

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Técnicas de Wavelet *Thresholding* Aplicadas no  
Processo de *Denoising* de Imagens Digitais**

**Breno Augusto Ribeiro Arêdes**

Belo Horizonte

2009

**Breno Augusto Ribeiro Arêdes**

# **Técnicas de Wavelet *Thresholding* Aplicadas no Processo de *Denoising* de Imagens Digitais**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Ca-  
tólica de Minas Gerais como requisito parcial para ob-  
tenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadora: Dr<sup>a</sup>. Zélia Myriam Assis Peixoto

Co-orientadora: Dr<sup>a</sup>. Flávia Magalhães Freitas Ferreira

Belo Horizonte  
2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

A678t Arêdes, Breno Augusto Ribeiro  
Técnicas de Wavelet thresholding aplicadas no processo de denoising de  
imagens digitais / Breno Augusto Ribeiro Arêdes. Belo Horizonte, 2009.  
106f. : Il.

Orientadora: Zélia Myriam Assis Peixoto  
Co-orientadora: Flávia Magalhães Freitas Ferreira  
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

1. Wavelets (Matemática). 2. Processamento de imagens – Técnicas digitais.  
3. Processamento de sinais – Técnicas digitais. 4. Controle de ruído. I. Peixoto,  
Zélia Myriam Assis. II. Ferreira, Flávia Magalhães Freitas. III. Pontifícia  
Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDU: 621.391

"Há homens que lutam um dia e são bons.  
Há outros que lutam um ano e são melhores.  
Há os que lutam muitos anos e são muito bons.  
Porém, há os que lutam toda a vida.  
Esses são os imprescindíveis."

Bertolt Brecht.

*"Wavelet theory is the result of a multidisciplinary effort that brought together mathematicians, physicists and engineers, who recognized that they were independently developing similar ideas. For signal processing this connection has created a flow of ideas that goes well beyond the construction of new bases or transforms."*

Stéphane Mallat, 1999.

*Aos meus pais Walter e Auxiliadora...*

*Aos meus irmãos Leandro e Flávio...*

*À Naiara...*

*...por tudo o que vocês representam em minha vida.*

## **AGRADECIMENTOS**

- Agradeço a Deus por tornar tudo possível.
- À Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Zélia Myriam Assis Peixoto pela dedicação, incentivo e confiança investidos em todas as etapas desta pesquisa.
- À Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flávia Magalhães Freitas Ferreira pelo interesse e contribuição científica agregados à esta pesquisa.
- Ao Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Roberto de Maria Nunes Mendes pelos ensinamentos e disponibilidade durante o desenvolvimento deste trabalho.
- Aos demais professores, funcionários e colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC Minas pelos ensinamentos, amizade, companheirismo e solidariedade.
- Aos meus amigos do mestrado Amanda e Cláudio, Celso e Leia, Leandro, Pablo, Luiz, Samuel e todos aqueles que também fizeram parte desta caminhada.
- Aos meus pais, Walter e Auxiliadora, por serem os alicerces da minha vida, sempre proporcionando o incentivo que preciso.
- Aos meus irmãos, Leandro e Flávio, sempre presentes em minha vida.
- À Naiara, meu grande amor, pelo incentivo e compreensão.
- Ao PPGEE da PUC Minas e a CAPES pelo apoio acadêmico, científico e financeiro.

**Breno Augusto Ribeiro Arêdes**

## RESUMO

Este trabalho trata do processo de eliminação de ruído, ou *denoising*, em imagens digitais utilizando a Transformada Wavelet. Os estudos de técnicas de eliminação de ruído em imagens digitais têm experimentado um crescimento significativo nas últimas décadas, com destaque para o desenvolvimento e aplicação de ferramentas computacionais que sejam capazes de reconstruir uma imagem fidedigna à original. Existem várias ferramentas matemáticas que podem ser utilizadas para esta finalidade, dentre elas, pode-se citar a Transformada de Fourier, o Filtro de Wiener e a Transformada Wavelet. A partir da revisão bibliográfica realizada, algumas das diversas Técnicas de Wavelet *Denoising* serão implementadas a fim de se realizar a análise e comprovação de sua eficiência na recuperação de uma imagem digital contaminada com ruído. Através de simulações computacionais, é realizada a avaliação do desempenho de cada uma destas técnicas de *denoising* wavelet, segundo métricas pré-estabelecidas. Neste sentido, vale ressaltar que a qualidade da imagem reconstruída possui critérios subjetivos como a análise que envolve os observadores humanos e, também, critérios objetivos como o PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*), dentre outros. Pôde-se observar, a partir dos trabalhos pesquisados, que os processos de *denoising* em imagens digitais através da Transformada Wavelet vêm alcançando resultados superiores aos métodos tradicionais, normalmente baseados na Transformada de Fourier. Os resultados de simulação obtidos comprovam o bom desempenho das Técnicas Wavelet *Thresholding*, indicando um futuro promissor em aplicações na área de processamento digital de sinais e imagens.

**Palavras chaves:** Transformada Wavelet, Imagem Digital, Eliminação de Ruído, *Denoising*.



## ABSTRACT

This work treats of the noise elimination process, or denoising, in digital images using the Wavelet Transform. The studies of techniques of noise elimination in images digital have experimented a significant growth in the last years, with prominence for the development and application of computational tools that are capable to rebuild images trustworthy to the original. There are several mathematical tools that can be used for this purpose. Among them, it can be mentioned the Fourier Transform, the Wiener Filter and the Wavelet Transform. From the bibliographical revision realized, some Wavelet Denoising Techniques will be implemented in order to take an analysis and comparative studies in relation to its efficiency in the recovery of digital images with noise. The computational simulations are accomplished of the evaluation of each technique of denoising according to pré-established metrics. The quality of the rebuilt image has subjective criteria as the analysis of human observers and also objective criteria as the Peak Signal to Noise Ratio (PSNR), among them. It can be observed, by the related works, that the denoising processes in digital images using the Wavelet Transform have been more efficient than other traditional methods, usually, based on the Fourier Transform. The simulation results shows the good performance of the Wavelet Thresholding Methods, indicating a promising future in applications of the signals and images digital processing.

**Key words:** Wavelet Transform, Digital Image, Denoising.

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Ilustração de uma janela quadrada 3x3, mostrando o coeficiente wavelet que deverá ser submetido ao <i>thresholding</i> (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004). . . . .	p. 29
2.2	Comparação dos diferentes métodos de <i>denoising</i> utilizando a imagem <i>Lena</i> . a) imagem com ruído; b) <i>Bayesshrink</i> ; c) Método Proposto ( <i>Propose Method</i> ); d) Filtro Mediano ( <i>Median Filtering</i> ) (CHENG, H. et al., 2004). . . . .	p. 32
3.1	Convenção dos eixos para representação de imagens. (a) Convenção de eixos apresentada nos principais livros de processamento de imagens. (b) Convenção de eixos de uma imagem adotado no MatLab. . . . .	p. 39
3.2	(a) Imagem; (b) Imagem amostrada; (c) Valores correspondentes de cada pixel da imagem amostrada (GONZALES, R. C.; WOODS, R. E., 2000). . . . .	p. 40
3.3	Histogramas representando uma imagem escura e outra mais clara. . . . .	p. 41
3.4	Comparação do histograma da imagem <i>Lena</i> sem ruído e o histograma desta imagem após a contaminação com ruído gaussiano. . . . .	p. 41
3.5	Diagrama em blocos mostrando um sinal sendo contaminado por ruído e sofrendo o processo de <i>denoising</i> para a sua recuperação. . . . .	p. 42
3.6	Histograma do ruído uniforme. . . . .	p. 43
3.7	Histograma do ruído gaussiano. . . . .	p. 43
3.8	Histograma do ruído sal e pimenta ou ruído impulsivo. . . . .	p. 44
3.9	Histograma do ruído exponencial. . . . .	p. 45
3.10	Exemplo de ruído em uma imagem cinza. a) Imagem com ruído uniforme b) Imagem com ruído gaussiano c) Imagem com ruído exponencial d) Imagem com ruído sal e pimenta . . . . .	p. 45
4.1	Representação gráfica da janela tempo-frequência na STFT (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999). . . . .	p. 57
4.2	Representação de um sinal ( <i>Chirp Signal</i> ) que aumenta linearmente a frequência ao longo do tempo (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999). . . . .	p. 57
4.3	Construção de bases no domínio tempo-frequência. . . . .	p. 58
4.4	Domínio tempo-frequência: (a) Transformada Janelada de Fourier (WFT ou STFT) (b) Transformada Wavelet. . . . .	p. 62
4.5	Wavelet de Haar. . . . .	p. 64

4.6	Função escala (ou wavelet-pai) associada à wavelet de Haar. . . . .	p. 64
4.7	Função escala e wavelet de Daubechies para $p = 4$ (THE MATHWORKS, Inc., 2006). . . . .	p. 66
4.8	Função escala e wavelet de Shannon (ADHEMAR, B., 2003). . . . .	p. 67
4.9	Função escala e wavelet de Meyer (THE MATHWORKS, Inc., 2006). . . . .	p. 68
4.10	Função wavelet <i>Mexican Hat</i> (THE MATHWORKS, Inc., 2006). . . . .	p. 69
4.11	Função escala e wavelet symlets para $p = 4$ (THE MATHWORKS, Inc., 2006). . . . .	p. 70
4.12	Função wavelet de Morlet (THE MATHWORKS, Inc., 2006). . . . .	p. 70
4.13	Função escala e wavelet Coiflets (THE MATHWORKS, Inc., 2006). . . . .	p. 71
4.14	Árvore de decomposição wavelet (THE MATHWORKS, Inc., 2006). . . . .	p. 72
4.15	Banco de filtros mostrando a obtenção dos coeficientes de detalhes e aproximação. . . . .	p. 73
4.16	(a) Decomposição padrão, (b) Decomposição não-padrão (CUPERTINO, P., 2002). . . . .	p. 74
4.17	Esquema de decomposição não-padrão em 2 níveis. . . . .	p. 75
4.18	Decomposição não-padrão da imagem Lena em 1 nível de resolução. . . . .	p. 76
4.19	Decomposição não-padrão da imagem Lena em 2 níveis de resolução. . . . .	p. 76
4.20	Diagrama do processo de <i>denoising thresholding</i> . . . . .	p. 77
5.1	Comparação gráfica entre o <i>Hard</i> e <i>Soft Thresholding</i> (THE MATHWORKS, Inc., 2006). . . . .	p. 80
5.2	Ilustração de uma janela 3x3, mostrando o coeficiente wavelet que deverá ser submetido ao <i>thresholding</i> (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004). . . . .	p. 83
5.3	Gráfico dos resultados de simulação para a imagem <i>Lena</i> . . . . .	p. 90
5.4	Gráfico dos resultados de simulação para a imagem <i>Mandrill</i> . . . . .	p. 90
5.5	Gráfico dos resultados de simulação para a imagem <i>Boat</i> . . . . .	p. 91
5.6	Gráfico dos resultados de simulação para a imagem <i>Barbara</i> . . . . .	p. 91
5.7	Resultado visual de simulação para a imagem <i>Lena</i> . . . . .	p. 92
5.8	Resultado visual de simulação para a imagem <i>Mandrill</i> . . . . .	p. 93
5.9	Resultado visual de simulação para a imagem <i>Boat</i> . . . . .	p. 94
5.10	Resultado visual de simulação para a imagem <i>Barbara</i> . . . . .	p. 95
5.11	Ganho do métodos Neighshrink SURE em relação aos demais métodos, considerando a imagem <i>Lena</i> com ruído de variância 20. . . . .	p. 96
5.12	Ganho do métodos Neighshrink SURE em relação aos demais métodos, considerando a imagem <i>Mandrill</i> com ruído de variância 20. . . . .	p. 96
5.13	Ganho do métodos Neighshrink SURE em relação aos demais métodos, considerando a imagem <i>Boat</i> com ruído de variância 20. . . . .	p. 97

5.14	Ganho do métodos Neighshrink SURE em relação aos demais métodos, considerando a imagem <i>Barbara</i> com ruído de variância 20. . . . .	p. 97
5.15	Histograma das imagens reconstruídas para cada método ao considerar a imagem <i>Lena</i> com variância do ruído 20. . . . .	p. 98
5.16	Histograma das imagens reconstruídas para cada método ao considerar a imagem <i>Mandrill</i> com variância do ruído 20. . . . .	p. 98
5.17	Histograma das imagens reconstruídas para cada método ao considerar a imagem <i>Boat</i> com variância do ruído 20. . . . .	p. 99
5.18	Histograma das imagens reconstruídas para cada método ao considerar a imagem <i>Barbara</i> com variância do ruído 20. . . . .	p. 99
5.19	Histograma do ERRO entre a imagem original e as imagens reconstruídas considerando a imagem <i>Lena</i> com variância do ruído 20. . . . .	p. 100
5.20	Histograma do ERRO entre a imagem original e as imagens reconstruídas considerando a imagem <i>Mandrill</i> com variância do ruído 20. . . . .	p. 100
5.21	Histograma do ERRO entre a imagem original e as imagens reconstruídas considerando a imagem <i>Boat</i> com variância do ruído 20. . . . .	p. 101
5.22	Histograma do ERRO entre a imagem original e as imagens reconstruídas considerando a imagem <i>Barbara</i> com variância do ruído 20. . . . .	p. 101

## LISTA DE TABELAS

2.1	PSNR (dB) para diferentes imagens variando-se o tamanho da janela, através do método <i>Neighshrink</i> (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004). . . . .	p. 29
2.2	Comparação dos valores de PSNR (dB) entre diferentes métodos utilizados no processo de <i>denoising</i> da imagem <i>Lena</i> contaminada através de diferentes níveis de ruído gaussiano (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004). . . . .	p. 30
2.3	Resultado comparativo do processo de <i>denoising</i> utilizando a imagem <i>Einstein</i> (PORTILLA, J.; SIMONCELLI, E. P., 2000). . . . .	p. 30
2.4	Resultados de SNR para a imagem <i>Lena</i> comparando o método proposto por Cheng (SVR) e outros 3 algoritmos de <i>denoising</i> (CHENG, H. et al., 2004). . . . .	p. 31
5.1	Valores de PSNR (dB) obtidos na simulação das técnicas de <i>denoising</i> : <i>Soft Thresholding</i> , <i>Hard Thresholding</i> , <i>Shrinkage MAD</i> e <i>Neighshrink SURE</i> para a imagem <i>Lena</i> . . . . .	p. 86
5.2	Valores de PSNR (dB) obtidos na simulação das técnicas de <i>denoising</i> : <i>Soft Thresholding</i> , <i>Hard Thresholding</i> , <i>Shrinkage MAD</i> e <i>Neighshrink SURE</i> para a imagem <i>Mandrill</i> . . . . .	p. 86
5.3	Valores de PSNR (dB) obtidos na simulação das técnicas de <i>denoising</i> : <i>Soft Thresholding</i> , <i>Hard Thresholding</i> , <i>Shrinkage MAD</i> e <i>Neighshrink SURE</i> para a imagem <i>Boat</i> . . . . .	p. 87
5.4	Valores de PSNR (dB) obtidos na simulação das técnicas de <i>denoising</i> : <i>Soft Thresholding</i> , <i>Hard Thresholding</i> , <i>Shrinkage MAD</i> e <i>Neighshrink SURE</i> para a imagem <i>Barbara</i> . . . . .	p. 87

# LISTA DE ABREVIACÕES

## Acrônimos

CWT ...	Transformada Wavelet Contínua ( <i>Continuous Wavelet Transform</i> )
dB ...	Decibel
DFB ...	Banco de Filtros Direcionais ( <i>Directional Filter Bank</i> )
DFT ...	Transformada Discreta de Fourier ( <i>Discrete Fourier Transform</i> )
DT-CWT ...	<i>Dual-Tree Complex Wavelet Transform</i>
DWT ...	Transformada Wavelet Discreta ( <i>Discrete Wavelet Transform</i> )
fdp ...	Função Densidade de Probabilidade
FFT ...	Transformada Rápida de Fourier ( <i>Fast Fourier Transform</i> )
FIR ...	Resposta ao Impulso Finita ( <i>Finite Impulse Response</i> )
FT ...	Transformada de Fourier ( <i>Fourier Transform</i> )
GWT ...	Transformada Wavelet de Gabor ( <i>Gabor Wavelet Transform</i> )
IDWT ...	Transformada Wavelet Discreta Inversa ( <i>Inverse Discrete Wavelet Transform</i> )
iid ...	Independente e Identicamente Distribuído
IIR ...	Resposta ao Impulso Infinita ( <i>Infinite Impulse Response</i> )
IT ...	<i>Translation Invariant</i>
LS-SVM ...	<i>Least Square Support Vector Machine</i>
MAE ...	Erro Máximo ( <i>Maximum Error</i> )
MAD ...	Desvio Médio Absoluto
ME ...	Erro Médio Absoluto ( <i>Mean Absolute Error</i> )
MRA ...	Análise Multirresolução ( <i>Multiresolution Analysis</i> )
MSE ...	Erro Médio Quadrático ( <i>Mean Square Error</i> )
MMSE ...	Erro Médio Quadrático Mínimo ( <i>Minimum Mean Square Error</i> )
PSNR ...	<i>Peak Signal to Noise Ratio</i>
QF ...	Filtro de Quadratura ( <i>Quadrature Filter</i> )
QMF ...	Filtro em Quadratura Modulada ( <i>Quadrature Mirror Filters</i> )
RMSE ...	Raiz do Erro Médio Quadrático ( <i>Root Mean Square Error</i> )
SD ...	Desvio Padrão ( <i>Standard Deviation</i> )
SNR ...	Relação Sinal Ruído ( <i>Signal-to-Noise Ratio</i> )
STFT ...	Transformada de Fourier de Curta Duração ( <i>Short Time Fourier Transform</i> )
SURE ...	<i>Stein's Unbiased Risk Estimate</i>

SVR ... *Support Vector Regression*

Tu ... *Thresholding* Universal

UTH ... (*Universal Hard Thresholding*)

UTS ... (*Universal Soft Thresholding*)

WFT ... Transformada Janelada de Fourier (*Windowed Fourier Transform*)

WT ... Transformada Wavelet (*Wavelet Transform*)

## **Simbologia**

$\psi(t)$  ... Função wavelet mãe

$\phi(t)$  ... Função escala ou wavelet pai

$\mu$  ... Valor Médio

$\sigma$  ... Desvio Padrão

$\sigma^2$  ... Variância

$\lambda$  ... Valor de *Thresholding*

$\hat{f}$  ... Função estimada

$\alpha_k$  ... Coeficientes da Série de Fourier

$X(j\Omega)$  ... Transformada de Fourier para Sinais Contínuos

$L^2$  ... Conjunto das funções quadraticamente integráveis em  $\Re$ .

$l^2$  ... Conjunto das funções quadraticamente integráveis em  $Z$ .

$T_U$  ... *Thresholding* Universal

$W_\psi f(\cdot, \cdot)$  ... Transformada Wavelet Contínua

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 17
1.1	Relevância . . . . .	p. 17
1.2	Escopo . . . . .	p. 19
1.3	Objetivos . . . . .	p. 19
1.3.1	Objetivos Principais . . . . .	p. 19
1.3.2	Objetivos Secundários . . . . .	p. 20
1.4	Organização do texto . . . . .	p. 20
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	p. 22
2.1	Introdução . . . . .	p. 22
2.2	Análise Wavelet e suas Aplicações . . . . .	p. 22
2.3	Análise Wavelet no Processo de <i>Denoising</i> em Sinais e Imagens Digitais . . .	p. 24
2.4	Conclusão . . . . .	p. 35
<b>3</b>	<b>Fundamentos sobre a Formação de Imagens Digitais</b>	p. 37
3.1	Introdução . . . . .	p. 37
3.2	Caracterização de Imagens . . . . .	p. 39
3.2.1	Representação de Imagens Digitais . . . . .	p. 39
3.2.2	Histograma . . . . .	p. 40
3.3	Conceito de Ruído . . . . .	p. 41
3.3.1	Tipos de ruído . . . . .	p. 42
3.4	Métricas de Qualidade para Imagem Digitais . . . . .	p. 45
3.4.1	Erro Máximo . . . . .	p. 46
3.4.2	Erro Médio Absoluto . . . . .	p. 46
3.4.3	Erro Médio Quadrático . . . . .	p. 46
3.4.4	<i>Peak Signal to Noise Ratio</i> - PSNR . . . . .	p. 47
3.4.5	Variância . . . . .	p. 47
3.4.6	Covariância . . . . .	p. 48
3.5	Conclusão . . . . .	p. 48
<b>4</b>	<b>Fundamentos Teóricos</b>	p. 49
4.1	Introdução . . . . .	p. 49



4.2	Histórico . . . . .	p. 49
4.3	Conceitos Fundamentais da Análise de Fourier . . . . .	p. 51
4.3.1	A Transformada de Fourier . . . . .	p. 51
4.3.2	Transformada de Fourier Discreta . . . . .	p. 53
4.3.3	Transformada Rápida de Fourier . . . . .	p. 54
4.3.4	Transformada de Fourier Janelada . . . . .	p. 55
4.4	Transformada Wavelet Contínua . . . . .	p. 57
4.5	A Transformada Wavelet Discreta . . . . .	p. 60
4.6	Transformada de Fourier <i>versus</i> Transformada Wavelet . . . . .	p. 61
4.7	Análise Wavelet . . . . .	p. 63
4.7.1	Bases Wavelet . . . . .	p. 63
4.7.2	Análise Multirresolução . . . . .	p. 71
4.7.3	Banco de Filtros . . . . .	p. 72
4.7.4	Wavelet Bidimensional . . . . .	p. 74
4.8	Processo de <i>Denoising</i> em Imagens Digitais . . . . .	p. 75
4.9	Conclusão . . . . .	p. 77

## 5 Análise da Aplicação das Técnicas de Wavelet *Thresholding* no Processo de *Denoising* de Imagens Digitais

5.1	Introdução . . . . .	p. 78
5.2	Wavelet <i>Denoising</i> . . . . .	p. 78
5.2.1	Método UTS e UTH . . . . .	p. 81
5.2.2	<i>Shrinkage MAD</i> . . . . .	p. 82
5.2.3	<i>Neighshrink SURE</i> . . . . .	p. 82
5.3	Resultados de Simulação . . . . .	p. 85
5.4	Conclusão . . . . .	p. 89

## 6 Conclusões

6.1	Proposta de Continuidade e Trabalhos Futuros . . . . .	p. 103
-----	--	--------

## Referências

p. 104

# 1 INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa, investiga-se a utilização da Transformada Wavelet no processo de *denoising* aplicado a sinais bidimensionais, especificamente, imagens corrompidas por ruídos.

Em particular, o interesse principal desta pesquisa é o de investigar as técnicas de *thresholding* que anulem ou suavizem os coeficientes wavelets associados às informações de alta frequência das imagens, permitindo que o ruído seja reduzido e que, consequentemente, haja uma melhoria na percepção visual das imagens.

A Transformada Wavelet é considerada, na atualidade, uma das ferramentas matemáticas mais importantes para o processamento de sinais unidimensionais e bidimensionais. As bases teóricas da Transformada Wavelet e conceitos correlatos como a análise multiresolução e os bancos de filtros, são apresentados neste trabalho. A revisão bibliográfica, apresentada no trabalho, foi fundamental para a definição do tema desta pesquisa, motivando a investigação científica ao se comprovar a sua atualidade, a necessidade de novas pesquisas e a ampla utilização desta transformada nas mais diversas áreas técnico-científicas. O rápido avanço da Teoria Wavelet se deve, basicamente, à sua origem interdisciplinar, que tem seduzido pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento.

Este trabalho constitui a primeira pesquisa envolvendo aplicações da Análise Wavelet a ser desenvolvida no Grupo de Estudos em Processamento de Sinais (GEPSIN) do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Espera-se, desta forma, contribuir para o estabelecimento de bases mais sólidas em relação às diversas ferramentas disponíveis na área de processamento de sinais e imagens e para o desenvolvimento de novos trabalhos nestas áreas.

## 1.1 Relevância

Presente em praticamente todos os sistemas de engenharia, o ruído é responsável por grande parte das dificuldades encontradas na análise e processamento de sinais. Existem vários tipos de ruído que podem ser causados pelos mais diversos fatores, sejam externos ou internos aos sistemas.

As principais fontes de ruído em aplicações que utilizam imagens digitais surgem durante o processo de aquisição ou transmissão dessas imagens. O ruído é uma variável de característica aleatória, e como tal, usualmente interpretado através de funções de probabilidade.

Técnicas de eliminação de ruído, conhecidas como *denoising*, têm sido tema de várias pesquisas nas mais diversas áreas da engenharia. O objetivo destas técnicas é reconstruir

ou recuperar imagens degradadas, normalmente utilizando-se algum conhecimento *a priori* da imagem a ser restaurada (BURRUS, C. S. A.; GOPINATH, R. A.; GUO, H., 1998).

Em algumas situações, torna-se mais conveniente a aplicação de uma classe de operações matemáticas, genericamente denominadas transformadas, que convertem a representação do sinal a ser processado, do domínio do tempo para um outro domínio específico. A seguir, efetua-se o processamento nesse novo domínio e, finalmente, retorna-se o sinal processado para a sua representação no domínio original (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989).

Uma das técnicas mais populares e com ampla aplicação no processamento de sinais e imagens é a Transformada de Fourier (*Fourier Transform* - FT). Embora amplamente utilizada, a Transformada de Fourier apresenta algumas limitações na análise de alguns tipos de sinais, principalmente na presença de descontinuidades ou transitórios. Para tentar solucionar essas limitações, Denis Gabor desenvolveu, a partir da Transformada de Fourier, uma nova versão que foi denominada Transformada de Fourier Janelada (*Windowed Fourier Transform* - WFT). A WFT possibilita a definição de uma janela de tempo que poderá ser cursionada sobre a representação temporal do sinal, com uma dimensão que permanecerá constante, independentemente da faixa de frequência. A partir daí, vários algoritmos com base na WFT foram desenvolvidos (CUPERTINO, P., 2002).

Assim como a Transformada de Fourier, a Transformada Wavelet também é destinada à representação de dados ou funções, originalmente no domínio do tempo, seja contínuo ou discreto. Entretanto, a diferença fundamental em relação à Transformada de Fourier é que a análise através de wavelets não é realizada apenas no domínio da frequência, proporcionando a decomposição dos sinais em um novo domínio denominado tempo-escala (tempo-frequência) (BURRUS, C. S. A.; GOPINATH, R. A.; GUO, H., 1998).

A Transformada Wavelet tem se tornado uma ferramenta matemática indispensável para uma variedade de aplicações voltadas à área de processamento de sinais e imagens. No tratamento de sinais e imagens, uma das mais frequentes aplicações da Transformada Wavelet refere-se à eliminação ou redução de ruído, processo também chamado de *denoising*. A aplicação da Transformada Wavelet na eliminação de ruído, conhecidas na área científica como Técnicas de Wavelet *Denoising*, constituirá o tema central desta dissertação.

Na revisão bibliográfica realizada, observou-se a existência de vários artigos que utilizam as Técnicas de Wavelet *Denoising*, devido à recente difusão da Transformada Wavelet como ferramenta matemática no processamento de sinais e imagens.

## 1.2 Escopo

Nesta pesquisa, propõe-se uma análise da aplicação de técnicas de *denoising* em imagens digitais utilizando a Transformada Wavelet como ferramenta. É importante destacar que não está sendo proposta uma nova Técnica de Wavelet *Denoising* mas a análise de algumas das técnicas existentes, visando verificar o desempenho destas técnicas com ênfase nos métodos utilizados no processo de *thresholding*. Dentre as técnicas mais citadas na literatura pesquisada, e por esta razão, serão analisados os métodos UTH (*Universal Hard Thresholding*), UTS (*Universal Soft Thresholding*), *Shrinkage* MAD e *Neighshrink* SURE.

A Teoria Wavelet envolve a representação de dados em termos de funções bases em diferentes escalas e posições. Ela permite uma análise de multiresolução local no domínio tempo-frequência. Esta propriedade de dupla localização, característica específica da Transformada Wavelet, combinada com algoritmos eficientes, permitem uma lista bastante extensa de possíveis áreas de aplicação (RIOUL, O.; DUHAMEL, P., 1992) (DAUBECHIES, I., 1990). Para verificar o desempenho de algumas das técnicas wavelet no processo de *denoising* em imagens digitais serão implementados, para fins de simulação em ambiente MatLab, alguns algoritmos já propostos e considerados de relevância.

## 1.3 Objetivos

O objetivo principal desta pesquisa consiste em realizar uma análise comparativa entre as técnicas aplicadas na redução e eliminação de ruído em imagens digitais através dos métodos Wavelet *denoising*. Para avaliar o desempenho e a eficiência das técnicas, alguns métodos, disponíveis na literatura técnico-científica atual, serão implementados no ambiente MatLab. A partir destas implementações, será realizada uma investigação qualitativa e quantitativa, possibilitando a comparação entre os desempenhos das diversas técnicas de *thresholding* aplicados à eliminação de ruído. Espera-se, ao final do trabalho, identificar o(s) método(s) de Wavelet *Denoising* que apresentam melhores resultados na recuperação de uma imagem degradada com ruído, sob condições pré-estabelecidas.

### 1.3.1 Objetivos Principais

- Analisar o processo de *denoising* de imagens digitais contaminadas por ruídos, utilizando a Transformada Wavelet, enfatizando:
  - A função de *thresholding* ou *shrinkage*;
  - A escolha do valor de *thresholding* a ser aplicado.

- Analisar as vantagens e desvantagens da aplicação de técnicas de *thresholding* sobre os coeficientes wavelet, no processo de Wavelet *Denoising*;
- Estabelecer as bases teóricas e, através de simulações, da Análise Wavelet, contribuindo para o desenvolvimento de trabalhos futuros na área de processamento de imagens, no âmbito do GEPSIN / PPGEE PUC Minas;

### 1.3.2 Objetivos Secundários

- Desenvolver, em ambiente de simulação através do *software* MatLab, rotinas aplicáveis às técnicas de *thresholding* utilizadas no processo de Wavelet *Denoising*, em imagens digitais;
- Selecionar e aplicar critérios para a avaliação da qualidade de imagens, obtidas a partir de técnicas de processamento digital;
- Estabelecer as bases para o desenvolvimento e implementação de algoritmos através de Processadores Digitais de Sinais (DSP), dentre outros dispositivos digitais programáveis.

## 1.4 Organização do texto

Esta seção trata dos aspectos relativos à organização geral do texto e do conteúdo de cada capítulo desta dissertação. Como pôde ser verificado, no capítulo 1 foram destacados os aspectos relativos à relevância, ao escopo e aos objetivos relativos à pesquisa.

No capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica, onde buscou-se encontrar o estado da arte sobre a Análise Wavelet e suas aplicações, com destaque para o processo de *denoising* em imagens digitais.

No capítulo 3, serão abordados alguns conceitos relacionados à formação de imagens digitais e à caracterização estatística do ruído. Este capítulo encerra-se com a definição de histograma, uma ferramenta importante na análise dos níveis de cinza de uma imagem digital, além de rever outros conceitos importantes como variância, PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*), dentre outros, que serão as ferramentas estatísticas a serem utilizadas como critérios de desempenho na análise quantitativa da imagem recuperada.

No capítulo 4, são apresentados os fundamentos teóricos das Transformadas Wavelet e de Fourier. Inicia-se com o histórico da Transformada Wavelet e, na sequência, são abordados os principais conceitos da Transformada de Fourier, objetivando realizar um paralelo entre a aplicabilidade das duas transformadas no processo de *denoising* em imagens digitais. Neste capítulo, também serão introduzidos os principais conceitos da análise wavelet.

No capítulo 5, é realizada a aplicação de técnicas de *denoising* em imagens digitais. Inicialmente, são apresentadas as funções e escolha dos níveis de *thresholding*, a serem aplicadas na análise wavelet *denoising*. Em seguida, são apresentados os resultados de simulação e as análises comparativas dos resultados.

No capítulo 6, são apresentadas as conclusões, as principais contribuições e as propostas de continuidade através de trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, é apresentada uma revisão bibliográfica que buscou mostrar o estado da arte sobre a aplicação da análise wavelet para fins da eliminação de ruído em imagens digitais. Inicialmente, foi feito um breve relato sobre as áreas de aplicação da Transformada Wavelet e em seguida, apresentadas as sínteses dos principais trabalhos encontrados na literatura técnico-científica atual.

### 2.2 Análise Wavelet e suas Aplicações

O emprego da análise wavelet vem crescendo consideravelmente ao longo das últimas décadas, mostrando-se como uma excelente ferramenta analítica nas mais diversas áreas de pesquisa. O potencial de aplicação da Transformada Wavelet, tornam-a uma ferramenta poderosa para solucionar problemas nas mais variadas áreas da engenharia e das ciências. As wavelet podem ser aplicadas em diversas áreas, como processamento de sinais e imagens, análise numérica, modelamento matemático, economia, realização de diagnósticos médicos, dentre outras (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

Para se ter uma idéia da ampla gama de problemas que estão sendo resolvidos através da análise wavelet, serão destacados alguns exemplos encontrados na literatura:

- **Compressão de dados:** Uma quantidade grande de dados, como por exemplo nas aplicações via Internet, requer uma compressão segura, ou seja, sem perda de informação. A necessidade de compressão se faz devido a vários fatores, dentre eles a limitação da banda de transmissão e ampliação da capacidade de armazenamento. Um caso famoso e bem sucedido da aplicação da análise wavelet para a compressão de dados é relatado nos Estados Unidos da América, em relação a uma base de dados de 25 milhões de registro de impressões digitais. Se estes registros fossem digitalizados sem qualquer compressão seria necessário um dispositivo de armazenamento com capacidade em torno de 250 trilhões de bytes. A transmissão desses dados se tornaria impossível naquela época e até mesmo inviável, nos dias de hoje. A análise wavelet possibilitou a compressão destes registros sem que qualquer detalhe significativo das impressões digitais fossem perdidos (RAO, R. M.; BOPARDIKAR, A. S., 1998).
- **Deteção de objetos:** Necessidade de detectar ou seleccionar satisfatoriamente um objeto,

por exemplo uma aeronave, que esteja inserida dentro de uma imagem complexa (RAO, R. M.; BOPARDIKAR, A. S., 1998).

- **Denoising em sinais de áudio e voz:** Sinais de áudio podem sofrer interferências indesejadas provocadas por ruídos oriundos, por exemplo, da rede elétrica, que são adicionados ao sinal original. A partir da análise wavelet é possível realizar a filtragem dos sinais, para eliminação do ruído e posteriormente, a restauração do sinal original (RAO, R. M.; BOPARDIKAR, A. S., 1998). O trabalho proposto por (MEDINA, C.A.; ALCAIM, A.; APOLINÁRIO, J.A., 2003), trata da obtenção de uma técnica de wavelet *denoising* para a restauração de um sinal de voz contaminado com um ruído gaussiano. Os autores utilizam técnicas na qual a seleção do *thresholding* se fundamenta em redes neurais.
- **Denoising de imagem digital:** A remoção de ruído é uma técnica com vasta aplicabilidade em processamento de imagens. Qualquer tipo de imagem digital está sujeito a ser contaminado por ruído durante sua aquisição quando esse processo é realizado abaixo dos padrões ideais, e também, durante o processo de transmissão. Outras várias fontes e fatores podem provocar distorções nas imagens impedindo que a mesma seja processada ou reconhecida. A análise wavelet vem se tornando uma importante ferramenta para o tratamento de imagens, eliminando ou reduzindo as distorções inseridas na imagem original (RAO, R. M.; BOPARDIKAR, A. S., 1998).
- **Realce de imagem:** O objetivo principal do realce de imagem é processar uma imagem de modo que o resultado seja mais apropriado para uma aplicação específica do que a imagem original. A palavra "específica" é importante porque ela estabelece, desde o início, que as técnicas de realce de imagem dependem bastante da aplicação. Assim, por exemplo, um método útil para realçar imagens de raio X pode não ser necessariamente a melhor abordagem para o realce de fotos transmitidas por uma sonda espacial. A análise wavelet vem sendo bastante utilizada em processos específicos de realce de imagem (RAO, R. M.; BOPARDIKAR, A. S., 1998).

Como indicado nesta seção, são inúmeras as áreas de aplicação da análise wavelet. A utilização da Transformada Wavelet vem proporcionando avanços técnico-científicos na área e, muitas vezes, a quebra de um paradigma em relação à utilização de técnicas tradicionais como a Transformada de Fourier. Ao ressaltar estas aplicações da análise wavelet, verificou-se que o processo de eliminação ou redução de ruídos em imagens, utilizando a Transformada Wavelet, é um processo de fundamental importância nos dias de hoje e que ainda requer o desenvolvimento de pesquisas visto não se encontrar plenamente estabelecido. Baseando-se



nestas premissas, serão descritos, na seção seguinte, trabalhos correlatos que tratam da análise wavelet no processo de *denoising* em sinais e imagens digitais.

## 2.3 Análise Wavelet no Processo de *Denoising* em Sinais e Imagens Digitais

Na maioria das vezes, a informação digital é contaminada por ruídos que ocorrem, principalmente, durante o processo de aquisição e transmissão de dados. O primeiro passo ou pré-processamento para a análise e tratamento de sinais é o processo de *denoising*, que consiste em estimar e reduzir (eliminar) o ruído presente em um sinal de interesse. Existem diversas abordagens diferentes para o processo de *denoising* em sinais ou imagens.

Nas últimas décadas, a Transformada Wavelet vem se difundindo, cada vez mais, incentivando várias pesquisas e aplicações, nas mais diversas áreas. Neste contexto, vale destacar a contribuição de Stéphane Mallat, considerado um dos mais importantes pesquisadores sobre o tema. A revisão bibliográfica desta pesquisa será iniciada pela abordagem de alguns artigos publicados por Mallat e seus colaboradores.

A maior parte dos sinais que contêm algum tipo de informação são freqüentemente contaminados por uma estrutura irregular ou um fenômeno transiente (ruído). Propondo uma solução para detectar e remover essas singularidades, Mallat e Hwang propuseram em um artigo publicado em 1992, um método que emprega a Transformada Wavelet e os expoentes de Lipschitz, para caracterizar as regularidades locais da função escala da Transformada Wavelet. Esse método foi nomeado pelo autor como Transformada Wavelet de *Modulus* Máximo (MALLAT, S.; HWANG, L. W., 1992).

Em (MALLAT, S.; HWANG, L. W., 1992), são apresentados inicialmente, os fundamentos matemáticos da Transformada Wavelet, os teoremas que estimam os expoentes de *Lipschitz* da função escala wavelet e o procedimento para a caracterização matemática de singularidades através dos expoentes de *Lipschitz*. Posteriormente, demonstra-se que os máximos locais da Transformada Wavelet detectam a localizações de estruturas irregulares e é fornecido um procedimento numérico para computar os expoentes de *Lipschitz*. Também é demonstrado, numericamente, que os sinais unidimensionais ou bidimensionais podem ser reconstruídos, com boa aproximação, pelos máximos locais do módulo da Transformada Wavelet. Como uma aplicação, foi desenvolvido um algoritmo para remover o ruído branco de sinais através da Transformada Wavelet máxima por escala. É importante destacar que no caso de sinais bidimensionais, Mallat conclui que ao utilizar o método proposto no processo de *denoising* em imagens é possível detectar a localização das bordas, permitindo assim uma reconstrução com menor distorção visual.

Donoho e Jonhstone apresentaram um método para reconstruir os dados de uma função contaminada por ruído. Tomando-se então, uma função  $f$  desconhecida, definida no intervalo  $[0,1]$ , a qual deseja-se extrair dados ruidosos descritos por (DONOHO, D.L., 1995):

$$d_i = f(t_i) + \sigma z_i \quad (2.1)$$

onde  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $t_i = i/n$  e  $\sigma z_i$  é um ruído branco gaussiano independente e identicamente distribuído (iid) indicado por  $z_i \sim N(0, 1)$  e  $\sigma$  é um nível de ruído.

Os autores partem da definição do termo *denoising*, segundo a qual, este processo tem por objetivo minimizar o erro médio quadrático (MSE),

$$n^{-1} E \|\hat{f} - f\|_{l^2}^2 = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} E \left( \hat{f}\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^2 \quad (2.2)$$

sujeito a condição que, com alta probabilidade,  $\hat{f}$  seja no mínimo tão suave (*smooth*) quanto  $f$  (função real).

Na tentativa de atender às condições descritas, minimizando a presença de oscilações na função estimada além daquela providenciada por 2.2. Donoho e Johnstone propuseram um algoritmo simples para a reconstrução de funções a partir de dados contaminados por ruído. Em resumo:

1. Aplicação do algoritmo de filtragem piramidal adaptado ao intervalo nos dados medidos  $(\frac{d_i}{\sqrt{n}})$ , obtendo os coeficientes wavelets.
2. Aplicação de um *thresholding* suave, na forma não linear:  $n_t = \text{sgn}(y)(|t| - t)_+$
3. Inversão da filtragem piramidal, reconstruindo:  $(\hat{f}_n^*)(t_i), i = 0, \dots, n-1$ .

Essa técnica foi desenvolvida levando em consideração o método de *denoising* denominado *Visushrink*. O nome deste método faz referência à boa qualidade visual obtida na reconstrução do sinal bidimensional pelo simples ajuste dos coeficientes wavelet, processo também conhecido como *Soft Thresholding*. Esses métodos de *denoising* foram denominados *Wavelet Thresholding*. O *Visushrink* calcula o limite do coeficiente baseado no *thresholding* universal e foi bastante difundido na literatura devido à sua vasta área de aplicação, simplicidade no cálculo dos coeficientes de *thresholding* e facilidade de implementação computacional (DONOHO, D. L.; JONHSTONE, I. M., 1994).

O *thresholding* universal ( $T_u$ ) pode ser calculado pela equação a seguir

$$T_U = \hat{\sigma} \sqrt{2 \log(n)} \quad (2.3)$$

onde  $n$  indica a amplitude do sinal e  $\sigma$  é o desvio padrão estimado do ruído.

Este estimador é calculado pela técnica de otimização denominada Minimax, encontrando o *thresholding* ótimo dos coeficientes wavelet. Este método obteve um bom desempenho em diversas aplicações, contudo, o algoritmo é considerado como simples e eficiente apenas quando um único *thresholding* global é usado, não prevendo nenhuma adaptação durante o processo de *denoising*. Além disso, estudos mostram que com um grande número de amostras, o *thresholding* universal tende a cobrir detalhes fora da região de interesse (DONOHO, D. L.; JONHSTONE, I. M., 1994). Uma classe diferente de métodos explora a decomposição dos dados em bases wavelet e realiza o *Shrink* dos coeficientes wavelet para realizar a *denoising* dos dados (DONOHO, D.L., 1995) (CHANG, S. G.; YU, B.; VETTERLI, M., 2000).

As técnicas denominadas *Wavelet Based Shrinkage* consistem em aplicar a Transformada Wavelet para encontrar os coeficientes wavelet, realizar o *thresholding* ou *shrink* para eliminar os coeficientes menores, que estão associados aos ruídos e em seguida, reconstruir o sinal aplicando a Transformada Wavelet Inversa (DAUBECHIES, I, 1992).

Com base na teoria de estimação Bayesiana, Chang propôs um outro método de *denoising* que foi bastante difundido e é usualmente, chamado de *Bayesshrink*. Pode-se verificar, através de diversos trabalhos correlatos, que o método de *denoising Bayesshrink* está entre os mais eficientes para o tratamento de sinais bidimensionais (imagens digitais). Esta técnica apresentou melhores resultados de reconstrução, com menores valores de erro médio quadrático (MSE) e maiores valores de PSNR. Considerando dois fatores fundamentais que são o desempenho e a simplicidade de implementação, segundo os autores, o método de *denoising Bayesshrink* é considerado o método com maiores índices de aproveitamento na reconstrução de sinais bidimensionais (CHANG, S. G.; YU, B.; VETTERLI, M., 2000).

O método *Bayesshrink* proposto por Chang (CHANG, S. G.; YU, B.; VETTERLI, M., 2000), utiliza níveis de *thresholding* adaptativos para realizar o *denoising* em imagens. Esses níveis adaptativos são obtidos a partir da técnica de minimização do erro médio quadrático (MMSE), determinando o valor do *thresholding* a ser aplicado pelo *Soft Thresholding*, que consiste em ajustar ou zerar os coeficientes wavelets. O método *Bayesshrink* foi projetado para adaptar cada sub-banda individual a um determinado nível de resolução da imagem. Devido às adaptações que ocorrem nos coeficientes wavelets, pode-se obter bons níveis de eficiência nos processos de *denoising*.

Como descrito anteriormente, as Técnicas de Wavelet *Thresholding* desenvolvidas por Donoho e Johnstone obtiveram bons resultados em diversas aplicações devido à propriedade de compactação da Transformada Wavelet, a qual possibilita a concentração de energia (sinais úteis) em poucos coeficientes. Por outro lado, este esquema de *denoising* inclui efeitos visuais indesejáveis, como o fenômeno de Gibbs, que deterioram a qualidade da imagem (DONOHO, D.L., 1995).

O fenômeno de Gibbs, observado a partir da série de Fourier, deve-se à não-convergência da série nos pontos de descontinuidade e refere-se ao aparecimento de oscilações em torno dos pontos de truncamento da série (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989). Este fenômeno pode ser explicado através de uma soma parcial  $p_M(t)$  composta por  $(2M + 1)$  termos da série de Fourier de uma função periódica  $p(t)$  com período  $T$ , da forma (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999):

$$p_M(t) = \sum_{k=-M}^M \alpha_k e^{j k \omega_o t} \quad (2.4)$$

onde os coeficientes de Fourier são dados por,

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) e^{-j k \omega_o t} dt \quad (2.5)$$

Após algumas manipulações matemáticas chega-se à expressão,

$$p_M(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(\delta) \frac{\text{sen}(M + \frac{1}{2})(t - \delta)\omega_o}{\text{sen}\frac{1}{2}(t - \delta)\omega_o} d\delta \quad (2.6)$$

que é a convolução da função periódica original com o kernel da série de Fourier e, como tal, preserva sua característica oscilatória. A porcentagem de *overshoot* permanece constante mesmo com o aumento de termo e quando  $M$  tende a infinito, a soma irá convergir para o ponto médio da descontinuidade.

Alguns trabalhos foram desenvolvidos visando à eliminação das distorções provocadas pelo fenômeno de Gibbs. Pode-se destacar o trabalho de Coifman e Donoho (COIFMAN, R. R.; DONOHO, D. L., 1994), que propuseram um esquema de *denoising*, denominado *Translation Invariant* (TI), que reduz significativamente os efeitos de Gibbs. Conforme o método de *denoising* proposto, é realizado o pré-processamento do sinal através da utilização de filtros e, logo em seguida, aplicada a Transformada Wavelet ao sinal. Esse pré-processamento também é chamado de *Prefilter*. Na etapa de reconstrução, ocorre a aplicação da Transformada Wavelet Inversa sobre o sinal, processo chamado de *Postfilter*. Esse método é conhecido como *Translation-Invariant Denoising Using Multiwavelets*. Os autores avaliam que a aplicação conjunta dos filtros e da Transformada Wavelet apresentam maior eficiência quando comparado por exemplo com a técnica de *Visushrink*.

Melhores resultados foram encontrados no artigo publicado por Chen e Bui (CHEN, G. Y.; BUI, T. D., July 2003), que propuseram trabalhar com multiwavelets associadas com o *thresholding* dos coeficientes wavelets vizinhos, esquema denominado como *Multiwavelets Denoising Using Neighboring Coefficients*.

Recentemente, várias aproximações importantes foram propostas considerando a in-

fluência de coeficientes wavelets vizinhos sobre o *thresholding* de um coeficiente wavelet específico. A motivação dessas idéias é que os coeficientes wavelets de maior amplitude, provavelmente, terão uma relação mais próxima com seus coeficientes vizinhos. Isso se deve à propriedade da Transformada Wavelet de produzir coeficientes wavelets correlacionados.

Cai e Silverman (CAI, T. T.; SILVERMAN, B. W., 2001) propuseram dois diferentes métodos de *thresholding* conhecidos por *NeighBlock* e *NeighCoeff*, ambos aplicados a sinais 1D. O *thresholding* dos coeficientes wavelets é realizado utilizando-se blocos ou janelas com alguma sobreposição ao invés de ser aplicado termo a termo. Segundo os autores, a motivação básica dos métodos segue as regras do *thresholding* em blocos, anteriormente propostas, segundo as quais são tomadas decisões simultâneas sobre a retenção ou descarte dos coeficientes dentro de um bloco. Ou seja, se os coeficientes vizinhos contêm algum sinal então os coeficientes diretos também devem ser de interesse e um baixo valor de *thresholding* deverá ser aplicado, estabelecendo um novo limite entre sinal e ruído. Para o método *NeighCoeff* é escolhido um *threshold* para cada coeficiente com base nos coeficientes próximos e, para a aproximação *NeighBlock*, uma nova estimação dos coeficientes é realizada com base nos coeficientes vizinhos fora do bloco real de interesse. O trabalho mostra várias comparações com outras técnicas, assegurando o melhor desempenho dos métodos propostos.

A idéia de se utilizar coeficientes wavelets vizinhos é apresentada novamente por Chen *et al*, pela proposta de um algoritmo de *denoising thresholding* para imagens chamado de *Neighshrink* (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYSAK, A., 2004). No caso de imagens, considera-se uma janela quadrática em torno do coeficiente que deverá ser submetido ao processo de *denoising*. A janela quadrática com os respectivos coeficientes considerados pode ser visualizada na Figura 5.2. Nesta figura, é destacado no centro, o coeficiente que irá sofrer o *thresholding*. O algoritmo utiliza o *thresholding* universal, conforme Equação 2.3, para o cálculo do valor limite do coeficiente e estima este limite a partir da soma dos quadrados dos coeficientes wavelets que estão dentro da janela selecionada. Em seguida, aplica o esquema de *Soft Thresholding* no mesmo.

No artigo proposto, os autores destacam a influência do tamanho da janela na eficiência do algoritmo, uma vez que o cálculo do *thresholding* universal leva em consideração este parâmetro. A influência do tamanho da janela pôde ser verificada pelos resultados experimentais apresentados pelos autores conforme a tabela, aqui reproduzida, na Tabela 2.1.

De acordo com os valores PSNR, indica-se 3x3 como o tamanho de janela mais adequado para o algoritmo proposto, excessão apenas para a imagem do tipo *Fingerprint*, cujo melhor resultado foi obtido através de uma janela 5x5.

Para validar o método proposto, Chen *et al* compararam o algoritmo *Neighshrink* com outros dois métodos de *denoising* em imagens, métodos *Visushrink* e *Wiener*. Conforme verifica-

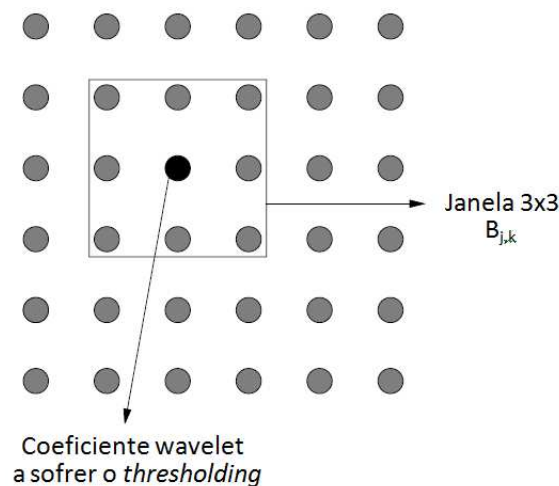


Figura 2.1: Ilustração de uma janela quadrada 3x3, mostrando o coeficiente wavelet que deverá ser submetido ao *thresholding* (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004).

Tabela 2.1: PSNR (dB) para diferentes imagens variando-se o tamanho da janela, através do método *Neighshrink* (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004).

<i>Imagem</i>	<i>Imagem Contaminada</i>	<i>Tamanho da Janela</i>			
		1x1	3x3	5x5	7x7
<i>Lena</i>	17,74	22,01	<b>25,25</b>	25,05	21,74
<i>MRIscan</i>	18,56	22,70	<b>26,76</b>	26,32	22,71
<i>Fingerprint</i>	16,51	20,83	23,68	<b>24,57</b>	21,17
<i>Phone</i>	18,56	23,04	<b>24,90</b>	24,25	21,78
<i>Daubechies</i>	17,28	28,43	<b>29,59</b>	27,27	22,09
<i>Coifman</i>	15,34	24,87	<b>26,77</b>	24,91	20,05

se pela Tabela 2.2, com base na imagem *Lena*, o método proposto obteve melhores resultados que os demais métodos (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004).

Segundo os autores, apesar do desempenho do método proposto e da facilidade de aplicação, essa técnica demanda alta complexidade computacional quando comparada com os métodos de *denoising Visushrink* e filtros de *Wiener*.

Portilla e Simoncelli (PORTILLA, J.; SIMONCELLI, E. P., 2000) realizam um processo de *denoising* em imagens fazendo o ajuste da magnitude da correlação dos coeficientes wavelets. No algoritmo proposto, a imagem é corrompida com um ruído branco de variância conhecida. Sucintamente, pode-se descrever o algoritmo da seguinte forma:

- A imagem corrompida é decomposta em sub-bandas wavelet;
- Estima-se a autocorrelação dos coeficientes da imagem original livre de ruído e de sua magnitude dentro de cada sub-banda;

Tabela 2.2: Comparação dos valores de PSNR (dB) entre diferentes métodos utilizados no processo de *denoising* da imagem *Lena* contaminada através de diferentes níveis de ruído gaussiano (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004).

<b>Imagem Contaminada</b>	<b>Métodos</b>		
	<b>Visushrink</b>	<b>Neighshrink</b>	<b>Wiener</b>
27,28	25,49	<b>31,50</b>	30,75
21,26	23,03	<b>27,43</b>	26,38
17,74	22,01	<b>25,24</b>	23,89
15,23	21,46	<b>23,83</b>	22,07
13,30	21,04	<b>22,85</b>	20,58
11,72	20,68	<b>22,10</b>	19,29
10,38	20,37	<b>21,50</b>	18,14

- Projeta-se a autocorrelação desejada para a reconstrução da imagem com os coeficientes wavelets modificados.

Neste caso, o foco é somente a correlação espacial, ou seja, a autocorrelação dos coeficientes dentro de cada sub-banda. Esse processo é aplicado repetidamente e segundo os autores, produz ótimos resultados com poucas iterações. Resultados experimentais utilizando a imagem *Einstein*, contaminada com diversos níveis de ruído branco, mostram a eficiência do algoritmo em relação a três técnicas diferentes de *denoising*: *Linear*, *LocWiener* e *Thresh (Shrinkage)*. Esses resultados são apresentados na Tabela 2.3 onde se destaca o desempenho do método de ajuste da magnitude de correlação pelos valores de PSNR apresentados pelos autores.

Tabela 2.3: Resultado comparativo do processo de *denoising* utilizando a imagem *Einstein* (PORTILLA, J.; SIMONCELLI, E. P., 2000).

<b>Imagem Contaminada</b>	<b>Métodos</b>			
	<i>Linear</i>	<i>LocWiener</i>	<i>Thresh</i>	<i>MagCorr</i>
17.33	25.02	25.48	25.86	<b>26.96</b>
20.53	26.34	27.27	27.45	<b>28.46</b>
24.76	28.31	29.62	29.78	<b>30.29</b>
28.80	30.70	32.05	31.63	<b>32.23</b>

Cheng *et al* (CHENG, H. et al., 2004) propuseram um método de manipulação dos coeficientes wavelets para supressão de ruído em imagens utilizando a fusão das técnicas de *denoising* em wavelet com *Support Vector Regression* (SVR). Baseando-se no *Least Square Support Vector Machine* (LS-SVM), um novo operador de *denoising* no domínio wavelet é obtido. O SVM é uma poderosa ferramenta para classificação e estimação de funções baseada na Teoria de Aprendizagem Estatística (*Statistical Learning Theory*), desenvolvida por Vapnick-Chervonenkis (teoria VC) (VAPNICK, V., 1995). Resultados experimentais apresentados mostram a eficiência do

esquema proposto quando comparado com esquemas de *denoising* tradicionais. A Tabela 2.4 mostra a comparação do método proposto em termos da relação sinal ruído (SNR), dado em decibel(dB).

Tabela 2.4: Resultados de SNR para a imagem *Lena* comparando o método proposto por Cheng (SVR) e outros 3 algoritmos de *denoising* (CHENG, H. et al., 2004).

<b><i>Imagem Contaminada</i></b>	<b><i>Métodos</i></b>			
	<i>Mallat Forced</i>	<i>Bayesshrink</i>	<i>SVR</i>	<i>Median Filtering</i>
9,09	11,39	12,48	<b>12,63</b>	12,54
10,06	11,50	12,48	<b>13,15</b>	12,75
12,57	11,68	13,23	<b>14,27</b>	13,16
14,81	11,77	13,96	<b>15,68</b>	13,47
15,90	11,80	14,12	<b>16,05</b>	13,55

Pela Tabela 2.4, verifica-se que o método de *denoising* proposto pelos autores obtém melhores resultados em termos de SNR do que os demais métodos. Quando comparado com o método *Bayesshrink*, o resultado é cerca de 0,15 a 1,93 dB superior, dependendo do nível de ruído. O valor de SNR é cerca de 0,09 a 2,5 dB maior quando comparado com o método *Median Filtering*. O método *Mallat Forced* tem os menores valores de SNR para qualquer nível de ruído quando comparado com o método proposto e com os outros métodos.

Além disso, devido à técnica de *thresholding* adaptativa e à utilização dos coeficientes wavelets vizinhos, o método proposto preservou as bordas da imagem, possibilitando uma melhor qualidade visual. Os autores apresentam os resultados dessa avaliação, aqui reproduzidos pela Figura 2.2.

Também baseado na teoria VC, Zhong e Cherkassky (ZHONG, S.; CHERKASSKY, 2000) descreveram um esquema de *Denoising Wavelet Thresholding* para imagens chamado de *WaveVC*. Integrando o método de seleção do modelo baseado na teoria VC com o *Wavelet Thresholding*, os autores demonstram a eficiência do algoritmo ao considerar o processo de *denoising* em imagens como um problema de estimação de sinal 2D.

Rosiles e Smith (ROSILES, J. G.; SMITH, M. J. T., 2000) propuseram a utilização de Banco de Filtros Direcionais (DFB) para realizar *denoising* em imagens sob a mesma premissa da *Wavelet Thresholding*, em que os coeficientes da sub-banda com magnitude pequena representam o ruído e podem ser substituídos por zeros, enquanto os coeficientes de maior amplitude, que contêm informações úteis, são preservados. Os autores mostram que o DFB é capaz de preservar as informações das bordas com eficiência, fornecendo uma boa qualidade visual.

Stefano e Collis (STEFANO, A. D.; COLLIS, W. B., 2000) também propuseram a utilização de banco de filtros no processo de redução de ruído em imagens. Nesse caso, o banco de filtros realiza a decomposição da imagem em componentes e um novo esquema de *thresholding* é





Figura 2.2: Comparação dos diferentes métodos de *denoising* utilizando a imagem *Lena*. a) imagem com ruído; b) *Bayesshrink*; c) Método Proposto (*Propose Method*); d) Filtro Mediano (*Median Filtering*) (CHENG, H. et al., 2004).

obtido através da teoria de estimação bayesiana. A função de *thresholding* foi selecionada pelo melhor ajuste da imagem de forma a se obter uma maior qualidade visual. Para isso, foi empregado algoritmos de otimização para selecionar o melhor ajuste do parâmetro de *thresholding*. Foram testados vários algoritmos baseados na direção de busca, dentre os quais o método de *Nelder* foi escolhido por razões computacionais.

Entre a variedade de aproximações para a restauração de imagens já propostas na literatura, pode-se distinguir as famílias que abordam os filtros de *Wiener* (VLADIMIR, P. I.; PROGRENIAK, A. B., 1996) (GUAN, L.; WARD, R. K., 1989), tradicionalmente desenvolvidas no domínio da Transformada de Fourier, e a Transformada Wavelet (CHANDRA, D. V. S., 1997) (STRICKLAND, R. N.; HAHN, H. I., 1997) como técnicas consideradas de bom desempenho e em vários casos, de fácil implementação computacional.

Para maior elucidação, é apresentada a seguir a aplicação do Filtro de Wiener em uma imagem degradada através de um ruído gaussiano do tipo aditivo, ou seja,

$$\vec{u} = H\vec{s} + \vec{n} \quad (2.7)$$

onde os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{s}$  e  $\vec{n}$  indicam a imagem distorcida, a imagem original e o ruído, respectivamente.  $H$  é um operador matricial que contém amostras da função  $h(x,y)$  de espalhamento dos pontos (PSF) relacionada à distorção linear espacial. A solução de Wiener é dada por,

$$\hat{s} = F^{-1} \left\{ F(u) \frac{H^*(w)}{|H(w)|^2 + \frac{P_n(w)}{P_s(w)}} \right\} \quad (2.8)$$

onde  $H(w)$  é a Transformada de Fourier da PSF  $h(x,y)$ ,  $P_n(w)$  é a densidade espectral do ruído e  $P_s(w)$  é a densidade espectral do sinal (\* indica a conjugação complexa).

Apesar de sua grande potencialidade, as aproximações com base nos filtros de Wiener alcançam melhor desempenho quando algum conhecimento *a priori* das propriedades estatísticas do sinal original encontra-se disponível. Para superar este problema, vários autores vêm buscando, desde meados dos anos 90, a combinação das estratégias que definem os Filtros de Wiener no domínio wavelet. A combinação dessas estratégias é conhecida como algoritmo de *Wienerchop* ou *Wienershrink* (CHOI, H.; BARANIUK, R., 1998) (GHAEL, S.; SAYEED, A.; BARANIUK, R., 1997). Inicialmente, apesar de seu bom desempenho, o algoritmo *Wienerchop* não obteve bons resultados em sinais com presença de descontinuidades e elevou o custo computacional em relação aos métodos de *thresholding* wavelet já disponíveis.

Bruni e Vitulano (BRUNI, V.; VITULANO, D., 2003) propuseram modificações no algoritmo *Wienerchop*, tentando superar suas desvantagens e preservando suas características principais. Nesse novo algoritmo *Wienerchop*, o filtro de Wiener foi projetado diferentemente do processo clássico, através de duas bases wavelets. Para construção do filtro foram escolhidas três bases wavelets e usou-se a combinação de duas delas, tentando superar a dificuldade da escolha da melhor base para um sinal desconhecido. Dados experimentais relacionados pelos autores indicam melhorias tanto em termos objetivos quanto subjetivos, quando comparado com o algoritmo *Wienerchop* convencional.

Existem vários trabalhos na literatura que realizam o processo de *denoising* em imagens sem utilizar a Teoria Wavelet. Dentre eles, Muresan e Parks (MURESAN, D. D.; PARKS, T. W., 2003) propuseram um algoritmo no qual a decomposição dos componentes é realizada utilizando o Método das Componentes Principais Adaptativo (PC). Segundo os autores, o método proposto baseia-se na representação completa do sinal ruidoso (ao invés de aplicar a decomposição ortogonal em bases wavelets), obtendo melhores desempenho em relação à supressão do fenômeno de Gibbs. Depois do processo de decomposição, realizada na direção das bordas, os coeficientes passam pelo processo de *thresholding* e, a seguir, ocorre a reconstrução da imagem.

Por ser um método realizado localmente, o algoritmo busca a preservação da borda fazendo com que os resultados em termos de fidelidade visual e de PSNR sejam mais satisfatórios.

Embora a aplicação da análise wavelet, mais especificamente a Transformada Wavelet Discreta (DWT), seja uma poderosa ferramenta para o processamento de sinais e imagens, algumas críticas ao seu desempenho são citadas na literatura atual.

Burrus et al (FERNANDES, C. A. F.; SPAENDONCK, R. L. C.; BURRUS, C. S., 2005) citam três desvantagens da DWT que impedem algumas aplicações tais como perda de sensibilidade, quando variações no sinal de entrada geram mudanças imprevisíveis nos coeficientes; direcionalidade pobre pois os coeficientes revelam apenas três orientações espaciais de bordas (horizontal, vertical e diagonal) e perda de informação sobre a fase do sinal. Para superar essas desvantagens, os autores propuseram a introdução de multi-dimensão, que consiste no mapeamento de uma função complexa sobre a DWT. Os autores aplicaram os melhoramentos da DWT em processamento de sinais sísmicos, encontrando valores de redundância inferiores que aos encontrados sem aplicação desse processo.

Neste sentido outros trabalhos relacionam as limitações da Transformada Wavelet Discreta (DWT), apresentadas a seguir (SELESNICK, I.W.; BARANIUK, R.G.; KINGSBURY, N.G., 2005):

- Oscilações: A presença de oscilações próximas às bordas das imagens tornam complicada a análise wavelet, principalmente na extração e modelamento do sinal;
- *Invariância ao deslocamento*: Quando se trabalha com sinais não estacionários, uma pequena troca de sinal provoca uma perturbação nos coeficientes wavelets, na região de singularidades, prejudicando o processamento do algoritmo;
- Efeito *aliasing*: A Transformada Wavelet Discreta é computada através de iterações de sub-amostragem por filtros passa-altas e passa-baixas. Este procedimento gera o efeito *aliasing* que é cancelado na Transformada Wavelet Inversa. O fato de não levar em consideração o *aliasing* no processo de *thresholding* prejudica o resultado de *denoising*.
- Perda de direcionalidade: Diferente da Transformada de Fourier, a Transformada Wavelet bidimensional apresenta uma característica de perda de direcionalidade decorrente da aplicação da decomposição não-padrão.

Para solucionar as deficiências apresentadas, em (FERNANDES, C. A. F.; SPAENDONCK, R. L. C.; BURRUS, C. S., 2005) (SELESNICK, I.W.; BARANIUK, R.G.; KINGSBURY, N.G., 2005) foi proposto um algoritmo que explora a Transformada Wavelet no espaço complexo. A "*Dual-Tree Complex Wavelet Transform*" (DT - CWT) é relativamente recente e foi proposta inicialmente no trabalho de Kingsbury (KINGSBURY, N.G., 2001), o qual descreve como a Transformada

Wavelet Discreta (DWT) pode gerar coeficientes wavelets complexos pela dupla decomposição de seus coeficientes, obtendo os coeficientes reais e imaginários.

A DT-CWT é aplicada na determinação dos coeficientes wavelets reais e imaginários que se encontram no espaço complexo  $j = \sqrt{-1}$ . Realizando a decomposição do sinal em sub-bandas, pela aplicação de filtros paralelos, obtêm-se 7 sub-bandas, sendo: uma sub-banda de aproximação, 3 sub-bandas de detalhes reais ( $LH^{Re}, HL^{Re}, HH^{Re}$ ) e 3 sub-bandas de detalhes imaginários ( $LH^{Im}, HL^{Im}, HH^{Im}$ ). As vantagens da DT-CWT são as seguintes: redução significativa das oscilações, boa seletividade e redundâncias limitadas quando comparada com a DWT. Por outro lado, não influencia na preservação das propriedades principais da DWT, que são a reconstrução eficiente da imagem e a eficiência computacional (SELESNICK, I.W.; BARANIUK, R.G.; KINGSBURY, N.G., 2005) (BHUIYAN, M. I. H.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S., 2006).

Considerando a DT-CWT uma evolução frente aos benefícios já conhecidos da DWT, foram publicaram recentemente vários trabalhos que realizam a aplicação desta Transformada visando aos problemas do processo de *denoising* em imagens digitais. Neste contexto, pode-se citar o trabalho de Zhou Dengwen e Cheng Wengang (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008), onde é proposto um novo método para se determinar o *thresholding* ótimo, bem como o ajuste do tamanho da janela para cada sub-banda, utilizando o método de estimação conhecido por *Stein's Unbiased Risk Estimate* (SURE). Este algoritmo foi nomeado de *Neighshrink SURE* e também propõem a utilização da DT-CWT para eliminar as redundâncias. Segundo os autores, o método é considerado mais eficiente que os algoritmos de *denoising* que utilizam a DWT e que aplicam *thresholding* universal com tamanho de janelas iguais para todas as sub-bandas dos coeficientes wavelets.

## 2.4 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentadas algumas das inúmeras aplicações da Transformada Wavelet. Conforme citado, a análise wavelet vem sendo utilizada nas mais diversas áreas do conhecimento, visando à eliminação de ruídos e reconstrução de imagens digitais. Pode-se inferir que a Transformada Wavelet é uma poderosa ferramenta matemática e apresenta propriedades que possibilitam a implementação de algoritmos eficientes em relação ao objetivo deste trabalho. Percebe-se, claramente, a característica interdisciplinar da análise wavelet, que incentiva sua aplicação e faz com que mais pesquisadores estejam se interessando pelos estudos e desenvolvimento de técnicas relacionadas ao tema.

A revisão bibliográfica realizada permitiu constatar a atualidade do tema e a importância da Transformada Wavelet como uma ferramenta eficiente na análise de imagens e no processo de eliminação de ruídos. Conforme pode ser constatado, vários métodos recentes de *denoising*

em imagens e sinais são baseados na análise wavelet. Pesquisadores investigam sua aplicação utilizando diferentes processos para obterem resultados cada vez mais eficientes.

Foi possível abordar, nesta revisão bibliográfica, as principais publicações que contribuem para solidificar o desenvolvimento da pesquisa proposta. Neste contexto, vários algoritmos que abordam a utilização da Transformada Wavelet no processo de *denoising* foram relacionados, dentre eles podem ser citados: *Visushrink*, *Bayesshrink*, *Neighshrink* e *Neighshrink SURE*. De forma geral, pode-se dizer que todas essas técnicas aplicam o *thresholding* nos coeficientes wavelets, esquema denominado de *Shrinkage*. A eficiência das técnicas está na obtenção de um melhor esquema *Shrinkage* para recuperar uma imagem específica, contaminada com ruído. Com o objetivo de explorar a aplicação e eficiência de algumas técnicas propostas, serão realizadas simulações e estudos comparativos, a serem apresentados no capítulo 5. Os conceitos fundamentais sobre a formação de imagens e métricas de avaliação das imagens processadas são abordadas no capítulo 3.

## **3 FUNDAMENTOS SOBRE A FORMAÇÃO DE IMAGENS DIGITAIS**

### **3.1 Introdução**

O interesse em métodos de processamento de imagens decorre de duas áreas principais de aplicação: melhoria da informação visual para a interpretação humana e o processamento de dados para a percepção automática através de máquinas (GONZALES, R. C.; WOODS, R. E., 2000). Técnicas de processamento de imagens digitais são atualmente utilizadas para resolver uma variedade de problemas. Embora frequentemente não relacionados, esses problemas comumente requerem métodos capazes de melhorar a informação visual para análise e interpretação humanas. Em medicina, por exemplo, procedimentos computacionais melhoram o contraste ou codificam os níveis de intensidade em cores, de modo a facilitar a interpretação de imagens de raios X e outras imagens biomédicas. Geógrafos usam técnicas idênticas ou similares para estudar padrões de poluição em imagens aéreas e de satélite. A automação industrial, a montagem e a inspeção de produtos, a visão robótica e o controle de qualidade podem ser realizados a partir de técnicas de processamento e análise de imagens. Atividades comuns incluem a verificação de falhas em circuitos impressos, a separação de peças por robôs em uma linha de montagem e a classificação de defeitos em soldas. As técnicas de processamento e análise de imagens possuem inúmeras aplicações na área militar, podendo-se destacar a identificação de alvos em imagens de satélite, o rastreamento de alvos para lançamento de mísseis, a navegação de veículos autônomos e a detecção de obstáculos no trajeto de robôs (CASTLEMAN, K. R., 1979).

Com tantas áreas de aplicações e a necessidade de uma imagem nítida e livre de ruídos, pode-se dizer que o padrão de qualidade nas etapas de formação destas imagens estão ficando mais exigentes e sofisticados. A capacidade humana para captar, processar e interpretar grandes volumes de dados de natureza digital estimula o desenvolvimento de técnicas e dispositivos cada vez mais eficientes.

O processamento digital de imagens consiste em um conjunto de técnicas para capturar, representar e transformar imagens com o auxílio do computador. O emprego destas técnicas permite extrair e identificar informações das imagens e melhorar a qualidade visual de certos aspectos estruturais, facilitando a percepção humana e a interpretação automática por meio de máquinas.

Geralmente, os métodos de processamento de imagens utilizam pouco conhecimento sobre o conteúdo ou a semântica das imagens. Esses métodos envolvem operações como a

redução do ruído e compressão das imagens (PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R., 2008).

Uma representação comum de imagens para fins de processamento digital é obtida através de uma matriz retangular ou quadrada, com elementos correspondendo aos valores dos níveis de cinza ou brilho, desta imagem. Em seções posteriores deste capítulo, será definida, com maior ênfase, a representação matricial de uma imagem digital.

O processo para a formação de uma imagem digital abrange várias etapas fundamentais. Algumas destas etapas são:

- Aquisição: Envolve os processos necessários para a discretização de uma imagem real.
- Armazenamento: Em muitos casos, é um desafio para os sistemas de processamento de imagens devido à grande quantidade de dados gerados a partir da discretização.
- Processamento de imagens: Realizado através de vários dispositivos ou equipamentos, compreendendo microcomputadores, dispositivos programáveis por *software*, *hardwares* dedicados, dentre outros. Apresenta etapas específicas para cada tipo de aplicação.
- Comunicação ou transmissão da imagem.
- Exibição final da imagem no equipamento de destino.

Técnicas de eliminação de ruído ou *denoising* em imagens buscam melhorar a qualidade visual da imagem, tornando-a mais adequada à aplicação. Estas técnicas são necessárias quando a imagem sofre um processo de degradação ou perda de qualidade, por exemplo, em decorrência da presença de ruídos.

As principais abordagens referentes às técnicas de *denoising* em imagens dividem-se em duas categorias:

- Método no domínio espacial: O domínio espacial refere-se ao próprio plano da imagem, sendo que as abordagens nesta categoria são baseadas na manipulação direta dos pixels das imagens. Como exemplo, pode-se citar a Transformada Wavelet.
- Métodos no domínio da frequência: Classicamente, as técnicas de processamento digital no domínio da frequência são baseadas na aplicação da Transformada de Fourier.

Principalmente nas etapas de aquisição e transmissão pode ocorrer a contaminação da imagem por um ruído, sendo sua identificação e eliminação de fundamental importância na interpretação e análise destas imagens. Como já citado anteriormente, esta pesquisa terá como objetivo principal a análise da aplicação de um tipo de Transformada Wavelet associada a várias regras de *thresholding* para a eliminação ou redução do ruído em imagens digitais.

Neste capítulo, serão abordados alguns aspectos fundamentais do processamento de imagens, de forma a situar a pesquisa neste contexto e também facilitar a compreensão dos resultados a serem apresentados. Inicialmente, são tratados conceitos relacionados à representação de imagens digitais. Em seguida, serão apresentadas modelagens estatística dos principais tipos de ruído. Finalmente, para encerrar o capítulo, são definidos os critérios de análise quantitativa (objetiva) a serem utilizados na verificação dos resultados, em que as imagens corrompidas por ruído, após serem processadas utilizando algoritmos de wavelet *denoising*, são comparadas à imagem ideal, livre de ruído.

## 3.2 Caracterização de Imagens

### 3.2.1 Representação de Imagens Digitais

O termo imagem monocromática, ou simplesmente imagem, refere-se à função bidimensional de intensidade da luz  $f(x,y)$ , onde  $x$  e  $y$  denotam as coordenadas espaciais e o valor de  $f$ , em qualquer ponto  $(x,y)$ , é proporcional ao brilho (ou nível de cinza) da imagem naquele ponto (PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R., 2008).

Uma imagem digital é uma imagem discretizada tanto em coordenadas espaciais quanto em brilho. Uma imagem digital pode ser considerada como sendo uma matriz cujos índices das linhas e das colunas identificam um ponto da imagem e o valor associado a cada posição da matriz identifica o nível de cinza naquele ponto.

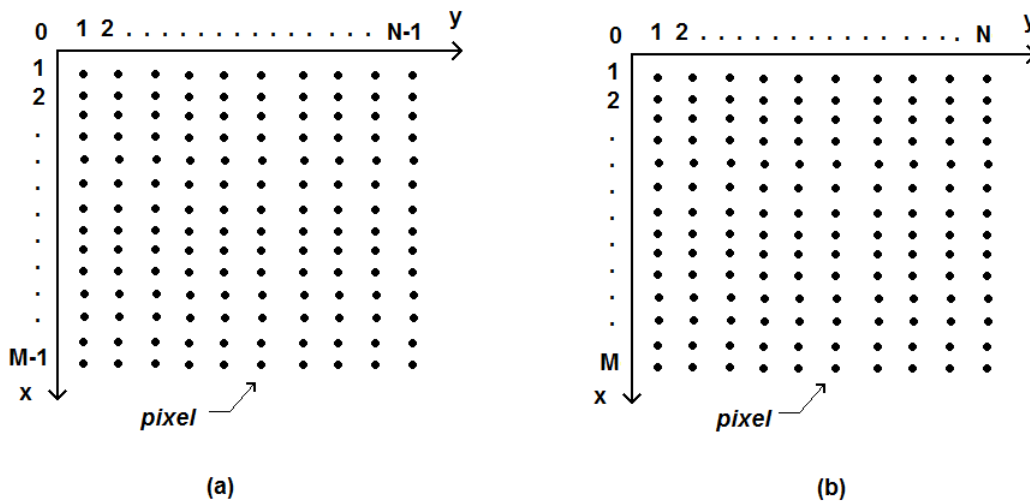


Figura 3.1: Convenção dos eixos para representação de imagens. (a) Convenção de eixos apresentada nos principais livros de processamento de imagens. (b) Convenção de eixos de uma imagem adotado no MatLab.

Uma imagem digital pode ser representada por uma matriz  $M \times N$ , cuja dimensão depende



da própria imagem e do nível de resolução adotado. O tamanho da matriz depende da aplicação mas, em geral, é vantajoso trabalhar-se com imagens expressas por matrizes quadradas,  $N \times N$ , com tamanhos e números de níveis de cinza que sejam potências de 2. Os elementos desta matriz digital são chamados de elementos da imagem, elementos da figura, *pixels* ou *pels*, estes dois últimos, abreviações de *picture elements* (elementos de figura). A Figura 3.2 apresenta em (a) uma imagem  $f(x, y)$  e, em (b) esta mesma imagem amostrada  $f_a(x, y)$  através de seus *pixels*. Posteriormente, tem-se uma matriz com os valores destes *pixels* em valores de escala de cinza correspondentes.

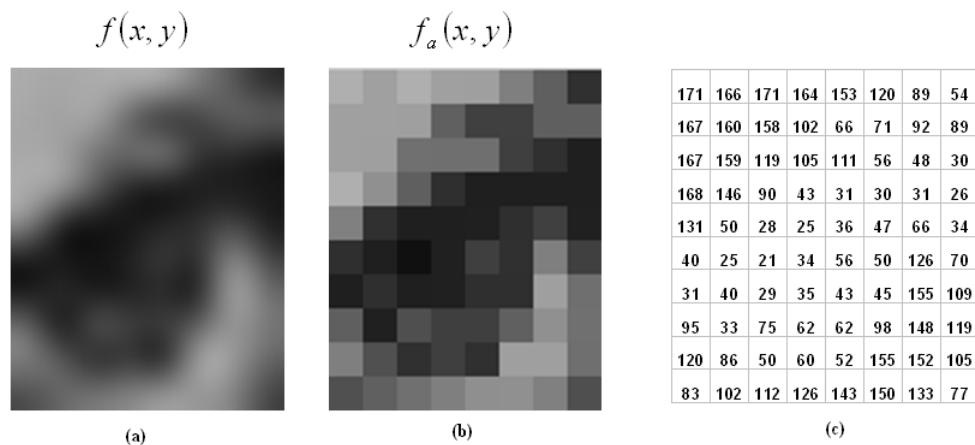


Figura 3.2: (a) Imagem; (b) Imagem amostrada; (c) Valores correspondentes de cada pixel da imagem amostrada (GONZALES, R. C.; WOODS, R. E., 2000).

### 3.2.2 Histograma

O histograma de uma imagem corresponde à distribuição dos níveis de cinza da imagem, representado por um gráfico que indica o número de *pixels*, na imagem, para cada nível de cinza. Denominado como  $n$  a variável que representa os níveis de cinza de uma imagem, assume-se que os valores dos *pixels* são quantidades contínuas que foram normalizadas no intervalo  $[0, 1]$  ou  $[0, 255]$ , com  $n = 0$  representando o preto e  $n = 1$ , representando o branco. Isto pode ser visualizado nos histogramas da Figura 3.3, onde o primeiro gráfico representa uma imagem escura e o segundo uma imagem mais clara (GONZALES, R. C.; WOODS, R. E., 2000).

A análise do histograma é muito importante em processamento de imagens, pois a partir dele é possível obter medidas estatísticas, tais como os valores mínimos e máximos, o valor médio, a variância e a frequência relativa de ocorrência dos níveis de cinza.

Pode-se dizer que a análise do contraste de uma imagem também é feita pelo histograma. Quando os valores dos *pixels* apresentados pelo histograma são distribuídos sobre todo o intervalo de níveis de cinza, a imagem apresenta um alto contraste. Ao contrário, quando o

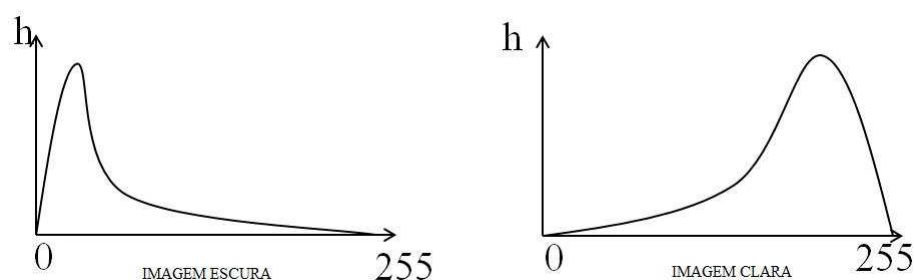


Figura 3.3: Histogramas representando uma imagem escura e outra mais clara.

histograma apresentar os *pixels* concentrados em uma determinada faixa do intervalo dos níveis de cinza, por exemplo, à esquerda ou à direita no histograma, esta imagem possui um baixo contraste.

A Figura 3.4 ilustra o efeito da contaminação de um ruído gaussiano em uma imagem e o que ocorre com seu histograma após esta contaminação.

Pode-se perceber, pela Figura 3.4, que após ser adicionado o ruído na imagem, seu histograma uniformizou-se, tendendo a acompanhar a forma de uma curva gaussiana, ou seja, a forma do ruído gaussiano inserido nesta imagem.

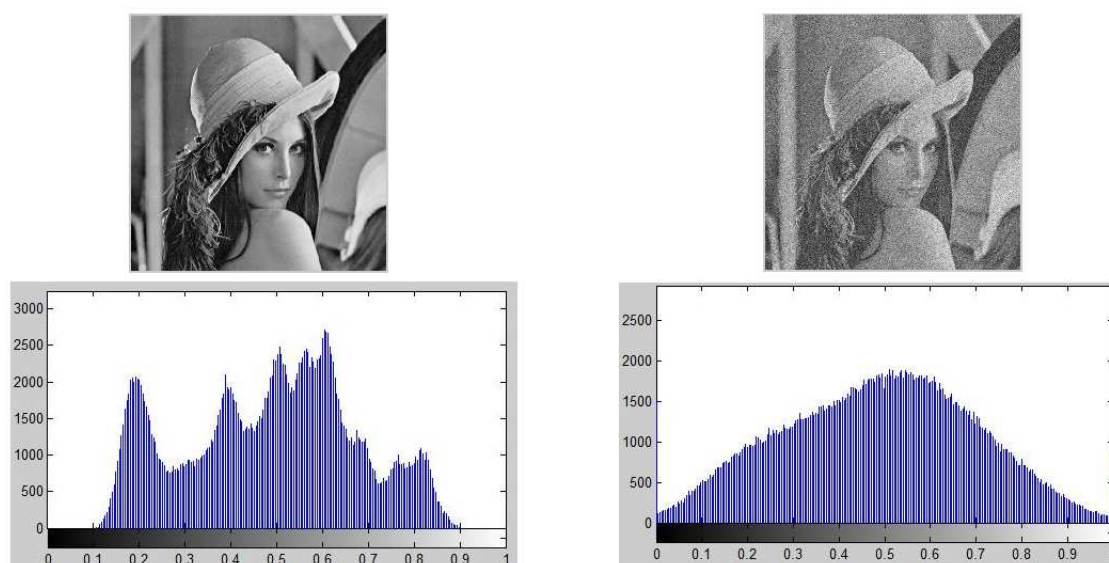


Figura 3.4: Comparação do histograma da imagem *Lena* sem ruído e o histograma desta imagem após a contaminação com ruído gaussiano.

### 3.3 Conceito de Ruído

Um ruído pode ser definido como qualquer forma indesejada de energia, tendendo a perturbar a própria recepção e reprodução de sinais desejados em determinada aplicação. O que

distingue o sinal do ruído é que o primeiro transporta a informação útil ao processamento e, o segundo, uma informação irrelevante que não é de interesse na análise e que pode na maioria das vezes mascarar as informações significativas (PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U., 2002).

A Figura 3.5 ilustra, através de um diagrama em blocos, como ocorre a contaminação de um sinal, através de um ruído do tipo aditivo e também o processo de *denoising*, obtendo  $\hat{f}(x,y)$  que é uma estimativa do sinal original  $f(x,y)$ .

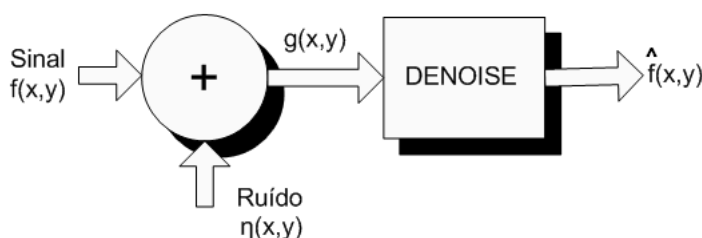


Figura 3.5: Diagrama em blocos mostrando um sinal sendo contaminado por ruído e sofrendo o processo de *denoising* para a sua recuperação.

Muitos distúrbios de natureza elétrica produzem ruído em receptores, modificando o sinal de uma maneira indesejada. Em receptores de rádio, por exemplo, o ruído pode produzir assobios na saída do alto-falante, enquanto que em receptores de televisão os efeitos neve ou confete (neve colorida / chuva) podem sobrepor-se à imagem. Em sistemas de comunicação de pulso, o ruído pode produzir pulsos indesejados, ou até mesmo cancelar os pulsos de interesse.

Existem inúmeras maneiras de classificar o ruído. Elas podem ser subdivididas de acordo com o tipo (caracterização estatística), fonte, efeito ou relação com o receptor. É mais conveniente aqui dividir os ruídos em dois amplos grupos: ruídos cujas fontes são externas ao receptor e ruídos criados dentro do próprio receptor. Por um lado, ruídos externos são difíceis de tratar quantitativamente, e frequentemente há pouco a se fazer quanto a isso, resumindo-se a "mover" o sistema para outro lugar. Por outro lado, ruídos internos são mais quantificáveis e capazes de serem reduzidos por um sistema apropriado de *denoising*.

### 3.3.1 Tipos de ruído

O ruído é uma variável aleatória caracterizada pela forma da sua função densidade de probabilidade (fdp) ou de seu histograma, para o caso de ruídos discretos. A seguir serão descritos alguns tipos de ruídos.

A fdp característica de um ruído uniforme é apresentada na Figura 3.5. Neste histograma, o eixo horizontal mostra os níveis de cinza da imagem e o eixo vertical indica a quan-

tidade de *pixels* relacionado ao respectivo nível. Essa função corresponde à distribuição da probabilidade do ruído, que é expressa por (PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U., 2002):

$$p_x(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; X \in (a, b] \\ 0; \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

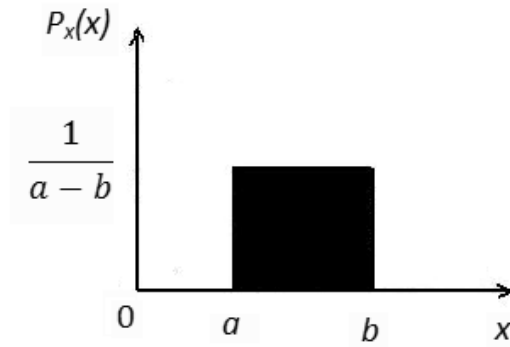


Figura 3.6: Histograma do ruído uniforme.

O tipo de ruído mais comumente encontrado nas imagens é o ruído de Gauss, ou gaussiano, cuja fdp é dada na Equação 3.2. Esse ruído tem esse nome porque a forma da sua fdp é a mesma da curva de Gauss. Há maior probabilidade de ocorrência do ruído gaussiano nos tons de cinza próximos ao valor médio e menor probabilidade nos tons de cinza máximos e mínimos. A função densidade de probabilidade do ruído gaussiano é dada pela expressão:

$$p_x(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}}; m \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \quad (3.2)$$

onde  $\sigma^2$  e  $m$  são a variância e o valor médio, respectivamente.

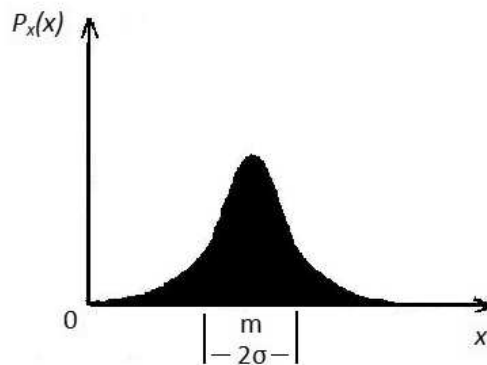


Figura 3.7: Histograma do ruído gaussiano.

O ruído impulsivo, também chamado de "sal e pimenta" ou chuva, é caracterizado pela ocorrência aleatória de picos de luminosidade que diferem significativamente dos valores de seus *pixels* vizinhos. Em outras palavras, significa que ocorre o aparecimento de pixels de ruído na cor branca em partes escuras da imagem e *pixels* de cor escura em partes claras da imagem (como se fossem derramados grãos de sal e pimenta em uma papel cinza). A função densidade de probabilidade do ruído impulsivo é dada por:

$$p_x(X) = \begin{cases} P_a; & \text{para } X = a \\ P_b; & \text{para } X = b \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.3)$$

A Equação 3.4 apresenta um outro modo de expressar a fdp de um ruído impulsivo.

$$p_x(X) = P_a \delta(X - a) + P_b \delta(X - b) \quad (3.4)$$

O histograma correspondente ao ruído impulsivo é dado na Figura 3.8. Neste histograma os pontos escuros são indicados por  $G_p$  (pimenta) e os tons claros como  $G_s$  (sal).

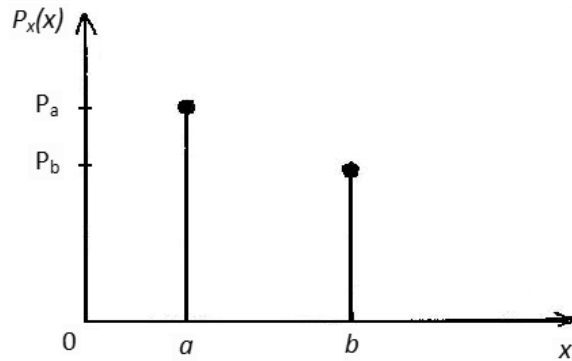


Figura 3.8: Histograma do ruído sal e pimenta ou ruído impulsivo.

O ruído exponencial é um tipo de ruído cuja densidade de probabilidade se aproxima de uma função exponencial, sendo dado pela expressão:

$$p_x(X) = \begin{cases} a e^{-a X}; & \text{para } x \geq 0 \text{ e } a \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

O histograma do ruído exponencial é mostrado na Figura 3.9.

Ruído branco é aquele que tem um espectro de frequência plano e ilimitado. Um ruído deste tipo ocorre quando cada amostra no domínio de tempo não contiver nenhuma informação sobre a outra amostra.

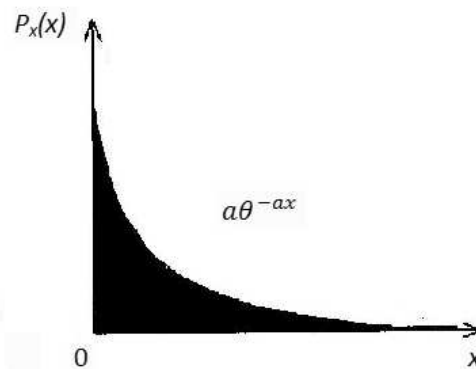


Figura 3.9: Histograma do ruído exponencial.

Para exemplificar os efeitos dos diferentes tipos de ruídos citados, a Figura 3.10 mostra as aparências de uma imagem, inteiramente na cor cinza, quando degradada por esses ruídos.

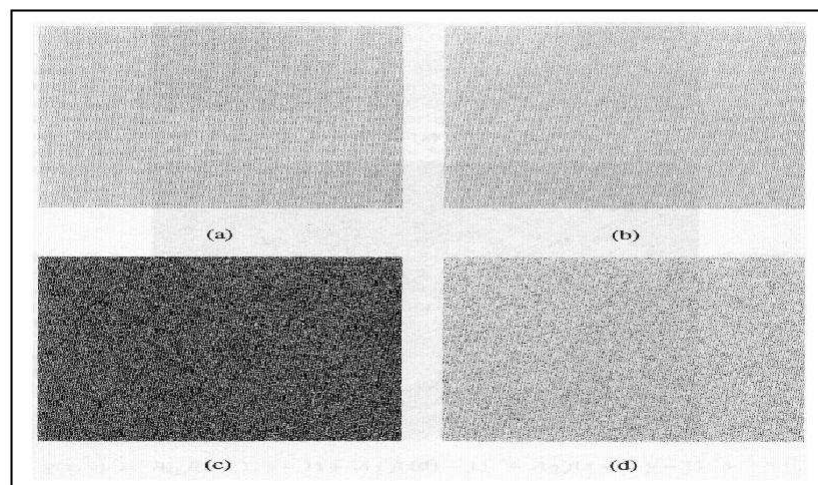


Figura 3.10: Exemplo de ruído em uma imagem cinza. a) Imagem com ruído uniforme b) Imagem com ruído gaussiano c) Imagem com ruído exponencial d) Imagem com ruído sal e pimenta

### 3.4 Métricas de Qualidade para Imagem Digitais

A qualidade requerida de uma imagem é bastante dependente da aplicação na qual a imagem é utilizada. Imagens podem ser utilizadas, por exemplo, para entretenimento em jogos eletrônicos ou televisão, bem como em aplicações que não permitem degradações da qualidade visual, tais como na medicina ou automação industrial. Uma imagem pode sofrer degradação durante o processo de aquisição, transmissão ou processamento. Métricas de qualidade ou fidelidade podem ser utilizadas para avaliar a similaridade de uma imagem transformada  $g(x,y)$

em relação à imagem original  $f(x,y)$  (PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R., 2008).

Algumas análises são voltadas à avaliação subjetiva, as quais se baseiam na percepção de observadores humanos. Por outro lado, as análises objetivas procuram medir a qualidade das imagens por meio de análises estatísticas entre a imagem original e a imagem transformada.

Os métodos de avaliação objetiva mais comuns são baseados em medidas de similaridade ou diferença entre as imagens. Considerando duas imagens,  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$ , ambas com dimensões  $M \times N$  pixels, algumas métricas de similaridade entre as imagens são definidas a seguir.

### 3.4.1 Erro Máximo

O erro máximo (ME, do inglês, *Maximum Error*) é a maior diferença absoluta entre cada par de pontos da imagem original e da imagem transformada (aproximada), expressa como:

$$ME = \max |f(x,y) - g(x,y)| \quad (3.6)$$

Quanto menor essa métrica, mais a imagem transformada aproxima-se da original. O erro máximo, por depender apenas dos valores entre dois *pixels* nas imagens, é bastante sensível a ruído ou a variações locais nas imagens (PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R., 2008).

### 3.4.2 Erro Médio Absoluto

O erro médio absoluto (MAE, do inglês, *Mean Absolute Error*) é a soma das diferenças absolutas entre cada ponto da imagem original e da imagem transformada (aproximada), dividido pelo produto das dimensões da imagem, expressa como (PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R., 2008):

$$MAE = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} |f(x,y) - g(x,y)| \quad (3.7)$$

Quanto menor o valor numérico expresso pela métrica MAE, maior a aproximação entre as imagens.

### 3.4.3 Erro Médio Quadrático

O erro médio quadrático (MSE, do inglês, *Mean Square Error*) é a soma dos quadrados das diferenças de cada ponto da imagem original e da imagem transformada (aproximada) dividida pelo produto das dimensões da imagem, dada por (PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R., 2008):

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y) - g(x,y)]^2 \quad (3.8)$$

Uma melhor aproximação entre as imagens é obtida pela redução do MSE. Uma variação muito utilizada desta métrica é conhecida como raiz do erro médio quadrático (RMSE, do inglês, *Root Mean Square Error*), expressa por (PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R., 2008):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y) - g(x,y)]^2} \quad (3.9)$$

### 3.4.4 Peak Signal to Noise Ratio - PSNR

O PSNR, do inglês, *Peak Signal to Noise Ratio* é utilizada para avaliar a diferença global entre duas imagens, expressa da forma (PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R., 2008):

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{(L_{max})^2}{MSE} = 10 \log_{10} \frac{MNL_{max}^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y) - g(x,y)]^2} \quad (3.10)$$

Onde  $L_{max}$  é o valor máximo de intensidade de cinza. Tipicamente,  $L_{max} = 255$  para imagens representadas por 8 bits. A métrica PSNR é expressa em *decibel* (dB), unidade originalmente definida para medir a intensidade sonora em escala logarítmica. Valores típicos de PSNR variam entre 20 e 40, e neste caso, quanto maior a métrica, mais imagem transformada se aproxima da original.

Uma métrica relacionada é a relação sinal ruído (SNR, do inglês, *Signal to Noise Ratio*) definida como:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y)]^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y) - g(x,y)]^2} \quad (3.11)$$

Sabe-se que os valores em PSNR são em torno de 6dB superiores ao valores de SNR.

### 3.4.5 Variância

Uma medida estatística utilizada no processamento de imagens digitais é a variância  $\sigma^2$ , definida como (PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U., 2002):

$$\sigma^2 = \frac{1}{NM-1} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (f(x,y) - \mu)^2 \quad (3.12)$$

A variância descreve o quanto os valores estão dispersos em torno da média, a qual é dada pela Equação (3.13), ou seja,

$$\mu = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \quad (3.13)$$

A média representa o valor esperado da distribuição dos níveis de cinza presentes na



imagem.

### 3.4.6 Covariância

A covariância entre duas imagens  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  é dada por:

$$\sigma_{fg} = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y) - \mu_f][g(x,y) - \mu_g]}{MN} \quad (3.14)$$

em que  $\mu_f$  e  $\mu_g$  representam os níveis de cinza médio nas imagens  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$ , respectivamente, calculados através da expressão 3.13.

Quanto maior o valor da covariância, mais próximo a imagem  $f(x,y)$  se encontram em relação a  $g(x,y)$ .

## 3.5 Conclusão

Neste capítulo foram abordados, de forma geral, os principais conceitos que envolvem a formação e a análise de qualidade visual de uma imagem digital. O objetivo principal foi introduzir conceitos simples e úteis para facilitar e familiarizar o leitor em relação às imagens bidimensionais.

Foram apresentados os tipos de ruído mais comumente encontradas no tratamento de imagens, destacando-se suas principais características do ponto de vista da teoria da probabilidade e estatística.

Nos trabalhos que foram descritos na revisão bibliográfica desta pesquisa, pode-se dizer que o ruído mais utilizado é o gaussiano e a métrica padrão é o PSNR.

## 4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 4.1 Introdução

Desde meados do século XVII, várias propostas foram desenvolvidas na busca de modelos matemáticos que pudessem representar os fenômenos físicos em termos de funções de variáveis contínuas e equações diferenciais. Paralelamente, métodos numéricos foram propostos para a solução destas equações quando soluções analíticas não se encontravam disponíveis, tais como os métodos de diferenças finitas, métodos de integração numérica, interpolação de funções, dentre outros (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989).

Neste contexto, a análise de Fourier constitui um marco histórico, onde foram estabelecidas as bases para o processamento de sinais analógicos ou contínuos no tempo e, mais recentemente, para o processamento digital de sinais e imagens. A análise de Fourier transforma os sinais de seu domínio original (domínio do tempo ou espacial) para o domínio da frequência, ou espectral, através da Transformada de Fourier ou Série de Fourier, revelando características próprias das componentes senoidais e cossenoidais que constituem o sinal original (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989) (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

A Transformada Wavelet, cuja primeira menção ocorreu no século XX, surgiu como uma alternativa para a representação dos sinais em um novo domínio, denominado domínio tempo-frequência ou tempo-escala. Devido às similaridades entre a análise wavelet e a análise de Fourier, este capítulo deverá discorrer brevemente sobre seus principais aspectos e definições matemáticas.

Neste capítulo, será apresentada uma revisão teórica sobre a Transformada de Fourier e a Transformada Wavelet. Pretende-se, com isto, examinar os fundamentos teóricos relevantes envolvidos na utilização destas ferramentas matemáticas, na área de processamento de sinais e imagens.

### 4.2 Histórico

Uma das técnicas mais tradicionais e com ampla aplicação no processamento de sinais é a Transformada de Fourier (*Fourier Transform* - FT), que permite representar sinais e sistemas, originalmente expressos no domínio do tempo, através do domínio da frequência (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989). Contudo, devido ao fato da grande maioria dos sinais possuírem características não-estacionárias ou transitórias, a Transformada de Fourier apresenta algumas limitações na análise dos sinais ou funções que contenham esse tipo de comportamento. Para

tentar solucionar este problema, versões modificadas da Transformada de Fourier foram propostas visando à análise do conteúdo de frequência local, ou seja, removendo-se previamente a porção de interesse de um sinal dado e em seguida, aplicando-se a Transformada de Fourier sobre a parcela removida. Esta versão modificada ficou conhecida como Transformada de Fourier de Curta Duração (*Short-time Fourier Transform* - STFT).

Nesta linha de pesquisa, em 1964, Denis Gabor propôs a Transformada de Fourier de Gabor ou Transformada de Fourier Janelada (*Windowed Fourier Transform* - WFT), utilizando uma janela de tempo com base na função gaussiana, de comprimento fixo e independente da faixa de frequência (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

No caso de sinais discretos, a Transformada Discreta de Fourier (DFT) requer a amostragem uniforme de uma variável contínua de frequência relacionada a uma variável no domínio do tempo discreto (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989) (DINEIZ, R. S. P.; SILVA, B. A. E.; NETTO, L. S., 2004). Devido ao grande número de operações aritméticas envolvidas no cálculo da DFT, sua aplicação computacional demanda um alto custo de processamento, o que a tornava impraticável. Em 1969, Cooley e Tukey, desenvolveram um algoritmo eficiente para o cálculo da DFT, dando origem ao método denominado Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT). Assim, desde a proposição de Cooley e Tukey, a Transformada Rápida de Fourier vem sendo exaustivamente utilizada, tendo se consagrado como uma poderosa ferramenta para o processamento digital de sinais (COOLEY, J. W.; LEWIS, P. A. W.; WELCH, P. D., 1969) (COOLEY, J. W.; LEWIS, P. A. W.; WELCH, P. D., 1976b) (COOLEY, J. W.; LEWIS, P. A. W.; WELCH, P. D., 1976a).

De forma similar, as wavelets são funções também destinadas à representação de dados ou funções, originalmente, no domínio do tempo (contínuo ou discreto). A diferença fundamental da Transformada Wavelet em relação à Transformada de Fourier baseia-se no resultado da transformação, que não é representado apenas no domínio da frequência, mas em um novo domínio, formado pelas variáveis tempo e frequência (FRAZIER, M. W., 1999) (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

A primeira menção às wavelets ocorreu em 1909, por Alfred Haar. Ao contrário do método de Fourier, cujas funções base seno e cosseno são definidas em todo eixo real, as bases de Haar, que também são ortogonais entre si, existem apenas em um intervalo finito de tempo. As wavelets de Haar não proporcionaram grande interesse por parte dos pesquisadores durante um longo período. Stéphane Mallat (MALLAT, S., 1989), em 1989, deu novo impulso à utilização das wavelets através de seus trabalhos em processamento digital de imagens. Posteriormente, com base nos resultados de Mallat, Yves Meyer propôs a primeira versão de wavelets continuamente diferenciáveis (MEYER, Y., 1993).

Poucos anos mais tarde, Ingrid Daubechies (DAUBECHIES, I., 1990) utilizou os trabalhos de Mallat para a construção de bases ortonormais de wavelets com suportes compactos. As

funções wavelets de suporte compacto apresentam intervalos fechados e limitados, fora dos quais elas são nulas. Os trabalhos de Daubechies são considerados os alicerces das aplicações atuais da análise wavelet. Estudos realizados por Yves Meyer (MEYER, Y., 1993) e Barbara Hubbard (HUBBARD, B. B., 1998) descrevem a evolução do desenvolvimento e aplicações da wavelet, desde as contribuições de Fourier até os mais recentes trabalhos.

No caso de processamento de imagens, dentre alguns aspectos que tornam a utilização das wavelets cada vez mais freqüentes, podem ser destacados (RAO, R. M.; BOPARDIKAR, A. S., 1998):

- Compactação: permite que com uma quantidade mínima de valores (*pixels*) seja possível representar toda a imagem;
- Representam sinais com resolução variável no domínio tempo-freqüência;
- As janelas wavelets possuem dimensão variável, diferentemente da WFT.

Essas propriedades tornam a Transformada Wavelet uma importante ferramenta matemática, podendo ser utilizada em inúmeras aplicações, como a detecção de singularidades ou oscilações locais de funções, soluções de equações diferenciais, reconhecimento de padrões, compressão de imagens e de sons, dentre outras, citadas anteriormente.

## 4.3 Conceitos Fundamentais da Análise de Fourier

Este trabalho trata sobre as transformações bidimensionais ou, em outras palavras, sobre a aplicação de técnicas para a redução / eliminação de ruídos em imagens, com base na Transformada Wavelet.

Desde que a análise wavelet e a análise de Fourier guardam vários aspectos comuns, esta seção irá apresentar uma breve revisão da Teoria de Fourier, visando facilitar a compreensão da análise wavelet e das técnicas de denoising a serem aplicadas.

### 4.3.1 A Transformada de Fourier

A Série e a Transformada de Fourier tratam de duas classes diferentes de funções. Na maioria das aplicações em Engenharia, a Transformada de Fourier é considerada uma extensão da Série de Fourier, supondo funções periódicas cujo período  $T$  tenda ao infinito (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

Tomando-se, inicialmente, uma função periódica real  $p(t)$ ,  $[p(t) = p(t + T)]$ , a Série de Fourier é dada por,

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j k \Omega_o t} \quad (4.1)$$

com

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} p(t) e^{-j k \Omega_o t} dt \quad (4.2)$$

sendo  $\alpha_k$  os coeficientes de Fourier,  $T = \frac{2\pi}{\Omega_o}$  o período e  $\Omega_o$ , a frequência fundamental do sinal periódico.

O conjunto de funções  $\{e_k\} = \{e^{j k \Omega_o t}\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  formam uma base ortogonal de tal forma que,

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \langle p(t), e^{j k \Omega_o t} \rangle \quad (4.3)$$

representam as componentes ortogonais da função  $p(t)$  em  $k\Omega_o$  (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

A Transformada de Fourier, como a representação de um sinal contínuo não-periódico  $x(t)$ , envolve a superposição de frequências complexas no intervalo  $(-\infty, \infty)$  dada, portanto, como uma integral na frequência, da forma (HAYKIN, S.; VEEN, B. V., 2000):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j \Omega t} d\Omega \quad (4.4)$$

onde

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j \Omega t} dt \quad (4.5)$$

As equações (4.4) e (4.5), chamadas de par de Transformadas de Fourier, existem se  $x(t)$  for contínua e integrável e  $X(j\Omega)$  for integrável. Estas duas condições são quase sempre satisfeitas na prática (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989).

A Transformada de Fourier de uma função real, é geralmente complexa, podendo ser expressa na forma polar como,

$$X(j\Omega) = |X(j\Omega)| e^{j \theta(\Omega)} \quad (4.6)$$

onde a função magnitude  $|X(j\Omega)| = [Re\{X(j\Omega)^2 + Im\{X(j\Omega)^2\}]^{\frac{1}{2}}$  é chamada espectro de Fourier de  $x(t)$  e  $\theta(\Omega)$  é o ângulo de fase. O quadrado do espectro de Fourier é denominado espectro de potência ou densidade espectral de  $x(t)$ .

### 4.3.2 Transformada de Fourier Discreta

A Transformada de Fourier Discreta (*Discrete Fourier Transform* - DFT), aplicável a seqüências de duração finita, pode ser obtida pela amostragem, a intervalos regulares e igualmente espaçados na freqüência, da Transformada de Fourier do sinal.

Analogamente à análise de sinais periódicos no domínio do tempo contínuo, uma seqüência  $\tilde{x}(n)$  periódica com período  $N$ ,  $\tilde{x} = \tilde{x}(n + rN)$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ , pode ser representada pela Série de Fourier como a soma de exponenciais complexas, com freqüências múltiplas da freqüência fundamental do sinal discreto, dada por  $w_0 = \frac{2\pi}{N}$  (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989).

As expressões correspondente ao par análise-síntese da Série de Fourier Discreta (DFS) é dado, respectivamente, por (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989):

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \quad (4.7)$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad (4.8)$$

onde, para maior facilidade na notação,  $W_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$ .

Estas expressões podem ser generalizadas, tomando-se uma seqüência não-periódica  $x(n)$  com Transformada de Fourier  $X(e^{jw})$  e assumindo-se  $\tilde{X}(k)$  como a amostragem de  $X(e^{jw})$ , na freqüência  $w_k = (\frac{2\pi}{N})k$ . Assim (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989):

$$\tilde{X}(k) = X(e^{jw}) \big|_{w=(\frac{2\pi}{N})k} = X(e^{j(\frac{2\pi}{N})k}) \quad (4.9)$$

Esta seqüência de amostras  $\tilde{X}(k)$  é periódica com período  $N$  e corresponderá à seqüência dos coeficientes da Série de Fourier Discreta.

Desde que as equações (4.7) e (4.8) apenas envolvam o intervalo entre 0 e  $(N-1)$ , as equações da Transformada de Fourier Discreta para a análise e síntese de seqüências de comprimento finito podem ser escritas como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (4.10)$$

e

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad (4.11)$$

A Transformada Discreta de Fourier pode ser facilmente estendida para uma função  $f(x, y)$  de duas variáveis, da forma (GONZALES, R. C.; WOODS, R. E., 2000):

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (4.12)$$

para  $u = 0, 1, 2, \dots, (M-1)$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$  e

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (4.13)$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots, (M-1)$ ,  $y = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$

A amostragem da função contínua é realizada em uma grade bidimensional, com larguras regulares  $\Delta x$  e  $\Delta y$  nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. A função discreta  $f(x, y)$  representa amostras da função  $f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y)$  para  $x = 0, 1, 2, \dots, (M-1)$ ,  $y = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ . Condições semelhantes são aplicadas à função  $F(u, v)$  com  $\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}$  e  $\Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$ .

### 4.3.3 Transformada Rápida de Fourier

O número de multiplicações e adições complexas necessárias para a solução da equação 4.10 é da ordem de  $N^2$ , ou seja, o número de operações aumenta com o quadrado do comprimento do sinal. Para cada um dos  $N$  valores de  $x(n)$ , a expansão do somatório requer em torno de  $N$  multiplicações complexas e  $N-1$  adições, o que limita severamente seu uso prático para sinais longos. Em 1969, Cooley e Tukey propuseram um algoritmo eficiente para calcular a DFT, o qual reduz o número de operações complexas para, aproximadamente,  $N \log_2 N$  (COOLEY, J. W.; LEWIS, P. A. W.; WELCH, P. D., 1969). Este procedimento de decomposição ficou conhecido como Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT) e desde então, vários algoritmos eficientes para o cálculo da DFT foram desenvolvidos, coletivamente conhecidos como FFT.

Várias destas aproximações baseiam-se nas propriedades de simetria e periodicidade do termo  $w_N^{kn}$ , respectivamente,

$$W_N^{k(N-m)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* \quad (4.14)$$

$$W_N^{kn} = W_N^{k(N+n)} = W_N^{(k+N)n} \quad (4.15)$$

onde  $(*)$  representa o complexo conjugado.

A partir destas considerações, e em geral, os algoritmos FFT promovem a decomposição sucessiva da Transformada de Fourier Discreta de uma sequência de comprimento  $N$  em transformadas de Fourier discretas menores, até a obtenção da célula básica de comprimento  $N = 2$ .

Os diversos métodos para o cálculo da FFT podem ser agrupados nas técnicas de de-

cimação no tempo e técnicas de decimação na frequência, dentre as quais novos algoritmos eficientes encontram-se disponíveis (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989) (DINEIZ, R. S. P.; SILVA, B. A. E.; NETTO, L. S., 2004). Dada a extensão do tema escopo, estas formulações não serão abordadas neste trabalho. Estudos detalhados podem ser encontrados em (OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W., 1989) (DINEIZ, R. S. P.; SILVA, B. A. E.; NETTO, L. S., 2004) (GONZALES, R. C.; WOODS, R. E., 2000), dentre outros.

#### 4.3.4 Transformada de Fourier Janelada

A Transformada de Fourier de Curta Duração (*Short Time Fourier Transform* - STFT), também conhecida como Transformada de Fourier Janelada (*Windowed Fourier Transform* - WFT), é uma implementação modificada da Transformada de Fourier visando à utilização em sinais não-periódicos.

A análise da STFT é realizada no domínio tempo-frequência, tornando possível a extração de conteúdos locais de frequência de um sinal.

A aplicação da STFT consiste em remover a parcela desejada do sinal e, em seguida, aplicar a análise de Fourier. Este método é conhecido como Transformada de Fourier de Curta Duração (STFT) e baseia-se na construção de uma janela sobre o sinal. Devido à existência desta janela, a STFT é também chamada de Transformada de Fourier Janelada (WFT) (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

O conteúdo de frequência (aproximado) de uma função, nas vizinhanças de uma determinada localização do tempo, pode ser obtido pelo produto da função de análise  $f(t)$  por uma função janela apropriada  $\phi(t - b)$  da forma (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999):

$$f(t)\phi(t - b) := f_b(t)|_{t=b} \quad (4.16)$$

onde  $f_b(t)|_{t=b}$  contém a informação de  $f(t)$  próximo a  $t = b$ . No caso em que:

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [b - \xi, b + \xi] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.17)$$

então,

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & -\xi < t < \xi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.18)$$

Mudando o parâmetro  $b$  é possível deslizar a janela ao longo do eixo do tempo  $t$  e analisar o comportamento da função  $f(t)$  em diferentes intervalos.

A Transformada de Fourier de Curta Duração (STFT) de uma função  $f(t)$  em relação à uma função janela  $\phi(t)$ , numa localização  $(b, \xi)$  no plano tempo-frequência, é definida por:



$$G_{\phi}f(b, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\phi_{b, \xi}(t)} dt \quad (4.19)$$

onde a barra indica o conjugado complexo e  $\phi_{b, \xi}(t) := \phi(t - b)e^{j \xi t}$ .

A função janela  $\phi(t)$  deve satisfazer a condição,

$$\Phi(jw) |_{w=0} = \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt \neq 0 \quad (4.20)$$

ou seja,  $\Phi(jw) |_{w=0}$  comporta-se como um filtro passa baixas, com espectro não nulo em  $w = 0$ .

Ao contrário da Transformada de Fourier, a STFT não requer o conhecimento da função  $f(t)$  sobre todo o eixo do tempo para a determinação de uma parcela do seu espectro, bastando que a função seja conhecida no intervalo em que  $\phi(t - b)$  é não-nula (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

Se a janela  $\phi(t - b)$  é considerada como uma função modulante da senóide complexa  $e^{-j \xi t}$ , a STFT pode ser escrita como,

$$G_{\phi}f(b, \xi) = \langle f(t), \phi(t - b)e^{j \xi t} \rangle \quad (4.21)$$

A função  $\phi_{b, \xi}(t) = \phi(t - b)e^{j \xi t}$  comporta-se como um pacote de ondas, onde o sinal senoidal oscila dentro do envelope  $\phi(t)$ . A STFT pode ser interpretada como as componentes da função original em relação a cada um destes pacotes de onda (funções-base), no plano tempo-frequência.

O sinal original  $f(t)$  pode ser recuperado através da STFT inversa. O cálculo da transformada inversa de  $G_{\phi}f(b, \xi)$  é dado pela equação a seguir (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999):

$$f_b(t) = \phi(t - b)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\phi}f(b, \xi) e^{j \xi t} d\xi \quad (4.22)$$

Multiplicando a expressão acima pelo complexo conjugado da função janela deslocada e integrando em relação ao deslocamento (de acordo com a simetria da FT), tem-se:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \|\phi(t)\|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j \xi t} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_{\phi}f(b, \xi) \overline{\phi(t - b)} db \quad (4.23)$$

A resolução tempo-frequência fixa da STFT representa uma limitação em diversas aplicações em que a frequência varia com o tempo. Isto se deve ao fato da largura da janela de análise da STFT ser sempre fixa, independente de sua localização no plano tempo-frequência, conforme ilustra a Figura 4.1:

Como exemplo, a Figura 4.2 mostra um sinal cuja frequência aumenta com o tempo e por isso, onde uma mesma janela é incapaz de oferecer uma resolução adequada na região

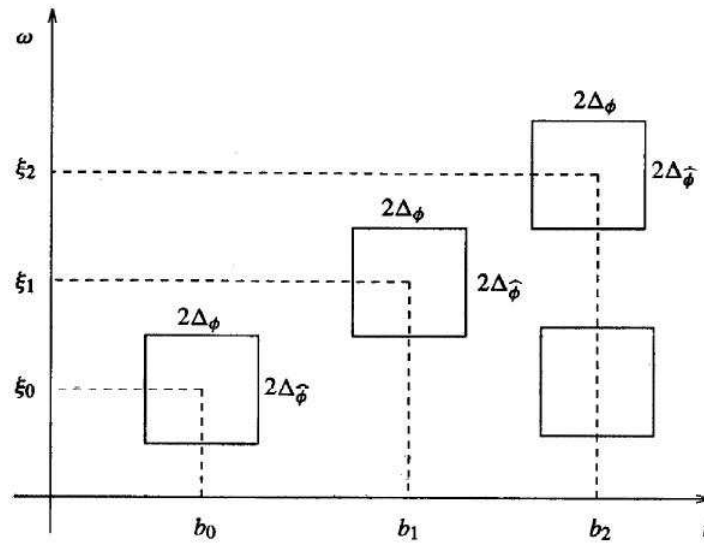


Figura 4.1: Representação gráfica da janela tempo-frequência na STFT (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

de baixa frequência (A B) e alta frequência (C D). Uma provável solução poderá pressupor funções-janela que acompanhem o comportamento da função, ou seja, suas dimensões possam aumentar no tempo (reduzir na frequência) para uma melhor resolução em baixa frequência, e vice-versa.

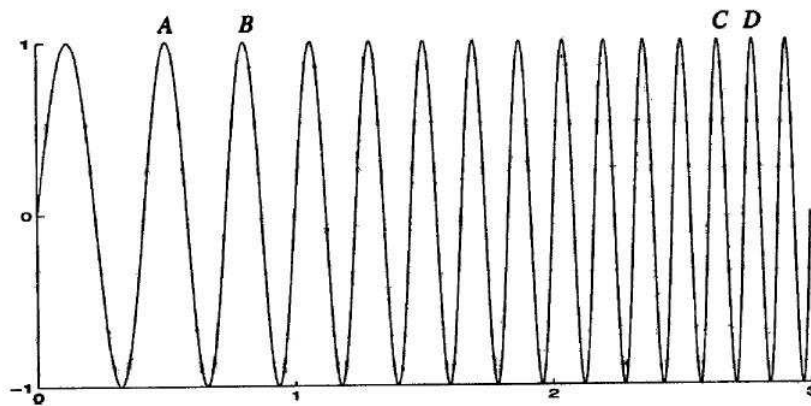


Figura 4.2: Representação de um sinal (*Chirp Signal*) que aumenta linearmente a frequência ao longo do tempo (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

## 4.4 Transformada Wavelet Contínua

A análise wavelet utiliza janelas temporais de dimensões variáveis, ajustáveis às informações de frequências que se deseja observar. Janelas temporais de tamanho reduzido são utilizadas para informações de alta frequência, enquanto janelas temporais maiores são indicadas

para as informações de baixa frequência. Na Transformada Wavelet, a noção de escala é introduzida como uma alternativa para a frequência, gerando uma nova representação tempo-escala (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

A construção de domínio tempo-frequência é ilustrada na Figura (4.4), partindo-se de bases de tempo e base frequência regularmente intercaladas. A interseção destas bases, em intervalos fixos constitui a base da STFT com janelas fixas, independentemente da localização tempo e frequência. O ajuste no tamanho destas janelas em função da frequência e a inclusão do deslocamento da janela no domínio do tempo constitui, então o domínio tempo frequência da base wavelet.

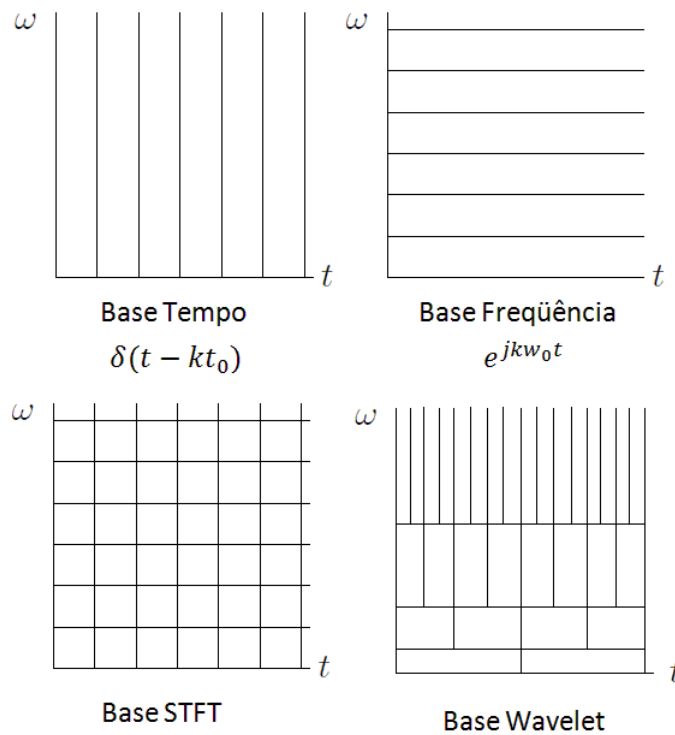


Figura 4.3: Construção de bases no domínio tempo-frequência.

Assim, para um sinal variante no tempo  $f(t) \in L^2$ , a Transformada Wavelet é o produto interno desse sinal com a base wavelet que se deseja utilizar, dado pela seguinte expressão:

$$W_{\psi}f(b, a) := \langle f(t), \psi_{b,a}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{b,a}(t)} dt. \quad (4.24)$$

A função wavelet  $\psi$  correspondente a um fator de escala  $a$  e a um deslocamento no tempo  $b$  é definida como (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999):

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0 \quad (4.25)$$

A função  $\psi(\cdot)$  é chamada wavelet básica ou wavelet mãe e pode ser entendida como um filtro passa-faixa.

Os parâmetros  $b$  e  $a$  são chamados de parâmetros de translação e escala (dilatação), respectivamente. O fator  $a^{\frac{-1}{2}}$  é incluído de tal forma a se ter  $\|\psi_{b,a}\| = \|\psi\|$ . O parâmetro de translação  $b$  permite a escolha da localização na análise do tempo enquanto o parâmetro de escala  $a$  permite variar a resolução da análise na frequência, o que torna a análise wavelet eficiente tanto no tempo quanto na frequência.

Considerando que os parâmetros de translação  $b$  e de escala  $a$  variam continuamente, a Transformada Wavelet Contínua (CWT) é definida a partir de um espaço de funções ortonormais, formado pelas funções-bases  $\psi_{b,a}(t)$ .

As wavelets  $\psi_{b,a}(t)$  são versões escaladas pelo parâmetro  $a$  e deslocadas pelo parâmetro  $b$ . Variando-se apropriadamente esses parâmetros, pode-se construir a base de funções a ser utilizada na Transformada Wavelet. A CWT permite avaliar a similaridade entre o sinal e a função  $\psi_{b,a}(t)$  considerada.

Tomando-se as expressões (4.24) e (4.25), a Transformada Wavelet Contínua pode ser expressa por:

$$W_{\psi}f(b,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (4.26)$$

A Transformada Wavelet Contínua Inversa permite a reconstrução da função original, envolvendo uma integração bidimensional sobre o parâmetro de escala  $a$  e o parâmetro de translação  $b$ . A expressão da Transformada Wavelet Inversa é dada por (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999):

$$f(t) = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} [W_{\psi}f(b,a)] \psi_{b,a}(t) da \quad (4.27)$$

onde  $c_{\psi}$  é uma constante que depende de  $\psi(t)$ , dada pela expressão (4.28). Esta inequação é chamada de condição de admissibilidade e garante a existência da Transformada Wavelet Inversa:

$$c_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi(jw)|^2}{|w|} dw < +\infty \quad (4.28)$$

onde  $\Phi(w)$  é a Transformada de Fourier da função wavelet  $\psi_{a,b}(t)$ .

A condição de admissibilidade implica que a Transformada de Fourier da wavelet deve ser zero na componente de frequência  $\omega = 0$ :

$$|H(\omega)|^2|_{\omega=0} = 0 \quad (4.29)$$

e que a wavelet deve ser oscilatória com média zero no domínio tempo, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4.30)$$

As wavelets mães ou funções-base Wavelet podem assumir diversas formas, cuja definição é de fundamental importância na aplicação da Transformada Wavelet. A escolha da wavelet mais adequada para uma determinada aplicação justifica diversas pesquisas técnico-científicas, mas não será escopo desta dissertação.

## 4.5 A Transformada Wavelet Discreta

Na Transformada Wavelet Contínua, o cálculo dos coeficientes requer um enorme esforço computacional e gera informações redundantes, visto que a implementação digital da transformada é realizada em intervalos discretos. Para reduzir ou eliminar estas redundâncias os parâmetros de escala  $a$  e de deslocamento  $b$  são discretizados. A partir da discretização desses parâmetros é obtida a Transformada Wavelet Discreta (DWT) (FARIA, R. R. A., 1997) (SANTOS, L. M. R., 2004).

A discretização de  $b$  deve ser tal que wavelets estreitas (de alta frequência) sejam deslocadas por passos pequenos e wavelets largas (baixa frequência) sejam deslocadas por passos maiores. Para formar bases ortonormais com boas propriedades de localização tempo-frequência, os parâmetros tempo-escala  $a$  e  $b$  são amostrados por uma grade diádica, onde o parâmetro de escala  $a$  será da forma  $2^{-s}$  e o parâmetro de translação  $b$  como  $k2^{-s}$ , com  $k, s \in \mathbb{Z}$ . Substituindo-se os parâmetros tempo-escala na equação 4.25 tem-se a wavelet diádica conforme Equação (4.31). Wavelets diádicas permitem a caracterização de um sinal  $f(t)$  sem redundâncias (DAUBECHIES, I, 1992).

$$\psi(t) = 2^{\frac{s}{2}} \psi(2^s t - k) \quad (4.31)$$

A Transformada Wavelet Contínua dada pela expressão (4.26) pode ser escrita como (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999):

$$W_{\psi} f(k2^{-s}, 2^{-s}) = 2^{\frac{s}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^s t - k) dt \quad (4.32)$$

A partir da discretização da função  $f(t)$ , a integral 4.32 pode, então, ser aproximada como:

$$W_{\psi} f(k2^{-s}, 2^{-s}) \approx 2^{\frac{s}{2}} \sum_n f(n) \psi(2^s n - k) \quad (4.33)$$

A reconstrução do sinal, através da Transformada Wavelet Discreta Inversa (IDWT) é

dada pela equação (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999):

$$d_{s,k} = 2^{s/2} \sum_s \sum_k W_{\psi} f(ks^{-s}, 2^s) \psi_{s,k}(n) \quad (4.34)$$

Uma maneira eficiente de aplicar a Transformada Wavelet é através de filtros, técnica desenvolvida por Mallat (MALLAT, S., 1989), onde se tem a decomposição da wavelet através de uma análise multirresolução (MRA). Esta é uma técnica que permite analisar sinais em múltiplas faixas de frequências e será apresentada em seção seguinte deste capítulo.

## 4.6 Transformada de Fourier *versus* Transformada Wavelet

A análise de sinais através da Transformada de Fourier (FT) foi desenvolvida principalmente para sinais estacionários, onde a informação de tempo é perdida e apenas a informação relativa ao conteúdo de frequência do sinal é preservada. Dessa forma, a FT não apresenta bons resultados quando aplicada a sinais não-estacionários, pois não possibilita determinar o instante em que os transitórios ocorrem, ou separar suas componentes de frequência em relação às componentes de frequência do sinal de interesse (BURRUS, C. S. A.; GOPINATH, R. A.; GUO, H., 1998).

Em uma versão modificada, a Transformada de Fourier foi adaptada para analisar apenas uma pequena seção do sinal no tempo através da técnica chamada *windowing* (janelamento) do sinal. Como descrito anteriormente, esta adaptação, conhecida como Transformada de Fourier Janelada (WFT), coloca o sinal em função de duas dimensões, o tempo e a frequência.

A expressão

$$G_{\phi} f(b, \xi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\phi_{b,\xi}(t)} dt \quad (4.35)$$

pode ser descrita como a Transformada de Fourier do sinal  $f(t)$ , previamente janeladas por uma função  $\phi_{b,\xi}(t)$  no eixo do tempo. Este método assume a estacionariedade do sinal dentro dessa janela limitada (BURRUS, C. S. A.; GOPINATH, R. A.; GUO, H., 1998).

A Transformada de Fourier Janelada (WFT) possui um compromisso entre tempo e frequência do sinal. Esta transformada fornece a informação de quando e em qual frequência ocorreu um evento no sinal. Contudo, essa informação tem precisão limitada pelo tamanho da janela. Uma vez escolhido o tamanho da janela, ele será o mesmo para todas as frequências. Uma janela muito estreita resulta em boa resolução temporal. Por outro lado, essa janela pode resultar em um número reduzido de amostras no cálculo da Transformada de Fourier, e conseqüentemente um número reduzido de frequências discretas serão representadas no domínio da frequência. Estas condições estão apresentadas na Figura 4.4(a), onde observam-se dimensões fixas das janelas independentemente do tempo ou frequência.

Uma vez escolhida a resolução no tempo e na frequência, essa permanece fixa em todo o plano tempo-frequência. Dessa forma, o sinal poderá ser analisado com uma boa resolução em tempo ou boa resolução em frequência, mas não em ambas. Porém, muitos sinais exigem uma aproximação mais flexível, em que o tamanho da janela seja variável, onde as informações sobre tempo ou frequência do sinal possa ser determinadas mais precisamente.

Na Transformada Wavelet as larguras das janelas variam, como mostra a Figura 4.4 (b), possibilitando uma análise mais detalhada do sinal em função da faixa de frequência a ser analisada. Sendo assim, para altas frequências, utiliza-se uma janela mais estreita e para baixas frequências, utiliza-se de uma janela maior. Essa análise diferenciada em função da frequência é possível devido à flexibilidade na representação do domínio temporal, já que a análise wavelet pode utilizar um conjunto infinito de possíveis funções-base, o que não ocorre na análise de Fourier, que utiliza apenas senos e cossenos como funções-bases, tornando-se nesse sentido limitada em relação às wavelets.

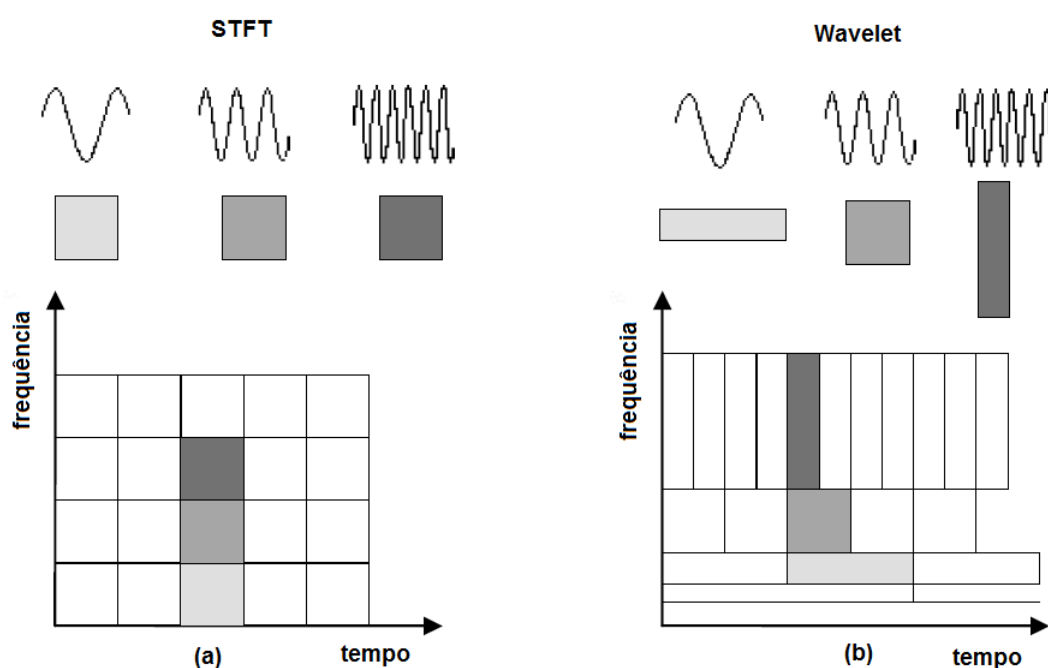


Figura 4.4: Domínio tempo-frequência: (a) Transformada Janelada de Fourier (WFT ou STFT) (b) Transformada Wavelet.

Resumidamente, comparando-se as Transformadas de Fourier e a Transformada Wavelet, ambas permitem que os sinais sejam analisados por expansões em termos de funções-bases. Porém, a FT permite apenas a localização no domínio da frequência, enquanto a WT proporciona dupla localização, ou seja, a análise do sinal no domínio tempo-frequência.

## 4.7 Análise Wavelet

Nesta seção, serão apresentadas algumas das funções mais comumente utilizadas na análise wavelet para aplicações voltadas à área de processamento digital de sinais e imagens. Além destas funções serão apresentadas a análise multiresolução e os bancos de filtros, que tratam de abordagens características da análise wavelet. Esta seção será finalizada com a wavelet bidimensional, apresentando dois tipos de decomposição utilizados para estender a Transformada Wavelet unidimensional para o caso bidimensional.

### 4.7.1 Bases Wavelet

Existem vários tipos de bases wavelets e o uso de uma, ou outra, está associado ao tipo de aplicação. Wavelets são ondas ou funções pequenas, com origem na expressão em francês *ondelette*, obtidas a partir de uma função protótipo  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  denominada wavelet mãe, através de dilatações (contrações ou escalamento) e translações (deslocamento) (CUPERTINO, P., 2002).

As wavelets devem satisfazer requisitos como (CUPERTINO, P., 2002):

- Possuir energia finita;
- Apresentar certo grau de regularidade (suavidade);
- Apresentar convergência ou ser zero no infinito;
- Possuir um certo número (p) de momentos nulos;
- Atender à condição de admissibilidade;
- Ter suporte compacto, no tempo e na frequência.

A seguir, serão apresentadas algumas propriedades das funções-base wavelets (wavelet mãe ou wavelet) e das funções-escala (wavelet pai), mais frequentemente encontradas nos trabalhos correlatos da área.

#### Wavelet de Haar

Foi introduzida por Alfred Haar, em meados de 1909. A base ortogonal mais simples, para exemplificar uma função wavelet, é a função Wavelet de Haar (CUPERTINO, P., 2002).

A wavelet de Haar é definida a seguir e apresentada na Figura 4.5, sendo:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{para } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.36)$$



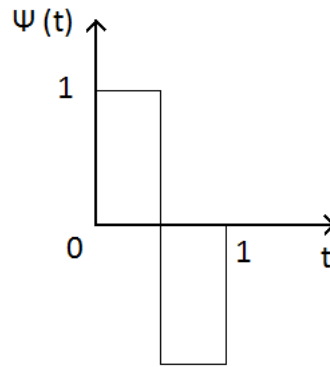


Figura 4.5: Wavelet de Haar.

A função escala ou wavelet pai de Haar é dada por,

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{para } t \geq 1 \text{ e } t < 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

e é denominada função escala associada à wavelet de Haar. A função escala de Haar é apresentada na Figura 4.6:

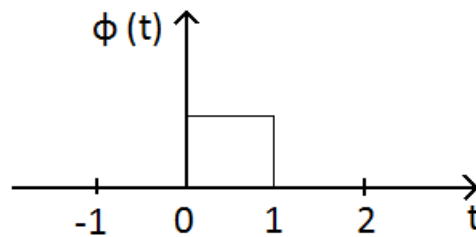


Figura 4.6: Função escala (ou wavelet-pai) associada à wavelet de Haar.

Diversas vantagens podem ser obtidas quando as funções escala e wavelet são ortogonais. Funções-base ortogonais apresentam uma maior facilidade para o cálculo dos coeficientes de expansão e o atendimento ao teorema de Parseval que garante a mesma energia do sinal no domínio da Transformada Wavelet (GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K., 1999).

Inserindo parâmetros para a dilatação (j) e deslocamento (k,l) nas funções escala e wavelet de Haar, ou seja,

$$\begin{cases} \phi_{j,l} = \phi(jt + l) \\ \psi_{j,k} = \psi(jt + k) \end{cases}, \quad \text{onde } j, k, l \in \mathbb{Z} \quad (4.38)$$

pode-se verificar a ortogonalidade se,

$$\langle \psi_{j,k}(t), \phi_{j,l}(t) \rangle = 0, \quad \forall j, k, l \quad (4.39)$$

Para as funções básicas dadas, equações (4.38) e (4.39), tem-se que:

$$\begin{cases} \phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1) \\ \psi(t) = \psi(2t) - \psi(2t-1) \end{cases} \quad (4.40)$$

onde, facilmente, pode-se comprovar a condição de ortogonalidade, ou seja:

$$\langle \phi(t), \psi(t) \rangle = 0 \quad (4.41)$$

As principais propriedades da wavelet de Haar são (ADHEMAR, B., 2003):

1. Ortogonalidade.
2. Suporte compacto.
3. A função escala é simétrica.
4. A função wavelet é anti-simétrica.
5. A wavelet apresenta somente um momento nulo (*Vanishing*).

Porém, existem limitações na aplicação da wavelet de Haar. Como as funções de Haar contêm descontinuidades, nem sempre são adequadas para a análise de funções que também apresentam descontinuidades. Visto que as imagens digitais, geralmente, contêm regiões estáveis seguidas de descontinuidades ou bordas, a Transformada Wavelet que utiliza a base de Haar não proporciona resultados satisfatórios em muitas aplicações relacionadas a imagens (CASTAÑÓN, C. A. B., 2003). Vale observar que a wavelet de Haar é a única wavelet de suporte compacto para a qual se tem uma forma analítica fechada (CUPERTINO, P., 2002).

### **Wavelet de Daubechies**

As wavelets propostas por Daubechies, em 1992, apresentam uma capacidade de análise e síntese mais efetiva do que as de wavelets Haar, por possuírem maior regularidade (suavidade) e aproximarem melhor funções que apresentam descontinuidades.

As wavelets de Daubechies têm suportes compactos e podem ser tão suaves e com quantos momentos nulos quanto necessário. Entretanto, como não se dispõe de uma ferramenta analítica fechada para essas wavelets, as mesmas são calculadas através de procedimentos numéricos.

As wavelets de Daubechies,  $\psi_N(t)$ , são construídas de forma que todos os momentos até  $(N-1)$ , sejam nulos, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l \psi_N(t) dt = 0, \quad l = 0, \dots, N-1 \quad (4.42)$$

Para  $N \gg 1$ , a regularidade de  $\psi_N(t)$  aumenta com o parâmetro  $N$  e existirá um intervalo de comprimento  $(2N-1)$  tal que  $\psi_N(t)$  se anula fora deste intervalo, ou seja,  $\psi_N(t)$  sempre apresenta suporte compacto. A wavelet de Haar pode ser vista como um caso particular das wavelets de Daubechies quando  $N = 1$  (CUPERTINO, P., 2002).

Para cada inteiro  $N$ , a função escala ou wavelet pai de Daubechies é definida como (CASTAÑÓN, C. A. B., 2003):

$$\phi_{N,j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \phi_N(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (4.43)$$

Aqui,  $j$  é o índice de escala,  $k$  é o índice de translação e  $N$  é o índice de filtragem, que indica o número de momentos nulos da wavelet  $\psi_N(t)$  associada à função escala  $\phi_N(t)$ .  $N$  também indica a ordem do filtro FIR (*Finite Impulse Response*) associado à densidade espectral utilizada para a construção da função wavelet.

As funções  $\phi_N(x)$  e  $\psi_N(x)$ , wavelet pai e wavelet mãe, respectivamente, são as funções wavelets necessárias para a análise do sinal. As wavelets mãe são utilizadas para determinar os detalhes de um sinal e a informação de tendência (aproximação) é armazenada nos coeficientes obtidos pelas wavelets pai.

A wavelet de Daubechies para  $N = 4$  e sua função escala são apresentadas na Figura 4.7.

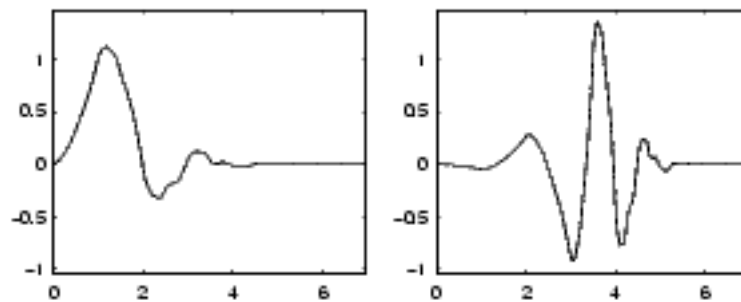


Figura 4.7: Função escala e wavelet de Daubechies para  $p = 4$  (THE MATHWORKS, Inc., 2006).

As propriedades das wavelets de Daubechies são (ADHEMAR, B., 2003):

1. Ortogonalidade.
2. Suporte compacto.
3. Simétrica para  $N > 1$ .

#### 4. $p$ momentos nulos.

O grau de regularidade de uma wavelet e a sua taxa de decaimento é determinada pelo número de momentos nulos que apresenta. Esta propriedade é importante para deduzir as propriedades de aproximação exibidas pela wavelet nos espaços de multiresolução, a serem abordados no Item 4.7.2. (FARIA, R. R. A., 1997).

As wavelets de Daubechies obtêm excelentes resultados no processamento de imagens devido às propriedades acima indicadas. As funções wavelets com suporte compacto podem ser implementadas mediante um filtro de resposta ao impulso finita (FIR). Além disso, o suporte compacto permite a localização no domínio espacial para sinais bidimensionais ou, no domínio do tempo, para sinais unidimensionais (DAUBECHIES, I, 1992).

#### Wavelet de Shannon ou Wavelet Sinc

A função Wavelet de Shannon ou Sinc wavelet é obtida a partir de um filtro passa-altas, cuja resposta em frequência é especificada como:

$$G(jw) = \begin{cases} \sqrt{2}, & |w| > \frac{\pi}{2} \\ 0, & |w| < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.44)$$

Através da aplicação da Transformada de Fourier Inversa, chega-se à função wavelet correspondente, conforme expressão 4.45:

$$\psi(t) = \frac{\text{sen}2\pi t - \text{sen}\pi t}{\pi t} \quad (4.45)$$

A função escala, ou wavelet pai, associada à wavelet de Shannon é dada por:

$$\phi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (4.46)$$

As funções wavelet e escala são apresentadas na Figura 4.8. Estas funções são também conhecidas como funções sinc.

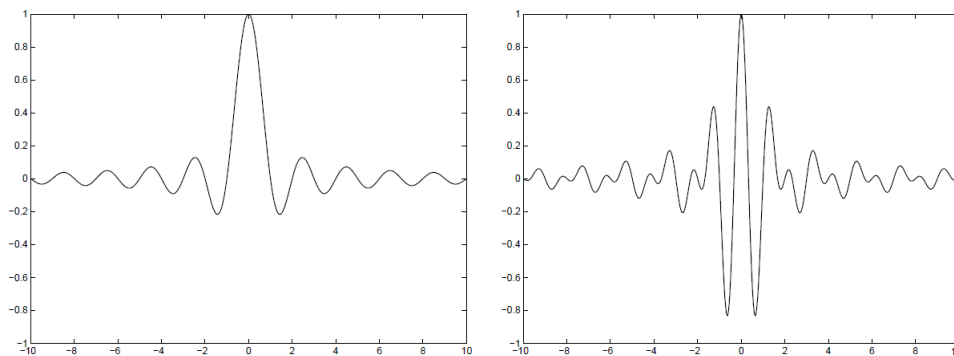


Figura 4.8: Função escala e wavelet de Shannon (ADHEMAR, B., 2003).

As principais propriedades da wavelet de Shannon são (ADHEMAR, B., 2003):

1. Ortogonalidade.
2. Função wavelet simétrica.
3. Função escala simétrica.
4. Contém um número infinito de momentos nulos.
5. Suporte finito e decaimento lento.

### **Wavelet de Meyer**

As wavelets de Meyer derivam das wavelets de Shannon, após serem submetidas à ação de janelas, de forma a suavizar sua resposta em frequência (ADHEMAR, B., 2003).

Suas principais propriedades são (ADHEMAR, B., 2003):

1. Ortogonalidade.
2. Função wavelet simétrica.
3. Função escala simétrica.
4. Suporte infinito e decaimento mais rápido que a sinc.

Um esboço da wavelet de Meyer é mostrado na Figura 4.9. O amortecimento das oscilações pode ser observado se comparadas às oscilações das Figuras 4.8 e 4.9.

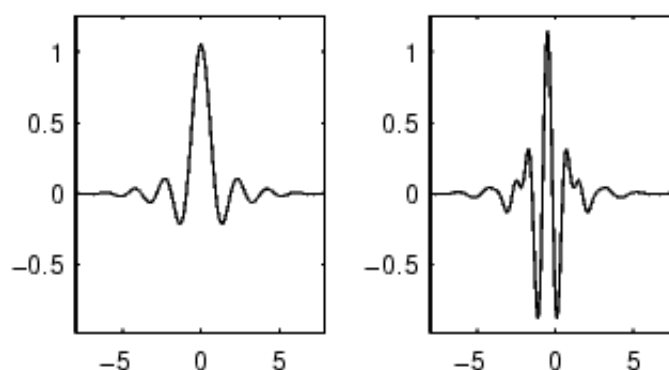


Figura 4.9: Função escala e wavelet de Meyer (THE MATHWORKS, Inc., 2006).

### **Wavelet Mexican Hat**

Esse tipo de função wavelet é obtido a partir da derivada segunda da função gaussiana, sendo expressa como:

$$\psi(t) = (t^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (4.47)$$

a qual satisfaz a condição de admissibilidade e apresenta dois momentos nulos.

Graficamente, a função Wavelet *Mexican Hat* pode ser visualizada na Figura 4.10.

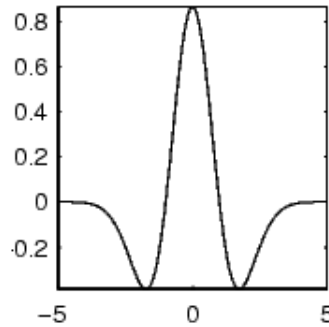


Figura 4.10: Função wavelet *Mexican Hat* (THE MATHWORKS, Inc., 2006).

### Wavelet Symlets

As symlets (sym = simétricas + let = wavelet) apresentam fraca característica de simetria, ou mínima assimetria, razão pela qual alguns autores preferem não denominá-las da forma indicada. (THE MATHWORKS, Inc., 2006).

As symlets compreendem uma solução das wavelets de Daubechies (DAUBECHIES, I., 1990) com fase mínima, ou seja, todos os zeros da sua respectiva função de transferência  $H(z)$  encontram-se dentro do círculo unitário.

As symlets apresentam as seguintes propriedades (ADHEMAR, B., 2003):

1. Ortogonalidade.
2. Suporte compacto.
3.  $\psi(t)$  tem  $p$  momentos nulos.
4.  $\phi(t)$  tem fase aproximadamente linear.

Graficamente, a symlets é apresentada na Figura 4.11, considerando-se a ordem  $p = 4$ .

### Outras Funções Wavelets

Outras funções wavelets podem ser encontradas na literatura, como a wavelet de Morlet, wavelet Coiflets e a Transformada Wavelet de Gabor, dentre outras.

A wavelet de Morlet é dada pela expressão (ADHEMAR, B., 2003):

$$\psi(t) = e^{j \alpha t} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (4.48)$$

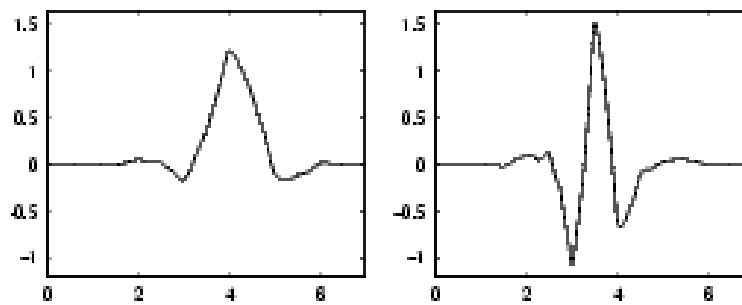


Figura 4.11: Função escala e wavelet symlets para  $p = 4$  (THE MATHWORKS, Inc., 2006).

onde o parâmetro  $\alpha$  deve ser apropriadamente escolhido.

Graficamente, a função wavelet de Morlet é apresentada na Figura 4.12.

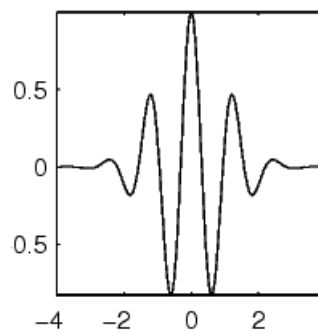


Figura 4.12: Função wavelet de Morlet (THE MATHWORKS, Inc., 2006).

Esta wavelet não satisfaz a condição  $\phi(jw)|_{w=0} = 0$  porém, segundo alguns autores, para valores de  $\alpha \geq 5,5$ , este erro é numericamente desprezível.

As wavelet de Coiflets apresentam as seguintes características (ADHEMAR, B., 2003):

1. Ortogonalidade;
2. Suporte compacto;
3. Quase simétrica;
4. Satisfaz certos números de momentos nulos.

A Figura 4.13 apresenta a wavelet Coiflets.

A Transformada Wavelet de Gabor (*Gabor Wavelets Transform* - GWT), originalmente proposta como funções de Gabor, têm conseguido resultados promissores quando utilizadas em aplicações de reconhecimento de textura e objetos (CASTAÑÓN, C. A. B., 2003).

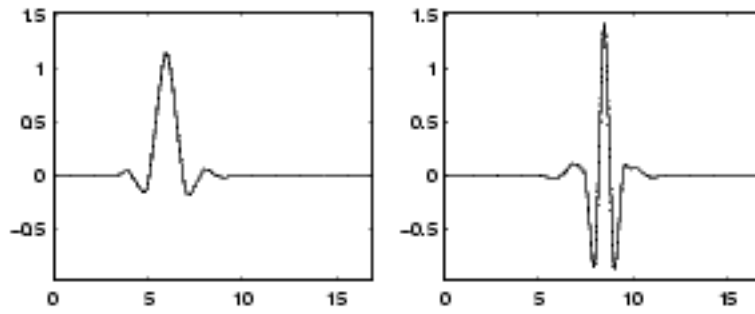


Figura 4.13: Função escala e wavelet Coiflets (THE MATHWORKS, Inc., 2006).

Segundo Castañón (CASTAÑÓN, C. A. B., 2003), uma função bidimensional de Gabor  $\psi(x, y)$  é definida como:

$$\psi(x, y) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right) + 2\pi jWx\right] \quad (4.49)$$

onde  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são os desvios-padrões de  $\psi(x, y)$  ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. A constante  $W$  determina a largura da faixa de frequência dos filtros.

Segundo o mesmo autor (CASTAÑÓN, C. A. B., 2003), as wavelets de Gabor são especialmente apropriadas para representação das características locais, pelo fato de apresentarem as seguintes propriedades (CASTAÑÓN, C. A. B., 2003):

- As wavelets de Gabor são melhor localizadas no tempo e na frequência;
- As wavelets de Gabor contêm um maior número de parâmetros;

#### 4.7.2 Análise Multirresolução

A análise multirresolução (MRA) fornece um referencial onde bases wavelets são naturalmente compreendidas, bem como permite a construção de novas bases. Quando Mallat trabalhou com as wavelets de Meyer pela primeira vez, ele estava trabalhando com imagens em várias escalas simultâneas. Desta forma, Mallat foi estimulado a ver as bases ortonormais da wavelets como uma ferramenta para descrever, matematicamente, o incremento na informação que levasse os resultados de uma aproximação grosseira para uma aproximação de maior resolução (CUPERTINO, P., 2002).

Mallat (MALLAT, S., 1989) analisou a decomposição multirresolução de imagens utilizando filtros passa-baixas e passa-altas. Dos coeficientes do filtro passa baixas, tem-se uma aproximação da imagem original, produzindo os chamados coeficientes de aproximação. Do filtro passa-altas, surgem os coeficientes wavelet para cada detalhe da imagem, por exemplo, as bordas, originando os coeficientes de detalhes.



Para muitas imagens, as componentes de baixa frequência são aquelas que contêm maior informação. As altas frequências, normalmente, possuem alguns detalhes da informação. Se forem removidas as componentes de alta frequência de uma imagem, por exemplo, sua visualização ficará alterada, mas ainda será possível reconhecer a imagem original. Contudo, se forem removidas muitas componentes de baixa frequência, a imagem original não poderá ser reconhecida.

Na análise multiresolução, há uma função adicional que está relacionada ao filtro passa baixas. A função escala  $\phi(t)$ , ou função pai, está associada aos coeficientes de aproximação da decomposição wavelet e pode ser definida através de um fator de escala diádica como:

$$\phi_{m,p}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}t - p). \quad (4.50)$$

Na análise wavelet, a idéia básica é realizar decomposições sucessivas do sinal de aproximação, a fim de encontrar o nível de resolução desejado. Assim, um sinal original  $S$  é decomposto, encontrando-se os coeficientes de aproximação  $A_1$  e os coeficientes de detalhe  $D_1$ , do primeiro nível de decomposição. Realizando outra decomposição no coeficiente de aproximação do nível 1,  $A_1$ , encontram-se os coeficientes de aproximação  $A_2$  e detalhes  $D_2$  do segundo nível. Este processo ocorre de forma recursiva até o  $n$ -ésimo nível de decomposição desejado. A Figura 4.14 mostra a árvore de decomposição wavelet.

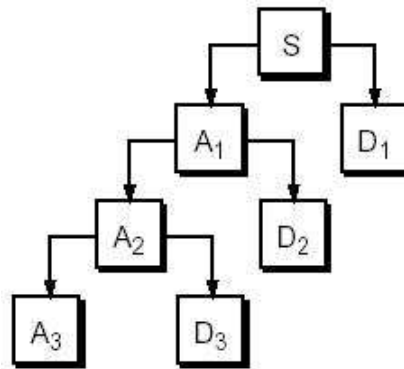


Figura 4.14: Árvore de decomposição wavelet (THE MATHWORKS, Inc., 2006).

Genericamente, pode-se observar que a análise wavelet consiste em encontrar os coeficientes de aproximação e os coeficientes de detalhe. As aproximações representam as componentes de baixa frequência e os detalhes as componentes de alta frequência do sinal.

### 4.7.3 Banco de Filtros

A análise wavelet aplicada à filtragem de imagens pode ser implementada a partir de um banco de filtros em quadratura conjugada (QMF - *Quadrature Mirror Filters*). Os filtros

QMF são constituídos por filtros de análise e filtros de síntese. Os filtros de análise realizam a etapa de decomposição do sinal, enquanto e os filtros de síntese fazem a reconstrução dos coeficientes, obtidos pelos filtros de análise (DINEIZ, R. S. P.; SILVA, B. A. E.; NETTO, L. S., 2004).

Os filtros de análise são, basicamente, filtros passa baixas e filtros passa-altas. Os coeficientes obtidos nessa etapa passam por um estágio de subamostragem para geração dos coeficientes de detalhes horizontais, verticais e diagonais. A subamostragem é necessária para eliminar os dados intercalados entre as amostras, evitando-se o *aliasing* e obtendo-se a decomposição de a melhor aproximação do sinal.

Os coeficientes do filtro passa-altas ( $h$ ) são determinados pela função wavelet  $\psi(t)$  ou função mãe. Já os coeficientes do filtro passa baixas ( $g$ ) são determinados pela função escala  $\phi(t)$ , ou wavelet pai. As duas funções podem ser representadas pelas seguintes expressões:

$$\psi_{m,p}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m t - p). \quad (4.51)$$

$$\phi_{m,p}(t) = 2^{\frac{-m}{2}} \phi(2^{-m} t - p). \quad (4.52)$$

Resumidamente, pode-se entender que o processo de decomposição em multiresolução consiste em separar um sinal original em duas partes. Uma parte contém as componentes de grande escala do sinal e a outra contém as componentes de pequena escala do sinal. Esta estrutura pode ser representada conforme Figura 4.15.

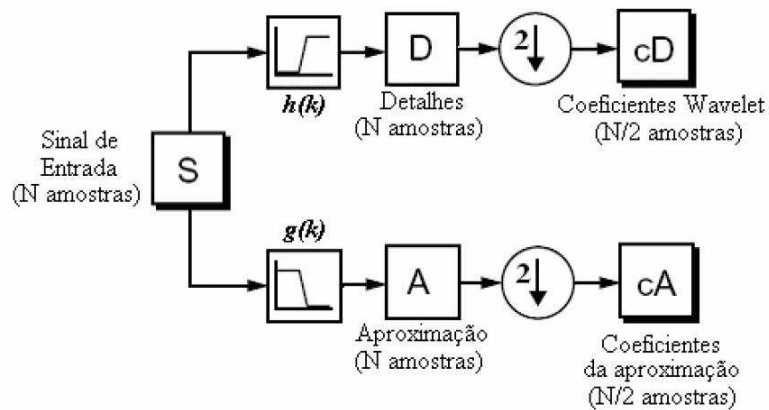


Figura 4.15: Banco de filtros mostrando a obtenção dos coeficientes de detalhes e aproximação.

A reconstrução da imagem ou do sinal, a partir dos coeficientes de aproximação  $cA$  e detalhes  $cD$ , é obtida após o estágio de amostragem seguido por filtros passa-altas e passa baixas.(CUPERTINO, P., 2002).

#### 4.7.4 Wavelet Bidimensional

Existem dois tipos de decomposição para se estender a Transformada Wavelet unidimensional para o caso bidimensional. Pode-se realizar a decomposição padrão ou a decomposição não-padrão. Ambas podem ser visualizadas na Figura 4.16 (CUPERTINO, P., 2002):

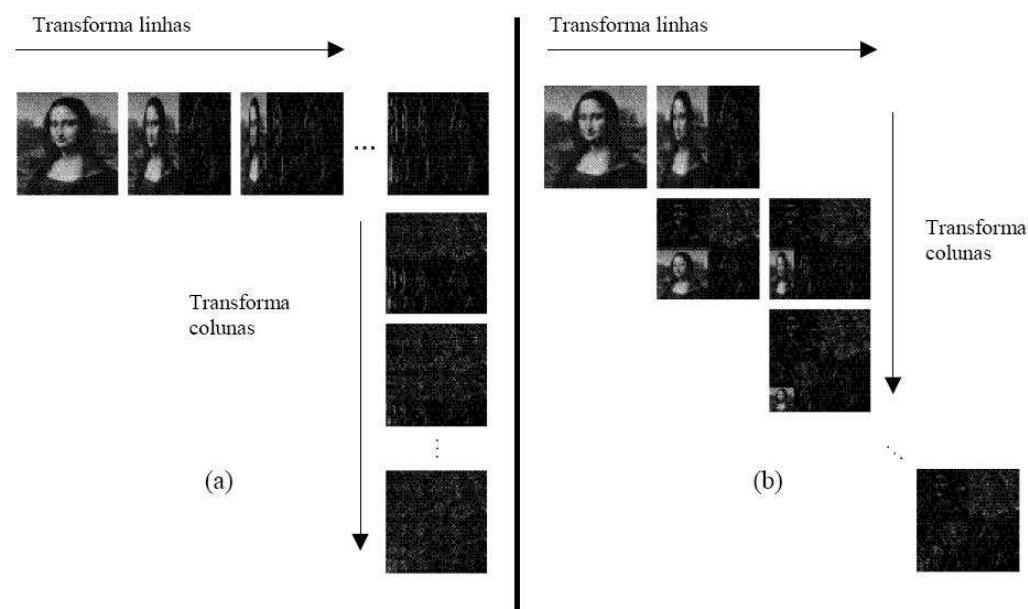


Figura 4.16: (a) Decomposição padrão, (b) Decomposição não-padrão (CUPERTINO, P., 2002).

A decomposição padrão, representada na Figura 4.16 (a), consiste em aplicar sucintamente a Transformada Wavelet 1D em cada vetor linha dos pixels da imagem, até que seja produzido um único valor médio e todos os outros coeficientes de detalhes de cada linha. Em seguida, essas linhas transformadas são tratadas como uma imagem e aplica-se, então, a transformada unidimensional (1D) em cada coluna desta imagem. Os valores encontrados nessa decomposição são todos coeficientes de detalhes, exceto um que é a média global, chamado de coeficientes de aproximação.

A decomposição não-padrão, representada na Figura 4.16 (b), realiza uma passagem em cada linha da imagem, determinando a média e as diferenças para cada um dos valores dos *pixels*. Em seguida, a média e a diferença são aplicadas a cada coluna do resultado anterior. O processo é repetido, recursivamente, somente nos quadrantes contendo as médias, ou seja, contendo os coeficientes de aproximação em ambas as direções. Esta decomposição é também conhecida como decomposição piramidal da imagem.

Pode-se dizer que o algoritmo wavelet consiste em decompor a imagem em multiníveis de resolução. Segundo alguns autores, melhores resultados são encontrados na decomposição

não-padrão.

A decomposição não-padrão é aplicada separadamente na direção horizontal e vertical, produzindo uma divisão da imagem em quatro sub-bandas que podem ser representadas por um nível de aproximação da imagem original (LL), seguido por um nível de detalhe horizontal (HL), detalhe vertical (LH) e detalhe diagonal (HH). Esquematicamente, esta decomposição é representada na Figura 4.17 para dois níveis de decomposição não-padrão (FODOR, I. K.; KAMATH, C., 1996).

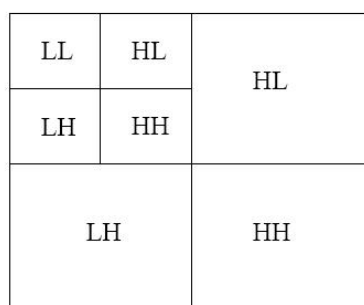


Figura 4.17: Esquema de decomposição não-padrão em 2 níveis.

A seguir, são apresentados os resultados da aplicação da decomposição não-padrão para um nível de resolução na imagem Lena, realizado em ambiente MatLab. Obtém-se como resultado as imagens de aproximação (LL), detalhes horizontais (HL), verticais (LH) e diagonais (HH), conforme mostra a Figura 4.18.

Na Figura 4.19, pode-se observar a decomposição da imagem Lena em dois níveis de resolução, ou seja, os coeficientes de aproximação foram decompostos duas vezes, obtendo-se os coeficientes de detalhes do primeiro e do segundo nível de decomposição.

## 4.8 Processo de *Denoising* em Imagens Digitais

Para se realizar o processo de eliminação ou redução de ruído em imagens, conhecido como *denoising*, é necessário efetuar três etapas básicas nesta imagem (DONOHO, D.L., 1995) (FODOR, I. K.; KAMATH, C., 1996):

1. Decomposição
2. *Thresholding*
3. Reconstrução

Estas etapas são apresentadas pelo diagrama em blocos da Figura 4.20. O primeiro e terceiro passos são realizados pela utilização da Transformada Wavelet Direta e Inversa, respectivamente. A segunda etapa, *thresholding*, é realizada pela análise dos coeficientes wavelets.



Figura 4.18: Decomposição não-padrão da imagem Lena em 1 nível de resolução.

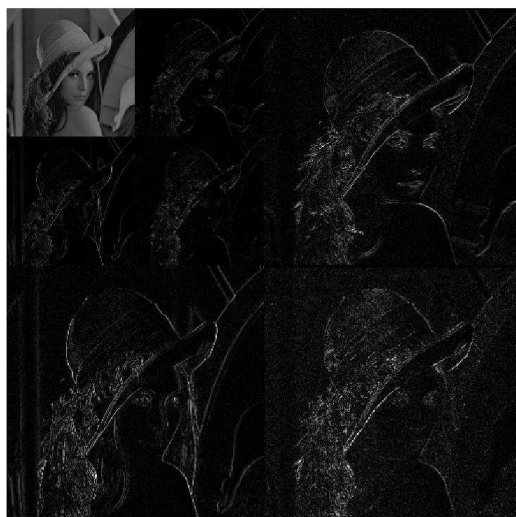


Figura 4.19: Decomposição não-padrão da imagem Lena em 2 níveis de resolução.

Existem diversas técnicas disponíveis para a etapa *Thresholding*, conforme revisão bibliográfica apresentada na Capítulo 3. A etapa de *thresholding* será o foco principal de investigação nesta pesquisa.

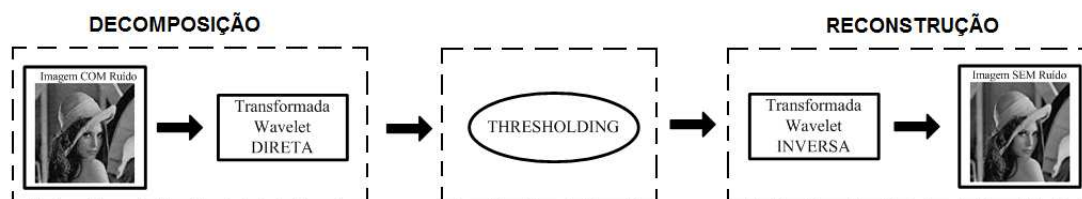


Figura 4.20: Diagrama do processo de *denoising thresholding*.

## 4.9 Conclusão

A Transformada Wavelet é uma importante ferramenta na análise e síntese de sinais de 2 dimensões devido às suas propriedades e características. A partir dos estudos sobre a Transformada de Fourier, pôde-se destacar a caracterização da Transformada Wavelet, no domínio tempo-freqüência, e a utilização de parâmetros variáveis neste domínio.

A característica fundamental da Transformada Wavelet é permitir níveis de resolução variáveis. Na Transformada Janelada de Fourier, uma vez escolhida a resolução no tempo e na freqüência, essa permanece sempre fixa. Dessa forma, o sinal poderá ser analisado com uma boa resolução em tempo ou boa resolução em freqüência, mas não em ambas. Porém, muitos sinais exigem uma aproximação mais flexível, em que o tamanho da janela seja variável, de forma que as informações sobre tempo ou freqüência do sinal sejam determinadas mais precisamente. Na Transformada Wavelet as larguras da janelas variam, possibilitando uma análise mais detalhada do sinal em função da faixa de freqüência selecionada.

A obtenção dos coeficientes wavelets de sinais bidimensionais pode ser feita através do método da decomposição não-padrão, a qual implica no aparecimento de quatro componentes wavelets: a componente de baixa freqüência que contém a aproximação da imagem e três componentes de alta freqüência que contêm os detalhes horizontais, verticais e diagonais da imagem. A eliminação de ruído está diretamente relacionada à escolha do processo de *thresholding*, a ser aplicado nestes coeficientes wavelets.

## 5 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS DE WAVELET *THRESHOLDING* NO PROCESSO DE *DENOISING* DE IMAGENS DIGITAIS

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, inicialmente, serão apresentados os principais aspectos das Técnicas Wavelets a serem aplicadas no processo de *denoising* em imagens digitais.

A partir daí, com base em imagens digitais, comumente utilizadas em trabalhos correlatos, e a adição de ruídos do tipo gaussiano, deverão ser realizadas simulações, análise e comparações entre as técnicas *thresholding* através de ferramentas gráficas e estatísticas.

Com esta investigação, busca-se estabelecer as bases necessárias para futuros desenvolvimentos em relação ao tema e avaliar o desempenho das Técnicas de *Denoising* Wavelet no processamento / tratamento digital de imagens.

### 5.2 Wavelet *Denoising*

Devido à obtenção de resultados bastante eficientes, as técnicas baseadas no *thresholding* dos coeficientes wavelets têm sido aplicadas, cada vez mais, nos métodos de *denoising* de imagens digitais.

Considere a Equação (5.1), onde  $Y_{i,j}$  é um sinal de observação do sinal original  $X_{i,j}$  contaminado por um ruído  $\varepsilon_{i,j}$  do tipo aditivo.

$$Y_{i,j} = X_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad (5.1)$$

O problema de *denoising* consiste em encontrar uma estimativa ótima de  $X_{i,j}$  baseada em  $Y_{i,j}$ . A solução deste problema de otimização depende da distribuição do ruído  $\varepsilon_{i,j}$  e de algum critério a ser aplicado na minimização dos efeitos do ruído. Na maior parte das aplicações práticas, assume-se que o ruído não dependa do sinal, ou seja, que o ruído é independente e identicamente distribuído (*iid*), comumente construído a partir de variáveis aleatórias do tipo gaussiano. Nesse trabalho, a exemplo dos trabalhos disponíveis na área, será considerado um ruído gaussiano de média zero e valor de variância variável,  $\varepsilon_{i,j} \sim N(0, \sigma^2)$  (FODOR, I. K.; KAMATH, C., 1996) (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008).

O processo de Wavelet *Denoising* fornece um caminho particular para obter-se a estimação  $\hat{X}_{i,j}$  de  $X_{i,j}$  a partir do sinal original  $Y_{i,j}$ . Considerando  $Y_{i,j}$ ,  $X_{i,j}$  e  $\varepsilon_{i,j}$  como os dados

observados, o sinal original e o ruído, respectivamente, então o processo de Wavelet *Denoising* consiste de três passos principais, como mostrado a seguir (FODOR, I. K.; KAMATH, C., 1996):

**Passo 1** Cálculo dos coeficientes wavelets, encontrando a matriz  $\omega$  pela aplicação da Transformada Wavelet  $W$  sobre os dados observados:

$$w = WY = WX + W\varepsilon \quad (5.2)$$

**Passo 2** Realização do *thresholding* dos coeficientes de detalhe de  $\omega$ , obtendo uma estimativa  $\hat{w}$  dos coeficientes wavelet de  $X$ .

$$w \rightarrow \hat{w} \quad (5.3)$$

**Passo 3** Aplicação da Transformada Wavelet Inversa nos coeficientes wavelet que sofreram *thresholding* para obter a estimativa de  $X$  através do processo de *denoising*:

$$\hat{X} = (W^{-1})\hat{w} \quad (5.4)$$

Para a realização dos passos 1 e 3 é necessária a escolha da Transformada Wavelet direta e inversa, respectivamente, e também a escolha do nível de multiresolução desejado na decomposição. Conforme visto nas seções anteriores, existem vários tipos de bases wavelets e sua escolha depende da aplicação. Contudo, nesta pesquisa, todas as simulações utilizaram a mesma base, uma vez que o trabalho tem por objetivos principais as análises em relação às funções e valores de *thresholding*.

O 2º passo do processo, conforme indicado pela expressão (5.3), é chamado de passo de *thresholding*, descrito a seguir.

Inicialmente, considera-se  $\omega$  um coeficiente wavelet de detalhe genérico e  $\hat{w}$  uma versão modificada pelo *thresholding*. Tomando  $\lambda$  como o valor do *thresholding*,  $\delta_\lambda(\cdot)$  é a função de *thresholding* (ou *shrinkage*) e  $\hat{\sigma}$  uma estimativa do desvio padrão  $\sigma$  do ruído adicionado, conforme a Equação (5.1). Então, o coeficiente modificado pelo *thresholding* é obtido pela seguinte relação:

$$\hat{w} = \hat{\sigma} \delta_\lambda(w/\hat{\sigma}) \quad (5.5)$$

Se for considerado um ruído unitário, ou seja, com desvio padrão  $\sigma = 1$ , a Equação (5.5) pode ser simplificada obtendo-se:

$$\hat{w} = \delta_\lambda(w) \quad (5.6)$$



Analisando as Equações (5.5) e (5.6), pode-se concluir que o processo de *thresholding* varia dependendo das seguintes escolhas:

- $\delta(\cdot)$  - função de *thresholding* ou *shrinkage*;
- $\hat{\sigma}$  - estimativa do desvio padrão do ruído;
- $\lambda$  - regra para a escolha do valor de *thresholding*.

A função de *thresholding* ou função *shrinkage* determina como o *thresholding* é aplicado sobre os coeficientes. As funções de *thresholding* mais utilizadas são conhecidas como *hard* e *soft thresholding* e são representadas, graficamente, na Figura (5.1), em que as linhas cheias correspondem aos coeficientes mantidos ou ajustados, e as linhas pontilhadas indicam os coeficientes eliminados.

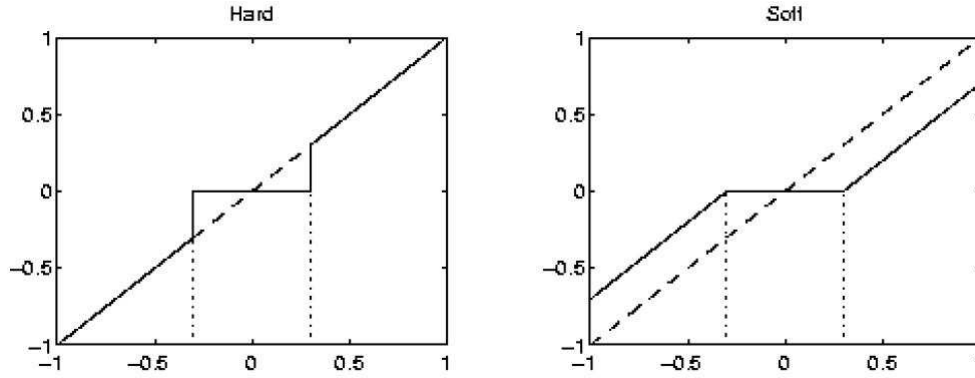


Figura 5.1: Comparação gráfica entre o *Hard* e *Soft Thresholding* (THE MATHWORKS, Inc., 2006).

O *hard thresholding* consiste, apenas, em manter ou zerar os coeficientes wavelets. Um coeficiente wavelet é mantido se o seu valor absoluto é maior que um *thresholding* positivo, caso contrário, ele é anulado, sendo zero este coeficiente. A função de *thresholding* que define o *hard thresholding* é dada pela expressão (5.7) (FODOR, I. K.; KAMATH, C., 1996):

$$\delta_{\lambda}^H(w) = wI_{\{|w| \geq \lambda\}} \quad (5.7)$$

onde  $I(\cdot)$  é a função que retorna 0 ou 1 caso a condição  $|w| \geq \lambda$  seja falsa ou verdadeira, respectivamente.

O *soft thresholding* consiste em ajustar (*shrink*) ou zerar os coeficientes wavelets. Um coeficiente wavelet é ajustado para um valor pré-definido de *thresholding*  $\lambda$  se o seu valor absoluto é maior que um *thresholding* positivo, caso contrário, ele é zerado. A função de *thresholding* que define o *soft thresholding* é dada como (5.8) (FODOR, I. K.; KAMATH, C., 1996):

$$\delta_{\lambda}^S(w) = \text{sgn}(w)(|w| - \lambda)I_{\{|w| \geq \lambda\}} \quad (5.8)$$

Certas regras de *thresholding* assumem um ruído de escala unitária, isto é, média zero e variância unitária,  $\varepsilon_{i,j} = N(0, \sigma^2)$ . Em situações práticas, não se conhece *a priori* a distribuição do ruído que está contaminando o sinal e assim, é necessário estimar essa distribuição. Em geral, essa distribuição pode ser calculada a partir dos dados observados, através da escolha de uma função de estimação e do coeficiente wavelet de detalhe.

Existem diferentes funções de estimação, dentre elas, o desvio padrão (*Standard Deviation* - SD), o desvio médio absoluto (*MAD*), que é mais robusta que a anterior, e o *SURE* (*Stein's Unbiased Risk Estimator*), cuja estimação é mais eficiente que as demais (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008).

A seguir, serão apresentadas algumas técnicas de *thresholding* que serão implementadas nas simulações, em ambiente MatLab. Vale destacar, que no processo de decomposição do sinal, para o cálculo dos coeficientes wavelet foi utilizada a base *sym8* (Symlet com 8 momentos nulos) em todos os algoritmos. A escolha desta base deve-se à sua utilização em alguns trabalhos considerados mais relevantes, permitindo realizar uma comparação prévia entre os resultados obtidos e apresentados pelos autores (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008)(CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYSAK, A., 2004).

### 5.2.1 Método UTS e UTH

Os métodos UTS e UTH utilizam o *thresholding* universal para determinar o limite dos coeficientes wavelets, respectivamente, o *soft* e o *hard thresholding*. Ambos os métodos assumem uma variância conhecida do ruído, ou seja, eles não utilizam nenhum processo de estimação para determinar a variância ( $\sigma^2$ ).

Considerando um sinal de tamanho  $N$  e com uma distribuição normal  $N(0,1)$ , o *thresholding* universal determinado por Donoho (DONOHO, D. L.; JONHSTONE, I. M., 1994) é dado pela equação:

$$\lambda_{UNI} = \hat{\sigma} \sqrt{2 \log N} \quad (5.9)$$

O valor do *thresholding* é determinado independentemente da função de *shrinkage* a ser aplicada. No algoritmo implementado, foram realizados dois níveis de decomposição da imagem pois pode-se constatar que a decomposição em mais níveis afetaria, significativamente, a reconstrução dos coeficientes.

### 5.2.2 *Shrinkage MAD*

A técnica de *Shrinkage MAD* utiliza um processo de estimação dos coeficientes baseado no desvio médio absoluto dos mesmos. Este procedimento também utiliza o *thresholding* universal porém, neste caso, a variância do ruído é estimada conforme a Equação 5.10 (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008),:

$$\hat{\sigma} = \frac{MAD(|w|)}{0.6745} \quad (5.10)$$

onde  $w$  é o coeficiente wavelet e  $MAD$  é o desvio médio absoluto. O *soft thresholding* é o método utilizado para aplicar o valor de *thresholding* que, neste caso, também é universal.

### 5.2.3 *Neighshrink SURE*

O método de *denoising* conhecido por *Neighshrink*, proposto por Chen (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYSAK, A., 2004), é um eficiente algoritmo e foi descrito na revisão bibliográfica desta pesquisa. Este algoritmo utiliza a Transformada Wavelet para obtenção dos coeficientes e aplica o *thresholding* universal considerando a interrelação entre *pixels* vizinhos através da utilização de uma janela.

As etapas do algoritmo *Neighshrink* podem ser resumidas como (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYSAK, A., 2004):

1. Realizar a Decomposição Wavelet 2D na imagem corrompida com ruído.
2. Aplicar o *thresholding* universal  $\sqrt{2\sigma^2 \log(N^2)}$ , estimado no coeficiente wavelet de interesse  $d_{j,k}$ , situado na janela selecionada.
3. Realizar a Transformada Wavelet Inversa 2D nos coeficientes wavelet que foram modificados.

Para cada coeficiente wavelet contaminado com ruído,  $w_{ij}$ , que deverá sofrer o *thresholding*, é incorporada uma janela quadrada  $B_{ij}$ , em que  $w_{ij}$  é o centro e, ao lado, estão seus *pixels* vizinhos. O tamanho desta janela é representado por  $L \times L$ , onde  $L$  é um número positivo e ímpar. A Figura 5.2 ilustra, novamente, uma janela 3x3 onde no centro se encontra o coeficiente a sofrer o *thresholding* (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYSAK, A., 2004).

Tomando  $(S_{i,j})^2 = \sum_{k,l \in B_{i,j}} (w_{kl})^2$  como a fórmula para o *Neighshrink thresholding*, tem-se que:

$$\hat{\theta}_{i,j} = w_{i,j} \beta_{i,j} \quad (5.11)$$

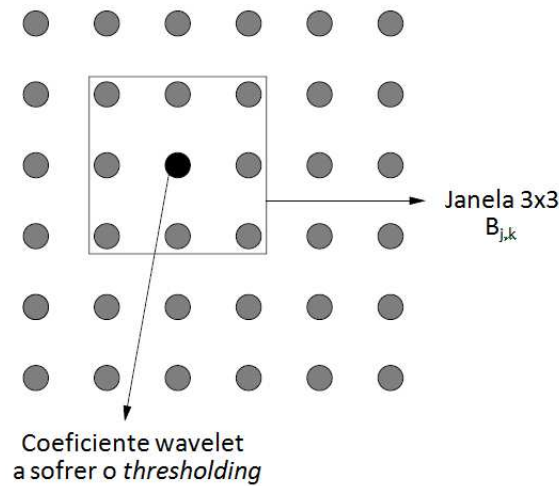


Figura 5.2: Ilustração de uma janela 3x3, mostrando o coeficiente wavelet que deverá ser submetido ao *thresholding* (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004).

onde  $\hat{\theta}_{i,j}$  é a estimativa de um coeficiente sem ruído,  $\beta_{i,j} = (1 - \lambda_{UNI}^2/S_{ij}^2)$  e  $\lambda_{UNI}$  é o *thresholding* universal.

Os coeficientes wavelets que se encontram nas diferentes sub-bandas sofrem o processo de *denoising*. O valor do *thresholding*  $\lambda$  e o tamanho da janela  $L$  mantêm-se inalterados e são aplicados em todas as sub-bandas. Desta forma *pixels* que pertencem a uma determinada sub-banda, mas estão acima do *thresholding*, podem ser omitidos. Esta é a desvantagem de se utilizar  $\lambda$  e  $L$  constantes em todas as sub-bandas, o que torna este processo de *thresholding* sub-ótimo (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYZAK, A., 2004).

Com base nestas limitações, Dengwen e Wengang (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008) propuseram o método denominado de *Neighshrink SURE*, que é capaz de determinar um valor de *thresholding* ótimo e o tamanho da janela ideal para cada sub-banda utilizando o estimador SURE, (*Stein's Unbiased Risk Estimate* - estimador de risco não-polarizado de Stein). Neste artigo, são apresentados resultados da aplicação deste algoritmo associado à Transformada Wavelet e à uma recente versão modificada da Transformada Wavelet, denominada Dual-Tree Complex Wavelet Transform (DT-CWT). Segundo os autores, a partir das imagens Lena, Barbara e Mandrill, foram obtidos melhores resultados através do algoritmo *Neighshrink SURE* em ambos os casos.

O método *Neighshrink* será descrito, a seguir, conforme a proposta de Dengwen e Wengang (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008). Basicamente, a proposta visa à obtenção dos valores ótimos do *threshold*  $\lambda$  e o tamanho da janela  $L$  para cada sub-banda, de forma a minimizar o erro médio quadrático (MSE), ou risco, em relação à estimação dos coeficientes wavelets dado por  $E\|\hat{\theta}_s - \theta_s\|^2$ .

Inicialmente, os  $N_s$  coeficientes wavelets com ruído associado à uma sub-banda  $s$ ,  $W_s = w_{i,j}$  onde  $i, j$  são os índices correspondentes às sub-bandas, organizados em um vetor 1D como  $W_s = W_n : n = 1, \dots, N_s$ . Adotando o desvio padrão do ruído igual a 1, o cálculo do erro médio quadrático é feito como,

$$E\{\|\hat{\theta}_s - \theta_s\|^2\} = N_s + E\{\|g(w_s)\|^2 + 2\nabla g(w_s)\} \quad (5.12)$$

onde  $g(W_s) = \{g_n\}_{n=1}^{N_s} = \hat{\theta}_s - W_s$  e  $\nabla \cdot g \equiv \sum_n \frac{\delta g_n}{\delta w_n}$ .

De acordo com a Equação 5.11, tem-se para o  $n$ -ésimo coeficiente wavelet  $w_n$ :

$$g_n(w_n) = \hat{\theta}_n - w_n = \begin{cases} -\frac{\lambda^2}{S_n^2} w_n & (\lambda < S_n) \\ -w_n & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\frac{\delta g_n}{\delta w_n} = \begin{cases} -\lambda^2 \frac{S_n^2 - 2w_n^2}{S_n^4} & (\lambda < S_n) \\ -1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\|g_n(w_n)\|_2^2 = \begin{cases} \frac{\lambda^4}{S_n^4} w_n^4 & (\lambda < S_n) \\ w_n^2 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.15)$$

A quantidade

$$SURE(w_s, \lambda, L) = N_s + \sum_n \|g_n(w_n)\|_2^2 + 2 \sum_n \frac{\delta g_n}{w_n} \quad (5.16)$$

é um estimador não-polarizado do risco na sub-banda  $s$  onde  $L$  é o tamanho da janela ( $L$  é um número ímpar maior que 1, por exemplo 3, 5, 7, 9, etc). Então,  $E\{\|\hat{\theta}_s - \theta_s\|^2\} = E\{SURE(W_s, \lambda, L)\}$ .

A escolha do *threshold*  $\lambda^s$  e o tamanho da janela vizinha  $L^s$  na sub-bandas serão calculadas de forma a minimizar a expressão (5.18). Ou seja,

$$(\lambda^s, L^s) = \operatorname{argmin}_{\lambda, L} SURE(w_s, \lambda, L) \quad (5.17)$$

onde  $\lambda^s$  e  $L^s$  são calculados assumindo-se o nível de ruído com variância unitária ( $\sigma = 1$ ). Para dados com variância não unitária, os coeficientes são padronizados por um estimador apropriado  $\hat{\sigma}$  depois de calcular o  $\lambda^s$  e  $L^s$  pela Equação (5.17). Uma boa estimativa para  $\sigma$  é calcular o desvio médio absoluto (MAD) utilizando o maior coeficiente wavelet (DONOHO, D. L.; JONHSTONE, I. M., 1994).

$$\hat{\sigma} = \frac{MAD(|w_s|)}{0.6745} (w_s \in \text{subband HH}) \quad (5.18)$$

Conforme mencionado, este algoritmo pode ser estendido para a utilização de coefici-

entes wavelets complexos, obtidos pela aplicação da DT-CWT (BHUIYAN, M. I. H.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S., 2006). A DT-CWT é uma técnica relativamente recente, caracterizando-se como uma inovação da DWT que expande uma imagem em termos de coeficientes com partes reais e imaginárias usando funções wavelet complexas. Embora esse método não seja abordado neste trabalho, vale ressaltar os bons resultados apresentados pelos autores em (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008).

### 5.3 Resultados de Simulação

Visando ao estudo e análise comparativa de algumas das Técnicas de *Denoising Wavelet* apresentados, foram desenvolvidos programas em ambiente MatLab com base nos seguintes métodos:

- *Método UTS*
- *Método UTH*
- *Shrinkage MAD*
- *Neighshrink SURE*

Essas imagens foram contaminadas com ruído gaussiano de média zero e variância  $\sigma^2 = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$  e  $100$ . Para avaliar os diversos métodos de *thresholding* foi calculado o PSNR (dB) para cada valor de variância. Para que a análise fosse mais abrangente, foram consideradas imagens digitais com diferentes histogramas e usualmente utilizadas nos trabalhos relacionados à área de processamento digital de imagens como a *Lena*, *Boat*, *Mandrill* e *Barbara*.

Todas as simulações foram realizadas tomando como base wavelet a wavelet Symlet, com oito momentos nulos (função *Sym8* - MatLab). Esta escolha foi feita de forma a possibilitar análises comparativas com os resultados apresentados em (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008).

Os valores de PSNR das imagens reconstruídas serão apresentados em tabelas e gráficos. Serão apresentadas ainda as imagens processadas, reconstruídas, objetivando uma comparação visual da qualidade dessas imagens, em termos de sua aproximação das imagens originais. São mostrados, ainda, os histogramas das imagens e o histograma do erro entre as imagens originais, livres de ruído, e as imagens reconstruídas, utilizando-se cada um dos métodos de *thresholding* implementado. Apresenta-se também, nos resultados de simulação, o gráfico de ganho obtido pelo método mais eficiente em relação aos demais métodos. Vale ressaltar, neste momento, que por questões de padronização e formatação do trabalho, todas as figuras e gráficos foram apresentados ao final deste capítulo.

As Tabelas 5.1 a 5.4 apresentam os valores de PSNR obtidos através de cada um dos métodos de *thresholding*, associados à aplicações da base wavelet *Sym8*.

Tabela 5.1: Valores de PSNR (dB) obtidos na simulação das técnicas de *denoising*: *Soft Thresholding*, *Hard Thresholding*, *Shrinkage MAD* e *Neighshrink SURE* para a imagem *Lena*.

Variância $\sigma^2$	Imagem Contaminada	Imagem <i>Lena</i>			
		Método UTS	Método UTH	Shrinkage MAD	Neighshrink SURE
10	28.131	29.446	29.308	30.452	34.720
20	22.110	28.356	28.300	28.547	31.530
30	18.588	27.088	27.070	27.122	29.702
40	16.089	25.794	25.789	25.802	28.413
50	14.151	24.560	24.558	24.562	27.431
60	12.567	23.416	23.416	23.417	26.646
70	11.228	22.370	22.370	22.370	25.927
80	10.069	21.418	21.418	21.418	25.356
90	9.046	20.552	20.552	20.552	24.889
100	8.131	19.761	19.761	19.761	24.428

Tabela 5.2: Valores de PSNR (dB) obtidos na simulação das técnicas de *denoising*: *Soft Thresholding*, *Hard Thresholding*, *Shrinkage MAD* e *Neighshrink SURE* para a imagem *Mandrill*.

Variância $\sigma^2$	Imagem Contaminada	Imagem <i>Mandrill</i>			
		Método UTS	Método UTH	Shrinkage MAD	Neighshrink SURE
10	28.131	21.275	21.270	21.831	30.302
20	22.110	21.103	21.100	21.288	26.196
30	18.588	20.837	20.836	20.904	24.164
40	16.089	20.494	20.494	20.517	22.896
50	14.151	20.091	20.091	20.099	22.028
60	12.567	19.646	19.646	19.648	21.392
70	11.228	19.173	19.173	19.174	20.898
80	10.069	18.685	18.685	18.686	20.510
90	9.046	18.193	18.193	18.193	20.207
100	8.131	17.705	17.705	17.705	19.947

Com base nas Tabelas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, pôde-se verificar que para todas as técnicas, quanto maior o valor da variância do ruído, menor o valor do PSNR. Pela análise das tabelas comprova-se que enquanto os três primeiros métodos apresentam eficiência comparáveis, o método *Neighshrink SURE* é muito superior, apresentando ganhos de PSNR da ordem de 1 a 5 dB, dependendo do grau de contaminação.

Uma outra análise interessante a partir destas tabelas é que, os métodos *UTS*, *UTH* e *Shrinkage MAD*, passam a apresentar valores idênticos de PSNR quando a variância do ruído

Tabela 5.3: Valores de PSNR (dB) obtidos na simulação das técnicas de *denoising*: *Soft Thresholding*, *Hard Thresholding*, *Shrinkage MAD* e *Neighshrink SURE* para a imagem *Boat*.

Variância $\sigma^2$	Imagem Contaminada	<i>Imagem Boat</i>			
		<i>Método UTS</i>	<i>Método UTH</i>	<i>Shrinkage MAD</i>	<i>Neighshrink SURE</i>
10	28.131	26.820	26.741	27.873	33.590
20	22.110	26.201	26.175	26.428	29.951
30	18.588	25.393	25.386	25.436	28.014
40	16.089	24.480	24.479	24.488	26.716
50	14.151	23.540	23.540	23.541	25.752
60	12.567	22.622	22.622	22.622	25.028
70	11.228	21.747	21.747	21.747	24.444
80	10.069	20.924	20.924	20.924	23.931
90	9.046	20.156	20.156	20.156	23.514
100	8.131	19.440	19.440	19.440	23.127

Tabela 5.4: Valores de PSNR (dB) obtidos na simulação das técnicas de *denoising*: *Soft Thresholding*, *Hard Thresholding*, *Shrinkage MAD* e *Neighshrink SURE* para a imagem *Barbara*.

Variância $\sigma^2$	Imagem Contaminada	<i>Imagem Barbara</i>			
		<i>Método UTS</i>	<i>Método UTH</i>	<i>Shrinkage MAD</i>	<i>Neighshrink SURE</i>
10	28.131	23.922	23.781	24.813	33.024
20	22.110	23.519	23.477	23.643	29.093
30	18.588	23.043	23.034	23.056	27.005
40	16.089	22.484	22.483	22.485	25.616
50	14.151	21.868	21.867	21.868	24.632
60	12.567	21.222	21.222	23.869	23.869
70	11.228	20.572	20.571	20.571	23.263
80	10.069	19.932	19.932	19.932	22.754
90	9.046	19.314	19.314	19.314	22.318
100	8.131	18.722	18.722	18.722	21.939



é superior a 60 ( $\sigma^2 = 60$ ). Esse fenômeno ocorre devido aos critérios de *thresholding* adotados nestes métodos, pois eles não levam em consideração nenhum critério estatístico na análise dos coeficientes wavelets. Isto mostra a deficiência destes métodos para estas situações e ao mesmo tempo valida a eficiência do método *Neighshrink SURE* que, conforme pode-se observar, apresenta melhores resultados em todas as situações, o que se deve ao critério de estimação SURE.

Assim como as Tabelas 5.1 a 5.4, os gráficos representados pelas Figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam uma comparação entre os valores de PSNR obtidos por cada um dos métodos simulados, para os diferentes valores de variância.

Nas Figuras 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 são apresentadas a imagem original, a imagem corrompida com ruído gaussiano de média zero e variância 20 e as imagens processadas, com a utilização dos métodos de *thresholding* associados a aplicação da wavelet *Sym8* para os casos das imagens *Lena*, *Mandrill*, *Boat* e *Barbara*. Na primeira linha, apresentam-se a imagem original e a imagem contaminada com um ruído gaussiano de variância 20. Na segunda linha, a coluna da esquerda é apresentada o resultado de simulação obtido pelo método *UTS* e ao seu lado o resultado do método *UTH*. Na linha inferior, à esquerda, tem-se a imagem obtida a partir da aplicação do *Shrinkage MAD* e, à sua direita, a reconstrução da imagem pelo algoritmo *Neighshrink SURE*.

Pode-se comprovar, com base na avaliação visual das imagens, que todos os métodos foram capazes de reduzir a quantidade de ruído inserido na imagem. Todas as imagens recuperadas estão mais próximas da imagem original do que a imagem corrompida com ruído.

Devido às características específicas da distribuição dos níveis de cinza da imagem *Mandrill*, observa-se que ao se inserir o ruído, visualmente a imagem não se distorceu tanto quanto as outras. Esta característica faz com que os métodos de *denoising* apresentem os menores valores de PSNR para esta imagem, mas a recuperação da imagem aproxima-se mais em relação à imagem original.

Em todos os casos, o método que melhor reconstruiu a imagem foi o *Neighshrink SURE*. Desta forma comprova-se, mais uma vez, a eficiência deste método em relação aos outros.

As Figuras 5.11 a 5.14 apresentam o ganho do método *Neighshrink SURE* em relação aos outros métodos. Pode-se perceber a superioridade deste método pela análise destes gráficos. Para todas as imagens este método teve um ganho entre 2,5 e 9,2 dB, que representam valores altamente significativos que se manifestam na análise visual das imagens.

As Figuras 5.15 a 5.18 apresentam os histogramas dos níveis de cinza da imagem original, imagem com ruído e imagens reconstruídas pelos métodos propostos, considerando-se um ruído com variância 20. O histograma superior, à direita, corresponde ao histograma da imagem com ruído. Pode-se verificar que a distribuição dos níveis de cinza da imagem original

assumiu o formato de uma curva gaussiana, pois o ruído inserido nestas imagens tem a distribuição da curva de Gauss. Pode-se perceber que os histogramas das imagens processadas, voltam a assemelhar-se ao histograma da imagem original.

Com a finalidade de verificar o erro apresentado para cada método, foi gerado o histograma do erro entre a imagem reconstruída pelos diferentes métodos e a imagem original. Estes histogramas são apresentados nas Figuras 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22, considerando um ruído com variância 20. Pode-se verificar pela análise dos histogramas dos erros que quanto maior a uniformidade da distribuição dos níveis de cinza, como é o caso das imagens *Lena* e *Barbara*, melhor será a imagem reconstruída, apresentando desta forma um histograma de erro mais próxima de zero (origem). Comparando esses histogramas, percebe-se que o aquele relativo ao método *Neighshrink* SURE é o melhor, ou seja, o que apresenta menores variações entre a imagem original e a imagem processada.

## 5.4 Conclusão

A etapa de simulação foi importante para o enriquecimento deste trabalho, porque permitiu aplicar os fundamentos da Transformada Wavelet e exigiu a exata compreensão dos algoritmos de *thresholding*, para finalmente produzir resultados que tornassem possível uma análise comparativa da eficiência desses algoritmos no processo de *denoising* de imagens.

Pode-se observar, a partir dos resultados obtidos, o desempenho superior do método de Wavelet *Denoising* através do *Neighshrink* SURE, porém, outros métodos também apresentam uma qualidade visual razoável. Obviamente, que os outros métodos analisados são capazes de realizar a reconstrução da imagem eliminando uma parcela do ruído e sendo assim, dependendo da aplicação na qual a imagem será utilizada, os métodos que apresentaram valores de PSNR menores não estão excluídos, podendo ser utilizados em casos que necessitem de menor complexidade computacional, o que facilitaria a implementação dos algoritmos em tempo real utilizando, por exemplo, DSP.

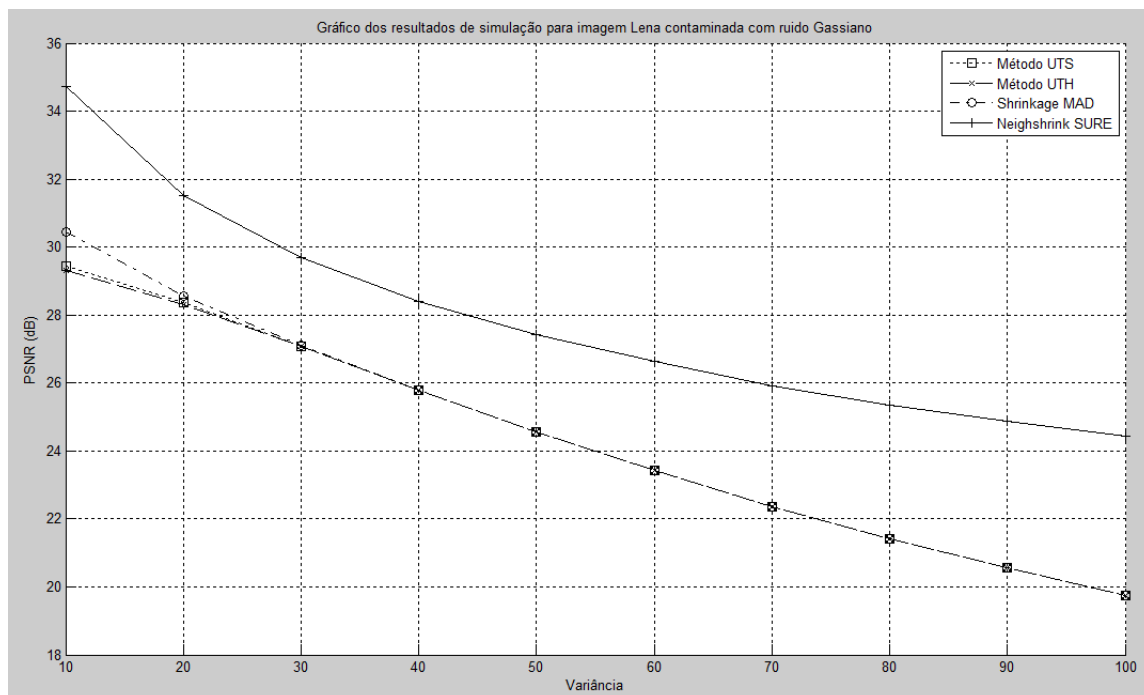


Figura 5.3: Gráfico dos resultados de simulação para a imagem *Lena*

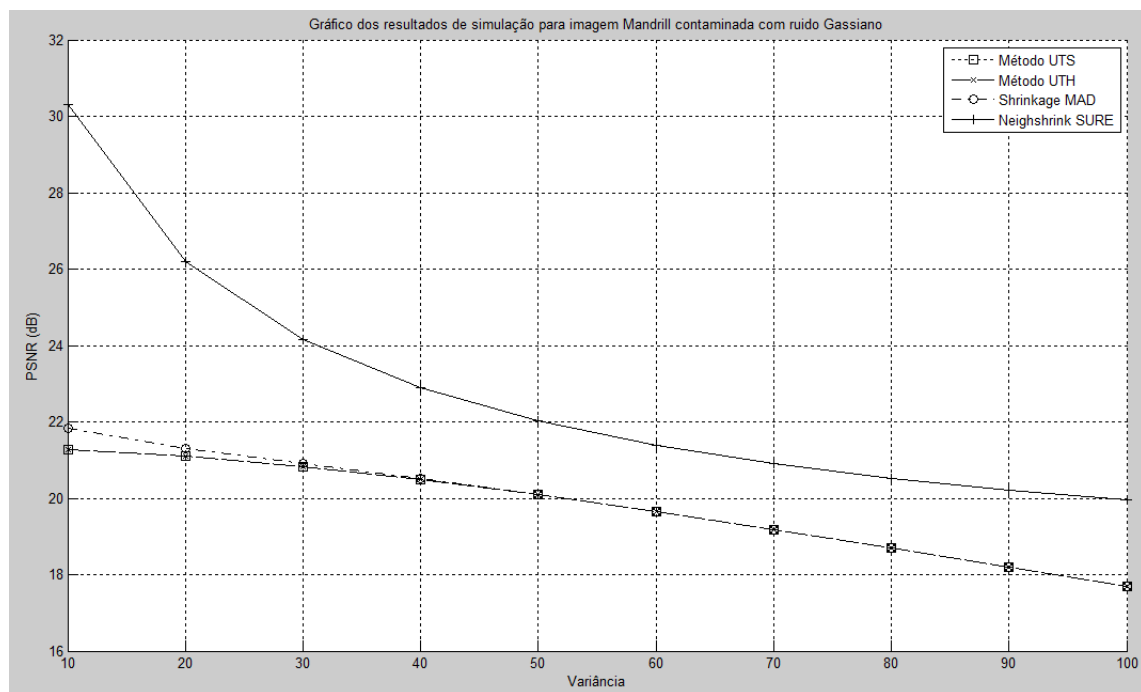


Figura 5.4: Gráfico dos resultados de simulação para a imagem *Mandrill*

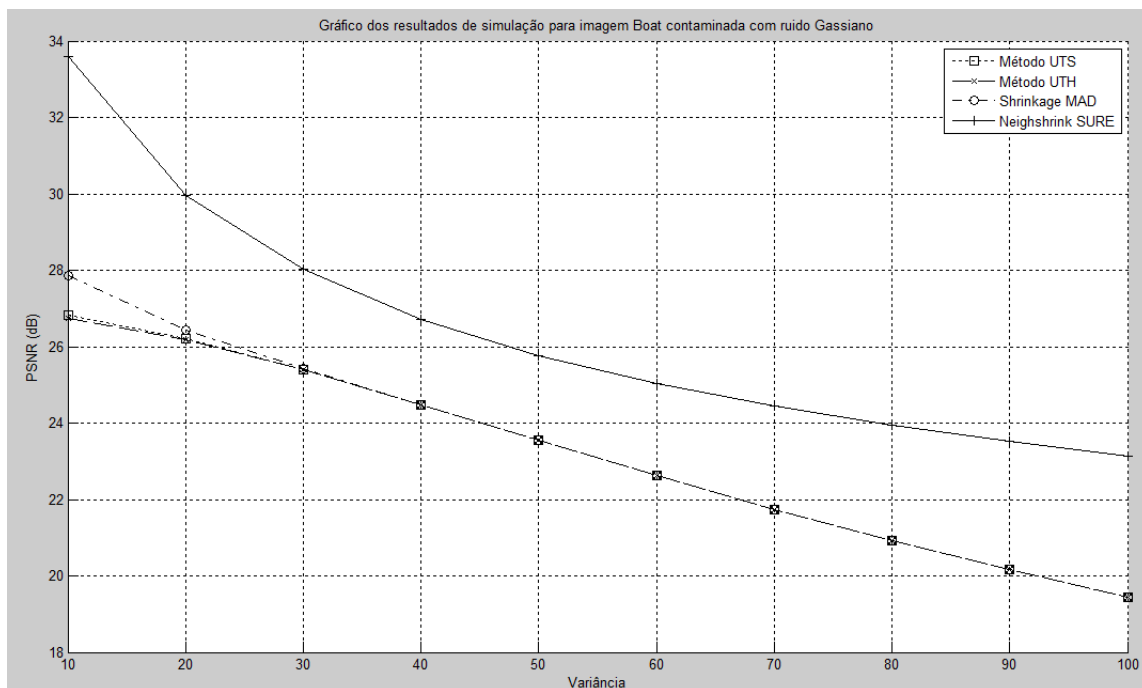


Figura 5.5: Gráfico dos resultados de simulação para a imagem *Boat*

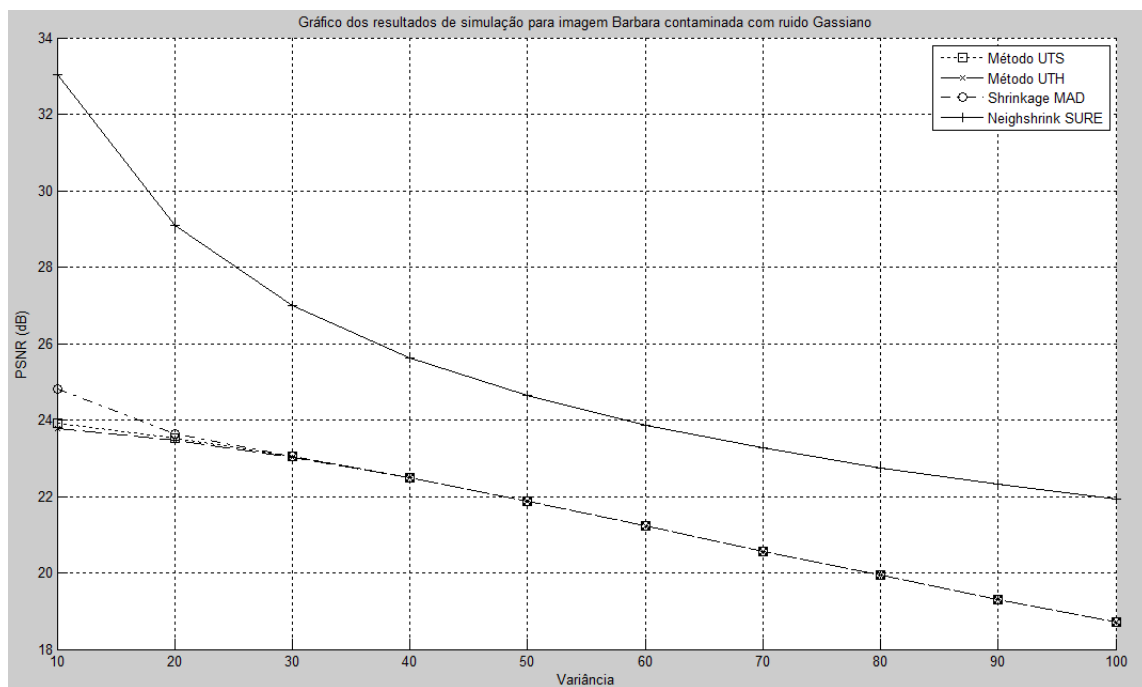


Figura 5.6: Gráfico dos resultados de simulação para a imagem *Barbara*



Figura 5.7: Resultado visual de simulação para a imagem *Lena*.

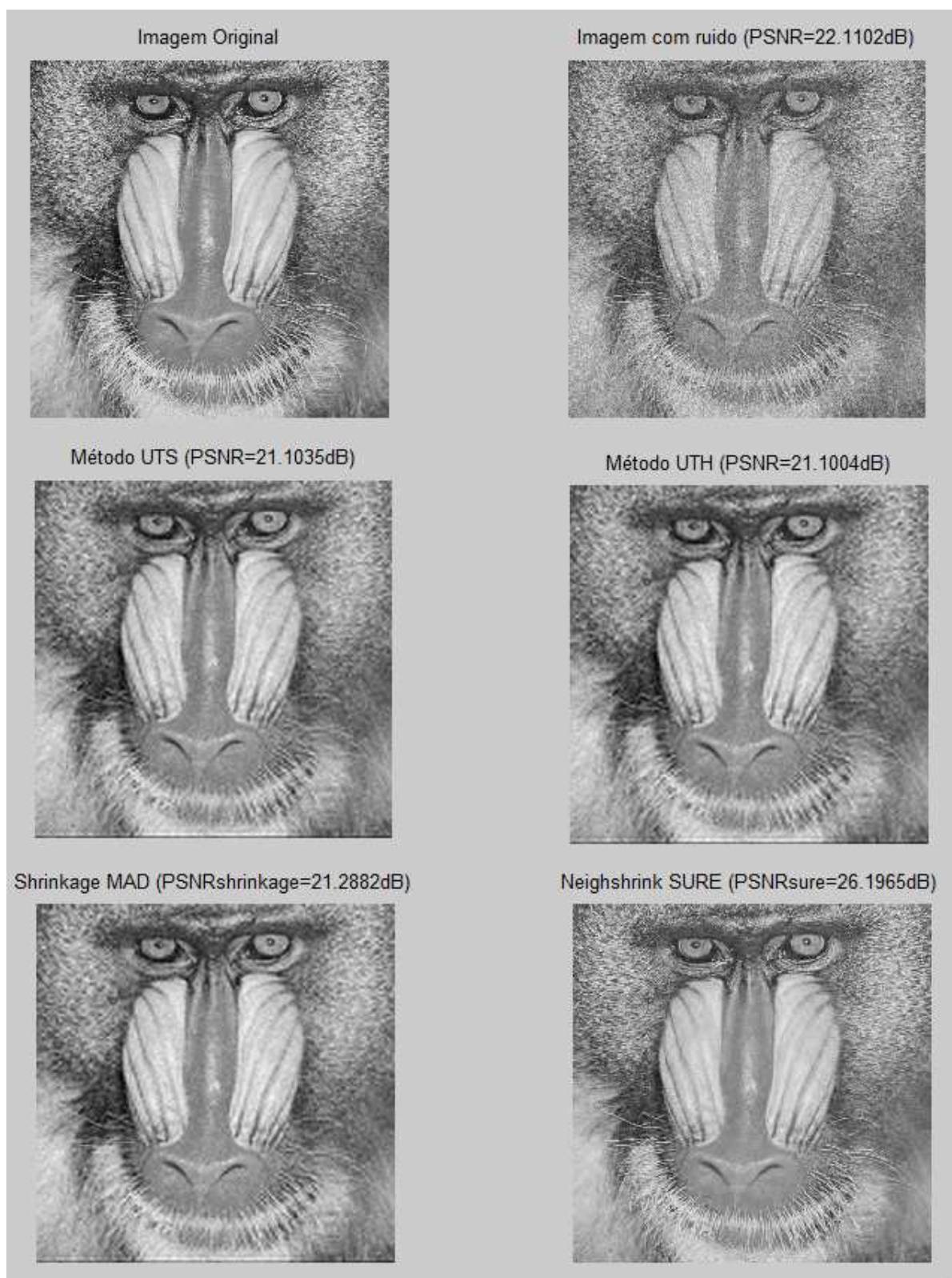


Figura 5.8: Resultado visual de simulação para a imagem *Mandrill*.



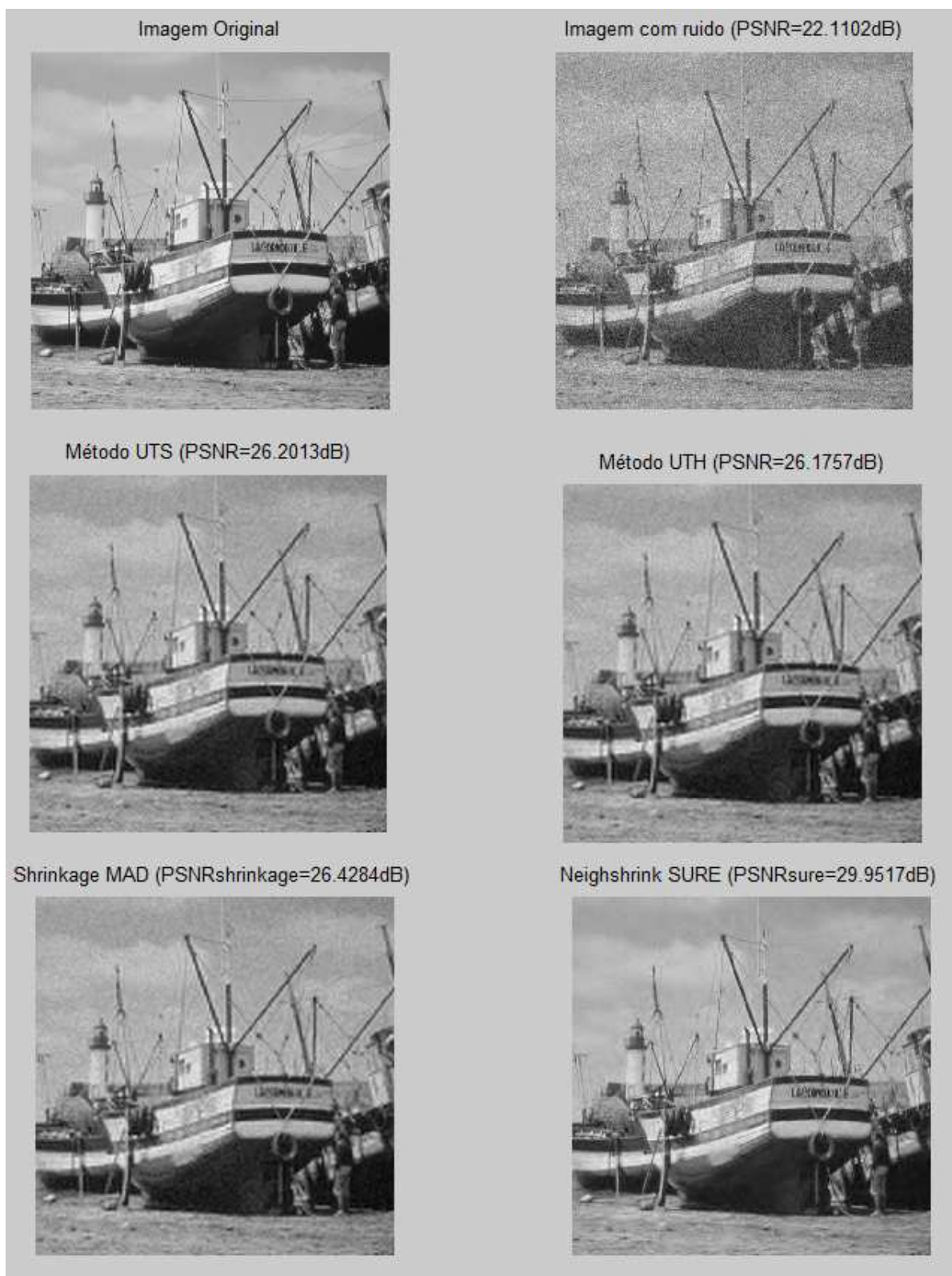


Figura 5.9: Resultado visual de simulação para a imagem *Boat*.



Figura 5.10: Resultado visual de simulação para a imagem *Barbara*.



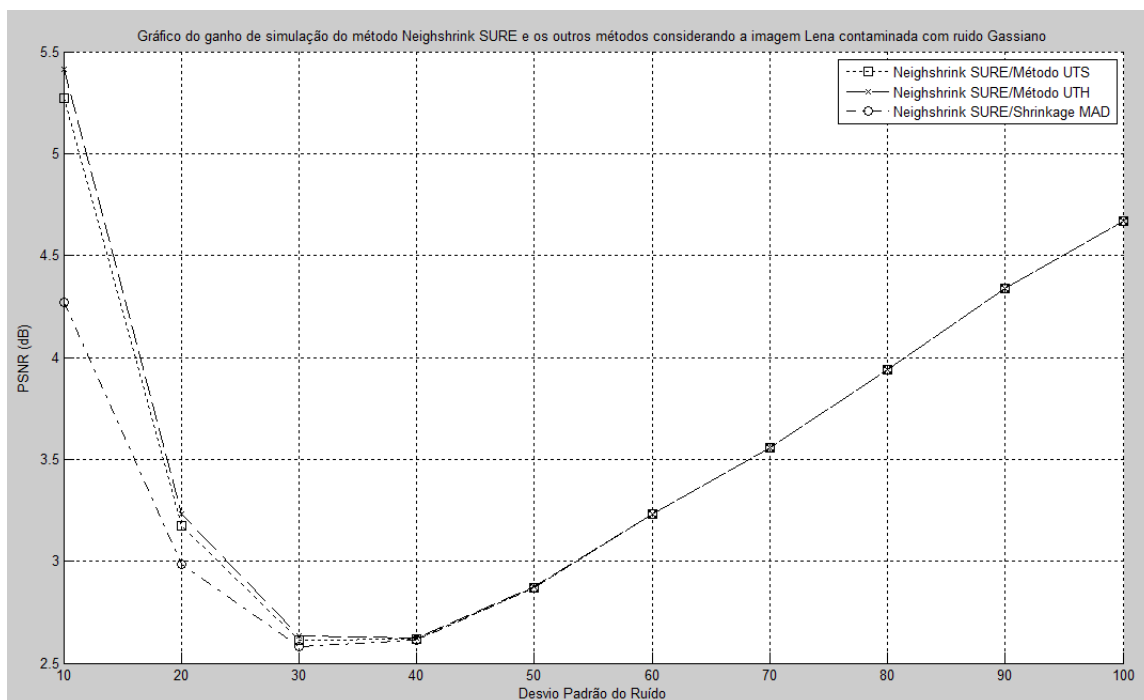


Figura 5.11: Ganho do métodos Neighshrink SURE em relação aos demais métodos, considerando a imagem *Lena* com ruído de variância 20.

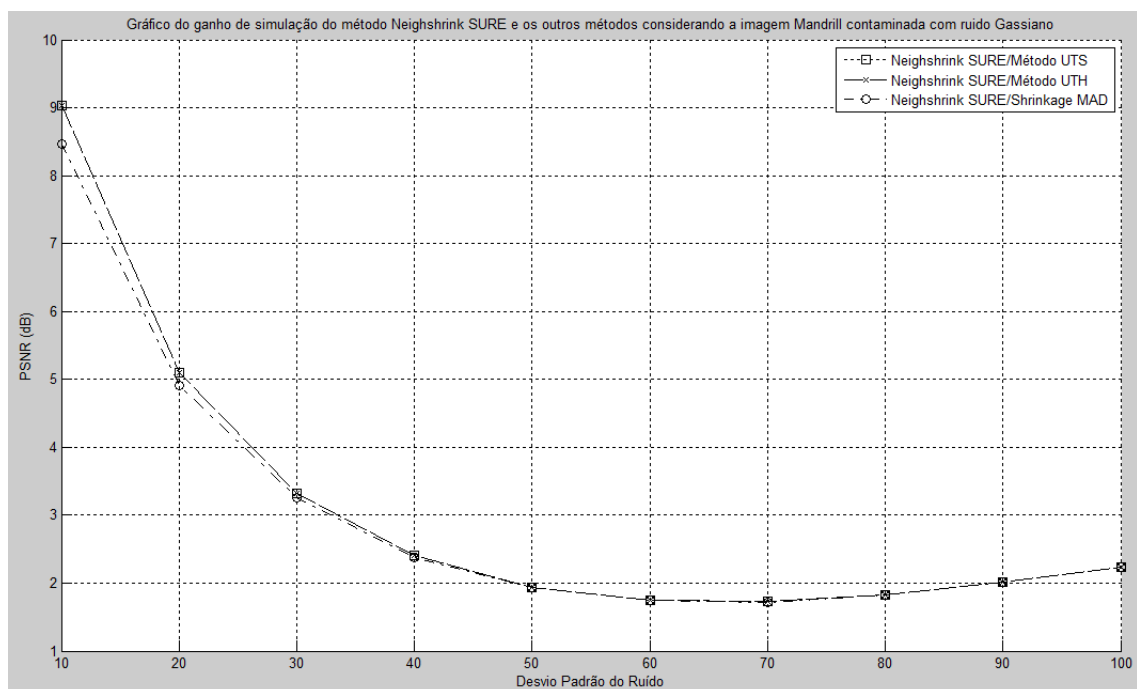


Figura 5.12: Ganho do métodos Neighshrink SURE em relação aos demais métodos, considerando a imagem *Mandrill* com ruído de variância 20.

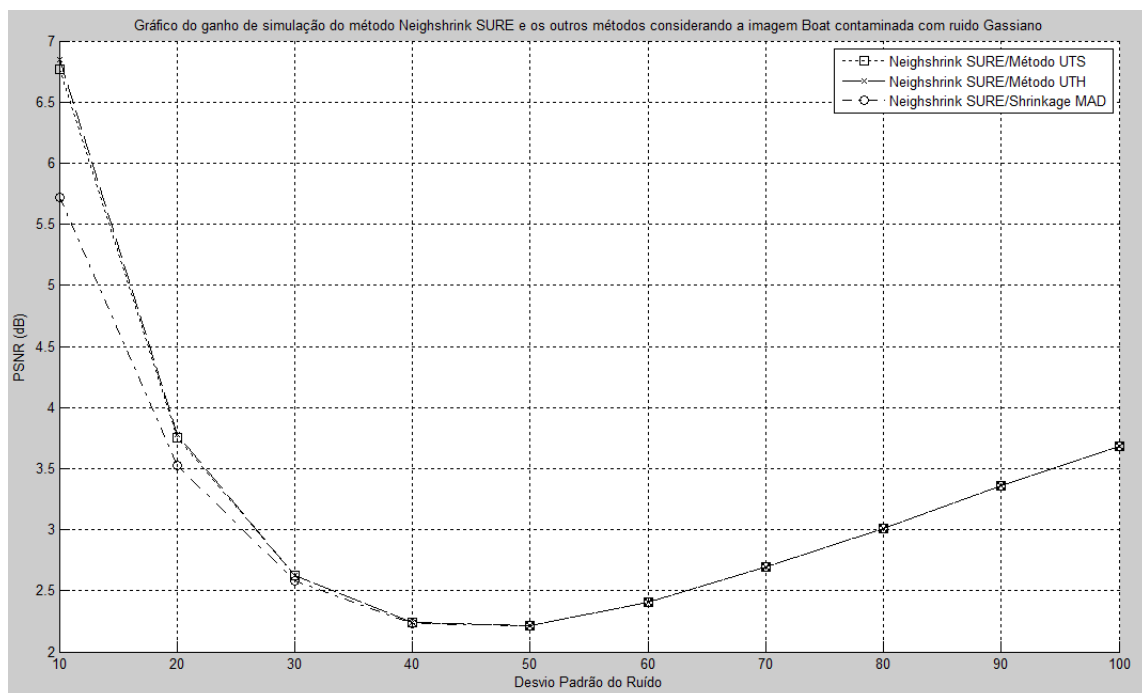


Figura 5.13: Ganho do métodos Neighshrink SURE em relação aos demais métodos, considerando a imagem *Boat* com ruído de variância 20.

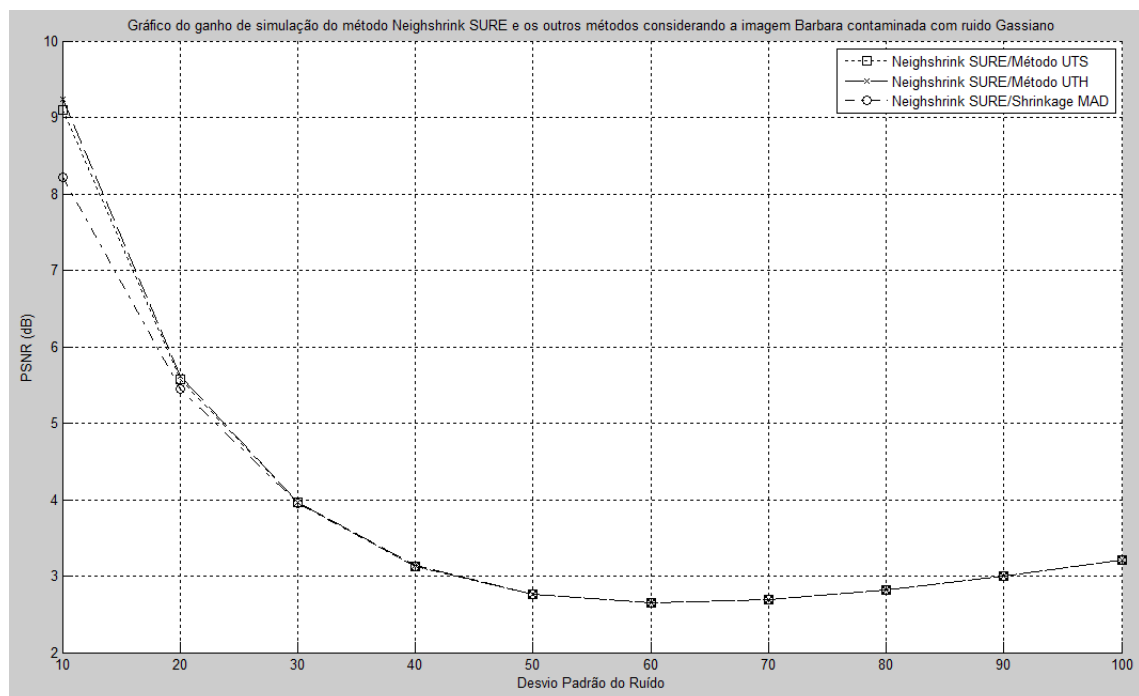


Figura 5.14: Ganho do métodos Neighshrink SURE em relação aos demais métodos, considerando a imagem *Barbara* com ruído de variância 20.

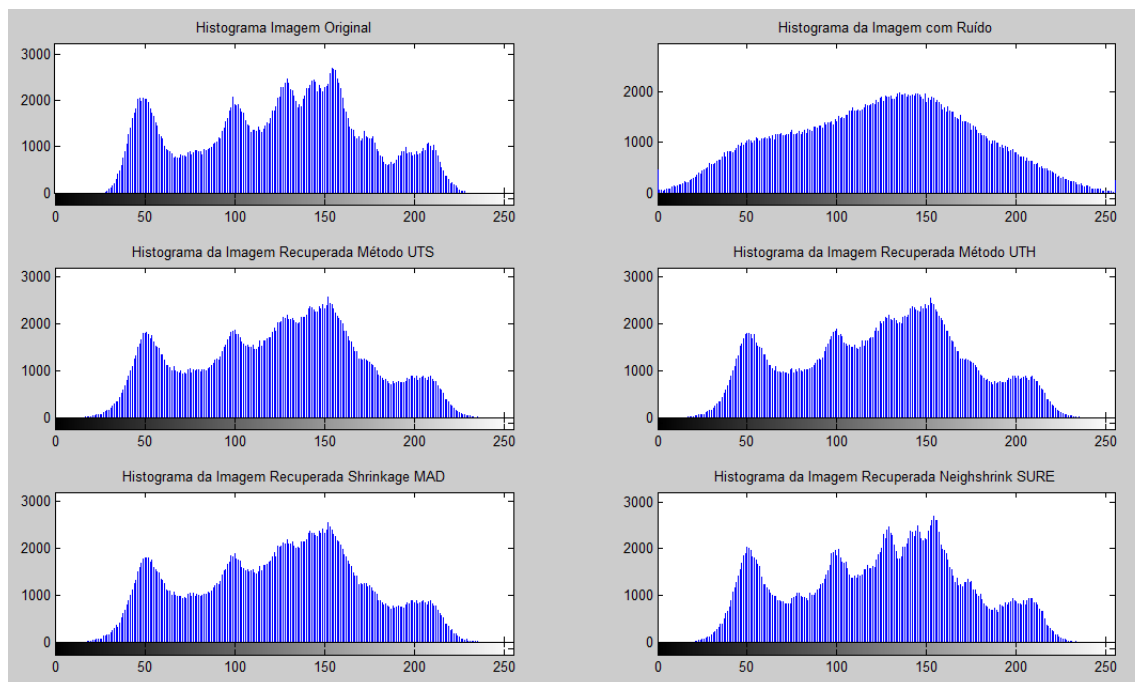


Figura 5.15: Histograma das imagens reconstruídas para cada método ao considerar a imagem *Lena* com variância do ruído 20.

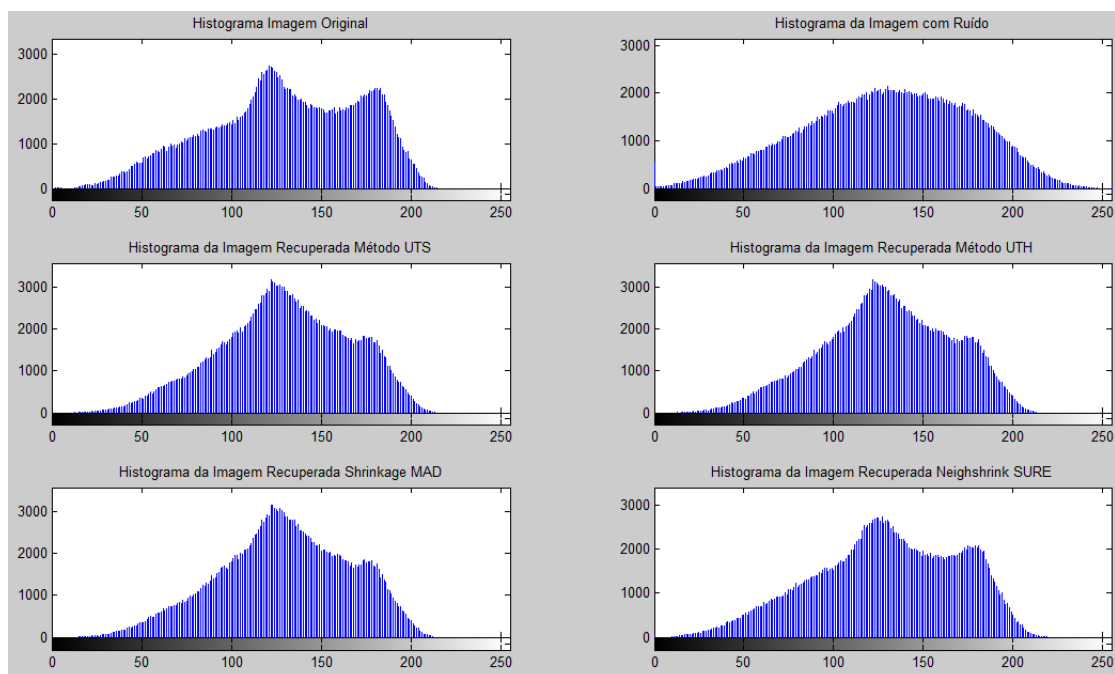


Figura 5.16: Histograma das imagens reconstruídas para cada método ao considerar a imagem *Mandrill* com variância do ruído 20.

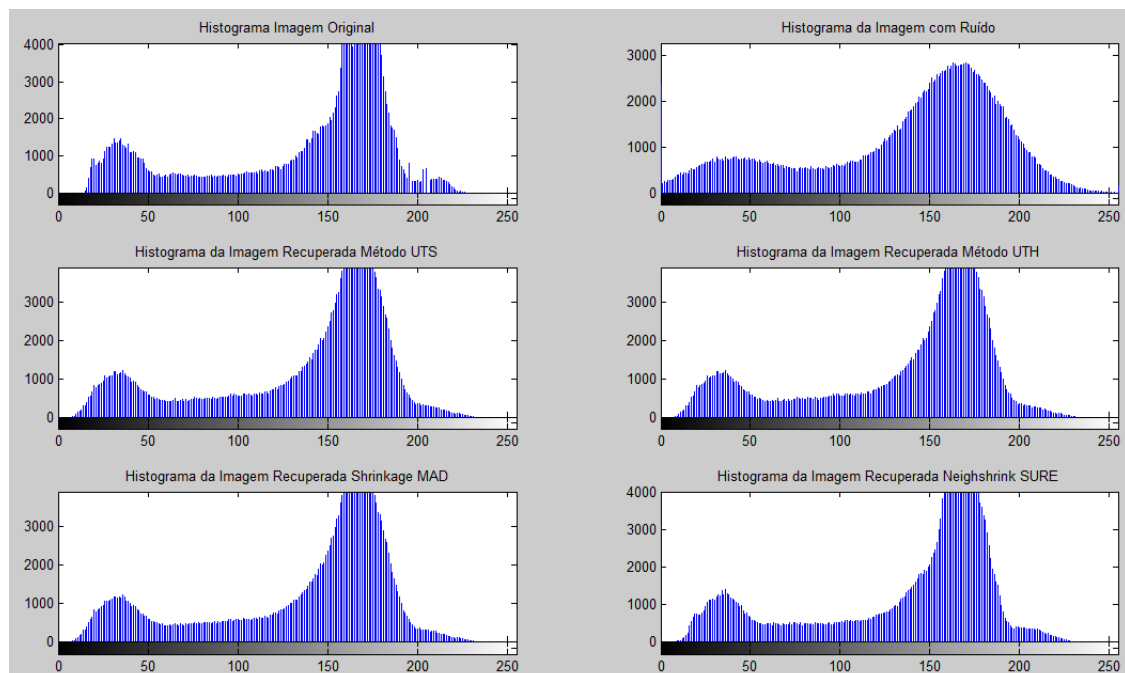


Figura 5.17: Histograma das imagens reconstruídas para cada método ao considerar a imagem *Boat* com variância do ruído 20.

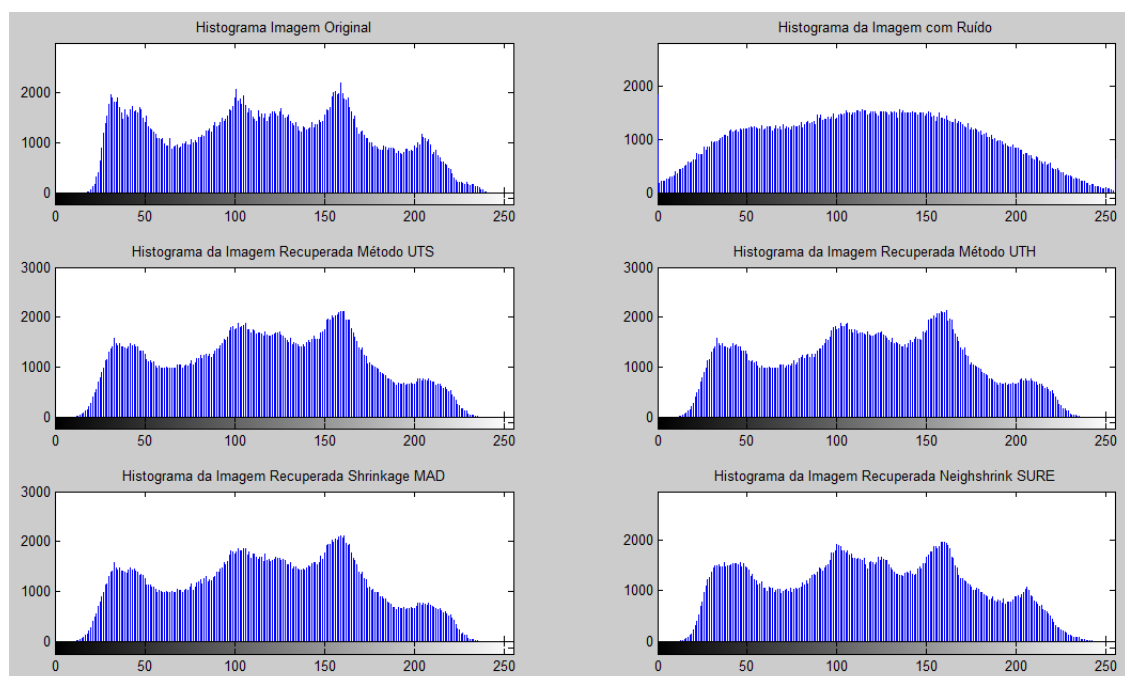


Figura 5.18: Histograma das imagens reconstruídas para cada método ao considerar a imagem *Barbara* com variância do ruído 20.

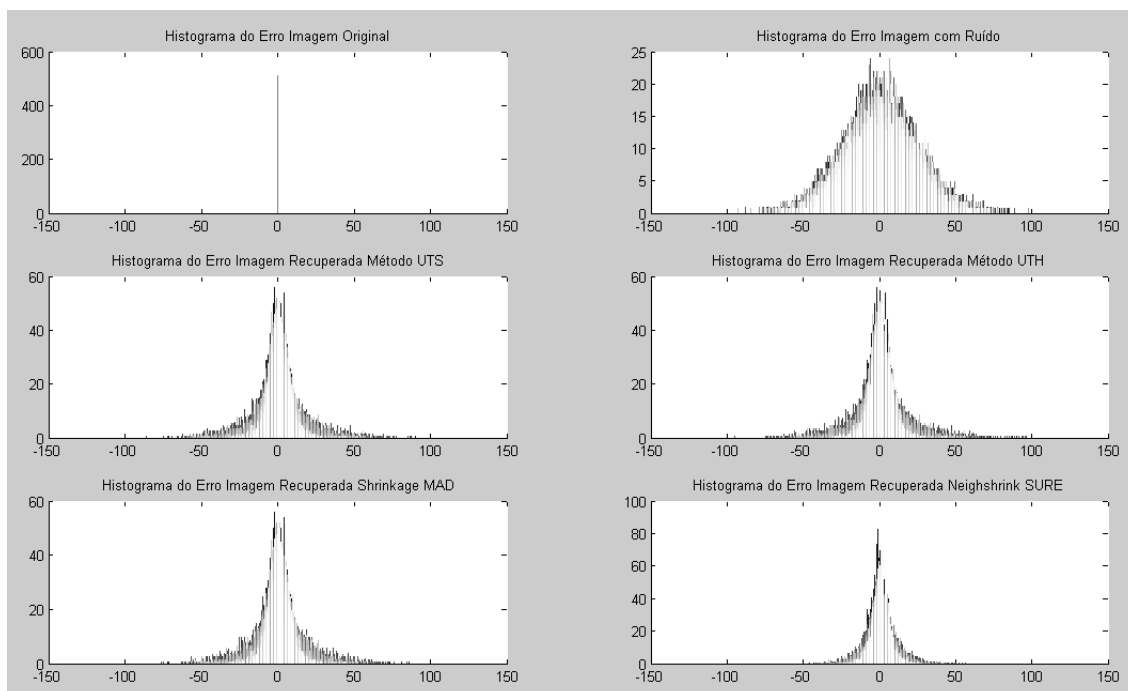


Figura 5.19: Histograma do ERRO entre a imagem original e as imagens reconstruídas considerando a imagem *Lena* com variância do ruído 20.

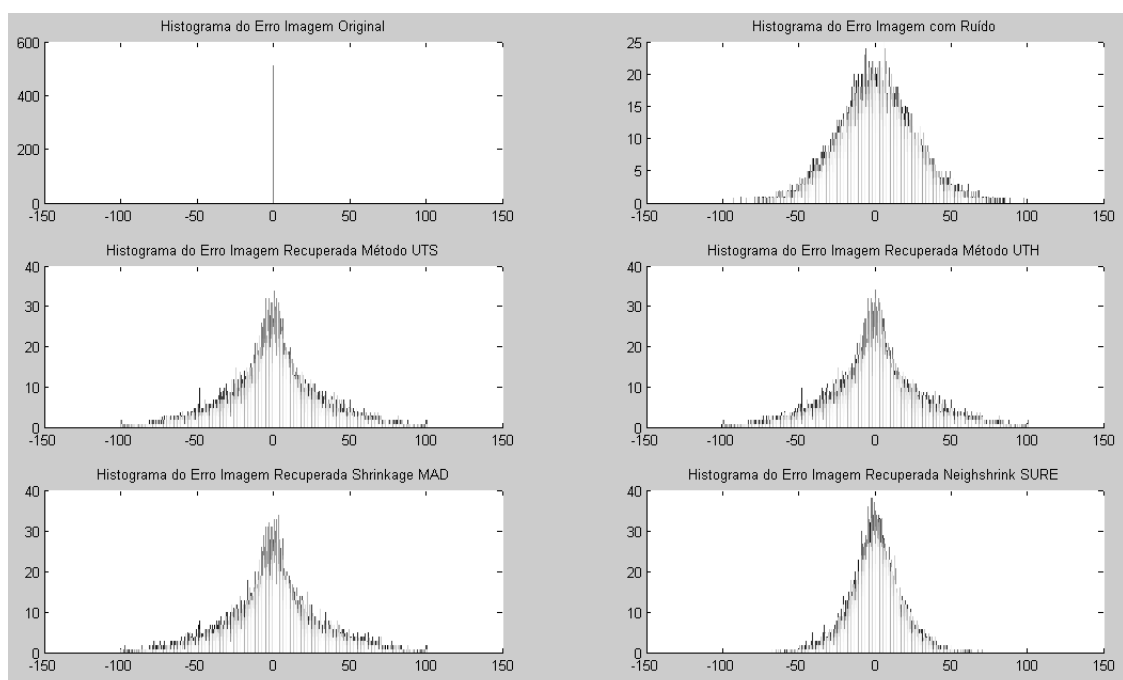


Figura 5.20: Histograma do ERRO entre a imagem original e as imagens reconstruídas considerando a imagem *Mandrill* com variância do ruído 20.

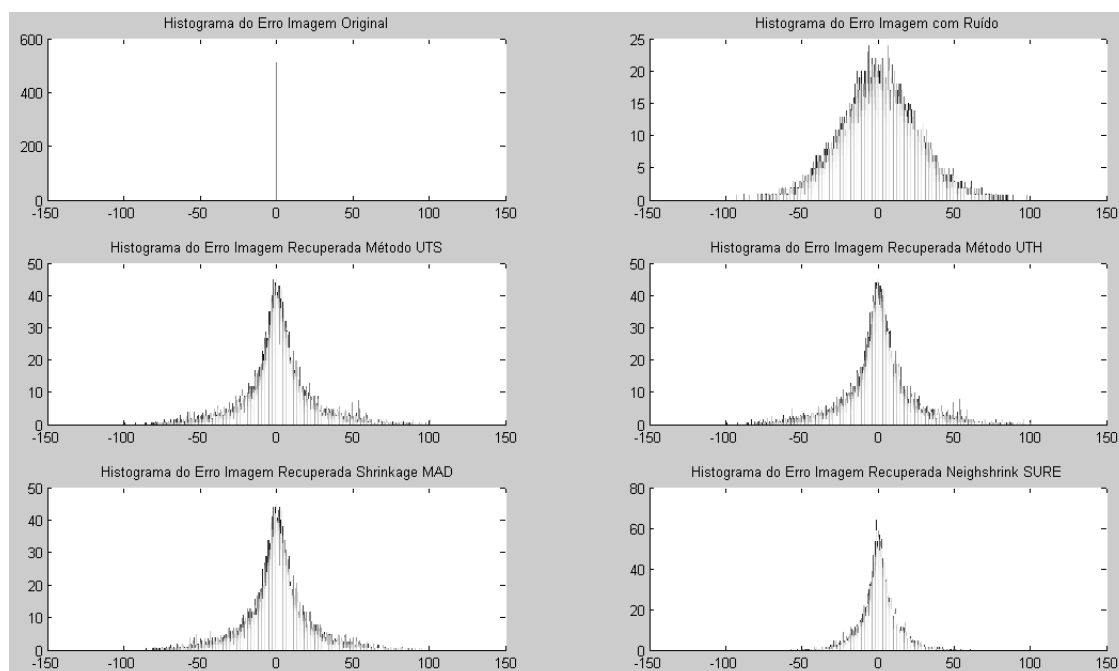


Figura 5.21: Histograma do ERRO entre a imagem original e as imagens reconstruídas considerando a imagem *Boat* com variância do ruído 20.

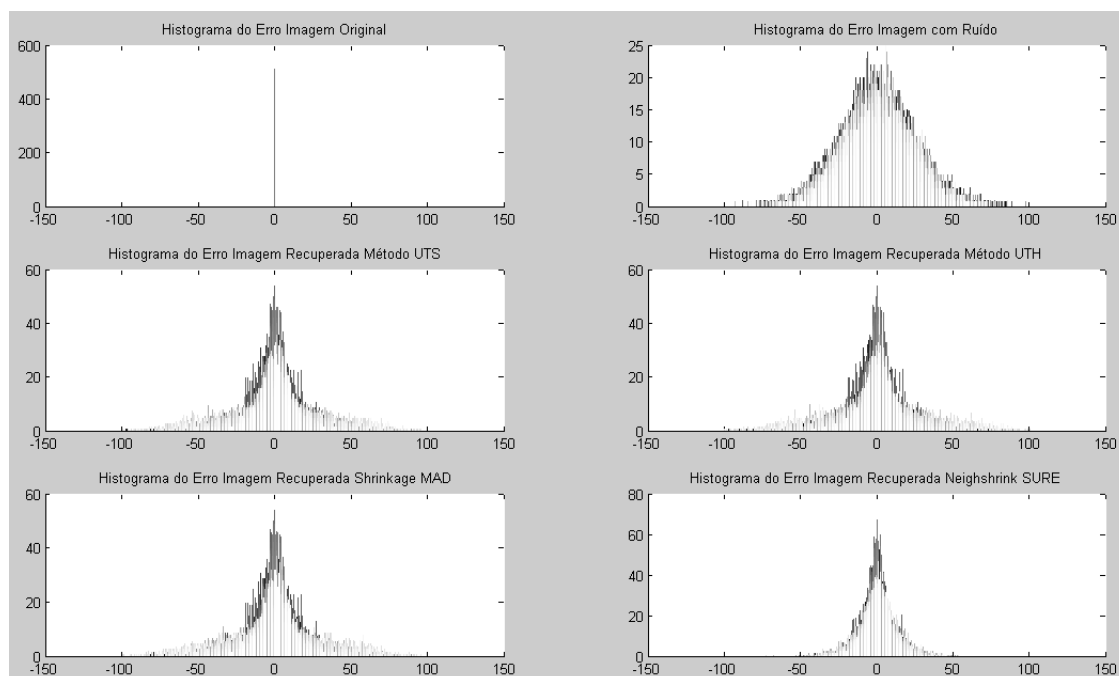


Figura 5.22: Histograma do ERRO entre a imagem original e as imagens reconstruídas considerando a imagem *Barbara* com variância do ruído 20.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, realizou-se a análise e a comparação da aplicação dos algoritmos de wavelet *thresholding* no processo de *denoising* de imagens digitais.

A partir da revisão bibliográfica realizada, verificou-se uma diversidade de aplicações da Transformada Wavelet, comprovando a relevância da utilização desta transformada em áreas multidisciplinares. É importante ressaltar que esta parte da pesquisa constituiu um passo importante em busca da contextualização do tema no atual cenário científico e tecnológico.

Neste contexto, observou-se que a Transformada Wavelet (WT) tem-se tornado uma ferramenta matemática indispensável para uma variedade de aplicações voltadas à área de processamento de sinais e imagens, principalmente devido à superioridade dos resultados de *denoising* utilizando a DWT quando comparada com métodos tradicionais, por exemplo, a Transformada de Fourier.

Faz-se necessário, como proposta de continuidade deste trabalho, realizar um estudo mais detalhado do processo de *denoising* wavelet *thresholding* associado a métodos estatísticos e de estimação, que constituem uma ampla área de pesquisa. Por isso, pretende-se continuar esta pesquisa buscando uma formação teórica abrangente, realizando o acompanhamento das publicações sobre o tema através de levantamentos bibliográficos e periódicos.

Os objetivos deste trabalho foram alcançados, pois foi possível analisar e comparar algumas das principais técnicas de wavelet *thresholding*, conforme a literatura técnico-científica atual, através de simulações computacionais em ambiente MatLab.

Os métodos analisados, com base nas Técnicas de *Denoising* Wavelet UTH, UTS, *Skrinkage* MAD, *NeighskrinkSURE* mostraram bons resultados. Dentre eles, pela análise do índice PSNR, histogramas e análises qualitativas das imagens, a técnica *NeighskrinkSURE* apresentou o melhor desempenho.

Foi possível confirmar importantes contribuições, a partir dos trabalhos de (CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYŻAK, A., 2004), (DENGWEN, Z.; WENGANG, C., 2008), dentre outros, e acrescentar novas comparações àquelas disponibilidades pelos trabalhos citados.

Espera-se, desta forma, contribuir em relação aos desenvolvimentos na área de processamento digital de sinais e imagens, disponibilizando as experiências realizadas no âmbito do GEPSIN/PUCMinas e através de publicações em congressos e periódicos da área.

## 6.1 Proposta de Continuidade e Trabalhos Futuros

Esta pesquisa cria possibilidades para a realização de diversos trabalhos futuros, devido à atualidade do tema e à necessidade apresentada por diversas aplicações em trabalhar com um sinal puro, livre de ruído, que possa ser transmitido e reproduzido sem alterar sua qualidade visual. Inúmeras áreas estão trabalhando com imagens digitais na análise de algum processo. Entre essas aplicações podem ser citadas as áreas de processamento de imagens de satélite e imagens médicas. Essas duas áreas estão em ampla expansão e necessitam de imagens livres de ruídos. Dentre as propostas de realização de novos trabalhos, destacam-se:

- Aplicação de técnicas para eliminação de ruído em processo específico;
- Integração de Processadores Digitais de Sinais DSP (*Digital Signal Processing*) para implementação de técnicas de wavelet *Thresholding* em imagens estáticas objetivando uma aplicação dedicada;
- Implementação de outras regras de *thresholding* para avaliar sua eficiência e compará-las com as que foram mostradas aqui.
- Desenvolvimento de análises para outros tipos de ruído, buscando verificar a robustez dos métodos analisados, dentre outros.
- Estendendo um pouco a linha de pesquisa deste trabalho, tem-se a idéia de implementar técnicas de compressão de imagens digitais utilizando a Transformada Wavelet, verificando a eficiência da análise wavelet neste processo.



## REFERÊNCIAS

- ADHEMAR, B. **Wavelets with applications in Signal and Image Processing**. 2003.
- BHUIYAN, M. I. H.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S. **A New Method for Denoising of Images in the Dual Tree Complex Wavelet Domain**. IEEE Transaction, 2006.
- BRUNI, V.; VITULANO, D. **Wiener Filter Improvement Combining Wavelet Domains**. Proceedings of the 12th International Conference on Image Analysis and Processing (ICIAP'03), 2003.
- BURRUS, C. S. A.; GOPINATH, R. A.; GUO, H. **Introduction to Wavelet and Wavelet Transform**. Prentice Hall, 1998.
- CAI, T. T.; SILVERMAN, B. W. **Incorporating information on neighbouring coefficients into wavelet estimation**. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, v. 63, 2001.
- CASTAÑÓN, C. A. B. **Recuperação de Imagens por Conteúdo Através da Análise Multirresolução por Wavelets**. Instituto de Ciências Exatas e Computação - USP São Carlos, 2003.
- CASTLEMAN, K. R. **Digital Image Processing**. Editora Prentice-Hall Signal Processing Series, 1979.
- CHANDRA, D. V. S. **Image enhancement and noise reduction using wavelet transform**. IEEE Transactions on Circuits and Systems. Proceedings of the 40th Midwest Symposium on Circuit and Systems, 1997.
- CHANG, S. G.; YU, B.; VETTERLI, M. **Adaptive Wavelet Thresholding for Image Denoising and Compression**. IEEE Transactions on Image Processing, v. 9, 2000.
- CHEN, G. Y.; BUI, T. D. **Multiwavelet Denoising using Neighbouring Coefficients**. IEEE Signal Processing Letters, v. 10, July 2003.
- CHEN, G. Y.; BUI, T. D.; KRZYŻAK, A. **Image Denoising using Neighbouring Wavelets Coefficients**. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. (ICASSP '04), v. 2, 2004.
- CHENG, H. et al. **Image Denoising using Wavelets Support Vector Regression**. IEEE Transactions, Proceedings of the Third International Conference on Image and Graphics., 2004.
- CHOI, H.; BARANIUK, R. **Analysis of Wavelet - Domain Wiener Filters**. Proceedings of the IEEE - SP International Symposium on Time-Frequency and Time-scale Analysis, 1998.
- COIFMAN, R. R.; DONOHO, D. L. **Translation Invariant Denoising in: Wavelets and Statistical**. Springer Lecture Notes in Statistic , v. 103, 1994.

COOLEY, J. W.; LEWIS, P. A. W.; WELCH, P. D. **The Fast Fourier Transform and its Application**. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, E12, 1969.

COOLEY, J. W.; LEWIS, P. A. W.; WELCH, P. D. **Application of the Fast Fourier Transform to Computation of Fourier Integrals, Fourier Series, and Convolution Integrals**. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, RBE9, 1976.

COOLEY, J. W.; LEWIS, P. A. W.; WELCH, P. D. **Historical Notes on the Fast Fourier Transform**. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, AU15, 1976.

CUPERTINO, P. **Wavelets: uma introdução**. Sociedade Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro, Brasil, v. 33, 2002.

DAUBECHIES, I. **The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis**. IEEE Transactions on Information Theory, v. 36, 1990.

DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelet**. CBMS-NSF Regional Conference Series on Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.

DENGWEN, Z.; WENGANG, C. **Image Denoising with an Optimal Threshold and Neighbouring Window**. Pattern Recognition Letters, n. 29, 2008.

DINEIZ, R. S. P.; SILVA, B. A. E.; NETTO, L. S. **Processamento Digital de Sinais - Projeto e Análise de Sistemas**. Editora Bookman, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.

DONOHOO, D. L.; JONHSTONE, I. M. **Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage**. Biometrika, v. 81, 1994.

DONOHOO, D.L. **De-noising by Soft-Thresholding**. IEEE Transactions on Information Theory, v. 41, 1995.

FARIA, R. R. A. **Aplicação de Wavelets na Análise de Gestos Musicais em Timbre de Instrumentos Acústicos Tradicionais**. Mestrado da Escola Politécnica do Estado de São Paulo, 1997.

FERNANDES, C. A. F.; SPAENDONCK, R. L. C.; BURRUS, C. S. **Multidimensional, Mapping-Based Complex Wavelet Transform**. IEEE Transaction on Image Processing, v. 14, 2005.

FODOR, I. K.; KAMATH, C. **On Denoising Images Using Wavelet-Based Statistical Techniques**. Center for Applied Scientific Computing Lawrence Livermore national Laboratory. Livermore, CA., 1996.

FRAZIER, M. W. **An Introduction Wavelets Trough Linear Algebra**. Editora Springer-Verlang, New York, United States, 1999.

GHAEL, S.; SAYEED, A.; BARANIUK, R. **Improvement Wavelet Denoising Via Empirical Wiener Filtering**. SPIE Technical Conference on Wavelet Applications in Signal Processing, 1997.

GONZALES, R. C.; WOODS, R. E. **Processamento Digital de Imagens**. Editora Edgard Bluncher, São Paulo, Brasil, 2000.

- GOSWANI, J.C.; CHAN, A. K. **Fundamentals of Wavelets - Theory, Algorithms and Applications**. A Wiley-Interscience Publication, 1999.
- GUAN, L.; WARD, R. K. **Restoration of Randomly Blurred Image by the Wiener Filter**. IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing, v. 37, 1989.
- HAYKIN, S.; VEEN, B. V. **Sinais e Sistemas**. Editora Bookman, 2000.
- HUBBARD, B. B. **The World According to Wavelet: The History of a Mathematical Technique in the Masking**. Wellesley, Massachusetts, second edition, 1998.
- KINGSBURY, N.G. **Complex Wavelets for Shift Invariant Analysis and Filtering of Signals**. Journal of Application and Computer Harmonic Analysis, v. 10, p. 234–253, 2001.
- MALLAT, S. **A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation**. IEEE Transactions on Information Theory, v. 7, 1989.
- MALLAT, S.; HWANG, L. W. **Singularity Detection and Processing with Wavelets**. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, v. 38, 1992.
- MEDINA, C.A.; ALCAIM, A.; APOLINÁRIO, J.A. **Wavelet denoising of speech using neural networks for threshold selection**. Electronics Letters, v. 39, n. 25, 2003.
- MEYER, Y. **Wavelets: Algorithms and Applications**. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, first edition, 1993.
- MURESAN, D. D.; PARKS, T. W. **Adaptive Principal Components and Image Denoising**. IEEE Transactions on Information Theory, 2003.
- OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W. **Discrete-time Signal Processing**. Prentice Hall, 1989.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. **Probability, random variables, and stochastic processes**. McGraw-Hill, New York, 4th ed., 2002.
- PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R. **Análise de Imagens Digitais. Principios, Algoritmos e Aplicações**. Editora Thomson, Segunda Edição, São Paulo, Brasil, 2008.
- PORTILLA, J.; SIMONCELLI, E. P. **Image Denoising via Adjustment of Wavelet Coefficient Magnitude Correlation**. International Conference on Image Processing, 2000.
- RAO, R. M.; BOPARDIKAR, A. S. **Wavelet Transform: Introduction to Theory and Applications**. Editora Addison Wesley Longman, New York, United States, 1998.
- RIOUL, O.; DUHAMEL, P. **Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms**. IEEE Transactions on Information Theory, v. 38, 1992.
- ROSILES, J. G.; SMITH, M. J. T. **Image Denoising using Direcional Filter Banks**. IEEE Transactions on Image Processing, v. 3, 2000.
- SANTOS, L. M. R. **Segmentação da Fala Utilizando Transformadas Wavelets Discreta - DWT**. Universidade Luterana no Brasil - ULBRA, 2004.
- SELESNICK, I.W.; BARANIUK, R.G.; KINGSBURY, N.G. **The Dual-Tree Complex Wavelet Transform**. IEEE Signal Processing, p. 123–151, 2005.

STEFANO, A. D.; COLLIS, W. B. **An Innovative approach for spatial video noise reduction using a wavelet based frequency decomposition.** IEEE Transactions on Image Processing, v. 3, 2000.

STRICKLAND, R. N.; HAHN, H. I. **Wavelet Transform Methods for Object Detection and Recovery.** IEEE Transactions on Image Processing, v. 6, 1997.

THE MATHWORKS, Inc. **MatLab - Versão 6.5.** 2006.

VAPNICK, V. **The Nature of Statistical Learning Theory.** Springer-Verlang, New York, 1995.

VLADIMIR, P. I.; PROGEBNIAK, A. B. **Adaptive Wiener Filter Implementation for Image Processing.** MMET'9 Proceedings, 1996.

ZHONG, S.,; CHERKASSKY,. **Image denoising using wavelet thresholding and model selection.** IEEE Transactions on Image Processing. International Conference on Image Processing, 2000.