PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós - graduação em Ensino de Ciências e Matemática

PRÁTICAS REFLEXIVAS NA SALA DE AULA:
Uma experiência na formação de professores de Matemática

Alexandre Krüger Zocolotti

Belo Horizonte
2010

Alexandre Krüger Zocolotti

PRÁTICAS REFLEXIVAS NA SALA DE AULA:

Uma experiência na formação de professores de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática

Orientadora: Maria Clara Rezende Frota

Belo Horizonte
2010

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Zocolotti, Alexandre Krüger
Z84p Práticas reflexivas na sala de aula: uma experiência na formação de professores de Matemática. / Alexandre Krüger Zocolotti, 2010.
251f.: il.

Orientadora: Maria Clara Rezende Frota
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Metacognição e cultura. 2. Professores de matemática - formação. I. Frota, Maria Clara Rezende. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 51:378

PUC Minas

Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

ALEXANDRE KRÜGER ZOCOLOTTI

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Maria Clara R. Frota

Profª Drª Maria Clara Rezende Frota – Orientadora – (PUC Minas)
Doutorado em Educação – (UFMG)

MTCSoares

Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares – (Universidade Federal do Paraná)
Doutorado em Educação – (USP)

Eliane Scheid Gazire

Profª Drª Eliane Scheid Gazire – (PUC Minas)
Doutorado em Educação – (UNICAMP)

Belo Horizonte, 15 de julho de 2010.

Para minha esposa Geicine e meu filho Klaus, presentes que Deus concedeu-me e com os quais aprendo a cada dia.

Para os meus sobrinhos Antônio, Alice e Cecília, símbolos da continuidade do elo fundamental, a família.

De modo especial, à memória de meu saudoso pai, de quem recebi os preceitos da ética e da retidão moral.

AGRADECIMENTOS

A Deus, acima de tudo, pela graça de viver e ter vida em plenitude.

A minha esposa e meu filho, por entenderem a minha ausência e pelo apoio nos momentos mais difíceis;

A minha mãe, por todo o zelo e carinho com minha educação;

A minha irmã Cristiane, companheira de docência, amiga coma a qual não me canso de debater sobre a utopia que temos de construírrmos uma escola melhor, base de uma sociedade mais justa e igualitária.

A minha orientadora, professora Maria Clara, pela paciência, atenção, companheirismo e incentivo, fundamentais para a realização do sonho de concluir este trabalho;

Aos componentes da Banca Examinadora, por todas as críticas construtivas feitas e pelas sugestões dadas;

A professora Maria Auxiliadora Vilela Paiva, querida professora Dôra, por tanto acreditar em mim e pelo auxílio e apoio dados em um momento delicado e crucial de minha carreira profissional;

Ao colega Rony Cláudio de Oliveira Freitas, exemplo de dedicação à carreira docente, em quem me espelho na tentativa de tornar-me um professor melhor;

Aos colegas de mestrado, pelo convívio nesses anos de curso. De modo especial a Sérgio, pelo apoio dado; Ricardo, pelos muitos momentos de estudo em conjunto e Gilmer, companheiro de orientação que muito me auxiliou para a construção dessa dissertação.

Aos 18 alunos que frequentaram a disciplina Tópicos especiais em Educação Matemática no primeiro semestre de 2008, pelo empenho e dedicação demonstrados ao longo do curso;

Aos colegas do Centro Educacional União de Professores e do IFES, campus Linhares, pela constante preocupação com o andamento da dissertação e pelo incentivo dado em todos os momentos.

A todos a quem, por esquecimento e apenas por esquecimento, não me referi, e que diretamente ou indiretamente contribuíram para esta minha realização.

Ninguém começa a ser educador numa certa terça – feira às quatro da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma, como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática.

Paulo Freire

RESUMO

A presente pesquisa teve como foco investigar as potencialidades de estruturação e condução de uma disciplina com vistas a desenvolver os processos reflexivos e de autorregulação da aprendizagem por estudantes que cursavam a licenciatura em Matemática. Um estudo empírico foi conduzido com dezoito estudantes, na disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática, cuja ementa flexível permitiu a elaboração e implementação de vinte atividades, desenhadas de forma que os alunos pudessem, além de estudar conteúdos matemáticos por eles mesmos apontados (números complexos, trigonometria e análise combinatória), vivenciar experiências metacognitivas, fazendo uso da reflexão nos três níveis propostos por Schön: reflexão na ação, reflexão sobre a ação e reflexão sobre a reflexão na ação. Para a interpretação dos dados utilizou-se o modelo de análise das cognições de um professor proposto por Artzt e Armour-Thomas; tal modelo auxiliou o estudo das ações de planejamento, condução e análises feitas pelos alunos ao longo das atividades. Buscaram-se elementos que evidenciassem ações de reflexão e autorregulação da aprendizagem dos estudantes durante as experiências cognitivas e metacognitivas vivenciadas. Os resultados apontam que uma parcela significativa dos alunos empenhou-se na aprendizagem dos conteúdos matemáticos selecionados: para esses alunos, as ações de reflexão propostas ao longo das atividades incentivaram a autorregulação dos estudos. Para um grupo menor de alunos, a disciplina – marcada pela autonomia dada a cada um dos participantes – revelou-se pouco motivadora, já que esperavam um trabalho nos moldes tradicionais de ensino. Esse contraste observado entre os estudantes permite concluir que os resultados de uma disciplina, implementada nos moldes reflexivos propostos, estão diretamente relacionados ao empenho e a participação de cada um dos envolvidos.

Palavras-chave: Metacognição; autorregulação; reflexão; Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

This research focuses on investigating the potential of organization and implementation of a discipline with a view to developing reflective processes of learning and self-regulation by students were taking a degree in Mathematics. An empirical study was conducted with eighteen students in the discipline Special Topics in Education Mathematics, whose menu flexibility permitted the elaboration and implementation of twenty activities, designed so that students could, in addition to study math concepts for themselves pointed out (figures complex, trigonometry and combinatory analysis), have experiences metacognitive reflection by making use of the three levels proposed by Schön: reflection in action, reflection on action and reflection on reflection in action. In interpreting the data we used the model of analysis of cognitions a teacher proposed by Artzt and Armour-Thomas; this model helped the study of planning, conduct and analysis done by the students long activities. We searched for evidence of showing actions reflection and self-regulation of student learning during the experiences cognitive and metacognitive experiences. The results indicate that a significant proportion of students engaged in learning selected math concepts: for these students, the actions of reflection along the proposed activities have encouraged the autoregulation studies. For a smaller group of students, discipline - marked by the autonomy given to each participant - has proved to be little attention because of expected work in the traditional way of teaching. This contrast is observed between students shows that the results of a discipline implemented along the lines proposed reflective, are directly related the commitment and participation of everyone involved.

Keywords: Metacognition; autoregulation; reflection; Degree in Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

ed.: Edição

f.: Folha

n.: Número

Orgs.: Organizadores

p.: Página

v.; Volume

LISTA DE SIGLAS

ANPED: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisas em Educação.

CESAT: Centro de Ensino Superior Anísio Teixeira.

Leacim: Laboratório de ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

MEC: ministério da Educação e Cultura.

PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais

PUC MINAS: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

SBEM: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

UFES: Universidade Federal do Espírito Santo.

LISTA DE ANEXOS

LISTA DE APÊNDICES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A formação de professores de Matemática é uma área que ocupa lugar de destaque na pesquisa nacional e internacional em Educação Matemática. De modo especial, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) tem desenvolvido uma série de iniciativas no sentido do desenvolvimento da pesquisa nessa área, além da promoção de uma série de debates, integrando pesquisadores e formadores (SBEM, 2003, 2006).

Para todos os envolvidos nesse processo de formação, uma questão parece evidente: como aliar a aquisição do conhecimento matemático, fundamental para o exercício da profissão de docente, com a obtenção dos saberes oriundos das ciências da educação? Trata-se, sem dúvida, de uma versão moderna de uma pergunta já feita anteriormente: O que deve saber um professor de Matemática? (PONTE, 1994).

De modo particular, essa questão começou a despertar minha atenção logo no início da minha atuação em uma licenciatura em Matemática. Apesar de atuar como docente desde 1992, somente no ano de 2006 comecei a trabalhar em um curso destinado à formação de professores de Matemática.

A oportunidade de atuar com os alunos que ingressavam na faculdade fez-me despertar para alguns fatos. Inicialmente, logo nas primeiras aulas, percebi que a turma apresentava dificuldades matemáticas que não esperava encontrar em alunos que pretendiam ser professores de Matemática. Dificuldades de interpretação e o não conhecimento de conteúdos bastante trabalhados durante o ensino fundamental e médio me chamaram muito a atenção.

Nessa primeira experiência comprovei, de forma prática, alguns resultados que a pesquisa sobre formação de professores de Matemática já indicava:

- ✓ O saber matemático é um dos diferentes saberes que um professor de Matemática deve possuir para o exercício da sua função;
- ✓ É necessário discutir, mesmo em disciplinas de cunho matemático, questões que envolvam o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina;

- ✓ A formação deve estimular uma ação mais ativa do aluno, tirando-o da posição de apenas receptor de informações e colocando-o em uma posição de maior participação dentro de seu processo de formação.

Permaneciam em aberto alguns questionamentos: Como favorecer a formação de professores de forma a assumirem uma postura mais ativa no seu processo de aprendizagem? O que trabalhar com os futuros professores para que possam desenvolver a autonomia nesse processo?

Nesse sentido, busquei, ao longo de 2006, ingressar em um mestrado. Fui aprovado em dois programas: um em Matemática pura e outro em ensino de Matemática, optando pelo segundo. Reflexões sistematizadas levaram-me a definir que o foco de meu interesse eram as questões pertinentes à educação e a todo o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Assim, já cursando o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, optei pelo desenvolvimento de um trabalho na linha de pesquisa de formação de professores.

Os estudos teóricos sobre metacognição (FLAVELL, 1979) foram centrais, considerando a problemática levantada. Para agir de modo mais autônomo, cada pessoa precisa conhecer-se a fundo. Nesse processo de autoconhecimento, deve-se ter clareza de suas características pessoais: potencialidades e limitações. A metacognição é relacionada à reflexão: o autoconhecimento decorre de um processo reflexivo e da mesma forma leva à reflexão. (SCHÖN, 2000; OLIVEIRA e SERRAZINA, 2002)

Todas as ideias que afloravam, em decorrência de meus estudos teóricos, levavam-me a refletir sobre minha própria carreira docente. Ao longo dos meus anos de atuação, por diversas vezes tive de realizar estudos de maneira independente, escolhendo o que estudar e de que maneira estudar.

Ver-se obrigado a estudar um determinando assunto ou conteúdo, sem a princípio ter uma ideia de como fazê-lo, é uma situação com a qual um professor se depara. Não seria possível, ainda na licenciatura, possibilitar aos alunos vivenciarem a experiência de escolher um assunto para estudar? Não seria possível também que, além de escolher o que estudar, o aluno também pudesse planejar a forma de desenvolver esse estudo?

A princípio a proposta era interessante, mas de difícil aplicação em um curso de licenciatura. Necessitava de uma maior liberdade de ação; era necessário trabalhar com uma disciplina cujo conteúdo não fosse previamente estabelecido. A condução de um trabalho dessa natureza seria possível, talvez, em um curso de aperfeiçoamento ou mesmo em uma pós-graduação, mas não dentro do curso onde atuava.

A oportunidade de conduzir um trabalho na linha desejada surgiu no primeiro semestre de 2008, quando assumi, dentro do curso de licenciatura onde atuava, a disciplina “Tópicos Especiais em Educação Matemática”. Essa disciplina, que possui uma ementa bastante flexível, permitiu o desenho de um curso em que fossem privilegiados os processos reflexivos e autorregulativos de cada um dos participantes.

Assim, ficou definida a questão que nortearia esta pesquisa:

Quais as potencialidades de estruturação e condução de uma disciplina, no curso de licenciatura em Matemática, de forma a desenvolver processos metacognitivos de autorregulação da aprendizagem Matemática por parte dos futuros professores?

1.1 A estrutura da dissertação

O relato aqui apresentado reúne as várias etapas percorridas. Essas etapas visavam reunir elementos - quer sejam teóricos, metodológicos ou oriundos de análise de resultados obtidos - capazes de auxiliar na construção de respostas para os questionamentos anteriormente colocados. A dissertação completa possui sete capítulos, sendo a introdução o capítulo um.

No capítulo dois encontram-se os fundamentos teóricos sobre metacognição. Durante esse capítulo, autores como Polya (1995), Schoenfeld (1987), Flavell (1979, 1987), Flavell, Miller e Miller (1999) e Brown (1999) sustentam a discussão que busca aliar a teoria sobre metacognição a situações do cotidiano de um professor de Matemática. No final do capítulo, o foco é a questão que envolve metacognição e aprendizagem.

O capítulo três situa o trabalho no campo da pesquisa sobre formação de professores de Matemática, indagando acerca dos saberes de um professor de Matemática a partir dos textos de Tardif (2002) e Schullman (1986), além de Ponte (2002).

Nesse capítulo é também discutido o conceito de reflexão, por ser considerado fundamental para a proposta da condução de uma disciplina que visava desenvolver os processos metacognitivos de autorregulação da aprendizagem matemática. Os textos de Schön (2000) e Oliveira e Serrazina (2002) dão suporte a essa discussão.

Ainda na linha da reflexão, o tema do professor reflexivo é explorado através dos textos de Zeichner (2005, 2008) e Alarcão (2005). O tema envolvendo a reflexão e o professor de Matemática é aprofundado através do estudo do modelo de formação proposto pela pesquisa de Arztz e Armour-Thomas (2002). Esse modelo foi fundamental nas etapas de planejamento e análise da pesquisa.

Os trabalhos de Santos-Wagner (1995) e Ferreira (2003) foram relevantes por considerarem a importância dos aspectos metacognitivos na formação de professores. Esses trabalhos são apresentados ao final do capítulo, numa alusão de que a questão que propomos se alinha com as pesquisas em Educação Matemática, de modo particular com a formação de professores.

O desenho da pesquisa, em termos metodológicos, é apresentado no capítulo quatro, que detalha o contexto da pesquisa, apresentando o curso de licenciatura em Matemática (e seu projeto pedagógico) onde a pesquisa foi realizada, bem como os participantes da pesquisa Os procedimentos metodológicos utilizados tanto na coleta como na análise dos dados também são apresentados.

O capítulo cinco traz a proposta feita para a condução de uma disciplina que objetive trabalhar os processos de reflexão e autorregulação de seus participantes. Ao longo do capítulo são detalhadas as vinte atividades desenvolvidas durante um semestre com alunos do sétimo período de um curso de licenciatura em Matemática. As apresentações são feitas de modo a destacar os objetivos de cada uma dessas atividades. Além da explicitação dos objetivos, o relato das ações desenvolvidas e os exemplos dos diversos materiais utilizados também visam permitir a adaptação da proposta por outros professores que desejem ministrar um curso com características próximas ao que foi conduzido.

Ainda sobre o quinto capítulo, vale ressaltar o processo de constante reflexão presente durante toda a construção de cada uma dessas vinte atividades. Outro aspecto a ser destacado é o processo de constante feedback vivido; o acompanhamento e a análise de uma etapa serviam de elemento regulador para o planejamento e construção da atividade seguinte.

O capítulo seis apresenta os resultados da pesquisa. A análise é feita buscando evidenciar as experiências de práticas reflexivas vivenciadas pelos alunos na disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática. A análise tomou como base o modelo de Arztz e Armour-Thomas (2002). O uso desse modelo permitiu que fossem analisadas as etapas de planejamento, condução e avaliação de cada uma das atividades desenvolvidas. Nas análises, procurou-se identificar elementos de autorregulação, além de experiências cognitivas e metacognitivas (FLAVELL, 1979) vivenciadas pelos alunos.

As considerações finais compõem o último capítulo. Enfatizamos os resultados obtidos como elementos que validam o trabalho. Também apresentamos pontos que limitaram a pesquisa. A evolução metacognitiva do pesquisador também é citada, bem como sugestões de possibilidades de pesquisas futuras abordando os temas reflexão, metacognição e formação de professores.

2 METACOGNIÇÃO

Para iniciarmos a discussão sobre metacognição, consideraremos uma situação usual de sala de aula: a realização de uma prova.

É frequente, no contexto escolar, alunos afirmarem que não se sentem preparados para uma avaliação e que gostariam de ter um tempo maior para que pudessem estudar mais. Isso pode ser constatado através dos relatos frequentes de professores acerca de pedidos de adiamento de provas e avaliações que são feitos pelos próprios alunos.

A situação que exploraremos começa na sala de aula de uma turma de primeiro ano do ensino médio que está prestes a fazer uma avaliação de Matemática. Sentado em sua carteira, um aluno revisa, mentalmente, a matéria que o professor marcou para a prova: logaritmos (definição e consequências da definição), propriedades e mudança de base. A lembrança dos dois primeiros tópicos lhe vem à mente com certa facilidade: recorda tranqiilamente a definição de logaritmos - a relação que o professor mostrou entre equações exponenciais e a própria definição de logaritmos – e as principais propriedades, com destaque para o logaritmo do produto e do expoente. Sente-se confiante em discutir e resolver questões sobre esse assunto.

Entretanto, esse sentimento muda por completo quando o assunto é a mudança de base no estudo de logaritmos. O aluno sabe que conhece o algoritmo da operação de mudança de base de forma mecanizada, mas também tem consciência de que, por exemplo, não sabe como e quando aplicá-lo. Seu desejo, nesse momento, é ter mais tempo para que possa rever esse tópico em particular, relembrando a teoria e resolvendo mais alguns exercícios, na tentativa de esclarecer as dúvidas que ainda possui.

Outro aluno, da mesma sala de aula, também vive um conflito pessoal que guarda semelhanças e diferenças com a situação vivida pelo aluno citado anteriormente. Dialogando com o professor, esse segundo aluno comenta que gostaria que a prova fosse adiada, para que tivesse mais tempo de estudar. Diz que, apesar de ter feito um bom número de exercícios, ainda tem a sensação de não ter se preparado da maneira mais adequada. Questionado pelo professor a respeito de quais assuntos possui dúvidas, ele (o aluno) hesita e responde, vagamente, que gostaria de voltar a estudar todos os tópicos, tanto de forma teórica como de forma prática (resolvendo uma maior quantidade de exercícios), pois também não se julga capaz de apontar, com precisão, onde estão seus maiores problemas.

As situações vividas pelos alunos são semelhantes: ambos ainda possuem dúvidas sobre o conteúdo da avaliação e gostariam de que a prova fosse adiada para que terem mais tempo de estudar. Entretanto, percebemos uma diferença significativa entre os comportamentos dos dois alunos: enquanto o primeiro pode apontar com segurança suas potencialidades e dificuldades, mostrando um real controle da situação (a ponto de ser capaz de descrever quais ações ele deveria empreender para sanar suas dúvidas), o segundo encontra-se ainda sem uma maior orientação. Tem a nítida sensação de que ainda precisa rever o conteúdo, mas sem saber, de fato, o que estudar (e, talvez, sem saber também como estudar).

Que tipo de conhecimento é esse que possibilita a uma pessoa, como no caso do primeiro aluno, conhecer a si mesmo a ponto de apresentar a capacidade de regular suas próprias ações, sendo capaz, por exemplo, de determinar o que fazer ou não para atingir determinado fim?

Essa capacidade que uma pessoa pode apresentar de monitorar e controlar suas ações no contexto de uma atividade cognitiva (o que pode ser chamado de autorregulação), associada ao conhecimento que possui sobre si mesmo, compõe aquilo que chamamos de metacognição, conceito e terminologia propostos por Flavell (1979, 1987) na década de 70. Podendo ser entendida como conhecimento sobre o próprio conhecimento, a metacognição possui uma conceituação ampla e complexa.

> Em geral, ela é definida, ampla e um tanto livremente, como qualquer conhecimento ou atividade cognitiva que toma como seu objeto, ou regula, qualquer aspecto de qualquer iniciativa cognitiva. Ela é chamada de metacognição porque seu sentido essencial é “cognição acerca da cognição”.(FLAVELL, MILLER e MILLER, 1999, p. 125)

Em outro trabalho, Flavell (1987) expande um pouco mais o domínio da metacognição, propondo que não apenas eventos cognitivos sejam encarados sob a perspectiva metacognitiva. A sugestão do autor é que eventos de origem psicológica, tais como o conhecimento sobre suas próprias motivações, ou o controle motor, em atividades de habilidade motora, sejam encarados também como metacognição.

Segundo Brown (1987), o termo metacognição, desde o seu surgimento, é classificado como fuzzy, caprichoso ou desnecessário. Para essa autora, a discussão em torno do termo metacognição pode ser motivada por dois problemas distintos.

O primeiro problema reside na dificuldade de distinção entre o que é meta e o que é cognitivo. Brown (1987) aponta habilidades metacognitivas de leitura que incluem atividades como estabelecimento dos objetivos da leitura, identificação das ideias principais do texto, modificações no ritmo da leitura devido à maior ou menor compreensão de um parágrafo, entre outros. Para a autora, não fica claro se todas essas atividades são metacognitivas, ou quais partes dessas etapas podem ser classificadas como meta. Ainda que outros autores, conforme coloca Brown (1987), já falassem de atividades estratégicas de leitura antes do surgimento da expressão metacognição, existe hoje o reconhecimento de que o estudo e a leitura utilizam procedimentos que atualmente são chamados de metacognitivos.

O segundo problema apontado por Brown (1987), no que se refere a metacognição, envolve a questão de entendê-la como conhecimento sobre o próprio conhecimento e autorregulação; cada uma dessas partes diz respeito a diferentes áreas distintas de investigação dentro da psicologia cognitiva.

Ressaltando que, “embora possuam diferentes fontes e diferentes problemas, o conhecimento e a regulação da cognição encontram-se intimamente relacionados” (RIBEIRO, 2003, p. 111), as diferentes raízes históricas a partir das quais podem ser desenvolvidas as pesquisas sobre cada uma dessas partes contribuem para aumentar a dificuldade em se trabalhar com um termo tão complexo.

Para estruturar melhor suas ideias, Flavell (1979, 1987) formulou um modelo de monitoramento cognitivo, que a partir de agora chamaremos de ‘modelo de Flavell’, baseado em quatro elementos básicos: o conhecimento metacognitivo, as experiências metacognitivas, as metas ou tarefas e as estratégias ou ações. Seguindo uma estratégia adotada pelo próprio autor, falaremos sobre os dois últimos à medida que escrevermos sobre os dois primeiros.

2.1 Conhecimento Metacognitivo

O conhecimento metacognitivo de uma pessoa faz parte de toda a gama de crenças e conhecimentos adquiridos ao longo da vida. Tais conhecimentos levam em conta os seres humanos como seres cognitivos, capazes de processar informações, de aprender, de construir ideias e que possuem sentimentos e afetos envolvidos de modo direto no processo amplo de conhecer. Detalhando um pouco mais, afirmaremos que "conhecer, num sentido metacognitivo, é integrar conhecimentos científicos, empíricos, emocionais, afetivos, entre outros" (FROTA, 2001, p.2).

Partindo dessa orientação, pode-se afirmar que faz parte desse conhecimento tudo aquilo que se sabe sobre quais fatores podem influenciar, positivamente ou negativamente, uma ação cognitiva. Também pode-se dizer que a escolha e o uso de uma estratégia mais adequada para uma dada situação de aprendizagem podem aqui ser enquadrados. Os conhecimentos metacognitivos compreendem conhecimentos sobre três categorias distintas: pessoas, tarefas e estratégias.

O conhecimento sobre as pessoas agrupa o conhecimento sobre as características cognitivas próprias, as diferenças cognitivas entre as pessoas e as características cognitivas gerais ou universais das pessoas.

As características cognitivas próprias de cada pessoa dizem respeito ao que o sujeito sabe sobre si próprio em termos de cognição e aprendizagem (por exemplo, áreas em que se possui maior ou menor domínio). O fato de um aluno ter consciência de que possui maior habilidade em álgebra do que em geometria representa um exemplo desse conhecimento;

Já as diferenças cognitivas entre as pessoas passam pela crença (ou saber) que pessoas diferentes possuem habilidades (ou níveis de habilidades) diferentes em relação a certas áreas de conhecimento. Um professor de Matemática que percebe que não é tão habilidoso em geometria como um colega apresenta esse tipo de conhecimento metacognitivo.

As características cognitivas gerais ou universais englobam os saberes adquiridos sobre a cognição humana. Nessa categoria, as pessoas são vistas como um todo, permitindo que se faça uma análise universalizada. Exemplo desse grupo de características universais é o conhecimento que temos sobre a capacidade limitada da memória humana.

Escrevendo a respeito do conhecimento sobre as pessoas, Flavell refere-se a esse conhecimento como crenças tácitas e faz o seguinte comentário:

> Acho que essas crenças tácitas podem desempenhar papéis importantes nas iniciativas cognitivas das crianças mais velhas e adultos em todo o mundo e que a aquisição dessas crenças seria interessante de ser estudada (FLAVELL, 1979, p. 904 tradução nossa)[1]

O conhecimento sobre as tarefas compreende o conhecimento a respeito da natureza das informações dadas e o conhecimento sobre a natureza das exigências da tarefa.

A natureza das informações dadas encerra o que se consegue reunir sobre a informação oferecida, por exemplo, da quantidade (abundante ou escassa), da qualidade (densa ou rasa) e da origem da informação (confiável ou não), assim como a importância dessas características para o sucesso ou o fracasso da realização de uma tarefa. É sabido que uma decisão tomada a partir de informações imprecisas pode não gerar o resultado que se espera.

Já a natureza das exigências da tarefa pode ser entendida como o maior ou menor esforço a ser feito para atingir os objetivos propostos pela tarefa. Uma situação que ilustra essa subcategoria foi dada por Flavell, Miller e Miller (1999, p.126) "... você sabe que é mais fácil recordar a ideia geral de uma história do que suas palavras exatas". No caso da Matemática, um aluno pode ter muita dificuldade em demonstrar o Teorema de Pitágoras, mas pode apresentar boa desenvoltura quando precisa utilizar esse mesmo teorema em exercícios de aplicação direta.

A categoria das estratégias engloba os esforços sobre quais 'metodologias' podem ser empregadas para a obtenção de sucesso numa tarefa. Conhecer diversas metodologias impõe que, além de saber usá-las, se conheçam também os desdobramentos e consequências de sua utilização, adequando as melhores estratégias para alcançar os objetivos propostos.

---

[1] I think such tacit beliefs may play important roles in the cognitive enterprises of older children and adults the world over and the acquisition of these beliefs world be interesting to study.

Por exemplo, sabemos que para estudar um assunto que não dominamos devemos usar uma série de artifícios, que vão desde a leitura detalhada da literatura específica até a confecção de resumos e ou esquemas que permitam obter uma melhor compreensão do assunto que está sendo estudado. O uso dessas diferentes estratégias é um exemplo do conhecimento metacognitivo sobre esse aspecto. Cada área de estudo possui suas estratégias específicas; muitas vezes as pessoas se especializam em algumas em detrimento de outras.

No cotidiano das ações, o conhecimento metacognitivo não pode ser fragmentado de uma forma tão regular, como se a cada momento estivesse sendo usado apenas um ou outro tipo, isoladamente. A combinação de duas ou mais 'partes' desse conhecimento se torna a prática de uso mais comum. Para Figueira (2004), por exemplo, uma pessoa é capaz de se autorregular quando, ao combinar aquilo que sabe sobre si mesmo (do ponto de vista cognitivo) com o que conhece sobre a tarefa (exigências, especificidades e finalidades), consegue obter elementos que a auxiliem a escolher a melhor estratégia para aplicar numa situação-problema.

Escrevendo sobre estratégias de aprendizagem, Frota (2002) aponta que as pessoas desenvolvem habilidades ao longo de sua vida. Tais habilidades coordenadas constituem competências que, postas em ação, configuram estratégias de aprendizagem.

Ainda de acordo com a autora, tais estratégias agregam movimento e variam de acordo com os fins a que se propõem. Além das interações com o conteúdo e com os recursos didáticos disponíveis, o contato com os professores e os colegas contribui para a dinâmica de tais estratégias.

Numa ilustração para utilizar diferentes estratégias de aprendizagem por diferentes alunos, tomemos como exemplo o caso de um professor de Matemática que, para encerrar uma aula em que trabalhou com equações trigonométricas, propôs a seus alunos que resolvessem a seguinte equação:

$$\cos(3x - \pi) = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Logo após o ler o exercício, um primeiro aluno analisa-o e decide resolver aplicando utilizando adição de arcos, assunto que considera dominar e com o qual se sente à vontade. Sua resolução é encaminhada assim:

$$\cos(3x-\pi)=0$$

$$\cos(3x)\cdot\cos\pi + \text{sen}(3x)\cdot\text{sen}\,\pi=0$$

$$\text{Como } \cos\pi=-1 \text{ e } \text{sen}\,\pi=0, \text{ temos}:$$

$$\cos(3x)\cdot(-1)+\text{sen}(3x)\cdot(0)=0$$

$$-\cos(3x)=0\rightarrow\cos(3x)=0;$$

$$\text{Se } 0\le x\le\frac{\pi}{2}, \text{ então } 0\le 3x\le\frac{3\pi}{2}.$$

Daí:

$$\begin{cases} 3x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ 3x=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \quad S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\}$$

Um outro aluno também lê o enunciado com bastante cuidado e concentração. Atento aos detalhes, faz questão de destacar a variável em que deve trabalhar e o intervalo proposto. Escreve em sua folha de anotações que não deve esquecer que na equação encontra-se a expressão $(3x-\pi)$, enquanto no intervalo tem-se apenas a incógnita x.

Levando um pouco mais de tempo que o outro colega, busca mentalmente enumerar possíveis estratégias que poderia utilizar. Chega inclusive a vislumbrar a solução através da adição de arcos, mas descarta-a por considerá-la longa e trabalhosa. Gostaria de algo mais rápido e que, de preferência, utilizasse uma mesma variável, tanto na equação como no intervalo.

O caminho que considera mais apropriado é a mudança de variável; assim, poderia mudar a variável na equação e também alterar o intervalo. Sua solução inicia-se da seguinte maneira:

$$\cos(3x-\pi)=0$$

$$\text{Fazendo } 3x=y, \text{temos}:$$

$$\cos(y)=0.$$

Mas, como $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, com a mudança de variável, deve-se considerar:

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$
$$0 \le 3x \le \frac{3\pi}{2}$$
$$0 - \pi \le 3x - \pi \le \frac{3\pi}{2} - \pi$$
$$\text{Logo}: -\pi \le y \le \frac{\pi}{2}$$

Nesse caso, o aluno agora se propõe a resolver a equação

$$\cos y = 0,\ -\pi \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Continuando:

$$y = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\pi}{2}$$
$$3x - \pi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad 3x - \pi = \frac{\pi}{2}$$
$$3x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{3\pi}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

É importante ressaltar que a escolha de uma ou outra estratégia, no exemplo citado, somente é possível a partir do conhecimento que cada um tem sobre si e de quais estratégias deve adotar para resolver a questão, levando em conta suas especificidades e as informações dadas. Esse caráter individual que o aluno imprime à forma que emprega as estratégias de aprendizagem pode caracterizar um estilo de aprendizagem.

> A utilização de uma estratégia pode variar de aluno para aluno. Cada indivíduo pode utilizar a mesma estratégia de maneira diferenciada, incorporando suas habilidades, aptidões, interesses, suas energias, seu espectro de motivações, desenvolvendo um estilo de aprendizagem. (FROTA, 2009, p.66).

Nem todos os alunos desenvolvem ao longo de sua trajetória escolar estilos de aprendizagem Matemática. De modo geral os alunos que apresentam perfis de estilos de aprendizagem, com orientação prática, com orientação teórica ou com orientação investigativa (FROTA, 2006), todos eles evidenciam uma maior autorregulação do seu processo de aprendizagem matemática.

2.2 Experiência Metacognitiva

Inicialmente, antes da discussão sobre o que seja uma experiência metacognitiva, é conveniente debatermos o que se entende sobre experiência cognitiva. Trata-se de uma experiência comum na vida de um estudante, de um professor ou de qualquer outra pessoa (mesmo não envolvida diretamente com o cotidiano escolar): a experiência cognitiva envolve a questão da aprendizagem, fato que não ocorre somente no cenário escolar.

Por exemplo, na busca por maior conhecimento de determinado assunto, uma pessoa procura informar-se sobre o tema através da leitura de um texto. Essa iniciativa de buscar maiores informações é entendida como uma experiência cognitiva.

Entretanto, à medida que lê o texto, a pessoa percebe que precisa adotar outros procedimentos, pois acredita que apenas a leitura do texto não lhe permitirá fixar os pontos que julga importantes. Dessa maneira, opta por destacar alguns pontos do texto que, a seu ver, trazem informações relevantes. Para reforçar a compreensão, após a leitura de alguns trechos, procura fazer uma reflexão sobre o que significa aquilo que acabou de ler e de que maneira aquilo se associa a tudo que já foi lido.

Observa-se que o segundo bloco de ações não possui relação direta com a aquisição de conhecimento. Na verdade, esse conjunto de ações apenas ‘regula’, de forma consciente, o processo, verificando se aquilo que vem sendo feito está apresentando resultado satisfatório ou não. É esse tipo de episódio que pode ser classificado como experiência metacognitiva.

> Grosso modo, é tudo o que acontece antes, durante e depois da atividade cognitiva. Contemplam cognições e afetos. São impressões, sentimentos ou percepções conscientes que podem ocorrer antes, durante ou após um empreendimento cognitivo. (FIGUEIRA, 2003, p.5)

A sensação de não estar compreendendo a explanação de uma pessoa ou a percepção de que a resolução de um problema lhe exigirá muito esforço também se incluem nesse tipo de experiência. Essas conclusões demandam uma reflexão mais apurada daquilo que se está executando – exatamente a situação ideal para aflorar essa experiência.

Uma das estratégias apontadas por Polya (1995) para resolver um problema é a utilização de um problema correlato. Nas palavras dele:

> De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando ou o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo. (p.36).

Percebemos que essa estratégia proposta pelo autor cria espaços favoráveis para a utilização do conhecimento metacognitivo e para a vivência de novas experiências metacognitivas.

Analisaremos a proposta de resolução de um problema sugerida por Polya (1995) sob a perspectiva das experiências cognitiva e metacognitiva. Vejamos:

- ✓ Um aluno recebe a tarefa de resolver um problema. Isso pode proporcionar a esse aluno a oportunidade de vivenciar uma experiência cognitiva;
- ✓ Ao ler o problema, recorda-se de problemas resolvidos anteriormente e que possuem características semelhantes ao que tenta resolver. A tarefa de decidir sobre qual deles usar é influenciada por seus conhecimentos metacognitivos;
- ✓ As sensações que viveu ao escolher qual o problema resolvido anteriormente utilizar e ao adaptar a resolução feita anteriormente às características do problemas atual compõem, em nosso entendimento, um conjunto de experiências que podem ser classificadas como experiências metacognitivas.

Explorando um pouco esse relacionamento entre metacognição e resolução de problemas, pode-se afirmar que

> avaliar um plano que se elaborou para resolver um problema, selecionar uma estratégia de resolução entre as várias possíveis, ou gerir a aplicação de um plano ou estratégia são atividades tipicamente metacognitivas".(FERNANDES, 1989, p.3).

A amplitude da experiência metacognitiva é expressiva, podendo ir desde a sensação de estar perdido ao receber a instrução de determinada tarefa até ao alívio que sentimos quando vislumbramos a possibilidade de solução para a situação–problema enfrentada. Viver diferentes experiências cognitivas e metacognitivas pode auxiliar no processo de desenvolvimento da autorregulação, algo que pode auxiliar significativamente a aprendizagem de uma pessoa.

As experiências metacognitivas e o conhecimento metacognitivo se relacionam de maneira complementar. Enquanto o conhecimento metacognitivo pode favorecer, estimular e auxiliar a interpretar as experiências metacognitivas, estas podem contribuir para o aumento do conhecimento metacognitivo. Segundo Flavell (1979), apesar de o conhecimento metacognitivo ser suscetível a mudanças, mesmo sem as experiências metacognitivas, existe a suspeita de que as experiências metacognitivas ocupem um importante papel no desenvolvimento desse conhecimento, principalmente durante a infância e a adolescência.

Sobre a interação entre o conhecimento metacognitivo e experiência metacognitiva, Frota (2009) afirma que

> conhecimentos metacognitivos podem, por um lado, levar a se avaliar, revisar e abandonar metas ou estratégias, de acordo com as habilidades e interesses pessoais. Por outro lado, podem conduzir a experiências metacognitivas positivas, ou negativas, com relação a pessoas, metas e estratégias, influenciando o próprio conhecimento metacognitivo. (FROTA, 2009, p. 60)

Para Flavell (1979, p. 3, tradução nossa[2]), "as estratégias cognitivas são invocadas para fazer progressos cognitivos, e as estratégias metacognitivas para monitorá-los", mas o uso de estratégias de um grupo não impede o surgimento de

---

[2] Cognitive strategies are invoked to *make* cognitive progress, metacognitive strategies to *monitor* it.

.

ações do outro. Assim, uma ação que visava basicamente ao controle pode favorecer a aquisição de novos conhecimentos, e vice-versa.

2.3 Monitoramento e Autorregulação Cognitiva

Preparando sua atividade de casa, um aluno resolve uma lista de exercícios sobre números complexos. Ao conferir suas respostas, percebe que, frequentemente, comete o mesmo equívoco – confunde-se ao trabalhar com a unidade imaginária. Como estratégia para evitar que isso se repita, decide que, ao resolver exercícios desse tipo, colocará os resultados das potências - $i^0 = 1, i, i^2 = -1, i^3 = -i$ - ao lado do exercício. Em virtude dos equívocos que vem cometendo, decidi também que terá mais atenção no processo de revisão de suas resoluções.

De acordo com Frota (2003), o “sucesso em situações de aprendizagem” depende do “desenvolvimento de estratégias de autorregulação do processo de aprendizagem e de estratégias personalizadas de estudo de Matemática”. (p. 18).

Assim, a decisão do aluno de adotar estratégias de modo a evitar a repetição dos erros é um exemplo de monitoramento ativo da sua atividade cognitiva. Esse monitoramento ativo (ou gerenciamento) - dependente diretamente do conhecimento metacognitivo e das experiências metacognitivas - pode ser entendido como a associação de diversas atividades. Dentre essas atividades, destacamos:

- ✓ Escolha de estratégia adequada para aquela situação;
- ✓ Elaboração e implementação de planos de ação, de acordo com os objetivos traçados;
- ✓ Acompanhamento da execução do plano, que contempla a observação das consequências das ações, a verificação dos resultados decorrentes das ações e até mesmo a modificação do próprio plano.

Uma proposta de monitoramento e autorregulação da aprendizagem é o método apresentado por Polya (1995) para a resolução de um problema. De modo breve, esse método é composto por quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e o retrospecto.

A compreensão do problema visa atender a uma exigência de ordem cognitiva: resolver o problema. Para isso, utiliza-se uma série de conhecimentos, alguns deles de origem metacognitiva.

A elaboração e escolha de plano estão diretamente ligadas ao conhecimento, quer seja cognitivo ou metacognitivo, que a pessoa possui. È fato alguns planos diferentes podem surgir, mas a decisão de optar por um será influenciada por todo o histórico de problemas já resolvidos. Todo esse processo pode transformar-se em uma experiência metacognitiva.

A execução do plano é repleta de situações de controle e monitoramento. Sem analisar se os resultados são coerentes ou não, o autor pode questionar se está seguindo o que se propôs a fazer ou se mudou a ordem. Caso tenha ocorrido uma mudança, ela foi benéfica? Melhorou a resolução, mostrou algum ponto não pensado anteriormente ou serviu apenas para desviar a atenção do foco principal?

A última etapa – a crítica aos resultados encontrados – também serve como um exemplo de experiência metacognitiva e de monitoramento. Se as situações que envolvem a reflexão são propícias para o surgimento das experiências metacognitivas, esse é o momento ideal, pois agora aquele que se propôs a resolver o problema irá se questionar se o resultado encontrado faz sentido. Pode ser que a reflexão seja breve – ao resolver uma equação, podemos simplesmente substituir o valor encontrado e rapidamente percebe se o resultado é coerente ou não – ou mais longa, quando, por exemplo, temos uma situação de análise que envolve um ou mais fatores. De qualquer maneira, a reflexão, o pensar (consciente) sobre o resultado encontrado, estará presente e será integrada ao repertório de ações de auxílio às situações futuras.

Ainda nessa ideia de retrospecto, o autocontrole surge na forma de questionamentos do tipo: ‘ esse é o melhor caminho?’; ‘será que o resultado poderia ser encontrado de outra maneira?’; ‘existe uma saída mais rápida?’. A busca por uma melhor performance permite que se controlem as ações, otimizando esforços para se chegar ao fim desejado.

Schoenfeld (1987) è um autor que trabalha a associação entre resolução de problemas e metacognição. Escrevendo sobre metacognição, o autor destaca três pontos que considera principais: conhecimento sobre o próprio pensamento, o controle (a autorregulação) e as crenças e intuições.

Analisando de maneira mais detalhada o controle e a autorregulação, Schoenfeld (1987) sugere que a 'gestão de um problema' é composta por quatro fases, de forma similar às ideias defendidas por Polya (1995): entendimento, planejamento, acompanhamento e decisão. Sobre a decisão, diz que a questão da resolução de um problema não passa apenas pelo domínio de um amplo conhecimento sobre o assunto, mas também pela capacidade de decidir qual, entre esses conhecimentos, é o mais adequado para a situação.

Por exemplo, numa aula é proposta a seguinte questão:

Resolva $(1+i)^6$

Um aluno pode listar alguns caminhos de resolução:

1º) Aplicando o Binômio de Newton, fazer a expansão e, em seguida, usar as potências de i, finalizando por somar os termos semelhantes;

2º) Passar o número complexo para a sua forma trigonométrica, utilizar a fórmula de potenciação para números complexos na forma trigonométrica, para depois reescrever o número – já com a potência resolvida – na sua forma algébrica;

3º) Resolver a potência $(1+i)^2$, para depois elevar o resultado dessa operação ao cubo.

A questão levantada por Schonfeld (1987) não é sobre a capacidade que um aluno possui de levantar essas múltiplas hipóteses (em suas pesquisas, muitas vezes, ele não demonstra dúvidas sobre o conhecimento matemático dos pesquisados); suas dúvidas recaem sobre o fato de o aluno possuir (ou não) habilidade de perceber se o caminho que tomou está sendo favorável, ou se deve optar – e em que momento fazer isso - por uma mudança de estratégia[3].

Isso nos remete a uma problemática levantada por Schön (2000) ao escrever sobre a formação encontrada em escolas profissionais. Segundo esse autor, cada vez mais os profissionais estão menos preparados para a tomada de decisão, apesar de todo o conhecimento técnico que possuem. Nas suas palavras:

---

[3] Antes de tentar o caminho mais complicado, tente o mais fácil.

> Engenheiros civis, por exemplo, sabem como construir estradas adequadas para as condições de certos locais e especificações. Eles se servem de seus conhecimentos de solo, materiais e tecnologias de construção para definir declividades, superfícies e dimensões.
> Quando é necessário decidir qual estrada construir, no entanto, ou se ela deve ser construída, seu problema não é passível de solução pela aplicação de conhecimento técnico, nem mesmo pelas técnicas sofisticadas das teorias de decisão. (SCHÖN, 2000, p. 16)

Schoenfeld (1987), no seu estudo da metacognição associada ao ensino de Matemática, também aborda as crenças e intuições que os alunos possuem sobre a Matemática e de que maneira esses fatores influenciam esses mesmos alunos no trabalho com resolução de problemas. Em um de seus exemplos, o autor discute a influência negativa da crença que alguns alunos possuem de que os problemas matemáticos podem ser resolvidos em dez minutos ou menos. Em sua visão, muitos alunos, com conhecimento matemático suficiente para resolver um problema, abandonam o processo por julgarem que estão trabalhando há mais tempo do que acreditam ser necessário.

Motivado pela importância que a metacognição possui, quer seja pelo aspecto da regulação, quer seja pelo aspecto das crenças e das intuições, Schoenfeld (1987) ainda propõe quatro técnicas que podem ser desenvolvidas em sala de aula para o desenvolvimento das habilidades metacognitivas. Tais técnicas começam destacando a importância da autorregulação, passam por relatos [4] do professor, trabalham com o professor como um mediador do processo de resolução e terminamcom trabalhos de resolução de problemas em pequenos grupos.

Enfim, se o objetivo da pessoa que resolve um problema consiste apenas em encontrar uma resposta, nada do que foi descrito anteriormente terá validade sob o ponto de vista metacognitivo. Mas, se em seu entendimento, resolver um problema pode ser encarado como um processo múltiplo, os saberes cognitivos e metacognitivos ocuparão um lugar importante nesse processo.

[4] Nesses relatos, o professor mostra aos alunos que nem sempre a caminhada até a solução é simples e rápida. Trata-se, na verdade, de usar menos uma solução pronta e acabada e apresentar soluções que mostrem as dificuldades encontradas na caminhada para a resolução.

2.4 Desenvolvimento da Metacognição

A discussão acerca da metacognição e sobre experiências e conhecimentos metacognitivos suscita a pergunta: É possível desenvolver o conhecimento metacognitivo?

A resposta para essa pergunta, assim como o próprio conceito de metacognição, também é cercada de polêmicas: “[..] as habilidades metacognitivas se desenvolvem desde os 7 anos e podem mesmo ser ensinadas dentro do currículo escolar.”(CHALON, 2003, p.5). Outros autores, como Flavell (1979) e Brown (1987), acreditam que seu desenvolvimento ocorra mais tardiamente, pois julgam que as crianças possuem limitações no que diz respeito ao conhecimento e à consciência dos processos cognitivos. Independente da idade em que seu desenvolvimento acontece, o desenvolvimento do sentido de self e a capacidade de planejamento influenciam diretamente nos processos de desenvolvimento da metacognição.

Flavell (1979), escrevendo sobre o desenvolvimento da metacognição, relata uma experiência por ele conduzida envolvendo dois grupos de crianças, algumas em idade pré-escolar e outras do ensino fundamental. Para ambos os grupos foi solicitado que estudassem um certo número de itens até que estivessem certos de que os haviam memorizado. As crianças do grupo do ensino fundamental estudaram os itens por certo tempo, sinalizaram que os haviam memorizado e, normalmente, concluíam a tarefa com êxito. As crianças em idade pré-escolar não mostraram tal habilidade. Para o autor, resultados como esse demonstram que as crianças mais novas ainda não possuem controle sobre seus processos cognitivos, ou que ainda não são capazes de fazer o seu próprio acompanhamento metacognitivo.

Seguindo a ideia de que o conhecimento metacognitivo vai sendo construído de maneira lenta e gradual – que acompanha o próprio desenvolvimento cognitivo - acredita-se que, em um primeiro momento, a família é a responsável pelo seu desenvolvimento. Mais tarde, com a criança já inserida no ambiente escolar, o estilo de ensino de cada professor pode, ou não, estimular esse desenvolvimento. É fato que uma boa variedade de situações de aprendizagem pode também estimular, guardadas características individuais próprias, o desenvolvimento do conhecimento metacognitivo através da vivência de novas experiências metacognitivas. (RIBEIRO, 2003).

Recorrendo à ideia desenvolvida por Vygotsky de que um aprendiz, ao ser auxiliado por um adulto, pode alcançar um nível mais alto de desenvolvimento - quando esse adulto atua na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) – Ribeiro (2003) interpreta que, de modo análogo, pode-se entender uma possibilidade de desenvolvimento da metacognição: inicialmente, a criança é regulada externamente por alguém mais experiente; em seguida, começa a executar um trabalho compartilhado, para somente depois, de modo autônomo, regular a sua própria atividade cognitiva.

> Assim, o desenvolvimento de aptidões metacognitivas realiza-se normalmente através da internalização gradual de aptidões regulatórias, que são primeiramente experienciados pela criança em situações sócias. Após repetidas experiências com peritos (pais, professores, etc.), que criticam, avaliam e ampliam os limites de suas experiências, a criança desenvolve aptidões de autorregulação. (RIBEIRO, 2003, p.114)

2.5 Metacognição e Aprendizagem

A ideia de que o desenvolvimento da metacognição pode favorecer uma aprendizagem mais eficaz vem ganhando força no cenário educacional.

> Apesar de toda a polêmica existente à volta deste conceito, tem sido observada a sua contribuição para a potencialização da aprendizagem. Os treinos que contemplam, além de atividades cognitivas, atividades metacognitivas, tem originado melhores resultados em termos de realização escolar. (RIBEIRO, p.114, 2003)

Davis, Nunes e Nunes (2005), buscando comprovar que a metacognição pode ser um fator importante para a obtenção do sucesso escolar, discutem a utilização da metacognição como instrumento de apoio visando à implementação de uma nova cultura nas escolas, uma cultura que intitulam como “cultura do pensamento”. A implementação dessa nova cultura tem por objetivo permitir que os alunos desenvolvam maneiras próprias de apresentarem seus pensamentos; incentivar os alunos a pensarem em como tomar decisões acertadas; estimulá-los a enfrentar novas situações e, finalmente, fazer com que esses alunos consigam transferir o conhecimento e as estratégias desenvolvidas em dado contexto para outro.

Nesse movimento de tentativa de mudança de uma cultura escolar baseada na resolução de exercícios para uma cultura fundamentada na resolução de problemas, a metacognição assume importante papel, quer seja pelo seu aspecto de conhecimento sobre o conhecimento – quais estratégias podem ser adotadas para se conseguir obter sucesso numa dada situação? – quer seja pelo seu aspecto de autorregulação – o caminho adotado foi, de fato, o melhor ou teria sido mais interessante ter adotado uma outra estratégia de resolução?

Como exemplo dessa mudança de paradigma, Davis, Nunes e Nunes (2005) apresentam uma sequência didática adotada por um professor para o trabalho com o conteúdo de queda livre numa turma do primeiro ano do ensino médio. Destacam, a partir desse exemplo, que durante todo processo de busca de uma solução os alunos trabalharam em etapas onde deveriam utilizar suas próprias estratégias de pensamento, utilizando o erro como instrumento de aprendizagem e com o objetivo de construir uma imagem pessoal de um aprendiz competente.

O trabalho apresentado pelos pesquisadores mostra um professor que faz uso de experiências cognitivas (a aprendizagem do conteúdo queda livre) e metacognitivas (adoção de estratégias formuladas pelos próprios alunos e o monitoramento, por eles mesmos, da aplicação dessas estratégias). Através dessas experiências, o docente oferece aos alunos uma possibilidade real de desenvolvimento metacognitivo.

Podemos entender que esse professor, ao propor essas atividades que envolviam experiências cognitivas e metacognitivas, também passou por momentos onde pode desenvolver o seu ‘conhecimento sobre o conhecimento’ e a sua ‘autorregulação’, ou, em outras palavras, aquilo que entendemos e assumiremos como metacognição.

Experiências como a relatada, que apresentam resultados positivos e incentivam o uso da metacognição como um instrumento capaz de promover alterações no aprendizado de uma sala, reforçam nossa crença de que é necessário inserir, nas licenciaturas, atividades que ofereçam possibilidades de desenvolvimento metacognitivo dos futuros professores.

Mas, como podemos incentivar a metacognição na formação inicial de professores de Matemática? Como possibilitar que nossos licenciandos em Matemática desenvolvam-se do ponto de vista metacognitivo?

3 PERSPECTIVAS METACOGNITIVAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

3.1 Formação de professores de Matemática

A formação do professor de Matemática é um tema que integra a agenda do debate educacional brasileiro. Uma das entidades mais preocupadas com a realização de debates envolvendo a figura do professor de Matemática é a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

> Ao longo de sua existência, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), sempre teve como um de seus principais focos de preocupação a FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NOS CURSOS DE LICENCIATURA. Essa preocupação tem se manifestado através de debates em mesas redondas, em sessões de comunicações científicas e de relatos de experiências, não só em Encontros Nacionais e Regionais promovidos pela SBEM como também em Congressos de Educação. (SBEM, 2003, p.42)

Durante o primeiro semestre de 2002, a SBEM promoveu fóruns regionais de Licenciatura em Matemática em diversos estados. O objetivo desses fóruns era promover discussões sobre temas como, por exemplo, o perfil do egresso de um curso de Licenciatura em Matemática e quais as competências específicas de um professor de Matemática. (SBEM, 2003).

Como uma preparação para os fóruns que seriam realizados, a SBEM publicou, em abril de 2002, uma edição especial de sua revista[5]. Com o título 'Licenciatura em Matemática: um curso em discussão', a publicação trouxe artigos de autores nacionais e internacionais debatendo a formação de professores de Matemática sob diferentes pontos de vista. Em seu editorial, a Professora Célia Maria Carolina Pires (presidente na SBEM naquele momento) ressaltava que a publicação visava contribuir para as discussões que aconteceriam nos fóruns e que os esforços a serem realizados nesses espaços de discussão visavam à construção de um documento que sintetizasse a contribuição dos educadores matemáticos no

[5] A SBEM possui uma revista de publicação semestral denominada Educação Matemática em Revista. Maiores informações em www.sbem.com.br.

processo (à época, em andamento) de reorientação dos cursos de Licenciatura em Matemática. Entre os artigos publicados, destacamos:

- ✓ A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática, de João Pedro da Ponte;
- ✓ O que precisa saber um professor de Matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90, de Paola Sztajn;
- ✓ Um professor competente para o ensino médio proposto pelos PCNEM, de Maria Inês de Souza Vieira Diniz e Kátia Stocco Smole;
- ✓ Saberes de um professor de Matemática, de Maria Auxiliadora Vilela Paiva.

Essas discussões regionais convergiram para o I Fórum Nacional de Licenciatura em Matemática, realizado em agosto de 2002. A principal finalidade desse fórum era

> socializar e sistematizar os resultados dos fóruns regionais e iniciar a elaboração de uma proposta da SBEM para os cursos de Licenciatura em Matemática a ser encaminhado ao Conselho Nacional de Educação, à SESu/MEC e à coordenação do Exame Nacional de Cursos e aos próprios cursos.(SBEM, 2003, p. 36)

Já em 2003, dando sequência aos esforços realizados pela SBEM no sentido de discutir melhor a formação do professor de Matemática, foi realizado o I Seminário Nacional para a discussão dos Cursos de Licenciatura em Matemática. Nesse evento foram apresentadas pesquisas nacionais sobre a formação de professores de Matemática. As discussões que ocorreram durante o seminário apontaram que:

> o Curso de Licenciatura em Matemática deve ser concebido como um curso de formação inicial em Educação Matemática, numa configuração que permita romper com a dicotomia entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos específicos e com a dicotomia entre teoria e prática. (SBEM, 2003, p.4)

O documento produzido ao longo do seminário tratou de assuntos como os problemas a serem enfrentados nos cursos de licenciatura em Matemática, o perfil de professor de Matemática, implicações para a reorganização dos cursos de Licenciatura em Matemática, a Matemática nos cursos de licenciatura em Matemática, a docência nos cursos de Licenciatura em Matemática, entre outros.

Entre os Grupos de Trabalho da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), destacamos o GT7 – Formação de Professores que ensinam Matemática – que em 2006 contava com aproximadamente 100 pesquisadores (SBEM, 2006).

> O GT 7 "Formação de professores que ensinam Matemática" foi oficialmente constituído no I Seminário Internacional de Educação Matemática (I SIPEM), promovido pela SBEM e realizado em Serra Negra, em novembro de 2005. (NACARATO e PAIVA, 2006, p.8)

Constituído como um grupo de trabalho cooperativo entre pesquisadores com o intuito de discutir e analisar os saberes e a formação do professor de Matemática, dentre seus principais objetivos estão a elaboração de propostas de intervenção nas políticas públicas de formação de professores de Matemática e oferecer indicações e perspectivas na pesquisa sobre a formação docente em Matemática. (NACARATO e PAIVA, 2006).

Explorando temas como 'O professor como produtor de saberes' e 'O professor como agente de sua própria formação', o GT 7 lançou, em 2006, um livro como resultado de cinco anos de produções coletivas. A publicação, composta de 12 artigos, discute questões como a formação inicial do professor de Matemática e saberes docentes.

Pensando em pesquisas futuras, o GT 7 lança seu olhar sobre a formação do professor que ensina Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental. O GT 7 espera ainda poder contribuir nas discussões envolvendo as questões sobre a metodologia das pesquisas sobre formação de professores, consciente de que esse é o maior desafio a ser enfrentando pelos componentes do grupo. (NACARATO e PAIVA, 2006).

Dando continuidade ao debate sobre a formação de professores de Matemática no Brasil, foram realizados, em dezembro de 2007, o II Fórum Nacional de Licenciaturas de Matemática e, em outubro de 2009, o III Fórum Nacional de Licenciaturas de Matemática.

Todos esses encontros promovidos pela SBEM[6], através dos fóruns regionais ou nacionais, bem como através da atuação do GT7, sustentam discussões que

[6] Além da SBEM, iniciativas de instituições que possuem cursos de Licenciatura em Matemática e pesquisas de educadores matemáticos reforçam esse ideal de constante revitalização dos cursos de formação de professores de Matemática.

apontam a necessidade de uma constante atualização de nossas licenciaturas em Matemática. Da mesma forma que os cursos de licenciatura necessitam dessa permanente revitalização, advogamos também que esses mesmos cursos devem oferecer, ao futuro professor, oportunidades de uma formação ampla e diversificada.

Entendemos por uma formação mais ampla um modelo que contemple as questões relacionadas ao saber matemático (ponto fundamental para aquele que exercerá a docência dessa disciplina), que abranja as questões ligadas ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática e que também inclua as questões referentes à pedagogia e ao cotidiano escolar. Além disso, pensamos que durante todo o processo de formação devem existir momentos que possibilitem ao professor conhecer a si próprio. Esse autoconhecimento pode ser fundamental para o exercício da docência.

> É fundamental que ele passe a ser um construtor de seu próprio conhecimento, numa perspectiva crítica, analítica e reflexiva, condição indispensável para a sua profissionalização. (SBEM, 2003, p.12)

Diretrizes educacionais recomendam, por exemplo, que os conhecimentos prévios dos alunos sejam considerados durante o processo de aprendizagem de Matemática (BRASIL, 1999). Entendemos e concordamos com a importância dessas diretrizes, mas questionamos se tais diretrizes (e, por consequência, sua importância e as dificuldades de sua implementação) são discutidas com os professores em formação. Também questionamos se os futuros professores vivenciaram experiências em que seus conhecimentos prévios foram pesquisados antes de iniciarem um curso, por exemplo, uma disciplina de cunho matemático.

A discussão de uma nova diretriz e, principalmente, a oportunidade de vivenciá-la são relevantes para um professor. É sabido que a sociedade, de modo geral, espera que professores tenham respostas apropriadas para os problemas da educação e, no caso específico da Matemática, para as questões do ensino-aprendizagem dessa disciplina.

> ... espera-se que os professores tornem-se superdocentes capazes de desenvolver e aplicar estratégias de sala de aula cognitivamente profundas, emocionalmente envolvidas e socialmente ricas. (NACARATO et. all, 2005, p. 89)

Mas, na maioria dos casos, a singularidade das questões levantadas exige que o professor construa essa resposta. E para construir uma resposta, além de tempo e empenho, é necessário ter sido formado num espaço onde a reflexão, o autoconhecimento e a tomada de decisões tenham sido privilegiados. Será que nossas licenciaturas estão sendo pensadas dessa forma? Para acompanhar uma sociedade dinâmica como a atual, a formação do professor não pode ter um caráter estático. Torna-se necessário pensarmos em uma formação que acompanhe esse dinamismo.

> O professor de Matemática hoje,..., também terá que possuir uma ampla capacidade para dar resposta ao imprevisto e para desenhar modelos que se adaptem às incertas e mutantes condições de aprendizagem que ocorrem nas aulas de Matemática. (SBEM, 2003, p.7)

Assim, o desafio de formar professores deve ser encarado como complexo. Trata-se de um profissional que ainda é considerado importante, mas que nos últimos anos tem visto aumentar o número de críticas, quer seja sobre o processo de sua formação, quer seja acerca de sua atuação como profissional da área educacional. “O professor é um elo frágil da grande cadeia que é o sistema educativo. É facilmente culpabilizado por tudo o que não funciona” (PONTE, 1994, p.1).

Além da evidente questão do aprendizado de um conteúdo disciplinar especifico, outras questões se fazem presente nesse processo. Uma que parece ainda ser pouco explorada é a questão da formação pessoal e social do aluno:

> Em primeiro lugar, surge a formação pessoal, social e cultural dos futuros docentes. Essa formação é, muitas vezes, completamente ignorada. Parte-se do princípio que todo o estudante universitário teve oportunidade, pela sua formação escolar e não escolar anterior, de se desenvolver como pessoa e como cidadão o suficiente para poder vir a ser um bom professor, mas, na verdade, isso nem sempre acontece. (PONTE, 2002. p. 3)

A preocupação com a formação, como pessoa, daquele que futuramente irá se tornar professor de Matemática merece um olhar mais cuidadoso. O que esse sujeito traz como parte de sua bagagem intelectual e cultural? Quais eram as suas perspectivas quando decidiu frequentar o curso de licenciatura?

Um outro aspecto importante a ser trabalhado diz respeito ao que esse futuro licenciado entende por ser professor. Ser professor compreende muito mais do que apenas saber um conjunto de conteúdos da disciplina que leciona. A rede de saberes de um professor também deve incluir saberes sociais e culturais. Além dos saberes, pensamos que o ser professor encerra um conjunto de ações e posturas coerentes. Na nossa visão, o professor ainda é visto como uma figura de respeito, talvez alguém que ainda traga consigo os ideais de justiça e ética.

> Essa reflexão precisa inserir-se em contextos mais amplos como a própria realidade social e política brasileira e suas questões educacionais, o papel social do professor, as leis relacionadas à infância, à adolescência, à educação e à profissão, às questões da ética e da cidadania, etc. (SBEM, 2003, p. 10)

Por isso mesmo, pensamos que a valorização da carreira docente, tão defendida pela sociedade de modo geral, não se trata apenas de uma questão financeira. Essa valorização deve começar pelo resgate da palavra professor, fazendo-se necessário um processo de revalorização da figura do professor. O processo pode ser iniciado pelo questionamento de quem é essa pessoa que ingressa em uma licenciatura e por quais motivos ele optou pela carreira de professor.

Em 2006, o governo do Estado do Espírito Santo lançou um programa chamado Nossa Bolsa[7] que oferece bolsas de estudos em faculdades particulares daquele Estado para alunos da rede pública de ensino. A grande maioria das vagas oferecidas está concentrada nas licenciaturas. Tivemos a oportunidade de trabalhar em uma instituição privada que participava do programa e oferecia vagas em um curso de licenciatura de Matemática. Nos anos de 2006, 2007 e 2008 entraram nesse curso, em média, 40 alunos bolsistas.

Longe de negarmos a grandeza do ato, já que muitos alunos que ingressavam no curso através desse sistema afirmavam que não poderiam frequentar um curso superior de outra forma, constatamos, com tristeza, um fato comum às três turmas com as quais trabalhamos: muitos alunos não se identificavam com o curso ou não se enxergavam como professores. Não eram poucas as declarações como ‘estou fazendo Matemática por falta de opção’ ou ‘mesmo que conclua o curso não pretendo atuar em sala de aula’. Muitos pensavam

---

7 Ideia similar ao PROUNI, lançado pelo Governo Federal. Maiores informações em www.nossabolsa.es.gov.br.

em ser professor, mas assim que pudessem usariam o fato de ter um curso superior para trabalhar em outra área.

Durante nosso período de atuação nessa instituição, quer seja por falta de experiência quer seja por falta de percepção, não efetuamos um trabalho de discussão sobre questões como essa. Hoje, um pouco mais experientes com o trabalho de formação de professores e com um número maior de leituras sobre o assunto, percebemos que situações que envolvam a identidade e a valorização profissional do professor precisam ser debatidas na licenciatura. Não se pode conceber que alguém vá para uma sala de aula apenas aguardando uma ‘oportunidade melhor’ (algo que significa abandonar a profissão). É preciso que esse estudante perceba o contexto maior da profissão, o universo no qual está sendo inserido e perceba-se também responsável por ele. Apoiamos a ideia de que certas questões políticas, mas apartidárias, sejam colocadas no âmbito da formação pessoal do professor. Tememos que a não inclusão de questões como essa tenha como implicação direta o não desenvolvimento da percepção do papel fundamental que os professores podem desempenhar, por exemplo, nas reformas educacionais.

> Mas não é possível desencadear e conduzir com êxito um processo complexo, como o da transformação curricular e pedagógica, sem conhecer profundamente os problemas que envolvem a prática profissional dos professores e sem contar com a sua participação e empenho. (PONTE, 1994, p. 2)

Além da discussão da formação de âmbito pessoal e cultural do professor e de questões que envolvem a identidade do professor, suas concepções e crenças, surge também a discussão a respeito dos saberes de um professor. Como o nosso foco é na formação do professor de Matemática, debateremos sobre a seguinte pergunta, já feita por pesquisadores como, por exemplo, Ponte (2002) e Sztajn (2003): O que deve saber um professor de Matemática? Antes de respondermos a essa pergunta, exploraremos os saberes docentes de modo mais geral.

Tardif (2002) define o professor “como alguém que sabe alguma coisa e cuja função consiste em transmitir esse saber a outros” (TARDIFF, 2002, p.31). O autor questiona e reflete sobre o tipo de saber desse profissional, vendo no professor mais que apenas um transmissor de conhecimentos produzidos por outros.

Reconhecendo a posição estratégica que os professores ocupam nas sociedades, já que é por meio da atuação desses profissionais que os saberes produzidos por essa mesma sociedade chegam às novas gerações, Tardif (2002) defende a ideia de que a produção de novos conhecimentos não pode ser um fim em si mesma, entendendo que para todo conhecimento produzido deve existir um saber que contemple a questão complexa da sua aprendizagem e formação com base nesse novo conhecimento.

> Formações com base nos saberes e produção de saberes constituem, por conseguinte, dois pólos complementares e inseparáveis. Nesse sentido, e mesmo limitando sua relação com os saberes a uma função improdutiva de transmissão de conhecimentos, pode-se admitir, se não de fato pelo menos em princípio, que o corpo docente tem uma função social estrategicamente tão importante quanto a da comunidade científica e dos grupos produtores de saberes. (TARDIFF, 2002, p. 36)

Negando veementemente que os docentes sejam apenas transmissores de conhecimentos previamente construídos, Tardif (2002) afirma que a prática docente integra saberes plurais, compostos por saberes das formações profissionais, disciplinares, curriculares e os oriundos da experiência.

Os saberes que são transmitidos pelas faculdades de educação e pelas instituições de formação de professores formam o conjunto de saberes profissionais, que compreendem também os conhecimentos produzidos pelas pesquisas (conduzidas pelas ciências sociais) sobre o professor e o ensino. Quando os resultados dessas pesquisas são incorporados à prática do professor, esses saberes irão contribuir para a formação científica e erudita do professor.

Os saberes profissionais também abrangem aqueles que podem ser chamados de saberes pedagógicos:

> apresentam-se como doutrinas ou concepções provenientes de reflexões sobre a prática educativa no sentido amplo do termo, reflexões racionais e normativas que conduzem a sistemas mais ou menos coerentes de representação e de orientação da atividade educativa. (TARDIF, 2002, p. 37)

Doutrinas pedagógicas como da “escola-nova”, por exemplo, fornecem, por um lado, elementos ideológicos da profissão e, por outro, técnicas que são incorporadas ao saber fazer cotidiano do professor.

Os saberes disciplinares correspondem aos diversos campos de conhecimento da humanidade, tais como a Matemática, História, Literatura, entre outros. Sua transmissão acontece nas universidades, dentro de cursos distintos e independentes das faculdades de educação e dos cursos de formação de professores. Organizados sob a forma de disciplinas, esses saberes surgem pela via da tradição da cultura ou pelo trabalho dos grupos responsáveis pela produção de conhecimento.

Os diferentes objetivos, conteúdos, métodos e discursos que a escola utiliza para selecionar e apresentar os saberes sociais que ela (escola) considera relevantes constituem os saberes curriculares. Tais saberes são apresentados sob a forma de programas escolares, cabendo aos professores saber como aplicá-los.

Os saberes da experiência surgem da prática cotidiana. O dia-a-dia da sala de aula é rico em situações onde os docentes podem aplicar suas próprias teorias, validando-as ou não, de acordo com a sua própria análise. As habilidades e os hábitos que julgar convenientes podem ser incorporados a esse saber da experiência, aprimorando o saber ser e o saber fazer individual. Se transmitido aos demais docentes, essas mesmas habilidades e hábitos podem auxiliar na construção de novos saberes da experiência da categoria.

Outro autor que aborda o saber docente é Schulman (1986). Utilizando pesquisas históricas, esse autor faz um breve relato de como eram os exames de avaliação para o exercício da docência nos Estados Unidos durante o século 19. A partir dessa pesquisa afirma que, nesse período, o que definia a parte pedagógica era o conhecimento do conteúdo a ser ensinado. (SHULMAN, 1986).

Especificamente sobre os conhecimentos dos professores, descreve-os em três categorias: conhecimento do conteúdo, conhecimento do conteúdo pedagógico e conhecimento curricular.

O conhecimento do conteúdo diz respeito à quantidade e à organização de informações armazenadas pelo professor. Segundo o autor:

> Os professores devem não só ser capazes de definir para os alunos as verdades aceitas em um domínio. Eles também devem ser capazes de explicar por que uma proposição particular é considerada justificada, por que vale a pena conhecê-la, e como ela se relaciona com outras proposições, tanto na disciplina como fora dela, quer seja na teoria ou na prática. (SHULMAN, 1986, p.9, tradução nossa) [8]

[8] Teachers must not only be capable of defming for students the accepted truths in a domain. They must also be able to explain why a particular proposition is deemed warranted, why it is worth knowing and how it relates to other propositions, both within the discipline and without, both in theory and in practice.

O autor destaca ainda que o professor deve ter domínio e entendimento dos motivos pelos quais um tópico deve ser considerado mais importante que outro dentro da estrutura disciplinar. Esse entendimento será de extrema importância para decisões posteriores envolvendo o processo de ensino e aprendizagem da disciplina em questão.

O conhecimento pedagógico envolve saber representar e formular determinado conteúdo visando a sua melhor aprendizagem, numa tentativa de torná-lo mais compreensível para os alunos. Assim, fazem parte desse conhecimento as analogias utilizadas pelos professores, as ilustrações e as demonstrações, entre outros.

Ainda nessa categoria de conhecimento do professor, Shulman (1986) afirma que estão incluídos os saberes específicos que os profissionais devem possuir sobre a aprendizagem da sua disciplina. Para o autor, o professor também deve estar preparado para lidar com situações onde as concepções e os preconceitos dos alunos influenciam na aprendizagem.

No caso da Matemática, alguns alunos possuem uma concepção de que, ou não sabem Matemática, ou não são capazes de aprender Matemática. Nesse caso, o professor pode trabalhar um pouco mais sobre essas concepções, em uma tentativa de fazer com que o aluno perceba-se como um ser capaz de aprender (e fazer Matemática).

A terceira categoria de saberes docentes para Shulman (1986) é o conhecimento curricular.

> O currículo é representado por uma gama completa de programas voltados para o ensino de assuntos específicos e tópicos de um determinado nível, a variedade de materiais didáticos disponíveis em relação a esses programas, e ao conjunto de características que servem tanto como indicações e contra-indicações para o uso de um currículo ou programa específico de materiais em circunstâncias especiais. (Shulman, 1986, p. 10, tradução nossa[9]).

Além do conhecimento de instrumentos capazes de auxiliar o seu fazer cotidiano da sala de aula, o professor, segundo o próprio autor, deve ser capaz de

---

9 The curriculum is represented by the full range of programs designed for the teaching of particular subjects and topics at a given level, the variety of instructional materials available in relation to those programs, and the set of characteristics that serve as both the indications and contraindications for the use of particular curriculum or program materials in particular circumstances.

interligar verticalmente e lateralmente o assunto que está trabalhando. A interligação vertical acontece quando se relaciona o assunto atual a assuntos estudados anteriormente ou que serão estudados no futuro (dentro de uma mesma disciplina)[10]. Já a ligação lateral ocorre quando se consegue vislumbrar possíveis relacionamentos entre o assunto que está sendo estudado e assuntos estudados em disciplinas diferentes. Entendemos aqui que o autor sugere, no que intitula de ligação lateral, que o professor seja capaz de trabalhar de maneira integrada às outras disciplinas ou, como se diz modernamente, de maneira interdisciplinar e transdisciplinar.

Um terceiro autor que traremos para o debate sobre a questão dos saberes de um professor é Ponte (2002). Esse autor sugere uma formação que contemple: a formação pessoal, social e cultural dos futuros docentes[11]; a formação científica, tecnológica, teórica ou artística na respectiva modalidade; a formação do domínio educacional; as competências de ordem prática e, finalmente, as capacidades e atitudes de análise crítica, de inovação e de investigação pedagógica.

Apesar das diferentes formas de se expressarem, entendemos que os autores citados convergem para uma resposta sobre os saberes de um professor englobando três pontos básicos: o saber da disciplina propriamente dita; o saber que envolve o estudo das contribuições da pedagogia e o saber que advém da experiência.

Parece ser evidente que um professor deve conhecer o assunto sobre o qual irá lecionar. Entretanto, o saber da disciplina é algo que precisa ser visto com bastante cuidado. No caso da Matemática, é óbvio que o professor deve saber Matemática de boa qualidade para o exercício de seu ofício. Mas, é preciso lembrar que um licenciado em Matemática não é um bacharel em Matemática, devendo ter, portanto, uma formação diferente. Como alertam Moreira e David (2007), a chamada Matemática Acadêmica ou Científica é um corpo de conhecimentos científicos, fruto do trabalho de matemáticos profissionais, enquanto a Matemática Escolar refere-se aos saberes (validados pela comunidade de matemáticos) destinados à formação em Matemática na educação básica. Como afirma Paiva: "A Matemática que se trabalha na escola possui características próprias..." (2006, p. 90). Por isso mesmo,

---

10 Alguns autores afirmam que essa interligação vertical seria uma forma de contextualização.

[11] Fato também apontado no documento elaborado pela SBEM, em 2003, quando trata dos problemas a serem enfrentados nos Cursos de Licenciatura em Matemática.

> ...nem sempre fazer ou, ter feito mais cursos de Matemática, ou mesmo possuir produção cientifica dentro desse campo, garante a qualidade da prática docente. (SZTAJN, 2002, p.18)

Durante muitos anos o modelo de formação de professores de Matemática adotado no Brasil, baseado no paradigma da racionalidade técnica, foi o modelo 3+1. Ao longo dos três primeiros anos do curso o aluno da licenciatura praticamente não se diferenciava do aluno do bacharelado. As disciplinas de Matemática ocupavam quase que totalmente a grade do curso. Somente no ultimo ano apareciam as disciplinas de pedagogia, de caráter obrigatório e desvinculadas da prática. A alocação dessas disciplinas na grade curricular evidenciava a pouca importância a elas atribuída para a prática do professor. A concepção de formação apoiava-se na ideia de que para ser um bom professor de Matemática bastava saber Matemática de boa qualidade.

> Quando se iniciaram as licenciaturas no Brasil, elas se constituíam de três anos de formação específica e mais um ano para a formação pedagógica. O saber considerado relevante para a formação profissional do professor era, fundamentalmente, o conhecimento disciplinar específico. O que hoje é denominado formação pedagógica se resumia à didática e esta, por sua vez, a um conjunto de técnicas úteis para a transmissão do saber adquirido nos três anos iniciais. Por isso, costuma-se referir a esse período de formação do professor como “3+1” ou “bacharelado + didática”. (MOREIRA e DAVID, 2007, p.13)

Entretanto, ainda na década de 1970 (MOREIRA e DAVID, 2007), o modelo de formação com maior ênfase no saber específico começa a receber críticas, justamente por não suprir as necessidades que os professores possuíam no exercício do ensino da sala de aula. Parece-nos que ficava evidente que o modelo 3+1 não contemplava os outros dois saberes descritos anteriormente: aqueles produzidos pela pedagogia como ciência e os produzidos pelo próprio professor ao longo de sua carreira.

A afirmação “... que, hoje em dia, um professor é cada vez mais um educador e cada vez menos um simples instrutor” (PONTE, 2002, p. 4) fortalece a importância dos saberes ligados à pedagogia. Apesar das diferentes nomenclaturas usadas, esses saberes são aqueles que permitem ao professor transformar o conhecimento matemático em um elemento que pode ser ensinado e aprendido.

> O professor deve, portanto, ser capaz de transformar esse conhecimento em algo que pedagogicamente tenha significado e, ao mesmo tempo, esteja ao nível das habilidades e conhecimentos de seus alunos, garantindo a formação de novas competências.(PAIVA, 2002, p.91)

Em Matemática, esse saber da pedagogia pode ser de bastante utilidade para o professor. É sabido, por exemplo, que a Matemática é uma ciência que possui uma forma de representação própria que muitas vezes torna-se fonte de impedimento para a compreensão dos alunos. O professor pode, utilizando diferentes metodologias e recursos, aproximar seus alunos dessa forma de representação. Tais metodologias e recursos, em alguns casos, não são elementos investidos de grandes inovações: às vezes, um diálogo simples, mas com questionamentos bem encaminhados, pode auxiliar bastante na compreensão dos alunos.

Um assunto que costuma ser bastante confuso para os alunos é a representação de intervalos reais. Muitos alunos não conseguem responder corretamente quantos elementos possui o conjunto $\{x \in R / 3 < x < 7\}$. Como podemos, então, utilizando os saberes da pedagogia, auxiliar nossos alunos a compreenderem essa representação?

Um bom começo pode ser uma retomada dos conjuntos numéricos. Num processo rápido, repassar os principais conjuntos, mas não apenas como elementos matemáticos, mas como fruto de necessidades humanas. Assim, os Naturais surgiriam devido à necessidade do homem de contar seus rebanhos. Os Inteiros, fruto das relações comerciais. E assim sucessivamente. Um ponto que não pode deixar de ser ressaltado é a inclusão dos Naturais como Inteiros, dos Inteiros como Racionais e dos Racionais e Irracionais como Reais. Feito isso, pode-se promover uma discussão envolvendo diferentes representações: quais as diferenças entre os seguintes conjuntos: $\{x \in N / 3 < x < 7\}$; $\{x \in Z / 3 < x < 7\}$; $\{x \in Q / 3 < x < 7\}$; $\{x \in R / 3 < x < 7\}$? Assim, de maneira gradual, sem maiores inovações, mas com muito trabalho e observação da evolução por parte do professor, um conteúdo, que normalmente se mostra bastante complexo para os alunos, pode se tornar mais compreensível pela ação de outros elementos que não apenas o saber matemático em si.

Entretanto, para que possa aplicar de modo mais adequado o seu saber pedagógico, torna-se desejável que o professor conheça o conteúdo disciplinar e as diferentes formas de abordar os vários tópicos matemáticos. Assim, de posse de diferentes possibilidades de abordagem de um mesmo assunto, caberá a ele decidir qual a melhor estratégia a ser adotada para cada situação em particular. Em suas palavras, Sztajn (2002, p. 19) destaca bem a importância desse saber: "É esse conjunto de saberes que distingue aquele que apenas sabe uma disciplina daquele que é capaz de ensiná-la".

Já os saberes da experiência são aqueles adquiridos ao longo da prática. É esse conhecimento que permite ao professor transformar os conhecimentos teóricos adquiridos em propostas de encaminhamento e condução da vida profissional cotidiana. Acreditamos tratar-se de um conhecimento único, que cada professor adquire a seu modo, de acordo com suas características pessoais.

> Não basta ao professor conhecer teorias, perspectivas e resultados de investigação. Tem de ser capaz de construir soluções adequadas para os diversos aspectos da sua ação profissional, o que requer não só a capacidade de mobilização e articulação de conhecimentos teóricos, mas também a capacidade de lidar com situações concretas, competências que se têm de desenvolver progressivamente ao longo do tempo de sua formação – durante a etapa de formação inicial e ao longo de da carreira profissional. (PONTE, 2002, p. 4)

Sendo os saberes da experiência adquiridos ao longo da carreira, cremos que a questão do desenvolvimento profissional também deve ser discutida durante a licenciatura. O futuro professor precisa conscientizar-se da necessidade continuada de atualização e desenvolvimento profissional.

> O conceito de *desenvolvimento profissional* é relativamente recente nos debates sobre a formação de docentes dos diversos níveis de ensino. A sua importância resulta da constatação que uma sociedade em constante mudança impõe à escola responsabilidades cada vez mais pesadas. Os conhecimentos e competências adquiridos pelos professores antes e durante a formação inicial tornam-se manifestadamente insuficientes para o exercício das suas funções ao longo de tida a sua carreira. (PONTE, 1995 p. 193)

Ao abordar os dois conceitos formação e desenvolvimento profissional, Ponte (1995) reconhece a proximidade, mas destaca o fato de não serem conceitos equivalentes. Se em espaços de formação o papel do professor pode ser mais passivo, ou seja, o professor é objeto, esse mesmo professor torna-se sujeito quando se trata do seu desenvolvimento profissional.

De modo geral, na formação inicial é tratado aquilo que o professor não sabe (no julgamento de alguém que não seja o próprio professor) e, algumas vezes de modo compartimentado, enquanto em um processo de desenvolvimento profissional, o professor é agente ativo que explicita os aspectos que ele, de maneira ampla, deseja aperfeiçoar. Embora os programas atuais de formação docente busquem integrar teoria e prática, o desenvolvimento profissional traz questões da prática, buscando sustentação teórica para essa prática.

Optamos por um entendimento do desenvolvimento profissional como conceito integrador dos espaços de formação inicial e continuada; professores, professores formadores, alunos, escola, comunidade tornam-se um coletivo atuante nesse processo de alguém se tornar e se desenvolver como professor.

Nesse processo de tornar-se professor, e pensando primeiro no processo inicial de formação os alunos fazem disciplinas de conteúdo matemático tais como álgebra, cálculo, geometria, entre outros. Embora todas as modificações pelas quais vêm passando os cursos de licenciatura, alguns questionamentos permanecem em aberto. Existe, por parte do professor que ministra disciplinas de conteúdo específico, uma preocupação em capacitar seus alunos para que possam ministrar aulas dessas disciplinas? Ainda que se discutam questões de cunho pedagógico, procurando enfatizar modos variados de abordar aquele assunto nos mais diferentes níveis de estudo, costuma existir uma preocupação prioritária com o saber matemático, e pouca participação dos estudantes na proposição de tópicos a serem abordados ao longo da disciplina. Essa responsabilidade costuma ser delegada apenas ao professor ou aos coordenadores do curso.

Será que não podem existir, em nossos cursos de formação inicial de professores de Matemática, espaços configurados em disciplinas, atividades extracurriculares ou seminários, nos quais um licenciando possa escolher o que ele quer estudar e de que maneira estudar? Por que todas as decisões, necessariamente, devem estar concentradas na mão do professor? Estamos formando professores que futuramente também terão que tomar decisões sobre os tópicos a serem ensinados e a forma de ensiná-los? Por que não implementarmos propostas dessa natureza ainda na licenciatura?

Propostas dessa natureza podem representar uma novidade em cursos de licenciatura. Ao deslocarmos para o aluno algum poder de decisão, solicitando que ele decida o que e como fazer, colocamos em prática um processo que envolve a reflexão e o conhecimento metacognitivo. Cada decisão tomada está embasada em uma série de argumentos, que variarão de aluno para aluno. Uma pessoa não pode tomar tais decisões sem que conheça de fato suas próprias motivações e intenções, sem conhecer-se de maneira metacognitiva.

Procuramos, até o momento, enfatizar que a formação de um professor de Matemática não é um processo simples; pelo contrário, trata-se de um processo complexo e que, nos últimos anos, tem exigido daquele que ingressa em um curso de formação uma postura mais participativa e mais crítica. A metacognição pode e deve ser um foco para o desenvolvimento profissional do professor. E, se queremos formar professores numa perspectiva metacognitiva, um pressuposto básico é a formação de professores reflexivos.

> A ideia de reflexão surge associada ao modo como se lida com problemas da prática profissional, à possibilidade da pessoa aceitar um estado de incerteza e estar aberta a novas hipóteses dando, assim, forma a esses problemas, descobrindo novos caminhos, construindo e concretizando soluções. (SERRAZINA, 2002, p. 32)

3.2 Reflexão

O número de pesquisadores, relacionados à educação, que se dedicam a discutir sobre o assunto reflexão e seus desdobramentos é considerável. Segundo Oliveira e Serrazina (2002):

> Para além do substantivo reflexão, o correspondente adjectivo – reflexivo – adquiriu um grande protagonismo na educação. Assim, termos como 'pensamento reflexivo' (Dewey), 'ensino reflexivo' (Zeichner), 'aprendizagem reflexiva' (Fosnot), 'praticantes reflexivos' (Schön) e 'práticas reflexivas' (Jaworski) aparecem frequentemente associados à investigação sobre práticas dos professores (OLIVEIRA e SERRAZINA, 2002, p.2).

Mas, qual o sentido da palavra reflexão nesse processo? Normalmente, a palavra reflexão nos remete a uma série de atitudes envolvendo pensamentos profundos, entre elas, a meditação. Esse sentido de reflexão usa bastante o pensamento introspectivo, algo que busca trazer de volta o equilíbrio que a pessoa julga ter perdido.

Para a educação, a palavra reflexão traz uma série de implicações. Refletir em educação parte da premissa básica que existe um problema a ser resolvido, pressuposto fundamental para o surgimento do pensamento analítico. Não se trata de algo simples: o ato de refletir traz consigo uma análise profunda de toda uma situação rica em fatores, alguns dos quais podem se tornar bem complexos.

> O pensamento crítico ou reflexivo tem subjacente uma avaliação contínua de crenças, de princípios e de hipóteses face a um conjunto de dados e de possíveis interpretações desses dados. (OLIVEIRA e SERRAZINA, 2002, p.3)

Se o ato de refletir traz consigo ações como a avaliação de crenças e princípios, é natural esperar que a formação de um profissional reflexivo seja feita de uma maneira diferente. Entende-se que essa ‘nova proposta’ de formação do professor deve ser rica em situações propícias à formação desse pensamento reflexivo, bem diferente dos normalmente utilizados em uma ‘formação tradicional’.

Um autor bastante citado para a discussão envolvendo a formação do profissional prático reflexivo é Schön (2000). Sua proposta de formação profissional reflexiva possui a intenção de representar uma alternativa à prática de formação baseada nos princípios da racionalidade técnica.

> A racionalidade técnica diz que os profissionais são aqueles que solucionam problemas instrumentais, selecionando os meios técnicos mais apropriados para propósitos específicos. Profissionais rigorosos solucionam problemas instrumentais claros, através da aplicação da teoria e da técnica derivadas do conhecimento sistemático, de preferência científico (SCHÖN, 2000, p. 15).

A ideia de formação baseada nos princípios da racionalidade técnica lembra bastante os desenhos curriculares tradicionais das escolas de medicina: os alunos iniciam pela ciência básica, onde se espera que sejam formados os conhecimentos científicos básicos para o exercício da profissão, passam pela ciência aplicada e terminam com a aquisição de habilidades técnicas e a prática cotidiana. Entretanto, o paradigma da racionalidade técnica, aplicado à formação profissional, não consegue dar conta de situações onde não se podem aplicar as técnicas encontradas em manuais.

Como reage um professor ao perceber que seus alunos apresentam sérias dificuldades em assuntos que considerava pré-requisitos importantes para sua disciplina? Como trabalhar em uma turma com alto grau de heterogeneidade, com alunos com diferentes níveis de conhecimento? Como avaliar um aluno que mostra desenvoltura nas atividades de sala de aula, mas que não se sai tão bem em atividade avaliativas?

Em casos complexos[12] como os citados anteriormente, alguns profissionais são capazes de encontrar soluções eficazes, capazes de reverter um quadro que antes parecia caótico. O que diferencia esses profissionais? O que possuem que os capacita a trabalharem de maneira tão singular e autônoma? Como, mesmo abandonando os manuais, conseguem contornar situações imprevisíveis e inusitadas?

O que esses profissionais possuem é o que Schön (2000) denomina de talento artístico profissional: tipos de competências que os profissionais demonstram em certas situações da prática que são únicas, incertas e conflituosas. Esse talento é uma variação da performance habilidosa que todos nós apresentamos em diversos momentos do nosso dia-a-dia. Comumente, os profissionais demonstram esse talento em seu cotidiano, mas não conseguem descrever os motivos que os levam a tomar essa ou aquela decisão. Tal talento pode ser descrito como um saber-como-fazer inteligente: é um saber oriundo da ação, que nasce da prática e da experiência sobre a prática, auxilia na classificação das situações, permite distinguir onde se podem aplicar determinadas ações e, até mesmo, analisar se a decisão de agir de uma certa maneira foi eficaz ou não.

Por exemplo: um professor explica um exercício de trigonometria envolvendo a lei dos senos. Ao final de sua explanação, uma aluna indica que não entendeu uma consideração específica a partir do desenho que havia proposto para ilustrar a situação-problema. Tentando melhorar o entendimento da aluna, o professor refaz o caminho percorrido, procurando detalhar um pouco mais cada ponto de associação entre o texto escrito e o desenho. Ao acompanhar a aluna, percebe que à medida

[12] ou como afirma Schön (2000), não previstos nos manuais.

que acrescenta os detalhes, suas feições vão mudando, dando a ele a impressão de que ela começa a entender sua explicação.

Essa ‘transformação facial’ percebida pelo professor certamente ficará na sua memória. Se perguntado sobre quais são esses movimentos, quais as transformações percebidas, provavelmente o professor não será capaz de explicitá-los. Ou, mesmo que os explicite, não o fará com a riqueza de detalhes que foi capaz de perceber. Entretanto, essa série de movimentos dos músculos faciais de um aluno que passa a compreender uma situação que ainda não havia entendido, certamente será memorizada e permitirá que o professor a perceba em outros momentos, com outros alunos e em outras situações.

Aquilo que é tratado como talento artístico profissional traz integrado o ato de conhecer-na-ação (SCHÖN, 2000). Trata-se de um conhecimento que os profissionais revelam em situações práticas como a de um professor que percebe que um aluno não entendeu uma explicação. “Nós o revelamos pela nossa execução capacitada e espontânea da performance, e é uma característica nossa sermos incapazes de torná-la verbalmente explícita”. (SCHÖN, 2002, p.31)

A observação e a reflexão sobre as ações permitem a construção de rotinas – teorias de ação – que os profissionais julgam seguir nesse tipo de situação. Essas rotinas variam de acordo com os propósitos e com a linguagem empregada. Podem variar desde uma sequência de ações que os profissionais julgam seguir até a indícios observados que influenciam as decisões tomadas (algo do tipo se isso, então aquilo). As teorias de ação, as teorias–em-uso e o processo de conhecer-na-ação (SCHÖN, 2000) são construções particulares, que dificilmente poderão ser transferidas, empregadas por outro que não o próprio autor. Existe algo de particular, de pessoal nessas construções que, por mais que sejam detalhadas, não conseguem traduzir com perfeição todo o conjunto de percepções e sensações que o autor sente na ação. Mesmo que um outro profissional siga a descrição detalhada dessa rotina de ação, provavelmente não alcançará o mesmo resultado: as situações são dinâmicas e as rotinas não refletirão o conjunto de ações que o seu autor aplicaria caso estivesse vivenciando tal momento. Para cada nova situação, o autor aplica uma série de ações que considera apropriadas e que podem não fazer parte da sua descrição.

Portanto, o conhecer–na–ação compreende uma série de saberes que são empregados na execução de uma tarefa e que são ajustáveis às incertezas do momento. Essas incertezas do momento, não previstas na listagem de procedimentos, acabam por dar ao conhecer–na–ação essa dimensão de pessoalidade, o que permite a série de ajustes que o autor efetua de maneira constante ao longo da sua prática. “Conhecer sugere a qualidade dinâmica de conhecer-na-ação, a qual, quando descrevemos, convertermos em conhecimento–na-ação”. (SCHÖN, 2000, p. 32).

Voltando a pensar sobre a formação de professores, este é um tipo de conhecimento que acreditamos que pode ser associado à questão do saber da experiência de um professor. Esse tipo de conhecimento não pode ser adquirido apenas pela leitura de teorias; é necessário que o futuro professor possa viver situações reais de sala de aula. Em algumas dessas situações, certamente, o futuro professor terá que improvisar, desenvolvendo, ao seu modo, seu talento artístico profissional. Aqui, talvez, possamos começar a propor uma nova dimensão para a questão do estágio supervisionado inserido no currículo da licenciatura.

O estágio curricular, em nosso entendimento e à luz da teoria posta, pode assumir uma nova dimensão. Perde a característica de apenas cumprir uma exigência da lei para ganhar a forma de uma oportunidade de formação das teorias de ação. O professor responsável pela disciplina ganha uma nova função, deixando de ser apenas o avaliador e passa a ser alguém que, usando sua experiência, auxilia o futuro professor na interpretação de suas ações. Entendemos que assim permitiremos que esse futuro professor comece a montar seu próprio conhecer-na-ação.

A mesma experiência que permite que um profissional construa suas teorias de ação também permite que, algumas vezes, ele atue de maneira mecânica na execução de tarefas do seu cotidiano, sem o que se chama, popularmente, de ‘pensar sobre’. Entretanto, essa atuação mecânica não o impede de reconhecer quando alguns resultados não estão como o esperado. Também não o impede de ter a sensação de que algo não caminha como deveria caminhar, de que algo não está de acordo. O que fazer nesse caso? Ignorar esses resultados e prosseguir com o que foi planejado, abandonando os resultados contraditórios e a sensação de que algo não caminha como deveria? Ou, de modo oposto, investir tempo pesquisando o que pode ter acontecido, analisando os motivos pelos quais tem-se a sensação de que algo está indo errado? Caso a opção seja o abandono dos sinais observados, a discussão se encerra por aqui. Mas, caso a opção seja pela pesquisa detalhada, o profissional começa a refletir[13] sobre aquilo que fez. Essa reflexão, inicialmente, pode acontecer em dois momentos distintos: sobre a ação e na ação.

A reflexão sobre a ação pode acontecer em momentos distintos. A situação mais clássica é aquela em que a reflexão acontece em um momento posterior à ação. Em uma situação de tranquilidade, o momento do acontecimento da ação é reconstruído mentalmente, com o autor tentando recordar detalhes daquilo que aconteceu: eventos, ações, perguntas feitas, respostas recebidas. Essa reconstituição permitirá que o profissional investigue de que maneira o conhecer–na–ação pode ter interferido na produção de resultados adequados ou inadequados.

A reflexão sobre a ação também pode acontecer no momento da ação. O profissional, sem alterar os procedimentos programados - ainda no momento da execução - faz uma breve pausa e pensa sobre o que está acontecendo e quais motivos podem ter contribuído para aqueles resultados. Mesmo que suas percepções apontem uma necessária e possível mudança de estratégia ou de ações, ele deixa que as coisas prossigam da forma como estão, preferindo que essas percepções sejam usadas para uma atividade posterior.

Caso o andamento da atividade ainda permita essas modificações vislumbradas sejam colocadas em prática, essa reflexão - que acontece naquilo que SCHÖN (2000) descreve como o presente da ação - pode ser reclassificada como reflexão-na-ação. “A reflexão–na–ação tem uma função crítica, questionando a estrutura de pressupostos do ato de conhecer – na – ação” (SCHÖN, 2000, p.33). Nesse caso o conjunto de procedimentos – e que foram previamente planejados - não é interrompido. Caso o profissional perceba, via reflexão, a necessidade de mudança de procedimentos, essa mudança deve, na medida do possível, ocorrer de modo sutil, buscando evitar maiores transtornos. Segundo Schön (2000), “o que distingue a reflexão–na–ação de outras formas de reflexão é sua imediata significação para a ação”. (p.34)

Um outro tipo de reflexão que pode surgir é a da reflexão sobre a reflexão–na– ação. Nessa situação, não só o momento da ação é reconstituído; a situação em que a reflexão aconteceu também é revisto, com o profissional recordando os fatos e os pensamentos que teve a esse respeito, bem como acrescentando outras observações que porventura julgue conveniente para aquele momento. Essa

[13] Como dito no início do capítulo, a reflexão surge quando percebe-se que algo não está a contento, e tenta restabelecer o equilíbrio antes existente.

reflexão pode contribuir para a observação de novos problemas e de novas soluções. Os resultados produzidos poderão interferir direta ou indiretamente nas ações futuras. “A reflexão sobre a reflexão na ação é aquela que ajuda o profissional a progredir no seu desenvolvimento e a construir a sua forma pessoal de conhecer”. (OLIVEIRA e SERRAZINA, 2002, p. 32)

Um professor pode viver em sala de aula situações que exijam dele o uso dos diferentes tipos de reflexão. Uma situação envolvendo a reflexão sobre a ação pode ser a seguinte: um professor de Matemática programa uma atividade sobre análise combinatória (um estudo sobre o princípio multiplicativo) para duas turmas do segundo ano do ensino médio que terão aulas em dias consecutivos. Ao aplicar a atividade para a primeira turma, percebe que os alunos apresentam dificuldades na interpretação dos enunciados. Analisando detalhadamente sua lista de atividades, levanta a hipótese de ter escolhido questões pouco apropriadas para iniciar o assunto (verifica que algumas, de fato, apresentam um vocabulário truncado, pouco claro). No dia seguinte, trabalha da mesma forma, porém com questões novas, com enunciados mais claros e que permitem aos alunos desenvolver o pensamento combinatório.

Um exemplo de reflexão-na-ação pode ocorrer quando, durante uma aula sobre Relações Métricas no Triângulo Retângulo, o professor, ao resolver um exercício, solicita que a turma faça a adição 2/5+ 1/8. Em seu entendimento, esse é um conteúdo que os alunos do ensino médio dominam. Contrariando sua expectativa - a pergunta será respondida de maneira breve e corretamente, pensava ele - o número de alunos que responde à indagação é pequeno. E o que o deixa mais assustado: entre as respostas dadas, muitas estavam incorretas. A dúvida que surge é, de certa forma, natural: prosseguir com o conteúdo programado, ignorando a dificuldade apresentada pela turma, ou tratar essa dificuldade, fazendo uma revisão sobre operações com frações. Após analisar rapidamente as implicações sobre a falta daquele pré-requisito, opta por fazer a retomada do conteúdo operações com frações, abandonando, em parte, o que havia planejado previamente.

Vamos retomar a situação do professor que, durante a aula de análise combinatória, percebeu que o estudo preparado precisava ser revisto para discutirmos a reflexão sobre a reflexão-na-ação.

No seu horário de planejamento, de posse do estudo dirigido, ele lê cada passo que havia proposto, tentando recordar o que percebeu nos alunos. Quais os exercícios que não estavam claros e por quê? Uma revisão teórica do assunto ou a substituição dos exercícios, como havia pensado anteriormente resolveria o problema? Uma sequência de atividades investigativas poderia melhorar os resultados?

Independente das decisões tomadas, o fato de pensar sobre o que havia refletido anteriormente certamente contribuirá para seu desenvolvimento profissional. Seus saberes pedagógicos e da experiência serão afetados, contribuindo de maneira significativa para futuras ações.

Tornar-se um profissional reflexivo traz consigo a certeza de um trabalho minucioso de olhar uma situação-problema por diversas vezes, sob diferentes pontos de vista, na tentativa de equacionar e re-equacionar tal situação, para que diferentes soluções sejam apresentadas e se possa decidir qual a mais adequada para aquela situação em particular. Empenhar-se em processo reflexivo pode demandar também a participação em um grupo de discussão, um grupo em torno do qual se desenvolva uma conversa reflexiva. Essa conversa reflexiva pode contribuir para a troca de experiências, além de aumentar a compreensão e auxiliar na tomada de decisões que se julguem apropriadas.

Um outro ponto a ser discutido dentro da perspectiva de formação envolvendo a reflexão é a questão da prática. Quando discutida a partir do referencial da racionalidade técnica, entende-se que a prática deve estar voltada para a discussão de problemas claros, em que a aplicação de instrumentos teóricos se encaixa com perfeição. Quando os instrumentos disponíveis não produzem as respostas adequadas, o profissional adota uma série de raciocínios pré-determinados, algo que popularmente é chamado de ‘pensar como pensa’ certo profissional. Esse ‘pensar como’ ilustra a série de procedimentos (de preferência de cunho científico) que aquela classe de profissionais em particular adota para implementar uma pesquisa que possa ajudá-lo a resolver uma situação que ficou fora dos padrões usuais.

A nosso ver, um exemplo dessa visão de prática baseada na racionalidade técnica, dentro dos cursos de licenciatura em Matemática, são as aulas de prática pedagógica: muitas vezes a discussão gira em torno de uma situação hipotética criada pelo professor, cabendo aos alunos apontarem soluções, de preferência, apoiados em uma ou outra pesquisa científica. Mesmo que o professor faça intervenções, acrescentando um ou outro detalhe para atribuir um certo tom realístico à situação que propõe, ainda assim, acreditamos que esse tipo de trabalho pouco contribui para a formação do professor, pois se trata de uma situação hipotética, idealizada, para a qual a solução técnica se fará adequada. Acreditamos que se faz necessária a discussão girando, de fato, em torno de situações oriundas da sala de aula, de preferência, vividas pelos próprios alunos. Nesse caso, a discussão poderá tornar-se bem rica. Será que a solução proposta pela pesquisa científica foi adequada? Caso não tenha sido, qual a impressão que ficou para o motivo desse fracasso? Qual foi a alternativa encontrada face a esse fracasso? A situação deixa de ser hipotética e ganha contornos de realidade. Aproxima-se o licenciado da sala de aula, permitindo que ele perceba o ambiente da sala de aula como um lugar vivo e dinâmico, onde cada ação terá desdobramentos, muitas vezes não previstos nos resultados de uma pesquisa científica, mas que se farão presentes no ambiente e que precisam ser analisados e entendidos.

De acordo com a proposta alternativa de formação baseada na reflexão, existem situações-problema bem definidas, onde a pesquisa científica oferece subsídios claros para a sua resolução. Também existem situações não tão bem definidas, mas que permitem, após um certo trabalho de re-enquadramento, que os resultados das pesquisas científicas sejam usados. Entretanto, também existem situações extremas, de contornos pouco claros, de difícil re-enquadramento, para os quais a pesquisa científica não possui respostas prontas.

Nesses casos extremos, o comportamento que um profissional reflexivo passa a demonstrar torna-se semelhante ao de um pesquisador: ele analisa e constrói a sua própria técnica ou rotina na tentativa de resolver a situação inesperada. Nessa construção, além dos conhecimentos obtidos pelo estudo da ciência, usa também seus saberes obtidos pela experiência e o seu conhecer-na-ação. A aplicação dessa rotina permitirá que, usando a reflexão-na-ação, reoriente sua ação. Os resultados obtidos servirão como orientadores do processo de novo planejamento. Passo a passo, refletindo e estudando detalhadamente a situação e seu caráter dinâmico, o profissional, usando seu repertório de saberes, tenta constituir um processo que tentará dar encaminhamento para a solução daquela situação-problema.

> Quando os profissionais respondem a zonas indeterminadas da prática, sustentando uma conversação reflexiva com os materiais de suas situações, eles refazem parte de seu mundo prático e revelam, assim, os processos normalmente tácitos de construção de uma visão de mundo em que baseiam toda a sua prática. (SCHÖN, 2000, p. 39)

Ainda sobre a questão da formação profissional, sabemos que aprender uma prática é muito mais do que apenas aprender como procede um profissional de determinada área. Além de aprender procedimentos, o aprendiz será colocado dentro do universo daquela profissão, aprendendo seus costumes, seu linguajar, suas maneiras próprias de investigação; enfim, ele começará a conhecer toda a cultura inerente e integrada àquele mundo ao qual tenta se integrar.

Pode-se tentar aprender uma prática por conta própria. Isso terá vantagens – como a liberdade de fazer experimentos livremente, sem a intervenção de outros - e desvantagens. Uma das principais desvantagens está no fato de o aprendiz praticamente ter de refazer todo um caminho que outros já percorreram e deixaram como legado a experiência vivida e os resultados encontrados. Em um mundo onde as relações entre pessoas e a capacidade de trabalhar em grupo estão muito valorizadas, pensar em uma aprendizagem desse tipo é quase inimaginável. Entretanto, não são poucos os exemplos de profissionais como sapateiros, carpinteiros, serralheiros, joalheiros, entre outros, que aprenderam o seu ofício de maneira autônoma, fazendo no seu dia-a-dia um grande esforço por meio de tentativa-e-erro, construindo, lentamente, o seu saber profissional prático. (SCHÖN, 2000)

Uma outra maneira de se aprender uma prática é tornar-se um aprendiz de um profissional experiente. O aprendiz, sob a supervisão de um orientador, vai sendo inserido no mundo prático, aprendendo, gradativamente, como são as rotinas e os afazeres de um profissional. Era bastante comum, na década de 1980, encontrarmos em escritórios de contabilidade jovens estagiários que eram preparados para assumirem a função de técnicos de contabilidade. Aliavam o ensino teórico – faziam o curso técnico em escolas regulares – com a vivência cotidiana da profissão, atuando nos escritórios. Muitos, antes mesmo de se formarem nos cursos regulares, já executavam tarefas de competências de técnicos.

Um dos problemas que esse tipo de formação pode apresentar é a pouca preparação que os ambientes que receberão esses aprendizes podem apresentar. A falta de profissionais dispostos a dedicarem tempo e paciência na formação de um novo profissional é uma realidade presente nesses espaços. Assim, o aprendiz rapidamente já começa a receber atribuições típicas de um profissional, sendo seus erros não tolerados da mesma forma como ocorre com um profissional. (SCHÖN, 2000).

Uma terceira opção de formação é a aula prática.

> Uma aula prática é um mundo virtual, relativamente livre de pressões, distrações e riscos do mundo ao, qual, no entanto, ele diz respeito. Fica no espaço intermediário entre o mundo prático, a camada “leiga” da vida ordinária e o mundo esotérico da academia. É, também, um mundo coletivo em si, com sua própria mistura de materiais, ferramentas, linguagens e apropriações. (SHÖN, 2000, p.40)

Essa aula prática auxilia os estudantes a entenderem um pouco mais da própria prática. Assim, espera-se que os estudantes comecem a diferenciar o que vem a ser uma boa prática, além de perceberem o ponto onde estão e o caminho a ser percorrido para que cheguem ao ponto que pretendem.

Os currículos atuais de cursos de licenciatura propõem atividades com essa conotação de inserção na prática a serem desenvolvidas desde o início dos estudos. Conhecer a escola e a sala de aula de Matemática dessa escola, torna-se prática importante para as atividades de estágio. Mas essa reflexão precisa ainda se fazer presente no cotidiano da sala de aula de Álgebra, Geometria ou Cálculo, onde professores e alunos, futuros professores, devem analisar e refletir, por exemplo, sobre questões de ensino-aprendizagem desses conteúdos.

3.3 O Professor Reflexivo

A reflexão envolvendo tanto o professor como a sua prática é um assunto que possui uma grande abrangência e precisa ser discutido à luz do significado que a palavra reflexão possui para a educação. Infelizmente, ao longo da última década, a palavra reflexão tornou-se um jargão educacional e acabou se distanciando do seu real valor.

> O ensino reflexivo tornou-se rapidamente um slogan adotado por formadores de educadores das mais diferentes perspectivas políticas e ideológicas para justificar o que faziam em seus programas e, depois de certo tempo, ele começou a perder seu significado específico. (ZEICHNER, 2008, p. 538)

Alarcão (2005) escreve que a proposta de formação do professor reflexivo no Brasil teve uma recepção apoteótica, mas que atualmente vem recebendo duras críticas. Segundo ela, três seriam os motivos para a descrença atual:

- ✓ A alta expectativa gerada em torno da reflexão pode ter gerado a crença de que ela seria capaz de resolver os problemas envolvendo a formação do professor, sua valorização e sua atuação;
- ✓ Um entendimento parcial da proposta, contribuindo para que o termo se tornasse um slogan sem sentido;
- ✓ Dificuldades de implementação da proposta na prática cotidiana do professor quer seja por motivos pessoais, quer seja por motivos institucionais.

Mas o que vem a ser um professor reflexivo? Quais as implicações de se tornar um professor reflexivo?

Inicialmente, a noção de reflexão mostrou-se como uma reação aos processos de formação de professores que se baseavam na psicologia comportamentalista, que procuravam treinar os docentes para que apresentassem certos comportamentos desejáveis que tivesse por fim a melhoria do processo de ensino (ZEICHNER, 2008).

Assim, a ideia de formar um professor reflexivo não passa apenas pela discussão da melhoria do rendimento do aluno ou da melhor aplicação que esse profissional possa fazer de um modelo educacional que a ele é imposto e que ele deve seguir. A questão é mais ampla e deve envolver os professores em discussões que, segundo Zeichner (2008), passem por questões como:

- ✓ Participação ativa na formulação de propostas e finalidades do seu trabalho;
- ✓ Ocupação de papeis de liderança em reformas educacionais;
- ✓ Reconhecimento, por parte da universidade, do conhecimento produzido pelos professores ao exercerem suas funções cotidianas (os saberes da experiência);

- ✓ Reconhecimento, por parte do professor e através do uso da reflexão, da importância do seu saber próprio, permitindo perceber que os saberes produzidos pela experiência de outros são insuficientes para nortear sua prática.

De modo geral, podemos afirmar que:

> A noção de professor reflexivo baseia-se na consciência da capacidade de pensamento e reflexão que caracteriza o ser humano como criativo e não como um mero reprodutor de ideias e práticas que lhe são exteriores. É central, nesta conceptualização, a noção do profissional como uma pessoa que, nas situações profissionais, tantas vezes incertas e imprevistas, actua de forma inteligente e flexível, situada e reactiva. (ALARCÃO, 2005, p.40)

Dizer que todo professor é, por natureza, um profissional reflexivo pode gerar um reducionismo grave, como nos alerta Zeichner (2008). De acordo com esse autor, um professor não é reflexivo apenas por que planeja detalhadamente as aulas (pensando em situações que podem ocorrer durante as mesmas) ou por que usa uma série de metodologias diversificadas durante em semestre. Ser um professor reflexivo é muito mais que isso, pois implica também estar envolvido em questões mais complexas, discutindo não somente sobre a qualidade do seu ensino. Implica empenhar-se em debates sobre, por exemplo, as condições que possui para a execução de sua atividade profissional, sobre o meio social em que se encontra a escola onde atua, sobre os fins aos quais se destinam os programas educacionais vigentes, entre outros. (Zeichner, 2008)

A ação de refletir não significa a garantia da melhoria do profissional, quer seja em termos de mudanças de concepções pessoais sobre a educação, quer seja sobre a sua atuação no processo de ensino e aprendizagem. O tipo de reflexão a que se propõe o professor, associado à qualidade da reflexão feita são fatores determinantes para a mudança, ou não, do cenário.

> Assume-se frequentemente que os educadores, ao desenvolverem pesquisas sobre suas próprias práticas e, consequentemente, ao tornaram-se “mais reflexivos”, necessariamente transformar-se-ão em melhores profissionais e que o conhecimento produzido por meio de suas investigações será de grande importância, independente de sua natureza e qualidade. (ZEICHNER, 2005, p.64)

Segundo Oliveira e Serrazina (2002), o processo de reflexão, que deve considerar o contexto social e cultural, traz como implicação direta o desejo de modificação do contexto onde o professor atua. Dessa forma, um professor reflexivo, que percebe a importância de questões gerais da educação, como a sua finalidade e consequências, busca melhorar sua prática em sala de aula de maneira autônoma, vendo nisso uma forma de emancipação.

Quando escrevemos que o profissional deve perceber a si mesmo, nós nos apoiamos na ideia defendida por Schön (2000) de que todo profissional, na execução de suas funções, desenvolve um tipo de conhecimento único, as teorias-em-ação.

Mas, de que modo um professor pode perceber as suas teorias-em-ação? Certamente, o exercício da reflexão poderá auxiliá-lo nesse processo. Mas entendemos que apenas a reflexão não será capaz de permitir os avanços. O processo reflexivo que envolve os professores deve ser amplo, com momentos coletivos, em que a discussão com os pares poderá servir de elemento motivador para as transformações.

Entretanto, mesmo com a inserção de outros professores e com um espaço coletivo de discussão entre os pares, ainda sim, entendemos que algo mais deve ser envolvido nesse processo. È nessa lacuna a ser preenchida que percebemos a presença da metacognição.

A metacognição pode ser uma das peças importantes nesse processo. Espera-se que a reflexão promova oportunidades de crescimento profissional e, por que não, pessoal para os professores. Nesse processo de conhecimento, muitas vezes o profissional terá que tomar decisões, escolher caminhos, pensar sobre si mesmo e sobre as implicações do seu trabalho.

A metacognição, por seu caráter autorregulativo, pode auxiliar nas escolhas que o professor fará. Essa melhor escolha poderá ser feita levando em consideração aquilo que o professor conhece sobre si mesmo em termos de cognição, adaptando aquilo que pensa em fazer ao seu estilo pessoal.

> A tomada de decisões conscientes é um dos atributos que, de um modo geral, se considera nos professores reflexivos. Esta tomada de decisões tem por base um corpo de conhecimentos sólidos, que os professores reinterpretam de acordo com cada experiência que vivem. (OLIVEIRA e SERRAZINA, 2002, p.13)

3.4 Um modelo para a formação de um professor de Matemática reflexivo

Quando se fala em professores reflexivos, espera-se, além de uma capacidade de autoanálise, uma postura aberta ao diálogo e disposição de mudança de postura quando a situação assim o exigir. No caso da Matemática, o professor...

> [...] tem de analisar a situação concreta, perceber os alunos com quem está a trabalhar, o que se espera que eles aprendam em Matemática, e o seu papel na formação pessoal e social do aluno. (OLIVEIRA e SERRAZINA, 2002, p.9)

Artzt e Armour-Thomas (1999, 2002) apresentam um modelo para analisar a prática de ensino de professores, trabalhando com a proposta de formação do professor reflexivo.

A primeira pergunta que o trabalho das autoras procura responder é o que significa ser um competente professor de Matemática. Para começar a desenhar uma possível resposta, elas destacam as diferentes funções que um professor desempenha no exercício da profissão: supervisão, orientação e auxílio no processo que cada aluno vive para construir novos conhecimentos. O papel de auxiliar no processo de construção de conhecimentos é valorizado pelas pesquisadoras, que destacam a importância da interação social no processo de aprendizagem.

> Alinhados com esta pesquisa, os *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991) e os mais recentes *Principles and Standards for School Mathematics* (2000) sugerem que os professores devem criar oportunidades que estimulem, orientem e incentivem os alunos a fazerem conexões entre os conceitos de Matemática, a construírem ideias Matemáticas, resolverem problemas através do raciocínio, e assumirem a responsabilidade por sua própria aprendizagem. (ARTZT e ARMOUR-THOMAS, 2002, p.4, tradução nossa)[14]

[14] In line with this research, the Professional Standards for Teaching Mathematics (1991) and the most recent Principles and Standards for School Mathematics (2000) suggest that teachers must create opportunities that stimulate, guide, and encourage students to make connections among mathematics concepts, construct mathematical ideas, solve problems through reasoning, and take responsibility for their own learning.

A afirmativa que um professor competente deve estar inserido no processo de aprendizagem de seus alunos é verdadeira. Entretanto, a competência de um professor não pode ser medida apenas pelo seu engajamento ou não nesse processo. A questão do ensino não pode ser resumida apenas pelas ações desenvolvidas na rotina da sala de aula. É necessário analisar também outros elementos, entre eles, as cognições dos professores. (ARTZT e ARMOUR-THOMAS, 2002)

> Nossa conceituação sobre essa questão é que o conhecimento dos professores, suas crenças e metas influenciam diretamente a tomada de decisões através de três fases do ensino: *pré-ativa* (planejamento), *interativa* (monitoramento e regulação); *pós-ativa* (avaliação e revisão). Esses componentes formam uma rede de cognições abrangentes que dirigem e controlam o comportamento de instrução dos professores em sala de aula. (ARTZT e ARMOUR-THOMAS, 2002, p.5, tradução nossa)[15]

As crenças dos professores sobre o ensino de Matemática, que muitas vezes encontram-se profundamente arraigadas, são vistas pelas autoras com grande preocupação. Afirmações que creditam ao professor o papel único de transmissor do conhecimento matemático ou que os alunos aprendem melhor por se lembrarem da maneira como aquilo foi dito pelo professor, na visão das pesquisadoras, devem ser trabalhadas e, se possível, mudadas.

Porém, essa tentativa de mudança de concepção sobre a aprendizagem não é um processo simples. Ainda que tenham acesso às mesmas informações, diferentes professores apresentam diferentes reações. Assim, a questão da mudança deve ser vista ainda como uma possibilidade. Mas, mesmo com as dificuldades que os programas de formação de professores enfrentam, a proposta atual desses programas é trabalhar com os professores visando ao desenvolvimento de uma prática de ensino centrada na compreensão do aluno (ARTZT e ARMOUR-THOMAS, 2002).

---

[15] Our conceptualization on this issue is that teacher knowledge, beliefs, and goals directly influence decision making across three stages of teaching: *preactive* (planning), *Interactive* (monitoring and regulating), and *postactive* (evaluating and revising). These components forrn a network of overarching cognition that directs and controls the instructional behaviors of teachers in the classroom.

Para que os professores mudem suas posturas e passem para uma prática de ensino centrada no aluno, Artzt e Armour-Thomas (2002) propõem, em seu programa de Educação Matemática, que os professores utilizem os processos de reflexão e autoavaliação. A experiência que os professores podem acumular como agentes de sua própria aprendizagem durante esses programas de formação, na visão das responsáveis pelo programa, pode fazer com que esses professores desenvolvam atividades de aprendizagem centradas no aluno.[16]

A visão de reflexão defendida pelas autoras diz que os professores devem analisar suas ações em três momentos distintos: antes, durante e depois da execução de uma lição. Essa estrutura assemelha-se bastante, segundo as próprias autoras, às ideias apontadas por Polya (1995) em sua técnica de resolução de problemas. A proposta de rever o problema, citada por Polya (1995), é apontada como uma boa oportunidade que um professor deve usar para observar, por exemplo, se os objetivos traçados foram alcançados ou planejar mudanças que podem ser implementadas a partir das experiências vividas durante a execução das atividades.

> Esta fase de reflexão costuma revelar dificuldades ou problemas, que se o professor não resolve, podem impedir o progresso em direção ao auto-aperfeiçoamento no ensino. (ARTZT e ARMOUR-THOMAS, 2002, p.7, tradução nossa)[17]

Já a autoavaliação, outra etapa enfatizada no programa de Artz e Armour-Thomas (2002), compreende as perguntas que os professores fazem a si mesmos. Tais perguntas, que revelam como esses professores refletem nos momentos posteriores às aulas, são a peça-chave do processo autoavaliativo. Esse processo pode contribuir para que o professor venha a adotar um ensino centrado no aluno, uma vez que avalia suas lições e a aula a partir do aluno e seu envolvimento e entendimento.

O programa de Educação Matemática proposto por Artz e Armour-Thomas (2002) busca integrar a prática de ensino de um professor e as suas cognições. Para

---

[16] Ainda que não usem a expressão metacognição, nosso entendimento é que Artz e Armour-Thomas (2002) utilizam, em seu programa de educação Matemática, situações que favorecem o desenvolvimento metacognitivo dos professores.
[17] This reflective phase is likely to uncover difficulties or problems that, if the teacher does not address, rnay impede progress toward self-improvement in teaching.

melhor analisar cada um desses aspectos, as pesquisadoras desenvolveram dois referenciais: o primeiro para análise das Dimensões e Fases da Lição[18] e o segundo para análise das Cognições do Professor[19].

Considerando que o modelo de Artzt e Armour-Thomas (2002) foi preponderante na elaboração e análise dos resultados da pesquisa de desenvolvimento de um curso para professores em formação que conduzimos, optamos por detalhar o modelo proposto pelas autoras.

As Fases da Lição descrevem o desenrolar temporal de uma lição (Início, desenvolvimento e fim) e suas implicações para o aluno. A maneira como um professor desenvolve cada uma dessas fases influencia a aprendizagem dos seus alunos. Nessa linha, o professor deve ter tempo para:

- ✓ Perceber se o aluno encontra-se apto para a aprendizagem do novo conceito;
- ✓ Inserir o novo conceito, permitindo que o aluno estabeleça relações entre o novo conceito e outros já conhecidos.
- ✓ Permitir que o aluno incorpore e contextualize o novo conceito.

Uma observação ressaltada pelas autoras é que, apesar da importância dessas fases para um ensino eficaz, elas não precisam ocorrer todas durante uma aula. Ou seja: essa é uma análise que não deve usar a ideia de uma aula igual a uma lição; o importante é que o professor sempre sinalize para os alunos o momento da lição que estão vivendo, auxiliado sua compreensão.

As dimensões propostas para as lições são: as tarefas, o ambiente de aprendizagem e o discurso.

---

[18] Phase-Dimension Framework (PDF).
[19] Teacher Cognition Framework (TCF).

Dimensões	Indicadores das Dimensões
Tarefas	Modos de representação Estratégias motivacionais Sequenciamento e Níveis de dificuldade
Ambiente de Aprendizagem	Clima intelectual e social Modos de instrução e ritmo Rotinas administrativas
Discurso	Interação entre alunos e professor Interação entre alunos Questionamentos

Quadro 1: Dimensões e Indicadores das Dimensões da Lição
Fonte: extraído de Artz e Armour-Thomas, 2002, p. 13[20]

As tarefas são os instrumentos que permitem aos alunos a integração dos novos conceitos à sua estrutura cognitiva. Para isso, devem ser trabalhadas em torno de três segmentos:

- ✓ Modos de representação: São as representações usadas para a comunicação das ideias matemáticas. O tipo de representação adotada pode interferir diretamente na maneira como a informação será armazenada na memória;
- ✓ Estratégias motivacionais: As tarefas devem possuir atributos capazes de atrair e permitir o engajamento e a permanência do aluno em situações de aprendizagem. Também devem ter como objetivos a promoção da aprendizagem com entendimento, despertar a curiosidade e o interesse dos alunos de forma a estimulá-los a levantarem conjecturas próprias a respeito da atividade na qual participam e, por fim, apresentar um nível de desafio suficiente para manter os alunos engajados até o término do trabalho;

[20] O quadro sintetiza informações disponíveis na Tabela 1, do livro Becoming a Reflective Mathematics Teacher , de Artz e Armour-Thomas, 2002, p. 13

- ✓ Sequenciamento e níveis de dificuldade: O nível de dificuldade envolve a questão da complexidade da tarefa e o sequenciamento diz respeito à ‘ordem’ em que as tarefas serão propostas para que a aprendizagem seja eficiente. Ao permitir que os alunos participem ativamente da tarefa, usando os conhecimentos que já possuem para o entendimento da mesma e também que construam suas próprias conjecturas e ‘teorias’, a complexidade e o sequenciamento adequados irão oferecer reais possibilidades de participação efetiva dos alunos em seu próprio processo de aprendizagem.

O ambiente de aprendizagem refere-se às condições para o desenvolvimento da aprendizagem na sala de aula. Essas condições podem interferir diretamente no entendimento da tarefa. O relacionamento professor-aluno e os tempos reservados para cada atividade relacionada à aprendizagem são exemplos de itens que devem ser analisados. Mais especificamente:

- ✓ Clima Social e Intelectual: Indicador dos relacionamentos que acontecem na sala de aula entre as pessoas que nela atuam. Um bom clima social é um fator que influencia positivamente o engajamento e a consequente aprendizagem dos alunos. Uma relação social pautada na paciência e no respeito pode auxiliar a participação dos alunos, que não temerão fracassos ou punições mesmo nas tarefas mais complexas;
- ✓ Modos de Instrução e Ritmo: Relaciona o tipo de instrumento ou metodologia utilizado pelo professor para auxiliar seus alunos a atingirem os objetivos propostos para a aula. As atividades para a aprendizagem com compreensão devem estimular os alunos a trabalharem de maneira própria, permitindo que encontrem caminhos através das suas próprias conjecturas. Esse trabalho pode oferecer uma boa oportunidade de os alunos aumentarem a sua compreensão sobre a Matemática. O trabalho em duplas e em pequenos grupos, o espaço para formular e testar as conjecturas pessoais e o tempo para exposição e debate sobre as ideias surgidas podem ser boas alternativas;
- ✓ Rotinas Administrativas: são rotinas que cada profissional adota para fazer a gestão da sala de aula. É fato que professores

> diferentes valorizam diferentes aspectos. Assim, enquanto alguns professores se preocupam mais com a organização da sala em termos físicos (limpeza, ordem, etc.), outros procuram verificar a tarefa de casa, enquanto um terceiro grupo focaliza a sua atenção na gerência dos meios que utilizarão para o desenvolvimento da aula (quem ficará responsável, por exemplo, pelo equipamento).

O discurso revela o tipo de interação verbal que existe entre aqueles que constituem o coletivo da sala de aula. O discurso pode auxiliar a aprendizagem com compreensão. As perguntas que são feitas, as respostas que são dadas e o tempo para a formulação dessas respostas podem mostrar o tipo de interação que existe na sala de aula. As dimensões que devem ser analisadas são:

- ✓ Interações entre aluno e professor: Com base na perspectiva construtivista da Educação Matemática, as pesquisadoras sugerem que o professor deve estar bem próximo ao aluno no seu momento de aprendizagem. Esse 'estar mais próximo' significa incentivá-lo e auxiliá-lo em suas deficiências, interagindo em uma situação de igualdade na busca por uma melhor compreensão da Matemática. Uma boa orientação envolve perguntas e questionamentos que direcionem os alunos nos seus movimentos de conhecimento e descobertas;
- ✓ Interações entre alunos: Para o aluno que busca aprender Matemática com compreensão, esse é um tipo de interação bastante interessante. É nesse momento que o aluno pode reforçar suas ideias (ao expô-las para os colegas, muitas vezes terá que apresentar e defender os argumentos que embasam a sua maneira de pensar), terá a possibilidade de ouvir (pois os outros também irão expor seus pensamentos) e também de fazer bons questionamentos a respeito das ideias de outros. Essa série de ações pode favorecer a capacidade de cada aluno de fazer conexões entre diferentes ideias Matemáticas, integrando conceitos e ampliando sua estrutura cognitiva;
- ✓ Indagações (Questionamentos): Um professor, ao questionar seus alunos de uma forma correta e com boas perguntas, pode auxiliá-los na aquisição e consolidação dos conhecimentos matemáticos. Ao

ser questionado, cada aluno deve formular suas repostas buscando justificativas para a sua maneira de pensar. Assim, o próprio aluno começa a fazer, de seu modo pessoal e singular, as conexões entre ideias Matemáticas diferentes. Um questionamento bem feito, com um tempo adequado para que o aluno formule sua resposta, pode auxiliar o professor na percepção dos caminhos seguidos pelo aluno. Uma vez percebidos esses caminhos, o professor pode validá-los - enfatizando, caso exista, o valor matemático da resposta dada – ou, caso entenda que é necessário, interagir com o aluno, levando-o a perceber os erros cometidos e quais correções podem ser adotadas.

O trabalho com as Dimensões das Lições lida diretamente com as cognições (saberes) dos professores. Usando a mesma concepção de um ensino centrado no aluno e na compreensão do aluno, que foi utilizado para a montagem do referencial de Dimensões e Fases da Lição, as autoras também desenvolveram um referencial das Cognições dos Professores. Esse quadro permite analisar o processo cognitivo dos professores e oferece também elementos capazes de auxiliar o professor em um processo de reflexão e aperfeiçoamento.

Cognições	**Indicadores das Cognições**
Cognições Abrangentes	Objetivos e crenças sobre conhecimentos, alunos, conteúdo e pedagogia
Processos Cognitivos	Pré-ativos: Planejamento Interativos: Monitoramento e Regulação Pós-Ativo: Avaliando e Revisando

Quadro 2: Componentes e indicadores das cognições do professor
Fonte: extraído de Artz e Armour-Thomas, 2002, p. 20[21]

[21]O quadro sintetiza informações disponíveis na Tabela 2, do livro Becoming a Reflective Mathematics Teacher , de Artz e Armour-Thomas, 2002, p. 20

Um primeiro aspecto diz respeito ao que as autoras Artz e Armour-Thomas chamaram de Cognições Abrangentes: uma rede dinâmica de saberes que norteiam as ações e os pensamentos dos professores no que se refere ao ensino. São essas cognições que influenciam a tomada de decisões dos professores nos momentos de planejamento (antes da aula), aplicação (durante a aula) e avaliação (depois da aula) de uma lição.

As Cognições Abrangentes compreendem:

- ✓ Metas: São os resultados esperados a partir do trabalho intelectual dos alunos em sala de aula. Essas metas muitas vezes são manifestadas pelas ações dos professores. Por exemplo, um professor que deseja que os alunos se apropriem da linguagem Matemática formal normalmente utiliza exercícios onde esse tipo de linguagem é utilizado. Já um professor que espera que seus alunos apenas memorizem a definição de logaritmo, usará uma metodologia que privilegiará bastante o uso de exercícios com essa característica;
- ✓ Conhecimentos: Refere-se a tudo que o professor internalizou, ao longo dos seus anos de experiência, e que se refere a alunos, conteúdos e pedagogia, semelhantes aos saberes da pedagogia e da experiência referidos anteriormente. Assim como as metas, os conhecimentos dos professores manifestam-se no cotidiano da sala de aula. Exemplificando: suponha que um professor tenha que ministrar, ao longo de um semestre, aulas sobre números complexos e trigonometria. A prática usual determinaria que se começasse por Trigonometria para, somente depois de ter concluído por completo o seu estudo, começar o trabalho referente aos Números Complexos. Muitas vezes, nessa prática usual, os dois assuntos são tratados como blocos independentes, sem que seja feita qualquer conexão entre eles. De modo alternativo, pensando em um ensino voltado para a compreensão de seus alunos, usando seus conhecimentos sobre o conteúdo e sabendo que possui em mãos uma turma que lhe permite um trabalho diferente do que usualmente seria feito, esse professor pode conduzir as aulas de modo integrado, de forma que um assunto surja como necessário para o desenvolvimento do outro. Essa diferença de abordagem pode demonstrar que tal professor

possui um nível de cognição diferente no que diz respeito aos conteúdos citados e, principalmente, no tocante às características de seus alunos;

- ✓ Crenças: São formadas pelos pressupostos pessoais que os professores possuem sobre os alunos e o processo de ensino e aprendizagem. Caso um professor possua uma crença de que uma pessoa aprende Matemática somente pela resolução de exercícios, ele fará com que seus alunos façam uma grande quantidade de exercícios, de diferentes tipos e níveis de dificuldades. Por outro lado, se ele entende que é a interação que fará com que o aluno internalize o seu saber matemático, privilegiará, por exemplo, trabalhos em grupos, acreditando que nesse trabalho a interação será enfatizada. Muitos profissionais, entretanto, quando questionados sobre suas crenças, fazem afirmações que não estão de acordo com suas práticas. Assim, a indicação de Artz e Armour-Thomas (2002) opção das autoras é que somente sejam feitas afirmações sobre as crenças de um professor após a análise da sua prática.

Os processos cognitivos dos professores são descritos e analisados em três momentos (fases) diferentes da aula:

- ✓ Planejamento (Fase pré-ativa): Apresenta quais são as intenções do professor para aquela aula. O planejamento inclui quais são os pensamentos do professor sobre as tarefas que pretende que sejam feitas naquela lição, o tipo de ambiente em que espera que ocorra a lição e o discurso que adotará. A qualidade do planejamento possui ligação direta com a qualidade da aula que será ministrada;
- ✓ Monitoramento e Regulação (Fase Interativa): Esse é um momento em que o conhecimento metacognitivo do professor pode auxiliar no seu desempenho. Com base nas informações que recebe durante o desenvolvimento da lição, o professor pode mudar a atividade para adequá-la aos objetivos pretendidos. Por outro lado, também pode rever seus objetivos, caso perceba que as atividades preparadas caminham em uma direção diferente daquela pretendida. È uma situação bastante comum um professor mudar seus objetivos ou o próprio planejamento da aula. Por vezes, no momento do planejamento, o professor tem a intenção de caminhar com a aula até determinado assunto, pois acredita que a turma tem condições para isso. Porém, com o desenrolar das atividades,

percebe que não terá condições de cumprir o planejamento. De maneira rápida, numa mistura que envolve os saberes da prática, o conhecer-na-ação e os conhecimentos metacognitivos, o professor pode tomar a decisão de não fazer todos os exercícios que preparou para que possa levar a teoria mais adiante ou pode optar por resolver todos os exercícios que pretendia, não avançando tanto na teoria. Qual a melhor opção? Não existe uma resposta pronta: cada situação implica um cenário e atores próprios. Somente o professor, naquele momento (único), poderá tomar essa decisão usando aquilo que já citamos anteriormente;

- ✓ Avaliação e Revisão (Fase Pós-Ativa): Trata-se do repensar se os objetivos traçados antes do início da lição foram alcançados. Caso tenham sido, foram alcançados de modo satisfatório? Caso não tenham sido alcançados, quais os motivos que não permitiram isso? Esse momento reflexivo é apontado como de fundamental importância para a evolução do professor como profissional engajado no processo de ensino-aprendizagem, pois lhe permitirá rever e corrigir atitudes e planejamentos que ele julgar inadequados. Também oferecerá elementos importantes que serão agregados ao seu conhecer-na-ação e ao seu conhecimento metacognitivo.

A figura[22] que a seguir condensa as principais ideias encontradas no programa de formação de professores reflexivos proposto por Artz e Armour-Thomas (2002).

[22] Adaptação, com tradução nossa, de figura em anexo.

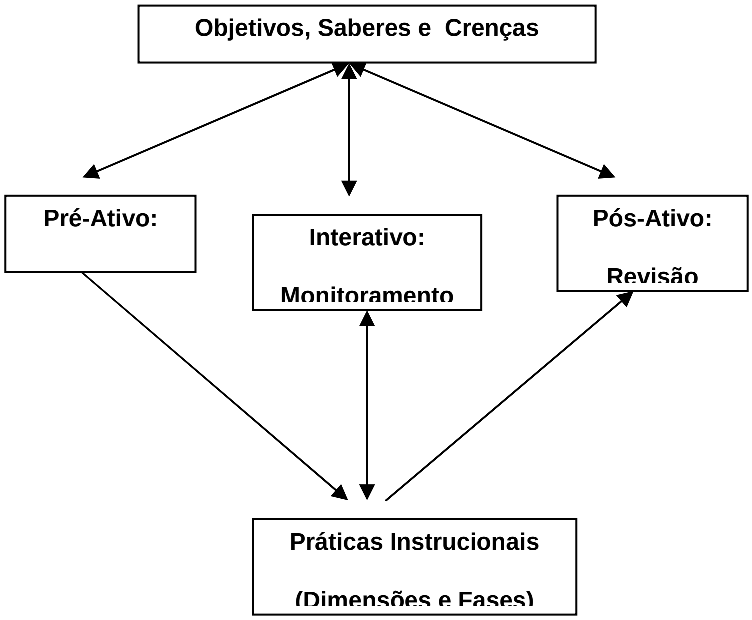


Figura 1: Componentes do modelo para ensino[23].
Fonte: Artz e Armour-Thomas, 2002, p. 27

No trabalho que conduzimos o foco foi a formação metacognitiva de alunos de um curso de licenciatura. Para possibilitar aos alunos o desenvolvimento de sua prática instrucional, desenhamos um curso, tendo em conta os objetivos dos alunos, seus saberes e crenças, e considerando as três fases de uma aula: planejar, monitorar e avaliar.

[23] Adaptado de "A Structure to Enable Preservice Techers of Mathematics to Reflect on Their Teaching", de A F. Artz, 1999, Journal of Mathematics Teacher Education, v.2, n.2, p.145. Adaptado também de "Mathematics Teaching as Problem Solving" de A. F. Artz E. Armour-Thomas, 1998, Instructional Science, v.2,n.1-2, p.8.

3.5 Metacognição e formação de professores

Somos favoráveis a ideia de que:

> Os professores em formação devem ter oportunidades de elaborar e desenvolver projetos pessoais de estudo e trabalho e empenhar-se em compartilhar a prática e em produzir coletivamente, utilizando fontes e veículos de informação, adotando uma atitude de disponibilidade e flexibilidade para mudança. (SBEM, 2003, p. 11)

Nesse sentido, destacamos os trabalhos de Santos-Wagner (1995) e Ferreira (2004).

Santos-Wagner (1994, 1995) analisou como futuros professores se percebiam, quer seja como alunos quer seja como futuros professores de Matemática, no desenrolar de uma disciplina denominada T104: Matemática para Professores Primários através da Resolução de Problemas. A fundamentação teórica da pesquisa tinha como base o construtivismo, a metacognição, a reflexão, a formação de professores, o conhecimento e as concepções dos professores e a resolução de problemas.

Segundo a autora, a disciplina foi desenhada combinando o uso de resolução de problemas, trabalhos em grupos – que permitiram a interação e troca de experiências, reflexão e métodos alternativos para avaliação, trabalhando um conteúdo matemático especifico: frações. A intenção era oferecer momentos para que os alunos – futuros professores - pensassem sobre as suas teorias pessoais sobre a Matemática e seu sistema de ensino, além de aprofundarem seus conhecimentos a respeito daquilo que ensinariam no futuro.

Especificamente:

> A disciplina inovadora T104 é uma tentativa de alterar a situação da formação Matemática do futuro professor através da proposta de uma pedagogia Matemática alternativa na qual os alunos são ativamente responsáveis por sua aprendizagem. (SANTOS-WAGNER, 1995, p.4)

Defendendo a ideia de que um professor de Matemática deve passar, na sua formação inicial, por experiências que permitam a ele pensar sobre si mesmo em termos de concepções, atitudes e motivações, a proposta encaminhada visa ao desenvolvimento daquilo que chama de ‘consciência metacognitiva’, que inclui, nas palavras de Santos-Wagner (1995):

> a. Pensar sobre seu próprio processo durante a resolução de problemas;
> b. Pensar sobre suas próprias fortalezas e limitações no que diz respeito a certos tópicos matemáticos e procedimentos;
> c. Pensar sobre seu próprio conhecimento matemático;
> d. Pensar sobre suas crenças e concepções enquanto aluno de Matemática e futuro professor de Matemática;
> e. Pensar sobre suas próprias atitudes sobre a aprendizagem Matemática, o ensino de Matemática e a avaliação tanto como aluno como futuro professor;
> f. Pensar sobre a influência que suas crenças, concepções e atitudes sobre a Matemática e sua pedagogia podem ter nos seus futuros alunos;
> g. Pensar sobre sua própria motivação para aprender Matemática e para superar dificuldades de aprendizagem em Matemática em comparação com o seu futuro trabalho como professor para motivar os alunos a aprender e a superar dificuldades de aprendizagem; e
> h. Pensar sobre o monitoramento e controle de seu próprio esforço para resolver problemas matemáticos. (SANTOS-WAGNER, 1995, p.2-3)

A principal intenção da autora era que alunos desenvolvessem seus conhecimentos metacognitivos a respeito de si mesmos. Para isso, usou a reflexão sobre a aprendizagem e ensino, por entender que esses processos estão no centro do processo que envolve a metacognição. O meio utilizado para esse desenvolvimento foi o uso da resolução de problemas em grupos, com o objetivo principal de estimular a comunicação Matemática e a reflexão.

Suas principais conclusões foram:

- ✓ Houve benefícios para os alunos que se engajaram nas inovações instrucionais da disciplina, tanto em termos matemáticos quanto em termos metacognitivos;
- ✓ Alunos que desejavam apenas aprender Matemática de maneira instrumental sentiram-se frustrados perante às inovações da disciplina;
- ✓ A reflexão e os métodos alternativos de avaliação foram pontos positivos apontados pelos alunos que se engajaram no processo;
- ✓ É necessário mais de um semestre de inovações pedagógicas para o desenvolvimento da consciência metacognitiva nos alunos.

O estudo desenvolvido por Ferreira (2003, 2006) difere do trabalho de Santos-Wagner (2005), que focalizou a formação inicial do professor de Matemática, uma vez que envolve a questão do desenvolvimento profissional de professores, num processo de formação continuada, engajados em um grupo colaborativo.

Outro ponto de diferenciação entre os trabalhos se encontra no aspecto metacognitivo desenvolvido: enquanto Santos-Wagner (1994, 1995) desenvolve a questão da consciência sobre os processos cognitivos, Ferreira (2004) busca observar a autorregulação dos participantes de sua pesquisa.

> O desenvolvimento dos processos metacognitivos permite que o professor repense seus saberes e sua prática de modo profundo e, a partir daí, decida como alcançar suas metas profissionais. Embora envolva inúmeros e complexos elementos - crenças, concepções, valores, metas, atitudes, habilidades cognitivas, dentre outros -, não concebemos a possibilidade de se construir uma aprendizagem significativa (ou uma mudança significativa) sem que o próprio professor tenha condições de decidi-la e monitorá-la. (FERREIRA, 2004, p.2)

A autora crê que o desenvolvimento profissional seja um processo complexo, que envolve múltiplos fatores - desde sócioculturais até psicológicos, passando por questões cognitivas e afetivas e vê no conhecimento metacognitivo um fator capaz de estimular tal desenvolvimento. Para potencializar o conhecimento metacognitivo, opta pelo trabalho dentro de um grupo colaborativo, esperando que o convívio social facilite o desenvolvimento da metacognição. A investigação, que aconteceu durante o ano de 2001, contou com a participação voluntária de quatro professoras[24] de Matemática do ensino fundamental da rede pública de ensino da região de Campinas, além da pesquisadora e de sua orientadora[25].

As principais conclusões de Ferreira (2004) foram:

- ✓ Individualmente, houve um crescimento por parte das professoras, quer seja do ponto de vista da metacognição, quer seja do ponto de vista do conhecimento matemático;
- ✓ De fato, por mais que se oriente, contribua e acompanhe um professor, somente ele pode decidir aquilo que é válido para si;
- ✓ O desenvolvimento dos processos metacognitivos de um professor é determinante no seu desenvolvimento profissional;

[24] O tempo de experiência do grupo variava entre 2 e 25 anos.
[25] A pesquisa fazia parte da Tese de Doutorado da autora.

- ✓ O desenvolvimento dos processos metacognitivos é potencializado pelo contato com o outro.

Vale ressaltar que apesar das diferenças de condução do trabalho que cada uma das autoras faz, ambas deixam clara a importância de se trabalhar questões como a reflexão e a metacognição, quer seja em grupos de formação inicial, caso de Santos-Wagner (1994, 1995), quer seja em grupos com professores já atuantes, caso de Ferreira (2004).

É importante destacar o fato de que ao se propor a formar professores reflexivos o próprio pesquisador se desenvolve do ponto de vista metacognitivo. Assim, Santos-Wagner (1995) e Ferreira (2004) afirmam que, durante o processo desenvolvido, percebem o próprio desenvolvimento metacognitivo:

> Durante a realização da pesquisa eu desenvolvi minha própria consciência metacognitiva como aluna de Matemática, professora e pesquisadora. O processo de desenvolver a consciência metacognitiva que eu proponho para futuros professores começa com a minha própria prática de pesquisadora (SANTOS-WAGNER, 1995, p.1)

> Em um processo genuinamente metacognitivo, utilizamos nossos relatos, nossas memórias e nossos conhecimentos, em nossos momentos de troca e de estudo, para refletir de modo crítico e intencional sobre nós mesmos enquanto professoras. (FERREIRA, 2004, p.6)

O trabalho que conduzimos e que aqui relatado objetivou o desenvolvimento metacognitivo dos alunos de um curso de licenciatura. A proposta de disciplina elaborada e conduzida apresenta semelhanças com o trabalho de Santos-Wagner (1995) e também com o trabalho de Ferreira (2003) na medida em que apresenta uma proposta de engajamentos dos estudantes, num trabalho em grupo, cooperando uns com os outros na construção e reconstrução de algumas ideias Matemáticas. Esperava-se, também, que o processo possibilitasse o desenvolvimento metacognitivo do pesquisador e professor envolvido no processo. Esse fato será objeto de uma reflexão posterior, feita ao final dessa dissertação.

4 O DESENHO DA PESQUISA

Dizer que um professor de Matemática é um matemático é comum em nossa sociedade (Fiorentini e Lorenzato, 2006). Entretanto, existe entre eles uma diferença, que normalmente não é considerada. Para o matemático, a Matemática é vista como um fim em si mesma e o foco é o desenvolvimento da mesma; o professor de Matemática busca trabalhar questões voltadas para o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina. Hoje, torna-se importante citar também um terceiro elemento, o Educador Matemático, que concebe a Matemática:

> como um instrumento importante à formação intelectual e social de crianças, jovens e adultos e também do professor de Matemática do ensino fundamental e médio, e por isso, tenta promover uma educação pela Matemática. Ou seja, o educador Matemática, na relação entre educação e Matemática, tende a colocar a Matemática a serviço da educação, priorizando, portanto, esta última, mas sem estabelecer uma dicotomia entre elas. (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 3)

A Matemática é uma ciência milenar e sua pesquisa está baseada no processo hipotético-dedutivo, que busca desenvolver ferramentas para a aplicação nos campos da Matemática pura e aplicada. Já a Educação Matemática, como campo científico, tem uma historia mais recente e busca, com o auxilio das ferramentas de análise e interpretação das ciências sociais, desenvolver estudos que auxiliem numa formação mais integral de alunos e professores.

O objeto de estudo da Educação Matemática ainda não é bem definido, mas envolve "as múltiplas relações e determinações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático em um contexto sociocultural específico." (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 9).

A pesquisa desenvolvida foi motivada por questões advindas de nossa prática e teve como objetivo investigar as possíveis contribuições da condução de uma disciplina, planejada e conduzida a partir de um enfoque metacognitivo, para a formação do professor de Matemática.

A seguinte pergunta norteou a pesquisa: Quais as potencialidades de estruturação e condução de uma disciplina, no curso de licenciatura em Matemática, de forma a desenvolver processos metacognitivos de autorregulação da aprendizagem Matemática por parte dos futuros professores?

A busca de respostas a esse questionamento levou-nos a repensar e a redesenhar a disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática (conhecida como também como Optativa II). Essa disciplina, que integra a grade curricular de um curso de licenciatura em Matemática de uma intuição particular de ensino superior do Estado do Espírito Santo, foi o elemento que nos possibilitou o desenvolvimento de um estudo empírico que contou com a participação de dezoito (18) estudantes.

É sabido que a pesquisa em Educação Matemática pode assumir um cunho mais quantitativo ou mais qualitativo podendo integrar aspectos quantitativos e qualitativos na análise de fenômenos educacionais.

Bogdan e Biklen (1994), ao discorrerem sobre a pesquisa qualitativa, apontam cinco características básicas que consideramos presentes em nossa pesquisa, como apontamos a seguir:

- ✓ Os dados utilizados na pesquisa foram obtidos durante o primeiro semestre de 2008, em uma turma regular de um curso de licenciatura em Matemática, numa disciplina prevista originalmente na grade do curso. Com isso, queremos dizer que o grupo não foi formado para o fim específico da investigação (o que talvez pudesse interferir em alguns resultados). A coleta de dados aconteceu no cotidiano da sala de aula. A investigação conduzida teve como um dos objetivos favorecer a reflexão dos alunos sobre os próprios processos de aprender e ensinar determinados conteúdos matemáticos, incentivando que eles vivenciassem experiências metacognitivas e desenvolvessem a metacognição. Para isso, a análise dos dados levou em conta percepções e observações decorrentes do convívio em sala, das atividades e dos registros feitos pelos alunos e de gravações de algumas aulas. Assim, consideramos que a pesquisa desenvolvida se alinha com a afirmação que a “fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.47);
- ✓ A investigação possui um forte cunho descritivo, algo conseguido a partir dos protocolos de observações que fizemos a cada aula, dos registros das atividades desenvolvidas e da autoavaliação realizada pelos participantes

ao final da disciplina. Dessa forma, “os dados recolhidos são em forma de palavras e não de números” (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.48).

A estrutura pensada para o desenvolvimento do curso, em que as ações dos alunos quase sempre vinham acompanhadas de um pedido de detalhamento (para que pudéssemos, a partir desses relatos, esboçar uma tentativa de entendimento do modo particular de pensamento envolvido e os motivos que poderiam explicar uma ou outra ação), reforçam a ideia de que, numa pesquisa qualitativa, nada é trivial e as informações prestadas e colhidas podem constituir uma pista capaz de auxiliar na compreensão do objeto em estudo (BOGDAN e BIKLEN, 1994);

- ✓ Nosso maior interesse, como pesquisadores e professores, encontrava-se na condução de uma disciplina de forma a permitir que cada aluno pudesse se conhecesse do ponto de vista metacognitivo. Ainda que a disciplina integrasse a grade curricular do curso, exigindo, por exemplo, que fossem feitos os registros de frequência e conteúdos ministrados, que fossem agendadas avaliações, que as aulas ocorressem nos horários previamente definidos e com uma duração definida, foi possível avaliar a disciplina com um novo olhar no processo. Esse processo foi o foco da pesquisa: acompanhando a classe como um todo, as duplas e cada aluno com vistas a seu empenho e envolvimento no processo de aprender e prepara-se para ensinar os conteúdos abordados, pudemos chegar às conclusões que apresentamos;
- ✓ Começamos a investigação sem uma hipótese prévia que deveria, ou não, ser comprovada com nosso estudo. Nosso principal intento sempre foi a condução de uma disciplina focada na metacognição, trabalhando principalmente com a autorregulação e a reflexão. À medida que a pesquisa ia se desenvolvendo, aumentávamos nossos conhecimentos sobre a teoria que embasava a proposta e sobre os participantes. Isso significa que nossas construções foram feitas à medida que os dados iam sendo recolhidos. Como sugerem Bogdan e Biklen (1994), nossos dados eram abundantes e as possibilidades amplas. Assim, à medida que as primeiras análises eram feitas, verificávamos a necessidade de (re) desenhos das atividades, com base nos dados. Dessa maneira, os dados

foram tratados de maneira indutiva, característica da pesquisa qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994);

- ✓ O significado, que possui grande importância na abordagem qualitativa, foi fundamental em nossa pesquisa. Foi a partir dos significados que os participantes da pesquisa deram a cada momento da investigação que construímos nossas análises. A efetiva participação e troca com os que participaram da pesquisa objetivaram interpretar e reinterpretar os dados, permitindo-nos evidenciar a riqueza do ambiente e do processo da pesquisa.

Em nossa pesquisa, inseridos no ambiente como pesquisador e professor da turma, procuramos desenvolver instrumentos de coleta de dados (registros escritos de atividades envolvendo conteúdos matemáticos por nós formulados e conduzidos, relatos autoavaliativos, materiais concretos desenvolvidos pelos estudantes, entre outros) que fornecessem elementos para uma contínua análise e reanálise. Não apenas como o professor que conduz uma aula, mas como o pesquisador, procuramos acrescentar nossas interpretações, definindo ou redefinindo cada etapa da pesquisa.

4.1 O Contexto da Pesquisa

A pesquisa foi realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior Anísio Teixeira - CESAT, localizado no município de Serra, no estado do Espírito Santo. Esse curso, criado e aprovado pelo MEC em 2001, surgiu como uma opção para a formação de professores de Matemática nesse estado, em especial na região da Grande Vitória. A primeira turma iniciou as aulas já no primeiro semestre de 2002.

Historicamente, os professores que atuavam nessa região eram formados no curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo – UFES – ou eram profissionais de outras áreas que, devido à falta de licenciados, atuavam como docentes, mesmo sem a habilitação legal. Com a intervenção do MEC, fiscalizando a formação dos professores que atuavam em sala de aula e com a expansão da oferta de vagas no ensino superior na rede particular, alguns cursos de licenciatura curta (ou complementação pedagógica) e plena foram criados na região.

O curso do CESAT é um exemplo disso. Sua concepção é bem distinta da maioria dos cursos de licenciatura que existiam. O curso foi desenhado sob a supervisão da professora Maria Auxiliadora Vilela Paiva, que já havia atuado no próprio curso da UFES e pesquisadora com larga experiência na área de formação de professores de Matemática - ela foi a responsável pela criação, no âmbito da UFES, do Leacim (Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática), local onde alunos da licenciatura e professores da rede pública de ensino podiam discutir questões envolvendo a Matemática e seu ensino. A ideia principal do curso é permitir uma formação integral do futuro professor de Matemática, que estará habilitado para o trabalho com turmas dos ensinos fundamental e médio. Para que essa formação integral aconteça, o currículo, além das disciplinas de embasamento matemático e das voltadas à prática pedagógica, oferece também disciplinas de História da Matemática, Filosofia, Sociologia e Psicologia.

O encaminhamento que é dado ao curso usa a concepção de que uma licenciatura deve, além da formação dos saberes do currículo e da disciplina, permitir que os alunos desenvolvam também os saberes pedagógico-disciplinares e os saberes da experiência.

Ressaltando o desenho do curso direcionado especificamente para a licenciatura e formação do professor de Matemática, o início do desenvolvimento profissional é contemplado em disciplinas como a Prática Pedagógica – iniciada ainda no primeiro semestre - e o Estágio Supervisionado, sempre dentro do espírito da investigação e da reflexão. Além disso, busca-se conscientizar os alunos sobre o constante aprendizado em que está inserido um professor.

Como o curso também busca uma instrumentalização para o ensino, foram incluídas discussões de pesquisas na área da Educação Matemática, elaboração de planos de ensino que possam ser aplicados às realidades encontradas e a troca de experiências com os professores que são os regentes dessas turmas. Essas ações visam permitir uma formação flexível, de forma que o futuro professor tenha condições de se adaptar às mais diversas situações de ensino que encontrará no desenvolvimento de sua vida profissional. As atividades desenvolvidas durante a

Prática Pedagógica, principalmente aquelas ligadas à atuação na sala de aula, permitem o desenvolvimento da pesquisa, do ensino e da extensão.

A existência de Projetos Integradores, multidisciplinares por origem e que acontecem a cada semestre, também possibilitam e favorecem a formação integral do estudante. O Estágio Supervisionado proporciona ao aluno-estagiário o conhecimento da complexidade da escola (quer seja pública ou privada) e da sala de aula de um modo geral, além de vivenciar as tensões existentes no espaço escolar. Todo esse esforço tenta originar um profissional que seja capaz de atuar de maneira crítica, sendo um agente de mudanças no seu ambiente de trabalho.

A proposta de construção do conhecimento matemático dos estudantes ocorre dentro de um processo de continuidade, onde os saberes anteriores devem ser levados em consideração. Espera-se que, com o uso de múltiplas situações de ensino-aprendizagem, cada aluno possa construir, ou ampliar, com significados próprios e pessoais, o seu conhecimento. Nesse processo de construção e ampliação de saberes, pretende-se privilegiar os processos de resolução de problemas, as atividades investigativas e a modelagem Matemática.

Concluindo, ressalta-se que:

> o projeto do curso enfatiza a importância das interações sociais e do contexto político e social para a formação do professor, prevendo espaços curriculares em que esse profissional em formação possa refletir críticamente sobre os diversos aspectos da prática pedagógica, dialogando com diversos interlocutores como as instituições escolares; seus colegas, muitos já professores; os docentes da faculdade; a comunidade em que está inserido; palestrantes convidados, etc. A identidade do curso tem como características a ênfase na teoria e na prática pedagógica, o vínculo com a prática profissional, a abertura às novas tecnologias, prioridade à lógica investigativa como processo de conhecimento, os projetos integradores (interdisciplinares) e o cuidado no que se refere às dimensões pessoal e profissional. (Paiva, p. 90, 2006)

4.2 O sujeito coletivo da pesquisa

Participaram do trabalho dezoito (18) alunos, sendo que dezesseis (16) estavam concluindo a licenciatura em Matemática; outros dois (2) eram alunos do quinto período (do mesmo curso de licenciatura) que por terem sido dispensados de disciplinas do referido período[26], aproveitaram para cursar antecipadamente a disciplina - Tópicos Especiais em Educação Matemática (Optativa II) - que faz parte apenas do sétimo e último período da grade do curso de licenciatura em questão. A pesquisa e a condução da disciplina envolveram, além dos estudantes, o professor da disciplina – no caso, o mestrando – e sua orientadora.

A turma de estudantes era bastante heterogênea. Sobre a idade dos participantes, a diferença entre o mais velho e o mais novo era de 35 anos. Apesar disso, podemos afirmar que a troca de experiências era constante.

Um outro ponto a ser destacado era a atuação profissional dos alunos: a metade da turma já atuava como professor, quer seja do ensino fundamental ou médio (nove alunos); dois alunos exerciam profissões ligadas à rotina de uma escola; três alunos desenvolviam atividades remuneradas sem qualquer vínculo com escolas; e quatro alunos ainda não possuíam qualquer vínculo de trabalho.

Esse espectro variado quanto à atuação profissional talvez explique o principal ponto de diferenciação da turma: o envolvimento com o curso. Enquanto alguns alunos se empenhavam nas atividades, buscando aproveitá-las para um maior aprendizado, outros se mantinham imparciais ou mesmo criticavam, mostrando um engajamento muito pequeno com a sua própria formação. Esses últimos sempre buscavam respostas em problemas externos, alegando que a rotina fora da faculdade não lhes permitia uma maior participação, ou em questionamentos do tipo ‘para que isso, se nem professor eu serei?’ para justificar seus atos.

Analisando essa questão do maior ou menor engajamento, conjecturamos que ele também pode ser analisado do ponto de vista metacognitivo. Esse maior ou menor engajamento pode ser interpretado em função do desenvolvimento metacognitivo dos estudantes. Talvez um menor engajamento não signifique apenas desinteresse; também pode ser interpretado como uma evidência de que a metacognição ainda precisa ser desenvolvida.

[26] Os dois alunos já haviam frequentado outros cursos superiores: um era formado em Ciências Contábeis e o outro já havia concluído três períodos em um curso de licenciatura em Física.

4.3 A gênese do trabalho

A ideia de trabalharmos em um ambiente rico em possibilidades, com momentos de interação entre alunos, em que a reflexão fosse incentivada de tal modo que pudéssemos aliar conhecimento matemático e desenvolvimento de habilidades metacognitivas (aí incluídas, entre outras, a questão da autorregulação) serviu como motivação inicial para a pesquisa.

Nossa ideia nunca foi a montagem de um grupo específico, formado apenas para esse fim; queríamos aproveitar o fato de termos acesso a um curso de licenciatura em Matemática para planejarmos e conduzirmos atividades que favorecessem à metacognição no cotidiano de uma disciplina. Nossa aposta, não hipótese, era a de que conduzir uma disciplina (da grade da licenciatura), valendo-se de muitos momentos reflexivos e que visasse a um possível desenvolvimento da metacognição.

Mas, como fazer isso se as disciplinas normalmente já possuem um conteúdo programático pré-definido? Se a ideia era permitir que os alunos desenvolvessem aquelas habilidades a que nos referimos anteriormente, entendíamos que era necessária uma liberdade que possibilitasse aos alunos escolher aquilo que gostariam de estudar e principalmente em alguns momentos, também sugerir sobre como fazer para estudar determinado tópico. Consideramos ser essa uma forma de proporcionar um momento diferenciado na formação de nossos alunos: eles poderiam, de maneira direta, decidir o que gostariam de estudar, revendo conteúdos matemáticos e pedagógicos. Seria a concretização de uma proposta que valorizaria a formação matemática, mas que também lhes permitiria enxergar a si mesmos como aprendizes, questionando seus saberes, buscando, principalmente, reconstruir conceitos e reforçar pontos que considerassem necessários.

Valendo-nos dos conhecimentos que vínhamos obtendo sobre metacognição e formação de professores, aliados à experiência adquirida como discente e docente no curso de licenciatura em Matemática do CESAT, iniciamos o planejamento do trabalho, buscando em primeiro lugar identificar a disciplina da grade curricular que pudesse se adequar às nossas pretensões. Essa disciplina deveria apresentar uma ementa flexível, de forma a possibilitar o trabalho pretendido e estar, preferencialmente, localizada nos semestres finais da grade curricular. Essa opção pelos semestres finais do curso possibilitaria que os alunos participantes tivessem um maior amadurecimento e vivência dentro do curso, aumentando as possibilidades de saberes matemáticos ou pedagógicos que poderiam ser estudados.

Após um estudo adequado da grade curricular das turmas que frequentariam a licenciatura de Matemática do CESAT, no primeiro semestre de 2008[27], escolhemos a disciplina do sétimo período chamada Tópicos Especiais de Educação Matemática, mais conhecida pelos alunos como Optativa II: trata-se de uma disciplina de ementa variável, que se destina a estudar tendências e novas pesquisas em Educação Matemática, experiências e discussões relativas ao ensino. O desenho da disciplina permitiu alguns ajustes necessários no curso: abordar algum tópico importante que não tivesse sido objeto de estudo em outras disciplinas ou algum assunto que os estudantes gostariam de estudar, não contemplado nas disciplinas do curso.

Nas turmas anteriores à pesquisada, a ementa também havia sido montada com a participação dos alunos, que opinaram diretamente sobre o que gostariam de estudar ou rever. Valendo-nos de tais características, adotamos um conjunto de procedimentos para a construção da sua ementa, com a participação de cada aluno. A partir da ementa montada coletivamente, demos início ao curso, valendo-nos sempre de atividades que procurassem desenvolver os conteúdos matemáticos solicitados.

Ao longo do próximo capítulo, descreveremos em detalhes a elaboração e a condução da disciplina, objeto da pesquisa conduzida.

4.4 Instrumentos para a coleta de dados

Os instrumentos para a coleta de dados da pesquisa consistiram em instrumentos também didáticos que integraram a metodologia do curso.

Como a disciplina, além de oferecer condições para que os alunos se desenvolvessem do ponto de vista metacognitivo, também tinha o objetivo de

---

[27] Nesse período, tínhamos turmas que frequentavam o primeiro, terceiro, quinto e sétimo períodos do curso.

promover estudos de conteúdos matemáticos, materiais foram preparados, ou selecionados, entre os quais: textos teóricos sobre assuntos matemáticos escolhidos pelos participantes; sequências de atividades; listas de exercícios; tarefas a serem resolvidas com recursos computacionais.

Em alguns momentos do curso, cabia ao professor a responsabilidade pela montagem do material utilizado; em outros, os próprios alunos montavam seu material de estudo, a partir de materiais de apoio que eles mesmos escolhiam.

Os registros escritos, deixados pelos alunos ao realizarem essas tarefas, constituíram a maior fonte de dados.

Em algumas atividades foi utilizado um software (Thales)[28] como ferramenta de apoio ao estudo do conteúdo matemático. Os registros dessas atividades, feitos em um editor de texto, também constituíram uma importante fonte de dados.

Ao longo da execução de nossa proposta foram promovidos três grandes momentos de discussão envolvendo o coletivo da pesquisa. Os temas trabalhados em cada um desses debates foram os seguintes:

- ✓ Direcionamento a ser dado à disciplina: quais os conteúdos seriam trabalhados ao longo do semestre;
- ✓ Discussão a respeito do tema Metacognição: Durante a implementação da proposta, após a leitura de um texto envolvendo o tema metacognição, os alunos e o professor discutiram a condução da disciplina sob dois pontos de vista diferentes: o desenvolvimento do conteúdo matemático e a proposta de desenvolvimento da metacognição;
- ✓ Avaliação final da disciplina: No fim do semestre, os alunos foram convidados a avaliar a disciplina e a proposta de condução, apontando aquilo que consideraram ser merecedor de destaque.

Cada um dos debates teve o professor como mediador, mas a maior participação foi dos alunos. Além de registros em fotos desses momentos, gravações de áudio (à exceção do primeiro debate) também foram feitas como possível material a ser analisado.

---

[28] Maiores detalhes serão fornecidos no Capítulo 5.

4.5 Procedimentos de tratamento e análise de dados

A disciplina foi conduzida de forma e integrar, dinamicamente, as fases de planejamento (pré-ativa): monitoramento e regulação (interativa); e avaliação e revisão (pós-ativa), em conformidade com a proposta de formação de Artzt e Armour-Thomas (2002), debatida anteriormente.

Assim, os instrumentos de coleta de dados foram desenhados nessa perspectiva e da mesma forma foi feito o tratamento dos dados. A condução da pesquisa e a análise dos dados compreenderam três etapas:

- ✓ Primeira etapa: correspondente à fase pré-ativa, de seleção e/ou elaboração do material a ser utilizado com os alunos (futuros professores). O que se pretende é a reflexão para a ação, que pode ser entendida como reflexão sobre a ação a ser realizada, ou seja, uma reflexão sobre a ação de um ponto de vista prospectivo;[29]
- ✓ Segunda etapa: correspondente à fase interativa. A reflexão pretendida foi a reflexão-na-ação (desenvolvida conjuntamente), conduzida pelo professor e pela orientadora, imediatamente após a ação, com o objetivo de tomada de decisão do tipo de atividade a ser aplicada na aula seguinte.
- ✓ Terceira etapa: correspondente à fase pós-ativa e conduzida no ano seguinte à condução da disciplina[30]. Consistiu na reflexão sobre a reflexão-na-ação, uma análise detalhada do curso e de cada atividade, a partir dos objetivos de formação metacognitiva que pretendíamos.

A análise de dados feita dessa forma objetivou tornar explícita a recursividade das fases de planejamento, execução e redimensionamento de uma aula.

---

[29] Schön (2000) se refere à reflexão sobre a ação, reflexão-na-ação e reflexão sobre a reflexão na ação. Segundo Oliveira e Serrazina (2002) há críticas ao fato de que não há um distinção nítida entre reflexão sobre a ação e reflexão-na-ação (ERAUT, apud Oliveira e Serrazina, 2002). Eraut propõe, como alternativa à reflexão-na-ação, a classificação em reflexão antes da ação, depois da ação e distanciada da ação. Optamos por falar em reflexão para a ação, ou simplesmente ter em conta que a reflexão sobre a ação poderia compreender etapas distintas conforme as fases de planejamento, execução ou avaliação da ação.

[30] A etapa corresponde ao Capítulo 6 dessa dissertação.

5 A PROPOSTA DO CURSO: A REFLEXÃO PARA A AÇÃO

Neste capítulo apresentamos uma proposta de condução da disciplina[31] que tem por objetivo incentivar a reflexão de professores em formação, alunos de um curso de Licenciatura em Matemática.

A disciplina é apresentada de modo que sua condução poderá ser adaptada por outros professores formadores, por exemplo, em disciplinas sem uma ementa previamente definida que costumam integrar a grade curricular de muitos cursos de licenciatura.

Apresentamos na seção 5.1 (Quadros de números 3, 4, 5, 6, 7 e 8) uma proposta de cronograma da disciplina, especificando as aulas, o foco das atividades e os instrumentos utilizados em cada atividade. A proposta reproduz o cronograma executado em nossa pesquisa, fruto da reflexão para a ação, na ação e sobre a ação, conduzida pelo pesquisador e por sua orientadora e envolvendo, em vários momentos, os alunos. A disciplina compreendeu um total de 38 aulas e 20 atividades, e foi conduzida de fevereiro a junho de 2008.

Algumas atividades se estenderam por duas ou mais aulas, não necessariamente sequenciais, quer seja por razões logísticas da faculdade (o fato de ser possível utilizar o laboratório de informática apenas uma vez por semana, por exemplo), quer seja por razões metodológicas (por exemplo, a atividade de estudo individual, desenvolvida ao longo do semestre, com aulas previstas de forma espaçada).

Na seção 5.2 cada atividade é detalhada, com destaque para os objetivos pretendidos. Alguns comentários acerca da forma com que a atividade foi efetivamente implementada na pesquisa são feitos, uma vez que os consideramos pertinentes para um melhor entendimento da proposta e sua condução a partir dos pressupostos teóricos adotados. Integram os Apêndices (de letras A a M) e os Anexos (de letras B a E) os materiais que utilizamos na condução da pesquisa.

Na seção 5.3 apresentamos a proposta dos trabalhos individuais. Essa atividade possui grande potencial para favorecer o desenvolvimento dos alunos,

---

[31] No caso da pesquisa conduzida, a disciplina chamava-se Tópicos Especiais de Educação Matemática.

quer seja do ponto de vista cognitivo, quer seja do ponto de vista metacognitivo. Devido a essas características, optamos por fazer sua descrição separadamente.

5.1 Proposta de Cronograma da Disciplina

Aula	*Conteúdo/Atividade*	*Instrumento*
Aula 01 Atividade 01	Montagem da Ementa: *Atividade individual.*	**Questionário de sondagem dos assuntos a serem estudados no curso.**
Aula 02 Atividade 02	Montagem da Ementa: *Atividade com o coletivo do curso (alunos e professor).* Definição das temáticas *individuais* de estudo.	**Debate para montagem da ementa do curso. Ficha com a indicação do assunto a ser estudado individualmente. Questionário de sondagem sobre os conhecimentos prévios dos alunos sobre Números Complexos.**
Aula 03 Atividade 03	Números Complexos: introdução, conjunto dos números complexos, forma algébrica, unidade imaginária, potências de i, operações na forma algébrica: adição, subtração, multiplicação. *Atividade em grupos de 3 alunos.*	**Material [32][33] teórico sobre números complexos. Lista de exercícios elaborada pelos próprios alunos. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 04 Atividade 03	Números Complexos: introdução, conjunto dos números complexos, forma algébrica, unidade imaginária, potências de i, operações na forma algébrica: adição, subtração, multiplicação. *Atividade em grupos de 3 alunos.*	**Lista de exercícios elaborada pelos próprios alunos. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**

Quadro 3: Proposta de Cronograma da disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática (parte 1 de 6)

[32] Material extraído do livro Matemática - Ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi, 2006.
[33] Material extraído do livro Matemática - Contexto e Aplicações, de Luiz Roberto Dante, 2004.

Aula	Conteúdo/Atividade	Instrumento
Aula 05 Atividade 04	Números Complexos: operações na forma algébrica: conjugado e divisão: Plano de Argand - Gauss e representação geométrica dos números complexos. *Atividade individual.*	**Material[34][35] teórico sobre números complexos. Lista de exercícios elaborada pelos próprios alunos. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 06 Atividade 04	Números Complexos: operações na forma algébrica: conjugado e divisão: Plano de Argand - Gauss e representação geométrica dos números complexos. *Atividade individual.*	**Material teórico sobre números complexos. Lista de exercícios elaborada pelos próprios alunos. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 07 Atividade 05	Números Complexos. *Atividade individual.*	**Lista com exercícios preparados pelo professor. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 08 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Plano de estudo para o desenvolvimento dos trabalhos individuais. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 09 Atividade 06	Trigonometria: Triângulo Retângulo. *Atividade em duplas no laboratório de informática.*	**Software de apoio[36]. Lista de exercícios[37]. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 10 Atividade 07	Trigonometria: Trigonometria na Circunferência: (unidades de medidas de arcos, definições de Graus e Radianos, ciclo trigonométrico e arcos côngruos). *Atividade individual.*	**Lista de exercícios sobre os conceitos iniciais da Trigonometria na Circunferência. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 11 Atividade 06	Trigonometria: Triângulo Retângulo. *Atividade em duplas no laboratório de informática.*	**Software de apoio. Lista de exercícios[38.] Bibliografia de apoio (de livre escolha).**

Quadro 4: Proposta de Cronograma da disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática (parte 2 de 6)

---

[34] Material extraído do livro Matemática - Ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi, 2006.
[35] Material extraído do livro Matemática - Contexto e Aplicações, de Luiz Roberto Dante, 2004.
[36] O software utilizado chama-se Thales. Disponível, bem como outros softwares, em http://nemegea.no.sapo.pt/software/software.htm.
[37] Exercícios extraídos do livro Matemática - Ensino Médio, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, 2004.
[38] Exercícios extraídos do livro Matemática - Ensino Médio, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, 2004.

Aula	Conteúdo/Atividade	Instrumento
Aula 12 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 13 Atividade 08	Trigonometria: Funções Circulares (Estudo das Funções Seno, Cosseno e Tangente). *Atividade em duplas no laboratório de informática.*	**Software de apoio. Material elaborado pelo professor contendo teoria e exercícios. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 14 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 15 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 16 Atividade 08	Trigonometria: Funções Circulares (Estudo das Funções Seno, Cosseno e Tangente). *Atividade em duplas no laboratório de informática.*	**Software de apoio. Material elaborado pelo professor contendo teoria e exercícios. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 17 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 18 Atividade 09	Trigonometria: Redução ao Primeiro Quadrante e Adição de Arcos. *Atividade em duplas no laboratório de informática.*	**Software de apoio. Material elaborado pelo professor contendo teoria e exercícios. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 19 Atividade 10	Lei dos Senos e dos Cossenos. *Atividade individual.*	**Bibliografia de apoio (de livre escolha). Lista com exercícios preparados pelo professor.**
Aula 20 Atividade 10	Lei dos Senos e dos Cossenos. *Atividade individual.*	**Bibliografia de apoio (de livre escolha). Lista com exercícios preparados pelo professor.**

Quadro 5: Proposta de Cronograma da disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática (parte 3 de 6)

Aula	Conteúdo/Atividade	Instrumento
Aula 21 Atividade 09	Trigonometria: Redução ao Primeiro Quadrante e Adição de Arcos. *Atividade em duplas no laboratório de informática.*	**Software de apoio. Material elaborado pelo professor contendo teoria e exercícios. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 22 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 23 Atividade 11	Números Complexos: Operações Forma. Trigonométrica. *Atividade individual.*	**Material elaborado pelo professor contendo teoria e exercícios. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 24 Atividade 11	Números Complexos: Operações Forma. Trigonométrica. *Atividade individual.*	**Material elaborado pelo professor contendo teoria e exercícios. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 25 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 26 Atividade 12	Metacognição. *Atividade envolvendo o coletivo do curso (alunos e professor).*	**Analisando o Desenvolvimento Profissional e Metacognitivo de Professores de Matemática a partir de sua participação em um Grupo de Trabalho Colaborativo, de Ana Cristina Ferreira.**
Aula 27 Atividade 13	Análise Combinatória. *Atividade individual.*	**Lista com 10 exercícios, propostos pelo professor, envolvendo tópicos sobre Análise Combinatória.**

Quadro 6: Proposta de Cronograma da disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática (parte 4 de 6)

Aula	Conteúdo/Atividade	Instrumento
Aula 28 Atividades 14 e 15	Análise Combinatória: Introdução, Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutação e Fatorial. *Atividade individual.*	**Atividade 14: Questionário de sondagem sobre os conhecimentos prévios dos alunos sobre Análise Combinatória. Atividade 15: Material[39] teórico sobre princípio multiplicativo, arranjos e permutações. Lista com 15 exercícios elaborados pelos próprios alunos. Bibliografia de apoio (de livre escolha).**
Aula 29 Atividade 16	Análise Combinatória: Combinação; Arranjos, Permutações e Combinações com repetição. *Atividade individual.*	**Material[40] teórico sobre combinação. Lista com 5 exercícios elaborados pelos próprios alunos. Bibliografia de apoio (de livre escolha). Resumo teórico sobre Arranjos, Permutações e Combinações com repetição, elaborado pelos próprios alunos.**
Aula 30 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 31 Atividade 17	Análise Combinatória. *Atividade individual.*	**Lista com 10 exercícios, propostos pelo professor, envolvendo tópicos sobre Análise Combinatória.**
Aula 32 Atividade 18	Análise Combinatória. *Atividade individual.*	**Lista com 10 exercícios envolvendo tópicos sobre Análise Combinatória.**

Quadro 7: Proposta de Cronograma da disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática (parte 5 de 6)

---

[39] Material extraído do livro Fundamentos da Matemática Elementar, volume 5, de Samuel Hazzan, 2004.
[40] Material extraído do livro Fundamentos da Matemática Elementar, volume 5, de Samuel Hazzan, 2004.

Aula	Conteúdo/Atividade	Instrumento
Aula 33 Atividade 18	Análise Combinatória. *Atividade individual.*	**Lista com exercícios envolvendo tópicos sobre Análise Combinatória.**
Aula 34 Atividade 18	Análise Combinatória. *Atividade individual.*	**Lista com exercícios envolvendo tópicos sobre Análise Combinatória.**
Aula 35 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 36 Atividade Individual	Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 37 Atividade Individual	Entrega dos Trabalhos Individuais	**Estudos de livre escolha**
Aula 38 Atividade 19	*Avaliação e encerramento do curso. Atividade envolvendo o coletivo do curso (alunos e professor).*	**Questionário de Autoavaliação. Debate Final sobre a Disciplina.**

Quadro 8: Proposta de Cronograma da disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática (parte 6 de 6)

5.2 Descrição detalhada das atividades propostas

5.2.1 Atividade 01

O principal objetivo dessa atividade é a discussão do conteúdo a ser trabalhado na disciplina[41]. Esse é o motivo que nos leva a sugerir que a disciplina possua ementa variável, fato adequado aos propósitos da condução de um trabalho cujo foco principal é o desenvolvimento da metacognição dos alunos.

Uma vez que a disciplina pretende que o aluno vivencie uma experiência metacognitiva, busca-se iniciar o semestre fazendo com que os participantes reflitam sobre seus saberes, potencialidades e dificuldades. Essa estratégia busca iniciar um

[41] No caso da nossa pesquisa, a disciplina utilizada tinha a duração de um semestre.

processo de desenvolvimento metacognitivo. Assim, em um primeiro momento, são propostas perguntas como:

1. Quais os tópicos de Matemática que você gostaria de estudar nessa disciplina?
2. Por quais motivos você gostaria de estudar esses tópicos?

A atividade assim proposta pretende chamar os próprios estudantes para gerirem em conjunto com o professor o desenvolvimento de seus estudos. Para os professores o processo é também de aprendizagem, segundo destaca Boruchovitch:

> [...] professores podem aprender a autoadministrar e a orientar o uso dos processos metacognitivos provendo estudantes de atividades em que a necessidade de monitoramento externo possa gradativamente ser substituída pelo desenvolvimento da capacidade de automonitoramento e autorreflexão nos alunos. (BORUCHOVITCH, 1999, p.10)

5.2.2 Atividade 02

Essa é uma atividade que prevê momentos individuais e coletivos.

As indicações individuais, feitas na atividade anterior, são colocadas em um quadro para que o coletivo da sala tome a decisão final sobre a ementa[42]. A sugestão é que os tópicos mais indicados formem o corpo de assuntos a serem estudados. Na disciplina conduzida, a ementa coletiva ficou definida como: Números Complexos, Trigonometria e Análise Combinatória (a lista completa dos tópicos indicados é apresentada no Apêndice A).

Além da montagem da ementa coletiva, pode-se aproveitar esse momento para um trabalho interessante e inovador. Cada aluno apontou, na atividade 1, alguns conteúdos[43] que gostaria de estudar na disciplina. Uma vez que nem todas as indicações de cada aluno são contempladas na ementa coletiva, o aluno pode escolher um conteúdo (por ele apontado anteriormente) para desenvolver um estudo individual. Esse estudo, em nosso entendimento, deve ser planejado e conduzido pelo próprio aluno, atendendo a suas características próprias (e conhecidas por ele

42 No caso da pesquisa aqui relatada nos referimos à ementa como ementa coletiva.
43 No caso na nossa aplicação, os alunos listaram cinco conteúdos.

mesmo)[44]. A metacognição é o foco principal, mas também se pretende, com isso, favorecer o desenvolvimento da autorregulação e o conhecimento de si próprio.

Uma vez definidos os conteúdos matemáticos da ementa coletiva e o tópico de estudo individual, os alunos, com ou sem a participação do professor, podem definir o primeiro assunto a ser abordado na disciplina. Na pesquisa desenvolvida, ficou coletivamente decidido que o curso começaria pelo estudo dos Números Complexos.

Entretanto, ao invés de utilizar uma metodologia tradicional, na qual “o professor já traz o conteúdo pronto e o aluno se limita, passivamente, a escutá-lo” (Mizukami, 1986, p.15), julgamos que seja conveniente iniciar a disciplina investigando o que cada aluno sabe sobre o tópico inicial. Essa decisão, que pode contribuir para o planejamento das próximas atividades, também pode proporcionar uma experiência metacognitiva para os alunos, já que cada um é convidado a fazer uma autoavaliação, como parte do desenvolvimento de um conhecimento sobre si mesmo.

5.2.3 Atividade 03

Essa atividade pode surpreender alguns alunos, principalmente aqueles que esperam uma aula expositiva, com o professor assumindo o papel principal de explicar e conduzir o processo de ensino–aprendizagem. Ao invés de uma aula com esse formato, os alunos recebem um material de apoio (Anexo B) para que estudem de maneira autônoma os primeiros conceitos do conteúdo escolhido para iniciar a disciplina. O conteúdo de Números Complexos foi o primeiro a ser abordado na disciplina que conduzimos; nessa primeira etapa de estudo, trabalha-se com a definição e as operações de adição, subtração e multiplicação desses números.

O objetivo desse trabalho é incentivar o desenvolvimento da autorregulação; Através da metodologia proposta, entendemos que permitimos a cada aluno conduzir a si mesmo na tarefa de explorar o material, estudando-o, levantando suas dúvidas e trabalhando para saná-las. Essas dúvidas podem ser sanadas recorrendo

---

44 Maiores detalhes são fornecidos ao final deste capítulo, na seção Atividade Individual.

a uma bibliografia de apoio, a um colega ou ao professor. A atividade desse primeiro momento tem um cunho estritamente individual (de fato, espera-se que cada aluno trabalhe no sentido de detectar e esclarecer suas dúvidas).

O que julgamos ser importante é que o uso dessa metodologia busca colocar o aluno no controle do seu próprio processo de aprender; a mudança da frase “não entendi nada” para “eu não entendo essa passagem” pode ser um indicativo de que o aluno começa a se perceber como um ser que possui particularidades ao aprender, o que entendemos como um sinalizador do processo inicial de desenvolvimento da metacognição.

O segundo momento pode ser conduzido individualmente ou em pequenos grupos. No caso da proposta implementada, optamos por trabalhar em pequenos grupos, de no máximo quatro alunos. A proposta de trabalho compreendeu, assim:

I. Elaboração de uma lista de exercícios feita em grupo;
II. Resolução da lista de exercícios propostos por outro grupo;
III. Correção da lista elaborada no passo I, e resolvida no passo II, pelo grupo proponente da lista.

A dinâmica prevê dois tipos de experiências: 1) dos estudantes enquanto alunos, envolvidos na aprendizagem de um conteúdo, cientes das dificuldades inerentes a esse processo; 2). de professores em formação, aprendendo a atuar como um professor que planeja uma atividade para seus alunos e depois avalia.

Dessa forma, os futuros professores podem vivenciar uma situação similar ao que Schön (2000) descreve como um ambiente favorável para o ensino prático:

> Uma aula prática é um ambiente projetado para a tarefa de aprender uma pratica. Em um contexto que se aproxima de um mundo prático, os estudantes aprendem fazendo, ainda que sua atividade fique longe do mundo real do trabalho. (SCHÖN, 2000, p. 40)

Ainda nesse momento de simulação da atuação docente, os alunos podem vivenciar algumas das fases descritas por Artz e Armour-Thomas (2002):

- ✓ A fase pré-ativa pode ser entendida como o momento de preparação da lista. Ao responder a perguntas como “Quais exercícios utilizar?” e “Quais são os meus objetivos com o uso desses exercícios?”, cada grupo pode vivenciar a atividade de planejamento exercida pelo professor;

- ✓ Já a fase pós-ativa pode ser vivida no momento de devolução da atividade. Ao corrigir os exercícios podem avaliar se os mesmos foram adequados e quais os erros cometidos. Através de um procedimento cíclico, as análises feitas nessa fase alimentam uma nova fase pré-ativa que visa corrigir o que de errado foi visto anteriormente.

A atividade não proporciona que o futuro professor vivencie a fase interativa. Apesar de a percebermos no corpo da atividade (quando os alunos estão empenhados em resolver a lista de atividades que a eles foi designada), entendemos que nesse momento os licenciados não atuavam como professores, mas sim como alunos que resolviam uma lista de exercícios. A dinâmica não permite que cada grupo acompanhe, como um professor, o trabalho de resolução da lista, uma vez que cada grupo se empenha em resolver a lista elaborada por outro grupo.

5.2.4 Atividade 04

Essa atividade pode ser entendida como uma continuação da proposta de condução individual de estudos, iniciada na atividade anterior. De modo semelhante ao desenvolvido anteriormente, os alunos devem ter acesso a um material que contenha a continuação do assunto iniciado na atividade 1 (no nosso caso, demos prosseguimento aos trabalhos com números complexos, abordando conjugado de um número complexo, divisão e a representação usando o Plano de Argand-Gauss. O material fornecido se encontra no Anexo C).

Entretanto, ao invés de preparar uma lista para que outro aluno resolva, dessa vez cada aluno deve elaborar e resolver a própria lista. De modo mais incisivo, essa aula abre a possibilidade de que cada aluno monitore e regule sua aprendizagem.

Ainda que saibamos a importância que o contato social possui no desenvolvimento da metacognição (BROWN, 1987), cremos que a ênfase em um trabalho individual, nesse início, é extremamente importante, principalmente para que o aluno participante perceba a nova dinâmica de estudo e conscientize-se de que a proposta é, provavelmente, muito diferente dos ambientes de estudo que viveu anteriormente.

Além disso, ao insistir que cada aluno trabalhe na montagem e resolução das próprias atividades, permitimos que como futuro professor ele vivencie as fases de planejamento (a montagem da lista), de automonitoramento (a resolução da lista) e de revisão (ARTZT ; ARMOUR-THOMAS, 2002).

A proposta é que o aluno, caso o aluno não consiga resolver uma questão, busque entender os motivos pelos quais fracassou, principalmente por ter sido ele mesmo o autor da lista. Numa fase posterior, o aluno pode socializar suas dúvidas; entendemos que esse momento de interação com o coletivo da sala também oferece elementos que podem favorecer o seu avanço metacognitivo. .

5.2.5 Atividade 05

Após duas atividades em que os alunos estudam, revisando textos teóricos disponibilizados em livros didáticos, preparando e resolvendo listas de exercícios, esse pode ser um bom momento para propor uma atividade que faça com que os alunos reflitam sobre o nível de aprofundamento e detalhamento de seus estudos. A intenção é conduzir os alunos para que analisem, de modo crítico, se eles estão se empenhando nos estudos, se estão preocupados em entender realmente a teoria, e se buscam exercícios capazes de auxiliá-los no processo de aprendizagem do conteúdo. Sob o ponto de vista da metacognição, uma atividade como essa pode representar uma etapa de monitoramento e autorregulação (ainda que para isso esteja sendo utilizado um material preparado por alguém, que não o próprio aluno, mas que vem acompanhando e monitorando o processo).

No caso da proposta desenvolvida, a atividade aplicada foi uma lista de exercícios. Essa lista continha exercícios[45] envolvendo tópicos que um aluno que frequenta um curso sobre números complexos deve saber: condições para que um número seja classificado como imaginário puro ou real; operações na forma algébrica; cálculo de potências de i.

[45] A situação é frequente no cotidiano de um professor: selecionar exercícios julgados fundamentais em um assunto. A lista de exercícios pode ser uma atividade destoante na proposta conduzida (por ter sido preparada pelo professor), mas não deixa de desempenhar um papel no conjunto das atividades objetivando o desenvolvimento metacognitivo.

Um detalhe inovador para o desenvolvimento do autoconhecimento do aluno é a proposta (implementada na pesquisa conduzida) de que ao receber a lista de exercícios, cada aluno, sem resolvê-la, possa ler o enunciado e classificar o exercício, segundo o nível de dificuldade, como fácil, médio ou difícil.

Alguns comentários se fazem necessários: no caso da implementação que fizemos da proposta, a Atividade 05 desempenhou um papel importante em um momento delicado do curso: muitos alunos começavam a se sentir desmotivados, pedindo que retomássemos a metodologia tradicional de aula expositiva. Alguns argumentavam que não sabiam estudar sozinhos, que ‘não sabiam se estavam estudando de maneira correta”.

Por outro lado, não podemos deixar de mencionar a situação do professor titular. Essa lista de exercícios manifesta, ou revela, que o professor titular também passou por um processo de amadurecimento em termos da metacognição e de como conduzir um curso com essas características. O uso da lista, analisado num momento posterior, na fase pós-ativa (ARTZT ; ARMOUR-THOMAS, 2002), ou num momento de reflexão sobre a ação (SCHÖN, 2000), pode evidenciar que o professor ainda manifestava um desejo de ‘controlar’ aquilo que o aluno deve saber ou memorizar.

Ora, se a proposta, desde o início, é que o aluno escolha sua caminhada, ao analisarmos a atividade, podemos perceber que a elaboração e forma de utilização da lista de exercícios podem ser indicativos de uma concepção de ensino de Matemática tradicional (FIORENTINI,1995). Essa reflexão, feita num contexto de pesquisa, se analisada do ponto de vista do dia-a-dia da sala de aula, apenas reforça que o foco precisa estar no aluno, no seu conhecimento e no respeito às características próprias de cada um.

A lista de exercícios proposta encontra-se no apêndice B.

5.2.6 Atividade 06

Toda disciplina prevê, a princípio, um ordenamento linear de conteúdos (no nosso caso, esses conteúdos são números complexos, trigonometria e análise combinatória). Entretanto, a abordagem a partir de números complexos permite que ao término da apresentação das operações na forma algébrica, um novo tópico, o segundo da ementa seja iniciado. Aproveitamos que a ementa previa números complexos e trigonometria e, antecipadamente, planejamos[46] essa ‘interrupção’.

Na verdade, essa interrupção objetiva promover uma situação diferente (talvez até única na vida escolar desses alunos). Normalmente os conteúdos são apresentados como se fossem independentes uns dos outros, sem que estabeleçam conexões entre eles. A ‘interrupção’ para a conexão com o próximo conteúdo pode enfatizar para os futuros professores que é possível e necessário trabalhar os conteúdos matemáticos de maneira interligada, sem a necessidade de terminar um para somente depois começar outro. Acreditamos que essa prática, se adotada em nossas escolas com maior frequência, pode ser um instrumento capaz de superar algumas crenças que influenciam de maneira negativa a aprendizagem matemática (SCHOENFELD, 1987).

Essa construção não-linear (ou em rede) pode ser um método que permita destacar a Matemática como um conhecimento construído pelo homem e que não é feito de uma maneira tão sequencial (e contínua) como os conteúdos escolares podem simplesmente sugerir. Isso pode ser útil como incentivo para os alunos, pois se cada um puder ter a percepção da Matemática como uma construção humana, pode vir a entender a aprendizagem como processo sempre em andamento.

Optamos por iniciar os estudos de trigonometria trabalhando com as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Para isso, achamos conveniente utilizar um software de apoio para os nossos trabalhos. Nossa opção foi a utilização de um software chamado Thales[47].

[46] Como dissemos, nossa pesquisa foi desenhada em cima das etapas propostas por Artzt e Armour-Thomas (2002).
[47] Disponível, bem como outros softwares, em http://nemegea.no.sapo.pt/software/software.htm.

Figura 2 – Tela inicial do software Thales

Apesar da interface bem simples e de uma certa limitação de recursos, o software atende aos propósitos de permitir que os alunos tenham a oportunidade de revisar conceitos e trabalhar mais livremente, especulando e confirmando suas construções.

Para auxiliar o trabalho pode-se propor uma lista de exercícios (Apêndice C). Ainda que a lista possa conter tarefas ditas 'tradicionais', encontradas em livros que tratam desse assunto, percebe-se que os alunos podem trabalhar de modo mais interativo – selecionando as questões e propondo outras – ou mesmo trabalhar questões pouco exploradas, como o uso de ângulos não notáveis. As tarefas podem ser consideradas tradicionais, mas o enfoque permite que os alunos vivenciem novas experiências, quer sejam cognitivas (eles têm problemas para serem resolvidos) quer sejam metacognitiva (escolher uma estratégia, por exemplo).

A interação, outro ponto que podemos destacar nessa primeira atividade sobre trigonometria, pode ocorrer, de acordo com o planejamento, entre aqueles que resolvem as tarefas (a atividade pode ser feita em duplas), entre os alunos e o objeto de estudo (no caso a trigonometria) e entre os alunos e a ferramenta computacional proposta (o software escolhido).

5.2.7 Atividade 07

Inevitavelmente, durante sua vida estudantil, um aluno pode cometer erros ao lidar com determinados conteúdos matemáticos, em decorrência do não entendimento dos conceitos em conexão com os algoritmos matemáticos. Não necessariamente o aluno percebe naquele momento o erro cometido. Ao rever aquele assunto, numa outra ocasião, pode então se conscientizar de que utilizava o conceito equivocadamente, o que induzia erros na forma de operar.

Alguns alunos junto aos quais foi implementada a proposta da disciplina já haviam estudado, ou mesmo revisado, os conteúdos de trigonometria. Optamos por uma revisão feita não de uma forma tradicional através da explanação do professor. A proposta foi a de propor uma lista de exercícios (Apêndice D), objetivando que eles refletissem sobre o que já sabiam, e se sabiam de maneira correta.

Foi nesse sentido que a questão 1 pretendeu que o aluno, num primeiro momento, escrevesse o que sabia a respeito das unidades de medidas de ângulos, de uma maneira livre, buscando relatar aquilo que recordava ou sabia. Logo em seguida, já na questão 2, a sugestão era confrontar aquilo que havia escrito, com a forma apresentada em algum texto didático de sua livre escolha. Esse movimento de levá-lo a escolher a bibliografia que julgava mais adequada e, a partir dela, analisar a sua própria construção, incentiva o desenvolvimento da autorregulação. Sem a interferência externa de um professor ou instrutor, cabe ao próprio aluno trabalhar no sentido de analisar a sua resposta, criticá-la e caso não a considere adequada, reconstruí-la, incorporando os elementos que julga importantes e que não estavam presentes na sua resposta inicial.

Nas questões 3, 4 e 5 a ênfase recaiu sobre comprimento de arcos, com perguntas mais diretas e poucos reflexivas. Nas questões seguintes, voltamos a trabalhar com questões envolvendo a reflexão e o planejamento de atividades, novamente buscando simular com os alunos da turma o trabalho de um professor em sala de aula.

A questão 6 objetiva retomar os estudos sobre o ciclo trigonométrico, assunto já trabalhado pelos alunos no ensino médio e na própria licenciatura. Entretanto, ao invés de promovermos uma recapitulação, direcionando aquilo que julgávamos mais apropriado, deixamos que preparassem uma aula, indicando aquilo que acreditavam ser importante saber a respeito do ciclo trigonométrico. Dessa maneira, além de revisarem um conteúdo matemático, poderiam, mais uma vez, simular o trabalho de um professor, vivenciando o processo de planejamento de uma aula, fase pré-ativa, segundo Artz e Armour-Thomas (2002). Como a bibliografia era de livre escolha, esperávamos que os alunos consultassem mais de uma fonte, fazendo assim um grande apanhado de informações. A partir dessas informações, eles julgariam as mais convenientes e as apresentariam no planejamento.

Já na questão 7, a intenção era que os alunos fizessem uma pesquisa sobre o raio do círculo trigonométrico, verificando se há uma explicação ou se é uma simples convenção o fato de sua medida ser igual a 1. Acreditamos que isso pode ser importante para a sua maneira futura de ensinar Matemática. Caso acreditem que importantes questões Matemáticas não passam de definições impostas, estaremos formando professores de Matemática que perpetuarão o método de ensino tradicional. Entretanto, se conseguirmos fazer com que vejam a Matemática como construção humana, sujeita a explicações lógicas e embasadas em razões plausíveis, podemos contribuir para que realmente se apoderem dos principais conceitos e procedimentos matemáticos.

5.2.8 Atividade 08

Nessa atividade, a proposta é usar o laboratório de informática e um software de apoio. O trabalho pode ser realizado em duplas; nesse caso, cada dupla deve entregar um único relatório ao final da atividade (Apêndice E).

A ênfase é novamente planejar e refletir (ARTZT; THOMAS, 2002) a partir das várias atividades propostas. Para isso, o trabalho se inicia com atividades que permitam explorar outros recursos do software, ainda não apresentados anteriormente.

Assim, as atividades propostas 1, 2 e 3 podem ser classificadas como questões de exploração do software. Entretanto, mesmo que essas questões permitam aos alunos explorar melhor o software, é fato que à medida que cada dupla explora as funcionalidades revisa pontos do conteúdo teórico em estudo. A revisão desses conteúdos torna-se uma forma de monitorar sua aprendizagem.

A partir da questão 4, focalizamos a atenção no assunto principal da atividade desenvolvida no laboratório: o estudo das funções circulares, em especial, das funções seno, cosseno e tangente. A questão 4 aborda os valores dessas funções em pontos destacáveis do círculo. A questão 5 retoma o círculo trigonométrico, apresenta uma definição retirada de um livro didático e solicita que essa definição seja estudada e entendida com o apoio do software. O objetivo é investigar sobre os sinais e o crescimento ou decrescimento das funções seno, cosseno e tangente.

Nas questões 6, 7 e 8 o foco é um trabalho com as funções circulares no segundo, terceiro e quarto quadrantes. Esperamos que os alunos façam a redução ao primeiro quadrante de uma maneira mais exploratória, tendo como suporte um software livre.

Na questão 9, invertemos o sentido de rotação no círculo trigonométrico[48], com o objetivo de que os alunos identifiquem relações do tipo: $\mathrm{sen}(-\alpha) = -\mathrm{sen}(\alpha)$. Mesmo que o nível de formalização não seja esse, a expectativa é que os alunos sistematizem propriedades dessa natureza.

Por fim, a questão 10 pretende que os alunos especulem acerca da adição de arcos, de forma a constatarem o erro, por vezes cometido, de considerar que $\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}a + \mathrm{sen}b$. A intenção, de acordo com as diretrizes teóricas e metodológicas do curso, é conduzir um trabalho de verificação sobre resultados decorrentes da adição de arcos: testar resultados incorretamente indicados e especular, com o uso do software, sobre o resultado correto. O momento é adequado à formalização, conduzindo os alunos a deduzirem as fórmulas de adição e subtração de arcos.

5.2.9 Atividade 09

O trabalho de redução ao primeiro quadrante e de adição de arcos, abordados de modo mais informal na atividade anterior, é agora retomado de uma

[48] Até esse momento vínhamos adotando o sentido anti-horário para o trabalho no ciclo trigonométrico.

maneira mais formalizada, a partir da proposição de um conjunto de questões (Apêndice F).

Na primeira questão, o objetivo é que os alunos especulem livremente acerca do processo de redução ao primeiro quadrante. A segunda questão apresenta formalmente o processo de redução ao primeiro quadrante e propõe que os alunos apliquem os resultados na determinação dos valores de seno, cosseno e tangente de alguns ângulos. Na questão 3, um aspecto que consideramos relevante é que, além dos alunos poderem corrigir a questão 2 com o auxílio do software de apoio, são convidados a destacar algum erro cometido, identificando o que não está correto. Ou seja: não é um agente externo, o professor ou instrutor quem aponta o que está errado. É o próprio aluno quem deve fazer isso e, mais ainda, essa ação permite que cada um se conscientize do tipo de erro que comete e, naturalmente, o que pode ser feito para evitar esse erro no futuro.

Acreditamos que atividades propostas nessa linha podem auxiliar o aluno. Ao incentivarmos a reflexão sobre os erros cometidos e a análise do tipo de erro cometido, podemos contribuir para o seu desenvolvimento metacognitivo, através da ampliação de sua capacidade de autorregulação e em termos de um melhor conhecimento de suas próprias características como estudante.

A adição de arcos é retomada na quarta questão. Toda a discussão que esperávamos que os alunos fizessem na atividade anterior é feita agora, de maneira sistematizada. Novamente, pensando em algo bastante individual e particular, a questão começa pela adoção de dois arcos, chamados de a e b. A partir daí, e com o auxílio do software de apoio, cada dupla deve completar uma tabela sobre a adição de arcos envolvendo as funções circulares até então enfatizadas: seno, cosseno e tangente. As perguntas feitas em seguida têm o objetivo de desfazer algumas crenças que muitos alunos possuem a respeito da adição de arcos.

A quinta questão, feita com o auxílio de uma bibliografia de livre escolha, também aborda as fórmulas conhecidas para a adição de arcos. Esperamos que, ao responder essa questão, o aluno se interesse em demonstrar, com entendimento, essas fórmulas.

Finalizando, a questão 6 traz questionamentos sobre as alterações promovidas ao se efetuar a soma, a um arco qualquer, de arcos de 90° e 180°. O objetivo é preparar os alunos para a retomada do trabalho com Números Complexos na forma trigonométrica; essas operações podem auxiliar o entendimento das alterações ocorridas ao multiplicarmos um número complexo qualquer por i ou -i, por exemplo.

5.2.10 Atividade 10

A atividade 10, um trabalho que aborda a lei dos senos e dos cossenos (Apêndice G), marca o encerramento do estudo sobre trigonometria.

No sentido de reforçar a importância de o professor de Matemática, por vezes, trabalhar com demonstrações em sala de aula, a atividade solicita que os alunos estudem as demonstrações das duas leis.

Após esse estudo, cada aluno pode escolher uma, dentre as duas leis, para apresentar a demonstração. Essa apresentação não consiste apenas em copiar a demonstração de um livro; cada aluno deve comentar as dificuldades encontradas para a compreensão e o que fez para sanar essas dúvidas. Novamente, esse trabalho individualizado apresenta a possibilidade de fazer com que cada aluno amplie seus conhecimentos (experiência cognitiva), não só a respeito da Matemática, mas principalmente a respeito de si mesmo como estudante e de suas características cognitivas (experiência metacognitiva).

As questões 3 e 4 solicitam novamente ao aluno que o aluno trabalhe como um professor, propondo e resolvendo quatro exercícios de aplicação do assunto estudado, refletindo sobre como preparar e encaminhar uma aula sobre o tema.

A última questão busca levar o aluno a refletir sobre o trabalho desenvolvido ao longo das aulas. A intenção é que os alunos compreendam que os conteúdos de uma disciplina estão interligados e que a ordenação dos mesmos pode ser uma opção do professor. Essa opção pode ser decorrente da preferência do professor ou de aspectos metodológicos, como no caso da condução feita, quando optou-se por iniciar o trabalho com Números Complexos e integrar os estudos de trigonometria.

5.2.11 Atividade 11

A conclusão dos estudos sobre trigonometria permite, em nossa proposta, que seja encaminhada também a conclusão dos estudos sobre Números Complexos. Como o trabalho sobre esse assunto havia sido interrompido há algumas atividades, nossa opção é retomar esse conteúdo com uma revisão do que fora estudado anteriormente. Nessa linha, apresentamos um resumo teórico (onde fazemos a introdução da forma trigonométrica de um número complexo) e, em seguida, propomos sete questões, envolvendo operações na forma algébrica e representação na forma trigonométrica. (Apêndice H)

Para o prosseguimento das tarefas envolvendo a forma trigonométrica, disponibilizamos as fórmulas de adição de arcos e solicitamos que deduzam as fórmulas para a multiplicação e divisão de Números Complexos na forma trigonométrica. Mesmo que os alunos consultem materiais de apoio, algo que consideramos recomendável e esperamos que se torne um bom hábito, mais uma vez o trabalho envolvendo demonstrações reforça nosso pensamento de que um professor de Matemática deve ter em mente que trabalha com uma disciplina que demanda rigor e formalidades, algo a ser destacado pelo professor junto aos alunos. Esperamos apenas que os alunos não se limitem a copiar as fórmulas dos textos, sem maiores reflexões.

Após as deduções das fórmulas, as questões 8 e 9 servem como exercícios de aplicação. Na questão 10, colocada sob o titulo de desafio, solicitamos que, a partir da fórmula de multiplicação de Números Complexos na forma trigonométrica, seja deduzida a formula da potenciação de Números Complexos. Na verdade, a intenção é que os alunos percebam que a potenciação é um caso particular da multiplicação, e que a fórmula pode ser deduzida de maneira bem rápida, sem o uso de artifícios mais sofisticados. As questões 10 e 11 servem como exercícios de fixação e aplicação para a operação de potenciação de Números Complexos.

Finalizando o trabalho com Números Complexos, propomos um trabalho de forma a relacionar os procedimentos algébricos de multiplicar um número complexo por números reais ou imaginários puros, com as mesmas operações interpretadas de forma geométrica.

5.2.12 Atividade 12

Depois de concluídas as duas primeiras etapas do curso (no caso da proposta, os estudos sobre Números Complexos e Trigonometria), entendemos ser apropriado desenvolver com os alunos de um trabalho sobre o tema metacognição. Para isso, deve-se buscar um texto que trabalhe não apenas a metacognição, mas que também envolva a questão da formação de professores. O texto utilizado na aplicação da proposta foi "Analisando o Desenvolvimento Profissional e Metacognitivo de Professores de Matemática a partir de sua participação em um grupo de trabalho colaborativo", da professora Ana Cristina Ferreira.

Sugerimos que não se faça uma exposição alongada sobre metacognição; durante o debate sobre o texto, pode ser que se faça necessário esclarecer temas como conhecimento metacognitivo e experiência metacognitiva. Porém, a intenção não é falar sobre detalhadamente sobre metacognição.

O trabalho deve ser conduzido por meio de reflexões dos alunos. Essas reflexões podem ser conduzidas através de perguntas como: "vocês percebem alguma semelhança entre o trabalho relatado no texto e a maneira como estamos desenvolvendo a disciplina?"; "Quais as semelhanças?"; "Como tem sido sua participação na disciplina?"; "A partir desse debate, pretende modificar sua maneira de participar da disciplina?". Voltamos a afirmar que acreditamos ser propício o momento do curso para uma reflexão sistematizada, de forma que os alunos aos poucos entendam a proposta de trabalho em andamento.

Esse momento de reflexão sobre a ação (SCHÖN, 2000) pode ser favorável para a continuidade do trabalho. A conscientização de que o curso possui uma condução diferenciada pode despertar a atenção individual para os elementos metacognitivos envolvidos (FLAVELL, 1979); além disso, essa tomada de consciência pode também valorizar os momentos de reflexão e de planejamento, condução e avaliação como nos termos propostos por Artzt e Armour-Thomas (2002).

5.2.13 Atividade 13

Ao longo das atividades já descritas, diferentes metodologias de trabalho foram empregadas. A ideia da proposta é que cada atividade seja capaz de oferecer aos alunos uma oportunidade de reflexão[49]. Conscientizando-se de suas características cognitivas, metacognitivas e do seu conhecimento matemático, cremos que cada aluno pode estar melhor preparado para desempenhar suas funções profissionais.

Nessa tentativa de trabalhar diferentes metodologias com vistas ao favorecimento da reflexão e da autorregulação, propomos um trabalho para iniciar o conteúdo de análise combinatória.

Inicialmente o professor monta uma lista com exercícios envolvendo os principais pontos tradicionalmente estudados em análise combinatória no âmbito do ensino médio: princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo), arranjo, combinação e permutação[50]. (Apêndice I).

De posse da lista, os alunos são orientados para que, após a leitura da mesma, reúnam os exercícios em blocos, de acordo com critérios que julgam convenientes. Não se deve ter a preocupação de que os critérios estejam ligados ao tópico análise combinatória; o importante é que os alunos exponham seus critérios, mostrando que refletiram sobre suas escolhas.

Por exemplo: um aluno pode montar apenas dois blocos. O primeiro é composto pela questão número 1; o segundo reúne as demais questões. Sua justificativa: o exercício número 1 é o único que envolve aspectos ligados à geometria. Essa justificativa pode demonstrar uma maior aptidão para a geometria; ou, de modo oposto, que a geometria é uma dificuldade que a pessoa apresenta. Qualquer que seja a avaliação feita, ter a consciência de que geometria ocupa um lugar diferenciado em seu conhecimento cognitivo pode ser importante para ações profissionais futuras.

A montagem dos agrupamentos é importante para que cada aluno conscientize-se de suas particularidades. Ao refletir na ação para formar os grupos e

---

[49] Quer seja sobre a ação, na ação ou sobre a reflexão na ação (SCHÖN, 2000)

[50] Apesar de estarmos num curso superior, a orientação de formarmos professores para atuarem no ensino médio nos fez pensar em trabalhar com assuntos que, num futuro próximo, esses mesmo alunos utilizariam como professores.

sobre a reflexão na ação para formular as justificativas que fez, articulam-se diferentes tipos de conhecimentos, quer sejam de ordem cognitiva ou metacognitiva. Pelo conjunto de múltiplos saberes envolvidos, entende-se que esse conjunto de ações pode ser encarado como uma experiência metacognitiva.

Além da experiência metacognitiva que pode ser vivida pelos alunos, essa atividade também oferece a oportunidade de explorar os conhecimentos prévios que os alunos têm sobre análise combinatória. O resultado desse estudo exploratório auxiliará o trabalho de planejamento (ARTZT e ARMOUR-THOMAS, 2002) das atividades seguintes que se destinam ao estudo desse conteúdo.

5.2.14 Atividade 14

Na atividade anterior foi solicitado que os alunos separassem os exercícios em blocos, justificando os blocos formados. Além das questões metacognitivas, existia também a preocupação em se conhecerem os conhecimentos prévios do grupo de alunos sobre o conteúdo.

Visando explorar os conhecimentos prévios dos alunos, mas agora de uma maneira mais incisiva (já que na atividade anterior não há qualquer referência a esse assunto). Propõe-se que sejam feitas as seguintes perguntas:

1. O que você entende por Análise Combinatória?
2. O que você sabe sobre Análise Combinatória?

Tais questionamentos podem oferecer elementos importantes para o planejamento das atividades seguintes do curso (algo que já foi enfatizado na descrição da atividade 13).

Entretanto, o que vemos de novo nessa atividade é a reflexão que cada aluno pode fazer. As perguntas anteriormente colocadas podem desencadear um processo de reflexão sobre a reflexão na ação; com a intenção de reanalisar a lista sob uma nova perspectiva.

O momento é rico: cada aluno pode novamente questionar-se sobre as escolhas feitas, sobre as justificativas apresentadas e se esteve atento às diferentes maneiras que cada exercício poderia ter sido encarado. Se a proposta do curso é oferecer múltiplos momentos de reflexão e de autorregulação, rever decisões tomadas e justificativas apresentadas, agora com a inserção de um novo elemento (a menção à análise combinatória), pode ser um instrumento de incentivo ao conhecimento metacognitivo.

Fazendo nós mesmo uma reflexão na ação sobre o planejamento do curso e a condução que vem sendo feita, talvez possamos nos questionar se não seria indicado iniciar indagando o conhecimento que o aluno julga ter sobre certo assunto e depois verificar se ele está, de fato, consciente daquilo que acredita saber.

Em um momento pós-ativo, nossa reflexão sobre a reflexão na ação levou-nos ao seguinte posicionamento: enfatizamos que, em se tratando de um curso que visa à reflexão e ao desenvolvimento da autorregulação, estimular os alunos a pensarem sobre seus conhecimentos acerca da Matemática e de si próprios significa deixá-los pensarem mais livremente, sem a imposição de regras ou rotinas pré-estabelecidas. Pensamos que os alunos devem estar abertos à busca de diferentes soluções, sem estarem presos a modelos ou fórmulas prontas de resolução, como se cada problema só pudessem ser resolvido de uma única maneira.

Assim, caso tivéssemos optado por primeiro questionar os conhecimentos individuais sobre o conteúdo para depois aplicarmos a atividade de reunir os exercícios em blocos[51], poderíamos, de certa maneira, induzir as respostas de nossos alunos à segunda atividade, uma vez que a tarefa já seria apresentada como relacionada à análise combinatória.

Alguns alunos, certamente, já terão estudado o assunto em outras oportunidades e, talvez, durante a atividade 13, podem ter esquecido, ou não terem percebido, que alguns problemas podem ser resolvidos através da aplicação dos princípios da análise combinatória. Normalmente, o professor é quem indica essa possibilidade de resolução, que encaminha o aluno acerca do conteúdo envolvido ou do modo de resolver uma questão. Ao fazer de modo espontâneo essa descoberta, tal ação pode auxiliá-lo no desenvolvimento da metacognição, em seu processo de desenvolvimento da autorregulação, na internalização de que um problema pode ou deve ser resolvido de diferentes maneiras.

[51] Ou seja, inverter a ordem das atividades 13 e 14.

5.2.15 Atividade 15

Após as atividades de pesquisa sobre o conhecimento prévio de análise combinatória, pode-se começar o trabalho de aprofundamento desse assunto. Para isso, os alunos podem ter acesso a textos (materiais teóricos) para o estudo do princípio fundamental da contagem, arranjos e permutações[52], caracterizando uma experiência cognitiva.

Com o auxílio de uma bibliografia de apoio, os alunos estabelecem uma comparação entre as apresentações que cada um dos autores (o do material cedido e o da bibliografia de apoio escolhida) fazem desse conteúdo. O texto que propomos (Anexo D) possui uma abordagem que procura mostrar, com rigor matemático mais profundo, as explicações que cada um dos tópicos abordados exige. Espera-se que os alunos percebam e relatem isso nos comentários comparativos entre os materiais consultados (esse comentário dever entregue ao final da atividade – Apêndice J).

Além do relato, cada aluno deve montar uma lista com 15 exercícios, sendo 5 para cada um dos tópicos abordados (princípio fundamental da contagem, arranjo e permutação). Novamente, os alunos devem apenas montar a lista, sem resolver os exercícios.

Propõe-se a retomada do trabalho com alunos formando listas de exercícios por acreditar que o curso encontra-se em momento diferente daquele em que estava quando da atividade 4, situação onde se usou metodologia similar. Naquela oportunidade, praticamente início do curso, os alunos ainda se adaptavam ao novo modelo de condução. Agora, passada mais da metade do curso e com os alunos mais sensibilizados, retomar esse trabalho pode oferecer um novo momento para que reflitam sobre a ação de montar a lista, seja do ponto de vista cognitivo (a escolha dos exercícios) ou metacognitivo (os motivos pelos quais aqueles exercícios foram escolhidos).

[52] O livro utilizado na pesquisa conduzida chama-se Fundamentos de Matemática Elementar, volume 5, de Samuel Hazzan.

5.2.16 Atividade 16

Essa atividade, inicialmente, é uma continuação da atividade anterior: utiliza-se a mesma estrutura, alterando apenas o foco de estudo para Combinação.

Assim, os alunos recebem o material extraído de um texto didático[53] (Anexo E) e estabelecem um estudo comparativo entre o material fornecido e a bibliografia escolhida (experiência cognitiva). Em seguida, montam nova lista de cinco exercícios sobre o assunto estudado (experiência cognitiva e metacognitiva).

Também é solicitado a cada aluno que, a partir da bibliografia escolhida, monte um resumo teórico sobre arranjos, combinações e permutações com repetições (Apêndice K).

A última questão colocada permite trabalhar com os alunos uma questão que frequentemente surge em discussões sobre a formação de professores: a utilização do livro didático como única fonte a ser seguida pelo professor. O fato de não ser fornecido material teórico sobre o assunto e a exigência de entregar um resumo teórico objetivam incentivar a busca de diferentes textos para estudo. Dessa maneira, os alunos podem vivenciar, na prática, o que muitas vezes ocorre com um professor em seu cotidiano: o livro adotado não é suficiente para fundamentar o assunto que se está trabalhando, exigindo que esse professor complemente com um material que julgue adequado para a ocasião.

5.2.17 Atividade 17

Nessa atividade retoma-se a lista apresentada na Atividade 13 (Apêndice I). Naquela ocasião, cada aluno separou os problemas propostos em blocos de acordo com critérios que considerou adequados.

Agora, os trabalhos serão divididos em dois momentos distintos. No primeiro, cada aluno resolverá a lista de exercícios. Após o estudo da teoria sobre princípio

---

[53] O livro utilizado na pesquisa conduzida chama-se Fundamentos de Matemática Elementar, volume 5, de Samuel Hazzan.
.

fundamental da contagem, arranjos, permutações e combinações, a resolução dessa lista pode servir como instrumento de fixação dos conceitos estudados ao longo das atividades 15 e 16. Ainda sobre a resolução da lista, também existe a possibilidade de que alguns exercícios sejam resolvidos sem o uso da teoria sobre análise combinatória.

No segundo momento, a lista será novamente classificada, como aconteceu na atividade 13. Mais uma vez os alunos serão os responsáveis pelos critérios de formação de cada agrupamento, devendo, ao fim da classificação, especificar quais foram esses critérios.

Essa atividade de reclassificação pode ser vista como uma oportunidade para cada aluno exercitar a reflexão sobre a reflexão na ação. Ao olhar mais uma vez cada um dos exercícios, o aluno pode recordar a classificação que havia feito anteriormente. A recordação do momento da execução da atividade 13 pode trazer também a lembrança dos motivos pelos quais uma ou outra classificação foi feita. Pensamentos como “por que pensei dessa forma?” ou “por que dei maior importância a essas características em detrimento daquelas?” podem ser interpretados como uma exploração que cada aluno pode empreender de suas escolhas de acordo com características pessoais.

Essa exploração pode servir para o aluno como um reforço de suas potencialidades e, também, pode servir como elemento auxiliar na percepção de suas limitações ou pontos que ele mesmo julgue importantes de serem reforçados e mais trabalhados. De um modo ou de outro, ao conhecer-se um pouco mais do ponto de vista cognitivo, cada aluno desenvolve seu conhecimento metacognitivo e sua capacidade de autorregular-se.

Uma reclassificação da lista também pode ser útil para auxiliar os alunos a descobrirem a maneira como percebem a Matemática. Reconhecer que diferentes classificações são possíveis, sem que uma não exclua a outra, pode ser importante que um professor tenha sempre em mente que um problema pode ser tratado de diferentes pontos de vista.

Muitas vezes, no exercício da profissão, encontramos alunos que apresentam soluções diferentes daquelas que encontramos. Por utilizarem caminhos mais longos ou menos diretos, os alunos entendem que a maneira como resolveram o exercício deve ser desconsiderada.

A resolução de um aluno, por mais longa ou menos direta que seja, deve ser considerada e valorizada. As diferentes resoluções podem abrir espaços para boas discussões envolvendo a teoria matemática e os diferentes caminhos utilizados para se chegar a resolução final. Entretanto, para que essas discussões aconteçam, o professor também deve estar aberto às diferentes abordagens que seus alunos podem apresentar.

5.2.18 Atividade 18

Ao longo das atividades, sempre que solicitamos aos alunos a montagem de pequenas listas de exercícios, procuramos adotar diferentes estratégias para a sua resolução. Assim, em um primeiro momento, cada grupo montou uma lista para que outro grupo resolvesse (atividade 3). Em outro momento, cada aluno montou e resolveu a sua própria lista (atividade 4).

A última lista de exercícios para a resolução dos alunos pode ser montada pelo professor a partir da coletânea das listas elaboradas pelos próprios estudantes durante as atividades 15 e 16. Como o número de exercícios disponíveis pode ser expressivo, pode-se optar por uma escolha dirigida, retirando um ou dois exercícios de cada uma das listas disponíveis. O resultado final será uma lista com exercícios variados, envolvendo tópicos referentes à análise combinatória (Apêndice L).

Uma opção que pode ser adotada é a indicação do autor de cada uma das questões. Essa indicação pode ser útil para uma condução diferenciada da aplicação da lista. Ao elaborar a questão, o aluno pode viver a fase de planejamento.

Caso a resolução seja feita na própria sala de aula, o autor pode viver a fase de monitoração, auxiliando algum colega que apresente dúvidas sobre a questão que ele próprio formulou. Através desse acompanhamento, poderá perceber quais as dificuldades apresentadas e também refletir, no presente-da-ação (SCHÖN, 2000), sobre quais ações podem ser empreendidas para trabalhar com essas dificuldades.

Por fim, para viver a última fase do modelo proposto por Artzt e Armour-Thomas (2002), a revisão, propomos que cada aluno corrija a questão que ele próprio formulou. As análises que começaram a acontecer durante o acompanhamento das atividades podem ser retomadas, agora com a inserção de novos elementos. Esse momento final também pode ser útil para a sua própria aprendizagem: caso surjam resoluções de tipos que o aluno não havia pensado anteriormente, ele estará enriquecendo seu conhecimento e reforçando a ideia de múltiplas possibilidades de resolução que uma mesma questão pode apresentar.

5.2.19 Atividade 19

O encerramento de um curso é sempre um momento propício para uma reflexão do processo em que se esteve envolvido. Orientamos que a reflexão ocorra em dois momentos distintos: um coletivo e outro individual.

Durante o momento coletivo, todos os envolvidos - o coletivo que compõe a sala de aula – devem estar reunidos para um debate onde teçam comentários e emitam opiniões a respeito do curso conduzido, destacando aquilo que de mais importante ocorreu para cada um. É salutar que todos os participantes tenham a oportunidade de se manifestar, evitando que uma pessoa ou um pequeno grupo monopolize as opiniões. A pluralidade deve ser uma das tônicas desse momento, devendo o professor atuar no papel de mediador.

Já no momento individual, cada aluno deve fazer uma autoavaliação da sua participação no curso. Deseja-se que nas declarações de cada aluno constem opiniões sobre o desenvolvimento da disciplina, modificações provocadas em suas próprias atitudes ao longo do desenvolvimento da disciplina, impressões sobre as atividades e a forma como foram conduzidas, além de contribuições para a condução da disciplina num momento futuro. Ao final da sua autoavalição, cada aluno pode se atribuir uma nota (Apêndice M).

Sobre a avaliação dos alunos, pode-se optar pela não condução de avaliações formais ao longo do curso, atribuindo-se como nota final (caso seja necessário) a nota que cada um atribui a si próprio no momento da auto-avaliação[54].

[54] Reforçando que o principal objetivo do curso é o desenvolvimento dos processos metacognitivos, da autorregulação e da reflexão dos alunos, optamos pela não aplicação de uma avaliação formal, valorizando desse modo a reflexão que cada um fez sobre sua própria atuação.

Com relação a processos avaliativos, deve-se levar em conta que as atividades conduzidas exigirão diferentes tipos de avaliações. Ao longo do curso, existem momentos em que os alunos atribuem notas e fazem as correções. Em outros, a tarefa de avaliar caberá ao próprio professor. Também deve ser levada em conta a autoavaliação. De fato, cremos que a avaliação do processo deve ser destacada, em detrimento de notas alcançadas em provas ou qualquer outro instrumento tradicional de avaliação.

5.3 Atividade Individual

Durante a primeira atividade, cada aluno havia apontado tópicos que gostaria que fossem abordados no curso, justificando os apontamentos feitos.

A diversidade de temas que podem ser apontados inviabiliza um curso formado por todos esses elementos indicados. Assim, sugerimos que a escolha dos pontos que serão estudados seja feita após o levantamento dos assuntos e do número de indicações de cada um. Por uma questão de bom senso, entendemos que os temas de maior indicação devem ser os escolhidos para a formação da ementa que todos estudarão. Ao professor, pela maior experiência, cabe a responsabilidade de conduzir o momento de escolha desses temas. Sua experiência será necessária para definir quantos tópicos podem ser abordados durante o período do curso.

Em virtude dessa limitação, dificilmente um aluno verá todos os temas que indicou inseridos no grupo de assuntos a serem estudados. Em alguns casos, pode ocorrer que nem mesmo um desses temas seja incluído. Esse é um risco que corremos se optarmos por utilizar os pontos mais indicados para a composição da ementa coletiva do curso. Qualquer que seja a situação, sempre existirá, por parte do aluno, algo que gostaria de estudar e que não foi incluído na ementa coletiva do curso.

É com o pensamento voltado para essas diferentes variações que fazemos a proposta dessa atividade individual. Inicialmente, trata-se de uma experiência cognitiva: o aluno estudará um conteúdo que julga importante e que ainda não conhece, ou se o conhece, não é da maneira considerada apropriada.

Entretanto, a proposta vai além da experiência cognitiva. Do ponto de vista metacognitivo, pode-se utilizar a atividade para oferecer aos alunos momentos de reflexão e de autorregulação. Pode-se aproveitar essa atividade para permitir que os alunos planejem, monitorem e avaliem[55] o seu próprio trabalho.

O encaminhamento que sugerimos para essa atividade é o seguinte:

- A escolha do tema a ser estudado: Isso pode ocorrer ainda durante a aplicação da atividade 2. Logo após a montagem da ementa coletiva, o professor devolve a cada um dos participantes a lista de indicações que fez para a ementa. Nessa mesma lista, o aluno deve indicar o tópico (não incluído na ementa coletiva) que gostaria de estudar individualmente. Trata-se ainda de uma escolha: o momento (início do curso) pode ainda não ser favorável para uma reflexão mais ampla; por isso a indicação do tema por ora é suficiente.

- Planejamento dos estudos: Após cinco atividades, tempo que consideramos ser suficiente para que os participantes percebam que a condução do curso vem sendo feita de uma maneira diferente da tradicional, cada aluno deve fazer um planejamento de como pretende conduzir seu estudo individual. Nesse planejamento (pode-se reservar uma aula do curso para esse fim), devem estar incluídos, além do próprio tema, a maneira como o aluno pretende conduzir seus estudos, o tempo que julga necessário para concluir seus estudos e a maneira como pretende apresentar os resultados desse estudo.

- O desenvolvimento do tema: Para que os alunos façam seus estudos individuais, devem ser oferecidos momentos, dentro do próprio curso, em que possam se dedicar exclusivamente a isso. Entendemos que esses estudos individuais devem ser encarados como muito mais que uma atividade a ser realizada em momentos livres. Por isso mesmo, cabe ao professor da disciplina reservar um certo número de aulas para que os estudantes estejam trabalhando da maneira como planejaram anteriormente, quer seja no âmbito da sala de aula ou do complexo que forma a instituição de ensino (biblioteca, laboratório de informática, e outros). Sugerimos que esse bloco de aulas a ser reservada para os estudos individuais não seja sequencial; preferencialmente essas aulas devem estar espaçadas (sugerimos que a cada quatro aulas, uma seja destinada para esse fim). Acreditamos que a possibilidade de um trabalho feito dessa forma, com idas e vindas, permitindo que o

[55] Nos moldes propostos por Artzt e Armour-Thomas (2002).

assunto seja visto em diversos momentos do próprio curso, favorecerá o desenvolvimento da reflexão.

Reforçamos nosso posicionamento de valorização da condução individualizada dos estudos citando Tardif (2002). Como é destacado por esse autor, está incluída nos saberes da experiência de um professor a consciência de que seus alunos apreendem de maneiras diferentes, e em tempos diferentes. Mas, será que nossos alunos sabem como aprendem e em que ritmo aprendem? Em que momentos de sua vida estudantil puderam vivenciar um estudo em que eles mesmos ditassem o próprio ritmo?

O trabalho proposto oferece a oportunidade de o aluno se conhecer em uma atividade cognitiva, o que nos parece adequado em um curso que visa desenvolver a autorregulação. Se, que como afirmam Flavell, Miller e Miller (1999), a metacognição também pode ser entendida como o conhecimento que o indivíduo possui de si mesmo quando se encontra em uma atividade cognitiva, permitir que nossos alunos tenham momentos como esse, de estudo individualizado, pode contribuir para que cada um, a seu modo, desenvolva-se sob a perspectiva metacognitiva.

<u>- A apresentação dos resultados obtidos:</u> No planejamento inicial, cada aluno manifestou a maneira como gostaria de apresentar seus resultados. A escolha pelo modo como cada um apresentará seu trabalho pode ser uma oportunidade de desenvolvimento da autonomia do aluno. De acordo com o que cada um planejou, o professor da disciplina deve disponibilizar momentos para essa apresentação, caso algum planejamento individual inclua, por exemplo, uma apresentação para toda a turma.

Para o professor da disciplina, o trabalho individual deve ser uma atividade de especial atenção. Além de todo planejamento que deve fazer (número de aulas, indicação das aulas em que acontecerão os estudos individuais e a marcação de datas para a entrega das atividades), também compete o acompanhamento de cada um dos alunos.

Esse acompanhamento proposto é algo que deve ter características adequadas ao processo. Assim, para acompanhar uma atividade como essa, o professor deve ocupar muito mais um papel de auxiliar, atuando quando for requisitado ou servindo de elemento de apoio em caso de dúvidas[56].

Mesmo que não seja requisitado por um certo aluno, também cabe ao professor também questionar esse aluno sobre como está a condução de sua atividade, direcionando questionamentos que auxiliem a reflexão.

Pensando no curso como um conjunto de momentos ricos em oportunidades de desenvolvimento da reflexão e da autorregulação, uma atividade como essa mostra-se alinhada com os referenciais teóricos que sustentam a proposta. Se observamos o curso do ponto de vista das reflexões orientadas por Schön (2000), perceberemos momentos de reflexão sobre a ação (quando após a definição dos procedimentos que adotará para o estudo, um participante analisa se aquele é, de fato, o melhor caminho), reflexão na ação (mesmo que perceba a necessidade de mudar uma rotina, resolve que fará isso em outra oportunidade) e reflexão sobre a reflexão na ação (quando, ao fim dos trabalhos, questiona se os momentos e as análises que fez durante o processo foram válidas realmente).

A partir da perspectiva do trabalho de Artzt e Armour-Thomas (2002), perceberemos as fases de planejamento (a escolha do tema e a definição dos procedimentos), acompanhamento (quando o aluno executa aquilo que planejou) e avaliação (em momentos distintos: no andamento do curso, percebendo se o ritmo e os resultados estão adequados e, ao final, quando analisa todo o trabalho feito).

[56] Ao professor não compete o papel de esclarecer essas dúvidas. Sua atuação será muito mais de interlocutor, alguém que auxiliará o aluno em como atuar na busca de soluções.

6 REFLEXÕES SOBRE A AÇÃO: O QUE APRENDEMOS COM AS LIÇÕES

Nesse capítulo, fazemos a análise dos resultados da condução da disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática, proposta tendo como objetivo principal favorecer o desenvolvimento metacognitivo e reflexivo de alunos de um curso de licenciatura em Matemática de uma instituição do município de Serra, no estado do Espírito Santo.

Dessa maneira, nosso olhar estará sempre voltado para detalhes que evidenciem o processo de reflexão para a ação, na ação e sobre a ação, de acordo com a proposta de Schön (2000). Nas análises, tomaremos por base as fases de planejamento (pré-ativa); monitoramento e regulação (interativa); e avaliação e revisão (pós-ativa), de acordo com o trabalho sobre formação de professores de Matemática de Artzt e Armour-Thomas (2002).

A ementa proposta e trabalhada inclui três grandes tópicos: Números Complexos, Trigonometria e Análise Combinatória. Para fins de análise, optamos por considerar apenas as atividades que envolvem os dois primeiros tópicos, objetivando focalizar dois conteúdos que foram trabalhados de forma integrada.

As atividades foram realizadas em diferentes momentos, de forma individual, em duplas, em pequenos grupos ou com o coletivo da turma. Assim, optamos por analisar cada uma das atividades (onze no total), definindo o foco de análise para cada uma.

Da mesma maneira adotada no Capítulo 5, ao descrever a proposta da disciplina, optamos por analisar a Atividade Individual, que consistiu nos estudos individualizados, separadamente, apresentando os resultados na seção 6.2. Além dos resultados das Atividades Individuais, nessa mesma seção apresentaremos e analisaremos as reflexões que cada participante realizou no momento final do curso.

6.1 Analisando as atividades

6.1.1 Atividade 01: Montagem da ementa coletiva

Após o preenchimento do questionário inicial para a sondagem dos assuntos de interesse dos alunos, listamos os assuntos que os alunos indicaram para o desenvolvimento da disciplina. Os mais citados foram Números Complexos, Análise Combinatória, Trigonometria e Probabilidade (Os três primeiros formariam o conteúdo programático, montado de comum acordo já na segunda aula).

Ainda na tabulação dos dados, uma questão nos afligiu: Quais motivos justificariam uma maior incidência de tópicos relacionados ao ensino médio? Por quais motivos os alunos faziam essas escolhas?

Apresentamos a seguir algumas justificativas dos estudantes sobre os tópicos de Matemática indicados.

Com relação ao tópico Números Complexos, o aluno Wilson[57]. apresentou a seguinte resposta: *Conteúdo pouco trabalhado em nosso curso. É importante ter este conhecimento para trabalhar com alunos do ensino médio.*

Essa resposta pode ser analisada por dois aspectos diferentes:

- ✓ Como aluno do curso de graduação, ele tem consciência de que o conteúdo não foi abordado da maneira como ele gostaria que fosse trabalhado, quer seja por um tempo insuficiente ou mesmo porque ainda restam dúvidas sobre o assunto.
- ✓ A segunda parte da resposta mostra uma preocupação com a atividade no dia-a-dia do professor. Parece não se tratar apenas de uma questão de conhecimento teórico, mas pensamos que essa preocupação pode ser ampliada para questões envolvendo o ensino e a aprendizagem desse conteúdo.

Em sua resposta, indicando o conteúdo de Números Complexos, Maitê colocou: *Visto muito rapidamente. Eu não domino este assunto. Tenho dificuldades.* A resposta da aluna Maitê revela uma reflexão acerca de si mesma e de seus

[57] Os nomes dos alunos são fictícios.

conhecimentos. Quando ela afirma *visto muito rapidamente* percebemos que a aluna consegue se colocar como aprendiz.

O professor que ministrou esse conteúdo julgava ter utilizado tempo suficiente para que a aluna o compreendesse. Entretanto, a aluna percebe que necessita de um tempo maior, considerando o tempo usado pelo professor como insuficiente para que a sua aprendizagem possa ocorrer. Reconhece que não domina o conteúdo e tem dificuldades. Esse nos parece um passo importante a ser dado pelos alunos: entender que no processo de ensino-aprendizagem ele pode ocupar um lugar de maior autonomia, capaz de se adaptar ao modelo proposto à sua individualidade.

Se analisarmos a resposta da aluna Maitê justificando a indicação do tópico Trigonometria, perceberemos que se trata de algo comum: o professor necessita perceber-se como alguém em constante formação, e que frequentemente terá de analisar o seu conhecimento e o que precisará fazer para melhorar essa situação. Inclusive, essa mesma aluna, em um comentário sobre outro tópico por ela escolhido, trigonometria, já relata parte desse cotidiano vivido por um professor: *Tive que estudar sozinha para dar aula sobre esse tema*.

Ao lermos a reposta *nunca estudei no meu Ensino Médio, e não vi na faculdade ainda*, logo de início nos perguntamos: como o aluno Cássio conseguiu chegar ao sétimo período do curso de Matemática sem conhecer Números Complexos? Na grade curricular do curso de Matemática certamente existem disciplinas que utilizaram tal conteúdo; como esse aluno estudou essas disciplinas? Certamente, a resposta do aluno foi extrema, e em algum momento, ele estudou o assunto, mesmo que de modo rápido. De qualquer forma, a proposta da disciplina pode desempenhar o papel de orientar o aluno nessa revisão de lacunas e busca de reconstrução de conceitos.

O aluno Marcelo, ao justificar a sua opção pelo estudo de Funções Polinomiais do 1º e 2º graus, alega a dificuldade de mostrar aos alunos a aplicação desse conteúdo. As motivações do aluno são muito mais de cunho profissional do que de cunho de desenvolvimento metacognitivo.

O aluno Victor, ao justificar sua escolha pelo conteúdo de Análise Combinatória, alega que necessita de maior aprofundamento nesse assunto; isso pode representar um certo nível de conhecimento metacognitivo, pois se mostra capaz de monitorar o que sabe ou não sobre um determinado assunto. Na mesma linha é a resposta de Carolina que diz *não consigo assimilar este conteúdo*, refletindo que ainda não possui a habilidade que julga necessária para dominar o conteúdo de Probabilidade da maneira que gostaria. Essa mesma percepção ela apresenta sobre limites, derivadas e integrais envolvendo funções trigonométricas – *é porque faço muita confusão* – e Análise combinatória – *quando começo a ver este conteúdo, começo a resolver, mas foi dado muito rápido e gostaria de rever*.

Algumas respostas surgiram, a nosso ver, sem uma reflexão mais aprofundada, algo mais para cumprir uma tarefa proposta pelo professor do que propriamente um engajamento consciente na construção de uma ementa de um curso que pudesse atendê-lo em alguns pontos que gostariam de estudar.

O aluno Cássio, por exemplo, ao indicar o estudo de Radiciação, apenas diz: *É... muito importante*. A aluna Aparecida destaca apenas que o tema Trigonometria não *foi visto durante o curso..*

Os dados coletados ainda deixaram, por vezes, a impressão de que muitos alunos ainda não se sentiam seguros para o trabalho como professor de Matemática em sala de aula. O elevado número de indicações de conteúdos referentes ao ensino fundamental e médio pode ser entendido com um indício desse temor. Talvez esse resultado reforce a necessidade de se repensar os espaços de formação, não só do ponto de vista dos conteúdos matemáticos, mas também dos aspectos da pedagogia e do estágio curricular obrigatório.

6.1.2 Atividade 02: Montando a ementa e iniciando o curso

Antes da realização da atividade, aconteceu a montagem da ementa do curso. De posse das indicações de cada aluno, montamos no quadro uma tabela com a indicação dos conteúdos que cada um apontou (Apêndice A). O resultado dessa ação foi a criação da ementa desenvolvida ao longo do curso (já citada anteriormente): Números Complexos, Trigonometria e Análise Combinatória.

A atividade 2, desenvolvida logo em seguida à definição da ementa, objetivou um diagnóstico sobre o que cada aluno sabia sobre Números Complexos. Nossa intenção era que eles refletissem sobre os estudos que haviam feito sobre o assunto de forma a avaliarem o próprio conhecimento sobre aquele conteúdo; esse fato possibilitaria que tomando consciência do que sabiam ou não, pudessem perceber a sua própria evolução à medida que o assunto fosse abordado.

Algumas respostas apresentadas foram bem elaboradas; outras demonstraram, talvez, pouco envolvimento na proposta de trabalho. Um fato a ser destacado foi a heterogeneidade apresentada pela turma em relação a esse assunto. Como se trata de um tópico que tradicionalmente integra o currículo do ensino médio, esperávamos que as aulas caminhassem como uma revisão, ou mesmo uma discussão sobre o ensino desse conteúdo. Entretanto, algumas repostas realmente nos surpreenderam por mostrarem um completo desconhecimento do assunto. Pensamos que essa situação se torna ainda mais grave se levarmos em conta que se tratava de uma turma de sétimo período da licenciatura em Matemática, há poucos meses da conclusão da graduação.

As respostas apresentadas a seguir buscam ilustrar os aspectos destacados.

- Aluna Gisele: *Muito pouco, quase nada. O que aprendi sobre números complexos foi o visto superficialmente na faculdade. Sei que é um número imaginário, onde* $\sqrt{i} = -1$ e exemplificou:

$$x^2 + 25 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{-25}$$
$$x = \pm 5i$$

É interessante notar que apesar de a aluna cometer um erro grave (escrever que $\sqrt{i} = -1$ao invés de $\sqrt{-1} = i$ ela consegue resolver de modo correto a equação do segundo grau.

- Aluna Rita: Não sabia nada, já que nunca tive contato com este conteúdo no ensino médio.

- Aluno Marcelo: O pouco que sei sobre números complexos é que o número imaginário i representa $\sqrt{-1}$*, onde com isso podemos resolver raízes negativas com índice par. Também lembro um pouco que um número complexo possui uma parte real e uma parte imaginária que é do tipo* $(a + bi)$ *e infelizmente me lembro somente isso, talvez algumas operações também.*

O aluno Marcelo mostra, em seu relato, insegurança sobre o que de fato conhece sobre o assunto. Falta de uma análise mais profunda ou baixo desenvolvimento da autorregulação?

- Aluno Cássio: Até a aula eu não sabia nada sobre números complexos, tanto que eu escolhi o tema para ser estudado. Vimos nos semestres anteriores alguma coisa a respeito de números complexos, mas muito pouco, não sendo suficiente para o meu total conhecimento sobre o assunto.

- Aluna Maitê: Sobre números complexos eu sabia que existia um i. Também que é um conjunto de números depois daqueles que eu já conhecia: naturais, inteiros, racionais, reais e irracionais. Imaginei que era algo muito complexo por causa do nome. Vi rapidamente, em meia aula aproximadamente, em Fundamentos da Matemática Elementar I. Não entendi e só copiei os resultados de poucos exercícios dados. Achei difícil, arquivei e rezei para nenhum aluno me pedir isso.

É interessante que é quase um lugar comum os alunos afirmarem que consideram os números complexos um conteúdo importante, mas que jamais foi estudado em profundidade, quer seja no ensino médio, quer seja na faculdade. O que nos intriga é esse posicionamento: apesar de reconhecerem algo com bastante valor, e que sabê-lo pode fazer alguma diferença, nossos alunos não adotavam uma postura de estudo autodirigido, algo que levassem a frente por si mesmos. Gostaríamos que nossos alunos assumissem outra postura, deixando de atribuir a outro a responsabilidade de determinar aquilo que deveriam estudar - e de que maneira deveriam estudar - para tomarem, eles mesmos, as decisões sobre, principalmente, de que maneira estudar.

Do ponto de vista de planejamento, essa atividade revelou-se bastante proveitosa. A partir de seus resultados, buscamos montar um trabalho que atendesse a grande heterogeneidade encontrada em nossos alunos. Através do monitoramento constante dessas atividades, encontrávamos elementos que nos auxiliavam na avaliação de cada atividade, permitindo-nos repensar de modo constante nosso planejamento.

6.1.3 Atividade 03: Planejando, monitorando e avaliando

O propósito principal da atividade era que os alunos vivenciassem os três momentos de uma lição, como indicam Armour-Thomas (2002): 1) planejamento; 2) monitoramento e regulação; 3) avaliação e revisão.

Para isso, em um primeiro momento, cada aluno recebeu um material escrito contendo: a definição de Números Complexos e as operações de adição, subtração e multiplicação (Anexo B).

Solicitamos que cada aluno estudasse o material, utilizando também uma bibliografia de livre escolha. Caso surgissem dúvidas, poderiam recorrer a um colega ou ao professor da disciplina.

Após o estudo desse material, os alunos se agruparam para a elaboração de uma lista de exercícios. A resolução da lista era feita por outro grupo e a lista resolvida retornava ao grupo original, para a correção e atribuição de uma nota, a critério do grupo formulador. Durante toda essa atividade, que compreendeu duas aulas, os grupos permaneceram fixos. Para facilitar o trabalho de identificação, usamos a seguinte ordenação:

- Grupo 1: Carolina, Maitê e Marcelo;
- Grupo 2: Rita, Cíntia e Cássio;
- Grupo 3: Cíntia, Wilson e Alberto;
- Grupo 4: Antônio, Leandro e Letícia.
- Grupo 5: Pedro, Victor, Gisele e Aparecida.

O grupo 1, usando como bibliografia de apoio o livro Matemática - Ensino Médio, de Kátia Stocco Smolle e Maria Ignes Diniz, montou uma lista de cinco exercícios, dentre os quais destacamos um que propunha:

Calcule $i^{236} + i^{549} + i^{526} + i^{888}$ Objetivo apontado: Verificar se o aluno generalizou que após i^4 as potências de i começam a se repetir de 4 em 4.

Apesar da redação confusa do objetivo do exercício, podemos observar a preocupação que os alunos expressam com a questão das potências de i. O objetivo apontado pode revelar também uma descoberta própria do grupo, algo que os componentes gostariam que outros grupos conhecessem. A experiência cognitiva de trabalhar um novo conteúdo e a reflexão sobre o ato de montar uma lista pode demonstrar uma evolução metacognitiva de um dos componentes ou do próprio grupo.

Lamentamos que, no segundo momento, o grupo não tenha aprofundado o trabalho de correção do exercício. O grupo 4, que resolveu esse exercício, cometeu um erro que foi apontado, mas que não foi comentado. Nossa proposta era que, em caso de erro, o grupo responsável pela confecção o comentasse e também apontasse um encaminhamento de trabalho para a revisão do tópico. Esse trabalho, conduzido por completo, contemplaria as fases de planejamento, interação e revisão (ARZTZ e ARMOUR-THOMAS, 2002). . Da maneira como o grupo terminou a atividade, entendemos que a etapa de revisão ficou incompleta: percebe-se o erro cometido, mas não se atua sobre o mesmo de modo a propor soluções para o problema detectado.

Em um outro exercício o Grupo 1 solicitava:

Resolva, em C, a equação e represente suas raízes no plano complexo:

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

Objetivo: Resolver equação do 2º grau cuja solução não é real.

Entendemos que o grupo 1 foi bastante feliz na escolha desse exemplo. Se recordarmos o trabalho normalmente proposto em nossas escolas de ensino fundamental, é comum encontrarmos alunos que afirmam que uma equação do segundo grau não possui raízes quando o discriminante, normalmente chamado delta, é negativo. Assim, quando o grupo propõe a retomada da equação do segundo grau, trabalhando com um discriminante negativo, abre-se a possibilidade de revisitar um conteúdo de forma a se entender, de fato, que uma equação do segundo grau possui duas raízes, desde que seja considerado como conjunto universo o campo complexo.

Ainda sobre o exercício, a nota de ressalva, se assim podemos considerar, é o pedido que as raízes sejam representadas no plano complexo. Trata-se de uma ressalva no sentido de que o pedido não se enquadrava no material fornecido, algo que talvez pudesse representar um obstáculo para os alunos. Mas, também entendemos que esse pedido dos autores, mesmo que não intencionalmente, pode representar uma contribuição para os alunos que deveriam resolver a lista, já que eles estariam diante de um problema.

Essa proposta de colocar os alunos frente a um conteúdo novo e que deveriam explorar de uma maneira autônoma encaixa-se perfeitamente em nossa proposta de desenvolvimento metacognitivo. Entendemos que na prática cotidiana de um professor o uso de um desafio deve estar presente na sala de aula. Desafio que deve ser dosado, como propõem Polya (1995) e Schoenfeld (1987), de modo a atingir dois pontos básicos: ser motivador o suficiente para que os alunos sintam-se capazes de resolvê-los e ser capaz de promover uma evolução do conhecimento desse aluno.

O Grupo 5, que resolveu a lista, conseguiu acertar todo o exercício, o que pode demonstrar ou que o grupo já conhecia o assunto ou que aceitou o desafio e buscou trabalhá-lo de modo independente.

O Grupo 2 trabalhou com o livro Fundamentos da Matemática Elementar, de Gelson Iezzi, optou pelo seguinte exercício:

Identifique a parte real (Re) e a parte imaginária (Im) de cada um dos seguintes números complexos:
a) $4+5i$; b) $3i+3$; c) $-7-i$; d) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$; e) $\frac{-2+5i}{2}$ ‘f) $-8i$

Conhecendo um pouco os alunos componentes do grupo, falando como professor da turma, é possível perceber que a escolha reflete bem que esses alunos montaram a lista pensando em si mesmos. Dois deles, Rita e Cássio, solicitaram o estudo desse conteúdo, alegando que jamais o haviam estudado. Assim, ao proporem esse exercício, cremos que eles o utilizaram para a própria aprendizagem desse conteúdo.

Os alunos do grupo 4, responsáveis pela resolução da lista que o grupo 2 propôs, conseguiram, em seis pontos, um total de 3,9. Os erros cometidos foram dois: um erro de multiplicação e a não resolução de um produto notável. Mas o que desperta a atenção é a correção que os alunos do grupo 2 fizeram. O grupo 4 respondeu corretamente que a parte imaginária do número $4+5i$ é 5;o Grupo 2, responsável pela resolução, considerou a resposta incorreta, indicando que o correto seria 5i, cometendo um erro conceitual. Constatamos, assim, a importância de propiciar nos cursos de aperfeiçoamento e capacitação a revisão de conceitos matemáticos. Além disso, a atuação de um professor supervisor torna-se fundamental em casos como esse.

As demais listas apresentam exercícios similares aos que destacamos, com objetivos bem parecidos. De modo geral, os grupos pareciam preocupados com a fixação de alguns conceitos básicos, como a identificação das partes real e imaginária, e com alguma possibilidade de aplicação, casos em que a equação de segundo grau foi bastante empregada. Apesar de todos os grupos terem feito a correção das tarefas, nenhum deles indicou o tipo de trabalho a ser feito para corrigir os erros encontrados. Em nosso entendimento, esse processo de análise dos erros poderia representar uma etapa marcante no trabalho de reflexão e atuação profissional, mas infelizmente essa não foi realizada a contento pelos participantes. Tomamos o cuidado para que, nas atividades seguintes, os alunos estivessem atentos aos erros cometidos e ao tratamento que davam a eles.

6.1.4 Atividade 04: Trabalhando a autorregulação

Dando continuidade aos estudos sobre Números Complexos, o trabalho agora envolvia a determinação do conjugado de um número complexo, a divisão entre dois complexos e o plano de Argand-Guass. Para dar suporte ao trabalho, fornecemos material teórico retirado dos mesmos livros usados na atividade 3.

A proposta de trabalho foi um pouco diferente da atividade anterior. Enquanto na atividade 3 fizemos a opção por um trabalho em grupo, na presente atividade o trabalho foi individual. Assim, após o estudo teórico do assunto, cada aluno elaborou e resolveu uma lista de cinco exercícios que deveriam estar relacionados com os tópicos indicados no material fornecido.

Entretanto, em quase todas as listas entregues (16, no total), havia questões ainda relacionadas com os tópicos estudados na atividade anterior. O Quadro 9 indica os assuntos abordados nessas listas.

Podemos interpretar a escolha de exercícios similares aos desenvolvidos anteriormente de duas maneiras distintas. Sob uma primeira perspectiva, os alunos fizeram uma escolha de menor esforço: trabalharam com exercícios que sabiam como resolver para cumprir a tarefa solicitada.

Assunto	Quantidade
Identificação das partes real e imaginária de um número complexo	9
Potências de i	7
Igualdade de dois números complexos	8
Equação do 2º grau com raízes complexas	4
Adição de dois números complexos	7
Multiplicação de dois números complexos	9
Divisão de dois números complexos	19
Uso do conjugado complexo	13
Representação de números complexos no plano de Argand-Gauss	4

Quadro 9: Assuntos abordados na lista de exercícios elaborada na atividade 4.

Explorando um pouco mais essa perspectiva pessimista, citamos o caso da aluna Cristiane, que apresentou apenas exercícios envolvendo assuntos abordados na atividade 3. Dizendo que *pelo fato de não ter estudado números complexos no 2º grau, eu realmente estou tendo muita dificuldade, então para não ficar sem a minha tarefa, eu peguei esses exercícios fáceis*.

Pensamos que aqui não cabe uma crítica aos exercícios escolhidos pela aluna, mas sim ao seu posicionamento de passividade perante o novo. O fato de não ter estudado o assunto anteriormente pode justificar a seleção do tópico para estudo na disciplina, mas não justifica o não envolvimento maior na atividade. Entendemos que sentir dificuldade para aprender um novo conteúdo é algo natural, e em nenhum momento dissemos que dificuldades não surgiriam. Também não nos furtamos a prestar auxílio nas dúvidas apresentadas; o que sempre enfatizamos é que esperávamos que os alunos assumissem um papel mais ativo, mais reflexivo, mais responsável perante a sua própria aprendizagem. Assim, ao encontrarmos uma justificativa como a apresentada pela aluna Cristiane, cremos que a concepção de ensino que muitos alunos ainda possuem baseia-se no papel do professor como o transmissor de saberes, e no papel do aluno de receptor desse saber. Os *exercícios fáceis* que apresenta envolvem adição, subtração e potenciação de Números Complexos; na resolução, ela comete erros que podem ser consideramos primários para um aluno do sétimo período de um curso de licenciatura em Matemática. Isso pode caracterizar que a aluna realmente não se empenhou no trabalho.

A outra perspectiva de interpretação para a escolha de exercícios que retomem tópicos anteriormente estudados pode ser pelo fato de que realmente os alunos ainda não se sentiam seguros sobre aquele conteúdo e aproveitaram a oportunidade para reforçá-lo.

Uma lista que acreditamos exemplificar essa última perspectiva foi a apresentada pela aluna Rita. Com o objetivo de *trabalhar com as quatro operações*, justifica sua opção pelos exercícios que utilizou dizendo que *a escolha foi para a minha aprendizagem*. A lista foi iniciada com um exercício que solicitava a identificação das partes real e imaginária de quatro números complexos distintos. O segundo exercício apresentou seis perguntas envolvendo a adição, diferença, multiplicação e potenciação de dois números complexos. O terceiro exercício explorou a ideia de conjugado e o quarto, que encerrava a lista, envolvia questões sobre a divisão de números complexos.

Se por um lado a lista pode ser classificada como ‘simples’, por outro lado pode ser analisada levando em conta a aluna e o contexto. A aluna Rita sempre manifestou que não atuaria como professora e por diversas vezes usou esse argumento para justificar seu pouco envolvimento ao longo do curso. Constantemente tinha problemas de frequência e apresentou reprovações em algumas disciplinas. Assim, quando observamos a lista que essa aluna propõe, podemos perceber que realmente ela esteve envolvida com sua elaboração, vivendo de fato a experiência cognitiva de aprender sobre números complexos. A sequência que utilizou, buscando trabalhar aquilo que considerava fundamental, evidencia que ela usou a elaboração e a resolução da lista como uma experiência metacognitiva. Isso reforça o valor da proposta que possibilita a cada aluno trabalhar de acordo com o seu próprio ritmo de aprendizagem.

A análise conduzida a partir de agora leva em conta apenas exercícios que envolveram os assuntos tratados na própria atividade 4

Uma questão elaborada pela aluna Maitê foi a seguinte:

O que são números complexos?

Foram números que surgiram devido à necessidade de resolver raízes negativas. Surge assim o número escrito na forma a + bi, onde i é unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$.

O nome complexo também pode significar algo que vai além do que antes era impossível.

Justificativa: ***este exercício ajuda o aluno a refletir o que está estudando.***

Não discutiremos o conteúdo da resposta; queremos focalizar a atenção para a justificativa que a aluna apresenta. Um dos objetivos da proposta era valorizar a ideia da reflexão nos processos educacionais. Quando observamos que uma aluna, já na quarta atividade, mostra-se atenta a essa questão da reflexão, a ponto de elaborar uma pergunta que traz como objetivo esse propósito, reforçamos nossas crenças pessoais de que o trabalho de formação de professores deve estar embasado em um processo reflexivo, utilizando todos os níveis de reflexão propostos por Schön (2000). A pergunta da aluna Maitê tem uma motivação pessoal: ela também deve ter pensado a respeito dessa questão. E, sensibilizada[58] pela importância que vislumbrou para os Números Complexos, quis expandir a experiência vivida para os demais.

O exercício apresentado pela aluna Cíntia permitiu um maior aprofundamento na exploração das propriedades de números complexos.

Sejam os complexos $z_1 = -1 + 2i$ e $z_2 = 3 + i$. Calcule:

a) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2}$

c) Compare os resultados.

Justificativa: ***trabalhar a multiplicação dos números complexos.***

Apesar de acreditarmos que a justificativa mereça um maior detalhamento, esse é um exercício que coloca a aluna um passo a frente em seu processo de aprendizagem. Ela não busca apenas entender o que significa o conjugado, mas trabalha para entender a implicação de seu uso na operação de multiplicação. Sem dúvida, para essa aluna, o desafio de trabalhar com o conjugado (experiência

[58] Entendemos que a aluna viveu uma experiência metacognitiva. E que, num segundo momento, as sensações vividas por ela passam a incorporar o conhecimento metacognitivo da mesma.

cognitiva) transformou-se em uma experiência metacognitiva. Pensamos que para responder ao último item, algo que consegue fazer de maneira correta, certamente ela teve que analisar os itens anteriores, refletir sobre cada um deles e a possibilidade de conexão entre eles. Cremos que exercícios como esse, que possibilitam a exploração e a investigação, são capazes de levar os alunos a um nível mais elevado de aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento da metacognição.

A aluna propõe uma experiência cognitiva e uma experiência metacognitiva ao solicitar a comparação entre os resultados obtidos nos dois primeiros itens. A partir dessa análise, pode-se concluir que o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados de dois números complexos quaisquer.

Encerrando a análise da atividade 4, discutimos a lista de exercícios apresentada pelo aluno Leandro, que pode ser considerado um dos alunos que possuíam um maior conhecimento a respeito de Números Complexos. Leandro sabia que era detentor desse conhecimento, o que pode ilustrar o seu nível de desenvolvimento metacognitivo do aluno. Representativa disso é a resposta que Leandro elaborou para a atividade 2, em que citou de forma detalhada o que sabia sobre números complexos: *histórico, potências de i, adição e subtração, multiplicação, conjugado, divisão, afixo, nº da fórmula geral (z = a +bi), representação gráfica, módulo, aplicação em equações algébricas*. Muitos estudantes, diferenciadamente de Leandro, não parecem ter desenvolvido os conhecimentos metacognitivos, sendo capazes de nomear o que estudaram, destacando o que aprenderam ou não.

Assim, estudar Números Complexos, para esse aluno, tinha uma conotação diferente. Enquanto para muitos essa era a primeira oportunidade de estudar o assunto, para o aluno Leandro tratava-se, na verdade, de uma oportunidade de revisar seus conhecimentos, aprofundando seu saber em alguns pontos que julgasse importante. Diante desse quadro, percebemos que sua lista de exercícios, se comparada com as demais, possui elementos mais elaborados, típicos de alguém que já possui conhecimento sobre o assunto.

Um dos exercícios que despertou nossa atenção foi o seguinte:

Considere os números complexos m, n, p e q vértices de um quadrado de lados paralelos aos eixos e com centro na origem. Qual o número complexo correspondente a m+n+p+q?

Justificativa: ***o aluno não apresentou os motivos para a sua escolha.***

A resolução apresentada foi a seguinte:

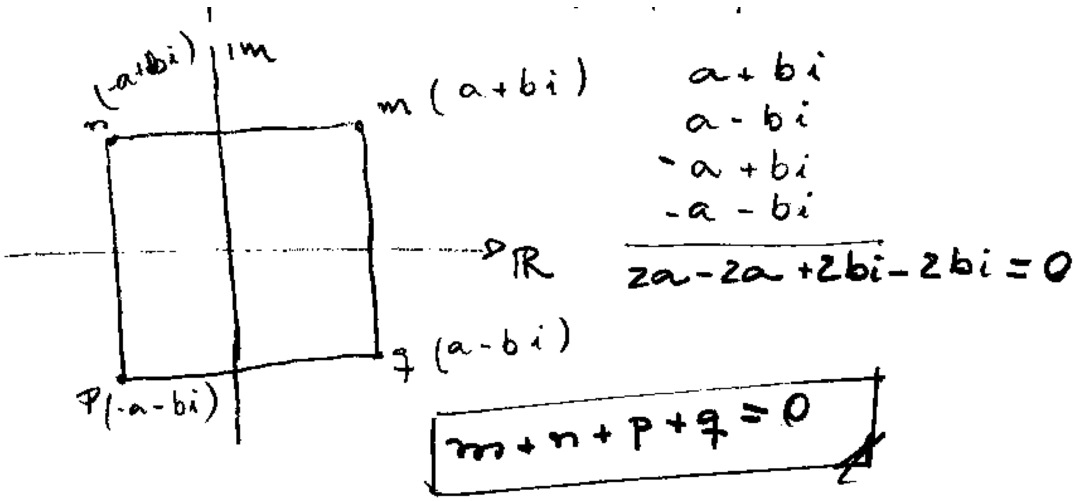


Figura 3: resolução apresentada pelo aluno Leandro.

Sem dúvida, se comparado com as demais listas, o trabalho elaborado por esse aluno é diferente. Para um leitor que possui um conhecimento considerável sobre Números Complexos, esse trabalho seria o mais desafiador.

Mas, apesar desse aspecto desafiador, não nos arriscamos a classificar essa como a melhor lista. Pensamos que cada lista foi elaborada de acordo com o conhecimento que cada participante possuía. Assim, uma lista será melhor quanto mais ela favorecer o desenvolvimento daquele que a elaborou. Esse ganho de conhecimento, significativo para alguns, e nem tanto para outros, demonstrará o real valor da lista, não podendo ser medido por alguém que não o próprio autor.

6.1.5 Atividade 05: Avaliando e reavaliando

Empenhados em propor para os estudantes experiências relevantes do ponto de vista de autorregulação de aprendizagem, a Atividade 5 consistiu em apresentar uma lista com oito exercícios sobre Números Complexos, para que inicialmente, sem resolver a lista, cada aluno classificasse cada exercício segundo o nível de dificuldade como: fácil, médio ou difícil.

O resultado dessa primeira avaliação dos exercícios, segundo o nível de dificuldade, é sintetizado no Quadro 10:

Exercício	Fácil	Médio	Difícil
Nº 1	7	3	3
Nº 2	10	3	0
Nº 3	11	2	0
Nº 4	2	4	7
Nº 5	5	4	4
Nº 6	4	3	6
Nº 7	2	4	7
Nº 8	6	4	3

Quadro 10 – Resumo da avaliação inicial, feita pelos participantes, sobre o nível de dificuldade dos exercícios que compõem a atividade 5.

No segundo momento cada aluno resolveu, individualmente e com auxilio de um material de apoio, a lista de exercícios proposta.

O aluno Leandro, do ponto de vista cognitivo, saiu-se muito bem, acertando quase todos os exercícios propostos (o que de certo modo já era esperado, pelo nível dos exercícios propostos ao longo da atividade 04 e pelo seu nível de conhecimento sobre o assunto).

Entretanto, ao resolver dois dos exercícios, cometeu os erros seguintes:

- ✓ na primeira questão - que envolvia a divisão de dois números complexos (tratados de forma literal) e o estabelecimento de condições para que o resultado fosse um número imaginário puro ou real – classificou-a (a questão) como fácil, mas não ao resolvê-la, não considerou que em um imaginário puro, além da parte real ser nula, sua parte imaginária deve ser diferente de zero;

- ✓ na sexta questão – uma equação envolvendo números complexos – que ele também havia classificada como fácil, cometeu um pequeno erro em um quadrado da soma, o que comprometeu a conclusão da questão.

De modo geral, podemos afirmar que esse aluno estava consciente ao fazer suas afirmações iniciais sobre o conteúdo da lista. De fato, sua análise inicial, apesar dos equívocos cometidos na resolução, estava coerente com seus conhecimentos, o que pode evidenciar um conhecimento sobre o próprio conhecimento, um autocontrole na condução de seus estudos.

O aluno Antônio apresentou uma lista rica em detalhes. Além da classificação inicial, reclassificou a lista após a resolução que preparou, permitindo que fizéssemos uma análise também da diferença de classificação que ele havia feito.

Assim como o aluno Leandro, ao resolver a primeira questão, Antônio (que havia inicialmente classificado a questão como fácil) também se esqueceu que em um número imaginário puro, sua parte real deve ser igual a zero. Mesmo assim, em sua reclassificação também coloca a questão como fácil.

Na quinta questão – que solicitava a divisão $\frac{1+2i}{1-i}$ – Antônio altera a classificação. Inicialmente, considerava a questão como média, mas após a sua resolução, classifica-a como uma questão fácil. A resolução apresentada está correta, sendo acompanhada de uma discussão teórica detalhada da solução que propõe.

A sexta questão – uma equação envolvendo números complexos – é também reclassificada por Antônio, que eleva o nível de dificuldade da questão de médio para o nível difícil. Apesar dessa dificuldade declarada, o aluno consegue resolvê-la corretamente.

È interessante fazer alguns comentários a respeito desse aluno. Tratava-se de uma pessoa com idade acima da média da turma, mas que estava bastante empenhado no curso. Seus conhecimentos prévios sobre números complexos eram bem amplos, como ele ressalta na resposta apresentada na atividade 2:

I. Até o dia 12 de fevereiro de 2008, quando deu início à revisão sobre números complexos, o que ainda estava bem 'gravado' era: a forma algébrica de um número complexo z = a + bi; a representação do número real no plano

– plano de Argand-Gauss; a igualdade de números complexos; o conjugado de um complexo; as operações com complexo, exceto a divisão; as potências de i.

II. Sabia da sua representação na forma trigonométrica, porém, com o passar dos anos, sinto que é preciso fazer uma revisão do assunto.

NOTA: As operações do item I estão mais claras devido à revisão que tive de fazer para explicar a alunos candidatos ao cargo de Técnico Judiciário, no ano de 2007.

A riqueza de detalhes da resposta do aluno demonstra conhecimento de suas reais possibilidades. Em alguns momentos, o aluno reconhece que é necessário rever alguns pontos, quer seja pela demanda da profissão, quer seja pela defasagem de tempo desde a última época em que o conteúdo foi estudado. Ao relatar aquilo que é de seu domínio, e também aquilo que não é, evidencia desenvolvimento dos aspectos metacognitivos de sua formação. Esse conhecimento metacognitivo certamente o auxiliou no direcionamento que deu à nova revisão de Números Complexos, feita agora no contexto da disciplina em curso.

É esse tipo de conhecimento que esperávamos desenvolver em nossos alunos, futuros professores. Através de uma reflexão sobre seus saberes, cada professor pode direcionar esforços para trabalhar naquilo que acredita necessitarem de maior aprofundamento de sua parte. Como afirma Ponte (1994), é necessário que o professor seja um ser ativo em seu próprio processo de desenvolvimento profissional. Assim, ao conhecer-se de maneira mais profunda, sob o ponto de vista de conhecimentos e experiências cognitivas e metacognitivas, o profissional pode direcionar seus passos, escolhendo o que pretende estudar e de que maneira o fará.

Uma aluna que enfrentou grandes dificuldades para a resolução da lista foi Maitê. Suas classificações oscilaram bastante, mostrando que a mesma não se sentia segura em relação aos seus conhecimentos. Para ilustrar como a aluna tinha um comportamento oscilante, relataremos seu trabalho por completo:

Exercício	Classificação inicial	Classificação final	Resolução apresentada
Nº 1	Média	Fácil	errada
Nº 2	Fácil	Fácil	Correta
Nº 3	Média	Fácil	Correta
Nº 4	Média	Difícil	Errada
Nº 5	Difícil	Fácil	Correta
Nº 6	Difícil	Médio	Correta
Nº 7	Difícil	Médio	Correta
Nº 8	Difícil	Difícil	Não apresentou

Quadro 11 – Classificação inicial e final, feita pela aluna Maitê, sobre o nível de dificuldade dos exercícios que compõem a atividade 5.

A classificação inicial apresentada nos pareceu precipitada, como se tudo para essa aluna fosse complicado demais. Pareceu-nos que, devido ao seu desconhecimento a respeito de seu próprio saber, classificar a maioria das questões como difícil para ser o caminho mais rápido de modo a evitar surpresas futuras.

Pensando como formadores de professores, atitudes como a dessa aluna causa-nos preocupação. Qual a postura que essa futura professora apresentará em sala? Será que uma professora que faz julgamentos tão precipitados não pode influenciar negativamente na formação de seus alunos? Será que sua concepção de Matemática é de algo complexo, difícil? Será que essa concepção será percebida pelos seus alunos?

O incentivo ao desenvolvimento metacognitivo parece ser relevante para essa aluna. Reconhecer as dificuldades encontradas, mas saber como trabalhar para superar tais dificuldades pode auxiliá-la em seu trabalho como aluna e futuramente como professora em sala de aula.

As alunas Carolina e Geisa também alteraram a classificação de muitos dos exercícios após a resolução dos mesmos. A aluna Geisa, por exemplo, considerou a questão 6 inicialmente como difícil. Porém, após a sua resolução (que fez de modo correto), classificou-a como fácil. A aluna não conseguiu resolver a questão número 8 – determine os valores de x de modo que o número complexo $z = 2 + (x - 4i) \cdot (2 + xi)$ seja real – considerando-a como difícil, apesar de acreditar inicialmente que se tratava de uma questão com nível médio de dificuldade.

Carolina, por sua vez, classifica a questão número 5, inicialmente como apresentando um nível médio de dificuldade, mas, ao resolvê-la, muda sua classificação para fácil. Sua justificativa para classificá-la de fácil foi que *já tinha praticado muitas vezes*. Aqui, nos questionamos: a aluna não estava atenta no momento inicial ou realmente não se considerava capaz de resolver a questão? Cremos que, de fato, a aluna não esteve atenta aos detalhes, pois sua resolução é correta, justificando de modo claro a sua mudança de classificação.

Um outro ponto a ser destacado em relação à aluna Carolina é um comentário que a mesma faz sobre a questão número 8: "*Este exercício é por mim julgado difícil e complicado, pois tive que recorrer à uma fonte para continuar a resolução e chegar a conclusão. Ele nos permite raciocinar, traz muitas informações e deve-se estar atento a elas*." Essa indicação da aluna parece-nos cheia de detalhes. De fato, a aluna viveu uma experiência cognitiva, já que teve que usar uma outra fonte, trabalhar e pensar sobre a resolução que apresentaria. Como afirma Polya (1995), a aluna resolveu um problema, já que teve que buscar novos caminhos, trabalhar em prol de sua resolução. E essa experiência cognitiva acaba por tornar-se também uma experiência metacognitiva, pois, como afirma a própria aluna, *sua resolução traz novas informações e favorece o raciocínio*. Vemos no trabalho com essas novas informações e no favorecimento do raciocínio algumas das reflexões propostas por Schön (2000). Certamente, o trabalho da aluna foi permeado por idas e vindas, auxiliadas por seu pensar sobre o que fazia e o que poderia fazer para alcançar êxito.

A aluna Rita mostrou-se empenhada nas atividades, buscando estudar o assunto, imprimindo seu próprio ritmo. Sabíamos que ela enfrentaria dificuldades ao resolver a lista, mas queríamos observar se ela apresentaria uma evolução do ponto de vista cognitivo.

A aluna errou algumas questões (números 1 e 4). Não apresentou resolução para questões 5, 6 e 7, que já havia classificado como difícil. Mas mostrou-se coerente com as classificações que fez para as questões 2 e 3, tratando-as como questões fáceis e resolvendo-as de modo correto.

Entretanto, na questão número 8, mesmo considerando-a difícil (fato que confirma no momento posterior a resolução), resolve-a de modo correto. Entendemos isso como um sinal de evolução do ponto de vista cognitivo.

Podemos nos questionar se essa evolução e empenho também não pode ser fruto de um desenvolvimento metacognitivo. Se conhecer, como afirma Frota (2009), inclui também sentimentos, pensamos se essa aluna, ao sentir-se confortável para imprimir aos seus estudos um ritmo que ela julga mais adequado também não apresenta um desenvolvimento da metacognição.

Em nossos anos de atuação como docente, percebemos que muitos alunos não se sentem capazes de aprender Matemática, como se a matéria fosse algo que jamais poderiam alcançar. Ao experimentarem uma sensação mais agradável, um contato que lhes permita vislumbrar a Matemática como algo possível também a eles, mudam seu comportamento e passam a ser mais atuantes no cotidiano da sala de aula. Acreditamos que professores que vivam situações como essa podem criar situações favoráveis de ensino e aprendizagem em suas salas de aula.

Queremos ressaltar também que sem a participação e o engajamento dos alunos nenhum programa ou plano de ação pode ser conduzido. Durante o curso a aluna Cristiane sempre manteve-se distante e pouco ativa. Desde que implementamos a proposta, essa aluna mostrou-se contrária a ideia de trabalhar de modo autônomo, sempre alegando que não conseguia estudar sozinha. Em uma de nossas intervenções, colocamo-nos a disposição para auxiliá-la em suas dúvidas, mas solicitamos que sempre buscasse identificar quais eram essas dúvidas. Não nos recordamos de um momento, ao longo do curso, em que essa aluna apontou, com precisão, qual era a sua real dúvida.

Nessa atividade, mais uma vez, ela relata suas dificuldades, alegando mais uma vez que não conseguia estudar sozinha: "*Eu não consegui fazer, eu copiei de uma colega e deixei algumas sem fazer, pois ela também não sabia*." Na verdade, interpretamos que a aluna esperava uma atuação tradicional do professor, cabendo a ela estudar aquilo que o professor havia 'passado'. Em nosso entendimento, a aluna via o professor como o elemento central do processo, aquele que deve ensinar o que é importante, o que deve ser aprendido, e ao aluno (no caso, ela) cabe reproduzir aquilo que o professor.

Essa aluna, ao atuar como docente, tenderá a centrar o processo de ensino-aprendizagem na sua própria pessoa, como professora, cabendo aos alunos o já desgastado papel de receptores. Seu comportamento pode ser indicativo que mesmo uma proposta elaborada cuidadosamente pode não surtir os efeitos pretendidos, caso os participantes não se engajem de modo efetivo.

Um outro depoimento preocupante foi dado pela aluna Letícia: "*As demais questões foram consideradas médias ou difíceis, mas não expressei os cálculos pelo receio de estarem erradas. Por isso, prefiro não expressar os cálculos aqui*."

Não expressar um raciocínio, por medo de que esteja incorreto, é preocupante, considerando-se ser a postura de um futuro professor. No processo de aprendizagem, o erro é parte integrante, algo inerente a essa situação. Vemos nesse depoimento a reprodução da crença de um professor infalível, que jamais se engana ou comete erro. A perpetuação dessa crença é maléfica, pois imputa uma carga bastante pesada nos ombros desse profissional. É pela reflexão de suas ações, com erros e acertos, que um professor pode evoluir como agente do processo educativo.

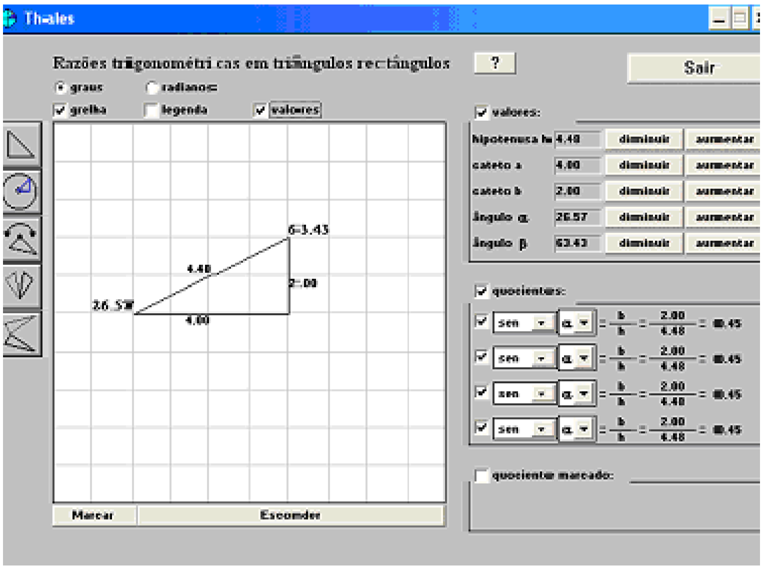
6.1.6 Atividade 06: Interagindo com um software de apoio

Essa atividade marcou o início dos estudos sobre trigonometria. Nela fizemos estudos sobre triângulo retângulo, utilizando pela primeira vez o software Thales.

Na 1ª tarefa - uma figura formada por dois quadrados com um lado em comum, na qual solicitávamos que fosse calculado o valor de um ângulo indicado - tínhamos como objetivo promover uma primeira experiência metacognitiva. A tarefa podia ser simples, mas envolvia questionamentos que exigiram uma tomada de decisão, interações com o exercício e reflexões: como representar esse desenho no software? Qual o tamanho de lado a ser adotado? Qual a relação existente entre os catetos dessa figura? O ângulo que se procura é oposto a que cateto?

Todas essas perguntas, em nosso entendimento, deveriam ser respondidas antes da utilização do programa; a tarefa exigia o planejamento detalhado das ações que seriam executadas em seguida. A figura a ser desenhada possuía particularidades que somente poderiam ser percebidas se os alunos compreendessem de fato o problema e fizessem uma representação adequada dessa figura no computador.

De modo geral, os alunos perceberam a necessidade de trabalhar com um triângulo retângulo que tivesse um cateto de medida igual ao dobro do outro. Entretanto, percebemos um nível muito baixo de preocupação com as respostas apresentadas. Muitos pareciam estar preocupados apenas em representar as questões no software, anotar os dados e encerrar a tarefa. Em alguns casos faltou uma reflexão acerca das tarefas desenvolvidas. De modo figurado, nessa interação entre aluno e exercício, parece ter faltado um maior diálogo entre o que se pretendia e o que se respondeu. Para ilustrarmos situações como essa, vejamos o caso da dupla Cássio e Rita:



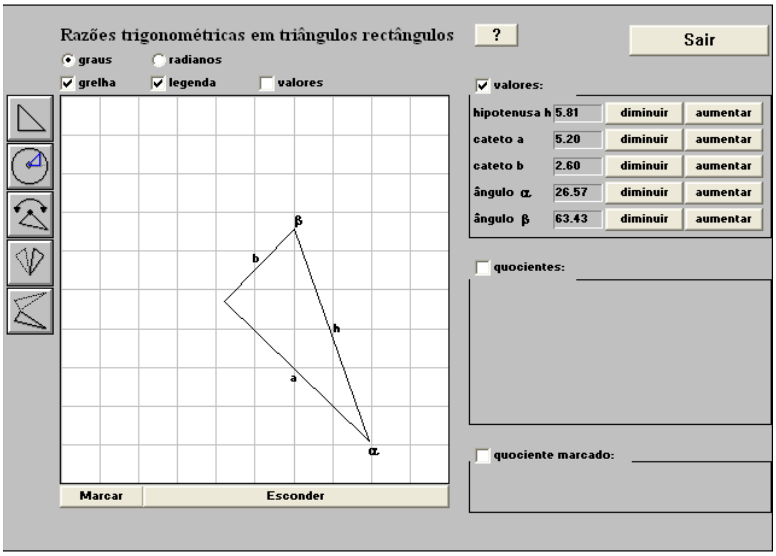
Descobrimos que o ângulo Beta vale 26,57

Figura 4: resolução apresentada pelos alunos Rita e Cássio
para a questão 1 da atividade 06.

A resposta da dupla não é a correta. Na verdade, os dois alunos não perceberam as particularidades da questão ou não estavam atentos a elas. Apesar de terem desenhado um triangulo com as características da figura proposta, faltou-lhes interagir com o software e não simplesmente anotar os resultados apresentados. O ângulo beta proposto pelo programa não é o mesmo ângulo beta mencionado na questão. Mesmo com o triângulo desenhado numa posição diferente daquela proposta na tarefa, um olhar um pouco mais atento os faria perceber que a pergunta fazia menção ao ângulo oposto ao maior cateto.

Lembrando as etapas propostas por Polya (1995), faltou a essa dupla críticar a sua própria resposta. Ou, em uma perspectiva que envolve planejar, interagir e avaliar (ARTZT e ARMOUR-TUOMAS, 2002), a dupla não fez um planejamento, interagiu muito pouco e não avaliou o que havia feito.

Uma resposta que contrasta com a resposta dada pela dupla anterior foi a apresentada pelo aluno Victor; julgamos essa apresentação mais bem elaborada e com um linguajar matemático mais adequado:



Como o exercício nos mostra um triângulo retângulo cuja razão entre os catetos igual a 2, construir um triangulo com a mesma razão entre os catetos, e observamos que o ângulo em questão mede 63.43 graus.

Figura 5: resolução apresentada pelo aluno Victor
para a questão 1 da atividade 06.

Mesmo sem uma figura colocada na mesma posição que a tarefa propõe, Victor interage bem com o software, preparando-o para fazer coincidir o ângulo beta da tarefa com o ângulo beta apresentado na tela. Percebe-se que ele consegue ir além de um simples posicionamento da figura (que não necessariamente deve estar na mesma posição da folha de atividades) e caminha no sentido de um entendimento maior que envolve e relação entre ângulo e cateto oposto. Certamente, para que esse maior entendimento acontecesse, o aluno teve que pensar sobre o exercício, planejar e monitorar adequadamente suas ações, questionando se elas correspondiam aos pospostos da tarefa. Podemos afirmar que existe, como nos termos de Schön (2000), uma reflexão na ação e sobre a ação.

A questão número dois – que primeiro solicitava a construção de um triângulo retângulo com um ângulo de 32° para em seguida ques tionar os valores de seno, cosseno e tangente desse ângulo e de seu complementar – não apresentou respostas que pudessem ser destacadas

A questão de número 3 era composta de quatro subitens. Optamos por fazer uma análise de cada um desses itens.

Na letra a – Um avião levanta voo formando um ângulo de 20° com o solo. Depois de percorrer 100º metros, que altura ele atinge? – uma possibilidade era utilizar uma escala para representar a figura na tela do programa. Eis algumas respostas apresentadas por diferentes alunos:

- ✓ Os alunos Maitê e Alberto inicialmente usaram uma transformação adotando a hipotenusa com medida 10. As duplas Marcelo – Cristiane e Geisa - Carolina adotando o mesmo procedimento consideraram a hipotenusa como 5. Antônio e Wilson adotaram escala de medida de 1:100. O aluno Victor adotou uma escala 1cm = 200m. (não sabemos como ele adotou essa escala, já que a tela do software não oferece qualquer unidade de medida). As alunas Aparecida e Gisele dizem ter adotado uma *escala apropriada*, mas não indicam essa escala apropriada (ao observamos a figura vemos que adotam a hipotenusa como medida 10). Todos esses alunos apresentaram uma resolução correta;
- ✓ A aluna Cíntia escreveu apenas “0,94 * 1000”. Analisando sua resposta, concluímos que ela utiliza o ângulo de 70° (sen 70° =0,94). Entretanto, não percebe que, ao mudar o ângulo, também deveria mudar a razão trigonométrica (ao invés de seno, a razão a ser usada era o cosseno) Nossa impressão é que parece ter faltado a ela rever o resultado, críticando-o, cumprindo a última fase das etapas de Polya (1995). Por fim, ficamos com a impressão de que essa aluna possui a crença de que basta inserir os dados no programa que o resto o programa fará;
- ✓ Os alunos Rita e Cássio simplesmente colocaram o valor 1000 na hipotenusa e anotaram os dados. Parece faltado uma análise crítica dos alunos para resolver a questão. Não perceberam, por exemplo, que apesar de a hipotenusa, no programa, ter medida 1000, o ângulo não ficou com medida 20º, como pedido no enunciado. Um pouco mais: não deram a resposta pedida. Apenas apresentaram a tela com alguns valores definidos, mas não apontaram, entre aqueles valores, o que corresponderia à resposta correta;

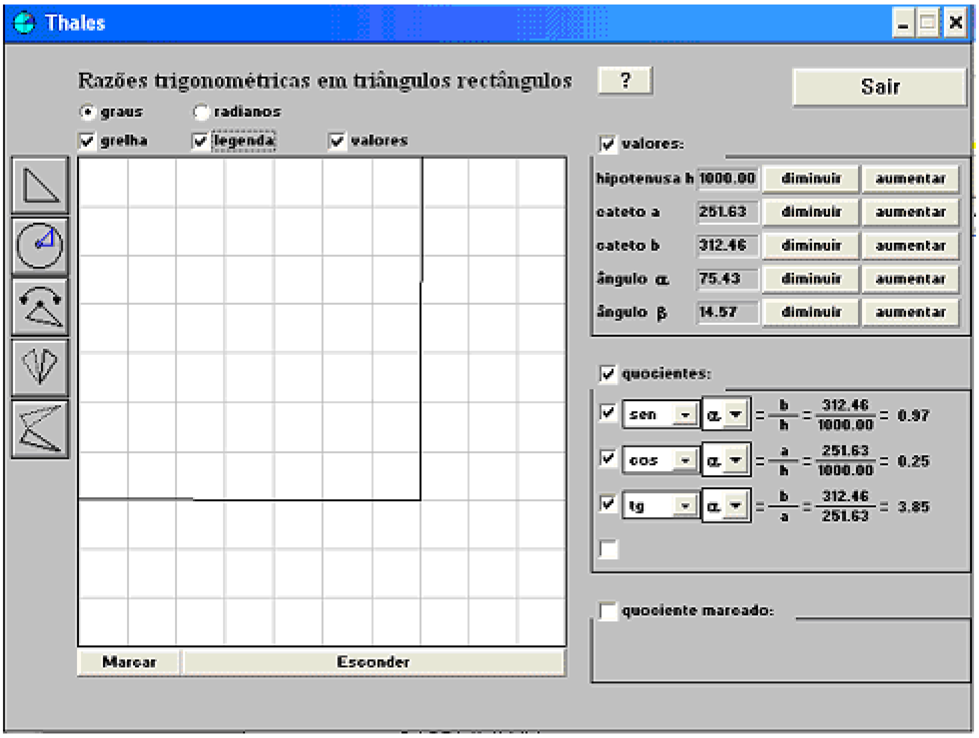


Figura 6: resolução apresentada pelos alunos Rita e Cássio para a questão 3. letra a, da atividade 06.

- ✓ O aluno César optou por usar o software apenas para obter o valor do seno do ângulo de 20º. Entretanto, ao analisarmos a figura que utiliza para justificar suas respostas, percebemos um pequeno erro de colocação do valor 1000, que ao invés de ser colocado como hipotenusa foi colocado como cateto adjacente ao ângulo de 20º.

A letra b da questão 3 era uma variante da letra a – apenas mudava o valor da distância percorrida pelo avião para 1500 metros, mantendo a pergunta sobre a altura em que o avião se encontrava. Mesmo assim, alguns alunos apresentaram respostas que merecem ser destacadas:

- ✓ Os alunos Maitê e Alberto explicaram que adotaram o mesmo procedimento da letra a. Entretanto, mudaram a escala adotada: a hipotenusa, que antes foi adotada como 10, agora passou a ser adotada como 1,5. Mesmo com a mudança, os alunos apresentaram a resolução correta;
- ✓ Os alunos Antônio e Wilson perceberam tratar-se apenas de uma questão de proporcionalidade. Assim, observaram a razão existente entre os números 1000 e 1500 e a aplicaram na reposta do item a. Essa resolução nos faz lembrar das ideias defendidas por Schoenfeld (1987): não basta saber várias formas de resolver uma questão; o importante é perceber a que melhor se

adapta àquela situação. Esses alunos, certamente, poderiam utilizar novamente o programa que talvez fosse a saída mais cômoda. Mas, ao invés disso, perceberam que a proporcionalidade também poderia ser usada para encontrar a resposta;

- ✓ A aluna Cíntia mais uma vez mostra que fez a atividade de modo muito displicente, sem refletir sobre o que fazia. Observe sua resposta:

  *15*1000=5130. O* que significa isso?

  Vimos que ela poderia ter percebido, assim como fizeram Antônio e Wilson, que existia uma proporcionalidade entre as respostas das letras a e b. Mas, mesmo que tivesse percebido essa proporção e errado ao não usar o valor da constante de proporcionalidade (1,5) correto, o valor encontrado (5130) não é o resultado da multiplicação que ela propõe.

  Parece haver falta de atenção ou falta de crítica ao resultado encontrado, a resposta (5130) não faz sentido num triângulo retângulo que tem hipotenusa igual a 1500. Simples falta de atenção ou falta de um processo de regulação?;

- ✓ Os alunos Rita e Cássio mais uma vez tentaram colocar o valor indicado no programa. Como não conseguiram, apresentaram apenas uma tela sem qualquer indicação de resposta para a questão. A dupla se revelou pouco empenhada em resolver as questões propostas; também não apresentava modos de gerenciamento ou de integração com colegas ou com o professor;

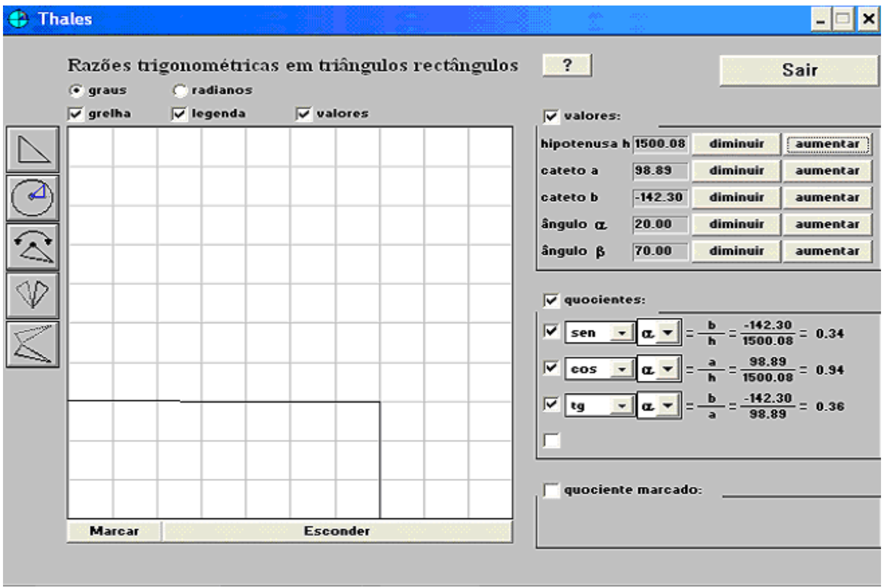


Figura 7: resolução apresentada pelos alunos Rita e Cássio
para a questão 3. letra b, da atividade 06.

Podemos nos questionamos como será o modo de atuar desses alunos na sala. Ainda que Rita colocasse que não pretendia atuar, Cássio já ministra aulas em escolas públicas da região. Apesar da formação, será que sua atuação não é influenciada por sua pouca disposição de estudar, questionar a si mesmo? Que tipo de conhecimento produz ou de que maneira trabalha conteúdos com seus alunos?

A letra c da questão 3 - O piloto deseja atingir uma altura superior a 700 metros ao final de 2000 metros de percurso. Para isso, ele terá que levantar voo com um ângulo superior ou inferior a 20º? - permitia que os alunos especulassem, fizessem tentativas usando o programa. Como eram alunos do sétimo período, esperávamos respostas elaboradas, com boas justificativas. Entretanto, algumas respostas ficaram a desejar nesse aspecto.

Um caso que pode ser representativo é a resposta de Marcelo e Cristiane: *Construímos um triângulo com ângulo de 20 graus com a horizontal, como não podemos colocar 2000m na hipotenusa, então colocamos 5, com isso encontramos 1,71 m que corresponde a 684 metros de altura (quatrocentas vezes), sendo assim, como a altura tem que ser superior a setecentos metros, o ângulo terá que ser superior a 20 graus, tendo em vista que a hipotenusa continuará com 2000 metros*. Como os alunos sabiam que aumentando o ângulo aumentaria o cateto oposto?

Algumas respostas nos chamaram a atenção pela pouca elaboração ou pelos erros cometidos. Por exemplo, novamente os alunos Rita e Cássio apresentaram resposta sem qualquer sentido (afirmaram que o ângulo deveria ser menor que 20º). Já as alunas Geisa e Carolina deram como resposta que *superior, porque está no mesmo espaço*, que não conseguimos associar a nada relevante. O aluno César, talvez por ter se equivocado na colocação do valor percorrido, resolveu pelo uso da relação de tangente, quando o correto era o uso do seno.

O item d da questão 3 solicitava que os alunos criassem novos itens a partir da situação da letra a. Ao elaborar perguntas, o aluno pode novamente exercer a função simulada de professor e escolher os pontos que quer enfatizar. Essa tarefa pode revelar as dificuldades encontradas por determinado aluno ou o que ele julga fundamental ser conhecido por um aluno sobre esse tópico.

Infelizmente, algumas perguntas ficaram sem sentido por apresentarem informações incompletas ou informações absurdas:

- ✓ *Qual será a altitude do avião se o ângulo for 60 graus? (Maitê e Alberto).*

Qual distância o avião percorreu? É possível um avião levantar voo com um ângulo de 60° em relação ao solo?

- ✓ *Se o piloto atingir a altitude de 800 metros, qual será o ângulo? (Maitê e Alberto)*.

  Da mesma forma que a anterior, qual distância foi percorrida para se atingir tal atitude?

- ✓ *Qual o ângulo correspondente a uma altura de 2000 m? (Pedro)*

  Qual distância foi percorrida para se atingir essa altura?

Outras repetiram perguntas já feitas anteriormente, quer seja no item a, quer seja no item b:

- ✓ *Após percorrer 1200m com um ângulo de decolagem de 30 graus, qual será sua altura? (Cristiane e Marcelo)*
- ✓ *Se o avião levantar voo com um ângulo de 45º, qual será sua altura após 400m percorridos?(Cíntia)*
- ✓ *Tendo percorrido 2500 metros e atingido uma altitude de 600 metros, qual foi o ângulo formado com o solo para que esse avião levantasse voo? (Carolina e Geisa)*
- ✓ *Qual a altura do avião que levanta voo formando um ângulo de 28º com o solo, após 200 metros percorridos?(Gisele e Aparecida)*

As tentativas de variação das perguntas feitas ou evidenciam muita dificuldade na redação ou esbarram em absurdos:

- ✓ *Sabendo-se que o município vizinho mais próximo do aeroporto fica a 3000 metros em linha reta, e que o avião levanta voo com um ângulo de 20 graus. Quanto o avião terá andado para iniciar o seu voo sobre o referido município? (Antônio e Wilson)*

  Redação bastante confusa. Os dados colocados e a pontuação dificultam a interpretação.

- ✓ *Supondo que um avião levante vôo com velocidade constante de 800 km/h, qual será o ângulo formado com o solo se após 6 minutos de voo sua altitude for de 3880 metros? (Victor)*

  Um avião consegue decolar à uma velocidade de 800 km por hora? Nos parece que a questão envolve mais conceitos ligados à Física do que à Matemática.

Nas duas ultimas questões esperávamos que os alunos refletissem que as medidas não podiam ser expressas na tela do software e que para resolvê-las seria necessário usar proporcionalidade. Infelizmente, essas perguntas não apresentaram respostas que, em nosso entendimento, mereçam destaque.

Numa analise final da atividade, ressaltamos o fato de que muitos alunos ainda possuem a crença de que o computador ou uma máquina pode, apenas com a inserção dos dados, resolver o problema. De fato, nos problemas tratados nessa atividade, o computador, na maioria das vezes, já forneceria os resultados requisitados. Entretanto, a inserção dos dados no programa nem sempre foi algo simples e em vários momentos exigiu planejamento e uso de conteúdos não relacionados à atividade (por exemplo, a atividade trabalhava com relações trigonométricas no triângulo retângulo, mas exigiu conhecimento de proporcionalidade).

Outro ponto que destacamos é que apesar de a Trigonometria ter sido um assunto que integrou a ementa coletiva, como um dos tópicos que os alunos gostariam de estudar, as respostas apresentadas, quer seja pela pouca elaboração, quer seja pelos resultados incoerentes, não revelam tanto interesse em trabalhar com esse tópico.

6.1.7 Atividade 07: Refletindo sobre o próprio conhecimento

Dando prosseguimento aos estudos sobre Trigonometria, preparamos uma atividade envolvendo unidades de arcos e ângulos, além das noções iniciais sobre círculo (ou ciclo) trigonométrico. A atividade possuía oito exercícios, sendo que três delas eram destinadas ao trabalho sobre a relação entre comprimentos de arcos e raios. Nas demais, procuramos fazer com que os alunos debatessem os conceitos e refletissem sobre o próprio conhecimento.

As duas primeiras questões estavam interligadas. Na primeira, cada dupla definiria, de acordo com seu próprio entendimento, grau e radiano. Na segunda, com o apoio de bibliografia escolhida pela própria dupla, os dois alunos criticariam à própria resposta.

A dupla formada por Leandro e Cristiane respondeu que o radiano *é um ângulo correspondente a um arco AB = r*. Na crítica elaborada sobre a própria resposta, afirmam que *faltou apenas um pouco mais de rigor matemático*.

Pensamos que o que faltou não foi um maior rigor matemático. Na verdade, a resposta apresentada pela dupla está errada, pois nem o radiano é um ângulo (é uma unidade de medida) e o que corresponde ao raio não é o arco AB, mas sim o seu comprimento. Infelizmente, a dupla não percebeu o erro cometido, mesmo com um material de apoio em mãos.

A dupla formada por Antônio e Aparecida respondeu que grau era *unidade de medida de ângulo* e que radiano era *unidade de medida de arco, cujo arco possui a mesma medida do raio*.

Ao apresentarem a crítica, disseram que não alterariam a resposta sobre grau. Julgamos essa não alteração, do ponto de vista cognitivo, um erro. Apesar de utilizarem uma bibliografia de apoio, os alunos não pareciam estar atentos à diferença entre a resposta que apresentaram e a proposta pela bibliografia.

Para a resposta que apresentaram para radiano, propuseram uma pequena alteração. A nova redação ficou assim: *unidade de medida de arco, cujo comprimento do arco é a mesma do raio da circunferência que o contém*.

De fato, parece existir uma evolução cognitiva, uma constatação de que a resposta não era a mais adequada. O que gostaríamos de enfatizar é que a própria dupla chega a essa constatação; não é um agente externo que indica o que deve ser mudado, mas sim a própria dupla aponta aquilo que acredita necessitar de revisão. Isso pode evidenciar uma evolução do processo de autorregulação da dupla.

Atividades como essa – permitir que o próprio aluno levante os questionamentos sobre o seu saber - poderiam ser, em nossa opinião, mais trabalhadas em nossas escolas, inclusive no ensino fundamental e no ensino médio. Isso pode servir como um elemento que venha favorecer o desenvolvimento da metacognição.

Uma outra questão que permitiu um trabalho mais autônomo dos alunos foi a de número 6, onde pedimos que planejassem uma aula sobre ciclo trigonométrico, destacando os pontos fundamentais a serem abordados. A ideia de planejar uma aula, algo que enfatizamos bastante em nosso proposta, encontra embasamento em nossos referenciais como, por exemplo, Arztz e Armor-Thomas (2002).

Nessa tarefa de preparação de uma aula a dupla que mereceu maior destaque foi a formada pelas alunas Carolina e Geisa. Buscando deixar sua atividade bem completa, descreveram passo a passo como seguiriam com a aula e o que destacariam em cada momento (Anexo A).

Parece-nos, pelo trabalho apresentado, que antes de prepararem a aula, as alunas estudaram atentamente o assunto. Somente depois desse estudo, elas concretizaram o planejamento seguindo os passos que utilizaram para estudar (ou revisar) o assunto. Ou seja: a experiência de planejarem uma aula sobre ciclo trigonométrico inicialmente foi uma experiência cognitiva.

Os demais alunos não encararam a atividade da mesma forma que a dupla Carolina e Geisa. As opções feitas pelas outras duplas mostraram respostas curtas, sem maiores detalhamentos. Muitos, na verdade, apenas apresentaram suas opiniões a respeito do que deveria ser enfatizado.

Para as alunas Letícia e Maitê, *é fundamental o conhecimento das medidas, como grau, radiano e suas relações. A visualização do ciclo trigonométrico*. Pensamos que as alunas enfatizam aquilo que possuem maior dificuldade, recorrendo ao auxílio do elemento visual para reforçar sua aprendizagem.

Para os alunos Pedro e Victor, *seria fundamental comentar que, mesmo trabalhando num círculo, as medidas de seno, cosseno e tangente são retiradas das relações de um triângulo retângulo, enfatizando que a medida do raio não altera os valores das relações trigonométricas*. Eles possuíam um conhecimento prévio maior sobre Trigonometria do que algumas das outras duplas, o que lhes permitiu planejarem a aula de um modo diferente do que, por exemplo a dupla formada pelas alunas Carolina e Geisa. Enquanto a dupla de alunas coloca seu foco nas atividades destinadas ao círculo trigonométrico, a dupla de alunos já vislumbra uma interligação entre o estudo do círculo trigonométrico e as funções circulares.

De modo mais pontual, Marcelo e César citam os pontos que destacariam: *falar sobre as unidade de ângulos e radianos; quadrantes; círculo de raio igual a 1; definição dos sentidos positivo e negativo; definição dos eixos do seno e do cosseno*. Discordamos apenas do último ponto, mas entendemos que os demais fazem parte de uma aula que se destina a trabalhar o ciclo trigonométrico.

Uma resposta diferente foi apresentada pela dupla Cássio e Rita[59]: “*o que nós vemos que deve ser fundamental é o total domínio do aluno em plano cartesiano, onde ele terá noção dos quadrantes, pares ordenados e localização no plano dos pares ordenados. Enfatizar as operações utilizando grau, minuto e segundo”*. Não entendemos bem os motivos que levaram os alunos a optarem pelo trabalho com as unidades de medidas de arcos; já a preocupação com um possível trabalho envolvendo o plano cartesiano é interessante, pois, sem um conhecimento desse assunto, pode ser dificultado o trabalho com o ciclo trigonométrico.

Numa análise final da atividade, parece-nos que a mesma representou para alguns uma boa experiência, tanto do ponto de vista cognitivo - com a aprendizagem ou revisão de conteúdo - bem como uma projeção de ação cotidiana de um professor, já que puderam planejar uma aula sobre círculo trigonométrico.

6.1.8 Atividade 08: Aprofundando os estudos sobre Trigonometria

Após estudarmos as razões trigonométricas em um triângulo retângulo na atividade 6 e iniciarmos os estudos sobre a trigonometria na circunferência na atividade 7, entendemos que esse era o momento de introduzirmos o trabalho a respeito das funções circulares. Para isso, usamos algumas funcionalidades que o software Thales – instrumento de apoio que optamos por utilizar - nos oferecia e elaboramos algumas questões que deveriam ser resolvidas, preferencialmente, com o auxílio desse software.

O primeiro exercício[60] proposto pode ser dividido em duas partes:

- ✓ Revisão de conceitos já estudados nas atividades anteriores: a definição de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e considerações sobre o ciclo trigonométrico;
- ✓ Questionamentos sobre a representação do seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico, além das relações existentes entre essas mesmas razões.

---

[59] Interessante perceber a mudança de postura da aluna Rita. Enquanto mostrava-se bem ativa no trabalho com números complexos, no estudo de trigonometria sua participação deixou muito a desejar.

[60] A perguntas utilizadas fazem parte do próprio software utilizado.

Apesar de a primeira parte da questão já ter sido trabalhada no curso, alguns alunos, mesmo tendo participado das atividades anteriores, ou não fizeram a atividade ou disseram que não sabiam as respostas para os questionamentos.

Por exemplo, as alunas Cristiane e Cíntia disseram que não sabiam qual seria a definição do seno de um ângulo. Já Cássio e Rita afirmaram: "*Não tenho certeza. Por enquanto, prefiro não opinar, minhas ideias estão muito soltas, sem rumo, às vezes acho que sei, mas na verdade não sei nada sobre o assunto, tanto é que trigonometria foi um dos assuntos que listei para ser estudado, juntamente com números complexos e jogos.*"

Essa postura, que parece demonstrar pouco empenho por parte das alunas acabou interferindo no rendimento deles. Novamente, percebemos que tais alunos adotavam uma 'atitude de espera', aguardando que o professor assumisse um posicionamento tradicional, ministrando a aula, determinando aquilo que deveria ou não ser estudado.

Na segunda questão dessa atividade, propusemos que os alunos trabalhassem explorando o programa, buscando conhecer as funcionalidades oferecidas. Esperávamos que os alunos estivessem livres nesse momento, utilizando o programa de modo bem intuitivo.

Optamos por esse programa, pois mesmo com uma limitação de resolução gráfica, ele oferece oportunidades de interação e obtenção de figuras, que não podem ser obtidas tendo apenas o recurso de um quadro, por exemplo. Uma funcionalidade que julgamos interessante é a oportunidade de visualizarmos o gráfico de uma função circular a medida que evoluímos no ciclo trigonométrico.

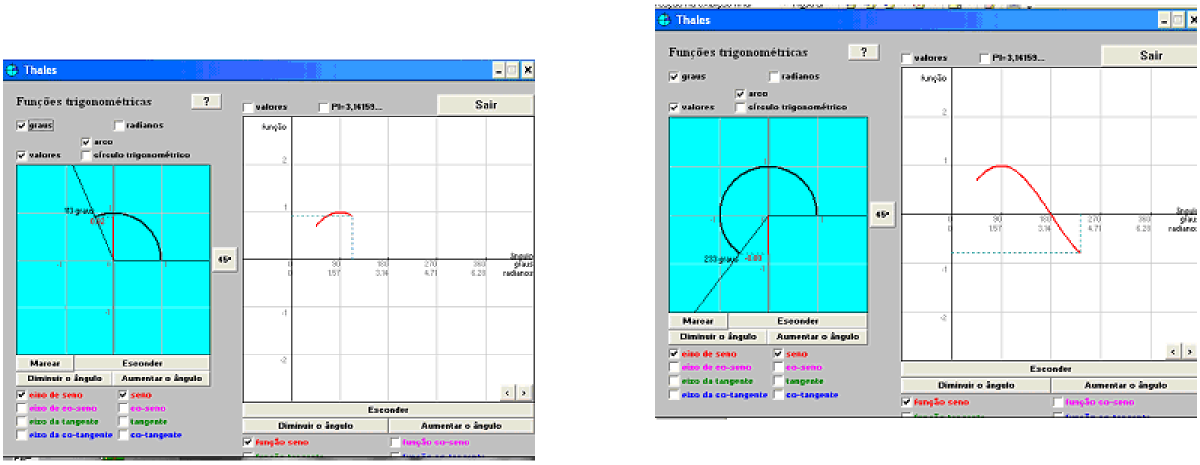


Figura 8: montagem do gráfico da função seno utilizando o software Thales.

Apesar dessas qualidades que percebíamos no software escolhido, alguns alunos entenderam que o programa não possuía uma qualidade que justificasse seu uso*. Achei o programa um pouco complicado. Não há nada que prenda a atenção de quem o usa, falta de criatividade na elaboração do software,* registro feito pela dupla Cássio e Rita.

Outras duplas fizeram relatos mais positivos sobre o mesmo software Thales:

- ✓ *Achamos interessante a possibilidade de visualizar o círculo trigonométrico e as variações das funções. Gostamos também porque nos dá a condição de fazer cálculos em radianos. (Carolina e Maitê).*
- ✓ *Na tela inicial da seção Razões Trigonométricas é interessante notarmos que à medida que aumentamos o valor do ângulo, o seno aumenta automaticamente no primeiro quadrante. (César).*

Lançando um olhar mais direcionado às funções trigonométricas, no exercício 3 exploramos a seção razões trigonométricas que o software propõe, dando um tratamento especial ao seno. Como o programa oferece a oportunidade de trabalho interativo, pedimos que os alunos variassem o raio do círculo e anotassem o que observavam com relação ao valor do seno. Esperávamos que os alunos interagissem com a atividade, refletindo sobre o que acontecia à medida o raio do círculo variasse. Essa reflexão seria relatada ao final do exercício.

Entre as 9 duplas participantes, apenas uma não consegui responder a questão; as demais perceberam que a questão envolvia o uso da proporcionalidade. A dupla formada por Victor e Alberto elaborou a seguinte resposta: *porque à medida que você altera o raio, constrói-se um triângulo semelhante ao primeiro, por isso a razão permanece constante*.

A resposta indica a importância que um professor de Matemática, ainda que não sendo um matemático, desenvolva um linguajar adequado ao tratar de questões do seu conhecimento. Embora elaborada de forma simples, a resposta parece adequada, no contexto de professores em formação.

Tendo sempre em mente que cada aula era encarada como uma nova oportunidade de experiência cognitiva para os alunos participantes, nas questões 4 e 5 solicitamos que, com o auxilio do software, explorassem as funções seno, cosseno e tangente ao longo de cada um dos quadrantes. Isso incluía valores de tais funções nos arcos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360 °, além do estudo do sinal e da monotonicidade (crescimento e decrescimento) de cada uma das três funções em todos os quadrantes.

Pensamos que, motivados pelas características do exercício – de modo bem simplista, o software oferece as respostas às perguntas feitas – todos os alunos completaram a questão.

Novamente explorando a reflexão e a análise, nas questões 6, 7 e 8 trabalhamos as relações existentes entre o seno, cosseno e tangente de dois ângulos suplementares – questão 6, replementares (soma igual a 360°) - questão 8, além de ângulos cuja diferença de medidas era de 180° - questão 7.

O trabalho começou sempre com a indicação do valor dessas razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) para um ângulo do primeiro quadrante. Em seguida, essas mesmas razões eram calculadas para o complemento e para o replemento do ângulo escolhido, além de um terceiro ângulo que era obtido acrescentando-se 180°. Os valores obtidos deveriam ser analisados, comparados entre si e, se possível, deveriam, fazer com que os alunos levantasseem hipóteses ou que generalizassem os resultados obtidos.

Entendemos que o trabalho proposto era longo, que exigia empenho dos participantes, mas permitiria um salto qualitativo de conhecimento. Entre os alunos, uma dupla deixou a questão em branco, sem razão aparente, e a dupla Cássio e Rita afirmou que não poderia fazer qualquer afirmação ou conclusão. Os demais conseguiram expressar a relação existente entre os valores propostos (a igualdade em módulo) e que os sinais variavam de acordo com o quadrante em que se encontravam.

Com características de análise e reflexão similares as três questões anteriores, a questão 9 sugeriu a escolha de quatro ângulos, um em cada quadrante. Para cada um desses quatro ângulos, os valores do seno, do cosseno e da tangente deveriam ser anotados.

Em seguida, esses mesmos ângulos foram novamente marcados, agora em sentido horário[61]. Para cada um desses novos ângulos, os valores do seno, cosseno e tangente também deveriam ser anotados.

---

[61] Ou em sentido negativo, falando em termos trigonométricos.

Nossa intenção era que os alunos percebessem as relações $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha);\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha);\ \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}(\alpha)$. Talvez pudessem não utilizar essa linguagem, mas esperávamos algumas conclusões equivalentes.

Entre os participantes, duas duplas deixaram a atividade em branco, mais uma vez sem maiores explicações. As demais completaram os quadros propostos – um trabalho para o qual o computador oferecia as respostas – mas apenas uma dupla elaborou uma conclusão em conformidade com a resposta que esperávamos. Aparecida e Gisele afirmaram que *os valores do cosseno são os mesmos; os demais são simétricos, mais (sic) há modificações dos sinais devido à mudança de quadrante*.

Por fim, recorrendo mais uma vez ao conceito de problema defendido por Polya (1995), pedimos aos alunos que explorassem, com o auxílio do software, as expressões $\text{sen}(a+b), \text{sen}(a-b), \cos(a+b), \cos(a-b)$. Esperávamos que concluíssem, por exemplo, que $\text{sen}(a+b) \neq \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$.

Infelizmente, sete duplas sequer fizeram a atividade; uma dupla completou a atividade citando as fórmulas de adição de arcos. E uma única dupla conseguiu atingir aquilo que esperávamos. A dupla formada por Wilson e Antônio, trabalhando com arcos de 30°, 60 e 90º, chegam à conclusão espe rada. Indo um pouco mais além, também indicam as fórmulas corretas para a adição de arcos.

O baixo número de respostas nos exercícios que solicitavam conclusões próprias dos alunos pode mostrar que questões envolvendo a análise e a reflexão ainda representam um desafio para nossos estudantes. Se por um lado percebemos, no caso da implementação da proposta da disciplina, que alguns alunos não se empenhavam na atividade, por outro também pudemos constatar as dificuldades entre aqueles que se empenharam.

Esse resultado pode ressaltar que nossos propósitos ao elaborar a proposta foram válidos (vale lembrar que nossa intenção principal era oferecer um curso rico em possibilidades de reflexão e de desenvolvimento metacognitivo). Implementar atividades como essa pode ser uma estratégia a ser utilizada em cursos de formação de professores.

6.1.9 Atividade 9: Questionando algumas crenças

Começamos a atividade 9 pelo estudo de um assunto que muitos autores costumam tratar como redução ao primeiro quadrante. Ao longo da atividade 8 já tínhamos tratado esse assunto de modo indireto, trabalhando com o cálculo do seno, cosseno e tangente de ângulos suplementares e replementares.

Para trabalhar diretamente com a redução ao primeiro quadrante, propusemos uma primeira questão fornecendo quatro ângulos com medidas em radianos (0,52; 2,62; 3,67 e 5,76) e pedimos que os alunos calculassem os valores de seno, cosseno e tangente. Em seguida, solicitamos que buscassem estabelecer uma relação entre os arcos dos demais quadrantes com o do primeiro (em nenhum momento usamos a nomenclatura quadrante).

Mais uma vez a maioria dos participantes se ateve às informações obtidas com o uso do software. Nesses casos, as conclusões eram sempre sobre os sinais das funções, que muitos alunos perceberam que variaria de acordo com o quadrante em que se localizavam.

Três alunos, Marcelo, Geisa e César perceberam as relações existentes, esboçando, cada um a seu modo, uma breve explicação sobre o que acontecia. A explicação do aluno Marcelo merece destaque: *Ambos se encontram a 30° do eixo x. Com isso, em módulo, todos os senos são iguais, todos os cossenos são iguais todas as tangentes são iguais*.

Entendemos que esse aluno conseguiu perceber a relação envolvida na redução ao primeiro quadrante. Ele consegue ir além das simples conclusões que podem ser obtidas apenas pela anotação dos dados fornecidos pelo programa. Parece-nos que o aluno mostra-se apto a uma reflexão mais ampla, disposto a entender, de fato, que o exercício propõe algo a mais do que anotar de dados.

O exemplo desse aluno nos remete ao que Zeichner (2008) e Alarcão (2005) comentam sobre o desgaste que a ideia de reflexão e professor reflexivo sofreram ao longo dos últimos anos. O exercício que propusemos, em nossa opinião, poderia tornar-se um exercício reflexivo, desde que os alunos estivessem dispostos a trabalhar dessa maneira. Talvez possa ter faltado de nossa parte uma introdução, uma motivação como muitos gostam de afirmar, mas entendemos que como futuros professores de Matemática, essa disposição de ir além, de entender o que de fato ocorre e que as respostas não são uma simples coincidência numérica deve ser algo inerente à forma de cada um proceder..

Retomando os autores citados, ousaríamos dizer que um programa que se propõe a um trabalho reflexivo pode estar fadado ao fracasso caso os professores envolvidos não se sensibilizem e sejam despertados a buscar um novo posicionamento diante do desafio que se coloca.

Indo um pouco além em nossa ousadia, entendemos que um programa somente poderia ser classificado como reflexivo após a análise de seus resultados. A proposta pode ser reflexiva, mas aprece-nos que nem sempre o resultado é reflexivo. Dificuldades de implementação de trabalhos dessa natureza podem contribuir para que não se adote um foco reflexivo em processos de formação docente.

Em seguida a esse primeiro exercício, fornecemos, na própria atividade, material teórico sobre a redução ao primeiro quadrante, tentando fazer a sistematização desse conteúdo. O estudo desse material teórico permitiria que os alunos respondessem a uma série de perguntas sobre os valores de seno, cosseno e tangente de diferentes ângulos. Como modo de favorecer a autorregulação da aprendizagem, propusemos que, com o auxílio do software, fizessem a correção de cada item, e caso tivessem errado algum, comentassem sobre o tipo de erro cometido.

A julgar pelos comentários apresentados pelos alunos sobre os erros cometidos, poderíamos avaliar que o exercício foi um sucesso; muitos sequer responderam aos itens sobre os erros cometidos que propusemos ou afirmaram que não cometeram erros.

Entretanto, ao analisarmos as respostas, percebemos que muitos cometeram erros. Por que esses alunos não perceberam seus erros? Se dispunham de um software que os auxiliava nessa correção, por que ainda afirmavam que não cometiam erros? Autorregulação ainda a ser desenvolvida ou pouca disposição para concluir a tarefa?

Retomando outro assunto que havíamos introduzido na atividade anterior, voltamos à discussão sobre adição de arcos. O trabalho que propusemos visava, em um primeiro momento, despertar a atenção dos alunos para o fato de que, por exemplo, o seno da soma não é igual à soma dos senos: essa era a crença que gostaríamos de questionar (o que justifica o nome que demos a atividade). Para isso, solicitamos que fossem escolhidos dois arcos que deveriam ter os valores de seno e cosseno calculados com o auxílio do programa. Em seguida, os arcos seriam somados e subtraídos, e os valores do seno e do cosseno desses dois novos arcos seriam calculados. Reforçando nossos propósitos, questionamos se o seno e o cosseno da soma era igual à soma dos senos e cossenos de cada um desses valores. Como era um exercício de verificação a partir do uso do software, todos os participantes apresentaram respostas corretas.

Encerrando o trabalho com a adição de arcos, solicitamos que os alunos completassem, com o uso de material de apoio, as expressões envolvendo seno, cosseno e tangente. Nossa expectativa era não encontrar erros, mas alguns foram cometidos.

Um exemplo de erro cometido foi a afirmação do aluno Alberto de que $tg(a+b)=1-tga\cdot tgb$. Mais que um desconhecimento do assunto, entendemos que uma reposta como essa denota um baixo interesse pela atividade. Como esse foi um caso único, pensamos que, para esse aluno em particular, a atividade pode não ter apresentado um maior significado.

Infelizmente, um erro como esse, nas condições em que ocorreu, é preocupante: o aluno tinha um material de apoio em mãos e não o usou de maneira correta. Se lembrarmos que esse aluno já atuava como professor, será que esse tipo de comportamento não se repetia? Será que esse aluno não repassava aos seus estudantes alguma informação incorreta? Parece-nos que esse aluno não se preocupou com a qualidade da resposta que apresentou. Será que ele se preocupava com a informação que repassava?

Aspectos relativos à conscientização do papel do professor e à responsabilidade social que possui devem ser trabalhados desde os primeiros períodos em um curso de formação de professores. Entendemos que os licenciandos precisam ser despertados para o cuidado em estudar de forma a fornecer informações corretas para seus alunos. Essa preocupação pode evitar que erros como o cometido pelo aluno Alberto se repitam.

A última atividade envolveu novamente a adição de arcos. Após a escolha de um arco e a sua adição aos valores de 90° e 180°, c ada um desses três ângulos teve os valores de seno, cosseno e tangente calculados com o uso do software. Pensamos nessa atividade como um preparativo para a retomada que faríamos em breve de Números Complexos. Sabíamos que era um aposta ousada, mas queríamos observar como os alunos reagiriam a essa proposta.

Surpreendentemente, muitos alunos conseguiram perceber as inversões que aconteciam, com a maioria relatando suas conclusões por meio de palavras. O aluno Leandro foi além, propondo sistematizações do tipo $\text{sen}(\alpha) = -\cos(90° + \alpha)$ e $\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(180° + \alpha)$.

6.1.10 Atividade 10: Estudando seno e cosseno em um triângulo qualquer

Encerrando o estudo sobre Trigonometria, programamos para essa atividade o trabalho com as leis dos senos e dos cossenos. Dessa vez não oferecemos material teórico qualquer, deixando a critério de cada um dos alunos a escolha do material teórico que utilizariam.

A primeira questão solicitava apenas que os alunos estudassem a lei dos senos e dos cossenos. Na questão 2, inicialmente deveriam apresentar a demonstração de uma das leis. Após a apresentação, os alunos relatariam as dificuldades que encontraram ao estudar a demonstração que apresentaram e o que fizeram para sanar as dúvidas encontradas. Cremos que esse exercício oferecia mais uma oportunidade para os alunos desenvolverem sua capacidade de autorregulação.

Um dado que chamou a nossa atenção foi que a maioria dos participantes relatou não ter sentido qualquer dificuldade ao estudar as demonstrações (quatro alunos optaram pela demonstração da lei dos senos, três pela lei dos cossenos e outros três por ambas as leis). Os dois únicos alunos que apresentaram relatos de dificuldades foram Leandro e César[62] que, na nossa opinião, eram alunos que já possuíam um bom conhecimento em Trigonometria (Leandro inclusive já havia atuado como professor lecionando esse mesmo tópico).

A queixa de Leandro referia-se a linguagem, que alegou *ser muito complexa e a demonstração é muito grande*. Para sanar sua dúvida, disse: *tive que mudar a ordem dos dados apresentados na demonstração*. Já César ficou com a seguinte

[62] Ambos apresentaram a demonstração da Lei dos Cossenos.

dúvida: *Posso utilizar a igualdade da fórmula para qualquer lado do triângulo qualquer, independente de sua ordem?* Respondeu que *sim, o que mudará será a posição das letras que também deverão ser substituídas na fórmula dos cossenos.*

O trabalho que vínhamos desenvolvendo e o contato frequente com esses alunos nos oferecem elementos suficientes para dizermos que talvez muitos não tivessem compreendido nossa proposta. Não bastava apenas apresentar uma das demonstrações; era necessário ir além, pensar sobre os detalhes, as conexões que cada demonstração fazia com outros assuntos estudados (e sobre os quais muitos já haviam afirmado que possuíam dúvidas ou enfrentaram dificuldades para estudá-los). Assim, muitos apenas cumpriram a tarefa, mas não pensaram sobre ela ou sobre o que fizeram. Dessa forma perderam mais uma oportunidade de não apenas aumentar seu conhecimento matemático, mas também de desenvolvimento metacognitivo.

Na questão seguinte, para que cada aluno tivesse a oportunidade de fixar esse novo conteúdo, solicitamos que cada um escolhesse e resolvesse quatro exercícios, dois sobre cada uma das leis.

Seguindo o modelo de planejamento, acompanhamento e revisão de Artz e Armour-Thomas (2002), a questão de número quatro perguntava sobre quais seriam as orientações que dariam sobre o uso de cada uma das leis a um estudante que estivesse aprendendo as leis. Entendemos que a etapa de planejamento inclui todo o momento inicial de estudo das leis e a escolha das atividades. A resolução de cada questão que escolheram seria um momento de monitoramento e a questão de número quatro objetivava a revisão.

Pensamos que, ao trabalhar dessa maneira, permitimos que cada aluno simulasse o trabalho de um professor, planejando uma aula sobre esse assunto. Realmente, no exercício de suas atividades cotidianas, cada professor segue cada um desses passos: estuda a teoria que utilizará, resolve os exercícios que irá trabalhar com os alunos e reflete sobre o que ressaltará ou em que ordem irá propor os exercícios. Sabemos que esse trabalho prévio do professor corresponde à fase de planejamento (ARTZT E ARMOUR-THOMAS, 2002). Na proposta que implementamos, os professores em formação não tiveram a oportunidade de aplicar os exercícios que os alunos escolheram ou elaboraram com estudantes. Mesmo assim, a oportunidade que cada um teve de resolver seus próprios exercícios e a reflexão proposta ao final visam a que os futuros professores experimentem situações do cotidiano docente.

Sobre as orientações que cada um daria aos seus alunos, César afirmou que *é necessário conhecer as fórmulas de cada uma das leis e entender suas demonstrações,* o que pode ser classificado como uma afirmativa tradicional. Outra aluna que segue na mesma é Maitê, afirmando que *faria as demonstrações das leis e depois realizaria vários exercícios.*

Leandro, por outro lado, diz que sua orientação é *tentar resolver sem fórmulas, pois elas são úteis, mas não são sempre necessárias*. Percebemos nesse depoimento uma tentativa de romper com a simples memorização da fórmula; a sugestão parece sugerir o pensar sobre cada exercício e nas diferentes soluções que podem ser dadas a ele.

Por fim, fizemos o seguinte questionamento: as aulas anteriores o auxiliaram no estudo desse assunto? Em quais pontos? Nosso propósito principal era fazer com que os alunos interligassem o que havia sido estudado anteriormente e o assunto atual.

Algumas respostas a esse tópico nos pareceram contraditórias. Leandro afirmou *que não, pois tudo que vimos até agora em trigonometria é assunto já dominado por mim*. Vale a lembrança de que esse mesmo aluno afirmou que sentiu dificuldades em compreender a demonstração da lei dos cossenos, o que nos faz questionar se esse domínio da Trigonometria, de fato, é real.

Cássio, que havia tecido críticas ao software que utilizamos ao longo do estudo de Trigonometria, afirmou que *as aulas anteriores auxiliaram nos cálculos, quando usamos o programa no computador*.

Carolina, reforçando nossas ideias de que a participação e a dedicação de cada participante ao programa é algo que auxiliará no sucesso ou fracasso da proposta, além de oferecer uma real oportunidade de aprendizagem para cada aluno, disse que *ajudou sim, mas a maior parte foi forçando a pesquisa e recordar para voltar a aprender*.

Seguindo a mesma linha de Carolina, Geisa é mais enfática:

> *Sim, muito. Como minha formação de segundo grau foi profissionalizante, magistério, não tive acesso a muitas informações sobre a Matemática do ensino médio. Ainda tenho muitas dificuldades. Sabia calcular o seno, o cosseno e tangente, mas de uma forma mecânica, aquilo não fazia sentido*

para mim. Comecei a entender mais quando tive a oportunidade de conhecer o programa Thales, que me impressionou. Pude mexer no programa e visualizar melhor o que fazia de forma mecânica. Agora estou entendendo o que faço. Na hora de estudar as leis dos senos e dos cossenos entendi de forma mais fácil o conteúdo.

Ao mesmo tempo em que muitos alunos se limitavam apenas a cumprir de forma burocrática suas atividades, outros mostravam bastante empenho, procurando fazer mais do que lhes era pedido. O trabalho (Anexo B) feito pelo aluno Antônio é um exemplo disso. Confeccionado sob a forma de um relatório, o trabalho desse aluno mostrou um nível maior de detalhamento. Seu empenho em concluir a atividade reforça o potencial reflexivo que acreditávamos possuir a atividade.

A participação dos alunos nessa atividade reforça uma percepção desenvolvida ao longo da implementação da proposta. Antes da aplicação de uma proposta, podemos afirmar apenas que a mesma possui potencial reflexivo. Somente após a avaliação dos resultados obtidos é que a mesma pode ou não ser classificada como reflexiva. O empenho e a disposição dos envolvidos em participar do processo é fator fundamental para a confirmação ou não desse potencial reflexivo.

6.1.11 Atividade 11: Interligando Trigonometria e Números Complexos

Após o encerramento dos estudos sobre Trigonometria, retomarmos ao tópico Números Complexos para estudar a representação dos mesmos na forma trigonométrica e as operações nesse formato.

Para isso, achamos por bem que os alunos fizessem uma revisão daquilo que já havia sido estudado.

Assim, no material preparado (Apêndice H), as questões iniciais envolviam apenas operações na forma algébrica:

- ✓ Questão 1: discutia as condições para que um número complexo fosse considerado real ou imaginário puro;
- ✓ Questão 2: resolução de uma equação do segundo grau com discriminante negativo;

- ✓ Questão 3: resolução de um sistema envolvendo dois números complexos;
- ✓ Questão 4: equação envolvendo conjugado complexo.

A quinta questão já apresentava um novo desafio para os alunos. Passar para a forma trigonométrica quatro números complexos dados na forma algébrica. De que maneira os alunos fariam esse estudo?

No material elaborado e distribuído, inserimos um pequeno tópico que fazia referência à forma algébrica e às operações nessa forma. Também introduzimos as ideias de módulo e argumento. Além disso, os participantes foram novamente orientados a trabalhar com uma bibliografia de apoio.

Com esse material (o que fornecemos e a bibliografia de apoio) era nossa expectativa que, para o estudo desse assunto, essa bibliografia tivesse papel fundamental.

Na prática, o que pudemos observar foi que a maioria dos alunos, ou não apresentou qualquer resposta para a questão ou se limitou a calcular o módulo e o argumento de cada número complexo proposto, não apresentando a representação na forma trigonométrica (no nosso entendimento, a parte mais complexa da operação já havia sido feito; bastava apenas a formalização final). Apenas três, entre os doze alunos que entregaram a tarefa, completaram as atividades da maneira esperada.

As questões 6 e 7 – que solicitavam a representação geométrica de todos os números complexos de módulo igual a 2 e a representação geométrica de todos os números complexos de argumento igual a $\frac{\pi}{3}$ - tiveram um número muito baixo de respostas, motivo pelo qual não faremos uma análise mais detalhada.

Buscando reforçar a ligação entre os tópicos de Trigonometria e Números Complexos, solicitamos que os alunos deduzissem as fórmulas de multiplicação e divisão de números complexos em sua forma trigonométrica. Para isso, fornecemos as fórmulas de adição e subtração de arcos, além de sugerirmos a utilização de dois números complexos, já fornecidos em forma trigonométrica.

Mais uma vez, um número muito baixo de alunos (novamente apenas três) completou a tarefa. Isso nos faz questionar se, de fato, as tarefas estavam claras ou se os alunos não se interessaram por elas, por ser tratarem de questões de cunho teórico. Além da atividade de dedução das fórmulas de multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica, as questões 6, 7, 10 e 13 possuíam um cunho mais teórico.

Verificamos na questão seguinte – que envolvia a aplicação das fórmulas de multiplicação e divisão na forma trigonométrica que, em teoria, foram deduzidas anteriormente – que entre os doze participantes, apenas dois não fizeram o exercício corretamente (cremos que os dois alunos que não fizeram o exercício nem mesmo fizeram qualquer tentativa, pois não concluíram nenhum exercício a partir do número cinco).

A situação nos preocupa, se pensarmos como formadores de professores: qual o tipo de aula que nossos futuros professores ministrarão? A julgar pelo posicionamento que muitos adotaram nessa atividade, tememos que se limitem a repassar informações – fórmulas prontas – e a resolverem exercícios de aplicação, sem se preocuparem com atividades que despertem o interesse de seus alunos ou que os levem a atitudes de pesquisa e análise.

Também preocupa-nos o fato de que as demais questões das listas que foram entregues, continham, todas, os mesmos erros e acertos. Isso pode indicar uma baixa reflexão ou mesmo falta de crítica da resolução feita por um colega.

6.2 Analisando as atividades individuais e a autoavaliação

6.2.1 O resultado dos trabalhos individuais

Na primeira atividade do curso, cada aluno indicou os tópicos que gostaria de estudar durante a disciplina. Entretanto, nem todas as indicações dos alunos puderam ser colocadas na ementa coletiva da disciplina, quer seja pelo alto número de indicações (Apêndice A), quer seja pela duração da própria disciplina.

Aproveitando a disposição que cada aluno demonstrou para estudar algum tópico matemático de seu próprio interesse e que o curso visava oferecer momentos de reflexão e de autorregulação da aprendizagem, planejamos que fosse realizado um estudo individual sobre um assunto que indicado na atividade 1.

Para iniciar a realização desse estudo individual, solicitamos que cada aluno respondesse a pergunta a seguir:

Você escolheu um assunto de seu interesse para estudo. Elabore um pequeno texto onde você exponha como pretende estudar o assunto, o tempo que julga necessário e como você gostaria de apresentar os resultados obtidos para o professor ou para a turma.

Ao longo do semestre de implementação da proposta, os alunos tiveram vários momentos para que desenvolvessem esses estudos individuais. Muitos desses momentos foram realizados no próprio ambiente de estudo, a faculdade, para que os participantes pudessem dispor de todos os recursos oferecidos, além da possibilidade de contarem com a colaboração dos colegas e do próprio professor.

Apresentaremos a seguir alguns resultados desse trabalho individual. Faremos a apresentação procurando relatar como foi a evolução do trabalho dos alunos selecionados ao longo do semestre. Nesse relato, procuraremos descrever em detalhes a participação de cada um, bem como analisaremos suas ações e os resultados apresentados de acordo com os referencias de nosso trabalho.

Inicialmente faremos o relato do trabalho do aluno Cássio. Sua disposição inicial foi a seguinte: *Pretendo estudar o tema jogos de forma prática e técnica. A quantidade de aulas que eu vejo necessária para a elaboração das atividades dependerá de como eu desenvolver o tema. Gostaria de apresentar o tema para o professor de forma prática*.

Entretanto, ao longo do semestre, esse aluno pouco utilizou os momentos que destinamos aos estudos individuais. Normalmente, alegava que tinha outras coisas por resolver; então, aproveitava esse momento mais 'livre' e procurava desenvolver outras atividades, deixando, quase sempre, seu trabalho individual de lado.

Como orientador, em diversas oportunidades, questionamos o aluno sobre o andamento de seu trabalho individual. Na maioria das vezes, ouvimos respostas de que o trabalho estava caminhando, apesar de observarmos o pouco empenho do aluno na sua realização. Por entendermos que nosso posicionamento deveria ser de acompanhamento, sem uma atuação mais incisiva de cobrança, permitimos que o aluno fizesse sua própria caminhada, apesar de termos a opinião de que o resultado não seria o que o aluno esperava.

Da disposição inicial do aluno de apresentar um trabalho de ordem mais prática, restou apenas um trabalho de três folhas, com uma parte teórica e a indicação de um jogo (chamado trilha) que poderia ser aplicado para alunos das séries iniciais do ensino fundamental para trabalhar as operações entre números inteiros.

Para nós ficou a impressão de que, do ponto de vista da metacognição e reflexão, essa atividade representou (ou acrescentou) muito pouco para esse aluno. Afirmamos isso, pois, ao longo do semestre, pudemos constatar, por diversas vezes, que esse aluno esteve muito pouco empenhado em fazer o seu trabalho.

Pareceu-nos que no final do semestre procurou fazer um trabalho de maneira pouco comprometida, muito diferente daquilo que havia planejado. Restou-nos a nítida sensação de que o trabalho apresentado foi feito apenas para cumprir uma obrigação – algo distante das nossas intenções iniciais.

Ao mesmo tempo em que lamentamos que Cássio e outros colegas como Gisele, Cristiane, Cíntia e Aparecida tenham deixado de se dedicar ao trabalho que propusemos, perdendo, a nosso ver, uma excelente oportunidade de aprendizagem e aperfeiçoamento, destacamos outros trabalhos em que os autores mostraram empenho e dedicação, e cujos resultados destacam isso.

A aluna Maitê respondeu da seguinte maneira o questionário inicial:

> "*Eu gostaria de estudar o meu tema através de pesquisa. Poderíamos ir à biblioteca e investigar livros, revistas em periódicos (bolema, etc...), Analisar e resumir. Além do meu tema Educação Especial, preciso aprender a lidar com o material dourado e investigar outros métodos para educação especial.*
>
> *Seria interessante preparar material para ensino da Matemática adequado para esses alunos: criar exercícios adaptados extremamente criativos. Poderíamos trazer chamex, tesoura, cola, régua, compasso e preparar esse material aqui.*
>
> *1ª aula: investigação bibliográfica, Internet na biblioteca junto ao professor, pois ele irá direcionar a pesquisa;*
>
> *2ª aula: Criação de material no laboratório de Matemática. Ativar o laboratório.*
>
> *3ª aula: aula prática. Pesquisar escolas com entrevistas onde esses alunos especiais estão inscritos. Aplicar o material criado na 2ª aula com esses alunos.*

4ª aula: Preparar um relatório final analisando se os objetivos foram alcançados.

Os resultados obtidos serão apresentados utilizando o material preparado pelo professor-aluno e testando com a turma e apresentação em PowerPoint sobre o assunto, que se faz necessário na formação do professor que ensina Matemática."

O tema escolhido pela aluna, na verdade, era o assunto de seu trabalho de conclusão de curso. Como professora, atuava em uma escola destinada a alunos com necessidades especiais. Muito influenciada por esse trabalho, vinha procurando estudar mais sobre o assunto, participando até mesmo de congressos de outras áreas que não a Matemática para procurar aprender um pouco mais.

Ao longo do semestre, procurou utilizar todos os momentos livres, trabalhando ora na pesquisa de seu tema, ora na escrita de seu trabalho. Ao final do semestre, quando se aproximava à data de entrega do trabalho individual, questionou-nos se poderia entregar apenas um relatório parcial, pois entendia que a apresentação que gostaria de fazer para a turma seria, na verdade, a própria apresentação da sua monografia.

Após assistir à apresentação da monografia dessa aluna e de ter acompanhado-a ao longo do semestre de elaboração do trabalho, podemos afirmar que percebemos sim a evolução da mesma, quer seja do ponto de vista cognitivo, quer seja do ponto de vista metacognitivo.

A aluna Geisa, que também já trabalhava como professora, atuando no Ensino Fundamental I, afirmou que:

"G*ostaria de estudar melhor sobre o material dourado, que foi uma coisa não utilizada durante o curso e que me interessa muito.*

Pretendo estudar fazendo uma pesquisa sobre a história e a utilização deste material em sala de aula, com alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental.

O tempo necessário, de início, seriam 3 aulas.

Quanto aos resultados, pretendo fazer uma apresentação para a turma sobre o material estudado".

Durante os momentos de estudos individualizados, frequentou bastante a biblioteca da faculdade, buscando nos livros ou na Internet material bibliográfico que sustentasse a sua pesquisa. Em alguns momentos, utilizou também o laboratório de

Matemática que havia na instituição, trabalhando diretamente sobre o material dourado, buscado entender um pouco mais sobre ele (havia alguns exemplares desse material no laboratório de Matemática que a faculdade mantinha).

Ao final do semestre, fez a apresentação de seus estudos para toda a turma, destacando aquilo que havia entendido ser de maior importância em seu estudo. O material utilizado na sua apresentação encontra-se no anexo H.

A aluna Carolina também disse que gostaria de trabalhar com o tema jogos:

“Pretendo estudar consultando alguns autores para me basear e decidir que tipo de jogo pretendo desenvolver.

Quanto ao tempo, julgo necessário, inicialmente, 4 aulas, após escolha do jogo.

Para apresentar os resultados penso utilizar material concreto em forma de apresentação.”

Em alguns momentos, percebemos que a aluna não se sentia segura se esse era realmente o tema que pretendia estudar. Ainda nos primeiros meses do curso, fez referência a uma possível troca de tema, mas também não conseguiu decidir sobre qual seria.

Por fim, optou por seguir seu planejamento inicial. Como pretendia, entregou um trabalho teórico, em forma de um plano de aula, com objetivos, metodologia, tempo de aplicação e avaliação. Também apresentou um planejamento de como atuaria caso tivesse que trabalhar com o conteúdo de produtos notáveis.

Mostrando bastante interesse na realização desse trabalho, também entregou um material concreto, um dominó envolvendo produtos notáveis. A imagem abaixo ilustra esse material produzido pela aluna.

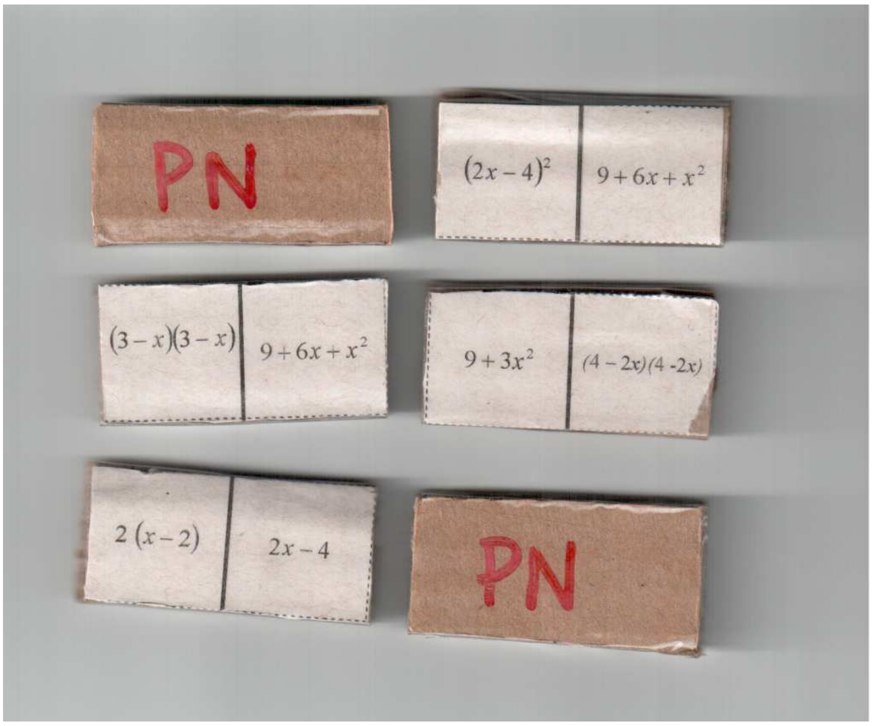


Figura 9: Dominó montado pela aluna Carolina (6 peças).

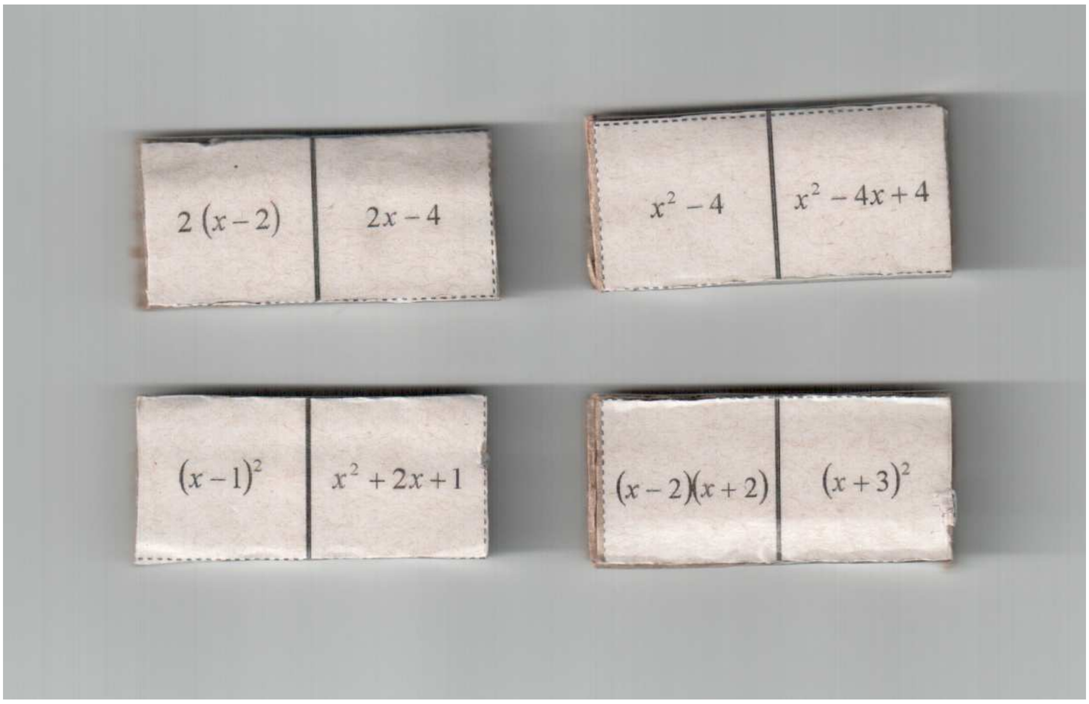


Figura 10: Dominó montado pela aluna Carolina (4 peças).

O aluno Antônio, que durante o curso havia apresentado uma dedicação acima da média da turma, elaborou, num primeiro momento, o seguinte roteiro:

“1) O que se pretende estudar?

Onde a Matemática discreta se difere da Matemática do contínuo? Em que a Matemática discreta não se aplica?

2) O tempo estimado para pesquisar, elaborar um plano de aula é de 20 horas.

3) Como apresentar os resultados? Ainda não sei, porém algo com função é bem provável que seja apresentado, vejamos:

- *O custo mensal fixo de fabricação de um produto é de R$ 5000,00, e o custo variável por unidade é de R$ 10,00. Então a função total é dada por:*

$$C = C_{fixo} +_{variável} = 5000 + 10x \,„$$

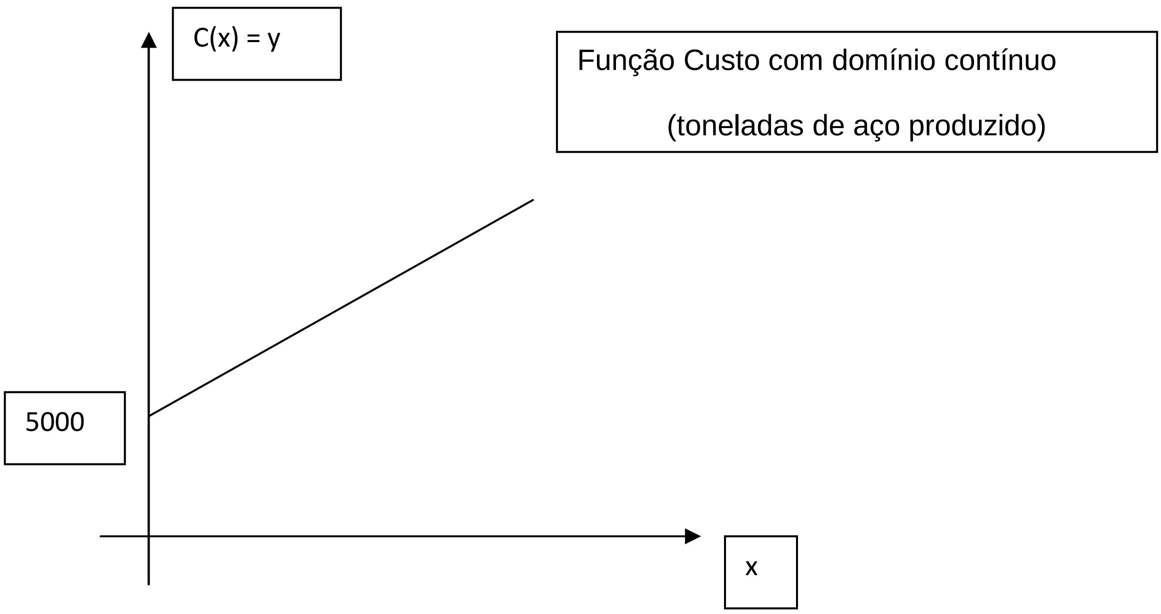


Figura 11: Gráfico da função-custo (Autor: Antônio)

Esse era um tema que motivava bastante esse aluno. Era notória a satisfação que estudar esse assunto lhe trazia. No decorrer do semestre, era comum vê-lo dividindo seu tempo entre a elaboração do seu relatório final e a conclusão de sua monografia.

O trabalho apresentado, muito mais do que um plano de aula, revelou-se uma fonte de estudo, um roteiro que o próprio estudante seguiu para esclarecer suas principais dúvidas. Talvez a sua aplicação em sala de aula seja complexa, pois em muitos momentos o aluno trabalhou no sentido de esclarecer aquilo que ainda era duvidoso para si. (Anexo I)

Mesmo sem apresentar todos os trabalhos que gostaríamos, podemos afirmar que a realização dessa atividade individual foi um diferencial ao longo do curso. A oportunidade de escolher o tópico de estudo e a autonomia concedida a cada aluno para a realização desse estudo foram estratégias em que a reflexão e a metacognição estiverem presentes, envolvendo as etapas de planejamento, condução e avaliação (ou autorregulação).

6.2.2 Analisando a própria atuação

Na última atividade do curso - a de número 19 - solicitamos que cada aluno fizesse uma autoavaliação, uma reflexão sobre a sua própria aprendizagem, participação, empenho e assiduidade ao longo do curso.

Através do relato da aluna Cristiane, foi possível percebemos sua resistência em trabalhar individualmente. Suas manifestações eram quase sempre para demonstrar as dificuldades que sentia no desenvolvimento das atividades.

Quando o trabalho era desenvolvido em grupo ou em duplas, a aluna se mostrava mais interessada e ativa. Ainda que a interação social seja um aspecto a ser considerado no processo de aprendizagem, nosso objetivo principal era permitir que os alunos se desenvolvessem individualmente, quer seja sob o ponto de vista da metacognição ou da autorregulação. Nesse aspecto, acreditamos que a aluna não se desenvolveu.

Diferente de nossa opinião, a aluna percebe evoluções em si mesma:

> *Logo no começo do curso, eu senti muitas dificuldades, pois não tinha o costume de estudar sem que o professor fosse ao quadro ensinando tradicionalmente.*
>
> *Mas, com o passar do tempo, fui adquirindo confiança, e desempenhando nas pesquisas, estudando nos livros, sempre pedindo auxílio ao professor, sendo que seu auxílio era sempre de me incentivar às pesquisas e elaborar através dos livros os exercícios e trabalhos.*

Talvez, preocupada com o fato da autoavaliação ser o único momento em que se atribui uma nota[63], a aluna afirma que por *sua determinação e esforço... espero*

[63] Desde o início do curso não nos preocupamos, como professores, com a nota que seria final do curso; nosso olhar esteve sempre voltado para os processos de desenvolvimento metacognitivo e da autorregulação

ter uma boa e suficiente nota, dentro daquilo que me foi proposto nesse curso. Nós nos questionamos se a aluna compreendeu a proposta do curso e se realmente se dedicou da maneira como afirma ter se dedicado.

Outro que apresentou uma autoavaliação diferente das observações coletadas sobre ele ao longo do curso foi o aluno Cássio:

> *Eu tenho certeza absoluta que participei além do solicitado. Fiz todas as atividades propostas, sempre em cima das datas pré-estabelecidas, não deixando de fazer as atividades*.

Questionamos se a participação foi além da solicitada mesmo e a maneira com as atividades foram feitas. Por diversas vezes, suas resoluções estavam incompletas ou feitas de uma maneira muito pouco reflexiva (um exemplo disso foram as resoluções por ele apresentadas na atividade 6).

A atividade individual entreguei bem antes da data com bastante antecedência... sempre tentando ser pontual. Interessante recordar que não estabelecemos uma data para entrega; o próprio aluno deveria estimar um prazo para a execução do trabalho, algo que o próprio Cássio jamais sistematizou.

Me considero um ótimo aluno; raramente faltei as aulas. De fato, ao longo das 38 aulas do curso, faltou apenas a duas. Entretanto, em algumas, principalmente naquelas destinadas à elaboração do trabalho individual, sua participação se restringiu à presença em sala, pois sua atenção e seus esforços estavam destinados a outros fins diferentes daqueles a que se destinava a aula.

Eu acho que pelo meu compromisso com a matéria eu mereço um 10. Infelizmente, parece que a principal preocupação do aluno nessa atividade era elencar justificativas para sua nota 10. Gostaríamos que essa atividade fosse um momento diferente, onde os alunos aproveitassem para refletir sobre o que foi a disciplina, a sua condução e a própria participação. Esse não parece ter sido o caso do aluno Cássio, que em nenhum momento demonstrou ter consciência de que como foi sua real participação ao longo das atividades do curso.

A aluna Rita, sobre a maneira como o curso foi conduzido, disse: *no início não gostei deste método; sempre achei que professor deveria dra os conteúdos e ensiná-los desde o princípio*. A análise que a aluna faz reflete bem sua participação no início do curso. Entretanto, ela mesma percebe que também teve uma mudança de postura com esse novo método: *Mas para a minha surpresa, eu realmente aprendi, principalmente quando as aulas foram no laboratório de informática*.

Gostaríamos de ressaltar que tivemos uma visão um pouco diferente da participação da aluna: na nossa opinião, os momentos mais proveitosos para ela haviam sido as atividades envolvendo Números Complexos, onde nos pareceu que a aluna esteve mais empenhada.

Assim como Cássio, pareceu-nos que Rita também esteve muito preocupada em justificar sua nota 10: *Por isso por todo o meu desempenho e interesse, ah, e lógico pela minha divertida presença e alto astral a minha média só poderia ser 10*.

Contrastando com as posturas de Rita e Cássio, outros alunos apresentaram relatos com níveis de reflexões interessantes, com depoimentos que comprovam a validade do curso e das ações desenvolvidas:

- ✓ *Este curso fez-me consolidar o nível de responsabilidade que existe em mim e até mesmo possibilitou-me que eu avaliasse a mim mesmo, principalmente acerca de minhas dificuldades, minhas potencialidades e o que, de fato, preciso melhorar. Algo que em nenhum momento em minha vida tive a oportunidade.*

  Com o curso baseado em metacognição, tive a oportunidade de buscar o conhecimento e concentrar-me em um nível de conhecimento que só tive a experiência quando fiz as minhas duas últimas monografias. (César)
- ✓ *No início achei o curso um pouco estranho já que não entendia muito bem como seria o seu desenvolvimento. Com o passar das aulas, com estudos de materiais e preparação e resolução de exercícios pude perceber que o curso me deixava à vontade para realizar minhas próprias descobertas, me preparando ainda para enfrentar meus estudos sozinha para a minha prática na sala de aula, tendo em vista de que ao concluirmos o curso mais o auxílio de um professor para nos ajudar. Teremos que buscar, muitas vezes sozinhos, o que temos interesse em aprender. Dessa forma, pude aprender conteúdos já estudados em outros períodos de forma mais eficaz, já que busquei aprender algo que fazia algum significado para mim.*

  Quanto ao aprendizado, pude aprender de verdade muitos conceitos que, para mim, eram inaplicáveis. (Geisa)
- ✓ *Acredito que o curso foi válido por atender às necessidades expostas por nós mesmos. A metodologia usada foi variada, possibilitando várias possibilidades de aprendizado.*

Quanto à minha atuação, tenho a necessidade de uma cobrança mais rígida, então, admito não ter participado da forma como poderia, embora isso de forma alguma signifique um desinteresse em relação ao curso.

No quesito que julgo o mais relevante, a aprendizagem, não em termos de conhecimento, mas em métodos que auxiliem em nossa prática cotidiana em sala de aula, creio ter sido válida.

Em termos de nota, por tudo mencionado anteriormente, acredito que 8 seja uma nota justa, pois premia o crescimento que tive mas pune a forma não tão intensa como fiz o curso. (Victor)

- ✓ *O trabalho individual – Matemática Discreta – foi um assunto bastante interessante, pois tive de pesquisar sobre um assunto de extrema importância no processo de ensino e aprendizagem, uma nova forma de abordar a Matemática, quando se trata de situações ligadas ao dia-a-dia. (Antônio)*

Através desses quatro últimos depoimentos pudemos perceber que muitos alunos aproveitaram o curso para o seu próprio desenvolvimento, quer seja do ponto de vista dos conhecimentos matemáticos, quer seja em termos de conhecimentos envolvendo a metacognição e os processos de reflexão.

Comparando os dois grupos de depoimentos, ressaltamos o papel ocupado pelos participantes. Fica perceptível que alguns alunos encararam o curso como algo obrigatório, parte daquilo a que deveriam se submeter para se tornarem licenciados em Matemática. Outros encararam o mesmo curso como uma oportunidade de crescimento, aproveitando os momentos para uma análise de seu saber matemático e de seu próprio processo de aprendizagem.

Podemos afirmar que em maior ou menor intensidade, os alunos vivenciaram experiências cognitivas e metacognitivas ao longo de todo o curso. As fases propostas por Artzt e Armour-Thomas (2002) auxiliaram nosso trabalho, permitindo que os alunos simulassem o trabalho de um professor, além de analisarem a sua própria condução do processo de estudo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa relatada procura trazer contribuições à formação do professor de Matemática. Especificamente, volta sua atenção para uma possibilidade de trabalho envolvendo o desenvolvimento dos processos de autorregulação e reflexão dos participantes.

Devido à proposta colocada, os referenciais teóricos utilizados buscavam dar sustento a esse trabalho. A intenção sempre foi permitir que cada aluno percebesse a si mesmo como ser que aprende de acordo com suas próprias características.

O conceito de metacognição é um elemento central que reforça essa característica da pesquisa. Conhecer-se, de um ponto de vista metacognitivo, significa perceber-se, reconhecendo limites e possibilidades em termos de aprendizados e saberes.

Entretanto, à medida que pensávamos a pesquisa, percebemos que apenas o referencial metacognitivo seria insuficiente para atender aos nossos propósitos; buscávamos algo mais que apenas desenvolver a metacognição. Queríamos também que os alunos percebessem o processo em que estavam envolvidos e, de certo modo, observassem que a condução feita também poderia por eles ser aplicada em sua sala de aula.

Foi assim que a reflexão surgiu como uma opção a mais nesse processo de desenvolvimento. Ao sugerirmos diferentes atividades que utilizassem os tipos de reflexão propostos por Schön (2000), buscávamos reforçar o caráter de autoconhecimento – em termos de cognição e saberes próprios – que o curso possuía.

Apesar de a pesquisa não pretender a formação de professores reflexivos, entendemos que os resultados obtidos indicam possibilidades interessantes para os que buscam um trabalho com essa característica. Reforçamos uma colocação pessoal já feita ao longo do trabalho: não basta a proposta ser reflexiva; os resultados devem indicar que o trabalho foi reflexivo. Entendemos que nossa pesquisa se adequou a esse pensamento.

Já que a proposta de disciplina implementada integrava um curso de formação de professores, não podiam faltar à nossa discussão referenciais que nos remetessem ao estágio em que se encontra esse processo de formação, quer seja no Brasil ou no mundo. Os estudos que fizemos sobre esse assunto (formação de professores de Matemática) nos deixam a impressão de que o trabalho conduzido alinha-se com a recomendação de oferecer, aos futuros professores, uma formação ampla, rica em experiências, onde o processo esteja centrado na aprendizagem do aluno.

O estudo das cognições de um professor (ARTZT e ARMOUR-THOMAS, 2002) possibilitou-nos vislumbrar uma alternativa para a análise dos resultados obtidos. Apesar de não ter sido a intenção inicial, o uso das cognições dos professores em nosso trabalho está de acordo com uma crença que possuímos: no exercício de suas atividades diárias, os professores produzem uma série de saberes - muitas vezes não reconhecidos nem mesmo pelos próprios docentes – e desvalorizados por grupos que os veem apenas como reprodutores de saberes produzidos por outros. Esperamos que esse trabalho possa somar aos esforços que atualmente são feitos no sentido de valorizar os saberes produzidos pelos professores.

Desde o início, sabíamos que seria um curso dinâmico e que exigiria um pensar e repensar constante dos planejamentos feitos. Felizmente, as escolhas feitas pelos participantes permitiram uma condução do curso interligando diferentes conteúdos. Também para nós foi uma experiência inovadora trabalhar de modo que um conteúdo começasse sem a conclusão do outro.

Como a proposta colocada visava desenvolver a metacognição e a reflexão, as atividades foram montadas de modo a favorecer tais processos. Isso representou um grande desafio: cada atividade deveria ser desenhada, um trabalho artesanal de montagem Ainda que utilizássemos questões já formuladas, o ordenamento que fazíamos e os questionamentos propostos exigiam, também de nossa parte, um constante processo de reflexão, quer seja na ação, sobre a ação ou sobre a reflexão sobre a reflexão na ação. (SCHÖN, 2000)

Talvez essa seja a grande contribuição que o trabalho traz: os resultados obtidos e nossas percepções e interpretações sobre cada atividade influenciavam de tal maneira o desenho e a construção da atividade seguinte, que podemos afirmar que esse processo reflexivo foi uma das etapas mais significativas de nosso próprio desenvolvimento como professor e pesquisador.

Os resultados obtidos permitem-nos afirmar que a proposta encaminhada representou, de fato, um conjunto de experiências cognitivas e metacognitivas para os participantes. Apenas a amplitude dessa experiência ficou restrita ao empenho e a dedicação que cada um demonstrou ao longo do curso.

Participaram da pesquisa dezoito alunos que ao longo das atividades registravam não apenas suas resoluções em Matemática; em diversos momentos, registravam também justificativas para as ações que realizavam. Nesses registros buscamos encontrar elementos que comprovassem o uso da reflexão e as experiências cognitivas e metacognitivas vivenciadas.

Sob o ponto de vista das experiências cognitivas envolvendo a Matemática como objeto de estudo, percebemos que muitos alunos fizeram do curso um momento de aprendizagem real. Os assuntos desenvolvidos ao longo do curso – Números Complexos, Trigonometria e Análise Combinatória – representavam obstáculos que puderam ser superados à medida que o trabalho era desenvolvido.

Pudemos questionar a profundidade dos estudos matemáticos realizados: boa parcela dos alunos se restringiu a um trabalho de fixação de conceitos básicos, não se permitindo ousar em aprofundar os conhecimentos através da utilização de exercícios mais complexos ou de situações mais desafiadoras.

Em um único momento fizemos uma intervenção sobre a profundidade dos estudos que estavam sendo realizados. A lista de exercícios proposta na atividade 05 (Apêndice B) revela nossa preocupação em relação a isso. Entretanto, após refletirmos sobre o fato, concluímos que uma ação como essa não correspondia ao desenho autorregulativo que fizemos para o curso.

Sob a perspectiva das experiências metacognitivas, nossas ações de questionar os motivos pelos quais cada aluno agia de uma determinada maneira visavam ao desenvolvimento do conhecimento a respeito de si próprio. Infelizmente, um grupo de cinco alunos não se dedicou ao desenvolvimento desse tipo de atividade. Suas respostas, na maior parte das vezes, curtas e pouco conclusivas, revelaram a pouca preocupação com seu próprio desenvolvimento.

Ainda sobre as experiências cognitivas e metacognitivas que aconteceram ao longo do curso, destacamos o trabalho individual como o mais significativo. Nele pudemos oferecer a oportunidade a cada aluno de caminhar de modo particular, escolhendo o que e como estudar. Os resultados apresentados refletem o tipo de comprometimento que cada um teve com a elaboração de seu próprio trabalho.

Entendemos que algumas limitações impediram maiores avanços na pesquisa. Do ponto de vista da estrutura da faculdade, lamentamos o fato de não podermos utilizar com mais frequência o laboratório de informática, ao qual tínhamos acesso uma única vez por semana, durante períodos reduzidos. Acreditamos que as interrupções nas atividades que utilizam o software de apoio podem ter acabado por limitar a experimentação, comprometendo, talvez, a aprendizagem, considerando-se que as aulas não foram sequenciais.

O curto prazo de duração do curso – uma disciplina de um semestre – e a quantidade de encontros semanais – dois – também dificultaram não só a preparação das atividades propostas bem como a adaptação dos alunos ao tipo de trabalho realizado. Acreditamos que um curso anual, com um encontro semanal, permitiria uma melhor preparação das atividades por parte do professor e uma melhor participação dos alunos.

Durante a atividade dezenove, a autoavaliação, muitos alunos relataram a dificuldade que sentiram em relação à condução de um trabalho em que tinham uma maior liberdade de escolha e atuação. Talvez uma proposta de trabalho em que houvesse uma graduação do tipo de atividades e do nível de liberdade de investigação do aluno pudesse ser analisada. As atividades poderiam evoluir progressivamente quanto ao grau de autonomia das experiências cognitivas e metacognitivas viabilizadas, ou seja, as atividades seriam organizadas numa escala de 0 a 100, onde 0 corresponderia a uma atividade guiada pelo professor e 100, uma atividade proposta e conduzida pelo aluno.

Uma questão, ainda ligada à metacognição, desperta intensamente nossa curiosidade: como seria conduzir um curso como o proposto em uma turma de Ensino Médio? Sabemos que muitas ações que realizamos deveriam ser repensadas, adaptadas para esse nível. Mas cremos que um trabalho com essas características, adaptado a esse nível de ensino, possibilitaria uma experiência estudantil significativa para aqueles que estivessem diretamente envolvidos. Entretanto, pensamos que nossa crença carece de uma comprovação, demandando uma pesquisa que pode ser realizada no futuro.

Também não podemos deixar de ressaltar o processo de desenvolvimento reflexivo e autorregulativo pelo qual passamos. A proposta do curso foi classificada como ousada ou de difícil condução dentro do âmbito da própria faculdade onde ocorreu.

De fato, conduzir um curso com as características propostas, com o dinamismo que o mesmo possuía, lutando contra os constrangimentos de limitação de tempo exigiu de ambos, mestrando e orientadora, um esforço de estudo e planejamento constante. Podemos verificar que à medida que as atividades avançam, aumenta a qualidade das questões colocadas e o nível de questionamento realizado. Esse fato revela que também nos desenvolvíamos com o passar do curso. A análise de uma atividade servindo de referencial para a montagem da próxima mostrou-se um processo extremamente eficaz para a realização deste trabalho.

Por fim, para o professor que existia bem antes do pesquisador responsável por essa pesquisa, fica a certeza de que é necessário que a sala de aula, mesmo com a diversidade que a caracteriza, tenha espaços reservados para que cada aluno se perceba como ser único. O respeito a essas características individuais parece-nos ser uma das chaves para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALARCÃO, Isabel. **Professores Reflexivos em uma escola reflexiva**. 4. ed. São Paulo, Cortez, 2005. 102 p.

ARTZT, Alice F., ARMOUR-THOMAS, Eleanor. **A Cognitive Model for Examining Teacher's Instructional Pratice in Mathematics**: A Guide for Facilitating Teacher Reflection. Educational Studies in Mathematics, 1999.

ARTZT, Alice F., ARMOUR-THOMAS, Eleanor. **Becoming a Reflective mathematics Teacher**. A Guide for Observations and Self-Assessment. Lawrence Erlbaum, 2002.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Biklen. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Editora. 1994

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999, 346 p.

BROWN, Ana. Metacognition, Executive Control, Self-Regulatrion and Other More Mysterios Maechanisms. In: WEINERT, F. E.; KLUWE, R. (Orgs.) **Metacognition, motivation, and understanding**. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1987, p. 65 - 116.

CHAHON, Marcelo. **A metacognição e a resolução de problemas aritméticos verbais em sala de aula**: pesquisa e intervenção. 2003. 127f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Psicologia, Rio de Janeiro.

DAVIS, Claudia; NUNES, Marina M. R.; NUNES, César A. A. Metacognição e sucesso escolar: articulando teoria e prática. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 35, n.125, maio 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática** – contexto e aplicações. 2. ed. São Paulo, Ática, 2004.

FERNANDES, Domingos. Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática. **Educação e Matemática**, [Sl], n. 8, p. 3 – 6, 1° trim. 1989.

FERREIRA, Ana C. Analisando o desenvolvimento profissional e metacognitivo de professores de Matemática a partir de sua participação em um grupo de trabalho colaborativo. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PEESQUISA EM EDUCAÇÃO, 2004, Caxambu, **Anais da XXIII Reunião Anual da ANPED**, 2004, v.1,

FERREIRA, Ana C**. Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de Matemática**: uma experiência de trabalho colaborativo. 2003. 368 p. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

FERREIRA, Ana C. O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para o desenvolvimento profissional: compartilhando experiências. In: NACARATO, Adair M.; PAIVA, Maria A. V. (orgs). **A formação do professor que ensina Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 149 – 166.

FIGUEIRA, Ana P. C. Metacognição e seus contornos. **Revista Iberoamericana de Educacion**, Madrid, 2003. Disponível em: <http://www.rieoei.org/deloslectores/446Conceiro.pdf> Acesso em: 21 de novembro de 2009.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Ano 3, nº 4, 1995, Campinas, SP.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Autores Associados: Campinas, SP, 2006.

FLAVELL, John H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. **American Psychologist**, [Sl], v. 34, n. 10, p. 906 – 911, Oct 1979.

FLAVELL, John H. Speculations About the Nature and Development of Metacognition. In: WEINERT, F. E.; KLUWE, R. (Orgs.) **Metacognition, motivation, and understanding.** Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1987, p. 1 - 16.

FLAVELL, John H.; MILLER, Patrícia H.; MILLER, Scott, A. **Desenvolvimento cognitivo**. Tradução de Cláudia Dornelles. 3 ed. Porto Alegre, Artmed, 1999.

FROTA, M. C. R. A autorregulação do processo de aprendizagem Matemática. In: **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, II, 2003, Santos. Anais... Santos: SBEM, 2003. (CD-ROM, ISBN: 85 – 98092 – 01 – 0, arquivo: GT 4 – T 14. pdf).

FROTA, M. C. R. Estilos de Aprendizagem Matemática e autocontrole do processo de aprendizagem. In: Frota, M. C e Nasser L. (orgs). **Educação Matemática Superior: pesquisas e debates**, Recife: SBEM, 2009, p. 59-79.

FROTA, M. C. R. Estratégias Metacognitivas de Aprendizagem Matemática. In: **Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisas em Educação**, 24ª, 2001, Caxambu. Anais... Rio de Janeiro: ANPED, 2001. Disponível em http://www.anped.org.br/reunioes/24/T1913259897533.doc Acesso em 20 de setembro de 2007.

FROTA, M. C. R. **O pensar matemático no ensino superior**: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos. 2002. 287f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Educação, Belo Horizonte.
MOREIRA, Plínio C., DAVID, Maria M. M. S. A **formação Matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática elementar**. 7. ed. São Paulo, Atual, 2004.

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática** – ciência e aplicações. 4. ed. São Paulo, Atual, 2006.

MIZUKAMI, Maria G. N. **Ensino:** as abordagens do processo. São Paulo, EPU, 1986.

NACARATO, Adair M. et. all. O desafio de ser professor de Matemática hoje no Brasil In: NACARATO, Adair M.; FIORENTINI, Dario. (orgs). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática**. São Paulo: Musa, 2005. p. 89 – 105.

NACARATO, Adair M. PAIVA, Maria A. V. A formação do professor que ensina Matemática: estudos e perspectivas a partir das investigações realizadas pelos pesquisadores do GT 7 da SBEM. In: NACARATO, Adair M.; PAIVA, Maria A. V. (orgs). **A formação do professor que ensina Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 7 – 26.

OLIVEIRA, Isolina; SERRAZINA, Lurdes. A reflexão e o professor como investigador. **In: GTI – Grupo de Trabalho de Investigação** (org.) Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional. Portugal: APM, 2002, p. 29 – 42.

PAIVA, Maria A. V. O professor de Matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. In: NACARATO, Adair M.; PAIVA, Maria A. V. (orgs). **A formação do professor que ensina Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 89 – 112.

PAIVA, Maria A. V. Saberes do professor de Matemática: uma reflexão sobre a licenciatura. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, Ano 9, n. 11ª, p. 95 - 104, abril 2002.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciências, 1995.

PONTE, João P. A investigação sobre o professor de Matemática: problemas e perspectivas. **ANAIS I SIPEM**, Serra Negra, SP, 2000.

PONTE, João P. A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, Ano 9, n. 11ª, p. 3 - 8, abril 2002.

PONTE, João P. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. **Coleção Temas de Investigação**, Portugal, Instituto de Investigação Educacional, Secção de graduação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 185 – 239, 1992.

PONTE, João P. O Professor de Matemática: um balanço de dez anos de investigação. **Quadrante**, Portugal, v. 3, n. 2, p. 79 – 114, 1994.

PONTE, João P. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: PONTE, J. P. et al. (Ed.). **Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Que formação?** Lisboa: SEMSPCE, 1995. p. 193-211.

RIBEIRO, Célia. Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem. **Psicologia Reflexiva Crítica**, Porto Alegre, v.16, n.1, 2003.

SANTOS-WAGNER, V.M.P. Matemática: conhecimento, concepções e consciência metacognitiva de professores em formação e em exercício. In **Anais do Seminário Internacional**, Instituto de Matemática / Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1995, p.117-133.

SANTOS-WAGNER, Vânia M. P. Consciência metacognitiva de futuros professores primários numa disciplina de Matemática e um exame de seu conhecimento, concepções e consciência metacognitiva sobre frações. **Série Documental Eventos**, INEP, Brasília, n.4, 2º parte, p. 1 – 20, 1994

SCHOENFED, Alan. What´s all the fuss about Metacognition? In: SHOENFELD, A. H. (ed). **Cognitive Science and Mathematics Education**. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1987, p. 189 - 215.

SCHÖN, Donald A. **Educando o profissional reflexivo:** um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000. 256 p.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. EUA: Educational Research, 1986. v. 15(2) p. 4 – 14.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática** – ensino médio. 3. ed. São Paulo, Saraiva, 2004.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Relatório do GT 7 – Formação de professores que ensinam Matemática**. São Paulo: [S. n.], 2006.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Relatório Final do II Fórum Nacional de Licenciaturas de Matemática.** São Paulo: [S. n.], 2007.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Subsídios para a discussão de propostas para os cursos de licenciatura em Matemática:** uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo: [S. n.], 2003.

SZTAJN, Paola. O que precisa saber um professor de Matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, Ano 9, n. 11ª, p. 17 - 28, abril 2002.

TARDIF, Maurice. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. 5 ed. Petrópolis – RJ, Vozes, 2002.

ZEICHNER, Kenneth M. Uma análise crítica sobre a reflexão como conceito estruturante na formação docente. **Educação e Sociedade**, Campinas, vol. 29, p. 535 – 554, maio/agosto de 2008. Disponível em http://www.scielo.br. Acessado em 21 de novembro de 2009.

ZEICHNER, Kenneth M.; DINIZ - PEREIRA, Júlio E. Pesquisa dos educadores e formação docente voltada para a transformação social. **Cadernos de Pesquisa**, v.35, n.125, p. 63 – 89. maio/agosto de 2005

APÊNDICES

APÊNDICE A – Conteúdos indicados para estudo.

Assunto	Nº de citações
Números Complexos	12
Análise Combinatória	9
Probabilidade	5
Trigonometria	5
Uso da Calculadora Científica	4
Geometria Espacial	3
História da Matemática	3
PA e PG	3
Limite, Integral e Derivada de Funções Trigonométricas.	2
Jogos Matemáticos	2
Polinômios	2
Geometria Não-Euclidiana	2
Lógica	2
Limite – Regra de L'Hôpital	1
Análise de Livros Textos	1
Matemática Discreta	1
Binômio de Newton	1
Equações Algébricas	1
Radiciação	1
Educação Especial	1
Integrais	1
Resolução de Séries utilizando Integrais	1
Função do 1° e 2° graus	1
Logaritmo	1
Matrizes	1
Análise de gráficos de funções variadas	1

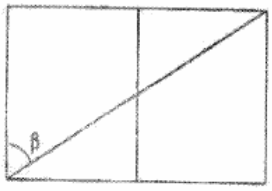
APÊNDICE B – Lista de exercícios utilizada na atividade 5.

Atividade 5:
1) Quais são as condições para que $\frac{a+bi}{c+di}$, com $c+di \neq 0$, seja um: a. Imaginário puro; b. Real.
2) Se $z=(2+i)\cdot(1+i)\cdot i$, qual o conjugado de **z**?
3) Qual o valor da expressão $i^{13}+i^{15}$?
4) Se z_1 e z_2 são números complexos, z_1+z_2 e $z_1 \cdot z_2$ são ambos reais, o que se pode afirmar sobre z_1 e z_2?
5) Qual a forma $a+bi$ de $z=\frac{1+2i}{1-i}$?
6) Se $a=1+2i$, $b=2-i$ b e $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=0$, calcule o complexo c.
7) Determine os números complexos **z** tais que $z+z'=4$ e $z \cdot z'=13$, onde **z'** é o conjugado de **z**.
8) Determine os valores de x de modo que o número complexo $z=2+(x-4i)\cdot(2+xi)$ seja real.

APÊNDICE C – Material utilizado na atividade 6.

Usando o programa Thales, resolva as questões a seguir:

1) Dados os quadrados abaixo, calcule o valor do ângulo β.

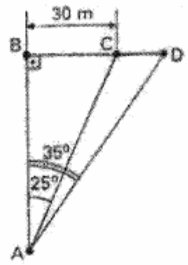


2) Construa um triângulo retângulo com um ângulo de 32°.

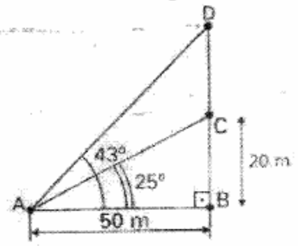
   a) Determine o seno, o cosseno e a tangente desse ângulo.
   b) O mesmo triangulo permite determinar as razões de outro ângulo? Qual?
   c) Indique o seno e o cosseno desse ângulo.

3)
   a) Um avião levanta vôo formando um ângulo de 20º com o solo. Depois de percorrer 1000 metros, que altura ele atinge?
   b) E ao final de 1500 metros?
   c) O piloto deseja atingir uma altura superior a 700 metros ao final de 2000 metros de percurso. Para isso, ele terá que levantar vôo com um ângulo superior ou inferior a 20°?
   d) Elabore mais duas perguntas para este problema

4) As indicações dadas pela figura permitem calcular a distância CD? Em caso afirmativo, diga qual é essa distância.



5) Uma ponte passando por BD vai ser construída sobre um rio. As margens desse rio são inacessíveis (estão infestadas de jacarés). Os pontos C e D são vistos a partir dos pontos A e B. Qual é a largura do rio?



APÊNDICE D – Lista de exercícios utilizada na atividade 6.

1) Defina (sem acesso a qualquer material):
   a. Grau;
   b. Radiano.

2) Com acesso ao seu livro de apoio ou ao programa, corrija a sua resposta da questão 1. A resposta está completa? O que faltou? O que você mudaria? Não esqueça de citar o material consultado.

3) Numa circunferência de 32 cm de diâmetro, marca-se um arco AB de 8 cm de comprimento. Qual a medida desse arco em radianos?

4) Expresse em graus e em radianos as medidas dos arcos que correspondem a:
   a. $\frac{1}{6}$ da medida da circunferência;
   b. $\frac{2}{5}$ da medida da circunferência.

5) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km em torno de uma pista circular de raio 200 metros. Calcule o número de voltas que ele deve dar. Use $\pi = 3,14$.

6) Imagine que você tenha que preparar uma aula sobre ciclo trigonométrico. O que você considera fundamental comentar nessa aula? O que você enfatizaria?

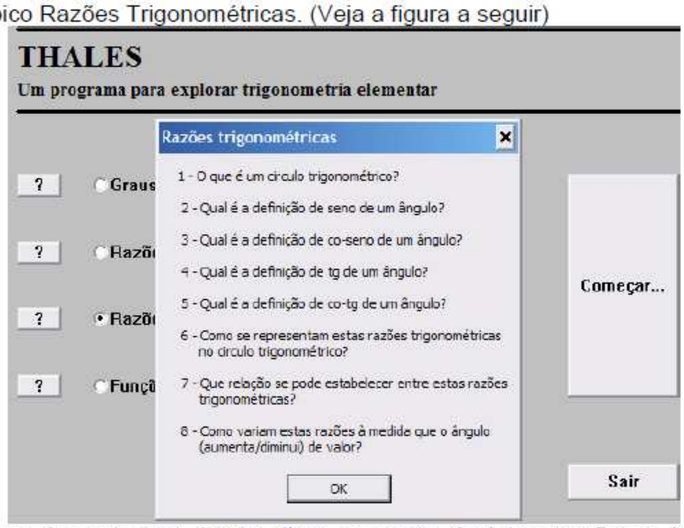
7) Suponha que nessa aula fictícia um aluno lhe pergunte por que o raio do ciclo trigonométrico mede 1. Qual explicação você daria?

8) O que são arcos côngruos?

APÊNDICE E – Lista de exercícios utilizada na atividade 8.

Hoje, dando continuidade aos estudos sobre trigonometria, aprofundaremos nossos conhecimentos sobre as funções circulares, estudando-as no ciclo trigonométrico. Para esse estudo continuaremos a utilizar o programa Thales, como já fizemos em oportunidades anteriores.

1) Utilizando a tela inicial do programa, responda, sem consulta, as perguntas propostas para o tópico Razões Trigonométricas. (Veja a figura a seguir)



Para acesso às perguntas basta clicar no ponto de interrogação ao lado do tópico desejado.

2) Explore a tela inicial da seção Razões Trigonométricas. Utilize suas várias funcionalidades, buscando conhecer o que cada uma delas permite fazer. Caso queira, registre um pequeno comentário sobre algo curioso ou novidade que encontre.

3) Detenha-se um pouco mais na seção Definições (canto inferior direito da tela):
   a) Abra a opção seno.
   b) Leia com atenção a definição de seno.
   c) Com as teclas > e <, varie o tamanho do raio.
   d) O que acontece com o valor do seno à medida que variamos o raio?
   e) Você consegue formular uma explicação para o que ocorre na letra d?

4) Use o programa para completar a tabela a seguir:

Ângulo	Seno	Co-seno	Tangente
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			

2π			

5) De acordo com o livro Matemática – Contexto e Aplicações – de Luiz Roberto Dante, a idéia de ciclo trigonométrico é a seguinte:

Denomina-se circunferência unitária (ou circunferência trigonométrica) a circunferência orientada cujo raio é uma unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.

À circunferência unitária de centro O vamos associar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, fixando o ponto A de coordenadas (1,0) como origem dos arcos.

Os eixos x e y dividem a circunferência unitária em quatro partes congruentes chamadas quadrantes, numeradas de 1 a 4 e contadas a partir de A, no sentido positivo.

O nosso programa oferece uma visualização do ciclo trigonométrico. Procure estudar a definição dada em associação com a imagem fornecida pelo software.

Note que à medida que variamos o ângulo pelos diferentes quadrantes, os valores das funções trigonométricas vão variando. Observando esses comportamentos, complete a tabela abaixo:

Sinal (+ ou -)

Quadrante	Seno	Co-seno	Tangente
1º			
2°			
3°			
4°			

Monotonicidade (Crescimento ou Decrescimento)

Quadrante	Seno	Co-seno	Tangente
1º			
2°			
3°			
4°			

6) Segundo a geometria plana, dois arcos são suplementares quando sua soma é igual a 180° ou π radianos. Escolha dois arcos suplementares e complete a tabela: (Procure utilizar um arco do 1° quadrante)

Ângulo	Seno	Co-seno	Tangente

A que conclusão você chegou através dos resultados obtidos? É possível generalizá-los?

7) Escolha um arco do 1º quadrante.
   a) Anote seus valores de seno, co-seno e tangente na tabela abaixo.
   b) Acrescente a esse arco 180° ou π radianos. Anote os valores de seno, co-seno e tangente desse novo arco.

Ângulo	Seno	Co-seno	Tangente

A que conclusão você chegou através dos resultados obtidos? É possível generalizá-los?

8) Segundo a geometria plana, dois arcos são replementares quando sua soma é igual a $360°$ ou 2π radianos. Escolha dois arcos replementares e complete a tabela: (Procure utilizar um arco do $1°$ quadrante)

Ângulo	Seno	Co-seno	Tangente

A que conclusão você chegou através dos resultados obtidos? É possível generalizá-los?

9) Escolha 4 arcos no intervalo $[0,2\pi]$, um em cada quadrante.

a) Complete a tabela a seguir usando os arcos escolhidos.

Arcos	Seno	Co-seno	Tangente

b) Complete a tabela a seguir, usando os arcos escolhidos no item a, porém com a orientação oposta.

Arcos	Seno	Co-seno	Tangente

c) Faça uma comparação entra as tabelas das letras a e b. A que conclusões você chegou? È possível generalizar tais resultados?

10) Use o programa para explorar resultados do tipo:

$$\text{sen}(a+b), \text{sen}(a-b),\ \cos(a+b) \text{ e } \cos(a-b)$$

APÊNDICE F – Lista de exercícios utilizada na atividade 9.

A aula passada serviu para explorarmos seno, co-seno e tangente por todo o ciclo trigonométrico. Começaremos a aula de hoje retomando algumas idéias discutidas naquela oportunidade, buscando sistematizá-las.

1) Utilizando o programa Thales, complete a tabela a seguir:

Ângulo(em graus)	Ângulo (em radianos)	Seno	Co-seno	Tangente
	0,52			
	2,62			
	3,67			
	5,76			

Você consegue estabelecer uma relação entre os ângulos citados nas 2ª, 3ª e 4ª linhas com aquele citado na 1ª linha?

___

___

___

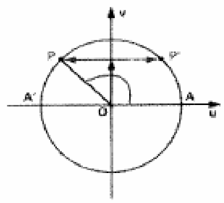
2) Em trigonometria é comum relacionarmos arcos que não pertencem ao 1° quadrante com arcos pertencentes ao 1° quadrante. Essa relação é chamada por muitos autores de **"Redução ao primeiro quadrante".** Observe as figuras a seguir que explicam esse assunto:

<u>Do 2.° para o 1.°</u>

x ∈ IR, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

<u>Seja P a imagem de x no ciclo</u>

$\overset{\frown}{AP} = x$.



$\overset{\frown}{AP} + PA' = \pi$ (sentido anti-horário)

$AP + AP' = \pi$

$AP' = \pi - x$

$\text{sen}\, x = \text{sen}(\pi - x)$

$\cos x = -\cos(\pi - x)$

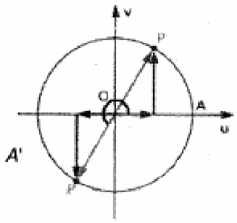
$tgx = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\text{sen}(\pi - x)}{-\cos(\pi - x)} = -tg(\pi - x)$

<u>Do 3.° para o 1.°</u>

x ∈ IR, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

<u>Seja P a imagem de x no ciclo</u>

$AP = x$



$AP - PA' = \pi$ (sentido anti-horário),

$AP - AP' = \pi$

$AP' = x - \pi$

$\text{sen}\, x = -\text{sen}(x - \pi)$

$\cos x = -\cos(x - \pi)$

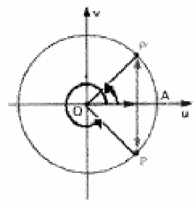
$tgx = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{-\text{sen}(x - \pi)}{-\cos(x - \pi)} = tg(x - \pi)$

<u>Do 4.° para o 1.°</u>

x ∈ IR, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Seja P a imagem de x no ciclo

$AP = x$



$AP + PA = 2\pi$ (sentido anti-horário)

$AP' = PA$

$AP + AP' = 2\pi$

$AP' = 2\pi - x$

$\text{sen}\, x = -\text{sen}(2\pi - x)$

$\cos x = \cos(2\pi - x)$

$tgx = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{-\text{sen}(2\pi - x)}{\cos(2\pi - x)} = -tg(2\pi - x)$

Valendo-se da redução ao primeiro quadrante, responda:

a) sen 150°
b) cos 120°
c) $tg\frac{3\pi}{4}$
d) sen 210°
e) cos 225°
f) $tg\frac{4\pi}{3}$
g) sen 300°
h) cos 315°
i) $tg\frac{11\pi}{6}$

3) Agora corrija o exercício anterior, utilizando o programa Thales.
   a) Você errou alguma(s) resposta(s)? Qual(is)?
   b) Que tipo de erro você cometeu?

____

____

A partir do exercício 4 discutiremos a Adição de Arcos, assunto que ainda não estudamos.

4) Use o programa para completar a tabela a seguir:
Obs. Primeiro defina os valores: a = ____ e b = ___

Ângulo	Seno	Co-seno	Tangente
a			
b			
$a+b$			
$a-b$			

A partir da tabela acima, é possível afirmar que:
   a) O seno da soma é igual a soma dos senos?
   b) O co-seno da diferença é igual a diferença dos co-senos?

5) Complete as sentenças a seguir usando um material de apoio (não esqueça de indicar o material utilizado).

   a) $sen(a+b)=$
   b) $sen(a-b)=$
   c) $cos(a+b)=$
   d) $cos(a-b)=$
   e) $tg(a+b)=$
   f) $tg(a-b)=$

6) Complete a tabela a seguir usando um arco a do primeiro quadrante:
   a = ___

Ângulo	Seno	Co-seno	Tangente
a			
a +90°			
a +180°			

A que conclusões você chega ao analisar as suas repostas?

____

____

APÊNDICE G – Lista de exercícios utilizada na atividade 10.

Com auxilio de um livro de sua escolha, responda as questões a seguir.

Livro utilizado:

____

Questões:

1. Estude as demonstrações das Leis dos Senos dos Cossenos.
2.
    a. Apresente uma das demonstrações.
    b. Aponte as principais dificuldades encontradas.
    c. Conseguiu esclarecer as duvidas? O que fez para esclarecê-las?
3. Elabore e resolva uma lista com 4 exercícios (2 sobre cada uma das leis).
4. Quais orientações você daria e um estudante sobre o uso de cada uma das Leis?
5. Os conhecimentos obtidos lhe auxiliaram nesta aula? Em quais pontos?

APÊNDICE H – Lista de exercícios utilizada na atividade 11.

Após termos encerrado nossas atividades sobre trigonometria, retomaremos, na aula de hoje, o estudo dos números complexos. Começaremos com uma breve revisão e depois aprofundaremos nossos conhecimentos.

Revisão Inicial

Unidade Imaginária: $i^2 = -1$

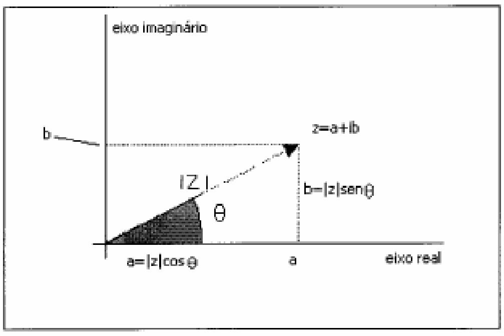
Forma Algébrica: $z = a + bi$, onde a é a parte de z (Re(z)) e b a parte imaginária (Im(z)).

Operações na forma algébrica: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$

Adição : $z + w = (a + c) + (b + d)i$; Subtração : $z - w = (a - c) + (b - d)i$

Forma Trigonométrica (ou Polar):

$$\begin{cases} |z| : \text{módulo de } z \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta : \text{argumento de } z \Rightarrow \text{tg } \theta = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$



Exercícios de Revisão:

1) Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que
   a) $z = (m - 3) + 4i$ seja um imaginário puro.
   b) $z = -3 + (m + 3)i$ seja real.
2) Resolva a equação $x^3 - 14x^2 + 58x = 0$, considerando o conjunto:
   a) $\mathbb{R}$
   b) $\mathbb{C}$
3) Determine z_1 e z_2, números complexos, tais que $z_1 + z_2 = -4 + 7i$ e $z_1 - 2z_2 = 17 - 8i$.
4) **(DESAFIO)** Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $\left(\bar{z}\right)^2 + iz = -2$. (Sugestão: considere z = a+bi).
5) Passe para a forma trigonométrica (se necessário, utilize o programa Thales):
   a) i
   b) $-i$
   c) $5 - 2i$
   d) $-3 - 4i$
6) Qual é a representação geométrica de todos os números complexos que têm módulo igual a uma constante, como, por exemplo, $|z| = 2$?
7) Qual é a representação geométrica de todos os números complexos que têm argumento igual a uma constante, como, por exemplo, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$?

Operações na Forma Trigonométrica:

Sabendo que $\begin{cases} sen(a+b) = sen(a)\cdot cos(b) + sen(b)\cdot cos(a) \\ sen(a-b) = sen(a)\cdot cos(b) - sen(b)\cdot cos(a) \\ cos(a+b) = cos(a)\cdot cos(b) - sen(a)\cdot sen(b) \\ cos(a-b) = cos(a)\cdot cos(b) + sen(a)\cdot sen(b) \end{cases}$ e adotando

$\begin{cases} z = |z|\cdot[cos(a) + i\cdot sen(a)] \\ w = |w|\cdot[cos(b) + i\cdot sen(b)] \end{cases}$, deduza as fórmulas para a multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica.

Exercícios:

8) Sejam os números complexos

$$\begin{cases} z_1 = 6\cdot(cos\,240° + i\cdot sen240°) \\ z_2 = cos\,30° + i\cdot sen30° \\ z_3 = 2\cdot(cos\,150° + i\cdot sen150°) \end{cases}.$$

Escreva na forma trigonométrica:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $z_2 \cdot z_3$

c) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

d) $\frac{z_1}{z_2}$

e) $\frac{z_1}{z_3}$

9) Sejam $z_1 = \rho_1\cdot(cos\theta_1 + i\cdot sen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2\cdot(cos\theta_2 + i\cdot sen\theta_2)$. Sabendo que $z_1\cdot z_2 = 80\cdot\left(cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + i\cdot sen\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right)$ e $\frac{z_2}{z_1} = 5\cdot\left(cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\cdot sen\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)$, escreva z_1 e z_2 na forma trigonométrica.

10) <u>**(DESAFIO)**</u> Utilizando a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica, deduza uma fórmula para a potenciação desses mesmos números.

11) Calcule $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^7$.

12) Qual é o menor número natural positivo n para o qual $\left(\sqrt{3}-i\right)^n$ é um número real? Qual é, nesse caso, o número real?

13) Interprete, geometricamente, cada um dos produtos a seguir:

$$z = |z|\cdot(cos\,\theta + i\cdot sen\theta)$$

a) $2\cdot z$

b) $i\cdot z$

c) $-z$

d) $-i\cdot z$

APÊNDICE I – Lista de exercícios utilizada na atividade 13.

Orientações Gerais:

- ✓ **Leia com atenção o enunciado de cada exercício, sem resolvê-lo;**
- ✓ **Forme blocos com critérios estabelecidos por você mesmo (especifique o seu critério).**

1. Quantas diagonais possui o decágono?

2. Quantos números de 4 algarismos podemos escrever com os algarismos 2, 4, 6 e 8? E de 4 algarismos distintos?

3. Um estudante tem 6 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras ele poderá pintar os estados da Região Sudeste do Brasil (São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Espírito Santo), cada um de uma cor?

4. Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado?

5. Para compor a tripulação de um avião, dispomos de 20 pilotos, 4 co-pilotos, 3 comissárias e 5 comissários de bordo. Sabendo que em cada vôo vão 2 comissárias, 2 comissários, 1 piloto e 2 co-pilotos, de quantos modos pode ser escolhidos a tripulação?

6. De quantas maneiras diferentes se pode vestir uma pessoa que tenha 5 camisas, 3 calças, 2 pares de meias e 2 pares de sapatos?

7. Quantas palavras (com significado ou não) de 4 letras podemos formar com as letras A, O, R e M?

8. Uma associação tem uma diretoria formada por 10 pessoas: 6 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras podemos formar uma comissão dessa diretoria que tenha 3 homens e 2 mulheres?

9. Quantos números de dois algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das dezenas corresponde a um múltiplo de 2 (diferente de zero) e o algarismo das unidades a um múltiplo de 3?

10. Tenho 6 livros diferentes de Português e 6 diferentes de Matemática. Quero colocar 4 livros de Português e 3 de Matemática na prateleira de uma estante. De quantas maneiras posso fazer isso de modo que os livros da mesma matéria fiquem juntos?

APÊNDICE J– Lista de exercícios utilizada na atividade 15.

Orientações para a atividade:

1. Estude a teoria apresentada comparando com um livro de sua escolha. Faça um breve comentário com as suas impressões a respeito do livro escolhido e do material recebido.
2. Monte uma lista com cinco exercícios sobre cada um dos tópicos a seguir:
   a. Princípio Fundamental da Contagem;
   b. Arranjos;
   c. Permutações.

APÊNDICE K – Lista de exercícios utilizada na atividade 16.

Orientações para a atividade:

1. Estude a teoria apresentada comparando com um livro de sua escolha. Faça um breve comentário com as suas impressões a respeito do livro escolhido e do material recebido.
2. Monte uma lista com cinco exercícios sobre combinação.
3. Elabore, a partir da bibliografia escolhida, um resumo que envolva a teoria à respeito do trabalho com arranjos, permutações e combinações utilizando elementos repetidos.

APÊNDICE L – Lista de exercícios utilizada na atividade 18.

01) Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, sem repeti-los, escreve-se x números maiores que 2400. Qual o valor de x?
02) De quantas maneiras diferentes pode-se vestir uma pessoa que tenha 5 camisas, 3 calças, 2 pares de meias e 2 pares de sapatos?
03) No sistema de numeração decimal, quantos números de três algarismos são formados sem repetição de algarismos?
04) Numa lanchonete há 5 tipos de sanduíche, 4 tipos de refrigerante e 3 tipos de sorvete. De quantas maneiras podemos formar um tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 sorvete?
05) Com os algarismos 1, 2, 3,..., 9 formam-se números de 4 algarismos distintos. Quantos são maiores que 4326?
06) Quantos números de dois algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3 e 4?
07) Resolva a equação $A_{x,2} = 20$.
08) Quantos números de dois algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos de 1 a 9?
09) Um estudante tem seis lápis de cores diferentes. De quantas maneiras poderá pintar os estados da Região Sudeste?
10) Resolva a seguinte equação $A_{n+1,n-1} = 60$.
11) Determine o número de anagramas formados a partir de:
    a) LUA;
    b) GATO;
    c) ESCOLA;
    d) REPÚBLICA.

12) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 7, quantos números pares de 6 algarismos distintos podemos formar?
13) Quantos são os números com 5 algarismos formados com os dígitos 1, 3, 4 e 6, sendo que o 3 comparece em duas posições?
14) Permutando as letras T, R, A, P, O e S são formados 720 anagramas. Esses anagramas são colocados em ordem alfabética. Qual a posição correspondente a PRATOS?
15) De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?
16) Calcule:
    a) $C_{8,5}$
    b) $C_{10,3}$
    c) $C_{n,n-2}$
17) Determinar n, sabendo que $C_{n,2}=10$.
18) Um torneio de futebol será disputado em duas sedes a serem escolhidas entre seis cidades. De quantas maneiras poderá ser feita a escolha das duas cidades?
19) De quantos modos podem ser colocados os 4 cavalos de um jogo de xadrez, dois brancos e dois pretos, nas casas de um tabuleiro?
20) Sobre uma reta marcam-se oito pontos e sobre outra reta, paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. Quantos triângulos obteremos unindo três pontos quaisquer do total desses pontos?

APÊNDICE M – Lista de exercícios utilizada na atividade 18.

Prezado Aluno:

Desde o início, esse foi um curso diferente. Como a sua ementa é flexível, optei por fazer dele um espaço onde você atuasse mais, tomando algumas decisões. Foi dessa maneira que montamos a ementa, que chamei de coletiva: Números Complexos, Trigonometria e Análise Combinatória. Foi assim pensando também que os deixei à vontade para escolherem o tema para a elaboração do trabalho individual.

Ao longo das diversas atividades que desenvolvemos, sempre busquei interagir com cada um de vocês, os questionando sempre sobre os motivos de suas escolhas, quer seja para a elaboração de uma atividade ou a montagem de uma lista de exercícios. O foco principal do curso foi o desenvolvimento de suas capacidades METACOGNITIVAS.

Num curso tão diferente assim, é natural que a avaliação também seja diferente. Por isso, cada atividade desenvolvida tem o seu valor, valendo-se de uma avaliação processual. Mas também entendo que, num curso onde a metacognição foi a palavra-chave, ouvir a sua opinião sobre o seu próprio desenvolvimento será extremamente importante. Por isso, gostaria que você usasse o espaço a seguir para uma auto-avaliação. Procure fazer uma reflexão profunda sobre sua participação nesse curso, seu empenho, assiduidade, seu aprendizado e algo mais que queira avaliar. Gostaria que relatasse essa sua reflexão, detalhando aquilo que julgar necessário.

Ah! E não esqueça de atribuir uma nota à sua atuação.

Um abraço,

Professor X

ANEXOS

ANEXO A – Quadro original dos componentes do modelo de ensino de Artzt e Armour-Thomas (2002).

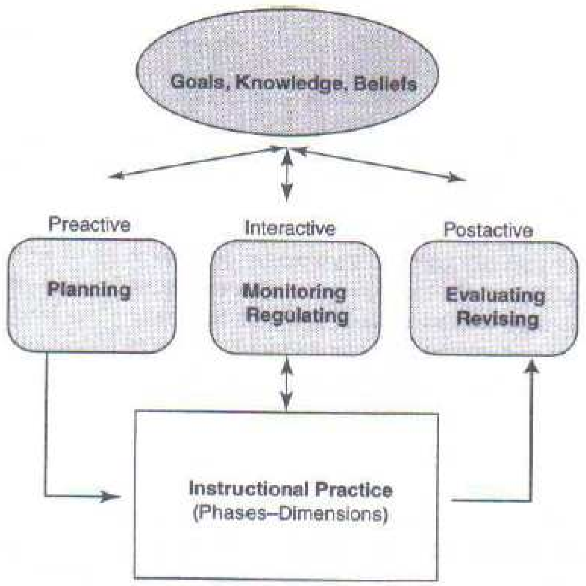


FIG. 1 Components of the model for teaching. Adapted from "A Structure to Enable Preservice Teachers of Mathematics to Reflect on Their Teaching," by A. F. Artzt, 1999, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(2), p. 145. Copyright © 1999 by Kluwer Academic Publishers. Also adapted from "Mathematics Teaching as Problem Solving," by A. F. Artzt and E. Armour-Thomas, 1998, *Instructional Science*, 26(1–2), p. 8. Copyright © 1998 by Kluwer Academic Publishers. Adapted with kind permission from Kluwer Academic Publishers.

Fonte: Artzt e Armour-Thomas, 2002, p.27

ANEXO B – Material de apoio para a atividade 3.

Números complexos

1 Introdução

Dentre os conjuntos numéricos já conhecidos tínhamos inicialmente o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

Para que a subtração fosse sempre possível, ele foi estendido e obtivemos o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

Para que também a divisão fosse possível, estendemos este último e obtivemos o conjunto dos números racionais, que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros:

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

Em $\mathbb{Q}$, a única divisão impossível é a divisão por 0.

Em $\mathbb{Q}$, a equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida, ou seja, as soluções $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ não podem ser representadas por uma fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e **a** e **b** pertencentes a $\mathbb{Z}$. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são exemplos dos números chamados de irracionais ($\mathbb{I}$).

Da união dos racionais com os irracionais surgem os números reais ($\mathbb{R}$):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

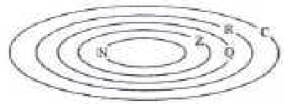
Portanto, podemos identificar $\mathbb{N}$ como uma parte de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ como uma parte de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ como uma parte de $\mathbb{R}$ e escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Sabemos que, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

e não existe um número real x que elevado ao quadrado resulte −1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado de conjunto dos *números complexos* ($\mathbb{C}$).



2 O conjunto dos números complexos

O conjunto $\mathbb{C}$ é um conjunto cujos elementos — os números complexos — devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto $\mathbb{C}$, e as operações de adição e multiplicação feitas sobre os números reais no conjunto $\mathbb{C}$ devem ser as mesmas já conhecidas. Note que, se isso não fosse observado, o conjunto $\mathbb{R}$ não seria um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Uma boa maneira de definir esse conjunto é a proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837, segundo a qual o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais, em que estão definidas:

- Igualdade:
  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
- Adição:
  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Multiplicação:
  $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Observações:

1) Os números reais pertencem a $\mathbb{C}$ e correspondem aos pares que têm o segundo elemento igual a zero. Assim:
   - o par $(5, 0)$ corresponde ao número real 5;
   - o par $\left(\frac{3}{7}, 0\right)$ corresponde ao número real $\frac{3}{7}$;
   - o par $(-1, 0)$ corresponde ao número real −1;
   - o par $(0, 0)$ corresponde ao número real 0.

   Já os pares que têm o segundo elemento diferente de zero correspondem aos complexos que não são reais. Assim:
   - o par $(0, 1)$ corresponde a um número complexo que não é real;
   - o mesmo ocorre com os pares $(2, -3)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e outros.

2) As operações de adição e multiplicação assim definidas satisfazem as seguintes propriedades (para quaisquer **z**, v e w pertencentes a $\mathbb{C}$):

   Adição:
   - Comutativa
     $z + v = v + z$
   - *Associativa*
     $(z + v) + w = z + (v + w)$
   - *Elemento neutro*
     Existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 = (0, 0)$ tal que:
     $z + z_0 = z_0 + z = z$
   - *Inverso aditivo ou oposto*
     Para $z \in \mathbb{C}$, existe $z' \in \mathbb{C}$ tal que:
     $z + z' = z' + z = z_0 = (0, 0)$

   Multiplicação:
   - Comutativa
     $zv = vz$
   - *Associativa*
     $(zv)w = z(vw)$
   - *Elemento neutro*
     Existe $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 = (1, 0)$ tal que:
     $zz_1 = z_1z = z$
   - *Inverso multiplicativo* (esse assunto será estudado na página 519), em "conjugado de um número complexo"
     Para $z \neq (0, 0)$ existe $z' \in \mathbb{C}$ tal que:
     $zz' = z'z = z_1 = (1, 0)$
   - *A multiplicação é distributiva em relação à adição*
     $z(v + w) = zv + zw$

Como os números complexos **z**, v e w são pares de números reais, fazemos a demonstração de cada propriedade usando as propriedades da adição e multiplicação de números reais. Por exemplo, a comutativa da adição.

Para $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, vem:
$z + w = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = w + z$
pois para a, b, c e d reais, temos $a + c = c + a$ e $b + d = d + b$.

Exemplos:

1º) Vamos determinar x e y reais para que se verifique a igualdade $(x, 6) = (3, 2y)$.
Pela definição de igualdade de números complexos, temos:

$$(x, 6) = (3, 2y) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 6 = 2y \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Logo, $x = 3$ e $y = 3$.

2º) Calculemos x e y reais para que se verifique a igualdade $(3x, -4) + (y, x + y) = (2, -3)$.
Aplicando a definição de adição e depois de igualdade de números complexos, temos:

$$(3x, -4) + (y, x + y) = (2, -3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (3x + y, x + y - 4) = (2, -3)$$
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + y - 4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$. Fazendo a verificação, vem:

$$(3x, -4) + (y, x + y) = (2, -3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(3 \cdot \frac{1}{2}, -4\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (2, -3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}, -4\right) + \left(\frac{1}{2}, 1\right) = (2, -3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}, -4 + 1\right) = (2, -3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2, -3) = (2, -3)$$

Logo, $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$.

3 Forma algébrica dos números complexos

Resolvendo a equação $x^2 + 4x + 5 = 0$, temos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

O resultado é impossível em $\mathbb{R}$. Veremos, no exemplo 8º da página 517, que solução tem em $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$

Identificamos o número complexo $(a, 0)$ com o número real a:

$$(a, 0) \Leftrightarrow a$$

Ao fazer essa identificação, constatamos que $\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

As definições de adição e multiplicação e suas propriedades comportam-se para os números complexos da forma $(a, 0)$ como se fossem números reais a. Assim, por exemplo, temos:

- $(1, 0)$ identifica-se com o número real 1;
- $(-3, 0)$ com -3;
- $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ com $\frac{1}{2}$;
- $(0, 0)$ com 0.

A unidade imaginária

Criamos um nome e um símbolo para o número complexo $(0, 1)$. Ele será chamado de *unidade imaginária* e indicado por i, ou seja, o símbolo i identifica-se com o número complexo $(0, 1)$.

Observemos que:

$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$

Portanto:

$$i^2 = -1$$

PARA REFLETIR: A unidade imaginária i é um número complexo não real.

que é a característica fundamental da unidade imaginária.

A forma algébrica

Um número complexo qualquer $z = (a, b)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$z = (a, b) = (a + 0, b + 0) = (a, 0) + (0, b) \quad (I)$$

Como $(0, b) = (b, 0)(0, 1)$ (II), pois $(b, 0)(0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$, e $(a, 0) = a$ e $(b, 0) = b$ (III), substituindo (II) e (III) em (I), temos:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = \underbrace{(a, 0)}_{a} + \underbrace{(b, 0)}_{b} \cdot \underbrace{(0, 1)}_{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = a + bi$$

Então, todo número complexo $z = (a, b)$ pode ser escrito de maneira única:

$$z = a + bi \quad (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1)$$

Essa é a *forma algébrica* ou *forma binomial* de escrever um número complexo. Observemos que um número complexo escrito nessa forma tem duas partes:

$$z = \underbrace{a}_{\substack{\text{parte real}\\ \text{de } z}} + \underbrace{bi}_{\substack{\text{parte}\\ \text{imaginária}\\ \text{de } z}}$$

$\downarrow \text{Re}(z) = a \qquad \downarrow \text{Im}(z) = b$

PARA REFLETIR: Podemos escrever a equivalência $(a, b) \Leftrightarrow a + bi$.

Devemos observar também que, se $b = 0$, temos $z = a$ (número real); e, se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos $z = bi$, que é um número imaginário puro.

Exemplos:

1º) Em $z = 2 + 3i$, temos $\text{Re}(z) = 2$ e $\text{Im}(z) = 3$.

2º) Em $z = 3$, temos $\text{Re}(z) = 3$ e $\text{Im}(z) = 0$. Portanto, z é real.

3º) Em $z = -2i$, temos $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) = -2$. Portanto, z é um número imaginário puro.

Usando a forma algébrica, as operações de adição, subtração e multiplicação são mais intuitivas do que com a representação por pares ordenados. Na multiplicação, por exemplo, basta aplicar a mesma propriedade distributiva usada na multiplicação de binômios, porém observando que i^2 é um número real e vale -1. Não há necessidade alguma de decorar fórmulas.

Exemplos:

1º) $(2 + 3i) + (-3 + 4i) = (2 - 3) + (3 + 4)i = -1 + 7i$

2º) $(1 + 2i)(2 - 3i) = 1 \cdot 2 + 1(-3i) + (2i)2 + (2i)(-3i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 2 + i - 6(-1) = 2 + i + 6 = 8 + i$

3º) $(1 + i) - (3 + 2i) = (1 - 3) + (1 - 2)i = -2 - 1i = -2 - i$

4º) Vamos colocar na forma algébrica o número complexo $(-1, \sqrt{2})$.

Se $z = a + bi$ e, nesse caso, $a = -1$ e $b = \sqrt{2}$, então $z = -1 + \sqrt{2}i$.

5º) Dados os números complexos $z_1 = (1, 3)$ e $z_2 = (-2, 1)$, vamos calcular:

a) $z_1 + z_2$ c) z_1^2
b) $z_1 z_2$ d) $z_1 + z_2^2$

a) $z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (-2 + i) = (1 - 2) + (3 + 1)i = -1 + 4i$

b) $z_1 z_2 = (1 + 3i)(-2 + i) = 1(-2) + 1 \cdot i + 3i(-2) + 3i \cdot i = -2 + i - 6i + 3i^2 = -2 - 5i + 3(-1) = -5 - 5i$

c) $z_1^2 = (1 + 3i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 = 1 + 6i + 9i^2 = 1 + 6i + 9(-1) = -8 + 6i$

d) $z_1 + z_2^2 = (1 + 3i) + (-2 + i)^2 = (1 + 3i) + (4 - 4i + i^2) = (1 + 3i) + [4 - 4i + (-1)] = (1 + 3i) + (3 - 4i) = 1 + 3i + 3 - 4i = 4 - i$

6º) Vamos calcular o valor de $i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$.

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
- $i^5 = i^4 i = 1i = i$
- $i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1$
- $i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$
- $i^8 = i^4 i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

Observe que as potências de i começam a se repetir depois de i^4. De modo geral, temos:

- $i^{4n} = (i^4)^n = 1$
- $i^{4n+1} = (i^4)^n i = i$
- $i^{4n+2} = (i^4)^n i^2 = -1$
- $i^{4n+3} = (i^4)^n i^3 = -i$

Ou seja, $i^{4n+p} = i^p$.

7º) Vamos calcular o valor de:

a) i^{49} b) i^{100} c) $3i^{15} - i^{16}$

a) $i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^4)^{12} \cdot i = i$

Ou, de outra maneira:

$i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^2)^{24} i = (-1)^{24} i = 1i = i$

Portanto, $i^{49} = i$.

b) $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$

Ou, de outra maneira:

$i^{100} = i^{4 \cdot 25} \cdot i^0 = i^0 = 1$

Portanto, $i^{100} = 1$.

c) $3i^{15} - i^{16}$

$i^{15} = i^{14} \cdot i = (i^2)^7 i = (-1)^7 i = -1i = -i$

$i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1$

Então, temos:

$3i^{15} - i^{16} = 3(-i) - 1 = -3i - 1$

Portanto, $3i^{15} - i^{16} = -1 - 3i$.

PARA REFLETIR:

$i^{49} = i^1 = i$ — $49 \div 4$: quociente 12, resto 1

$i^{100} = i^0 = 1$ — $100 \div 4$: quociente 25, resto 0

$i^{15} = i^3 = -i$ — $15 \div 4$: quociente 3, resto 3

$i^{74} = i^2 = -1$ — $74 \div 4$: quociente 18, resto 2

8º) Vamos resolver a equação $x^2 + 4x + 5 = 0$, mencionada na página 516.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \quad (\text{impossível em } \mathbb{R})$$

Em $\mathbb{C}$ podemos resolvê-la. Assim, temos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-1)4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{i^2 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \Rightarrow x' = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i \text{ e}$$

$$x'' = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$$

Verificando, vem:

$S = x' + x'' = (-2 + i) + (-2 - i) = -4$

$P = x'x'' = (-2 + i)(-2 - i) = 4 + 2i - 2i - i^2 = 4 - (-1) = 5$

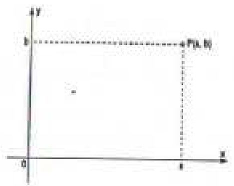
Satisfazendo então $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja, $x^2 + 4x + 5 = 0$.

ANEXO C – Material de apoio para a atividade 4.

Representação geométrica dos números complexos

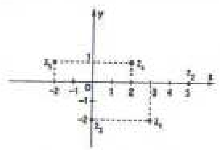
Já vimos que a cada número complexo $z = a + bi$ está associado o par de números reais (a, b). Por outro lado, sabemos que a cada par de números reais (a, b) está associado um único ponto do plano. Logo, podemos associar a cada número complexo $z = a + bi$ o ponto P do plano de coordenadas a e b, isto é, P(a, b).

O plano cartesiano no qual estão representados os números complexos é denominado *plano complexo* ou *plano de Argand-Gauss*. Dizemos que o ponto P(a, b) é o afixo do número complexo a + bi.



Por exemplo, vamos representar geometricamente os números complexos $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 5$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2 + i$ e $z_5 = -2 + i$.

- $z_1 = 3 - 2i \Rightarrow (3, -2)$
- $z_2 = 5 \Rightarrow (5, 0)$
- $z_3 = -2i \Rightarrow (0, -2)$
- $z_4 = 2 + i \Rightarrow (2, 1)$
- $z_5 = -2 + i \Rightarrow (-2, 1)$



Observações:

1) Os números complexos reais pertencem ao eixo Ox, mantendo a correspondência segundo a qual para cada número real existe um ponto da reta.

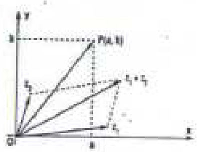
2) Os números imaginários puros pertencem ao eixo Oy.

3) Os demais números complexos (a + bi, com a ≠ 0 e b ≠ 0) pertencem aos vários quadrantes, de acordo com os sinais de a e b.

4) Para cada número complexo existe um único ponto do plano e vice-versa.

5) Podemos associar a cada complexo $z = a + bi$ um único vetor com extremidades no ponto O, origem do sistema de coordenadas cartesianas, e no ponto P(a, b).

No plano complexo a seguir, além do número complexo $z = a + bi$, estão representados outros dois números complexos, z_1 e z_2, e a soma deles, $z_1 + z_2$ (diagonal do paralelogramo formado por z_1 e z_2).



6) A associação dos números complexos $z = a + bi$ aos vetores permite o uso dos números complexos em diversos campos nos quais as grandezas são vetoriais. Um exemplo disso é o estudo da eletricidade em nível superior; o aluno que optar por um curso superior na área de exatas descobrirá que corrente elétrica, voltagem, impedância, etc. são todos números complexos.

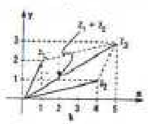
Exemplo:

Vamos efetuar algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

Algebricamente, temos:

$z_1 + z_2 =$
$= (1 + 2i) + (4 + i) =$
$= 5 + 3i = z_3$

Geometricamente, vem o gráfico ao lado.



Observe que z_3 corresponde ao ponto (5, 3), ou seja, ao número complexo $z_3 = 5 + 3i$.

Conjugado de um número complexo

A propriedade do inverso multiplicativo pode ser escrita da seguinte maneira: se $z \neq 0$, existe um único número complexo $\frac{1}{z}$ tal que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Vejamos a seguinte questão:

Como podemos determinar o número $\frac{1}{z}$ na forma algébrica?

Para isso precisamos definir o que vem a ser o conjugado de um número complexo.

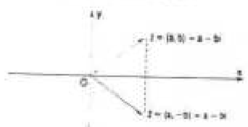
O conjugado de um número complexo $z = (a, b) = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$. Assim:

1º) Se $z = 2 + 3i$, então $\bar{z} = 2 - 3i$.
2º) Se $z = -3 - 4i$, então $\bar{z} = -3 + 4i$.
3º) Se $z = 2$, então $\bar{z} = 2$.
4º) Se $z = 5i$, então $\bar{z} = -5i$.
5º) Se $z = i$, então $\bar{z} = -i$.
6º) Se $z = (2, 3)$, então $\bar{z} = (2, -3)$.
7º) Se $z = (-1, -1)$, então $\bar{z} = (-1, 1)$.
8º) Se $z = 0$, então $\bar{z} = 0$.

Em que casos temos $z = \bar{z}$?

Interpretação geométrica do conjugado

Geometricamente, o conjugado $\bar{z}$ de z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo Ox.



Propriedades do conjugado

Demonstram-se as seguintes propriedades do conjugado de um número complexo:

1ª) Se $z = a + bi$, então:

$z\bar{z} = a^2 + b^2$, que é real, positivo ou nulo.

Demonstre uma dessas propriedades.

2ª) Para o número complexo z, temos:

$z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ é número real

3ª) Se z_1 e z_2 são números complexos, então:

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (o conjugado da soma é igual à soma dos conjugados)

4ª) Se z_1 e z_2 são números complexos, então:

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (o conjugado de um produto indicado é igual ao produto dos conjugados)

Divisão de números complexos

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ entre dois números complexos, com $z_2 \neq 0$, é dado por $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$.

Exemplo:

Vamos efetuar $\frac{z_1}{z_2}$ sabendo que $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 + 5i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 + 5i} = \frac{(1 + 2i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} =$$

$$= \frac{2 - 5i + 4i - 10i^2}{2^2 + 5^2} = \frac{12 - i}{29} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$.

Conjugado de um número complexo

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é indicado por $\bar{z}$ e definido por $\bar{z} = a - bi$, isto é, $\bar{z}$ é obtido de z trocando-se o sinal de sua parte imaginária.

exemplo 12

Qual é o conjugado de $1 + 2i$, $3 - 4i$, $-5i$ e $\frac{7}{3}$?

- $z = 1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 2i$
- $z = -5i \Rightarrow \bar{z} = 5i$
- $z = 3 - 4i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 4i$
- $z = \frac{7}{3} \Rightarrow \bar{z} = \frac{7}{3}$

observações

- Ao multiplicarmos um número complexo qualquer pelo seu conjugado, obtemos sempre um número real.

  De fato, se $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ e $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$, que é um número real.
- O conjugado de um número complexo será usado no próximo item para efetuar a divisão entre números complexos.

Divisão

Sejam dois números complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $z_2 \neq 0$. Dividir z_1 por z_2 é obter um número complexo $z_3 = x + yi$ tal que $\frac{z_1}{z_2} = z_3$, ou seja:

$$\boxed{z_1 = z_2 \cdot z_3}$$

Vamos determinar $z_3 = x + yi$ na igualdade acima.

Temos:

$$z_1 = z_2 \cdot z_3 \Rightarrow a + bi = (c + di) \cdot (x + yi) \Rightarrow a + bi = (cx - dy) + i(cy + dx)$$

Do conceito de igualdade segue o sistema nas variáveis x e y:

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Então:

$$z_3 = \underbrace{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right)}_{\text{parte real}} + i\underbrace{\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)}_{\text{parte imaginária}} \quad (*)$$

A determinação de z_3, contudo, fica facilitada se notarmos que, no quociente $\frac{z_1}{z_2}$, ao multiplicarmos numerador e denominador pelo conjugado do denominador, obtemos (*).

De fato:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

Façamos as seguintes divisões:

a) $\frac{3 + i}{2 + i} = \underbrace{\frac{3 + i}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i}}_{\substack{\text{multiplicamos numerador} \\ \text{e denominador pelo} \\ \text{conjugado de } 2 + i}} = \frac{6 - 3i + 2i - i^2}{2^2 - i^2} = \frac{7 - i}{4 - (-1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$

b) $\frac{3i}{4 - i} = \frac{3i}{4 - i} \cdot \frac{4 + i}{4 + i} = \frac{12i + 3i^2}{4^2 - i^2} = \frac{-3 + 12i}{17}$

c) $\frac{2 - 5i}{i} = \frac{2 - 5i}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-2i + 5i^2}{-i^2} = -5 - 2i$

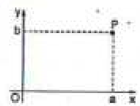
Iezzi

Plano de Argand-Gauss

Vamos agora aprofundar a interpretação geométrica dos números complexos e também apresentar uma importante nomenclatura.

Seja o número complexo $z = (a, b)$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. A forma algébrica de z é $z = a + bi$.

Para representar esse par no plano xOy, marcamos sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente, a parte real a e a parte imaginária b de z, obtendo o ponto P.

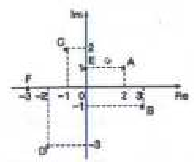


- O ponto P recebe o nome de afixo ou imagem geométrica de z.
- O plano cartesiano determinado pelos eixos Ox e Oy é chamado plano complexo ou plano de Argand-Gauss.
- O eixo Ox, chamado eixo real, é indicado por Re.
- O eixo Oy, chamado eixo imaginário, é indicado por Im.

Vamos representar geometricamente os números complexos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = -1 + 2i$, $z_4 = -2 - 3i$, $z_5 = i$ e $z_6 = -3$.

Temos:

- O afixo de $z_1 = 2 + i$ é $A(2, 1)$.
- O afixo de $z_2 = 3 - i$ é $B(3, -1)$.
- O afixo de $z_3 = -1 + 2i$ é $C(-1, 2)$.
- O afixo de $z_4 = -2 - 3i$ é $D(-2, -3)$.
- O afixo de $z_5 = i$ é $E(0, 1)$.
- O afixo de $z_6 = -3$ é $F(-3, 0)$.



Com relação ao plano de Argand-Gauss, é importante observar que:

- todo número complexo da forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, é um número real e sua imagem é um ponto localizado sobre o eixo Ox;
- todo número complexo da forma $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, é imaginário puro e sua imagem é um ponto localizado sobre o eixo Oy;
- se $z = (x, y)$ tem imagem no ponto P, seu conjugado $\bar{z} = (x, -y)$ tem imagem em P', simétrico de P em relação ao eixo horizontal.

ANEXO D – Material de apoio para a atividade 15.

Princípio fundamental da contagem

3. Tal princípio consta de duas partes (A e B) ligeiramente diferentes. Antes de enunciar e demonstrar este princípio, vamos provar dois lemas (teoremas auxiliares).

4. *Lema 1*

Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Demonstração

Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo.

Teremos:

$$\begin{matrix} m \\ \text{linhas} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} (a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \ldots, & (a_1, b_n) & \longrightarrow n \text{ pares} \\ (a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \ldots, & (a_2, b_n) & \longrightarrow n \text{ pares} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ (a_m, b_1), & (a_m, b_2), & \ldots, & (a_m, b_n) & \longrightarrow n \text{ pares} \end{matrix} \right.$$

O número de pares ordenados é então $\underbrace{n + n + n + \ldots + n}_{m \text{ vezes}} = m \cdot n$.

Uma outra forma de visualisarmos os pares ordenados é através do diagrama abaixo, conhecido como *diagrama seqüencia* ou *diagrama da árvore*.

Lema 2

O número de pares ordenados (a_i, a_j) tais que $a_i \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $a_j \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $a_i \neq a_j$ (para $i \neq j$) é $m(m - 1)$.

Demonstração

Fixemos o primeiro elemento do par, e façamos variar o segundo.

Teremos:

$$\begin{matrix} m \\ \text{linhas} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} (a_1, a_2), & (a_1, a_3), & \ldots, & (a_1, a_m) & \longrightarrow (m-1) \text{ pares} \\ (a_2, a_1), & (a_2, a_3), & \ldots, & (a_2, a_m) & \longrightarrow (m-1) \text{ pares} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ (a_m, a_1), & (a_m, a_2), & \ldots, & (a_m, a_{m-1}) & \longrightarrow (m-1) \text{ pares} \end{matrix} \right.$$

O número de pares é:

$$\underbrace{(m-1) + (m-1) + \ldots + (m-1)}_{m \text{ vezes}} = m \cdot (m-1).$$

O princípio fundamental da contagem (parte A)

Consideremos r conjuntos

$$\begin{array}{ll} A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\} & \#A = n_1 \\ B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\} & \#B = n_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{n_r}\} & \#Z = n_r \end{array}$$

então, o número de r-uplas ordenadas (seqüências de r elementos) do tipo

$$(a_i, b_j, \ldots, z_p)$$

em que $a_i \in A$, $b_j \in B \ldots z_p \in Z$ é

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r.$$

Demonstração (Princípio da indução finita)

Se $r = 2$, é imediato, pois caímos no lema 1 já visto.

Suponhamos que a fórmula seja válida para o inteiro $(r - 1)$ e provemos que ela também é válida para o inteiro r.

Para $(r - 1)$, tomemos as seqüências de $(r - 1)$ elementos $(a_i, b_j, \ldots, w_k)$.

Por hipótese de indução, existem

$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1}$ seqüências e n_r elementos pertencentes ao conjunto Z.

Cada seqüência $(a_i, b_j, \ldots, w_k, z_p)$ consiste de uma seqüência $(a_i, b_j, \ldots, w_k)$ e um elemento $z_p \in Z$.

Portanto, pelo lema 1, o número de seqüências do tipo $(a_i, b_j, \ldots, w_k, z_p)$ é

$$(n_1 \cdot n_2 \ldots n_{r-1}) \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1} \cdot n_r.$$

Decorre então que o teorema é válido $\forall r \in \mathbb{N}$ e $r \geqslant 2$.

O princípio fundamental da contagem (parte B)

Consideremos um conjunto A com $m (m \geqslant 2)$ elementos. Então o número de r-uplas ordenadas (seqüências com r elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m - (r-1)]}_{r \text{ fatores}}.$$

Ou seja, se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, o número de seqüências do tipo

$$\underbrace{(a_j, a_\ell, \ldots, a_i, \ldots, a_k)}_{r \text{ elementos}}$$

com $\begin{cases} a_i \in A \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} & \text{é} \\ a_i \neq a_p \quad \text{para} \quad i \neq p \end{cases}$

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m - (r-1)]}_{r \text{ fatores}}$$

A demonstração é feita por indução finita, de modo análogo à feita na parte A.

Conseqüências do princípio fundamental da contagem

O princípio fundamental da contagem nos fornece o instrumento básico para a Análise Combinatória; entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa. Iremos então definir os vários modos de formar agrupamentos e, usando símbolos simplificativos, deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado.

Arranjos com repetição

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos *arranjo com repetição* dos m elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada (seqüência de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos.

Fórmula do número de arranjos com repetição

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos com repetição de m elementos tomados r a r.

Cada arranjo com repetição é uma seqüência de r elementos, em que cada elemento pertence a M.

$$\underbrace{(\_, \_, \_, \ldots, \_)}_{r \text{ elementos}}$$

Pelo princípio fundamental da contagem (parte A), o número de arranjos $(AR)_{m,r}$ será:

$$\boxed{(AR)_{m,r} = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{r \text{ vezes}} = m^r}$$

Observemos que, se $r = 1$, $(AR)_{m,1} = m$ e a fórmula acima continua válida $\forall\, r \in \mathbb{N}^*$.

Arranjos

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ a qualquer r-upla (seqüência de r elementos) formada com elementos de M, *todos distintos*.

Fórmula do número de arranjos

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $A_{m,r}$ o número de arranjos dos m elementos tomados r a r.

Cada arranjo é uma seqüência de r elementos, em que cada elemento pertence a M, e são todos distintos.

$$\underbrace{(\_, \_, \ldots, \_)}_{r \text{ elementos}}$$

Pelo princípio fundamental da contagem (parte B), o número de arranjos $A_{m,r}$ será:

$$\boxed{A_{m,r} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}}$$

Em particular, se $r = 1$, é fácil perceber que $A_{m,1} = m$.

Notemos ainda que, de acordo com a definição que demos de arranjo, temos necessariamente $1 \leqslant r \leqslant m$.

Permutações

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de permutação dos m elementos a todo arranjo em que $r = m$.

Fórmula do número de permutações

Seja M o conjunto $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e indiquemos por P_m o número de permutações dos m elementos de M.

Temos:

$$P_m = A_{m,m}$$

logo: $P_m = m(m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot [m-(m-1)]$

$$\boxed{P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Em particular, se $m = 1$, é fácil perceber que $P_1 = 1$.

Fatorial

A fim de simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações, bem como outras que iremos estudar, vamos definir o símbolo fatorial.

Seja m um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$). Definimos *fatorial de m* (e indicamos por *m!*) por meio da relação:

$$\begin{aligned} m! &= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ para } m \geqslant 2 \\ 1! &= 1 \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

As definições *1!* e *0!* serão justificadas posteriormente.

As fórmulas do número de arranjos e do número de permutações também podem ser simplificadas com a notação fatorial.

De fato:

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$$

$$A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (m-r+1) =$$

$$= m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (m-r+1) \cdot \frac{(m-r) \cdot (m-r-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m-r) \cdot (m-r-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\boxed{A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}}$$

Em particular $\begin{cases} P_1 = 1 \\ 1! = 1 \end{cases}$

e a fórmula $P_m = m!$ é válida $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$

e ainda:

em particular $\begin{cases} A_{m,1} = m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{m!}{(m-1)!} = m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$

e a fórmula $A_{m,r} = \dfrac{m!}{(m-r)!}$ é válida $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, r \in \mathbb{N}^*$ com $r \leqslant m$.

ANEXO E – Material fornecido na atividade 16

VIII. Combinações

30. Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de combinações dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos.

31. Exemplo

$M = \{a, b, c, d\}$;

As combinações dos 4 elementos, tomados dois a dois, são os subconjuntos:

$\{a, b\}$ $\{b, c\}$ $\{c, d\}$
$\{a, c\}$ $\{b, d\}$
$\{a, d\}$

32. Notemos que $\{a, b\} = \{b, a\}$ pois, conforme definimos, combinação é um conjunto, portanto *não depende da ordem dos elementos.*

É importante notar a diferença entre uma combinação (conjunto) e uma seqüência, pois numa combinação *não importa a ordem dos elementos*, ao passo que numa seqüência *importa a ordem dos elementos.*

A própria natureza do problema a ser resolvido nos dirá se os agrupamentos a serem formados dependem ou não da ordem em que figuram os elementos.

33. Cálculo do número de combinações

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $C_{m,r}$ ou $\binom{m}{r}$ o número de combinações dos m elementos tomados r a r.

Tomemos uma combinação, digamos esta: $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r\}$. Se permutarmos os elementos de E_1, obteremos $r!$ arranjos.

Se tomarmos outra combinação, digamos $E_2 = \{a_2, a_3, \ldots, a_r, a_{r+1}\}$, permutando os elementos de E_2, obteremos outros $r!$ arranjos.

Chamemos de x o número de combinações, isto é, $x = C_{m,r}$ e suponhamos formadas todas as combinações dos m elementos tomados r a r. São elas:

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_x.$$

Cada combinação E_i dá origem a $r!$ arranjos. Chamemos de F_i o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de E_i.

Temos então a seguinte correspondência:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & F_1 \\ E_2 & \longrightarrow & F_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_x & \longrightarrow & F_x. \end{array}$$

Verifiquemos que:

(I) $F_i \cap F_j = \varnothing$ para $i \neq j$

(II) $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$, em que F é o número de arranjos dos m elementos de M tomados r a r.

Temos:

(I) Se $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ (para $i \neq j$), então existiria um arranjo que pertenceria a F_i e F_j simultaneamente.

Tomando os elementos desse arranjo obteríamos que coincidiria com E_i e E_j e, portanto, $E_i = E_j$. Isto é absurdo, pois quando construímos todas as combinações: $E_i \neq E_j$ (para $i \neq j$).

Logo, $F_i \cap F_j = \varnothing$.

(II) Para provarmos que $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x = F$, provemos que:

$$\begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x \subset F \text{ e} \\ F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x. \end{cases}$$

a) Seja a um arranjo tal que

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x,$$

então $a \in F_i$ (para algum $i \in \{1, 2, \ldots x\}$) e, evidentemente, $a \in F$; logo:

$$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x \subset F.$$

b) Seja agora a um arranjo tal que $a \in F$. Se tomarmos os elementos desse arranjo a, obteremos uma das combinações, digamos E_i. Ora, como E_i gera o conjunto dos arranjos F_i, então $a \in F_i$ e, portanto,

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_i \cup \ldots \cup F_x.$$

Então:

$$F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x.$$

De (a) a (b) resulta que:

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x = F.$$

Sabemos ainda que, se x conjuntos são disjuntos dois a dois, o número de elementos da união deles é a soma do número de elementos de cada um. Isto é,

$$\#(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x) = \#F \implies \#F_1 + \#F_2 + \ldots + \#F_x = \#F$$

$$r! + r! + \ldots r! = \frac{m!}{(m-r)!} \implies x \cdot r! = \frac{m!}{(m-r)!}.$$

Logo:

$$\boxed{x = \frac{m!}{(m-r)!\, r!}}.$$

Como x indica $C_{m,r}$ (ou $\binom{m}{r}$), temos a fórmula do número de combinações:

$$\boxed{C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}} \quad \forall\ m, r \in \mathbb{N}^*,\ r < m$$

34. *Casos particulares*

1º caso: $m, r \in \mathbb{N}^*$ e $r = m$

$$\begin{cases} C_{m,m} = 1 \\ \dfrac{m!}{m!(m-m)!} = 1 \end{cases}$$

2º caso: $m \in \mathbb{N}^*$ e $r = 0$

$$\begin{cases} C_{m,0} = 1 \text{ (o único subconjunto com } 0 \text{ elemento é o vazio)} \\ \dfrac{m!}{0!(m-0)!} = 1 \end{cases}$$

3º caso: $m = 0$ e $r = 0$

$$\begin{cases} C_{0,0} = 1 \text{ (o único subconjunto do conjunto vazio é o próprio vazio)} \\ \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = 1 \end{cases}$$

Em virtude da análise dos casos particulares, concluímos que a fórmula

$$\boxed{C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}}$$

é válida $\forall\ m, r \in \mathbb{N}$ com $r \leqslant m$.

35. *Exemplos*

1º) Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Notemos que cada comissão é um subconjunto de três elementos (pois em cada comissão não importa a ordem dos elementos). Logo o número de comissões é:

$$\binom{10}{3} = C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120.$$

2º) Temos *7* cadeiras numeradas de *1* a *7* e desejamos escolher *4* lugares entre os existentes. De quantas formas isso pode ser feito?

Cada escolha de *4* lugares corresponde a uma combinação dos *7* elementos, tomados *4* a *4*, pois a ordem dos números escolhidos não interessa (escolher os lugares *1, 2, 4, 7* é o mesmo que escolher os lugares *7, 2, 4, 1*). Logo o resultado procurado é:

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

ANEXO F – Aula preparada pelas alunas Geisa e Carolina sobre ciclo trigonométrico.

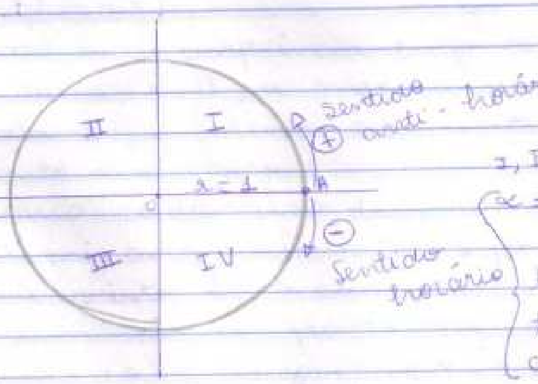
6ª Questão)

Apresentaria o sistema de coordenadas ortogonais no plano. a circunferência orientada, o centro na origem do sistema, o raio (r = 1), unitário e os sentidos anti-horário (positivo) e horário (negativo).

Desenhar passo a passo a circunferência e denominar tudo o que estiver sendo feito.

Desenharia uma circunferência, marcaria o ponto A como origem, medidas algébricas, os eixos de coordenadas cartesianas dividindo a circunferência em 4 partes iguais que enfatizaria os quadrantes marcando-os com números romanos e o sentido será a partir da origem (A) na direção anti horário, daí podemos representar os quadrantes do ciclo trigonométrico denominados em graus ou radianos.

Ex:



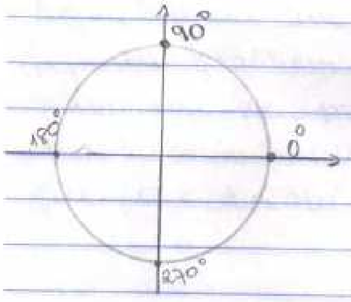
r = raio

I, II, III, IV = quadrantes

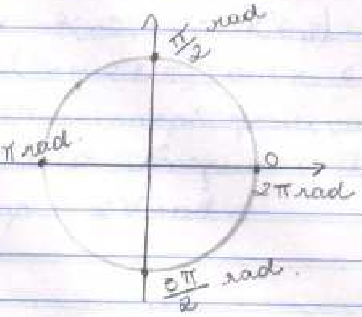
$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{l}{1} = l$, logo teríamos o comprimento desse arco numericamente.

Ciclo trigonométrico (apresentadas as extremidades)

Em graus:



Em radianos:



Nota: Se percorrermos x radianos podemos escrever simplesmente x.

Ex.: no lugar de $\frac{\pi}{2}$ rad, escrevemos simplesmente $\frac{\pi}{2}$.

Anexo G - Aula preparada pelo aluno Antônio sobre Lei dos Senos e dos Cossenos.

Aluno: Antônio de França Lyra

RELATÓRIO

I. LEI DOS SENOS

1.1. INTRODUÇÃO:

. Na prática os problemas de Trigonometria não se resumem simplesmente aos triângulos retângulos, envolvem também triângulos acutângulos e obtusângulos em sua solução.

. Não sei se você já teve a oportunidade de observar, que em determinados pontos estratégicos como, por exemplo, o Pico da Bandeira, o Morro do Moreno, o Morro do Convento da Penha, etc; são deixados "marcos topográficos".

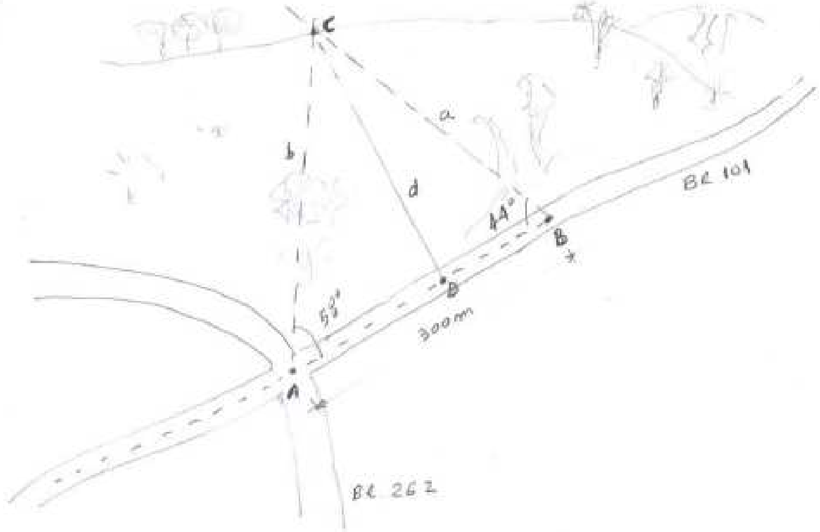
Esses "marcos topográficos" fixados nos terrenos, normalmente, por instituições governamentais, são referências que servem para a marcação de terras e verificação da altitude local. As marcações de terras são feitas a partir da triangulação feita entre estes "pontos fixos" (marcos topográficos).

. Os milhares de "pontos fixos" espalhados pelo território brasileiro, permitem que as nossas fronteiras com os outros países ou mesmo o limite entre municípios fiquem estabelecidos.

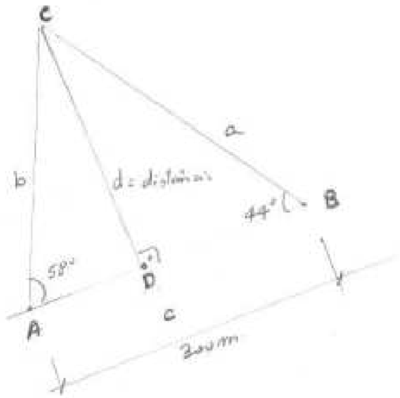
EXERCÍCIO 01:

Um fazendeiro quer saber a distância da sua futura residência com o cruzamento das BR 101 e BR 162 e a distância que o separa da rodovia principal (BR 101). Sabendo que dispõe de um trecho $\overline{AB}$ visível e de uma bússola para marcar a direção da sua futura residência. Calcule essas distâncias.

02/10



ESQUEMA DA SITUAÇÃO.



$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{d}{a}$ e $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{d}{b}$.

Daí, $\left.\begin{array}{l} d = (\text{sen}\,\hat{B}).a \\ d = (\text{sen}\,\hat{A}).b \end{array}\right\}$ $\text{sen}\,\hat{B}.a = \text{sen}\,\hat{A}.b$

assim $\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$

Por analogia temos: $\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$.

$\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \rightarrow \frac{300}{\text{sen}\,78°} = \frac{b}{\text{sen}\,44°} \Rightarrow b = \frac{300 \times \text{sen}\,44°}{\text{sen}\,78°} = \frac{300 \times 0,6947}{0,9781}$

$\left\{\begin{array}{l} \hat{C} = 180° - (\hat{A}+\hat{B}) \\ \hat{C} = 78° \end{array}\right.$

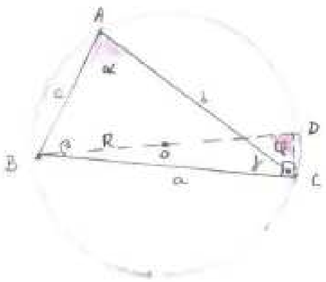
$\boxed{b = 213,08 \text{ metros}}$

$d = (\text{sen}\,\hat{A})b \Rightarrow d = \text{sen}\,58° \times 213,08 = 0,8480 \times 213,08 = 180,69$ metros

$\boxed{d = 180,69 \text{ metros}}$

03/11

Uma outra utilidade prática é na determinação do centro de algum fenômeno e a distância que o separa de alguns locais. Vejamos:



$$\text{med}(\hat{A}) = \frac{\text{med}(\widehat{BC})}{2} \quad e \quad \text{med}(\hat{D}) = \frac{\text{med}(\widehat{BC})}{2}$$

No triângulo BCD, retângulo, que está inscrito numa circunferência, temos:

$$\text{sen } \hat{D} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow \boxed{2R = \frac{a}{\text{sen } \alpha}} \quad (1)$$

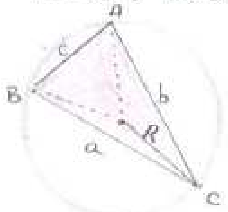
Analogamente temos

$$\boxed{2R = \frac{b}{\text{sen } \beta}} \quad e \quad \boxed{2R = \frac{c}{\text{sen } \gamma}}$$

Assim:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R}$$

$\boxed{\text{Exercício 2}}$ Em três pontos distintos, um mesmo fenômeno ocorreu com a mesma intensidade. Sabendo-se que estes pontos estão dispostos conforme o esquema abaixo, calcule a distância e o local onde o mesmo ocorreu.



$\hat{A} = 75°$

$\hat{B} = 60°$

$\hat{C} = 45°$

04/1

No triângulo ABC $\begin{cases} \hat{A} = 75° \\ \hat{B} = 60° \\ \hat{C} = 45° \end{cases}$ e $\begin{cases} a = 6(\sqrt{6}+\sqrt{2})\ Km \end{cases}$

. calcule b, c, e R

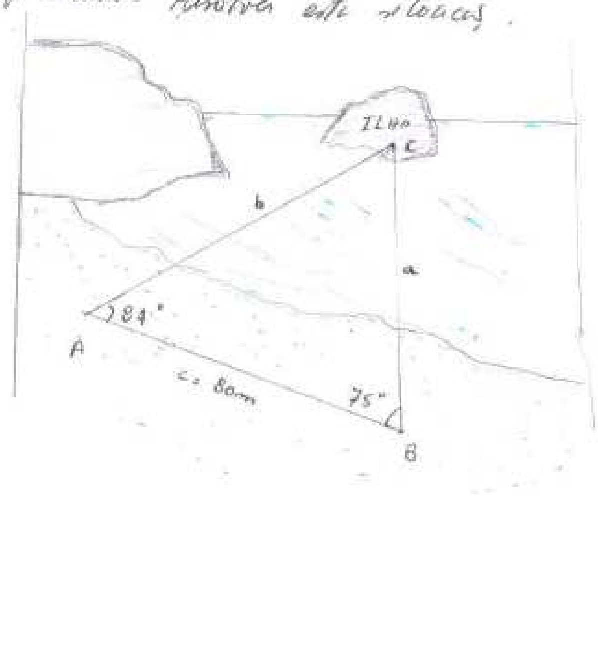
Pelo teorema dos senos, temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R.$$

$$\frac{6(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\operatorname{sen}75°} = \frac{b}{\operatorname{sen}60°} = \frac{c}{\operatorname{sen}45°} = 2R.$$

$$\frac{6(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow \begin{cases} b = 12\sqrt{3}\ Km \\ c = 12\sqrt{2}\ Km \\ R = 12\ Km \end{cases}$$

Exercício 3 { calcule a menor distância entre a praia e uma ilha. Sem o barco, porém com uma trena e uma bússola, poderemos resolver esta situação.



05/10

Temos $\dfrac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$

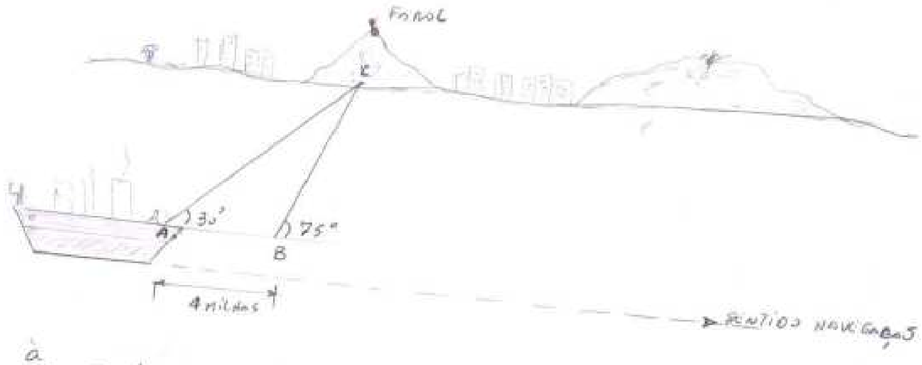
$\begin{cases} d = a \cdot \text{sen}\,\hat{B} \text{ ou} \\ d = b\, \text{sen}\,\hat{A} \end{cases}$

$\dfrac{a}{\text{sen}\,84°} = \dfrac{b}{\text{sen}\,75°} = \dfrac{c}{\text{sen}\,21°} \Rightarrow \dfrac{a}{0{,}9945} = \dfrac{b}{0{,}9659} = \dfrac{80m}{0{,}3584} \Rightarrow$

$a = 222$ metros.
$b = 215$ metros.

$d = a \cdot \text{sen}\,\hat{B} = 222 \cdot 0{,}9659 = 214{,}4$ metros

Exercício 4} (ITA-SP) Um navio, navegando em linha reta, avista um FAROL que faz um ângulo de 30° com a sua direção. Caminha então mais 4 milhas e percebe que o ângulo agora é de 75° com a sua direção. Qual será a menor distância entre o navio e o farol.



$\dfrac{a}{\text{sen}\,30°} = \dfrac{b}{\text{sen}\,105°} = \dfrac{c}{\text{sen}\,45°}$ $\quad d = a\,\text{sen}\,\hat{B}$ ou $d = b\,\text{sen}\,\hat{A}$

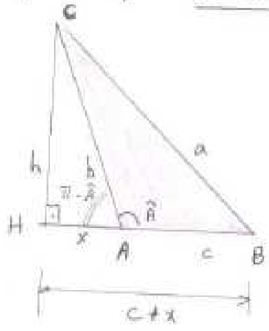
$\dfrac{a}{0{,}5000} = \dfrac{b}{0{,}9659} = \dfrac{4}{0{,}707} \Rightarrow$ $a = 2{,}83$ milhas
$b = 5{,}46$ milhas.
$d = b \cdot \text{sen}\,\hat{A} = 5{,}46 \cdot 1/2 = 2{,}73$ milhas.

II - LEI DOS COSSENOS

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$

Temos três possibilidades de demonstração: $\begin{cases} \hat{A} \text{ é obtuso;} \\ \hat{A} \text{ é reto; e} \\ \hat{A} \text{ é agudo.} \end{cases}$

optamos por $\hat{A}$ = obtuso.



Tracemos a altura $\overline{CH}$, de medida h, relativa ao lado $\overline{AB}$. No △ AHC, temos:

$$\cos(\pi - \hat{A}) = \frac{x}{b} \Rightarrow \boxed{x = -b \cos \hat{A}} \; (1)$$

No △ AHC e no △ BHC, pelo Teorema de Pitágoras, vem: $\boxed{x^2 + h^2 = b^2}$ (2)

$$(c+x)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{c^2 + 2cx + x^2 + h^2 = a^2} \; (3)$$

SUBSTITUINDO (1) em (2) em (3), temos:

$$c^2 + 2c(-b \cos \hat{A}) + b^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$$

c.q.d

analogamente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

EXERCÍCIO 5: Num triângulo, os lados, de medidas $6\sqrt{3}$ cm e 8cm, formam ângulo de 30°. Calcule a medida do 3° lado.

Pelo teorema dos cossenos, vem:

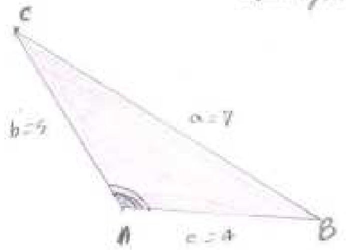
$$x^2 = (6\sqrt{3})^2 + 8^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \cos 30°.$$
$$x^2 = 36 \cdot 3 + 64 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{3}/2.$$
$$x^2 = 28 \Rightarrow \boxed{x = 2\sqrt{7} \text{ cm.}}$$

Exercício 6 {

Neste exercício vamos aproveitar para apresentar a fórmula de HERON: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$p = \frac{a+b+c}{2}$ semiperímetro do triângulo.

• Calcule a área do triângulo cujos lados medem 7cm, 5cm e 4cm.



Pelo teorema dos cossenos, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

$7^2 = 5^2 + 4^2 - 2.5.4.\cos \hat{A} \Rightarrow$

$\cos \hat{A} = -1/5$

Substituindo $\cos \hat{A} = -\frac{1}{5}$ em $\operatorname{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$ e notando que $\operatorname{sen} \hat{A} > 0$, vem:

$\operatorname{sen}^2 \hat{A} + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Então $\boxed{S = \frac{1}{2} \cdot b.c \operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{1}{2} \cdot 5.4 \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \boxed{S = 4\sqrt{6} \text{ cm}^2}$

Ou pela fórmula de Heron {

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ onde a, b, c são as medidas dos lados e $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

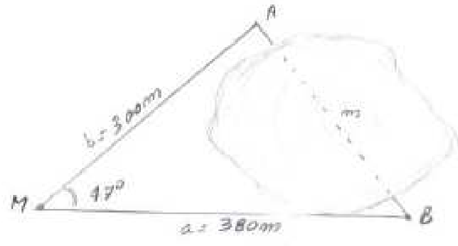
No caso, temos: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+5+4}{2} = 8$.

$S = \sqrt{8(8-7)(8-5)(8-4)} = \sqrt{8.1.3.4} = 4\sqrt{6} \text{ cm}^2$

$\boxed{S = 4\sqrt{6} \text{ cm}^2}$ {

08/10

EXERCÍCIO 7. Calcule a distância dos pontos A e B, entre os quais há uma montanha, sabendo que suas distâncias a um ponto fixo M são de 300 m e 380 m, respectivamente.



$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{M}$$

$$m^2 = (380)^2 + (300)^2 - 2 \cdot 380 \cdot 300 \cdot \cos 47°$$

$$m^2 = 144.400 + 90.000 - 228.000 \cdot 0{,}6820$$

$$m^2 = 234.400 - 155.496$$

$$m^2 = 78.904 \quad \boxed{m = 280{,}90m}$$

III - RESPONDA 09/10

a) Quais as principais dificuldades que você encontrou para entender as demonstrações.

não houve dificuldades

b) conseguiu esclarecer todas as dúvidas? SIM

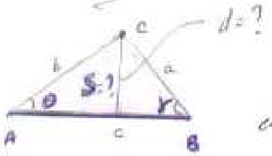
c) o que fez para esclarecê-las? —

IV - Elabore e resolva uma lista com 4 exercícios (2 sobre cada uma das leis). OK!

V - Quais as orientações você daria a um estudante sobre o uso de cada uma das leis?

O aluno deverá observar, os 2 esquemas abaixo:

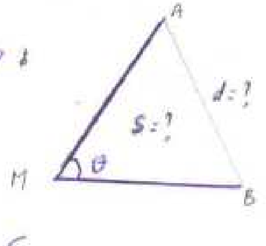
A) QUANDO:



DADOS { AB, θ, γ

Neste caso a lei dos senos é o caminho mais rápido para se calcular as distâncias e a área (S)

B) QUANDO:



DADOS { MA, MB, θ

Neste caso a lei dos cossenos é o caminho mais simples para se calcular as distâncias e a área (S)

OBS.: Os exercícios foram selecionados de forma que o aluno pudesse [illegible] os 2 esquemas [illegible]

ANEXO H – Apresentação sobre material concreto (Aluna Geisa)

Maria Montessori

1870 – Nasce em Chiravalle, Itália em 31de agosto.

1892 – Primeira mulher italiana a freqüentar a faculdade de medicina.

1896 – Conclui o curso na Universidade de Roma, com tese na área de psiquiatria.

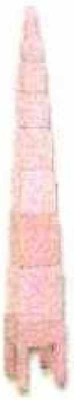
1898 – É nomeada uma das diretoras da Escola Ortofrênica de Roma.

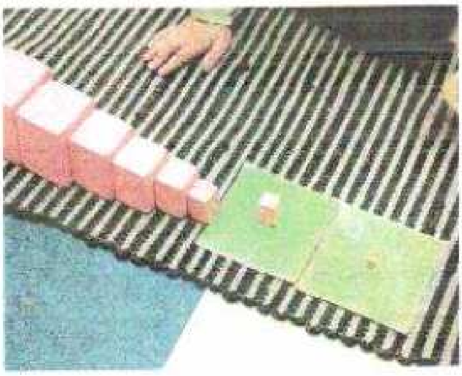
1904 – Torna-se livre docente pela Universidade de Roma.

1909 – Publica *"O método da pedagogia científica"*, que torna seu trabalho conhecido internacionalmente. Realiza seu primeiro curso de treinamento de professores.

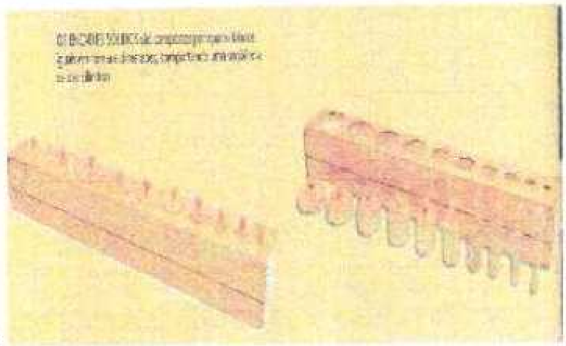
- 1911 – Abandona seu trabalho como médica e passa a dedicar-se exclusivamente à pedagogia.
- 1919 – Durante aulas e cursos para professores em Londres apresenta materiais pedagógicos específicos para crianças entre 6 e 11 anos.
- 1952 – Morre na Holanda em 06 de maio.
- Maria Montessori é conhecida por ter criado um método de educação com ambientes e materiais de ensino cuja eficácia está no respeito às fases de desenvolvimento cognitivo da criança.
- No sistema Montessori, o manejo do material pedagógico pode ser visto simultaneamente como processo que corresponde às operações mentais (a passagem concreto-abstrato descrita por Piaget).
- A proposta educacional de Montessori atende tanto indivíduos comuns como pessoas com necessidades especiais.
- No Brasil, as primeiras referências do trabalho Montessoriano remontam à década de 1910, ganhando impulso nos anos 60, com cursos de especialização para professores.

Alguns Materiais Didáticos Idealizados por Maria Montessori





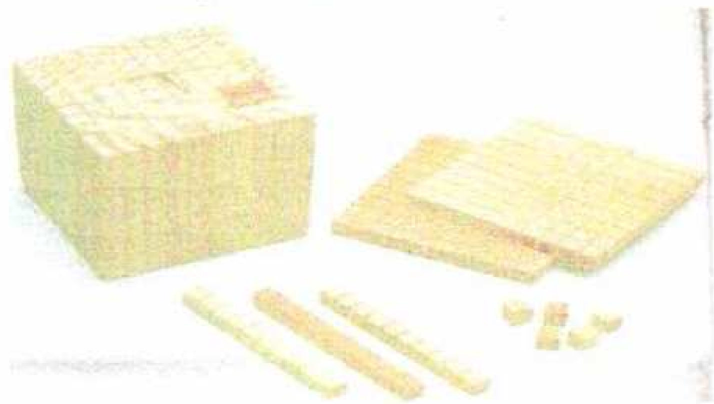
Torre Rosa



Encaixes Sólidos

Tábua de Séguin

Material Dourado



Material criado objetivando a educação sensorial no trabalho com a matemática.

Objetivos:

- desenvolver na criança a independência, confiança em si mesma, a concentração a coordenação e a ordem;
- gerar e desenvolver experiências concretas estruturadas para conduzir, gradualmente, as abstrações cada vez maiores;
- fazer a criança, por ela mesma, perceber os possíveis erros que comete ao realizar uma determinada ação com o material;
- trabalhar com os sentidos.

O mateiral Dourado é constituído por cubinhos, barras, placas e cubão, que representam:

1 milhar ou 10 centenas ou 100 dezenas ou 1000 unidades

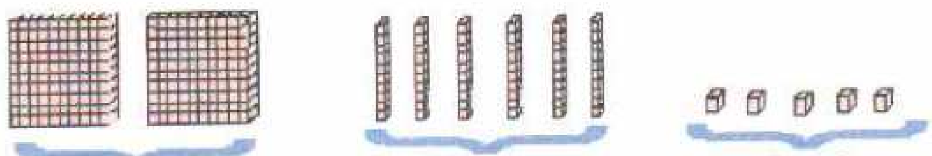
1 centena ou 10 dezenas ou 100 unidades

1 dezena ou 10 unidades

1 unidade

Observe que o cubo é formado por 10 placas, que a placa é formada por 10 barras e a barra é formada por 10 cubinhos. Este material baseia-se em regras do nossso sistema de numeração.

Podemos representar os números utilizando o material dourado. Veja, por exemplo, como fica a representação do numero 265.



2 x 100 + 6 x 10 + 5 x 1 =

= 200 + 60 + 5 = 265

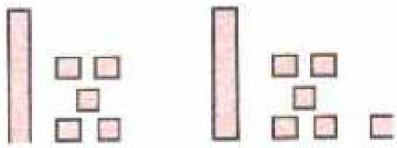
Neste trabalho, o enfoque será dado à operação de adição com o uso do material dourado.

Inicialmente, o professor deverá trabalhar com os alunos a adição simples, sem reagrupamento para que os alunos sintam-se mais familiarizados com o material.

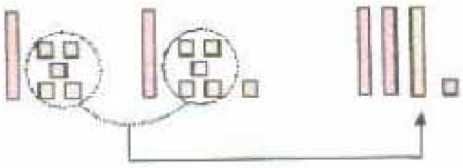
Após este momento é importante trabalhar com os alunos a idéia de troca como, por exemplo, a troca de 10 cubos por 1 barra. Se for pedido ao aluno que ele faça uma representação do número 15, nesta fase, é importante notar se o aluno está representando o número com 15 cubinhos ou com 1 barra e 10 cubinhos, no caso da primeira, perguntar-lhe qual seria uma outra forma de representar o número pedido.

Quando os alunos estiverem fazendo as trocas e os registros com desenvoltura, o professor poderá apresentar-lhes a técnica do "vai um", a adição com reagrupamento.

Se quisermos fazer a soma de 15 e 16, por exemplo, teremos que juntar estes conjuntos de peças:

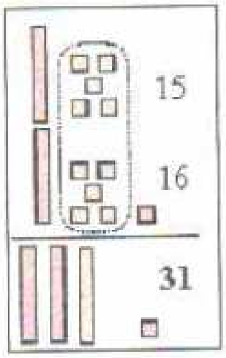


Fazendo as trocas necessárias,

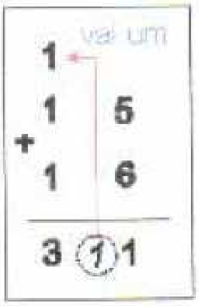


Compare, agora, a operação:

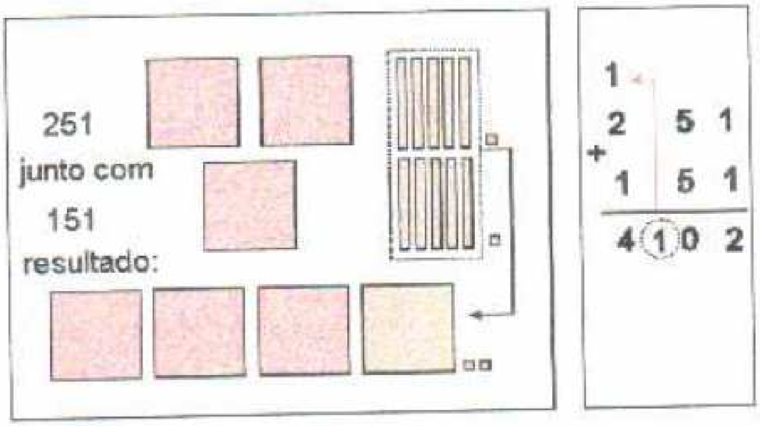
• com o material



- com os números



O professor pode concretizar cada passagem do cálculo usando o material dourado para facilitar o entendimento do "vai um".
É importante trabalhar com os alunos também a troca de 10 dezenas por uma centena, ou 10 centenas por 1 milhar, etc.
Veja um exemplo:



ANEXO I – Trabalho individual do aluno Antônio

1 – CONTÍNUO VERSUS DISCRETO.

Segundo Edward R. Scheinerman (2003), o mundo da matemática pode ser dividido em aproximadamente dois domínios: o contínuo e o discreto.Para ilustrar a diferença compara a matemática contínua aos relógios analógicos – o tipo que que possui os ponteiros das horas, minutos e segundos; e onde os ponteiros se movem suavemente ao longo do tempo. Enquanto que a matemática discreta é comparável a um relógio digital onde a transição de um tempo para o outro é bem definida e sem ambiguidade, ou seja o relógio salta de um instante para outro.

Do ponto de vista de um relógio analógico, entre 12:02 hs e 12:03 hs há um número infinito de diferentes tempos possiveis, na medida em que o ponteiro dos segundos percorre o mostrador. *A matemática contínuo estuda conceitos infinitos em seu objetivo, em que um objeto pode combinar-se suavemente com o próximo.* O sistema dos números reais está no cerne da matemática contínua e tal como o relógio, entre dois números reais quaisquer, há uma infinidade de números reais.

Por outro lado o relógio digital, entre 12:02 hs e 12:03 hs, há apenas um número finito possivel de tempos diferentes. Um relógio digital não reconhece frações de segundos! Assim como o sistema de números reais desempenha papel central na matemática contínua, os inteiros são o instrumento principal da matemática discreta.

A matemática contínua oferece excelentes modelos e instrumentos para analisar fenômenos do mundo real que se modificam suavemente ao longo do tempo, inclusive o movimento dos planetas em torno do sol ou o fluxo do sangue através do corpo (adiante veremos alguns exemplos).

A matemática discreta oferece excelentes modelos e ferramentas para analisar fenômenos do mundo real que podem modificar-se abruptamente e que estão definitivamente em um estado ou em outro. A matemática discreta é o instrumento utilizado na computação, no planejamento de chamadas telefônicas, na genética, nas teorias dos conjuntos, etc.

2 – O CONTÍNUO E O DISCRETO NO ENSINO DA MATEMÁTICA.

O principal é compreendermos que ambos os conceitos precisam ser trabalhados ao longo da Educação Básica, não havendo a necessidade de escolhas do discreto em relação ao contínuo (e vice-versa). Acreditamos que por serem caminhos distintos, permitem melhor entendimento das questões tratadas e ampliam o conhecimento das mesmas.

Scheinerman (2003) ilustra bem a diferença entre o discreto e o contínuo: Na escola básica, a matemática contínua é a grande soberana. Ela domina praticamente toda a escolaridade, deixando poucos momentos para o estudo da matemática discreta. Dentre estes momentos, temos um de fundamental importância: a construção da idéia de número. A introdução deste conceito é iniciada, na maior parte das escolas, pela via do discreto. Logo no início do 1° ciclo do ensino fundamental, as crianças aprendem a idéia de número. Ensina-se tal conceito utilizando-se o **processo da contagem** e das relações entre conjuntos de objetos; constrói a idéia de número natural a partir da contagem, do discreto, também sem fazer nenhuma referência à possibilidade de utilização da **Idéia de medida** para tal construção. A noção de medida surge apenas na construção do conjunto das frações.

A discussão entre medida e contagem é bastante pertinente, principalmente se levarmos em consideração que "medir e contar são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com mais freqüência." (Caraça, p.29). Assim, precisamos sempre ter em mente a necessidade da abordagem dos temas focando tanto um aspecto quanto o outro, construindo um conhecimento mais relacionado e fundamentado.

O psicólogo russo A. Petrovski, verificou que também na antiga URSS, iniciava-se o ensino dos números naturais para depois relacioná-los como sendo a expressão de uma medida. Sua equipe passou a questionar se não seria mais relevante primeiramente compreender o conceito geral de medida, para depois passar ao estudo de como expressá-la. Para isso, foi necessário explicar para os alunos o que era o comprimento de um objeto, o peso, mostrar as inter-relações entre as diversas medidas. ***Segundo ele constatou, é muito mais simples para a criança estabelecer relações de desigualdade (maior, menor) do que de igualdade.***

Um argumento favorável ao ensino da idéia de número pela via do contínuo para em seguida passarmos à construção do número. Isso se dá através da comparação entre duas grandezas, quando a criança é capaz de expressar, por exemplo, que determinada grandeza é duas vezes maior que a outra. Então, a construção do número acontece a partir de relações tais como o dobro de, o triplo de, e assim por diante. Mesmo um adulto, um pedreiro, por exemplo, quando em

Este é o estágio mais avançado da Ciência Física - a Mecânica Quântica, onde mais uma vez discreto/contínuo buscam sua complementaridade.

Segundo Richard P. Feynman (2001, p.170-171): "**Mecânica Quântica**" é a descrição do comportamento da matéria em todos os seus detalhes e, em particular dos acontecimentos em uma escala atômica. As coisas em uma escala muito pequena não se comportam como nada de que você tenha alguma experiência direta. Não se comportam como ondas, não se comportam como partículas, não se comportam como nuvens, ou bolas de bilhar, ou pesos ou molas, ou como qualquer coisa que você tenha visto.

Newton pensou que a luz fosse constituída de partículas, mas depois se descobriu que se comporta como uma onda. Mais tarde, porém (no início do século XX), descobriu-se que a luz às vezes se comportava de fato como uma partícula. Historicamente, pensou-se que o elétron, por exemplo, se comportava como uma partícula, mas depois se descobriu que em vários aspectos se comportava como uma onda. Assim, não se comportava realmente como nenhum dos dois. Agora entregamos os pontos. Dizemos: " Não é nenhum dos dois".

Existe, porém uma saída feliz – os elétrons se comportam justamente como a luz. O comportamento quântico de objetos atômicos (elétrons, prótons, nêutrons, fótons e assim por diante) é o mesmo para todos; são " ondas de partículas", ou seja lá como quiser chamá-los (chamarei de contínuo e discreto , respectivamente).

dificuldade com os cálculos matemáticos possui noções de grandeza que lhe perm estimar quantos m^2 de azulejo será necessário para revestir determinada parede.

Ilustrando o caso da matemática discreta, temos a contagem e o estudo análise combinatória, dentre outros. Já à matemática contínua cabe o estudo d gráficos, das funções, da medida, da geometria:

Exemplo de Discreta - (Análise Combinatória)

1- Uma sorveteria vende sorvetes de dez sabores diferentes. De quantas maneiras podemos escolher os sabores de um de " duas bolas", se em cada sorvete as duas bolas devem ter sabores diferentes?

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10.9.8!}{2!.8!} = 45$$

Exemplo de Contínua - (Função exponencial = "Meia- vida" – Química).

2- A massa **m(t)** de certo material radioativo, no instante t anos, é expressa por **m(t) = m$_0$ a^t**, sendo **m$_0$** a massa inicial e a um número real positivo. Em um período de **14.000 anos**, a massa do material sofre uma redução de **80%**. Calcule

a) em quantos anos a massa inicial do material reduz-se à metade;

b) o percentual da massa inicial que restará em 100.000 anos.

Obs.: considere $\log_{10} 2 = 0,3$.

Resolução:

para t = 14.000 anos, m(t) = 0,2 . m_0

$0.2 \cdot m_0 = m_0 \cdot a^{14000}$

log 0,2 = 14000 . log a

log a = $\frac{\log 2 - \log 10}{14000} = \frac{0,3 - 1}{14000}$

log a = - 5 . 10^{-5}

a) para que **m(t)** seja igual a **0,5 . m_0**, temos:

0,5 . m_0 = m_0 . a^t

0,5 = a^t

log 0,5 = t . log a

t = $\frac{\log 0,5}{\log a} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log a} = \frac{0 - 0,3}{-5.10^{-5}}$

t = $\frac{30.10^{-2}}{-5.10^{-5}}$ = 6. 10^3 = 6000

t = 6000, esta é a quantidade de anos que a massa inicial do material reduzir-se-á à metade.

b) considerando **k** o percentual de **m_0**, para t = 100.000 anos.

k . m_0 = m_0 . a^t

log k = 100.000 . log a

log k = 1 . 10^5 . (- 5 . 10^{-5})

log k = - 5

k = 10^{-5}

k = 0,00001

k = 0,001% , este é o percentual **da massa inicial** que restará em 100.000 anos.

Enfim é importante ressaltar que tanto a matemática discreta, quanto a matemática contínua, são fundamentais para a construção do pensamento matemático.

3 - A COMPREENSÃO DO DISCRETO E DO CONTÍNUO.

Compreender o discreto e o contínuo não é uma tarefa fácil. Para ilustrarmos esse binômio destacaremos mais alguns exemplos no campo da matemática e também além dela. Como um primeiro exemplo, colocaremos as origens do ***cálculo diferencial e integral.*** Ao mesmo tempo, Leibniz e Newton construíram teorias bastante próximas nos seus fins, porém com desenvolvimentos e procedimentos bastante distintos. Courant (2000, P.481) apresenta os trabalhos destes grandes matemáticos como sendo uma continuação das pesquisas desenvolvidas por Galileu e Kepler e coloca dois problemas centrais que chamavam a atenção dos cientistas: " Em primeiro lugar o *problema das tangentes*: determinar as retas tangentes a uma curva dada, o problema **fundamental do cálculo diferencial**. Em segundo lugar, o *problema da quadratura*: determinar a área dentro de uma curva dada, **o problema fundamental do cálculo integral.** O grande mérito de Newton e Leibniz foi o de terem unificado claramente a estreita associação entre estes dois problemas." (p.481) Enquanto Newton definia taxa de variação e pensava em quantidades variáveis continuamente, tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias, dentre outras, Leibniz introduzia a idéia dos infinitésimos discretos e dos diferenciais. Ou seja, enquanto um propunha uma construção contínua, outro pensava na discretização das curvas, nos pequenos degraus. Duas idéias que não se anulam, ao contrário, se complementam.

Com um pouco mais de história poderemos compreender o porquê da discretização utilizada por Leibniz ser utilizada na ciência da computação: Leibniz era um otimista inveterado. Não só acreditava poder reunir as seitas religiosas conflitantes de seu tempo numa igreja universal, como, também, acreditava que podia encontrar um meio de cristianizar a China através do que ele considerava ser a imagem da criação na aritmética binária. Como Deus pode ser representado pela unidade aritmética e o nada pelo zero, ele imaginava que Deus tivesse criado o tudo do nada, assim como na aritmética binária todos os números se expressam por meio da unidade e do zero. Em 1673, Leibniz exibiu à Royal Society uma máquina de calcular que inventara EVES (2004, p.442-444).

O problema contínuo/discreto foi objeto de estudo dos gregos, por volta do século VI a.C. Os quatro Paradoxos de Zenão confundiram os matemáticos durante séculos, pois colocavam em cheque as noções de ***espaço e tempo***. Estes paradoxos focam a relação discreto/contínuo, um problema que ***está "no coração da matemática"***. O mais interessante é que as idéias de Zenão são a gênese da Teoria da Relatividade de Einstein. Diversos autores matemáticos já escreveram sobre este paradoxo, como Douglas R. Hofstadter e Bento de Jesus Caraça. Mas há referências sobre ele também na literatura de Lewis Carroll e do escritor argentino Jorge Luís Borges. O paradoxo da dicotomia trata do movimento absoluto, e diz que não existe movimento, porque para percorrer qualquer distância, é preciso que você alcance, inicialmente, a metade desta distância. Porém, antes desta, você deve alcançar a metade desta metade, assim, sucessivamente, *ad infinitum*. Logo, seria impossível atingir um ponto em um tempo finito ou não existe a possibilidade do movimento. ***Há um conceito forte por trás destes paradoxos que é a questão da continuidade do espaço. Para Zenão, o espaço era contínuo e o tempo, absoluto. Entendemos por contínuo algo que pode sempre ser dividido ao meio.***

Até os dias de hoje, uma questão perturba físicos de todo mundo: a luz é uma onda ou uma partícula? Por vezes seu comportamento é bem representado pelo modo discreto. Para outras propriedades, é a forma contínua que melhor responde.

4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Conforme palavras de Richard P.Feynman (2001, p.23; Apud Caltech, 1952): "Primeiro descubra por que quer que os alunos aprendam o tema e o que quer que saibam, e o método resultará mais ou menos por senso comum". Lembrando, com isso, que tanto a matemática discreta como a contínua são fundamentais para a construção do pensamento matemático e que não existe uma melhor ou pior. O importante é que o professor e ou aluno saiba compreender o discreto e o contínuo de maneira a tornar o seu estudo matemático mais prazeroso.

5 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 4ª ed.Lisboa: Gradiva, 2002.

COURANT. Richard & ROBBINS, Herbert. **O que é matemática?** 4ª ed.Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. 3ª ed. Campinas,SP: UNICAMP, 2002.

FEYNMAN, Richard P. **Física em seis lições**. Tradução: Ivo Korytowski; [introdução de Paul Davies]- 6ª ed, Rio de Janeiro, RJ: Ediouro, 2001.

PETROVSKI, A. **Psicologia evolutiva y pedagogica.** Trad. Leonor Salinas. 2ªed. Moscou: Editorial Progresso Moscú, 1979.

SCHEINERMAN, Edward R. **Matemática Discreta** – Uma introdução. Trad. FARIAS, Alfredo Alves de. São Paulo, SP: Pioneira Thomson Learning, 2003.