PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Érika Deolinda Cardoso Torres Vidigal

DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O PROCESSO DE APRENDIZAGEM DOS PRODUTOS DE VETORES

Belo Horizonte
2014

Érika Deolinda Cardoso Torres Vidigal

DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O PROCESSO DE APRENDIZAGEM DOS PRODUTOS DE VETORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares

Belo Horizonte
2014

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Vidigal, Érika Deolinda Cardoso Torres
V652d Desenvolvimento de uma sequência didática para o processo de aprendizagem dos produtos de vetores / Érika Deolinda Cardoso Torres Vidigal. Belo Horizonte, 2014.
148f.: il.

Orientador: João Bosco Laudares
Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Cálculo vetorial. 3. Software de sistemas. 4. Didática. 5. Sequências (Matemática). 6. Análise de erros (Matemática). I. Laudares, João Bosco. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 51:37.02

Érika Deolinda Cardoso Torres Vidigal

DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O PROCESSO DE APRENDIZAGEM DOS PRODUTOS DE VETORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. João Bosco Laudares (Orientador)
PUC Minas

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda
PUC Minas

Profª. Drª. Lilian Nasser
UFRJ

Belo Horizonte, 03 de junho de 2014

Ao meu filho Thiago, por ter-me abdicado diversas vezes da sua convivência, em função da dedicação ao curso de mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus.

As pessoas a quem devo agradecimentos são várias. Peço desculpas às que tenham sido omitidas nesta página, por algum descuido meu.

Agradeço

ao meu pai, que sempre me incentivou a estudar;

à minha mãe (In Memoriam), que sempre torceu por minhas conquistas e está sempre junto de mim;

ao meu marido, Carlos, pelo amor, companheirismo e apoio;

ao meu filho, Thiago, por ter me inspirado, principalmente nos momentos mais difíceis, a perseguir meus objetivos;

às minhas queridas colegas da Escola Municipal da Vila Pinho, Vânia Cruz e Adiná, pelo apoio e pela compreensão em todos os momentos;

à Margarida, por ter cuidado do meu filho durante o tempo em que eu escrevia esta dissertação;

ao Prof. Dr. João Bosco Laudares, pela preocupação, atenção, paciência e confiança;

a todos os professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, pela eficaz transmissão de conhecimento;

aos professores doutores Dimas Felipe de Miranda (PUC Minas) e Lilian Nasser (UFRJ), pelas contribuições preciosas ao fazerem parte da banca examinadora;

aos meus familiares e amigos, pela compreensão das minhas frequentes ausências.

“A mente que se abre a uma ideia jamais volta ao seu tamanho original.”

Albert Einstein

RESUMO

Esta dissertação objetiva apresentar os resultados de uma Pesquisa, cuja temática é processo de ensino e aprendizagem do produto de vetores. Buscou-se verificar como as sequências didáticas e o uso de um software computacional contribuem para o ensino e a aprendizagem dos produtos de vetores e suas aplicações na própria Matemática e na Física. A metodologia utilizada contempla os parâmetros da sequência didática, visando contribuir para uma aprendizagem mais significativa. Foram propostas seis sequências didáticas de atividades: produto de um escalar por um vetor, produto escalar de dois vetores, produto vetorial de dois vetores, produto misto de três vetores, retas no espaço, como uma aplicação do produto de escalar por vetor, e planos no espaço, como uma aplicação do produto escalar. As atividades sobre retas e planos no espaço abordam um tratamento gráfico com o *software* Winplot. As sequências de atividades propostas foram aplicadas a alunos do 1º período dos cursos de Engenharia de uma faculdade particular de Belo Horizonte. O tratamento dos dados coletados foi feito a partir da análise de erros como metodologia de investigação e avaliação. A análise qualitativa dos resultados evidenciou a evolução dos estudantes no desenvolvimento das atividades e no protagonismo de sua aprendizagem. O produto desta pesquisa é um Caderno de Atividades para o estudo do produto de vetores.

Palavras-chave: Sequência Didática. Produto de Vetores. Análise de erros.

ABSTRACT

This dissertation aims to present the results of a research about vectors product, whose theme is the teaching and learning process of the product of vectors. It tried to determine how the didactical sequences and the use of a computer software contribute to the learning of product vectors and their applications in mathematics and physics itself. The methodology includes the parameters of the instructional sequence to contribute to meaningful learning. Six didactic sequences were proposed: product of a scalar by a vector, dot product, cross product, triple product, lines in space as an application of dot product and planes in space as an application cross product. The activities on lines and planes in space look after a graphic treatment with Winplot software. The sequences of activities proposed were applied to students of the 1st semester of Engineering courses in a particular college Belo Horizonte. The treatment of the collected data was done from the error analysis as research methodology and evaluation. The qualitative analysis showed the evolution of the students in the development of activities and their role in learning. The product of this Research is a Book of Activities for the study of the product of vectors.

Keywords: Didactic Sequence. Vectors Product. Error Analysis.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sou professora Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais, com Especialização em Matemática para professores de 3º grau por essa mesma Universidade. Minha formação foi essencialmente tradicionalista e, ainda como aluna, me questionava constantemente sobre a aplicação dos conteúdos estudados e, na maioria das vezes, continuava sem resposta.

Em 2005, iniciei minha carreira docente como professora de Matemática no Ensino Médio e, desde 2010, trabalho nos cursos de Engenharia de uma faculdade particular, em Belo Horizonte, com a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Analisando minha prática educativa, encontrei várias tendências tradicionalistas de ensino e me vi reproduzindo com os meus alunos as formas de ensino utilizadas pelos meus professores que, hoje, percebo serem inadequadas à realidade em que vivemos, na qual a tecnologia se destaca. Desde então, venho procurando aperfeiçoar minha prática pedagógica e trabalhar os conteúdos de forma mais aplicada e de forma que façam diferença na formação do aluno, considerando, principalmente, que muitos deles já possuem uma formação profissional e procuram, na formação acadêmica, conhecimentos que vão ao encontro de suas necessidades no trabalho.

Nas turmas em que trabalho a disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear, constantemente me deparo com o desinteresse dos alunos pelos estudos (mesmo tratando-se de um curso superior), a competição com as novas tecnologias tão atraentes, o fracasso escolar e a dificuldade de aprendizagem apresentada por vários alunos, principalmente pelos que deixaram a escola há algum tempo e agora estão retornando.

O estudo dos vetores, integrante do programa da referida disciplina, é bastante complicado para muitos estudantes. Percebem-se dificuldades em compreender o conceito de vetores e o produto entre eles. Os alunos acabam tentando decorar as definições e repetir os raciocínios apresentados nos exemplos.

Winterle (2011) destaca a importância dos vetores na compreensão de outras disciplinas relacionadas à própria Matemática e à Física “uma vez que, além de relacionarem as representações algébricas com entes geométricos, visam desenvolver habilidades como raciocínio lógico e visão espacial.” (p. VIII).

Dessa forma, o trabalho com o conteúdo de Produto de Vetores nesta pesquisa mostra uma estratégia pedagógica diferente, que facilita a compreensão dos alunos e contribui verdadeiramente para sua formação.

Zabala (1998) propõe a sequência didática como uma metodologia que viabiliza o desenvolvimento da autonomia do aluno e, consequentemente, facilita a compreensão do conteúdo.

Behrens (2006) afirma que a aprendizagem faz muito mais sentido para o aluno, quando ele deixa de repetir os ensinamentos transmitidos pelo professor e assume um papel crítico na construção do seu próprio conhecimento.

Mota (2011) ressalta que “o uso de ferramentas computacionais pode tornar o estudo de conteúdos matemáticos bem mais produtivo e interessante, de forma a proporcionar verdadeiras e significativas aprendizagens matemáticas”. (p. 19).

Nesse contexto, a tecnologia, ao lado das sequências didáticas, apresenta-se como um instrumento para contribuir no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

A nossa proposta compõe-se de uma sequência didática para o ensino de produto de vetores. Foram trabalhados o produto de escalar por vetor, o produto escalar de dois vetores, o produto vetorial de dois vetores e o produto misto de três vetores. Abordamos, também, retas no espaço, como uma aplicação do produto de escalar por vetor, e planos no espaço, como uma aplicação do produto escalar.

As atividades propostas sobre reta e plano foram realizadas com ferramentas informatizadas, utilizando o *software* matemático Winplot, que permite uma dinâmica de rotação e translação de figuras, facilitando a visualização geométrica em espaços tridimensionais.

1.1 Objetivos

Detalhamos, a seguir, os objetivos geral e específicos que motivaram e orientaram esta pesquisa.

1.1.1 Objetivo geral

Criar uma sequência didática de atividades e analisar sua contribuição para o ensino e a aprendizagem dos produtos de vetores, nos cursos de graduação de Engenharia.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Verificar em livros didáticos de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral, como é feita a abordagem metodológica do conteúdo produtos de vetores;
- Elaborar e testar uma sequência didática de atividades sobre os produtos de vetores e algumas de suas aplicações na Física e na Matemática;
- Selecionar e analisar a utilização de um software matemático no desenvolvimento da sequência didática de atividades sobre retas e planos no espaço;
- Identificar resultados atingidos com a aplicação da sequência didática de atividades.

1.2 Questão

O sucesso do processo de ensino e aprendizagem dos produtos de vetores sinaliza para um trabalho no qual o aluno assuma um papel crítico e participativo na construção do seu próprio conhecimento. Entretanto, várias questões surgem juntamente com esta sinalização: É possível utilizar um *software* computacional no ensino do produto de vetores? Mais ainda, o uso desse *software* é eficaz? Trabalhar com sequências didáticas facilita o estudo do produto de vetores? Explorar aplicações do produto de vetores na própria Matemática e na Física desperta o interesse do aluno e contribui com o ensino e a aprendizagem desse conteúdo?

A partir dessas indagações e pressupostos, surge a questão de investigação deste trabalho: **Como as sequências didáticas e o uso de um *software* computacional contribuem para o ensino e a aprendizagem dos produtos de vetores e suas aplicações na própria Matemática e na Física?**

1.3 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação é constituída por seis capítulos, incluindo essa introdução e as considerações finais.

No capítulo 2, apresentamos os referenciais teóricos que embasaram nossa pesquisa. Inicialmente, expomos um pouco da história do surgimento dos vetores. Em seguida, abordamos um pouco as sequências didáticas como uma metodologia de ensino que vai ao encontro das exigências da sociedade atual quanto ao ensino e à aprendizagem. Na sequência, exploramos um pouco da importância do uso da informática na educação e fazemos algumas considerações sobre o ensino dos produtos de vetores.

No capítulo 3, destacamos alguns parâmetros das Diretrizes Curriculares para os cursos de Engenharia e apresentamos uma breve análise acerca do conteúdo produto de vetores, realizada por nós em livros didáticos.

No capítulo 4, tratamos da elaboração das atividades que compõem nossa sequência didática, apresentando os objetivos e a metodologia de cada uma delas.

No capítulo 5, apresentamos a metodologia, o campo e os sujeitos da pesquisa. Na sequência, fazemos a apresentação das atividades propostas junto à análise dos dados obtidos na sua aplicação. Apresentamos, também, uma tabela, para cada atividade, com uma síntese quantitativa dos tipos de erros cometidos pelos estudantes na realização das mesmas.

O capítulo 6 é constituído pelas Considerações Finais de nossa pesquisa, em que procuramos refletir sobre as contribuições que a metodologia proposta trouxe para o processo de ensino e aprendizagem dos produtos de vetores.

O produto final de nossa pesquisa é composto de um caderno de atividades, composto por seis sequências didáticas de atividades elaboradas, aplicadas e reformuladas durante o desenvolvimento da pesquisa (APÊNDICE A).

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE PRODUTO DE VETORES E A INFORMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos um pouco da história do surgimento dos vetores e as teorias que serviram de referência para o desenvolvimento do nosso trabalho.

2.1 Um pouco da história dos vetores

O uso de vetores e seu estudo sistemático ocorreram a partir do século XIX. Eles apareceram nas primeiras décadas desse século com as representações geométricas dos números complexos.

Mobius, em 1827, publicou o livro *The Barycentric Calculus* no qual usava segmentos de retas e os manipulava, adicionando-os e multiplicando-os por números reais da mesma forma que fazemos hoje com os vetores.

Em 1843, Hamilton inventa um sistema quadridimensional que chamou de quatérnios. Esse sistema surgiu após Hamilton desistir de procurar um sistema em que uma multiplicação para os tripletos (x,y,z) possuísse as mesmas propriedades da multiplicação dos pares numéricos (x,y) e que pudesse ser interpretada via rotações no espaço, tal como a multiplicação de pares numéricos, em relação ao plano.

O desenvolvimento da álgebra vetorial e da análise vetorial como conhecemos hoje foi revelado, primeiramente, em um conjunto de notas de aula feito por J. Willard Gibbs (1839--1903). Suas conquistas científicas principais foram em Física, Termodinâmica propriamente dita, e eram apoiadas por Maxwell, especialmente as apresentações geométricas dos resultados.

Estudando o *Treatise on Electricity and Magnetism*, de Maxwell, e o *Ausdehnungslehre*, de Grassmann, Gibbs, tomou conhecimento dos quatérnios e concluiu que vetores forneceriam uma ferramenta mais eficiente para seu trabalho em Física.

O primeiro livro moderno sobre análise vetorial em inglês foi *Vector Analysis* (1901), as notas de Gibbs colecionadas por um de seus alunos de pós-graduação, e Edwin B. Wilson (1879-1964).

Quem também contribuiu para o moderno entendimento e uso de vetores foi Jean Frenet (1816-1990). Sua Tese de Doutorado continha a teoria de curvas espaciais e as fórmulas conhecidas como as fórmulas de Frenet-Serret (o triedro de Frenet).

No final do século XIX e início do século XX, Tait e alguns outros ridicularizaram vetores e defenderam quatérnios, enquanto outros cientistas e matemáticos desenharam seu próprio método vetorial.

Em 1893, o físico Oliver Heaviside (1850-1925), influenciado por Maxwell, publicou o primeiro volume de seu livro *Electromagnetic Theory* (três volumes, 1893, 1899, 1912), que contém no seu terceiro capítulo, intitulado “Elementos de Álgebra e Análise Vetorial”, uma apresentação do moderno sistema de análise vetorial. Evidências históricas mostram que a associação de sua análise vetorial ao estudo das teorias de Maxwell sobre eletricidade e magnetismo contribuiu para que os métodos vetoriais utilizados por Heaviside fossem disseminados rapidamente.

Atualmente, os vetores são a linguagem moderna de grande parte da Física e da Matemática aplicada, além de possuírem um interesse matemático intrínseco.

2.2 As sequências didáticas como metodologia de ensino

Vivemos em um mundo onde a tecnologia está presente em tudo e, com isso, o conhecimento está cada vez mais acessível para quem está a sua procura. Entretanto, muitos professores ainda assumem a postura de detentores e transmissores do saber, mantendo em suas aulas uma postura tradicionalista, com aulas sempre expositivas.

Confirmando essa ideia, Miranda, Gazire, Laudares, Rodrigues e Mota (2007) afirmam que

> o professor de matemática, seja da educação básica, seja da educação superior, tem como premissa didática o uso da técnica da aula expositiva essencialmente discursiva, às vezes dialogada. Sua formação universitária, principalmente, os professores graduados anteriormente à década de 80, se fez sem o uso da tecnologia. O tratamento dado ao conteúdo é, essencialmente, de transmissão. Assim, a tarefa de professor é a de transmitir um conhecimento, ou de um tradutor para o aluno da teoria apresentada no texto. (MIRANDA, GAZIRE, LAUDARES, RODRIGUES e MOTA, 2007, p. 3).

Para que consiga contribuir verdadeiramente para a aprendizagem do estudante, o professor desfaz o papel de detentor do saber e assume a postura de mediador na relação ensino-aprendizagem.

> O acesso ao conhecimento e, em especial, à rede informatizada desafia o docente a buscar nova metodologia para atender às exigências da sociedade. Em face da nova realidade, o professor deverá ultrapassar seu papel autoritário, de dono da verdade, para se tornar um investigador, um pesquisador do conhecimento crítico e reflexivo. [...] o professor deve mudar o foco do ensinar para reproduzir conhecimento e passar a preocupar-se com o aprender e, em especial, o “aprender a aprender”, abrindo caminhos coletivos de busca e investigação para a produção do seu conhecimento e do seu aluno. (BEHRENS, 2006, p. 71).

Behrens (2006) afirma que o aluno tem um papel diferenciado na aprendizagem quando deixa de ser um “repetidor fiel dos ensinamentos do professor e torna-se criativo, crítico, pesquisador e atuante, para produzir conhecimento.” (p. 71).

Ainda segundo essa autora, professores e alunos organizam-se e encontram uma maneira de acessar e produzir com autonomia o conhecimento.

Zabala (1998) propõe a sequência didática como uma metodologia que conduz o trabalho do professor rumo às exigências da nova sociedade. Para o autor, as sequências de atividades de ensino-aprendizagem, ou sequências didáticas, são

> [...] o conjunto ordenado de atividades estruturadas e articuladas para a consecução de um objetivo educacional em relação a um conteúdo concreto. Esta unidade de análise, como as sequências didáticas, está inserida num contexto em que se deverá identificar, além dos objetos didáticos e do conteúdo objeto da sequência, as outras variáveis metodológicas: relações interativas, organização social, materiais curriculares, etc. (ZABALA, 1998, p.78).

Ainda segundo Zabala (1998), trabalhar com as sequências didáticas é um dos caminhos mais acertados para aprimorar a prática educativa, já que, nessa proposta, os alunos têm diferentes oportunidades de aprender e os professores, uma diversidade de meios para captar os processos de construção edificados pelos estudantes, avaliar e repensar suas propostas de ensino.

A sequência didática contribui para a autonomia do aluno na busca do conhecimento e o professor tem um papel importante nessa trajetória

> [...] desempenha um papel essencial a pessoa especializada que ajuda a detectar um conflito inicial entre o que já se conhece e o que deve saber, que contribui para que o aluno se sinta capaz e com vontade de resolvê-lo, que propõe o novo conteúdo como um desafio interessante, cuja resolução terá alguma utilidade, que intervém de forma adequada nos progressos e nas dificuldades que o aluno manifesta, apoiando-o e prevendo, ao mesmo, tempo a atuação autônoma do aluno. (ZABALA, 1998, p. 63).

No entanto, para que a sequência didática seja uma metodologia que contribua verdadeiramente para a produção das aprendizagens, deve favorecer seu grau de significância e a atenção à diversidade.

Nesse sentido, Zabala (1998) orienta-nos, dando-nos parâmetros para elaboração e avaliação das sequências didáticas. Segundo ele, essas unidades didáticas estruturam-se pelas características:

- Contar com as contribuições e conhecimentos dos alunos;
- Ajudá-los a encontrar sentido no que estão fazendo;
- Estabelecer metas ao alcance dos alunos;
- Oferecer ajudas adequadas;
- Promover a atividade mental autoestruturante;
- Estabelecer ambientes que promovam a autoestima e o autoconceito;
- Promover canais de comunicação;
- Potencializar a autonomia;
- Avaliar os alunos conforme suas necessidades e seus esforços;
- Incentivar a autoavaliação.

Complementando as orientações de Zabala, Camargo e Boulos (2005) ressaltam que, na seleção ou elaboração das atividades que compõem uma sequência didática, o professor considera que os exercícios levam o aluno a analisar, questionar e conjecturar, ou seja, ter uma atitude “madura” em relação a eles e não, simplesmente, compor uma lista que o estudante consegue resolver sem dificuldades, levando-o à impressão enganosa de que aprendeu bastante.

> Uma atitude madura com relação aos exercícios propostos é reconhecer neles um instrumento facilitador da aprendizagem (nunca um fim em si mesmo), rejeitando a visão maniqueísta de que “acertar é bom, errar é ruim”. Com frequência aprende-se mais com os erros que com os acertos [...]. (CAMARGO e BOULOS, 2005, p. xii).

Zabala (1998) destaca que é imprescindível prever situações que favoreçam diferentes formas de se relacionar e interagir (grupos, equipes fixas e móveis, assembleias, trabalhos de campo etc.).

Compartilhando dessa ideia, Poole (2004) afirma que proporcionar aos alunos momentos de trabalho diferenciados dos de aulas tradicionais, em que o professor apenas transmite o conhecimento, contribui para que eles se tornem estudantes ativos e “donos” de uma pequena parte da disciplina.

Diante do exposto, creditamos às sequências didáticas uma grande potencialidade como metodologia para atender as nossas expectativas no ensino e aprendizagem do produto de vetores.

2.3 Informática educativa e o ensino de Geometria Analítica

O uso da informática na educação gera, para o professor e o aluno, novas perspectivas no processo ensino-aprendizagem.

Segundo Borba e Penteado (2005), o computador é visto como uma mídia que traz inúmeras possibilidades para o meio educacional. Compartilhando da mesma opinião, Moran (2006) afirma que “o computador se converte em um meio de comunicação, a última grande mídia, ainda em estágio inicial, mas extremamente poderosa para o ensino e a aprendizagem”. (p. 44).

Masetto (2006) alega que “a tecnologia apresenta-se como meio, como instrumento para colaborar no desenvolvimento do processo de aprendizagem.” (p. 139).

Borba e Penteado destacam a importância de uma nova mídia, como a Informática, na produção do conhecimento, entretanto essa mídia não determina a prática pedagógica. Eles afirmam que “é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento.” (2005, p. 45).

Dessa forma, o uso das TICs torna a aprendizagem mais significativa e facilita a problematização do conteúdo.

> Cada vez mais poderoso em recursos, velocidade, programas e comunicação, o computador nos permite pesquisar, simular situações, testar conhecimentos específicos, descobrir novos conceitos, lugares, ideias. Produzir novos textos, avaliações, experiências. As possibilidades vão desde seguir algo pronto (tutorial), apoiar-se em algo semidesenhado

> para complementá-lo até criar algo diferente, sozinho ou com outros. (MORAN, 2006, p. 29).

Ainda segundo o autor, a tecnologia traz as informações de forma rápida e atraente e, dessa forma, a aquisição do conhecimento dependerá cada vez menos do professor, que passa a ter o papel de auxiliar o estudante a interpretar, relacionar e contextualizar esses dados.

Quando trabalhamos com questões na Matemática, principalmente com as relacionadas à Geometria, muitas vezes, uma visualização dos objetos com os quais se está trabalhando é necessária, de forma a permitir uma melhor compreensão daquilo que se está estudando. Segundo Franchi,

> a informática facilita as visualizações, possibilita testar mudanças relacionadas a características algébricas de conceitos matemáticos e observar as variações resultantes no aspecto gráfico. A comparação entre as representações gráficas, algébricas e numéricas, a observação e a reflexão sobre o observado podem levar à elaboração de conjecturas. (FRANCHI, 2007, p. 184).

Nesse contexto, o uso dos *softwares* educativos destaca-se como forma de proporcionar esse dinamismo necessário às representações gráficas. Para Valente (1993), a manipulação do *software* possibilita uma crescente facilidade de aprendizagem, "quando o aprendiz está interagindo com o computador, ele está manipulando conceitos da mesma maneira que ele adquire conceitos quando interage com objetos do mundo." (p. 32).

Behrens (2006) ressalta que, com o advento da tecnologia, "os alunos passam a ser descobridores, transformadores e produtores do conhecimento." (p. 75). Ao dizer sobre os docentes universitários, a autora afirma que eles têm a função de "formar para a cidadania, como sujeito histórico e transformador da sociedade, e contribuir para a produção do conhecimento compatível com o desenvolvimento tecnológico contemporâneo." (p. 72).

Dessa forma, é essencial que todos os professores utilizem a tecnologia em suas aulas como facilitadora do processo de ensino e aprendizagem. Mas, segundo Miranda, Gazire, Laudares, Rodrigues e Mota (2007),

> [...] esta passagem da sala de aula para o laboratório não se realiza de uma forma linear, direta e consentida. Uma questão, colocada pelo professor, principalmente o universitário, é de que a matemática na sua teoria, compreensão dos conceitos de Cálculo, Geometria ou Álgebra, não precisa

> ser assistida pelo computador, pois os programas computacionais são boas ferramentas para Cálculo Numérico e Estatística, mas não são suportes na aprendizagem da teoria. (MIRANDA, GAZIRE, LAUDARES, RODRIGUES e MOTA, 2007, p. 3).

Ainda segundo esses autores, os professores de graduação alegam que o programa de ensino de suas disciplinas é muito extenso e a ida ao laboratório computacional dificulta o seu cumprimento, ou seja, o plano de ensino e a carga horária a ser cumprida sobrepõem-se à aprendizagem do estudante. Dessa forma, "se interroga quanto à essência da didática e quanto ao papel do professor: se um informante de conteúdo ou facilitador/orientador do processo de estudar." (MIRANDA, GAZIRE, LAUDARES, RODRIGUES e MOTA, 2007, p. 4).

Laudares e Lachini (2005) apontam que um dos mais graves problemas da escola é "estar centrada e planejada para a transmissão de conteúdos" e afirmam que o computador é uma ferramenta em potencial para modificar essa metodologia.

> É provável que o computador, ao possibilitar simular fenômenos a partir de modelos, traga preciosa colaboração para que professores e alunos comecem a entender que é o método – essencialmente, um método de explicar, de conhecer e de pensar – a mais importante contribuição da Matemática na formação do profissional de engenharia. (LAUDARES e LACHINI, 2005, p. 9).

Dessa forma, a escola tem um papel importante na construção do conhecimento e não pode deixar de lado a tecnologia. O professor procura desenvolver sua potencialidade e integrá-la em sua prática docente, propiciando o desenvolvimento de novas habilidades e a apropriação de novos conhecimentos.

Partilhando dessa mesma opinião, Valente (1999) afirma que cabe ao professor o papel desafiador de manter vivo o interesse dos alunos e incentivar as relações sociais em que uns aprendem com os outros e o trabalho em grupo é valorizado. Além disso, o autor destaca a importância de o professor "ter um profundo conhecimento dos pressupostos teóricos que embasam os processos de construção de conhecimento e das tecnologias que podem facilitar esses processos." (VALENTE, 1999, p. 43-44).

Assim, cabe ao professor adequar sua prática pedagógica, utilizando as diversas mídias e metodologias como forma de ampliar o acesso ao conhecimento, ou seja, criar em suas aulas momentos que estimulem o aluno a pesquisar, investigar, conjecturar, ou seja, aprender a aprender.

> Podemos transformar uma parte das aulas em processos contínuos de informação, comunicação e pesquisa, por meio das quais vamos construindo o conhecimento equilibrando o individual e o grupal entre o professor-coordenador-facilitador e os alunos-participantes ativos. Aulas-informação, nas quais o professor mostra alguns cenários, algumas sínteses, o estado da arte, as coordenadas de uma questão ou tema. Aulas-pesquisa, nas quais professores e alunos procuram novas informações, cercar um problema, desenvolvem uma experiência, avançam em um campo desconhecido. (MORAN, 2006, p. 46,47).

Laudares e Lachini (2005) enfatizam que o computador é uma excelente ferramenta no processo de ensino e aprendizagem, entretanto, se não for utilizado adequadamente, perde seu valor. O uso dessa tecnologia propicia ao aluno alimentar os dados e interpretar as respostas fornecidas. “Programas que já solicitam dados específicos, e que já fornecem resultados são para técnicos e tecnólogos, não para engenheiros!”. (LAUDARES e LACHINI, 2005, p. 7).

Ainda de acordo com esses autores,

> é provável que o computador, ao possibilitar simular fenômenos a partir de modelos, traga preciosa colaboração para que professores e alunos comecem a entender que é o método – essencialmente, um método de explicar, de conhecer e de pensar – a mais importante contribuição da Matemática na formação do profissional de engenharia. (LAUDARES e LACHINI, 2005, p. 7).

Voltando nossa discussão para o uso da informática na Geometria Analítica, destacamos, inicialmente, a definição apresentada por Camargo e Boulos:

> Geometria Analítica: é o estudo da Geometria pelo método cartesiano (René Descartes, 1596-1650), que em última análise consiste em associar equações aos entes geométricos, e através do estudo dessas equações (com o auxílio da Álgebra, portanto) tirar conclusões a respeito daqueles entes geométricos. (CAMARGO e BOULOS, 2005, p. x).

Dessa maneira, a Geometria Analítica trabalha as equações e seus gráficos e requer o estabelecimento de relações entre os registros algébrico e gráfico. Os *softwares* de geometria dinâmica, com os seus diversos recursos, permitem a visualização desses gráficos e sua movimentação nos espaços bi e tridimensionais.

De acordo com Mota (2011), o ambiente geométrico dinâmico propicia o movimento e múltiplas representações das figuras, contribuindo para a descoberta de propriedades e relações geométricas quando estabelecemos conjecturas e verificamos sua validade.

Segundo Stewart (2013),

> a disponibilidade de tecnologia não diminui – pelo contrário, aumenta – a importância de se entender com clareza os conceitos por trás das imagens na tela. Quando utilizados apropriadamente, computadores e calculadoras gráficas são ferramentas úteis na descoberta e compreensão de tais conceitos. (STEWART, 2013, p. XII).

O autor, no entanto, ressalta que a tecnologia não descarta o uso do lápis e do papel, que continuam possuindo um papel essencial na aprendizagem e afirma que os cálculos e esboços feitos à mão ilustram e reforçam alguns conceitos.

Portanto, trabalhar as sequências didáticas utilizando mídias variadas como lápis e papel e o computador, com um *software* dinâmico adequado para solucionar as atividades propostas, motiva o aluno a desenvolver suas potencialidades quanto à argumentação, compreensão e comunicação, ou seja, transforma-o em agente de sua aprendizagem.

2.4 O ensino do produto de vetores

O estudo dos vetores ocupa um papel crucial nas Ciências Exatas e Tecnológicas e, normalmente, os estudantes dos períodos iniciais dos cursos de graduação em Engenharia possuem dificuldades em compreender o conceito de vetor.

Castro (2001), em sua pesquisa sobre os registros de representação dos vetores do plano e do espaço, apoiada em Duval (1999), afirma que,

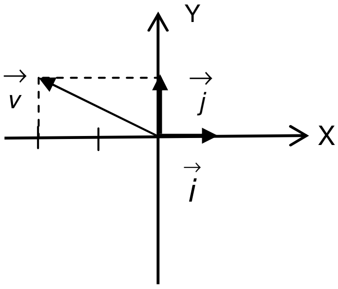
> em Matemática, as representações semióticas não são indispensáveis apenas para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da própria atividade matemática. De fato, a possibilidade de realizar tratamentos nos objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. [...] A utilização de representações semióticas parece primordial para a atividade matemática e parece ser intrínseca a ela. (CASTRO, 2001, p. 12).

Dessa forma, acessar um objeto na Matemática só é admissível utilizando um sistema de representação semiótica, dada a natureza não real dos objetos matemáticos.

Duval (1999) destaca os registros de representação simbólica, figural e o da língua natural. Para o autor, as representações semióticas têm dois aspectos: a forma (representante) e o conteúdo (representado).

> Um vetor $\vec{v}$ pode ser representado pelos três tipos de registros indicados por Duval. No simbólico através de n-uplas, ou como combinações lineares de vetores em relação a uma base fixada. No figural, por uma flecha, registro de um representante da classe de equipolência de $\vec{v}$. E na linguagem natural, "vetor". (CASTRO, 2001, p. 13).

Tabela 1 - Exemplo de registros de um vetor

Registro figural	Registro da n-upla	Registro da combinação linear
	$\vec{v} = (-2,1)$	$\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$

Fonte: Elaborada pela autora

Os estudantes confundem o objeto matemático, vetor, com sua representação figural, a seta. Duval ressalta a importância de se distinguir o representado de seus representantes e afirma que essa confusão entre as representações é considerada um grande entrave à aprendizagem da Matemática.

> O ponto comum à grande maioria dos bloqueios dos alunos, quaisquer que sejam os domínios de atividade matemática e qualquer que seja o nível do currículo, é a incapacidade de converter a representação de um objeto em outra representação do mesmo objeto. (DUVAL, 1999)

Poole (2004) destaca que, do ponto de vista pedagógico, é essencial que os exemplos concretos antecedam os abstratos. Logo, "os alunos devem ver vetores antes (em uma situação concreta) para ganhar alguma intuição geométrica." (p. xii).

Conforme Menon (2009), nos cursos básicos universitários, o primeiro contato com os vetores é por uma representação que caracteriza um tipo particular de vetor.

> Nessa *representação elementar*, os vetores são vistos como associados a grandezas que necessitam de módulo, direção e sentido para serem completamente especificadas, sendo exemplos clássicos o deslocamento de uma partícula, a velocidade, aceleração e força. Nesse contexto, um

> vetor é geometricamente representado por uma seta, com comprimento proporcional ao seu módulo, o que é intuitivo. (MENON, 2009 p. 10).

Após esse primeiro contato, passa-se a operar com esses vetores. Inicialmente, utiliza-se a regra do paralelogramo e do polígono para somar vetores. Dando continuidade, estuda-se a multiplicação de um escalar por um vetor e, em seguida, o produto entre dois vetores (produto escalar e produto vetorial) e entre três vetores (produto misto). Segundo a autora,

> todos os textos didáticos utilizam a mesma estratégia: as operações são introduzidas através de definições, digamos pragmáticas, no sentido de que são apresentadas e passa-se imediatamente às propriedades decorrentes da definição. Mesmo que, previamente, se façam algumas considerações sobre grandezas físicas (torque, momento angular,...) ou geométricas (ângulo de rotação). (MENON, 2009, p. 1).

Menon (2009) ressalta que não podemos criticar essa abordagem utilizada nos livros didáticos quanto à sua praticidade, no entanto, destaca que ela deixa, no processo de ensino e aprendizagem, uma “lacuna pedagógica: algo que o aluno não entende e não tem tempo para pensar, devido à sequência da matéria.” (p. 2).

Stewart (2013) afirma que uma maneira de despertar o interesse dos alunos e facilitar a aprendizagem é proporcionar a eles momentos de trabalho em grupo com projetos diferenciados que, quando completados, conferem um “verdadeiro sentimento de realização.” (p. XI). Logo, trabalhar com os alunos organizados em duplas ou grupos, no desenvolvimento das atividades propostas, contribui para que eles assumam uma postura mais autônoma na sua aprendizagem, em especial, na construção do conhecimento sobre vetores.

Conforme Menon (2009), a representação elementar dos vetores, bem como sua soma e multiplicação por um número real, é bastante intuitiva, mesmo que o aluno não compreenda bem a distinção entre o vetor propriamente dito e a seta que o representa. Entretanto, o produto entre vetores não é fácil de ser compreendido.

> Porém, no caso do produto vetorial, o resultado é um vetor normal aos dois fatores e, pior ainda, seu sentido é *convencionado* pela “regra da mão direita". Isso não é nada intuitivo e não sendo explicado ou justificado, permanece uma incógnita com a qual os alunos, infelizmente, acabam se acostumando. (MENON, 2009, p. 2).

De acordo com Winterle (2011), vetores é assunto de vital importância, pois visam desenvolver habilidades como raciocínio geométrico e visão espacial. Em relação aos produtos de vetores, o autor ressalta que o produto escalar e o produto vetorial de dois vetores são uma importante ferramenta matemática para a Física, uma vez que inúmeras grandezas físicas são definidas com o seu emprego. Além desse destaque feito pelo autor, não podemos esquecer o produto misto de três vetores e o produto de um escalar por um vetor que têm importantes aplicações na própria Matemática.

Dessa forma, é indispensável que o professor viabilize o estudo dos vetores e seus produtos de maneira que o estudante compreenda suas representações e aplicações na Matemática e em outras áreas. Utilizando a informática e uma metodologia que leve o aluno a assumir um papel ativo na sua aprendizagem, é possível construir um conhecimento sólido e significativo sobre vetores.

3 DIRETRIZES PARA O ENSINO SUPERIOR DE ENGENHARIA E A ANÁLISE DA TEMÁTICA EM ESTUDO EM LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, dedicamo-nos a estudar as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Engenharia e analisar alguns livros didáticos que abordam o conteúdo produto de vetores.

3.1 Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia

As Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia ressaltam que “o desafio que se apresenta ao ensino de engenharia no Brasil é um cenário mundial que demanda uso intensivo da ciência e tecnologia e exige profissionais altamente qualificados.” (BRASIL, 2001, p. 1).

Nesse novo cenário, a concepção de currículo como grade curricular é substituída por outro conceito: “o conjunto de experiências de aprendizado que o estudante incorpora durante o processo participativo de desenvolver um programa de estudos coerentemente integrado.” (BRASIL, 2001, p.1).

É importante compreender o conceito desse processo participativo. De acordo com o documento, “[...] entende-se que o aprendizado só se consolida se o estudante desempenhar um papel ativo de construir o seu próprio conhecimento e experiência, com orientação e participação do professor.” (BRASIL, 2001, p. 2).

A Matemática, a Física e a Informática fazem parte do núcleo de conteúdos básicos do currículo de Engenharia e são trabalhadas ao longo do curso, visando dar condições ao futuro profissional da Engenharia de exercer sua profissão com excelência. Para isso, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia, é importante que essas disciplinas contribuam para que os alunos adquiram, entre outras, competências e habilidades para:

a) aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à Engenharia;
b) projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;
c) conceber, projetar e analisar sistemas, produtos e processos;
d) identificar, formular e resolver problemas de Engenharia;
e) comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica;

f) assumir a postura de permanente busca de atualização profissional.

Dessa forma, os professores dos cursos de Engenharia viabilizam com seus alunos propostas metodológicas que propiciem o desenvolvimento de tais habilidades.

A sequência didática, metodologia utilizada por nós nesta pesquisa, é uma proposta coerente para trabalhar-se o conteúdo de produto de vetores, integrante das disciplinas de Matemática, do núcleo de conteúdos básicos do currículo da Engenharia, pois ajuda o aluno a adquirir habilidades relacionadas à competência do aprender a aprender, o que lhe permite ter autonomia cada vez maior em sua aprendizagem.

3.2 Análise do conteúdo produto de vetores em livros didáticos

O livro didático desempenha um papel de destaque na prática educativa, sendo um importante material de auxílio ao professor e ao estudante.

Em muitos casos, esse instrumento é abandonado por diversos motivos, tais como: poucos exercícios, linguagem não adequada ao público em questão, conteúdo pouco explorado e exercícios sem aplicação prática.

O bom livro didático conquista o aluno, de maneira que esse o utiliza para leitura e estudo e não apenas para realizar os exercícios sugeridos pelo professor em cada capítulo.

Dessa forma, é importante que o professor escolha um livro didático que atenda às suas necessidades no ensino de determinada disciplina e, também, sirva de auxílio à aprendizagem dos estudantes.

Com o objetivo de verificar como alguns livros didáticos abordam o produto de vetores, objeto de nossa pesquisa, fizemos uma análise desse conteúdo em cinco livros didáticos. São eles:

Tabela 2 – Livros didáticos para análise do conteúdo produto de vetores

Livro	Título	Autor(es)	Editora	Ano
1	Vetores e Geometria Analítica	Paulo Winterle	Pearson	2011
2	Geometria Analítica um tratamento vetorial	Ivan de Camargo/ Paulo Boulos	Pearson	2010
3	Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear	Reginaldo J. Santos	Imprensa Universitária da UFMG	2010
4	Cálculo Volume 2	George B. Thomas Maurice D. Weir Joel Hass	Pearson	2012
5	Cálculo Volume 2	James Stewart	Cengage Learning	2013

Fonte: Elaborada pela autora

Para direcionar nossa análise, fizemos os seguintes questionamentos:

- Q1: Ao iniciar o conteúdo, o autor apresenta algum fato histórico ou alguma atividade que contribua para despertar o interesse do aluno?
- Q2: Existe aplicação dessa introdução no decorrer do conteúdo?
- Q3: São feitas revisões de conteúdos necessários ao cálculo dos produtos de vetores?
- Q4: O autor propõe o uso de recursos tecnológicos como instrumento de aprendizagem para o estudante?
- Q5: Figuras são exploradas para facilitar a compreensão do estudante?
- Q6: O autor expõe exercícios resolvidos?
- Q7: Os exercícios propostos são variados e abrangem todo o conteúdo estudado?
- Q8: No texto ou nos exercícios, são apresentadas situações contextualizadas na própria matemática?

- Q9: No texto ou nos exercícios, são apresentadas situações contextualizadas em outras disciplinas ou aplicações da área de estudo do aluno?

A tabela, a seguir, mostra os resultados para os questionamentos levantados.

Tabela 3 – Análise do conteúdo produto de vetores nos livros didáticos

Questão / Livro	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
1	Não	Não	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
2	Não	Não	Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Não
3	Não	Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não
4	Não	Não	Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
5	Não	Não	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

Fonte: Elaborada pela autora

Livro 1: Vetores e Geometria Analítica, de Paulo Winterle

O texto possui uma linguagem de fácil entendimento. Na introdução de cada tópico, o autor apresenta a definição do produto de vetores ou a equação da reta ou do plano nos seus respectivos capítulos e, em seguida, um exemplo numérico, utilizando a definição ou equação dada. O autor também apresenta a demonstração de várias equações ou afirmações feitas ao longo do texto.

O livro possui muitos exercícios resolvidos e figuras que auxiliam o aluno na compreensão da teoria exposta.

Os exercícios propostos aparecem no final de cada capítulo, sendo, em sua grande maioria, numéricos. Eles são apresentados na ordem de desenvolvimento do texto e englobam todo o conteúdo tratado no capítulo. As respostas a esses exercícios estão no final do capítulo.

Sobre esses exercícios, o autor afirma que:

> [...] foi apresentado um número elevado de exercícios, para tornar possível ao professor um maior ou menor aprofundamento da matéria, assim como atendimento diferenciado aos alunos frente a seus interesses e potencialidades. (WINTERLE, 2011, p. VIII).

O autor expõe aplicações do conteúdo estudado, na Física e na própria Matemática. Os exemplos intramatemáticos são trabalhados no capítulo e também são propostos exercícios que exploram essa aplicação. Entretanto, na Física, o autor apresenta a definição com um simples exemplo numérico e não aborda mais o assunto nos exercícios propostos.

Livro 2: Geometria Analítica - um tratamento vetorial, de Ivan de Camargo e Paulo Boulos

Os autores abordam o conteúdo de produto de vetores como construção de uma ferramenta vetorial útil ao estudo da Geometria Euclidiana.

No início de cada capítulo, os autores apresentam, em um parágrafo, ao que se propõem naquele capítulo. O texto é apresentado de maneira sintética e com uma linguagem mais formal, se comparado ao livro 1.

Os autores apresentam a definição do produto de vetores trabalhado no momento e algumas de suas propriedades acompanhadas de sua demonstração.

São apresentados poucos exercícios resolvidos e os exercícios propostos aparecem ao longo do texto, sendo que uns envolvem cálculos numéricos e outros, a demonstração de propriedades.

No capítulo sobre produto vetorial, os autores relatam um fato histórico relacionado à Cartografia, que é citada quando os autores abordam a orientação do vetor produto vetorial. No entanto, esse relato não nos levou a responder “sim” às questões Q1 e Q2.

Livro 3: Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear, de Reginaldo Santos

Esse livro está disponível, gratuitamente, no endereço http://www.mat.ufmg.br/~regi/livros.html.

O autor é bem sucinto ao descrever cada tópico trabalhado no livro. Ele apresenta a definição do produto de vetores ou a equação da reta ou plano seguida de um exemplo numérico. São feitas as demonstrações das proposições e teoremas expostos pelo autor ao longo do texto.

Dos livros analisados, esse é o único em que o autor propõe o uso de recursos tecnológicos como instrumento de aprendizagem para o aluno. Essa proposta é feita com exercícios sugeridos para serem resolvidos utilizando-se o *software* Matlab, que é um programa interativo destinado aos cálculos numéricos e gráficos.

Também, no endereço da internet http://www.mat.ufmg.br/~regi/livros.html, pode ser obtido um pacote chamado GAAL, com funções, escrito pelo autor para facilitar o uso do Matlab na resolução dos exercícios propostos em seu livro.

Existem poucos exercícios resolvidos no desenvolvimento do capítulo. Os exercícios propostos abrangem todo o conteúdo estudado e são divididos em três categorias: exercícios numéricos, exercícios usando o MATLAB e exercícios teóricos. Além disso, no final de cada capítulo, o autor apresenta um teste do capítulo com outros exercícios.

No final de cada capítulo, o autor apresenta a resolução de todos os exercícios resolvidos usando o MATLAB. De acordo com o mesmo,

> [...] o leitor que não estiver interessado em usar o *software* pode obter apenas as respostas dos exercícios, enquanto aquele que tiver algum interesse, pode ficar sabendo como os exercícios poderiam ser resolvidos fazendo o uso do MATLAB e do pacote de GAAL. (SANTOS, 2010, p. vii).

Livro 4: Cálculo Volume 2, de George Thomas, Maurice Weir e Joel Hass

Os autores apresentam o texto de forma concisa. Eles iniciam cada tópico expondo sua definição e seguem descrevendo suas propriedades com a demonstração de algumas delas.

Os exercícios aparecem no fim de cada seção, agrupados por tópicos, e, no final do capítulo, são propostos exercícios de revisão, exercícios adicionais e avançados.

Segundo os autores, os exercícios progridem de problemas de cálculo até problemas teóricos e aplicados o que permite aos alunos ganhar desenvoltura nos métodos de cálculo e aprofundar sua compreensão sobre suas aplicações.

Livro 5: Cálculo Volume 2, de James Stewart

O autor apresenta a teoria de maneira sintética, porém mais detalhada, se comparada ao outro livro de cálculo analisado (livro 4).

A teoria é apresentada partindo-se da definição do produto de vetores estudado, seguida da demonstração de suas propriedades. Juntamente à definição de produto vetorial, é apresentada uma síntese sobre o cálculo de determinantes de segunda e terceira ordens.

O autor cita, isoladamente, a origem do produto vetorial pelo matemático irlandês Hamilton e detalha um pouco de sua trajetória acadêmica, porém essa citação não nos levou a responder “sim” às questões Q1 e Q2.

Os exercícios propostos estão no fim de cada seção e são organizados em grupos. No final do capítulo, são colocados exercícios de revisão e alguns problemas nomeados de problemas quentes. De acordo com o autor,

> Cada grupo de exercícios é cuidadosamente classificado, progredindo de exercícios conceituais básicos e problemas que visam ao desenvolvimento de habilidades, até problemas mais desafiadores, envolvendo demonstrações e aplicações. (STEWART, 2013, p. XI).

Dessa forma, verificamos que temos bons livros para serem utilizados por professores e alunos, mas nenhum dos autores analisados atende a todos os requisitos considerados em nossa análise.

4 ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades que compõem esta pesquisa foram criadas tendo por finalidade compor uma sequência didática para introduzir e explorar o estudo dos diversos produtos de vetores.

Na elaboração das atividades, procuramos contemplar os pontos que Zabala (1998) destaca como necessários para reconhecer a validade de uma sequência didática programada para desenvolver determinado conteúdo.

Segundo esse autor, as atividades que compõem uma sequência didática objetivam:

1) permitir verificar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem;
2) propor conteúdos de forma funcional e significativa;
3) estar adequadas ao nível de desenvolvimento dos alunos;
4) representar um desafio alcançável para o aluno;
5) provocar um conflito cognitivo e promover a atividade mental;
6) ser motivadoras em relação à aprendizagem de novos conteúdos;
7) estimular a autoestima e o autoconceito em relação às aprendizagens que se propõem;
8) ajudar o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender, contribuindo para que o aluno seja cada vez mais autônomo em suas aprendizagens.

Assim, as sequências didáticas produzidas buscaram proporcionar aos estudantes condições de atuarem como sujeitos ativos em seu processo de ensino e aprendizagem.

Em todas as atividades elaboradas, apresentamos a definição do produto de vetor a ser estudado e, a partir daí, o aluno é levado a calcular, em exemplos numéricos, o produto de vetores ou de escalar por vetor e verificar propriedades do mesmo.

Procuramos, também, envolver nas atividades um cenário que explorou questões da própria Matemática e também da Física, ou seja, um contexto intramatemático e interdisciplinar.

Segundo Spinelli (2011), contexto intramatemático é denominado como um conjunto de circunstâncias que selecionamos e que permitem organizar percursos sobre a rede conceitual, relacionando significados conceituais internos à própria disciplina.

> Nossa intenção com estes destaques vai ao encontro da necessidade que vislumbramos de os conceitos matemáticos serem sempre abordados com base em contextos intramatemáticos, de modo que seja possível aos alunos perceberem a riqueza das relações que fazem da matemática a ciência estruturada que é, com corpo de conceitos construído a partir não apenas da exigência das aplicações cotidianas ou das implicações interdisciplinares, mas também pela pesquisa e pelo estudo acadêmico. (SPINELLI, 2011, p. 106).

Em relação ao contexto interdisciplinar, é importante destacar que a interdisciplinaridade não cancela o caráter disciplinar necessário ao conhecimento científico, mas completa-o e estimula a percepção da inter-relação entre os fenômenos, essencial para boa parte das tecnologias.

> A interdisciplinaridade é considerada uma nova atitude diante da questão do conhecimento, de abertura à compreensão de aspectos ocultos do ato de aprender e dos aparentemente expressos, ou seja, uma nova maneira de olhar as questões de ordem epistemológica, metodológica e axiológica vivenciada pelos professores no seu cotidiano nas escolas, pois a interdisciplinaridade é essencialmente um processo que precisa ser vivido e exercido na sala de aula. (FAZENDA, 2008, p. 11).

Dessa forma, usando as sequências didáticas elaboradas, no estudo do produto de vetores, estaremos contribuindo para o desenvolvimento de habilidades que venham de encontro à formação de um sujeito autônomo, crítico e reflexivo.

A seguir, apresentamos os objetivos e a metodologia utilizada em cada atividade. Ressaltamos que o texto completo das mesmas encontra-se no próximo capítulo, junto à análise da aplicação das atividades, e no Apêndice, como produto da pesquisa, após aplicação e reformulação.

Metodologia utilizada para a aplicação de todas as atividades:

As atividades foram realizadas em dupla, na sala de aula, ou no laboratório de informática, quando foi necessário esse recurso. Cada aluno recebeu a atividade proposta impressa e, ao final, a pesquisadora recolheu o material trabalhado de apenas um integrante da dupla.

Os estudantes foram orientados a ler a teoria apresentada, necessária para a execução de cada questão, e, em seguida, resolver os itens conforme o enunciado.

As dúvidas foram discutidas em cada dupla, com a intervenção do professor pesquisador, em momentos que as dúvidas não foram sanadas.

Após a aplicação da atividade, a professora pesquisadora trabalhou o conteúdo presente na atividade com a discussão das questões, em uma aula expositiva.

Atividade 1: Estudo do produto de um escalar por um vetor

Objetivos:

- Definir a multiplicação de um escalar por um vetor.
- Determinar o módulo, a direção e o sentido do vetor produto escalar por vetor.
- Definir e calcular versor.
- Determinar o módulo, a direção e o sentido de um versor.
- Resolver problemas de aplicação do produto de um escalar por um vetor na Matemática.
- Resolver problemas de aplicação do produto de um escalar por um vetor na Física.

Metodologia:

A atividade define e explora o produto de um escalar por um vetor, de maneira algébrica e gráfica, levando os alunos a analisar os resultados obtidos com a realização dessa operação. Após esse trabalho, propõe uma questão de aplicação desse produto na Física.

Atividade 2: Estudo do produto escalar

Objetivos:

- Definir produto escalar de dois vetores algebricamente.
- Definir o produto escalar de dois vetores geometricamente.
- Estudar a relação do produto escalar com a ortogonalidade dos vetores e suas aplicações.
- Calcular o ângulo entre dois vetores.
- Resolver problemas de aplicação do produto escalar na Matemática.
- Resolver problemas de aplicação do produto escalar na Física (Trabalho).

Metodologia:

A atividade define e explora o produto escalar de dois vetores, algébrica e geometricamente, enfatizando algumas de suas propriedades. Determina uma forma de cálculo para o ângulo entre dois vetores e conduz os estudantes a estabelecer uma condição para que dois vetores sejam ortogonais. Em seguida, apresenta uma questão sobre aplicação desse produto na Física, com o conceito de Trabalho.

Atividade 3: Estudo do produto vetorial

Objetivos:

- Definir produto vetorial de dois vetores.
- Definir a direção, o sentido e o módulo do vetor produto vetorial.
- Interpretar geometricamente o módulo do produto vetorial de dois vetores.
- Resolver problemas de aplicação do produto vetorial na Matemática (Área do Paralelogramo e Área do Triângulo).
- Resolver problemas de aplicação do produto vetorial na Física (Torque).

Metodologia:

A atividade define algebricamente o produto vetorial de dois vetores e trabalha as propriedades do vetor resultante dessa operação. Em seguida, faz a interpretação geométrica do módulo do vetor produto vetorial, aplicando seu resultado no cálculo de áreas de paralelogramos e triângulos.

No final da atividade, uma questão de aplicação desse produto na Física, define e exemplifica o Torque.

Atividade 4: Estudo do produto misto

Objetivos:

- Definir produto misto.
- Interpretar geometricamente o módulo do produto misto.
- Resolver problemas de aplicação do produto misto na Matemática (Volume do Paralelepípedo).

Metodologia:

A atividade define o produto misto de três vetores algebricamente e exemplifica o seu cálculo com valores numéricos e propriedades do determinante envolvido nesse produto. Na sequência, leva o aluno a verificar que o módulo do produto misto de três vetores não coplanares representa, geometricamente, o volume do paralelepípedo de arestas determinadas por esses vetores e propõe que os estudantes calculem o volume de um paralelepípedo determinado por três vetores dados.

Por fim, apresenta a relação do resultado do produto misto com a coplanaridade dos vetores envolvidos na questão.

O ***software*** Winplot

Nas atividades cinco e seis, utilizamos o *software* computacional Winplot na resolução de algumas questões.

O *software* Winplot foi desenvolvido pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy, nos Estados Unidos, por volta de 1985, e traduzido para o português em 2001 pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus.

É um *software* de domínio público, que permite o traçado de gráficos em duas ou três dimensões, a partir de equações matemáticas. Apresenta uma grande quantidade de ferramentas que permitem ao usuário trabalhar numa dinâmica de rotação e translação de figuras, facilitando a visualização geométrica em espaços bidimensionais e tridimensionais.

Atividade 5: Reta – Uma aplicação do produto de um escalar por um vetor

Objetivos:

- Determinar a equação vetorial de uma reta no espaço.
- Determinar as equações paramétricas de uma reta no espaço.
- Verificar que a equação da reta no espaço é o resultado do produto de um escalar por um vetor.
- Plotar a reta no Winplot, para melhor visualização no espaço.
- Verificar a condição de paralelismo de duas ou mais retas no espaço.
- Resolver problemas de aplicação do produto escalar por vetor na Matemática: retas no espaço.
- Resolver problemas de aplicação do produto escalar por vetor na Física: posição de uma partícula no espaço.

Metodologia:

Essa atividade constituiu do estudo da reta no espaço como uma aplicação do produto de um escalar por um vetor. Além das mídias lápis e papel, foi utilizado o *software* computacional Winplot para facilitar a compreensão de alguns itens.

Inicialmente, os estudantes foram levados a interpretar geometricamente a equação $P = A + t\vec{v}$ como a equação de uma reta no espaço. Em seguida, foram apresentadas as equações vetorial e paramétricas dessa reta. Com a construção de algumas retas no Winplot, os alunos visualizaram a posição da reta em relação ao seu vetor diretor e verificaram a relação existente entre retas paralelas e suas equações.

Por fim, é trabalhado um exemplo de aplicação na Física, em que é explorada a posição de uma partícula no espaço. Com uma construção no Winplot, é possível visualizar a trajetória dessa partícula.

Atividade 6: Plano – Uma aplicação do produto escalar

Objetivos:

- Determinar a equação geral de um plano.
- Verificar que a equação geral do plano é o resultado do produto escalar de dois vetores ortogonais.
- Plotar o plano e o vetor normal ao plano no Winplot, para melhor visualização no espaço.
- Verificar a condição de paralelismo de dois ou mais planos no espaço.
- Verificar a condição de paralelismo entre um plano e os eixos coordenados.
- Verificar a condição de paralelismo entre um plano e os planos coordenados.

Metodologia:

Essa atividade constituiu do estudo do plano no espaço como uma aplicação do produto escalar. Além das mídias lápis e papel, utilizou o *software* computacional Winplot na resolução de algumas questões.

Primeiramente, foi apresentada a dedução da equação geral do plano e um exemplo numérico de como encontrar essa equação dados um ponto e um vetor normal a esse plano. Na sequência, a partir da equação encontrada, os alunos plotaram o plano e o vetor normal no Winplot, o que permitiu a visualização dos mesmos no espaço e a verificação da ortogonalidade entre eles.

Em seguida, a atividade trabalhou a equação e a visualização de planos paralelos aos eixos e planos coordenados.

5 APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Utilizamos na nossa pesquisa a abordagem qualitativa com a observação participante. Dessa forma, a pesquisadora expôs para o grupo pesquisado, desde o início da aplicação das atividades, os objetivos do estudo.

Na observação participante, o investigador "introduz-se no mundo das pessoas que pretende estudar, tenta conhecê-las, dar-se a conhecer e ganhar a sua confiança, elaborando um registro escrito e sistemático de tudo aquilo que ouve e observa." (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16).

Segundo Lüdke e André (1986), a observação ocupa um lugar privilegiado nas pesquisas educacionais. Para as autoras, se a observação é associada a outros métodos de coleta de dados, "ela possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado." (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 26).

Para tratar os dados coletados na aplicação das atividades, utilizamos a análise de erros como metodologia de investigação e avaliação. (CURY, 2007).

Cury, Bisognin e Bisognin (2012) afirmam que, como metodologia de investigação, a análise da produção escrita de estudantes, após serem analisadas, exploradas e tratados os seus resultados, fornece informações que nos permitem identificar as causas dos erros dos alunos.

Dessa forma, inicialmente, as atividades foram corrigidas. Num segundo momento, foi feita a exploração do material, separando-o em relação às respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e aquelas sem resposta. Por fim, as respostas incorretas foram analisadas e foi feito um tratamento dos resultados. Criamos uma categorização dos erros cometidos pelos estudantes como sujeitos da pesquisa.

Elencamos, nesse trabalho, quatro tipos de erros:

I) **Erros de incompreensão do enunciado:** erros relacionados a uma má interpretação do texto e dos dados presentes no enunciado da atividade.

II) **Erros do emprego de definições:** esses erros relacionam-se a definições aplicadas incorretamente.

III) **Erros operacionais:** são erros de manipulação algébrica que remetem a alguma defasagem de conteúdos ou desatenção nos passos da resolução.

IV) **Erros de compatibilidade:** esses erros estão relacionados à falta de coerência da resposta com os dados da atividade.

Chamamos atenção para o fato de que, na resolução da questão, os estudantes poderiam cometer mais de um tipo de erro. Dessa forma, a contagem final leva em conta que pode ter ocorrido mais de um erro na mesma questão.

A partir desses erros, foi feito o tratamento dos dados visando, segundo as recomendações de Borasi (1996), explorar os erros, juntamente com os estudantes, fazendo descobertas sobre os conteúdos em questão ou apenas tentar remediá-los, criando estratégias de ensino para retomar os conteúdos nos quais os alunos mostram mais dificuldades.

As atividades foram aplicadas em uma instituição particular de ensino superior localizada no município de Belo Horizonte, Minas Gerais, que conta com mais de 2.000 alunos matriculados em cursos de Engenharia Civil, Ambiental, Controle e Automação, Elétrica, Mecânica, Produção e Química.

Os sujeitos da pesquisa são alunos do primeiro período do curso de Engenharia Civil, do turno da noite, matriculados na disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear, que já conheciam a pesquisadora como professora da disciplina. Ressaltamos que o conteúdo abordado na sequência de atividades propostas faz parte da ementa da referida disciplina.

Anteriormente à aplicação das atividades, foi feito com os estudantes um estudo dos vetores abordado por meio dos tratamentos geométrico e algébrico. A abordagem geométrica possibilitou a visualização dos conceitos estudados. O tratamento algébrico mais formal e abstrato envolveu operações com vetores, vetor definido por dois pontos e módulo de um vetor.

O período de aplicação das atividades foi compreendido entre os meses de setembro/2013 e novembro/2013 e a investigação se deu em um contexto rotineiro de sala de aula, envolvendo 40 alunos organizados em duplas.

Nossos extratos usados como exemplos foram nomeados pelas iniciais dos alunos de cada dupla.

5.1 Atividade 1: estudo do produto de um escalar por um vetor

5.1.1 Questão 1: Definição do produto de um escalar por um vetor

<u>Definição</u>: Dado o vetor $\vec{u}$ = (x, y) e um número α Є R, define-se α$\vec{u}$ = (αx, αy). Portanto, para multiplicar um número real por um vetor, multiplica-se cada componente do vetor por este número.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dado o vetor $\vec{v}$ = (3, 4), faça o que se pede:

a) Calcule o módulo de $\vec{v}$.

b) Represente o vetor $\vec{v}$ no gráfico. Para isso, marque o ponto (3, 4) e trace o vetor da origem (0, 0) à extremidade (3, 4).

c) Calcule 2$\vec{v}$.

d) No mesmo gráfico do item (a), represente o vetor 2$\vec{v}$.

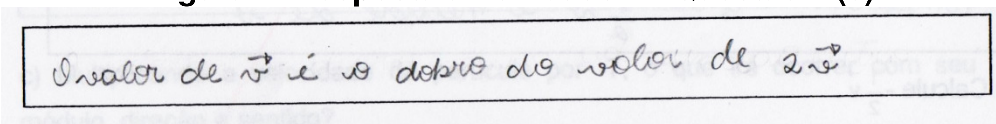
A primeira questão dessa atividade define algebricamente o produto de um escalar por um vetor e, à medida que o aluno vai desenvolvendo cada item, possibilita a determinação do módulo, da direção e do sentido do vetor obtido por essa operação.

Os quatro primeiros itens dessa questão são muito simples e, como era esperado, houve 100% de acerto.

e) O que você pode verificar ao comparar a representação de $\vec{v}$ e 2$\vec{v}$?

Com essa pergunta, pretendíamos que os estudantes comparassem a representação dos vetores $\vec{v}$ e 2$\vec{v}$, ou seja, que apresentassem uma resposta considerando, separadamente, o módulo, o sentido e a direção desses vetores, mas apenas 20% dos alunos responderam de forma totalmente correta. Todos os erros para essa questão são do tipo **erros do emprego de definições**. Verificamos que 50% dos alunos não haviam compreendido bem o que era um vetor, ou seja, não analisaram separadamente o módulo, a direção e o sentido dos vetores. Na figura 1 há um exemplo dessa afirmação.

Figura 1: Resposta à Atividade 1 - Questão 1 (e)


O valor de $\vec{v}$ é o dobro do valor de $2\vec{v}$

Fonte: Dupla JR – 2013

f) Calcule o módulo de $2\vec{v}$.

g) O que você pode verificar ao comparar o módulo de $2\vec{v}$ com o módulo de $\vec{v}$?

h) Calcule $-2\vec{v}$.

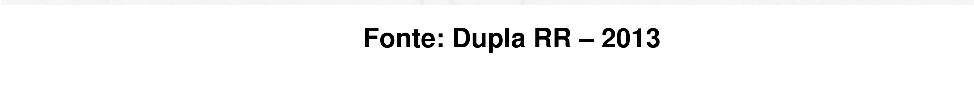
i) Novamente no mesmo gráfico do item (a), represente o vetor $-2\vec{v}$.

Nos itens f ao i também obtivemos 100% de acerto.

j) O que você pode verificar ao comparar a representação de $-2\vec{v}$ com a de $\vec{v}$? E com a representação de $2\vec{v}$?

Para essa pergunta, como no item (e), pretendíamos que o aluno observasse o módulo, a direção e o sentido dos vetores. Neste item, 45% dos grupos desprezaram a direção e o sentido dos vetores e consideraram na resposta apenas o módulo do vetor, apresentando **erro do emprego de definições**. A figura 2, a seguir, ilustra esse fato. Observamos que a dupla RR não considerou o “negativo” como uma mudança no sentido do vetor.

Figura 2: Resposta à Atividade 1 - Questão 1(j)

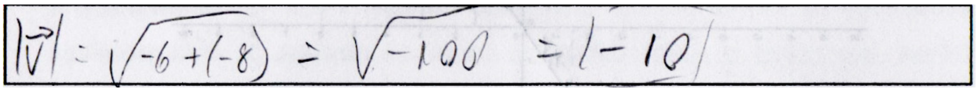

3 vezes menor do que V. com mesma modulo porem negativo

Fonte: Dupla RR – 2013

k) Calcule o módulo de $-2\vec{v}$.

Neste item, 15% das duplas cometeram um **erro operacional** no cálculo da raiz quadrada. A figura 3 ilustra o erro cometido pela dupla FJ. Podemos também classificar o erro apresentado como um **erro de compatibilidade**, já que a dupla não considerou que resposta se refere ao módulo de um vetor e esse sempre é positivo.

Figura 3: Resposta à Atividade 1 - Questão 1 (k)



Fonte: Dupla JF – 2013

l) O que você pode verificar ao comparar o módulo de -2$\vec{v}$ com o módulo de $\vec{v}$? E comparando com o módulo de 2$\vec{v}$?

m) Calcule $\frac{1}{2}\vec{v}$.

n) No mesmo gráfico do item (a), represente o vetor $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Nos itens l ao n, não tivemos erros.

o) O que você pode verificar ao comparar a representação de $\frac{1}{2}\vec{v}$ com a de $\vec{v}$?

Neste item, como nos itens semelhantes a esse (e) e (j), 50% dos alunos apresentaram o mesmo **erro do emprego de definições**, fornecendo na resposta apenas informações sobre o módulo de vetor.

p) Calcule $-\frac{1}{2}\vec{v}$.

q) No mesmo gráfico do item (a), represente o vetor $-\frac{1}{2}\vec{v}$.

Nos itens (p) e (q), obtivemos 100% de acerto.

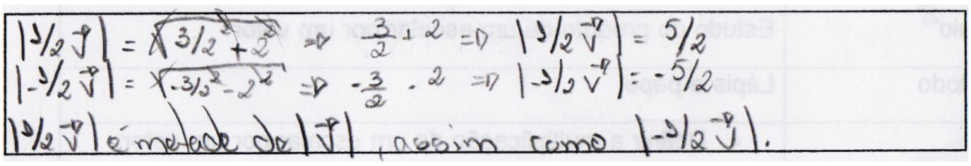
r) O que você pode verificar ao comparar a representação de $-\frac{1}{2}\vec{v}$ com a de $\vec{v}$?

Neste item, como nos itens anteriores (e), (j) e (o), em que pedimos para comparar a representação de vetores, 50% dos alunos apresentaram o mesmo **erro do emprego de definições**, desconsiderando a direção e o sentido do vetor.

s) Calcule o módulo do vetor $\frac{1}{2}\vec{v}$ e do vetor $-\frac{1}{2}\vec{v}$. Comparando com o módulo de $\vec{v}$, o que se pode verificar?

Para esse item, tivemos 10% de erro do tipo **erro operacional**. A resposta da dupla AR destacou-se pela sequência de erros operatórios, o que não era esperado para alunos do 1º período do curso de Engenharia.

Figura 4: Resposta à Atividade 1 - Questão 1 (s)



Fonte: Dupla AR – 2013

Observamos também nessa resposta um **erro de compatibilidade**, já que a dupla não considerou que a resposta, por se tratar do módulo de um vetor, deveria ser positiva.

t) O que acontece com o módulo, a direção e o sentido de $\vec{v}$, se multiplicarmos $\vec{v}$ por 3? E por -3? u) O que acontece com o módulo, a direção e o sentido de $\vec{v}$ se multiplicarmos $\vec{v}$ por $\frac{1}{3}$? E por $-\frac{1}{3}$?

Esses dois itens levavam os alunos a começar a pensar em uma generalização sobre o que ocorria com o módulo, a direção e o sentido de um vetor quando este era multiplicado por um número real. Verificamos que 20% dos alunos não responderam corretamente a esses itens, cometendo o **erro do emprego de definições,** quando trataram o vetor apenas pelo seu módulo, e que 10% dessas duplas estavam confundindo direção com sentido.

v) O que acontece com o módulo, a direção e o sentido do vetor se multiplicarmos este vetor por n Є R?

Por fim, neste item, solicitamos que o aluno mostrasse a consolidação da representação geométrica e o conceito de vetores trabalhados nos itens anteriores, dizendo o que ocorreria com o módulo, a direção e o sentido de um vetor quando esse fosse multiplicado por um número real qualquer. Houve muita dúvida neste item. A dupla JF perguntou:

- *"Professora, qual é o valor de n? Temos que saber para responder."*

Foi solicitado que voltassem ao enunciado da questão e o lessem novamente, verificando se existia um único valor para n. Então, o estudante J exclamou:

- *"Ah! Agora entendi! n pode ter qualquer valor."*

Apenas 25% das duplas responderam corretamente a esse item, separando os valores de n em positivo ou negativo. Entretanto, nenhum grupo considerou que o módulo do vetor iria aumentar se $|n| > 1$ e diminuiria se $0 < |n| < 1$.

5.1.2 Questão 2: Versor - uma aplicação do produto de um escalar por um vetor na Matemática

Definição: Um *vetor unitário* é o vetor cujo módulo é igual a 1 unidade. O **versor** de um vetor $\vec{v}$ é um *vetor unitário* com a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dado o vetor $\vec{v} = (2,1)$, faça o que se pede:

a) Verifique se o vetor $\vec{v} = (2,1)$ é unitário.

b) Represente o vetor $\vec{v}$ no gráfico.

c) Multiplique o vetor $\vec{v}$ por $\frac{1}{|\vec{v}|}$.

d) Represente o vetor $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ no mesmo gráfico do item (b).

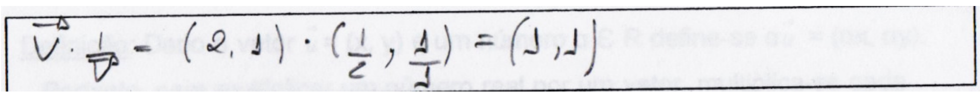
e) Calcule o módulo desse novo vetor. Podemos afirmar que ele é unitário?

f) Multiplicando o vetor $\vec{v}$ por $-\frac{1}{|\vec{v}|}$, o que podemos verificar sobre o módulo? E sobre o sentido desse novo vetor? Represente o vetor $-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ no gráfico do item (b).

Nessa questão definimos versor de um vetor e solicitamos aos estudantes que desenvolvessem uma sequência de itens que os levassem a descobrir como encontrar o versor de um vetor.

Nos cinco primeiros itens dessa questão, apenas a dupla JG cometeu um erro nos itens (c) ao (f).

Figura 5: Resposta à Atividade 1 - Questão 2 (c)



Fonte: Dupla JG – 2013

Vemos na figura 5 que, inicialmente, os alunos cometeram um erro por falta de atenção, multiplicando o vetor por $\frac{1}{\vec{v}}$ e não por $\frac{1}{|\vec{v}|}$, conforme solicitado no enunciado da questão. Em seguida, cometeram um **erro do emprego de definições** realizando uma multiplicação não definida entre vetores.

g) Observe que, no item (c), você utilizou uma estratégia para encontrar o versor do vetor $\vec{v}$. Como você pode generalizar essa estratégia?

Nesse item, houve muita dúvida sobre o enunciado da questão. Como exemplo, o grupo JG chamou a professora e perguntou:

- "*Como assim generalizar?*"

A professora respondeu, dizendo:

- "*Observe o que você fez nos itens anteriores para encontrar o versor e tente escrever o que você deverá fazer para encontrar o versor de qualquer outro vetor sempre que precisar.*"

Apenas 20% dos alunos responderam de forma correta, e o que mais chamou a atenção nesse item é que 45% dos grupos não responderam.

5.1.3 Questão 3: Uma aplicação do produto de um escalar por um vetor na Física

Conceitualização: O vetor velocidade de um objeto é a taxa de variação de seu vetor posição. A velocidade nos diz quão rapidamente, e em que direção, um objeto se desloca em determinado momento.

Fonte: KELLER, Frederick. J.; GETTYS, W. Edward.; SKOVE, Malcolm. J. **Física**: Volume 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

A velocidade de uma partícula que se move no plano xy é dada em metros por segundo e é representada por $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

a) Determine o módulo do vetor velocidade.

b) Multiplicando a velocidade da partícula por 5, o que irá ocorrer com seu módulo, direção e sentido?

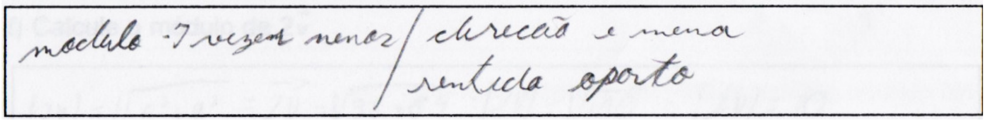
c) Multiplicando a velocidade da partícula por -7, o que irá ocorrer com seu módulo, direção e sentido?

Essa questão traz uma aplicação, na Física, do produto de um escalar por um vetor. Lembramos que os alunos dos cursos de graduação, muitas vezes, questionam sobre a aplicação dos conteúdos que estão estudando em sua profissão, e que a resolução de problemas e a interdisciplinaridade contribuem para responder a esse anseio, tornando a aprendizagem mais significativa para o estudante.

Destacamos que 40% das duplas não responderam a essa questão, justificando que o tempo foi insuficiente para resolver toda a atividade; 30% dos grupos não responderam à questão corretamente, cometendo **erro do emprego de**

definições ao desconsiderar as mudanças que ocorrem na direção e no sentido do vetor quando realizamos o seu produto por um escalar.

Figura 6: Resposta à Atividade 1 - Questão 3 (c)



modulo -7 vezes menor / direcão e mesma
sentido oposto

Fonte: Dupla RR – 2013

A figura 6 mostra-nos que a dupla RR respondeu que, multiplicando o vetor velocidade por -7, o módulo iria diminuir 7 vezes e não aumentar, como de fato ocorre.

A tabela a seguir nos dá uma visão geral sobre os tipos de erros cometidos pelos estudantes nesta atividade.

Tabela 4 – Análise de erros da Atividade 1

	Erros de incompreensão do enunciado	Erros do emprego de definições	Erros operacionais	Erros de compatibilidade
Questão 1(a)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(b)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(c)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(d)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(e)	0%	**50%**	0%	0%
Questão 1(f)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(g)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(h)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(i)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(j)	0%	**50%**	0%	0%
Questão 1(k)	0%	0%	**15%**	**15%**
Questão 1(l)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(m)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(n)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(o)	0%	**50%**	0%	0%
Questão 1(p)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(q)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(r)	0%	**50%**	0%	0%
Questão 1(s)	0%	0%	**10%**	**10%**
Questão 1(t)	0%	**20%**	0%	0%
Questão 1(u)	0%	**20%**	0%	0%
Questão 1(v)	0%	**75%**	0%	0%
Questão 2(a)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(b)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(c)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 2(d)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 2(e)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 2(f)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 2(g)	0%	**35%**	0%	0%
Questão 3(a)	0%	**30%**	0%	0%
Questão 3(b)	0%	**30%**	0%	0%
Questão 3(c)	0%	**30%**	0%	0%

Fonte: Dados da pesquisa. Elaborada pela autora

Analisando a aplicação da atividade 1, constatamos que os estudantes cometeram muitos **erros do emprego de definições**. Atribuímos esses erros ao fato de os alunos não terem compreendido bem a definição de vetor e, dessa forma, não tratarem seu módulo, sentido e direção, separadamente. Não esperávamos que houvesse tanto erro devido a essa incompreensão, já que esta atividade foi aplicada após uma aula expositiva sobre a definição de vetores e suas características.

Além disso, os estudantes acharam a atividade muito grande e repetitiva. A professora foi chamada várias vezes para perguntarem se a resposta que haviam encontrado estava certa, mostrando bastante insegurança na realização da atividade que os levava a construir aquele conhecimento e não chegava para eles pronto, como estavam acostumados.

Esse comportamento não nos surpreendeu, pois tínhamos clareza de que estávamos propondo para a turma uma metodologia de ensino bem diferente do que eles já haviam vivenciado, ou seja, um desafio, e que, no início, seria mais difícil para eles desenvolverem as atividades propostas.

Na aula seguinte à aplicação da atividade, a professora fez um resumo, no quadro, da matéria que as questões abordavam, corrigiu a atividade e trabalhou com os alunos alguns exercícios sobre o assunto, visando fixar o conteúdo e sanar as possíveis dúvidas ainda existentes.

5.2 Atividade 2: Estudo do produto escalar

5.2.1 Questão 1: Definição algébrica do produto escalar

Definição Algébrica: Chama-se **produto escalar** de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, e se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ao *número real*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dados os vetores $\vec{u} = (2, -5, -1)$ *e* $\vec{v} = (1, 2, -2)$*, faça o que se pede:*

a) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Observe que o resultado que você encontrou é um número real e não um vetor.

b) Calcule $\vec{0} \cdot \vec{u}$.

c) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

d) Calcule o módulo do vetor $\vec{u}$.

e) Calcule o valor de $|\vec{u}|^2$. Comparando o valor que você encontrou com o valor de $\vec{u} \cdot \vec{u}$, calculado no item (c), o que se pode verificar?

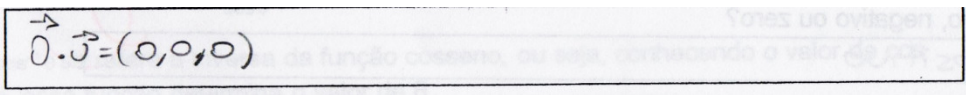
f) Generalize o resultado que você verificou no item anterior.

Essa questão define algebricamente o produto escalar de dois vetores e solicita que o aluno realize alguns cálculos para verificar essa definição e algumas das propriedades desse produto.

O item (a) é uma aplicação direta da definição algébrica e teve 100% de acerto.

No item (b), queremos que o aluno perceba que o produto escalar entre o vetor nulo e qualquer outro vetor é sempre igual a zero. Nesse item, 7% dos alunos deram a resposta do produto escalar como um vetor, cometendo um erro do **emprego de definições**. Na figura 7, verificamos o erro cometido pela dupla AA. Eles aplicaram a fórmula dada na definição algébrica de produto escalar de forma incorreta e desconsideraram o fato de que produto escalar é um número real e não um vetor.

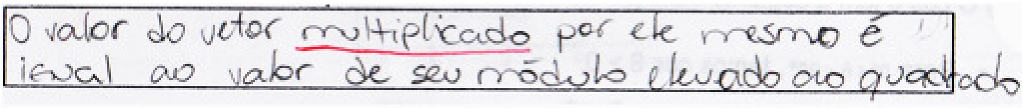
Figura 7: Resposta à Atividade 2 - Questão 1 (b)



Fonte: Dupla AA – 2013

Nos itens (c), (d) e (e), não tivemos erros. Já no item (f), em que pedimos para os estudantes generalizarem a relação de igualdade entre $\vec{u} \cdot \vec{u}$ e $|\vec{u}|^2$, tivemos 53% de erro devido à **incompreensão do enunciado**. Os estudantes apresentaram respostas relacionadas ao vetor dado $\vec{u}$ e, não a um vetor qualquer. Também verificamos 13% de **erro do emprego de definições** em relação ao produto escalar. A figura 8, a seguir, ilustra esse erro.

Figura 8: Resposta à Atividade 2 - Questão 1 (f)


O valor do vetor multiplicado por ele mesmo é igual ao valor de seu módulo elevado ao quadrado

Fonte: Dupla AA – 2013

Podemos observar que os estudantes se referem ao produto escalar, utilizando a palavra “multiplicado”, o que é um erro muito comum cometido também para referir-se aos outros produtos de vetores.

5.2.2 Questão 2: Definição geométrica do produto escalar e sua relação com a ortogonalidade de dois vetores

Definição Geométrica: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}$, com $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$.

Fonte: WINTERLE, Paulo. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dados $|\vec{u}| = 5$ *e* $|\vec{v}| = 3$*, faça o que se pede:*

a) Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$, sendo 60º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) O resultado do produto escalar que você encontrou no item anterior é positivo, negativo ou zero?

No primeiro item dessa questão, tivemos 7% de erro do tipo **erro operacional**, devido à substituição de um valor incorreto para cos 60º. No item (b), todos os grupos responderam corretamente, afirmando que o produto escalar era positivo.

c) Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$, sendo 150º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

d) O resultado do produto escalar que você encontrou no item anterior é positivo, negativo ou zero?

Nesses dois itens, tivemos 7% de erro do tipo **erro operacional** devido a os grupos utilizarem um valor incorreto para cos 150º.

e) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, *sendo* 90º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

f) O resultado do produto escalar que você encontrou no item anterior é positivo, negativo ou zero?

g) O cos θ tem a seguinte variação de sinal:

- Para $0º \leq \theta < 90º$, temos cos θ > 0;
- Para $90º < \theta \leq 180º$, temos cos θ < 0;
- Para $\theta = 90º$, temos cos θ = 0.

Dessa forma, preencha o quadro a seguir, indicando o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, conforme os valores do ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Ângulo θ	**Sinal de** $\vec{u} \cdot \vec{v}$
$0º \leq \theta < 90º$	
$90º < \theta \leq 180º$	
$\theta = 90º$	

h) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, se algum representante de $\vec{u}$ formar ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$. (WINTERLE, 2011, p. 5)

Analisando os resultados da tabela acima, escreva a condição necessária para que dois vetores sejam **ortogonais**.

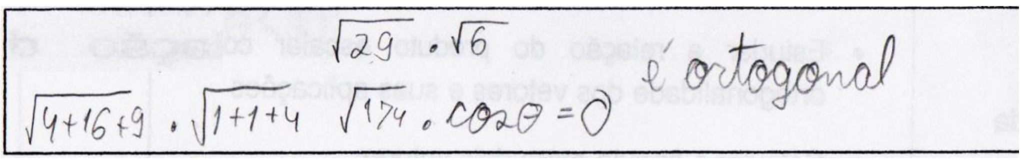
Nos itens (e), (f) e (g), tivemos 100% de acerto. Já no item (h) fomos surpreendidos com poucas respostas corretas.

O objetivo desse item era que os estudantes concluíssem que dois vetores são ortogonais se, e somente se, o produto escalar entre eles é igual a zero. Entretanto, 73% cometeram um **erro de incompreensão do enunciado** respondendo, de forma redundante, que a condição para que dois vetores sejam ortogonais, é o ângulo entre eles ser igual a 90º. Podemos também interpretar esse erro como um **erro do emprego de definições**, já que o ângulo ser igual a 90º refere-se à definição de ortogonalidade e não à condição.

i) Calcule o produto escalar dos vetores $\vec{u}$ = (-2, 4, -3) e $\vec{v}$ = (-1, 1, 2). Esses vetores são ortogonais?

Nesse item, tivemos 33% de erro, que podemos enquadrar na categoria **erro do emprego de definições**. Os estudantes utilizaram indevidamente a definição geométrica de produto escalar e não a definição algébrica, o que seria o correto devido aos dados fornecidos na questão. A figura 9, a seguir, mostra a resposta da dupla FT a esse item.

Figura 9: Resposta à Atividade 2 - Questão 2 (i)



Fonte: Dupla FT – 2013

O grupo utilizou incorretamente a fórmula $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, assumindo que o ângulo θ era igual a 90°, já que não tinha informação sobre o ângulo entre os vetores.

j) Dizemos que um *triângulo* é *retângulo* quando ele possui um *ângulo reto*. Dessa forma, para verificarmos se um triângulo de vértices A, B e C é retângulo em B, encontramos as coordenadas dos vetores com origem em B e calculamos o produto escalar desses vetores. Dados A(2, 3, 1), B(2, 1, -1) e C(2, 2, -2). verifique que o triângulo ABC é *retângulo* em B.

O item (j) traz um problema de aplicação do produto escalar na Matemática. Mesmo sendo explicado no enunciado os passos para verificar se o triângulo era retângulo, tivemos 33% de erros classificados como **erro de incompreensão do enunciado**. Os alunos não compreenderam os passos dados no enunciado da questão para mostrar que os lados BA e BC do triângulo eram ortogonais. Eles encontraram as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ e deram continuidade à resolução do exercício. Além disso, verificamos 27% de erros do tipo **erro operacional** na adição e subtração das coordenadas dos pontos A, B e C no cálculo para obter os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.

k) Verifique se o triângulo ABC com vértices em A(2, 3, -1), B(3, 4, 3) e C(1, 5, 1) é retâ*ngulo* em A.

O resultado da análise de erros desse item foi próximo ao item anterior. Tivemos 33% de **erro de incompreensão do enunciado** e, também, 33% de **erro operacional**, em sua maior parte cometido na obtenção das coordenadas dos vetores utilizados na solução.

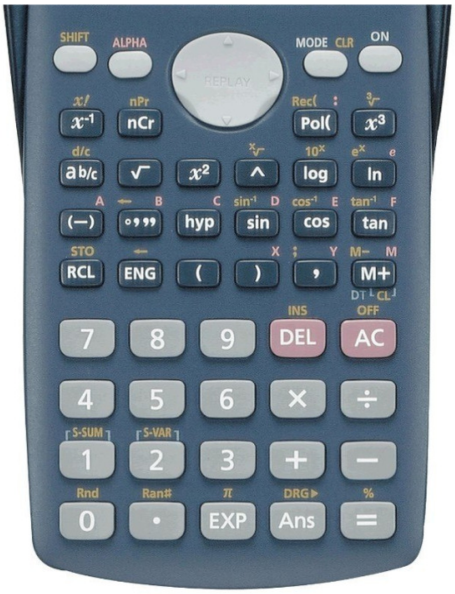
l) Calculando o produto escalar entre os vetores $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$, você verificou que esses vetores não são ortogonais, logo, o triângulo ABC não é retângulo em A.
Já que o ângulo Â não é reto, como podemos descobrir o valor desse ângulo?

Observe que podemos reescrever a igualdade $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ como $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

Logo, o **ângulo entre dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos é dado por

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)}$$

Observação: Para encontrar o valor do **ângulo**, conhecendo o seu cosseno, você pode usar uma **calculadora científica** da seguinte forma:



Normalmente, digitamos, na sequência, $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{COS}}$, o valor encontrado nos cálculo*s* e, finalmente, $\boxed{=}$.

Dessa forma, usando a fórmula acima, calcule o valor do ângulo Â.

Importante: $\cos^{-1}\theta \neq \dfrac{1}{\cos\theta}$.

$\cos^{-1}\theta$ se refere à inversa da função cosseno, ou seja, conhecendo o valor de cos θ, essa função determina o valor de θ.

O item (I) mostra para o aluno uma maneira de obtermos o valor do ângulo entre dois vetores quando esses não forem ortogonais, ou seja, quando o produto escalar entre eles for diferente de zero e, também, indica os passos para encontrar o valor do ângulo utilizando uma calculadora científica.

Os alunos ficaram bastante entusiasmados com o uso da calculadora, principalmente porque a maioria deles não sabia utilizar a função inversa do cosseno (arccos x = $\cos^{-1}$ x) e tampouco sabia o que ela representava.

As duplas que não encontraram o mesmo valor dos colegas chamaram a professora, que verificou que algumas calculadoras estavam em radianos e ensinou-lhes como mudar a opção para graus. Outros alunos ainda perceberam que a calculadora estava programada para radianos e mudaram a opção para GRADOS, achando que o símbolo GRAD representava graus. Nesse momento, a professora pediu a atenção da turma e explicou:

-“RAD representa radianos e GRAD representa grados, que é outra medida para ângulo muito utilizada em Náutica. Para que a calculadora utilize os valores em graus, devemos escolher a opção DEG, que vem do inglês *degree*, que significa graus.”

Os estudantes que tinham calculadoras diferentes do modelo apresentado no enunciado do item também tiveram um pouco de dificuldade e a professora auxiliou-os individualmente.

Verificamos 33% de **erro operacional** nesse item. Os estudantes cometeram erros elementares no cálculo dos módulos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e/ou no produto escalar desses vetores.

5.2.3 Questão 3: Trabalho: Uma aplicação na Física do produto escalar

Existem várias grandezas físicas que podem ser descritas como o produto escalar de dois vetores. Podemos citar o trabalho mecânico, a potência elétrica, a densidade de energia eletromagnética e a energia potencial gravitacional.

Como exemplo, vamos analisar o trabalho mecânico. O trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ ao longo de um determinado deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar desta força pelo deslocamento efetuado pelo corpo no qual a força está aplicada, ou seja, $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

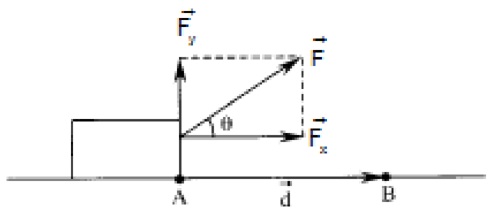


Figura 1

Na figura 1, podemos observar que a componente da força $\vec{F}$ que realiza o trabalho é $\vec{F}_x$, paralela ao deslocamento $\overrightarrow{AB} = \vec{d}$ e θ é o ângulo entre a força e o deslocamento.

Observe que $|\vec{F}_x| = |\vec{F}| \cos\theta$. Logo, podemos escrever a expressão do **trabalho**,

$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d}}$, como $\boxed{W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cos\theta}$.

A grandeza física trabalho é uma grandeza escalar em que ambas as grandezas envolvidas na sua definição, força e deslocamento, são vetores. A unidade de medida do trabalho é o Joule, denotado por J.

1J = 1N . 1m (1 Newton vezes um metro).

Um bloco está sob a ação das forças constantes $\vec{F}$, $\vec{F_a}$, $\vec{F_N}$ e $\vec{P}$, como mostra a figura 2, a seguir.

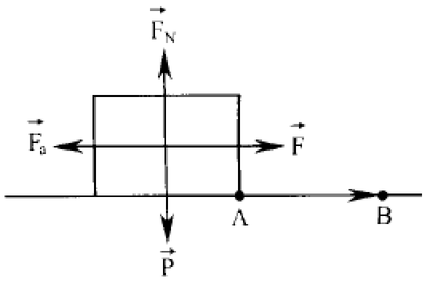


Figura 2

Sabe-se que $|\vec{F}| = 10N$, $|\vec{F_a}| = 8N$, $|\vec{F_N}| = 3N$, $|\vec{P}| = 3N$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ e $|\vec{d}| = 10m$.

Utilizando a expressão para o trabalho, $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cos\theta$, calcule o trabalho realizado para deslocar o bloco de A até B pelas forças constantes:

a) $\vec{F}$
b) $\vec{F_a}$
c) $\vec{F_N}$
d) $\vec{P}$
e) $\vec{F_R}$, resultante das quatro forças que atuam no bloco.

Fonte: Adaptado: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

A questão 3 é um problema de aplicação do produto escalar na Física. Antes de apresentar o problema, o enunciado traz a definição da grandeza física Trabalho Mecânico e mostra como calculá-la.

Nos itens (a) e (b), tivemos 33% de **erro de incompreensão do enunciado**. Verificamos que os estudantes não identificaram corretamente na figura o valor do ângulo entre a força e o deslocamento.

Os itens (c) e (d) foram respondidos corretamente por 100% das duplas.

Já no item (e) tivemos 60% de erros classificados na categoria **erro de incompreensão do enunciado.** Percebemos que muitos estudantes não identificaram corretamente o valor para a força resultante no bloco, $\vec{F}_R$.

f) O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é positivo. Por que isso ocorreu? Generalize sua resposta em função do ângulo θ.

g) O trabalho realizado pela força $\vec{F}_a$ é negativo. Por que isso ocorreu? Generalize sua resposta em função do ângulo θ.

h) O trabalho realizado pelas forças $\vec{F}_N$ e $\vec{P}$ é nulo. Por que isso ocorreu? Generalize sua resposta em função do ângulo θ.

Observe que o trabalho, como é definido, não corresponde ao termo coloquial do termo e isso pode enganar. Uma pessoa que segure um objeto pesado no ar, em repouso, pode estar trabalhando duro no sentido fisiológico, mas, do ponto de vista da Física, não está realizando nenhum trabalho no objeto, já que a força aplicada não causa nenhum deslocamento nesse objeto.

Fonte: Texto e questão adaptados dos livros:

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

RESNICK, R., HALLIDAY, D. e KRANE, K. S. **Física 1**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1992.

Nos itens (f), (g) e (h), não tivemos erros.

A tabela 5, a seguir, possibilita que tenhamos maior clareza sobre os tipos de erros ocorridos em cada questão dessa atividade:

Tabela 5 – Análise de erros da Atividade 2

	Erros de incompreensão do enunciado	Erros do emprego de definições	Erros operacionais	Erros de compatibilidade
Questão 1(a)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(b)	0%	**7%**	0%	0%
Questão 1(c)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(d)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(e)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(f)	**53%**	**13%**	0%	0%
Questão 2(a)	0%	0%	**7%**	0%
Questão 2(b)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(c)	0%	0%	**7%**	0%
Questão 2(d)	0%	0%	**7%**	0%
Questão 2(e)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(f)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(g)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(h)	**73%**	**73%**	0%	0%
Questão 2(i)	0%	**33%**	0%	0%
Questão 2(j)	**33%**	0%	**27%**	0%
Questão 2(k)	**33%**	0%	**33%**	0%
Questão 2(l)	0%	0%	**33%**	0%
Questão 3(a)	**33%**	0%	0%	0%
Questão 3(b)	**33%**	0%	0%	0%
Questão 3(c)	0%	0%	0%	0%
Questão 3(d)	0%	0%	0%	0%
Questão 3(e)	**60%**	0%	0%	0%
Questão 3(f)	0%	0%	0%	0%
Questão 3(g)	0%	0%	0%	0%
Questão 3(h)	0%	0%	0%	0%

Fonte: Dados da pesquisa. Elaborada pela autora

Podemos perceber que muitos erros foram classificados como **erro de incompreensão do enunciado**, mostrando que vários alunos não souberam interpretar de forma correta o comando do item e identificar no enunciado os dados necessários para a sua solução.

Elaboramos essa atividade para ser realizada em duas aulas de 50 minutos, entretanto, nesse tempo, os estudantes tinham respondido a apenas metade das questões. Sendo assim, a professora recolheu a atividade e deu sequência a elas nas próximas aulas. Ao todo, foram utilizadas 4 aulas de 50 minutos na aplicação dessa atividade.

Após o término da realização da atividade, foi feito, em uma aula expositiva, um resumo da matéria presente na atividade e a correção das questões propostas.

5.3 Atividade 3: Estudo do produto vetorial

5.3.1 Questão 1: Definição do produto vetorial

<u>Definição</u>: Chama-se **produto vetorial** de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, tomados nesta ordem, e se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao *vetor*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Observe que o produto vetorial de dois vetores é obtido pelo cálculo de um determinante de ordem 3.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dados os vetores $\vec{u} = (5,4,3)$ *e* $\vec{v} = (1,2,-1)$, *faça o que se pede:*

a) Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

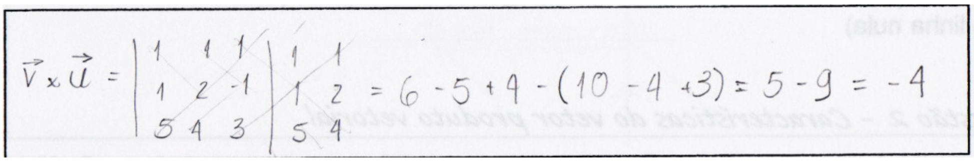
Observe que o resultado que você encontrou é um vetor.

b) Calcule $\vec{v} \times \vec{u}$.

A primeira questão dessa atividade define o produto vetorial entre dois vetores e aborda algumas propriedades do vetor resultante desse produto.

Nos dois primeiros itens dessa questão, tivemos 5% de erros que classificamos como **erro do emprego de definições**. Os alunos utilizaram a definição para produto vetorial incorretamente. A figura 10, seguinte, ilustra esse erro.

Figura 10: Resposta à Atividade 3 - Questão 1 (b)



$$\vec{V} \times \vec{U} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{matrix} = 6 - 5 + 4 - (10 - 4 + 3) = 5 - 9 = -4$$

Fonte: Dupla LG – 2013

Podemos observar na figura 10 que a dupla LG utilizou, no determinante, o valor 1 no lugar dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, mostrando que não compreendeu corretamente a definição do produto vetorial.

c) Compare o resultado de $\vec{u} \times \vec{v}$ com o de $\vec{v} \times \vec{u}$, calculado nos itens (a) e (b). O resultado obtido foi o mesmo? O que podemos afirmar sobre o sentido desses dois vetores?

d) Calcule o módulo dos vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$. O que podemos afirmar sobre o módulo desses vetores?

Você observou que $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$, ou seja, os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ são opostos. Isso sempre ocorre, já que, no procedimento de cálculo, há a troca da posição de duas linhas no determinante, o que implica uma troca de sinal. Assim, o produto vetorial não é comutativo (ao contrário do produto escalar, sendo $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$). **Logo, a ordem dos fatores é importante, pois altera o resultado.**

No item (c), não houve erro. Já no item (d) tivemos 10% de **erro operacional** devido a erros de adição e subtração cometidos no cálculo do módulo dos vetores.

e) Calcule $3\vec{u}$.

f) Agora calcule $\vec{u} \times 3\vec{u}$.

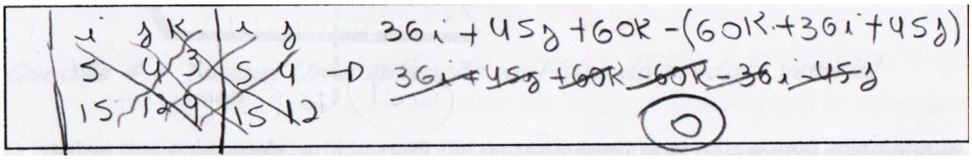
O resultado que você encontrou no item acima deve ter sido igual a $\vec{0}$. Isso já era esperado, já que $\vec{u} // 3\vec{v}$ e, neste caso, temos duas linhas com elementos proporcionais no determinante. Considerando as propriedades dos determinantes também ocorre:

$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ (determinante com duas linhas iguais) e $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$ (determinante com uma linha nula).

No item (e), 100% das duplas responderam corretamente.

No item (f), tivemos 80% de erros do tipo **erro do emprego de definições**. Todos os erros foram semelhantes ao ilustrado na figura 11, em que a dupla GC considerou o resultado do produto vetorial como um número e não como um vetor.

Figura 11: Resposta à Atividade 3 - Questão 1 (f)



Fonte: Dupla GC – 2013

5.3.2 Questão 2: Características do vetor produto vetorial

1. Direção do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$

Dados $\vec{u} = (2,-1,3)$ *e* $\vec{v} = (1,-2,1)$*, faça o que se pede:*

a) Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

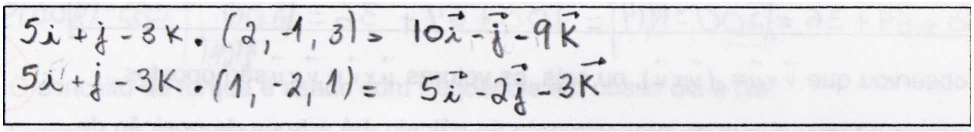
A questão 2 aborda as características do vetor produto vetorial: módulo, direção e sentido.

No primeiro item, sobre a direção do vetor, tivemos 5% de **erro do emprego de definições,** cometidos pelo cálculo do produto escalar no lugar do produto vetorial, como foi solicitado, e 10% de **erro operacional** ocorridos no cálculo do determinante.

b) Calcule $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}$ *e* $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$.

Nosso objetivo com esse item era que os alunos percebessem que o produto escalar do vetor produto vetorial com os vetores que lhe deram origem é igual a zero. Constatamos 55% de erros da categoria **erro do emprego de definições**. A figura 12, a seguir, ilustra esse erro.

Figura 12 – Resposta à Atividade 3 - Questão 2(1b)



$5i + j - 3k \cdot (2, 1, 3) = 10\vec{i} - \vec{j} - 9\vec{k}$

$5i + j - 3k \cdot (1, -2, 1) = 5\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

Fonte: Dupla LS – 2013

A figura acima mostra-nos um erro muito frequente apresentado pelos alunos que não têm bem estabelecidas as definições de produto escalar e produto vetorial. Podemos observar que a dupla LS calcula o produto escalar, conforme foi solicitado no comando do exercício, mas considera que o resultado é um vetor.

c) Tendo em vista que dois vetores são ortogonais quando o produto escalar deles é zero, o que se pode concluir sobre a direção do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$?

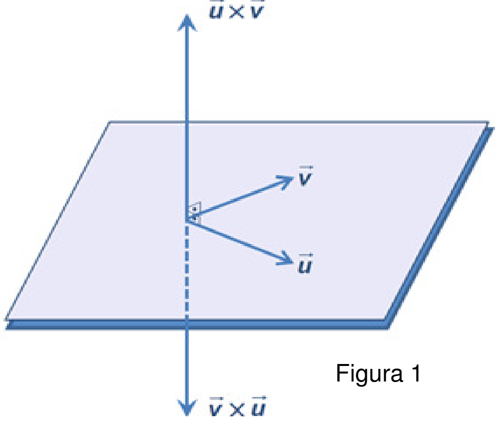


Figura 1

Dando sequência ao item anterior, no qual verificamos que o produto escalar do vetor produto vetorial com os vetores que lhe deram origem é igual a zero, esse item visa levar o estudante a concluir que o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A figura foi apresentada para facilitar a visualização da posição dos vetores, entretanto vários alunos não souberam interpretá-la corretamente. Verificamos que 25% das duplas não responderam a esse item e 40% cometeram erros do tipo **erro**

de incompreensão do enunciado apresentando respostas como "são contrárias" e "quando o ângulo de $\vec{u}$, $\vec{v}$ é 90º".

d) Aplicando a conclusão a que você chegou no item acima, determine um vetor que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (4,-2,3)$ *e* $\vec{v} = (1,6,2)$.

Nesse item, solicitamos que os estudantes encontrassem um vetor ortogonal a $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, aplicando o que foi verificado no item anterior.

Constatamos que 40% das duplas não responderam a essa questão e 5% de erros na categoria **erro operacional**, cometidos por erros elementares no cálculo do determinante.

Dessa forma, percebemos que mais da metade dos estudantes não conseguiu, apenas com essa sequência de itens, obter o conhecimento almejado sobre a direção do vetor produto vetorial.

Na aula, após a realização dessa atividade, visando facilitar a compreensão dos alunos sobre a direção do vetor produto vetorial, a professora concretizou a figura apresentada no item c utilizando canetas no lugar dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{u} x \vec{v}$ e um caderno como sendo o plano π que contém os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$. Com essa ilustração, os alunos compreenderam melhor a figura apresentada na atividade.

2. Sentido do vetor $\vec{u} x \vec{v}$ a) Calcule $\vec{i}\ x\ \vec{j}$**.**   b) Represente o vetor que você encontrou no item anterior graficamente.

Nos itens que seguem, queremos estudar o sentido do vetor produto vetorial. Para isso, pedimos aos alunos que calculassem o produto vetorial dos vetores $\vec{i}$ *e* $\vec{j}$. Muitos alunos não sabiam quais são as coordenadas desses vetores, então a professora explicou individualmente, para as duplas que solicitaram auxílio, o que significavam esses vetores. Com a explicação da professora, todas as duplas resolveram esse item e verificamos apenas 5% de **erro operacional** no cálculo do determinante. No item (b), tivemos 5% de **erro de compatibilidade** na representação do vetor $\vec{i} \times \vec{j}$**.**

c) Calcule $\vec{j} \times \vec{i}$**.**

d) Represente o vetor que você encontrou no item anterior no mesmo gráfico do item (b).

e) Calcule $\vec{i} \times \vec{k}$ e represente-o no mesmo gráfico do item (b).

Os itens (c) e (e) também exploram o cálculo do produto vetorial entre os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ e a representação gráfica dos vetores calculados. Tivemos 10% de **erro operacional** no cálculo dos determinantes nos itens (c) e (e), que acarretaram 10% de erro na representação gráfica dos vetores.

f) Pensando nos resultados que você encontrou nos itens anteriores, complete o quadro abaixo. Observe que **não** é necessário realizar os cálculos para definirmos o resultado.

Produto	**Resultado**
$\vec{k} \times \vec{i}$	
$\vec{j} \times \vec{k}$	
$\vec{k} \times \vec{j}$	

Nesse item, pedimos aos alunos que, sem fazer cálculos, determinassem o resultado do produto vetorial entre dois dos vetores da base canônica, conforme apresentado na tabela da questão. Constatamos que 20% dos estudantes realizaram o cálculo para depois preencherem a tabela, demonstrando que não compreenderam a relação cíclica existente entre o produto vetorial dos vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Observamos 10% de **erro do emprego de definições** nos resultados.

3. Módulo do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, então

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Dados, $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 4$, calcule $|\vec{u} \times \vec{v}|$ sendo 30º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Esse item apresenta uma maneira de calcularmos o módulo do vetor produto vetorial e solicita que o aluno aplique a fórmula com valores numéricos e, como já era esperado, 100% das duplas resolveram corretamente.

5.3.3 Questão 3: Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial

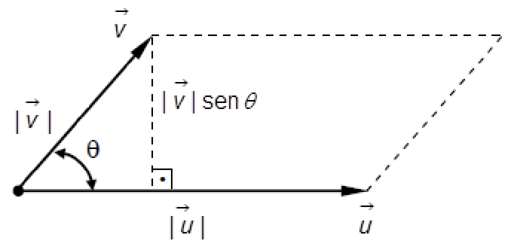


Figura 2

Observe o paralelogramo acima, determinado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
A medida de sua base é $|\vec{u}|$ e a medida de sua altura é $|\vec{v}|$sen θ.

A **área** A desse **paralelogramo** é calculada pela fórmula

$\boxed{\text{A = medida da base x medida da altura}}$, ou seja, $\boxed{A = |\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta}$.

Comparando esse resultado com o módulo do produto vetorial, $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$sen θ,

Pode-se concluir que $\boxed{A = |\vec{u} \times \vec{v}|}$

Podemos então afirmar que ***a área do paralelogramo definido pelos vetores*** $\vec{u}$ ***e*** $\vec{v}$ ***é numericamente igual ao módulo do vetor*** $\vec{u} \times \vec{v}$.

a) A figura a seguir mostra um paralelogramo de vértices A, B, C e D.

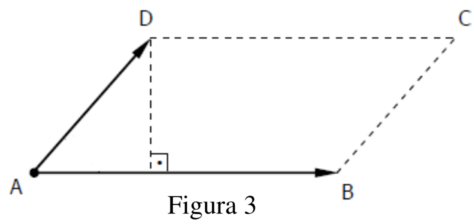


Figura 3

Dados A(1, 2, -1), B(2, 3, 1), C(1, 1, -1) e D(3, 2, -2), calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Nessa questão, o estudante é levado a concluir que o valor numérico encontrado ao calcularmos o módulo do vetor produto vetorial é igual à área do paralelogramo definido por esses vetores.

O item (a) solicita que os alunos calculem a área do paralelogramo de vértices A, B, C e D. Durante a resolução desse item, percebemos que alguns alunos estavam tentando realizar o cálculo utilizando a equação $A = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\,\theta$, sem levar em consideração quais eram os dados fornecidos no enunciado. A dupla FT chamou a professora e argumentou:

- "Está faltando o valor do ângulo θ. Assim não tem como calcular."

A professora solicitou que eles voltassem ao enunciado da questão e observassem se havia outra forma de calcular a área do paralelogramo apenas com os dados fornecidos no problema. Logo, eles continuaram:

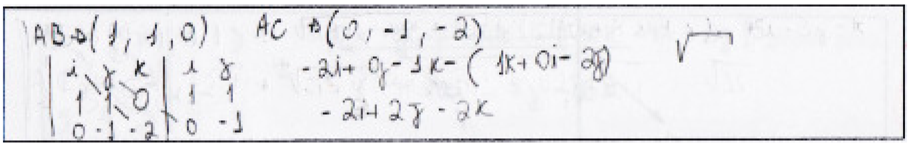
- É só fazer o determinante e pronto? Mas aí não vai dar um número."

Então a professora leu o enunciado junto com eles e explicou que era necessário calcular o módulo do determinante.

Verificamos 15% de **erro operacional** na obtenção das coordenadas dos vetores e 10% de erro de **incompreensão do enunciado** nesse item.

A figura 13, a seguir, mostra um erro operacional cometido pela dupla ML. Verificamos que eles cometeram um erro elementar ao obter as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AD}$ e também no cálculo do determinante $\overrightarrow{AB}$ *x* $\overrightarrow{AD}$*,* além de não concluir a solução com o cálculo do módulo do vetor encontrado por eles.

Figura 13 – Resposta à Atividade 3 - Questão 3(a)



Fonte: Dupla ML – 2013

b) Na figura 3, trace a diagonal BD do paralelogramo. Dessa forma, você dividiu o paralelogramo em duas figuras iguais. Que figuras são essas? Qual é a área de cada uma dessas figuras?

Esse item permite ao aluno verificar que podemos dividir um paralelogramo em dois triângulos iguais e, consequentemente, a área de cada triângulo será a metade da área do paralelogramo. Nesse item, tivemos 15% de **erro operacional** consequentes do erro no cálculo da área do paralelogramo no item anterior.

c) Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, -1,0) e C(4, 2, -2), faça o que se pede:
c1) Calcule a área do triângulo ABC.
c2) Da geometria plana, sabemos que a **área de um triângulo** é dada por $A = \frac{(\text{base})\text{x}(\text{altura})}{2}$. Dessa forma, calcule a altura do triângulo relativa ao vértice C.

Essa questão é uma aplicação numérica do cálculo da área de um triângulo com o produto vetorial. No item (c1), observamos 10% de **erro operacional**. Já no item (c2), para nossa surpresa, tivemos 20% de erros, que classificamos na categoria **erros de incompreensão do enunciado**, ocorridos pela má interpretação dos dados apresentados no enunciado da questão, e 40% de ausência de resposta.

Dessa forma, percebemos que a maioria das duplas não conseguiu articular a fórmula $A = \frac{(\text{base})\,\text{x}(\text{altura})}{2}$ com o cálculo do módulo do produto vetorial para encontrar a altura de um triângulo.

Posteriormente à aplicação dessa atividade, a professora explicou para toda a turma a relação entre o produto vetorial e a fórmula da geometria plana no cálculo da área e da altura de um triângulo quando, então, eles afirmaram ter compreendido essa relação.

5.3.4 Questão 4 – Torque: Uma aplicação na Física do produto vetorial

O **torque** é uma grandeza física vetorial (representado por τ) e está relacionado com a possibilidade de um corpo sofrer uma torção ou alterar seu movimento de rotação.

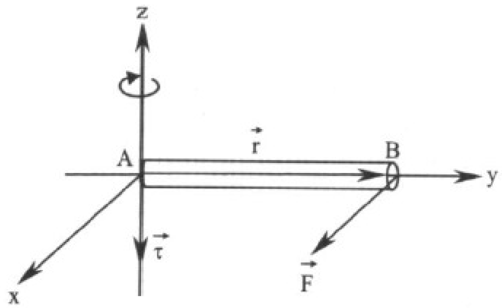


Figura 4

O **torque** pode ser calculado pela equação $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$, sendo $|\vec{r}|$ a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação, ao qual o corpo está vinculado (figura 4). A intensidade (módulo) do torque será calculado com a equação

$\boxed{|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|\operatorname{sen}\theta}$, sendo θ o ângulo entre $\vec{r}$ *e* $\vec{F}$.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

O conceito de torque é usado com frequência em nosso dia a dia.

Exemplo 1) Você sabe por que as maçanetas das portas de sua casa ficam tão distantes das dobradiças?

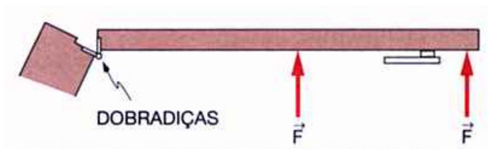


Figura 5

Imagine que você vá fechar uma porta. Se você aplicar uma força $\vec{F}$ no ponto médio da porta (figura 5), obterá um efeito de rotação menor do que se aplicar a mesma força na extremidade da porta.
Na última situação, a distância da força ao eixo de rotação é maior e, portanto, maior será o torque, ou seja, maior será o efeito de rotação que ela produz.

Exemplo 2) A figura 6 a seguir mostra um indivíduo usando uma chave de roda para soltar uma das porcas que prende a roda de um automóvel. Usando uma chave de braço mais comprido, ele aumenta a distância da força ao eixo de rotação, produzindo um torque maior.

Figura 6

Exemplos adaptados: LUZ, Antônio Máximo Ribeiro da e ÁLVARES, Beatriz Alvarenga. **Física** – Volume 1. São Paulo: Scipione, 2006.

a) Um parafuso é apertado aplicando-se uma força de 40N a uma chave de boca de 0,25m, como mostra a figura 7.

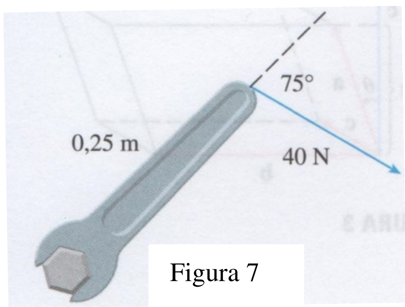


Figura 7

Determine o módulo do torque em relação ao centro do parafuso.

Fonte: Adaptado: STEWART, J. **Cálculo.** Volume 2. 7. ed. São Paulo. Pioneira-Thomson Learning, p. 732, 2013.

A questão 4 vem ao encontro dos anseios dos estudantes de graduação quanto à aplicação em sua vida daquilo que estudam em sala de aula. No enunciado, definimos e exemplificamos o torque, que é um exemplo da aplicação do produto vetorial na Física. Durante a aplicação da atividade, percebemos bastante interesse dos alunos nos exemplos apresentados. O cálculo solicitado nesse item é uma aplicação direta da fórmula $\boxed{|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|\operatorname{sen}\theta}$ e verificamos 100% de acerto.

Na tabela 6, a seguir, apresentamos um consolidado dos erros ocorridos na atividade 3.

Tabela 6 – Análise de erros da Atividade 3

	Erros de incompreensão do enunciado	**Erros do emprego de definições**	**Erros operacionais**	**Erros de compatibilidade**
Questão 1(a)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 1(b)	**5%**	0%	0%	0%
Questão 1(c)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(d)	0%	0%	**10%**	0%
Questão 1(e)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(f)	0%	**80%**	0%	0%
Questão 2(1a)	0%	**5%**	**10%**	0%
Questão 2(1b)	0%	**55%**	0%	0%
Questão 2(1c)	**40%**	0%	0%	0%
Questão 2(1d)	0%	0%	**5%**	0%
Questão 2(2a)	0%	0%	**5%**	0%
Questão 2(2b)	0%	0%	0%	**5%**
Questão 2(2c)	0%	0%	**10%**	0%
Questão 2(2d)	0%	0%	**10%**	0%
Questão 2(2e)	0%	0%	**10%**	0%
Questão 2(2f)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 3(a)	**10%**	0%	**15%**	0%
Questão 3(b)	0%	0%	**15%**	0%
Questão 3(c1)	0%	0%	**10%**	0%
Questão 3(c2)	0%	0%	**15%**	0%
Questão 4(a)	0%	0%	0%	0%

Fonte: Dados da pesquisa. Elaborada pela autora

Podemos verificar que os estudantes cometeram muitos erros do tipo operacional, em sua maioria, ocorridos no cálculo do determinante de ordem 3. Embora esses erros sejam elementares, eles acarretam grandes distorções no resultado final, chegando a influenciar drasticamente o módulo, a direção e o sentido do vetor produto vetorial.

Em alguns itens, percebemos também a dificuldade em interpretar o enunciado da questão. Esse erro é recorrente e ainda mais frequente nas questões em que temos enunciados maiores e/ou contextualizados.

A atividade foi elaborada para ser realizada em duas aulas de 50 minutos, no entanto, foi necessária mais uma aula de 50 minutos para que os alunos concluíssem a atividade.

5.4 Atividade 4: Estudo do produto misto

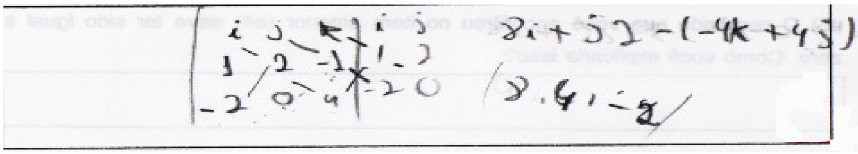
5.4.1 Questão 1: Definição e propriedades do produto misto

Dados os vetores $\vec{u} = (5,4,3)$, $\vec{v} = (1,2,-1)$ e $\vec{w} = (-2,0,4)$, faça o que se pede:
a) Calcule $\vec{v} \, x \, \vec{w}$.
b) Usando o resultado que você obteve no item anterior (a), calcule $\vec{u} \cdot (\vec{v} \, x \, \vec{w})$. O resultado que você obteve é um número ou um vetor?

Na primeira questão da atividade 4, solicitamos aos alunos que realizassem o cálculo de $\vec{u} \cdot (\vec{v} \, x \, \vec{w})$ e verificassem que o resultado encontrado é um número real para, em seguida, definirmos esse número como sendo o produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Nos itens (a), (b) e (c), os estudantes não tiveram dificuldades. Observamos apenas 10% de **erro operacional** no cálculo do determinante.

Figura 14: Resposta à Atividade 4 - Questão 1(a)



Fonte: Dupla AA – 2013

Podemos observar, na figura 14, um erro cometido pela dupla AA no cálculo do determinante $\vec{v} \, x \, \vec{w}$ o que, consequentemente, levou a um erro também no item (b).

Definição: Chama-se **produto misto** dos vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, tomados nesta ordem, ao **número real** $\vec{u} \cdot (\vec{v} \, x \, \vec{w})$.

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também é indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Pela regra de Laplace, para o cálculo de determinantes, temos:

$$\vec{v} \, x \, \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

E, sabendo que $\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, tem-se, tomando o produto escalar,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \, x \, \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Portanto,

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} \, x \, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

Dessa forma, podemos calcular o produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pelo determinante de ordem 3, acima.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

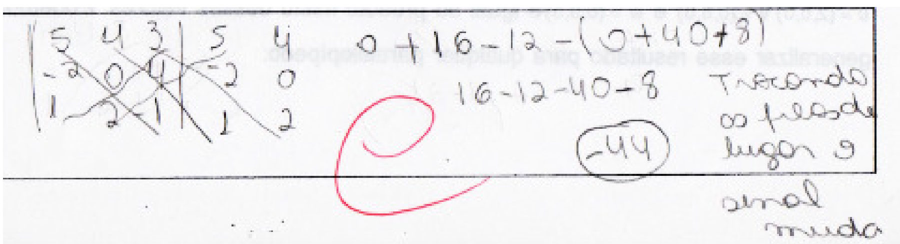
c) Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (5,4,3)$, $\vec{v} = (1,2,-1)$ e $\vec{w} = (-2,0,4)$, ou seja, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Observe que o resultado que você encontrou é um número real.

No item (c), o aluno é chamado a calcular novamente o produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, só que agora podendo utilizar o determinante $\vec{u}\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ em vez de calcular primeiro o produto vetorial $\vec{v}\,x\,\vec{w}$ e, em seguida, o produto escalar $\vec{u}\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{w})$. Verificamos 5% de **erro operacional** neste item, ocorridos no cálculo do determinante.

d) Calcule $(\vec{u},\vec{w},\vec{v})$. Comparando esse resultado com o do item anterior (a), o que podemos observar? Pensando nas propriedades dos determinantes, explique por que isso ocorreu.

Neste momento, solicitamos aos estudantes que calculassem o produto misto $(\vec{u},\vec{w},\vec{v})$, ou seja, um determinante com os mesmos vetores do item anterior, mas com a segunda linha trocada de posição com a terceira. O objetivo era que eles percebessem que o produto misto iria mudar de sinal e justificassem essa mudança pela troca de posição de duas linhas no determinante. Tivemos apenas 5% de **erro operacional**. Dos alunos que acertaram o cálculo, 100% justificaram corretamente a troca de sinal do resultado, o que já era esperado por nós, já que, antes de iniciarmos o estudo dos vetores, estudamos matrizes, determinantes e sistemas lineares, conforme ementa da disciplina.

Figura 15: Resposta à Atividade 4 - Questão 1(d)



Fonte: Dupla GB – 2013

5.4.2 Questão 2: Interpretação geométrica do módulo do produto misto

Na segunda questão dessa atividade, trabalhamos o significado geométrico do módulo do produto misto e a condição de coplanaridade de três vetores.

a) Observe o paralelepípedo na figura a seguir e calcule seu volume V utilizando a fórmula da geometria espacial: V = (área da base) x (altura).

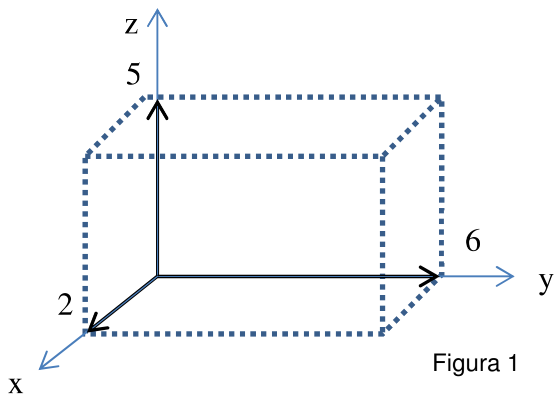


Figura 1

Nesse primeiro item, calculamos o volume do paralelepípedo representado na figura apresentada na questão, utilizando a geometria espacial: V = (área da base) x (altura).

A visualização do paralelepípedo, na figura, facilita o entendimento do aluno. Verificamos, conforme nossa expectativa, 100% de acerto nesse item.

b) Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (2,0,0)$, $\vec{v} = (0,6,0)$ e $\vec{w} = (0,0,5)$, que formam o paralelepípedo do item anterior (a).

c) Comparando o resultado que você obteve nos itens anteriores (a) e (b), o que se pode observar?

Dando sequência à questão, os alunos calculam o produto misto dos vetores que determinam o paralelepípedo e são questionados sobre os resultados encontrados nos itens (a) e (b). Dessa forma, se os cálculos forem realizados de forma correta, podemos verificar que os valores encontrados são iguais. Essa comparação leva o aluno a perceber que podemos utilizar o produto misto para calcular o volume de um paralelepípedo determinado por três vetores. Logo, o cálculo do volume de um paralelepípedo é uma aplicação na própria matemática do produto misto.

Mais uma vez observamos erros elementares no cálculo do determinante. São erros de multiplicação e soma de números inteiros, classificados como **erro operacional.**

Você verificou que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}=(2,0,0)$ $\vec{v}=(0,6,0)$ e $\vec{w}=(0,0,5)$ é igual ao produto misto desses vetores. Podemos generalizar esse resultado para qualquer paralelepípedo:

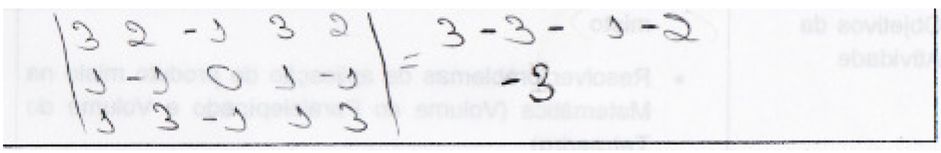
O volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual ao módulo do produto misto desses vetores.

$$\boxed{V = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\, x\, \vec{w})|}$$

d) Dados os vetores $\vec{u}=(3,2,-1)$, $\vec{v}=(1,-1,0)$ e $\vec{w}=(1,3,-1)$, calcule o volume do paralelepípedo determinado por esses vetores.

No item (d), foi solicitado aos estudantes que calculassem o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dados. Detectamos 10% de **erro operacional** neste item. Além disso, 5% de erros, que classificamos como **erro de compatibilidade**, quando os alunos encontraram como resposta, devido ao erro operacional, um número negativo para o volume do paralelepípedo.

Figura 16: Resposta à Atividade 4 - Questão 2(d)



Fonte: Dupla PM – 2013

e) Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}=(3,1,0)$, $\vec{v}=(2,-1,-1)$ e $\vec{w}=(5,0,-1)$.

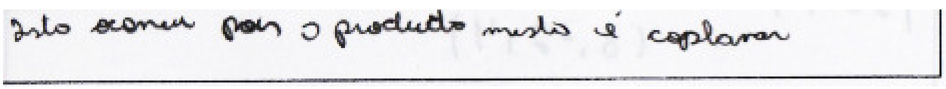
f) O resultado que você encontrou no item anterior (e) deve ter sido igual a zero. Como você explicaria isso?

Para abordar a condição de coplanaridade de três vetores, demos sequência solicitando aos alunos que calculassem um produto misto que tem como resultado zero e, em seguida, justificassem o porquê desse resultado nulo.

No item (e), não tivemos erros.

Já no item (f), nenhuma dupla respondeu conforme o nosso anseio que era de justificar o resultado nulo pelo fato de o vetor $\vec{w}$ ser combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Percebemos que 80% dos alunos leram o item seguinte da questão, que afirma que três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se o produto misto desses vetores for igual a zero, e utilizaram incorretamente essa afirmação como resposta. Elencamos esses erros na categoria **erro do emprego de definições**.

Figura 17: Resposta à Atividade 4 - Questão 2(f)



Fonte: Dupla AA – 2013

Pelo cálculo do produto misto, é possível verificar se três vetores são ou não **coplanares**, ou seja, se estão no mesmo plano. Três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são **coplanares** se o produto misto desses vetores for igual a zero.
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$ se, e somente se, os três vetores forem **coplanares**
g) Verifique se os vetores $\vec{u}=(2,1,-1)$, $\vec{v}=(1,0,-3)$ e $\vec{w}=(-2,1,4)$ são coplanares.

No item (g), que solicita ao aluno verificar se os vetores dados são coplanares, observamos 10% de **erro operacional**.

Analisando a tabela 7, a seguir, é possível visualizarmos um consolidado dos erros, por categoria, em cada item.

Tabela 7: Análise de erros da Atividade 4

	Erros de incompreensão do enunciado	Erros do emprego de definições	Erros operacionais	Erros de compatibilidade
Questão 1(a)	0%	0%	**10%**	0%
Questão 1(b)	0%	0%	**10%**	0%
Questão 1(c)	0%	0%	**5%**	0%
Questão 1(d)	0%	0%	**5%**	0%
Questão 2(a)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(b)	0%	0%	**5%**	0%
Questão 2(c)	0%	0%	**5%**	0%
Questão 2(d)	0%	0%	**10%**	**5%**
Questão 2(e)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(f)	0%	**80%**	0%	0%
Questão 2(g)	0%	0%	**10%**	0%

Fonte: Dados da pesquisa. Elaborada pela autora

Os resultados da aplicação dessa atividade foram melhores do que os apresentados nas atividades anteriores, à exceção dos erros operacionais que continuaram a ocorrer nas operações básicas com os números inteiros.

Os estudantes concluíram a atividade em uma aula de 50 minutos, conforme havíamos previsto, e mostraram-se mais dispostos a pensar sobre o conteúdo abordado na atividade de forma independente do auxílio da professora.

O aluno G disse à professora ao entregar a atividade:

-"Estou começando a entender o seu propósito com essa atividade, professora. Acho que estou aprendendo melhor. Quando fui fazer os exercícios do capítulo anterior nem precisei ler a matéria para resolver. Só de ler a pergunta já sabia o que tinha que fazer e acertei quase todos que fiz. Conferi com o B e vi que em um eu tinha errado só um sinal no determinante e no outro uma multiplicação."

Então a professora perguntou:

-"E hoje o que você achou dessa atividade?"

E ele respondeu:

"- Nossa! Muito mais fácil. Estou gostando desse seu jeito de ensinar. Sem contar que, quando a aula é só no quadro, tem dia que custo prestar atenção de tanto sono. Você sabe né, professora... Trabalhar de dia e estudar à noite não é fácil."

Dessa forma, essa fala do aluno mostra a evolução da turma no desenvolvimento das atividades e no protagonismo de sua aprendizagem.

5.5 Atividade 5: Reta – uma aplicação do produto de um escalar por um vetor

5.5.1 Questão 1: Equação da reta no espaço

Considere o ponto P(x, y, z) genérico, A(x_1, y_1, z_1) um ponto qualquer dado e um vetor não nulo $\vec{v}$ = (a, b, c). O Vetor $\overrightarrow{AP}$ é **paralelo** ao vetor $\vec{v}$ se, e somente se,

$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \rightarrow P - A = t\vec{v}$ ou $P = A + t\vec{v}$, para t real.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

---

1. Dado um ponto A(-2, 1, 1) e um vetor $\vec{v}$ = (1, -3, 2), faça o que se pede:

a) Com base na fórmula apresentada acima, construa uma tabela com os pontos P para alguns valores de t.

t	**P(x, y, z)**

b) Agora, vamos utilizar o *software* Winplot para marcar os pontos P que você obteve na tabela acima.

Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim.

Utilize EQUAÇÃO → PONTO → CARTESIANO e digite, nos campos de entrada x, y e z, as coordenadas do 1º ponto que você obteve na tabela. Para melhor visualização, selecione a opção SÓLIDO.

Na mesma janela do Winplot, repita os procedimentos anteriores para marcar os outros pontos da tabela.

c) Observe a figura que está sendo formada com os pontos marcados. Que figura é essa?

A questão 1 apresenta a fórmula $P = A + t\vec{v}$ e, a partir do ponto A e do vetor $\vec{v}$ dados, solicita que os estudantes preencham a tabela vista na questão, atribuindo valores numéricos para t e calculando P. Em seguida, conduz os alunos a utilizarem o *software* Winplot para plotar os pontos encontrados na tabela e verificar que está sendo formada uma reta com os pontos marcados.

Alguns alunos tiveram dificuldades para começar a preencher a tabela. Então a professora deu uma explicação geral exemplificando o uso da fórmula. Durante a execução do item (b), os estudantes que percebiam que um dos pontos plotados saía fora do alinhamento dos outros pontos chamavam a professora para verificar o que estava acontecendo. A dupla CT disse à professora:

- *“Nós achamos que tem alguma coisa errada professora. Todos os pontos apareceram na mesma linha, só o sétimo que ficou fora.”*

Então a professora respondeu:

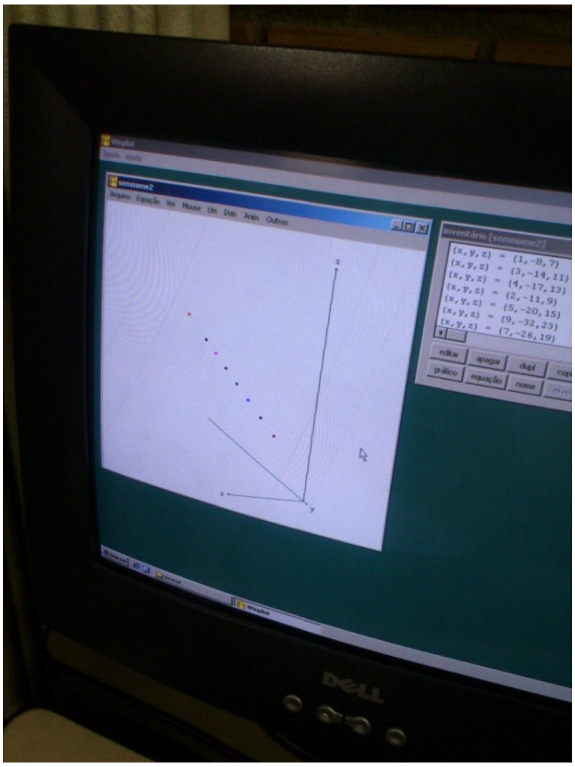
“Calculem novamente as coordenadas desse ponto e vejam se estão corretas.”

Após calcularem novamente, responderam:

- *“O valor do y estava errado, professora. Agora deu certo!”*

Verificamos que todas as duplas recalcularam as coordenadas dos pontos que estavam fora do alinhamento dos outros e responderam corretamente ao item (c).

Figura 18 – Resposta à Atividade 5 - Questão 1(b)



Fonte: Dupla CT – 2013

d) Podemos, então, interpretar geometricamente a equação $P = A + t\vec{v}$ como a equação de uma **reta**. Observe que a equação de uma **reta** é o resultado do *produto do escalar* t *pelo vetor* $\vec{v}$.

Substituindo as coordenadas dos pontos e do vetor em $P = A + t\vec{v}$, temos:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)}$$

Essa equação é chamada de **equação vetorial da reta**. O vetor $\vec{v}$ é chamado de *vetor diretor* da reta e t é denominado *parâmetro.*

Dessa forma, escreva a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto A(-2, 1, 3) e tem a direção do vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

Esse item apresenta a equação vetorial da reta no espaço e solicita que os estudantes escrevam a equação vetorial da reta que passa por A e tem a direção do vetor $\vec{v}$. Observamos 5% de **erro do emprego de definições** nesse item. Os estudantes substituíram o ponto A e o vetor em posições trocadas na equação.

e) Pela condição de igualdade podemos escrever a equação vetorial da reta da seguinte forma:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}}$$

Essas equações são chamadas de **equações paramétricas** da reta.
Escreva as equações paramétricas da reta r obtida no item (d).

Dando sequência ao item anterior, esse item mostra uma manipulação algébrica a partir da equação vetorial da reta, definindo as equações paramétricas da reta.

Observamos, neste item, 5% de **erro operacional** na manipulação algébrica da equação. A figura a seguir ilustra o erro cometido pela dupla EJ na obtenção das equações paramétricas da reta r.

f) Agora vamos utilizar o *software* Winplot para plotar o vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim.
Utilize EQUAÇÃO → SEGMENTO e digite nos campos de entrada a, b, c as coordenadas da origem do sistema cartesiano (0, 0, 0) e em d, e, f as coordenadas do vetor $\vec{v}$.
Em setas, selecione a opção p2. Selecione ok. Para que os eixos fiquem visíveis, utilize a opção VER → EIXOS →EIXOS.

Na mesma janela do Winplot, plote a reta r. Utilize EQUAÇÃO → PARAMÉTRICA, e digite a equação obtida no item (e) nos campos de entrada. Altere os valores t min: -2; t máx: 2; u min: -2; u máx: 2 para melhor visualização do gráfico.

Esse item solicita que os alunos plotem o vetor diretor da reta r, cujas equações paramétricas foram escritas no item (e) e, em seguida, plotem a reta r, na mesma janela do Winplot.

Esse item permite aos alunos visualizarem a reta r e verificarem que ela possui a mesma direção do vetor diretor. Apenas os alunos que não encontraram corretamente as equações paramétricas da reta tiveram dificuldades na construção e/ou na visualização da mesma.

Observamos 5% de erros classificados como **erro de incompreensão do enunciado** quando os alunos não compreenderam bem os passos dados para plotar o vetor e a reta no Winplot e, também, 5% de **erro de compatibilidade** nesse item, quando os alunos construíram, no Winplot, o vetor diretor e a reta com direções diferentes.

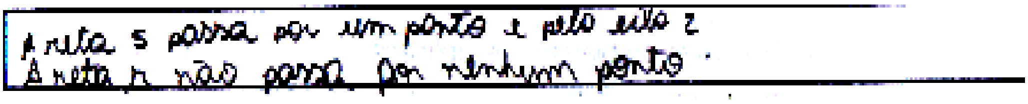
g) Na mesma janela do Winplot, plote a reta $s:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$. Para isso repita os procedimentos anteriores.

g1) Observe o gráfico das retas r e s. O que podemos afirmar sobre a posição dessas retas?

g2) Analisando as equações paramétricas das retas r e s, o que se pode concluir sobre o vetor diretor dessas retas?

No item (g), pedimos aos alunos para construir na mesma janela do Winplot a reta s. Com a visualização das duas retas juntas, esperávamos que os alunos respondessem que elas eram paralelas e que possuíam o mesmo vetor diretor. Entretanto, ficamos surpresos com algumas respostas. As figuras a seguir ilustram algumas das respostas incoerentes ao item (g1).

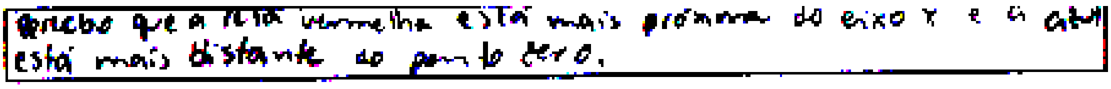
Figura 19: Resposta à Atividade 5 - Questão 1(g1)



A reta s passa por um ponto e pelo eixo z
A reta r não passa por nenhum ponto.

Fonte: Dupla PT – 2013

Figura 20 – Resposta à Atividade 5 - Questão 1(g1)



Percebo que a reta vermelha está mais próxima do eixo x e a azul
está mais distante do ponto zero.

Fonte: Dupla EP – 2013

Observamos no item (g1) 20% de erros e no item (g2) 10% de erros, todos elencados na categoria **erro de incompreensão do enunciado**.

h) Ainda na mesma janela do Winplot, plote a reta $q: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 4t \end{cases}$ e, em seguida, plote o seu vetor diretor $\vec{v_q}$ = (2, -2, 4), repetindo os procedimentos anteriores.

h1) Observe os vetores $\vec{v}$ e $\vec{v_q}$. O que podemos afirmar sobre esses vetores?

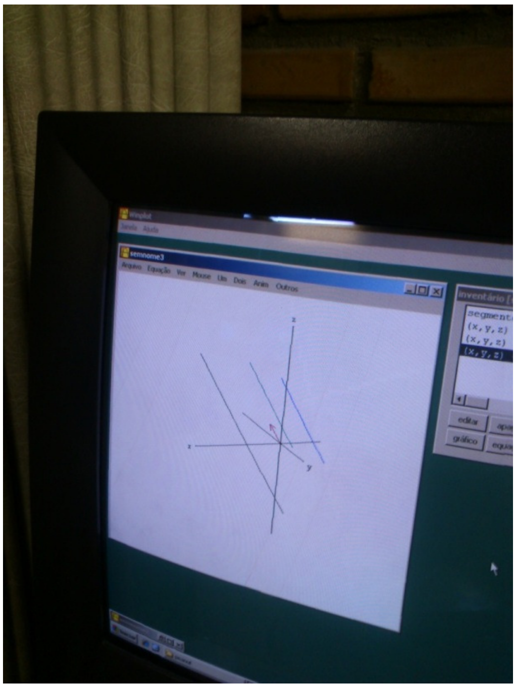
h2) Observe o gráfico das três retas r, s e q. O que podemos afirmar sobre a posição dessas retas?

Nesse item, pedimos aos alunos que construíssem, ainda na mesma janela do Winplot, uma terceira reta h e seu vetor diretor. Nosso objetivo era que eles verificassem que a reta h é paralela às retas r e s dos itens anteriores e que o vetor diretor de h é múltiplo, ou seja, possui a mesma direção dos vetores diretores das retas r e s.

Verificamos 10% de erros nos itens h1 e h2 e classificamos como **erro do emprego de definições**, pois os alunos não souberam identificar as retas plotadas como paralelas.

A figura a seguir mostra-nos a janela do Winplot com uma resposta correta ao item(h).

Figura 21: Resposta à Atividade 5 - Questão 1(h)



Fonte: Dupla CT – 2013

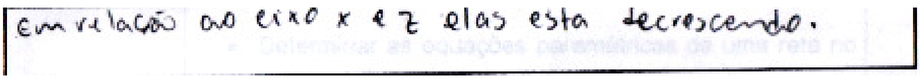
i) Analisando todos os itens anteriores, o que se pode afirmar sobre a equação de uma reta e as paralelas a mesma?

Após os estudantes plotarem as retas paralelas r, s e h e observarem a equação das mesmas, esse item chama os alunos a generalizar o que eles observaram nos itens anteriores sobre a equação de retas paralelas. Pretendíamos, com esse item, que eles concluíssem que retas paralelas possuem vetores diretores paralelos, ou seja, que suas coordenadas são proporcionais (múltiplas).

Menos da metade dos alunos responderam corretamente a esse item. Tivemos 30% de **erro de incompreensão do enunciado** e 20% de **erro do emprego de definições.**

A figura a seguir mostra a resposta da dupla EP ao item (i), evidenciando que eles não compreenderam o enunciado da questão.

Figura 22: Resposta à Atividade 5 - Questão 1(i)



Em relação ao eixo x e z elas esta decrescendo.

Fonte: Dupla EP – 2013

5.5.2 Questão 2: Aplicação em Física - Posição de uma partícula no espaço

Podemos interpretar a equação x = A + vt como o movimento descrito por um ponto sobre a reta r, com velocidade constante (vetorial) igual a v, t indicando o tempo e A a posição no instante inicial t = 0.

Uma partícula descreve um movimento retilíneo uniforme dado pela equação x = (2, -1, 4) +t(-4, 3, 2), t em segundos, s, e x em metros, m.

a) Construa no Winplot a reta sobre a qual o ponto descreve a sua trajetória.

Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim.

Utilize EQUAÇÃO → PARAMÉTRICA, e digite a equação dada nos campos de entrada. Altere os valores t min: -15; t máx: 15; u min: -15; u máx: 15 para melhor visualização do gráfico.

b) Qual a posição da partícula no instante inicial?

A segunda questão dessa atividade explora um problema de aplicação do produto escalar por vetor na Física: posição de uma partícula no espaço.

No item (a), pedimos aos alunos que construíssem a reta que descreve a trajetória da partícula , a partir da equação dada, e, no item (b), perguntamos qual é a posição inicial da partícula.

Os estudantes plotaram a reta no item (a) facilmente, no entanto, várias duplas tiveram dificuldades para responder ao item (b). A professora foi conversando individualmente com cada dupla e explicando que o instante inicial se referia ao tempo t = 0 s e, a partir daí, a maioria dos alunos respondeu corretamente a esse item. Verificamos apenas 5% de **erro operacional** no item (b), ocorridos devido a erros nas operações de adição e subtração envolvidas na questão.

Na mesma janela do Winplot, marque sobre a reta obtida no item (a) a posição inicial da partícula.

Utilize EQUAÇÃO → PONTO → CARTESIANO e digite as coordenadas do ponto que você encontrou nos campos de entrada. Para melhor visualização, selecione a opção SÓLIDO.

c) Qual a posição da partícula no instante t = 10 s?

Na mesma janela do Winplot, marque sobre a reta obtida no item (a) a posição da partícula em t = 10 s. Utilize os mesmos procedimentos anteriores.

No item (c), perguntamos aos alunos qual a posição da partícula no instante t =10 s. Após a explicação da professora no item anterior, em t = 0 s, constatamos que todas as duplas responderam corretamente a esse item.

d) Qual a distância percorrida por esta partícula até o instante t = 10 s?
Vamos visualizar no gráfico a medida do segmento que representa a distância percorrida de t = 0 s a t = 10 s.

Para isso, na mesma janela do Winplot, utilize EQUAÇÃO → SEGMENTO e digite nos campos de entrada a, b, c as coordenadas do ponto no instante inicial e em d, e, f as coordenadas do ponto em t = 10 s. Caso ache necessário, altere a cor utilizando a opção COR, para melhor visualização do segmento.

Para responder ao item (d), os alunos deveriam calcular a distância entre os pontos obtidos para t = 0 s e t = 10 s ou, ainda, encontrar as coordenadas do vetor com origem no ponto para t = 0 s e extremidade no ponto cujo t = 10 s e calcular o módulo desse vetor.

Verificamos que várias duplas não sabiam como calcular essa distância. Constatamos 20% de **erro de incompreensão do enunciado** por não compreenderem os dados apresentados no enunciado e 10% de **erro operacional** no cálculo da raiz quadrada que representa o módulo do vetor.

e) Em que instante a partícula atinge a posição x = (-18, 14, 14)?
Ainda na mesma janela do Winplot, marque sobre a reta essa nova posição da partícula.

No item (e), solicitamos aos alunos que pensassem de forma diferente. Demos as coordenadas de um ponto e perguntamos qual era o valor de t para que o ponto assumisse uma determinada posição. Detectamos 10% de erros que classificamos como **erro de incompreensão do enunciado** e 5% de **erros operacionais** elementares.

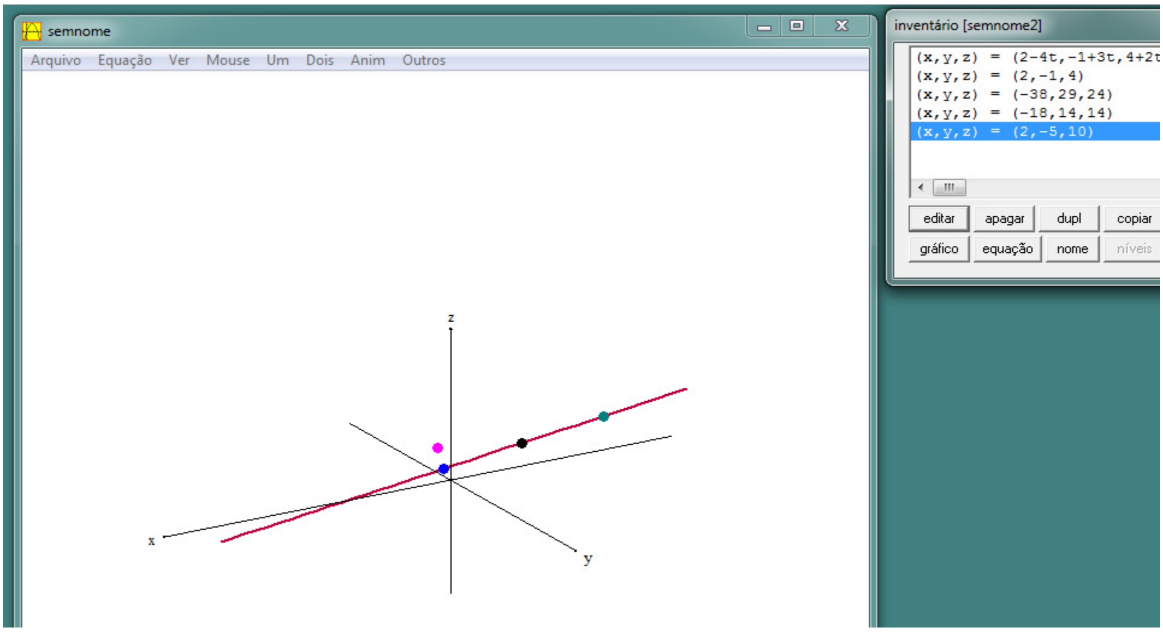
f) A partícula atinge a posição x = (2, -5, 10)?
Verifique sua resposta, marcando este ponto no mesmo gráfico dos itens anteriores.

No item anterior, perguntamos se a partícula atingiria uma posição cujo ponto faz parte de sua trajetória, ou seja, se é possível encontrar um valor para t. Já no item (f), perguntamos se a partícula atingiria uma posição que não faz parte da trajetória da partícula. Assim, não é possível encontrar um valor para t.

Os alunos tiveram bastante dificuldade para compreender essa relação entre a existência de t e uma determinada posição fazer parte ou não da trajetória da partícula. Assim, observamos nesse item, 30% de erros da categoria **erro de incompreensão do enunciado** e 10% de **erro operacional**.

A figura 23, a seguir, ilustra uma janela do Winplot com a resposta correta à questão 2. Podemos observar claramente que o ponto rosa (item f) não pertence à reta vermelha, ou seja, não faz parte da trajetória da partícula, enquanto todos os outros pontos marcados sobre a reta representam posições pertencentes a sua trajetória.

Figura 23: Resposta correta à Atividade 5 - Questão 2



Fonte: Elaborada pela pesquisadora – 2014

A tabela a seguir apresenta um consolidado dos erros observados na atividade 5. Podemos perceber que os alunos continuam cometendo erros operacionais e que tiveram dificuldades em compreender o enunciado de alguns itens.

Tabela 8: Análise de erros da Atividade 5

	Erros de incompreensão do enunciado	**Erros do emprego de definições**	**Erros operacionais**	**Erros de compatibilidade**
Questão 1(a)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(b)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(c)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(d)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 1(e)	0%	0%	**5%**	0%
Questão 1(f)	**5%**	0%	0%	**5%**
Questão 1(g)	**5%**	0%	0%	0%
Questão 1(g1)	**20%**	0%	0%	0%
Questão 1(g2)	**10%**	0%	0%	0%
Questão 1(h)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(h1)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 1(h2)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 1(i)	**30%**	**20%**	0%	0%
Questão 2(a)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(b)	0%	0%	**5%**	0%
Questão 2(c)	0%	0%	0%	0%
Questão 2(d)	**20%**	0%	0%	**10%**
Questão 2(e)	**10%**	0%	0%	**5%**
Questão 2(f)	**10%**	0%	0%	**5%**

Fonte: Dados da pesquisa. Elaborada pela autora

Essa atividade permitiu que os alunos trabalhassem com aplicações do produto de um escalar por um vetor na própria Matemática e também na Física e foi planejada para ser realizada em duas aulas de 50 minutos, mas alguns alunos não conseguiram concluí-la nesse tempo. Como o cronograma da disciplina já estava esgotando-se, não podíamos disponibilizar outra aula para os alunos que não terminaram continuarem a atividade. A professora conversou com a turma sobre essa questão e os alunos que ainda não tinham terminado pediram à professora para levar a atividade para casa e trazer concluída.

5.6 Atividade 6: Plano – Uma aplicação do produto escalar

5.6.1 Questão 1: Equação e visualização do plano

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vetor normal (ortogonal) a esse plano.

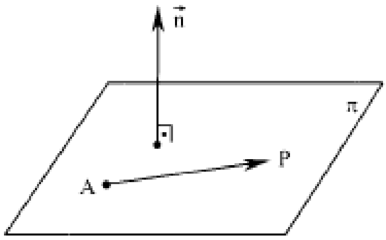


Figura 1

Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor representado em π. Então, um ponto P(x, y, z) pertence a π, se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é,

$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$ ou $(a,b,c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$ ou $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

ou, ainda

$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$, fazendo $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, obtemos

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

Esta equação é chamada **equação geral do plano** π.

Observe que os três coeficientes a, b e c dessa equação representam as coordenadas de um vetor normal ao plano.

Por exemplo, se um plano π é dado por $\pi: 2x - 3y + 5z + d = 0$, um vetor normal a esse plano é $\vec{n} = (2, -3, 5)$. Se esse plano π passa pelo ponto A(1, 1, -2), podemos determinar o valor de d da seguinte forma:

$2(1) - 3(1) + 5(-2) + d = 0 \rightarrow 2 - 3 - 10 + d = 0 \therefore d = 11$

Logo, uma **equação geral do plano** π é $2x - 3y + 5z + 11 = 0$.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dado o ponto A(-2, 1, 1) e o vetor $\vec{n} = (1, -3, 2)$, faça o que se pede:

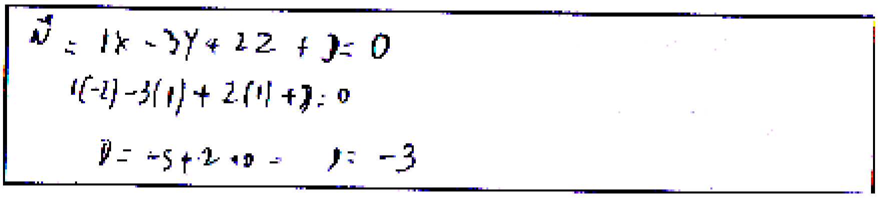
a) Obtenha a equação geral do plano π que passa por A e tem $\vec{n}$ como um vetor normal.

A sexta atividade trabalha com uma aplicação do produto escalar na própria Matemática: o plano. No enunciado da questão, calculamos o produto escalar de dois vetores ortogonais $\vec{n}$ e $\overrightarrow{AP}$ e, fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos à equação geral do plano.

No item (a), dados o ponto A e o vetor normal $\vec{n}$, solicitamos a equação geral do plano, a partir do exemplo apresentado no enunciado da questão. Verificamos que as duplas não tiveram dificuldades para resolver esse item, após analisarem o exemplo dado. Entretanto, detectamos 10% de **erro operacional** na multiplicação, adição e subtração envolvidas na questão.

A figura a seguir ilustra o erro cometido pela dupla PS ao resolver a questão. Podemos perceber que se trata de um erro elementar na resolução da equação para encontrarmos o valor de d.

Figura 24: Resposta à Atividade 6 - Questão 1(a)



Fonte: Dupla PS – 2013

b) Agora, vamos utilizar o *software* Winplot para plotar o plano que você obteve no item anterior.

Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim. Utilize EQUAÇÃO → PLANO e digite os parâmetros **a, b e c** nos campos de entrada correspondentes e as coordenadas do ponto A em **(k, m, n)**. Altere os valores t min: -4; t máx: 4; u min: -4; u máx: 4, para melhor visualização do gráfico.
Para que os eixos fiquem visíveis, utilize a opção VER → EIXOS →EIXOS.

O item (b) conduz os estudantes a plotar o plano cuja equação foi obtida no item (a). As duplas seguiram os passos indicados no enunciado e não tiveram dificuldades para construir o plano π.

Figura 25: Estudante desenvolvendo a Atividade 6 - Questão 1(b)

Fonte: Acervo da pesquisadora – 2013

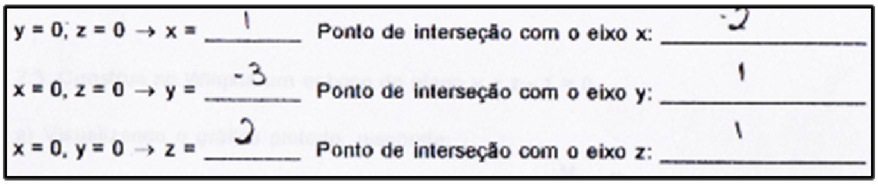
c) Visualizando o gráfico plotado, responda:
c1) Esse plano passa pela origem do sistema cartesiano?
c2) O plano intercepta que eixos?
Encontre os pontos de interseção do plano π com os eixos coordenados:
y = 0, z = 0 $\rightarrow$ x = ________ Ponto de interseção com o eixo x: _____________
x = 0, z = 0 $\rightarrow$ y = ________ Ponto de interseção com o eixo y: _____________
x = 0, y = 0 $\rightarrow$ z = ________ Ponto de interseção com o eixo z: _____________

O item (c) explora a visualização do plano construído no item anterior, levando o aluno a observar a interseção do plano com os eixos cartesianos e, em seguida, encontrar o ponto de interseção com cada um desses eixos.

Observamos 5% de erros no item (c2), que foram classificados como **erro do emprego de definições** e, também, como **erro de compatibilidade**.

Na figura 26, a seguir, podemos perceber que a dupla PS, preenche a primeira coluna com os valores das coordenadas do vetor $\vec{n}$ e a segunda coluna com as coordenadas do ponto A, demostrando que não compreendeu a definição da equação geral do plano e, além disso, apresentando um erro de compatibilidade quando indica um ponto por apenas um valor numérico e não por suas coordenadas.

Figura 26: Resposta à Atividade 6 - Questão 1(c2)



$y = 0, z = 0 \rightarrow x =$ 1	Ponto de interseção com o eixo x: -2
$x = 0, z = 0 \rightarrow y =$ -3	Ponto de interseção com o eixo y: 1
$x = 0, y = 0 \rightarrow z =$ 2	Ponto de interseção com o eixo z: 1

Fonte: Dupla PS – 2013

d) Para visualizar a ortogonalidade entre o plano π e o vetor normal $\vec{n} = (1, -3, 2)$, plote $\vec{n}$ na mesma janela do Winplot

Utilize EQUAÇÃO → SEGMENTO e digite nos campos de entrada a, b, c as coordenadas da origem do sistema cartesiano (0, 0, 0) e em d, e, f as coordenadas do vetor $\vec{n}$. Em setas, selecione a opção p2. Selecione ok.

No item (d), o aluno é direcionado a construir o vetor normal $\vec{n}$, na mesma janela do Winplot em que construiu o plano π para verificar a ortogonalidade entre eles.

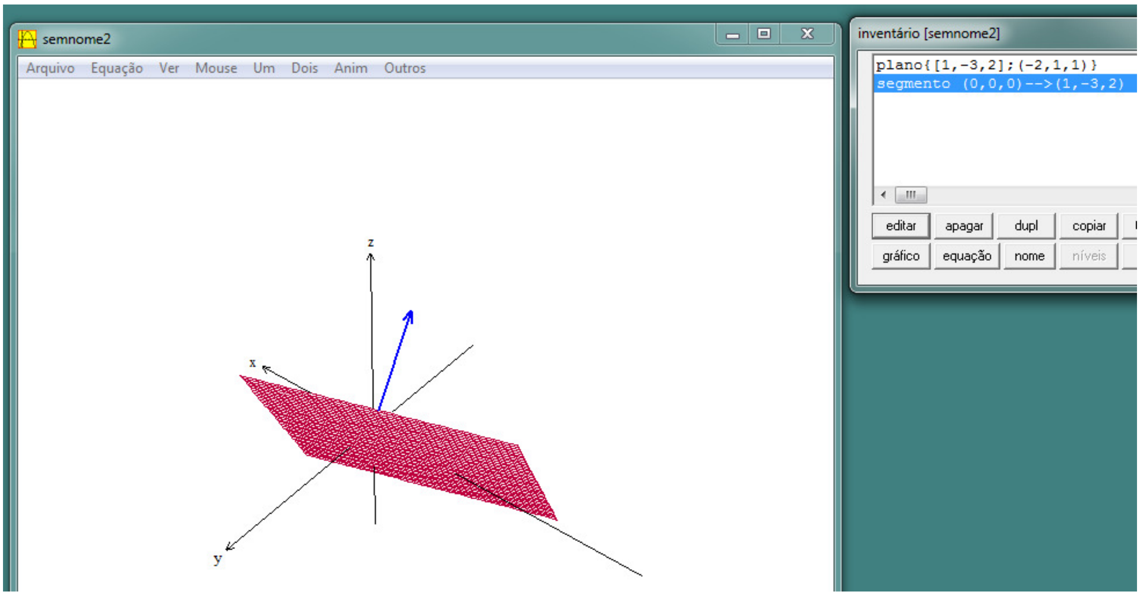
Durante a aplicação da atividade, uma dupla chamou a professora e disse:

- *"Muito legal esse programa! A gente não 'tava' entendendo direito esse negócio de vetor normal, mas agora com o desenho a gente conseguiu ver direitinho a posição do vetor e do plano."*

Então a professora respondeu:

- *"Que bom! Era esse mesmo o meu objetivo quando pedi que vocês construíssem na mesma tela o plano e o vetor normal. Visualizando fica bem mais fácil de entender, não é?"*

Figura 27: Resposta correta à Atividade 6 - Questão 1(d)



Fonte: Elaborada pela pesquisadora – 2014

e) Na mesma janela do Winplot, plote o plano $\pi_1 : -2x + 6y - 4z + 1 = 0$. Utilize EQUAÇÃO → PLANO e digite os parâmetros **a, b e c** nos campos de entrada correspondentes e as coordenadas de um ponto qualquer de π_1 em **(k, m, n)**. Altere os valores t min: -4; t máx: 4; u min: -4; u máx: 4, para melhor visualização do gráfico.

e1) Qual a posição do plano π em relação ao plano π_1?

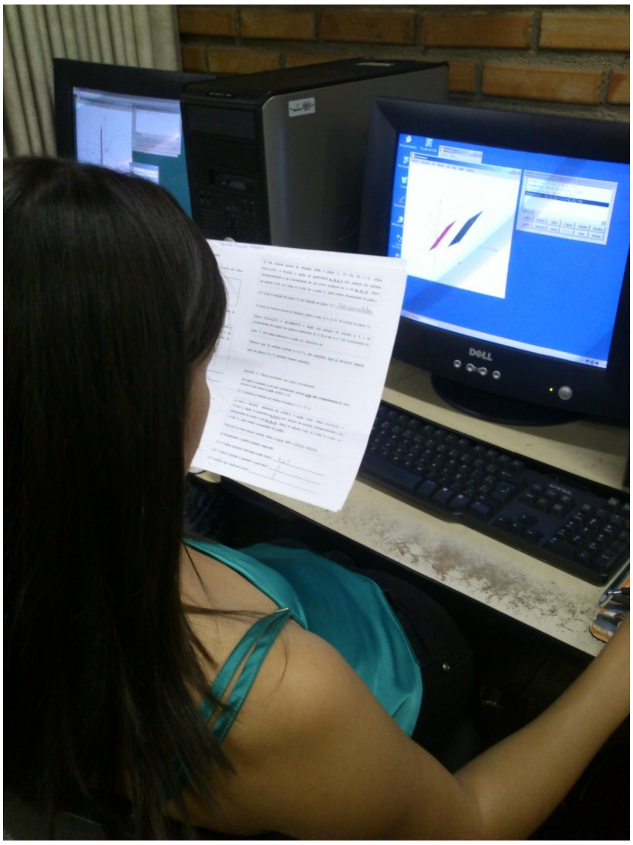
f) Ainda na mesma janela do Winplot, plote o vetor $\vec{n}_1 =$ (-2, 6, -4) normal ao plano π_1.

Utilize EQUAÇÃO → SEGMENTO e digite nos campos de entrada a, b, c as coordenadas da origem do sistema cartesiano (0, 0, 0) e em d, e, f as coordenadas do vetor $\vec{n}$. Em setas selecione a opção p2. Selecione ok.

Observe que os vetores normais a π e π_1 são paralelos, logo, já devíamos esperar que os planos π e π_1 também fossem paralelos.

Nos itens (e) e (f), respectivamente, pedimos aos alunos que construam o plano π_1 e o vetor normal $\vec{n}_1$, para que verifiquem o paralelismo entre esse plano e o plano π construído no item anterior. Não verificamos erros nesses itens.

Figura 28: Estudante desenvolvendo a Atividade 6 - Questão 1(e)



Fonte: Acervo da pesquisadora – 2013

5.6.2 Questão 2: Planos paralelos aos eixos coordenados

Um plano é paralelo a um eixo coordenado quando **uma das componentes** do vetor normal a esse plano **é nula**, sendo $d \neq 0$.

2.1. Construa no Winplot um esboço do plano $x + y - 2 = 0$.

a) Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim. Utilize EQUAÇÃO → PLANO e digite os parâmetros **a, b** e **c** nos campos de entrada correspondentes e as coordenadas de um ponto pertencente ao plano em **(k, m, n)**. Altere os valores t min: -4; t máx: 4; u min: -4; u máx: 4, para melhor visualização do gráfico.
Para que os eixos fiquem visíveis, utilize a opção VER → EIXOS →EIXOS.

b) Visualizando o gráfico plotado, responda:

b1) O plano proposto intercepta quais eixos?

b2) O plano proposto é paralelo a qual eixo?

b3) Qual(is) a(s) variáveis livres?

A segunda questão trabalha com planos paralelos aos eixos coordenados com a visualização dos mesmos. Para isso, fornecemos a equação do plano e pedimos aos alunos que construíssem esse plano no Winplot e, analisando a imagem, respondessem sobre a interseção do plano com os eixos coordenados e o paralelismo do mesmo com algum eixo ou outro plano.

Os alunos tiveram dificuldades para determinar um ponto pertencente ao plano necessário para substituir as variáveis k, m e n. Então, como era uma dúvida geral, a professora explicou para toda a turma como encontrar as coordenadas desse ponto e o que era variável livre, outra dúvida da maioria dos estudantes.

Verificamos 10% de erros do tipo **erros do emprego de definições** nesses itens, mostrando que esses alunos não compreenderam bem a visualização dos planos.

c) Plote, também, na mesma janela do Winplot, os planos:

1) $x + y + 7 = 0$

2) $x + y - 5 = 0$

c1) O que se pode observar sobre as representações gráficas desses planos?

d) Em uma nova janela do Winplot, plote os seguintes planos:

1) $2x + y - 3 = 0$

2) $x + 3y - 5 = 0$

d1) Esses planos são paralelos?

d2) Esses planos são paralelos a qual eixo?

Nos item (c) e (d), após plotar os planos indicados, os alunos deveriam perceber que todos planos eram paralelos entre si e ao eixo z. Aqui, também, observamos 10% de **erro do emprego de definições**.

2.2. Construa no Winplot um esboço do plano $x + z + 3 = 0$.
a) Visualizando o gráfico plotado, responda:
a1) O plano proposto intercepta quais eixos?
a2) O plano proposto é paralelo a qual eixo?
a3) Qual(is) a(s) variáveis livres?

2.3. Construa no Winplot um esboço do plano $y + z - 1 = 0$.
a) Visualizando o gráfico plotado, responda:
a1) O plano proposto intercepta quais eixos?
a2) O plano proposto é paralelo a qual eixo?
a3) Qual(is) a(s) variáveis livres?

As questões 2.2 e 2.3 têm os mesmos objetivos da questão 2.1, só que trabalham com planos paralelos ao eixo y e z, respectivamente. Dessa forma, apenas com a visualização dos planos dados, os alunos são questionados sobre a posição desses planos em relação aos eixos coordenados e em relação uns aos outros.

Outro fato que chamou a nossa atenção é que algumas duplas, na questão 2.3, não precisaram plotar os planos para responder sobre a posição dos mesmos. Com a construção realizada nos itens anteriores, perceberam facilmente qual seria o esboço dos planos observando apenas sua equação geral. Observamos 10% de **erro do emprego de definições**.

5.6.3 Questão 3: Planos paralelos aos planos coordenados

Um plano é paralelo a um plano coordenado quando **duas das componentes** do vetor normal a esse plano **são nulas**, sendo $d \neq 0$.

3.1. Construa no Winplot um esboço do plano $x - 3 = 0$.
a) Visualizando o gráfico plotado, responda:
a1) O plano proposto intercepta um dos eixos cartesianos. Qual deles?

a2) O plano proposto é paralelo a qual plano coordenado?

A terceira questão trata dos planos paralelos aos planos coordenados. Os estudantes constroem os planos dados no Winplot e, com sua visualização, respondem às questões relativas a sua posição em relação aos eixos e planos coordenados.

O primeiro item dessa questão explora as características dos planos paralelos ao plano coordenado YOZ. A maioria das duplas não teve dificuldades para resolver esses itens. Observamos 5% de erros elencados na categoria **erro do emprego de definições**.

3.2. Construa no Winplot um esboço do plano 2y - 4 = 0.
a) Visualizando o gráfico plotado, responda:
a1) O plano proposto intercepta um dos eixos cartesianos. Qual deles?
a2) O plano proposto é paralelo a qual plano coordenado?

3.3. Construa no Winplot um esboço do plano z + 1 = 0.
a) Visualizando o gráfico plotado, responda:
a1) O plano proposto intercepta um dos eixos cartesianos. Qual deles?
a2) O plano proposto é paralelo a qual plano coordenado?

Atividade adaptada: LAUDARES, João Bosco e MOTA, Janine Freitas. **Sequência didática de atividades** - Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando secções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o *software* Winplot. PUC-MG, 2011.

As questões 3.2 e 3.3 trabalham a posição dos planos paralelos, respectivamente, aos planos coordenados XOZ e XOY também pela visualização dos mesmos.

Os estudantes resolveram esses itens sem dificuldades e, como ocorreu na questão anterior, muitas duplas responderam a esses dois últimos itens analisando apenas a equação geral dada, ou seja, sem construir esses planos no Winplot. Consideramos essa atitude um avanço, já que demonstra que os alunos compreenderam corretamente a relação existente entre a equação do plano e o plano propriamente dito. Aqui, também, detectamos 5% de erros classificados como **erro do emprego de definições**.

A tabela a seguir apresenta um resumo dos tipos de erros cometidos em cada item da atividade 6.

Tabela 9: Análise de erros da Atividade 6

	Erros de incompreensão do enunciado	**Erros do emprego de definições**	**Erros operacionais**	**Erros de compatibilidade**
Questão 1(a)	0%	0%	**10%**	0%
Questão 1(b)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(c)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(c1)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(c2)	0%	**5%**	0%	**5%**
Questão 1(d)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(e)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(e1)	0%	0%	0%	0%
Questão 1(f)	0%	0%	0%	0%
Questão 2.1(a)	0%	0%	0%	0%
Questão 2.1(b1)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.1(b2)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.1(b3)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.1(c)	0%	0%	0%	0%
Questão 2.1(c1)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.1(d)	0%	0%	0%	0%
Questão 2.1(d1)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.1(d2)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.2(a)	0%	0%	0%	0%
Questão 2.2(a1)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.2(a2)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.2(a3)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.3(a)	0%	0%	0%	0%
Questão 2.3(a1)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.3(a2)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 2.3(a3)	0%	**10%**	0%	0%
Questão 3.1(a1)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 3.1(a2)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 3.2(a1)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 3.2(a2)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 3.3(a1)	0%	**5%**	0%	0%
Questão 3.3(a2)	0%	**5%**	0%	0%

Fonte: Dados da pesquisa. Elaborada pela autora

Podemos perceber que foram poucos os erros operacionais. Esse resultado condiz com as características das questões estudadas nessa atividade que, em sua maioria, foram apenas de construção e visualização no Winplot.

Essa atividade foi realizada em duas aulas de 50 minutos e as duplas que não conseguiram terminar nesse tempo concluíram a atividade extraclasse e, posteriormente, a entregaram para a professora.

Os estudantes mostraram-se familiarizados com o *software*, o que já era esperado, pois esse não era mais o primeiro contato com o Winplot.

A evolução dos alunos em relação à visualização dos planos e vetores foi grande. A maioria das duplas não apresentou dificuldades na identificação das características e posição de cada plano.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa realizada teve a intenção de contribuir para uma aprendizagem mais significativa do produto de vetores, por meio de uma sequência didática de atividades e o uso de um *software* computacional.

Com a revisão de literatura, procurou-se analisar a questão norteadora desta dissertação, a qual consistiu em duas etapas: a primeira, construir uma sequência de atividades; e a segunda, verificar as contribuições oferecidas pela sequência didática de atividades ao estudo do produto de vetores.

A partir da temática em estudo, elaboramos os objetivos específicos citados na introdução desta dissertação, que foram todos atingidos:

1. *Verificar em livros didáticos de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral, como é feita a abordagem metodológica do conteúdo produtos de vetores.*

Em todos os livros analisados, os autores iniciam o tratamento do produto de vetores pela definição algébrica seguida da apresentação de algumas propriedades e exercícios resolvidos como exemplos.

Nenhum dos autores explora algum fato histórico ou alguma atividade que contribua para despertar o interesse do aluno, na introdução ao tópico de vetores.

Todos os livros trazem exercícios variados que abrangem o conteúdo trabalhado, porém exploram pouco as aplicações na área do curso dos alunos – a Engenharia.

Apenas um dos autores propõe o uso de recursos tecnológicos como instrumento de aprendizagem para o estudante. Essa constatação surpreendeu-nos bastante, pois verificamos que os autores não exploraram as potencialidades da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem.

2. *Elaborar e testar uma sequência didática de atividades sobre os produtos de vetores e algumas de suas aplicações na Física e na Matemática.*

Na criação da sequência didática de atividades, seguimos as orientações de Zabala (1998), elaborando questões que levam os estudantes a analisar, questionar e conjecturar, ou seja, a desenvolver uma postura autônoma em relação a sua própria aprendizagem. Abordamos algumas aplicações dos produtos de vetores na Física e na própria Matemática, atendendo aos anseios dos estudantes de Engenharia que sempre questionam sobre o uso dos conteúdos estudados, na sua profissão.

A análise dos dados obtidos com a aplicação da sequência didática de atividades foi realizada baseada na análise de erros (CURY, 2007). Essa análise permitiu-nos categorizar os erros cometidos pelos estudantes no desenvolvimento das atividades e, dessa forma, identificar as causas dos erros dos alunos.

Com a aplicação das atividades, verificamos que alguns estudantes tiveram dificuldades em trabalhar com os vetores considerando, separadamente, seu módulo, sua direção e seu sentido. Quando foram chamados a analisar o resultado de um vetor obtido pelo produto de outros vetores, eles consideraram apenas o módulo do vetor. Dessa forma, é pré-requisito para o estudo dos produtos de vetores um estudo mais detalhado sobre a definição e as características dos vetores.

Constatamos que os alunos cometeram erros nas operações de adição, subtração, multiplicação e, principalmente, no cálculo dos determinantes envolvidos no cálculo dos produtos de vetores, mostrando a existência da defasagem de conteúdos ou desatenção nos passos da resolução.

Nas questões que envolviam aplicações dos produtos envolvidos, percebemos que alguns alunos não souberam interpretar, de forma correta, o comando da atividade e identificar, no enunciado, os dados necessários para a solução, retratando as dificuldades dos estudantes na leitura em uma atividade de Matemática.

A maioria dos estudantes respondeu corretamente a grande parte dos itens, mostrando que a sequência didática de atividades contribuiu para a aprendizagem dos produtos de vetores.

3. *Selecionar e analisar a utilização de um software matemático no desenvolvimento da sequência didática de atividades sobre retas e planos no espaço.*

Utilizamos, nas atividades de estudo de retas e planos no espaço, um *software* computacional, conforme orienta-nos Moran (2006), Masseto (2006), Borba e Penteado (2001) e outros autores estudiosos do uso da informática no processo de ensino e aprendizagem, citados nesta pesquisa.

Optamos por trabalhar com o *software* computacional Winplot, por ser um *software* de domínio público, fácil de ser utilizado e por permitir o traçado de gráficos em duas ou três dimensões, a partir de equações matemáticas.

Percebemos que os estudantes se mostraram bastante interessados na realização dessas atividades e atribuímos esse maior interesse ao uso da ferramenta informática com o programa Winplot. O envolvimento com a atividade foi tamanho que não houve dispersão dos alunos para realizar outras atividades na internet.

Os alunos não conheciam esse *software* e, mesmo assim, tiveram facilidade em utilizá-lo. Constatamos que a visualização, nessas atividades, contribuiu para o menor número de erros nas questões trabalhadas.

4. *Identificar resultados atingidos com a aplicação da sequência didática de atividades.*

A postura dos estudantes em relação à execução das atividades teve um grande ganho ao longo da aplicação das atividades. Os estudantes que, inicialmente se mostraram bastante inseguros e solicitaram o auxílio da professora por diversas vezes, foram adquirindo confiança em si próprios e passaram a desenvolver as atividades com mais autonomia, mostrando um amadurecimento na perspectiva de um trabalho em que o aluno é levado a participar diretamente da construção de seu conhecimento.

Percebemos, também, a mudança na postura da professora que, em vários momentos, deixou de lado a técnica da aula expositiva, em que era a detentora do saber, e assumiu a função de mediadora na construção da aprendizagem juntamente com os estudantes. Essa mudança auxilia o professor a construir pontes entre a reflexão e a ação, entre a experiência e a conceituação, o que nos leva a aprender cada vez mais, de acordo com Moran (2000).

Consideramos que algumas atividades ficaram muito extensas e algumas vezes até repetitivas em relação à exploração de alguma definição, o que prejudicou de certa forma sua aplicação. Além disso, avaliamos que as sequências didáticas trabalhadas poderiam ter sido mais motivadoras para os estudantes se tivessem sido iniciadas com uma situação problema. Dessa forma, fizemos modificações nessas atividades e apresentamos as atividades reformuladas no Produto da Pesquisa, que se encontra no Apêndice desta dissertação.

Finalmente, o estudo dos produtos de vetores com sequências didáticas de atividades possibilitam uma parceria entre professores e alunos na construção do conhecimento e contribuem para uma aprendizagem mais efetiva.

REFERÊNCIAS

BEHRENS, M. A. Ensino e Aprendizagem inovadores com Tecnologias Audiovisuais e Telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. (Orgs.). **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. 12. ed. Campinas (SP): Papirus, 2006.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994. (Coleção Ciências da Educação).

BORASI, R. Reconceiving Mathematics **Instruction**: a Focus on Errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Míriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 3. ed. 1. Reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares para os cursos de graduação em engenharia**. Brasília, 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12991> Acesso em: 12 ago. 2013.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica:** um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CASTRO, Samira Choukri de. **Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação**. 2001. 111f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com os erros dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Modelagem matemática: uma revisão de pesquisas. In: CONGRESO URUGUAYO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 4, 2012, Montevideo. **Anais**. Montevideo: SEMUR, 2012. p. 216-223.

CROWE, Michael J. **A History of Vector Analysis**. University of Louisville, 2002.

DUVAL, R. **Registros de representação e Educação Matemática**. Curso na PUC – SP, 1999.

FAZENDA, Ivani. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro**. O que é interdisciplinaridade? São Paulo: Cortez, 2008.

FRANCHI, R. H. O. L. Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e na Informática como possibilidades para a Educação Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 177-193, 2007.

KELLER, Frederick. J.; GETTYS, W. Edward.; SKOVE, Malcolm. J. **Física**: Volume 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. O uso da Matemática em cursos de engenharia na perspectiva dos docentes de disciplinas técnicas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 33, 2005, Campina Grande. **Promovendo e valorizando a Engenharia em um cenário de constantes mudanças**. Campina Grande: Associação Brasileira de Educação de Engenharia, 2005.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. (Temas básicos de educação e ensino).

LUZ, Antônio Máximo Ribeiro da e ÁLVARES, Beatriz Alvarenga. **Física** – Volume 1. São Paulo: Scipione, 2006.

MASETTO, M. T. Ensino e Aprendizagem inovadores com Tecnologias Audiovisuais e Telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. (Orgs.). **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica***.* 12. ed. Campinas (SP): Papirus, 2006.

MENON, M. J. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 31, n. 2. 2009. Disponível em: <http:// http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/312305.pdf>. Acesso em 12 ago. 2013.

MIRANDA, Dimas Felipe et al. Experiências em informatização do ensino de matemática em cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 35, 2007, Curitiba. **Novos Paradigmas da Educação em Engenharia**. Curitiba: Associação Brasileira de Educação de Engenharia, 2007.

MORAN, J. M. Ensino e Aprendizagem inovadores com Tecnologias Audiovisuais e Telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. (Orgs.). **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica***.* 12. ed. Campinas (SP): Papirus, 2006.

MOTA, Janine Freitas. **Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o *software* Winplot**. 2011. 205f. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências e

Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação Ensino Ciências/Matemática, Belo Horizonte.

POOLE, David. **Álgebra Linear.** Tradutoras técnicas Martha Salerno Monteiro (coord.). [et. al.]. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

RESNICK, R., HALLIDAY, D. e KRANE, K. S. **Física 1**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1992.

SANTOS, J. S. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Belo Horizonte: UFMG, 1999.

SPINELLI, Walter. **A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar:** o caso do ensino da Matemática. 2011. 138p. Tese (Doutorado Ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de Educação de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação, São Paulo.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 2. 7. ed. São Paulo: Pioneira-Thomson Learning, 2013.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. Volume. 1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

VALENTE, José Armando. **Computadores e Conhecimento:** repensando a educação. Campinas (SP): Gráfica Central da Universidade Estadual de Campinas, 1993.

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de *software* usados na Educação. In: VALENTE, J. A. (Org.). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas (SP): UNICAMP / NIED, 1999.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

ZABALA, Antoni. A Prática Educativa: unidades de análise. In: ZABALA, Antoni. **A prática educativa.** Porto Alegre: Artmed Editora, 1998.

APÊNDICE A – PRODUTO DA DISSERTAÇÃO

PRODUTO DA DISSERTAÇÃO

Caderno de Atividades elaboradas e reformuladas após aplicação

Atividade 1: Estudo do produto de um escalar por um vetor

A velocidade de uma partícula que se move no plano xy é dada em metros por segundo e é representada por $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

a) Determine o módulo do vetor velocidade.

b) Multiplicando a velocidade da partícula por 5, o que irá ocorrer com seu módulo, direção e sentido?

c) Multiplicando a velocidade da partícula por -7, o que irá ocorrer com seu módulo, direção e sentido?

A resolução desse problema envolve o cálculo do produto de um número por um vetor e a análise do módulo, da direção e do sentido do vetor obtido por esse produto, o que vamos estudar agora.

Questão 1 - Definição do produto de um escalar por um vetor

Definição:

Dado o vetor $\vec{u}$ = (x, y) e um número α Є R, define-se α$\vec{u}$ = (αx, αy). Portanto, para multiplicar um número real por um vetor, multiplica-se cada componente do vetor por este número.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

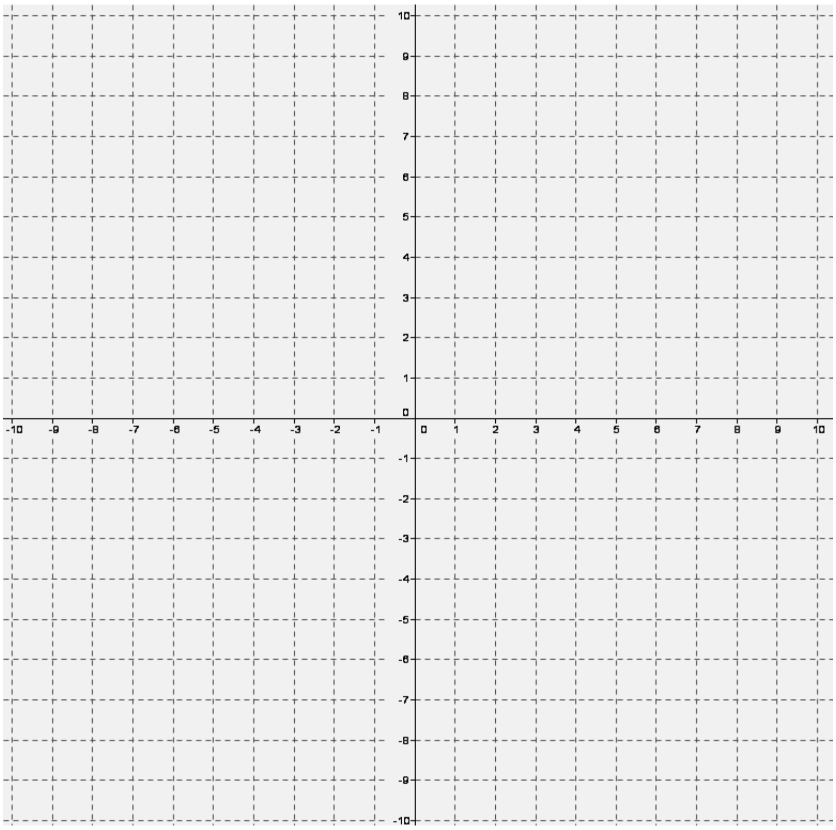
Observação: É comum usar o termo **escalar** para designar *número real*. Por isso essa operação também é chamada **produto de escalar por vetor**.

Dado o vetor $\vec{v}$ = (3, 4) faça o que se pede:

a) Calcule o módulo de $\vec{v}$.

✓ Lembre-se: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Represente o vetor $\vec{v}$ no gráfico. Para isso, marque o ponto (3, 4) e trace o vetor da origem (0, 0) à extremidade (3, 4).



c) Calcule $2\vec{v}$.

d) No mesmo gráfico do item (a), represente o vetor $2\vec{v}$.

e) O que você pode verificar ao comparar a representação de $\vec{v}$ e $2\vec{v}$?

f) Calcule o módulo de $2\vec{v}$

g) O que você pode verificar ao comparar o módulo de $2\vec{v}$ com o módulo de $\vec{v}$?

h) Calcule $-2\vec{v}$.

i) Novamente no mesmo gráfico do item (a), represente o vetor $-2\vec{v}$.

j) O que você pode verificar ao comparar a representação de $-2\vec{v}$ com a de $\vec{v}$? E com a representação de $2\vec{v}$?

k) Calcule o módulo de $-2\vec{v}$.

l) O que você pode verificar ao comparar o módulo de $-2\vec{v}$ com o módulo de $\vec{v}$? E comparando com o módulo de $2\vec{v}$?

m) O que acontece com o módulo, a direção e o sentido de $\vec{v}$ se multiplicarmos $\vec{v}$ por 3? E por -3?

n) O que acontece com o módulo, a direção e o sentido de $\vec{v}$ se multiplicarmos $\vec{v}$ por $\frac{1}{3}$? E por $-\frac{1}{3}$?

o) O que acontece com o módulo, a direção e o sentido do vetor se multiplicarmos este vetor por n Є R?

Questão 2 - Versor: uma aplicação do produto de um escalar por um vetor na Matemática

Definição:

Um *vetor unitário* é o vetor cujo módulo é igual a 1 unidade. O **versor** de um vetor $\vec{v}$ é um *vetor unitário* com a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dado o vetor $\vec{v} = (2,1)$, faça o que se pede:

a) Verifique se o vetor $\vec{v} = (2,1)$ é unitário.

b) Multiplique o vetor $\vec{v}$ por $\frac{1}{|\vec{v}|}$.

c) Calcule o módulo desse novo vetor. Podemos afirmar que ele é unitário?

d) Multiplicando o vetor $\vec{v}$ por $-\frac{1}{|\vec{v}|}$, o que podemos verificar sobre o módulo? E sobre o sentido desse novo vetor?

e) Observe que no item (c) você utilizou uma estratégia para encontrar o versor do vetor $\vec{v}$. Como você pode generalizar essa estratégia?

Questão 3: Uma aplicação do produto de um escalar por um vetor na Física

Conceitualização:

O vetor velocidade de um objeto é a taxa de variação de seu vetor posição. A velocidade nos diz quão rapidamente, e em que direção, um objeto se desloca em determinado momento.

Fonte: KELLER, Frederick. J.; GETTYS, W. Edward.; SKOVE, Malcolm. J. **Física**: Volume 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

Agora, vamos resolver nosso problema inicial.

A velocidade de uma partícula que se move no plano xy é dada em metros por segundo e é representada por $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

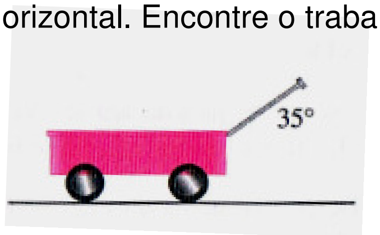
a) Determine o módulo do vetor velocidade.

b) Multiplicando a velocidade da partícula por 5, o que irá ocorrer com seu módulo, direção e sentido?

c) Multiplicando a velocidade da partícula por -7, o que irá ocorrer com seu módulo, direção e sentido?

Atividade 2: Estudo do produto escalar

Um carrinho é puxado uma distância de 100m ao longo de um caminho horizontal por uma força constante de 70N. A alça do carrinho é mantida a um ângulo de 35° acima da horizontal. Encontre o trabalho feito pela força.



Fonte: STEWART, J. **Cálculo**. Volume 2. 7. ed. São Paulo: Pioneira-Thomson Learning, 2013, p. 725.

O trabalho pode ser calculado através do produto escalar desta força pelo deslocamento. A seguir, vamos definir o produto escalar de dois vetores e suas características.

Questão 1 - Definição algébrica do produto escalar

Definição Algébrica:

Chama-se **produto escalar** de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, e se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ao *número real*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dados os vetores $\vec{u} = (2, -5, -1)$ e $\vec{v} = (1, 2, -2)$, faça o que se pede:

a) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Observe que o resultado que você encontrou é um número real e não um vetor.

b) Calcule $\vec{0} \cdot \vec{u}$.

c) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

d) Calcule o módulo do vetor $\vec{u}$.

e) Calcule o valor de $|\vec{u}|^2$. Comparando o valor que você encontrou com o valor de $\vec{u} \cdot \vec{u}$, calculado no item (c), o que se pode verificar?

f) Generalize o resultado que você verificou no item anterior.

Questão 2 - Definição geométrica do produto escalar e sua relação com a ortogonalidade de dois vetores

Definição Geométrica:

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}$, com $0º \leq \theta \leq 180º$.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dados $|\vec{u}| = 5$ e $|\vec{v}| = 3$, faça o que se pede:

a) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, *sendo* 60º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) O resultado do produto escalar que você encontrou no item anterior é positivo, negativo ou zero?

c) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, *sendo* 150º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

d) O resultado do produto escalar que você encontrou no item anterior é positivo, negativo ou zero?

e) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, *sendo* 90º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

f) O resultado do produto escalar que você encontrou no item anterior é positivo, negativo ou zero?

- Para $0º \leq \theta < 90º$, temos cos θ > 0;
- Para $90º < \theta \leq 180º$, temos cos θ < 0;
- Para $\theta = 90º$, temos cos θ = 0.

Dessa forma, preencha o quadro a seguir indicando o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, conforme os valores do ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Ângulo θ	Sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$
$0^{\circ} \leq \theta < 90^{\circ}$	
$90^{\circ} < \theta \leq 180^{\circ}$	
$\theta = 90^{\circ}$	

g) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se algum representante de $\vec{u}$ formar ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$. (WINTERLE, 2011, p. 5)

Analisando os resultados da tabela acima, escreva a condição necessária para que dois vetores sejam **ortogonais**.

h) Calcule o produto escalar dos vetores $\vec{u}$ = (-2, 4, -3) e $\vec{v}$ = (-1, 1, 2). Esses vetores são ortogonais?

i) Dizemos que um *triângulo* é *retângulo* quando ele possui um *ângulo reto*. Dessa forma, para verificarmos se um triângulo de vértices A, B e C é retângulo em B, encontramos as coordenadas dos vetores com origem em B e calculamos o produto escalar desses vetores.

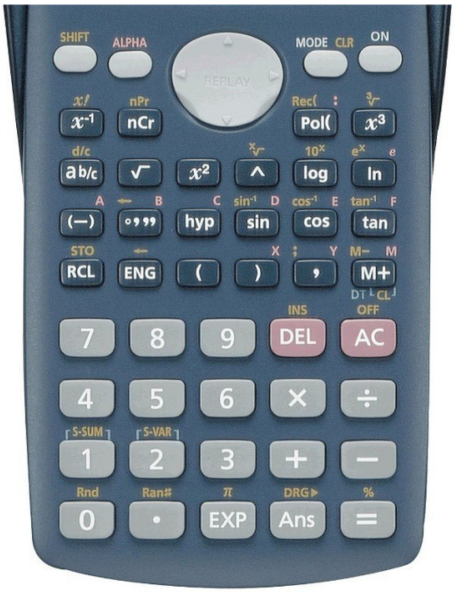
Dados A(2, 3, 1), B(2, 1, -1) e C(2, 2, -2), verifique que o triângulo ABC é *retângulo* em B.

j) Verifique se o triângulo ABC, com vértices em A(2, 3, -1), B(3, 4, 3) e C(1, 5, 1), é *retângulo* em A.

k) Calculando o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, você verificou que esses vetores não são ortogonais, logo, o triângulo ABC não é retângulo em A.
Já que o ângulo Â não é reto, como podemos descobrir o valor desse ângulo?
Observe que podemos reescrever a igualdade $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ como $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. Logo, o **ângulo entre dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos é dado por

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)}.$$

Observação: Para encontrar o valor do **ângulo**, conhecendo o seu cosseno, você pode usar uma **calculadora científica** da seguinte forma:



Normalmente, digitamos, na sequência, $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{COS}}$ valor encontrado nos cálculos, e finalmente, $\boxed{=}$.

Dessa forma, usando a fórmula acima, calcule o valor do ângulo Â.

Importante: $\cos^{-1}\theta \neq \dfrac{1}{\cos\theta}$. $\cos^{-1}\theta$ se refere à inversa da função cosseno, ou seja, conhecendo o valor de cos θ, essa função determina o valor de θ.

Questão 3 – Trabalho: Uma aplicação na Física do produto escalar

Existem várias grandezas físicas que podem ser descritas como o produto escalar de dois vetores. Podemos citar o trabalho mecânico, a potência elétrica, a densidade de energia eletromagnética e a energia potencial gravitacional.

Como exemplo, vamos analisar o trabalho mecânico. O trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ ao longo de um determinado deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar desta força pelo deslocamento efetuado pelo corpo no qual a força está aplicada, ou seja, $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

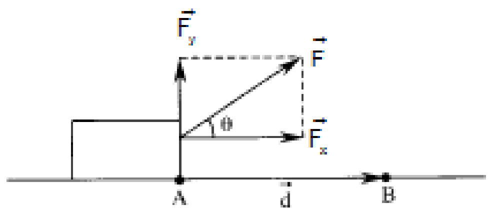


Figura 1

Na figura 1, podemos observar que a componente da força $\vec{F}$ que realiza o trabalho é $\vec{F}_x$ paralela ao deslocamento $\overrightarrow{AB} = \vec{d}$ e θ é o ângulo entre a força e o deslocamento. Observe que $|\vec{F}_x| = |\vec{F}|\cos\theta$ logo, podemos escrever a expressão do **trabalho**, $\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d}}$, como $\boxed{W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cos\theta}$.

A grandeza física trabalho é uma grandeza escalar em que ambas as grandezas envolvidas na sua definição, força e deslocamento, são vetores. A unidade de medida do trabalho é o Joule, denotado por J.

1J = 1N . 1m (1 Newton vezes um metro).

a) Um bloco está sob a ação das forças constantes $\vec{F}$, $\vec{F}_a$, $\vec{F}_N$ e $\vec{P}$, como mostra a figura 2, a seguir.

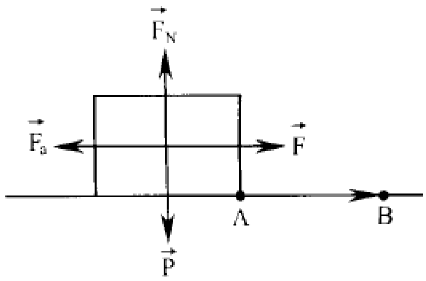


Figura 2

Sabe-se que $|\vec{F}| = 10N$, $|\vec{F}_a| = 8N$, $|\vec{F}_N| = 3N$, $|\vec{P}| = 3N$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ e $|\vec{d}| = 10m$.

Utilizando a expressão para o trabalho, $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cos\theta$, calcule o trabalho realizado para deslocar o bloco de A até B pelas forças constantes:

a) $\vec{F}$

b) $\vec{F}_a$

c) $\vec{F}_N$

d) $\vec{P}$

e) $\vec{F}_R$, resultante das quatro forças que atuam no bloco

?

Generalize sua resposta em função do ângulo θ.

g) O trabalho realizado pela força $\vec{F}_a$ é negativo. Por que isso ocorreu? Generalize sua resposta em função do ângulo θ.

h) O trabalho realizado pelas forças $\vec{F}_N$ e $\vec{P}$ é nulo. Por que isso ocorreu? Generalize sua resposta em função do ângulo θ.

Observe que o trabalho, como é definido, não corresponde ao termo coloquial do termo e isso pode enganar. Uma pessoa que segure um objeto pesado no ar, em repouso, pode estar trabalhando duro no sentido fisiológico, mas, do ponto de vista da Física, não está realizando nenhum trabalho no objeto já que a força aplicada não causa nenhum deslocamento nesse objeto.

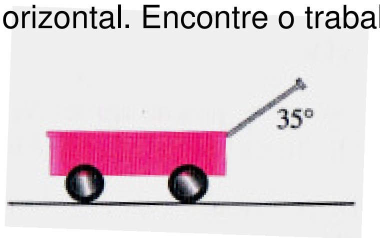
Fonte: Questão e texto adaptados:

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

HALLIDAY, D. & RESNICK, R. **Fundamentos de Física**. v. 1. R J: Livros Técnicos e Científicos, 1991.

b) Agora, vamos resolver nosso problema inicial.

Um carrinho é puxado uma distância de 100m ao longo de um caminho horizontal por uma força constante de 70N. A alça do carrinho é mantida a um ângulo de 35° acima da horizontal. Encontre o trabalho feito pela força.



Fonte: STEWART, J. **Cálculo**. Volume 2. 7. ed. São Paulo: Pioneira-Thomson Learning, 2013, p. 725.

Atividade 3: Estudo do produto vetorial

O conceito de torque é usado com frequência em nosso dia a dia.

Exemplo 1) Você sabe por que as maçanetas das portas de sua casa ficam tão distantes das dobradiças?

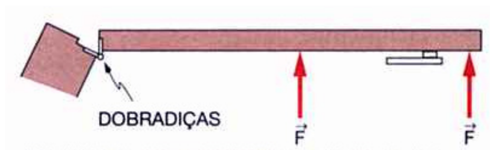


Figura 3

Imagine que você vá fechar uma porta. Se você aplicar uma força $\vec{F}$ no ponto médio da porta (figura 5), obterá um efeito de rotação menor do que se aplicar a mesma força na extremidade da porta. Na última situação, a distância da força ao eixo de rotação é maior, e, portanto, maior será o torque, ou seja, maior será o efeito de rotação que ela produz.

Exemplo 2) A figura 6 a seguir mostra um indivíduo usando uma chave de roda para soltar uma das porcas que prende a roda de um automóvel. Usando uma chave de braço mais comprido, ele aumenta a distância da força ao eixo de rotação produzindo um torque maior.

Figura 4

Exemplos adaptados: LUZ, Antônio Máximo Ribeiro da e ÁLVARES, Beatriz Alvarenga. **Física** – Volume 1. São Paulo: Scipione, 2006.

O torque pode ser calculado através do produto vetorial de dois vetores. A seguir, faremos um estudo desse produto de vetores.

Questão 1 - Definição do produto vetorial

Definição:

Chama-se **produto vetorial** de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, tomados nesta ordem, e se representa por $\vec{u} \, x \, \vec{v}$, ao *vetor*

$$\boxed{\vec{u} \, x \, \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

Observe que o produto vetorial de dois vetores é obtido pelo cálculo de um determinante de ordem 3.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dados os vetores $\vec{u} = (5,4,3)$ e $\vec{v} = (1,2,-1)$, faça o que se pede:

a) Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

Observe que o resultado que você encontrou é um vetor.

b) Calcule $\vec{v} \times \vec{u}$.

c) Compare o resultado de $\vec{u} \times \vec{v}$ com o de $\vec{v} \times \vec{u}$, calculado nos itens (a) e (b). O resultado obtido foi o mesmo? O que podemos afirmar sobre o sentido desses dois vetores?

d) Calcule o módulo dos vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$. O que podemos afirmar sobre o módulo desses vetores?

Você observou que $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$, ou seja, os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ são opostos.

Isso sempre ocorre, já que, no procedimento de cálculo, há a troca da posição de duas linhas no determinante, o que implica uma troca de sinal. Assim, o produto vetorial não é comutativo (ao contrário do produto escalar, onde $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$). **Logo, a ordem dos fatores é importante, pois altera o resultado.**

e) Calcule $3\vec{u}$.

f) Agora calcule $\vec{u} \times 3\vec{u}$.

O resultado que você encontrou no item acima deve ter sido igual a $\vec{0}$. Isso já era esperado, já que $\vec{u} // 3\vec{v}$ e, neste caso, temos duas linhas com elementos proporcionais no determinante. Considerando as propriedades dos determinantes também ocorre:

$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ (determinante com duas linhas iguais) e $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$ (determinante com uma linha nula)

Questão 2 - Características do vetor produto vetorial

1. Direção do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$

Dados $\vec{u} = (2,-1,3)$ e $\vec{v} = (1,-2,1)$, faça o que se pede:

a) Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) Calcule $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$.

c) Tendo em vista que dois vetores são ortogonais quando o produto escalar deles é zero, o que se pode concluir sobre a direção do vetor $\vec{u} \, x \, \vec{v}$?

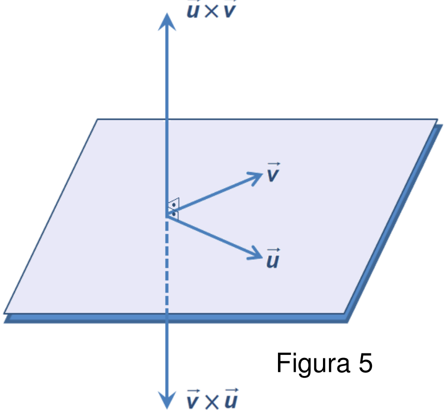


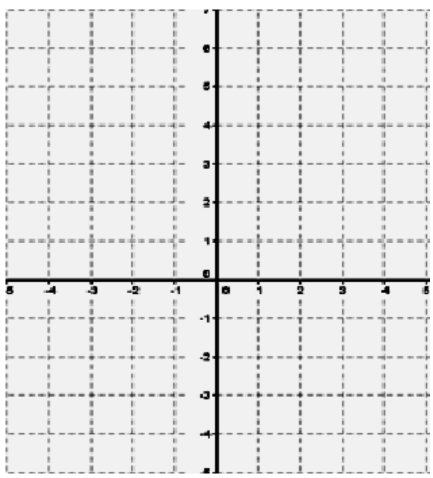
Figura 5

d) Aplicando a conclusão a que você chegou no item acima, determine um vetor que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (4,-2,3)$ e $\vec{v} = (1,6,2)$.

2. Sentido do vetor $\vec{u} \, x \, \vec{v}$

a) Calcule $\vec{i} \, x \, \vec{j}$ **.**

b) Represente o vetor que você encontrou no item anterior graficamente.



c) Calcule $\vec{j} \times \vec{i}$ **.**

d) Represente o vetor que você encontrou no item anterior no mesmo gráfico do item (b).

e) Calcule $\vec{i} \times \vec{k}$ e represente-o no mesmo gráfico do item (b).

f) Pensando nos resultados que você encontrou nos itens anteriores, complete o quadro abaixo. Observe que **não** é necessário realizar os cálculos para definirmos o resultado.

Produto	**Resultado**
$\vec{k} \times \vec{i}$	
$\vec{j} \times \vec{k}$	
$\vec{k} \times \vec{j}$	

3. Módulo do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, então

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta}$$

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dados, $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 4$, calcule $|\vec{u} \times \vec{v}|$ sendo 30º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Questão 3 – Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial

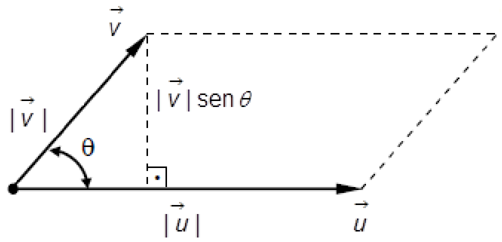


Figura 6

Observe o paralelogramo a seguir determinado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A medida de sua base é $|\vec{u}|$ e a medida de sua altura é $|\vec{v}|\text{sen}\,\theta$.

A **área** A desse **paralelogramo** é calculada pela fórmula

$\boxed{\text{A = medida da base x medida da altura}}$, ou seja, $\boxed{A = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\,\theta}$.

Comparando esse resultado com o módulo do produto vetorial, $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\,\theta$.

Pode-se concluir que $\boxed{A = |\vec{u} \times \vec{v}|}$

Podemos, então, afirmar que ***a área do paralelogramo definido pelos vetores*** $\vec{u}$ ***e*** $\vec{v}$ ***é numericamente igual ao módulo do vetor*** $\vec{u} \times \vec{v}$.

a) A figura a seguir mostra um paralelogramo de vértices A, B, C e D.

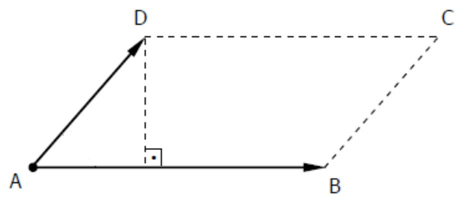


Figura 7

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dados A(1, 2, -1), B(2, 3, 1), C(1, 1, -1) e D(3, 2, -2), calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

b) Na figura 3, trace a diagonal BD do paralelogramo. Dessa forma, você dividiu o paralelogramo em duas figuras iguais. Que figuras são essas? Qual é a área de cada uma dessas figuras?

c) Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, -1,0) e C(4, 2, -2), faça o que se pede:

c1) Calcule a área do triângulo ABC.

c2) Da geometria plana, sabemos que a **área de um triângulo** é dada por $A = \frac{(\text{base})\text{x}(\text{altura})}{2}$. Dessa forma, calcule a altura do triângulo relativa ao vértice C.

Questão 4 – Torque: Uma aplicação na Física do produto vetorial

O **torque** é uma grandeza física vetorial (representado por τ) e está relacionado com a possibilidade de um corpo sofrer uma torção ou alterar seu movimento de rotação.

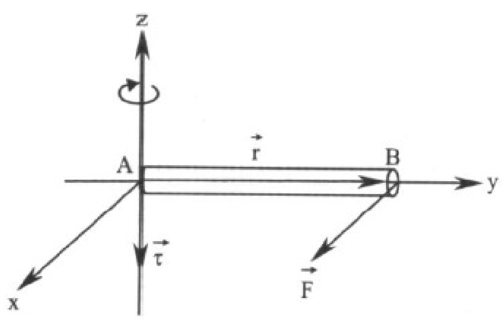


Figura 8

O **torque** pode ser calculado pela da equação $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$, sendo $|\vec{r}|$ a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação, ao qual o corpo está vinculado (figura 4). A intensidade (módulo) do torque será calculada com a equação $\boxed{|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|\,\mathrm{sen}\,\theta}$, sendo θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Um parafuso é apertado aplicando-se uma força de 40N a uma chave de boca de 0,25m, como mostra afigura 7.

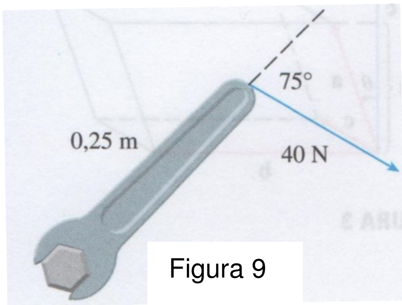


Figura 9

a) Determine o módulo do torque em relação ao centro do parafuso.

Fonte: Adaptado: STEWART, J. **Cálculo.** Volume 2. 7. ed. São Paulo. Pioneira-Thomson Learning, p. 732, 2013.

Atividade 4: Estudo do produto misto

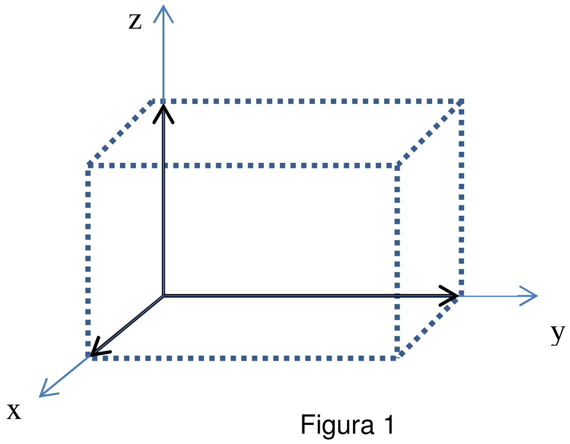


Figura 1

Uma das maneiras de obtermos o volume de um paralelepípedo é calculando o produto misto dos três vetores que determinam esse paralelepípedo. A seguir, vamos ver como obter esse produto de vetores.

Questão 1 - Definição e propriedades do produto misto

Dados os vetores $\vec{u} = (5,4,3)$, $\vec{v} = (1,2,-1)$ e $\vec{w} = (-2,0,4)$, faça o que se pede:

a) Calcule $\vec{v} \, x \, \vec{w}$.

b) Usando o resultado que você obteve no item anterior (a1), calcule $\vec{u} \cdot (\vec{v} \, x \, \vec{w})$.

c) O resultado que você obteve é um número ou um vetor?

Definição:

Chama-se **produto misto dos** vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ tomados nesta ordem, ao **número real** $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também é indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Pelo teorema de Laplace, para o cálculo de determinantes, temos:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

E, sabendo que $\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, tem-se, tomando o produto escalar,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Portanto,

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

Dessa forma, podemos calcular o produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pelo determinante de ordem 3, acima.

Fonte: WINTERLE, Paulo**. Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

---

c) Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (5, 4, 3)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, 4)$, ou seja, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Observe que o resultado que você encontrou é um número real.

d) Calcule $(\vec{u},\vec{w},\vec{v})$. Comparando esse resultado com o do item anterior (a1), o que podemos observar? Pensando nas propriedades dos determinantes, explique por que isso ocorreu.

Questão 2 – Interpretação geométrica do módulo do produto misto

a) Observe o paralelepípedo na figura a seguir e calcule seu volume V utilizando a fórmula da geometria espacial: V = (área da base) x (altura).

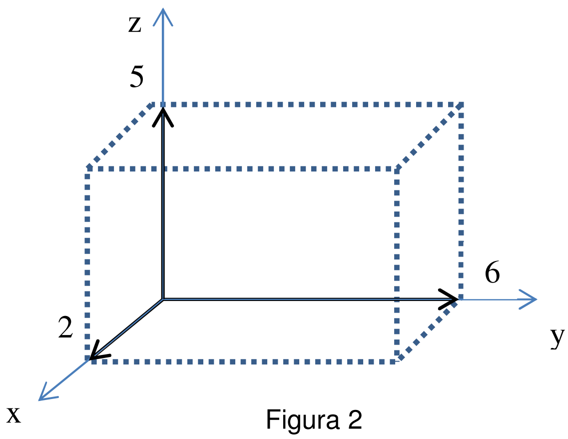


Figura 2

b) Calcule o produto misto dos vetores $\vec{u}=(2,0,0)$, $\vec{v}=(0,6,0)$ e $\vec{w}=(0,0,5)$, que formam o paralelepípedo do item anterior (a).

c) Comparando o resultado que você obteve nos itens anteriores (a) e (a1) o que se pode observar?

Você verificou que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}=(2,0,0)$ $\vec{v}=(0,6,0)$ e $\vec{w}=(0,0,5)$ é igual ao produto misto desses vetores. Podemos generalizar esse resultado para qualquer paralelepípedo:

O volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual ao módulo do produto misto desses vetores.

$$\boxed{V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}$$

d) Dados os vetores $\vec{u} = (3,2,-1)$, $\vec{v} = (1,-1,0)$ e $\vec{w} = (1,3,-1)$, calcule o volume do paralelepípedo determinado por esses vetores.

e) Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3,1,0)$, $\vec{v} = (2,-1,-1)$ e $\vec{w} = (5,0,-1)$.

f) O resultado que você encontrou no item anterior (e) deve ter sido igual a zero. Como você explicaria isso?

Com o cálculo do produto misto é possível verificar se três vetores são ou não **coplanares**, ou seja, se estão no mesmo plano. Três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são **coplanares** se o produto misto desses vetores for igual a zero.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se, e somente se, os três vetores forem **coplanares.**

g) Verifique se os vetores $\vec{u} = (2,1,-1)$, $\vec{v} = (1,0,-3)$ e $\vec{w} = (-2,1,4)$ são coplanares.

Atividade 5: Reta – Uma aplicação do produto de um escalar por um vetor

Questão 1: Equação da reta no espaço

Considere o ponto P(x, y, z) genérico, A(x_1, y_1, z_1) um ponto qualquer dado e um vetor não nulo $\vec{v}$ = (a, b, c). O Vetor $\overrightarrow{AP}$ é **paralelo** ao vetor $\vec{v}$ se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$
$$P - A = t\vec{v}$$
$$\boxed{P = A + t\vec{v}}\text{, para algum t real.}$$

1. Dado um ponto A(-2, 1, 1) e um vetor $\vec{v}$ = (1, -3, 2), faça o que se pede:

a) Com base na fórmula apresentada acima, construa uma tabela com os pontos P para alguns valores de t.

t	P(x, y, z)

b) Agora, vamos utilizar o *software* Winplot para marcar os pontos P que você obteve na tabela acima.

Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim.
Utilize EQUAÇÃO → PONTO → CARTESIANO e digite, nos campos de entrada x, y e z, as coordenadas do 1º ponto que você obteve na tabela. Para melhor visualização, selecione a opção SÓLIDO.
Na mesma janela do Winplot, repita os procedimentos anteriores para marcar os outros pontos da tabela.

c) Observe a figura que está sendo formada com os pontos marcados. Que figura é essa?

d) Podemos, então, interpretar geometricamente a equação $P = A + t\vec{v}$ como a equação de uma **reta**. Observe que a equação de uma **reta** é o resultado do *produto do escalar* t *pelo vetor* $\vec{v}$ *.*

Substituindo as coordenadas dos pontos e do vetor nessa equação, temos:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)}$$

Essa equação é chamada de **equação vetorial da reta**. O vetor $\vec{v}$ é chamado de *vetor diretor* da reta e t é denominado *parâmetro.*

Dessa forma, escreva a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto A(-2, 1, 3) e tem a direção do vetor $\vec{v}$ = (1, -1, 2).

e) Pela condição de igualdade podemos escrever a equação vetorial da reta da seguinte forma:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}}$$

Essas equações são chamadas de **equações paramétricas** da reta.

Escreva as equações paramétricas da reta r obtida no item (d).

f) Agora vamos utilizar o *software* Winplot para plotar o vetor $\vec{v}$ = (1, -1, 2).

Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim.
Utilize EQUAÇÃO → SEGMENTO e digite nos campos de entrada a, b, c as coordenadas da origem do sistema cartesiano (0, 0, 0) e em d, e, f as coordenadas do vetor $\vec{v}$. Em setas selecione a opção p2. Selecione ok. Para que os eixos fiquem visíveis utilize a opção VER → EIXOS →EIXOS.
Na mesma janela do Winplot, plote a reta r. Utilize EQUAÇÃO → PARAMÉTRICA, e digite a equação obtida no item (e) nos campos de entrada. Altere os valores t min: -2; t máx: 2; u min: -2; u máx: 2 para melhor visualização do gráfico.

g) Na mesma janela do Winplot, plote a reta $s:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$. Para isso repita os procedimentos anteriores.

g1) Observe o gráfico das retas r e s. O que podemos afirmar sobre a posição dessas retas?

g2) Analisando as equações paramétricas das retas r e s, o que se pode concluir sobre o vetor diretor dessas retas?

h) Ainda na mesma janela do Winplot, plote a reta $q:\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 4t \end{cases}$ e, em seguida, plote o seu vetor diretor $\vec{v_q}$ = (2, -2, 4), repetindo os procedimentos anteriores.

h1) Observe os vetores $\vec{v}$ e $\vec{v_q}$. O que podemos afirmar sobre esses vetores?

h2) Observe o gráfico das três retas r, s e q. O que podemos afirmar sobre a posição dessas retas?

h3) Analisando as equações paramétricas das retas r, s e q o que se pode

i) Analisando todos os itens anteriores, o que se pode afirmar sobre a equação de uma reta e as paralelas a mesma?

Questão 2: Aplicação em Física - Posição de uma partícula no espaço

Podemos interpretar a equação x = A + vt como o movimento descrito por um ponto sobre a reta r, com velocidade constante (vetorial) igual a v, t indicando o tempo e A, a posição no instante inicial t = 0 s.

Uma partícula descreve um movimento retilíneo uniforme dado pela equação x = (2, -1, 4) +t(-4, 3, 2).

a) Construa no Winplot a reta sobre a qual o ponto descreve a sua trajetória.

Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim.
Utilize EQUAÇÃO → PARAMÉTRICA, e digite a equação dada nos campos de entrada. Altere os valores t min: -15; t máx: 15; u min: -15; u máx: 15 para melhor visualização do gráfico.

b) Qual a posição da partícula no instante inicial?

Na mesma janela do Winplot, marque sobre a reta obtida no item (a) a posição inicial da partícula.

Utilize EQUAÇÃO → PONTO → CARTESIANO e digite as coordenadas do ponto que você encontrou nos campos de entrada. Para melhor visualização, selecione a opção SÓLIDO.

c) Qual a posição da partícula no instante t = 10s?

Na mesma janela do Winplot, marque sobre a reta obtida no item (a) a posição da partícula em t = 10s. Utilize os mesmos procedimentos anteriores.

d) Qual a distância percorrida por esta partícula até o instante t = 10s?

Vamos visualizar no gráfico a medida do segmento que representa a distância percorrida de t = 0s a t = 10s.

Para isso, na mesma janela do Winplot, utilize EQUAÇÃO → SEGMENTO e digite nos campos de entrada a, b, c as coordenadas do ponto no instante inicial e em d, e, f as coordenadas do ponto em t = 10s. Caso ache necessário, altere a cor utilizando a opção COR, para melhor visualização do segmento.

e) Em que instante a partícula atinge a posição x = (-18, 14, 14)?

Ainda na mesma janela do Winplot, marque sobre a reta essa nova posição da partícula.

f) A partícula atinge a posição x = (2, -5, 10)?

Atividade 6: Plano – Uma aplicação do produto escalar

Questão 1: Equação e visualização do plano

Seja A(x_1, y_1, z_1) um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n}$ = (a, b, c), $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vetor normal (ortogonal) a esse plano.

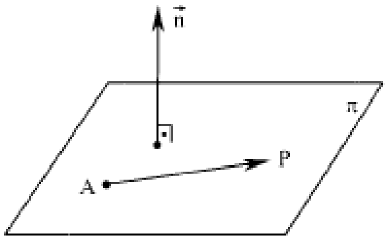


Figura 1

Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor representado em π. Então, um ponto P(x, y, z) pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é,

$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$ ou $(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$ ou $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

ou, ainda

$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$, fazendo $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, obtemos

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

Esta equação é chamada **equação geral do plano** π.

Observe que os três coeficientes a, b e c dessa equação representam as coordenadas de um vetor normal ao plano.

Por exemplo, se um plano π é dado por $\pi: 2x - 3y + 5z + d = 0$, um vetor normal a esse plano é $\vec{n}$ = (2, -3, 5). Se esse plano π passa pelo ponto A(1, 1, -2) podemos determinar o valor de d da seguinte forma:

$$2(1) - 3(1) + 5(-2) + d = 0$$
$$2 - 3 - 10 + d = 0$$
$$d = 11$$

Logo, uma **equação geral do plano** π é $2x - 3y + 5z + 11 = 0$.

Fonte: Adaptado: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Dado o ponto A(-2, 1, 1) e o vetor $\vec{n} = (1, -3, 2)$, faça o que se pede:

a) Obtenha a equação geral do plano π que passa por A e tem $\vec{n}$ como um vetor normal.

b) Agora, vamos utilizar o *software* Winplot para plotar o plano que você obteve no item anterior.

Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim. Utilize EQUAÇÃO → PLANO e digite os parâmetros **a, b** e **c** nos campos de entrada correspondentes e as coordenadas do ponto A em **(k, m, n)**. Altere os valores t min: -4; t máx: 4; u min: -4; u máx: 4, para melhor visualização do gráfico.
Para que os eixos fiquem visíveis utilize a opção VER → EIXOS →EIXOS.

c) Visualizando o gráfico plotado, responda:

c1) Esse plano passa pela origem do sistema cartesiano? _______________

c2) O plano intercepta que eixos? ___________________________________

Encontre os pontos de interseção do plano π com os eixos coordenados:

$y = 0, z = 0 \rightarrow x =$ _______ Ponto de interseção com o eixo x: __________________

$x = 0, z = 0 \rightarrow y =$ _______ Ponto de interseção com o eixo y: __________________

$x = 0, y = 0 \rightarrow z =$ _______ Ponto de interseção com o eixo z: __________________

d) Para visualizar a ortogonalidade entre o plano π e o vetor normal $\vec{n}$ = (1, -3, 2), plote $\vec{n}$ na mesma janela do Winplot.

Utilize EQUAÇÃO → SEGMENTO e digite nos campos de entrada a, b, c as coordenadas da origem do sistema cartesiano (0, 0, 0) e em d, e, f as coordenadas do vetor $\vec{n}$. Em setas selecione a opção p2. Selecione ok.

e) Na mesma janela do Winplot, plote o plano $\pi_1 : -2x + 6y - 4z + 1 = 0$. Utilize EQUAÇÃO → PLANO e digite os parâmetros **a, b** e **c** nos campos de entrada correspondentes e as coordenadas de um ponto qualquer de π_1 em **(k, m, n)**. Altere os valores t min: -4; t máx: 4; u min: -4; u máx: 4, para melhor visualização do gráfico.

e1) Qual a posição do plano π em relação ao plano π_1? ________________

f) Ainda na mesma janela do Winplot, plote o vetor $\vec{n_1}$ = (-2, 6, -4) normal ao plano π_1.

Utilize EQUAÇÃO → SEGMENTO e digite nos campos de entrada a, b, c as coordenadas da origem do sistema cartesiano (0, 0, 0) e em d, e, f as coordenadas do vetor $\vec{n}$. Em setas selecione a opção p2. Selecione ok.

Observe que os vetores normais a π e π_1 são paralelos, logo, já devíamos esperar que os planos π e π_1 também fossem paralelos.

Questão 2: Planos paralelos aos eixos coordenados

Um plano é paralelo a um eixo coordenado quando ***uma das componentes*** *do vetor normal a esse plano* ***é nula****, sendo d ≠ 0.*

2.1. Construa no Winplot um esboço do plano x + y – 2 = 0.

a) Abra o Winplot. Selecione em JANELA a opção 3-dim. Utilize EQUAÇÃO → PLANO e digite os parâmetros **a, b** e **c** nos campos de entrada correspondentes e as coordenadas de um ponto pertencente ao plano em **(k, m, n)**. Altere os valores t min: -4; t máx: 4; u min: -4; u máx: 4, para melhor visualização do gráfico.
Para que os eixos fiquem visíveis utilize a opção VER → EIXOS →EIXOS.

b) Visualizando o gráfico plotado, responda:

b1) O plano proposto intercepta quais eixos? ___________________________

b2) O plano proposto é paralelo a qual eixo? ___________________________

b3) Qual(is) a(s) variáveis livres? ____________________________________

c) Plote, também, na mesma janela do Winplot, os planos:

1) $x + y + 7 = 0$
2) $x + y - 5 = 0$

c1) O que se pode observar sobre as representações gráficas desses planos?
____

d) Em uma nova janela do Winplot, plote os seguintes planos:

1) $2x + y - 3 = 0$
2) $x + 3y - 5 = 0$

d1) Esses planos são paralelos? _____________________________________
d2) Esses planos são paralelos a qual eixo? ___________________________

2.2. Construa no Winplot um esboço do plano $x + z + 3 = 0$.
a) Visualizando o gráfico plotado, responda:
a1) O plano proposto intercepta quais eixos? ___________________________

a2) O plano proposto é paralelo a qual eixo? ___________________________

a3) Qual(is) a(s) variáveis livres? ____________________________________

2.3. Construa no Winplot um esboço do plano $y + z - 1 = 0$.

a) Visualizando o gráfico plotado, responda:

a1) O plano proposto intercepta quais eixos? ___________________________

a2) O plano proposto é paralelo a qual eixo? ___________________________

a3) Qual(is) a(s) variáveis livres? ____________________________________

Questão 3: Planos paralelos aos planos coordenados

Um plano é paralelo a um plano coordenado quando ***duas das componentes*** *do vetor normal a esse plano* ***são nulas****, sendo* $d \neq 0$*.*

3.1. Construa no Winplot um esboço do plano $x - 3 = 0$.

a) Visualizando o gráfico plotado, responda:

a1) O plano proposto intercepta um dos eixos cartesianos. Qual deles? ______

a2) O plano proposto é paralelo a qual plano coordenado? ________________

3.2. Construa no Winplot um esboço do plano $2y - 4 = 0$.

a) Visualizando o gráfico plotado, responda:

a1) O plano proposto intercepta um dos eixos cartesianos. Qual deles? ______

a2) O plano proposto é paralelo a qual plano coordenado? ________________

3.3. Construa no Winplot um esboço do plano $z + 1 = 0$.

a) Visualizando o gráfico plotado, responda:

a1) O plano proposto intercepta um dos eixos cartesianos. Qual deles? ______

a2) O plano proposto é paralelo a qual plano coordenado? ________________

Fonte: Adaptado: MOTA, Janine Freitas. **Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o *software* Winplot**. 2011. 205f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação Ensino Ciências/Matemática, Belo Horizonte.