Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ DE SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A INCERTEZAS E RETARDO NO TEMPO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Cláudio Dias Campos

Engenheiro de Controle e Automação – IPUC/PUC-Minas

Orientador: Prof. Dr. Petr Iakovlevitch Ekel

Co-orientador: Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares

Agosto de 2003

Banca Examinadora

- Prof. Dr. Petr Iakovlevitch Ekel (Presidente)
  PPGEE/PUCMinas

- Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares (Co-orientador)
  Departamento de Engenharia Eletrônica – UFMG

- Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres
  Departamento de Telemática – FEEC/UNICAMP

- Prof. Dra. Zélia Myriam Assis Peixoto (Suplente)
  PPGEE/PUCMinas

A Amanda, o meu amor; aos meus pais, os meus grandes mestres e amigos e aos meus queridos irmãos e sobrinhas.

"Para mim, uma revolução é uma espécie de mudança envolvendo um certo tipo de reconstrução dos compromissos de um grupo. Mas não necessita ser uma grande mudança, nem precisa parecer revolucionária..."

KUHN, Thomas S. A Estrutura das Revoluções Científicas. 4.ed. Perspectiva S.A, 1996, p225.

"O que o mestre é, vale mais que os ensinamentos do mestre."

Karl Menninger

Agradecimentos

Muito agradeço,

- ao Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares pelo incentivo, apoio e rigor que contribuíram fundamentalmente para o desenvolvimento deste trabalho.

- a todos os professores e funcionários do PPGEE com quem tive a honra de trabalhar enriquecendo o meu saber. Em especial agradeço ao Prof. Dr. Petr Iakovlevitch Ekel que me aceitou como seu orientando e com quem tive a oportunidade de desenvolver trabalhos em comum e ao Prof. Dr. Carlos Augusto Paiva da Silva Martins, coordenador do PPGEE.

- a todos os colegas do Mestrado e aos colegas de publicações Marcos F. S. V. D'Angelo e Michel C. R. Leles.

- à Capes e ao CNPq (processo 300596/98-7) por me concederem bolsas de estudo.

Conteúdo

Lista de Figuras

Resumo

Este trabalho apresenta condições suficientes para análise e síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares contínuos ou discretos e invariantes no tempo que estão sujeitos à influência de retardo no tempo na dinâmica do modelo, tanto no vetor de estados quanto na entrada de controle. Os modelos dos sistemas lineares considerados também podem ser aplicados a sistemas incertos descritos por incertezas paramétricas politópicas. As abordagens propostas são do tipo dependentes do tamanho do retardo no tempo, isto é, a duração do retardo no tempo desempenha um papel crucial na obtenção de soluções, no entanto, como exemplificado, podem fornecer soluções para sistemas independentes do retardo no tempo.

Os resultados de análise e síntese são caracterizados para três classes de problemas que incluem sistemas com retardo variante no tempo no vetor de estados e/ou entradas de controle com mesmas durações ou com durações diferentes. Os casos para retardo constante no tempo são tratados como particularizações dos casos com retardo variante no tempo.

A metodologia utilizada para se obter condições suficientes para análise $\mathcal{H}_\infty$ está baseada em três pontos: a utilização de desigualdades matriciais lineares (LMIs – Linear Matrix Inequalities), a seleção conveniente de funcionais do tipo Lyapunov-Krasovskii e a utilização de uma relação de produto vetorial recentemente introduzida na literatura. A implicação direta de se utilizar LMIs é permitir que se descreva os resultados para análise como problemas de factibilidade convexos. No entanto, a síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ é descrita como problemas de factilibilidade não-convexos. A fim de se contornar este problema, utiliza-se um algoritmo baseado em um método de linearização envolvendo LMIs.

Este trabalho apresenta ainda vários exemplos retirados da literatura recente de controle para os quais são realizadas várias comparações entre as abordagens mais consideradas na literatura e as desenvolvidas nesta dissertação.

Abstract

This work presents sufficient conditions to the analysis and $\mathcal{H}_\infty$ control synthesis for linear time-invariant continuous- or discrete-time systems subjected to time-delays in the model dynamics in the states and control input. The linear systems models considered can also be applied to uncertain systems described by polytopic parametric uncertainties. The approaches proposed are delay-dependent, namely the time-delay size performs a crucial role in order to achieve the solutions, nevertheless, as will be exemplified, the same ones can provide solutions to delay-independent systems.

The analysis and synthesis results are characterized to three classes of problems which include systems with time-varying delays on state vector and/or control input with the same size of time-delays or not. The cases considering constant time-delays are treated as particularities of the cases considering time-varying delays.

The methodology applied to establish sufficient conditions to the $\mathcal{H}_\infty$ analysis is based on three points: the use of linear matrix inequalities (LMIs), the selection of appropriated Lyapunov-Krasovskii functionals and the use of an inner product of two vectors introduced in the literature recently. The direct implication of working with LMIs is to allow to describe de analysis results as convex feasibility problems. Nevertheless, the $\mathcal{H}_\infty$ control synthesis is described as non-convex feasibility problems. To handle with this difficulty, an algorithm based on a linearization method involving LMIs is applied.

This work also presents several examples borrowed from the recent control literature for which are performed several comparisons between the most considered approaches in the literature and the ones developed here.

Notação e Definições

- $\mathbb{R}^n$ denota o espaço euclidiano real
- $\mathbb{R}^{(m\times n)}(\mathbb{C}^{(m\times n)})$ denota o espaço normado das matrizes reais (complexas)
- $\mathcal{L}_2$ denota o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável no intervalo $[0;\infty)$
- ℓ_2 denota o espaço de Hilbert das seqüências de quadrado somável entre $[0;\infty)$
- L_2 denota o espaço $\mathcal{L}_2$ no contexto a tempo contínuo e ℓ_2 no contexto a tempo discreto
- H_{zw} denota a matriz de transferência entre w e z
- $\sigma_{max}(\cdot)$ denota o valor singular máximo do argumento $(\cdot)$
- $\mathbf{I}$ denota uma matriz identidade de dimensão apropriada
- $\mathbf{0}$ denota uma matriz nula de dimensão apropriada
- $*$ denota termos matriciais simétricos em relação a diagonal principal
- F^T denota a matriz transposta de F
- $F_{1,2}$ denota as matrizes F_1 e F_2
- $F \succ 0$ $(F \succeq \mathbf{0})$ denota F definida (semidefinida) positiva
- $F \prec 0$ $(F \preceq \mathbf{0})$ denota F definida (semidefinida) negativa
- κ denota o número de vértices
- $\partial x(t)$ denota $\dot{x}(t)$ para sistemas a tempo contínuo e $x(t+1)$ para sistemas a tempo discreto

Definição 1 *(Espaços de Hardy $\mathcal{H}_\infty$) O espaço $\mathcal{H}_\infty$ representa as funções matriciais limitadas e analíticas em $\mathbb{C}^+$.* □

- $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ é um subespaço do $\mathcal{H}_\infty$ e representa todas as matrizes de transferência racionais com coeficientes reais, estáveis e próprias
- $\|H\|_\infty$ denota a norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência $H(\zeta)$, $\zeta = s, z$

Definição 2 *(Atenuação de ruídos γ) $\gamma \in \mathbb{R}$ é denominado um nível de atenuação de ruídos para um sistema representado pela matriz de transferência $H(\zeta)$ se satisfaz a desigualdade $\|H\|_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$, com $H(\zeta) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$.* □

Lema 1 *(Complemento de Schur [1],[4]) Seja*

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

onde P_{11} e P_{22} são matrizes simétricas. Então

- *$P \succ 0$ se somente se $P_{11} \succ 0$, $P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12} \succ 0$ ou*
- *$P \succ 0$ se somente se $P_{22} \succ 0$, $P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T \succ 0$* ♦

Lema 2 *(Limitante Superior para o Produto Interno de Dois Vetores [21]) Assuma que $a(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $b(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{N}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ estejam definidos no intervalo Ω. Então, para quaisquer matrizes $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a desigualdade*

$$-2\int_\Omega a^T(\alpha)\,\mathcal{N}\,b(\alpha)\,d\alpha \leq \int_\Omega \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} X & Y - \mathcal{N} \\ Y^T - \mathcal{N}^T & Z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha$$

é assegurada se somente se

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}$$

♦

Desigualdades Matriciais Lineares – LMIs

Uma desigualdade matricial linear (LMI) é uma restrição da forma

$$L(x) \triangleq L_0 + x_1 L_1 + \ldots + x_N L_N \prec 0 \tag{1}$$

sendo que:

- $x = [x_1, \ldots, x_N]$ é um vetor de incógnitas escalares (variáveis de decisão ou otimização).
- $L_0, \ldots, L_N$ são matrizes simétricas dadas.

Observe que as desigualdades $L(x) \succ 0$ ou $L(x) \prec M(x)$ são casos especiais de (1)

Acrônimos

- LMI – Desigualdade matricial linear
- LIT – Linear e invariante no tempo

Capítulo 1

Introdução

Desde o início da década de 80, o problema de controle e estabilização robusta de sistemas lineares sujeitos a variações paramétricas no modelo do sistema tem sido um dos grandes tópicos de interesse na comunidade de controle, tanto no meio acadêmico, quanto no meio industrial. Naturalmente, técnicas de controle que levem em conta, no modelo matemático, as incertezas do sistema físico são mais realistas e podem levar a um desempenho final melhorado. Nesta direção, mais recentemente, técnicas de controle envolvendo índices de desempenho e robustez do tipo normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ mostraram-se ser ferramentas bastante adequadas, além de se tornarem mais poderosas com a introdução de metodologia baseada em otimização envolvendo descrições em termos de desigualdades matriciais lineares – LMIs [2].

Em uma vasta gama de sistemas de engenharia que envolvem fenômenos de transporte de energia, matéria ou informação (processos químicos e de manufatura, sistemas pneumáticos e hidráulicos, sistemas biomédicos e ecológicos, sistemas robóticos, consumo de combustível em aeronaves, redes de transmissão de dados, internet, processos controlados por computadores, etc.) não só as incertezas nos modelos que descrevem estes sistemas podem ocorrer, como também a dependência de informações com histórico temporal. Estas informações são tratadas na literatura como sendo sujeitas a retardo no tempo.

O problema de projeto de controladores voltados a sistemas lineares sujeitos a retardo de informações no vetor de estados e/ou entrada de controle[1] tem sido amplamente investigado,

[1]A modelagem de sistemas de primeira ordem com retardo no tempo no domínio das transformadas, particularmente chamado de "tempo morto" e denotado por e^{-sT}, é uma descrição que representa uma grande variedade de processos industriais para o quais se desenvolveram os dois métodos clássicos de Ziegler-Nichols para sintonia de controladores PID, no início da década de 40.

uma vez que estes retardos no tempo se mostram como consideráveis fontes de instabilidade ou degradação de desempenho.

Além da análise de estabilidade, vários outros pontos têm sido incorporados ao problema de projeto de controladores para sistemas com retardo no tempo como, por exemplo: incertezas paramétricas, índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, condições de independência e dependência do retardo no tempo, retardo distribuído, concentrado e múltiplos, além de técnicas de otimização envolvendo descrições em termos de LMIs.

No geral, a maior parte das abordagens que tratam este problema de controle emprega somente a tradicional condição de independência do retardo, isto é, o projeto do controlador não leva em consideração a informação de duração, ou tamanho, do retardo no tempo que o sistema controlado estará sujeito. Evidentemente estas abordagens tornam-se inválidas para os casos nos quais a estabilidade do sistema dependa explicitamente do tamanho do retardo, além de se mostrarem como soluções conservadoras para casos onde o retardo no tempo no sistema apresenta curta duração.

A fim de superar as deficiências das abordagens independentes do retardo no tempo, é necessário que se utilize alguma condição de dependência do tamanho do retardo no projeto do controlador. É importante salientar que as estratégias de projeto de controladores baseadas em condição de dependência do retardo não devem ser vistas como soluções globais para o problema de controle de sistemas sujeitos a retardo no tempo, pois, no geral, tais estratégias mostram-se bastante conservadoras quando aplicadas a sistemas que suportam retardo no tempo de duração ilimitada.

A redução de conservantismo nas abordagem que tratam este problema de controle constitui o centro das atenções por parte dos pesquisadores do tema. O desenvolvimento de novas transformações para os modelos de sistemas, descrições matemáticas dependentes de parâmetros para os funcionais de Lyapunov e limitantes superiores para o produtos internos de dois vetores têm sido as principais fontes de fomento de pesquisa neste assunto. Em [11] é apresentada uma descrição dos principais tipos de transformações de modelos de sistemas atualmente empregados na literatura para o desenvolvimento de abordagens de análise de estabilidade e síntese de controladores dependentes do retardo no tempo.

1.1 Revisão Bibliográfica

Considerando a literatura que trata o problema de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares contínuos no tempo, [6], [8] e [9] analisam sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo constante no vetor de estados e [3], [10], [11], [15] e [16] consideram retardo no tempo variante. Em [16] a presença de retardo na entrada de controle do sistema também é considerada. As abordagens apresentadas em [15] e [16] são descrições de abordagens independentes do retardo no tempo, ou seja, a informação de duração do retardo não é considerada na formulação da solução de controle. Em [3], [6], [8], [9], [10] e [11] as abordagens consideradas são do tipo dependentes do retardo.

O número de trabalhos que tratam o problema de sintetizar um controlar robusto $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares discretos sujeitos a retardo no tempo é relativamente pequeno se comparado ao número de trabalhos que abordam os sistemas contínuos. Uma explicação parcial para este fato é que grande parte da teoria de controle de sistemas lineares discretos pode ser aplicada na solução de problemas para sistemas discretos sujeitos a retardo no tempo, uma vez que estes sistemas podem ser transformados em sistemas lineares discretos sem retardo no tempo através de um procedimento de elevação da ordem do sistema, isto é adição de uma ou mais variáveis de estado. No entanto, no entendimento do autor desta dissertação, tal alternativa não parece ser de caráter geral em dois pontos: i) se o retardo no tempo for desconhecido, ou não mensurável, como se estipular o instante de tempo que uma variável (ou variáveis) de estado ocorre a fim de se criar um sistema aumentado; ii) o mesmo vale para sistemas que independem do tamanho do retardo no tempo, a duração no tempo pode assumir valores elevados e não necessariamente mensuráveis.

Particularmente, em se tratando de sistemas lineares discretos sujeitos a retardo variante no tempo, o procedimento de elevação da ordem do sistema também não tem validade. Assim, em [17], [18] e [26] abordagens dependentes do retardo são propostas, a fim de solucionar o problema de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$. Uma abordagem independente do retardo é apresentada em [16].

Recentemente foi apresentada na literatura, [21], uma nova abordagem considerando o problema de estabilização robusta de sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo. Esta abordagem baseia-se em uma nova versão para o limitante superior do produto interno de dois vetores apresentado em [24] e pode ser considerada como o ponto de partida no desenvolvimento deste trabalho de dissertação.

1.2 Proposta e Descrição do Trabalho

O objeto de estudo desta dissertação é o problema do controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares incertos contínuos ou discretos sujeitos a retardo no tempo no vetor de estados e/ou entrada de controle. Neste trabalho desenvolvem-se abordagens para a síntese de controladores robustos por realimentação de estados aplicáveis a esta classe de sistemas lineares. As abordagens desenvolvidas centram-se em três pontos principais:

- Aplicação do limitante superior, introduzido recentemente em [21], para o produto interno de dois vetores;
- Definição apropriada de funcionais do tipo Lyapunov-Krasovskii para análise de estabilidade dos sistemas sujeitos a retardo no tempo [25];
- Utilização de ferramentas de otimização convexa para solucionar problemas descritos em termos de LMIs [12].

O trabalho está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 aborda o problema de análise de estabilidade robusta $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas sujeitos a retardos variantes/constantes no tempo. Primeiramente são apresentadas as formulações para todos os problemas a serem estudados neste trabalho de dissertação e em seguida são apresentados os teoremas voltados à análise de estabilidade $\mathcal{H}_\infty$ baseados em procedimentos de otimização convexa descritos em termos de LMIs. O capítulo 3 aborda os problemas de síntese de controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$, sendo uma extensão do capítulo anterior. Procedimentos de otimização lineares não-convexos são desenvolvidos em termos de LMIs. O capítulo 4 apresenta uma série de exemplos numéricos. Os exemplos considerados foram retirados de literatura recente sobre o tema e são apresentados com um caráter fortemente comparativo entre as diversas abordagens existentes na literatura e as desenvolvidas neste trabalho. Por fim, o capítulo 5 apresenta conclusões cabíveis acerca do trabalho desenvolvido e propostas para trabalhos futuros.

Cabe ressaltar que parte dos resultados apresentados nesta dissertação gerou artigos aceitos em conferências internacionais [22], [23] ou está em processo de revisão em periódicos internacionais.

Capítulo 2

Análise de Estabilidade $\mathcal{H}_\infty$

2.1 Introdução

Neste capítulo, o problema de controle a ser abordado nesta dissertação será apresentado em uma formulação geral que independe da natureza contínua ou discreta dos sistemas lineares a serem considerados e, a seguir, em formulações específicas tratando classes particulares de sistemas. Abordagens dependentes do retardo no tempo serão desenvolvidas em termos de LMIs para fins de análise de estabilidade robusta $\mathcal{H}_\infty$.

2.2 Definição do Problema

Considere um sistema controlado como apresentado na figura 2.1

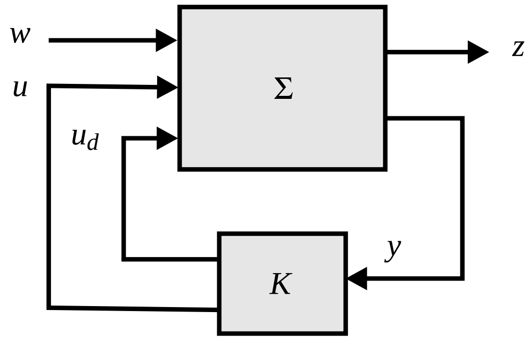

Figura 2.1: *Sistema controlado.*

O sistema é realimentado através do controlador K e é descrito por família de modelos internos Σ do tipo

$$\Sigma = \left\{\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{X}_d, U, \mathcal{U}, U_d, \mathcal{U}_d, W, \mathcal{W}, Y, \mathcal{Y}, Z, \mathcal{Z}, \psi, h, g\right\} \tag{2.1}$$

no qual

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &\equiv \text{conjunto de índices ou conjunto de tempos}\\
\mathcal{X} &\equiv \text{espaço de estados}\\
\mathcal{X}_d &\equiv \text{espaço de estados retardados no tempo}\\
U &\equiv \text{conjunto de valores admissíveis para a variável de controle}\\
\mathcal{U} &\equiv \text{conjunto de funções de controle admissíveis } u : \mathcal{T} \to U\\
U_d &\equiv \text{conjunto de valores admissíveis para a variável de controle retardada no tempo}\\
\mathcal{U}_d &\equiv \text{conjunto de funções de controle retardadas no tempo admissíveis } u : \mathcal{T} \to U_d\\
W &\equiv \text{conjunto de valores admissíveis para sinais exógenos de entrada}\\
\mathcal{W} &\equiv \text{conjunto de funções de sinais exógenos de entrada } w : \mathcal{T} \to W\\
Y &\equiv \text{conjunto de valores admissíveis para a variável de saída medida}\\
\mathcal{Y} &\equiv \text{conjunto de funções de saídas medidas admissíveis } y : \mathcal{T} \to Y\\
Z &\equiv \text{conjunto de valores admissíveis para a variável de saída controlada}\\
\mathcal{Z} &\equiv \text{conjunto de funções de saídas controladas admissíveis } z : \mathcal{T} \to Z\\
\psi &\equiv \text{função de transição de estados } \psi : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{X}_d \times \mathcal{U}_d \to \mathcal{X}\\
h &\equiv \text{função de saída medida } h : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{X}_d \times \mathcal{U}_d \times \mathcal{W} \to \mathcal{Y}\\
g &\equiv \text{função de saída controlada } g : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{X}_d \times \mathcal{U}_d \times \mathcal{W} \to \mathcal{Z}
\end{aligned}$$

Sob este cenário, o problema de controle a ser abordado neste trabalho será tratado em duas diferentes instâncias. A primeira volta-se à questão da análise da estabilidade robusta e desempenho $\mathcal{H}_\infty$ do sistema frente a uma lei de controle pré-estabelecida e a segunda volta-se à questão relativa à síntese do controlador que assegure estabilidade robusta e desempenho $\mathcal{H}_\infty$ ao sistema em condições de operação pré-determinadas, isto é, em condições de operação nas quais o comportamento do retardo no tempo seja caracterizado por limitantes e um nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ seja garantido.

Considerando a análise da estabilidade robusta e desempenho $\mathcal{H}_\infty$ tem-se a seguinte formulação geral:

($P\mathcal{A}_\infty$)– **Problema de Análise de Estabilidade Robusta $\mathcal{H}_\infty$.** *Considere uma família de modelos Σ para um sistema dinâmico. Dadas as funções $u \in \mathcal{U} \equiv L_2$ e $u_d \in \mathcal{U}_d \equiv L_2$ e um nível de atenuação de distúrbios $\gamma \in \mathbb{R}^+$, deseja-se verificar se o sistema é estável e se*

$$\sup_{\|w\|_{L_2} \neq 0} \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} < \gamma \tag{2.2}$$

ou seja, se a relação de sinais exógenos para a saída controlada, denotada pelo ganho induzido L_2, é limitada por um nível de atenuação fixado. ▲

Considerando a síntese do controlador, tem-se a seguinte formulação geral:

($P\mathcal{C}_\infty$)– **Problema de Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$.** *Considere uma família de modelos Σ para um sistema dinâmico. Deseja-se encontrar funções $u \in \mathcal{U} \equiv L_2$ e $u_d \in \mathcal{U}_d \equiv L_2$ (se existirem) que garantam ao sistema estabilidade e um nível $\gamma \in \mathbb{R}^+$ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$.* ▲

Antes de se formular os problemas que serão tratados neste trabalho de dissertação, considere, como uma representação do modelo interno Σ, o seguinte sistema linear e invariante no tempo (LIT) sujeito a retardos no tempo no vetor de estados e na entrada de controle:

$$\begin{array}{rcl} \partial x(t) & = & Ax(t) + A_d x(t-\tau_1(t)) + Bu(t) + B_d u(t-\tau_2(t)) + Ew(t) \\ z(t) & = & Cx(t) + C_d x(t-\tau_1(t)) + Du(t) + D_d u(t-\tau_2(t)) + Fw(t) \\ y(t) & = & \mathbf{I}x(t) \\ x(t) & = & \phi(t), \quad t \in \mathcal{T} \end{array} \tag{2.3}$$

no qual $x(t) \in \mathcal{X} \equiv \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $x(t-\tau_1(t)) \in \mathcal{X}_d \equiv \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados com retardo no tempo, $u(t) \in \mathcal{U} \equiv L_2$ é a entrada de controle, $U \equiv \mathbb{R}^m$, $u(t-\tau_2(t)) \in \mathcal{U}_d \equiv L_2$ é a entrada de controle com retardo no tempo, $U_d \equiv \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathcal{W} \equiv L_2$ é a entrada de distúrbios, $W \equiv \mathbb{R}^p$, $y(t) \in \mathcal{Y} \equiv L_2$ é a saída medida, $Y \equiv \mathbb{R}^n$, $z(t) \in \mathcal{Z} \equiv L_2$ é a saída controlada, $Z \equiv \mathbb{R}^q$, $t \in \mathcal{T} \equiv \mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$) é o instante de tempo, $\tau_1(t)$ é o retardo variante no tempo do vetor de estados, $\tau_2(t)$ é o retardo variante no tempo da entrada de controle, $\psi \equiv$ [*trajetória dos estados* $x(t)$], $h \equiv y(t)$, $g \equiv z(t)$, $\phi(t)$ denota uma função contínua no segmento $[-\overline{\tau}, 0)$ ou uma seqüência no segmento $[-\bar{\tau}, -\bar{\tau}+1, -\bar{\tau}+2\ldots, 0)$ que define o valor inicial do sistema. Considera-se que as variáveis de estado são completamente medidas e que os retardos variantes no tempo satisfazem as seguintes condições para tempo contínuo:

$$0 \leq \tau_{1,2}(t) \leq \bar{\tau}_{1,2} < \infty, \quad 0 \leq \dot{\tau}_{1,2}(t) \leq \varsigma_{1,2} < 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

ou a seguinte condição para tempo discreto:

$$0 \leq \tau_{1,2}(t) \leq \bar{\tau}_{1,2} < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

Considere como controlador $\mathcal{H}_\infty$ a seguinte lei de controle de realimentação estática de estados sem memória[2]:

$$u(t) = Kx(t) \tag{2.6}$$

no qual K é o ganho do controlador.

Realimentando o sistema (2.3) através da lei de controle (2.6), obtém-se o seguinte sistema em malha fechada:

$$\begin{array}{rcl} \partial x(t) & = & \tilde{A}x(t) + A_d x(t-\tau_1(t)) + B_d K x(t-\tau_2(t)) + Ew(t) \\ z(t) & = & \tilde{C}x(t) + C_d x(t-\tau_1(t)) + D_d K x(t-\tau_2(t)) + Fw(t) \end{array} \tag{2.7}$$

com $\tilde{A} \triangleq A + BK$ e $\tilde{C} \triangleq C + DK$.

Para o caso particular no qual o retardo no vetor de entradas de controle é igual ao retardo no vetor de estados, ou seja, $\tau_2(t) = \tau_1(t)$, considera-se o seguinte sistema em malha fechada:

$$\begin{array}{rcl} \partial x(t) & = & \tilde{A}x(t) + \tilde{A}_d x(t-\tau_1(t)) + Ew(t) \\ z(t) & = & \tilde{C}x(t) + \tilde{C}_d x(t-\tau_1(t)) + Fw(t) \end{array} \tag{2.8}$$

com $\tilde{A} \triangleq A + BK$, $\tilde{A}_d \triangleq A_d + B_d K$, $\tilde{C} \triangleq C + DK$ e $\tilde{C}_d \triangleq C_d + D_d K$.[3]

[2]O caso envolvendo controle com memória pode ser desenvolvido a partir da metodologia descrita neste trabalho. Deve-se ressaltar que o controle com memória exige o conhecimento do retardo no tempo que atua no sistema, uma vez que o armazenamento e a recuperação dos estados com retardo são necessários para a implementação da lei de controle com memória.

[3]Caso o sistema (2.3) não apresente ou não trate o retardo no tempo na entrada de controle, considera-se $B_d = 0$ e $D_d = 0$. Assim, os sistemas (2.7) e (2.8) tornam-se equivalentes.

Assuma que o conjunto de matrizes $(A, A_d, B, B_d, C, C_d, D, D_d, E, F)$ que descreve o sistema (2.3) não seja precisamente conhecido, ou seja, que apresente incertezas, mas pertença a um conjunto politópico $\mathcal{P}$ descrito por κ vértices

$$\mathcal{P} \triangleq \left\{ (A, \cdots, F) \,|\, (A, \cdots, F) = \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i \,(A_i, \cdots, F_i)\,; \xi_i \geq 0; \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i = 1 \right\}. \tag{2.9}$$

A figura 2.2 ilustra o conjunto politópico. Cada elemento pertencente ao conjunto politópico é formado através da combinação convexa dos vértices que descrevem tal conjunto. A descrição de incerteza politópica permite que se generalize outras descrições de incerteza, como por exemplo a descrição de incerteza limitada em norma.

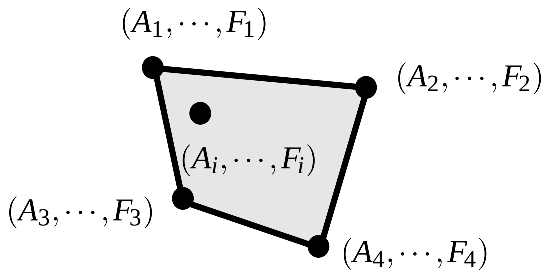

Figura 2.2: *Conjunto politópico.*

Definição 3 *(Estabilidade Robusta) O sistema (2.7) ou (2.8) com $w(t) \equiv \mathbf{0}$ é dito robustamente estável se sua solução trivial $x(t) \equiv \mathbf{0}$ é uniformemente e assintoticamente estável para todas as incertezas admissíveis em $\mathcal{P}$ e retardos no tempo $\tau_{1,2}(t)$ que satisfaçam as condições pertinentes (2.4) ou (2.5).* □

Partindo das definições dos problemas $(P\mathcal{A}_\infty)$ e $(P\mathcal{C}_\infty)$ e das considerações feitas sobre o sistema generalizado (2.3), podem-se formular os problemas que serão tratados neste trabalho.

$(P\mathcal{A}_{\infty c}^{\tau_{1,2}})$ – **Problema de Análise de Estabilidade Robusta $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Contínuos com Retardos Distintos no Controle e Estado.** *Dado o ganho K de um candidato a controlador $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (2.3), determine se este controlador é capaz de assegurar a estabilidade robusta do sistema (2.7) para quaisquer condições de retardos no tempo $\tau_{1,2}(t)$ que satisfaçam (2.4) e para um dado nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$.* ▲

$(P\mathcal{A}_{\infty c}^{\tau_1})$ – **Problema de Análise de Estabilidade Robusta $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Contínuos com Retardos Idênticos no Controle e Estado.** *Dado o ganho K de um candidato a controlador $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (2.3) com $\tau_2(t) = \tau_1(t)$, determine se este controlador é capaz de assegurar a estabilidade robusta do sistema (2.8) para qualquer condição de retardo no tempo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.4) e para um dado nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$.* ▲

$(P\mathcal{A}_{\infty d}^{\tau_1})$ – **Problema de Análise de Estabilidade Robusta $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Discretos com Retardos Idênticos no Controle e Estado.** *Dado o ganho K de um candidato a controlador $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (2.3) com $\tau_2(t) = \tau_1(t)$, determine se este controlador é capaz de assegurar a estabilidade robusta do sistema (2.8) para qualquer condição de retardo no tempo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.5) e para um dado nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$.* ▲

$(P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_{1,2}})$ – **Problema de Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Contínuos com Retardos Distintos no Controle e Estado.** *Dados $\bar{\tau}_{1,2}$ e $\varsigma_{1,2}$, respectivamente, limitantes para o tamanho dos retardos no tempo $\tau_{1,2}(t)$ e suas taxas de variações e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, determine um ganho K (se existir) para o sistema (2.3) tal que o sistema em malha fechada (2.7) seja robustamente estável para quaisquer condições de retardos no tempo $\tau_{1,2}(t)$ que satisfaçam (2.4) e tenha um nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ garantido.* ▲

$(P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_1})$ – **Problema de Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Contínuos com Retardos Idênticos no Controle e Estado.** *Dados $\bar{\tau}_1$ e ς_1, os limitantes para o tamanho do retardo no tempo $\tau_1(t)$ e sua taxa de variação, respectivamente, e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, determine o ganho K (se existir) para o sistema (2.3) com $\tau_2(t) = \tau_1(t)$ tal que o sistema (2.8) seja robustamente estável para qualquer condição de retardo no tempo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.4) e tenha um nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ garantido.* ▲

$(P\mathcal{C}_{\infty d}^{\tau_1})$ – **Problema de Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas Discretos com Retardos Idênticos no Controle e Estado.** *Dado $\bar{\tau}_1$, o limitante para o tamanho do retardo no tempo $\tau_1(t)$ e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, determine o ganho K (se existir) para o sistema (2.3) com $\tau_2(t) = \tau_1(t)$ tal que o sistema (2.8) seja robustamente estável para qualquer condição de retardo no tempo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.5) e tenha um nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ garantido.* ▲

2.3 Sistemas a Tempo Contínuo

2.3.1 Resolvendo o Problema $P\mathcal{A}_{\infty c}^{\tau_{1,2}}$

Teorema 1 *Considere o sistema em malha fechada (2.7). Sejam $\bar{\tau}_{1,2}$ e $\varsigma_{1,2}$ os respectivos limitantes para o tamanho dos retardos no tempo $\tau_{1,2}(t)$ e suas taxas de variações, e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Se existirem matrizes simétricas $X \succ \mathbf{0}$, $H_{1,2} \succ \mathbf{0}$, $Q_{1,2} \succ \mathbf{0}$ e $Z_{1,2} \succ \mathbf{0}$ e matrizes $V_{1,2}$ que satisfaçam as LMIs:*

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11i} & \Upsilon_{12i} & \Upsilon_{13i} & XE_i & e_1\tilde{A}_i^T Z_1 & e_2\tilde{A}_i^T Z_2 & \tilde{C}_i^T \\ * & -Q_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & e_1A_{di}^T Z_1 & e_2A_{di}^T Z_2 & C_{di}^T \\ * & * & -Q_2 & \mathbf{0} & e_1K^T B_{di}^T Z_1 & e_2K^T B_{di}^T Z_2 & K^T D_{di}^T \\ * & * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & e_1E_i^T Z_1 & e_2E_i^T Z_2 & F_i^T \\ * & * & * & * & -e_1Z_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -e_2Z_2 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{2.10}$$

$$\forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & V_1 \\ V_1^T & Z_1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} H_2 & V_2 \\ V_2^T & Z_2 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{2.11}$$

com

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11i} &\triangleq X\tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T X + \bar{\tau}_1 H_1 + \bar{\tau}_2 H_2 + V_1 + V_1^T + V_2 + V_2^T + \frac{1}{1-\varsigma_1} Q_1 + \frac{1}{1-\varsigma_2} Q_2 \\ \Upsilon_{12i} &\triangleq XA_{di} - V_1 \\ \Upsilon_{13i} &\triangleq XB_{di}K - V_2 \\ e_1 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_1}{1-\varsigma_1} \\ e_2 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_2}{1-\varsigma_2} \end{aligned}$$

então este sistema é robustamente estável, com nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, para quaisquer condições de retardos no tempo $\tau_{1,2}(t)$ que satisfaçam (2.4). □

Demonstração: Considerando a identidade de Leibniz-Newton:

$$\int_a^b \dot{\nu}(t)\ dt = \nu(b) - \nu(a)\,, \tag{2.12}$$

o sistema (2.7) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\tilde{A} + A_d + B_d K)x(t) - A_d \int_{t-\tau_1(t)}^{t} \dot{x}(\alpha)\ d\alpha \\ &\quad - B_d K \int_{t-\tau_2(t)}^{t} \dot{x}(\alpha)\ d\alpha + Ew(t)\,, \\ z(t) &= \tilde{C}x(t) + C_d x(t-\tau_1(t)) + D_d K x(t-\tau_2(t)) + Fw(t)\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Considere o seguinte funcional tipo Lyapunov-Krasovskii [25]:

$$V\left(x(t), x(t-\tau_1(t)), x(t-\tau_2(t)), w(t), t\right) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 \tag{2.14}$$

com

$$\begin{aligned} V_1 &= x^T(t)Xx(t)\,, \\ V_2 &= \frac{1}{1-\dot{\tau}_1(t)} \int_{-\tau_1(t)}^{0} \int_{t+\beta}^{t} \dot{x}^T(\alpha) Z_1 \dot{x}(\alpha)\ d\alpha\ d\beta\,, \\ V_3 &= \frac{1}{1-\dot{\tau}_1(t)} \int_{t-\tau_1(t)}^{t} x^T(\alpha) Q_1 x(\alpha)\ d\alpha\,, \\ V_4 &= \frac{1}{1-\dot{\tau}_2(t)} \int_{-\tau_2(t)}^{0} \int_{t+\beta}^{t} \dot{x}^T(\alpha) Z_2 \dot{x}(\alpha)\ d\alpha\ d\beta\,, \\ V_5 &= \frac{1}{1-\dot{\tau}_2(t)} \int_{t-\tau_2(t)}^{t} x^T(\alpha) Q_2 x(\alpha)\ d\alpha\,. \end{aligned}$$

Derivando o funcional (2.14) obtém-se:

$$\dot{V}(\cdot) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4 + \dot{V}_5 \tag{2.15}$$

com

$$\dot{V}_1 = 2x^T(t)X(\tilde{A} + A_d + B_dK)x(t) + 2x^T(t)XEw(t)$$

$$-2x^T(t)XA_d\int_{t-\tau_1(t)}^{t}\dot{x}(\alpha)\ d\alpha \tag{2.16}$$

$$-2x^T(t)XB_dK\int_{t-\tau_2(t)}^{t}\dot{x}(\alpha)\ d\alpha, \tag{2.17}$$

$$\dot{V}_2 = \frac{\tau_1(t)}{1-\dot{\tau}_1(t)}\dot{x}^T(t)Z_1\dot{x}(t) - \int_{t-\tau_1(t)}^{t}\dot{x}^T(\alpha)Z_1\dot{x}(\alpha)\ d\alpha$$

$$\leq \frac{\tau_1(t)}{1-\dot{\tau}_1(t)}\dot{x}^T(t)Z_1\dot{x}(t) \tag{2.18}$$

$$-\int_{t-\bar{\tau}_1}^{t}\dot{x}^T(\alpha)Z_1\dot{x}(\alpha)\ d\alpha, \tag{2.19}$$

$$\dot{V}_3 = \frac{1}{1-\dot{\tau}_1(t)}x^T(t)Q_1x(t) - x^T(t-\tau_1(t))Q_1x(t-\tau_1(t)),$$

$$\dot{V}_4 = \frac{\tau_2(t)}{1-\dot{\tau}_2(t)}\dot{x}^T(t)Z_2\dot{x}(t) - \int_{t-\tau_2(t)}^{t}\dot{x}^T(\alpha)Z_2\dot{x}(\alpha)\ d\alpha$$

$$\leq \frac{\tau_2(t)}{1-\dot{\tau}_2(t)}\dot{x}^T(t)Z_2\dot{x}(t) \tag{2.20}$$

$$-\int_{t-\bar{\tau}_2}^{t}\dot{x}^T(\alpha)Z_2\dot{x}(\alpha)\ d\alpha, \tag{2.21}$$

$$\dot{V}_5 = \frac{1}{1-\dot{\tau}_2(t)}x^T(t)Q_2x(t) - x^T(t-\tau_2(t))Q_2x(t-\tau_2(t)).$$

Aplicando o limitante superior para o produto interno de dois vetores, Lema 2 na página 4, para os termos (2.16) e (2.17) segue que

$$
\begin{aligned}
(2.16) \quad \leq \quad & \tau_1(t)x^T(t)H_1x(t) \\
& +2x^T(t)(V_1 - XA_d)\int_{t-\tau_1(t)}^{t} \dot{x}(\alpha)\, d\alpha && (2.22) \\
& +\int_{t-\bar{\tau}_1}^{t} \dot{x}^T(\alpha)Z_1\dot{x}(\alpha)\, d\alpha, && (2.23) \\
(2.17) \quad \leq \quad & \tau_2(t)x^T(t)H_2x(t) \\
& +2x^T(t)(V_2 - XB_dK)\int_{t-\tau_2(t)}^{t} \dot{x}(\alpha)\, d\alpha && (2.24) \\
& +\int_{t-\bar{\tau}_2}^{t} \dot{x}^T(\alpha)Z_2\dot{x}(\alpha)\, d\alpha. && (2.25)
\end{aligned}
$$

Estas limitações são verificadas se as matrizes $H_{1,2}$, $V_{1,2}$ e $Z_{1,2}$ satisfizerem as restrições:

$$
\begin{bmatrix} H_1 & V_1 \\ V_1^T & Z_1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} H_2 & V_2 \\ V_2^T & Z_2 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \tag{2.26}
$$

Desenvolvendo os termos (2.18), (2.20), (2.22) e (2.24), realizando as devidas eliminações dos termos (2.19), (2.21), (2.23) e (2.25) e considerando $\bar{\tau}_{1,2}$ e $\varsigma_{1,2}$ como os respectivos limitantes para o tamanho do retardo e sua taxa de variação, pode-se reescrever (2.15) como:

$$
\dot{V}(\cdot) \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1(t)) \\ x(t-\tau_2(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Lambda_c \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1(t)) \\ x(t-\tau_2(t)) \\ w(t) \end{bmatrix} \tag{2.27}
$$

com

$$\Lambda_c \triangleq \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} \\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} \\ * & * & \Pi_{33} & \Pi_{34} \\ * & * & * & \Pi_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{11} &\triangleq X\tilde{A}+\tilde{A}^T X+\bar{\tau}_1 H_1+\bar{\tau}_2 H_2+V_1+V_1^T+V_2+V_2^T \\
&\quad +\frac{1}{1-\varsigma_1}Q_1+\frac{1}{1-\varsigma_2}Q_2+e_1\tilde{A}^T Z_1\tilde{A}+e_2\tilde{A}^T Z_2\tilde{A}, \\
\Pi_{12} &\triangleq XA_d-V_1+e_1\tilde{A}^T Z_1 A_d+e_2\tilde{A}^T Z_2 A_d\,, \\
\Pi_{13} &\triangleq XB_dK-V_2+e_1\tilde{A}^T Z_1 B_dK+e_2\tilde{A}^T Z_2 B_dK\,, \\
\Pi_{14} &\triangleq XE+e_1\tilde{A}^T Z_1 E+e_2\tilde{A}^T Z_2 E\,, \\
\Pi_{22} &\triangleq -Q_1+e_1A_d^T Z_1 A_d+e_2 A_d^T Z_2 A_d\,, \\
\Pi_{23} &\triangleq e_1A_d^T Z_1 B_dK+e_2A_d^T Z_2 B_dK\,, \\
\Pi_{24} &\triangleq e_1A_d^T Z_1 E+e_2A_d^T Z_2 E\,, \\
\Pi_{33} &\triangleq -Q_2+e_1K^T B_d^T Z_1 B_dK+e_2K^T B_d^T Z_2 B_dK\,, \\
\Pi_{34} &\triangleq e_1K^T B_d^T Z_1 E+e_2K^T B_d^T Z_2 E\,, \\
\Pi_{44} &\triangleq e_1E^T Z_1 E+e_2E^T Z_2 E\,, \\
e_1 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_1}{1-\varsigma_1}, \\
e_2 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_2}{1-\varsigma_2},
\end{aligned}$$

quando $H_{1,2}$, $V_{1,2}$ e $Z_{1,2}$ satisfizerem (2.26).

Considerando o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$:

$$\mathcal{J}=\int_0^\infty \left[z^T(t)z(t)-\gamma^2 w^T(t)w(t)\right]\, dt \tag{2.28}$$

e assumindo, sem perda de generalidade, condições iniciais nulas e estabilidade para o sistema (2.7) implica que $V(\cdot)|_{t=0}=0$ e $V(\cdot)|_{t\to\infty}\to\varepsilon$, com $\varepsilon\to 0$ se $w(t)=0$ ou $\varepsilon<\infty$ se $w(t)\neq 0$.

Assim, pode-se escrever

$$\mathcal{J} \leq \int_0^\infty \left[z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(\cdot) \right] \, dt \tag{2.29}$$

e ainda,

$$\mathcal{J} \leq \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1(t)) \\ x(t-\tau_2(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Delta_c \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1(t)) \\ x(t-\tau_2(t)) \\ w(t) \end{bmatrix} \, dt \tag{2.30}$$

com

$$\Delta_c \triangleq \Lambda_c + \begin{bmatrix} \tilde{C}^T C & \tilde{C}^T C_d & \tilde{C}^T D_d K & \tilde{C}^T F \\ * & C_d^T C_d & C_d^T D_d K & C_d^T F \\ * & * & K^T D_d^T D_d K & K^T D_d^T F \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} + F^T F \end{bmatrix},$$

e que expandido através do complemento de Schur, Lema 1 na página 4, fica:

$$\Delta_c \triangleq \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & \Upsilon_3 & XE & e_1 \tilde{A}^T Z_1 & e_2 \tilde{A}^T Z_2 & \tilde{C}^T \\ * & -Q_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & e_1 A_d^T Z_1 & e_2 A_d^T Z_2 & C_d^T \\ * & * & -Q_2 & \mathbf{0} & e_1 K^T B_d^T Z_1 & e_2 K^T B_d^T Z_2 & K^T D_d^T \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & e_1 E^T Z_1 & e_2 E^T Z_2 & F^T \\ * & * & * & * & -e_1 Z_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -e_2 Z_2 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &\triangleq X\tilde{A} + \tilde{A}^T X + \bar{\tau}_1 H_1 + \bar{\tau}_2 H_2 + V_1 + V_1^T + V_2 + V_2^T \\ &\quad + \frac{1}{1-\varsigma_1} Q_1 + \frac{1}{1-\varsigma_2} Q_2, \\ \Upsilon_2 &\triangleq X A_d - V_1, \\ \Upsilon_3 &\triangleq X B_d K - V_2, \\ e_1 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_1}{1-\varsigma_1}, \\ e_2 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_2}{1-\varsigma_2}, \end{aligned}$$

quando $H_{1,2}, V_{1,2}$ e $Z_{1,2}$ satisfizerem (2.26).

Considerando que as LMIs (2.10) asseguram que $\Delta_c \prec 0$ para todo o domínio de incertezas $\mathcal{P}$, temos que $\mathcal{J} < 0$ para todo $w(t) \in \mathcal{L}_2$ não nulo. Assim, o sistema (2.7) é garantido ser robustamente estável com nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ para qualquer condição de retardo que satisfaça (2.4), concluindo a demonstração. ■

Para o caso particular em que o sistema (2.7) apresente retardos constantes no tempo, o Teorema 1 se reduz ao seguinte resultado:

Corolário 1 *Considere o sistema em malha fechada (2.7) sujeito a retardos constantes no tempo, ou seja,* $\dot{\tau}_{1,2} \equiv 0$. *Sejam* $\bar{\tau}_{1,2}$ *os limitantes para o tamanho dos retardos no tempo* $\tau_{1,2}(t)$ *e* $\gamma > \mathbb{R}^+$ *o nível de atenuação de distúrbios* $\mathcal{H}_\infty$. *Se existirem matrizes simétricas* $X \succ \mathbf{0}$, $H_{1,2} \succ \mathbf{0}$, $Q_{1,2} \succ \mathbf{0}$ *e* $Z_{1,2} \succ \mathbf{0}$ *e matrizes* $V_{1,2}$ *que satisfaçam as LMIs:*

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11i} & \Upsilon_{12i} & \Upsilon_{13i} & XE_i & \bar{\tau}_1\tilde{A}_i^T Z_1 & \bar{\tau}_2\tilde{A}_i^T Z_2 & \tilde{C}_i^T \\ * & -Q_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\tau}_1 A_{di}^T Z_1 & \bar{\tau}_2 A_{di}^T Z_2 & C_{di}^T \\ * & * & -Q_2 & \mathbf{0} & \bar{\tau}_1 K^T B_{di}^T Z_1 & \bar{\tau}_2 K^T B_{di}^T Z_2 & K^T D_{di}^T \\ * & * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & \bar{\tau}_1 E_i^T Z_1 & \bar{\tau}_2 E_i^T Z_2 & F_i^T \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}_1 Z_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -\bar{\tau}_2 Z_2 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{2.31}$$

$$\forall i = 1, \dots, \kappa$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & V_1 \\ V_1^T & Z_1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} H_2 & V_2 \\ V_2^T & Z_2 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{2.32}$$

com

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11i} &\triangleq X\tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T X + \bar{\tau}_1 H_1 + \bar{\tau}_2 H_2 + V_1 + V_1^T + V_2 + V_2^T + Q_1 + Q_2 \\ \Upsilon_{12i} &\triangleq XA_{di} - V_1 \\ \Upsilon_{13i} &\triangleq XB_{di}K - V_2 \end{aligned}$$

Então este sistema é robustamente estável com nível γ *de atenuação de distúrbios* $\mathcal{H}_\infty$ *para quaisquer condições de retardos constantes no tempo* $\tau_{1,2}(t)$ *que satisfaçam (2.4).* △

2.3.2 Resolvendo o Problema $P\mathcal{A}_{\infty c}^{\tau_1}$

Teorema 2 *Considere o sistema em malha fechada (2.8). Seja $\bar{\tau}_1$ e ς_1 os respectivos limitantes para o tamanho do retardo no tempo $\tau_1(t)$ e sua taxa de variação e $\gamma > \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Se existirem matrizes simétricas $X \succ \mathbf{0}$, $H_1 \succ \mathbf{0}$, $Q_1 \succ \mathbf{0}$ e $Z_1 \succ \mathbf{0}$ e uma matriz V_1 que satisfaçam as LMIs:*

$$
\begin{bmatrix}
\Upsilon_{11i} & \Upsilon_{12i} & XE_i & e_1\tilde{A}_i^T Z_1 & \tilde{C}_i^T \\
* & -Q_1 & \mathbf{0} & e_1\tilde{A}_{di}^T Z_1 & \tilde{C}_{di}^T \\
* & * & -\gamma^2\mathbf{I} & e_1 E_i^T Z_1 & F_i^T \\
* & * & * & -e_1 Z_1 & \mathbf{0} \\
* & * & * & * & -I
\end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{2.33}
$$

$$\forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$$
\begin{bmatrix} H_1 & V_1 \\ V_1^T & Z_1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{2.34}
$$

com

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_{11i} &\triangleq X\tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T X + \bar{\tau}_1 H_1 + V_1 + V_1^T + \frac{1}{1-\varsigma_1} Q_1 \\
\Upsilon_{12i} &\triangleq X\tilde{A}_{di} - V_1 \\
e_1 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_1}{1-\varsigma_1}
\end{aligned}
$$

então este sistema é robustamente estável com nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ para qualquer condição de retardo no tempo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.4). □

Demonstração: A demonstração deste teorema segue o mesmo procedimento adotado na demonstração do Teorema 1 e, portanto, o desenvolvimento de todas as passagens não será apresentado. Considere apenas o seguinte:

Considerando a identidade (2.12) reescreva o sistema (2.8) como:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (\tilde{A} + \tilde{A}_d)x(t) - \tilde{A}_d \int_{t-\tau_1(t)}^{t} \dot{x}(\alpha)\, d\alpha + Ew(t), \\
z(t) &= \tilde{C}x(t) + \tilde{C}_d x(t-\tau_1(t)) + Fw(t).
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

Considere o funcional Lyapunov-Krasovskii (2.14) restrito:

$$V\left(x(t), x(t-\tau_1(t)), w(t), t\right) = V_1 + V_2 + V_3\,. \tag{2.36}$$

Assim, no desenvolvimento da demonstração, os termos referentes às variáveis H_2, Q_2, Z_2 e V_2 deverão ser desprezados e as matrizes A_d e C_d deverão ser substituídas, respectivamente, pelas expressões $A_d + B_d K$ e $C_d + D_d K$. ■

Para o caso particular em que o sistema (2.8) apresente retardo constante no tempo, o Teorema 2 se reduz ao seguinte resultado:

Corolário 2 *Considere o sistema em malha fechada (2.8) sujeito a retardo constante no tempo, ou seja, $\dot{\tau}_1 \equiv 0$. Seja $\bar{\tau}_1$ o limitante para o tamanho do retardo no tempo $\tau_1(t)$ e $\gamma > \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Se existirem matrizes simétricas $X \succ \mathbf{0}$, $H_1 \succ \mathbf{0}$, $Q_1 \succ \mathbf{0}$ e $Z_1 \succ \mathbf{0}$ e uma matriz V_1 que satisfaçam as LMIs:*

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11i} & \Upsilon_{12i} & XE_i & \bar{\tau}_1 \tilde{A}_i^T Z_1 & \tilde{C}_i^T \\ * & -Q_1 & \mathbf{0} & \bar{\tau}_1 \tilde{A}_{di}^T Z_1 & \tilde{C}_{di}^T \\ * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & \bar{\tau}_1 E_i^T Z_1 & F_i^T \\ * & * & * & -\bar{\tau}_1 Z_1 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{2.37}$$

$$\forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & V_1 \\ V_1^T & Z_1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{2.38}$$

com

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11i} &\triangleq X\tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T X + \bar{\tau}_1 H_1 + V_1 + V_1^T + Q_1 \\ \Upsilon_{12i} &\triangleq X\tilde{A}_{di} - V_1 \end{aligned}$$

Então este sistema é robustamente estável com nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ para qualquer condição de retardo constante no tempo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.4). △

2.4 Sistemas a Tempo Discreto

2.4.1 Resolvendo o Problema $P\mathcal{A}_{\infty d}^{\tau_1}$

Teorema 3 *Considere o sistema em malha fechada (2.8). Seja $\overline{\tau}_1$ o limitante para o tamanho do retardo no tempo $\tau_1(t)$ e $\gamma > \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Se existirem matrizes simétricas $X \succ \mathbf{0}$, $H_1 \succ \mathbf{0}$, $Q_1 \succ \mathbf{0}$ e $Z_1 \succ \mathbf{0}$ e uma matriz V_1 que satisfaçam as LMIs:*

$$\begin{bmatrix} \Gamma & -V_1 & \mathbf{0} & \tilde{A}_i^T X & \overline{\tau}_1(\tilde{A}_i - \mathbf{I})^T Z_1 & \tilde{C}_i^T \\ * & -Q_1 & \mathbf{0} & \tilde{A}_{di}^T X & \overline{\tau}_1 \tilde{A}_{di}^T Z_1 & \tilde{C}_{di}^T \\ * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & E_i^T X & \overline{\tau}_1 E_i^T Z_1 & F_i^T \\ * & * & * & -X & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\overline{\tau}_1 Z_1 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{2.39}$$

$$\forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & V_1 \\ V_1^T & Z_1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{2.40}$$

com

$$\Gamma \triangleq -X + \overline{\tau}_1 H_1 + V_1 + V_1^T + Q_1$$

então este sistema é robustamente estável com nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, para qualquer condição de retardo no tempo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.5). □

Demonstração: Considerando a seguinte identidade:

$$\sum_{k=t-\tau(t)}^{t-1} \Delta x(k) = x(t) - x(t-\tau(t)), \tag{2.41}$$

na qual $\Delta x(k) \triangleq x(k+1) - x(k)$, o sistema (2.8) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (\tilde{A} + \tilde{A}_d)x(t) - \tilde{A}_d \sum_{k=t-\tau(t)}^{t-1} \Delta x(k) + Ew(t), \\ z(t) &= \tilde{C}x(t) + \tilde{C}_d x(t-\tau(t)) + Fw(t). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Considere o seguinte funcional tipo Lyapunov-Krasovskii:

$$V\left(x(t),x(t-\tau_1(t)),w(t),t\right) = V_1 + V_2 + V_3 \tag{2.43}$$

com

$$\begin{aligned} V_1 &= x^T(t)Xx(t)\,, \\ V_2 &= \sum_{s=-\tau_1(t)}^{-1} \sum_{k=t+s}^{t-1} \Delta x^T(k) Z_1 \Delta x(k)\,, \\ V_3 &= \sum_{k=t-\tau_1(t)}^{t-1} x^T(k) Q_1 x(k)\,. \end{aligned}$$

Tomando a diferença de (2.43) obtém-se:

$$\Delta V(\cdot) = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \tag{2.44}$$

com

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= x^T(t)\left[(\tilde{A}+\tilde{A}_d)^T X(\tilde{A}+\tilde{A}_d) - X\right]x(t) \\ &\quad -2x^T(t)(\tilde{A}+\tilde{A}_d)^T X\tilde{A}_d \sum_{k=t-\tau_1(t)}^{t-1} \Delta x(k) &&(2.45) \\ &\quad + \left(\sum_{k=t-\tau_1(t)}^{t-1} \Delta x^T(k)\right) \tilde{A}_d^T X \tilde{A}_d \left(\sum_{k=t-\tau_1(t)}^{t-1} \Delta x(k)\right) &&(2.46) \\ &\quad +2\left[x^T(t)(\tilde{A}+\tilde{A}_d)^T - \sum_{k=t-\tau_1(t)}^{t-1} \Delta x^T(k)\tilde{A}_d^T\right] XEw(t) &&(2.47) \\ &\quad +w^T(t)E^T XEw(t)\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta V_2 &= \tau_1(t)\Delta x^T(t)Z_1\Delta x(t) - \sum_{k=t-\tau_1(t)}^{t-1} \Delta x^T(k)Z_1\Delta x(k) \\
&\leq \tau_1(t)\Delta x^T(t)Z_1\Delta x(t) \qquad (2.48) \\
&\quad - \sum_{k=t-\bar{\tau}_1}^{t-1} \Delta x^T(k)Z_1\Delta x(k)\,, \qquad (2.49) \\
\Delta V_3 &= x^T(t)Q_1x(t) - x^T(t-\tau_1(t))Q_1x(t-\tau_1(t))\,.
\end{aligned}
$$

Aplicando o limitante superior para o produto interno de dois vetores, Lema 2 na página 4, para o termo (2.45), segue que

$$
\begin{aligned}
(2.45) &\leq \tau_1(t)x^T(t)H_1x(t) \\
&\quad +2x^T(t)\left[V_1 - (\tilde{A}+\tilde{A}_d)^T X\tilde{A}_d\right] \sum_{k=t-\tau_1(t)}^{t-1} \Delta x(k) \qquad (2.50) \\
&\quad + \sum_{k=t-\bar{\tau}_1}^{t-1} \Delta x^T(k)Z_1\Delta x(k)\,. \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Esta limitação é verificada se as matrizes H_1, V_1 e Z_1 satisfizerem a restrição:

$$
\begin{bmatrix} H_1 & V_1 \\ V_1^T & Z_1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}\,. \qquad (2.52)
$$

Desenvolvendo os termos (2.46), (2.47), (2.48) e (2.50), realizando as devidas eliminações dos termos (2.49) e (2.51) e considerando $\bar{\tau}_1$ como o limitante para o tamanho do retardo $\tau_1(t)$, pode-se reescrever (2.44) como:

$$
\Delta V(\cdot) \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Lambda_d \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \\ w(t) \end{bmatrix} \qquad (2.53)
$$

com

$$\Lambda_d \triangleq \begin{bmatrix} \Xi & -V + \tilde{A}^T X \tilde{A}_d + \bar{\tau}_1 (\tilde{A} - \mathbf{I})^T Z_1 \tilde{A}_d & \tilde{A}^T X E + \bar{\tau}_1 (\tilde{A} - \mathbf{I})^T Z_1 E \\ * & -Q + \tilde{A}_d^T X \tilde{A}_d + \bar{\tau}_1 \tilde{A}_d^T Z_1 \tilde{A}_d & \tilde{A}_d^T X E + \bar{\tau}_1 \tilde{A}_d^T Z_1 E \\ * & * & E^T X E + \bar{\tau}_1 E^T Z_1 E \end{bmatrix},$$

$$\Xi \triangleq \tilde{A}^T X \tilde{A} - X + \bar{\tau}_1 H_1 + V_1 + V_1^T + Q_1 + \bar{\tau}_1 (\tilde{A} - \mathbf{I})^T Z_1 (\tilde{A} - \mathbf{I}),$$

quando H_1, V_1 e Z_1 satisfizerem (2.52).

Considerando o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$:

$$\mathcal{J} = \sum_{t=0}^{\infty} \left[z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) \right] \tag{2.54}$$

e assumindo, sem perda de generalidade, condições iniciais nulas e estabilidade para o sistema (2.8) implica que $V(\cdot)|_{t=0} = 0$ e $V(\cdot)|_{t\to\infty} \to \varepsilon$, com $\varepsilon \to 0$ se $w(t) = 0$ ou $\varepsilon < \infty$ se $w(t) \neq 0$. Assim, pode-se escrever:

$$\mathcal{J} \leq \sum_{t=0}^{\infty} \left[z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) + \Delta V(\cdot) \right] \tag{2.55}$$

e ainda,

$$\mathcal{J} \leq \sum_{t=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Delta_d \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1(t)) \\ w(t) \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

com

$$\Delta_d \triangleq \Lambda_d + \begin{bmatrix} \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \tilde{C}_d & \tilde{C}^T F \\ * & \tilde{C}_d^T \tilde{C}_d & \tilde{C}_d^T F \\ * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} + F^T F \end{bmatrix},$$

e que expandido através do complemento de Schur fica:

$$\Delta_d \triangleq \begin{bmatrix} \Gamma & -V_1 & \mathbf{0} & \tilde{A}^T X & \bar{\tau}_1 (\tilde{A} - \mathbf{I})^T Z_1 & \tilde{C}^T \\ * & -Q_1 & \mathbf{0} & \tilde{A}_d^T X & \bar{\tau}_1 \tilde{A}_d^T Z_1 & \tilde{C}_d^T \\ * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & E^T X & \bar{\tau}_1 E^T Z_1 & F^T \\ * & * & * & -X & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}_1 Z_1 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0},$$

com

$$\Gamma \triangleq -X + \bar{\tau}_1 H_1 + V_1 + V_1^T + Q_1 \, ,$$

quando H_1, V_1 e Z_1 satisfizerem (2.52).

Considerando que as LMIs (2.39) asseguram que $\Delta_d \prec 0$ para todo o domínio de incertezas $\mathcal{P}$, com base em (2.56) temos que $\mathcal{J} < 0$ para todo $w(t) \in \ell_2$ não nulo. Assim, o sistema (2.8) é garantido ser robustamente estável com nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, para qualquer condição de retardo que satisfaça (2.5), concluindo a demonstração. ■

2.5 Conclusão

Neste capítulo, os problemas de análise de estabilidade robusta $\mathcal{H}_\infty$ e de síntese de controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$ considerados neste trabalho de dissertação foram apresentados em formulações gerais e em formulações específicas, considerando classes particulares de sistemas. Abordagens dependentes do retardo foram desenvolvidas em termos de LMIs e apresentadas nas formas de teoremas e corolários para tratarem os problemas formulados, voltados a análise de estabilidade robusta e desempenho $\mathcal{H}_\infty$.

Capítulo 3

Síntese de Controle $\mathcal{H}_\infty$

3.1 Introdução

Neste capítulo abordagens dependentes do retardo no tempo serão desenvolvidas para a síntese de controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$ a partir dos resultados de análise de estabilidade robusta e desempenho $\mathcal{H}_\infty$ desenvolvidos no capítulo anterior.

3.2 Sistemas a Tempo Contínuo

3.2.1 Resolvendo o Problema $P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_{1,2}}$

Teorema 4 *Considere o sistema em malha aberta (2.3). Sejam $\bar{\tau}_{1,2}$ e $\varsigma_{1,2}$ os respectivos limitantes para o tamanho dos retardos $\tau_{1,2}(t)$ e suas taxas de variações e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Se existirem matrizes simétricas $Y \succ \mathbf{0}$, $M_{1,2} \succ \mathbf{0}$, $W_{1,2} \succ \mathbf{0}$ e $R_{1,2} \succ \mathbf{0}$ e matrizes $N_{1,2}$ e L que satisfaçam as desigualdades matriciais:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & \Psi_{12i} & \Psi_{13i} & E_i & e_1\Psi_{15i} & e_2\Psi_{16i} & \Psi_{17i} \\ * & -W_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & e_1 Y A_{di}^T & e_2 Y A_{di}^T & Y C_{di}^T \\ * & * & -W_2 & \mathbf{0} & e_1 L^T B_{di}^T & e_2 L^T B_{di}^T & L^T D_{di}^T \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & e_1 E_i^T & e_2 E_i^T & F_i^T \\ * & * & * & * & -e_1 R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -e_2 R_2 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{3.1}$$

$$\forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ N_1^T & YR_1^{-1}Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} M_2 & N_2 \\ N_2^T & YR_2^{-1}Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{3.2}$$

com

$$\begin{aligned}
\Psi_{11i} &\triangleq A_iY + YA_i^T + B_iL + L^TB_i^T + \bar{\tau}_1M_1 + \bar{\tau}_2M_2 \\
&\quad + N_1 + N_1^T + N_2 + N_2^T + \frac{1}{1-\varsigma_1}W_1 + \frac{1}{1-\varsigma_2}W_2 \\
\Psi_{12i} &\triangleq A_{di}Y - N_1 \\
\Psi_{13i} &\triangleq B_{di}L - N_2 \\
\Psi_{15i} &\triangleq YA_i^T + L^TB_i^T \\
\Psi_{16i} &\triangleq YA_i^T + L^TB_i^T \\
\Psi_{17i} &\triangleq YC_i^T + L^TD_i^T \\
e_1 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_1}{1-\varsigma_1} \\
e_2 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_2}{1-\varsigma_2}
\end{aligned}$$

então este sistema é estabilizável por um controlador $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estados de ganho $K = LY^{-1}$ que garante ao sistema em malha fechada (2.7) estabilidade robusta para quaisquer condições de retardos $\tau_{1,2}(t)$ que satisfaçam (2.4) e nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ para todo $w(t) \in \mathcal{L}_2$ não nulo. □

Nota 1 *Este último teorema descreve condições suficientes para se obter um controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$.No entanto, as desigualdades matriciais (3.1)-(3.2) não formam um conjunto de LMIs. Assim, a procura por uma solução factível para as variáveis matriciais é descrita como um procedimento de otimização não-convexo. Duas alternativas serão apresentadas para a solução do teorema. A primeira, mais simples, porém como será discutido mais conservadora, envolve uma escolha particular para as variáveis $R_{1,2}$ em (3.2), tornando o problema convexo. A segunda considera uma estratégia para lidar com as desigualdades matriciais não-convexas, porém ao custo de não haver um solução numérica sistemática globalmente convergente. Na seção 3.4 serão apresentados detalhes de como estes dois tópicos podem ser abordados a fim de se construir estratégias de solução para todos os teoremas e corolários desenvolvidos neste trabalho para tratarem os problemas de controle $\mathcal{H}_\infty$ definidos no capítulo anterior.* △

A demonstração do Teorema 4 parte do resultado de análise apresentado no Teorema 1.
Demonstração: Pré e pós-multiplicando a LMI (2.10) pela transformação de similaridade

$$\text{diag}\left[X^{-1}, X^{-1}, X^{-1}, \mathbf{I}, Z_1^{-1}, Z_2^{-1}, \mathbf{I}\right], \tag{3.3}$$

com $\tilde{A}_i$ e $\tilde{C}_i$ substituídos pelas expressões $A_i + B_iK$ e $C_i + D_iK$, respectivamente, obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccccccc} \tilde{\Upsilon}_{11i} & \tilde{\Upsilon}_{12i} & \tilde{\Upsilon}_{13i} & E_i & e_1(X^{-1}A_i^T + X^{-1}K^TB_i^T) & e_2(X^{-1}A_i^T + X^{-1}K^TB_i^T) & X^{-1}C_i^T + X^{-1}K^TD_i^T \\ * & -X^{-1}Q_1X^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & e_1X^{-1}A_{di}^T & e_2X^{-1}A_{di}^T & X^{-1}C_{di}^T \\ * & * & -X^{-1}Q_2X^{-1} & \mathbf{0} & e_1X^{-1}K^TB_{di}^T & e_2X^{-1}K^TB_{di}^T & X^{-1}K^TD_{di}^T \\ * & * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & e_1E_i^T & e_2E_i^T & F_i^T \\ * & * & * & * & -e_1Z_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -e_2Z_1^{-1} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{array}\right] \prec \mathbf{0} \tag{3.4}$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}_{11i} &\triangleq A_iX^{-1} + X^{-1}A_i^T + B_iKX^{-1} + X^{-1}K^TB_i^T + \bar{\tau}_1X^{-1}H_1X^{-1} \\ &\quad + \bar{\tau}_2X^{-1}H_2X^{-1} + X^{-1}V_1X^{-1} + X^{-1}V_1^TX^{-1} + X^{-1}V_2X^{-1} \\ &\quad + X^{-1}V_2^TX^{-1} + \frac{1}{1-\varsigma_1}X^{-1}Q_1X^{-1} + \frac{1}{1-\varsigma_2}X^{-1}Q_2X^{-1}, \\ \tilde{\Upsilon}_{12i} &\triangleq A_{di}X^{-1} - X^{-1}V_1X^{-1}, \\ \tilde{\Upsilon}_{13i} &\triangleq B_{di}KX^{-1} - X^{-1}V_2X^{-1}, \\ e_1 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_1}{1-\varsigma_1}, \\ e_2 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_2}{1-\varsigma_2}. \end{aligned}$$

Pré e pós-multiplicando as LMIs (2.11) pela transformação de similaridade

$$\text{diag}\left[X^{-1}, X^{-1}\right], \tag{3.5}$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} X^{-1}H_1X^{-1} & X^{-1}V_1X^{-1} \\ X^{-1}V_1^TX^{-1} & X^{-1}Z_1X^{-1} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} X^{-1}H_2X^{-1} & X^{-1}V_2X^{-1} \\ X^{-1}V_2^TX^{-1} & X^{-1}Z_2X^{-1} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Considerando as mudanças de variáveis: $Y \equiv X^{-1}$, $M_{1,2} \equiv X^{-1}H_{1,2}X^{-1}$, $N_{1,2} \equiv X^{-1}V_{1,2}X^{-1}$, $W_{1,2} \equiv X^{-1}Q_{1,2}X^{-1}$, $R_{1,2} \equiv Z_{1,2}^{-1}$ e $L \equiv KX^{-1}$ obtém-se imediatamente as restrições (3.1) e (3.2), concluindo a demonstração. ■

Para o caso particular em que o sistema (2.3) apresente retardos constantes no tempo o Teorema 4 se reduz ao seguinte resultado:

Corolário 3 *Considere o sistema em malha aberta (2.3) sujeito a retardos constantes no tempo, ou seja, $\dot{\tau}_{1,2} \equiv 0$. Sejam $\bar{\tau}_{1,2}$ os limitantes para o tamanho dos retardos $\tau_{1,2}(t)$ e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Se existirem matrizes simétricas $Y \succ \mathbf{0}$, $M_{1,2} \succ \mathbf{0}$, $W_{1,2} \succ \mathbf{0}$ e $R_{1,2} \succ \mathbf{0}$ e matrizes $N_{1,2}$ e L que satisfaçam as desigualdades matriciais:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & \Psi_{12i} & \Psi_{13i} & E_i & \bar{\tau}_1\Psi_{15i} & \bar{\tau}_2\Psi_{16i} & \Psi_{17i} \\ * & -W_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\tau}_1YA_{di}^T & \bar{\tau}_2YA_{di}^T & YC_{di}^T \\ * & * & -W_2 & \mathbf{0} & \bar{\tau}_1L^TB_{di}^T & \bar{\tau}_2L^TB_{di}^T & L^TD_{di}^T \\ * & * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & \bar{\tau}_1E_i^T & \bar{\tau}_2E_i^T & F_i^T \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}_1R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -\bar{\tau}_2R_2 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{3.7}$$

$$\forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ N_1^T & YR_1^{-1}Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} M_2 & N_2 \\ N_2^T & YR_2^{-1}Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{3.8}$$

com

$$\begin{aligned} \Psi_{11i} \quad &\triangleq \quad A_iY + YA_i^T + B_iL + L^TB_i^T + \bar{\tau}_1M_1 + \bar{\tau}_2M_2 \\ &\quad +N_1 + N_1^T + N_2 + N_2^T + W_1 + W_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{12i} &\triangleq A_{di}Y - N_1 \\
\Psi_{13i} &\triangleq B_{di}L - N_2 \\
\Psi_{15i} &\triangleq YA_i^T + L^T B_i^T \\
\Psi_{16i} &\triangleq YA_i^T + L^T B_i^T \\
\Psi_{17i} &\triangleq YC_i^T + L^T D_i^T
\end{aligned}$$

então este sistema é estabilizável por um controlador $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estados de ganho $K = LY^{-1}$ que garante ao sistema em malha fechada (2.7) estabilidade robusta para quaisquer condições de retardos constantes $\tau_{1,2}(t)$ que satisfaçam (2.4) e nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ para todo $w(t) \in \mathcal{L}_2$ não nulo. □

3.2.2 Resolvendo o Problema $P\mathcal{C}^{\tau_1}_{\infty c}$

Teorema 5 *Considere o sistema em malha aberta (2.3) onde $\tau_2(t) = \tau_1(t)$. Seja $\bar{\tau}_1$ e ς_1 os respectivos limitantes para o tamanho do retardo $\tau_1(t)$ e sua taxa de variação e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Se existirem matrizes simétricas $Y \succ \mathbf{0}$, $M_1 \succ \mathbf{0}$, $W_1 \succ \mathbf{0}$ e $R_1 \succ \mathbf{0}$ e matrizes N_1 e L que satisfaçam as desigualdades matriciais:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & \Psi_{12i} & E_i & e_1(YA_i^T + L^T B_i^T) & YC_i^T + L^T D_i^T \\ * & -W_1 & \mathbf{0} & e_1(YA_{di}^T + L^T B_{di}^T) & YC_{di}^T + L^T D_{di}^T \\ * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & e_1 E_i^T & F_i^T \\ * & * & * & -e_1 R_1 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{3.9}$$

$$\forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ N_1^T & YR_1^{-1}Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{3.10}$$

com

$$\begin{aligned}
\Psi_{11i} &\triangleq A_iY + YA_i^T + B_iL + L^T B_i^T + \bar{\tau}_1 M_1 + N_1 + N_1^T + \frac{1}{1-\varsigma_1}W_1 \\
\Psi_{12i} &\triangleq A_{di}Y + B_{di}L - N_1 \\
e_1 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_1}{1-\varsigma_1}
\end{aligned}$$

então este sistema é estabilizável por um controlador $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estados de ganho $K = LY^{-1}$ que garante ao sistema em malha fechada (2.8) estabilidade robusta para qualquer condição de retardo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.4) e nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ para todo $w(t) \in \mathcal{L}_2$ não nulo. □

A demonstração deste teorema parte do resultado de análise apresentado no Teorema 2.

Demonstração: Pré e pós-multiplicando a LMI (2.33) pela transformação de similaridade

$$\text{diag}\left[X^{-1}, X^{-1}, \mathbf{I}, Z_1^{-1}, \mathbf{I}\right], \tag{3.11}$$

com $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_{di}$, $\tilde{C}_i$ e $\tilde{C}_{di}$ substituídos pelas expressões $A_i + B_iK$, $A_{di} + B_{di}K$, $C_i + D_iK$ e $C_{di} + D_{di}K$, respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_{11i} & \tilde{\Upsilon}_{12i} & E_i & e_1(X^{-1}A_i^T + X^{-1}K^TB_i^T) & X^{-1}C_i^T + X^{-1}K^TD_i^T \\ * & -X^{-1}Q_1X^{-1} & \mathbf{0} & e_1(X^{-1}A_{di}^T + X^{-1}K^TB_{di}^T) & X^{-1}C_{di}^T + X^{-1}K^TD_{di}^T \\ * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & e_1E_i^T & F_i^T \\ * & * & * & -e_1Z_1^{-1} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{3.12}$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}_{11i} &\triangleq A_iX^{-1} + X^{-1}A_i^T + B_iKX^{-1} + X^{-1}K^TB_i^T + \bar{\tau}_1X^{-1}H_1X^{-1} \\ &\quad + X^{-1}V_1X^{-1} + X^{-1}V_1^TX^{-1} + \frac{1}{1-\varsigma_1}X^{-1}Q_1X^{-1}, \\ \tilde{\Upsilon}_{12i} &\triangleq A_{di}X^{-1} + B_{di}KX^{-1} - X^{-1}V_1X^{-1}, \\ e_1 &\triangleq \frac{\bar{\tau}_1}{1-\varsigma_1}. \end{aligned}$$

Pré e pós-multiplicando a LMI (2.34) pela transformação de similaridade

$$\text{diag}\left[X^{-1}, X^{-1}\right], \tag{3.13}$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} X^{-1}H_1X^{-1} & X^{-1}V_1X^{-1} \\ X^{-1}V_1^TX^{-1} & X^{-1}Z_1X^{-1} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \tag{3.14}$$

Considerando as mudanças de variáveis: $Y \equiv X^{-1}$, $M_1 \equiv X^{-1}H_1X^{-1}$, $N_1 \equiv X^{-1}V_1X^{-1}$, $W_1 \equiv X^{-1}Q_1X^{-1}$, $R_1 \equiv Z_1^{-1}$ e $L \equiv KX^{-1}$ obtém-se imediatamente as restrições (3.9) e (3.10), concluindo a demonstração. ■

Para o caso particular em que o sistema (2.3) apresente um mesmo retardo constante no tempo para o vetor de entradas de controle e para o vetor de estados, o Teorema 5 se reduz ao seguinte resultado:

Corolário 4 *Considere o sistema em malha aberta (2.3) sujeito a retardos constantes no tempo com $\tau_2(t) = \tau_1(t)$. Seja $\bar{\tau}_1$ o limitante para o tamanho do retardo $\tau_1(t)$ e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Se existirem matrizes simétricas $Y \succ \mathbf{0}$, $M_1 \succ \mathbf{0}$, $W_1 \succ \mathbf{0}$ e $R_1 \succ \mathbf{0}$ e matrizes N_1 e L que satisfaçam as desigualdades matriciais:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & \Psi_{12i} & E_i & \bar{\tau}_1(YA_i^T + L^TB_i^T) & YC_i^T + L^TD_i^T \\ * & -W_1 & \mathbf{0} & \bar{\tau}_1(YA_{di}^T + L^TB_{di}^T) & YC_{di}^T + L^TD_{di}^T \\ * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & \bar{\tau}_1E_i^T & F_i^T \\ * & * & * & -\bar{\tau}_1R_1 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{3.15}$$

$$\forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ N_1^T & YR_1^{-1}Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{3.16}$$

com

$$\begin{aligned} \Psi_{11i} &\triangleq A_iY + YA_i^T + B_iL + L^TB_i^T + \bar{\tau}_1M_1 + N_1 + N_1^T + W_1 \\ \Psi_{12i} &\triangleq A_{di}Y + B_{di}L - N_1 \end{aligned}$$

então este sistema é estabilizável por um controlador $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estados de ganho $K = LY^{-1}$ que garante ao sistema em malha fechada (2.8) estabilidade robusta para qualquer condição de retardo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.4) e nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ para todo $w(t) \in \mathcal{L}_2$ não nulo. □

3.3 Sistemas a Tempo Discreto

3.3.1 Resolvendo o Problema $P\mathcal{C}_{\infty d}^{\tau_1}$

Teorema 6 *Considere o sistema em malha aberta (2.3) com $\tau_2(t) = \tau_1(t)$. Seja $\bar{\tau}_1$ o limitante para o tamanho do retardo $\tau_1(t)$ e $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Se existirem matrizes simétricas $Y \succ \mathbf{0}$, $M_1 \succ \mathbf{0}$, $W_1 \succ \mathbf{0}$ e $R_1 \succ \mathbf{0}$ e matrizes N_1 e L que satisfaçam as desigualdades matriciais:*

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & -N_1 & \mathbf{0} & \Phi_{14i} & \bar{\tau}_1\Phi_{15i} & \Phi_{16i} \\ * & -W_1 & \mathbf{0} & \Phi_{24i} & \bar{\tau}_1\Phi_{25i} & \Phi_{26i} \\ * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & E_i^T & \bar{\tau}_1 E_i^T & F_i^T \\ * & * & * & -Y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}R_1 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{3.17}$$

$$\forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ N_1^T & YR_1^{-1}Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{3.18}$$

com

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &\triangleq -Y + \bar{\tau}_1 M_1 + N_1 + N_1^T + W_1\,, \\ \Phi_{14i} &\triangleq YA_i^T + L^T B_i^T\,, \\ \Phi_{15i} &\triangleq YA_i^T + L^T B_i^T - Y\,, \\ \Phi_{16i} &\triangleq YC_i^T + L^T D_i^T\,, \\ \Phi_{24i} &\triangleq YA_{di}^T + L^T B_{di}^T\,, \\ \Phi_{25i} &\triangleq YA_{di}^T + L^T B_{di}^T\,, \\ \Phi_{26i} &\triangleq YC_{di}^T + L^T D_{di}^T\,. \end{aligned}$$

então este sistema é estabilizável por um controlador $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estados de ganho $K = LY^{-1}$ que garante ao sistema em malha fechada (2.8) estabilidade robusta para qualquer condição de retardo $\tau_1(t)$ que satisfaça (2.5) e nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ para todo $w(t) \in \ell_2$ não nulo. □

A demonstração deste teorema parte do resultado de análise apresentado no Teorema 3.

Demonstração: Pré e pós-multiplicando a LMI (2.39) pela transformação de similaridade

$$\text{diag}\left[X^{-1}, X^{-1}, \mathbf{I}, X^{-1}, Z_1^{-1}, \mathbf{I}\right], \tag{3.19}$$

com $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_{di}$, $\tilde{C}_i$ e $\tilde{C}_{di}$ substituídos pelas expressões $A_i + B_i K$, $A_{di} + B_{di} K$, $C_i + D_i K$ e $C_{di} + D_{di} K$, respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma} & -X^{-1}V_1X^{-1} & \mathbf{0} & X^{-1}A_i^T + X^{-1}K^TB_i^T & \bar{\tau}_1(X^{-1}A_i^T + X^{-1}K^TB_i^T - X^{-1}) & X^{-1}C_i^T + X^{-1}K^TD_i^T \\ * & -X^{-1}Q_1X^{-1} & \mathbf{0} & X^{-1}A_{di}^T + X^{-1}K^TB_{di}^T & \bar{\tau}_1(X^{-1}A_{di}^T + X^{-1}K^TB_{di}^T) & X^{-1}C_{di}^T + X^{-1}K^TD_{di}^T \\ * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & E_i^T & \bar{\tau}_1E_i^T & F_i^T \\ * & * & * & -X^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}_1Z_1^{-1} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{3.20}$$

com

$$\tilde{\Gamma} \triangleq -X^{-1} + \bar{\tau}_1X^{-1}H_1X^{-1} + X^{-1}V_1X^{-1} + X^{-1}V_1^TX^{-1} + X^{-1}Q_1X^{-1}.$$

Pré e pós-multiplicando a LMI (2.40) pela transformação de similaridade

$$\text{diag}\left[X^{-1}, X^{-1}\right], \tag{3.21}$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} X^{-1}H_1X^{-1} & X^{-1}V_1X^{-1} \\ X^{-1}V_1^TX^{-1} & X^{-1}Z_1X^{-1} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \tag{3.22}$$

Considerando as mudanças de variáveis: $Y \equiv X^{-1}$, $M_1 \equiv X^{-1}H_1X^{-1}$, $N_1 \equiv X^{-1}V_1X^{-1}$, $W_1 \equiv X^{-1}Q_1X^{-1}$, $R_1 \equiv Z_1^{-1}$ e $L \equiv KX^{-1}$ obtém-se imediatamente as restrições (3.17) e (3.18), concluindo a demonstração. ■

3.4 Métodos para Linearização

Para se transformar os conjuntos de desigualdades matriciais dos Teoremas 4, 5 e 6 e Corolários 3 e 4 em conjuntos de LMIs, afim de se resolverem os problemas $(P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_{1,2}})$, $(P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_1})$ e $(P\mathcal{C}_{\infty d}^{\tau_1})$ como problemas de factibilidade ou otimização linear, propõe-se duas opções: (i) Adota-se uma linearização forçada fazendo $R_{1,2} = Y$, ou (ii) adota-se o mesmo procedimento proposto em [13] e [21] no qual as desigualdades matriciais

$$\begin{bmatrix} M_{1,2} & N_{1,2} \\ * & YR_{1,2}^{-1}Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \tag{3.23}$$

são substituídas pelo conjunto de desigualdades matriciais linearizante

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} M_{1,2} & N_{1,2} \\ * & S_{1,2} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}\,, \quad \begin{bmatrix} \hat{S}_{1,2} & \hat{Y}_{1,2} \\ * & \hat{R}_{1,2} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}\,, \\ \begin{bmatrix} S_{1,2} & \mathbf{I} \\ * & \hat{S}_{1,2} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}\,, \quad \begin{bmatrix} Y & \mathbf{I} \\ * & \hat{Y}_{1,2} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}\,, \quad \begin{bmatrix} R_{1,2} & \mathbf{I} \\ * & \hat{R}_{1,2} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \end{gathered} \tag{3.24}$$

e os problemas de factibilidade não-convexos definidos pelos Teoremas 4, 5 e 6 e Corolários 3 e 4 passam a ser tratados como problemas de otimização não-lineares sujeitos a restrições LMIs.

Embora a primeira opção para linearização seja simples e conduza a formulações de problemas lineares convexos para a solução dos teoremas e corolários mencionados, essa escolha, inevitavelmente, introduz conservantismo nas soluções destes problemas, haja visto que, o espaço de procura de soluções sofre uma limitação com a perda de tantos graus de liberdade quanto for o número de variáveis eliminadas.

A segunda opção permite que se obtenham soluções menos conservadoras que a primeira, no entanto, faz-se necessário a utilização de um mecanismo iterativo de solução descrito pelo seguinte algoritmo baseado no método de linearização descrito em [19].

Algoritmo de Linearização[4]:

1. Dados os limitantes dos retardos no tempo $\bar{\tau}_{1,2}$ e $\varsigma_{1,2}$ e o nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ inicialize uma variável de contagem $(k = 0)$ e encontre um conjunto factível

[4]O algoritmo apresentado está associado a resolução do Teorema 4. Considerando-se os Teoremas 5 e 6 e Corolários 3 e 4 devidas adaptações deverão ser realizadas.

de matrizes $\left(S^0_{1,2}, Y^0, R^0_{1,2}, \hat{S}^0_{1,2}, \hat{Y}^0_{1,2}, \hat{R}^0_{1,2}\right)$ que satisfaçam as restrições (3.1) e (3.24).

2. Resolva o problema

$$\begin{cases} \min\limits_{\left(M_{1,2}, W_{1,2}, N_{1,2}, L, S_{1,2}, Y, R_{1,2}, \hat{S}_{1,2}, \hat{Y}_{1,2}, \hat{R}_{1,2}\right)} & \text{Traço}\left\{f^k\right\} \\ \\ \text{s.a} & (3.1) \text{ e } (3.24) \end{cases}$$

com

$$\begin{aligned} f^k \;\triangleq\; & \left[\left(\hat{S}^k_1 S_1 + S^k_1 \hat{S}_1 + \hat{Y}^k_1 Y + Y^k \hat{Y}_1 + \hat{R}^k_1 R_1 + R^k_1 \hat{R}_1\right)\right. \\ & \left. + \left(\hat{S}^k_2 S_2 + S^k_2 \hat{S}_2 + \hat{Y}^k_2 Y + Y^k \hat{Y}_2 + \hat{R}^k_2 R_2 + R^k_2 \hat{R}_2\right)\right]. \end{aligned}$$

3. Se o Traço$\left\{f^k\right\} \rightarrow [(3n)+(3n)]$ e as desigualdades matriciais (3.2) são verificadas, então existe um controlador $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estados de ganho $K = LY^{-1}$ que garante o nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ dado. Termine retornando o ganho K do controlador $\mathcal{H}_\infty$. Se as desigualdades matriciais (3.2) não são verificadas então faça $\hat{S}^{k+1}_1 = \hat{S}_1$, $S^{k+1}_1 = S_1$, $\hat{Y}^{k+1}_1 = \hat{Y}_1$, $Y^{k+1} = Y$, $\hat{R}^{k+1}_1 = \hat{R}_1$, $R^{k+1}_1 = R_1$, $\hat{S}^{k+1}_2 = \hat{S}_2$, $S^{k+1}_2 = S_2$, $\hat{Y}^{k+1}_2 = \hat{Y}_2$, $\hat{R}^{k+1}_2 = \hat{R}_2$, $R^{k+1}_2 = R_2$ e incremente o contador de iteração $(k = k+1)$. Se $k < k_{\text{max}}$ (k_{max} representa o número máximo de interações permitidas) então retorne ao passo 2, caso contrário, termine retornando que não foi possível obter a solução com k_{max} iterações.

Baseando-se no algoritmo apresentado dois caminhos podem ser seguidos. O primeiro está relacionado com o problema de se determinarem os valores máximos permitidos para os limitantes $\bar{\tau}_{1,2}$ dos retardos no tempo. Para isto basta adicionar a seguinte informação ao passo 3: se as desigualdades matriciais (3.2) são verificadas então $\bar{\tau}_1$ e/ou $\bar{\tau}_2$ podem ser aumentados e o algoritmo deve retornar ao passo 2. O segundo caminho está relacionado ao problema de se determinar o valor mínimo para o nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. Procede-se de maneira similar ao caso anterior adicionado a seguinte informação ao passo 3 do algoritmo proposto: se as desigualdades matriciais (3.2) são verificadas então γ pode ser reduzido e o algoritmo deve retornar ao passo 2.

Ainda com relação ao problema de se determinar o valor mínimo para o nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ deve-se ressaltar que a utilização do procedimento de linearização forçada pode ser vista como um ponto de partida, no qual se determina um valor inicial γ a ser utilizado na inicialização do algoritmo de linearização.

Deve-se ressaltar que algoritmo de linearização tende a ser bastante sensível às variações nos parâmetros $\bar{\tau}_{1,2}$ e γ à medida que estes se aproximam dos valores ótimos. Esta sensibilidade poderá ser percebida com o crescimento do número de iterações necessárias no intervalo entre as variações em $\bar{\tau}_{1,2}$ ou γ.

3.5 Conclusão

Neste capítulo abordagens dependentes do retardo no tempo foram desenvolvidas sob formas de teoremas e corolários para a síntese de controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$. Os teoremas e corolários apresentados recaem em problemas de factibilidade não-convexos. Como alternativas para a solução destes problemas foram apresentados dois procedimentos. O primeiro baseando-se em uma linearização forçada através de uma escolha particular para as variáveis $R_{1,2}$ e segundo baseando-se em um mecanismo iterativo descrito por um algoritmo de linearização.

Capítulo 4

Exemplos Numéricos

4.1 Introdução

Neste capítulo, uma série de exemplos numéricos serão realizados, afim de se evidenciarem as potencialidades e eventuais deficiências das abordagens desenvolvidas neste trabalho. Todos os exemplos considerados foram retirados de literatura recente abordando o tema [6], [8], [9], [10], [11], [16] e [28]. O desenvolvimento dos exemplos apresentados terá um caráter fortemente comparativo entre as diversas abordagens existentes na literatura e as desenvolvidas neste trabalho.

4.2 Exemplo 1: $P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_1}$

Este exemplo considera um modelo de sistema bastante estudado na literatura[5], sendo um caso particular do problema $(P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_1})$.

Considere o seguinte sistema contínuo, LIT e sujeito a retardo constante no tempo no vetor de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-\tau_1) + Bu(t) + Ew(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

descrito, de acordo com a descrição generalizada de sistema (2.3), pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1], \quad C_d = [0 \quad 0], \quad D = 0.1 \ , \quad D_d = 0 \ , \quad F = 0$$

[5]Investigado em [8], [9], [10] e [11], sendo uma adaptação do sistema do Exemplo 2 de [6].

A natureza contínua e constante do retardo no tempo τ_1 que atua neste sistema implica a consideração dos limitantes do retardo no tempo como sendo[6]: $\bar{\tau}_1 \in \mathbb{R}^+$ e $\varsigma_1 = 0$ (satisfazendo as restrições (2.4)). Assim, para este problema, utilizar-se-ão os Corolários 2 e 4, para fins de análise de estabilidade $\mathcal{H}_\infty$ e síntese de controlador $\mathcal{H}_\infty$, respectivamente. (Veja páginas 24 e 36).

Como apresentado[7] em [8], [10] e [11], utilizando-se o método indicado no Corolário 3.2 de [6], o valor mínimo do nível γ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, obtido para uma condição de retardo constante no tempo limitado a $\bar{\tau}_1 = 0.999s$, foi

$$\gamma_{[6]} = 1.8822$$

com ganho

$$K_{[6]} = [-0.10452 \quad -749058]$$

para o controlador de realimentação de estados.

Por outro lado, utilizando-se o Corolário 6 de [10] e o Lema 3.1 de [8], valores mínimos idênticos para o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ foram obtidos

$$\gamma_{[10]} = \gamma_{[8]} = 0.22844$$

com o mesmo ganho

$$K_{[10]} = K_{[8]} = [0 \quad -182194]$$

Utilizando-se o Corolário 2 em conjunto com o algoritmo de linearização proposto na página 39, pode-se obter, para a mesma condição de retardo no tempo $\bar{\tau}_1 = 0.999s$ e o mesmo nível $\gamma = 0.22844$ (obtido acima), o seguinte ganho para o controlador $\mathcal{H}_\infty$

$$K = [-0.0006 \quad -14.4847]$$

Entretanto, despendendo um pouco mais de esforço computacional, pode-se obter um nível

[6] Em [10] e [11] fez-se a mesma consideração ao se utilizar a abordagem para retardos variantes no tempo.

[7] Os resultados apresentados em [10] e [11] são idênticos. Assim, apenas os resultados de [10] serão referenciados.

garantido de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$

$$\gamma = 0.2$$

com ganho

$$\mathcal{K}_1 = [-0.00023 \quad -14.6794]$$

Utilizando-se o Corolário 4 e considerando o sistema (4.1) realimentado com o controlador $\mathcal{K}_1$, pode-se verificar que o controlador $\mathcal{K}_1$ assegura um nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$

$$\gamma_a = 0.1770$$

ao sistema realimentado.

A evolução dos estados do sistema (4.1) realimentado com o controlador $\mathcal{K}_1$, para a condição inicial $x(t) = [1 \;\; 1]^T \, \forall t \in [\bar{\tau}_1, 0)$ e condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 0.999s$, é apresentada na figura 4.1.

O diagrama de valores singulares da matriz de transferência H_{zw} é apresentado na figura 4.2. Observa-se a consistência das informações sobre o valor singular máximo $\sigma_{max}(H_{zw}) = 0.1758$ e o nível $\gamma_a = 0.1770$ assegurado.

Em um outro cenário, onde o objetivo principal é encontrar um controlador $\mathcal{H}_\infty$, tal que o sistema realimentado suporte o maior retardo no tempo possível, tem-se que o método apresentado em [6], Corolário 3.2, permite que se encontre controladores para o retardo máximo $\bar{\tau}_1 = 0.999s$. Em [9], o maior retardo no tempo permitido é $\bar{\tau}_{[9]} = 1.28s$, com $\gamma_{[9]} = 0.18$ e ganho

$$K_{[9]} = [0 \quad -130.38]$$

Já em [10], usando o Teorema 5, o maior retardo no tempo permitido é $\bar{\tau}_{[10]} = 1.408s$, com $\gamma_{[10]} = 106.1506$ e ganho

$$K_{[10]} = [-156.36 \quad -1439.66]$$

Por outro lado, utilizando-se a abordagem desenvolvida neste trabalho, Corolário 2 e algoritmo

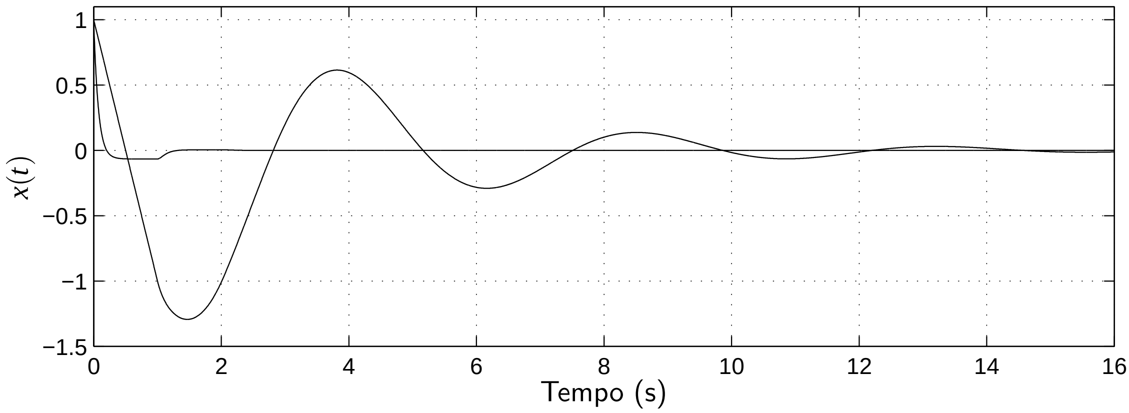

Figura 4.1: *Evolução dos estados do sistema (4.1) realimentado com $\mathcal{K}_1$ para a condição de retardo constante no tempo* $\tau_1 = 0.999s$.

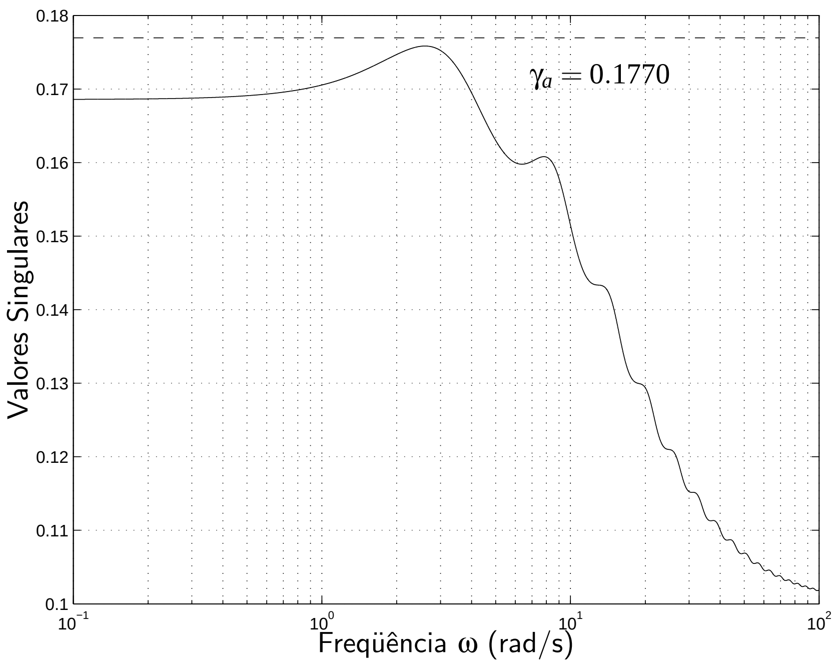

Figura 4.2: *Diagrama de valores singulares da matriz de transferência H_{zw} do sistema (4.1) realimentado com $\mathcal{K}_1$ para condição de retardo constante no tempo* $\tau_1 = 0.999s$.

de linearização, mesmo para a condição de retardo limitado no tempo $\bar{\tau}_1 = 5s$, pode-se obter um controlador $\mathcal{H}_\infty$ estabilizante para o sistema (4.1), descrito por:

$$\mathcal{K}_2 = [-102.4825 \quad -136.66]$$

que garante um nível $\gamma = 22$. Entretanto, como se pode notar, o aumento do tamanho do retardo máximo que o sistema pode suportar implica na degradação do nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$.

A evolução dos estados do sistema (4.1) realimentado com o controlador $\mathcal{K}_2$, para uma condição inicial $x(t) = [1 \ \ 1]^T \, \forall t \in [\bar{\tau}_1, 0)$ e condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 5s$, é apresentada na figura 4.3.

Na figura 4.4, apresenta-se a evolução dos estados do sistema (4.1) para dois casos. O primeiro caso considera o sistema realimentado com o controlador obtido em [10], $K_{[10]}$, para o qual o máximo retardo no tempo permitido foi $\bar{\tau}_{[10]} = 1.408s$ (traço contínuo). O segundo caso considera o sistema realimentado com o controlador $\mathcal{K}_2$, obtido usando-se a abordagem desenvolvida neste trabalho, para a condição de retardo máximo limitado a $\bar{\tau}_1 = 5s$, porém sujeito à mesma condição de retardo $\tau_1 = 1.408s$ (traço descontínuo).

A figura 4.5 apresenta a evolução dos estados do sistema (4.1) realimentado com o controlador $K_{[10]}$, para a condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 5s$. Observa-se a incapacidade deste controlador de se garantir a estabilização do sistema realimentado para esta condição de retardo, uma vez que os estados dos sistema tendem afastar-se da origem.

Como observação final, considerando o sistema realimentado com o controlador $\mathcal{K}_2$ e sujeito a retardo no tempo $\bar{\tau}_1 = 1.408s$, obtém-se, através do Corolário 4, que este controlador assegura um nível $\gamma_a = 3.5345$ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. $\Diamond$

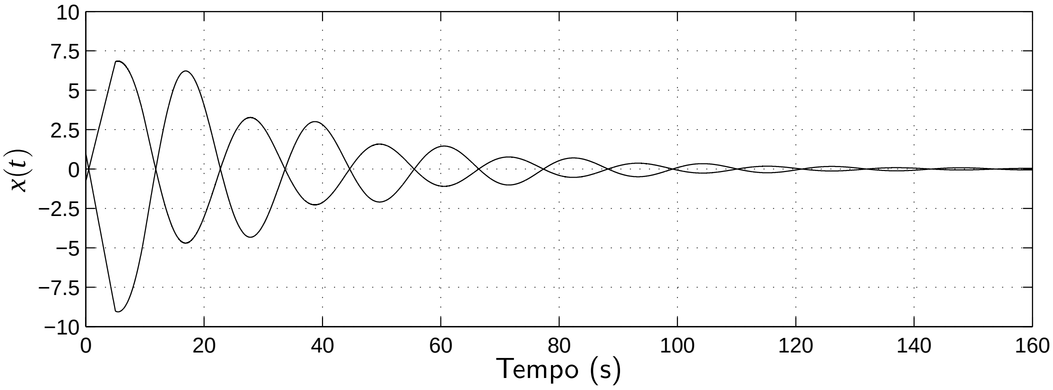

Figura 4.3: *Evolução dos estados do sistema (4.1) realimentado com $\mathcal{K}_2$ para a condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 5s$.*

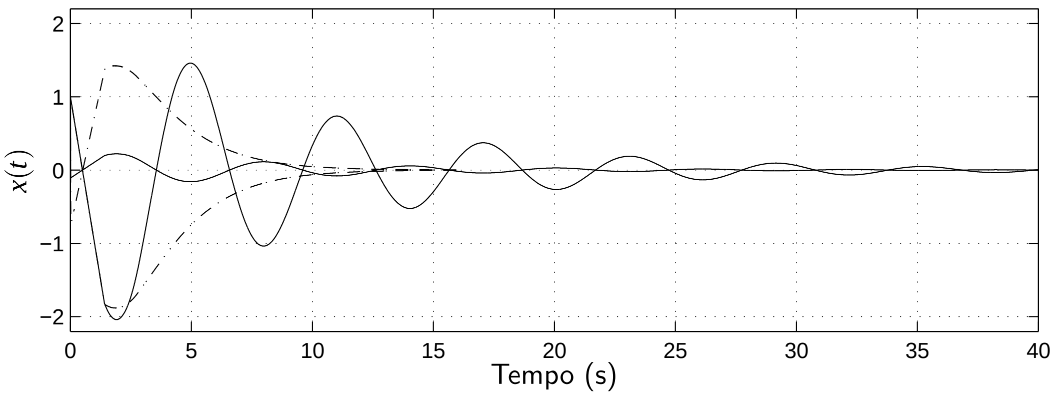

Figura 4.4: *Evolução dos estados do sistema (4.1) realimentado com $K_{[10]}$ (traço contínuo) e $\mathcal{K}_2$ (traço descontínuo) para a condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 1.408s$.*

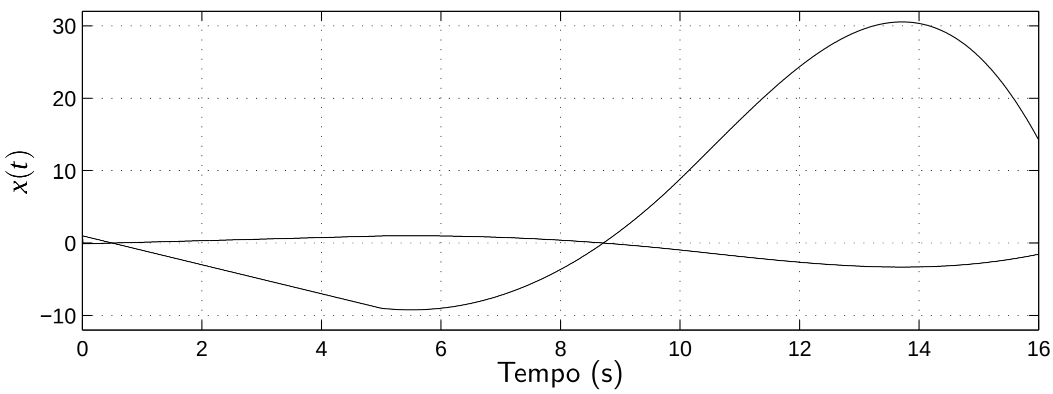

Figura 4.5: *Evolução dos estados do sistema (4.1) realimentado com $K_{[10]}$ para a condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 5s$.*

4.3 Exemplo 2: $P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_1}$

Este exemplo trata de um caso particular do problema $(P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_1})$ e foi investigado [6].

Considere o seguinte sistema contínuo, LIT, incerto e sujeito a retardo constante no tempo no vetor de estados:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + A_d x(t-\tau_1) + Bu(t) + Ew(t) \\ z(t) & = & Cx(t) \end{array} \tag{4.2}$$

que, de acordo com a descrição generalizada de sistema (2.3), é representado pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1+\alpha \end{bmatrix}, \ A_d = \begin{bmatrix} -1+\beta & -1 \\ 0 & -0.9+\beta \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1], \ C_d = [0 \quad 0], \ D = 0 \ , \ D_d = 0 \ , \ F = 0$$

$$|\alpha| \leq 0.2, \quad |\beta| \leq 0.2$$

Note que este sistema incerto pode ser descrito por um conjunto politópico $\mathcal{P}$ (2.2) de quatro vértices e que a natureza contínua e constante do retardo no tempo τ_1 implica a consideração dos limitantes do retardo no tempo como sendo: $\overline{\tau}_1 \in \mathbb{R}^+$ e $\varsigma_1 = 0$.

Como apresentado no Exemplo 2 em [6], utilizando-se o método indicado no Teorema 3.2 neste artigo, o sistema (4.2) pode ser robustamente estabilizável para uma condição de retardo constante no tempo máximo $\overline{\tau}_1 = 0.3346s$. Além disso, utilizando-se o Teorema 3.4 naquele artigo, obtém-se como valor mínimo para o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma_{[6]} = 1.95$, considerando que o retardo constante no tempo é limitado a $\overline{\tau}_1 = 0.3s$.

Utilizando-se a abordagem apresentada em [9] o valor máximo encontrado para o retardo no tempo foi $\overline{\tau}_1 = 1.0512s$ com $\gamma_{[9]} = 1.09 \times 10^4$ e ganho

$$K_{[9]} = 10^9 \times [-0.4061 \quad -2.8622]$$

Já com a abordagem apresentada em [10] o retardo máximo no tempo foi $\overline{\tau}_1 = 1.0496s$ com $\gamma_{[10]} = 1.42 \times 10^4$ e ganho

$$K_{[10]} = 10^9 \times [-0.4161 \quad -3.1458]$$

No entanto, estas abordagens exigem que se faça um ajuste em um parâmetro livre nas LMIs. Os valores dos parâmetros ajustados para as abordagens [9] e [10] foram $\varepsilon = -0.24$ e $\varepsilon = -0.23$, respectivamente.

Utilizando a abordagem desenvolvida no Corolário 2 deste trabalho, onde o conjunto de desigualdades matriciais foi transformado em um conjunto de LMIs através da linearização forçada[8] $R_1 = Y$, pode-se obter um controlador $\mathcal{H}_\infty$ estabilizante

$$K_{lin} = [-102.4825 \quad -136.66]$$

para o sistema (4.2) e capaz de garantir um nível mínimo $\gamma_{lin} = 25.1814$ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, para uma condição de retardo constante no tempo máximo $\bar{\tau}_1 = 0.624s$.

Considerando o nível $\gamma_{lin} = 25.1814$ como um ponto de partida para o algoritmo de linearização, proposto na página 39, pode-se obter, após 826 iterações, o controlador $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{K}_1 = [-7.6949 \quad -26.1233]$$

para uma condição de retardo constante no tempo limitado a $\bar{\tau}_1 = 1.1s$ e nível $\gamma = 25.1814$ fixado.

Deve-se ressaltar que resultados mais apurados ainda poderiam ser obtidos despendendo-se mais esforço computacional no seguintes sentidos: (i) reduzir o nível γ, considerando $\bar{\tau}_1 = 1.1s$ fixado ou (ii) aumentar o limite $\bar{\tau}_1$, fazendo $\gamma > 25.1814$, ou seja, degradando o nível γ garantido.

A evolução do estado $x_1(t)$ do sistema (4.2) realimentado com o controlador $\mathcal{K}_1$, considerando-se os quatro vértices e o modelo nominal, para uma condição inicial $x(t) = [1 \ 1]^T \, \forall t \in [\bar{\tau}_1, 0)$ e condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 1.1s$, é apresentada na figura 4.6.

Considerando a condição de retardo constante no tempo limitado a $\bar{\tau}_1 = 0.3s$, pode-se obter, através do Corolário 2 em conjunto com o algoritmo de linearização deste trabalho, um nível garantido $\gamma = 0.0002$ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ com o seguinte ganho para o controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{K}_2 = [-0.5059 \quad -2.41 \times 10^4]$$

[8]Veja na página 39 a discussão a respeito das implicações de se utilizar esta linearização.

Utilizando o Corolário 4 e considerando o sistema (4.2) realimentado com o controlador $\mathcal{K}_2$, pode-se verificar que o controlador $\mathcal{K}_2$ assegura um nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$,

$$\gamma_a = 4.4056 \times 10^{-5}$$

ao sistema realimentado.

Calculando o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ em cada vértice do sistema incerto, obteve-se

$$\left\{4.2399 \times 10^{-5}, 4.2146 \times 10^{-5}, 4.3050 \times 10^{-5}, 4.3253 \times 10^{-5}\right\}$$

o que comprova que $\gamma_a = 4.4056 \times 10^{-5}$, de fato, assegura o valor do nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ nos vértices do sistema.

O diagrama de valores singulares das matrizes de transferência H_{zw} do sistema (4.2) realimentado com $\mathcal{K}_2$, considerando os quatro vértices e o modelo nominal, é apresentado na figura 4.7.

As figuras 4.8 e 4.9 apresentam a evolução do estado $x_1(t)$ do sistema (4.2) realimentado com o controlador $\mathcal{K}_2$, considerando-se pontos de operação nos quatro vértices e modelo nominal, para uma condição inicial $x(t) = [1\ \ 1]^T\ \forall t \in [\overline{\tau}_1, 0)$ e condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 0.3s$. A figura 4.9 contempla um contexto no qual um sinal de ruído[9] branco de média zero, covariância unitária e amplitude limitada a 10 unidades, corrompe os estados do sistema realimentado.

As figuras 4.10 e 4.11 apresentam, respectivamente, o sinal de ruído $w(t)$ que foi aplicado ao sistema (4.2) realimentado com o controlador $\mathcal{K}_2$ e o sinal de controle $z_2(t)$ corrompido.

Lançando mão do cálculo da norma $\mathcal{L}_2$ de sinais pode-se obter a seguinte relação entre os sinais $z_2(t)$ e $w(t)$:

$$\frac{\| z_2(t) \|_{\mathcal{L}_2}}{\| w(t) \|_{\mathcal{L}_2}} = 9.6953 \times 10^{-6}$$

Observa-se a consistência deste valor comparado ao nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ assegurado $\gamma_a = 4.4056 \times 10^{-5}$ para o sistema realimentado. $\lozenge$

[9]O sinal de ruído é de energia limitada uma vez que foi aplicado ao sistema por um período de tempo finito.

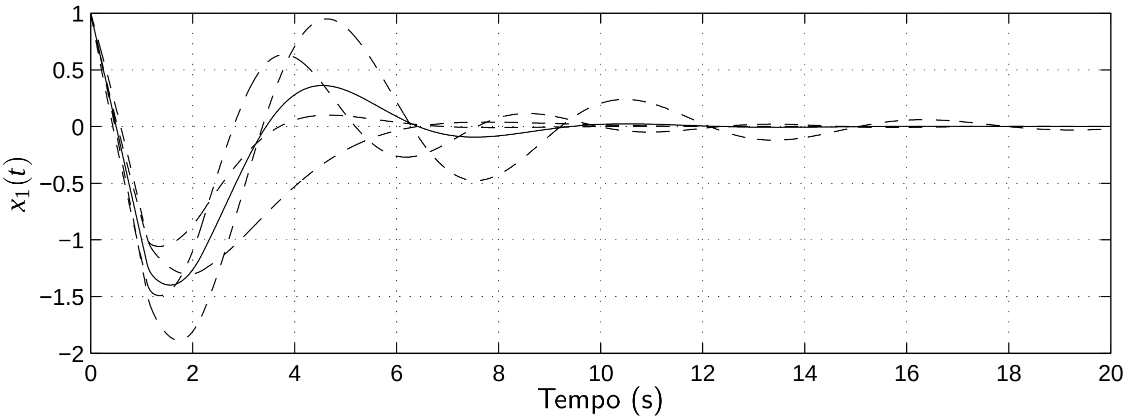

Figura 4.6: *Evolução do estado $x_1(t)$ do sistema (4.2) realimentado com $\mathcal{K}_1$ operando em condição nominal (traço contínuo) e nos quatro vértices (traços descontínuos) para a condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 1.1s$.*

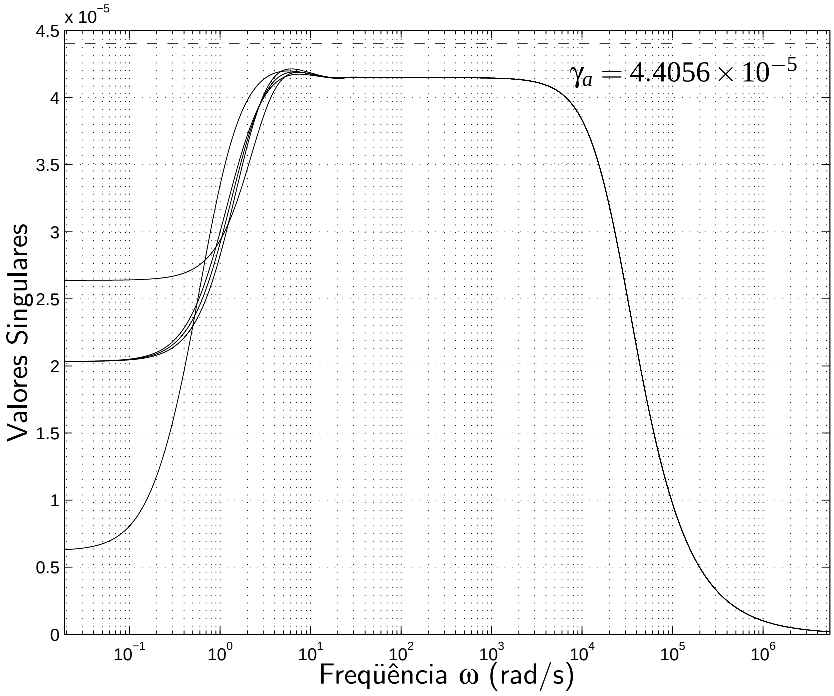

Figura 4.7: *Diagrama de valores singulares das matrizes de transferência H_{zw} do sistema (4.2) realimentado com $\mathcal{K}_2$, considerando os quatro vértices e o modelo nominal, para condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 0.3s$.*

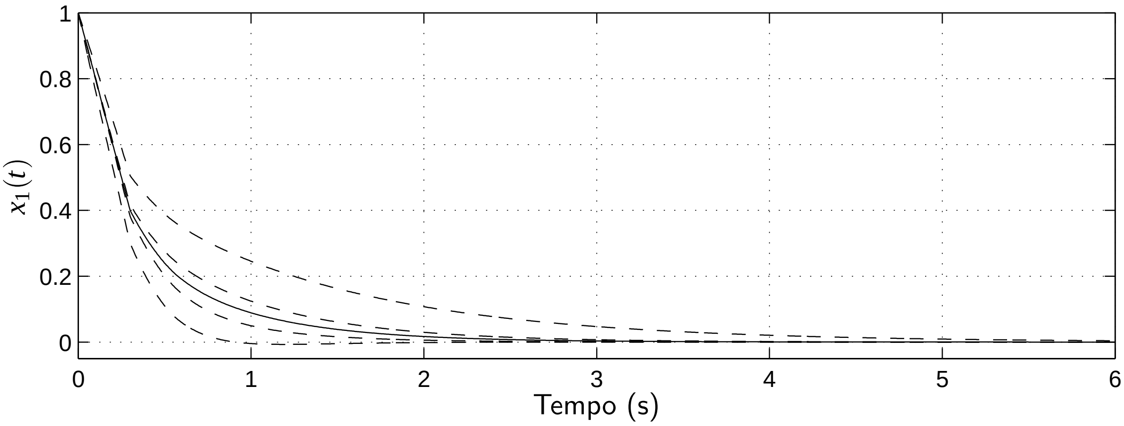

Figura 4.8: *Evolução do estado $x_1(t)$ do sistema (4.2) realimentado com $\mathcal{K}_2$ operando em condição nominal e nos vértices para a condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 0.3s$.*

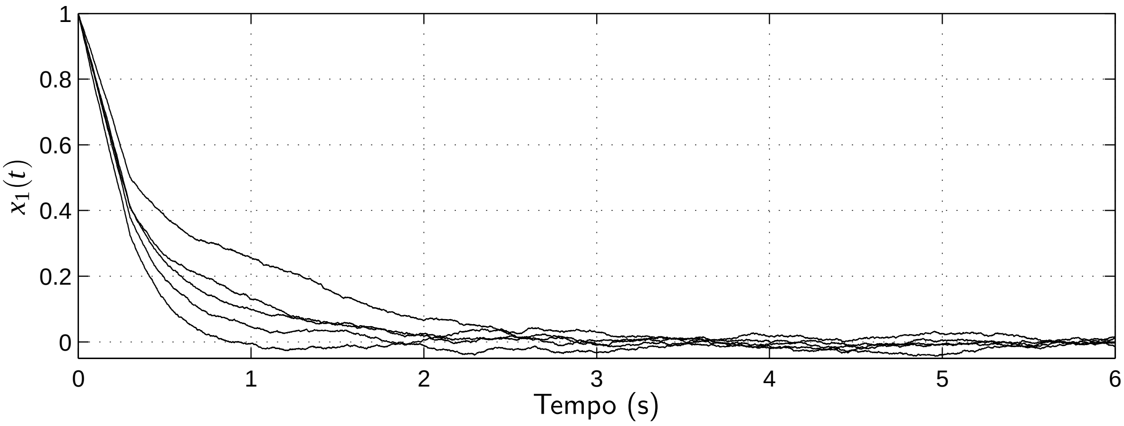

Figura 4.9: *Evolução do estado $x_1(t)$ do sistema (4.2) realimentado com $\mathcal{K}_2$ operando em condição nominal e nos vértices para a condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 0.3s$ em um contexto sujeito a ruído.*

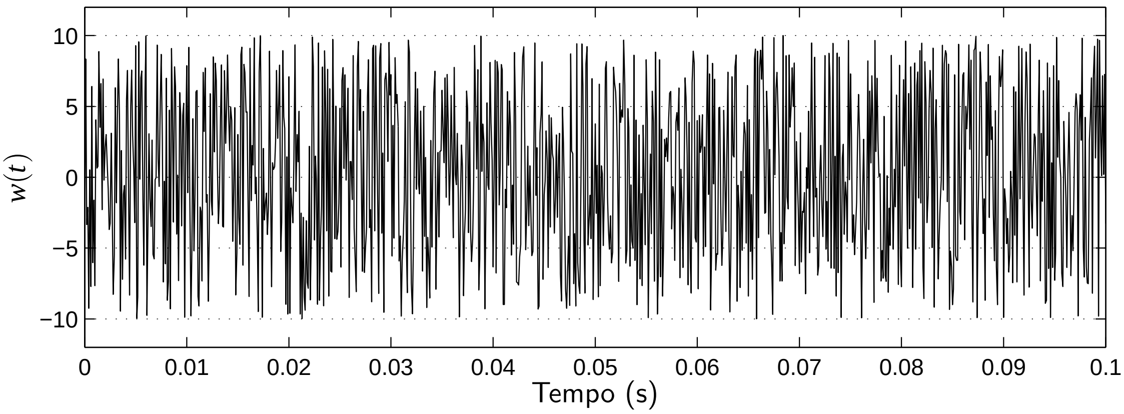

Figura 4.10: *Sinal de ruído branco de média zero, covariância unitária e amplitude limitada a 10 unidades, corrompendo os estados do sistema (4.2), realimentado com $\mathcal{K}_2$ e operando no modelo nominal para a condição de retardo constante no tempo $\tau_1 = 0.3s$.*

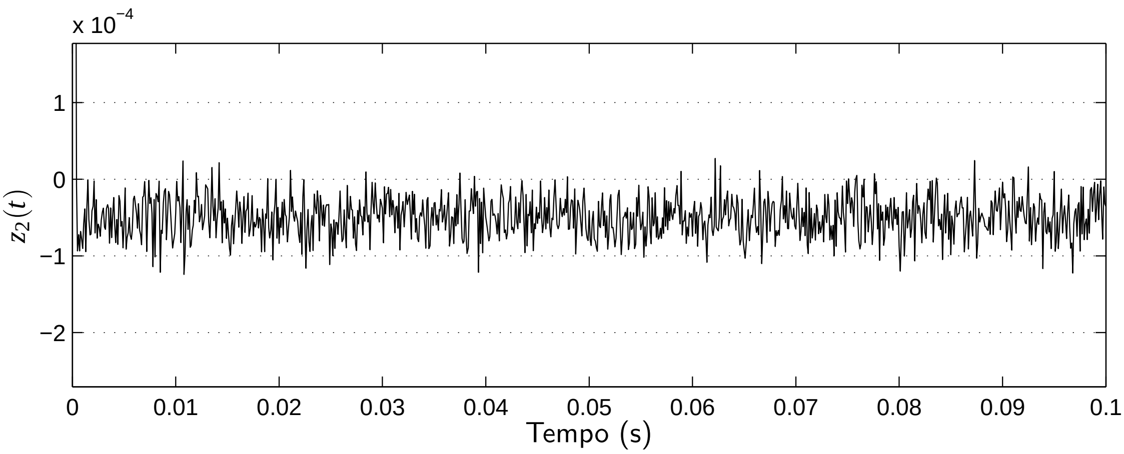

Figura 4.11: *Sinal de controle $z_2(t)$ do sistema (4.2) realimentado com $\mathcal{K}_2$ com a presença do sinal de ruído $w(t)$.*

4.4 Exemplo 3: $P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_1}$

Este exemplo considera o problema de estabilização robusta e controle $\mathcal{H}_\infty$ da combustão interna em um motor de foguete alimentado com combustível líquido monopropelente. O problema é um caso particular do problema ($P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_1}$) e foi investigado no contexto de estabilização em [5], [7], [21], [29], e no contexto de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ em [28].[10]

Considere as seguintes equações dinâmicas lineares do sistema de alimentação de combustível e da câmara de combustão do motor de foguete apresentadas em [7]:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t) &= (\lambda-1)\phi(t) - \lambda\phi(t-\tau) + \mu(t-\tau) \\
\dot{\mu}_1(t) &= \frac{1}{\xi J}\left[-\psi(t) + \frac{p_0-p_1}{2\Delta p}\right] \\
\dot{\mu}(t) &= \frac{1}{(1-\xi)J}\left[-\mu(t) + \psi(t) - P\phi(t)\right] \\
\dot{\psi}(t) &= \frac{1}{E}\left[\mu_1(t) - \mu(t)\right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo que t é a unidade de tempo normalizada com o tempo de residência do gás, θ_g, em regime permanente, $\tau = \bar{\tau}/\theta_g$ é o retardo no tempo normalizado com $\bar{\tau}$ sendo o retardo no tempo em regime permanente, $\phi(t) = [p(t) - \bar{p}]/\bar{p}$ com $p(t)$ sendo a pressão instantânea na câmara de combustão e $\bar{p}$ sendo a pressão em regime permanente, $\mu(t) = [\dot{m}_i - \bar{\dot{m}}]/\bar{\dot{m}}$ com $\dot{m}_i$ sendo taxa instantânea da massa de líquido propelente injetado e $\bar{\dot{m}}$ o valor de $\dot{m}_i$ em regime permanente, $\mu_1(t) = [\dot{m}_1(t) - \bar{\dot{m}}]/\bar{\dot{m}}$ com $\dot{m}_1(t)$ sendo o fluxo instantâneo da massa de líquido propelente, $\psi(t) = [p_1(t) - \bar{p}_1]/2\Delta p$ com $p_1(t)$ sendo a pressão instantânea na linha de alimentação de combustível, $\bar{p}_1$ o valor de $p_1(t)$ em regime permanente e $\Delta p = \bar{p}_1 - \bar{p}$ a queda na pressão de injeção em regime permanente, p_0 é a pressão regulada que permite alimentação constante, $P = \bar{p}/2\Delta p$, λ é o expoente da pressão tal que $(\bar{\tau}\bar{p}^{\lambda})$ seja constante, ξ representa o comprimento fracionário para a pressão de alimentação, J é o parâmetro de inércia da linha de alimentação e E é o parâmetro de elasticidade da linha de alimentação.

Considerando o conjunto de equações (4.3), $u = (p_0 - p_1)/2\Delta p$ como a variável de controle, $x(t) = [\dot{\phi}(t), \dot{\mu}_1(t), \dot{\mu}(t), \dot{\psi}(t)]^T$ como um vetor de estados e os seguintes valores representativos para os parâmetros: $P = 1$, $\xi = 0.1$, $J = 2$ e $E = 1$, pode-se escrever o sistema a ser controlado

[10] Em [28] e [29] o problema foi abordado considerando-se a presença de retardos distribuídos no tempo.

como:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + A_d x(t-\tau) + Bu(t) + Ew(t) \\ z(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{array} \tag{4.4}$$

que, de acordo com a descrição generalizada (2.3), é representado pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ -0.5556 & 0 & -0.5556 & 0.5556 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad -0.15 \leq \lambda \leq 0.15$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -\frac{1+\lambda}{\tau} & 0 & \frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad C_d = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad D = 1\ , \quad D_d = 0\ , \quad F = 0$$

Note que este sistema incerto pode ser descrito por um conjunto politópico $\mathcal{P}$ (2.2) de dois vértices e que a natureza contínua e constante do retardo no tempo τ em (4.4) implica a consideração dos limitantes do retardo no tempo $\tau_1(t)$ em (2.3) como sendo: $\bar{\tau}_1 \in \mathbb{R}^+$ e $\varsigma_1 = 0$.

Considerando o limitante para o retardo no tempo $\bar{\tau}_1 = 1$ pode-se obter, utilizando a abordagem desenvolvida no Corolário 2 deste trabalho em conjunto com o algoritmo de linearização da página 39, o seguinte controlador $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{K} = [145.6692 \quad -35.4270 \quad -82.9074 \quad -168.7268]$$

que garante um nível $\gamma = 18.1295$ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$.

Utilizando o Corolário 4 e considerando o sistema (4.4) realimentado com o controlador $\mathcal{K}$, pode-se verificar que o controlador $\mathcal{K}$ assegura um nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$

$$\gamma_a = 18.1200$$

ao sistema realimentado.

As figuras 4.12 e 4.13 apresentam a evolução dos estados $x(t)$ do sistema (4.4) realimentado com o controlador $\mathcal{K}$ para os dois vértices que caracterizam o conjunto de incertezas politópicas.

Foi considerada a condição inicial $x(t) = [1\ 1\ 1\ 1]^T\ \forall t \in [\overline{\tau}_1, 0)$ e a condição de retardo constante no tempo $\tau = 1s$.

As figuras 4.14 e 4.15 apresentam o comportamento do sistema realimentado considerando modelos para diferentes valores do parâmetro incerto (λ) e o modelo nominal para diferentes condições de retardo constante no tempo τ.

O mesmo problema foi resolvido utilizando-se as abordagens apresentadas em [9] e [10]. Com a abordagem de [10], o valor mínimo do nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ obtido foi $\gamma = 37.8369s$ para o parâmetro $\varepsilon = -0.265$ e ganho

$$K = 10^8 \times [1.9132 \quad -0.1653 \quad -0.2764 \quad -2.0258].$$

Já com a abordagem apresentada em [9], o valor mínimo do nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ obtido foi $\gamma = 17.9553s$ para o parâmetro $\varepsilon = -0.201$ e ganho

$$K = 10^8 \times [0.6705 \quad -0.1031 \quad -1.0097 \quad -0.8381].$$

Observa-se nestas abordagens, a tendência à obtenção de controladores com altos ganhos. Este problema pode ser em parte contornado, fazendo-se a restrição extra $Q_1 \succ \eta\mathbf{I}$, com $\eta \in \mathbb{R}^+$, ao conjunto de LMIs daquelas abordagens.

Assim, procedendo-se conforme observado acima, pode-se encontrar, com a abordagem [10], fazendo-se $\eta = 5 \times 10^{-5}$ e $\varepsilon = -0.265$, o controlador

$$K_{[10]} = 10^3 \times [4.0223 \quad -0.3488 \quad -0.5062 \quad -4.2543]$$

que garante $\gamma_{[10]} = 38.0052s$ e, com a abordagem [9], fazendo-se $\eta = 5 \times 10^{-4}$ e $\varepsilon = -0.201$, o controlador

$$K_{[9]} = 10^2 \times [3.9115 \quad -0.6019 \quad -3.5930 \quad -4.6476].$$

que garante $\gamma_{[9]} = 18.0372s$

A figura 4.16 apresenta simultaneamente a evolução do estado $x_1(t)$ do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$, com $K_{[10]}$ e com $K_{[9]}$, considerando-se o modelo nominal para a condição de retardo constante no tempo $\tau = 1s$.

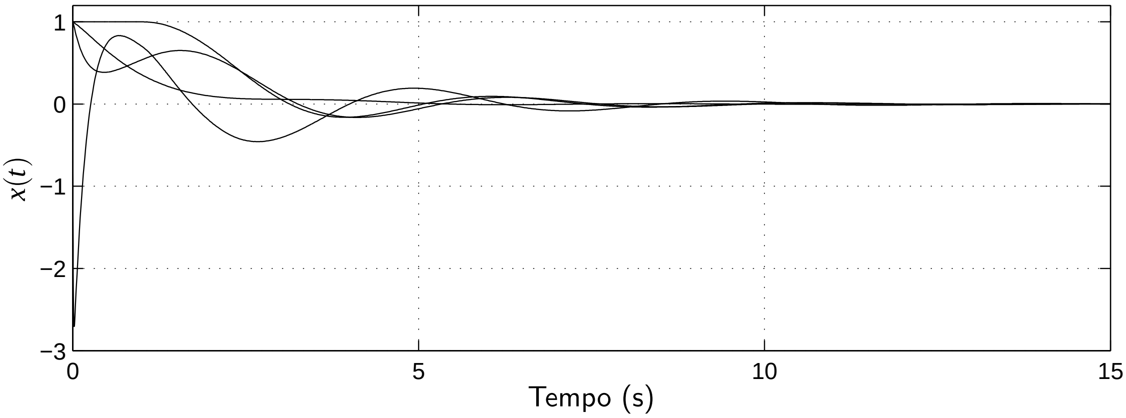

Figura 4.12: *Evolução dos estados $x(t)$ do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$, operando no vértice com $\lambda = -0.15$, para a condição de retardo constante no tempo $\tau = 1s$.*

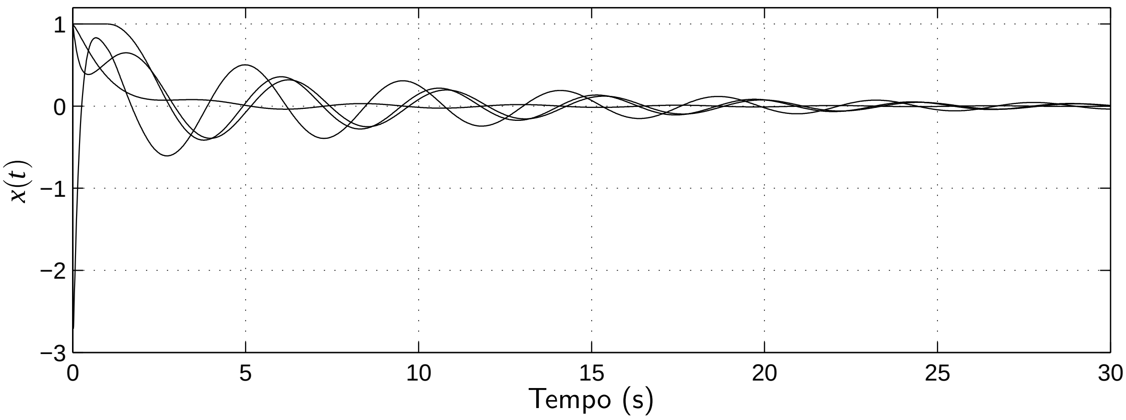

Figura 4.13: *Evolução dos estados $x(t)$ do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$, operando no vértice com $\lambda = 0.15$, para a condição de retardo constante no tempo $\tau = 1s$.*

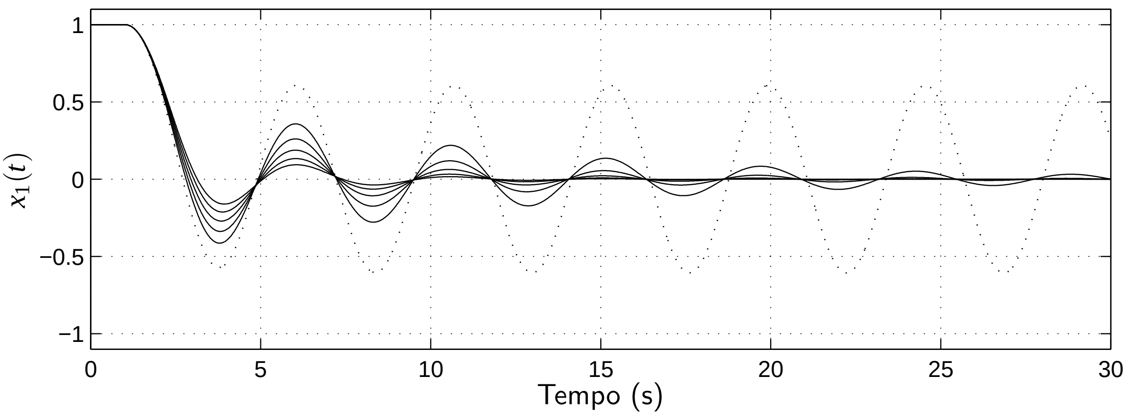

Figura 4.14: *Evolução do estado $x_1(t)$ do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$, considerando modelos nos quais o parâmetro incerto (λ) assume os valores $\{-0.15, -0.075, 0, 0.075, 0.15\}$ (traços contínuos) e o valor fora da faixa garantida de estabilização $\lambda = 0.28$ (traço descontínuo), para a condição de retardo constante no tempo $\tau = 1s$.*

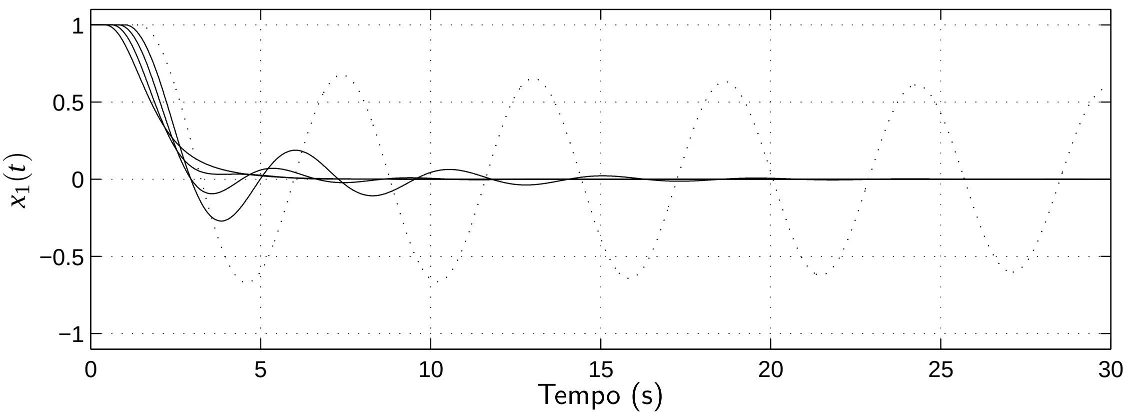

Figura 4.15: *Evolução do estado $x_1(t)$ do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$, considerando o modelo nominal em condições nas quais o retardo constante no tempo, τ, assume os valores $\{0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ (traços contínuos) e o valor fora da faixa garantida de estabilização $\tau = 1.4$ (traço descontínuo).*

A figura 4.17 apresenta o diagrama de valores singulares das matrizes de transferência H_{zw} do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$, considerando-se os dois vértices e o modelo nominal e a figura 4.18 apresenta o diagrama de valores singulares da matriz de transferência H_{zw} do modelo nominal do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$, com $K_{[10]}$ e com $K_{[9]}$. ◊

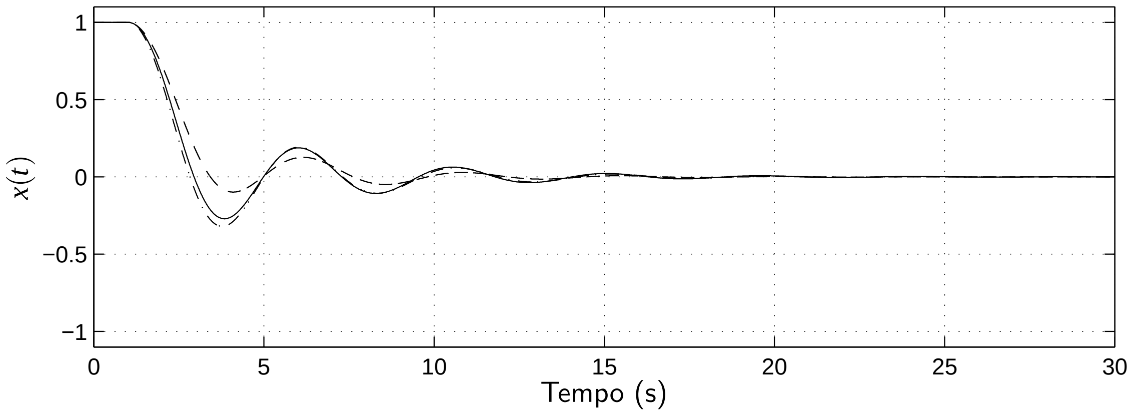

Figura 4.16: *Evolução do estado $x_1(t)$ do modelo nominal do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$ (traço contínuo), com $K_{[10]}$ (traço descontínuo −−) e com $K_{[9]}$ (traço descontínuo −·), para a condição de retardo constante no tempo $\tau = 1s$.*

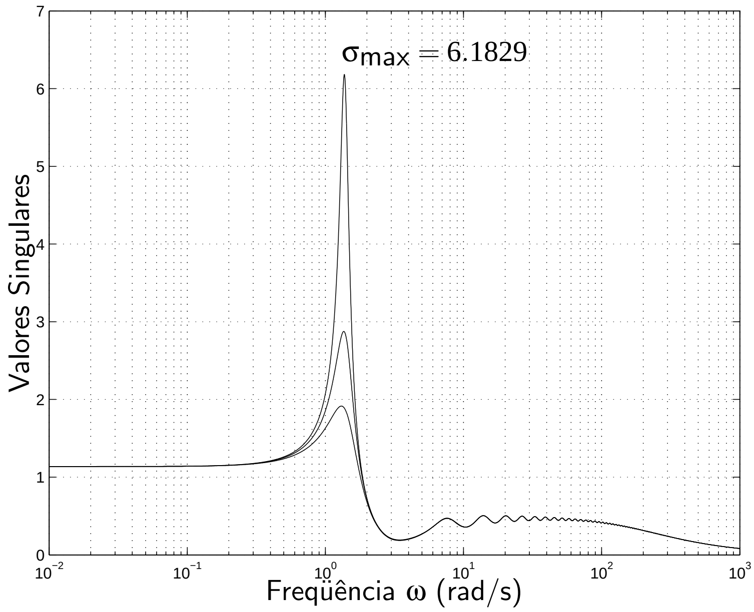

Figura 4.17: *Diagrama de valores singulares das matrizes de transferência H_{zw} do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$, considerando os dois vértices e o modelo nominal, para condição de retardo constante no tempo $\tau = 1s$.*

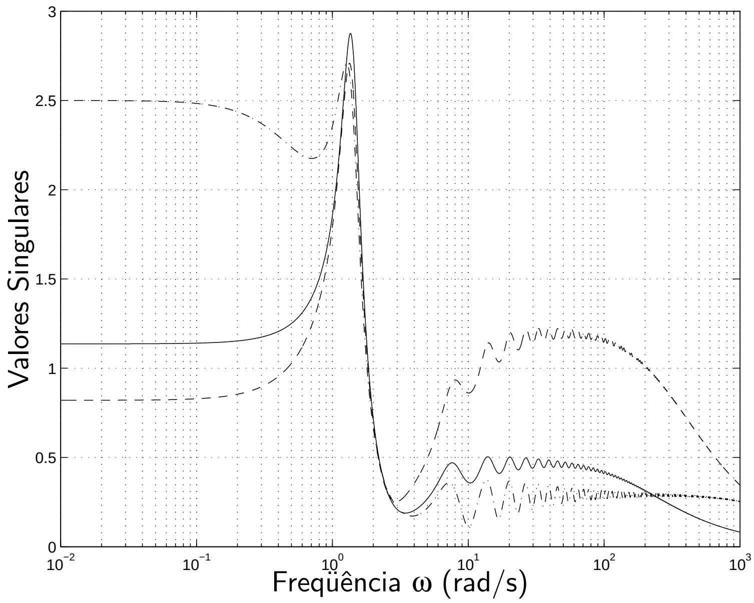

Figura 4.18: *Diagrama de valores singulares da matriz de transferência H_{zw} do modelo nominal do sistema (4.4) realimentado com $\mathcal{K}$ (traço contínuo), com $K_{[10]}$ (traço descontínuo $--$) e com $K_{[9]}$ (traço descontínuo $-\cdot$), para a condição de retardo constante no tempo $\tau = 1s$.*

4.5 Exemplo 4: $P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_{1,2}}$

4.1 Este exemplo trata um problema do tipo ($P\mathcal{C}_{\infty c}^{\tau_{1,2}}$) que foi abordado em [16].

Considere o seguinte sistema contínuo, LIT e sujeito a retardos variantes no tempo no vetor de estados e vetor de entradas de controle:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-\tau_1(t)) + Bu(t) + B_d u(t-\tau_2(t)) + Ew(t) \\ z(t) &= Cx(t) + C_d x(t-\tau_1(t)) + Du(t) + D_d u(t-\tau_2(t)) + Fw(t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ B_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \ C_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \ D = 1 \ , \ D_d = 0.1 \ , \ F = 0.1$$

$$\tau_1(t) = 2 + 0.2\cos(t), \quad \tau_2(t) = 5 + 0.2\sin(3t)$$

Deseja-se obter um controlador que estabilize o sistema e garanta um nível $\gamma = 1$ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$.

Considerando os limitantes para os retardos variantes no tempo: $\bar{\tau}_1(t) = 2.2s$, $\bar{\tau}_2(t) = 5.2s$, $\varsigma_1 = 0.2$ e $\varsigma_2 = 0.6$ pôde-se obter utilizando o Teorema 4 em conjunto com algoritmo de linearização da página 39, o seguinte controlador $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} -4.6572 & -0.6917 \end{bmatrix}$$

que garante um nível $\gamma = 1$ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$. $\diamondsuit$

4.2 Considere o sistema do exemplo anterior (4.5), fazendo

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, eliminando-se a informação do retardo no controle.

Nesta configuração, este sistema é considerado um sistema independente do retardo no tempo.

Utilizando o Teorema 5 em conjunto com algoritmo de linearização proposto, dois testes foram realizados visando a obtenção de controladores que garantissem um nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma = 1$. No primeiro teste considerou-se o limitante para o tamanho do retardo variante no tempo $\tau_1(t)$ como sendo $\bar{\tau}_1 = 1 \times 10^5 s$ e o limitante para a taxa de variação do retardo como sendo $\varsigma_1 = 0.1$. Nestas condições obteve-se o seguinte controlador $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{K} = [-22.7539 \quad -0.1129]$$

capaz de assegurar um nível $\gamma = 0.1007$.

No segundo teste considerou-se o mesmo $\bar{\tau}_1 = 1 \times 10^5 s$, porém com $\varsigma_1 = 0.9$. O seguinte controlador $\mathcal{H}_\infty$ foi obtido

$$\mathcal{K} = [-10.3382 \quad 0.1336]$$

assegurando um nível $\gamma = 0.1054$.

Utilizando o Teorema 1 de [16], pôde-se obter, para as mesmas condições do limitante da taxa de variação do retardo no tempo[11] $\varsigma_1 = 0.1$ e $\varsigma_1 = 0.9$, os seguintes controladores

$$K = [-31.9594 \quad 14.1164]$$

e

$$K = [-83.3817 \quad 52.2575]$$

que asseguram níveis $\gamma = 0.10024$ e $\gamma = 0.10021$, respectivamente. $\Diamond$

[11]Nesta abordagem, somente os limitantes para a taxa de variação do retardo no tempo são considerados.

4.6 Exemplo 5: $PC_{\infty d}^{\tau_1}$

Este exemplo trata um problema do tipo $(PC_{\infty d}^{\tau_1})$, sendo uma adaptação do Exemplo 2 abordado em [16].

Considere o seguinte sistema discreto, LIT e sujeito a retardo constante no tempo no vetor de estados:

$$\begin{array}{lcl} x(t+1) & = & Ax(t) + A_d x(t-\tau_1) + Bu(t) + Ew(t) \\ z(t) & = & Cx(t) + Du(t) + Fw(t) \end{array} \tag{4.6}$$

descrito, de acordo com a descrição generalizada de sistema (2.3), pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 1], \quad C_d = [0 \quad 0], \quad D = 1\ , \quad D_d = 0\ , \quad F = 0.1$$

Utilizando o Teorema 2 de [16], o valor mínimo obtido para o nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$ foi $\gamma = 0.1166$, com o o seguinte controlador

$$K = [-1.1689 \quad -1].$$

Com a abordagem desenvolvida neste trabalho, Teorema 6 em conjunto com algoritmo de linearização da página 39, pode-se obter, para a condição de retardo constante no tempo limitada a $\bar{\tau}_1 = 1 \times 10^5 s$, o seguinte controlador

$$\mathcal{K} = [-1.2430 \quad -0.9977]$$

que garante um nível $\gamma = 0.35$ de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$.

Deve-se ressaltar que a abordagem apresentada em [16] trata-se de uma abordagem independente do retardo no tempo. Assim, nenhuma informação relativa a limitações para o tamanho do retardo é considerada, o que faz com que tal abordagem seja restrita a sistemas que possam ser estabilizados não importando o tamanho do retardo existente, ou seja, sistemas independentes do retardo no tempo. $\Diamond$

4.7 Conclusão

Neste capítulo, exemplos numéricos retirados da literatura foram realizados, afim de se evidenciarem as potencialidades e deficiências das abordagens desenvolvidas neste trabalho.

Através dos exemplos 1 e 2, pode-se perceber a superioridade das soluções dos problemas propostos, utilizando-se as abordagens desenvolvidas neste trabalho quando comparadas as soluções geradas com as abordagens apresentadas em [6], [8], [9] e [10].

O exemplo 3 apresentou uma aplicação de cunho prático, o controle da estabilização robusta $\mathcal{H}_\infty$ da combustão interna em um motor de foguete, onde os resultados obtidos com o uso da abordagem desenvolvida neste trabalho apresentaram-se equiparáveis aos obtidos com o uso das abordagens desenvolvidas em [9] e [10]. No entanto, deve-se ressaltar que as abordagens de [9] e [10] permitem a formulação de problemas de otimização lineares convexos para obtenção do nível mínimo de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty$, ao passo que a abordagem desenvolvida neste trabalho conduz a um problema não-convexo, implicando em elevada demanda dos recursos: capacidade computacional e tempo.

Por fim, através dos exemplos 4 e 5, fica claro que as abordagens desenvolvidas neste trabalho também permitem que se tratem problemas envolvendo sistemas naturalmente independentes do retardo no tempo, sem que haja a introdução de conservantismo nas soluções, característica normalmente existente quando se aplicam técnicas desenvolvidas para sistemas dependentes do retardo no tempo em sistemas que independem do retardo no tempo.

Capítulo 5

Conclusão e Propostas de Trabalho

Este trabalho centrou-se na investigação do problema de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares incertos, invariantes e sujeitos a retardo no tempo. Consideraram-se sistemas contínuos e sistemas discretos no tempo.

Em um primeiro momento, formularam-se os problemas tratados de forma geral e, na seqüência, de formas específicas para classes particulares de sistemas contínuos e discretos.

Abordagens dependentes do retardo no tempo foram desenvolvidas sob as formas de teoremas e corolários, para tratarem os problemas de análise e síntese de controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$. Os teoremas e corolários voltados à análise de estabilidade robusta e desempenho $\mathcal{H}_\infty$ são problemas de factibilidade convexos descritos em termos de desigualdades matriciais lineares – LMIs. Já os teoremas e corolários voltados à síntese de controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$ são problemas de factibilidade não-convexos descritos em termos de desigualdades matriciais.

Alternativas para a solução dos problemas de factibilidade não-convexos voltados à síntese de controladores foram propostas. A primeira alternativa proposta conduz tais problemas a formulações lineares convexas. A segunda alternativa conduz a formulações de problemas de otimização não-lineares descritos em termos de LMIs que podem ser tratados através de um mecanismo iterativo de solução descrito por um algoritmo de linearização.

Exemplos numéricos retirados da literatura foram realizados, evidenciando-se as potencialidades e deficiências das abordagens desenvolvidas neste trabalho.

Espera-se que os resultados obtidos com o desenvolvimento deste trabalho contribuam para o enriquecimento da discussão envolvendo o controle robusto de sistemas sujeitos a retardo no tempo. É importante ressaltar que parte dos resultados apresentados, nesta dissertação, gerou artigos aceitos em conferências internacionais [22], [23] ou está em processo de revisão em periódicos internacionais.

Como propostas de trabalhos futuros, pode-se listar:

- Estudo de procedimentos de otimização mais eficientes que aqueles apresentados na sessão 3.4 para tratarem a solvabilidade dos Teoremas 4, 5 e 6 e Corolários 3 e 4.
- Estudo de abordagens dependentes de parâmetros, visando a obtenção de condições relaxadas nas descrições das LMIs, afim de se obterem resultados menos conservadores para as soluções dos teoremas e corolários desenvolvidos.
- Estudo da possibilidade de utilização de funcionais do tipo Lyapunov-Krasovskii mais genéricos [14].
- Estudo dos efeitos do retardo no tempo sobre as propriedades de uma classe de sistemas não-lineares – o oscilador de Duffing, considerando o oscilador de Duffing com amortecimento retardado descrito da forma:

$$\ddot{y}(t) + k_1\dot{y}(t) + k_2\dot{y}(t-T) + c_1 y(t) + k_3 y^3(t) = bu(t)\,. \tag{5.1}$$

Modelos da forma (5.1) têm sido utilizados no estudo de sistemas de estabilização de rotação (balanço) em navios, onde um termo amortecido produzido artificialmente, $k_2\dot{y}(t-T)$, é adicionado a sistemas com amortecimento natural insuficiente, $k_1\dot{y}(t)$ [20].

Uma função de resposta em freqüência aproximada é dada da forma:

$$H_1(j\omega_1) = \frac{b}{(j\omega_1)^2 + k_1(j\omega_1) + k_2(j\omega_1)e^{-j\omega_1 T} + c_1}$$

evidenciando-se o amortecimento retardado em $k_2(j\omega_1)e^{-j\omega_1 T}$, para um sistema de segunda ordem.

Um modelo em variáveis de estado, quando definem-se

$$x_1(t) \triangleq y(t), \qquad x_2(t) \triangleq \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t),$$

é descrito por:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-T) \\ x_2(t-T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t) + f(x,t) \\ \\ y(t) & = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

sendo que $f(x,t)$ é uma função linear dependente do parâmetro k_3 e $x_1^3(t)$. Dependendo dos valores k_3 o sistema pode ter inclusive um comportamento caótico. Se o efeito do coeficiente k_3 é pequeno, pode-se obter um modelo linearizado com $f(x,t) \approx 0$. O efeito do distúrbio, neste modelo, é fruto da energia produzida pelas ondas [27], de modo que a introdução do amortecimento retardado tem papel importante no projeto de estabilização.

Dois tipos de estudos podem ser implementados com relação a este problema. O primeiro tratando diretamente um modelo linearizado com as técnicas descritas neste trabalho. O segundo utilizando uma representação por modelos lineares locais fuzzy Takagi-Sugeno, para tratar o comportamento caótico do oscilador com retardo.

Bibliografia

[1] A. Albert. Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(2):434–440, 1969.

[2] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[3] Y. Y. Cao, Y. X. Sun, and J. Lam. Delay-dependent robust $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain systems with time-varying delays. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 145(3):338–344, 1998.

[4] D. Carlson. What are Schur complements, anyway? *Linear Algebra and Its Applications*, 74:257–275, 1986.

[5] L. Crocco. Aspects of combustion stability in liquid propellant rocket motors, part i: Fundamentals–low frequency instability with monopropellants. *Journal of the American Rocket Society*, 21:163–178, 1951.

[6] C. E. de Souza and X. Li. Delay-dependent robust $\mathcal{H}_\infty$ control of uncertain linear state-delayed systems. *Automatica*, 35(7):1313–1321, 1999.

[7] Y. A. Fiagbedzi and A. E. Pearson. Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(9):847–855, 1986.

[8] E. Fridman and U. Shaked. New bounded real lemma representations for time-delay systems and their applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12):1973–1979, 2001.

[9] E. Fridman and U. Shaked. A descriptor system approach to $\mathcal{H}_\infty$ control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2):253–270, 2002.

[10] E. Fridman and U. Shaked. Stability and $\mathcal{H}_\infty$ control of systems with time-varying delays. In *Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, July 2002.

[11] E. Fridman and U. Shaked. Delay-dependent stability and $\mathcal{H}_\infty$ control: constant and time-varying delays. *International Journal of Control*, 76(1):48–60, 2003.

[12] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User´s Guide*. The MathWorks Partner Series. The MathWorks, Inc, Natick, MA, 1995.

[13] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami. A cone complementarity linearization algorithm for state output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1171–1176, 1997.

[14] V. L. Kharitonov and A. P. Zhabko. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 39(1):15–20, 2003.

[15] J. H. Kim. Robust mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control of time-varying delay systems. *International Journal of Systems Science*, 32(11):1345–1351, 2001.

[16] J. H. Kim and H. B. Park. $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system. *Automatica*, 35:1443–1451, 1999.

[17] K. T. Kim, S. H. Cho, K. H. Bang, and H. B. Park. $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time linear systems with time-varying delays in state. In *Proceedings of the 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pages 707–711, 2001.

[18] K. T. Kim, S. H. Cho, J. K. Kim, and H. B. Park. $\mathcal{H}_\infty$ controller design for discrete-time linear systems with time-varying delays in state. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1446–1447, Orlando, Florida, 2001.

[19] O. L. Mangasarian and J. S. Pang. The extended linear complementarity problem. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2:359–368, 1995.

[20] N. Minorsky. *Nonlinear Oscillations*. Van Nostrand, 1962.

[21] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon, and Y. S. Lee. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *International Journal of Control*, 74(14):1447–1455, 2001.

[22] R. M. Palhares, C. D. Campos, M. C. R. Leles, P. I. Ekel, and M. F. S. V. D'Angelo. Delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ control stabilization of linear systems with time-varying delays. In *Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, Rocquencourt, France, 2003.

[23] R. M. Palhares, C. D. Campos, M. C. R. Leles, P. I. Ekel, and M. F. S. V. D'Angelo. On delay-dependent robust $\mathcal{H}_\infty$ control of uncertain continuous- and discrete-time linear systems with lumped delays. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, USA, 2003.

[24] P. Park, Y. S. Moon, and W. H. Kwon. A delay-dependent robust stability criterion for uncertain time-delay systems. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, Philadelphia, USA, 1998.

[25] V. I. Skorodinskii. Iterational method of construction of Lyapunov-Krasovskii functionals for linear systems with delay. *Automation and Remote Control*, 51(9):1205–1212, 1990.

[26] S.-H. Song, J.-K. Sim, C.-H. Yim, and H.-C. Kim. $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time linear systems with time-varying delays in state. *Automatica*, 35:1587–1591, 1999.

[27] J. Stoustrup, H. H. Niemann, and M. Blanke. Roll damping by rudder control – a new $\mathcal{H}_\infty$ approach. In *Proceedings of the 3rd IEEE Conference on Control Applications*, pages 839–844, Glasgow, UK, 1994.

[28] L. Xie, E. Fridman, and U. Shaked. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering of linear systems with time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1):159–165, 2003.

[29] F. Zheng and P. M. Frank. Robust control of uncertain distributed delay systems with application to the stabilization of combustion in rocket motor chambers. *Automatica*, 38:487–497, 2002.