

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

**MOBILIZAÇÃO DAS FORMAS DE PENSAMENTO
MATEMÁTICO NO ESTUDO DE TRANSFORMAÇÕES
GEOMÉTRICAS NO PLANO**

Maria Auxiliadora Lage

Belo Horizonte

2008

Maria Auxiliadora Lage

**MOBILIZAÇÃO DAS FORMAS DE PENSAMENTO
MATEMÁTICO NO ESTUDO DE TRANSFORMAÇÕES
GEOMÉTRICAS NO PLANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Dra. Maria Clara Rezende Frota

**Belo Horizonte
2008**

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

L174m Lage, Maria Auxiliadora
Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano. Maria Auxiliadora Lage. Belo Horizonte, 2008.
171f. : Il.

Orientadora: Maria Clara Rezende Frota
Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Pensamento criativo. 3. Pesquisa matemática. 4. Transformações (Matemática). 5. Geometria plana. I. Frota, Maria Clara Rezende. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 51:37

BANCA EXAMINADORA

Maria Clara Rezende Frota (Orientadora) – PUCMinas

Lílian Nasser – UFRJ

João Bosco Laudares – PUCMinas

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, José Lage (em memória) e Amerquina.
As minhas filhas, Débora, Júlia e Priscila.

AGRADECIMENTOS

Com carinho, agradeço às pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Em especial:

A Deus, por ter-me carregado em seus braços em vários momentos difíceis durante a caminhada deste trabalho.

As minhas filhas, pelo apoio e compreensão durante a elaboração deste trabalho.

A minha família, pelo apoio em todos os momentos de minha vida.

À professora Doutora Maria Clara Rezende Frota, pelo carinho, amizade, paciência, incentivo, entusiasmo, disponibilidade, sugestões e revisões que tornaram possível a realização deste e de outros trabalhos.

Ao professor Doutor João Bosco Laudares, pela contribuição dada a este trabalho e incentivo ao primeiro trabalho publicado no Encontro de Educação Matemática.

À professora Doutora Lílian Nasser, pelas contribuições e pela participação na banca deste trabalho.

A todos os professores da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, pela convivência enriquecedora.

Aos colegas do Mestrado Profissional, pelo carinho, amizade e espírito de luta.

A Ângela, secretária do Mestrado, pelo carinho e pronto atendimento.

À Fundação Comunitária de Ensino Superior de Itabira, por possibilitar a realização do curso.

Aos colegas da FUNCESI, pela força, incentivo e compreensão durante todo o curso.

Aos meus alunos da Licenciatura de Matemática, pelo carinho, companheirismo durante esta caminhada.

A Fernanda e Gláucia, pelo carinho, amizade, paciência e pelas contribuições a este trabalho.

Aos meus colegas e alunos do Colégio Einstein, pela amizade e apoio durante este curso.

E aos alunos e professores participantes desta pesquisa, pela colaboração e respeito.

Toda a arte de ensinar é apenas a arte de acordar a curiosidade natural nas mentes jovens, com o propósito de ser satisfeita mais tarde.
Anatole France

RESUMO

Com esta pesquisa, pretendemos investigar as possibilidades de mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de Transformações Geométricas no Plano. O estudo se fundamentou nos hábitos de pensamento matemático, que são modos de pensar que contribuem para desenvolver as capacidades de raciocinar, testar, experimentar, procurar relações, descobrir, comunicar e nas atividades investigativas, que incentivam a curiosidade, o interesse e a perseverança dos alunos por meio da cultura da exploração e investigação matemática. Foi desenvolvido um trabalho empírico, envolvendo três grupos de estudantes de diferentes níveis de escolaridade, trabalhando em um ambiente computacional, utilizando o *software* GeoGebra. Foi aplicada uma sequência de atividades, em forma de descoberta guiada, focalizando habilidades matemáticas de: visualizar; descobrir e inventar coisas; descrever, formal e informalmente, relações e processos; pensar, montando e desmontando idéias; fazer conjecturas; comunicar as idéias. O conjunto de dados para análise constituiu de arquivos de construções, contendo registros escritos relativos às tarefas propostas, produzidos pelos alunos, protocolos de observação produzidos pela pesquisadora e vídeo. A análise dos dados foi feita, buscando identificar as formas de pensamento algébrico e geométrico mobilizadas pelos alunos durante a realização das atividades. Os resultados mostram que os alunos se envolveram nas experimentações, mobilizaram formas de pensamento matemático como: visualizar, detectar invariâncias, fazer experiências e explorações, pensar e inventar idéias, fazer conjecturas e, sobretudo, comunicar oralmente as descobertas, mas apresentaram dificuldades quando do registro escrito e formalização dessas. Os resultados sinalizam potencialidades das atividades investigativas e do ambiente informatizado adotado, no sentido de promover a articulação entre as formas de raciocínio algébrico e geométrico, contribuindo para o estudo das Transformações Geométricas no Plano.

Palavras-chave: Hábitos de Pensamento Matemático, Investigação Matemática, Transformações Geométricas no Plano.

ABSTRACT

In this research we intended to investigate the mobilization possibilities of mathematical thought ways in study of Geometric Transformations in the Plan. This study is based in habits of mathematical thought, which are modes of thinking that contributes to develop capabilities of ratiocinating, testing, experimenting, seek relationships, discovering, communicating and, of investigative activities, which incentives curiosity, the interest and students' perseverance through culture of exploration and mathematical investigation. An empiric work was developed involving three groups of students, of different education levels working, in a computational atmosphere, using the GeoGebra software. A sequence of activities was applied, in form of guided discovery, focusing mathematical abilities: to visualize; to discover and to invent things; to describe, formal and informally, relationships and processes; to think, setting up and disassembling ideas; to do conjectures; to communicate ideas. Data for analysis is constituted for files of constructions containing written registrations relative to the proposed tasks, produced by the students, the observation protocols produced by the researcher and video. Data analysis was made trying to identify ways of algebraic and geometric thought mobilized by students during the activities accomplishment. Main results show that students were involved in the experimentations, mobilizing forms of mathematical thought as: to visualize, to detect invariances, to make experiences and explorations, to think and to invent ideas, to do conjectures and, above all, to make oral communication of the discoveries. But they presented difficulties to make written registries and to formalize them. Results indicate potentialities of investigative activities and of adopted computerized atmosphere, towards to promote articulation between ways of algebraic and geometric forms, contributing to the study of Geometrical Transformation in the Plan.

Key words: Habits of Mathematical thought, Mathematical Investigation, Geometric Transformations in the Plan.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- PONTO SIMÉTRICO EM RELAÇÃO A UMA RETA	27
FIGURA 2 - GRÁFICO DE E COMBINAÇÕES DE TRANSLAÇÕES	29
FIGURA 3 – SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO HORIZONTAL	47
FIGURA 4 – SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO VERTICAL	47
FIGURA 5 – SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO HORIZONTAL E VERTICAL COMBINADAS	48
FIGURA 6 – SIMETRIA DE ROTAÇÃO	49
FIGURA 7 – SIMETRIA DE ROTAÇÃO DE POLÍGONOS POR UM ÂNGULO DE AMPLITUDES DE 90°, 180° E 270°	50
FIGURA 8 – SIMETRIA DE ROTAÇÃO E CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRICAS PASSANDO PELOS VÉRTICES DOS POLÍGONOS	50
FIGURA 9 – SIMETRIA DE ROTAÇÃO E POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NAS CIRCUNFERÊNCIAS	51
FIGURA 10 – ROTAÇÃO POR UM ÂNGULO DE UM PONTO P EM RELAÇÃO A ORIGEM DOS EIXOS CARTESIANOS	52
FIGURA 11 – SIMETRIA DE REFLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO X	54
FIGURA 12 – SIMETRIA DE REFLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO Y	54
FIGURA 13 – REFLEXÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA RETA.....	56
FIGURA 14 – SIMETRIA DE REFLEXÃO COM DESLIZAMENTO	59
FIGURA 15 –TRANSFORMAÇÃO POR HOMOTETIA PARA E.....	60
FIGURA 16 –TRANSFORMAÇÃO POR HOMOTETIA PARA E.....	60
FIGURA 17 –TRANSFORMAÇÃO POR HOMOTETIA	61
FIGURA 18 – TRIÂNGULOS SEMELHANTES DE RAZÃO K – RAZÃO ENTRE AS ÁREAS	62
FIGURA 19 – TRANSLAÇÃO VERTICAL DA FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU ..	66
FIGURA 20 - TRANSLAÇÃO VERTICAL DA FUNÇÃO POLINOMIAL DE 2º GRAU ..	67
FIGURA 21 - TRANSLAÇÃO HORIZONTAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	69
FIGURA 22 –COMBINAÇÃO DE TRANSLAÇÕES NA FUNÇÃO QUADRÁTICA.	70
FIGURA 23- COMBINAÇÃO DE TRANSLAÇÕES DA FUNÇÃO	71
FIGURA 24 –REFLEXÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA EM RELAÇÃO AO EIXO X... 73	
FIGURA 25 – REFLEXÃO DA FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU EM TORNO DO EIXO Y	74
FIGURA 26 – REFLEXÃO DA FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU EM RELAÇÃO A RETA Y=X.....	75
FIGURA 27 – 1ª CONSTRUÇÃO – D 1 - ENSINO MÉDIO	97
FIGURA 28 – 1ª CONSTRUÇÃO – D 12 - ENSINO MÉDIO	97
FIGURA 29 – 1ª CONSTRUÇÃO – D 3 - LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	99
FIGURA 30 – 1ª CONSTRUÇÃO – D 5 – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	100
FIGURA 31 – 1ª CONSTRUÇÃO – D 8 – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	101
FIGURA 32 – 1ª CONSTRUÇÃO – D 8 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	102
FIGURA 33 – 1ª CONSTRUÇÃO – D 6 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	103
FIGURA 34 – 2ª CONSTRUÇÃO – D 3 - ENSINO MÉDIO	104
FIGURA 35 – 2ª CONSTRUÇÃO – D 6 - ENSINO MÉDIO	105
FIGURA 36 – 2ª CONSTRUÇÃO – D 3 – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	106
FIGURA 37 – 2ª CONSTRUÇÃO – JORGE – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA....	107
FIGURA 38 – 2ª CONSTRUÇÃO – D 2 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	108
FIGURA 39 – 3ª CONSTRUÇÃO – D 3 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	109

FIGURA 40 – 1ª CONSTRUÇÃO – D 1 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	110
FIGURA 41 – 3ª CONSTRUÇÃO – D 3 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CONCLUÍDA PELA PROFESSORA/PESQUISADORA	111
FIGURA 42 – CONSTRUÇÃO CONJECTURA DA D 8 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	112
FIGURA 43 – REPRODUÇÃO DA CONSTRUÇÃO DO PROFESSOR – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	113
FIGURA 44 – 4ª CONSTRUÇÃO – D 1 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	115
FIGURA 45 – 4ª CONSTRUÇÃO – D 2 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	116
FIGURA 46 – 4ª CONSTRUÇÃO – D 5 – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	117
FIGURA 47 – 3ª CONSTRUÇÃO – D 3 - ENSINO MÉDIO	119
FIGURA 48 – 3ª CONSTRUÇÃO – D 3 – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	120
FIGURA 49 – 3ª CONSTRUÇÃO – D 6 – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	120
FIGURA 50 – 4ª CONSTRUÇÃO – D 3 - ENSINO MÉDIO	122
FIGURA 51 – 4ª CONSTRUÇÃO – D 6 - ENSINO MÉDIO	122
FIGURA 52 – 4ª CONSTRUÇÃO – D 8 - ENSINO MÉDIO	123
FIGURA 53 – 4ª CONSTRUÇÃO – D 10 – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	124
FIGURA 54 – 5ª CONSTRUÇÃO – D 3 - ENSINO MÉDIO	126
FIGURA 55 – 5ª CONSTRUÇÃO – D 8 - ENSINO MÉDIO	127
FIGURA 56 – CONSTRUÇÃO BASEADO EM CONJECTURAS – D 3 - ENSINO MÉDIO	128
FIGURA 57 – 6ª CONSTRUÇÃO – D 3 - ENSINO MÉDIO	129
FIGURA 58 – 6ª CONSTRUÇÃO – D 8 - ENSINO MÉDIO	129
FIGURA 59 – 6ª CONSTRUÇÃO – D 9 - ENSINO MÉDIO	130
FIGURA 60 – 6ª CONSTRUÇÃO – D 6 - ENSINO MÉDIO	131

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 – IMAGENS DAS FUNÇÕES NA TRANSLAÇÃO HORIZONTAL NA FUNÇÃO QUADRÁTICA	68
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
2 HÁBITOS DE PENSAMENTO E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	17
2.1 Hábitos de Pensamento Matemático.....	17
2.2 Caracterização dos Hábitos de Pensamento Matemático	19
2.3 Hábitos Gerais de Pensamento Matemático	20
2.4 Abordagens próprias dos matemáticos	27
2.5 Hábitos Particulares do Pensamento Matemático	32
2.6 Formas de Pensar na Geometria	32
2.7 Formas de Pensar na Álgebra	33
3. Atividades Investigativas no Desenvolvimento dos Hábitos de Pensamento	35
3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO	41
3.1 As Transformações Geométricas no Currículo de Matemática.....	41
3.2. Transformações Geométricas no Plano	43
3.2.1 Isometria de Translação.....	46
3.2.2 Isometria de Rotação	49
3.2.3 Isometria de Reflexão.....	53
3.2.4 Isometria de Reflexão com Deslizamento	58
3.2.5 Homotetia	59
3.3 Funções e Transformações	63
3.3.1 Translação vertical nas funções.....	65
3.3.2 Translação horizontal nas funções.....	67
3.3.3 Combinação de translações nas funções.....	69
3.3.4 Reflexão nas funções	72
4 O PERCURSO DA PESQUISA.....	76
4.1 A pesquisa	76
4.2 Fases da pesquisa.....	78
4.3 Instrumentos para a coleta de dados	79
4.4 <i>Opção pelo Software</i>	80
4.5 Descrição das atividades.....	83
4.5.1 Atividades do Grupo 1 – Isometria ou Simetria de Reflexão e Translação	83
4.5.2 Atividades do Grupo 2 – Isometria ou Simetria de Rotação e Homotetia	87
4.5.3 Atividades do Grupo 3 - Translação vertical nas funções lineares e quadráticas.....	89
4.5.4 Atividades do Grupo 4 - Reflexão e translação horizontal combinadas nas funções polinomiais de primeiro e segundo grau.....	91
4.6 Critérios de análise dos resultados.....	93
5 FORMAS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO MOBILIZADAS PELOS ALUNOS	95
5.1 Formas de pensamento mobilizadas no desenvolvimento das Atividades do Grupo 1.....	95
5.2 Formas de pensamento mobilizadas no desenvolvimento das Atividades do Grupo 2....	108
5.3 Formas de pensamento mobilizadas no desenvolvimento das Atividades do Grupo 3....	117
5.4 Formas de pensamento mobilizadas no desenvolvimento das Atividades do Grupo 4..	125
5.5 Síntese comparativa dos resultados	131
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	134

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	137
----------------------------------	-----

APÊNDICE A – INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS TRANSFORMAÇÕES

GEOMÉTRICAS NO PLANO: uma abordagem a partir da mobilização das formas de pensamento matemático

pensamento matemático	141
INTRODUÇÃO.....	142
1. FORMAS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO	144
2. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: orientações metodológicas	147
3. ATIVIDADES PROPOSTAS	148
3.1 Primeira Parte: Trabalho com polígonos	150
3.1.1 Atividades do Grupo 1 – Isometrias.....	150
4.1.2 Atividades do Grupo 2 – Homotetia no Plano.....	154
3.2 Segunda Parte: Trabalho com funções	155
3.2.1 Atividades do Grupo 3 – Construções envolvendo funções lineares e quadráticas	155
3.2.2 Atividades do Grupo 4 – Isometrias nas funções polinomiais	162
3.3 Atividades de dedução.....	163
3.4 Atividades Complementares.....	166
4. REFLEXÃO A RESPEITO DOS RECURSOS COMPUTACIONAIS	169
REFERÊNCIAS	171

1 INTRODUÇÃO

A influência do professor sobre o pensamento matemático dos alunos é grande e pode enriquecer ou enfraquecer esse mesmo pensamento, consoante as experiências que lhes proporcionar (Fonseca, 2000).

Quando iniciei o mestrado, tinha comigo várias inquietações e a certeza de que gostaria de pesquisar algum tema que permitisse a conexão entre a Álgebra e a Geometria, pois, essa é a forma como desenvolvo o meu trabalho em sala de aula.

Os livros didáticos geralmente apresentam a organização dos conteúdos matemáticos de forma linear, “como se os conteúdos se articulassem na forma de uma corrente, cada conteúdo sendo pré-requisito para o que vai sucedê-lo”.(BRASIL, 1998, p.22). Minha experiência docente mostra que, privilegiando essa forma linear, alguns conteúdos, principalmente aqueles que estão no final do livro, em geral, não são vistos; entre eles, a Geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, 1999) propõem a articulação entre os conteúdos como forma de o aluno consolidar e ampliar os conhecimentos. Dessa maneira, ao propor um conteúdo relacionado com Geometria, outras interligações com a álgebra, a aritmética e outras áreas do conhecimento podem ser conectadas, como se juntos formassem uma rede (PIRES, 2000).

A Geometria é um campo fértil para que o aluno aprenda a observar, identificar padrões e regularidades, perceber semelhanças e diferenças. A Álgebra oferece oportunidade para que o aluno estabeleça relações entre grandezas e medidas, generalizar padrões aritméticos e geométricos, criar modelos, regras de resolução de equações e para a exploração da idéia de função. A articulação entre esses blocos de conteúdos pode possibilitar ao aluno compreensão e ampliação de seus conhecimentos matemáticos. Assim, as orientações curriculares nacionais aconselham:

[...] o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas (BRASIL, 1998, 57)

Ao longo de minha docência, como professora do ensino médio, percebi que os alunos têm dificuldades em estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos como, por exemplo, uma relação entre o número de vértices de um polígono e a medida do ângulo interno desse polígono; estabelecer a lei matemática, traçar uma representação geométrica de

função a partir de uma situação-problema. Para uma parcela significativa de alunos, a aprendizagem matemática é momentânea, mecânica e, às vezes, traumatizante..

Atualmente, trabalhando com alunos da graduação nas disciplinas de Matemática Instrumental e Cálculo Diferencial e Integral, deparo-me com alunos que não se recordam das fórmulas de área das principais figuras planas, de como calcular o volume de sólidos geométricos elementares, estabelecer a relação do gráfico de uma função e a correspondente equação. Têm dificuldade em manipular uma calculadora científica, construir gráficos, perceber a regularidade para se realizarem mudanças de unidades de medidas, perceber mudanças que ocorrem nos gráficos de funções quando se soma uma constante àquela função.

Nesse ponto me questiono: no ensino fundamental esses alunos não desenvolveram formas de pensamento matemático como a busca de padrões e invariantes, visualização, experimentação que pudessem contribuir para uma aprendizagem mais duradoura? Para compreender uma situação, eles exploram os dados, procuram estabelecer conexões dentro da própria Matemática?

Consciente de que o estudo de funções é extremamente importante devido a sua aplicação dentro da matemática no estudo das Progressões Aritméticas e Geométricas, estudo de Polinômios, Geometria Analítica e no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, como em outras áreas do conhecimento, senti necessidade de pesquisar estratégias para facilitar a compreensão do tema, buscando estabelecer relações entre o raciocínio algébrico e o geométrico, na tentativa de promover uma melhor compreensão dos conceitos para o aluno.

Durante os estudos das disciplinas do mestrado, entrei em contato com propostas para o ensino de Matemática como a de uma abordagem de investigação Matemática e leituras sobre a importância dos hábitos de pensamento matemático e o uso de tecnologias de informação. Aprofundando as leituras sobre os temas, pude perceber que, para desenvolver formas de pensamento matemático que irão contribuir para a compreensão dos conteúdos estudados, o aluno precisa se envolver numa cultura de exploração e investigação, visualizando, conjecturando, buscando variantes e invariantes, comunicando suas idéias, discutindo e sistematizando as idéias envolvidas na questão. Percebi, ainda, que a união da investigação matemática e o uso de recursos computacionais poderia permitir ao aluno explorar, descobrir os conceitos e propriedades dos conteúdos matemáticos de forma mais dinâmica e motivadora.

O trabalho desenvolvido pretendeu encontrar possíveis respostas à questão: “Quais as possibilidades de mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas?” O conteúdo matemático “Transformações Geométricas no

Plano” foi assim escolhido pelas possibilidades de explorar as várias formas do pensamento matemático.

Para responder a esse questionamento, o trabalho fundamentou-se em um estudo a respeito dos hábitos de pensamento matemático no sentido proposto por Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) e Goldenberg (1998 a, 1998b), como também nas atividades de investigação matemática (PONTE, 2003). Essa fundamentação é apresentada no **Capítulo 2**.

Para elaboração das atividades aplicadas, foi feito um levantamento de como o conteúdo de transformações geométricas é proposto pelas diretrizes curriculares nacionais, como é abordado pelos autores de livros didáticos da Educação Básica e do Ensino Superior (LIMA, 1996; WAGNER, 1993). Assim, no **Capítulo 3**, enfocamos o estudo das Transformações Geométricas no Plano, abordando os conceitos de isometria ou simetria de translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante, além da homotetia, trabalhando com polígonos e estendendo esses conceitos para o estudo das funções e suas transformações.

No **Capítulo 4**, abordamos a metodologia, caracterizando os três contextos em que a pesquisa foi desenvolvida: Ensino Médio, Licenciatura e Especialização. Descrevemos o conjunto de atividades de investigação matemática empregado na condução da pesquisa e o que esperávamos dos alunos em cada uma delas. Buscamos definir e justificar a escolha do *software* de geometria dinâmica para a articulação entre o pensamento algébrico e geométrico.

No **Capítulo 5**, tratamos da análise de resultados das formas de pensamento evidenciadas pelos alunos ao desenvolverem as atividades propostas. Apresentamos também uma síntese comparativa dos resultados dos três grupos pesquisados.

O **Capítulo 6** apresenta as considerações finais, trazendo algumas reflexões acerca dos resultados da pesquisa, apontando alguns reflexos para a formação de professores e algumas questões importantes para novas investigações sobre modos de desenvolvimento das formas de pensamento matemático.

O **Apêndice** finalmente sintetiza uma proposta de um Curso Introdutório ao Estudo das Transformações Geométricas no Plano em ambiente computacional, utilizando o *software* GeoGebra, como fruto do levantamento bibliográfico efetuado, da pesquisa realizada em sala de aula e de nossa experiência docente na Educação Básica e no Ensino Superior.

2 HÁBITOS DE PENSAMENTO E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

A mente que se abre à nova idéia, nunca volta ao seu tamanho original.
Albert Einstein

Neste capítulo, são apresentados os referenciais teóricos que deram sustentação à pesquisa aqui relatada. Na primeira seção, o foco são os hábitos de pensamento matemático. Buscamos primeiramente caracterizá-los apresentando aqueles considerados hábitos gerais do pensamento matemático e as abordagens gerais dos matemáticos. A seguir, discutimos as formas específicas de lidar com a matemática adotada pelos geômetras e pelos algebristas.

Na segunda seção, abordamos as atividades de investigação matemática que entendemos como instrumento para despertar o prazer da descoberta em matemática e incentivar o desenvolvimento das diversas formas de pensamento matemático. Atividades dessa natureza podem introduzir na sala de aula a cultura da exploração em matemática.

2.1 Hábitos de Pensamento Matemático

Uma discussão acerca dos hábitos de pensamento matemático está interligada a um acordo do que seja Matemática. Vila e Callejo (2006), recuperam as idéias de Santaló ao lembrarem que a Matemática e seu ensino são vistos sob diferentes enfoques, podendo significar coisas distintas para pessoas diferentes.

De um lado, pessoas com pouca formação acadêmica enxergam a Matemática como uma ciência integrada unicamente por cálculos aritméticos comuns, pelos nomes e pela propriedade de algumas figuras geométricas. Para essas pessoas, os hábitos de pensamento resumem-se à incorporação de várias técnicas de cálculo aritmético ou algébrico, entre outros. Com o aparecimento das calculadoras, essa matemática perde grande parte de seu interesse, ou, se cabe conservar esse interesse, seria necessário evitar o uso de novas tecnologias na sala de aula. Por outro lado, pessoas com elevada formação reduzem a atividade matemática à abstração e à manipulação de números e relações funcionais, evitando outros campos e outras atividades. Entretanto, Vila e Callejo (2006) enfatizam que Santaló

descreve-nos minuciosamente sua visão “da atividade matemática ao mesmo tempo como uma técnica, como uma arte, como uma filosofia e como uma ciência” (p15) que se desenvolve cultivando o espírito de pesquisa, de descoberta e de conquista.

E é esse espírito de pesquisa, descoberta e conquista que precisamos levar para a sala de aula e por meio dele cultivar e favorecer o desenvolvimento do pensamento. Vila & Callejo (2006) sugerem que “aprender a pensar” é um dos argumentos mais repetidos ao longo da história para justificar a necessidade de se aprender matemática, embora não seja o único. Esses autores afirmam que a matemática é a matéria mais adequada para exercitar a arte de pensar e que para tentar melhorá-la podemos fazer dos processos de pensamento objeto de aprendizagem, por meio do enfrentamento de situações-problema que podem ser abordadas com as ferramentas que a matemática oferece.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) afirmam que a matemática é fruto da criação humana e “não evoluiu de forma linear e logicamente organizada, desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas” (p.25). Dessa forma, a atividade matemática escolar não deve “olhar para as coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno” (p.56). A aprendizagem deve ser vivenciada, apoiada na ação e na comunicação, permitindo que o aluno explore, reflita, descubra regularidades e propriedades, questione, registre, organize suas idéias, estabeleça conexões lógicas, generalize e abstraia idéias e significados. Assim, o currículo deve ser organizado:

De modo que os alunos desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos e interagir de forma cooperativa com seus pares, na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 1998, p.63)

A formação matemática pretendida pressupõe que os alunos desenvolvam formas de pensamento matemático que se transformem em hábitos de pensamento.

2.2. Caracterização dos Hábitos de Pensamento Matemático

Goldenberg (1998a, 1998b) e Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) apresentam uma proposta de currículo de Matemática com foco nos “hábitos de pensamento”, em estratégias e modos de pensar que contribuem para desenvolver as capacidades de raciocinar, testar, experimentar, procurar relações, descobrir, comunicar, cumprindo com as exigências da sociedade atual. Para Goldenberg, “hábitos de pensamento” são definidos como:

[...] modos de pensar que adquirimos tão bem, tornamos tão naturais e incorporamos tão completamente em nosso repertório que se transformam, por assim dizer, em hábitos mentais – não só somos capazes de os utilizar com facilidade, como é de esperar que o façamos.(GOLDENBERG,1998 a, p.31).

Uma abordagem dos conteúdos matemáticos que favoreça o desenvolvimento de hábitos de pensamento pode possibilitar a integração dos raciocínios geométrico e algébrico e ajudar a entrelaçar muitas áreas do currículo, sem deixar de levar em conta as especificidades de cada uma. O ensino de matemática deve estar centrado na formação desses hábitos mentais que permitem aos estudantes desenvolver um repertório heurístico e técnicas de pesquisas que possam ser aplicadas em outras situações futuras.

Se a matemática é tomada a sério, os conhecimentos matemáticos são adquiridos diretamente e as capacidades de raciocínio são (também) melhoradas, mas quase o contrário: tomando determinadas formas de pensamento a sério e dando-lhes a primeira prioridade entre os princípios necessários para a organização do currículo de Matemática (ou de outra disciplina), as capacidades de raciocínio são adquiridas diretamente e também melhoram os nossos conhecimentos matemáticos. (GOLDENBERG, 1998a, p. 31).

De acordo ainda com Goldenberg (1998a), a matemática é constituída de conteúdos e métodos aos quais precisamos ser fiéis e que integram os "hábitos de pensamento" dos matemáticos. Qualquer conjunto de conteúdos e idéias pode ser organizado de maneiras diferentes, de forma a construir um currículo coerente. Para o autor, o que torna uma determinada organização coerente é ela ter um "enredo", uma mensagem sobre a matemática que é destacada ao longo da exposição das idéias. Conteúdos e destrezas devem ser selecionados e integrar o currículo, mas, acima de tudo, o modo como são selecionados e, em especial, o modo como são organizados, contam histórias da matemática, que são diferentes. Assim: “a matemática não são os conteúdos, mas o raciocínio que descobre, reúne e dá

sentido a esses conteúdos; a matemática é (em parte) um modo de pensar, um conjunto de hábitos de pensamento" (GOLDENBERG, 1998a, p.37).

Hábitos de pensamento exigem aprendizagem sistemática e exercício, caso se pretenda que sejam adquiridos e, portanto, o currículo de matemática deve contemplá-los. Isso poderá contribuir para uma aprendizagem matemática com mais compreensão, permitindo que experiências de diversos ramos dessa ciência sejam interligadas, enfatizando suas questões internas e trazendo para dentro da aula a cultura da exploração matemática (GOLDENBERG, 1998a).

Para Silva et al (1999), o mundo está cada vez mais matematizado e devemos nos preocupar em “desenvolver capacidades gerais para integração e intervenção na sociedade” (p.69).

Todos os cidadãos devem ter acesso a uma formação que, muito para além dos aspectos utilitários da matemática, valorize a compreensão da natureza da matemática, das suas características como modo de pensar e como atividade humana. (SILVA et al, 1999, p.70).

Compreendendo a natureza da matemática, apoderando-nos dos seus métodos, estaremos formando cidadãos numa perspectiva crítica, uma vez que a matemática estudada e aprendida pode se tornar instrumento para explicar e transformar o mundo.

2.3.Hábitos Gerais de Pensamento Matemático

Buscando a formação do cidadão capaz de intervir numa sociedade cada vez mais exigente, Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) destacam os mais importantes modos de pensar em matemática, que devem ser considerados o eixo central na organização de um currículo de Matemática: a tendência a detectar invariâncias; fazer experiências e explorações; descrever, formal e informalmente, relações e processos; pensar e inventar idéias; visualizar; fazer conjecturas e comunicar idéias.

Para os autores, um primeiro hábito que devemos despertar nos estudantes é o de *reconhecer padrões ou invariantes escondidos em uma situação matemática*. E, para ajudar os alunos a criarem esse hábito de pensamento, qualquer conteúdo matemático pode ser explorado.

[...] experiências com padrões fornecem as bases para a compreensão do conceito de função; experiências com números e as suas propriedades fornecem os fundamentos para mais tarde trabalhar com símbolos e expressões algébricas: a aprendizagem destas situações permite aos alunos começar a formar as noções elementares sobre modelação matemática; experiências com atividades que envolvam padrões promovem a capacidade de generalização. (VALE et al, 2004, p.11)

A procura de padrões e de invariantes atua como um conector entre conteúdos e idéias matemáticas, de maneira que os alunos possam descobrir relações, estabelecer leis, fazer generalizações, pensar de forma mais abstrata, desenvolvendo o poder da argumentação.

Fica também a idéia de que associado aos padrões estará, sempre, algo relacionado com o emocional, pois existe a sensação de entusiasmo na descoberta de uma ordem, de uma previsão, da relação funcional que antes estava escondida. (VALE et al, 2004, p.15)

O trabalho envolvendo a busca de padrões e invariantes motiva os alunos e a exploração e a descoberta assumem um papel fundamental em sua aprendizagem. E este é um segundo hábito de pensamento a ser desenvolvido: o de *fazer experiências e explorações*. Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) e Davis e Hersch (1995) enfatizam o papel da experiência e da exploração: quando um estudante enfrenta um problema matemático, deve começar a jogar com as informações, reparar nos seus atributos independentes e fazer ensaios para obter resultados experimentais e observá-los. Os resultados de uma pesquisa podem sugerir conjecturas e ocasionalmente apontar as justificações teóricas para elas.. O professor deve “conceder algum tempo ao aluno, para que ele tome a decisão e se dedique à sua tarefa”, “estimular sua criatividade, incutir-lhe certo desejo de resolver o problema” (POLYA, 1995, p.114)

Quando o currículo está apoiado em tais experiências, fornece as oportunidades necessárias para que idéias importantes sejam exploradas, inventadas e experimentadas, permitindo que os alunos ampliem o leque de idéias e processos matemáticos, consolidem seus conhecimentos e estabeleçam as possíveis conexões entre os conteúdos matemáticos.

Silva et al (1999) apontam que os alunos devem ter oportunidade de se envolverem em “momentos genuínos da atividade matemática” assim como os matemáticos. O uso das tecnologias pode ser uma ferramenta importante nesse processo da construção do conhecimento matemático dos alunos.

[...] o computador constitui hoje uma preciosa ferramenta capaz de apoiar a formulação de conjecturas, o estabelecimento de provas e de aprofundar o conhecimento sobre objetos que ajuda a visualizar. (SILVA ET AL, 1999, p.70)

A *visualização* é o terceiro hábito de pensamento matemático que deve ser privilegiado e diz respeito à capacidade de criar, manipular e “ler” imagens mentais de aspectos comuns da realidade (GOLDENBERG, 1998b). Isso exige interpretar visualmente as informações apresentadas, construindo representações visuais para situações ainda não visuais, por meio de tabelas, diagramas, gráficos, esboços que contribuem para a compreensão do processo. É por meio da visualização que o aluno inicia seu raciocínio. São várias as capacidades de visualização a serem desenvolvidas dentro e fora da matemática, como, por exemplo, traduzir uma informação apresentada verbalmente em informação visual, utilizando desenhos, tabelas e gráficos.

A visualização, [...] é também um instrumento valioso para apoiar os tipos de experiências mentais que orientam os alunos nas investigações matemáticas e os ajuda a construir conexões lógicas e demonstrações. As destrezas que apóiam a visualização têm um preço: o seu desenvolvimento deve constituir uma parte explícita da aprendizagem do estudante. (GOLDENBERG, 1998b, p.37)

Para Costa (2002), a visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência, focadas na percepção e na manipulação de imagens visuais que contribuem para a comunicação e disseminação de idéias, a construção de argumentação e a descrição da dinâmica mental. “Para comunicar as suas imagens, os alunos podem construir modelos, desenhos, figuras e gráficos (usando computador ou não) e usar descrições verbais” (p.265).

Segundo Guzmán (1996), as idéias e conceitos na matemática possuem uma grande riqueza de conteúdos visuais representáveis intuitivamente, geometricamente, cuja utilização é muito benéfica nas tarefas de exploração e de tratamento de conceitos. A visualização tem um papel importante no desenrolar do pensamento matemático, pois é um veículo eficaz de transmissão rápida de idéias, contribuindo para melhorar a compreensão e o trabalho criativo na resolução de problemas.

A visualização aparece assim como algo natural tanto no nascimento do pensamento matemático como no descobrimento de novas relações entre os objetos matemáticos e também, naturalmente, na transmissão e comunicação próprias da ocupação dos matemáticos. (GUZMÁN, 1996, p.3, tradução nossa)¹

¹ La visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.

Como forma de contribuir com a exploração e compreensão das idéias, tanto Guzmán (1996) quanto Costa (2002) afirmam que o trabalho utilizando os *softwares* matemáticos proporciona a capacidade de representações interativas e versáteis que permitem a investigação por meio de um diálogo inteligente dos alunos com a máquina, já que essa pode facilitar a exploração visual e numérica dos temas relativos a diferentes campos da matemática.

Borba e Villarreal (2005) destacam que a abordagem da visualização ultrapassa o simples ato de mostrar uma imagem, pois é uma ferramenta poderosa para o aprofundamento da compreensão matemática, principalmente para atrair a atenção dos estudantes que rejeitam a abordagem algébrica. Ela contribui para o levantamento de conjecturas, refutações e interpretação de soluções, estimula a investigação e a descoberta. Portanto, a visualização atua como uma forma de apoio às explorações matemáticas, contribuindo com as experiências mentais, manipulação de imagens, levantamento de conjecturas e com a comunicação oral e escrita.

O quarto hábito de pensamento a ser desenvolvido é o de *pensar, desmontar idéias, ser inventor*, examinar um sistema já existente e fazer alterações em algum aspecto.

Polya acreditava que existe uma arte da descoberta. Ele acreditava que a capacidade de descobrir e a capacidade de inventar podem ser desenvolvidas através de um ensino habilidoso que alerte os estudantes para os princípios da descoberta e que lhes dê uma oportunidade de praticarem estes princípios. (DAVIS e HERSH, 1995, p.269).

Polya (1985) aponta como objetivo principal de um programa de Matemática, ensinar o aluno a pensar. Afirma que “Matemática não é um esporte para espectadores” (p.13), exigindo que os alunos tenham oportunidades para ação, participação ativa, descoberta e invenção, tornando os conceitos mais compreensivos. É ainda Polya (1987) que sintetiza suas concepções sobre o ato de ensinar, por meio da proposição de dez mandamentos para os professores, dentre os quais destacamos três, porque completam o que Cuoco e seus colaboradores apontam:

- Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo
 - Dê a seus alunos não apenas informação, mas *know-how*, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.
 - Não desvende o segredo de uma vez – deixe os alunos darem palpites antes – deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível. (Polya, 1987, p.5)
-

Fazer conjecturas sobre as situações matemáticas propostas, supondo que alguma coisa é verdadeira com base nas evidências que são apontadas e então investigar acerca de sua veracidade é outro hábito de pensamento matemático que Cuoco e seus colaboradores sugerem ser incorporado ao currículo de Matemática.

Sobre levantar conjecturas, Fonseca explica:

O processo de formular conjecturas pode ser representado por um processo cíclico que compreende a seguinte sequência de fases: formular uma conjectura e acreditar nela aquando seu surgimento; verificar que a conjectura cobre todos os casos conhecidos e exemplos; desconfiar da conjectura, tentando refutá-la encontrando um contra-exemplo ou usá-la para fazer previsões que também podem ser verificadas; compreender por que razão é que a conjectura é verdadeira ou como é que tem de ser modificada. (FONSECA, 2000, p.31)

Na maioria das vezes, é fácil levantar uma conjectura, porém nem sempre é fácil justificá-la e prová-la, o que não pode ser negligenciado, pois uma conjectura pode muitas vezes conduzir a afirmações falsas. Para elaborar conclusões, é importante o registro das afirmativas e justificativas das conjecturas. Esse registro facilita a comunicação e negociação das idéias futuramente.

Assim, à medida que desenvolve os vários hábitos de pensamentos, o aluno deve ser incentivado *a descrever, formal e informalmente, relações e processos*. Descrever é uma etapa importante para compreender, consistindo em: dizer o que significa; inventar a notação; discutir, tentar convencer os colegas que determinado resultado é verdadeiro ou plausível; descrever as evidências, mostrando os cálculos que constituem a prova; escrever resultados, conjecturas, argumentos, perguntas e opiniões sobre a situação em questão. Formular descrições escritas e orais sobre um trabalho favorece a negociação e divulgação das idéias matemáticas. Este tipo de experiência deve ser incorporado à sala de aula como forma de ajudar os alunos a desenvolver capacidades essenciais da comunicação matemática. Uma “boa performance de oralidade é uma das competências exigidas pelo atual mercado de trabalho” (PAIS, 2006, p.44); portanto, devemos evitar a prática voltada para o silêncio e dar mais ênfase ao diálogo nas aulas de matemática.

A descrição formal ou informal irá contribuir para detectar as relações quantitativas, espaciais, hierárquicas ou de inclusão, os processos e conexões lógicas entre idéias. Os alunos devem ter oportunidade não apenas para usar definições, mas também para analisá-las e para criar as suas próprias. Normalmente, nos curso de Licenciatura, em nenhum momento os alunos são chamados a criar uma fórmula, uma notação, a explicar uma definição. Será que,

na condição de alunos ou professores, alguma vez nos foi pedido para que criássemos uma definição?

É preciso refletir sobre o significado dos termos matemáticos usados e ver como o significado é afetado pelo contexto. “A realização de relatórios escritos parece ser uma boa estratégia para os levar (os alunos) a melhorar a sua capacidade de argumentar e justificar os resultados matemáticos obtidos.”(PONTE, 2004, p.29).

Nesse sentido, o computador desempenha um papel importante uma vez que pode modificar as condições de se trabalhar com a argumentação e os registros. A utilização de recursos computacionais permite realizar vários cálculos com muito mais eficiência e rapidez, possibilitando ao aluno se envolver em testes e na verificação de proposições e conjecturas levantadas, para que possa defendê-las oralmente ou por escrito. (PAIS, 2006).

É importante *comunicar as idéias*, explicitando as evidências encontradas. Segundo Fonseca (2000), a comunicação na aula de matemática contribui para que os alunos organizem suas idéias, analisem e avaliem suas estratégias e a de seus colegas, confrontando raciocínios, aprendendo a se expressar matematicamente, estruturando o pensamento e a linguagem.

À medida que os alunos precisam comunicar suas idéias para os outros, sentem a necessidade de se expressar de modo claro e, da mesma forma, ouvindo os colegas, os alunos desenvolvem uma maior compreensão matemática. Essa constatação é apontada nas normas do (NCTM) *National Council of Teachers of Mathematics* (USA, 2000), assim como nos (PCNEM) Parâmetros Curriculares Nacionais de Ensino Médio (BRASIL, 2000). Entre as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, temos aquelas relativas à produção de textos e à discussão de idéias com vistas a produzir argumentos plausíveis e convincentes. Os PCNEM destacam como finalidades do ensino de matemática levar o aluno a:

[...] desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação [...], expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática (BRASIL, 1999, p. 254).

Portanto, é necessário que os professores enfatizem atividades que incentivem os alunos a se expressarem de forma escrita, pois esta dá suporte para a oralidade e ambas contribuem com o desenvolvimento da comunicação.

Para Goldenberg (1998b), focando os modos de pensar matemáticos é possível que os alunos estabeleçam conexões corretas entre as idéias matemáticas, independentemente dos seus interesses particulares.

[...] a incidência central nos hábitos de pensamento fornece alguma coisa mais difícil de esquecer. Porque razão é mais difícil de esquecer? Porque, se os hábitos de pensamento selecionados *são* verdadeiramente tão amplamente úteis como afirmei, então estarão a ser experimentados, exercitados e usados constantemente [...] (GOLDENBERG, 1998b, p.44)

O autor refere-se a sua própria experiência, lidando com o projeto *Connected Geometry*¹, ao relatar que ao realizar testes com alunos, utilizando materiais desse projeto, foi possível perceber que, quando esses trabalhavam, desenvolvendo idéias na aquisição de novos conhecimentos, esqueciam menos e, inclusive, reinventavam essas idéias em novas situações.

A incidência central nos hábitos de pensamento matemático leva a outros hábitos importantes para a aprendizagem humana, como: i) a persistência em resolver um problema; ii) o pensamento flexível na busca de novas informações, argumentos e caminhos para resolver um problema; iii) a criatividade, imaginação e inovação ao enfrentar um novo desafio; iv) a aplicação de conhecimentos ou experiências anteriores em novas situações. (COSTA, KALLICK, 2000).

Se um dos objetivos da educação matemática é fazer com que os alunos aprendam como é que as pessoas descobrem fatos e métodos, os alunos precisam, ao longo do tempo, cultivar a habilidade de descobrir os fatos (CUOCO; GOLDENBERG; MARK, 1996).

Todas essas formas de pensar definem a natureza da atividade matemática que se configura em diferentes abordagens.

¹ *Connected Geometry*:. O projeto discute formas de criar uma cultura matemática baseada na investigação e formas de pensar em geometria. É desenvolvido com financiamento da [National Science Foundation](http://www2.edc.org/mlt/StudentLearning.asp), é publicado pela [Everyday Learning Corporation](http://www2.edc.org/mlt/StudentLearning.asp). Maiores informações podem ser obtidas acessando o site: <http://www2.edc.org/mlt/StudentLearning.asp>

2.4. Abordagens próprias dos matemáticos

Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) destacam que, para o aluno aprender matemática, é necessário que ele atue como um verdadeiro matemático, conhecendo sobre as formas e abordagens próprias dos matemáticos, ou seja, as maneiras como os matemáticos atuam. Esses autores apontam assim algumas formas de atuar dos matemáticos, que discutimos a seguir, buscando exemplificar de acordo com o conteúdo matemático, objeto da pesquisa desenvolvida.

Os matemáticos usam uma *linguagem complexa para transmitir uma idéia simples*. Por exemplo, a definição de Transformação Geométrica no plano, tópico abordado nesta pesquisa é assim apresentada nos textos didáticos:

Uma transformação T no plano Π é uma função $T : \Pi \rightarrow \Pi$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano, chamado sua imagem por T . (LIMA, 1992, p.137)

A idéia da transformação geométrica no plano é simples; cada ponto será associado a um novo ponto no plano a partir de uma regra a ser seguida. Apresentada com todo esse formalismo matemático da definição acima a compreensão da idéia da transformação geométrica pode ser dificultada.

Os matemáticos *falam pouco e pensam muito*; logo, omitem detalhes importantes ao comunicar suas idéias. Vejamos como Lima (1996) apresenta a determinação das coordenadas de um ponto simétrico ao ponto A em relação a uma reta $y = ax$ (Figura 1)

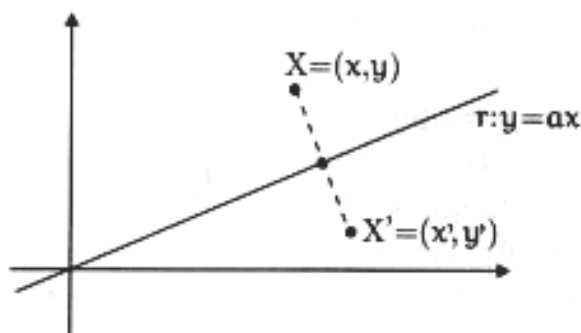


Figura 1- Ponto simétrico em relação a uma reta

Fonte: Lima, 1996, p.44

Começa-se observando que o ponto médio do segmento AA' , cujas coordenadas são $\frac{1}{2}(x+x')$ e $\frac{1}{2}(y+y')$, pertence à reta r , logo $y+y'=a(x+x')$. Em seguida observamos que o segmento de reta AA' , cuja inclinação é $(y'-y)/(x'-x)$, é perpendicular à reta r , cuja inclinação é a . Logo $(y'-y)/(x'-x) = -1/a$. Temos as duas equações

$$\begin{cases} y+y'=a(x+x') \\ y'-y = -\frac{1}{a}(x'-x) \end{cases}, \text{ onde imediatamente as expressões de } x' \text{ e } y' :$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}y \\ y' = \frac{2a}{1+a^2}x - \frac{1-a^2}{1+a^2}y \end{cases}.$$

(LIMA, 1996, p.44)

Podemos observar que várias passagens importantes na dedução da fórmula foram omitidas e, possivelmente, muitos alunos terão dificuldades em compreender como encontrar as coordenadas de um ponto simétrico a outro em relação a uma reta $y=ax$. Chegar, por exemplo, à igualdade $y+y'=a(x+x')$ exige toda uma lógica complexa de perceber o fato de que o ponto médio obtido é ponto da reta e, portanto, satisfaz a equação da reta $y=ax$, ou seja, se substituirmos suas coordenadas na equação da reta, obtemos uma identidade.

Os matemáticos têm o hábito de *buscar semelhanças em situações aparentemente diferentes*, na tentativa de encontrar conexões entre os objetos matemáticos. Como exemplo, podemos citar, o estudo da isometria de translação. A análise dos gráficos da Figura 2 permite identificar diferenças, mas também as semelhanças entre os gráficos, que são obtidos por deslocamentos horizontais ou verticais dos pontos de uma curva dada, numa mesma direção e sentido. Assim, embora aparentemente os gráficos e as representações algébricas sejam distintos, é possível superpor os gráficos, verificando a congruência das funções.

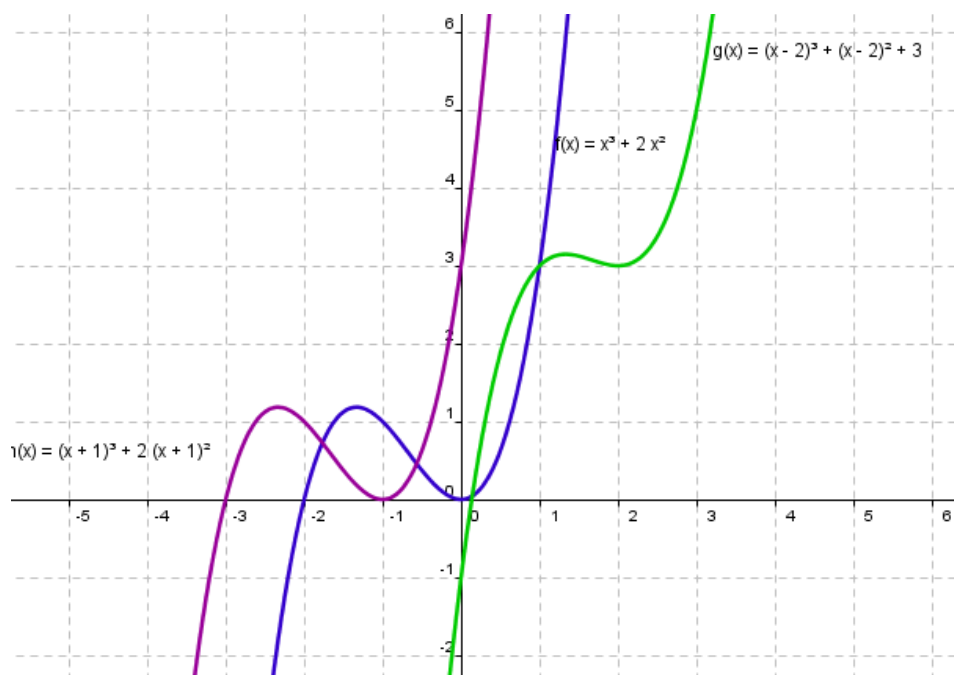


Figura 2 - Gráfico de $y = f(x)$ e combinações de translações

Os matemáticos *usam funções* em muitas situações: para relacionar informações algébricas com informações geométricas; descrever relações de dependência em cálculos; descrever fenômenos físicos; para fazer análise de grupos ou estruturas já conhecidas.

Empregamos funções para modelar situações cotidianas, por exemplo, as que expressam relações de dependência entre quantidades: consumo e tarifas a serem pagas de água, luz, telefone e combustível; transações financeiras; crescimento de bactérias em um meio; variação de temperatura; dosagens de medicamentos, entre muitas outras. O estudo de funções é muito importante dentro da matemática, pois possui um caráter integrador entre conteúdos como: progressões, trigonometria, polinômios, geometria analítica, transformações geométricas e outros.

Os PCN's sugerem que a exploração da idéia de funções seja feita ao longo do 3º e 4º ciclos² e que culmine no 4º ciclo com a introdução das variáveis para representar as relações funcionais na resolução de problemas. Nessas explorações, devem ser abordadas atividades, envolvendo o preenchimento de planilhas e construções de gráficos cartesianos que representem essas relações.

Os matemáticos *usam múltiplos pontos de vista*, pensam sobre um mesmo tema a partir de diversos aspectos, misturando quando possível aritmética, álgebra, geometria e

² De acordo com os PCN's, o 3º ciclo refere-se à 5ª e 6ª série e o 4º ciclo à 7ª e 8ª série da escolaridade. No sistema atual 6º, 7º, 8º e 9º anos.

análise. Essa abordagem é utilizada em grande parte dos livros didáticos que seguem as orientações contidas nos Parâmetros Curriculares como, por exemplo, nos textos:

- **“Matemática aula por aula”** (SILVA e BARRETO FILHO, 2005)
- **“Matemática Contexto de Aplicações”** (DANTE, 2003)

Esses autores exploram o conteúdo de funções por meio de tabelas, gráficos, mapas, diagramas, apresentando diversas situações-problema que podem ser modeladas por meio de funções.

A exploração de um conteúdo matemático sob vários pontos de vista está presente na proposta de organização do Currículo de Matemática em Rede feita por Pires (2000), que afirma que a aprendizagem Matemática deve ser orientada numa perspectiva de resolução de problemas já que essa:

[...] engloba processos como exploração de contexto da situação, a elaboração de novos algoritmos, a criação de modelos, a formulação e a própria criação de novos problemas e não meramente a escolha ou a combinação de algoritmos ou métodos conhecidos. (PIRES, 2000 p.165)

A autora apresenta, por exemplo, uma proposta para a 7ª série a respeito de “Congruência e Equivalência de Áreas” apontando possibilidades para que o tema seja explorado em conexão com vários outros: transformações geométricas, isometrias, congruência de figuras, simetria na arte, nos polígonos e na natureza, estudo de invariantes, estudo de fórmulas de área, equivalência de áreas etc.

Os matemáticos *misturam a dedução e experimentação*, levantando conjecturas, interpretando e registrando suas descobertas em busca de provas para as evidências encontradas. A demonstração ocupa lugar de destaque no ensino de Matemática porque ela estabelece conexões lógicas entre fatos e pressupõe a generalização, a abstração. Para se provar alguma coisa, é necessário experimentar, observar para depois elaborar conclusões. Sabemos que, para chegar à demonstração, o aluno precisa ter apreendido os conceitos matemáticos e desenvolvido a habilidade de registrar formalmente suas argumentações. Esse é um trabalho que exige uma atitude de perseverança, tanto por parte do professor, quanto por parte do aluno, pois é um processo lento que demanda maturidade intelectual.

Os matemáticos *inventam novas linguagens* a partir da busca de resultados que se aplicam em novas situações. É uma via de mão dupla: a linguagem serve como alavanca para a Matemática e a Matemática induz o desenvolvimento de novas linguagens. Muitas invenções matemáticas surgiram dessa forma de abordar as situações. Talvez fosse interessante permitir que nossos alunos vivenciassem a invenção de novas linguagens ao

trabalharem determinado conteúdo para que percorressem o caminho pessoal da descoberta vivenciado pelos matemáticos.

Os matemáticos *refletem sobre um problema durante longos períodos*, fazem cálculos, rabiscam, registram suas idéias, buscando conexões lógicas entre os fatos que muitas vezes produzem inovações. Os professores, muitas vezes, impedem que os alunos ajam dessa forma, entregando os modelos prontos e desvalorizando o esforço, as idéias e o raciocínio deles.. Por sua vez, os alunos querem, quase sempre, aprender rapidamente e, muitas vezes, sem esforço.

Os matemáticos *usam “ladainhas”*, retomando idéias com pequenas alterações, refazem raciocínios, repetem dezenas e até centenas de vezes. Por isso é importante que uma mesma idéia seja retomada e ampliada. Um exemplo que podemos citar é o próprio estudo das transformações geométricas, presente nos livros didáticos de 1ª à 8ª série do ensino fundamental. Os autores utilizam a estratégia de retomar idéias importantes propostas nas séries anteriores, ampliá-las e aprofundá-las, considerando sua importância para que o aluno compreenda os conceitos de congruência, semelhança, gráficos de funções, o ciclo trigonométrico, a geometria das curvas, vetores no plano, entre muitos outros conteúdos.

Em uma análise da coleção **Tudo é Matemática** (DANTE, 2005), percebe-se que o tema ‘transformações geométricas’ é tratado nas séries/anos iniciais do ensino fundamental de forma intuitiva, utilizando o recurso da visualização, abusando das formas. Nas séries/anos³ finais, esses conceitos são retomados, ampliados e aprofundados. Percebemos que, no livro da 5ª série, o autor explora os eixos de simetria de reflexão por meio de figuras geométricas, faixas decorativas, arte, arquitetura e artesanato. No livro da 6ª série, ele retoma a idéia proposta na 5ª série e amplia, explorando a idéia de simetria axial, simetria central e simetria espacial. Na 7ª série, o autor introduz a localização de pontos no plano, explora a reflexão, translação e ampliação de polígonos no plano e aborda os conceitos de congruência e equivalência de perímetro e área. Já na 8ª série, o autor retoma os movimentos rígidos de reflexão e translação e introduz a rotação. Em seguida, propõe o trabalho com as homotetias.

Assim, retomar idéias de forma ampliada, refletir longamente sobre um problema, montando e desmontando idéias, levantar hipóteses, unificar idéias por meio de funções, criar e usar linguagens complexas, buscar padrões, misturando dedução e experimentação, pensando mais do que comunicando idéias são abordagens comuns entre os matemáticos, que se ampliam e diversificam de acordo com as várias subáreas da própria Matemática.

³ Por séries finais do ensino fundamental, referimo-nos à 5ª a 8ª séries, atualmente nomeadas de 6º a 9º ano.

2.5. Hábitos Particulares do Pensamento Matemático

As formas de pensamento matemático são variadas. De modo especial, estamos interessados nas formas e hábitos de pensamento dos geômetras e dos algebristas. O pensamento geométrico é fundamental em todas as ramificações da matemática e, ao longo dos tempos, ofereceu subsídios para várias investigações, pois ele “permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que se vive” (BRASIL, 1988, p.51); a álgebra permite sistematizar e expressar idéias matemáticas tornando possível operar abstratamente e transformar objetos em símbolos matemáticos.

2.6. Formas de Pensar na Geometria

Segundo Cuoco, Goldenberg e Mark (1996), os geômetras usam algumas abordagens específicas para fazer Matemática.

Usam o raciocínio proporcional e sempre iniciam uma investigação geométrica, procurando relações constantes entre as medidas estudadas. Essa idéia é importante para a compreensão, por exemplo, do que ocorre na ampliação e redução de figuras, ou seja, nas homotetias.

Usam várias linguagens, como a vetorial, a analítica e a linguagem algébrica para resolver um mesmo problema, além de linguagens gráficas e computacionais. Em nossa pesquisa, uma das razões pelas quais optamos pelo *software* GeoGebra deve-se ao fato de ele permitir essa multiplicidade de exploração de linguagens, que aponta o hábito matemático de analisar situações sob múltiplos pontos de vista.

Algumas vezes, entretanto, os matemáticos *usam uma mesma linguagem para tudo*. Por exemplo, a linguagem de pontos, retas, ângulos, planos, áreas, volumes é utilizada para descrever fenômenos aparentemente não-geométricos, proporcionando estabelecer conexões entre diferentes ramos da matemática. A linguagem utilizada para descrever as transformações geométricas com polígonos é igualmente usada para o estudo das translações, rotações, reflexões de funções.

Os Geômetras amam sistematizar resultados e nesse ponto pode estar um dos estrangulamentos da aprendizagem matemática, pois a grande maioria de nossos alunos tem dificuldades em sistematizar suas idéias e resultados alcançados, ou ainda, faz generalizações precipitadamente.

Geômetras preocupam-se com as coisas que mudam e com as que não mudam, os variantes e invariantes. O que se altera ou permanece invariante quando fazemos uma translação? Ou quando ampliamos uma figura plana?

As formas são fundamentais para os geômetras, pois são instrumentos para uma boa visualização da situação estudada. Uma boa herança dos geômetras no processo de ensino-aprendizagem de matemática deveria ser o hábito de abusar das formas, das representações gráficas. Retomando a Figura 2, por exemplo, podemos perceber que a forma permanece a mesma uma vez que as funções são congruentes, embora as representações algébricas se alterem, podendo dificultar essa percepção.

2.7. Formas de Pensar na Álgebra

Segundo Cuoco, Goldenberg e Mark (1996), os algebristas têm suas formas preferidas de atuar.

Gostam de um bom cálculo, com números, símbolos abstratos e funções.

Usam a abstração como uma ferramenta natural e poderosa para expressar idéias, obter *insights* e novos resultados. Inicialmente propõem, por exemplo, que sejam observadas as coordenadas dos pontos de um polígono transformado ou que sejam exploradas mudanças nos gráficos das funções e em suas equações. A seguir, propõem a realização de abstrações no sentido de sistematizar idéias, formas e relações de maneira a se tornarem independentes de qualquer representação na forma gráfica.

Algebristas amam algoritmos para resolver operações, equações e problemas matemáticos.

Escrevendo sobre algoritmos, modelos e regularidade, Pais (2006) pontua:

Um algoritmo é um dispositivo lógico, geralmente organizado através de um esquema gráfico, formado por uma sequência ordenada de ações que devem ser rigorosamente seguidas para a solução de um problema, para a realização de uma tarefa ou de uma operação matemática (PAIS, 2006, p.103).

Como esses algoritmos são amplamente utilizados no ensino de matemática, o desafio está em investigar o significado das operações envolvidas neles e a lógica que orienta as etapas, e não apenas memorizar as ações que devem ser efetuadas para se chegar ao resultado.

Temos vários exemplos de algoritmos utilizados na matemática: (i) algoritmo de Euclides para o cálculo do maior divisor comum entre dois números; (ii) algoritmos das operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão de números; (iii) algoritmo da raiz quadrada de um número real; (iv) algoritmo de Briot-Ruffini para efetuar a divisão de polinômios de grau n por um polinômio de 1º grau. Igualmente é possível estabelecer um algoritmo para translação de pontos, polígonos e funções. Cada um dos algoritmos demanda explorações e análises, num sentido de compreendê-lo, conhecendo sua força e aplicabilidade.

Na álgebra é comum dividir as coisas em partes, buscando perceber o que ocorre em casos mais simples, para depois estender para outros casos. Tal fato contribui para o processo da abstração. Por exemplo, para compreender como transladar um gráfico para cima ou para baixo, para a esquerda ou para a direita, os algebristas procuraram perceber o que ocorre se adicionarmos uma constante do lado direito da fórmula da função, $y = f(x)$ e depois o que ocorre se acrescentarmos uma constante à variável x , como no caso: $y = f(x + k)$.

Os algebristas usam o raciocínio por continuidade, estendendo raciocínios utilizados em uma parte da matemática para outra. A proposta de estudo das transformações geométricas atualmente está presente desde a 1ª série do ensino fundamental, de forma que o aluno avance, sempre resgatando e ampliando esses conceitos. Com a idéia de função, a proposta é a mesma: inicialmente propõe-se a generalização de padrões numéricos, depois a exploração de conceitos algébricos de maneira informal, a seguir, por meio de fórmulas, representações gráficas até se chegar à possibilidade de modelar fenômenos variados, sempre retomando e ampliando idéias vistas anteriormente.

Os algebristas representam coisas, usando elementos bem compreendidos de uma estrutura algébrica para entender melhor outra menos conhecida ou relacionar estruturas aparentemente diferentes. Em nossa pesquisa, entendemos que, para compreender as transformações nos gráficos de funções e as correspondentes mudanças algébricas, é importante que o aluno estabeleça conexões do assunto com as isometrias e homotetias no plano, trabalhando, por exemplo, com polígonos.

Se o currículo de matemática for estruturado, tendo como objetivo o desenvolvimento de hábitos mentais, os alunos passam a comparar coisas, a estabelecer relações entre os conjuntos e os objetos, a transformar um objeto em outro, a procurar conexões entre as

estruturas matemáticas, a construir ligações conceituais entre dois ramos da matemática, a perceber as regularidades e invariantes. Eles se tornam, assim, capazes de desenvolver uma compreensão mais profunda das idéias, processos e métodos matemáticos.

Convém ainda destacar que:

A influência do professor sobre o pensamento matemático dos alunos é grande e, pode enriquecer ou enfraquecer esse mesmo pensamento, consoante as experiências que lhes proporcionar (FONSECA, 2000, p.25).

Esse papel do professor é preponderante: grande parte do desenvolvimento de um pensamento flexível, que interliga as abordagens geométrica e algébrica depende do tipo de tarefa e problema que o professor propõe. Se o professor se limita a solicitar que sejam determinadas as coordenadas do ponto médio de um segmento, sem lançar mão de uma representação gráfica, o aluno possivelmente se restringe a decorar o algoritmo de resolução da situação sem compreendê-la.

3. Atividades Investigativas no Desenvolvimento dos Hábitos de Pensamento

Nas orientações curriculares nacionais para o ensino de matemática na escola básica contemporânea, pode-se perceber um deslocamento no foco do ensino, dando-se ênfase nas formas de pensar. A proposta é incluir oportunidades de trabalhos, por meio das quais os alunos observem, experimentem, levantem conjecturas, analisem, busquem conexões dentro da própria matemática e em outras áreas do conhecimento. Pretende-se incluir também o incentivo à curiosidade, o interesse e a perseverança dos alunos. Nesse sentido, os documentos curriculares passaram a dar destaque às atividades investigativas e à resolução de problemas. O ensino de matemática passou a se apoiar na participação ativa do aluno, envolvido em resolução de problemas “de modo a ter uma experiência matemática genuína, semelhante à dos matemáticos” (PONTE, 2004, p.14), na exploração de idéias matemáticas e na comunicação de estratégias de resolução e de resultados obtidos.

Os processos de questionar (inquirição) e de pesquisar (investigação) devem ocupar lugar central no currículo de Matemática como forma de perceber que a Matemática é falível e está em constante evolução. Nessa perspectiva, a descoberta guiada, a resolução de problemas e as atividades investigativas são alguns métodos que integram o que Ernest (1996)

chama de pedagogia da inquirição. Essa pedagogia deve estar centrada na descoberta, redescoberta, melhor dizendo, por parte do aluno, das principais idéias e processos matemáticos. Entendemos essa pedagogia da inquirição como aquela que viabiliza a mobilização das formas de pensamento matemático, que podem se transformar em hábitos de pensamento matemático adquiridos pelo aluno ao longo de sua escolaridade

A inquirição é o ponto de partida para a investigação matemática. Em contextos de ensino, aprendizagem ou formação, investigar significa trabalhar em busca de respostas para questões que se apresentam inicialmente confusas, sobre as quais produzimos conjecturas, testamos, refinamos, justificamos, buscamos provas até validá-las, de modo fundamentado e organizado (PONTE, 2004). Dessa maneira, os alunos podem aprender matemática com compreensão num processo de “pensar matematicamente”.

O aluno é chamado a agir como matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos seus resultados e na sua discussão e argumentação com os colegas e o professor. (PONTE, 2004, p.10)

“A realização de trabalho investigativo possibilita que os alunos façam matemática e se envolvam no pensamento matemático e não apenas que o absorvam” (FONSECA, 2000, p16), pois estarão envolvidos em uma cultura de exploração matemática. Essa exploração matemática irá contribuir para a compreensão e utilização das idéias matemáticas e não apenas para a mecanização de procedimentos, tornando assim o conhecimento algo mais duradouro. As investigações podem desencadear formas de pensar e as formas de pensar, por sua vez, podem gerar investigações.

As atividades investigativas podem atuar como uma poderosa estratégia para contribuir com a “educação matemática de nossos alunos e reeducação de nossos professores” e como possibilidade “para superar o medo da matemática, despertando o prazer da descoberta em matemática, de forma que experimentar e fazer matemática sejam atividades desejadas e naturais na sala de aula de matemática” (FROTA, 2005, p.9)

Para o aluno aprender, é necessário que se envolva em atividades por meio das quais possa descobrir, inventar e investigar. Que ele se envolva num “processo de criação matemática” (SILVA et al, 1999, p.71), tendo a oportunidade de comparar, observar, levantar conjecturas e validá-las, organizar informações, elaborar suas próprias conclusões, discutir e comunicar idéias. Esse fato é enfatizado por Goldenberg quando diz que aos alunos não basta executar técnicas explicadas: “O objetivo propriamente dito é que o aluno aprenda como um

investigador perspicaz e, para isso, tem que fazer investigação” (1999, p.37). As atividades de investigação lidam com o essencial da natureza da atividade matemática:

(i) permitem uma melhor compreensão da natureza dos processos de fazer matemática (experimental/explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, generalizar e demonstrar); (ii) estimulam o pensamento globalizante (relacionando tópicos da matemática); (iii) permitem de forma significativa trabalho diferenciado de alunos com diferentes competências e estilos cognitivos em matemática; podem ser abordadas e desenvolvidas de vários modos e diversos graus de profundidade; (iv) facilitam o desenvolvimento integrado de atitudes, capacidades e conhecimentos. (SILVA, et al, 1999, p.75)

Sendo assim, a utilização de tarefas de investigação matemática é uma estratégia de ação do professor em sala de aula, com o objetivo de proporcionar um ensino mais significativo e despertar a criatividade e o prazer pela descoberta, além de permitir o desenvolvimento e/ou o fortalecimento dos hábitos de pensamento matemático.

O desenvolvimento de Investigações Matemáticas em sala de aula representa um contexto rico e desafiador de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. Para o aluno porque este passa a constituir-se em sujeito de conhecimento, isto é, alguém que sente o prazer de participar da produção/criação das idéias matemáticas. Para o professor porque pode encontrar nas Investigações Matemáticas um modo significativo de ensinar, compreender, trabalhar e estabelecer relação com a Matemática, levando os alunos a se interessarem pelas aulas de álgebra, fato pouco comum, atualmente, em nossas escolas. (FIORENTINI, p.21, 2004)

Porém, ao introduzir as atividades de investigações matemáticas em sala de aula, algumas concepções e crenças a respeito de aula de matemática e do papel do professor podem ser desestabilizadas; afinal somos oriundos de uma educação escolar tradicional segundo a qual o conhecimento é algo pronto e o professor, dono da verdade, repete para seus alunos uma matemática decorada e linear. Tal situação pode levar professores inexperientes ou com menor domínio de conteúdo a evitarem esse tipo de atividade em sala de aula (FROTA, 2005).

O desenvolvimento de investigações matemáticas na sala de aula de matemática exige adaptações tanto do professor quanto do aluno, segundo aponta Goldenberg (1999). Do professor, exige-se estimular o espírito de investigação entre os alunos, o que demanda maiores conhecimentos matemáticos, já que a investigação pode conduzir esses alunos para caminhos matemáticos inesperados e não planejados pelo professor. O mesmo autor aponta que, ao desenvolver uma aula de matemática, o professor tem que considerar as quatro funções da investigação: (i) explorar, no sentido de pôr a mão na massa, ajudar os alunos a

estabelecer intuições e observar o terreno; (ii) descobrir, conduzir os alunos à descoberta de idéias e fatos matemáticos específicos; (iii) discutir ou pôr em questão idéias matemáticas que já tenham sido trabalhadas ou que precisam ser aprofundadas ou ainda que irão gerar conexões lógicas; (iv) ensinar o aluno a investigar. Uma atividade de investigação requer do aluno que aprenda a ser um bom investigador, sabendo que, em certos momentos, é necessário manter alguns pressupostos fixos; em outros, deve-se efetuar alguma mudança, que “os resultados mais interessantes surgem sob a forma de invariantes inesperadas [...]”. Assim “[...] ser um bom investigador implica aprender a ver para além das aparências à procura de conexões lógicas”(GOLDENBERG, 1999, p.47).

É importante que o professor dê tempo aos alunos de pensar, explorar idéias, comunicá-las e confrontá-las com os colegas. Isso demanda tempo para conhecer e dominar a situação, familiarizar-se com os dados, entender o sentido da tarefa. No decorrer da investigação, as várias formas de pensamento matemático vão aflorando: buscar regularidades; fazer experiências e explorações; pensar e inventar idéias; visualizar; fazer conjecturas. e comunicar idéias. Incorporadas à ação matemática dos alunos, essas formas de pensar podem vir a se tornar hábitos de pensamento matemático.

Reafirmamos que, ao explorar uma questão matemática, uma boa estratégia é o registro formal ou informal do trabalho investigado. Para Ponte e colaboradores (2003), “é somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas idéias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações”(p.33).

O registro escrito, que se pede numa investigação, constitui um desafio adicional para alunos, porque exige um tipo de representação que nunca utilizaram. [...] a escrita dos resultados permite ao professor aceder posteriormente ao trabalho dos alunos de forma a analisar o seu desempenho e a planificar as aulas seguintes. Esses elementos são imprescindíveis para o sucesso do momento de discussão do trabalho realizado, quer para os alunos, que assim podem comunicar mais facilmente os seus resultados, quer para o professor que precisa ter um bom conhecimento daquilo que cada grupo faz. (PONTE et al, 2003, p.35).

Pode ser que, no início, os textos sejam curtos apresentando apenas os resultados encontrados, mas à medida que os alunos vão se exercitando na redação, adquirem desenvoltura e experiências. Os relatórios obrigam os alunos a refletirem sobre o trabalho realizado, levando-os a organizar as idéias e aprofundar os aspectos obscuros e ao mesmo tempo contribuem para que o professor recolha informações sobre o nível de objetivos alcançados (PONTE, 2004).

Em pesquisa desenvolvida com alunos de licenciatura de matemática, Frota (2002) concluiu que as dificuldades em redigir um texto matemático “[...] refletem o pouco hábito do aluno de comunicar idéias matemáticas de modo escrito” e, talvez por esse motivo, os alunos fazem “[...] opção por elaborar um texto mais técnico, ou tradicional” (p.9) . Assim, nosso maior desafio é fazer com que nossos alunos produzam textos matemáticos bem estruturados.

Muitas vezes, os alunos apresentam maior facilidade ao colocar suas idéias oralmente, do que registrá-las por escrito. Assim, numa atividade investigativa, a fase da discussão constitui uma etapa extremamente importante, pois, nesse momento, os alunos irão socializar suas descobertas, comunicar suas idéias e utilizar seu poder de argumentação para convencer seus colegas.

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (PONTE et al, 2003, p.41)

O papel do professor é fundamental na organização e condução da discussão dos alunos. Às vezes, é necessário estipular uma ordem de apresentação, garantindo a participação de todos os alunos e evitando repetições de argumentos, o que poderia tornar o trabalho cansativo.

Em termos de estratégias para a ação, uma das orientações dos PCNEM é que:

A seleção das atividades a serem propostas deve garantir espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais. O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender. Nesse sentido, a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos. (PCNEM,1999,p.129)

Portanto, é importante oferecer oportunidades para que o aluno construa idéias a partir de experimentações, que ele possa formular previsões e delinear planos para resolver situações-problema. Igualmente é importante que ele possa explicitar sua forma de pensar, que possa inferir, hesitar, tentar, procurar relações, comunicar seus resultados, o que pode ser favorecido por meio de atividades investigativas, enfatizando os processos matemáticos característicos da atividade matemática.

Abrantes e colaboradores (1999) apontam seis boas razões para a incorporação de atividades de investigação na sala de aula e no currículo de matemática:

1) constituir uma parte fundamental do trabalho em Matemática, promovendo o envolvimento do aluno em processos tais como formular problemas, explorar hipótese, fazer e testar conjectura, generalizar e provar resultados; 2) favorecer o envolvimento do aluno no trabalho da aula; 3) possibilitar o desenvolvimento de alunos com níveis de competência matemática distintos; 4) estimular um pensamento globalizante, que implica que se relacionem vários tópicos; 5) poder ser inseridas em qualquer parte do currículo; 6) e reforçar as aprendizagens mais elementares. Enfim, permitir que o aluno seja inventivo, curioso, inquiridor, explore, pense, organize os dados, reflita, comunique suas idéias, desenvolva a autoconfiança, a autonomia e alguns hábitos de pensamento matemático desejáveis. (ABRANTES et al 1999, p.1)

Entendemos as atividades de investigação como um *locus* propício ao desenvolvimento das diversas formas de pensar matemático que podem se constituir como bons hábitos de pensamento matemático. Em particular nos interessam as possibilidades de interligar as formas de pensar algébrico e geométrico, fato que motivou o desenvolvimento do trabalho, aqui relatado, sobre as Transformações Geométricas no Plano.

3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

*A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos.
Aristóteles*

Neste capítulo, apresentamos uma introdução ao estudo das Transformações Geométricas no Plano, tópico matemático objeto da pesquisa desenvolvida. A primeira seção destaca alguns aspectos nas orientações curriculares relativos ao tema em estudo e sua inserção no Currículo de Matemática. A segunda, aborda as Transformações Geométricas no Plano: as isometrias de translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento e as homotetias. Uma discussão acerca de transformações de funções integra a terceira seção.

Ao longo do texto, optamos por uma revisão das definições das transformações planas, exemplificando os movimentos ocorridos, quando tais transformações são aplicadas a polígonos e depois a funções polinomiais. Os exemplos apresentados foram feitos no GeoGebra, *software* utilizado no desenvolvimento do trabalho empírico e aqui inseridos, ilustrando situações, cujas construções foram propostas aos estudantes que participaram da pesquisa. A apresentação dos vários tópicos é feita, buscando evidenciar aspectos importantes para o ensino-aprendizagem, de modo especial o desenvolvimento das diversas formas de pensamento matemático, interligando o pensamento algébrico e o geométrico. O texto apresentado sintetiza algumas reflexões teórico-metodológicas que a própria professora-pesquisadora desenvolveu acerca das Transformações Geométricas no Plano, buscando estabelecer uma conexão entre a forma como o tópico é abordado em textos didáticos adotados na Licenciatura ou mesmo no Ensino Médio e uma abordagem que permita melhor compreensão do assunto a partir da mobilização das formas de pensar e as estratégias de aprender Matemática.

3.1 As Transformações Geométricas no Currículo de Matemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) enfatizam que a Álgebra “constitui um espaço significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas” (BRASIL, ano.p.115).

Os conceitos geométricos, por sua vez, compõem uma parte importante do Currículo de Matemática, pois, “por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”(p.51).

O documento ressalta, assim, o papel importante da Álgebra e da Geometria no Currículo e, ao se referir ao estudo das transformações geométricas, destaca:

[...] a importância do trabalho com as transformações geométricas (isometrias, homotetias) de modo a permitir o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998,p.51).

O conteúdo de Transformações Geométricas pode atuar como um articulador entre os diversos conteúdos e idéias matemáticas, dando significado à linguagem ao generalizar procedimentos de cálculos. A proposta é que o seu estudo seja feito de forma gradual, desde as séries iniciais do ensino fundamental, de maneira que o aluno vá ampliando e aprofundando seus conhecimentos sobre o tema. A utilização de recursos computacionais pode ser importante e contribuir para que os alunos explorem problemas, envolvendo transformações de maneira mais dinâmica e significativa, testando o que muda e o que não muda ao compararem duas figuras isométricas ou homotéticas.

No 4º ciclo¹, especificamente, os conceitos de congruência e semelhança são abordados e “o estudo das transformações isométricas é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência” e “o estudo das transformações que envolvem ampliação e redução de figuras é um ponto de apoio à construção do conceito de semelhança”(BRASIL, 1998,p.124).

As orientações dos PCNs estão presentes nos atuais livros didáticos, que apresentam uma série de situações que levam o aluno a “brincar” com as figuras e formas geométricas, descobrindo simetrias a partir da construção, por exemplo, de mosaicos e faixas decorativas, ampliando figuras, rotacionando, buscando semelhanças, identificando congruências. De uma forma natural, busca-se introduzir as Transformações Geométricas no Plano que, além de contribuírem para estabelecer conexões com outros conteúdos matemáticos, podem contribuir, também, para o desenvolvimento de diferentes hábitos do pensamento matemático, como a

¹ De acordo com os PCNs, o 4º ciclo corresponde à 7ª e 8ª série e a 8º e 9º anos de escolaridade, de acordo com a Lei 11.114 de 16 de maio de 2005.

visualização e, conseqüentemente, o levantamento de conjecturas e de argumentos para sua comprovação.

Quando os alunos têm de representar um objeto geométrico por meio de desenho, buscam uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizam o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem global que têm do objeto.”(BRASIL, 1998, p.125)

Acreditamos que o estudo de transformações geométricas ao longo do Ensino Fundamental servirá de referência para a articulação dos conceitos e propriedades do estudo de funções. Estabelecendo uma relação com as isometrias e homotetias de figuras no plano, as transformações de funções podem ser mais facilmente entendidas, tanto do ponto de vista das transformações das representações gráficas, quanto de suas representações algébricas, integrando as formas de pensamento algébrico e geométrico.

Incorporando o estudo das Transformações Geométricas no Plano ao currículo de Matemática, utilizando uma concepção de resolução de problemas e/ou atividade investigativa, temos uma ferramenta poderosa para a compreensão das propriedades e relações, bem como a possibilidade de mobilização de formas gerais de pensamentos matemáticos como: visualização, experimentação, dedução, levantamento de conjecturas, exploração de regularidades, registro e comunicação de idéias e argumentos sobre o conteúdo matemático estudado. Os alunos podem ser incentivados a adotar estratégias e formas de pensamento específicas dos matemáticos como: observação dos variantes e invariantes, sistematização de resultados, uso de raciocínio proporcional, exploração de uma situação por meio de múltiplos pontos de vista, ou raciocínio por continuidade.

Para isso, propomos que o conteúdo de Transformações Geométricas no Plano seja (re)visitado a partir das perspectivas apontadas.

3.2 Transformações Geométricas no Plano

Uma transformação geométrica no plano é uma correspondência um a um entre pontos do plano. De acordo com a definição de Rich (2003), “por uma transformação do plano, entenderemos uma regra que associa, a cada ponto do plano, um ponto diferente ou o mesmo ponto”. Por meio de uma transformação, os pontos de uma dada figura no plano são postos

em correspondência com os pontos de outra figura (sua imagem) no mesmo plano. As transformações que dão origem a figuras congruentes são chamadas de transformações isométricas, aquelas que dão origens a figuras semelhantes são chamadas de transformações homotéticas.

Assim, Wagner (1993) explicita o conceito em questão:

Transformações geométricas são funções que associam a cada ponto do plano um outro ponto também do plano através de certas regras.[...] Uma transformação T , no plano Π , é uma função $T : \Pi \rightarrow \Pi$, que associa a cada ponto A do plano outro ponto $A' = T(A)$ do plano, chamado sua imagem de A por T . Se F é uma figura (ou conjunto de pontos) $F' = T(F)$ é o conjunto das imagens dos pontos de F . (WAGNER, 1993, p.70)

Não necessariamente, por meio das definições apresentadas nos textos didáticos, é possível perceber que, por trás das transformações geométricas, está associado um movimento. A simples expressão associar um ponto a outro ponto, ou as palavras transformação e função, por si só, não levam o aluno a perceber a transformação geométrica como um movimento de deslocar pontos no plano, segundo alguma regra, obtendo um novo conjunto de pontos que preserva algumas características e modifica outras, comparativamente ao conjunto inicial.

De modo geral, esses aspectos são apontados nos textos didáticos. Lima (1996), ao se referir às isometrias, destaca que são transformações que preservam a distância entre os pontos e as medidas dos ângulos, gerando figuras congruentes. Por não distorcerem as imagens, essas transformações são chamadas de movimentos rígidos no plano, o que Farmer (1999) reforça, destacando os invariantes, decorrentes da obrigatoriedade que “a distância relativa entre pontos permaneça a mesma; a posição relativa dos pontos permaneça a mesma”, após o movimento.

“Existem apenas quatro tipos de isometrias $T : \Pi \rightarrow \Pi$ do plano Π , além da função identidade, a saber: translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento” (LIMA, 1996, p.25). Neste trabalho, o nosso maior interesse recai sobre as três primeiras formas de isometrias, exploramos apenas rapidamente a reflexão com deslizamento.

A homotetia, por sua vez, é uma transformação em que a medida dos ângulos é preservada, assim como a razão das medidas das distâncias correspondentes. Em geral, não há congruência; homotetia é uma semelhança que lida com a ampliação e redução de uma figura inicial:

A homotetia de centro O e razão r no plano Π é a transformação $H : \Pi \rightarrow \Pi$ que associa a cada ponto P em Π um ponto $P_1 = H(P)$ tal que

$OP_1 = r.OP$. Se $r = 1$, a homotetia H reduz-se à transformação identidade $H(P) = P$ para todo P ". (LIMA, 1992, p.161).

Mais uma vez é possível constatar que, na definição, a linguagem é complexa e os alunos podem ter dificuldades em perceber que a homotetia gera figuras semelhantes (ampliadas ou reduzidas) por meio de um movimento no plano.

Consideramos que o ensino-aprendizagem das Transformações Geométricas no Plano pode ser feito a partir abordagens metodológicas diferenciadas. A primeira consiste em atribuir significado à definição previamente apresentada, buscando ressignificá-la a partir da exploração de várias figuras. É como se o aluno fosse desafiado a entender uma informação numa linguagem nova ou, ainda, decodificar uma mensagem recebida em um código que ainda não conhece. A segunda abordagem consiste em desenvolver, primeiramente, um trabalho a partir da análise de figuras, na busca de suas propriedades, identificando as coisas que mudam e as que não mudam, repetindo experimentos com objetos diferentes, na busca das semelhanças, até conseguir comunicar com palavras o que foi observado e, aos poucos, formalizar uma definição matemática. Essas duas abordagens podem possibilitar que os alunos experimentem as abordagens normalmente utilizadas pelos matemáticos, vivenciando formas de pensamento matemático variadas. Um trabalho sistematizado desenvolvido a partir dessa perspectiva pode levar os alunos a desenvolverem o que poderíamos classificar como bons hábitos de pensamento matemático.

Para tornar possível um trabalho de acordo com as abordagens apontadas, enfatizamos a importância da utilização de recursos computacionais como forma de privilegiar a visualização, a procura de invariantes e o registro formal ou informal das observações, podendo levar os alunos a perceberem as isometrias e homotetias como movimentos no plano. O uso de recursos computacionais adequados pode, ainda, promover a articulação entre o pensamento geométrico e algébrico, fato que consideramos importante para a compreensão do que seja uma transformação geométrica no plano.

3.2.1 Isometria de Translação

Translação é a transformação por meio da qual todos os pontos de uma figura se deslocam numa mesma direção e sentido e de uma mesma distância. Essa direção pode ser horizontal, vertical ou uma combinação delas. A noção de translação está intimamente relacionada com o conceito de vetor (do latim “*vehere*”= transportar) (WAGNER,1993, p.20).

O vetor $\vec{v}$, é o que define a direção e o sentido do deslocamento. Portanto, “a transformação $T_v : \Pi \rightarrow \Pi$, determinada pelo vetor $\vec{v}$, é a transformação que leva cada ponto P do plano Π no ponto $T_v(P) = P + \vec{v}$ ”. (LIMA, 1992, p.142).

O entendimento da definição, na forma proposta, pressupõe que o aluno tenha desenvolvido a capacidade de abstração e o domínio da linguagem matemática simbólica. Como mobilizar formas de pensamento matemático que possam auxiliar o aluno no entendimento dessa definição? Uma proposta poderia ser feita a partir da construção ou mesmo da análise de figuras já construídas, propondo-se questões de forma que o aluno pudesse atribuir um significado à definição.

A Figura 3 apresentada ao aluno pode possibilitar a visualização do que ocorre em uma translação horizontal e, a Figura 4, o que ocorre em uma translação horizontal. O importante é que a figura seja explorada como um recurso na descoberta das propriedades da isometria de translação. As ferramentas que o aluno vai utilizar para comparar, buscar regularidades, levantar conjecturas é que variam, conforme se disponha apenas de lápis e papel ou, se trabalhe em um ambiente computacional.

Observando a Figura 3, o aluno pode perceber que o polígono foi deslocado para a direita, houve uma translação para a direita e que é possível estabelecer uma conexão entre a representação geométrica do objeto e a sua representação algébrica.

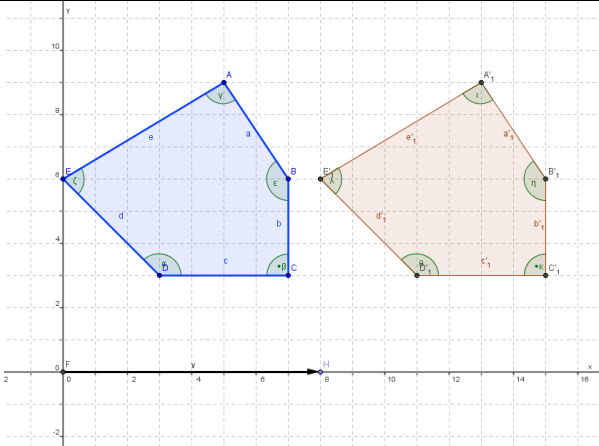
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. O polígono ABCDE foi deslocado horizontalmente para a direita; ii. polígono $ABCDE \approx A'B'C'D'E'$, ou seja, os polígonos são congruentes; iii. a distância entre cada ponto do polígono original e sua imagem equivale ao módulo do vetor $\vec{v}$, que neste caso é de 8 unidades; iv.as coordenadas originais do vértice B(7,6) foram transformadas em B'(15,6).

Figura 3 – Simetria de translação horizontal

Da mesma forma, o aluno é chamado a explorar a Figura 4 para perceber que o polígono ABCDE foi deslocado verticalmente para baixo.

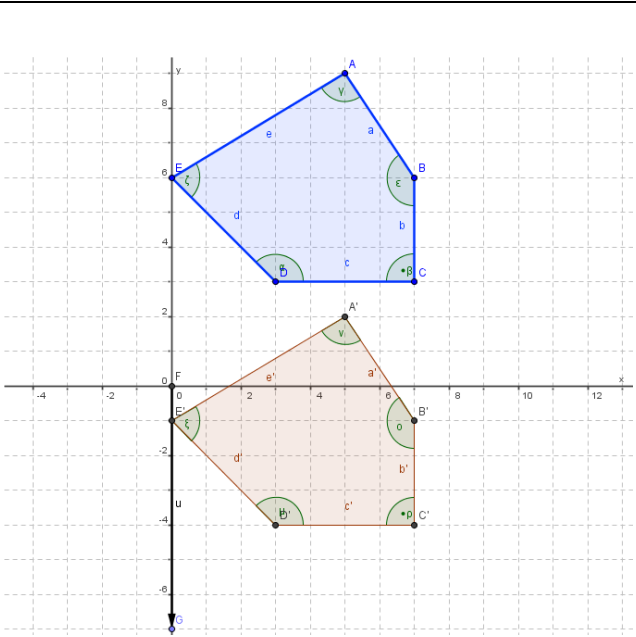
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. o polígono ABCDE foi deslocado verticalmente para baixo; ii. polígono $ABCDE \approx A'B'C'D'$, ou seja, os polígonos são congruentes; iii.a distância entre cada ponto do polígono original e sua imagem equivale ao módulo do vetor $\vec{v}$, que neste caso é 7 unidades; iv.as coordenadas originais do vértice B(7,6) foram transformadas em B'(7,-1).

Figura 4 – Simetria de translação vertical

Analisando as Figuras 3, 4 e 5, é possível concluir que a forma, os ângulos e as distâncias entre os pontos permanecem invariantes, mantendo as figuras congruentes, mas as coordenadas dos vértices dos polígonos variam em função do deslocamento, definido por $\vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j}$. Na translação horizontal, as coordenadas (x,y) foram transformadas em

$(x+a, y)$, pois $\vec{v} = a \vec{i}$ e na translação vertical as coordenadas (x, y) foram transformados em $(x, y+b)$, uma vez que $\vec{v} = b \vec{j}$.

Importante é que o aluno seja chamado a mobilizar formas diferenciadas do pensamento matemático para investigar e levantar conjecturas. Um bom desafio é propor que ele combine translações, deslocando um polígono dado, por exemplo, para direita e para cima. Espera-se que o aluno construa uma figura do tipo da Figura 5. Observando a Figura 5, ele poderá perceber que cada ponto P do polígono foi levado em um novo ponto $Q = P + \vec{v}$, da mesma forma ocorrida nas translações anteriores. Agora, entretanto, o vetor $\vec{v}$ combina os dois movimentos e por isso tem a forma $\vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j}$. Dessa forma, as coordenadas (x, y) são transformadas em $(x+a, y+b)$ (Figura 5). Essas observações decorrentes de uma série de experimentações podem auxiliar o aluno a identificar padrões, na busca de generalizações.

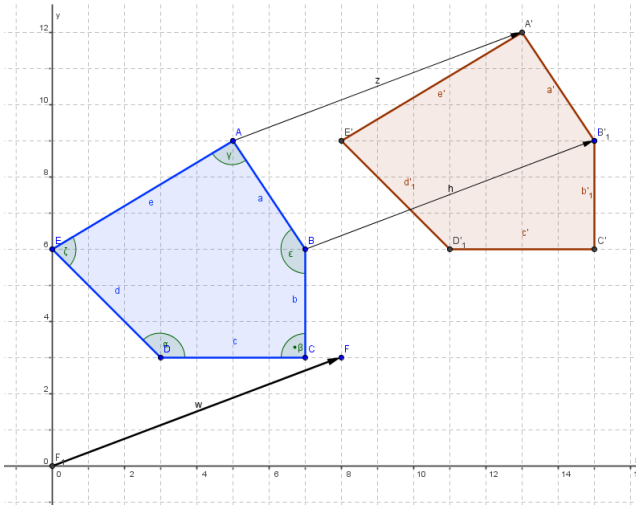
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. o polígono ABCDE foi deslocado verticalmente para cima e horizontalmente para a direita; ii. polígono $ABCDE \approx A'B'C'D'E'$, ou seja, os polígonos são congruentes; iii. a distância entre cada ponto do polígono original e sua imagem equivale ao módulo do vetor deslocamento. iv. as coordenadas originais do vértice B(7,6) foram transformadas em B'(15,9).

Figura 5 – Simetria de translação horizontal e vertical combinadas

As figuras apresentadas, assim como as observações registradas em cada uma delas, ilustram o tipo de trabalho que pode ser feito no estudo introdutório das isometrias de translação. Muitas outras atividades e construções de figuras podem ser propostas, não apenas pelo professor, mas pelos próprios alunos.

3.2.2 Isometria de Rotação

Na transformação por rotação, fixa-se um ponto no plano e a figura gira em torno desse ponto de um determinado ângulo. O ponto fixo é chamado de centro de rotação.

Dado um ângulo α , a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto $A' = R_\alpha(A)$ de forma que tenha $OA' = OA$, $\widehat{AOA'} = \alpha$ e o sentido de A para A' (em torno de O). (WAGNER, 1993, p.75)

Uma rotação é uma isometria que preserva a forma do objeto geométrico, a distância entre os pontos e as medidas dos ângulos.

Se a definição acima e a informação acerca dos invariantes quando a transformação é aplicada a pontos do plano são apenas repassadas aos alunos, dificilmente serão entendidas ou serão facilmente esquecidas. As explorações com figuras são fundamentais no entendimento das transformações geométricas; em ambiente de lápis e papel apresentam a limitação de lidar com objetos estáticos e em ambiente computacional trazem a vantagem de permitir a movimentação das figuras.

Se tomarmos, por exemplo, a Figura 6 é possível perceber que o polígono ABCD sofreu uma rotação em torno do ponto O (origem).

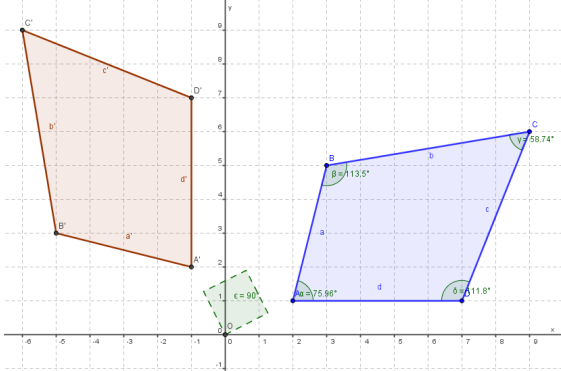
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. O polígono ABCD foi rotacionado por um ângulo de 90°; ii. polígono $ABCD \approx A'B'C'D'$; iii. o ângulo de rotação possui vértice no ponto O e os lados são as semi-retas de origem no ponto O e contendo o vértice da figura original e de origem em O e contendo o vértice correspondente da figura rotacionada. Por exemplo, podemos definir o ângulo pelas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OA'}$, ou $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OC'}$. iv. as coordenadas originais do vértice A(2,1) foram transformadas em A'(-1,2).

Figura 6 – Simetria de rotação

No caso, essa rotação foi de um ângulo de 90° , fato que se espera seja constatado pelo próprio aluno ao explorar a figura.

Em particular, uma rotação de amplitude 90° , no sentido anti-horário leva o ponto (x, y) em $(-y, x)$. Uma rotação de 180° em torno do ponto O leva o ponto (x, y) no ponto $(-x, -y)$. Nesse caso, dizemos que esse ponto é simétrico ao ponto (x, y) em relação ao ponto O. Uma rotação de 270° em torno do ponto O leva o ponto (x, y) no ponto $(y, -x)$, como podemos observar na Figura 7.

É desejável que o próprio aluno especule e faça suas sistematizações sobre as novas coordenadas dos pontos transformados pelas rotações de amplitudes variadas.

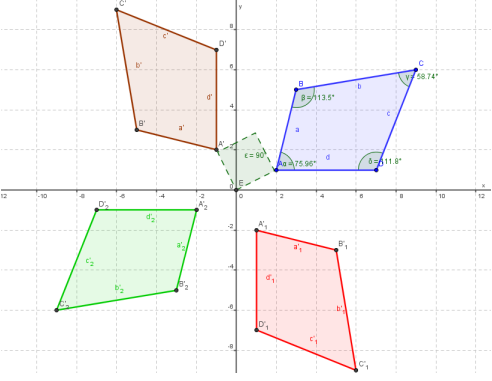
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. O polígono ABCD foi rotacionado em torno do ponto O por um ângulo de 90°; de 180° e 270°. ii. as coordenadas originais do vértice $A(2,1)$ foram transformadas respectivamente em $A'(-1,2)$, $A'' = (-1, 2)$, $A''' = (-2, -1)$, $A'_2 = (1, -2)$

Figura 7 – Simetria de rotação de polígonos por um ângulo de amplitudes de 90° , 180° e 270°

Podemos propor a construção da Figura 7 a partir da Figura 6, incentivando o aluno a verificar que o polígono ABCD foi rotacionado em torno do ponto O por um ângulo de 90° , de 180° e 270° de forma que $\overline{OA} \cong \overline{OA'} \cong \overline{OA''_1} \cong \overline{OA''_2}$, o que pode ser observado, construindo as circunferências de centro O e raios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$.

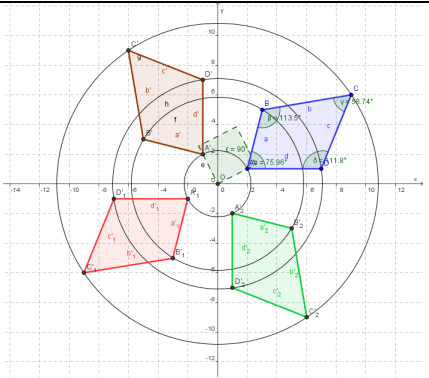
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. o polígono ABCD foi rotacionado em torno do ponto O por um ângulo de 90°; de 180° e 270°. ii. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ são os raios das circunferências.

Figura 8 – Simetria de rotação e circunferências concêntricas passando pelos vértices dos polígonos

Como o ângulo de rotação α divide as circunferências em n partes congruentes, podemos inscrever nas circunferências um polígono regular de n lados. A Figura 8 pode facilitar a visualização da afirmativa.

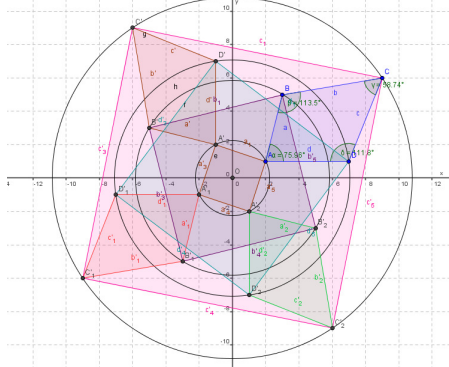
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. o ângulo de rotação é de 90°; ii. a circunferência foi dividida em 4 partes congruentes iii. o polígono inscrito é um quadrado

Figura 9 – Simetria de rotação e polígonos regulares inscritos nas circunferências

Numa abordagem mais avançada e como uma forma de os alunos se apossarem de uma forma mais visual das relações de seno e cosseno, podemos trabalhar com a rotação dos polígonos, utilizando outros ângulos como 30° , 45° e 60° .

Levantar conjecturas acerca das novas coordenadas de um ponto rotacionado em relação à origem de um ângulo α genérico não é natural, como quando lidamos com as translações. Optamos por apresentar uma dedução da fórmula que fornece as novas coordenadas, tendo como suporte a Figura 9.

Para estabelecer as novas coordenadas de um ponto obtido pela rotação de um outro em relação à origem de um ângulo α genérico e generalizar as observações feitas sobre a rotação de polígonos por um ângulo α qualquer, vamos nos fundamentar em Neto (1980). Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY, um triângulo ABC e um triângulo A'B'C' resultado de uma rotação do triângulo ABC por um ângulo α e centro de rotação na origem. Mantendo a origem O fixa, vamos girar os eixos OX e OY no sentido anti-horário, do mesmo ângulo α (Figura 10). Obtemos assim um novo sistema de eixos X'OY'. Seja A (x_1, y_1) um ponto do triângulo ABC em relação ao eixo XOY e A' (x_2, y_2) um ponto do triângulo A'B'C' em relação ao sistema X'OY'.

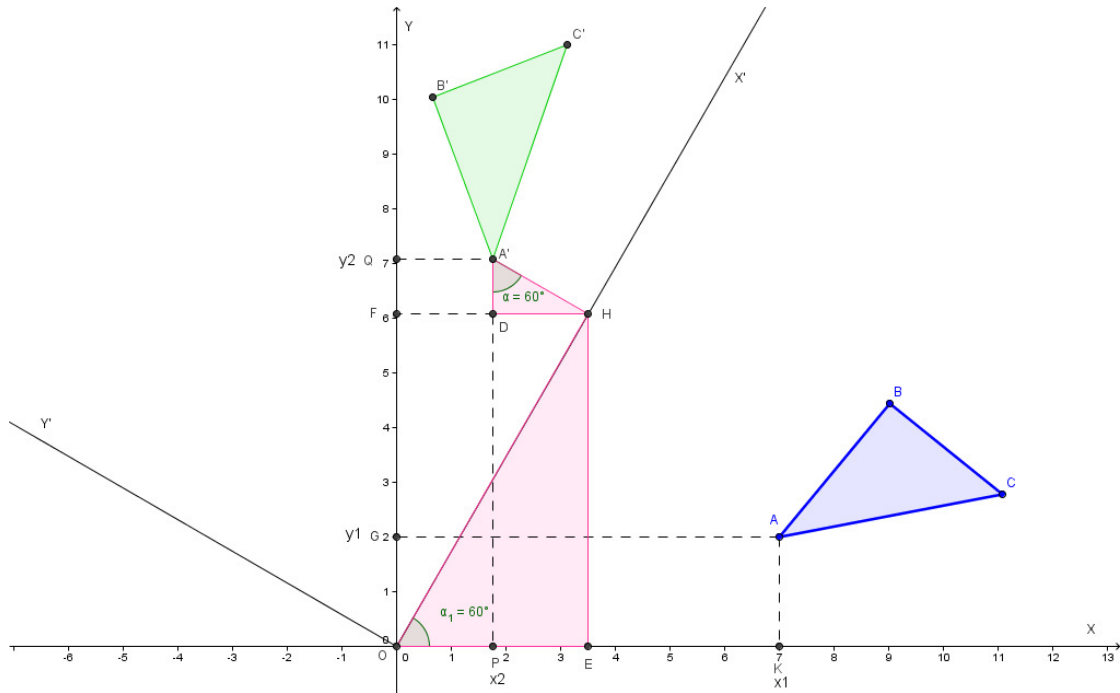


Figura 10 – Rotação por um ângulo α de um ponto P em relação a origem dos eixos cartesianos

Observando a Figura 10, podemos perceber que:

- i) as coordenadas de A' ficam assim definidas:

$$\begin{cases} x_2 = \overline{OP} \therefore x_2 = \overline{OE} - \overline{PE} \therefore x_2 = \overline{OE} - \overline{DH} \\ y_2 = \overline{OQ} \therefore y_2 = \overline{FQ} + \overline{FO} \therefore y_2 = \overline{A'D} + \overline{EH} \end{cases} (1)$$

- ii) o triângulo ΔOHE é semelhante ao $\Delta A'DH$

- iii) $\overline{OK} \cong \overline{OH} = x_1$ e do triângulo ΔOHE podemos obter as medidas dos lados $\overline{EH}$ e $\overline{OE}$ utilizando:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{EH}}{\overline{OH}}, \text{ como } \overline{OH} = x_1, \text{ temos, } \text{sen } \alpha = \frac{\overline{EH}}{x_1} \therefore \overline{EH} = x_1 \text{sen } \alpha (2)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{OE}}{\overline{OH}}, \text{ como } \overline{OH} = x_1, \text{ temos, } \text{cos } \alpha = \frac{\overline{OE}}{x_1} \therefore \overline{OE} = x_1 \text{cos } \alpha (3)$$

- iv) $\overline{AH} = \overline{A'H} = y_1$ e do triângulo $\Delta A'DH$ podemos obter as medidas dos lados $\overline{A'D}$ e $\overline{DH}$, utilizando:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{DH}}{\overline{A'H}}, \text{ como } \overline{A'H} = y_1, \text{ temos } \overline{DH} = y_1 \text{sen } \alpha (4)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{A'D}}{\overline{A'H}}, \text{ como } \overline{A'H} = y_1, \text{ temos } \overline{A'D} = y_1 \text{cos } \alpha (5)$$

v) Substituindo as relações obtidas em (2), (3), (4) e (5) em (1), teremos:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos \alpha - y_1 \operatorname{sen} \alpha \\ y_2 = x_1 \operatorname{sen} \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases} \quad (6)$$

Observando a Figura 10, vemos que o ponto A (7,2) sofreu uma rotação de 60° em torno da origem no sentido anti-horário.

Substituindo $x_1 = 7$, $y_1 = 2$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ na relação (6), teremos:

$$\begin{cases} x_2 = 7 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_2 = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(7 - 2\sqrt{3}) \\ y_2 = \frac{1}{2}(7\sqrt{3} + 2) \end{cases}$$

Aproximadamente, temos as coordenadas do ponto A''(1,8 ; 6,95).

Embora não haja, de modo geral, muita receptividade dos alunos para tratamentos formais mais rigorosos, é preciso levá-los também a experimentar os processos de dedução e acrescentá-los ao repertório de suas estratégias de lidar com a matemática.

Se, por um lado, a busca de generalizações precisa ser incentivada, por outro, o aluno precisa saber que essas generalizações são normalmente resultados de um processo de dedução formal matemática e não apenas resultados de investigações feitas a partir de um número reduzido de situações. É importante e desejável que, ao longo dos estudos, no Ensino Superior, principalmente num Curso de Licenciatura, o aluno seja orientado no sentido de aprender a construir deduções.

3.2.3 Isometria de Reflexão

Uma reflexão em torno da reta r , também chamada de simetria axial, é a transformação S_r que faz corresponder a cada ponto A do plano o ponto $A' = S_r(A)$, chamado simétrico de A em relação a r (WAGNER, 1993).

As definições dos textos não necessariamente são claras para o aluno, embora, por vezes, exista a tentativa de uma maior conexão com a Geometria, ou mesmo o apelo a formas concretas de se verificar o que ocorre com dois pontos simétricos:

Reflexão em relação a alguma reta m , que pode ser chamada de eixo de reflexão ou de simetria, é a transformação que a cada ponto P associa o seu simétrico P' em relação a m , isto é, m é a mediatriz do segmento PP' . Se dobrarmos a folha de papel ao longo de m , os pontos P e P' se sobrepõem. (BROLEZZI, 2004, p.11).

Na reflexão, os pontos correspondentes são equidistantes do eixo de reflexão ou de simetria, que atua como se fosse um espelho, refletindo a imagem do objeto geométrico. Essa analogia com o que ocorre num espelho pode ajudar a compreensão do conceito, assim como a construção e análise de uma série de figuras.

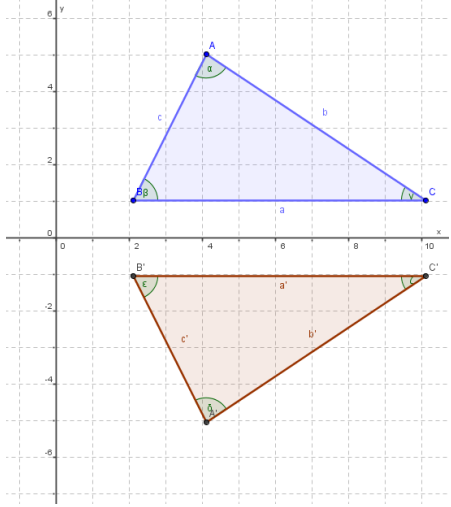
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. o triângulo ABC e sua imagem ($\Delta A'B'C'$) são congruentes ii. o eixo de simetria é o eixo das abscissas; iii. o vértice original A (4,5) foi transformado em A'(4,-5)

Figura 11 – Simetria de reflexão em relação ao eixo x

Observando a Figura 11, podemos verificar que o triângulo ABC foi refletido em relação eixo dos x (eixo das abscissas). O aluno pode ser incentivado a medir e a comparar as medidas das distâncias dos vértices do triângulo original ABC ao eixo x e dos vértices do triângulo transformado ao mesmo eixo, identificando a invariância delas..

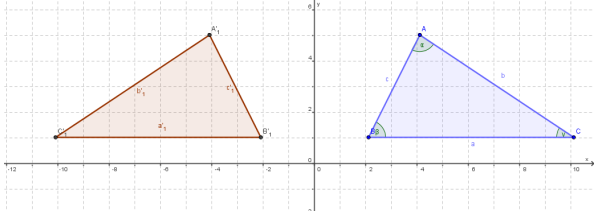
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. o triângulo ABC e sua imagem $\Delta A'B'C'$ são congruentes; ii. o eixo de simetria é o eixo das ordenadas; iii. o vértice original A (4,5) foi transformado em A'(-4,5)

Figura 12 – Simetria de reflexão em relação ao eixo y

Observando a Figura 12, podemos perceber que o triângulo ABC foi refletido em relação ao eixo dos y (eixo das ordenadas). Igualmente o aluno pode ser incentivado a

trabalhar, comparando as distâncias dos vértices dos polígonos ao eixo das ordenadas, descobrindo padrões, de forma a sistematizar que os vértices correspondentes são simétricos em relação ao eixo dos y .

Sistematizando os resultados obtidos nas Figuras 11 e 12, o aluno pode perceber que, na reflexão em relação ao eixo das abscissas, as coordenadas dos vértices do polígono (x, y) foram transformadas em $(x, -y)$ e que, na reflexão em relação ao eixo das ordenadas, as coordenadas dos vértices do polígono, (x, y) foram transformadas em $(-x, y)$. Essas e muitas outras propriedades podem ser descobertas pelos alunos, por um processo de descoberta guiada que o leve a verificar que, numa isometria de reflexão, a forma, as medidas dos lados e dos ângulos são invariantes e o objeto geométrico e sua imagem são figuras congruentes.

De modo geral, os alunos apresentam certa facilidade em compreender a simetria de reflexão em relação aos eixos coordenados, porém o mesmo não ocorre no estudo da simetria em relação a uma reta qualquer.

Os livros didáticos buscam exemplificar as definições por meio de figuras, mas, de modo geral, o aluno tem dificuldades, por exemplo, quando, ao retomar o assunto em um curso no Ensino Superior, depara-se com a definição:

Seja r uma reta no plano Π . A reflexão em torno da reta r é a função $R_r : \Pi \rightarrow \Pi$ assim definida: $R_r(X) = X$ para todo $X \in r$ e, para $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r . (LIMA, 1996, p.16)

A definição é complexa e não deixa clara, por exemplo, a questão dos pontos fixos, ou seja, dos pontos que não se alteram mediante a transformação feita. Supõe-se, por vezes, que o aluno traduza a idéia expressa na afirmativa $R_r(X) = X$ para todo $X \in r$ como significando que os pontos da reta r não variam. Para o real entendimento da invariância ocorrida, o aluno precisa experimentar, refletir muito tempo sobre o assunto, à semelhança do que fazem os matemáticos. A nossa abordagem do assunto em sala de aula, pode estar comprometendo o entendimento, por não dar ao aluno esse tempo.

Ao abordar as simetrias axiais, os livros costumam apresentar e deduzir a fórmula das novas coordenadas de um ponto simétrico a outro pela reflexão em relação a uma reta r . A fórmula para encontrar as coordenadas de um ponto simétrico em relação a uma reta linear do tipo $y = ax$ foi apresentada à página 11 da seção 2, do Capítulo 2, quando discutimos as abordagens próprias dos matemáticos, salientando as dificuldades do aluno em compreender o

que é feito justamente pelo fato de os matemáticos pensarem muito e falarem e escreverem pouco.

Além disso, a linguagem é complexa, a notação confusa por vezes, e o professor precisa, ainda, estar atento para uniformizar a forma com que denota um segmento, uma reta um ponto, de modo a facilitar a leitura do texto. Nesse sentido e considerando a importância que o aluno seja orientado para realizar suas deduções, optamos por deduzir novamente a fórmula, explicitando alguns detalhes que julgamos importantes.

Vamos, para isso, esboçar um gráfico. A proposta é determinar as coordenadas do ponto $A' = (x', y')$ em função das coordenadas do ponto $A = (x, y)$ e da reta $y = ax$. Vamos tomar como referência a Figura 13 abaixo.

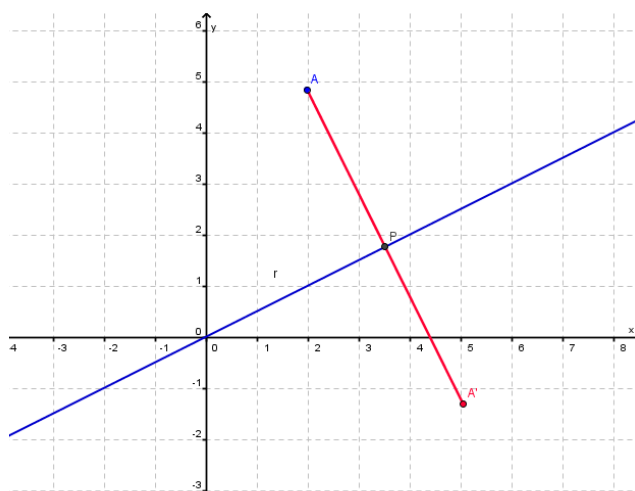


Figura 13 – Reflexão de um ponto em relação a uma reta

Observando a Figura 13, verificamos que o ponto A' é simétrico ao ponto A em relação à reta r , ou seja, a distância de cada um deles até a reta r é a mesma. Assim, a reta (s) suporte do segmento $\overline{AA'}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$, portanto, é perpendicular à reta r , o ponto P além de ponto médio do segmento $\overline{AA'}$, é o ponto de intersecção das retas r e s .

Como P é ponto médio do segmento $\overline{AA'}$ e suas coordenadas são $P = \left(\frac{1}{2}(x + x'), \frac{1}{2}(y + y') \right)$.

O ponto P pertence à reta r de equação $y = ax$, portanto, podemos substituir as coordenadas de P na equação da reta: $y = ax \therefore \frac{1}{2}(y + y') = a \cdot \frac{1}{2}(x + x')$ que, simplificando, fica:

$$y + y' = a(x + x') \quad (1)$$

Como a reta (s), suporte do segmento $\overline{AA'}$ é perpendicular à reta (r): $y = ax$, se a inclinação ou coeficiente angular (m) da reta r é a , então a inclinação da reta s será $-\frac{1}{a}$.

Assim, podemos substituir as coordenadas do ponto P na equação:

$$y - y_p = m_s(x - x_p)$$

$$\text{Então teremos: } y - \frac{1}{2}(y + y') = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{1}{2}(x + x')\right) \therefore \frac{1}{2}(y - y') = -\frac{1}{2a}(x - x')$$

$$\text{Simplificando esta equação obtemos em: } y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \quad (2)$$

Como o ponto P é o ponto de encontro das retas r e s obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y + y' = a(x + x') \\ y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, por exemplo, pelo método da adição, encontramos

$$2y = ax + ax' - \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}x'.$$

Queremos encontrar a abscissa do ponto simétrico de A, em relação à reta (r). Assim, vamos isolar x' no primeiro membro, reduzindo ao mesmo denominador:

$$ax' + \frac{1}{a}x' = 2y - ax + \frac{1}{a}x \therefore \left(a + \frac{1}{a}\right)x' = 2y - \left(a - \frac{1}{a}\right)x$$

$$\text{Portanto: } x' = \left(\frac{2a}{a^2 + 1}\right)y + \left(\frac{1 - a^2}{a^2 + 1}\right)x \quad (3).$$

Substituindo a equação (3) em (1), teremos:

$$y + y' = ax + a\left[\left(\frac{2a}{1 + a^2}\right)y + \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}\right)x\right].$$

Como desejamos encontrar a ordenada do ponto simétrico de A, devemos isolar y' no primeiro membro e, assim, teremos:

$$y' = \left[\frac{2a^2}{1 + a^2}y - y\right] + \left[ax \cdot \frac{1 - a^2}{1 + a^2} + ax\right],$$

$$y' = \left(\frac{2a}{1 + a^2}\right)x - \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}\right)y \quad (4)$$

Portanto, as coordenadas do ponto A' , simétrico do ponto A em relação a reta r de

$$\text{equação } y = ax, \text{ são: } \begin{cases} x' = \frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}y \\ y' = \frac{2a}{1+a^2}x - \frac{1-a^2}{1+a^2}y \end{cases}, \quad (5)$$

onde a é a inclinação da reta r , x e y são as coordenadas do ponto A .

O detalhamento da apresentação feita visa destacar a complexidade das operações algébricas e raciocínios envolvidos. O registro simplificado que não explicita as idéias e operações pode ser um grande obstáculo ao entendimento do assunto. Construir uma demonstração rigorosa de uma propriedade matemática exige todo um processo de formação para isso. A simples apresentação de uma demonstração, por mais detalhada que seja, não garante o seu entendimento. Para compreender algumas passagens apresentadas anteriormente o aluno precisa recorrer a muitas definições, interligando idéias e formas de pensar da Álgebra e da Geometria. Essa não é uma tarefa fácil e sua realização depende de uma formação lenta e cuidadosa desenvolvida ao longo da escolarização.

3.2.4 Isometria de Reflexão com Deslizamento

Chama-se simetria de reflexão com deslizamento, a transformação do plano que consiste em uma reflexão em torno de uma reta r seguida de uma translação ao longo de um vetor $\vec{v}$ paralelo a r . (LIMA, 1992, p.154)

Para visualizar a combinação de movimentos, é possível construir uma representação gráfica como na Figura 14 O triângulo $A''B''C''$ é a imagem do triângulo ABC pela reflexão em torno do eixo x seguida de uma translação paralela ao vetor $\vec{v}$.

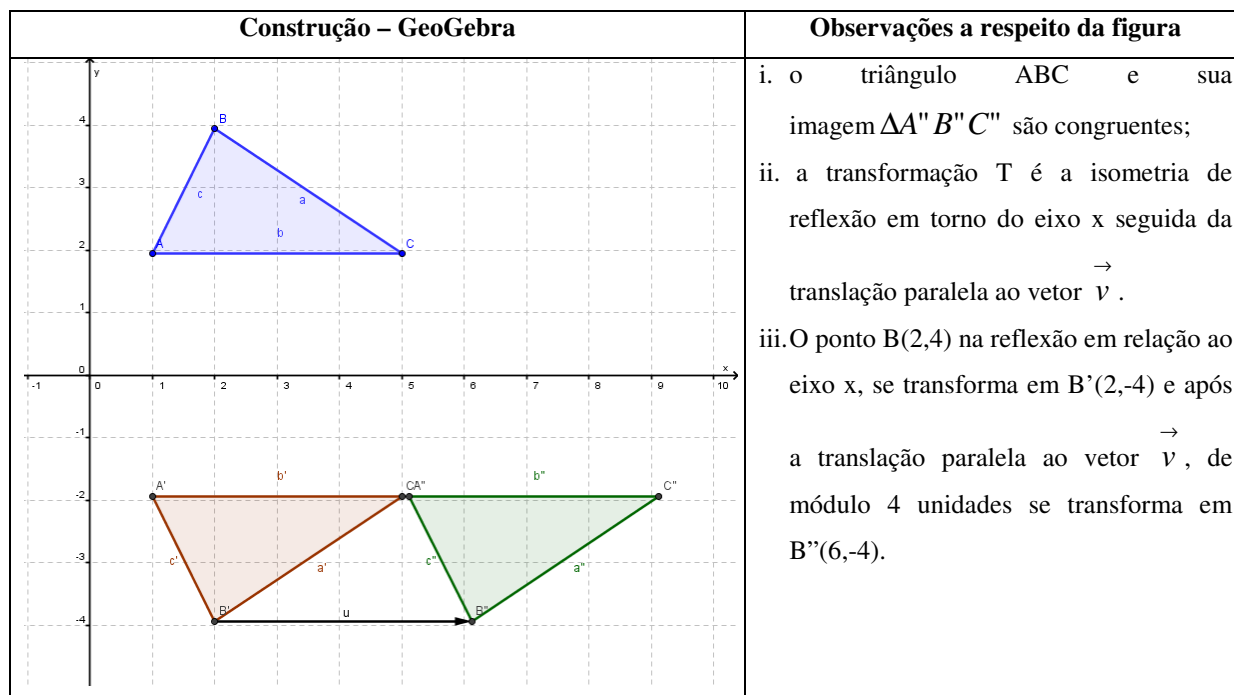


Figura 14 – Simetria de Reflexão com Deslizamento

Por meio de experimentações, observando o que acontece com as coordenadas de cada vértice do polígono original, o aluno pode vir a sistematizar que as coordenadas do ponto $P(x, y)$ se transformam inicialmente em $P'(x, -y)$ e em seguida em $P''(x + \vec{v}, -y)$. Esse é um momento importante para estabelecer conexões entre o estudo de reflexões e o estudo das translações. O aluno pode ser desafiado a combinar os dois tipos de movimento, construindo ele mesmo a nova transformação.

3.2.5 Homotetia

Homotetia é uma transformação geométrica que transforma uma figura F em uma figura F' semelhante a F , podendo alterar o tamanho da figura original, mas preservar a sua forma e a medida dos ângulos.

Fixado um ponto O no plano Π e dado um número real $k \neq 0$, a homotetia de centro O e razão k é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto $A' = H_{O,k}(A)$ tal que $\vec{OA'} = k \cdot \vec{OA}$. (WAGNER, 1993, p.80)

A definição pode ganhar sentido por meio de uma representação gráfica, como na Figura 3.13. O aluno pode observar que o polígono ABCDE foi ampliado, de forma

proporcional, para a razão de semelhança $k = 2$ e contraído também de forma proporcional para a razão $k = \frac{1}{2}$ comparando as medidas dos lados correspondentes. O aluno pode ainda obter as coordenadas dos vértices dos polígonos ampliados, verificando que elas ficam multiplicadas pela razão k , ou seja, que as coordenadas (x, y) dos vértices do polígono foram transformadas em (kx, ky) .

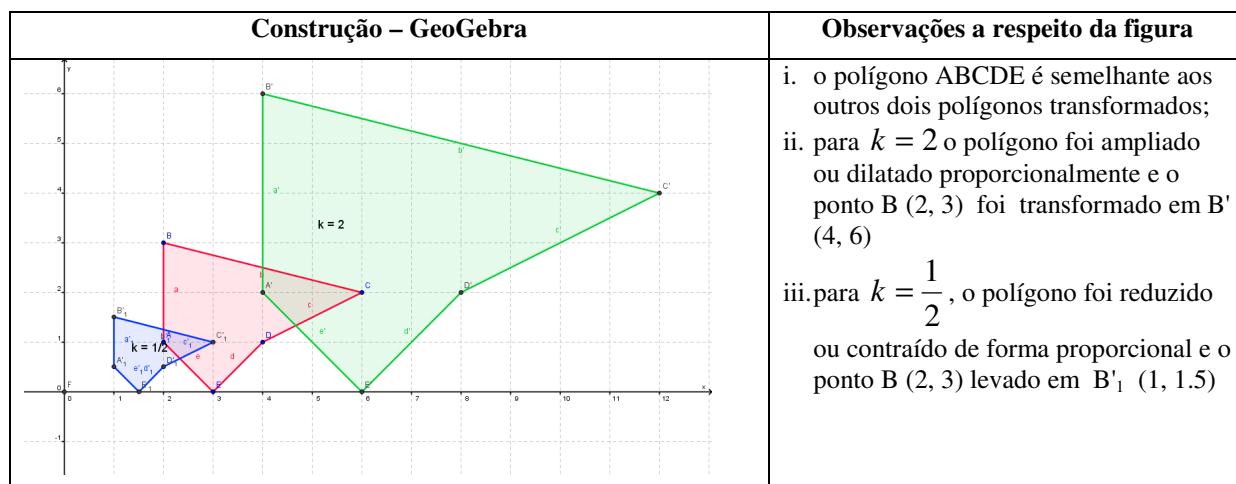


Figura 15 –Transformação por Homotetia para $k = 2$ e $k = \frac{1}{2}$

Na Figura 16 polígono ABCDE foi ampliado, de forma proporcional, considerando-se as razões de semelhança $k = 2$ e $k = -2$.

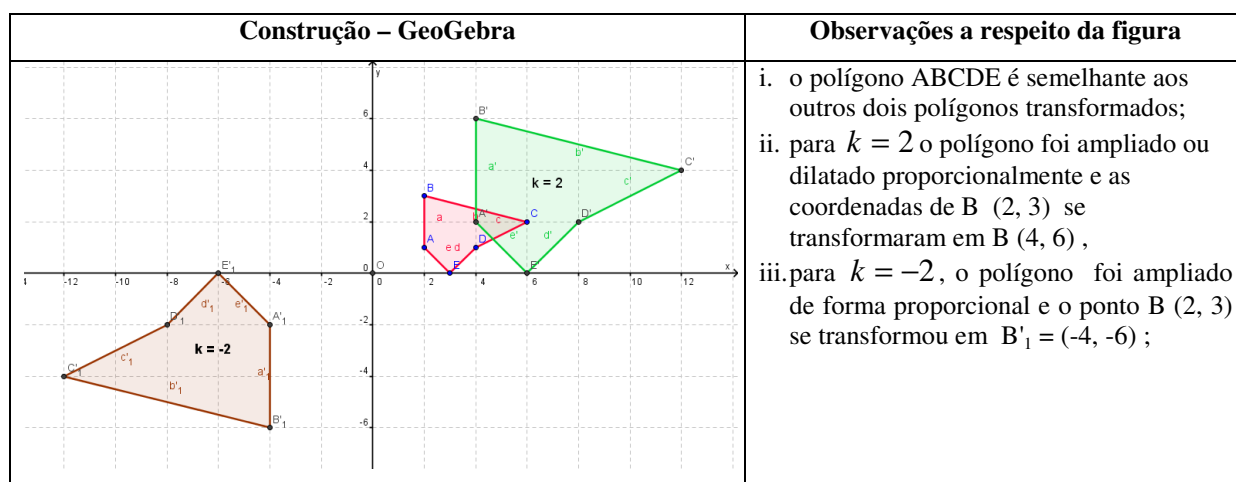


Figura 16 –Transformação por Homotetia para $k = 2$ e $k = -2$

O aluno pode ser motivado a fazer várias experimentações, usando valores distintos para k . Assim, para $k = -1$, pode observar na Figura 17 que o polígono foi refletido em relação à origem, ou seja sofreu uma rotação de 180° em relação à origem e a nova figura é congruente à figura original. Neste caso, a homotetia se reduz a uma isometria.

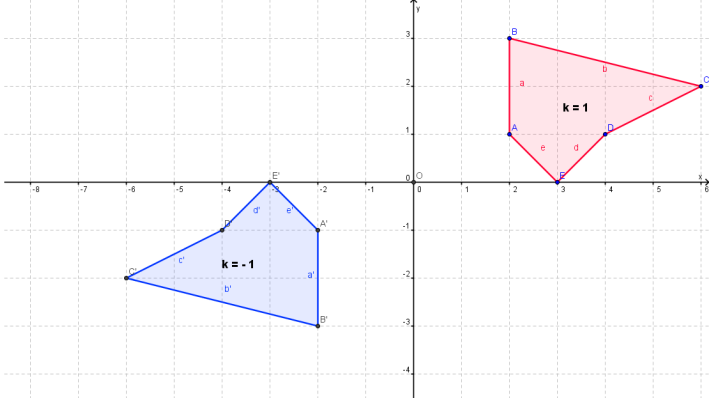
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. o polígono ABCDE é congruente ao polígono A'B'C'D'E' ii. para $k = -1$, o polígono foi refletido em relação à origem e é congruente à figura original iii. as coordenadas de B(2,3) se transformaram em B'(-2, -3),

Figura 17 – Transformação por Homotetia $k = -1$

Se retomarmos a Figura16, podemos verificar que o polígono A'B'C'D'E' é congruente ao polígono A₁B₁C₁D₁E₁ pois o segundo resulta de uma rotação de 180° do primeiro, em relação à origem, isso é, de uma isometria. Assim, dado o polígono ABCD, os polígono A'B'C'D'E' e A₁B₁C₁D₁E₁ obtidos pelas transformações por homotetia de razões $k=2$ e $k=-2$ são congruentes entre si. Duas figuras obtidas a partir de uma figura dada por transformações por homotetia de razões de mesmo módulo são congruentes.

Sistematizando os resultados, de acordo com Wagner (1993), se $k > 0$ a homotetia chama-se direta e $k < 0$, inversa. A dilatação é uma transformação que aumenta o tamanho da figura original e ocorre se $|k| > 1$ e a contração é uma transformação em que o tamanho da figura original diminui e que ocorre para $0 < |k| < 1$. A homotetia transforma então qualquer figura F em uma figura F' semelhante a F . Numa homotetia de centro O , se a razão é $k = 1$, então a transformação será uma identidade e se $k = -1$, a transformação é uma simetria em relação ao ponto O , ou uma rotação de 180° em torno de O .

Vale à pena ainda investigar outras propriedades, como verificar o que ocorre com as áreas de figuras obtidas por transformações por homotetia. Para isso, recorremos a Paiva (2002) para propor a construção dos dois triângulos ABC e A'B'C' (Figura 18).

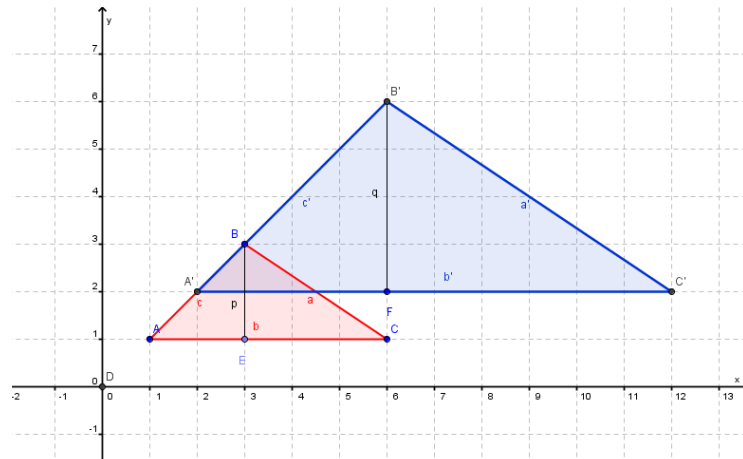


Figura 18 – Triângulos semelhantes de razão k – razão entre as áreas

Observando a Figura 18, podemos perceber que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, ou seja, os dois triângulos são semelhantes.

Consideremos:

- $\overline{AC} = b, \overline{A'C'} = b'$
- $\overline{BE} = p, \overline{B'F} = q$

Obtendo a razão de semelhança do primeiro triângulo para o segundo, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{B'F}} \therefore \frac{b}{b'} = \frac{p}{q} = k$$

Calculando a área do triângulo ABC, temos: $A_1 = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BE}}{2} \therefore A_1 = \frac{b \cdot p}{2}$. Calculando a área do

triângulo A'B'C', temos: $A_2 = \frac{\overline{A'C'} \cdot \overline{B'F}}{2} \therefore A_2 = \frac{b' \cdot q}{2}$.

Logo, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e A'B'C' será:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{b \cdot p}{2}}{\frac{b' \cdot q}{2}} \therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{bp}{b'q} \therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{p}{q} \therefore \frac{A_1}{A_2} = k \cdot k \therefore \frac{A_1}{A_2} = k^2$$

Nos textos didáticos do Ensino Médio, a demonstração da propriedade é feita no caso de triângulos ou retângulos. A generalização da propriedade costuma apenas ser enunciada: “A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras”. (PAIVA, 2002, p.115). No entanto, considerando as facilidades oferecidas pelo trabalho com os *softwares* de geometria dinâmica, a propriedade pode ser testada para polígonos distintos, que podem ser decompostos na soma de triângulos.

Muitas atividades podem ser propostas no sentido de que o aluno levante conjecturas, buscando generalizações. Entretanto, cabe ressaltar a importância de que as conjecturas levantadas sejam testadas. Nesse sentido, mais uma vez o uso de recursos computacionais, em particular o *software* GeoGebra, torna-se um instrumento valioso para que se realizem verificações e mostrações. Parece-nos pertinente lembrar o que Lourenço (2002) pondera: “a melhor prova que se pode oferecer para alguém, sobre qualquer tema é o convencimento de que o fato é real.”(p. 85). É o mesmo autor que acrescenta: “Uma boa construção que pode ser alterada em sua aparência, conservando as propriedades Matemáticas da figura, quando bem direcionada, pode sugerir caminhos para trabalho teórico tendente à demonstração formal.” (p. 86).

Nos estudos de Geometria na Escola Básica, ou mesmo num curso introdutório ao estudo das Transformações Geométricas Planas dentro da disciplina Geometria Analítica, as “mostrações”, usando recursos do *software* de Geometria dinâmica, podem despertar a curiosidade do aluno e servir como formas de motivá-lo a provar as conjecturas levantadas.

3.3 Funções e Transformações

De acordo com os PCNEM (1999), o estudo de funções possui um caráter integrador que permite estabelecer conexões entre conceitos e formas de pensamento matemático. Desempenha também um papel importante para descrever e estudar o comportamento de certos fenômenos do cotidiano, por meio de leitura, interpretação e construção de gráficos, bem como articular a matemática com outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia.

O documento destaca ainda a necessidade de o aluno adquirir certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas, o que demanda um planejamento no sentido de estabelecer objetivos na seleção de conteúdos e, sobretudo, nas situações-problema que poderão desencadear o processo de articulação entre os vários conteúdos.

É importante que, no estudo dos vários conteúdos matemáticos, seja incentivada, a todo tempo, a integração de idéias. Assim, estudar os movimentos determinados pelas transformações de isometrias e homotetias no plano “pode ser útil para compreendermos as funções matemáticas” e o estudo das “funções, por sua vez, pode nos ajudar a compreender e representar melhor essas e outras transformações”. (BROLEZZI, 2004, p.11).

O estudo das transformações geométricas (isometria e homotetia), é proposto para o ensino fundamental, utilizando-se figuras planas. Esses conceitos podem e devem ser articulados com o estudo de funções e suas transformações. As funções são, por vezes, estudadas como objetos matemáticos isolados sem nenhum vínculo com as transformações geométricas de figuras no plano e, principalmente, sem estabelecer conexões entre as idéias da Geometria e as da Álgebra.

Pois se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidos nos diversos conteúdos, no entanto o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (BRASIL, 1999, p. 255)

As atividades que envolvem as transformações de funções devem ser privilegiadas, pois permitem ao aluno estabelecer a relação entre a expressão analítica e a forma geométrica das funções de uma forma mais dinâmica, fazendo com que ele consiga construir relações entre os conceitos (Gravina & Santarosa, 1998).

Em uma família, a função básica é a que tem a expressão algébrica mais simples, e as demais funções são obtidas a partir de operações algébricas sobre a expressão da função básica. Os gráficos dos elementos da família são identificados a partir de movimentos geométricos aplicados ao gráfico da função básica: translação vertical ou horizontal; dilatação ou contração nas direções horizontais e verticais; reflexões. Com a possibilidade de plotar simultaneamente diversos elementos da família, o aluno explora o tipo de movimento aplicado ao gráfico da função básica. (GRAVINA e SANTAROSA, 1998 p.20)

O estudo de famílias de funções obtidas a partir de transformações por isometrias de uma função dada, possivelmente, possibilitará que o aluno estabeleça relações entre suas formas de representação algébrica e gráfica. Um estudo desenvolvido nessa linha pode contribuir para o levantamento de conjecturas de algumas propriedades em relação às funções, além de possibilitar ao aluno desenvolver um repertório de formas de pensamento matemático, como, por exemplo: visualização, procura de variantes e invariantes, habilidades de experimentar, explorar modelos, refletir, interpretar, provar, argumentar e sistematizar resultados.

Retomando as idéias de CUOCO et al (1996), para que seja possível desenvolver formas de pensamento matemático, é necessário tomar como exemplo as maneiras como os matemáticos abordam as coisas. Atuando como os matemáticos, unindo às ferramentas da

visualização geométrica as manipulações algébricas, os alunos buscarão a compreensão, a integração dos conteúdos e a percepção de relações entre objetos matemáticos.

No estudo aqui apresentado, propomos uma discussão dos efeitos das transformações geométricas por isometrias de funções polinomiais de primeiro e segundo grau. Se esse estudo é feito com compreensão, é possível que os alunos, utilizando o raciocínio por continuidade, compreendam o que ocorre ao se trabalhar com outros tipos de funções.

Adotando a mesma estratégia dos matemáticos de estender idéias, retomaremos alguns conceitos trabalhados na seção anterior, que abordou as Transformações Geométricas de polígonos, para aplicá-los no estudo das transformações de funções. Merece destaque o fato que uma transformação por definição é uma função e dessa forma as isometrias e homotetias servem como exemplos de funções. Cabe aqui lembrar que é uma abordagem própria dos matemáticos usar e abusar das funções para modelar situações reais e também para integrar conteúdos. Assim, entender as transformações geométricas como funções é uma abordagem importante a ser feita junto a alunos do Ensino Médio e Ensino Superior.

Normalmente, quando falamos de congruência, a associação feita é de triângulos congruentes ou polígonos congruentes. Dificilmente é feita uma associação com o estudo de funções e, por exemplo, com o fato de que podemos ter parábolas congruentes. O texto apresentado busca evidenciar essa noção, assim como outras propriedades das isometrias que levam retas em retas, preservam o paralelismo e o perpendicularismo de retas, preservam distâncias, transformando qualquer figura em outra congruente a ela. A abordagem adotada é aquela explicitada na introdução do Capítulo 3.

3.3.1 Translação vertical nas funções

Seja a função $f : R \rightarrow R$ definida por $y = f(x)$. Dizemos que uma nova função $g : R \rightarrow R$, $y = g(x)$ é obtida a partir de $y = f(x)$ por uma translação vertical, quando $g(x) = f(x) + k$, onde $k \in R$.

A Figura 19 mostra a função identidade $y = x$ e algumas funções obtidas por translação vertical. Primeiramente, a função $y = x$, foi transformada em $y = x + 2$ quando adicionamos 2 unidades às imagens de $y = x$ e a seguir a foi transformada em $y = x - 2$ quando subtraímos 2 unidades às imagens de $y = x$.

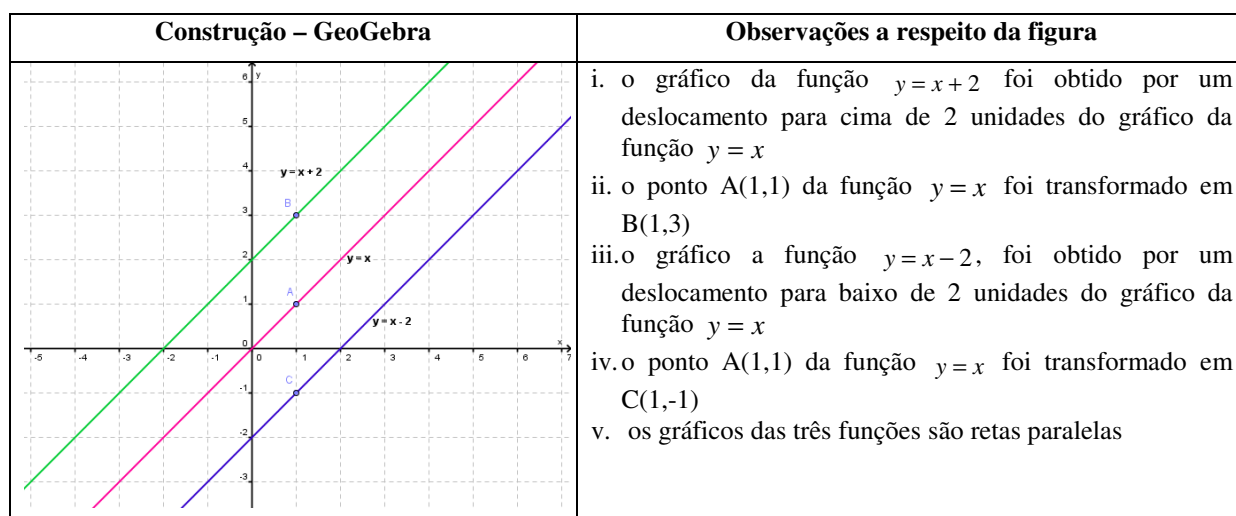


Figura 19 – Translação vertical da função polinomial de 1º grau

Observando as representações gráficas das funções da Figura 20, o aluno pode perceber que ocorreu uma translação vertical e que as retas são paralelas. Observando as expressões algébricas das funções, é possível verificar que a função $y = ax$ foi transformada em $y = ax + k$, sendo k uma constante positiva ou negativa.

O estudo da função afim não costuma ser feito de modo interligado com um estudo de transformações geométricas no plano². É interessante verificar, entretanto que por meio de translações verticais da função linear $f(x) = ax$ obtemos uma nova função, conhecida como função afim. Nesse sentido, Dante (2003) descreve: “O gráfico da função afim $f(x) = ax + b$, com $b \neq 0$ é o gráfico da função $f(x) = ax$ transposto para cima ou para baixo, de acordo com o valor de b .” (p.105).

Mais uma vez é necessário destacar a importância que professor e aluno estejam dispostos a investigar, sempre que possível, formas de interligar idéias e conteúdos.

Um estudo das transformações de funções por translação pode ser desenvolvido também com as funções quadráticas. Essas funções podem ser transformadas em novas funções por movimentos de translação vertical. A função de partida é, nesse caso, a função básica $y = x^2$ que será transladada pelo vetor vertical $\vec{v}$ de módulo 2.

Observando a Figura 20, os alunos podem perceber que a função quadrática $y = x^2$ foi transformada em $y = x^2 + 2$ quando adicionamos 2 unidades às imagens de $y = x^2$ e transformada em $y = x^2 - 2$ quando subtraímos 2 unidades às imagens de $y = x^2$. É possível

² Para um estudo da transformação afim, ver, por exemplo, Lima, 1996.

perceber também, que ocorreu um deslocamento vertical de 2 unidades para cima e para baixo, uma vez que, para um mesmo valor de x , a ordenada do ponto, foi acrescida ou diminuída de 2 unidades quando comparada com o gráfico inicial.

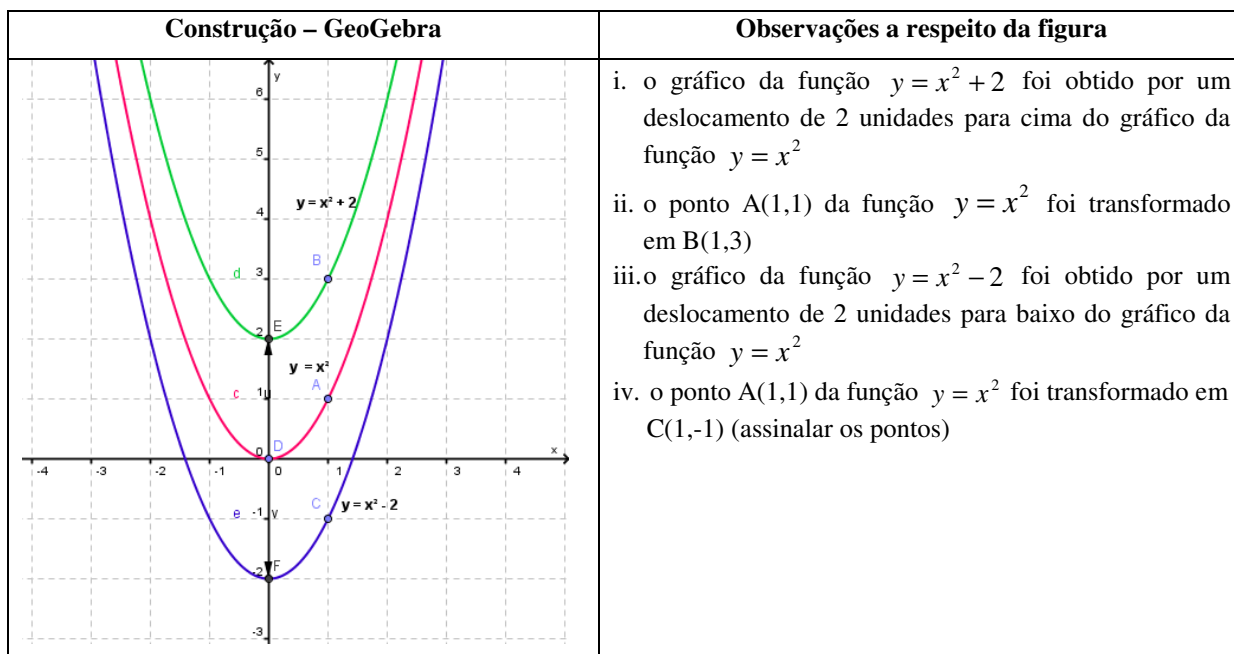


Figura 20 - Translação vertical da função polinomial de 2º grau

Ao trabalhar com as translações verticais das funções quadráticas, podemos investigar acerca do que os livros didáticos afirmam (por exemplo, Dante 2003): o gráfico de $f(x) = ax^2 + k$ é congruente ao gráfico de $g(x) = ax^2$. Utilizando um *software* matemático, como o GeoGebra, essa verificação é facilitada, pois é possível plotar os gráficos das referidas funções e movimentá-los até que eles se sobreponham, comprovando que os gráficos das funções são figuras congruentes e, ao mesmo tempo, verificar a influência do sinal de k na translação vertical ocorrida, além de estabelecer relações entre as coordenadas de pontos do gráfico da função original e das funções transformadas.

3.3.2 Translação horizontal nas funções

Uma maneira interessante para conduzir o processo de compreensão da translação horizontal é propor ao aluno que complete uma tabela (Tabela 3.1) e construa os gráficos das

três funções para que ele perceba o movimento para a esquerda e para a direita. A Tabela 1 permite acompanhar o movimento de deslocamento para a direita ou para a esquerda por meio da análise das coordenadas. Observe que o ponto (0,0) da função $y = 2x^2$ corresponde ao ponto (3,0) na função $y = 2(x-3)^2$ e ao ponto (-3,0) na função $y = 2(x+3)^2$.

Tabela 1 – Imagens das funções quadráticas obtidas por translação horizontal

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 2x^2$				8	2	0	2	8			
$y = 2(x-3)^2$						18	8	2	0	2	8
$y = 2(x+3)^2$	8	2	0	2	8	18					

Fonte: Dante, 2007, p147 (adaptada)

A Figura 21 objetiva possibilitar explorações das movimentações ocorridas com as representações gráficas das funções e as mudanças ocorridas em suas equações. Podemos perceber que os gráficos das funções $y = 2x^2$, $y = 2(x-3)^2$ e $y = 2(x+3)^2$ são congruentes e que o gráfico da função $y = 2x^2$ foi deslocado para a direita ou para a esquerda. Esse movimento pode ser acompanhado, analisando o que ocorre, por exemplo, com o ponto de coordenadas (0,0).

É esperado que os alunos consigam sistematizar as idéias por meio de enunciados do tipo: dada uma função $f : R \rightarrow R$ definida por $y = f(x)$, dizemos que uma nova função $g : R \rightarrow R$, $y = g(x)$ é obtida a partir de $y = f(x)$ por uma translação horizontal, quando $g(x) = f(x+m)$. A função inicial $y = 2x^2$ será transladada pelo vetor horizontal $\vec{v}$ de módulo 3.

Insistimos na idéia da utilização de *softwares* como o GeoGebra para que o aluno possa comprovar a congruência das representações gráficas das funções.

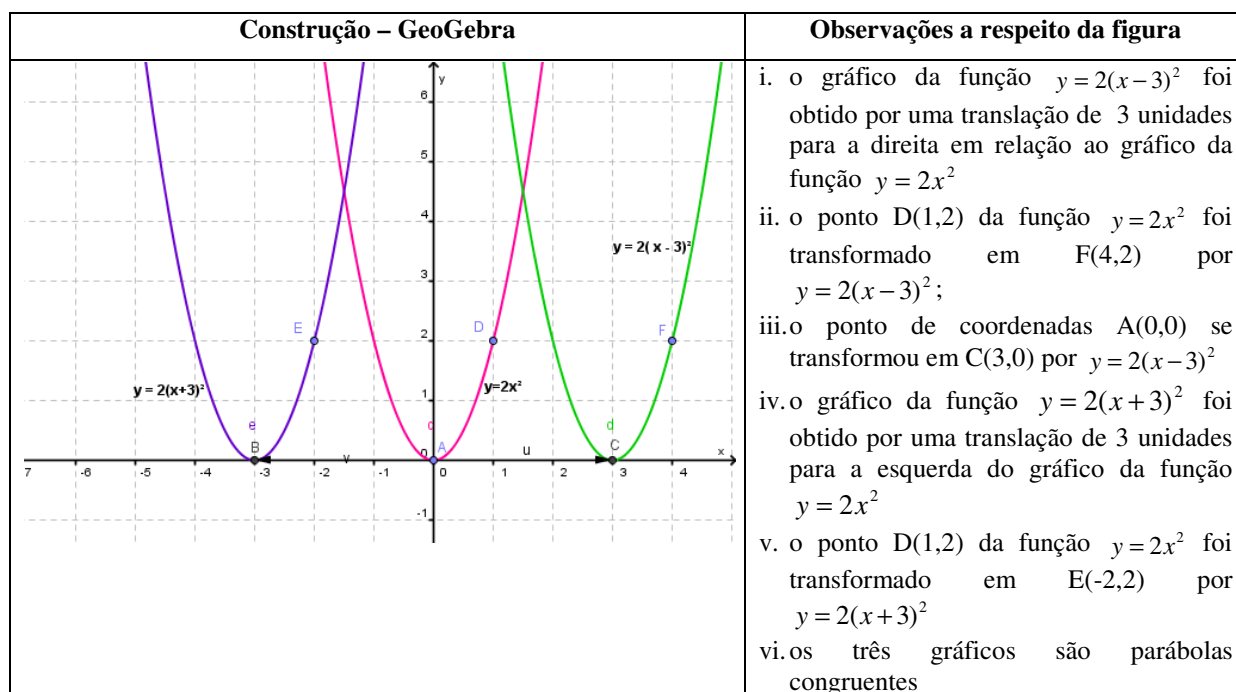


Figura 21 - Translação horizontal da função quadrática

Dante (2003) afirma que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ é congruente ao gráfico de $g(x) = ax^2$, porém sua posição, em valores absolutos, é m unidades à esquerda ou à direita do gráfico de $g(x) = ax^2$, conforme m seja positivo ou negativo. Se $m > 0$, há uma translação horizontal para a esquerda e se $m < 0$, uma translação horizontal para a direita.

Todas as observações e sistematizações podem ser realizadas pelos alunos, trabalhando sob a orientação do professor em um ambiente computacional. Durante todo o processo, o aluno é convidado a mobilizar as formas de pensamento matemático, apoiando-se, de modo especial, na visualização para explorar e levantar conjecturas.

3.3.3 Combinação de translações nas funções

Da mesma forma que podemos combinar isometrias ao trabalhar com polígonos, podemos combinar isometrias no estudo de funções. Uma dessas combinações a ser explorada integra a translação vertical e horizontal.

Retomando as idéias, para que ocorra uma translação vertical, é necessário que a função $y = f(x)$ se transforme em $g(x) = f(x) + k$ e para que ocorra uma translação horizontal, é necessário que $g(x) = f(x + m)$.

A Figura 3.20 mostra a função quadrática $y = 2x^2$ e as funções $y = 2(x-3)^2 + 1$ e $y = 2(x+3)^2 + 2$ obtidas pela combinação de translações.

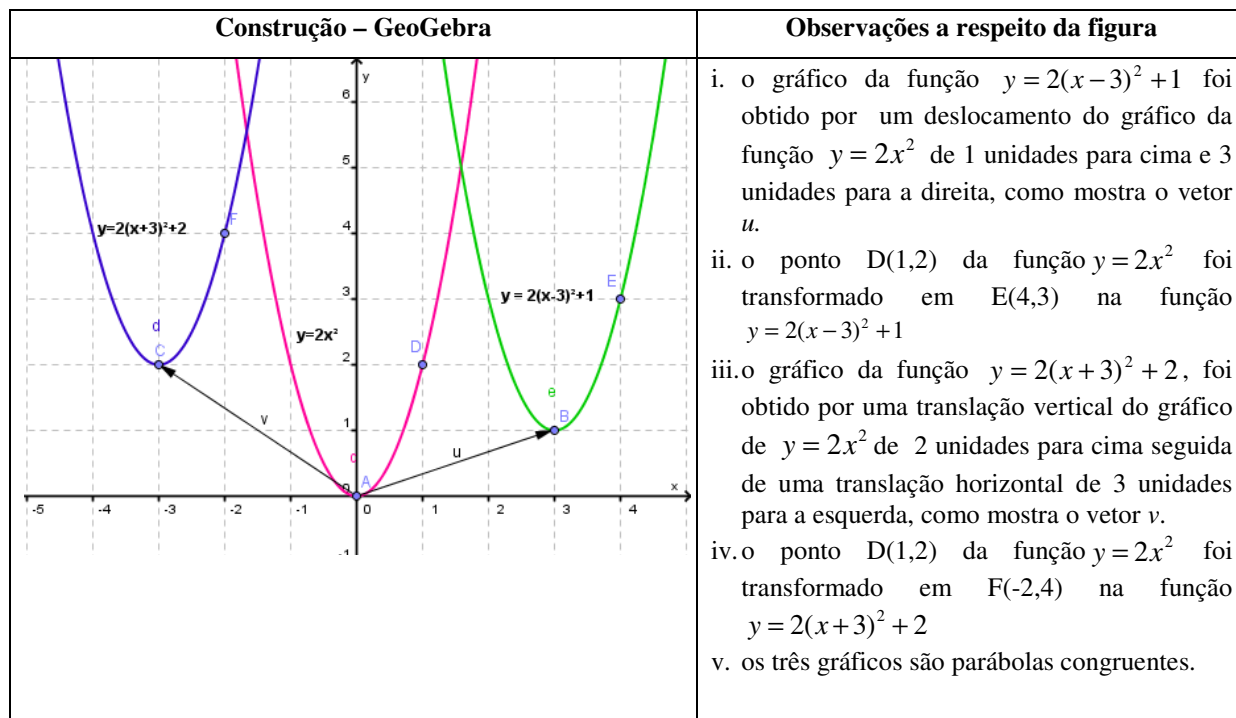


Figura 22 –Combinação de translações na função quadrática.

Sistematizando as observações da Figura 22, o aluno pode verificar que o gráfico de $g(x) = a(x-m)^2 + k$ é congruente ao gráfico de $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$ em ambas as funções), porém sua posição, em valores absolutos, é m unidades à direita ou à esquerda do gráfico de $f(x) = ax^2$, conforme m seja positivo ($m > 0$) ou negativo ($m < 0$) respectivamente e k unidades para cima ou para baixo ($k < 0$), conforme k seja positivo ($k > 0$) ou negativo ($k < 0$) respectivamente. (Dante, 2007).

Villiers (2001) propõe estudos no sentido de combinar os movimentos de translação. O autor sugere partirmos de uma parábola na forma geral $y = ax^2$ e considerarmos a transformação, como mostra a Figura 23, na qual o gráfico da função básica foi deslocada para a esquerda 1 unidade e para baixo 3 unidades.

Portanto, essa transformação envolve as seguintes transformações $y = ax^2 + k$ e $y = a(x-m)^2$, podendo ser representada por $y = a(x-m)^2 + k$ com $m < 0; k < 0$.

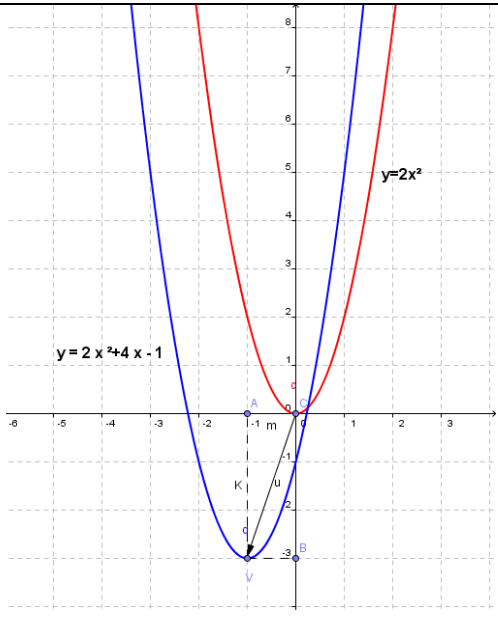
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. o gráfico da função $y = 2x^2$ é uma parábola com vértice no ponto $(0,0)$; ii. o gráfico da função $y = 2x^2 + 4x - 1$ foi obtido por uma translação vertical da função $y = 2x^2$ de 3 unidades para baixo, seguida de uma translação horizontal de 1 unidade para a esquerda; portanto, sua equação pode ser expressa por $y = 2(x+1)^2 - 3$ iii.as coordenadas do novo vértice são $V(-1,-3)$ iv.os dois gráficos são parábolas congruentes

Figura 23- Combinação de translações da função $y = ax^2$

Podemos propor o desenvolvimento da fórmula $y = a(x - m)^2 + k$, obtendo:

$$y = a(x^2 - 2mx + m^2) + k \therefore y = ax^2 - 2amx + am^2 + k \quad (1)$$

Dos gráficos (Figura 22 e 23), podemos perceber que o mínimo (ou máximo) da função transformada ocorre em $x = m$ e vale $y = k$. Se compararmos a equação (1) com a forma padrão da equação de 2º grau $y = ax^2 + bx + c$ (2), teremos que:

$$\blacksquare \quad b = -2am \therefore m = -\frac{b}{2a}, \quad (3)$$

$$\blacksquare \quad \text{Logo, podemos concluir que a abscissa do vértice é } x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$\blacksquare \quad \text{e como } c = am^2 + k \therefore k = c - am^2 \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4), teremos:

$$k = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 \therefore k = c - \frac{ab^2}{4a^2} \therefore k = \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad (5)$$

Como sabemos que na equação de 2º grau $\Delta = b^2 - 4ac$, podemos substituir na equação (5)

$$k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Logo, podemos concluir que a ordenada do vértice é $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

Assim, teremos o vértice da parábola de equação $y = a(x - m)^2 + k$ tem como coordenadas

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

A dedução feita visa resgatar informações já conhecidas do aluno, quando do estudo de equações do 2º grau. Não podemos insistir na demonstração de todos os resultados, mas o aluno precisa ser desafiado, por vezes, a não apenas levantar conjecturas, mas provar sua veracidade. Uma das competências a ser mobilizada é a comunicação de idéias matemáticas (BRASIL, 1999). Faz parte da formação matemática, sobretudo da de um professor, apropriar-se da simbologia matemática e dos processos lógicos, misturando indução e dedução.

3.3.4 Reflexão nas funções

A reflexão em torno da reta r é uma transformação que associa cada ponto P ao seu simétrico P' em relação a uma reta r . Assim, a reflexão em torno do eixo x associa cada ponto $A(x, y)$ o ponto $A'(x, -y)$. Estendendo a idéia, podemos dizer que uma função $f: R \rightarrow R$, definida por $y = f(x)$, é transformada em $y = -f(x)$ por meio de uma reflexão em torno do eixo dos x . Cada ponto do gráfico de f está em correspondência biunívoca com seu simétrico em relação ao eixo das abscissas.

A Figura 24 mostra a representação gráfica das funções $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -x^2 + 2x - 1$.

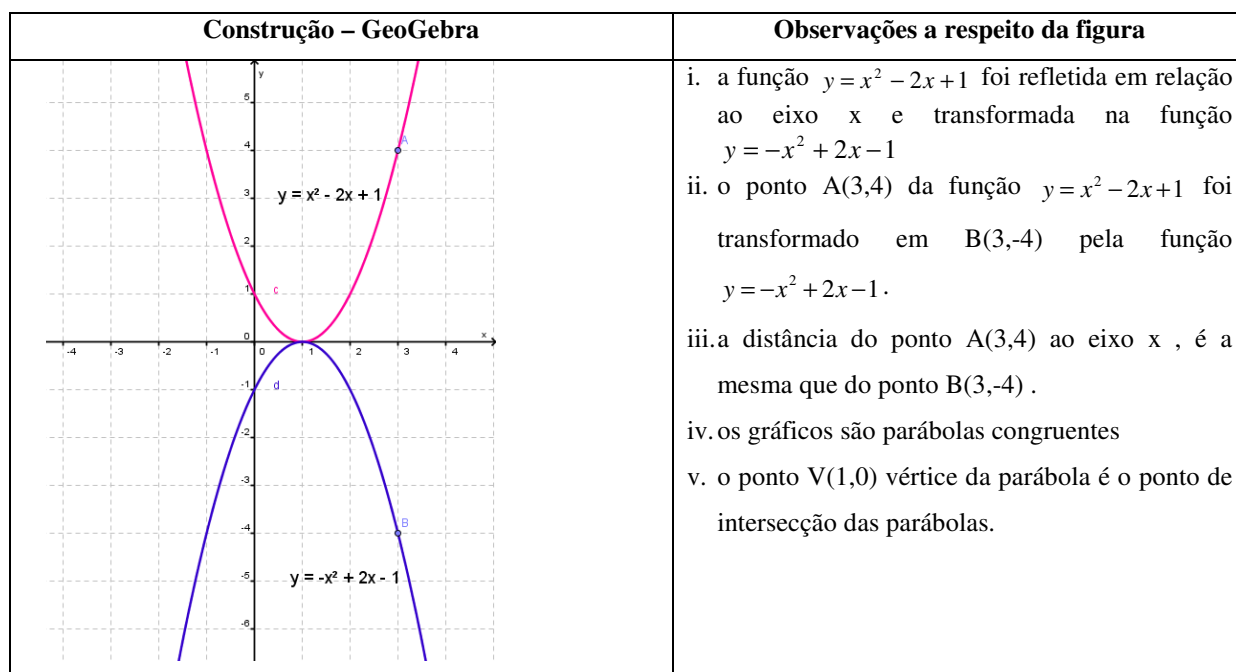


Figura 24 – Reflexão da função quadrática em relação ao eixo x

Observamos que $f(x) = -f(x)$, ou seja, cada ponto de $f(x)$ teve sua imagem multiplicada por -1 . Dizemos ainda que a função $-f(x)$ é simétrica à função $f(x)$ em relação ao eixo x . É possível que o aluno seja orientado no sentido de experimentar e constatar que os gráficos das duas funções são parábolas congruentes, ou seja, os dois gráficos podem ser superpostos, movimento de fácil realização, quando dispomos de recursos computacionais, mais especificamente um *software* de Geometria dinâmica.

Na Figura 25, estão representados os gráficos das funções $y = 2x + 3$ e $y = -2x + 3$. Percebemos que, entre as duas funções, é possível estabelecer a relação: $f(x) = f(-x)$, ou seja, por uma reflexão em relação ao eixo y não há alteração dos sinais dos valores das imagens. Os próprios alunos podem desenvolver essa e uma série de investigações e registrar observações como as exemplificadas na Figura 24, principalmente quando trabalhando em um ambiente computacional, com um *software* como o GeoGebra.

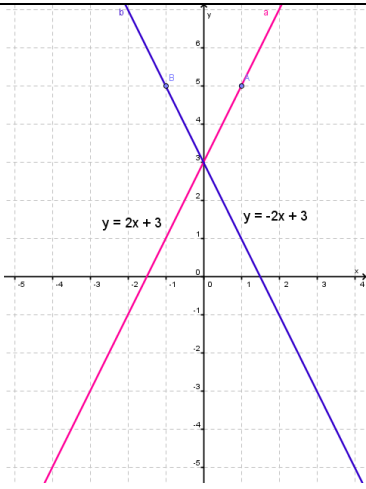
Construção – GeoGebra	Observações a respeito da figura
	i. a função $y = -2x + 3$ foi obtida por uma reflexão da função $y = 2x + 3$ em torno do eixo y. ii. o ponto A(1,5) da função $y = 2x + 3$ foi transformado em B(-1,5) na função $y = -2x + 3$. iii. o ponto A(1,5) mantém a mesma distância que o ponto B(-1,5) em relação ao eixo dos y. iv. o ponto (0, 3) é o único ponto fixo da transformação.

Figura 25 – Reflexão da função polinomial de 1º grau em torno do eixo y

A Figura 26 mostra a representação gráfica da função $f(x) = 2x + 1$ e de sua função inversa, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Percebemos que, quando representamos os gráficos das duas funções no mesmo plano, esses são simétricos em relação à reta $y = x$. Basta observarmos que a função $f^{-1}(x)$ inverte a correspondência definida por $f(x)$, ou seja, o par ordenado (x, y) da função $f(x) = 2x + 1$ foi transformado em (y, x) na função $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Trabalhando em ambiente computacional, os próprios alunos podem criar uma função e investigar a respeito de sua função inversa. Se o professor desejar trabalhar com a função quadrática ou outra função polinomial qualquer, é necessário que faça as devidas restrições em relação ao domínio das funções inversas.

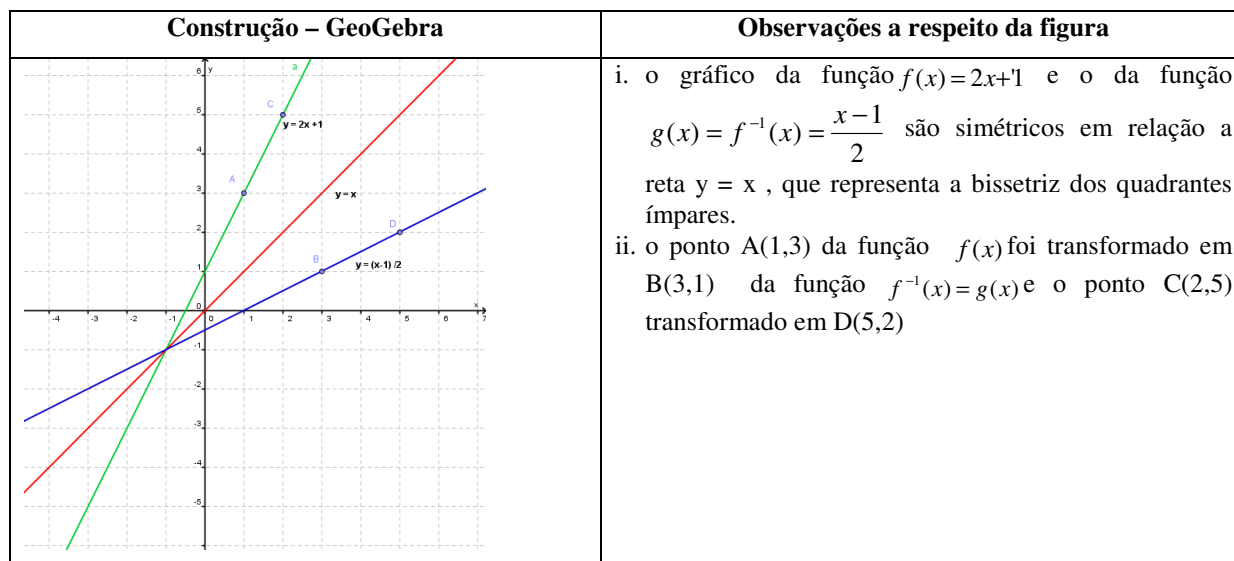


Figura 26 – Reflexão da função polinomial de 1º grau em relação a reta $y=x$

As discussões conduzidas sobre Transformações Geométricas no Plano ilustram parte das reflexões desenvolvidas pela professora-pesquisadora para retomar conceitos importantes na elaboração das atividades, parte do trabalho empírico desenvolvido e, ainda, ampliar e enriquecer o trabalho, visando à elaboração do curso apresentado no Apêndice A. Acreditamos que, se os alunos têm oportunidade de construir os gráficos, experimentar, observar, conjecturar, perceber variantes e invariantes, elaborar justificativas plausíveis para os resultados obtidos, conseguem conectar as transformações geométricas que ocorrem com figuras planas às transformações geométricas que ocorrem com as funções em geral.

Acreditamos, também, que se o trabalho for desenvolvido sob a ótica da investigação matemática e resolução de problemas, os alunos conseguirão explorar algumas formas de pensamento matemático que irão contribuir para que compreendam e articulem os conteúdos. O trabalho desenvolvido em ambiente computacional, como o uso do *software* GeoGebra, pode imprimir uma dinâmica ao processo, tornando-o motivador para alunos e professores.

4 O PERCURSO DA PESQUISA

O professor, ao refletir e sistematizar sua prática escolar produz e renova saberes.
Dario Fiorentini (2006)

Esta pesquisa teve como objetivo investigar as possibilidades de mobilização das formas de pensamento matemático no estudo das Transformações Geométricas no Plano. Foi desenvolvido um trabalho empírico, envolvendo três grupos de estudantes, de diferentes níveis de escolaridade, trabalhando em um ambiente computacional, utilizando o *software* GeoGebra e tendo a atividade investigativa em Matemática como estratégia de ensino

Na primeira seção, caracterizamos o tipo de pesquisa desenvolvida e apresentamos os grupos de estudantes que colaboraram com a pesquisa. Na segunda, apresentamos as fases da pesquisa e, em seguida, descrevemos os instrumentos utilizados para a coleta de dados, justificando a opção do *software* matemático na realização das atividades. Por fim, apresentamos a descrição da seqüência de atividades, seus objetivos e as expectativas em relação ao desempenho dos alunos em cada situação proposta.

4.1. A pesquisa

Na realização desta pesquisa foi adotada uma metodologia de investigação qualitativa, que torna possível observar as ações, os significados dos atos dos alunos e suas produções, as relações entre os sujeitos e o envolvimento deles ao longo da situação pesquisada.

Bogdan e Biklen (1994) assinalam cinco características fundamentais da investigação qualitativa: (i) tem o ambiente natural como fonte direta de dados; (ii) o investigador é o instrumento principal de recolha de dados; (iii) os dados recolhidos são descritivos; o interesse do investigador centra-se, sobretudo, nos processos e não simplesmente nos dados e no produto; (iv) a análise dos dados é feita pelo investigador de forma analítica; (v) o investigador interessa-se por compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Para realizar uma pesquisa qualitativa em educação, o conhecimento teórico a respeito do assunto, os dados, as informações coletadas e as evidências são confrontados, a fim de

elaborar um conhecimento científico sobre o fato pesquisado. Isso exige que o pesquisador “cerque seu trabalho com maior cuidado e exigência, para merecer a confiança dos que necessitam dos seus resultados”(LUDKE, ANDRÉ, 1986, p.9).

Quando o pesquisador tem um tema ou problema ainda pouco definido, ele pode lançar mão da pesquisa exploratória ou diagnóstica, como forma “de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes” sobre a pesquisa. (FIORENTINI & LORENZATO, 2006, p.70)

Para Fiorentini & Lorenzato (2006), a pesquisa exploratória ou diagnóstica:

Funciona como uma sondagem e visa verificar se uma determinada idéia de uma investigação é viável ou não. Essa modalidade de pesquisa também é freqüentemente utilizada como primeira entrada em campo, tendo em vista o levantamento de hipóteses ou a busca de subsídios que permitam um melhor redirecionamento da pesquisa. (FIORENTINI & LORENZATO, 2006, p.70).

Ao desenvolver a pesquisa aqui relatada, consideramos importante lançar mão dessa exploração e sondagem iniciais, como forma de testar idéias, instrumentos e a receptividade dos alunos para o tipo de trabalho proposto.

A pesquisa foi desenvolvida junto a três grupos de estudantes. Integraram o primeiro grupo, alunos da primeira série do ensino médio de uma escola particular de uma cidade do interior de Minas Gerais, uma vez que o conteúdo matemático - objeto da pesquisa - poderia ser desenvolvido na série em curso. Integraram o segundo grupo, alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, selecionados para participar de um mini-curso, ofertado como Atividade Complementar, prevista na grade curricular. O terceiro grupo reuniu alunos de um curso de Especialização Educação Matemática de uma instituição particular de ensino de Minas Gerais. Os três grupos selecionados permitiram que fossem coletados dados de três contextos de ensino diferenciados, compostos por estudantes da escola básica e professores em processo de formação inicial e continuada.

4.2 Fases da pesquisa

As primeiras explorações sobre o interesse dos alunos em trabalhar com transformações geométricas foram feitas com alunos de uma turma de 3º ano de Ensino Médio de uma escola particular de Minas Gerais, na qual a pesquisadora atuava como professora. Nessa fase, foram desenvolvidas atividades, envolvendo isometrias e utilizando apenas papel quadriculado, régua e lápis, além de papel transparente e alfinetes. Uma dessas atividades propunha, por exemplo, que os alunos copiassem os polígonos iniciais e fizessem um giro de 90° e percebessem onde é que o polígono transformado se localizaria no plano. A receptividade dos participantes foi grande e, durante a realização das atividades, eles trocavam idéias, experimentavam, buscando argumentações para justificar os resultados. Embora desenvolvida de forma não muito sistematizada, essa fase exploratória permitiu que se verificasse a importância de uma abordagem do assunto de modo mais investigativo, envolvendo os alunos na busca de padrões, levantando e testando conjecturas. Esse fato incentivou a continuidade dos estudos sobre as formas de pensamento matemático a serem mobilizadas no estudo das Transformações Geométricas no Plano e a análise de *softwares*, para definição daquele que melhor se adequaria ao trabalho a ser conduzido.

A pesquisa propriamente dita foi desenvolvida em um ambiente computacional, utilizando-se o *software* GeoGebra, durante o segundo semestre de 2007 e o mês de janeiro de 2008, em três etapas: a primeira, com 36 alunos da primeira série do Ensino Médio na escola em que a pesquisadora é professora; a segunda com 26 alunos de graduação da Licenciatura de Matemática da mesma cidade, na qual a pesquisadora é coordenadora e professora do curso; a terceira, com 16 alunos de um Curso de Especialização em Educação Matemática de uma universidade de Minas Gerais. O objetivo foi identificar e, ao mesmo tempo, incentivar a mobilização de formas de pensamento matemático no estudo das Transformações Geométricas, propiciando aos alunos experiências matemáticas como: visualizar, experimentar, pensar, inventar, desmontar idéias, buscar padrões e invariantes, comparar, descrever, registrar oralmente e por escrito observações, conjecturas e argumentos, sistematizar resultados e comunicar idéias matemáticas.

Todo o trabalho foi desenvolvido em duplas e essas foram identificadas por D1, D2, ...Dn, como forma de preservar a identidade dos alunos participantes. . A formação inicial das duplas permaneceu inalterada durante todo o trabalho. As atividades foram apresentadas em forma de fichas: uma ficha introdutória, contendo informações sobre o *software* que seria

utilizado durante o trabalho e as demais identificadas pelo número da construção, distribuídas uma por vez, contendo a proposta a ser desenvolvida pela dupla. Ao final de cada atividade, os resultados eram discutidos e socializados com o objetivo de perceber as explorações e descobertas feitas pelos alunos, as conjecturas levantadas e a confirmação ou refutação dessas. Nesse momento, os alunos comunicavam suas idéias e percepções e a professora-pesquisadora desempenhava o papel de orientadora no processo de sistematizar e generalizar os resultados.

Na primeira fase, desenvolvida em outubro de 2007, foi aplicada uma seqüência de seis atividades para 36 alunos da primeira série do Ensino Médio acerca das Transformações Geométricas no Plano: isometrias de reflexão e translação, envolvendo polígonos e funções lineares e quadráticas. O trabalho compreendeu duas sessões de 4h/a cada, totalizando 8 horas aula.

Em novembro de 2007, a mesma seqüência de atividades foi aplicada aos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, sob forma de mini-curso de quatro horas, oferecido na Semana de Licenciatura no segundo semestre de 2007. Participaram desse mini-curso, 26 alunos do quarto, sexto e oitavo períodos. A dinâmica utilizada para a realização das atividades foi a mesma adotada no Ensino Médio, reduzindo-se, porém, o número de atividades, apenas as quatro primeiras, tendo em vista a limitação de tempo.

Em janeiro de 2008, 16 alunos de um Curso de Especialização em Educação Matemática resolveram uma seqüência de quatro atividades acerca das Transformações Geométricas no Plano, sobre as isometrias de reflexão, translação e reflexão e as homotetias, envolvendo polígonos. A sessão teve duração de cinco horas/aula. A dinâmica utilizada na condução do trabalho foi a mesma adotada no Ensino Médio e na Licenciatura de Matemática e as atividades também, exceto as que abordaram as transformações por rotação e homotetia, elaboradas apenas para essa turma.

4.2. Instrumentos para a coleta de dados

A coleta de dados, em todas as fases, deu-se por meio da gravação em arquivos das atividades desenvolvidas pelos alunos no GeoGebra, durante a investigação. Cada atividade desenvolvida no *software* constituiu um arquivo e cada arquivo foi identificado pelo número da construção e os nomes dos componentes da dupla. Além das construções produzidas pelos

alunos, esses conjuntos de arquivos contêm registros de observações, conjecturas e argumentos levantados sobre as idéias exploradas nas investigações. Ao final de cada sessão, o trabalho era enviado para o e-mail da pesquisadora e uma cópia dos arquivos era feita pelos monitores em CD ou *pen drive*, como procedimento de segurança, para evitar a perda de informações. Mesmo cercado de cuidados, alguns arquivos do Ensino Médio e da Licenciatura de Matemática foram perdidos. Alguns alunos, pouco habituados com o manuseio de computadores, enfrentaram dificuldade em salvar seus arquivos: salvaram uma atividade sobre outra ou em pastas que não puderam ser localizadas.

Após cada sessão de atividades do Ensino Médio, a pesquisadora fez um protocolo de observação, identificado como **Protocolo de observação 1** e **Protocolo de observação 2**, de acordo com a data da sessão. Esses protocolos de observação relatam alguns fatos importantes ocorridos durante a realização das atividades, contendo: questionamentos feitos, formas de pensar, atitudes investigativas, comportamentos e atitudes de alguns alunos que poderiam contribuir com a análise dos resultados da pesquisa.

Na sessão com a Licenciatura de Matemática, os momentos de socialização das atividades foram gravados em vídeo, identificado como **Vídeo LM** e alguns diálogos das duplas foram gravados. Apesar de os alunos autorizarem a gravação, percebemos que, de certa forma, a presença da câmera e do gravador inibiu por vezes a participação durante a socialização das atividades desenvolvidas.

Como percebemos que qualquer instrumento distinto dos utilizados em sala de aula tradicionalmente podia interferir na participação dos alunos, optamos por utilizar, como forma de registro junto aos alunos da Especialização em Educação Matemática, apenas o conjunto de arquivos computacionais produzidos no desenvolvimento das atividades e o protocolo de observações da pesquisadora identificado como **Protocolo de observação 3**, feito posteriormente ao desenvolvimento das atividades.

4.3. Opção pelo Software

Na sociedade da informação, estamos reaprendendo a: conhecer e comunicar; ensinar; integrar o humano e o tecnológico; integrar o individual, o grupal e o social. Para ensinar melhor, é necessário aproximar do aluno por meio de caminhos variados: pela experiência, imagem, som, representação, multimídias, pela interação *on-line* e *off-line*. Para que tudo isso

ocorra, é necessário que toda a equipe escolar esteja permanentemente integrada ao processo de atualização, para que possa aprender a mudar suas idéias, sentimentos, valores. (MORAN et al 2003). Nesse sentido, esses autores nos lançam o desafio:

É importante sermos professores/educadores com amadurecimento intelectual, emocional e comunicacional que facilite todo o processo de organização da aprendizagem. Pessoas abertas, sensíveis, humanas, que valorizem mais a busca que o resultado pronto, o estímulo que a repreensão, o apoio que a crítica, capazes de estabelecer formas democráticas de pesquisa e de comunicação, que desenvolvam formas de comunicação autênticas, abertas, confiantes. (MORAN et al, 2003, p.62)

Como professores, podemos ser bem sucedidos se mantivermos uma atitude investigadora, buscando aprender sempre, investindo em inovações de forma ousada, porém equilibrada. Avançaremos mais se conseguirmos equilibrar os conteúdos previstos às necessidades dos alunos, incorporando novidades como a tecnologia, num processo criativo, dinâmico, aberto à pesquisa, ao aprender a aprender e à comunicação. As tecnologias podem nos trazer dados, imagens e informações de forma mais rápida e atraente. Cabe aos alunos, em parceria com o professor, analisar, refletir, interpretar e organizar as informações de forma a elaborar o conhecimento, passando a ser “descobridores, transformadores e produtores do conhecimento”(MORAN et a , 2003)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio incentivam a utilização de tecnologias em suas diferentes formas, em sala de aula, como novas formas de comunicar e conhecer, apoiando a linguagem oral e escrita. Afirmam que a utilização de tecnologias pode facilitar atividades de investigação e exploração em matemática, além de preparar o aluno para o mercado de trabalho.

Buscando uma prática pedagógica investigativa e inovadora, fizemos opção de desenvolver um trabalho de pesquisa, utilizando o *software* Geogebra, considerando a qualidade dele e, principalmente, o fato de ser um *software* livre¹. Trata-se de um *software* de geometria dinâmica, que possibilita realizar construções de pontos, vetores, segmentos, retas, circunferências, transportar distâncias, tirar paralelas e perpendiculares, além de construir gráficos, explorar transformações em funções, tais como translações verticais e horizontais, reflexões etc.

¹ Ele foi desenvolvido por Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg e reúne num só programa geometria, álgebra e cálculo. Está disponível para *download* no endereço eletrônico <http://www.geogebra.org/cms/>

As construções geométricas virtuais produzidas com o Geogebra não ficam estáticas: elas se mexem sob nosso comando. Os pontos geométricos iniciais de uma construção podem ser arrastados com o *mouse* sem destruir as relações matemáticas que vigoram entre eles e os demais objetos. Ele possui dois ambientes: uma janela de geometria e outra de álgebra. Uma expressão na janela de álgebra corresponde a um objeto na janela de geometria e vice-versa, permitindo, assim, a articulação entre as idéias, conceitos, teorias da álgebra e da geometria, “produzindo significado para o conhecimento” e “nutrindo a aprendizagem”(Pais, 2006).

O uso de imagens dotadas de movimento contribui para ocorrer também uma expansão das condições de aprendizagem, uma vez que toda experiência cognitiva passa por diferentes formas de representação, sobretudo pela articulação entre elas. No caso do ensino de geometria a inserção dos computadores na sala de aula amplia as formas tradicionais de representação dos conceitos, porque incorpora elementos como cor, som e movimento e cria representações dinâmicas, que certamente colocam nossas questões para as condições de uma representação semiótica, restrita ao contexto de uma disciplina escolar (PAIS, 2006, p.72)

Os *softwares* matemáticos têm papel importante no processo da visualização. Eles ampliam as possibilidades de visualização, estimulando a investigação, a exploração de idéias, exemplos e contra-exemplos. Atuam como suportes para a organização do nosso pensamento, contribuindo com a oralidade e a escrita. Não devemos, porém, deixar-nos enganar no sentido de acreditar que as rápidas manipulações realizadas pelos *softwares* garantem a compreensão conceitual. É necessário ao professor elaborar propostas educativas para orientar a aprendizagem, considerando as formas de pensar e a organização do conhecimento. (BORBA & VILLARREAL, 2005),

O GeoGebra dispõe de uma série de recursos que permitem a utilização de cores para diferenciar as figuras iniciais e as figuras obtidas por meio das transformações e a identificação de medidas de segmentos, do perímetro, de ângulos e de áreas de figuras que podem facilitar a verificação de congruências ou semelhanças entre figuras geométricas. Permite, também, que gráficos de funções sejam identificados por cores, que se insiram textos com comentários, observações e expressões algébricas que representam as funções, o que contribui para a visualização, a comparação e a identificação dos padrões e invariantes após a realização de uma transformação geométrica. O GeoGebra permite realizar várias explorações e investigações com maior eficiência e rapidez, constituindo-se, por isso, um instrumento importante no desenvolvimento de estratégias de ensino-aprendizagem.

4.5 Descrição das atividades

As seqüências de atividades propostas aos alunos, nas três fases de pesquisa, foram desenhadas com o objetivo de proporcionar uma experiência de exploração e investigação matemática, possibilitando mobilizar formas de pensamento matemático no estudo de Transformações Geométricas no Plano.

As atividades foram reunidas em quatro grupos: os dois primeiros, envolvendo as isometrias (reflexão, translação e rotação) e homotetias de polígonos e, os outros dois, envolvendo isometrias de reflexão e translação de funções polinomiais de 1º e 2º graus.

Em todas as atividades, foram oferecidas oportunidades aos alunos de visualização da figura inicial e das figuras transformadas, levantamento de conjecturas, registro formal e informal das percepções, como forma de desenvolver a argumentação, reflexão sobre os variantes e invariantes. Como o *software* oferece a possibilidade de trabalhar com as duas janelas (algébrica e geométrica) abertas, os alunos foram induzidos a estabelecer conexões entre as duas formas de representação dos objetos matemáticos, interligando as formas de pensamento algébrico e geométrico.

As atividades objetivaram evidenciar e incentivar algumas formas de pensamento matemático como: visualizar, comparar, interpretar, analisar e levantar conjecturas sobre objetos matemáticos e suas propriedades, fazer generalizações e previsões, formular descrições orais e escritas. Todas essas formas de pensamento matemático precisam ser mobilizadas continuamente para que se transformem em hábitos de pensamento. As atividades visaram, ainda, relacionar o estudo de Transformações Geométricas no Plano, envolvendo objetos geométricos - polígonos - e objetos algébricos - funções polinomiais de primeiro e segundo graus.

4.5.1 Atividades do Grupo 1 – Isometria ou Simetria de Reflexão e Translação

As duas primeiras atividades foram comuns em todas as fases da pesquisa e as atividades propostas trabalhavam com as isometrias: reflexão, translação, utilizando o Geogebra. A proposta foi bem detalhada, de modo a oferecer oportunidade ao aluno de se familiarizar com as ferramentas disponíveis no *software*.

O primeiro objetivo dessas atividades foi levar o aluno a perceber que as isometrias (iso = mesma, metria = medida) conservam a forma e as medidas, ou seja, as figuras se mantêm congruentes.

Outro objetivo das duas primeiras atividades foi mobilizar algumas formas gerais de pensamento matemático como: aprender a fazer experiências e explorações, reconhecer padrões e invariantes escondidos em uma situação matemática, fazer generalizações, previsões, formular descrições orais e escritas, incentivar a interpretação e a visualização nas investigações matemáticas. Procurou-se incentivar abordagens específicas dos geômetras e dos algebristas como: buscar semelhanças em situações aparentemente diferentes, usar múltiplos pontos de vista, observar os variantes e invariantes, usar raciocínio proporcional, sistematizar resultados, usar raciocínio por continuidade.

Nas duas primeiras construções, usando a janela de geometria do *software* Geogebra, o aluno deveria criar um polígono qualquer, preferencialmente no primeiro quadrante, para contribuir com a visualização do polígono, com o qual ele iria fazer experimentações e explorações do conceito de isometria ou de simetria, por meio de transformações por reflexão.

Construção 1 – Isometria de Reflexão

- a) Abra um arquivo no GeoGebra e grave como: **construção .: nome da dupla**
- b) Crie um polígono P_1 qualquer preferencialmente no 1º quadrante.
- c) Com a ferramenta “reflexão com relação a uma reta”, clique no polígono P_1 e depois no eixo x. Aparecerá um polígono P_2 , simétrico a P_1 em relação ao eixo x.
- d) Clique novamente em P_1 e depois no eixo y. Agora aparecerá um polígono P_3 , simétrico a P_1 , em relação ao eixo y.
- e) Levante conjecturas a respeito das mudanças que ocorreram.
- f) Observe o que acontece com as coordenadas dos vértices dos polígonos em cada situação experimentada e registre o que você percebeu por escrito.
- g) Use os recursos do programa para mudar a cor dos polígonos, comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos três polígonos. Aconteceu o que você previa ou não? Registre suas observações numa janela de texto.
- h) Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P_1 . Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices, as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos.
- i) Registre o que você percebeu por escrito.
- j) Salve novamente seu arquivo.

A atividade objetivou que o aluno experimentasse e explorasse o conceito de simetria de reflexão em relação ao eixo das abscissas e em relação ao eixo das ordenadas. Para que tais explorações fossem possíveis, a dupla deveria observar as medidas dos ângulos, dos lados, do

perímetro e da área dos polígonos iniciais e os transformados. Utilizando as ferramentas disponíveis no *software*, como “ângulo”, “distância ou comprimento” e “área”, os alunos teriam na tela todas as informações necessárias para realizar as explorações e, dessa forma, sentirem- incentivados a desenvolver algumas formas de pensamento específicas dos geômetras, como observar formas, os padrões e as coisas que mudam e as que não mudam, ou seja, os variantes e invariantes, comparando o polígono original e os transformados.

Em seguida, os alunos foram incentivados a estabelecer conexões entre a Geometria e a Álgebra, buscando representar os vértices dos polígonos por coordenadas no plano cartesiano. Esse fato foi facilitado com o recurso da janela algébrica do Geogebra, pois um ponto assinalado na janela geométrica tem suas coordenadas correspondentes descritas na janela algébrica. Assim, é possível verificar as alterações que ocorrem, a percepção de regularidades, definição de propriedades e estabelecimento de sistematizações algébricas.

Quando se pede para que o aluno utilize a ferramenta “move”, a intenção é que ele perceba que, na transformação geométrica por isometria ou simetria, as formas e medidas se mantêm, mas ocorrem alterações nas coordenadas dos vértices dos polígonos. Nesse momento, esse aluno está sendo incentivado a utilizar formas gerais de pensamento matemático e, baseado em previsões, interpretações e comprovações, formular descrições escritas sobre suas percepções.

Dessa maneira, objetivamos observar, nas duas primeiras construções, se eles detectaram os variantes e invariantes nas simetrias de reflexão e translação para que pudessem, aos poucos, concluir que as simetrias de reflexão e translação são isometrias nas quais a forma, as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área se mantêm e que, portanto, as figuras são congruentes.

Também era esperado que, na construção 1, os alunos percebessem as variações das coordenadas dos pontos, obtendo as sistematizações que: na simetria de reflexão o par ordenado (x,y) do polígono original passa a ser $(-x, y)$ quando esse é refletido em relação ao eixo x e que o par ordenado (x, y) passa a ser $(x,-y)$, quando o polígono é refletido em relação ao eixo y . Fazer o registro informal e formal de suas percepções era parte integrante do conjunto de atividades proposto.

Construção 2 - Isometria de Translação

- a) Abra um arquivo no GeoGebra e grave como: **construção 2: nome da dupla**
- b) Clique com o lado direito do mouse sobre a janela geométrica e a seguir em malha
- c) Crie um polígono P_1 qualquer preferencialmente no 1º quadrante.
- d) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P_1 , se desejar modifique a cor do polígono P_1 para distinguir melhor o polígono inicial.
- e) Crie um vetor vertical $\vec{v}_1$ de origem no ponto (0,0), no sentido positivo do eixo y.
- f) Crie um vetor horizontal $\vec{v}_2$ de origem no ponto (0,0) no sentido positivo do eixo x.
- g) Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique no polígono P_1 e depois no vetor $\vec{v}_1$. Aparecerá um polígono P_2 , obtido de P_1 . Observe o que ocorreu com as coordenadas dos vértices do polígono P_1 . Utilizando a ferramenta “inserir texto”, clique sobre a área de trabalho, registre seus comentários numa janela de texto.
- h) Repita a operação com o vetor $\vec{v}_2$.
- i) Use os recursos do programa para comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos três polígonos. Aconteceu o que você previa ou não? Registre suas observações numa janela de texto.
- j) Agora clique na ferramenta “move” e desloque a extremidade dos vetores. Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices dos polígonos.
- k) Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P_1 . Verifique o que acontece com as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos
- l) Observe o que acontece com as coordenadas dos vértices dos polígonos em cada situação experimentada e registre o que você percebeu por escrito. Salve novamente seu arquivo.

Nessa segunda construção, o foco foi a simetria de translação, compreendendo os dois tipos de translação: vertical e horizontal. Como na construção anterior, os alunos deveriam comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos iniciais e dos polígonos transformados, identificando congruências. Deveriam, também, observar as coordenadas dos vértices como forma de estabelecer conexões entre as duas formas de representação algébrica e geométrica.

Era esperado que os alunos percebessem que, na translação, a figura é arrastada para cima ou para baixo (translação vertical), para a direita ou para a esquerda (translação horizontal), bem como na translação horizontal o par ordenado (x,y) , após a figura ser transformada, passa a ser $(x + a, y)$, sendo a um número real qualquer e, na translação vertical, o par ordenado (x,y) é transformado em $(x, y+ b)$. Novamente foi incentivado que os alunos fizessem o registro informal e formal do que percebiam na construção.

4.5.2 Atividades do Grupo 2 – Isometria ou Simetria de Rotação e Homotetia

As duas atividades a seguir foram propostas somente para o grupo de alunos da Especialização em Educação Matemática, como parte da disciplina que estavam cursando - Tópicos de Geometria Plana.

A terceira construção proposta a esse grupo de alunos envolvia a simetria de rotação. A proposta foi que se construísse um polígono qualquer no 1º quadrante, modificando a cor dele, com o objetivo de contribuir para a visualização e distinção desse como polígono inicial. A seguir, utilizando a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, solicitou-se que fizessem três giros consecutivos de 90° , observando-se o que ocorria com as coordenadas dos vértices do polígono inicial após o polígono ser transformado e registrassem suas observações numa janela de texto do GeoGebra. Logo em seguida, foi solicitado que os alunos utilizassem os recursos do programa para comparar as medidas dos ângulos, dos lados, o perímetro e a área dos polígonos.

Era esperado que os alunos percebessem os variantes e invariantes que ocorrem na rotação em relação a formas e medidas, ou seja: na rotação, os polígonos se mantêm congruentes e as coordenadas dos pontos são alteradas e que fizessem o registro das observações. Era esperado que os alunos conseguissem perceberem que a rotação de 90° em torno do ponto O leva o ponto (x,y) no ponto $(-y,x)$, que uma rotação de 180° em torno do ponto O, leva o ponto (x,y) no ponto $(-x, -y)$ e que uma rotação de 270° em torno do ponto O, leva o ponto (x,y) no ponto $(y, -x)$.

Construção 3 – Simetria de Rotação

- a) Abra um arquivo no Geogebra e grave como: **construção 3: nome da dupla**
- b) Crie um polígono P_1 qualquer preferencialmente no 1º quadrante.
- c) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P_1 , se desejar modifique a cor do polígono P_1 para distinguir melhor o polígono inicial.
- d) Crie um ponto na origem do sistema cartesiano.
- e) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P_1 e em seguida no ponto assinalado. Abrirá uma janela “girar em torno de um ponto por um ângulo” digite 90 e selecione a opção grau ($^\circ$) e peça para aplicar.
- f) Observe o que ocorreu com as coordenadas do polígono P_1 e registre seus comentários numa janela de texto.
- g) Repita a operação para 180° e 270° .
- h) Use os recursos do programa para comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos três polígonos. Aconteceu o que você previa ou não? Registre suas observações numa janela de texto.

- i) Trace circunferências de centro na origem do plano cartesiano e passando pelos vértices do polígono P_1 .
- j) Trace polígonos passando pelos vértices do polígono P_1 . Que tipo de polígonos são estes? O que determina o número de lados deles? Registre suas observações numa janela de texto.
- k) Observe o que acontece com as coordenadas dos vértices dos polígonos em cada situação experimentada e registre o que você percebeu por escrito.
- l) Salve novamente seu arquivo.

Após essa primeira etapa, fizemos uma nova proposta: a de que os alunos traçassem polígonos, passando pelos vértices correspondentes dos quatro polígonos e, a seguir, circunferências de centro na origem do plano cartesiano, passando pelos vértices do polígono inicial. Novamente os alunos foram induzidos a observar os variantes e invariantes, levantando conjecturas e registrando suas percepções em uma janela de texto do *software* Geogebra.

Pretendíamos também investigar: se os alunos percebiam que o polígono traçado pelos vértices correspondentes dos polígonos rotacionados é um polígono regular e que o número de lados desse polígono dependia do ângulo de rotação; que as circunferências de centro na origem do plano cartesiano, passando pelos vértices dos polígonos simétricos, possuíam raio igual à distância da origem do plano cartesiano ao vértice correspondente dos polígonos.

Construção 4 - Homotetia

- a) Abra um arquivo no GeoGebra e grave como: **construção 4 - nome da dupla**
- b) Crie um polígono P_1 qualquer preferencialmente no 1º quadrante.
- c) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P_1 , ferramentas e na opção cor, se desejar modifique a cor do polígono P_1 para distinguir melhor o polígono inicial.
- d) Marque o ponto na origem do sistema cartesiano.
- e) Com a ferramenta “homotetia de ponto por um fator”, clique no polígono P_1 e a seguir no ponto assinalado na origem e aparecerá uma janela onde você deverá inserir um fator (número k). Aparecerá um polígono P_2 , ampliado ou reduzido em relação a P_1 .
- f) Varie os valores de k , faça experimentações com $k > 1$, $0 < k < 1$, $k = 1$, $k < 0$ e registre suas observações. Caso tenha necessidade, use cores diferentes para cada polígono
- g) Use os recursos do programa para comparar os ângulos, as medidas dos lados, o perímetro e a área dos três polígonos. Aconteceu o que você previa ou não? Registre suas observações numa janela de texto.
- h) Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P_1 . Verifique o que acontece com as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos.
- i) Observe o que acontece com as coordenadas dos polígonos em cada situação experimentada. Levante conjecturas sobre suas percepções e registre numa janela de texto. Salve seu arquivo.
- j) Busque argumentos estudados em geometria plana e tente justificá-las
- k) Salve novamente seu arquivo.

A quarta construção envolvia a homotetia. A proposta era que os alunos construíssem um polígono qualquer no 1º quadrante e, a seguir, utilizando a ferramenta “homotetia de ponto por um fator”, construíssem um polígono ampliado ou reduzido em relação ao polígono inicial, experimentando diferentes valores de k (fator de ampliação ou de redução), utilizando $k > 1$, $0 < k < 1$, $k = 1$, $k < 0$ e caso julgassem necessário, usassem cores diferentes para cada polígono, com o intuito de contribuir para a visualização dos polígonos ampliados ou reduzidos.

Novamente, solicitamos que os alunos utilizassem os recursos do *software* para comparar as medidas dos ângulos, dos lados, o perímetro e a área dos polígonos e observassem os variantes e invariantes em relação aos polígonos, as coordenadas dos vértices do polígono inicial e dos polígonos ampliados ou reduzidos. Em várias passagens das construções, era solicitado que os alunos fizessem registros de suas percepções em uma janela de texto do *software* GeoGebra.

Era esperado que os alunos percebessem que a homotetia é uma transformação geométrica que muda o tamanho da figura original, mas preserva a sua forma, tornando assim, os polígonos ampliados ou reduzidos, semelhantes ao original. Esperava-se, também, que os alunos percebessem que as coordenadas dos vértices do polígono inicial (x, y) se transformam em (kx, ky) , onde k é o fator de ampliação e redução. Além disso, era esperado que fizessem sistematizações do tipo: se $|k| > 1$ o polígono é ampliado proporcionalmente, que se $0 < |k| < 1$, ele é contraído de forma proporcional, $k = 1$ a transformação é uma identidade e $k < 0$, produz uma transformação inversa.

4.5.3 Atividades do Grupo 3 - Translação vertical nas funções lineares e quadráticas

As atividades seguintes foram desenvolvidas com alunos da 1ª série do Ensino Médio e da Licenciatura de Matemática. Elas dão ênfase à translação vertical nas funções lineares e quadráticas, buscando evidenciar o raciocínio por continuidade utilizado pelos algebristas, buscando conexão entre as simetrias, as transformações geométricas nos gráficos e as correspondentes mudanças algébricas nas equações das funções.

A quinta e a sexta construções tomavam por base a função $y = x$ e a função $y = x^2$. Nas duas construções, a proposta foi que os alunos mobilizassem visualização ao construírem os gráficos e mudassem a cor da reta ou da parábola inicial. A mudança de cor possivelmente

iria contribuir para que eles pudessem comparar, interpretar e analisar o comportamento das diversas funções. Esperava-se que os alunos observassem que, com a reta $y = x$ ou a parábola $y = x^2$, ocorre uma translação vertical de k unidades e, para um mesmo valor de x , a ordenada do ponto é acrescida de k unidades, o que poderia ser testado, usando a janela algébrica ou a ferramenta que permite exibir as coordenadas de um ponto ao se clicar sobre ele. Assim, as equações das retas, ou das parábolas transladas verticalmente, ficariam $y = x + k$ ou $y = x^2 + k$.

Era esperado que os alunos percebessem que ocorreria uma translação vertical, levantassem conjecturas acerca das suas propriedades e identificassem as mudanças ocorridas e, utilizando as janelas geométrica e algébrica, à medida que fossem experimentando, movessem a reta ou a parábola para cima e para baixo. Era esperado, também, que percebessem que se $k > 0$ há uma translação vertical para cima e se $k < 0$ há uma translação vertical para baixo e registrassem, de forma organizada, suas percepções na janela de texto do GeoGebra e, principalmente, que estabelecessem relações entre as transformações geométricas por meio de translação e os gráficos das funções polinomiais de 1º e 2º graus.

Era importante que os alunos verificassem que, na translação, os gráficos das funções são figuras congruentes, ou seja, há isometria e que as retas e parábolas apenas eram arrastadas no plano cartesiano. Também era desejável que eles percebessem as modificações que a transformação gerava nas representações algébricas das funções, fazendo sempre o registro de suas observações.

Construção 5 – Simetria de Translação na função linear

- a) Abra um arquivo no GeoGebra e grave como: **construção 5 - nome da dupla**
- b) Construa o gráfico da função $y = x$
- c) Para distinguir melhor a reta inicial, com o lado direito do mouse, clique sobre a reta, modifique a sua cor.
- d) Clique sobre a reta, continue segurando o mouse e desloque a reta até o ponto (0,2). Observe a equação da reta na janela de álgebra.
- e) Repita a operação, deslocando a reta até (0,-2). Novamente observe a equação da reta na janela de álgebra.
- f) Explore as três retas e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que aconteceu na janela de texto.
- g) Com a observação que você fez, seria capaz de determinar a equação de uma reta passando por $y = 3$? E por $y = -1$? Tente.
- h) Faça novos registros acerca do que você experimentou.
- i) Salve novamente seu arquivo.

Construção 6 – Simetria de translação vertical na função quadrática

- a) Abra um arquivo no GeoGebra e grave como: **construção 6 - nome da dupla**
- b) Construa o gráfico da função $y = x^2$ e assinale o ponto A de coordenadas (0,0) e modifique a sua cor para distinguir a parábola inicial.
- c) Clique em “mover” e sobre a parábola, desloque o ponto A até (0,2) e observe a equação da parábola na janela de álgebra.
- d) Repita a operação deslocando o ponto A até (0,-2) e observe a equação da parábola na janela de álgebra.
- e) Explore as três parábolas e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que aconteceu na janela de texto.
- f) Com o que você observou você seria capaz de determinar a equação de uma parábola de vértice (0,-1)? E com vértice em (0,3)? Tente.
- g) Faça novos registros acerca do que você experimentou.
- h) Salve novamente seu arquivo.

4.5.4 Atividades do Grupo 4 - Reflexão e translação horizontal combinadas nas funções polinomiais de primeiro e segundo grau

As duas construções seguintes foram desenvolvidas somente com os alunos do Ensino Médio. Elas focalizaram as simetrias de reflexão, de translação horizontal e a translação horizontal e vertical combinadas na função de 2º grau. Como nas duas construções anteriores, elas buscaram estabelecer conexões entre as simetrias de reflexão e translação, as transformações geométricas nos gráficos e as correspondentes mudanças algébricas nas representações algébricas das funções.

Construção 7 - Simetria de reflexão, translação vertical na função quadrática

- a) Abra um arquivo no GeoGebra e grave como: **construção 7 - nome da dupla**
- b) Construa o gráfico da função $y = x^2$ e assinale o ponto A de coordenadas (0,0) e se desejar modifique a sua cor para distinguir a parábola inicial.
- c) Com a ferramenta “reflexão com relação a uma reta”, clique na parábola e depois no eixo x.
- d) Explore as duas parábolas e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que aconteceu na janela de texto.
- e) Clique em “mover” e sobre a parábola de concavidade para baixo, e desloque o ponto A até (0,-2) e observe a equação da parábola na janela de álgebra.

- f) Repita a operação deslocando o ponto A até (0,2) e observe novamente a equação da parábola na janela de álgebra.
- g) Explore as três parábolas de concavidade para baixo e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que aconteceu na janela de texto.
- h) Com o que você observou você seria capaz de determinar a equação de uma parábola com concavidade para baixo e vértice (0,- 3). E com vértice em (0,1)? Tente.
- i) Faça novos registros em relação ao que você experimentou.
- j) Salve novamente seu arquivo.

Construção 8 – Combinação de translações horizontal e vertical na função quadrática

- a) Abra um arquivo no GeoGebra e grave como: **construção 8 - nome da dupla**
- b) Construa o gráfico da função $y = x^2$ e assinale o ponto A de coordenadas (0,0) e se desejar modifique a sua cor para distinguir a parábola inicial.
- c) Agora construa os gráficos das funções $y = (x - 2)^2$ e $y = (x + 1)^2$. Modifique a cor e insira o texto com a fórmula matemática correspondente a cada função.
- d) Salve seu arquivo.
- e) Explore as três parábolas e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que aconteceu na janela de texto.
- f) Agora, construa os gráficos das funções $y = (x - 2)^2 + 3$ e $y = (x + 1)^2 - 2$. Modifique a cor e insira o texto com a fórmula matemática correspondente a cada função.
- g) Explore as duas parábolas em relação as anteriores e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que aconteceu na janela de texto.
- h) Salve novamente seu arquivo.

A construção 7 propunha que, a partir do gráfico da função $y = x^2$, fossem explorados a reflexão da parábola e, a seguir, deslocamentos verticais. A construção 8 propunha a visualização dos gráficos das funções $y = (x - 2)^2$ e $y = (x + 1)^2$ e exploração dos movimentos ocorridos por deslocamentos horizontais e verticais do gráfico da função $y = x^2$. Essas duas atividades tiveram por objetivo levar os alunos a visualizarem a transformação por reflexão, translação horizontal e vertical, bem como explorarem as mudanças que ocorreram nos gráficos e conseqüentemente em suas equações, sempre fazendo registros, de forma clara, em relação às experimentações realizadas.

Era esperado que o aluno percebesse que, ao ser refletida, a parábola muda sua concavidade para baixo e as imagens da função mudam de sinal. Também era esperado que o aluno conseguisse perceber que os gráficos das funções do tipo $f(x) = a(x - m)^2 + k$ são congruentes ao gráfico de $g(x) = ax^2$, porém sua posição, em valores absolutos, é m unidades

à direita ou a esquerda do gráfico de $g(x) = ax^2$, conforme m seja positivo ($m > 0$) ou negativo ($m < 0$) respectivamente e que se $k < 0$ ocorre uma translação vertical para cima e se $k > 0$ ocorre uma translação vertical para baixo. O registro escrito das observações foi solicitado a cada construção feita.

Destacamos que as atividades foram desenvolvidas de acordo com uma abordagem investigativa e introdutória ao assunto de Transformações Geométricas no Plano, objetivando, sobretudo, que os alunos experimentassem um novo recurso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, que não só poderia dar rapidez ao trabalho desenvolvido, como permitiria que as conjecturas levantadas fossem testadas, que construíssem, assim as chamadas “mostrações”. Nos três contextos em que as atividades foram aplicadas, não foi possível o desenvolvimento da etapa de demonstração formal de alguns resultados. Por questões de tempo, limitamo-nos a fazer uma introdução do assunto, o que vem a ser uma limitação do trabalho desenvolvido.

As atividades foram ampliadas e revistas, bem como apresentadas no Apêndice, sob a forma de uma proposta de um curso sobre Transformações Geométricas no Plano, no qual procuramos privilegiar, também, em alguns momentos o desenvolvimento da forma de pensamento matemático dedutivo.

4.6 Critérios de análise dos resultados

A análise dos resultados foi feita, reunindo as atividades em quatro grupos. De modo geral, em cada grupo, buscamos evidências das formas de pensamento matemático mobilizadas pelos alunos ao:

- identificar os variantes e invariantes;
- registrar suas percepções por meio de descrições formais, com idéias organizadas e coerentes;
- participar das discussões durante a socialização da atividade;
- estabelecer conexões entre as formas de representação algébrica e a geométrica, ao utilizarem as janelas do GeoGebra;

Especificamente com relação às atividades que envolveram polígonos e as isometrias de translação, reflexão ou rotação, buscamos evidências se os alunos foram capazes de:

- perceber que as transformações por isometria mantêm a congruência;
- identificar as mudanças que ocorreram com as coordenadas dos vértices dos polígonos;

Com relação às transformações de polígonos por homotetias, procuramos verificar se os alunos foram capazes de:

- perceber que a homotetia gera polígonos semelhantes;
- perceber que homotetias de razão k alteram o perímetro dos polígonos, proporcionalmente à razão k e a área proporcionalmente ao quadrado da razão k .

No estudo das transformações das funções lineares e quadráticas, a análise teve como foco verificar se os alunos foram capazes de:

- estabelecer conexões entre o estudo de transformações geométricas dos polígonos e o estudo das transformações de funções;
- identificar as transformações por isometrias como movimentos no plano que deslocam os gráficos das funções no plano;
- interpretar de forma correta a mudança algébrica ocorrida a partir da transformação geométrica.

A análise foi conduzida, separadamente, em cada contexto de ensino. Buscamos, ao final, identificar similaridades e especificidades do trabalho desenvolvido com cada grupo de estudantes.

5 FORMAS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO MOBILIZADAS PELOS ALUNOS

Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.

Leonardo da Vinci.

Este capítulo apresenta os resultados da pesquisa que buscou investigar, em diferentes contextos de ensino, as possibilidades de mobilizar formas de pensamento matemático, de maneira a contribuir para o estudo de Transformações Geométricas no Plano.

Foi desenvolvido um conjunto de atividades de investigação matemática, contando com o recurso do *software* GeoGebra, conforme descrito no Capítulo 4, junto a alunos da 1ª série do Ensino Médio, alunos de um curso de Licenciatura de Matemática e estudantes de Pós-graduação, fazendo um Curso de Especialização em Educação Matemática. Todas as três turmas desconheciam o *software* GeoGebra, embora alguns alunos da Licenciatura e da Especialização conhecessem outros *softwares* de geometria dinâmica como, por exemplo, o *Cabri-gèomètre*.

A análise dos resultados foi feita, reunindo-se as atividades em quatro grupos. Os resultados foram apresentados segundo cada um desses grupos e cada turma. Procuramos apresentar uma descrição das evidências das formas de pensamento matemático mobilizadas pelos grupos de participantes, de acordo com os objetivos pretendidos com as construções propostas, na busca de similaridades e especificidades do trabalho desenvolvido nos três contextos de ensino. Ao final, é feita uma sistematização comparativa dos principais resultados.

5.1 Formas de pensamento mobilizadas no desenvolvimento das Atividades do Grupo 1

As atividades desse primeiro grupo envolveram duas construções, focalizando as isometrias de reflexão e de translação.

Construção 1 – Isometria de Reflexão

Nessa atividade, os alunos deveriam construir um polígono preferencialmente no primeiro quadrante e explorar sua reflexão em relação ao eixo das abscissas e ao eixo das

ordenadas. Utilizando as ferramentas disponíveis no *software*, comparar formas e medidas, a fim de perceberem a congruência dos polígonos e as alterações nas coordenadas dos vértices.

A atividade foi aplicada nas três turmas e, em todas, a realização da construção demandou, aproximadamente, uma hora, tempo necessário para exploração do *software* e das possibilidades de suas ferramentas, de adaptação à proposta de investigação matemática e realização da atividade em si.

Foi possível perceber que, ao final da atividade, muitos alunos haviam descoberto várias ferramentas do *software* além daquelas exigidas para a atividade de reflexão dos polígonos. Foi grande a vibração dos participantes no momento em que moveram um dos vértices dos polígonos e perceberam que os três polígonos se modificavam simultaneamente e se mantinham congruentes. Destaca-se, a partir desse fato, a importância da utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica, pois as construções ganham cores, movimento e permitem explorações como fazer e desfazer as construções.

Os polígonos construídos foram os mais variados possíveis, triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, polígonos estrelados. Os alunos exploraram as cores em diversos aspectos: segmentos de reta, polígonos, cor de fundo da tela, letras dos textos, etc. A maioria dos alunos convive com esse movimento na tela do computador em vários outros momentos de sua vida, quando utiliza a Internet, por exemplo, mas o movimento acontecer numa aula de Matemática foi simplesmente ‘o máximo’ para eles.

No Ensino Médio, 36 alunos, divididos em 18 duplas, desenvolveram a atividade. A análise dos arquivos produzidos por eles e do Protocolo de Observação 1 (PO1) realizado pela professora-pesquisadora evidenciou que as 18 duplas perceberam que, numa simetria de reflexão, as medidas dos lados, dos ângulos, do perímetro e da área do polígono inicial e dos polígonos refletidos foram invariantes. Perceberam, também, que, ao mover um dos vértices do polígono inicial, todos eles modificam a forma, alterando as medidas na mesma proporção do polígono inicial. Apenas 10 duplas explicitaram o que alterou em relação às coordenadas dos vértices dos polígonos simétricos, o que comprova que a atenção dos alunos estava focada nas figuras construídas e não na janela algébrica, devido à dinamicidade do *software*. As 18 duplas fizeram o registro em forma de texto. A Figura 27 exemplifica que os alunos perceberam a alteração ocorrida com as coordenadas dos vértices.

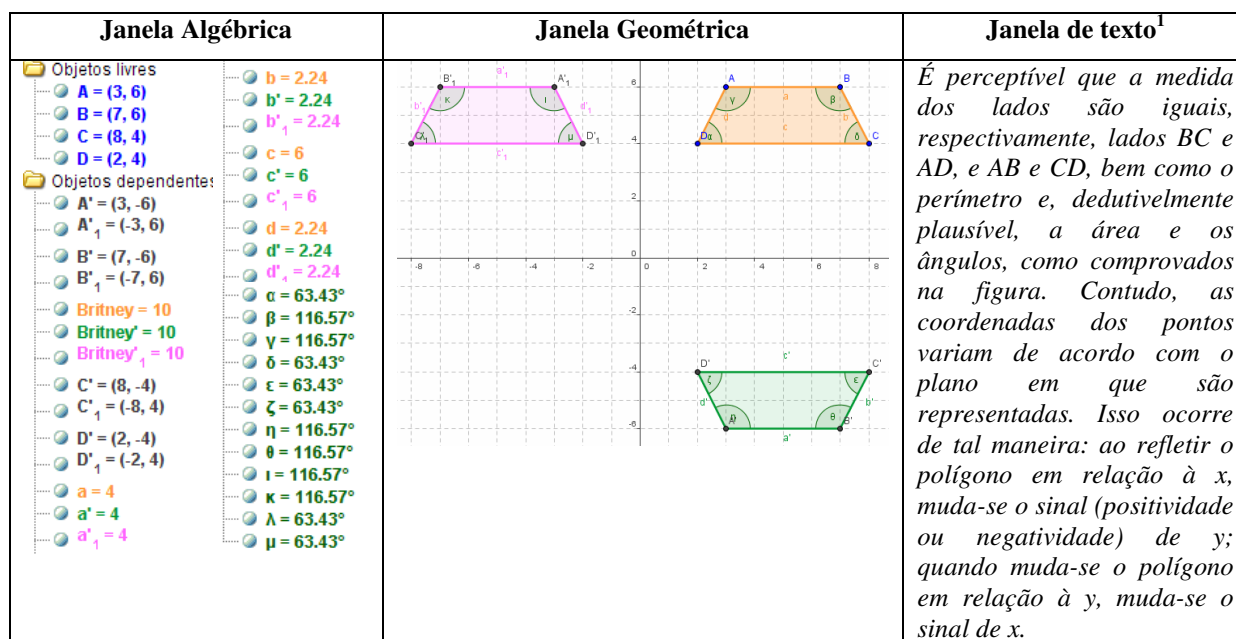


Figura 27 – 1ª construção – D 1 - Ensino Médio

A Figura 28 deixa evidências de que os alunos moveram os vértices do polígono inicial e que, apesar da forma de o polígono inicial variar, são preservadas as medidas dos ângulos, perímetro e área.

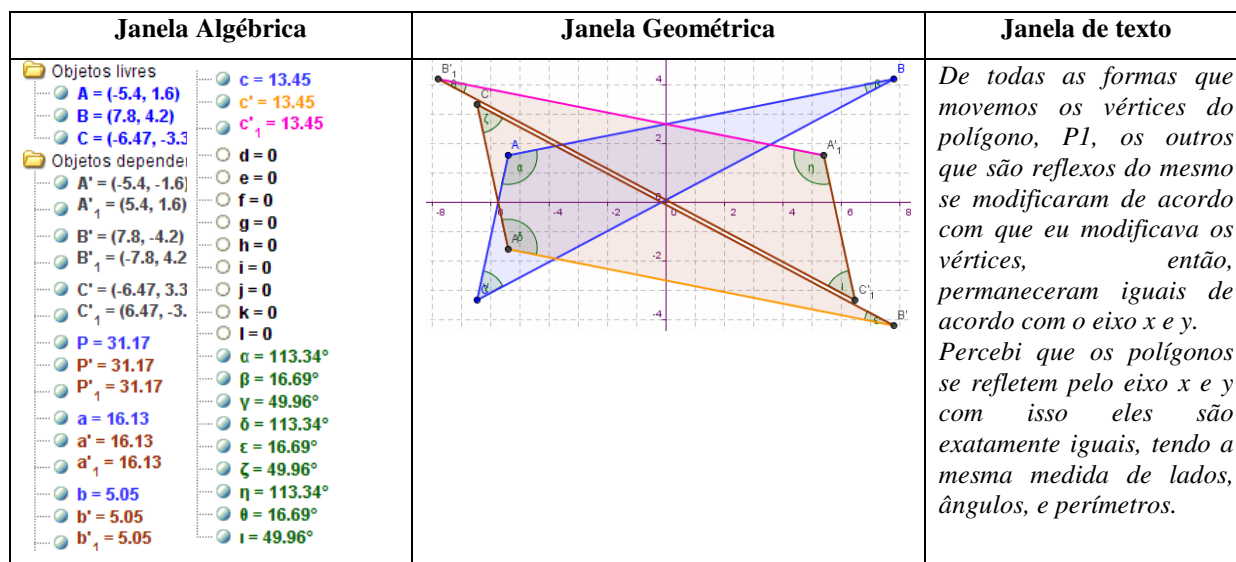


Figura 28 – 1ª construção – D 12 - Ensino Médio

Pela análise dos resultados apresentados nas figuras 27 e 28, é possível perceber que os alunos compararam, exploraram, observaram, reconheceram variantes e invariantes, porém demonstram dificuldades em organizar as idéias em textos matemáticos. Entretanto, durante o

¹ Os registros dos alunos encontram-se reproduzidos literalmente.

momento de socialização das atividades, os alunos conseguiram comunicar suas idéias oralmente, apresentando bons argumentos (PO1).

É possível concluir que, durante a atividade, os alunos evidenciaram algumas formas gerais de pensamento matemático, que contribuem para as articulações dos conhecimentos Matemáticos como: a visualização, exploração e experimentação, comparação de medidas e formas dos polígonos. Evidenciaram algumas estratégias específicas dos geômetras como: observar formas, verificar variantes e invariantes nos polígonos, raciocínio proporcional e outras específicas dos algebristas: observação dos resultados obtidos na janela algébrica, percepção das propriedades relacionadas às coordenadas dos vértices dos polígonos e estabelecimento de abstração algébrica (PO1).

Os registros do protocolo de observação (PO1) e dos arquivos produzidos pelos alunos no GeoGebra permitiram identificar que, apesar de procurarem estabelecer relações entre o que foram experimentando, de levantar conjecturas, buscando argumentos para justificá-las, os alunos apresentaram dificuldades em registrar suas percepções por meio de descrições formais, com idéias organizadas e coerentes. Isso fica claro ao lermos o texto da dupla D15: *“Podemos perceber com a construção do primeiro polígono se comparado com os dois outros construídos através do seu espelhamento, que ao mudar do eixo x para o eixo y que ocorreu seu espelhamento através da mudança de sinais dos pontos”*. Os alunos não conseguiram descrever as mudanças que ocorreram com as coordenadas dos vértices dos polígonos, uma das metas pretendidas com a construção proposta.

Na Licenciatura de Matemática, essa atividade foi desenvolvida por 26 alunos, divididos em duplas e dois deles optaram pelo trabalho individual. Todos os alunos conseguiram desenvolver a atividade até o final, porém duas duplas apresentaram dificuldades em trabalhar com o computador e manusear o *software*, sendo, inclusive, necessária a presença do monitor de Laboratório, que ensinou como salvar um arquivo, criar uma pasta, localizar o *software*, enviar uma mensagem, contendo um anexo por e-mail. A partir daí foi criada uma pasta na rede com o nome da professora-pesquisadora e todos os alunos passaram a salvar seus arquivos nela. Ao final da atividade, o monitor de Laboratório fez o *backup* de todos os arquivos em um CD.

Os alunos da Licenciatura agiram de forma bem diferenciada em relação aos alunos do Ensino Médio. Construíram seus polígonos em forma de triângulos e quadriláteros e partiram para a exploração de medidas dos lados, ângulos, perímetro e área, verificando o que muda e o que não muda nos polígonos, como podemos notar nas Figuras 29 e 30. Deslocaram vértices no intuito de perceber se a forma e as medidas dos polígonos transformados seriam mantidas.

Depararam-se com ângulos externos sendo assinalados nos vértices dos polígonos e buscaram identificar por que tal fato ocorria, como exposto na Figura 30. Um dos alunos, ao se deparar com o fato e não encontrando explicação, perguntou para a turma:

Leopoldo²: “Alguém sabe me explicar porque alguns ângulos estão sendo assinalados do lado de fora da figura?”

E a resposta veio imediatamente pelo aluno

Sandro: “você tem que clicar nos vértices no sentido horário, se fizer o contrário o software assinala os ângulos do lado de fora”(Vídeo LM).

Conclui-se daí que Sandro deu a resposta tão imediata porque, certamente, já havia experimentado assinalar o ângulo no sentido horário e anti-horário e observado os variantes e invariantes que ocorreram na situação.

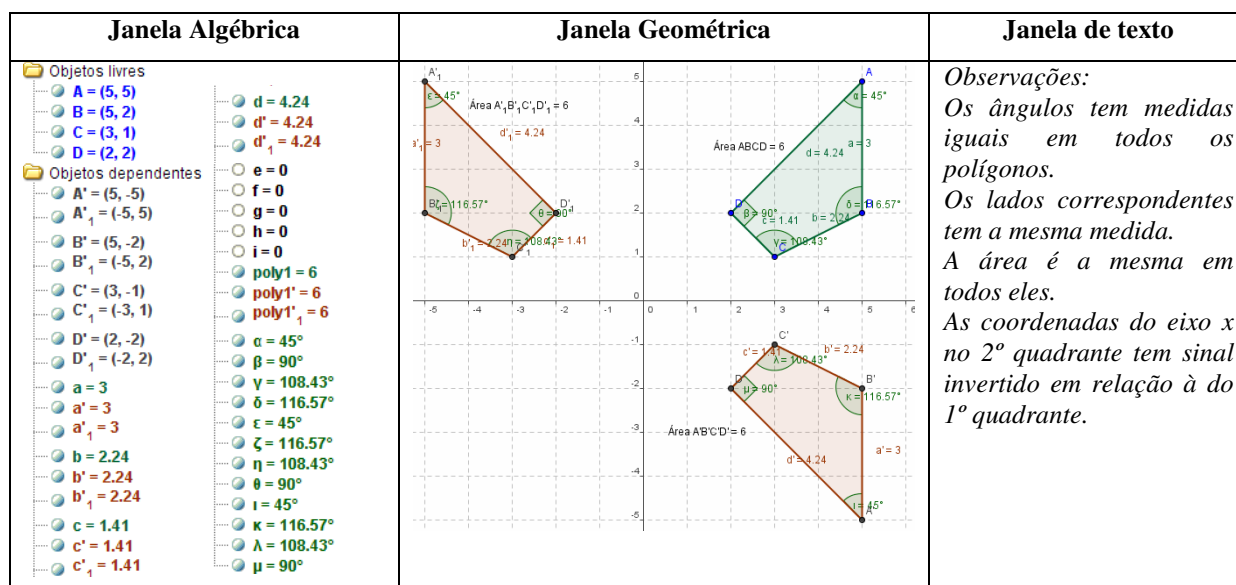


Figura 29 – 1ª construção – D 3 - Licenciatura em Matemática

Os alunos da licenciatura atuaram como verdadeiros matemáticos na busca de padrões que se mantêm ou se alteram, expressaram oralmente idéias matemáticas com linguagem mais adequada que os alunos do ensino médio; porém, apresentaram muitos problemas em redigir textos matemáticos (Figura 30). Seus textos eram curtos, geralmente em forma de tópicos, omitiam pontos importantes exigidos na ficha de atividades, registravam suas descobertas e não o que foi realmente pedido, como pode ser observado na Figura 29. De certa forma, preocupa-nos verificar as deficiências lingüísticas dos participantes, uma vez que esses alunos

² Todos os nomes dos alunos apresentados neste trabalho são fictícios.

serão futuros professores. O fato atua como alerta para os professores das licenciaturas, ressalta a necessidade de se dar uma maior ênfase à linguagem formal matemática.

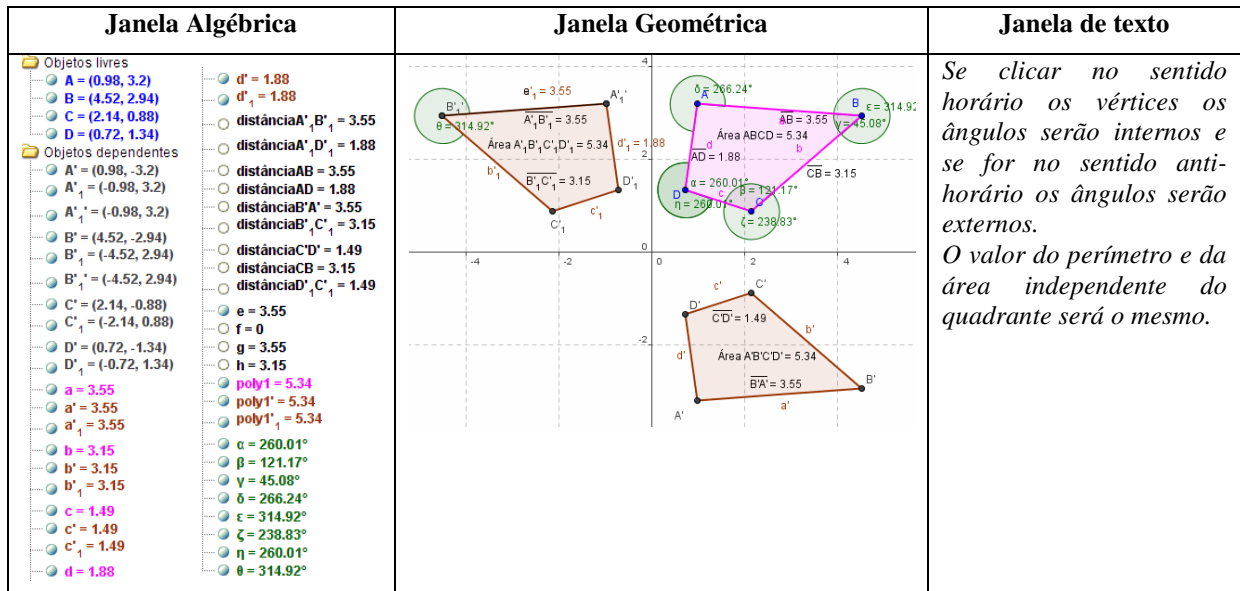


Figura 30 – 1ª construção – D 5 – Licenciatura em Matemática

A professora-pesquisadora acompanhou o trabalho realizado pelo aluno Jorge³ da Licenciatura e percebeu que ele tinha o hábito de não registrar suas percepções (Figura 31). Apesar disso, pôde-se verificar que Jorge tinha explorado, comparado, observado de forma a elaborar suas conclusões, além de ter participado das discussões durante a socialização da atividade, colocando argumentos que demonstravam haver percebido as alterações em relação às coordenadas dos vértices dos polígonos transformados (Vídeo LM).

Duas questões podem ser levantadas a partir desse fato: Que contribuição um curso de Licenciatura de Matemática teve, em relação à formação de estratégias de formalização do pensamento matemático e redação do texto matemático? A dificuldade com relação ao uso da tecnologia pode ter contribuído para a inibição com relação à produção do texto?

Em uma pesquisa realizada por Frota (2002), em um curso de Licenciatura de Matemática, os resultados também evidenciaram “falhas, que refletem o pouco hábito do aluno de comunicar idéias matemáticas de modo escrito” (p.10).

Os PCNEM (1999) destacam como competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática: “produzir textos matematicamente adequados” e “utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação”(p.259). Também o

³ Este aluno, identificado como Jorge (nome fictício), foi acompanhado durante o desenvolvimento de todas as atividades.

parecer nº CNE/CES 1.302/2001 (BRASIL,2001) destaca que, dentre as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos durante os cursos de Bacharel/Licenciaturas em Matemática, estão as capacidades de: “expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão” e “compreender, criticar e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas”. Portanto, como professores da educação básica e formadores de professores da licenciatura de Matemática, temos o desafio de “diminuir a distância entre o discurso que expressa as propostas educacionais e a sua efetiva implementação em sala de aula” (FROTA, 2002, p.13). Precisamos cuidar do desenvolvimento, em nossos alunos, das habilidades e competências de utilizar recursos computacionais e de registro matemático, oral e escrito, principalmente nas licenciaturas, para que esses possam, como futuros professores, conduzir seu trabalho de forma adequada.

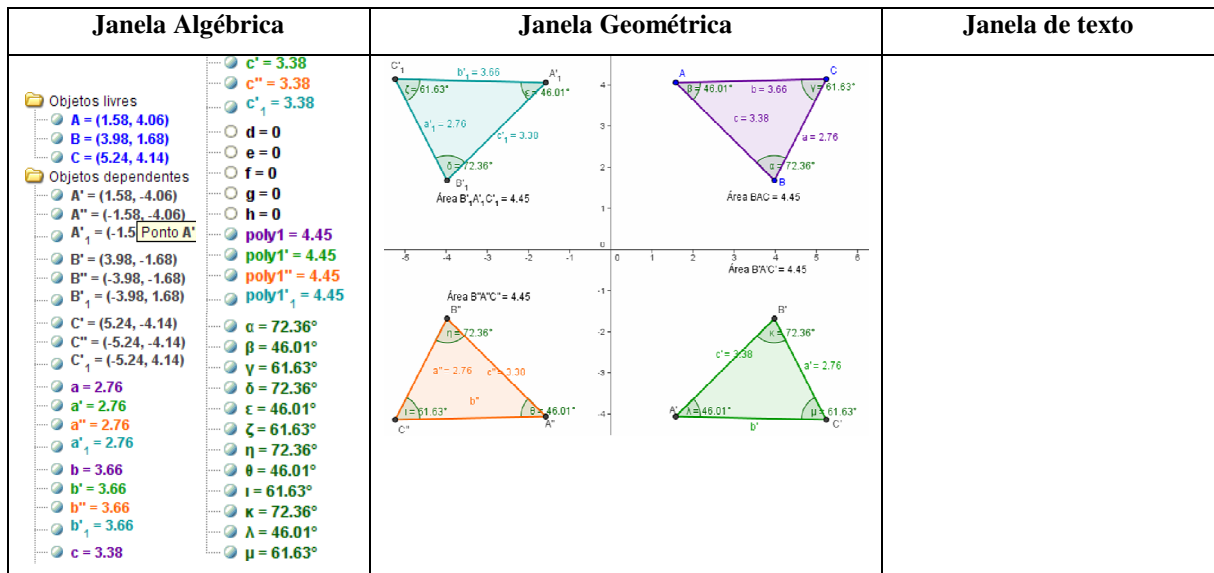


Figura 31 – 1ª construção – D 8 – Licenciatura em Matemática

Na Especialização em Educação Matemática, essa atividade foi desenvolvida com 16 alunos organizados em 8 duplas. Nota-se um crescimento em relação à exploração do *software*: nenhuma dupla apresentou dificuldades no manuseio das ferramentas e todos os arquivos foram salvos e enviados à professora-pesquisadora sem problemas. As 8 duplas exploraram, experimentaram, compararam formas e medidas. Foram capazes de identificar os padrões e invariantes, perceberam as propriedades relacionadas às coordenadas dos vértices, recorreram às janelas geométrica e algébrica, buscando conexões entre elas e, principalmente, registraram suas percepções em forma de textos mais organizados e coerentes. É possível perceber que esses alunos parecem apresentar um maior amadurecimento em relação à

utilização do *software* e em seguir as orientações propostas pela pesquisadora, o que pode ter facilitado, também, a organização das idéias em forma de registro escrito. Observando o texto da Figura 32, podemos perceber que as idéias matemáticas estão bem estruturadas.

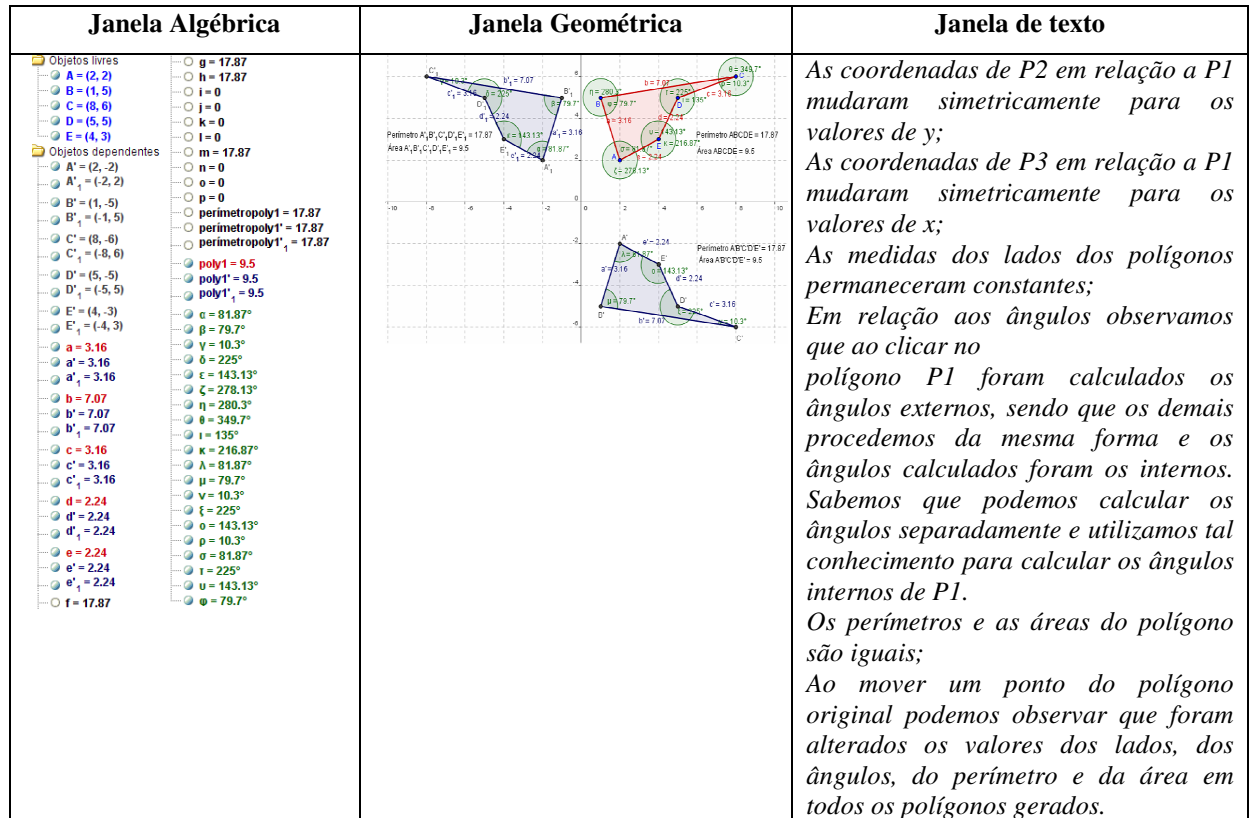


Figura 32 – 1ª construção – D 8 – Educação Matemática

Apenas uma dupla apresentou um texto menos formal, como se pode verificar na janela de texto da Figura 33. Essa dupla, de modo geral, demonstrou maior dificuldade em manusear o *software*, durante as atividades, o que parece evidenciar, talvez, pouca experiência na utilização de recursos computacionais.

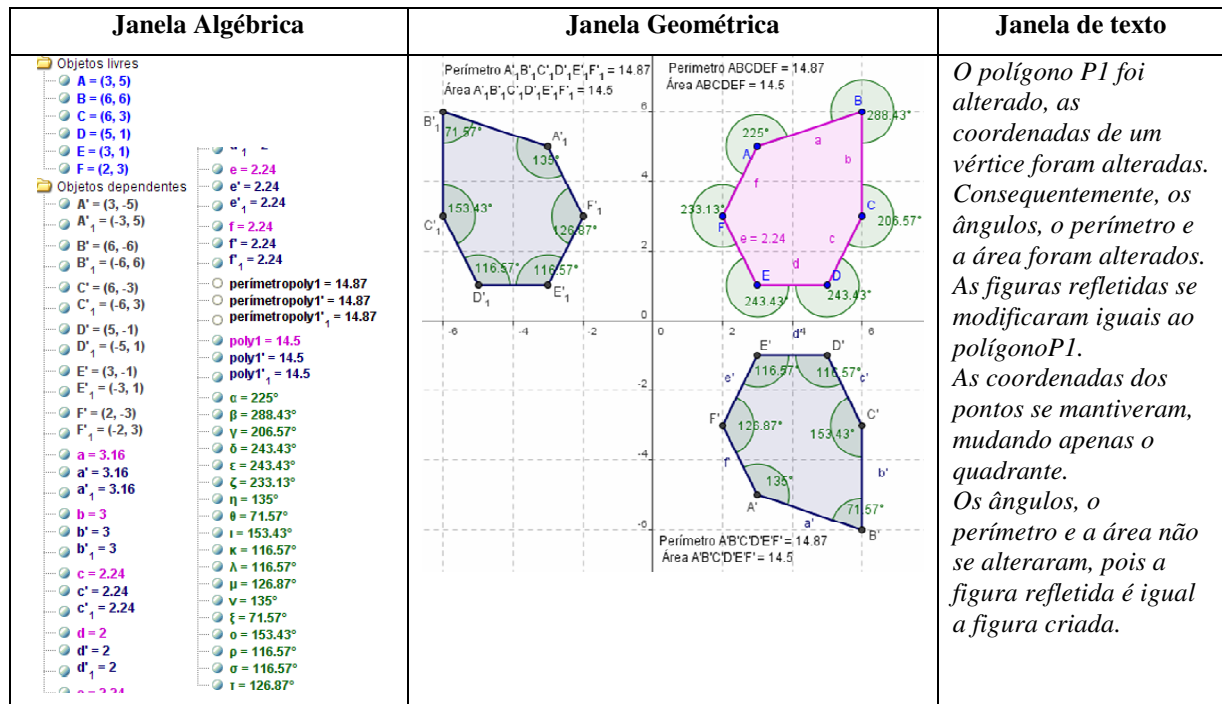


Figura 33 – 1ª construção – D 6 – Educação Matemática

Construção 2 – Isometria de Translação

Nesta atividade, os alunos novamente deveriam construir um polígono e dois vetores de origem no ponto (0,0), um horizontal e outro vertical e explorar as translações horizontais e verticais, paralelas a esses vetores. Esperava-se que utilizassem os recursos disponíveis no *software* para comparar medidas, observar os variantes e invariantes nos três polígonos e fazer o registro escrito das observações numa janela de texto.

Participaram dessa atividade os mesmos alunos da atividade anterior e as duplas foram preservadas, o que demandou um tempo menor, pois os alunos já estavam bem adaptados com o ambiente informatizado como também com as ferramentas do *software*.

Na 1ª série do Ensino Médio, alguns alunos construíram polígonos tão complexos que se perderam e não conseguiam elaborar uma conclusão sobre as transformações que estavam ocorrendo. Foi necessário pedir que construísem polígonos mais simples, tipo triângulo ou quadrilátero, para que pudessem observar analisar e elaborar conclusões.

Conseguiram perceber que, ao “transladar um polígono por um vetor”, os polígonos mantêm a forma, as medidas de lados, ângulos, perímetro e área e que ao usar a ferramenta

“move” a forma dos polígonos se altera, porém eles se mantêm congruentes entre si. Apenas 7 duplas das 18 evidenciaram suas percepções com relação à modificação das coordenadas, explicitando que, ao mover o polígono verticalmente para cima ou para baixo, a forma do polígono se mantém, mas o valor de y se altera, assim como, ao mover polígono horizontalmente para a direita ou para a esquerda, o que sofre alteração é o valor do x (Figura 34).

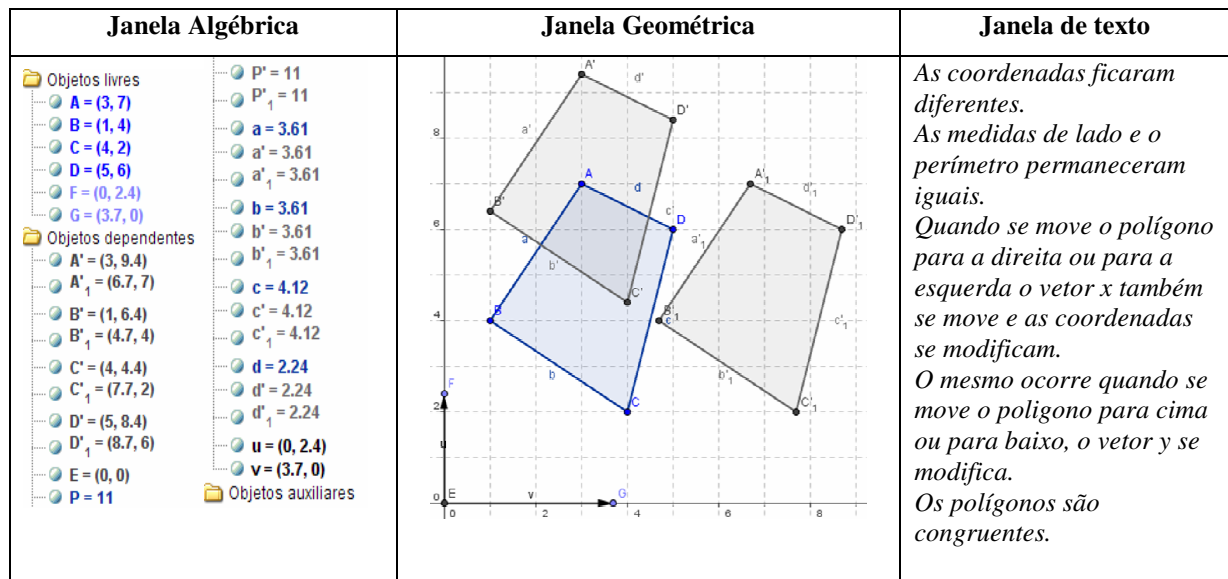


Figura 34 – 2ª construção – D 3 - Ensino Médio

Com relação ao registro, nota-se, mais uma vez, a dificuldade de organização das idéias na elaboração dos textos. Percebe-se claramente que os alunos não têm o hábito de registrar suas conclusões em Matemática. Essa dificuldade de registrar as informações fica evidente inclusive pelos erros de ortografia que aparecem nos textos criados por eles, conforme se vê na janela de texto da Figura 35.

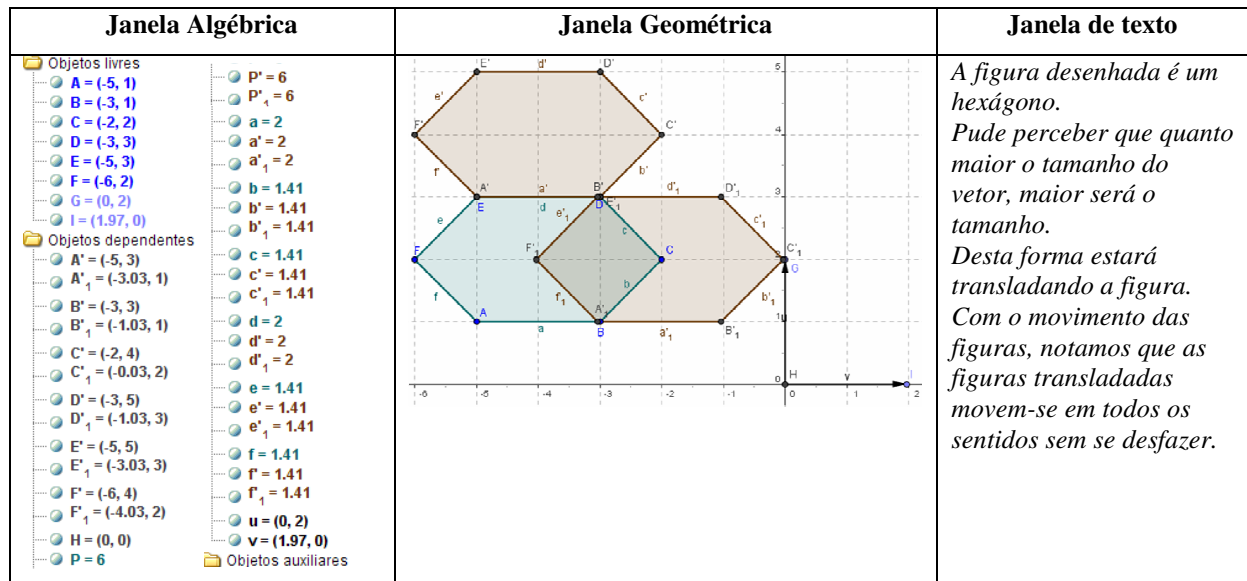


Figura 35 – 2ª construção – D 6 - Ensino Médio

Nesse sentido, conclui-se que: se uma das finalidades do Ensino Médio é levar o aluno a expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas (BRASIL, 1999, p.254), precisamos oferecer mais oportunidades ao aluno de investigações matemáticas nas quais eles tenham oportunidades de discutir, produzir textos matemáticos, utilizando formas variadas.

Na Licenciatura de Matemática, os participantes foram os mesmos da atividade anterior. Analisando os arquivos produzidos, percebe-se que 3 duplas não registraram nenhuma informação com relação a suas explorações e percepções; 2 duplas perderam seus arquivos; 8 duplas registraram que, ao “transladar um polígono por um vetor”, os polígonos mantêm a forma, as medidas de lados, ângulos, perímetro e área e que, ao usar a ferramenta “move”, a forma dos polígonos altera, porém eles se mantêm congruentes. Apenas 3 duplas expressaram suas percepções com relação à modificação das coordenadas, concluindo que, ao mover o vetor vertical, altera-se o valor de y e ao mover o vetor horizontal o que sofre alteração é o valor de x.

Uma dupla se destacou em relação ao registro das percepções, sendo mais detalhista nessa atividade, conforme se observa na Figura 36.

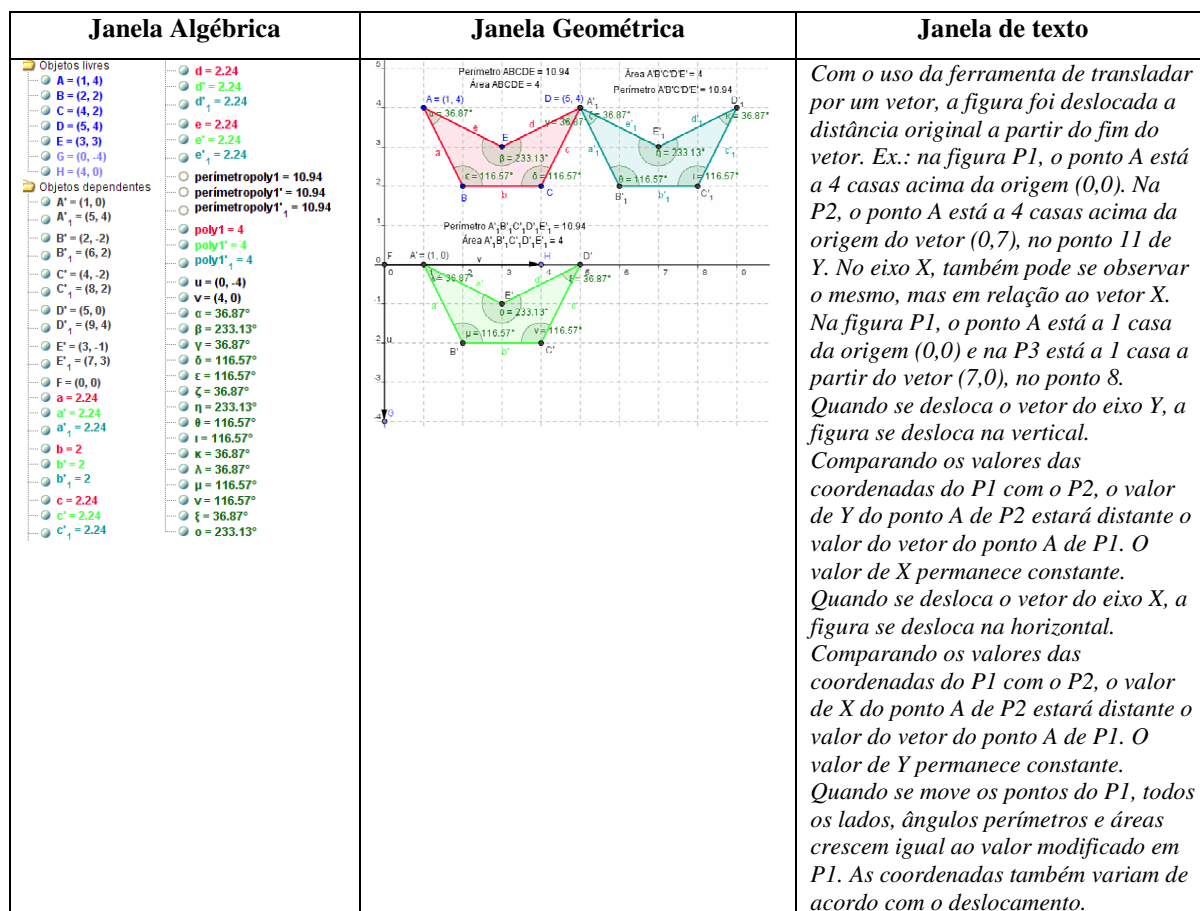


Figura 36 – 2ª construção – D 3 – Licenciatura em Matemática

A professora-pesquisadora novamente acompanhou o trabalho de Jorge que explorou todas as propostas contidas na ficha, mas não fez nenhum registro de suas observações. Optamos por reproduzir o arquivo do GeoGebra na forma original enviada pelo aluno e é possível verificar a ausência de texto escrito (Figura 37).

Ao ser questionado pela professora-pesquisadora acerca do motivo de não registrar, ele respondeu: “Pra que registrar se eu já sei tudo o que está acontecendo e posso falar o que percebi!” (Vídeo L M). Esse fato demonstra a pouca valorização que esse aluno dá ao registro escrito e formalizado de suas idéias matemáticas. Novamente, precisamos refletir sobre o tipo de profissionais que queremos formar na Licenciatura e que professor ele será quando entrar no mercado de trabalho.

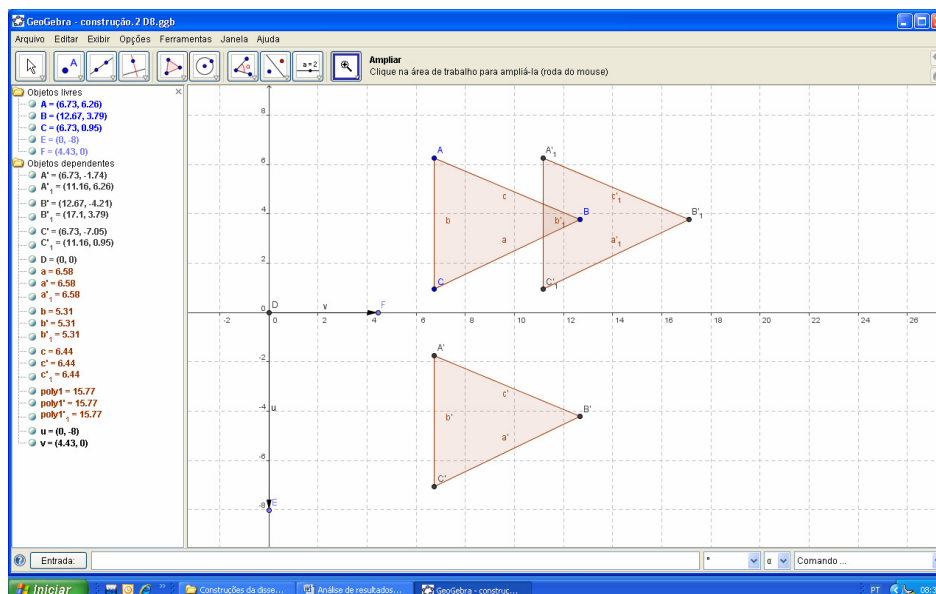


Figura 37 – 2ª construção – Jorge – Licenciatura em Matemática

Provavelmente, esse professor não terá a preocupação de desenvolver a estratégia de formalização das idéias matemáticas em seus alunos. Porém, outro questionamento se faz necessário neste momento: Será que ele não está reproduzindo o modelo de aula de Matemática que teve durante sua vida escolar?

Nesse sentido, Pires (2002) aponta que todos os professores de um curso de licenciatura, sejam eles responsáveis pela área pedagógica ou pela área de conhecimentos específicos de matemática, devem “estar atentos ao fato de que estão formando professores e que portanto estão fornecendo *modelos*⁴ do que é ser professor”. A autora chama atenção, ainda, para o fato de que, se o aluno da licenciatura não teve oportunidade de desenvolver habilidades e competências ele próprio, como poderá desenvolver essas habilidades em seus alunos.

O grupo de alunos da Especialização em Educação Matemática se manteve inalterado, com as 8 duplas iniciais. Essas resolveram mais rapidamente as tarefas e conseguiram traçar os vetores horizontal e vertical e perceberam que ao “transladar os polígonos por um vetor” eles mantêm a forma e as medidas dos ângulos, dos lados, o perímetro e a área. Os registros escritos foram organizados e coerentes (Figura 38); apenas uma dupla não explicitou a mudança ocorrida com as coordenadas dos vértices ao transladar os polígonos. Assim percebemos que 87,5% dos participantes conseguiram estabelecer conexões entre a janela algébrica e a geométrica do Geogebra, demonstrando perceber as propriedades da simetria,

⁴ grifo nosso.

observando que, na translação horizontal, as coordenadas dos pontos se transformam em $(x+a, y)$ e, na translação vertical, as coordenadas dos pontos são transformadas em $(x, y+b)$, como era esperado pela professora-pesquisadora.

Janela Algébrica	Janela Geométrica	Janela de texto
Objetos livres $A = (3, 7)$ $B = (1, 4)$ $C = (4, 2)$ $D = (5, 6)$ $F = (0, 2.4)$ $G = (3.7, 0)$ Objetos dependentes $A' = (3, 9.4)$ $A'_1 = (6.7, 7)$ $B' = (1, 6.4)$ $B'_1 = (4.7, 4)$ $C' = (4, 4.4)$ $C'_1 = (7.7, 2)$ $D' = (5, 8.4)$ $D'_1 = (8.7, 6)$ $E = (0, 0)$ $P = 11$ $P' = 11$ $P'_1 = 11$ $a = 3.61$ $a' = 3.61$ $a'_1 = 3.61$ $b = 3.61$ $b' = 3.61$ $b'_1 = 3.61$ $c = 4.12$ $c' = 4.12$ $c'_1 = 4.12$ $d = 2.24$ $d' = 2.24$ $d'_1 = 2.24$ $u = (0, 2.4)$ $v = (3.7, 0)$ Objetos auxiliares	Diagram illustrating the translation of a quadrilateral $ABCD$ by vectors u and v. The original quadrilateral $ABCD$ has vertices $A(3, 7)$, $B(1, 4)$, $C(4, 2)$, and $D(5, 6)$. The translated quadrilaterals $A'B'C'D'$ and $A_1B_1C_1D_1$ are shown, both having the same area (17) and perimeter (18.38) as the original. The vectors $u = (0, 2.4)$ and $v = (3.7, 0)$ are used for the translations.	Ao transladar o polígono pelo vetor vertical, foi construído um novo polígono com o valor da coordenada y de cada vértice acrescida do módulo do vetor. Ao transladar o polígono pelo vetor horizontal, foi construído um novo polígono com a coordenada x de cada vértice adicionada ao módulo do vetor. Aconteceu o que prevíamos. As medidas dos lados, dos ângulos, do perímetro e da área dos três polígonos são iguais. Ao deslocar a extremidade dos vetores, observamos que é possível alterar o seu módulo e seu sentido, mas não é possível alterar sua direção. Se for deslocada a extremidade do vetor vertical, a coordenada y de cada vértice é alterada em relação ao módulo e sentido do vetor. Se deslocarmos o vetor horizontal, a coordenada x de cada vértice será alterada da mesma forma. As medidas dos lados, dos ângulos, do perímetro e da área dos polígonos permanecem inalteradas.

Figura 38 – 2ª construção – D 2 – Educação Matemática

5.2 Formas de pensamento mobilizadas no desenvolvimento das Atividades do Grupo 2

As atividades compreenderam duas construções, envolvendo isometrias de rotação e homotetias.

Construção 3 – Simetria de Rotação

Nessa atividade, os alunos novamente deveriam construir um polígono e, utilizando a ferramenta do GeoGebra, “girar em torno de um ponto por um ângulo”, fazer três giros consecutivos de 90° no polígono. Em seguida, utilizando os recursos disponíveis no *software*, deveriam explorar os variantes e invariantes, após feitas as transformações geométricas e registrarem as observações.

A atividade envolvendo rotação dos polígonos foi desenvolvida apenas pelos alunos da Especialização.

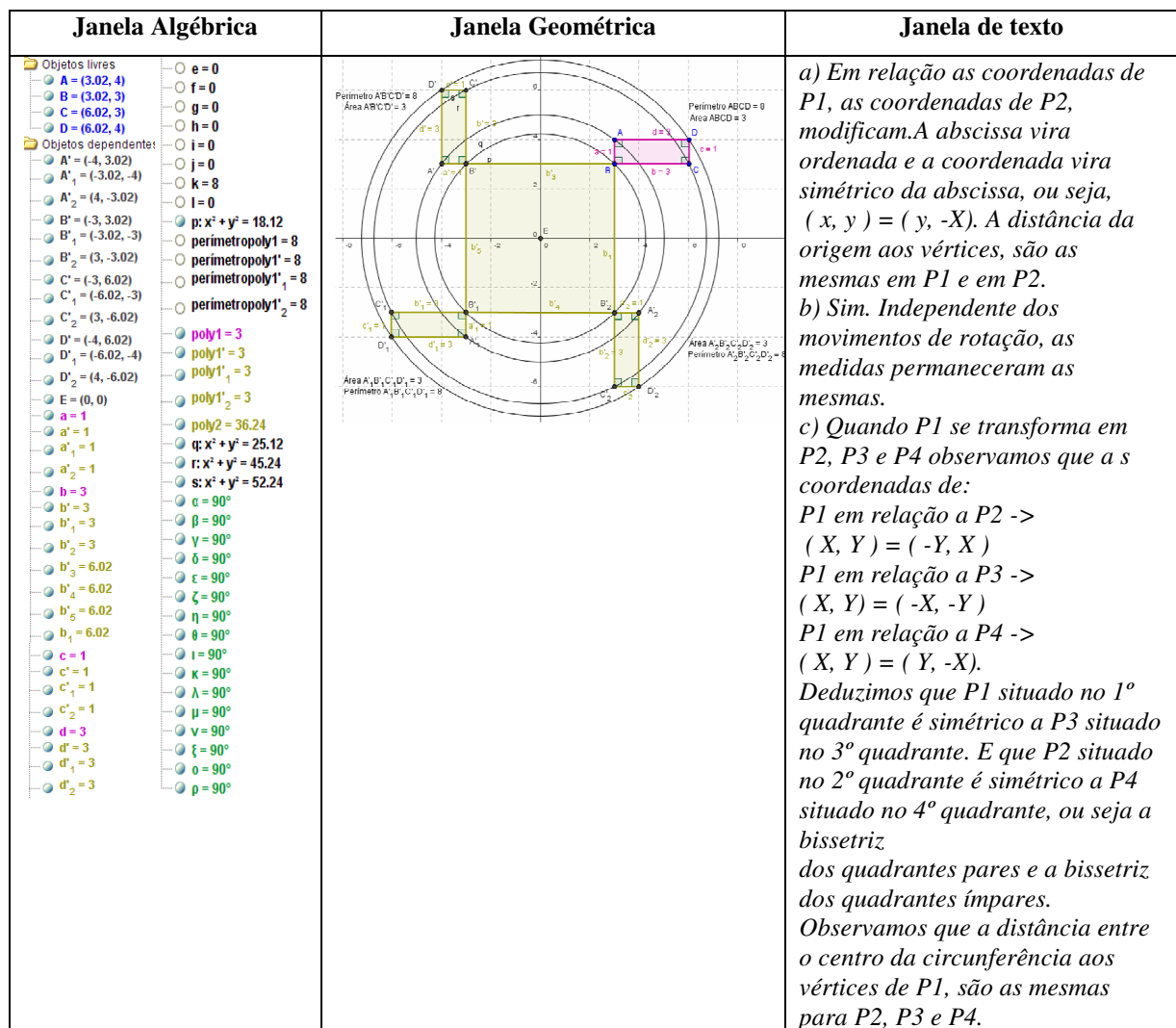


Figura 39 – 3ª construção – D 3 – Educação Matemática

As oito duplas participantes dessa atividade conseguiram fazer “girar em torno de um ponto por um ângulo” os polígonos construídos. Sete duplas perceberam as alterações ocorridas com as coordenadas dos vértices dos polígonos ao serem rotacionados, deixando registros contendo essas informações, como é o caso da D 3 (Figura 39).

Apenas uma das duplas não conseguiu traçar o polígono e a circunferência de centro na origem do plano cartesiano, passando pelos vértices correspondentes dos quatro polígonos rotacionados. Essa dupla alegou que o polígono construído era estrelado e por isso não conseguiram concluir o trabalho. Vejamos a construção feita (Figura 40).

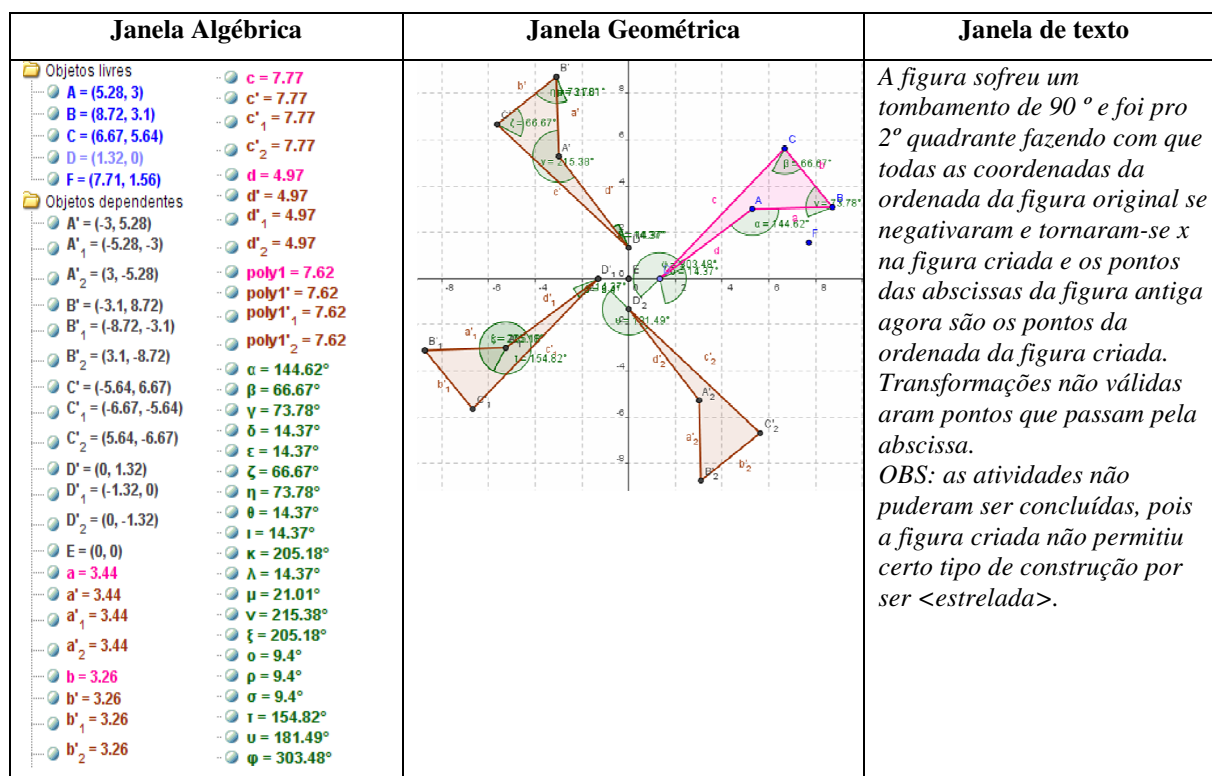


Figura 40– 1ª construção – D 1 – Educação Matemática

Apesar da alegação dos alunos, foi possível analisar os arquivos produzidos, explorando-os e concluir a tarefa iniciada por eles, não encontrando nenhuma restrição para a construção dos polígonos e circunferências, passando pelos vértices correspondentes dos quatro polígonos (Figura 41)

A partir desse fato, é possível levantar alguns questionamentos: Será que mais uma vez houve problemas com relação ao computador que os alunos estavam usando e eles realmente não conseguiram concluir a tarefa, ou a atividade se tornou cansativa para a dupla a ponto de os alunos se recusarem a concluir a atividade?

Um cuidado na condução de tarefas em ambientes computacionais é evitar que as tarefas sejam repetitivas, ou ainda, levar em conta o cansaço por parte de alguns e a pressa por parte de outros. As variáveis envolvidas na sala de aula são muitas e demandam atenção redobrada do professor.

Novamente, optamos por apresentar também a figura em forma de foto da tela do computador, para que o leitor possa verificar e perceber as pequenas alterações realizadas na construção da dupla.

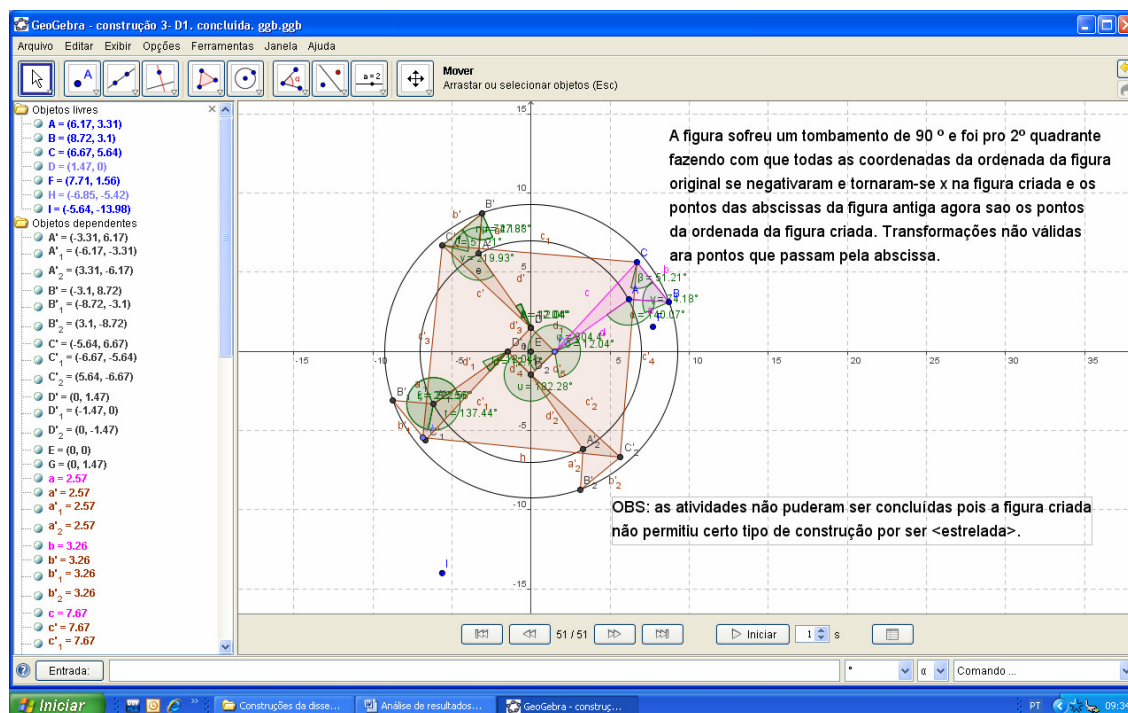


Figura41 – 3ª construção – D 3 – Educação Matemática – Concluída pela professora/pesquisadora⁵

Apenas duas duplas deixaram um registro escrito sobre o polígono traçado pelos vértices correspondentes dos polígonos rotacionados e sobre a distância do centro aos vértices desse polígono. Apenas a dupla D 8 (Figura 42) percebeu que o número de lados desse polígono depende do ângulo de rotação. Após a construção das circunferências, unindo os vértices correspondentes dos polígonos, levantou-se a conjectura de que o número de lados do polígono depende do ângulo de rotação. Perseguiram essa conjectura e fizeram uma nova construção, em que o polígono original foi girado de 60° em 60° e construíram um hexágono regular, unindo os pontos correspondentes. Nesse momento, ficou evidente a importância da utilização de um *software* de Geometria Dinâmica, possibilitando aos alunos percorrerem sozinhos, e sem perda de tempo, a investigação de uma conjectura levantada em busca das evidências que a comprovem ou a refutem.

⁵ A atividade foi desenvolvida pela professora-pesquisadora a partir do arquivo da dupla. Não foram feitas alterações no registro escrito.

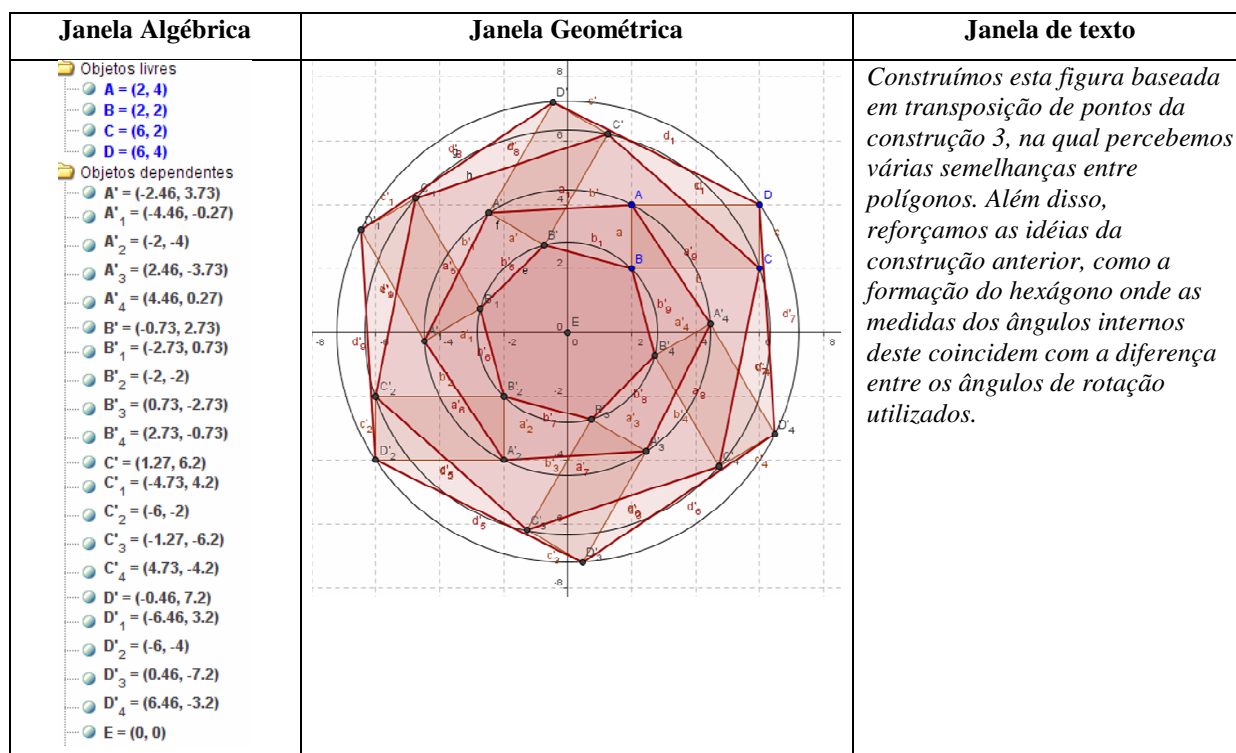


Figura 42 – Construção conjectura da D 8 – Educação Matemática

Nessa construção, até o professor da disciplina, Tópicos de Geometria, em que a sequência de atividades foi desenvolvida, resolveu investir e usar sua criatividade para fazer descobertas em relação às ferramentas do *software*. Ele construiu um polígono⁶ e o fez girar em torno da origem por um ângulo de 45° , alterou as cores de todos os polígonos rotacionados, construiu as circunferências de centro na origem passando pelos vértices dos polígonos, construiu um polígono regular de vértices nos vértices correspondentes dos polígonos rotacionados. A seguir, utilizou a ferramenta “barra de navegação para passos da construção” e ficou assistindo o *software* refazer a construção passo a passo. Comentou sobre a conexão desse conteúdo com a trigonometria, que as coordenadas dos vértices dos polígonos rotacionados são obtidas por meio de uma fórmula, envolvendo seno e cosseno. Vibrou tanto quanto os alunos com as possibilidades que o *software* oferece. A Figura 43 tenta reproduzir o trabalho desenvolvido pelo professor.

⁶ Este arquivo não foi salvo pelo professor e a descrição feita fundamenta-se no protocolo de observação da professora-pesquisadora.

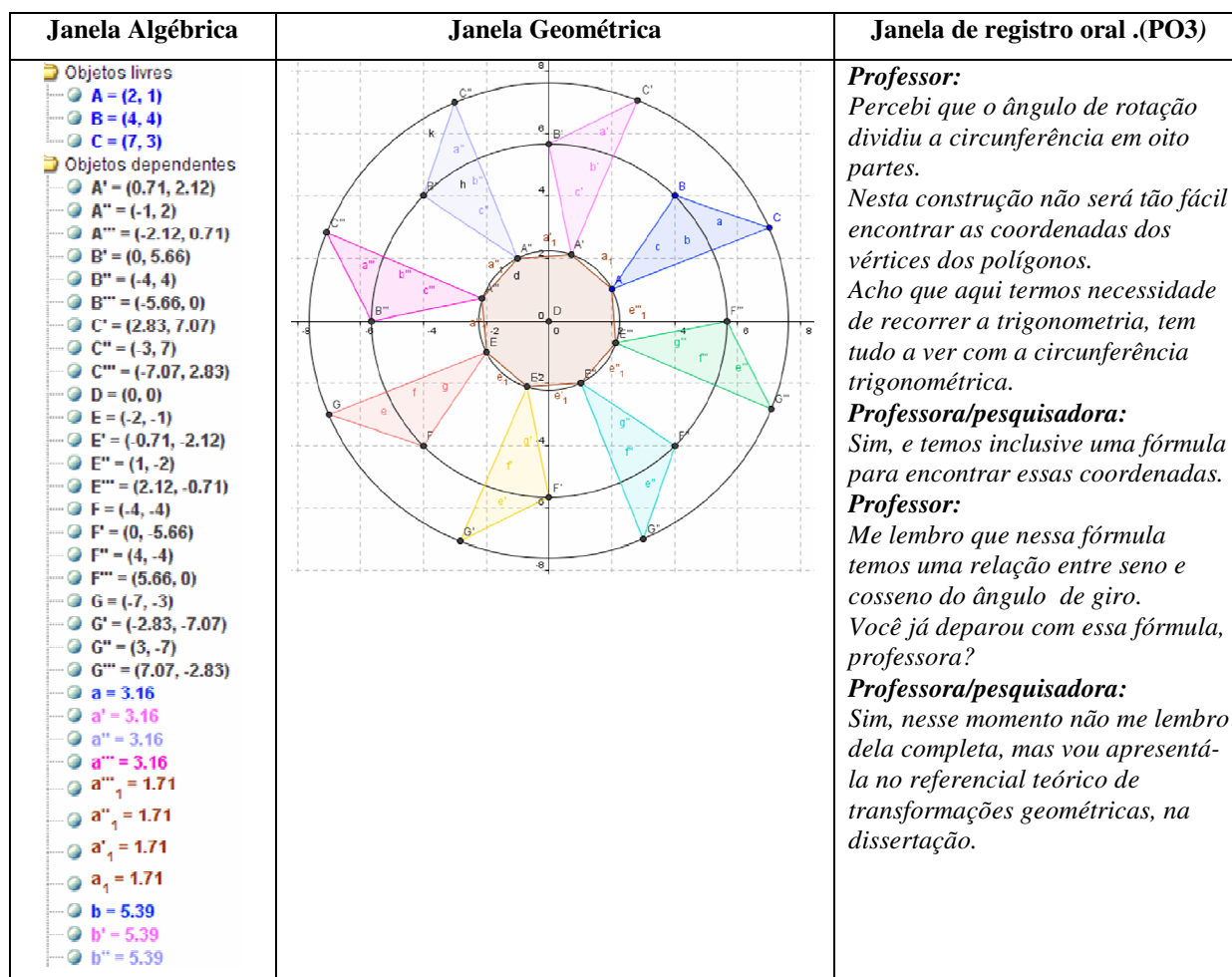


Figura 43 – Reprodução da Construção do professor – Educação Matemática

As investigações matemáticas ocorridas nessa turma, de forma espontânea, tanto por parte da dupla D-8, quanto por parte do professor da disciplina, reforçam a importância da utilização de *softwares* matemáticos do tipo utilizado e conseqüentemente a importância da utilização das tecnologias de informação e comunicação. Talvez se estivessem utilizando lápis papel, esses participantes não teriam tido paciência para buscar provas para a conjectura que levantaram. Nesse sentido Lévy (1997) reforça que:

A simulação por computador permite que a pessoa explore modelos mais complexos e em maior número do que se estivesse reduzido a recursos de sua imagística mental e de sua memória a curto prazo, mesmo que reforçadas por este auxiliar por demais estático que é o papel. (Lévy, 1997, p.125)

No estudo exploratório realizado com a turma de 3ª série do ensino médio, os alunos apresentaram grande dificuldade em realizar a transformação por rotação, mesmo utilizando papel vegetal para reproduzir o polígono e alfinete para fixar o ponto e realizar o giro de 90°.

Alguns alunos não conseguiram realizar a atividade por completo. Essa mesma construção, utilizando os recursos do *software*, foi simples e possibilitou, inclusive, a

construção dos polígonos regulares e circunferências, passando pelos vértices correspondentes dos polígonos. O uso do *software* possibilitou, principalmente, a exploração, com muito mais riqueza de detalhes, das transformações de modo geral.

Construção 4 - Homotetia

Nessa atividade, os alunos deveriam construir um polígono, utilizando a ferramenta “homotetia de ponto por um fator” do GeoGebra; em seguida, inserir um fator (número k) a fim de que o polígono original fosse ampliado ou reduzido em relação ao polígono inicial. Por fim, utilizando os recursos disponíveis no *software*, os alunos deveriam explorar os variantes e invariantes após serem feitas as transformações geométricas e realizar o registro do que observaram.

A atividade envolvendo transformação geométrica no plano por homotetia foi realizada somente pela turma da especialização. Pela análise dos arquivos, foi possível constatar que as oito duplas conseguiram perceber que essa transformação geométrica muda o tamanho da figura original, mas preserva a sua forma; também foi possível perceber que eles estabeleceram uma conexão com o estudo de semelhança de polígonos: ângulos congruentes e lados proporcionais. Apenas duas duplas descobriram uma relação entre as coordenadas dos vértices do polígono inicial (x, y) e as novas coordenadas do polígono transformado; as novas coordenadas eram obtidas, multiplicando-se as antigas por k , passando a ser (kx, ky) . Talvez esses alunos apresentaram dificuldades em identificar as coordenadas dos vértices em função da quantidade de informações contidas na atividade e até mesmo na tela, fazendo com que as informações ficassem muito confusas ou mesmo a atenção fosse desviada para a questão da área dos polígonos.

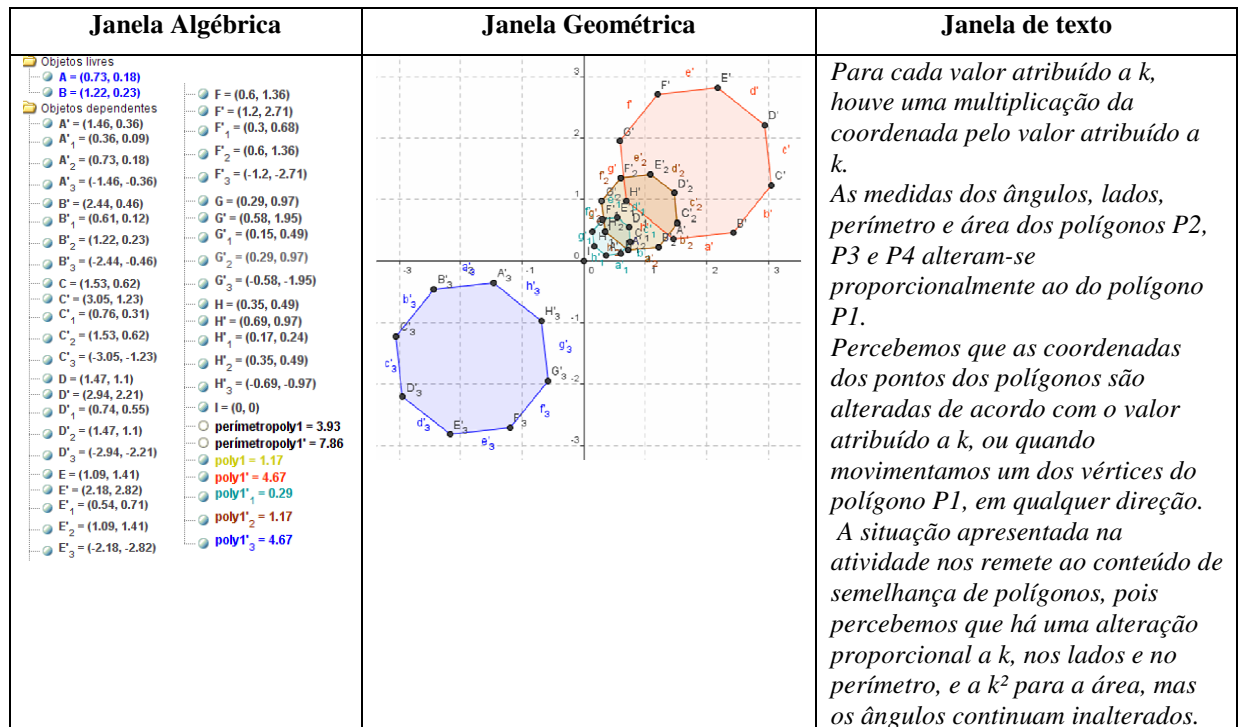


Figura 44 – 4ª construção – D 1 – Educação Matemática

Três duplas, dentre as oito, explicitaram que: se $|k| > 1$ o polígono é ampliado proporcionalmente; se $0 < |k| < 1$, ele é reduzido proporcionalmente; se $k = 1$ o polígono se mantém inalterado e se $k < 0$ o polígono obtido é simétrico em relação à origem do plano cartesiano. A Figura 5.18 exemplifica esse fato. Entretanto, talvez por limitação de tempo, nenhuma dupla pôde perceber que se $k < 0$, a situação poderia ser interpretada como decorrente de uma ampliação ou redução, seguida de uma rotação.

O texto apresentado pela dupla D2 (Figura 44) evidencia que os alunos perceberam que o valor negativo de k levava a polígonos situados no 3º quadrante. Percebemos que falta, por parte dos alunos, ousar mais nas conclusões. Eles poderiam, por exemplo, concluir que se $k = -1$, o quadrado ABCD seria levado no quadrado congruente $A'_3B'_3C'_3D'_3$, o que corresponderia a uma rotação de 180° em relação à origem. Igualmente eles poderiam ter verificado que o polígono $A'_4B'_4C'_4D'_4$ poderia ser obtido por uma homotetia de razão 2, levando ABCD em $A'B'C'D'$ e esse último sendo rotacionado em torno da origem de um ângulo de 180° para ser levado no polígono $A'_4B'_4C'_4D'_4$. Mais uma vez fica evidente o fato de que a exploração em Matemática e, ainda, por meio de um *software* de geometria dinâmica, não é natural para aqueles professores, embora alguns tivessem alegado que, na sua formação, haviam participado de aulas desenvolvidas em ambientes computacionais.

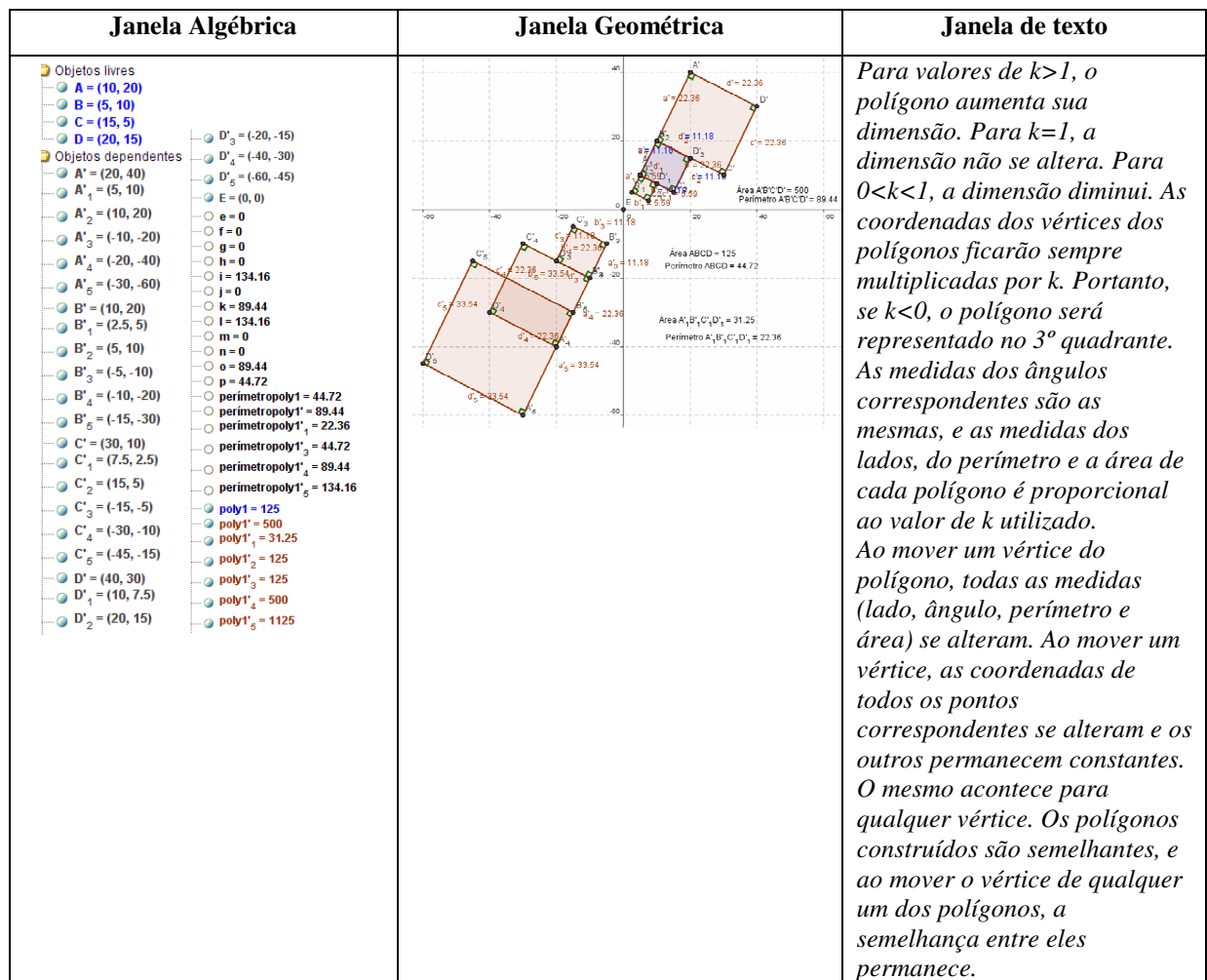


Figura 45– 4ª construção – D 2 – Educação Matemática

Apenas 2 duplas em 8 perceberam que homotetias de razão k alteram a área dos polígonos, proporcionalmente ao quadrado da razão k .

Uma dupla, após muitos cálculos utilizando a ferramenta “calculadora” do *software*, concluiu que é proporcional a $4k$, como mostra a Figura 45, na qual temos o seguinte registro: “A área varia de acordo com o tamanho do polígono, ou seja, para $k=1$, a área é x e para $k=2$ a área é $4x$ ”.

As construções envolveram a translação vertical de funções lineares e quadráticas.

Construção 5 – Simetria de translação vertical na função polinomial de 1º grau

Essa atividade foi aplicada para alunos da 1ª série do Ensino Médio e da Licenciatura em Matemática. Para esse grupo de alunos, essa era a 3ª construção e é assim referenciada nas figuras. Nela, os alunos deveriam construir a função $y = x$, em seguida, deslocar seu gráfico até dois pontos especificados e, a partir das observações feitas, tentar determinar a equação de retas, passando por outros dois pontos determinados. Durante a realização das experimentações, o, aluno era instigado a registrar suas observações.

Os alunos do Ensino Médio demonstraram estar bem familiarizados com o ambiente computacional. Nessa construção, descobriram recursos como mudanças da cor da janela geométrica, inseriram símbolos, mudaram a espessura da reta no gráfico. Exploraram as variações na equação que afetam o gráfico da função, utilizaram outros valores para o coeficiente linear, fazendo com que a reta subisse ou descesse; porém os registros de suas conclusões foram pouco formais. Apenas 5 duplas, em 18, conseguiram estabelecer uma conexão entre as transformações geométricas de translação e a construção dos gráficos das funções lineares, como era esperado. Metade das duplas deixou em seus registros pistas que levam a constatar que os alunos perceberam o que leva a reta a se movimentar para cima ou para baixo, conforme o texto registrado na Figura 47. Fica, no entanto, patente a dificuldade em se expressarem e a imprecisão da linguagem.

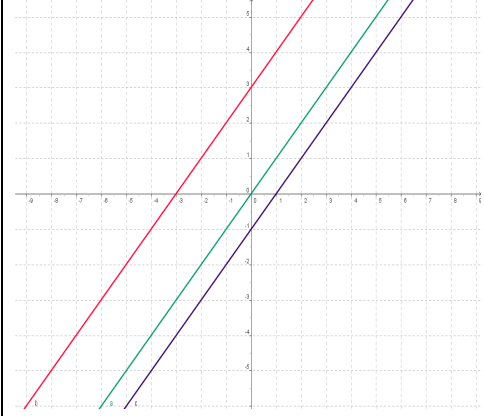
Janela Algébrica	Janela Geométrica	Janela de texto
Objetos livres - a: $y = x + 0.03$ - b: $y = x + 3.03$ - c: $y = x - 0.97$ Objetos dependentes Objetos auxiliares		Percebemos que ao movimentar as retas sobre o plano a equação se modifica. Por exemplo: ao arrastar a reta até -2 na reta y, a equação se transforma em $y = x - 2$. A equação para $y = 3$ é $y = x + 3$, e para $y = -1$, $y = x - 1$. X

Figura 47– 3ª construção – D 3 - Ensino Médio

Uma dupla registrou “A equação da reta foi se modificando a medida em que fui movendo-a. Quando o $y = x$, a reta cruzava eixo y no 0, e quando cruzou no 2, a equação equivalente era $y = x - 2$, e quando cruzou o -2, era $y = x + 2$. É possível prever as equações equivalentes somando o valor em que ela cruza y a x”. (arquivo da 3ª construção da D 17). Embora tenha comparado, explorado as mudanças ocorridas na equação, decorrentes da translação da função, buscando justificativas e argumentos, a dupla interpretou de forma incorreta a mudança algébrica ocorrida, cometendo um erro de sinal. Com um pouco mais de atenção, os alunos poderiam ter verificado, pela janela algébrica, o erro cometido.

Na Licenciatura de Matemática, apenas 7 duplas, entre 13 que iniciaram o mini-curso, participaram dessa atividade. Conforme exposto anteriormente, esse grupo de alunos era muito heterogêneo e os mais lentos ainda estavam concluindo as atividades anteriores enquanto outros já estavam finalizando. As 7 duplas que participaram se envolveram, mobilizando as formas de pensamento matemático de comparar, interpretar e analisar o comportamento das funções traçadas no plano. Nenhuma dupla fez o registro formal a respeito da translação vertical, embora uma delas tenha anotado que: “A equação da reta está diretamente ligada ao ponto $(0, y)$. Apenas somamos ou subtraímos á x o valor da ordenada quando a abcissa for 0”.

Outra dupla realizou todas as tarefas propostas na ficha de orientação e, em seguida, partiu para o levantamento de conjecturas e busca de evidências que as confirmassem, embora não tenha conseguido organizar as idéias a ponto de registrá-las de forma coerente (Figura 48).

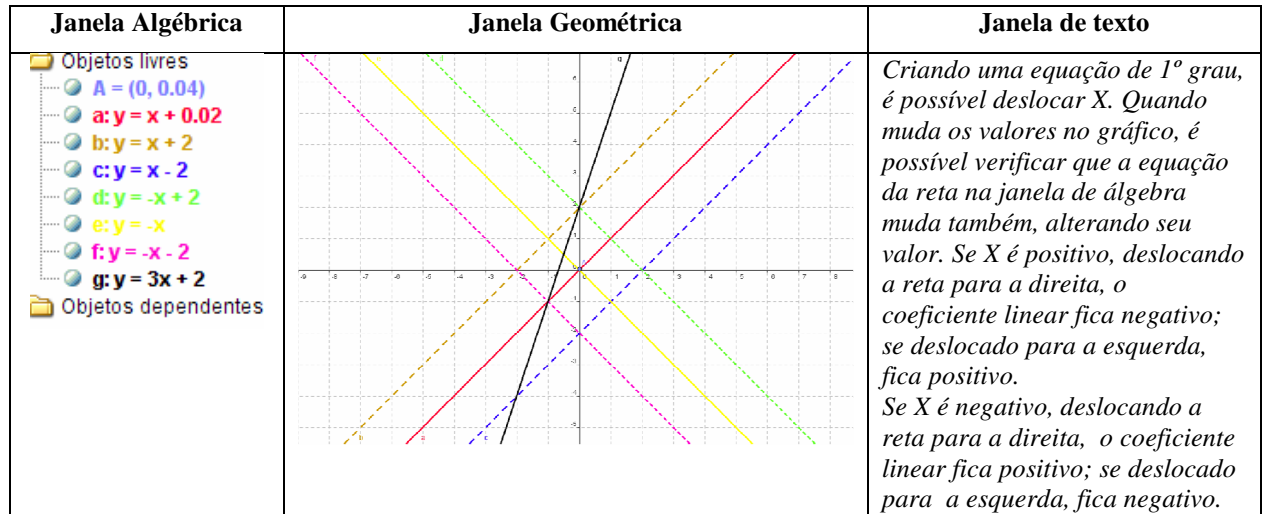


Figura 48 – 3ª construção – D 3 – Licenciatura em Matemática

Os alunos evidenciaram não ter desenvolvido, ao longo de sua escolaridade, a estratégia de registrar formalmente idéias. Utilizaram alguns termos incorretos, por exemplo, ao afirmarem que “*a é o ângulo da reta*”(Figura 5.23).

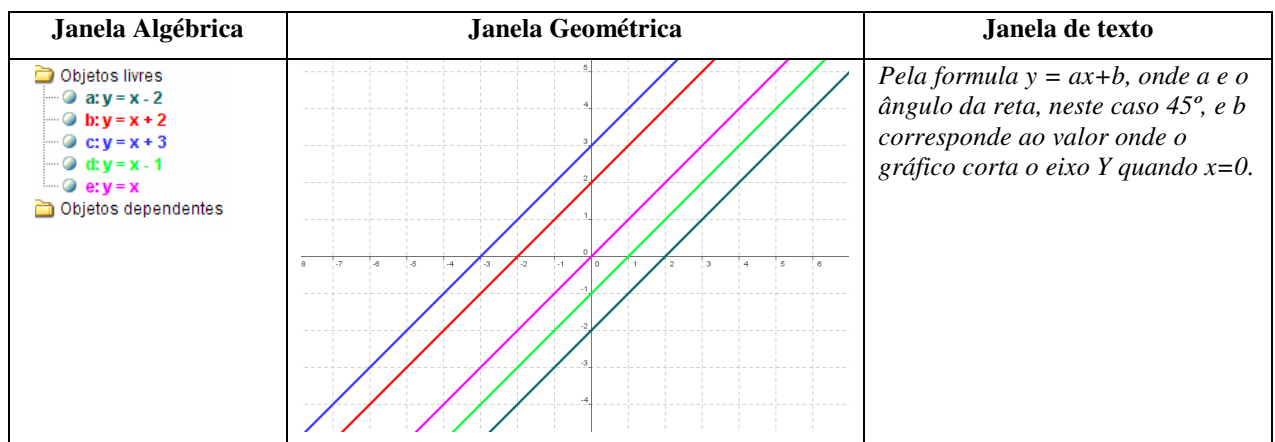


Figura 49 – 3ª construção – D 6 – Licenciatura em Matemática

Será que essa dupla não sabia que valor de a corresponde à tangente do ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas ou que o a é o coeficiente angular da reta? Ou talvez a dupla soubesse qual é o significado de a na fórmula $y = ax + b$, porém tenha tido dificuldades em se expressar, em redigir um texto matemático coerente em linguagem adequada. Certo é que, como futuros professores, esses alunos precisam cuidar do uso da linguagem adequada para que possam ensinar de forma correta aos seus futuros alunos. Parece haver uma certa negligência, por parte dos alunos, quanto à utilização da linguagem

matemática. O fato é relevante e aponta para a necessidade de abordagem da questão, sobretudo em cursos de formação para a docência.

Construção 6 – Simetria de Translação na função polinomial de 2º grau

Participaram dessa atividade, os alunos da 1ª série do Ensino Médio e da Licenciatura de Matemática. Para esse grupo de alunos, essa era a 4ª construção e foi assim referenciada nas figuras apresentadas. A proposta era construir o gráfico da função $y = x^2$, assinalar o vértice da parábola e, em seguida, deslocar esse vértice para cima e para baixo, até dois pontos especificados, observar as equações das parábolas na janela algébrica e, por fim, tentar determinar a equação da parábola com o vértice no ponto (0,-1) e outra de vértice no ponto (0,3). Após as experimentações, o aluno era instigado a registrar suas observações.

Como foi pontuado anteriormente, os alunos do ensino médio avançaram bastante durante a pesquisa, em termos de levantamento de conjecturas e utilização das ferramentas do *software* para mudança de cor das parábolas e do fundo da janela geométrica, além da mudança da espessura da linha da parábola. As 18 duplas participantes da atividade perceberam o efeito da variação na equação da parábola em relação ao gráfico e utilizaram termos como “*a parábola se move para cima ou para baixo*”. Duas duplas utilizaram a expressão “*ela translada pelo plano*”, conseguindo estabelecer uma conexão entre as transformações geométricas dos polígonos e os gráficos das funções. Cinco duplas explicitaram que o valor k da equação $y = ax^2 + k$ é o responsável pelo movimento da translação para cima ou para baixo na função de 2º grau. Nota-se, pelos registros nos arquivos das duplas, que onze delas recorreram à janela algébrica para registrar as variações nas equações que afetam os gráficos das funções, como podemos perceber na Figura 50, feita pela dupla D3. Essa dupla utilizou os pares ordenados oferecidos na ficha de instrução e outros criados por ela enquanto realizava experimentações.

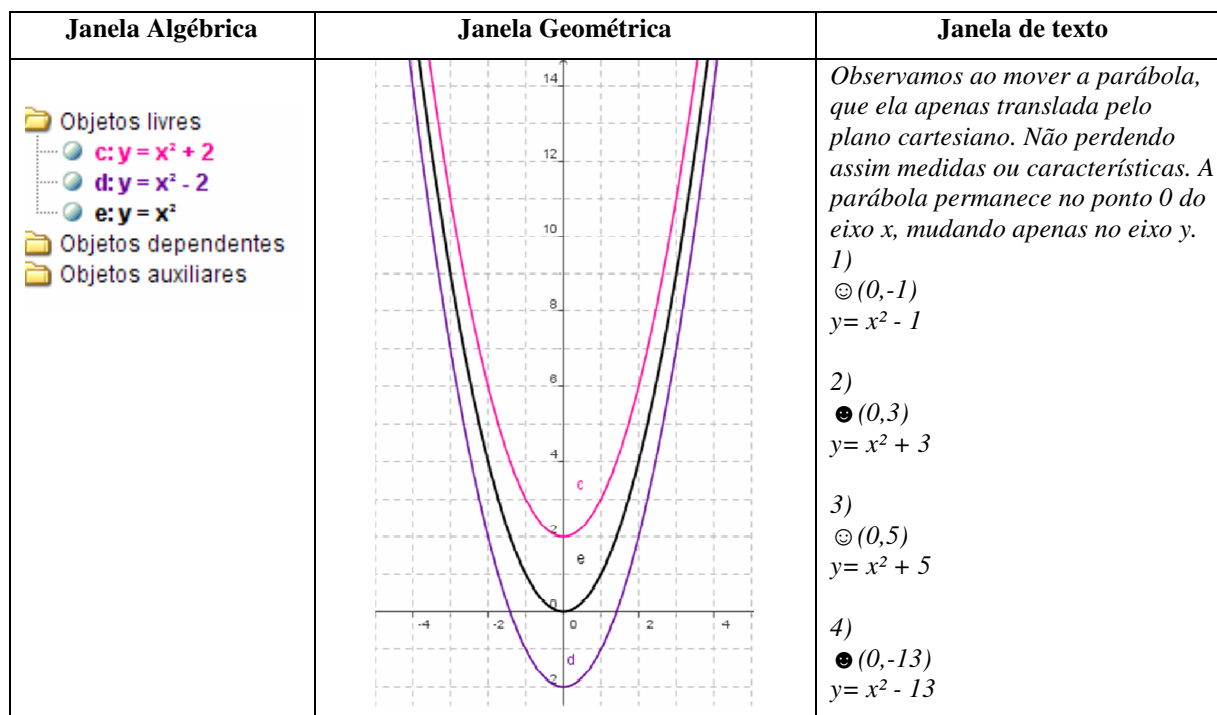


Figura 50 – 4ª construção – D 3 - Ensino Médio

Em relação ao registro, percebe-se que os alunos misturam um pouco a linguagem que utilizam para se comunicar com os amigos, pela internet no *site Messenger*, *Orkut* e outros (*quando, eh*) (Figura 51). Como em todas as outras atividades, é possível notar a dificuldade em organizar as idéias para fazer o registro formal.

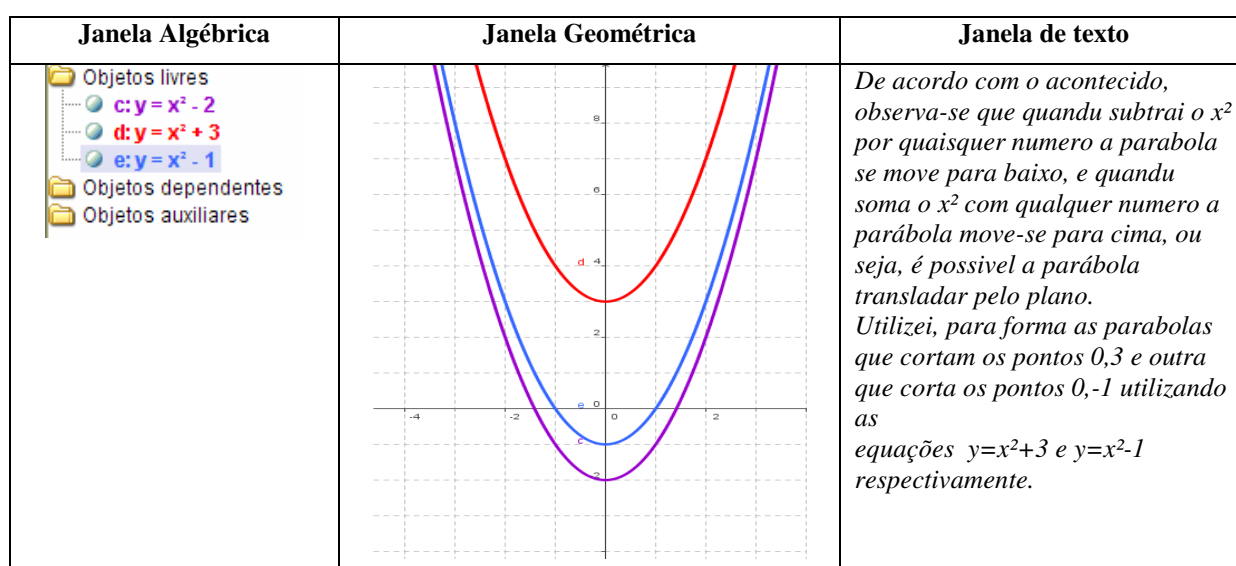


Figura 51– 4ª construção – D 6 - Ensino Médio

A dupla D 8 (Figura 52) deixou um registro de algumas conjecturas levantadas em relação ao papel dos coeficientes da função de 2º grau. É possível perceber que o registro deixa a desejar em termos de formalização, porém nota-se que eles experimentaram, compararam, interpretaram e analisaram o comportamento das funções de 2º grau, recorrendo novamente à dinamicidade do *software* (PO2).

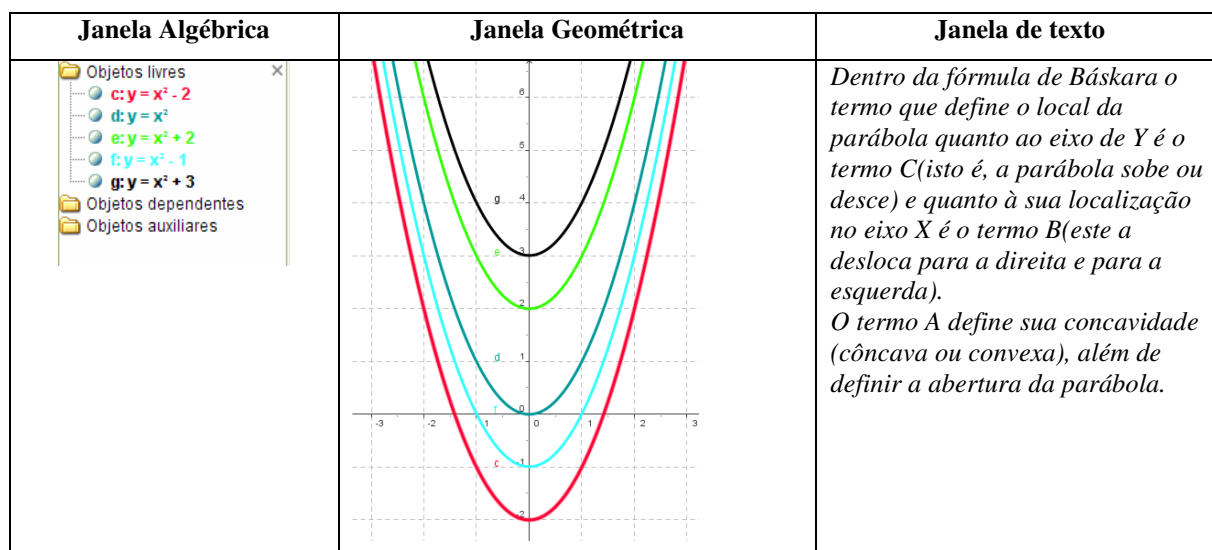


Figura 52 – 4ª construção – D 8 - Ensino Médio

Na Licenciatura de Matemática, a proposta das construções foi feita em um mini-curso de 4 horas, como parte da programação da Semana de Licenciaturas; dos 26 alunos que iniciaram, apenas 6 duplas, que estavam em fase mais adiantada, fizeram a construção.

Entre essas, 5 identificaram as mudanças nas equações decorrentes da translação vertical. Mais uma vez, o aluno Jorge, que trabalhou sozinho, embora tenha realizado todas as propostas contidas na ficha, não fez o registro de suas percepções.

A dupla D10 (Figura 53) se destacou, levantando conjecturas relacionadas à translação horizontal e vertical. Pelo texto registrado, nota-se a realização de experimentações com a parábola que coloriu de vermelho para elaboração de suas conclusões. De acordo com a ficha de instrução, a dupla deveria experimentar deslocar o vértice da parábola $y = x^2$ até (0,2) e (0,-2), observando a equação correspondente obtida na janela de álgebra. Como na janela algébrica temos a equação da parábola registrada “ $y = x^2 + 0,04x$ ” e não mais $y = x^2$, é possível concluir que os alunos fizeram experimentações, deslocando a parábola original pra a esquerda e para a direita, além de efetuar as translações verticais.

Com a orientação dada pretendia-se apenas disparar um processo de investigações, esperando-se outras experimentações por parte dos alunos. Pelo texto apresentado, percebemos que a dupla observou as janelas algébrica e geométrica, mobilizou estratégias de visualização e experimentação ao comparar, interpretar e analisar o comportamento das funções, realizando, inclusive, translações horizontais, além das verticais. Mas, novamente, o registro escrito evidencia que a dupla não se apropriou da linguagem matemática a ponto de comunicar adequadamente suas idéias.

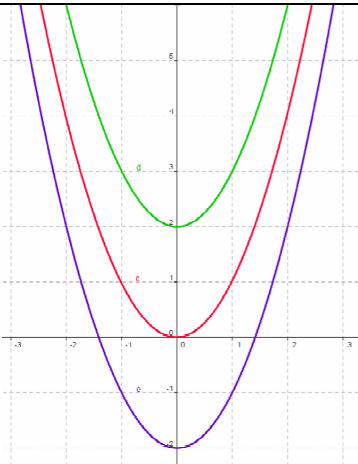
Janela Algébrica	Janela Geométrica	Janela de texto
Objetos livres $c: y = x^2 + 0.04x$ $d: y = x^2 + 2$ $e: y = x^2 - 2$ Objetos dependentes		<i>Deslocando a parábola para a direita, o valor de B fica negativo; deslocando para a esquerda, o valor de B fica positivo. Se o valor de C for positivo, a parábola se desloca para cima no eixo Y; se negativo, desloca para baixo no eixo Y.</i>

Figura 53 – 4ª construção – D 10 – Licenciatura em Matemática

É esse o comportamento que se espera em uma investigação matemática em sala de aula e possivelmente a utilização de um *software* matemático pode contribuir para que sejam realizadas experimentações e deduções, para pensar e inventar idéias. Convém destacar, porém, que a condução do trabalho, por parte do professor, é de fundamental importância para incentivar os alunos na mobilização das várias formas de pensamento, sobretudo para registrar formal e informalmente suas conclusões.

5.4 Formas de pensamento mobilizadas no desenvolvimento das Atividades do Grupo 4

As duas atividades a seguir foram realizadas apenas pelos alunos da 1ª série do Médio e envolveram a reflexão e a translação horizontal de forma combinada no estudo da função quadrática.

Construção 7 - Simetria de reflexão e de translação vertical na função quadrática

Nessa atividade, que para os alunos do Ensino Médio correspondeu à 5ª construção, assim referenciada nas figuras, os alunos deveriam construir o gráfico da função $y = x^2$, utilizar a ferramenta “reflexão com relação a uma reta” e fazer com que a parábola fosse refletida em relação ao eixo x . Em seguida deveriam deslocar a parábola de concavidade para baixo até dois pontos especificados. Recorrendo à janela algébrica, deveriam observar as alterações nas equações das funções quadráticas trabalhadas anteriormente e tentar determinar a equação de uma parábola com concavidade para baixo e vértice $(0, -3)$ e com vértice em $(0, 1)$. Durante a realização das atividades, os alunos eram convidados a fazer os registros do que perceberam.

Participaram dessa atividade as mesmas 18 duplas de alunos do Ensino Médio que iniciaram o trabalho. Após análise do protocolo de observação (PO2) e dos arquivos produzidos pelos alunos durante a realização da atividade, foi possível detectar que as 18 duplas perceberam que, ao ser refletida, a parábola muda sua concavidade para baixo e conseqüentemente alteram-se os sinais das imagens. Os registros do arquivo da dupla D 3, da Figura 54, ilustram o fato.

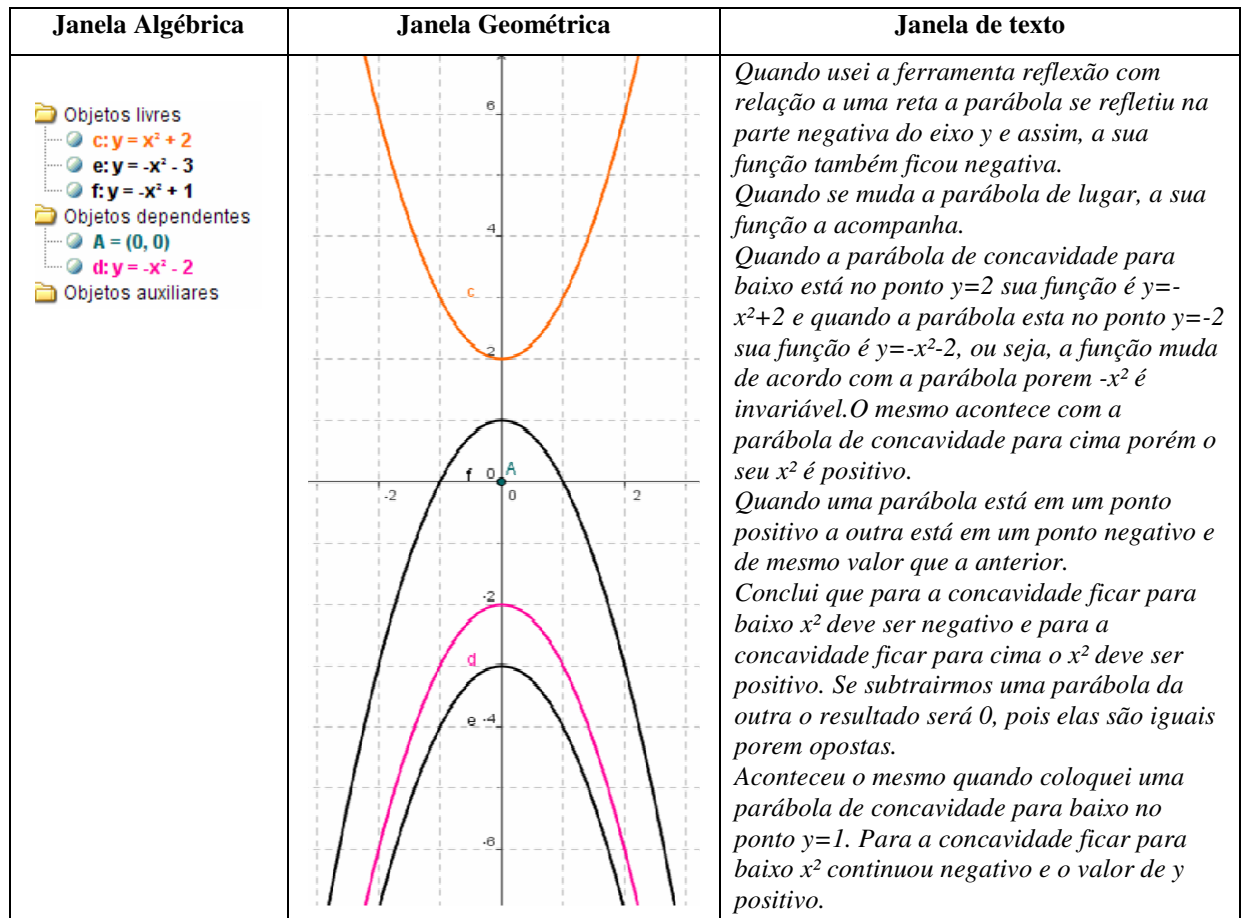


Figura 54 – 5ª construção – D 3 - Ensino Médio

Apesar do termo deslocamento vertical não ter sido utilizado por nenhuma dupla, é possível perceber, nos registros dos alunos, que eles compreenderam que, em uma translação vertical, as funções $f(x) = ax^2 + k$ são congruentes ao gráfico de $g(x) = ax^2$ e k é responsável pela função se deslocar para cima ou para baixo em relação ao gráfico de $g(x) = ax^2$ (Figura 5.28). Na Figura 5.28, a dupla não construiu o gráfico das funções citadas no texto. Concluímos que, possivelmente, a dupla movimentou a curva, utilizando o mouse e recorreu à janela algébrica para elaborar a conclusão: “A parábola com vértice(0,-3), obtém a equação: $y = -x^2-3$. E a que tem o vértice (0,1), obtém a equação $y = -x^2+ 1$. O x permanece negativo sendo somado ou subtraído ao valor de y”. Mais uma vez, o registro deixa a desejar e alerta para a importância de investir em tarefas que levem os alunos a redigir pequenos textos matemáticos.

Cinco duplas, dentre as 18, usaram o termo espelhamento quando se referiram ao fato de a parábola mudar sua concavidade. Como foi pedido na ficha de atividade, dez duplas

explicitaram as equações das parábolas de concavidade para baixo e vértice em $(0, -3)$ e em $(0, 1)$.

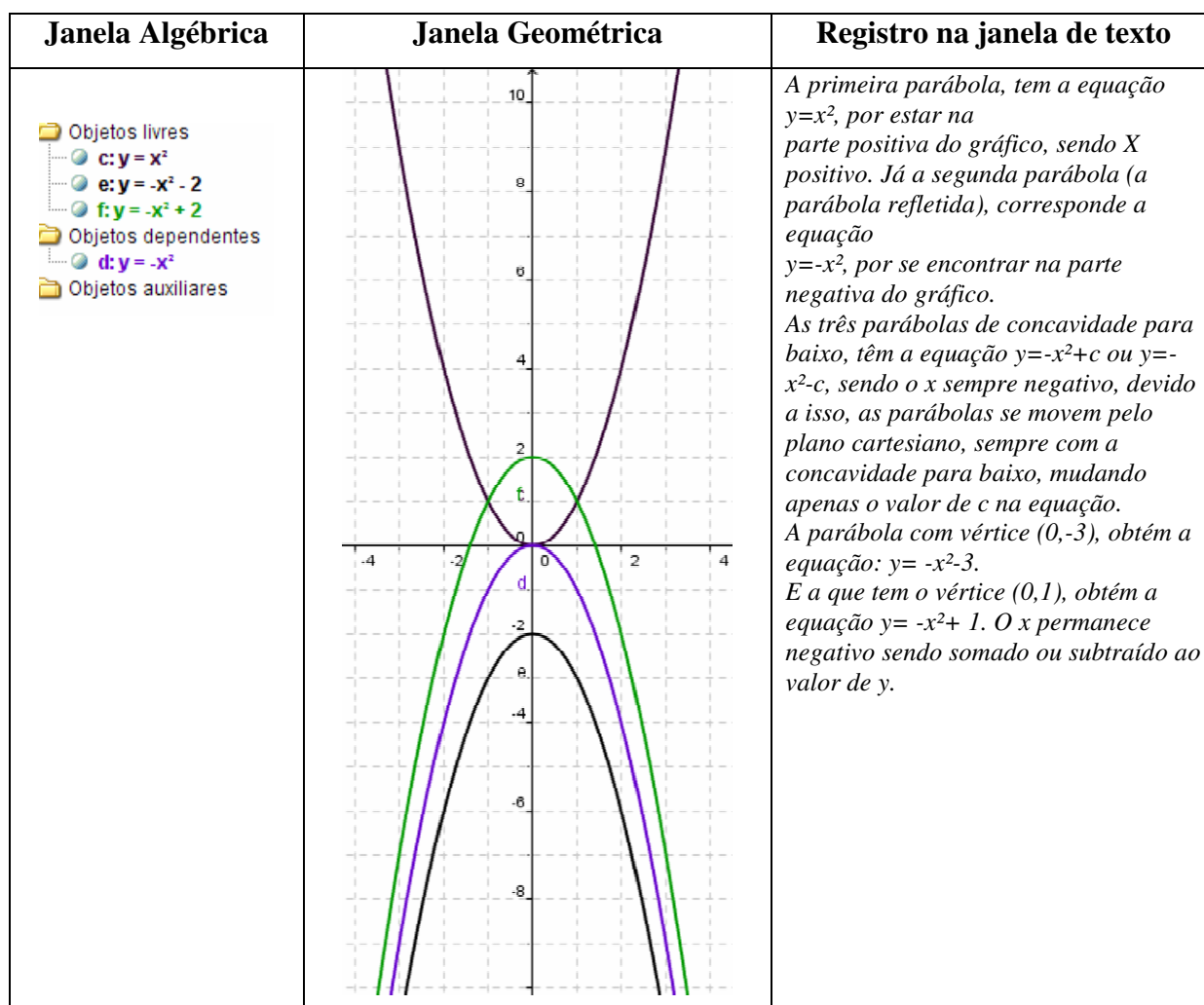


Figura 55 – 5ª construção – D 8 - Ensino Médio

A dupla D8 (Figura 55) foi a que mais se destacou ao longo dos trabalhos, podendo-se perceber avanços em termos de explorações, levantamento de conjecturas e busca de evidências que as comprovassem. Em nenhuma atividade foi pedido que os alunos observassem o que ocorre com a mudança do valor absoluto de a na $f(x) = ax^2$; essa dupla levantou a hipótese de que o valor de a alterava o eixo de simetria, chegando a se referir a coordenadas do vértice. Apesar de algumas conjecturas serem falsas, o fato de terem investigado, além do pedido, merece destaque. Recorrendo novamente a Pais (2006), a utilização de *softwares* no ensino de matemática possibilita a “expansão das condições de aprendizagem”(p.72), pois os alunos podem levantar conjecturas e realizar experimentações, tentando justificá-las, como ocorreu com a dupla D3.

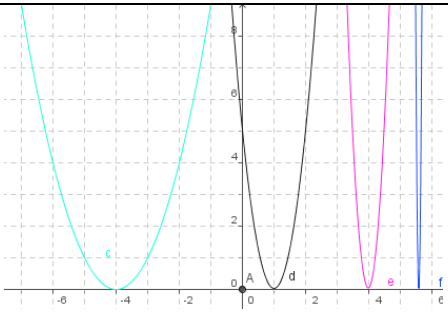
Janela Algébrica	Janela Geométrica	Registro na janela de texto
Objetos livres - c: $y = x^2 + 8x + 16$ - d: $y = 5x^2 - 10x + 5.03$ - e: $y = 20x^2 - 160x + 320.0$ - f: $y = 1000x^2 - 11200x + 3$ Objetos dependentes - A = (0, 0) Objetos auxiliares		<i>Na primeira observação, havia a crença que o tamanho do termo a da fórmula de Báskara determinava a localização do eixo de simetria. Entretanto, com observações posteriores pôde-se perceber que a não define o eixo de simetria, e sim a abertura da parábola, sabendo que a mesma se fecha se aumentar o valor de a.</i>

Figura 56 – Construção baseado em conjecturas – D 3 - Ensino Médio

Analisando o registro na janela de texto da Figura 56 e observando os alunos em sala de aula, podemos levantar novos questionamentos:

- Como estes alunos estavam utilizando o *software* pela primeira vez, será que não tiveram dificuldades em se adaptar com o editor de texto e, por esse motivo, os textos saíram com tantos erros de ortografia?
- Será que a preocupação desses alunos, naquele momento, era apenas com as descobertas matemáticas e não com a estruturação do texto?

As questões merecem uma investigação e, de certa forma, apontam limitações da pesquisa. O tempo e a falta de traquejo no uso de recursos computacionais podem ter inibido a redação de textos mais elaborados no que se refere à clareza, à objetividade e à correção.

Construção 8 – Translações horizontais e verticais da função quadrática

Essa atividade abordou deslocamentos horizontais e verticais e correspondeu à 6ª construção realizada pelos alunos do Ensino Médio. Analisando os arquivos produzidos pelos participantes, foi possível perceber que 6 duplas, dentre as 18, explicitaram que, ao digitar a fórmula $y = (x - m)^2$ o próprio *software* desenvolveu o produto notável, gerando a função quadrática em sua forma normal. (Figura 57)

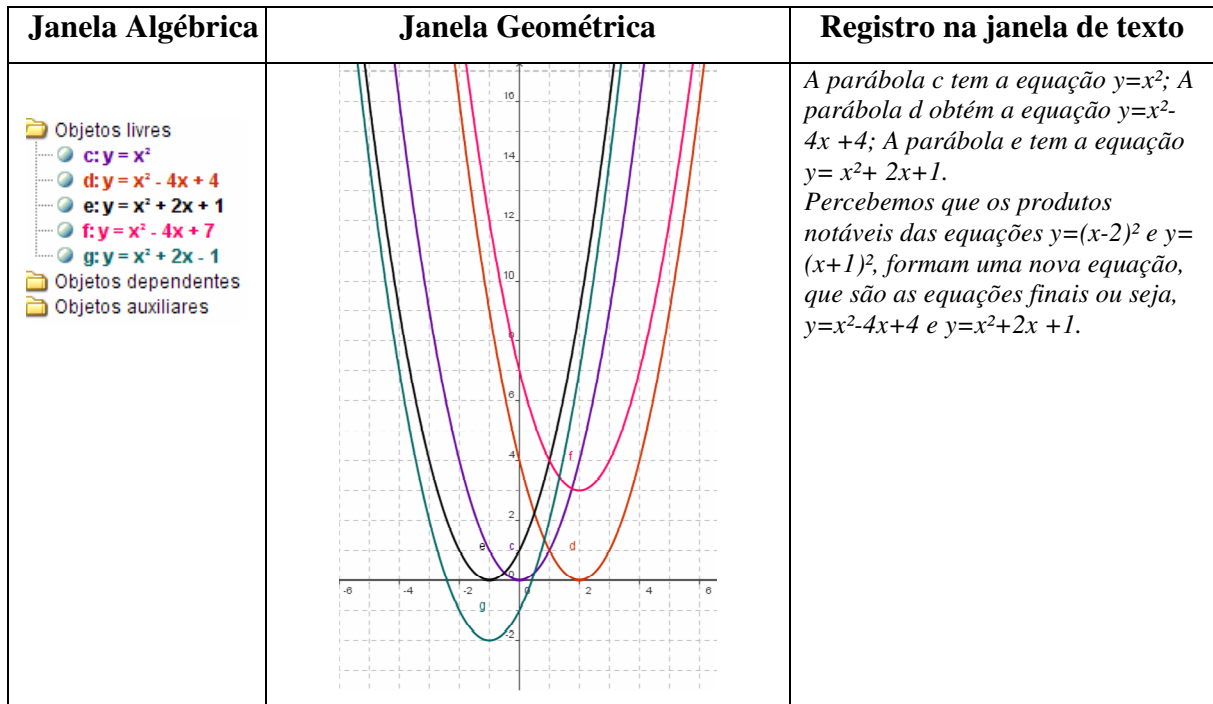


Figura 57– 6ª construção – D 3 - Ensino Médio

Sete, em dezoito duplas, perceberam as alterações nas equações, decorrentes de uma translação vertical ou horizontal. (Figura 58). Porém, podemos perceber, no registro da dupla, que esses alunos chegaram à conclusão de forma incorreta, uma vez que, se o número que se acrescenta a for positivo, a parábola se desloca para a esquerda e, se negativo, desloca-se para a direita.

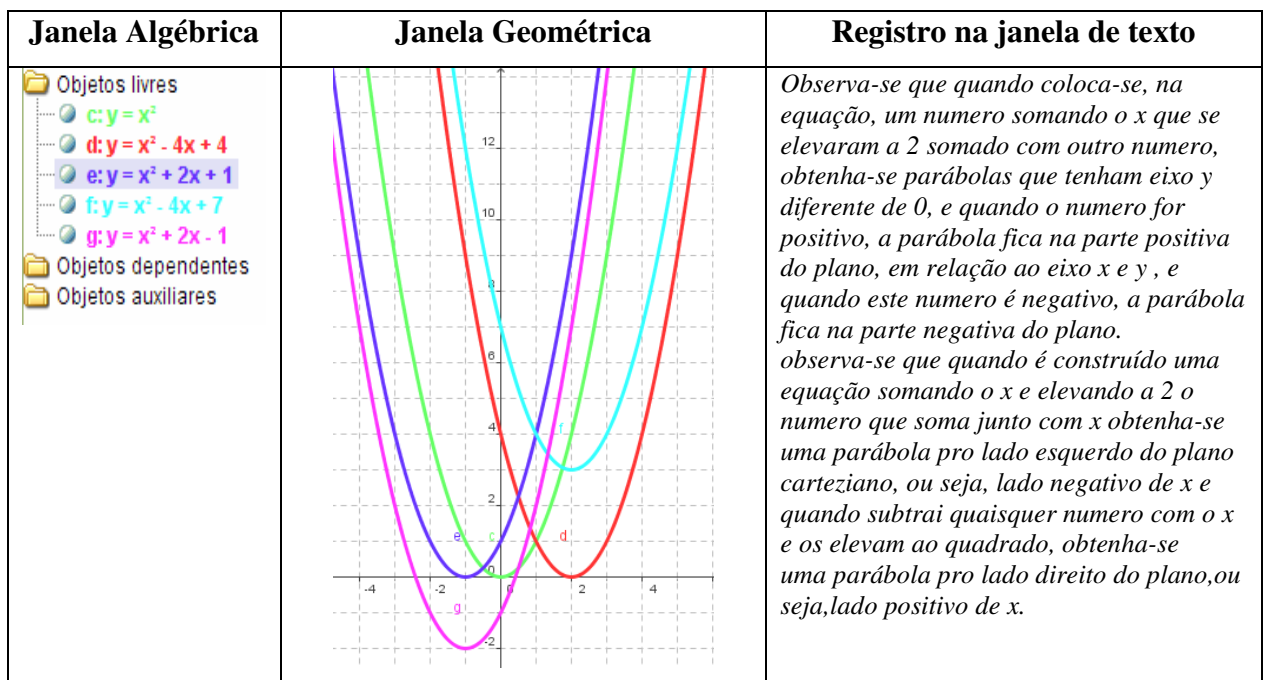


Figura 58 – 6ª construção – D 8 - Ensino Médio

Porém, os registros deixam muito a desejar em termos de organização das idéias e qualidade de redação. É o que podemos perceber nos textos apresentados na Figura 58 e na Figura 59.

Janela Algébrica	Janela Geométrica	Registro na janela de texto
Objetos livres c: $y = x^2$ d: $y = x^2 - 4x + 4$ e: $y = x^2 + 2x + 1$ f: $y = x^2 - 4x + 7$ g: $y = x^2 + 2x - 1$ Objetos dependentes Objetos auxiliares		<i>De acordo a posição das parábolas, o que determina suas posições é o valor de x. Percebemos como as outras duas parábolas que modificando a equação afeta o gráfico, pois a troca de sinais e de valores e de valores nas equações é que mudam as posições porém, não modificam o valor do xv.</i>

Figura 59 – 6ª construção – D 9 - Ensino Médio

A organização das idéias do último parágrafo da Figura 5.33 deixa muito a desejar; pouco se entende do que a dupla desejou comunicar. Percebe-se que os alunos não revisaram o texto, por falta de tempo, ou talvez por normalmente não utilizarem a estratégia de revisão.

Foi possível perceber, durante a realização da atividade que a utilização do *software* pode estimular os alunos a se tornarem experimentadores e inventores, o que contribui para que se arrisquem a levantar muitas conjecturas. Porém esses alunos ainda não se habituaram a buscar evidências que as comprovem. A dupla D 6 (Figura 60), por exemplo, fez a seguinte afirmação: “se eu faço a função $y = (x+3)^2+2$, a parábola vai se deslocar para o ponto 3 do eixo x e para o ponto 2 do eixo y”. Cometeram um engano, pois a parábola se desloca para a esquerda, para o $x = -3$ e observando o arquivo produzido por eles, não há evidências de que experimentaram, antes de fazer a afirmação, ou pelo menos não usaram os recursos do *software*, por meio dos quais poderiam perceber o erro cometido.

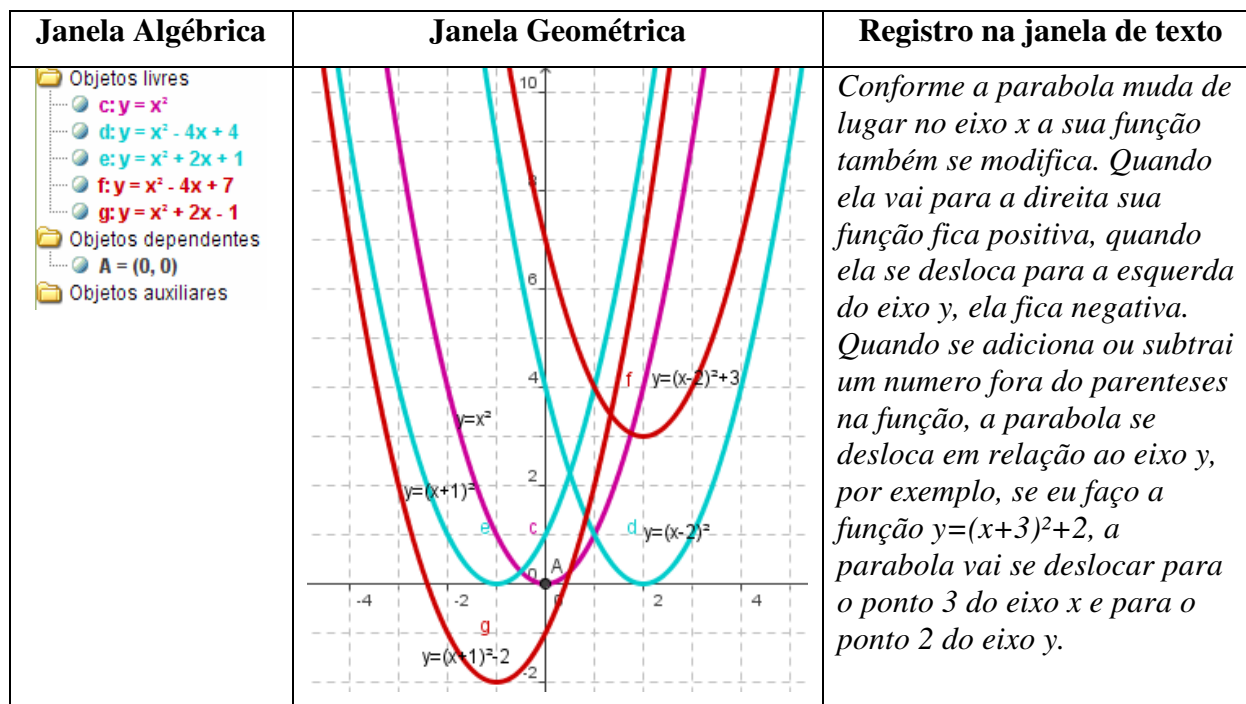


Figura 60 – 6ª construção – D 6 - Ensino Médio

5.5 Síntese comparativa dos resultados

As atividades propostas buscaram mobilizar e verificar a mobilização de algumas formas de pensamento Matemático pelo estudo de transformações geométricas no plano. Embora desenvolvido apenas com funções elementares, no caso, a função linear e a função quadrática, o trabalho pôde estimular a investigação para extensão de conclusões sobre transformações geométricas de outras funções, como as exponenciais, logarítmicas, modulares, trigonométricas, polinomiais e racionais. Cada atividade proposta teve por meta incentivar o desenvolvimento de formas do pensamento matemático: visualização, levantamento de conjecturas, registro do que muda ou do que não muda após uma transformação, descrição das observações, habilidade de argumentação, comunicação das idéias e procuras de evidências para que as conjecturas fossem comprovadas. O aluno foi continuamente convidado a se comportar como um matemático, atuando ora como geômetra, ora como um algebrista, ou ainda, por vezes, integrando as duas abordagens.

Uma análise comparativa do trabalho desenvolvido nos três contextos - Ensino Médio, Licenciatura e Especialização permitiu destacar alguns pontos:

- houve uma identificação positiva dos alunos com o GeoGebra, o que pode constatar sua potencialidade para auxiliar os alunos no levantamento de conjecturas sobre os variantes e invariantes quando das transformações geométricas feitas com os polígonos e as funções;
- o envolvimento e a motivação dos alunos na realização das atividades foi relevante e a dispersão, por vezes, observada ocorreu em poucos momentos e afetou um número pequeno de duplas;
- os alunos demonstraram pouca autonomia para fazer explorações por conta própria, em decorrência, talvez, do fato de não terem sido incentivados a desenvolver esse hábito de fazer experimentações matemáticas;
- de modo geral, os alunos evidenciaram maior facilidade em se expressar oralmente, durante os momentos de socialização das atividades desenvolvidas, fato evidenciado nos protocolos de observação feitos pela professora-pesquisadora.
- a dificuldade geral foi efetuar registros escritos das conjecturas levantadas e argumentar, utilizando a linguagem matemática formal, o que evidencia não ser a redação do texto matemático - a comunicação escrita das idéias - um hábito cultivado ao longo da escolarização;
- o uso do *software* GeoGebra permitiu que os alunos estabelecessem uma interconexão entre as formas de pensamento geométrico e pensamento algébrico, um dos objetivos pretendidos.

O desenvolvimento do trabalho em ambientes computacionais foi rico e motivador. Abaixo apresentamos alguns depoimentos dos alunos da 1ª série do Ensino Médio e dos alunos da Especialização em Educação Matemática ao avaliarem as atividades desenvolvidas. Não temos nenhum depoimento dos alunos da Licenciatura de Matemática, pois, como já exposto, os alunos apresentaram ritmos diferenciados e nem todos concluíram o trabalho proposto.

As aulas com o programa “Geogebra” nos auxiliaram adequadamente as construções das funções de 1º e 2º grau. Sendo assim uma ótima experiência para nós, onde aprendemos a observar melhor as equações e a realizá-las com maior facilidade(D3- EM)

O depoimento abaixo é de um dos integrantes da D 1 – Ensino Médio, que optou por fazer a avaliação da atividade individualmente.

O software Geogebra foi de total importância nas construções de gráficos e representações de figuras geométricas, atendendo aos pedidos solicitados de acordo com as atividades. Graças a ele, podemos ter variações de funções, sinal, equações, e chegar a conclusão, que, aparentemente, não são fáceis. O uso do mesmo, no começo, não se mostra tão simples como parece (coincidentemente como a matemática), mas, a medida que caminhamos com o processo de construção, começando pelas figuras geométricas, até chegarmos a equações de segundo grau, percebemos que, com um pouco de prática, seu manuseio se torna simples.

Enfim, para alguém que não tinha nenhuma perspectiva matemática (eu!), o software ajuda a tirar dúvidas e chegar a conclusão, que, provavelmente sem ele, alguns não seriam capazes de formar (eu de novo) (Vini, um dos componentes da D1- EM)

Podemos perceber que o tipo de trabalho desenvolvido envolveu os alunos e o uso dos recursos computacionais foi considerado positivo.

Percebemos em relação a esta atividade que os polígonos podem mudar de forma, porém conseguimos encontrar as mesmas características em todos, como ângulos, medidas de seus lados e várias outras semelhanças.

Já com o uso do software aprendi novas funções tornando assim a matemática um modo mais fácil e divertido de aprender. (D8- EM)

Os depoimentos dos alunos da especialização em Educação Matemática evidenciam também os aspectos positivos da abordagem feita no estudo das Transformações Geométricas no Plano, principalmente quanto ao uso do *software*.

O uso do software foi de grande importância para auxiliar na aprendizagem, pois através dele foi possível manipular os polígonos, o que não seria possível manualmente. Foi possível verificar regularidades e propiciou visualização prática do conteúdo. (D2- Ed. Mat)

Percebemos que com as transformações geométricas trabalhadas, por exemplo, rotação do polígono, mudança proporcional no tamanho do polígono, mudança do polígono nos quadrantes, a congruência e semelhança dos polígonos ficou evidente. Assim, observamos com mais rigor as propriedades geométricas da congruência e da semelhança. Com a visualização da figura tivemos a chance de formar ou mudar hábitos de pensamento, fazer experiências, investigações e explorações.

Com o uso do software Geogebra vimos como é importante a junção da álgebra com a geometria. Quando mostramos ao aluno a visualização da figura geométrica e o que podemos construir e investigar com a utilização do Geogebra, a aprendizagem do aluno será mais satisfatória. (D 7 – Ed. Mat.)

O uso do programa Geogebra nos possibilitou várias experimentações e investigações, que sem este recurso ficaria muito difícil e trabalhoso. Como aprendizagem, o uso do software serviu como complemento da aprendizagem teórica trabalhada na sala de aula. (D1- Ed. Mat)

Para a pesquisadora, o *software* foi utilizado como um instrumento para incentivar a mobilização das formas de comunicação por meio da representação algébrica e geométrica de objetos matemáticos, além da linguagem natural e simbólica usada na janela de textos. Os dados coletados revelam que a principal lacuna na formação matemática dos alunos é comunicar por escrito as idéias matemáticas. Esse fato é comprovado em outras pesquisas como em Frota (2002), Fonseca (2000), Ponte (2004) e reafirma a importância a ser dada à questão, principalmente nos programas de formação docente inicial e continuada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

[...] tomando determinadas formas de pensamento a sério e dando-lhes a primeira prioridade entre os princípios necessários para a organização do currículo de Matemática (ou de outra disciplina), as capacidades de raciocínio são adquiridas diretamente e também melhoram os nossos conhecimentos matemáticos (Goldenberg, 1998 a)

O objetivo desta pesquisa foi investigar possibilidades de mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de Transformações Geométricas no Plano.

Foi desenvolvido um trabalho empírico, utilizando o *software* GeoGebra, que compreendeu três etapas, envolvendo alunos de Ensino Médio, de um Curso de Licenciatura em Matemática e de um Curso de Especialização.

Para a elaboração das atividades, uma revisão teórica dos conteúdos foi feita, com foco no desenvolvimento dos hábitos de pensamento matemático e nas investigações matemáticas. Nas três etapas da pesquisa, as atividades de investigação matemática foram planejadas em forma de descoberta guiada, com o objetivo de proporcionarem uma experiência de exploração e investigação matemática, buscando a mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de Transformações Geométricas no Plano por meio de um trabalho desenvolvido em ambientes computacionais de aprendizagem.

A opção pela utilização do *software* GeoGebra, na condução da pesquisa, revelou ser uma escolha acertada uma vez que criou possibilidades de enfatizar a visualização, pela exploração de cores, idéias, movimento dos objetos geométricos e a articulação do pensamento geométrico e algébrico necessária à compreensão conceitual das Transformações Geométricas no Plano.

A condução do trabalho em ambiente computacional mostrou que, de modo geral, os alunos se envolveram nas experimentações e explorações com as transformações geométricas, evidenciando formas de pensamento de busca de variantes e invariantes, levantamento de conjecturas, visualização, capacidade de invenção, raciocínio proporcional e, sobretudo, comunicação oral das descobertas feitas.

A utilização de *softwares* como o GeoGebra pode ser um excelente recurso para que o aluno consiga perceber por meio de “mostrações” matemáticas, dispondo de ferramentas para fazer a sobreposição de curvas, verificando que duas ou mais curvas obtidas por transformações de isometria são congruentes, o que, com construções utilizando lápis e

papel, poderia ser complicado. Mesmo sendo as tarefas estruturadas em forma de descoberta guiada, a primeira atividade, nas três turmas, demandou mais tempo, no caso, o necessário para o aluno se adaptar ao ambiente computacional e as ferramentas do *software*. Porém, acreditamos ter sido o tempo necessário para que o aluno se adaptasse ao tipo de atividades propostas. Podemos dizer que houve uma identificação positiva dos alunos com o GeoGebra, sendo relevantes o envolvimento e a motivação na realização das atividades.

Os resultados apontam, entretanto, que os alunos, de modo geral, apresentam maior facilidade em se expressar oralmente, durante os momentos de socialização das atividades desenvolvidas. As maiores dificuldades encontradas entre alunos, professores em formação inicial e continuada foram as de registrar por escrito as descobertas realizadas durante o desenvolvimento das atividades. O fato chama a atenção principalmente quando constatamos existirem dificuldades entre os professores que estão formando outros alunos.

O uso de tarefas estruturadas sob forma de descoberta guiada contribuiu para que os alunos avançassem nas investigações e apresentassem melhor compreensão conceitual. Porém, houve necessidade do papel efetivo do professor na condução do processo de sistematização e formalização das idéias exploradas pelos alunos, uma vez que, sozinha, a maioria deles não avançou. A pouca autonomia para fazer explorações por conta própria decorre, talvez, do fato de não terem sido incentivados a desenvolver o hábito de fazer experimentações matemáticas. A dificuldade no registro das idéias comprometeu o desenvolvimento da etapa de formalização matemática das idéias, de maneira que os alunos da Licenciatura e da Especialização tivessem mais tempo para desenvolver algumas deduções.

Os resultados da pesquisa sugerem que, nos cursos de formação de professores, seja inicial ou continuada, haja oferta de oportunidades para os alunos desenvolverem formas de pensamento, incluindo a sistematização e formalização de resultados. Afinal, esses profissionais irão trabalhar com os alunos da educação básica. No decorrer do estudo, foi possível perceber uma mudança de postura na pesquisadora, como professora. Em minhas aulas tenho praticado a cultura da exploração matemática, usando e abusando da visualização, busca dos variantes e invariantes, tentando oferecer oportunidades de os alunos comunicarem suas idéias de forma oral e escrita.

Os resultados desta pesquisa sugerem, ainda, que, nas aulas de matemática, pode ser interessante uma apresentação dos conteúdos a partir da representação geométrica, algébrica e do registro das idéias sob forma de texto, do mesmo modo que foi desenvolvido o trabalho em ambiente computacional.

Uma das limitações desta pesquisa diz respeito ao pouco tempo dedicado à sistematização das idéias, de resultados e formalização da teoria sobre as transformações geométricas. Na proposta apresentada no Apêndice A, procuramos investir um pouco mais nesse aspecto e apresentamos algumas sugestões de atividades em forma de descoberta guiada que tentam conduzir o aluno a experimentar processos de dedução matemática, formalização e generalização.

Como as novidades na área de informática surgem a todo instante, é importante que o professor esteja aberto a aprender constantemente, a discutir sobre o tema com outros professores e até mesmo com seus alunos, pois, esses, muitas vezes, têm mais tempo e disponibilidade que o professor para realizar pesquisas. Dessa forma, o professor pode aprender a lidar com a sala de aula informatizada.

Destacamos, ainda, a importância de o estudo de funções e suas transformações ser feito em conexão com os estudos das transformações geométricas, trabalhadas desde o ensino fundamental como uma extensão de conceitos e propriedades.

Embora este trabalho tenha chegado ao final, há um longo caminho pela frente, já que, diante dos resultados apresentados pelos alunos, outras questões e dúvidas foram levantadas:

- A preocupação com a exploração do *software* não teria comprometido a sistematização de resultados?
- A dificuldade dos alunos em fazerem os registros escritos pode estar ligada à dificuldade de adaptação com o editor de texto do *software*?

Uma questão relevante permanece em aberto sobre como contribuir para que os alunos desenvolvam o hábito de descrever formalmente idéias, relações e processos matemáticos. Novas investigações serão necessárias para indagar e forma mais detalhada o assunto.

REFERÊNCIAS

- ABRANTES, P.,PONTE, J. P.,FONSECA, H. & BRUNEIRA, L (Eds). 1999. **Investigações matemáticas na sala de aula e no currículo**. Lisboa: APM e Projeto MPT.
- BOGDAN, R. e BIKLEN, S.K. Qualitative Research for Education. Boston, Allyn and Bacon, Inc., 1982 in LUDKE, Menga, ANDRÉ, Marli E. D. **A. Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.
- BORBA, Marcelo C. & PENTEADO Miriam G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BORBA, Marcelo C., VILLARREAL, Mônica E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information And Communication Technologies, Modeling, Visualization, And Experimentation**. Springer, 2005
Capítulo 5 . 229 páginas
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF, 1998.
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: SEF, 1999.
- BRASIL, Parecer nº CNE/CES 1.302/2001, **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática**. MEC . 06 nov 2001
- BROLEZZI, Antônio C. **Funções e Gráficos**. São Paulo:Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, 2004.
- COSTA, Arthur L., KALLICK, Bena. **Describing 16 Habits of Mind**.2000.
- COSTA, C. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. Escola Superior de Educação de Coimbra. 2002.
- CUOCO, A., GOLDENBERG, E. P., and J. Mark. 1994."**Habits of Mind: an organizing principle for mathematics curriculum**" Journal of Mathematical Behavior 15, 375-402 (1996).
- DANTE, Luiz.R. **Tudo é Matemática**. Ensino Fundamental Vol 8. 1.ed São Paulo: Ática, 2002.
- DANTE, L.R. **Matemática Contexto de Aplicações: ensino médio**. Vol 1. 3.ed São Paulo: Ática, 2003.
- DANTE, L.R. **Matemática Contexto de Aplicações: ensino médio**. Vol 1. 4.ed São Paulo: Ática, 2007.
- DAVIS, P. J. HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradativa , 1995.

ERNEST,P.**Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia.** In:ABRANTES, LEAL, PONTE (Eds). **Investigar para aprender matemática**, (PP.25 – 48). Lisboa: Projeto MPT e APM, 1996.

FARMER, David W. **Grupos e Simetria: Uma Guia para a Descoberta Matemática.**Lisboa: Gradativa, 1999.

FINNEY, R L.WEIR M. D., GIORDANO F. R. **Cálculo de George B.Thomas Jr.**, volume 1, tradução Paulo Boschcov; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo – São Paulo: Addison Wesley, 2002.

FIORENTINI, Dario, FERNANDES, Fernando L. P., CRISTOVÃO, Eliane M.. **Um Estudo das Potencialidades das Investigações Matemáticas no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.** Faculdade de Educação – Unicamp, 2004.

FIORENTINI, Dario & LORENZATO, Sérgio, **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP, 2006.

FONSECA, H. (2000). **Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula.** (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Disponível em: < <http://ia.fc.ul.pt> > Acesso em: 08 jul. 2007.

FROTA, Maria Clara R.**Experiência Matemática e Investigação Matemática**,.V CIBEM, Porto, Portugal, jul.2005. Disponível em: <http://www.matematica.pucminas.br>. Grupo de Trabalhos, Grupo PINEM. Acesso em 08 ago.2007.

FROTA, Maria Clara R.**Competências de Representações e Comunicação em Matemática:** papel de livro didático. Anais de XI ENPIDE. Goiânia, maio 2002. (CD-ROM, Paineis: Parâmetros Curriculares Nacionais: (re) leituras de uma política, PA042.pdf

GOLDENBERG, E. P. (1998 a). **“Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (I).** Educação e Matemática, 47, 31-35.

GOLDENBERG, E. P. (1998 b). **“Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (II).** Educação e Matemática, 48, 37-44.

GOLDENBERG, E. P (Eds). 1999. **Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática** Lisboa: APM e Projeto MPT.

GRAVINA, Maria A., SANTAROSA, Lucila.M. **Aprendizagem Matemática em ambientes informatizados.**IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.

GUZMÁN, Miguel. **El Papel de la Visualizacion.** El Ricon de la Pizarra. Madrid: Ediciones Pirámides. 1996.

LÉVY, Pierre, **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática – Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993 ou 1997 ou 14ª impressão 2006.

LINDQUIST, Mary M., SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinando geometria.** São Paulo: Atual, 1994.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

LIMA, E. L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LOURENÇO, Marcos L. **A Demonstração com Informática Aplicada à Educação**. BOLEMA, ano 15, no. 18. (PP. 82-92) Unesp. Rio Claro, 2002 .

LUDKE, Menga, ANDRÉ, Marli E. D. **A. Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MORAN, José M. BEHRENS, Marilda A. MASETTO, Marcos T. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003.

NETO, Aref A. **Geometria Analítica: 2º grau**. São Paulo: Ed. Moderna, 1980.

PAIS, Luiz C. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAIVA, Manoel R. **Matemática: conceitos, linguagem e aplicações**. São Paulo: Ed. 1, 2002.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede**.- São Paulo: FTD, 2000.

PIRES, C. M. C. **Reflexões sobre os cursos de licenciatura em Matemática**, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. Educação Matemática em Revista.. Ano 9. Ed. Especial. São Paulo: SBEM, março 2002.

POLYA, George. **O ensino por meio de problemas**. RPM 7.Sociedade Brasileira de Matemática . 1985. 11-16

POLYA, George. **Dez mandamentos para professores**. RPM 10.Sociedade Brasileira de Matemática . 1987. 2-10

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**- 2 reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. (2004). **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. *Investigar em Educação*, 2. 93-169.

PONTE, J. P. et al. **Investigações matemáticas na sala de aula** – Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

REZENDE, Eliane Q. F. QUEIROZ, Maria.L.B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas, São Paulo: Ed. Unicamp, 2000.

RICH, Barnett. **Teoria e Problemas de Geometria**. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

SAFIER, F. **Teoria e problemas de pre-cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2003.

SILVA, Cláudio X. & FILHO, Benigno B. **Matemática aula por aula: ensino médio** – São Paulo: FTD, 2005.

SILVA, A., VELOSO, E., PORFÍRIO, J., ABRANTES, P. O currículo de matemática e as Actividades de Investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 69-85.

TOJO, Benedita N., **Concepção de uma sequência didática para o ensino/aprendizagem de congruência**. Dissertação de Mestrado Profissional. São Paulo. PUCSP:2006. Disponível em: < <http://www.pucsp.br/pos/edmat> > Acesso em: 08 Ago.2008.

VALE, I. , PALHARES, P. , CABRITA, I. E BORRALHO, A. (2006). **Os padrões no ensino e Aprendizagem da Álgebra**. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs), **Números e Álgebra – na aprendizagem da matemática na formação de professores** (pp. 193-211). Lisboa: SPCE- Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

VAZ, Regina L. **O Uso das Isometrias do Software Cabri-Geomètre como Recurso no Processo de Prova e Demonstração**. Mestrado em Educação Matemática. PUC/SP. São Paulo. 2004. <disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat> > Acesso em: 08 Ago.2008.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro. SBM, 1993.

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

VILA, A.CALLEJO, M. L.**Matemática para aprender a pensar:o papel das crenças na resolução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

VILLIERS, Michael, **Transformations: A golden thread in school mathematics**. Faculty of Education, University of Durban-Westville, 1993.

APÊNDICE A INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO: uma abordagem a partir da mobilização das formas de pensamento matemático

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	142
1. FORMAS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO	144
2. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: orientações metodológicas	147
3. ATIVIDADES PROPOSTAS	148
3.1 Primeira Parte: Trabalho com polígonos	150
3.1.1 Atividades do Grupo 1 – Isometrias	150
3.1.2 Atividades do Grupo 2 – Homotetia no Plano.....	154
3.2 Segunda Parte: Trabalho com funções	155
3.2.1 Atividades do Grupo 3 – Construções envolvendo funções lineares e quadráticas	155
3.2.2 Atividades do Grupo 4 – Isometrias nas funções polinomiais	162
3.3 Atividades de dedução.....	163
3.4 Atividades Complementares.....	166
4. REFLEXÃO A RESPEITO DOS RECURSOS COMPUTACIONAIS	169
REFERÊNCIAS	171

INTRODUÇÃO

Apresentamos a seguir a proposta de um Curso introdutório sobre o tema Transformações Geométricas no Plano desenvolvido a partir de um trabalho com polígonos e funções polinomiais.

A proposta leva em conta as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) fundamentadas na idéia de que a matemática é fruto da criação humana e “não evoluiu de forma linear e logicamente organizada, desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas” (p.25). Dessa forma, a atividade matemática escolar não deve “olhar para as coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno” (p.56). A aprendizagem deve ser vivenciada, apoiada na ação e na comunicação, permitindo que o aluno explore, reflita, descubra regularidades e propriedades, questione, registre, organize suas idéias, estabeleça conexões lógicas, generalize e abstraia idéias e significados. Assim, o currículo deve ser organizado “de modo que os alunos desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos”. Para isso, o professor tem o papel fundamental de conduzir as atividades de modo a enriquecer o raciocínio do aluno, levando-o à sistematização e à generalização das idéias.

Os grupos de atividades que integram a proposta foram elaborados a partir de um trabalho conduzido sob a ótica da investigação matemática e da resolução de problemas, de maneira que os alunos consigam explorar algumas formas de pensamento matemático que irão contribuir para a compreensão e articulação dos conteúdos. Propomos que o trabalho seja desenvolvido em ambiente computacional, com o uso do *software* GeoGebra, de forma que o processo seja dinâmico e motivador para alunos e professores.

Apenas por uma questão didática, o trabalho é apresentado em duas partes: a primeira aborda as transformações geométricas e tem por objeto de estudo os polígonos; a segunda tem como foco as funções. Não pretendemos fragmentar os tópicos, motivo pelo qual esta proposta busca integrar os dois objetos. A divisão de apresentação das atividades tem um aspecto de praticidade, viabilizando a utilização do material, seja para um curso de Geometria, seja para o estudo de Funções.

Cada grupo de atividades é proposto para ser desenvolvido conforme as seguintes etapas: 1) proposição de atividades numa linha investigativa para a introdução das transformações geométricas, em ambiente computacional, utilizando o *software* GeoGebra.

Busca incentivar os alunos a mobilizarem diferentes formas de pensamento matemático, interligando os raciocínios algébrico e geométrico; 2) socialização das idéias e sistematização das conjecturas e “mostrações” feitas; 3) formalização da teoria sobre transformações geométricas, feita na forma de descoberta guiada, objetivando conduzir o aluno a experimentar processos de dedução matemática, formalização e generalização; 4) proposição de atividades complementares como forma de fixação ou extensão de idéias.

O material permite uma utilização flexível, definida em função do tempo disponível para condução de um curso, ou mini-curso, bem como do nível de profundidade pretendido, de acordo com o público alvo. Assim, para um estudo inicial da Geometria dos polígonos e suas transformações, o curso pode compreender os dois primeiros grupos de atividades. Para uma introdução às Transformações de Funções, o curso pode compreender o terceiro e quarto grupos de atividades. O maior ou menor enfoque teórico em cada tópico dependerá também das metas pretendidas e do público alvo.

A proposta é estruturada em seções organizadas de forma a apresentar: as bases teóricas de sua elaboração do ponto de vista metodológico, tendo como meta a mobilização das formas de pensamento matemático; recomendações metodológicas sobre o ensino-aprendizagem das principais Transformações Geométricas no Plano; os blocos de atividades, desenhadas numa abordagem introdutória investigativa, especificando os objetivos; atividades de sistematização teórica e atividades complementares.

A proposta apresentada não esgota o tema abordado. Pretendemos que ela possa incentivar alunos e professores a criarem atividades, por meio da exploração de novas situações que levem à mobilização das diversas formas de pensamento matemático, visando a transformá-las em hábitos de pensamento.

1. FORMAS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO

Goldenberg (1998a, 1998b) e Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) apresentam uma proposta de currículo de Matemática com foco nos “hábitos de pensamento”. Para Goldenberg (1998a), hábitos de pensamento são os “modos de pensar que adquirimos tão bem, tornamos tão naturais e incorporamos tão completamente em nosso repertório que se transformam, por assim dizer, em hábitos mentais”.

Cuoco et al (1996) destacam os mais importantes modos de pensar em matemática que devem ser considerados o eixo central na organização de um currículo de Matemática: a tendência a detectar invariâncias; fazer experiências e explorações; descrever formal e informalmente, relações e processos; pensar e inventar idéias; visualizar; fazer conjecturas e comunicar idéias.

Cada um desses hábitos precisa ser desenvolvido ao longo da escolaridade. O trabalho envolvendo a *busca de padrões e invariantes* motiva os alunos e a exploração e descoberta assumem um papel fundamental em sua aprendizagem. Quando um estudante enfrenta um problema matemático, deve começar a jogar com as informações, reparar nos seus atributos independentes e fazer ensaios para obter resultados experimentais e observá-los (Cuoco et al (1996; Davis & Hersh, 1995).

A *visualização*, ou seja, a capacidade de criar, manipular e “ler” imagens mentais de aspectos comuns da realidade é um dos hábitos de pensamento matemático que deve ser privilegiado (Goldenberg, 1998b). A visualização tem um papel importante no desenrolar do pensamento matemático, pois é um veículo eficaz de transmissão rápida de idéias, contribuindo para melhorar a compreensão e o trabalho criativo na resolução de problemas. (Guzmán, 1996).

Pensar, desmontar idéias, ser inventor, inserir alterações num sistema já existente e observar, são formas de lidar com a matemática que os alunos precisam experimentar, para aprender a levantar conjecturas sobre as situações matemáticas propostas, indagando depois acerca da veracidade delas.

Para viabilizar o desenvolvimento das várias formas de pensamento matemático, é importante incentivar a *descrição formal ou informal das relações e processos*. Descrever de forma oral ou escrita é uma etapa importante para: compreender; dizer o que significa; inventar a notação; discutir; tentar convencer os colegas de um resultado verdadeiro ou plausível.

Se o foco está nas maneiras de pensar, existe uma maior probabilidade de que sejam feitas as conexões corretas entre as idéias matemáticas que são úteis a todos os alunos, independentemente dos seus interesses particulares (Goldenberg, 1998 b).

Em diversos cursos de graduação, os alunos desenvolvem estudos de Cálculo Diferencial e Geometria Analítica, Geometria, mas percebe-se, não raro, que esses estabelecem poucas conexões entre os conteúdos, talvez pela característica fragmentada com que as idéias matemáticas são por vezes apresentadas. Uma abordagem dos conteúdos matemáticos, que favoreça o desenvolvimento de hábitos de pensamento, pode possibilitar a integração dos raciocínios geométrico, algébrico e analítico e ajudar a entrelaçar muitas áreas do currículo.

Apresentamos um resumo das formas gerais de pensamento matemático e também as formas específicas de pensamento matemático dos geômetras e dos algebristas. A síntese é feita na forma de quadros que podem ser facilmente impressos, servindo de guia para o professor ao elaborar atividades a serem desenvolvidas com os alunos, tendo por meta, sempre que possível, estabelecer a conexão entre os pensamentos geométrico e algébrico.

Hábitos Gerais do Pensamento Matemático		
1	<i>Reconhecer padrões ou invariantes escondidos em uma situação matemática.</i>	Explorar as situações matemáticas, na tentativa de descobrir relações, estabelecer leis, fazer generalizações. Contribui para pensar de forma mais abstrata e desenvolver o poder da argumentação.
2	<i>Fazer experiências e explorações</i>	Jogar com as informações, fazer ensaios para obter resultados experimentais e observá-los. Contribui para estimular a criatividade, ampliar o leque de idéias e processos matemáticos e estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos.
3	<i>Visualização</i>	Capacidade de criar, manipular e “ler” imagens mentais de aspectos comuns da realidade. Representações por meio de tabelas, diagramas, gráficos, esboços. Contribui para a compreensão do processo, orienta investigações matemáticas e construção de conexões lógicas e demonstrações. Contribui para a compreensão matemática, transmissão de idéias, levantamento de conjecturas, a construção de argumentação e a comunicação oral e escrita
4	<i>Pensar, desmontar idéias, ser inventor</i>	Oportunidades para ação, participação ativa, descobrir e inventar, tornando os conceitos mais compreensivos.
5	<i>Fazer conjecturas sobre as situações matemáticas propostas</i>	Levantamento de idéias sobre uma situação a ser explorada e/ou investigada baseado nas evidências apontadas.
6	<i>Tendência a descrever, formal e informalmente, relações e processos.</i>	Etapa importante para compreender, dizer o que significa; inventar a notação; discutir, Escrever resultados, conjecturas, argumentos, perguntas e opiniões sobre a situação em questão.

		Capacidade essencial da comunicação matemática Contribui para se obter uma boa performance de oralidade, detectar as relações, processos e conexões lógicas entre idéias.
7	<i>Comunicar as idéias.</i>	Expressar matematicamente, estruturando o pensamento e a linguagem com idéias organizadas.

As formas de pensamento matemático são variadas. De modo especial, estamos interessados nas formas e hábitos de pensamento dos geômetras e dos algebristas. O pensamento geométrico é fundamental em todas as ramificações da matemática e, ao longo dos tempos, ofereceu subsídios para várias investigações, pois, “por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1988, p.51); a álgebra permite sistematizar e expressar idéias matemáticas, tornando possível operar abstratamente e transformar objetos em símbolos matemáticos, pois “constitui um espaço significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas” (BRASIL, 1988, p.115).

<i>Hábitos Particulares do Pensamento Matemático</i>		
	<i>Dos geômetras</i>	<i>Dos algebristas</i>
1	<i>Usam o raciocínio proporcional</i> e sempre iniciam uma investigação geométrica, procurando relações constantes entre as medidas estudadas.	<i>Gostam de um bom cálculo</i> , com números, símbolos abstratos e funções.
2	<i>Usam várias linguagens</i> , como a vetorial, a analítica e a linguagem algébrica para resolver um mesmo problema, além de linguagens gráficas e computacionais.	<i>Usam a abstração</i> como uma ferramenta natural e poderosa para expressar idéias, obter <i>insights</i> e novos resultados.
3	<i>Usam uma mesma linguagem para tudo</i> como, por exemplo, a linguagem de pontos distintos, retas, ângulos, planos, áreas, volumes é utilizada para descrever fenômenos aparentemente não-geométricos, proporcionando estabelecer conexões entre diferentes ramos da matemática.	<i>Amam algoritmos</i> para resolver operações, equações e problemas matemáticos.
4	<i>Amam sistematizar resultados</i> e, nesse ponto, pode estar um dos estrangulamentos da aprendizagem matemática, pois a grande maioria de nossos alunos tem dificuldades em sistematizar suas idéias e resultados alcançados, ou ainda, faz generalizações precipitadamente.	<i>Dividem as coisas em partes</i> , buscando perceber o que ocorre em casos mais simples, para depois estender para outros casos. Tal fato contribui para o processo da abstração.
5	<i>Preocupam-se com as coisas que mudam e com as que não mudam</i> - os variantes e invariantes.	<i>Usam o raciocínio por continuidade</i> , estendendo raciocínios utilizados em uma parte da matemática para outra.
6	<i>Amam formas</i> , fundamentais para os geômetras, pois são instrumentos para uma boa visualização	<i>Amam representar coisas</i> usando elementos bem compreendidos de uma estrutura algébrica para

	da situação estudada. Uma boa herança dos geometras no ensino-aprendizagem de matemática deveria ser o hábito de abusar das formas, das representações gráficas.	entender melhor outra, menos conhecida, ou relacionar estrutura aparentemente diferente.
--	--	--

2. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: orientações metodológicas

Na condução do curso, é interessante que o professor faça uma revisão das Transformações Geométricas no Plano. De modo geral, o assunto aparece de forma resumida nos livros-textos, ou quando detalhado (LIMA, 1992, 1996; WAGNER, 1993), a forma de apresentação exige do aluno uma capacidade de abstração grande para lidar com definições e teoremas, exigindo traquejo no uso dos processos matemáticos de indução e dedução e no uso da linguagem formal matemática.

No Capítulo 2 desta dissertação, o assunto é revisitado a partir das definições e propriedades das Transformações Geométricas no Plano e exemplificados os movimentos ocorridos quando tais transformações são aplicadas a polígonos e, depois, a funções polinomiais. Vários exemplos feitos no GeoGebra, *software* proposto para a condução do curso são apresentados. As figuras inseridas ilustram construções como as propostas nas seções 3.3 e 3.4.

O foco do trabalho é evidenciar aspectos importantes para o ensino-aprendizagem, de modo especial, o desenvolvimento das diversas formas de pensamento matemático, interligando o pensamento algébrico e o geométrico. O Capítulo 2 pode ser usado pelo professor, ao preparar o curso, uma vez que sintetiza algumas reflexões teórico-metodológicas acerca das Transformações Geométricas no Plano. Busca estabelecer uma conexão entre a forma como o tópico é abordado em textos didáticos adotados na Licenciatura ou mesmo no Ensino Médio e uma abordagem que permita melhor compreensão do assunto a partir da mobilização das formas de pensar e as estratégias de aprender Matemática. Assim, o texto pode ser útil, também, para alunos dos cursos de Licenciatura, ou mesmo para alunos de Ensino Médio, que buscam retomar o assunto a partir de uma abordagem investigativa.

O foco das atividades do Capítulo é o desenvolvimento das formas visuais do pensamento matemático e das formas de comunicação das idéias matemáticas. Por vezes, é proposta a dedução de alguma fórmula, como forma de destacar que as generalizações

resultam de um processo de dedução formal matemática e não apenas de resultados de investigações feitas a partir de um número reduzido de situações.

Além de lidar com polígonos, trabalhamos as funções e suas transformações. De acordo com os PCNEM (1999), o estudo de funções possui um caráter integrador que permite estabelecer conexões entre conceitos e formas de pensamento matemático. Desempenha também um papel importante para descrever e estudar o comportamento de certos fenômenos do cotidiano, por meio de leitura, interpretação e construção de gráficos, bem como articular a matemática com outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia.

É importante que, no estudo dos vários conteúdos matemáticos, seja incentivada, a todo tempo, a integração de idéias. Assim, estudar os movimentos determinados pelas transformações de isometrias e homotetias no plano “pode ser útil para compreendermos as funções matemáticas” e o estudo das “funções, por sua vez, pode nos ajudar a compreender e representar melhor essas e outras transformações”. (BROLEZZI, 2004, p.11).

O estudo de famílias de funções obtidas a partir de transformações por isometrias de uma função dada, possivelmente, possibilitará que o aluno estabeleça relações entre formas de representação algébrica e gráfica. Um estudo desenvolvido nessa linha pode contribuir para o levantamento de conjecturas de algumas propriedades em relação às funções, além de favorecer ao aluno o desenvolvimento de um repertório de formas de pensamento matemático, como, por exemplo: visualização, procura de variantes e invariantes, habilidades de experimentar, explorar modelos, refletir, interpretar, provar, argumentar e sistematizar resultados.

3. ATIVIDADES PROPOSTAS

Buscando uma prática pedagógica investigativa e inovadora, optamos por desenvolver as atividades aqui propostas, utilizando o Geogebra, tendo em vista a qualidade e, principalmente, o fato de ser um *software* livre¹. Trata-se de um *software* de geometria dinâmica que possibilita realizar construções de pontos, vetores, segmentos, retas, circunferências, transportar distâncias, tirar paralelas e perpendiculares, além de construir

¹ O *software* foi desenvolvido por Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg e reúne num só programa geometria, álgebra e cálculo. Está disponível para *download* no endereço eletrônico <http://www.geogebra.org/cms/>

gráficos, explorar transformações em funções, tais como translações verticais e horizontais, reflexões etc.

As construções geométricas virtuais produzidas com o Geogebra não ficam estáticas: elas se mexem sob o nosso comando. Os pontos geométricos iniciais de uma construção podem ser arrastados com o *mouse* sem destruir as relações matemáticas que vigoram entre eles e os demais objetos. Possui dois ambientes: uma janela de geometria e outra de álgebra. Uma expressão na janela de álgebra corresponde a um objeto na janela de geometria e vice-versa, permitindo, assim, a articulação entre as idéias, conceitos, teorias da álgebra e da geometria, “produzindo significado para o conhecimento” e “nutrindo a aprendizagem” (Pais, 2006).

O GeoGebra dispõe de uma série de recursos que permitem a utilização de cores para diferenciar as figuras iniciais e as figuras obtidas por meio das transformações e a identificação de medidas de segmentos, do perímetro, de ângulos e de áreas de figuras, podendo facilitar a verificação de congruências ou semelhanças entre figuras geométricas. Permite, também, que gráficos de funções sejam identificados por cores, que se insira texto com comentários, observações e expressões algébricas que representam as funções, o que contribui com a visualização, a comparação e a identificação dos padrões e invariantes após a realização de uma transformação geométrica. O GeoGebra, permite realizar várias explorações e investigações com maior eficiência e rapidez, constituindo-se, por isso, um instrumento importante no desenvolvimento de estratégias de ensino-aprendizagem.

Optamos por apresentar as atividades na forma de descoberta guiada e investigações matemáticas nas quais os alunos possam fazer experiências e explorações; pensar e inventar idéias; visualizar; fazer conjecturas, buscar regularidades. Nesse tipo de atividade, uma etapa imprescindível é a de comunicação das idéias por meio de registro oral e/ou escrito e a sistematização e generalização das idéias abordadas na investigação. Assim, após a realização de cada construção, é importante que seja feita a socialização das descobertas. Esse é o momento em que o professor pode redirecionar idéias, conduzindo os alunos a fazer sistematizações e melhorar a forma de comunicar as idéias, corrigindo eventuais erros decorrentes de generalizações precipitadas. Dependendo do público alvo, é o momento de propor alguma dedução, que pode ser feita com a participação dos alunos, após pesquisarem o assunto em textos didáticos, ou proposta pelo professor na forma de descoberta guiada. Atividades complementares podem ser propostas como desafios, envolvendo os alunos em novos processos de experimentação e descobertas.

Antes de iniciar as atividades no laboratório de informática, caso o professor queira ter acesso aos arquivos produzidos pelos alunos, deve verificar qual é a melhor forma de salvar os arquivos para que depois possa recuperá-los.

Os objetivos são apresentados por grupo de atividades, destacando apenas quando necessário algum objetivo específico de uma ou outra atividade.

As atividades aqui propostas têm como objetivos o desenvolvimento de formas de pensamento matemático, que possam ser incorporadas, transformando-se em hábitos de pensamento matemático. Para isso, pretendemos que elas incentivem os alunos a:

- Reconhecer padrões e invariantes escondidos em uma situação matemática.
- Formular descrições orais e escritas.
- Abusar da visualização para investigar e interpretar.
- Sistematizar resultados.
- Integrar as formas de pensar da Geometria e da Álgebra.

3.1 Primeira Parte: Trabalho com polígonos

3.1.1 Atividades do Grupo 1 – Isometrias

Objetivos:

- Dar movimento e cor aos elementos dos polígonos.
- Verificar variantes e invariantes na transformação dos polígonos.
- Obter as coordenadas dos vértices dos polígonos.
- Comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos três polígonos.
- Verificar a equivalência de perímetro e área dos polígonos.
- Verificar que uma isometria preserva distâncias.
- Observar que uma isometria preserva paralelismo.
- Perceber que uma isometria transforma qualquer figura em outra congruente.
- Levantar conjecturas sobre a generalização de propriedades das isometrias.
- Testar conjecturas, fazendo “mostrações” no GeoGebra.
- Formular descrições escritas a respeito das experimentações realizadas e conclusões obtidas.

Isometria de Translação

Objetivos:

- Verificar que, numa translação, o polígono original é deslocado para a direita ou para a esquerda, para cima ou para baixo, mobilizando as formas de pensamento matemático para buscar variantes e invariantes e registrar observações.

Construção 1

- Abra um arquivo no GeoGebra e grave seu arquivo.
- Clique com o lado direito do mouse sobre a janela geométrica e a seguir em malha
- Crie um polígono P_1 qualquer preferencialmente no 1º quadrante.
- Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P_1 , se desejar modifique a cor do polígono P_1 para distinguir melhor o polígono inicial.
- Crie um vetor vertical $\vec{v}_1$ de origem no ponto (0,0), no sentido positivo do eixo y.
- Crie um vetor horizontal $\vec{v}_2$ de origem no ponto (0,0) no sentido positivo do eixo x.
- Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique no polígono P_1 e depois no vetor $\vec{v}_1$. Aparecerá um polígono P_2 , obtido de P_1 . Observe o que ocorreu com as coordenadas dos vértices do polígono P_1 . Utilizando a ferramenta “inserir texto”, clique sobre a área de trabalho, registre seus comentários numa janela de texto.
- Repita a operação com o vetor $\vec{v}_2$.
- Use os recursos do programa para comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos três polígonos. Aconteceu o que você previa ou não? Registre suas observações numa janela de texto.
- Agora clique na ferramenta “move” e desloque a extremidade dos vetores. Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices e os lados dos polígonos.
- Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P_1 . Verifique o que acontece com as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos
- Observe o que acontece com as coordenadas dos vértices dos polígonos em cada situação experimentada e registre o que você percebeu por escrito. Para isso, utilizando a ferramenta “inserir texto”, clique sobre a área de trabalho, registre seus comentários numa janela de texto. Deveria estar na primeira construção? Salve novamente seu arquivo.
- Crie um vetor genérico $\vec{v}_3$ de origem no ponto (0,0) não paralelo a nenhum dos eixos coordenados. Desloque o polígono P_1 por esse vetor. O que observa? Registre.
- O que se pode dizer sobre as retas que contêm respectivamente os lados $\overline{AB}$ do polígono P_1 e $\overline{A'B'}$ do polígono transformado P_2 . Compare as retas suportes dos lados do polígono P_1 com as retas suportes dos polígonos transformados. Registre suas observações. Salve novamente seu arquivo.

Simetria de Rotação

Objetivos:

- Verificar que a rotação fixa num ponto (centro de rotação) faz todos os pontos de uma figura girarem de um ângulo de mesma amplitude em torno desse ponto.
- Perceber que existem circunferências de centro O , passando por todos os vértices do polígono.
- Perceber que é possível inscrever polígonos regulares nas circunferências que passam pelos vértices dos polígonos.

Construção 2:

- Abra um arquivo no Geogebra e grave seu arquivo.
- Crie um polígono P_1 qualquer preferencialmente no 1º quadrante.
- Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P_1 , se desejar modifique a cor do polígono P_1 para distinguir melhor o polígono inicial.
- Crie um ponto na origem do sistema cartesiano.
- Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P_1 e em seguida no ponto assinalado. Abrirá uma janela “girar em torno de um ponto por um ângulo” digite 90 e selecione a opção grau ($^\circ$) e peça para aplicar.
- Observe o que ocorreu com as coordenadas do polígono P_1 e registre seus comentários numa janela de texto.
- Repita a operação para 180° e 270° .
- Use os recursos do programa para comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos três polígonos. Aconteceu o que você previa ou não? Registre suas observações numa janela de texto.
- Trace circunferências de centro na origem do plano cartesiano e passando pelos vértices do polígono P_1 .
- Trace polígonos passando pelos vértices do polígono P_1 . Que tipo de polígonos são esses? O que determina o número de lados deles? Registre suas observações numa janela de texto.
- Observe o que acontece com as coordenadas dos vértices dos polígonos em cada situação experimentada e registre o que você percebeu por escrito.
- Salve novamente seu arquivo.

Isometria de Reflexão

Objetivos:

- Perceber que, numa reflexão, a imagem do objeto é refletida em relação ao eixo de simetria.
- Observar que os pontos correspondentes são equidistantes do eixo de reflexão ou de simetria.

Construção 3

- Abra um arquivo no GeoGebra e grave seu arquivo.
- Crie um polígono P_1 qualquer preferencialmente no 1º quadrante.
- Com a ferramenta “reflexão com relação a uma reta”, clique no polígono P_1 e depois no eixo x. Aparecerá um polígono P_2 , simétrico a P_1 em relação ao eixo x.
- Clique novamente em P_1 e depois no eixo y. Agora aparecerá um polígono P_3 , simétrico de P_1 , em relação ao eixo y.
- Levante conjecturas a respeito das mudanças que ocorreram.
- Observe o que acontece com as coordenadas dos vértices dos polígonos em cada situação experimentada e registre o que você percebeu por escrito.
- Use os recursos do programa para mudar a cor dos polígonos, comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos três polígonos. Aconteceu o que você previa ou não? Registre suas observações numa janela de texto.
- Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P_1 . Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices, as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos.
- Registre o que você percebeu por escrito. Salve novamente seu arquivo.
- O que aconteceria se o polígono P_1 fosse refletido em relação à reta suporte de um dos seus lados? Faça experiências usando os recursos disponíveis. Registre suas observações.

Isometria de Reflexão Deslizante**Objetivos:**

- Perceber que, em uma reflexão deslizante, a imagem do objeto é refletida em relação a uma reta (eixo de reflexão) e, em seguida, sofre uma translação por um vetor $\vec{v}$ paralelo ao eixo de reflexão.

Construção 4:

- Abra um arquivo no GeoGebra e grave seu arquivo.
- Crie um polígono P_1 qualquer preferencialmente no 1º quadrante.
- Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P_1 , se desejar modifique a cor do polígono P_1 para distinguir melhor o polígono inicial.
- Com a ferramenta “reflexão com relação a uma reta”, clique no polígono P_1 e depois no eixo x. Aparecerá um polígono P_2 , simétrico a P_1 em relação ao eixo x.
- Crie um vetor horizontal $\vec{v}_1$ de origem no ponto (0,0) no sentido positivo do eixo x.
- Crie um vetor vertical $\vec{v}_2$ de origem no ponto (0,0) no sentido positivo do eixo y.
- Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique no polígono P_2 e depois no vetor $\vec{v}_1$. Aparecerá um polígono P_3 , obtido de P_2 . Observe o que ocorreu com as coordenadas dos vértices do polígono P_1 . Repita a operação utilizando o vetor $\vec{v}_2$.
- Use os recursos do programa para mudar a cor dos polígonos, comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos. Aconteceu o que você previa ou não? Registre suas observações numa janela de texto.

- i) Observe o que acontece com as coordenadas dos vértices dos polígonos em cada situação experimentada e registre o que você percebeu por escrito.
- j) Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P_1 . Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices, as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos.
- k) Registre o que você percebeu por escrito.
- l) Experimente transladar o polígono e em seguida fazer a reflexão do polígono transformado. Aconteceu o que você previa? O que alterou? Complete seus registros anteriores.
- m) Salve novamente seu arquivo.

4.1.2 Atividades do Grupo 2 – Homotetia no Plano

Objetivos:

- Observar que a homotetia é uma transformação geométrica que transforma um objeto em outro semelhante.
- Verificar que uma homotetia pode alterar o tamanho do objeto original.
- Perceber que uma homotetia preserva forma e medida dos ângulos da figura inicial.
- Reconhecer que uma homotetia pode gerar uma isometria.
- Obter as coordenadas dos vértices dos polígonos.
- Comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos.
- Verificar a proporcionalidade do perímetro e da área dos polígonos.
- Generalizar propriedades das homotetias.
- Formular descrições escritas a respeito das experimentações realizadas e as conclusões obtidas.

Construção 5:

- a) Abra um novo arquivo e grave seu arquivo.
- b) Crie um polígono P_1 qualquer preferencialmente no 1º quadrante.
- c) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P_1 , ferramentas e na opção cor, se desejar modifique a cor do polígono P_1 para distinguir melhor o polígono inicial.
- d) Marque o ponto na origem do sistema cartesiano.
- e) Com a ferramenta “homotetia de ponto por um fator”, clique no polígono P_1 e a seguir no ponto assinalado na origem e parecerá uma janela onde você deverá inserir um fator (número k). Aparecerá um polígono P_2 , ampliado ou reduzido em relação a P_1 .
- f) Varie os valores de k , faça experimentações com $k > 1$, $0 < k < 1$, $k = 1$, $k < 0$ e registre suas observações. Caso tenha necessidade, use cores diferentes para cada polígono.
- g) Use os recursos do programa para comparar os ângulos, as medidas dos lados, o perímetro e a área dos três polígonos. Aconteceu o que você previa ou não? Registre suas observações numa janela de texto.

- h) Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P_1 . Verifique o que acontece com as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos.
- i) Observe o que acontece com as coordenadas dos pontos em cada situação experimentada. Levante conjecturas sobre suas percepções e registre numa janela de texto.
- j) Salve novamente seu arquivo.

3.2 Segunda Parte: Trabalho com funções

3.2.1 Atividades do Grupo 3 – Construções envolvendo funções lineares e quadráticas

Objetivos:

- Criar representações dinâmicas para as funções lineares e quadráticas.
- Produzir significado para a aprendizagem do estudo funções por meio da compreensão conceitual.
- Expandir as condições de aprendizagens sobre funções.
- Ampliar as condições de visualização gráfica das funções lineares e quadráticas.
- Estabelecer conexão entre as representações algébricas e geométricas das funções lineares e quadráticas.
- Perceber que as representações gráficas das funções gozam das mesmas propriedades das isometrias.
- Perceber que a imagem de uma reta por isometria é uma reta.
- Verificar que uma isometria preserva paralelismo.
- Reconhecer que representações gráficas obtidas por uma isometria são congruentes.
- Reconhecer padrões e invariantes no estudo de funções.
- Generalizar propriedades nas funções.

Translação vertical da função linear

Objetivos:

- Verificar que a translação vertical desloca as retas para cima e para baixo.
- Perceber a correspondente mudança algébrica na equação inicial após essa ser transformada.
- Perceber as correspondentes mudanças algébricas na representação algébrica da função após a transformação.

Construção 6:

- a) Abra um novo arquivo e grave seu arquivo.
- b) Construa o gráfico da função $y = x$
- c) Para distinguir melhor a reta inicial, com o lado direito do mouse, clique sobre a reta, modifique a sua cor.
- d) Clique sobre a reta continue segurando o mouse e desloque a reta até $y = 2$. Observe a equação da reta na janela de álgebra.
- e) Repita a operação, deslocando a reta até $y = -2$. Novamente observe a equação da reta na janela de álgebra.
- f) Explore as três retas e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que aconteceu na janela de texto.
- g) Com o que você observou, seria capaz de determinar a equação de uma reta passando por $y = 3$? E por $y = -1$? Tente.
- h) Faça novos registros acerca do que você experimentou.
- i) Salve novamente seu arquivo.

Para que os alunos estabeleçam uma conexão entre a translação vertical na forma proposta no estudo de polígonos, na seção anterior e o estudo de funções, o professor poderá adotar a estratégia de utilizar vetores, como apresentamos na proposta a seguir:

Construção 7:

- a) Abra um novo arquivo e grave seu arquivo.
- b) Construa o gráfico da função $y = x$.
- c) Para distinguir melhor a reta inicial, com o lado direito do mouse, clique sobre a reta e modifique a sua cor.
- d) Crie um vetor vertical $\vec{v}_1$ de origem no ponto (0,0) no sentido positivo do eixo y.
- e) Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique na reta inicial e depois no vetor $\vec{v}_1$. Aparecerá uma nova reta obtida a partir da função $y = x$. Movimente o vetor para cima e para baixo, observe na janela algébrica o que ocorre com a equação da reta.
- f) Use os recursos do programa para mudar a cor das retas. Utilizando a ferramenta “inserir texto”, clique sobre a área de trabalho, registre seus comentários numa janela de texto.
- g) Que vetor deveria ser construído para que ao usar a ferramenta “transladar por um vetor”, você tenha uma reta passando por (0,-2)? Com o que você observou você seria capaz de determinar a equação de uma reta passando pelo ponto (0,-2)?
- h) Repita o processo tomando o ponto (0,3)?
- i) Faça novos registros acerca do que você experimentou.
- j) Salve novamente seu arquivo.

Translação vertical da função quadrática

Objetivos:

- Verificar que a translação vertical desloca a parábola para cima e para baixo.
- Perceber a correspondente mudança algébrica na equação inicial após essa ser transformada.
- Sobrepor as parábolas a fim de verificar a congruência delas.

Construção 8:

- Abra um novo arquivo e grave seu arquivo.
- Construa o gráfico da função $y = x^2$.
- Assinale o ponto A no vértice da parábola e modifique a sua cor para distinguir a parábola inicial.
- Crie um vetor vertical $\vec{v}_1$ de origem no ponto (0,0) no sentido positivo do eixo y.
- Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique na parábola inicial e depois no vetor $\vec{v}_1$. Aparecerá uma parábola obtida a partir da função $y = x^2$. Movimente a parábola para cima e para baixo, observe na janela algébrica o que ocorreu com a coordenada do vértice e com a equação da parábola.
- Use os recursos do programa para mudar a cor das parábolas e verificar se elas são congruentes. Utilizando a ferramenta “inserir texto”, clique sobre a área de trabalho, registre seus comentários numa janela de texto.
- Com o que você observou você seria capaz de determinar a equação de uma parábola de vértice (0,-1)? E com vértice em (0,3)? Tente.
- Experimente movimentar as parábolas e verifique a congruência delas.
- Faça novos registros acerca do que você experimentou.
- Salve novamente seu arquivo.

Reflexão da função linear

Objetivos:

- Verificar que a reflexão inverte a posição da reta em relação ao eixo das ordenadas.
- Perceber a correspondente mudança algébrica na equação inicial após essa ser transformada.

Construção 9:

- Abra um novo arquivo e grave seu arquivo.
- Construa o gráfico da função $y = f(x) = 2x + 3$, se desejar modifique a sua cor para distinguir a reta inicial.
- Com a ferramenta “reflexão com relação a uma reta”, clique na reta e depois no eixo y.

- d) Aparecerá uma nova reta, refletida em relação ao eixo dos y. Explore as duas retas e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que você percebeu na janela de texto.
- e) Clique em “mover” sobre a reta inicial, e desloque a reta até o ponto (0,2) e observe a equação das retas na janela de álgebra.
- f) Com o que você observou você seria capaz de determinar a equação de uma reta com a mesma inclinação da reta inicial passando por (0,- 3). E por (0,1)? Tente.
- g) Faça novos registros em relação ao que você experimentou.
- h) Salve novamente seu arquivo.

Reflexão e translação vertical da função quadrática

Objetivos:

- Verificar que a reflexão inverte a posição da parábola em relação ao eixo das abscissas.
- Combinar isometrias de reflexão e translação de função quadrática.
- Perceber a correspondente mudança algébrica na equação inicial após essa ser transformada.

Construção 10:

- a) Abra um novo arquivo no Geogebra e grave seu arquivo.
- b) Construa o gráfico da função $y = ax^2$ e assinale o ponto A de coordenadas (0,0) e se desejar modifique a sua cor para distinguir a parábola inicial.
- c) Com a ferramenta “reflexão com relação a uma reta”, clique na parábola e depois no eixo x.
- d) Explore as duas parábolas e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que você percebeu na janela de texto.
- e) Explore o que ocorre com a parábola inicial ao realizar as seguintes transformações: $-f(x)$, $f(x) + 3$, $f(x) - 2$, $1 - f(x)$. Registre seus comentários numa janela de texto
- f) Explore as transformações nos gráficos e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre o que aconteceu na janela de texto.
- g) Experimente outras transformações nos gráficos, observe as equações na janela algébrica.
- h) Faça novos registros em relação ao que você experimentou.
- i) Salve novamente seu arquivo.

Translação horizontal na função quadrática

Objetivos:

- Verificar que a translação horizontal desloca a parábola para a direita ou para a esquerda.
- Combinar isometrias de translação horizontal e vertical na função quadrática.

- h) Agora experimente as funções $f(x+3)+2$ e $f(x-3)+1$
- i) Explore novamente os gráficos e verifique as variações nas equações que afetam os gráficos e registre. Procure perceber se as parábolas são congruentes ou não.
- j) Observe os gráficos traçados. Procure identificar os vértices das duas parábolas: $f(x+3)+2$ e $f(x-3)+1$. Agora procure identificar os elementos das equações responsáveis pelas coordenadas dos vértices.
- k) Experimente desenvolver as operações envolvidas nas equações das funções transformadas e tente identificar as coordenadas dos vértices das funções.
- l) Experimente outras transformações com a função inicial, mas não se esqueça de deixar registros de suas observações em relação ao que você experimentou.
- m) Elabore sua conclusão final.
- n) Discussão dos resultados encontrados.
- o) Socialização e sistematização das idéias abordadas na atividade.

Caso o professor se interesse por continuar adotando a estratégia de trabalhar com vetores na combinação de translações horizontais e verticais, apresentamos a seguinte proposta:

Construção 13:

- a) Abra um novo arquivo e grave seu arquivo.
- b) Construa o gráfico da função $y = x^2$.
- c) Assinale o ponto A no vértice da parábola e modifique a sua cor para distinguir a parábola inicial.
- d) Crie os seguintes vetores de origem no ponto (0,0): o primeiro $\vec{v}_1$ no sentido vertical positivo do eixo y, o segundo horizontal $\vec{v}_2$ no sentido positivo do eixo x e o terceiro de extremidade final no ponto (2,3).
- e) Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique na parábola inicial e depois em cada vetor traçado. Movimente os vetores, um de cada vez, experimentando translações verticais e horizontais sempre observando as alterações que ocorrem na janela algébrica com a coordenada do vértice e com a equação da parábola.
- f) Registre seus comentários numa janela de texto.
- g) Experimente movimentar as parábolas e verifique a congruência delas.
- h) Faça novos registros acerca do que você experimentou.
- i) Salve novamente seu arquivo.
- j) Socialização e sistematização das idéias abordadas na atividade.

Função Inversa

As atividades seguintes exploram a função inversa de uma dada função. Para a função polinomial de 1º grau, as construções das funções são simples, uma vez que o domínio das duas é $D = R$. (construção 14). Já a função polinomial de 2º grau, $y = x^2$, que tem como

inversa a função $y = \sqrt{x}$, demanda o estudo do domínio; portanto, a construção das funções no GeoGebra é um pouco mais detalhada, como veremos na construção 15:

Objetivos das atividades com função inversa:

- Criar representações dinâmicas para as funções lineares e quadráticas e suas funções inversas.
- Compreender o significado de função inversa.
- Estabelecer conexão entre as representações algébricas e geométricas de funções e de suas funções inversas.
- Perceber que a função e a função inversa são simétricas em relação à reta $y = x$.
- Generalizar como determinar a função inversa de uma dada função.

Construção 14:

- Abra um novo arquivo e grave seu arquivo.
- Construa o gráfico da função $y = 2x$.
- Construa o gráfico da função $y = x$.
- Construa o gráfico da função inversa de $y = 2x$.
- Use os recursos do *software* para mudar a cor das retas e seu estilo e outras alterações que você deseja realizar..
- Assinale dois pontos na reta $y = 2x$ e procure identificar seus simétricos em relação à reta $y = x$, que pertencem à função inversa de $y = 2x$. Aconteceu o que você esperava? O gráfico da função que você construiu, é realmente a inversa da função $y = 2x$?
- Utilizando a ferramenta “inserir texto”, clique sobre a área de trabalho, registre seus comentários numa janela de texto.
- Se você não conseguiu traçar a função inversa da função $y = 2x$, experimente traçar uma reta que passa por dois pontos simétricos aos pontos assinalados no item f e observe a janela algébrica.
- Caso seja necessário, delete a curva traçada inicialmente e tente novamente.
- Faça novos registros acerca do que você experimentou.
- Salve novamente seu arquivo.
- Socialização da atividade e sistematização das idéias abordadas na atividade.

Construção 15:

- Abra um novo arquivo e grave seu arquivo.
- Construa o gráfico da função $y = x^2$.
- Construa o gráfico da função $y = x$.
- Pense qual será a função inversa da função $y = x^2$ e tente traçar seu gráfico.

- e) Assinale dois pontos na reta $y = x^2$ e procure identificar seus simétricos em relação à reta $y = x$, que pertencem à função inversa de $y = x^2$. Aconteceu o que você esperava? O gráfico da função que você construiu, é realmente o gráfico da função a inversa de $y = x^2$?
- f) O domínio da função inversa de $y = x^2$ é qualquer número real ou tem alguma restrição para ela? Lembre-se: os domínios e imagens da função e de sua função inversa são invertidos.
- g) Para inserir uma função com um intervalo definido, digite na entrada: Função[função f, número a, número b]. Outros comandos de entrada do *software* podem ser encontrados na ferramenta de ajuda.
- h) Caso seja necessário, delete a curva traçada inicialmente e tente novamente.
- i) Use os recursos do programa para mudar a cor e estilo das curvas traçadas.
- j) Faça novos registros acerca do que você experimentou.
- k) Salve novamente seu arquivo.
- l) Socialização da atividade e sistematização das idéias abordadas na atividade.

3.2.2 Atividades do Grupo 4 – Isometrias nas funções polinomiais

Objetivos:

- Criar representações dinâmicas para as funções polinomiais.
- Compreender que as isometrias podem ser aplicadas também em outros tipos de funções polinomiais.
- Ampliar as condições de visualização gráfica das funções polinomiais.
- Estabelecer conexões entre as representações algébricas e geométricas das funções polinomiais.
- Reconhecer que representações gráficas de funções polinomiais obtidas por uma isometria são congruentes.
- Generalizar as propriedades das funções polinomiais obtidas por transformações isométricas.

Isometrias nas funções polinomiais de 3º grau

Construção 16:

- a) Abra um novo arquivo no Geogebra.
- b) Construa o gráfico da função $f(x) = x^3 + x$ e se desejar modifique a sua cor para distinguir a curva inicial.
- c) Salve seu arquivo.

- d) Explore várias possibilidades de transformações geométricas que podem ser efetuadas com a função.
- e) Observe na janela algébrica as alterações que ocorreram nas equações em função das transformações geométricas efetuadas.
- f) Registre seus comentários na janela de texto.
- g) Experimente combinar transformações com a função inicial, mas não se esqueça de deixar registros de suas observações em relação ao que você experimentou.
- h) Salve seu arquivo novamente.

Isometrias nas funções polinomiais de 4º grau

Construção 17:

- a) Abra um novo arquivo no Geogebra.
- b) Construa o gráfico da função $y = x^4 - 2x^2$ e se desejar modifique a sua cor para distinguir a parábola inicial.
- c) Salve seu arquivo.
- d) Explore várias possibilidades de transformações geométricas que podem ser efetuadas com a função.
- e) Observe na janela algébrica as alterações que ocorreram nas equações em função das transformações geométricas que você experimentou.
- f) Registre seus comentários em forma de texto.
- g) Experimente outras funções e deixe registros em relação ao que você experimentou.
- h) Salve seu arquivo novamente.

3.3 Atividades de dedução

As atividades seguintes abordam a formalização da teoria sobre transformações geométricas, feitas na forma de descoberta guiada e têm por objetivo:

- conduzir o aluno a experimentar processos de dedução matemática, formalização e generalização:

Atividade 18: Reflexão de um ponto em relação a uma reta

- a) Abra um arquivo no GeoGebra e grave seu arquivo.
- b) Clique com o lado direito do mouse sobre a janela geométrica e a seguir em malha
- c) Construa a reta $y = x$.
- d) Assinale um ponto A qualquer, no primeiro quadrante, acima da reta $y = x$.
- e) Use as ferramentas do *software* e assinale um ponto A' simétrico ao ponto A em relação à reta $y = x$.
- f) Trace o segmento $\overline{AA'}$
- g) A seguir, assinale o ponto de intersecção do segmento $\overline{AA'}$ com a reta $y = x$
- h) Observe o ângulo que forma entre a reta $y = x$ e o segmento $\overline{AA'}$. O que você pode concluir?

- i) Trace um segmento qualquer e explore a ferramenta “mediatriz” de um segmento. Tente definir mediatriz de um segmento e registre numa janela de texto.
- j) Registre suas observações em uma janela de texto.
- k) Agora, vamos determinar as coordenadas do ponto $A' = (x', y')$ em função das coordenadas do ponto $A = (x, y)$ e da reta $y = ax$. Para isso, vamos tomar como referência a figura que você acabou de construir.
- l) Observe a figura, verifique que o ponto A' é simétrico ao ponto A em relação à reta r , ou seja, a distância de cada um deles até a reta r é a mesma. Assim, a reta (s) suporte do segmento $\overline{AA'}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$, portanto, é perpendicular à reta r , o ponto P além de ponto médio do segmento $\overline{AA'}$, é o ponto de intersecção das retas r e s .
- m) Escreva as coordenadas do ponto P , ponto médio do segmento $\overline{AA'}$
- n) O ponto P pertence à reta r de equação $y = ax$, portanto podemos substituir as coordenadas de P na equação da reta: $y = ax$. Provavelmente você obteve esta equação: $y + y' = a(x + x')$ (1)
- o) Encontre o coeficiente angular ou a inclinação da reta (r) : $y = ax$ e da reta (s) , suporte do segmento $\overline{AA'}$, lembre-se: o coeficiente angular da reta (s) , perpendicular a uma reta (r) é: $m_s = -\frac{1}{m_r}$.
- p) Agora, substitua as coordenadas do ponto P , obtidas no item m e a inclinação da reta (s) , obtido no item o , na equação da reta quando são conhecidos um ponto e a inclinação da reta: $y - y_p = m_s(x - x_p)$. A equação que você encontrar classifique-a como (2).
- q) Como o ponto P é o ponto de encontro das retas r e s , monte um sistema com as equações (1) e (2). Provavelmente você encontrou um sistema assim:
$$\begin{cases} y + y' = a(x + x') \\ y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \end{cases}$$
- r) Resolva o sistema acima, tendo em mente que você precisa encontrar a abscissa e, em seguida, a ordenada, do ponto simétrico de A , em relação à reta (r) .
- s) Conferindo os resultados, temos:
- a abscissa do ponto P : $x' = \left(\frac{2a}{a^2 + 1}\right)y + \left(\frac{1 - a^2}{a^2 + 1}\right)x$ (3).
- e a ordenada do ponto P : $y' = \left(\frac{2a}{1 + a^2}\right)x - \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}\right)y$ (4)

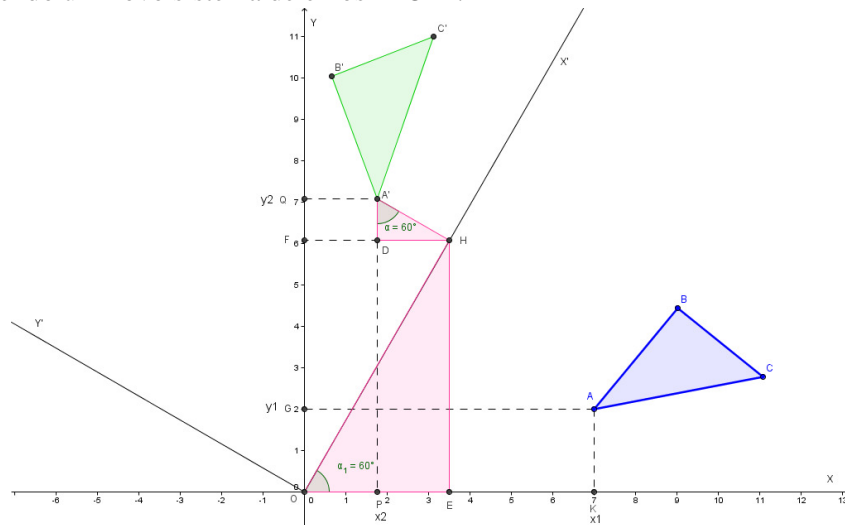
Atividade 19: Razão entre as áreas de triângulo semelhantes

- a) Abra um arquivo no GeoGebra e grave seu arquivo.
- b) Clique com o lado direito do mouse sobre a janela geométrica e a seguir em malha
- c) Construa um triângulo ABC , preferencialmente no primeiro quadrante..
- d) Marque um ponto P sobre a origem do sistema de eixos.
- e) Utilize as ferramentas do *software* para ampliar o triângulo ABC e você obterá o triângulo $A'B'C'$.
- f) Identifique a base $\overline{AC}$ do triângulo ABC por: $\overline{AC} = b$ e a base $\overline{A'C'}$ do triângulo $A'B'C'$ por $\overline{A'C'} = b'$

- g) Trace a altura relativa a base $\overline{AC}$ do triângulo ABC e denomine-a de p. Agora trace a altura relativa a base $\overline{A'C'}$ do triângulo A'B'C' e denomine-a de q.
- h) Obtenha a razão de semelhança do primeiro triângulo para o segundo, provavelmente você encontrará: $k = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{p}{q}$.
- i) Calcule a área do triângulo ABC e denomine-a por A_1 .
- j) Calcule a área do triângulo A'B'C' e denomine-a por A_2 .
- k) Agora encontre a razão entre as áreas dos triângulos ABC e A'B'C'.
- l) Escreva um pequeno texto, dando o significado da propriedade que você acabou de encontrar.
- m) Construa, no GeoGebra, dois polígonos semelhantes e mostre que essa propriedade pode ser generalizada para dois polígonos quaisquer e a seguir descreva a generalização da propriedade para polígonos.

Atividade 21: Coordenadas de um ponto obtido pela rotação de um outro em relação à origem de um ângulo α genérico

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY, um triângulo ABC e um triângulo A'B'C' resultado de uma rotação do triângulo ABC por um ângulo α e centro de rotação na origem. Mantendo a origem O fixa, vamos girar os eixos OX e OY no sentido anti-horário, do mesmo ângulo α , obtendo um novo sistema de eixos X'OY'.



Seja A (x_1, y_1) um ponto do triângulo ABC em relação ao eixo XOY e A' (x_2, y_2) um ponto do triângulo A'B'C' em relação ao sistema X'OY' a) Exprese as coordenadas de A' em função dos segmentos

$$\overline{OE}, \overline{DH}, \overline{A'D}, \overline{EH}$$

b) Você terá verificado que
$$\begin{cases} x_2 = \overline{OE} - \overline{DH} \\ y_2 = \overline{A'D} + \overline{EH} \end{cases} (1)$$

c) Use o fato de que o triângulo $\triangle OHE$ é semelhante ao $\triangle A'DH$

d) A partir do $\triangle OHE$ obtenha as medidas dos lados $\overline{EH}$ e $\overline{OE}$ em função do seno e cosseno do ângulo α (não considere ainda o caso particular de 60°).

e) Do triângulo $\triangle A'DH$, obtenha as medidas dos lados A'D e DH', lembrando que :

$$AH = A'H = y_1 \text{ e } \sin \alpha = \frac{\overline{DH}}{\overline{AH}}, \text{ como } \overline{A'H} = y_1, \text{ temos } \overline{DH} = y_1 \sin \alpha$$

Da mesma forma, verifique que: $\overline{A'H} = y_1 \cos \alpha$ (5) Basta agora que você substitua os valores encontrados na relação (1) inicialmente obtida e terá

$$(2) \begin{cases} x_2 = x_1 \cos \alpha - y_1 \operatorname{sen} \alpha \\ y_2 = x_1 \operatorname{sen} \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases}$$

Aplique a fórmula (2) para obter as novas coordenadas do ponto A (7,2) após uma rotação de 60° em torno da origem no sentido anti-horário.

3.4 Atividades Complementares

As tarefas seguintes irão completar o estudo das transformações geométricas por isometria. Nelas, os alunos são instigados a experimentar combinações das isometrias estudadas. Essas atividades têm por objetivos:

- Estimular a criatividade dos alunos;
- Combinar as isometrias de translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante.

Construção 22:

- Abra um arquivo no GeoGebra.
- Crie uma figura e a partir dela, tente combinar os casos de simetria estudados. Abuse das cores e formas.
- Salve seu arquivo.
- Observe a imagem que você criou, analise-a.
- Abra uma janela de texto e tente descrever a imagem que você criou e o que você descobriu de novo.

Construção 23:

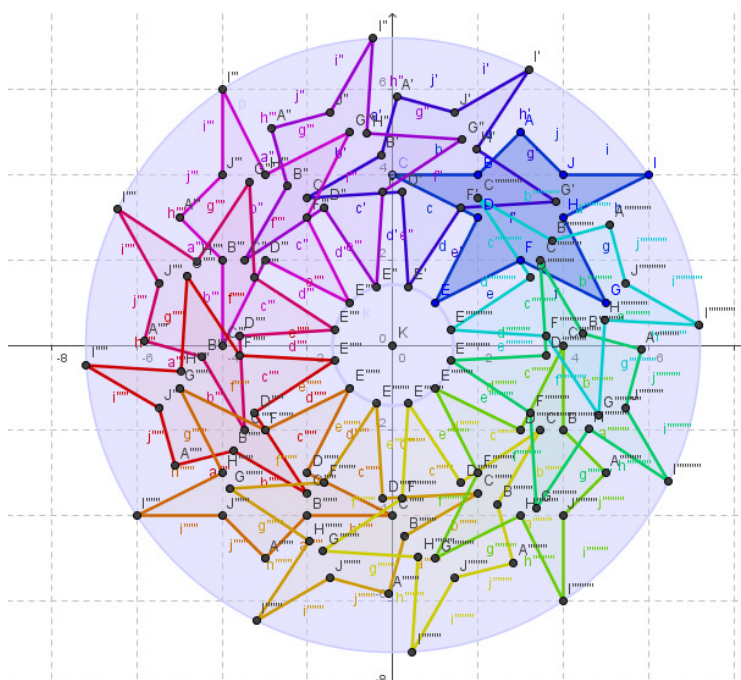
- Abra um arquivo no GeoGebra.
 - Crie um padrão e, a partir dele, tente explorar as ferramentas de isometrias do *software* e crie a imagem que você quiser. Abuse das cores e formas.
 - Salve seu arquivo.
 - Observe a imagem que você criou, analise-a.
 - Agora, abra uma janela de texto e tente descrever a imagem criada.
 - Salve novamente seu arquivo.
- a) Leia o texto abaixo:

Mandalas

A palavra *mandala* é de origem hindu e significa “círculo mágico”. O desenho é uma estrutura geométrica, que divide o espaço em porções simétricas, constituída basicamente por círculos, triângulos, quadrados que se inscrevem uns nos outros ou se entrelaçam formando um grande círculo contendo várias imagens. A organização das figuras geométricas e o número de divisão do espaço determinam a vibração da mandala.

(Fioravanti, 2003).

Veja um modelo de mandala criada por duas alunas do curso de Licenciatura de Matemática:



Fernanda e Gláucia – 6º período do Curso de Licenciatura de Matemática

Construção 24:

- Abra um arquivo no GeoGebra.
- Crie uma forma qualquer e, a partir dessa forma, tente explorar as ferramentas do *software* na tentativa de criar a sua mandala. Abuse das cores e formas.
- Salve seu arquivo.
- Observe a mandala que você criou, analise-a.
- Agora, abra uma janela de texto e crie um texto que explique sua mandala.
- Salve novamente seu arquivo.

4. REFLEXÃO A RESPEITO DOS RECURSOS COMPUTACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de ensino fundamental e ensino médio incentivam a utilização de tecnologias em suas diferentes formas, em sala de aula, como novas formas de comunicar. Afirmam que a utilização de tecnologias pode facilitar atividades de investigação e exploração em matemática além de preparar o aluno para o mercado de trabalho.

O trabalho com recursos computacionais exige uma postura mais flexível por parte do professor. É preciso que ele tenha clareza de seu papel como condutor da atividade, mas que esteja disposto a aprender com seus alunos, aberto a novas explorações e discussões e a receber ajuda técnica de outras pessoas, até mesmo dos alunos, em momento de necessidade. É importante que ele tenha conhecimento matemático do conteúdo que está sendo abordado, para que possa avaliar e criticar os resultados encontrados. Se o professor não tiver uma resposta imediata ao questionamento do aluno, poderá devolvê-lo para que os alunos investiguem. Devemos lembrar que uma investigação matemática pode demandar longas experimentações, muito fazer e refazer. Uma atitude saudável, por parte do professor, é aceitar o desafio da investigação matemática junto aos alunos e não se sentir constrangido com a situação.

Como as novidades na área de informática surgem a todo instante, é importante que o professor, como já dito, esteja aberto a aprender constantemente e a discutir sobre o tema com outros professores e até mesmo com seus alunos, pois, esses, muitas vezes, têm mais tempo que o professor para realizar pesquisas.

É importante que o professor tenha em mente que trabalhar com recursos computacionais é estar a todo instante no que Borba e Penteado (2005) chamam de “zona de risco” e nos alertam para dois pontos: problemas de ordem técnica e diversidade de caminhos e dúvidas que surgem durante a execução de uma atividade utilizando recursos computacionais.

Quanto aos problemas técnicos, alguns fogem do controle do professor; portanto, é importante que esse conte com o auxílio de um técnico no laboratório ou que esteja disposto a correr o risco de alterar seu planejamento, caso seja necessário. Citamos alguns problemas que podem ocorrer durante uma atividade desenvolvida em ambiente informatizado: versão do *software* diferente daquela com que o professor esteja habituado a trabalhar, arquivos

salvos uns sobre os outros, queda de energia, problemas com o funcionamento das máquinas e outros.

Em relação à diversidade de caminhos e dúvidas que podem surgir durante a execução de uma atividade, podemos citar: alunos que não estão acostumados a lidar com recursos computacionais; tempo estimado para a realização das atividades diferente do tempo previsto pelo professor em seu planejamento; heterogeneidade dos alunos em relação ao manuseio dos *softwares*; utilização pelos alunos de ferramentas até então desconhecidas pelo professor ou formulação de perguntas cujas respostas o professor não tem condições de dar imediatamente e outros.

Certo é que, numa aula de matemática, em ambiente informatizado, o professor e seus alunos compartilham as responsabilidades entre si e com os técnicos de informática. Dessa forma, todos têm muitos frutos a colher: o ambiente de aprendizagem é muito mais rico, os objetos ganham cor e movimento, permitindo realizar várias explorações e investigações com maior eficiência e rapidez. O laboratório de informática pode se transformar em um laboratório de desenvolvimento de formas de pensamento matemático, contribuindo para que essas se transformem em bons hábitos e estratégias para lidar com a Matemática.

REFERÊNCIAS

- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF, 1998.
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: SEF, 1999.
- BORBA, Marcelo C. & PENTEADO Miriam G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BROLEZZI, Antônio C. **Funções e Gráficos**. São Paulo:Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, 2004.
- CUOCO, A., GOLDENBERG, E. P., and J. Mark. 1994."Habits of Mind: an organizing principle for mathematics curriculum" Journal of Mathematical Behavior 15, 375-402 (1996).
- DANTE, L.R. **Matemática Contexto de Aplicações: ensino médio**. Vol 1. 4.ed São Paulo: Ática, 2007.
- DAVIS, P. J. HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradativa , 1995
- ERNEST,P.**Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia**. In:ABRANTES, LEAL, PONTE (Eds). **Investigar para aprender matemática**, (PP.25 – 48). Lisboa: Projeto MPT e APM, 1996.
- FARMER, David W. **Grupos e Simetria: Uma Guia para a Descoberta Matemática**.Lisboa: Gradativa, 1999.
- FIORAVANTI, Celina. **Mandalas: Como usar a energia dos desenhos sagrados**. Editora Pensamento.Brasil:2003
- GOLDENBERG, E. P. (1998 a). **“Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (I)**. Educação e Matemática, 47, 31-35.
- GOLDENBERG, E. P. (1998 b). **“Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (II)**. Educação e Matemática, 48, 37-44.
- GRAVINA, Maria A., SANTAROSA, Lucila.M. **Aprendizagem Matemática em ambientes informatizados**.IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.
- GUZMÁN, Miguel. **El Papel de la Visualizacion**. El Ricon de la Pizarra. Madrid: Ediciones Pirámides. 1996
- LAGE, Maria A. **Mobilização de formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Belo Horizonte: PUCMINAS, 2008.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

LIMA, E. L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

NETO, Aref A. **Geometria Analítica**: 2º grau. São Paulo: Ed. Moderna, 1980.

PAIS, Luiz C. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAIVA, Manoel R. **Matemática**: conceitos, linguagem e aplicações. Ed.1. São Paulo, 2002.

RICH, Barnett. **Teoria e Problemas de Geometria**. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

VILLIERS, Michael, **Transformations: A golden thread in school mathematics**. Faculty of Education, University of Durban-Westville, 1993.