maior ou igual ao produto dos valores do parâmetro *maxinvitations* e o número de especialistas do grupo.

A seguir, o procedimento desenvolvido para guiar o processo de discussão é descrito. Este procedimento tem o objetivo de guiar a discussão em direção a um genuíno consenso promovendo um eficiente fluxo de informação entre os especialistas. Em resumo, um grau de concordância baixo serve como um critério importante para a seleção dos especialistas que devem rever seus julgamentos ou justificar sua opinião discordante aos demais especialistas. Além disso, o índice de comparabilidade é utilizado para identificar o subgrupo de especialistas que são capazes de fornecer informações com argumentos convincentes para esclarecer as dúvidas dos especialistas do subgrupo que possui dúvidas para expressar suas preferências. Este último grupo de especialistas é caracterizado pelo baixo nível de comparabilidade associado aos seus julgamentos. Finalmente, o índice de consenso, juntamente com o contador do número de interações, permite ao moderador identificar o momento certo de encerrar as discussões.

Na descrição do procedimento, é considerado que a variável *cycle* indica qual o número da iteração atual; a variável *elast* é o vetor utilizado para armazenar o índice do especialista requisitado a atualizar sua opinião em cada um dos ciclos.

6.5.1 Procedimento para esquema de consenso dinâmico

Para regular o fluxo de informação de maneira eficiente, o moderador deve determinar o nível mínimo de comparabilidade *mincomp* a ser considerado para dividir o grupo de especialistas *E* em dois subgrupos como descrito abaixo:

- a) $ELC_i(x_k, x_l)$ é o subgrupo formado pelos especialistas que atingiram um nível de comparabilidade menor do que *mincomp* para o par de comparações $R_i(x_k, x_l)$ e $R_i(x_l, x_k)$;

- b) $EHC_i(x_k, x_l)$ é o subgrupo formado pelos especialistas que atingiram um nível de comparabilidade maior do que $mincomp$ para o par de comparações $R_i(x_k, x_l)$ e $R_i(x_l, x_k)$ (obviamente, $ELC_i(x_k, x_l)$ é igual a $ELC_i(x_l, x_k)$ e $EHC_i(x_k, x_l)$ é igual a $EHC_i(x_l, x_k)$).

Desta forma, para cada par de alternativas $(x_k, x_l) \in X \times X$, é possível convidar um especialista pertencente ao subgrupo $EHC_i(x_k, x_l)$ para explicar ou justificar seu julgamento aos especialistas pertencentes ao subgrupo $ELC_i(x_k, x_l)$, em uma tentativa de ajudar os especialistas pertencentes ao último subgrupo a reduzir o nível de incomparabilidade de seus julgamentos por meio da troca de informações. Teoricamente, qualquer membro do subgrupo $EHC_i(x_k, x_l)$ possui argumentos razoáveis que sustentem suas avaliações de um dado par de alternativas (x_k, x_l) . Recomenda-se a seleção do especialista pertencente ao grupo $EHC_i(x_k, x_l)$ que tenha atingido o maior nível de comparabilidade em seu julgamento e que, ao mesmo tempo, tenha o julgamento mais discordante do grupo (esta escolha visa aumentar as chances de distribuir informações relevantes que possam ser conhecidas pelo especialista discordante, mas desconhecidas pela maioria do grupo).

O índice de comparabilidade também pode ser utilizado para determinar quais dos julgamentos devem ser negligenciados na construção da relação de preferência *fuzzy* coletiva. No momento da construção da RPFNR coletiva, o par de comparações associado a um nível inaceitável de comparabilidade (o que deve ser determinado pelo moderador) pode ser ignorado. No caso da utilização de (45) e (46) os operadores de agregação min e OWA devem ser aplicados a cada par (x_k, x_l) de alternativas sem considerar os pares de julgamentos $R_{i,y}(x_k, x_l)$ e $R_{i,y}(x_l, x_k)$ para os quais $\mu_{J_{i,y}}(x_k, x_l)$ são menores do que o nível mínimo previamente determinado pelo moderador. Nos casos da agregação da opinião coletiva por (43) e (44), respectivamente a agregação por WAM e WGM, o efeito de comparações com valores inaceitáveis pode ser neutralizado ajustando para zero o valor do peso w_y associado com o julgamento $R_{i,y}(x_k, x_l)$ que possui um nível insatisfatório de comparabilidade. De forma a manter o somatório dos pesos $\sum_{y=1}^v w_y = 1$, os demais pesos podem ser aumentados de forma homogênea.

Abaixo é descrita a metodologia que está sendo proposta:

Passo 1: definir $cycle = 0$.

Passo 2: coletar as relações de preferência *fuzzy* de cada especialista e definir a variável *cycles* como $cycle = cycle + 1$.

Passo 3: calcular o nível de incomparabilidade para cada especialista com o uso de (9) e o índice global de comparabilidade através de (48).

Passo 4: obter a relação de preferência *fuzzy* coletiva temporária com o uso de um operador de agregação previamente especificado pelo grupo.

Passo 5: verificar se a relação de preferência *fuzzy* coletiva temporária é consistente. Se a transitividade fraca não for satisfeita, então o método proposto por (MA, et al., 2006) e descrito no Capítulo 4 pode ser utilizado para sugerir ao moderador como é possível reparar a matriz coletiva temporária de relações de preferência *fuzzy* até que a transitividade fraca seja satisfeita.

Passo 6: calcular os índices de concordância através das fórmulas (50) e (51).

Passo 7: calcular o índice de consenso que é dado por (52) substituindo z por G de forma que o desvio da opinião dos especialistas seja calculado em relação a matriz coletiva temporária.

Passo 8: se $cycle$ atingiu um valor igual a $maxcycle$, então prosseguir diretamente para o Passo 15. Se o nível atual de consenso é menor do que $mincons$ e o nível atual de comparabilidade global é menor do que $mincomp$ para alguma das alternativas, então prosseguir para o Passo 9. Se o nível atual de consenso é menor do que $mincons$, mas o nível atual da comparabilidade global é maior do que $mincomp$, então prosseguir diretamente para o Passo 12. Se o nível atual de consenso é maior do que $mincons$, então prosseguir para o Passo 15.

Passo 9: para cada par de alternativas $(x_k, x_l) \in X \times X$, dividir o grupo dos especialistas E nos subgrupos $ELC(x_k, x_l)$ e $EHC(x_k, x_l)$.

Passo 10: se o grupo $EHC(x_k, x_l)$ estiver vazio (o que quer dizer que nenhum especialista pode comparar x_k e x_l com um nível aceitável de confiabilidade), então o moderador deve verificar se o valor de $mincomp$ foi definido com um valor excessivamente alto. Se o valor de $mincomp$ for considerado justo, então o grupo de especialistas deve ponderar se as alternativas x_k e x_l devem ser redefinidas ou melhor caracterizadas ou se a

definição dos critérios deve ser revista. Se a definição de qualquer alternativa ou critério for modificada, então o processo deve ser reiniciado. Caso contrário, prosseguir para o Passo 11.

Passo 11: para cada par de alternativas $(x_k, x_l) \in X \times X$ com um nível global de comparabilidade menor do que *mincomp*, convidar um especialista pertencente ao subgrupo $EHC(x_k, x_l)$ para explicar ou justificar seu julgamento aos especialistas pertencentes ao subgrupo $ELC(x_k, x_l)$, em uma tentativa de ajudar este último a reduzir o nível de incomparabilidade de seus julgamentos. Como discutido acima, o especialista selecionado deve ser o membro de grupo $EHC(x_k, x_l)$ que obtiver o maior nível de comparabilidade para o par de comparações associado com (x_k, x_l) .

Passo 12: identificar o especialista menos concordante e verificar no vetor *elast*, se este especialista tem sido o especialista menos concordante pelos últimos *maxinvitations* ciclos. Se a afirmativa for verdadeira, repetir o Passo 12 para o segundo especialista menos concordante e assim por diante (de forma a evitar que o mesmo especialista seja excessivamente requisitado).

Passo 13: armazenar o índice do especialista menos concordante identificado no Passo 12 na variável *elast*.

Passo 14: convidar o especialista cujo indicador foi armazenado na variável *elast* para rever seu julgamento. Se o especialista mantiver sua preferência, então este deve ser convidado a esclarecer sua opinião aos demais especialistas. Em seguida, prosseguir para o Passo 2 e dar uma nova oportunidade a cada especialista para modificar suas preferências. Os especialistas devem ter a liberdade de mudar ou não sua opinião (o consenso cognitivo não pode ser forçado).

Passo 15: terminar o processo de discussão. Neste momento os dados de saída do processo é a matriz de preferências coletiva obtida no Passo 5.

O procedimento pode ser sintetizado no seguinte fluxograma da Figura 6:

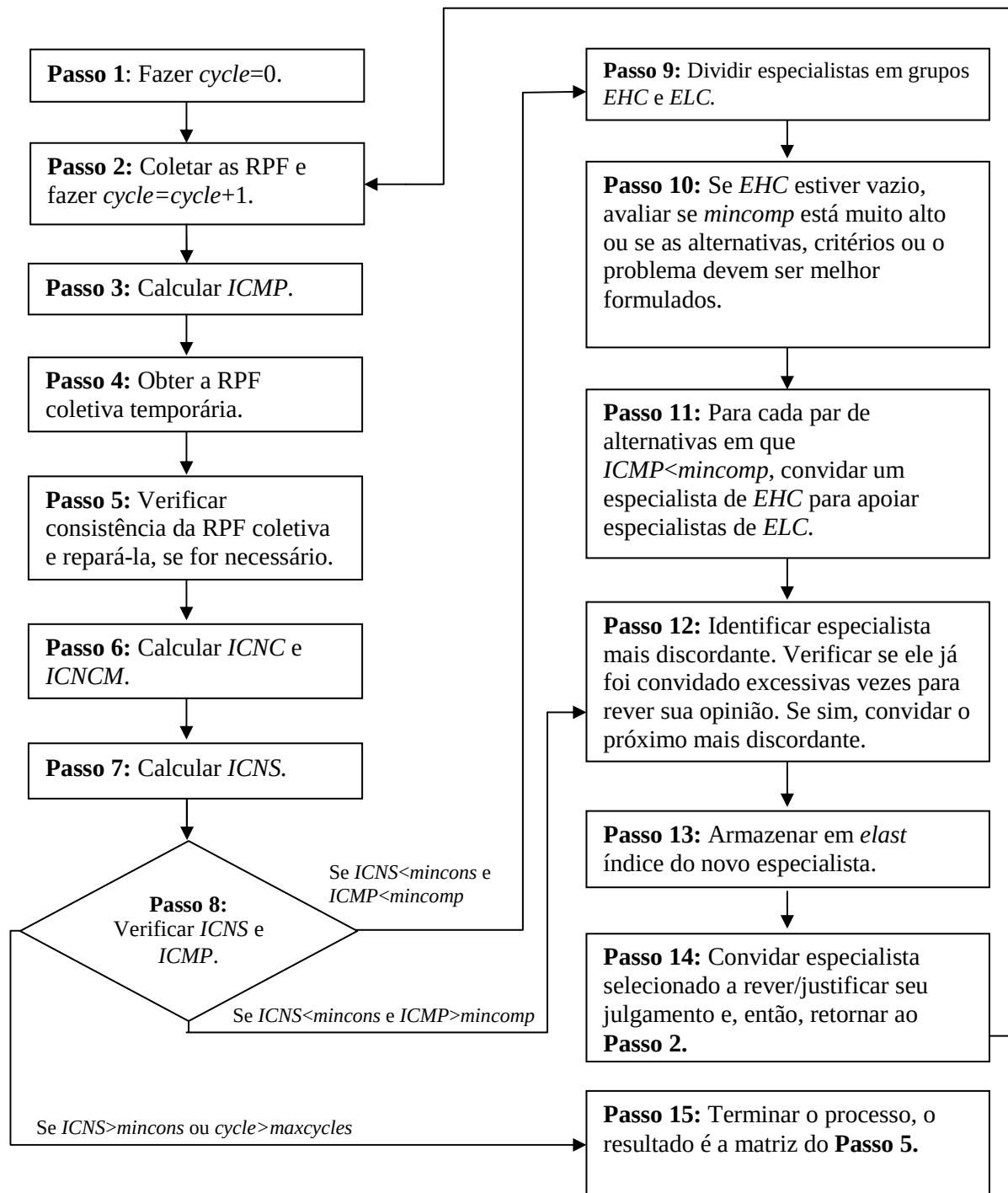


Figura 6: Procedimento para consenso dinâmico
 Fonte: Elaborada pelo autor

É interessante notar que, neste procedimento, uma vez que um nível satisfatório de consenso é alcançado, a discussão é encerrada, independentemente de qual foi o nível de comparabilidade obtido. Além do mais, como indicado acima, o consenso é obtido à medida

que os especialistas modificarem sua opinião inicial na direção da opinião predominante. Assim, deve ser considerado natural se um nível satisfatório de consenso não é alcançado no fim do processo de discussão. É importante indicar que, neste caso, é possível utilizar, como modelo alternativo de arbitragem para definir a decisão coletiva, procedimentos de agregação como os descritos em (BEN-ARIEH; CHEN, 2006) e (KACPRZYK; FEDRIZZI; NURMI, 1992).

A literatura apresenta outros modelos de consenso que, de forma similar ao modelo de consenso proposto aqui, são baseados no uso de um índice de concordância para identificar o especialista que deve rever ou atualizar sua opinião e um índice de consenso para determinar quando o processo de discussão deve terminar (HERRERA-VIEDMA, et al., 2002) e (HERRERA-VIEDMA, et al., 2005). Uma diferença essencial entre a abordagem proposta e as abordagens existentes, está associada ao uso do índice de comparabilidade. Na prática, o índice de comparabilidade pode ser utilizado pelo moderador para promover o fluxo de informação no grupo de forma mais eficiente, através da diferenciação dos membros do grupo que precisam de mais informações dos membros que são capazes de fornecer estas informações. O fluxo de informações pode ser implementado de forma muito mais dinâmica se o modelo de consenso proposto neste trabalho for implementado computacionalmente e múltiplos canais de comunicação forem estabelecidos simultaneamente entre os diferentes pares de especialistas (por exemplo, através de mensagens de email ou sistemas de troca e compartilhamento de arquivos).

Além disso, outro benefício do índice de comparabilidade está associado com a possibilidade de diferenciar julgamentos duvidosos e tratá-los de forma adequada para sua inserção na análise multicritério. De fato, os julgamentos com níveis de comparabilidade menores do que *mincomp* podem ser excluídos (ou não) da análise multicritério, conforme o desejo do decisor (ou dos decisores).

6.6 Procedimento para agregação de preferências individuais

Esta classe de problemas abrange as situações de decisão em que vários especialistas são convidados para atuarem como consultores, expressando suas opiniões, mas apenas uma pessoa tem direito e autoridade para tomar a decisão. Levando-se em conta que pode haver discordâncias entre as opiniões dos especialistas, geralmente cabe ao decisor arbitrar pesos

que alterem automaticamente a participação dos especialistas ou a importância de cada julgamento.

Aqui está sendo proposta uma metodologia para apoiar o decisor nesse tipo de situação. Assim como a metodologia proposta para a tomada de decisão em grupo no ambiente democrático, aqui também são explorados os índices de incomparabilidade (9) e discordância (49) juntamente com um índice de consenso, para aumentar a racionalidade da etapa de processamento das preferências individuais e formação da preferência coletiva. Esta metodologia pode ser utilizada de forma complementar à metodologia anterior no caso em que ao final das interações entre os especialistas não for possível obter um nível de consenso satisfatório, sendo por isso necessário arbitrar formas de se obter este consenso.

Assim, dado o conjunto $L_{i,y}$ de julgamentos com nível aceitável de incomparabilidade (este nível deve ser definido empiricamente pelo decisor)

$$L_{i,y} = \{(x_k, x_l) \in X \times X \mid \mu_{J_{i,y}}(x_k, x_l) < J_{\max}\}, \quad (53)$$

cujo número de elementos é dado por $|L_{i,y}|$, a seguinte expressão pode ser usada para estimar o nível médio de discordância entre as relações de preferência $R_{i,y}$ e $R_{i,z}$, desconsiderando sempre os julgamentos com alto nível de incomparabilidade:

$$IDSCM_i^{y,z} = \frac{2}{|T_{i,y}|(|T_{i,y}| - 1)} \sum_{\forall (x_k, x_l) \in T_{i,y} \mid l > k} IDSC_i^{y,z}(x_k, x_l). \quad (54)$$

O nível médio de discordância do especialista e_y em relação ao grupo pode ser calculado como a média aritmética das discordâncias entre as preferências dos especialistas como mostra a equação a seguir:

$$IDSCMe_i^y = \frac{1}{v} \sum_{z=1, z \neq y}^v IDSCM_i^{y,z}. \quad (55)$$

Quando se tem em mãos a relação de preferência *fuzzy* coletiva $R_{i,G}$, as expressões (53), (54) e (55) podem ser utilizadas para comparar $R_{i,G}$ e as relações de preferência

fornecidas por cada especialista $R_{i,y}$, $y=1,2,\dots,v$. A expressão abaixo permite calcular para cada especialista o nível médio de discordância em relação à relação de preferência coletiva:

$$IDM_i^{y,G} = \frac{2}{|T_{i,y}| (|T_{i,y}| - 1)} \sum_{\forall (x_k, x_l) \in T_{i,y} | l > k} IDSC_i^{y,G}(x_k, x_l). \quad (56)$$

O nível médio de concordância entre as relações de preferência dos especialistas e a relação de preferência coletiva é calculado por meio do índice de consenso sobre a relação de preferência *fuzzy* coletiva $R_{i,G}$, conforme mostra a equação abaixo:

$$Cons_i = 1 - \left(\frac{1}{v} \sum_{y=1}^v IDM_i^{y,G} \right). \quad (57)$$

6.6.1 Procedimento para solução de problemas de tomada de decisão com estrutura hierárquica

Tendo em mãos o nível de discordância e o nível de incomparabilidade de cada julgamento $R_{i,y}(x_k, x_l)$ feito pelo y -ésimo especialista, o decisor pode analisar a informação disponível e determinar de forma racional o nível de influência da opinião de cada especialista na formação das preferências coletivas. Idealmente, seria desejável alcançar um consenso nos julgamentos do grupo, uma consistência perfeita nas relações de preferência *fuzzy* individuais e coletivas, e um nível nulo de incomparabilidade em todos os julgamentos. No entanto, tendo em vista que na prática nem sempre é possível alcançar este ideal, é necessário que o decisor determine:

- a) quais relações de preferência *fuzzy* tem um nível aceitável de consistência;
- b) quais relações de preferência *fuzzy* tem um nível aceitável de incomparabilidade;
- c) os pesos associados a cada especialista, baseados no conhecimento e experiência do especialista acerca do critério de decisão por ele considerado.
- d) o operador de agregação para construir relações de preferência *fuzzy*. Conforme foi mencionado anteriormente, existem diferentes operadores que podem ser

usados para construir relações de preferência *fuzzy* coletivas e, com isso, estender métodos de análise multicritério para a consideração de opiniões dadas por diferentes especialistas (PEDRYCZ; EKEL; PARREIRAS, 2011).

Para apoiar o decisor nessas situações de escolha que estão descritas acima, propõe-se o procedimento a seguir, que deve ser aplicado para cada critério separadamente. Este procedimento permite ao decisor tratar os julgamentos com nível não nulo de incomparabilidade e os julgamentos discordantes, supondo que cada especialista foi capaz de fornecer relações de preferência *fuzzy* que satisfazem a preferência fraca. Esta suposição não é considerada excessivamente restritiva, à medida que forem oferecidas aos especialistas ferramentas que os auxiliem na construção e correção dessas matrizes, como a que é proposta em (MA, et al., 2006).

Passo 1: calcular a incomparabilidade para cada par de alternativas a partir da matriz fornecida por cada especialista através de (9) e selecionar apenas os julgamentos com um nível de incomparabilidade superior ao nível máximo aceitável J_{max} determinado pelo decisor. Para simplificar a tarefa do decisor, é sugerido o uso da escala de incomparabilidade exibida na QUADRO 4. Assim, por exemplo, se o decisor quiser levar em conta somente os julgamentos com baixo nível de incomparabilidade, sendo na pior das hipóteses classificados como levemente incomparáveis, então deve utilizar $J_{max}=0,1$.

QUADRO 4
Escala de incomparabilidade

0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0
Incomparável	Muito incomparável	Moderadamente Incomparável	Pouco incomparável	Levemente incomparável	Comparável

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2: determinar o peso $w_{i,y}$, $y=1,2,\dots,v$ a ser associado à opinião de cada especialista. Aqui é proposto o cálculo do peso levando-se em conta os seguintes componentes:

- a) $\lambda_{i,y}$: componente associado à competência, experiência e conhecimento do especialista a ser determinado subjetivamente pelo decisor. Conforme sugerido por (SAATY, 1991), os pesos das contribuições de cada especialista podem ser

avaliados por meio do AHP, levando-se em conta o conhecimento de cada especialista, sua capacidade de persuasão, etc.

- b) $IDSCM_i^{y,z}$: componente correspondente ao nível médio de discordância entre as relações de preferência $R_{i,y}$ e $R_{i,z}$, dada pela equação (54).

O peso $w_{i,y}$, $y=1,2,\dots,v$ a ser associado à cada julgamento de cada especialista penaliza a discordância em relação à opinião emitida por especialistas cuja contribuição tem maior peso $\lambda_{i,y}$, conforme mostra a seguinte equação (esta abordagem para o cálculo de pesos é similar a abordagem proposta por (HSU; CHEN, 1996) para a agregação de estimativas fuzzy):

$$w_{i,y}(x_k, x_l) = \frac{1}{(v-1)} \sum_{z=1, z \neq y}^v \lambda_{i,z} (1 - IDSC_i^{y,z}(x_k, x_l)). \quad (58)$$

Neste passo é importante notar que caso apenas um especialista forneça julgamento com nível aceitável de incomparabilidade a fórmula não pode ser aplicada e o peso do especialista deve permanecer o mesmo peso inicial.

Passo 3: aplicar o operador de agregação média aritmética ponderada utilizando os pesos calculados por meio da expressão (58), conforme mostra a expressão abaixo:

$$R_{i,G}(x_k, x_l) = \sum_{y=1}^v \frac{w_{i,y}(x_k, x_l)}{W_i(x_k, x_l)} R_{i,y}(x_k, x_l), \quad (59)$$

sendo que $W_i(x_k, x_l) = \sum_{y=1}^v w_{i,y}(x_k, x_l)$.

Passo 4: avaliar se a relação de preferência fuzzy $R_{i,G}$ satisfaz a transitividade fraca. Caso não satisfaça, o decisor deve fazer as devidas correções, utilizando para isso ferramentas como aquelas apresentadas no Capítulo 4. Se o método de análise multicritério a ser utilizado baseia-se no procedimento de escolha proposto por Orlovsky, a transitividade fraca da matriz coletiva deve ser satisfeita para que o método comporte-se segundo certas propriedades racionais (SENGUPTA, 1998).

Passo 5: calcular índice de consenso através de (57). Aqui o índice de consenso é utilizado para a validação do resultado. Se o valor não estiver satisfatório, o decisor pode

ainda ajustar os pesos de modo a reduzir a contribuição das relações de preferência mais discordantes.

6.7 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados dois procedimentos para a tomada de decisão multicritério em grupo: um esquema de consenso dinâmico e um procedimento para a construção da relação de preferência *fuzzy* coletiva, levando-se em conta índices de concordância e comparabilidade. Embora cada metodologia tenha propriedades que os tornam mais apropriados para um tipo específico de ambiente de decisão (o esquema de consenso deve ser aplicado para a decisão em ambiente cooperativo com consenso; o procedimento para agregação de preferências individuais possui mecanismos ditatoriais que podem ser explorados pelo decisor para a tomada de decisão em ambiente com estrutura hierárquica), não existe nada que proíba o uso das duas metodologias de forma complementar para superar as discordâncias remanescentes, após processo de discussão.

No capítulo seguinte, estas duas metodologias são aplicadas na solução de problemas de decisão multicritério associados com o processo de planejamento estratégico em empresas de energia elétrica.

7. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo, os procedimentos para tomada de decisão multicritério em grupo que estão sendo propostos neste trabalho são utilizados para solucionar problemas de decisão associados ao planejamento estratégico em empresas de energia elétrica. Dois tipos de problema são abordados:

- a) decisão multicritério em grupo no ambiente com estrutura democrática, em que os especialistas são convidados a discutir suas preferências até chegar a um consenso;
- b) decisão multicritério em grupo, no ambiente com estrutura hierárquica, em que o decisor deseja considerar as preferências do grupo de especialistas para formar a sua preferência.

7.1 Decisão multicritério em ambiente de grupo com consenso

Aqui é aplicado um modelo de consenso que utiliza um índice de comparabilidade, um índice de concordância e um índice de consenso para regular as interações entre os especialistas que participam do processo de tomada de decisão em grupo consensual. É importante indicar que o procedimento de consenso dinâmico proposto admite a implementação computacional das funções de supervisão que usualmente são delegadas a moderadores humanos. Neste modelo de consenso, é permitido que cada um dos decisores realize os julgamentos dos pares de alternativas com um nível não nulo de incomparabilidade.

7.1.1 Exemplo de aplicação

Em uma empresa de energia elétrica, os diretores $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ devem analisar e discutir as possíveis estratégias para se atingir o crescimento desejado segundo três critérios $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ elaborados segundo a visão e a missão da empresa. Após estudo preliminar foram propostas quatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de iniciativas estratégicas para solucionar o problema e atingir o objetivo fundamental. Neste cenário, o problema a ser

solucionado pelos especialistas é encontrar qual a melhor entre as alternativas e a ordem de execução das demais, uma vez que existe uma restrição orçamentária que impossibilita a implementação de todas as iniciativas ao mesmo tempo. As quatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ em estudo são:

Projeto x_1 : investir na compra de energia de outras empresas geradoras;

Projeto x_2 : investir em tecnologia para gerenciamento de carga;

Projeto x_3 : investir na construção de novos sistemas de transmissão e de distribuição;

Projeto x_4 : investir na ampliação de usinas existentes.

Os projetos deverão ser avaliados segundo os três critérios $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ seguintes:

c_1) perspectiva financeira;

c_2) visão do cliente;

c_3) inovação tecnológica.

Na execução do modelo de consenso proposto, para o critério Perspectiva financeira, o moderador determina que o nível mínimo de comparabilidade a ser respeitado é $mincomp=0,9$; o nível de consenso a ser obtido pelo grupo é $mincons=0,85$; o número máximo de interações $maxcycles=12$; o número máximo de vezes que cada especialista pode sucessivamente ser convidado pelo moderador a rever ou justificar sua opinião é $maxinvitations=2$. O grupo concorda em utilizar o operador WAM para agregação das relações de preferência individuais e em definir com valores iguais os pesos $w_y, y=1, 2, \dots, v$, que refletem a importância da opinião de cada especialista, uma vez que o grupo decidiu que nenhum dos especialistas envolvidos deve possuir poder diferenciado para influenciar na decisão coletiva. A seguir é descrita a execução dos passos correspondentes ao esquema de consenso dinâmico:

Passo 1: é inicializada a variável $cycle=0$;

Passo 2: incrementa-se a variável $cycle=1$ e as relações de preferência *fuzzy* não recíprocas fornecidas pelos especialistas para o primeiro critério são definidas como:

$$\begin{aligned}
R_{1,1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0,6 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}, & R_{1,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0,75 & 0,4 & 1 \\ 0,85 & 1 & 1 & 1 \\ 0,7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,5 & 0,2 & 1 \end{bmatrix}, \\
R_{1,3} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0,7 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}, & R_{1,4} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,8 \\ 0 & 1 & 1 & 0,2 \\ 0 & 1 & 1 & 0,35 \\ 0,4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & R_{1,5} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0,6 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{60}$$

Passo 3: aplicando-se a expressão (47), são encontradas as seguintes relações de incomparabilidade:

$$\begin{aligned}
J_{1,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,4 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}, & J_{1,2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0,15 & 0,3 & 0 \\ 0,15 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
J_{1,3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}, & J_{1,4} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
J_{1,5} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Conforme expressão (48), o índice global de comparabilidade é dado por:

$$ICMP_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,85 & 0,7 & 0,8 \\ 0,85 & 1 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 1 & 1 & 0,6 \\ 0,8 & 0,7 & 0,6 & 1 \end{bmatrix}. \tag{62}$$

Passo 4: o cálculo da matriz coletiva temporária de relações de preferência não-estrita fuzzy é feito utilizando-se a fórmula (43) (operador WAM), que produz o seguinte resultado:

$$R_{1,G} = \begin{bmatrix} 1 & 0,95 & 0,88 & 0,96 \\ 0,17 & 1 & 1 & 0,24 \\ 0,14 & 1 & 1 & 0,27 \\ 0,88 & 0,76 & 0,64 & 1 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Passo 5: como a relação de preferência *fuzzy* coletiva temporária satisfaz a transitividade fraca, não é necessário modificá-la.

Passo 6: o nível de concordância para cada especialista e o nível médio de concordância para o grupo são calculadas com o uso das expressões (50) e (51), respectivamente, como mostra a TABELA 1.

TABELA 1
Nível de concordância de cada especialista encontrado no primeiro ciclo.

	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$	$y=5$
$ICNC_1^{y,G}(x_1, x_2)$	0,86	0,49	0,86	0,86	0,86
$ICNC_1^{y,G}(x_1, x_3)$	0,86	0,61	0,86	0,86	0,86
$ICNC_1^{y,G}(x_1, x_4)$	0,92	0,92	0,92	0,68	0,92
$ICNC_1^{y,G}(x_2, x_3)$	1	1	1	1	1
$ICNC_1^{y,G}(x_2, x_4)$	0,86	0,61	0,83	0,91	0,76
$ICNC_1^{y,G}(x_3, x_4)$	0,78	0,67	0,78	0,89	0,85
$ICNCM_1^{y,G}$	0,88	0,72	0,88	0,87	0,87

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 7: o índice de consenso estimado por (52) foi $ICNS_1 = 0,84$.

Passo 8: como a variável *cycles* ainda possui valor inferior a variável *maxcycles*; $ICNS_1$ é inferior a *mincons* e algumas das avaliações $ELC(x_k, x_l)$ não estão vazias, o processo prossegue para o passo 9;

Passo 9: o grupo é dividido em dois subgrupos coerentemente com as relações de comparabilidade apresentadas na

TABELA 2
Nível de comparabilidade para cada especialista no primeiro ciclo

. A QUADRO 5 apresenta os subgrupos $ELC(x_k, x_l)$ e $EHC(x_k, x_l)$.

TABELA 2
Nível de comparabilidade para cada especialista no primeiro ciclo

	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$	$y=5$	$ICMP_1(x_k, x_l)$
$\mu_{J_{1,y}^c}(x_1, x_2)$	1	0,85	1	1	1	0,85
$\mu_{J_{1,y}^c}(x_1, x_3)$	1	0,7	1	1	1	0,7
$\mu_{J_{1,y}^c}(x_1, x_4)$	1	1	1	0,8	1	0,8
$\mu_{J_{1,y}^c}(x_2, x_3)$	1	1	1	1	1	1
$\mu_{J_{1,y}^c}(x_2, x_4)$	0,6	1	0,7	1	1	0,6
$\mu_{J_{1,y}^c}(x_3, x_4)$	0,7	1	0,7	1	0,6	0,6

Fonte: Elaborado pelo autor

QUADRO 5
Subgrupos $ELC(x_k, x_l)$ e $EHC(x_k, x_l)$ de especialistas no primeiro ciclo de interação

	$ELC(x_k, x_l)$	$EHC(x_k, x_l)$
(x_1, x_2)	$\{e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_4, e_5\}$
(x_1, x_3)	$\{e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_4, e_5\}$
(x_1, x_4)	$\{e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$
(x_2, x_3)	$\emptyset$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
(x_2, x_4)	$\{e_1, e_3\}$	$\{e_2, e_4, e_5\}$
(x_3, x_4)	$\{e_1, e_3, e_5\}$	$\{e_2, e_4\}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 10: como pode ser visto na QUADRO 5, a maioria dos conjuntos $ELC(x_k, x_l)$ possuem algum elemento. Assim, deve-se prosseguir para o Passo 11.

Passo 11: alguns especialistas pertencentes ao grupo $EHC(x_k, x_l)$ são convidados a justificar seus julgamentos aos especialistas pertencentes ao grupo $ELC(x_k, x_l)$, conforme está indicado na

QUADRO 6

Fluxo de informação entre os subgrupos $EHC(x_k, x_l)$ para o subgrupo $ELC(x_k, x_l)$ conforme dados obtidos no primeiro ciclo

. Pode-se notar que os especialistas do subgrupo $EHC(x_k, x_l)$ foram selecionados levando em conta, primeiramente, o alto nível de comparabilidade (ver

TABELA 2
Nível de comparabilidade para cada especialista no primeiro ciclo

) e, em segunda instância, seu baixo nível de concordância (ver TABELA 1).

QUADRO 6

Fluxo de informação entre os subgrupos $EHC(x_k, x_l)$ para o subgrupo $ELC(x_k, x_l)$ conforme dados obtidos no primeiro ciclo

	Especialistas que precisam de informações adicionais	Especialistas fornecendo informações
(x_1, x_2)	$\{e_2\}$	e_4
(x_1, x_3)	$\{e_2\}$	e_3
(x_1, x_4)	$\{e_4\}$	e_3
(x_2, x_3)	$\emptyset$	$\emptyset$
(x_2, x_4)	$\{e_1, e_3\}$	e_2
(x_3, x_4)	$\{e_1, e_3, e_5\}$	e_2

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 12: o especialista e_2 é identificado como o especialista menos concordante do grupo (TABELA 1).

Passo 13: o rótulo de e_2 é armazenado no vetor $elast$ (1).

Passo 14: e_2 é convidado a rever os pares de comparações associados com (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_2, x_4) e (x_3, x_4) (estas comparações levaram o nível médio de concordância de e_2 a ser menor do que $mincons$ (veja TABELA 1) e, como consequência, levaram o nível de consenso do grupo a ser menor do que $mincons$).

Uma vez que as opiniões foram revistas o ciclo recomeça.

Passo 2 (segundo ciclo): observando as RPFNRs exibidas a seguir, é possível verificar uma redução do nível de incomparabilidade dos novos julgamentos dos especialistas e algumas mudanças nos julgamentos de e_2 para os pares de alternativas (x_1, x_2) e (x_1, x_3) :

$$\begin{aligned}
 R_{1,1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & R_{1,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,65 & 0,2 & 1 \end{bmatrix}, & R_{1,3} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 0,35 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 R_{1,4} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0,2 \\ 0 & 1 & 1 & 0,35 \\ 0,8 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & R_{1,5} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{64}$$

Passo 3 (segundo ciclo): somente o especialista e_5 apresenta julgamentos com nível não nulo de incomparabilidade, conforme mostra a relação de incomparabilidade

$$J_{1,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (65)$$

o que resultou em um nível global de comparabilidade mais baixo para as alternativas x_3 e x_4 , conforme mostra o índice $ICMP_1$:

$$ICMP_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0,7 \\ 1 & 1 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Passo 4 (segundo ciclo): aplicando-se a expressão (43), obtém-se a seguinte matriz coletiva temporária de relações de preferência não-estrita *fuzzy* é obtida:

$$R_{1,G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,16 & 1 & 1 & 0,34 \\ 0,16 & 1 & 1 & 0,34 \\ 0,96 & 0,93 & 0,78 & 1 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Passo 5 (segundo ciclo): é confirmado que (67) satisfaz a transitividade fraca.

Passo 6 (segundo ciclo): o nível de concordância para cada especialista e o nível médio de concordância para o grupo é atualizado conforme mostra a TABELA .

TABELA 3
Nível de concordância de cada especialista no segundo ciclo

	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$	$y=5$
$ICNC_1^{y,G}(x_1, x_2)$	0,88	0,52	0,88	0,88	0,88
$ICNC_1^{y,G}(x_1, x_3)$	0,88	0,52	0,88	0,88	0,88
$ICNC_1^{y,G}(x_1, x_4)$	0,97	0,97	0,97	0,88	0,97
$ICNC_1^{y,G}(x_2, x_3)$	1	1	1	1	1
$ICNC_1^{y,G}(x_2, x_4)$	0,73	0,61	0,90	0,88	0,73
$ICNC_1^{y,G}(x_3, x_4)$	0,69	0,62	0,94	0,94	0,77
$ICNCM_1^{y,G}$	0,86	0,71	0,93	0,91	0,87

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 7 (segundo ciclo): o índice de consenso é atualizado para $ICNS_1 = 0,86$.

Passo 8 (segundo ciclo): o nível de consenso é considerado satisfatório. Por este motivo, o processo segue para o Passo 15 e é finalizado.

De forma a abreviar a discussão, o processo de discussão envolvendo os critérios c_2 , c_3 e c_4 são omitidos aqui, mas as relações de preferência *fuzzy* coletivas obtida para cada critério são apresentadas a seguir (vale notar que elas também satisfazem a transitividade fraca.):

$$R_{2,G} = \begin{bmatrix} 1 & 0,32 & 0,67 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,69 & 1 & 1 \\ 0,76 & 0,12 & 0,32 & 1 \end{bmatrix}, R_{3,G} = \begin{bmatrix} 1 & 0,94 & 0,67 & 0,24 \\ 0,85 & 1 & 0,58 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0,56 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Agregando-se as relações de preferência *fuzzy* (67) e (68) por meio do operador OWA com o quantificador linguístico “maioria” (o qual permite obter os pesos $w_1 = 0,066$, $w_2 = 0,667$, $w_3 = 0,266$ (YAGER, 1988), é possível estimar o nível de preferência global entre cada par de alternativas como se segue:

$$G_G = \begin{bmatrix} 1 & 0,78 & 0,69 & 0,8 \\ 0,68 & 1 & 0,89 & 0,29 \\ 0,78 & 0,92 & 1 & 0,53 \\ 0,90 & 0,72 & 0,67 & 1 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Aplicando (10) a (69), é obtida a seguinte relação de preferência estrita *fuzzy*:

$$P_G = \begin{bmatrix} 0 & 0,10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,09 & 0,03 & 0 & 0 \\ 0,10 & 0,43 & 0,14 & 0 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

A expressão (28), aplicada à (70), fornece o seguinte conjunto *fuzzy* de soluções não-dominadas:

$$\mu_{ND} = [0,90 \quad 0,57 \quad 0,86 \quad 1]. \quad (71)$$

Com este resultado, é possível seleccionar a melhor alternativa $XND^1 = \{x_4\}$. Excluindo-se essa alternativa da análise subsequente e aplicando-se as expressões (10) e (28) à seguinte RPFNR

$$G_G = \begin{bmatrix} 1 & 0,78 & 0,69 \\ 0,68 & 1 & 0,89 \\ 0,78 & 0,92 & 1 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

o seguinte conjunto *fuzzy* de soluções não-dominadas é obtido

$$\mu_{ND} = [0,91 \quad 0,90 \quad 1]. \quad (73)$$

O resultado dado por (73) permite seleccionar a segunda melhor alternativa $XND^2 = \{x_3\}$. Repetindo este procedimento até que todas as alternativas sejam ordenadas, a seguinte ordenação é obtida: $x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_2$.

7.2 Problemas de tomada de decisão com estrutura hierárquica

Aqui será aplicada a metodologia para resolução de problemas de planejamento estratégico com estrutura hierárquica. No problema em estudo, considera-se que não é possível (por exemplo, por questões de logística) solicitar aos especialistas que revejam seus julgamentos e a decisão cabe a um único decisor, ou moderador, com base nas informações fornecidas pelos vários especialistas.

Seguindo o exemplo da metodologia anterior aqui também são utilizados índices baseados na propriedade da incomparabilidade, suportada pela RPFNR.

7.2.1 Exemplo de aplicação

O problema de tomada de decisão que está sendo considerado aqui consiste em selecionar a iniciativa estratégica de maior prioridade com base nos relatórios de avaliação apresentados por cinco consultores (especialistas) sobre quatro alternativas (iniciativas estratégicas) passíveis de implantação nos próximos cinco anos em uma empresa de geração de energia elétrica. Cabe agora à diretoria contratante da consultoria avaliar os relatórios (aqui representados pelas matrizes de relações de preferência) e decidir qual a ordem de prioridade das alternativas disponíveis levando em conta os seguintes critérios: c_1) Perspectiva econômica; c_2) Perspectiva da qualidade da energia; c_3) Perspectiva operacional.

As quatro principais alternativas em estudo são:

Projeto x_1 : investir na compra de energia de outras empresas geradoras;

Projeto x_2 : investir em tecnologia para gerenciamento de carga;

Projeto x_3 : investir na construção de novos sistemas de transmissão e de distribuição;

Projeto x_4 : investir na ampliação de usinas existentes;

Para ilustrar o uso do procedimento de agregação que está sendo proposto para a tomada de decisão em grupo no ambiente com estrutura hierárquica será considerado o critério C_1 . As matrizes de comparações fornecidas pelos cinco especialistas para a avaliação do primeiro critério são as seguintes:

$$\begin{aligned}
R_{1,1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0,6 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}, R_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1 & 1 \\ 0,7 & 1 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0,6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0,7 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}, \\
R_{1,4} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,8 \\ 0 & 1 & 1 & 0,2 \\ 0 & 1 & 1 & 0,35 \\ 0,4 & 1 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}, R_{1,5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0,6 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{74}$$

Passo 1: o nível de incomparabilidade para cada julgamento é calculado conforme mostra a **Erro! Fonte de referência não encontrada..** O decisor definiu o nível máximo de incomparabilidade como $J_{max}=0,3$, que na escala da QUADRO 4 corresponde a “*Pouco Incomparável*”.

TABELA 4
Nível de incomparabilidade de cada julgamento

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
(x_1, x_2) e (x_2, x_1)	0	0,2	0	0	0
(x_1, x_3) e (x_3, x_1)	0	0,3	0	0	0
(x_1, x_4) e (x_4, x_1)	0	0	0	0,2	0
(x_2, x_3) e (x_3, x_2)	0	0	0	0	0
(x_2, x_4) e (x_4, x_2)	0,4	0	0,3	0	0
(x_3, x_4) e (x_4, x_3)	0,3	0,5	0,3	0,2	0,4

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2: o decisor subjetivamente determina os pesos para a opinião de cada especialista como $\lambda_{1,1}=0,3$, $\lambda_{1,2}=0,2$, $\lambda_{1,3}=\lambda_{1,4}=\lambda_{1,5}=0,167$. As matrizes de pesos associadas à contribuição de cada especialista são dadas por:

$$w_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,175 & 0,158 & 0,167 & 0,159 \\ 0,158 & 0,175 & 0,175 & 0,175 \\ 0,167 & 0,175 & 0,175 & 0 \\ 0,159 & 0,175 & 0 & 0,175 \end{bmatrix}, w_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,13 & 0,093 & 0,184 \\ 0,13 & 0,2 & 0,2 & 0,058 \\ 0,093 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,184 & 0,058 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}, \tag{75}$$

$$w_{1,3} = \begin{bmatrix} 0,209 & 0,191 & 0,211 & 0,192 \\ 0,191 & 0,209 & 0,209 & 0,179 \\ 0,211 & 0,209 & 0,209 & 0 \\ 0,192 & 0,179 & 0 & 0,209 \end{bmatrix}, w_{1,4} = \begin{bmatrix} 0,209 & 0,191 & 0,211 & 0,125 \\ 0,191 & 0,209 & 0,209 & 0,115 \\ 0,211 & 0,209 & 0,209 & 0 \\ 0,125 & 0,115 & 0 & 0,209 \end{bmatrix},$$

$$w_{1,5} = \begin{bmatrix} 0,209 & 0,191 & 0,211 & 0,192 \\ 0,191 & 0,209 & 0,209 & 0,105 \\ 0,211 & 0,209 & 0,209 & 0 \\ 0,192 & 0,105 & 0 & 0,209 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: aplicando-se o operador de agregação média aritmética ponderada com os pesos calculados no Passo 2, é obtida a seguinte relação de preferência *fuzzy* para o grupo:

$$R_{1,G} = \begin{bmatrix} 1 & 0,970 & 0,937 & 0,971 \\ 0,076 & 1 & 1 & 0,129 \\ 0,073 & 1 & 1 & 0 \\ 0,912 & 0,768 & 0,600 & 1 \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Para efeito de comparação, a TABELA 5 apresenta o nível médio de discordância para cada especialista e o nível de consenso levando em conta as relações de preferência *fuzzy* calculadas para o grupo segundo diferentes abordagens:

- a) média aritmética ponderada implementada conforme tradicionalmente utilizada, ou seja, sem avaliar o nível de incomparabilidade dos julgamentos e adotando para os pesos apenas os componentes determinados subjetivamente pelo decisor:

$$R_{1,G^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0,961 & 0,881 & 0,968 \\ 0,100 & 1 & 1 & 0,233 \\ 0,14 & 1 & 1 & 0,158 \\ 0,901 & 0,751 & 0,561 & 1 \end{bmatrix}; \quad (77)$$

- b) média aritmética ponderada, sendo os pesos determinados subjetivamente pelo decisor, mas excluindo os julgamentos com nível inaceitável de incomparabilidade:

$$R_{1,G^{**}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,960 & 1 & 0,967 \\ 0,01 & 1 & 1 & 0,437 \\ 0 & 1 & 1 & 0,350 \\ 0,90 & 0,85 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

É importante indicar que o cálculo da matriz (78) exige uma normalização dos pesos $\lambda_{1,y}$, $y=1,2,\dots,v$ para cada julgamento. A exclusão da contribuição de um ou mais especialistas, cujos julgamentos possuem níveis inaceitáveis de incomparabilidade, exige que os especialistas restantes tenham seus pesos alterados de modo que o somatório de seus pesos permaneça sendo igual a 1.

Analisando os dados expostos na TABELA 5, é possível notar que o nível de consenso sobre $R_{1,G}$ foi superior aos demais. É válido indicar que no caso de $R_{1,G^{**}}$, o nível de consenso foi obtido conforme a expressão (57), de tal modo que os julgamentos com nível inaceitável de comparabilidade foram excluídos também do cálculo.

Passo 4: verifica-se que $R_{1,G}$ satisfaz a transitividade fraca, não sendo portanto necessário corrigi-la (é possível verificar que $R_{1,G^{*}}$ e $R_{1,G^{**}}$ também satisfazem a transitividade fraca). Uma maneira simples proposta por Orlovsky para fazer este teste consiste em processar a relação de preferência *fuzzy* e obter o nível de não-dominância de cada alternativa por meio das expressões (10) e (28). Se pelo menos uma alternativa satisfaz $ND_p(x_k)=1$, então a relação de preferência *fuzzy* satisfaz a transitividade fraca.

Passo 5: o nível de consenso associado à relação de preferência *fuzzy* coletiva é considerado satisfatório. Portanto, não é necessário fazer novo ajuste dos pesos. Dando continuidade ao processo de solução do problema de decisão, assume-se que um procedimento similar ao utilizado para gerar a matriz (76) é utilizado para os demais critérios, gerando as seguintes matrizes de comparações coletivas para os critérios c_2 e c_3 :

$$R_{2,G} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0,2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,67 & 1 & 1 \\ 0,74 & 0,08 & 0,35 & 1 \end{bmatrix}, \quad (79)$$

$$R_{3,G} = \begin{bmatrix} 1 & 0,94 & 0,5 & 0,21 \\ 0,86 & 1 & 0,57 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0,55 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

A **Erro! Fonte de referência não encontrada.** apresenta as posições das alternativas obtidas pelo processamento dos conjuntos de relações de preferência $R_G = \{R_{1,G}, R_{2,G}, R_{3,G}\}$, $R^{G*} = \{R_{1,G*}, R_{2,G}, R_{3,G}\}$ e $R_{G**} = \{R_{1,G**}, R_{2,G}, R_{3,G}\}$ pela aplicação da expressão (45), seguida de (10), (28) e (29). É importante notar que no exemplo considerado, o processamento dos diferentes conjuntos de relações de preferência leva a diferentes ordenações das alternativas. Embora x_4 tenha permanecido na primeira posição e x_1 tenha permanecido na última posição, as posições de x_2 e x_3 variam.

TABELA 5
Discordância e Consenso

	$R_{1,G}$	$R_{1,G*}$	$R_{1,G**}$
$IDM_1^{1,G}$	0,073	0,146	0,107
$IDM_1^{2,G}$	0,456	0,403	0,43
$IDM_1^{3,G}$	0,045	0,1	0,102
$IDM_1^{4,G}$	0,127	0,125	0,094
$IDM_1^{5,G}$	0,116	0,174	0,150
$Cons_1$	0,835	0,81	0,823

Fonte: Elaborado pelo autor

TABELA 6
Ordenações das alternativas

	x_1	x_2	x_3	x_4
R^G	4	2	3	1
R^{G*}	3	2	2	1
R^{G**}	4	3	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor

8. CONCLUSÕES

Este trabalho teve o foco voltado para o estudo de métodos adequados para a modelagem, o processamento e a análise de problemas de tomada de decisão em grupo. Ênfase foi dada para ao tratamento de problemas de tomada de decisão que surgem no contexto do planejamento estratégico em empresas de energia elétrica.

Os estudos realizados culminaram com a elaboração de dois procedimentos metodológicos, os quais incluem alguns elementos computacionais que também foram desenvolvidos ao longo deste trabalho. Conforme foi discutido no Capítulo 6, um dos procedimentos é voltado para o apoio ao processo de discussão entre os especialistas na formação de consenso. Este faz uso de vários índices, entre eles um índice de incomparabilidade, para controlar o fluxo de informação dentro do grupo. O outro procedimento apoia a formação de preferências coletivas penalizando os julgamentos discordantes e os julgamentos com baixa confiabilidade, na operação de agregação de preferências individuais.

Os elementos computacionais dos dois procedimentos realizam as seguintes funcionalidades principais:

- a) a extração da relação de indiferença *fuzzy*, relação preferência estrita *fuzzy* e relação de incomparabilidade *fuzzy*, a partir da relação de preferência não-estrita *fuzzy* fornecida por cada especialista;
- b) a operação de agregação de preferências individuais para formação do modelo da preferência coletiva;
- c) o cálculo dos índices de comparabilidade, incomparabilidade, concordância, discordância e consenso;
- d) a identificação do especialista mais discordante do grupo;
- e) a divisão do grupo nos subgrupos dos especialistas que estão hesitantes e dos especialistas que não estão hesitantes;
- f) a análise de modelos $\langle X, R \rangle$ conforme o procedimento de escolha proposto por Orlovsky.

A contribuição deste trabalho está associada com o fato de que os resultados alcançados permitem flexibilizar a etapa de aquisição de informações sobre as preferências dos especialistas e, deste modo, beneficiar o processo de tomada de decisão multicritério em grupo. Conforme foi discutido no Capítulo 4, a técnica disponível na literatura para auxiliar o especialista que tem dificuldades em realizar comparações entre as alternativas exige que ele forneça matrizes incompletas que são preenchidas por meio da aplicação da definição de transitividade aditiva. No entanto, a aplicação de tal técnica baseia-se na hipótese, que nem sempre pode ser verificada, de que suas preferências sejam perfeitamente consistentes. Os procedimentos propostos, por outro lado, não têm restrições para sua aplicação. Além disso, é necessário indicar que, com o uso dos índices e dos procedimentos propostos, os especialistas podem manifestar suas dúvidas, além de suas certezas, e as dúvidas podem ser tratadas de tal modo que não prejudiquem a análise do problema e a validade dos resultados.

No futuro, os seguintes temas podem ser explorados de forma a melhorar os resultados obtidos:

- a) desenvolvimento de ferramentas metodológicas e computacionais de apoio ao moderador (em esquemas de consenso) que permitam controlar simultaneamente a consistência, a comparabilidade e o consenso em processos de discussão entre especialistas;
- b) desenvolvimento de procedimentos que possam gerar recomendações/conselhos para os especialistas e assim ajudá-los a corrigir a consistência de suas preferências, a reduzir o nível de incomparabilidade dos julgamentos e, ao mesmo tempo, aumentar o nível de consenso no grupo;
- c) desenvolvimento de índices de qualidade da informação que levam em consideração, simultaneamente, a consistência, a confiabilidade e a concordância do especialista;
- d) desenvolvimento de operadores de agregação que permitam ponderar as contribuições dos especialistas na formação das preferências coletivas, fazendo ajuste automático de pesos com base nos índices de qualidade das informações fornecidas por cada especialista;
- e) implementação de *software* para ser executado em redes de computadores, para apoiar a decisão em grupo com estrutura democrática. Este sistema computacional poderá agilizar o processo de tomada de decisão realizando

automaticamente tarefas complexas como, por exemplo, a identificação dos julgamentos com baixa consistência, baixa confiabilidade ou baixa concordância; a busca por julgamentos de alta qualidade fornecidos por outros especialistas; a distribuição das informações de alta qualidade dentro do grupo, etc.

REFERÊNCIAS

ALONSO, S.; HERRERA-VIDEIRA, E e CHICLANA, F. Individual and social strategies to deal with ignorance situations in multi-person decision making. **International Journal of Information Technology & Decision Making**. Illinois, n.8, p. 313-333, abril-2009.

ALONSO, S. et al. Web Based Consensus support system for group decision making problems and incomplete preferences. **Information Sciences**. Granada, n.180, p. 4477-4495, maio-2010.

ALSINA, C. On a family of connectives for fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.16, p. 231-235, jun-1985.

ARNOTT, D. A taxonomy of decision biases: Technical Report 1. **School of Information Management & Systems**, Vitoria, n.1, p.15-28, janeiro-1998.

ARVAI, J.L.; GREGORY, R. e MCDANIELS, T.L. Testing a structured decision approach: Value-focused thinking for deliberative risk communication. **Risk Analysis**. Washinton, n.11, p.1-6, novembro-2001.

BEN-ARIEH, D. e CHEN, Z. Linguistic-labels aggregation and consensus measure for autocratic decision making using group recommendations. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part A: Systems and Humans**. Virginia, n.36, p. 558-568, dezembro-2006.

BRANS, J.P.; VINCKE, P. e MARESCHAL, B. How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. **European Journal of Operational Research**. n.24, p. 228-238, abril-1986.

CANHA, L.; EKEL e P.; QUEIROZ. Models and methods of decision making in fuzzy environment and their applications to power engineering problems. **Numerical Linear Algebra with Applications**. Birmigan, n.14, p. 369-390, maio-2007.

CHICLANA, F.; HERRERA, F. e HERRERA-VIDEIRA, E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making on fuzzy preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.97, p. 33-48, janeiro-1998.

CHICLANA, F.; HERRERA, F. e HERRERA-VIDEIRA, E. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.122, p. 277-291, julho-2001.

CHICLANA, F.; HERRERA, F. e HERRERA-VIDEIRA, E. Reciprocity and consistency fuzzy preference relations. **Principles of Fuzzy Preference Modelling and Decision Making, Academic Press**, Ghent, v.1, p. 23-142, agosto-2003.

CHICLANA, F.; HERRERA, F. e HERRERA-VIDEIRA, E. Rationality of induced ordered weighted operators based on the reliability of the source of information in group decision-making. **Kybernetika**. Princeton, n.40, p. 121-142, abril-2004.

CHICLANA, F. et al. Consistency of reciprocal preference relations In: CONGRESO ESPAÑOL DE INFORMÁTICA (CEDI 2007). 2007, Zaragoza. **Anais...** Zaragoza: Sociedad Científica Informática de España, 2007, v.14, p. 123-130.

CHICLANA, F.; HERRERA-VIDEIRA, E. e ALONSO, S. A note on the estimation of missing pairwise preference values: A uninorm consistency based method. **International Journal of Uncertainty**. Illinois, n.16, p. 19-32, julho-2008.

CHICLANA, F.; HERRERA-VIDEIRA, E. e ALONSO, S. Cardinal consistency of reciprocal preference relations: a characterization of multiplicative transitivity. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**. London, n.17, p. 1063-6706, 2009.

CORREIA, E.C. **Construção de um modelo multicritério de apoio ao processo decisório**. 1996, Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), 102f, – Universidade Federal de Santa Catarina, Pós Graduação em Engenharia de Produção, Florianópolis.

DE BAETS, B. e FODOR, J.C. Twenty years of fuzzy preference structures. **Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali**, Gent, v.20, n.1, p. 45-66, 1997.

DE BAETS, B. e FODOR, J. Additive fuzzy preference structures: The next generation. **Principles of Fuzzy Preference Modelling and Decision Making**, Virginia, v.1, p. 15-25, março-2003.

EKEL, P. Ya. Approach to decision making in fuzzy environment. **Computer and Mathematics with applications**. Chicago, v.37, p. 59-71, janeiro-1999.

EKEL, P. Ya.; MARTINI, J.S.C. e PALHARES, R.M. Multicriteria analysis in decision making under information uncertainty. **Applied Mathematics and Computation**. London, v.200, p. 501-516, janeiro-2008.

EKEL, P. e PARREIRAS, R. Procedimentos para tomada de decisão multicritério em grupo usando modelagem das relações de preferência *fuzzy* In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, Porto Seguro. **Anais...** Rio de Janeiro, 2009, v.41, p.1789-1800.

EKEL, P.Ya.; PEDRYCZ, W.; e POPOV, V. Models and methods of multicriteria decision making in a fuzzy environment and their applications. **Proceedings of the Seventh International Fuzzy Systems Association World Congress**. London, v.3, p. 89-94, agosto-1997.

EKEL, P.Ya.; PEDRYCZ, W. e SCHINZINGER, R. A general approach to solving a wide class of fuzzy optimization problems. **Fuzzy Sets And Systems**. London, n.97, p. 49-66, junho-1998.

EKEL, P. et al. Fuzzy set based models and methods of multicriteria group decision making. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Virginia, n.71, p. 409-419, fevereiro-2009.

EKEL, P.Ya e SCHUFFNER NETO, F.H. Algorithms of discrete optimization and their application to problems with fuzzy coefficients. **Information Sciences**. Princeton, n.176, p. 2846-2868, abril-2006.

EKEL, P.Ya.; SILVA, M.R. e SCHUFFNER NETO, F.H.. Fuzzy preference modeling and its application to multiobjective decision making. **Computer and Mathematics with applications**. Virginia, v.52, p. 179-196, novembro-2006.

EKEL, P.Ya. et al. Fuzzy technology in design, planning, and control of complex systems (on the example of power engineering problems). **Electrical and Computer Engineering Series: Signal Processing, Communications and Computer Science**. Princeton, n.1, p. 333-338, agosto-2000.

FODOR, J.C. e ROUBENS, M. Valued preference structures. **European Journal of Operational Research**. London, n.79, p. 277-286, março-1994.

FODOR, J.C. e ROUBENS, M. Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. **Kluwer Academic Publishers**, Netherlands, n.1, p. 276-285, maio-1994.

FREELING, S. Fuzzy sets and decision analysis. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**. Owa, n.10, p. 341-354, março-1980.

GUNGOR, Z. e ARIKAN, F. A fuzzy outranking method in energy policy planning, **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.114, p. 115-122, abril-2000.

HÄMÄLÄINEN, R.P. e SEPPÄLÄINEN, T.O. The analytic network process in energy policy planning, Socio, **Economic Planning Sciences**. Virginia, n.20, p. 399-405, novembro-1986.

HERRERA, F.; HERRERA-VIDEIRA, E. e CHICLANA, F. Additive consistency of fuzzy preference relations: Characterization and construction In: PROCEEDINGS OF THE 4TH INTERNATIONAL WORKSHOP ON PREFERENCES AND DECISIONS, 2004. **Anais...**Trento: IEEE, 2004, v.4, p. 39-46.

HERRERA, F. e HERRERA-VIDEIRA, E. Linguistic decision analysis: step for solving decision problems under linguistic assessments. **Fuzzy Sets and Systems**. Catalunha, n.115, p. 67-87, abril-2000.

HERRERA-VIDEIRA, E et al. A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**. London, n.158, p. 863-877, abril-2007.

HERRERA-VIDEIRA, E. et al. A consensus support system model for group decision-making problems with multi-granular linguistic preference relations. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**. London, n.13, p. 644-658, abril-2005.

HERRERA-VIDEIRA, E. et al. Some issues on consistency of fuzzy preference relations, **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**. London, n.14, p. 98-109, dezembro 2004.

HERRERA-VIDEIMA, E.; HERRERA, F. e CHICLANA, F. A consensus model for multiperson decision making with different preferences structures. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**. Barcelona, n.32, p. 394-402, outubro-2002.

HORIUCHI, K. e TAMURA, N. VSOP fuzzy numbers and their fuzzy ordering. **Fuzzy Sets and Systems**. Pequín, n.93, p. 197-210, setembro-1998.

HSU, H.M. e CHEN, C.T. Aggregation of fuzzy opinions under group decision making. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.79, p. 279-285, dezembro-1996.

JANG, J.S.R., SUN, C.T. e MIZUTANI, E. A computational approach to learning and machine intelligence, **Neuro-Fuzzy and Soft Computing**. Washington, n.18, p.500-539, fevereiro-1997.

KACPRZYK, J., FEDRIZZI, M. e NURMI, H. Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.49, p. 21-31, abril-1992.

KAHRAMAN, C. e KAYA, I. A fuzzy multicriteria methodology for selection among energy alternatives. **Expert Systems With Applications**. Princeton, n.37, p. 6270-6281, novembro-2010.

KEENEY, R.L. Value-Focused Thinking: Identifying decision opportunities and creating alternatives. **European Journal of Operational Research**. London, n.92, p. 537-549, julho-1992.

KEENEY, R.L. Value-Focused Thinking: A path to creative decisionmaking. **Harvard University Pr.** Harvard, n.1, p. 422-450, dezembro-1996.

KOTLER, P. **Administração de marketing: análise, planejamento, implementação e controle**. 7. ed. Rio de Janeiro: Editora Atlas, 1992, 725 p.

KULSHRESHTHA, P. e SHEKAR, B. Interrelations among fuzzy preference-based choice functions and significance of rationality conditions: A taxonomic and intuitive perspective. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.109, p. 425-429, setembro-2000.

LAI, V.S., WONG, B.K. e CHEUNG, W. Group Decision making in a multiple criteria environment: A case using the AHP in software selection. **European Journal of Operational Research**. London, n.137, p. 134-144, agosto-2002.

LIAUTAUD, B. **Inteligência em e-business: transformando informações em conhecimento, e conhecimento em lucro**. 1.ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2002, 384 p.

LOKEN, E. Use of multicriteria decision analysis methods for planning problems, **Renewable and Sustainable Energy Reviews**. Trondheim, v.11, n.7, p. 1584-1595, setembro 2007.

LOOTSMA, F.A. A multiplicative variant of the Analytic Hierarchy Process. **Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics**. Massachusetts, n.13, p. 45-50, outubro-1995.

LOPES, J.A.M. Planejamento estratégico corporativo do sistema eletrobras no período 2010-2020. Disponível em: <<http://www.eletrobras.com/eletrobras/FileDownload.ThrSvc.asp>> Acesso em 28 de maio de 2011.

MA, J. et al. A method for repairing the inconsistency of fuzzy preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.157, p. 20-33, dezembro-2006.

MACHARIS, C. et al. PROMETHEE and AHP: The design of operational synergies in multicritéria analysis. Strengthening PROMETHEE with ideas of AHP. **European Journal of Operational Research**. London, n.153, p. 307-317, julho-2004.

MARTÍNEZ, L. e MONTERO, J. Challenges for improving consensus reaching process in collective decisions. **New Mathematics and Natural Computation**. Birmigan, n.3, p. 203-217, julho-2007.

MINTZBERG, H. The fall and rise of strategic planning. **Harvard Business Review**. Boston, n.1, p.1-72, março-1994.

MINTZBERG, H.; ASHLSTRAND, B. e LAMPEL, J. **Safári de Estratégia**. 2. ed. Porto Alegre: Bookland, 2000. 299 p.

MIRANDA, C.M.G. e ALMEIDA, A.T. Visão multicritério da avaliação de programas de pós-graduação pela CAPES:O caso da área engenharias III baseado nos métodos ELECTRE II E MAUT. **Gestão e Produção**. Rio de Janeiro, n.11, p. 52-64, novembro-2004.

NEVES, L.P. et al. Structuring an MCDA model usingf SSM: a case study in energy efficiency. **European Journal of Operational Research**. London, n.199, p.834-845, dezembro-2009.

NGWENYAMA, O.K.; BRYSON, N. e MOBOLURIN, A. Supporting facilitation in group support systems: Techniques for analyzing consensus relevant data. **Decision Support Systems**. Boston, n.16, p. 155-168, fevereiro-1996.

ORLOVSKY, S.A. Decision-making with a fuzzy preference relation. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.1, p. 155-167, fevereiro-1978.

PARNELL, G.S. Chapter 19, Value-Focused Thinking Using Multiple Objective Decision Analysis, Methods for Conducting Military Operational Analysis: Best Practices in Use Throughout the Department of Defense, **Military Operations Research Society**. Princeton, v.1, p.1-53, março-2007.

PARREIRAS, R.O. et al. A flexive consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments. **Information Sciences**. Amsterdam, n.180, p. 1075-1089, novembro-2010.

PARREIRAS, R.O. **Algoritmos Evolucionários e Técnicas de Tomada de Decisão Multicritério em Análise Multicritério**. 2006, 166f, Tese (Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais, Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Belo Horizonte.

PARREIRAS, R.O.; EKEL, P.Ya. e MORAIS, D.C. Fuzzy set base consensus schemes for multicriteria group decision making applied to strategic planning, **Group Decision and Negotiation**., New York, n.17, p.1-31, janeiro-2011

PARREIRAS, R.; EKEL, P. e BERNARDES JR., F., Tomada de Decisão Multicritério em Grupo com Estrutura Hierárquica Usando Relações de Preferência Fuzzy In: XLIII SBPO 2011, Ubatuba. Anais... Ubatuba: RED-M Quinto Encuentro Iberoamericano Sobre Evaluacion y Decision Multicriterio, 2011a, v.1, p. 215-228

PARREIRAS, R.; EKEL, P. e BERNARDES JR., F., A Dynamic Consensus Scheme based on Nonreciprocal Fuzzy Preference Relation, (em revisão) **Information Sciences**, Amsterdam, 2011b?

PEDRYCZ, W. e GOMIDE, F. An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design, **Massachusetts/London: MIT Press**, Cambridge, n.98, p.465, janeiro-1998.

PEDRYCZ, W.; EKEL, P. e PARREIRAS, R. **Fuzzy multicriteria decision-making: models, methods and applications**. 1.ed. New York-Chichester-Brisbane: John Wiley & Sons, 2011, 338 p.

PERNY, P. e ROY, B. The use of outranking relations in preference modeling. **Fuzzy Sets and Systems**. London, v.49, p. 33-53, março-1992.

PENEVA, V. e POPCHEV, I. Properties of the aggregation operators related with fuzzy relations. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.139, p. 615– 633, janeiro-2003.

ROY, B. The Outranking Approach and the foundations of ELECTRE Methods. **Theory and Decision**. Palermo, n.31, p. 49-73, abril-1991.

SAATY, T. L. **Método de análise hierárquica**. 2. ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1991, 367 p.

SALO, A. A. Iterative decision aiding for group decision support. **European Journal of Operational Research**. London, n.84, p. 134-149, abril-1995.

SENGUPTA, K. Fuzzy preference and Orlovsky choice procedure. **Fuzzy Sets and Systems**. London, n.93, p. 231-234, setembro-1998.

TANINO, T. On group decision making under fuzzy preferences. **Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory**. Boston, n.102, p. 172-175, agosto-1990.

TONG, M. e BONISSONE, P.P. A linguistic approach to decision making with fuzzy sets. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**. London, n.10, p. 716-723, maio-1980.

TRIANAPHYLLOU, E. e LIN, C.T. Development and evaluation of five fuzzy multiattribute decision-making methods. **International Journal of Approximate Reasoning**. Illinois, n.14, p. 281-310, novembro-1996.

TVERSKY, A. e SIMONSON, I. Context-dependent Preferences. **Management Science**. Philadelphia, n.39, p. 1179-1189, maio-1993.

WARFIELD, J.N. A Science of Generic Design: Managing complexity through systems design. **Ames: Iowa State University Press**, Iowa, p. 588-601, janeiro-1994.

YAGER, R.R. On ordered weighted averaging operators in multicriteria decision making. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**. London, n.18, p. 183-190, fevereiro-1988.

YAGER, R.R. Multicritéria decision making using fuzzy quantifiers In: Proceedings of IEEE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering, 1995, New York. **Anais...IAFE**, 1995, v.1, p. 42-47.

ZADEH, L.A. Fuzzy Sets. **Information and Control**. California, n.8, p. 338-353, dezembro-1965.

ZHANGA, Q., CHENA, J.C.H. e CHONG, P.P. Decision consolidation: criteria weight determination using multiple preference formats. **Decision Support Systems**. Boston, n.38, p. 247-258, julho-2004.