PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Carlos Eduardo Ladeira Vidigal

(RE)SIGNIFICANDO O CONCEITO DE LOGARITMO

Belo Horizonte

2014

Carlos Eduardo Ladeira Vidigal

(RE)SIGNIFICANDO O CONCEITO DE LOGARITMO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Eliane Scheid Gazire

Belo Horizonte

2014

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Vidigal, Carlos Eduardo Ladeira
V653r (Re)significando o conceito de logaritmo / Carlos Eduardo Ladeira Vidigal. Belo Horizonte, 2014.
133f.: il.

Orientadora: Eliane Scheid Gazire
Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Logarítmos. 2. Funções exponenciais. 3. Aprendizagem baseada em problemas. I. Gazire, Eliane Scheid. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 518.2

Carlos Eduardo Ladeira Vidigal

(RE)SIGNIFICANDO O CONCEITO DE LOGARITMO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA

Profª. Drª. Eliane Scheid Gazire (Orientadora)

PUC Minas

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda

PUC Minas

Prof. Dr. Dale William Bean

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

Belo Horizonte, 07 de março de 2014.

A Deus e à minha família,
meus bens mais preciosos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus.

As pessoas a quem devo agradecimentos são várias. Peço desculpas às que tenham sido omitidas nesta página, por algum descuido meu.

Agradeço

aos meus pais, que muitas vezes deixaram de fazer suas vontades para satisfazerem as minhas - sem eles não estaria aqui;

ao meu irmão, pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis e que sempre entendeu minha ausência em função do mestrado;

aos meus amores, Érika e Thiago, pela paciência para suportar meu mau humor e pelas horas roubadas da companhia de vocês;

à Érika, exemplo de mulher e mãe, por ter me ensinado muito mais que matemática e por toda a confiança, principalmente, quando nem eu mesmo confiava em mim;

a todos os colegas que participaram da minha vida acadêmica e aturaram minhas piadinhas nos intervalos;

à Profa. Dra. Eliane Gazire, pela preocupação, atenção, paciência e confiança - não poderia esperar orientadora melhor;

a todos os professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, pela eficaz transmissão de conhecimento;

aos professores doutores Dimas Felipe Miranda (PUC Minas) e Dale William Bean (UFOP), pelas contribuições preciosas ao fazerem parte da banca examinadora.

aos meus familiares e amigos, pela compreensão das minhas frequentes ausências.

“Todas as verdades são fáceis de se entender depois de serem descobertas. A questão é descobrí-las.”

Galileo Galilei

RESUMO

Esta pesquisa propõe analisar a utilização de uma sequência de atividades que privilegiam situações problemas reais e históricas, incentivando a investigação matemática e contribuindo para a ressignificação do conceito de logaritmo bem como para a compreensão de algumas aplicações por parte dos alunos. Com uma perspectiva interdisciplinar, as atividades foram desenvolvidas de forma a se iniciarem com um texto base para a resolução das questões apresentadas, tornando o aprendizado mais significativo e contribuindo para o entendimento de alguns fenômenos do mundo real. Neste trabalho, foram analisadas as produções de 12 (doze) duplas de alunos da disciplina de Cálculo I de diversos cursos de Engenharia de uma instituição de ensino superior de Belo Horizonte (MG). Pode-se inferir, a partir das análises *a posteriori*, que as atividades contribuíram para a ressignificação do conceito de logaritmo e que muitas das dificuldades apresentadas nesse conteúdo estão relacionadas à não aquisição de habilidades prévias como, por exemplo, propriedades das potências e manejos algébricos. O produto final é um caderno com uma sequência de seis atividades que visa proporcionar ao aluno a reconstrução do conceito de logaritmo de forma interdisciplinar, com foco nas principais propriedades dos logaritmos a serem utilizadas no decorrer de um curso de engenharia, bem como na utilização da calculadora para o cálculo de logaritmos.

Palavras-chave: Logaritmo. Investigação Matemática. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This research aimed to analyze the use of a didactical sequence of activities that emphasize real and historical situations, encouraging mathematical investigation and contributing to the resignifying of the concept of logarithm as well as for understanding some applications by the students. With an interdisciplinary perspective, the activities were developed in order to start with a basis text for resolution of question presented in the text, making the learning more meaningful and contributing to the understanding of some real world phenomena. In this research, the production of 12 (twelve) pairs of students of Calculus from various courses of Engineering from an higher education institute in Belo Horizonte (MG) were analyzed. It can be inferred from the posteriori analysis, that the activities contributed to the resignification of the concept of logarithm and that many of the difficulties presented in this content are related to the lack of acquisition of prior skills, for example, properties of exponents and algebraic operations. The final product is a notebook with a sequence of six activities that aims to provide the student with the reconstruction of the concept of logarithm in an interdisciplinary way, focusing on the main properties of logarithms to be used in engineering courses as well as the use of calculator for calculating logarithms.

Keywords: Logarithm. Mathematics Investigation. Problem Solving.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – *Logaritmorum Chilias Prima* 27
FIGURA 2 – Efeitos dos terremotos e medição de sua magnitude 33
FIGURA 3 – Função do número *e* 38
FIGURA 4 – Sequência da atividades 41
FIGURA 5 – Resposta da dupla C 46
FIGURA 6 – Resposta da dupla H 47
FIGURA 7 – Resposta da dupla E 47
FIGURA 8 – Resposta da dupla J 47
FIGURA 9 – Resposta da dupla L 47
FIGURA 10 – Resposta da dupla C 48
FIGURA 11 – Resposta da dupla E 49
FIGURA 12 – Resposta da dupla H 49
FIGURA 13 – Resposta da dupla J 49
FIGURA 14 – Resposta da dupla H 50
FIGURA 15 – Resposta da dupla D 56
FIGURA 16 – Resposta da dupla F 56
FIGURA 17 – Resposta da dupla E 57
FIGURA 18 – Resposta da dupla H 57
FIGURA 19 – Resposta da dupla I 57
FIGURA 20 – Resposta da dupla J 57
FIGURA 21 – Resposta da dupla A 58
FIGURA 22 – Resposta da dupla F 58
FIGURA 23 – Resposta da dupla G 58
FIGURA 24 – Resposta da dupla J 58
FIGURA 25 – Resposta da dupla E 58
FIGURA 26 – Resposta da dupla E 59
FIGURA 27 – Capa de exemplar de Tábua de Logaritmos 60
FIGURA 28 – Resposta da dupla H 65
FIGURA 29 – Resposta da dupla E 67
FIGURA 30 – Resposta da dupla H 67
FIGURA 31 – Resposta da dupla J 67
FIGURA 32 – Resposta da dupla J 67
FIGURA 33 – Resposta da dupla I 68
FIGURA 34 – Resposta da dupla J 69
FIGURA 35 – Resposta da dupla C 69
FIGURA 36 – Resposta da dupla E 80
FIGURA 37 – Resposta da dupla J 80
FIGURA 38 – Comentário de um aluno 88
FIGURA 39 – Comentário de um aluno 89
FIGURA 40 – Comentário de um aluno 90
FIGURA 41 – Comentários de alunos 90
FIGURA 42 – Comentários de alunos 91
FIGURA 43 – Comentário de um aluno 92

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Escala Decibel 34
TABELA 2 – Funções Exponenciais 36

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – Função e sua inversa 36
GRÁFICO 2 – Avaliação das aulas em que foram aplicadas as atividades 88
GRÁFICO 3 – Interesse dos alunos pelas aulas de Cálculo 89
GRÁFICO 4 – Modificação do interesse dos alunos pelas aulas de Cálculo 89
GRÁFICO 5 – Avaliação das atividades pelos alunos 90
GRÁFICO 6 – Conhecimento prévio dos alunos acerca da aplicações 91

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS 16
2.1 A metodologia da resolução de problemas 16
2.2 A investigação matemática na resolução de problemas 21
2.3 A transição do ensino médio para o ensino superior 23

3 A HEURÍSTICA DOS LOGARITMOS 25
3.1. A criação dos logaritmos 25
3.2 Logaritmo, um expoente 28
***3.2.1 Propriedades* 28**
***3.2.2 Sistemas de Logaritmos* 30**
***3.2.3 Mudança de base* 31**
***3.2.4 Algumas aplicações* 31**
3.2.4.1 Fator pH 31
3.2.4.2 Escala Richter 32
3.2.4.3 Escala Decibel 33
3.2.4.4 Resolução de equações exponenciais 34
3.3 A função logarítmica 35
3.4 O número *e* 37
3.5 O logaritmo natural 38

4 PERCURSO DA PESQUISA 39
4.1 A elaboração das atividades 40
4.2 A instituição e os sujeitos da pesquisa 42

5 APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES 43
5.1 Atividade 1 43
5.2 Atividade 2 52
5.3 Atividade 3 61
5.4 Atividade 4 70
5.5 Atividade 5 76
5.6 Atividade 6 82
5.7 Questionário 87

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 93

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 98

ANEXOS 101
Anexo A 101
Anexo B 132

1 INTRODUÇÃO

Apesar de todo o meu apreço pela Matemática desde as séries iniciais, o meu estudo durante o ensino médio não passou de uma série de regras a serem decoradas, manipulações algébricas a serem realizadas e padrões gráficos a serem construídos. Em especial, no que se refere ao conteúdo de logaritmos e funções logarítmicas, tanto o professor quanto o livro didático[1] apresentavam apenas um amontoado de regras a serem trabalhadas. Com a facilidade que tinha em Matemática, passei sem problemas por essa fase. Mas não foi assim com a maioria dos meus colegas.

Posteriormente, iniciei o curso de graduação em Matemática Computacional em que não havia nenhuma ênfase nesses conteúdos. A disciplina Cálculo I, do primeiro período do curso, partia do princípio de que, se o aluno estava ali, era porque dominava todos os conteúdos anteriores. Logo no segundo período do curso, assumi aulas de monitoria em um colégio de ensino médio e deparei-me com a dificuldade de vários alunos em compreender conceitos básicos de logaritmos e suas propriedades. Nesse momento, estudos individuais e consultas a livros e outras fontes foram importantes para que eu compreendesse o assunto de forma mais aprofundada, passando a entender melhor todas as regras de operação. Isso foi fundamental para meu desempenho docente e os alunos também passaram a compreender melhor os conceitos, aprendendo a identificar as propriedades a serem utilizadas de acordo com as situações propostas.

Depois de dois anos, fiz a reopção pelo curso de Licenciatura em Matemática e passei a atuar como professor regente de turmas do primeiro ano do ensino médio, etapa em que esse conteúdo é normalmente ministrado. Mesmo no curso de Licenciatura em Matemática não foi dada nenhuma ênfase ao conteúdo de logaritmos. Novamente, partia-se do pressuposto de que era um assunto dominado por todos os alunos. Nessa época, já dominava bastante o uso dos logaritmos, mas, sabendo que era um conteúdo em que os alunos apresentavam bastante dificuldade e resistência, me intrigava muito o pouco destaque que era dado a ele, principalmente em um curso voltado para a formação de professores. Polya (1997)

[1] GIOVANNI, José R.; BONJORNO, José R. **Matemática**. São Paulo: FTD, 1996.

afirma que ninguém pode ensinar o que não aprendeu e, dessa forma, o currículo para futuros professores de Matemática deve enfatizar muito mais do que é normalmente feito, em especial, a habilidade de resolver problemas e os métodos de solução, aquilo que denominamos heurísticas da resolução de problemas.

No decorrer de alguns anos de magistério, no ensino de Matemática, pude observar que a maioria dos alunos apresentava dificuldades na compreensão do conceito de logaritmo, isto é, os alunos não entendiam o seu significado e sua utilidade. A dúvida no estudo desse conteúdo é frequente. Os livros aos quais tinha acesso - Giovanni (1996), Iezzi (1995), Paiva (1995) - não traziam uma abordagem que considerasse facilitadora, tendo como foco um estudo muito voltado para as técnicas de cálculos, levando os alunos ao estudo de um amontoado de regras, somente. Em turmas de 3º ano do ensino médio, quando o assunto geralmente é revisto, os alunos costumam apresentar ainda mais aversão a esses conteúdos.

Quando tive a oportunidade de trabalhar no ensino superior, tanto em cursos de licenciatura em Matemática, quanto em cursos de Engenharia e Administração, deparei-me novamente com alunos que tinham total aversão a esses conteúdos. Durante as aulas da disciplina de Cálculo I para cursos de Engenharia de uma faculdade particular em Belo Horizonte, pude verificar que, além das dificuldades algébricas e aritméticas de se trabalhar com logaritmos, os alunos não percebiam a enorme utilidade dessa ferramenta matemática. A palavra logaritmo, para muitos, é algo assustador! Demana et al. (2009), no livro Pré-Cálculo, voltado para alunos que já possuem certa habilidade no trato desse assunto, faz uma breve revisão do conteúdo e cita algumas aplicações. Os outros livros mais utilizados nessa disciplina - Stewart (2003), Thomas (2002), Anton (2000), Swokowski (1994) - tratam os logaritmos apenas a partir da perspectiva do cálculo diferencial e integral[2], deixando de lado as aplicações das propriedades algébricas e aritméticas.

Além disso, foi possível verificar também que os livros didáticos, inicialmente, apresentavam o tema destituído de uma perspectiva histórica e focado em operações que, hoje, são facilmente realizadas por qualquer calculadora. Após essa apresentação, os livros conduziam o aluno ao estudo das funções logarítmicas, com pouco foco nas suas aplicações, e à grande utilidade dos logaritmos atualmente: a resolução de equações exponenciais. Como exemplo das diversas aplicações dos

[2] Ver http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/logaritmo/conceito_log.htm

logaritmos, podemos citar a medição da intensidade de terremotos da escala Richter; a medição de níveis de intensidade sonora; a medição do pH de uma solução química; as aplicações em matemática financeira, na construção de escalas, etc. Pôde-se perceber também que, muitas vezes, a maneira como esses conteúdos são trabalhados pode interferir na construção do conceito. Atualmente, muito se discute acerca de novas metodologias, os livros tem se aprimorado cada vez mais e a internet é uma ferramenta poderosa para pesquisa. Mas *por que há tanta dificuldade no estudo das funções logarítmicas e dos logaritmos e não há tanta dificuldade no estudo das funções exponenciais? Um foco na resolução de problemas facilitaria o aprendizado?*

Algumas hipóteses levantadas a partir de minha prática docente apontam que a dificuldade no estudo das funções logarítmicas decorre de certos fatores como, por exemplo:

- a dificuldade com potenciações,
- a dificuldade e/ou defasagem no estudo da função exponencial,
- a dificuldade com o conceito de operações inversas,
- defasagem de conteúdos da álgebra do ensino fundamental.

As limitações algébricas e aritméticas foram facilmente compreendidas por este pesquisador, que constatou, em sua prática pedagógica, ser fruto de uma defasagem na aprendizagem de conceitos básicos, como, por exemplo, em relação à operação de potenciação e suas propriedades. Mas, por que isso tornaria o tema logaritmos o terror para a maioria dos estudantes?

Uma abordagem **integrada** dos logaritmos e suas aplicações, partindo de situações com referência na realidade, pode gerar maior entendimento e maior interesse dos alunos ao aprender e compreender conceitos básicos desses conteúdos?

As reflexões conduzidas e os questionamentos sobre os fatores que tornam o estudo dos logaritmos tão difícil para os alunos conduziram a definir a seguinte questão norteadora da pesquisa: **Estratégias de ensino-aprendizagem com um foco em situações problemas e buscando interligar os logaritmos e suas aplicações podem facilitar a compreensão desses conteúdos?**

Propõe-se, com este trabalho, refletir sobre a abordagem dos logaritmos, tendo como foco a resolução de problemas e a construção de diferentes estratégias a serem desenvolvidas pelos alunos, de modo a possibilitar resultados positivos para uma melhor aprendizagem. Assim, o produto final almejado foi a elaboração de um caderno de atividades que possa ser utilizado, de forma a permitir que os alunos consigam ressignificar o aprendizado de logaritmos e com o propósito de articular conceitos, propriedades e operações que são amplamente utilizados em diversas disciplinas do ensino superior, com destaque para o Cálculo Diferencial e Integral e o estudo das Equações Diferenciais. As atividades propostas se dão sempre a partir de um texto introdutório no qual são apresentados aspectos históricos da criação dos logaritmos e suas aplicações em diversas áreas.

O objetivo geral desta pesquisa é desvendar as contribuições que um conjunto de atividades discutidas a partir de textos de diversas fontes pode facilitar uma ressignificação do conceito de logaritmo.

São ainda objetivos específicos desta pesquisa:

- Elaborar e aplicar um conjunto de atividades sobre logaritmo, que propicie ao estudante experimentar metodologias como investigação matemática e resolução de problemas;
- Incentivar o estudante a ler, interpretar, fazer generalizações, escrever textos explicativos usando língua portuguesa e linguagem matemática, analisar e resolver situações-problema;
- Proporcionar um ambiente em que o aluno possa vivenciar algumas experiências matemáticas[3] tais como investigar, conjecturar, abstrair, argumentar, demonstrar e generalizar.

Dessa forma, dividimos o trabalho em cinco capítulos.

Neste primeiro, fazemos um breve relato sobre a motivação para esta pesquisa.

No segundo capítulo, tratamos de alguns aspectos teóricos que embasam esta pesquisa.

[3] Para o professor e o aluno, uma experiência matemática é uma experiência relacionada a questões de aprender e ensinar Matemática. (FROTA, 2002).

No terceiro capítulo, apresentamos aspectos históricos da teoria, envolvendo logaritmos e algumas aplicações.

O quarto capítulo trata de contar o percurso da pesquisa, a proposta de aplicação e os objetivos.

Analisamos as atividades e narramos a sua aplicação no quinto capítulo e, posteriormente, apresentamos as conclusões do nosso trabalho nas considerações finais.

O produto final (Apêndice A) é apresentado por meio de um caderno contendo as seis atividades aplicadas.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

> Os problemas de matemática, de modo geral, ocupam um lugar central no conteúdo de Matemática escolar desde a Antiguidade. (BICUDO, 1999).

A resolução de problemas no ensino de Matemática tem sido uma das tendências atuais, como uma metodologia de ensino eficaz de se trabalhar com conteúdos matemáticos, levando em consideração aplicações e situações do cotidiano, que podem incentivar a compreensão e a utilização adequada de conceitos matemáticos.

Nesse capítulo, apresentaremos, de forma sucinta, o desenvolvimento de estudos teóricos realizados durante essa pesquisa acerca da metodologia da resolução de problemas, da investigação matemática e da transição do ensino médio para o superior.

2.1 A Metodologia da resolução de problemas

Problemas fazem parte da vida do ser humano. Em particular, os problemas matemáticos já existem desde a Antiguidade. Gazire (1988) traz um breve histórico em sua dissertação sobre a sistematização da resolução desses antigos problemas. Gazire afirma que a trajetória histórica se inicia com Pappus, por volta do ano 300 d.C., que descreve um ramo de estudo que ele chamou de *analyomenos*, que pode ser traduzido como “Arte de Resolver Problemas”. Posteriormente, essa trajetória passa por Descartes, que cria princípios fundamentais para seu método, e por Leibintz (1646-1716), que se mostra preocupado com a utilização de um método analítico para o descobrimento de verdades científicas (heurísticas). Passa-se também por Clairaut (1713-1765), que procurou em seus livros se tornar heurístico, Bolzano (1781-1844), que procura formular regras de solução de problemas, e Poincaré (1854-1912), que analisa as condições do descobrimento científico. Chega-se então a Polya (1888-1983), que foi um dos que mais influenciou matemáticos e educadores matemáticos, e Imre Lakatos (1922-1973), que busca enfocar alguns problemas de metodologia da Matemática.

O matemático George Polya tornou-se um dos pioneiros da utilização de resolução de problemas como estratégia de ensino-aprendizagem com seu livro “A arte de resolver problemas”. Ele foi o primeiro a apresentar uma heurística de

resolução de problemas específica para a Matemática, que constitui até hoje uma referência no assunto.

As ideias colocadas por Polya (1975) foram preponderantes e orientam o debate sobre o papel da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da Matemática. Percebe-se que esse se torna um tema cada vez mais debatido e que tem acarretado várias mudanças desde os livros didáticos até a postura dos professores de Matemática. Polya (1975) afirma que resolver problemas é uma experiência prática como nadar, esquiar ou tocar piano. Somente é possível aprender, imitando bons exemplos e praticando continuamente. O modelo de resolução de problemas proposto por ele é constituído de quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e um retrospecto sobre o que foi executado de forma a avaliar a solução.

Na compreensão do problema, o aluno deve verificar se o enunciado está claro e não deixa dúvidas, identificando a(s) incógnita(s) e os dados fornecidos. Para estabelecer o plano, ele deve procurar se recordar de problemas semelhantes já resolvidos e estabelecer conexões entre os dados fornecidos no problema. Durante a execução desse plano, é preciso manter uma sequência de passos ordenadamente, de modo que seja fácil verificar a qualquer momento se aquele passo está correto. Por último, o retrospecto deve examinar se a solução obtida satisfaz o enunciado proposto e, no caso, de mais de uma solução, se todas elas são válidas.

Echeverria e Pozo (1998) argumentam:

> O uso de estratégias mais sofisticadas para a solução de problemas exigiria, então, em determinados contextos escolares e não escolares, a superação ou o abandono dessas formas simples ou intuitivas de raciocínio. Afinal, o discurso e a racionalidade na qual se sustentam costumam ser contrários à intuição imediata e à racionalidade do “senso comum”. Em muitos aspectos, resolver um problema como o faria um cientista requer a adoção de estratégias e procedimentos opostos à intuição ou às regras heurísticas habitualmente empregadas em contextos informais. Por isso, o ensino da solução de problemas deve promover e consolidar o uso de novas formas de raciocínio nas diferentes áreas do currículo. (ECHEVERRIA e POZO, 1998).

Apesar de toda a discussão atual sobre resolução de problemas, as opiniões são diversas acerca desse assunto. Diversas vezes nos deparamos com exercícios, chamados de problemas, que não passam de uma repetição de métodos já conhecidos. Shoenfeld (1997) afirma que

> Tais práticas podem ser mais valiosas que o exercício e a prática da tabuada, mas não muito mais. Há muito mais na resolução de problemas do que isso – e muito mais na Matemática do que a resolução de problemas que outras pessoas te dão para resolver. (SHOENFELD, 1996)

Logo, a utilização de resolução de problemas em sala de aula é uma ferramenta que procura oferecer subsídios ao aluno, de forma a permitir que ele seja capaz de elaborar e desenvolver estratégias pessoais de identificação e resolução de problemas nas principais áreas de conhecimento através de alguns hábitos de raciocínio sistematizado.

Segundo Ernest (1996), uma parte fundamental da Matemática é a formulação, e, principalmente, a resolução de problemas. Desse ponto de vista, o ponto de partida é um problema, que deve ser do interesse do aluno, de modo a aguçar sua curiosidade e criatividade, e, assim, levá-lo a procurar possíveis caminhos para a resolução.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) ratificam essa necessidade - a importância de se trabalhar com a resolução de problemas no ensino de Matemática:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (PCN+, Brasil, 2002, p. 112)

O ensino tradicional com foco no professor, que é apenas responsável pela transmissão de conteúdo e que leva ao aluno como simples ouvinte e responsável pela resolução de enormes listas de exercícios, tem sido bastante criticado. Novas propostas surgem a cada dia, buscam-se alternativas diferenciadas com suporte numa aula com maior interação entre professor e alunos e que levem, de fato, a um aprendizado significativo. Ponte (2003) afirma que há lugar para todos os tipos de atividades em sala de aula: exercícios, problemas, projetos, investigações. Ele ainda ressalta o grande desafio dos professores nessa perspectiva:

> O grande desafio é articular esses diferentes tipos de tarefa de modo a constituir um currículo interessante e equilibrado, capaz de promover o desenvolvimento matemático dos estudantes com diferentes níveis de desempenho. (PONTE, 2003).

A resolução de problemas parte de um modelo matemático dado sobre informações apresentadas em certa situação-problema, seja ele um problema cotidiano ou científico. Deve-se notar que as formas de raciocínio (heurísticas) necessárias para a solução de problemas do cotidiano muitas vezes diferem das formas usadas na solução de problemas científicos.

> Antes de tudo, é preciso formular problemas. E seja o que for que digam, na vida científica, os problemas não se apresentam por si mesmos. É precisamente esse sentido do problema que dá a característica do genuíno espírito cientifico. Para um espírito cientifico, todo conhecimento é resposta a uma questão. Se não houve questão, não pode haver conhecimento cientifico. (BACHELARD, 1977, p. 148).

Polya (1962) afirma que resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, por exemplo, e que, para adquirir essa habilidade, é necessário imitação e prática. Assim, como para se aprender a nadar devemos ir à água, para ser um bom 'resolvedor de problemas', devemos resolver problemas.

Mas, o que é um problema?

Gazire (1988) afirma que, para uma situação constituir um problema ou não, depende de como a pessoa que está sendo confrontada com tal situação se comporta diante da mesma. A autora exemplifica citando que trocar o pneu de um carro não é um problema se o procedimento para trocar o pneu é conhecido e as ferramentas adequadas para realizar a troca estão disponíveis. Ao passo que, se não se dispõe de ferramentas adequadas, trocar o pneu se torna um problema. Para Kantowski (1997), um problema é uma situação que se enfrenta sem contar com um algoritmo que garanta uma solução.

Segundo Polya (1997), resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. O autor ainda completa que, se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta.

Analogamente, em Matemática, podemos afirmar que determinar a área de um retângulo conhecidas as medidas dos lados pode ser um problema para alguém que não conheça uma fórmula, mas não é para alguém que conheça a fórmula para

cálculo da área de um retângulo e saiba interpretá-la. Onuchic e Allevato (2005) sintetizam essa ideia afirmando que um problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer.

Para Gazire (1988), a resolução de problemas auxilia o aluno na medida em que pode levá-lo ao conhecimento de várias técnicas e estratégias de resolução de problemas que contribuirão para que ele possa desenvolver habilidades em resolver problemas. A autora justifica que o aprendizado ocorre de forma mais eficaz, já que se aprende melhor um conteúdo quando ele é aplicado.

O uso da resolução de problemas em sala de aula como estratégia de ensino está prescrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (1999) tanto na versão para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio (2002), uma vez que proporciona contextos em que se podem aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

> Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (PCN, 1999, p. 266)

Na resolução de problemas, os alunos deverão gerenciar as informações disponíveis e os conhecimentos prévios.

> Entendemos que conhecimentos prévios são todos aqueles conhecimentos (corretos ou incorretos) que cada sujeito possui e adquiriu ao longo de sua vida na interação com o mundo que o cerca e com a escola. Esse conjunto de conhecimentos serve para que ele conheça o mundo e os fenômenos que observa, ao mesmo tempo em que ajudam a prever e controlar os fatos e acontecimentos futuros. (POZO, 1998, p. 87).

Davis & Hersh (1995) determinam que o próprio objetivo da Matemática seja, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão. Nesse sentido, a própria generalização se torna uma atividade de resolução de problemas através de atividades de investigação.

Vale (2010) afirma que a generalização é uma das componentes mais importantes do conhecimento matemático e a base do pensamento algébrico:

> Uma aula de Matemática desenvolvida através de tarefas desafiadoras que envolvam a exploração de padrões permite construir e ampliar conceitos matemáticos, sobretudo dando significado a esses conceitos, assim como a procedimentos e ideias matemáticas, muitas das vezes aprendidos sem significado e sem relação entre eles, e permite, sobretudo, resolver problemas dentro e fora da Matemática. Permite ainda potenciar capacidades transversais nos estudantes como sejam a comunicação, as representações, as conexões e o raciocínio. (Vale, 2010, p. 1)

2.2 A investigação matemática na resolução de problemas

Na construção de conceitos matemáticos, aparecem várias conexões entre a resolução de problemas e a investigação matemática. Atividades que exploram a resolução de problemas levam os alunos a vivenciar uma experiência matemática de alguns processos diferenciados, como a abstração e a generalização. Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2003), “as investigações matemáticas constituem uma das atividades que os alunos podem realizar e que se relacionam, de muito perto, com a resolução de problemas” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 22). Trabalhando nessa perspectiva, pretende-se que o aluno atue como agente de seu próprio conhecimento, formulando questões, realizando testes, analisando resultados e, juntamente com o professor, formalizando conhecimentos. Nesse processo, o resultado correto não é o objetivo principal. Ponte (2003) afirma que

> Quando trabalhamos um problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona. (PONTE, 2003, p. 17).

Segundo Vargas (2009), quando o professor se propõe a realizar um trabalho investigativo na sala de aula, deve assumir o papel de mediador do conhecimento e não mais o de transmissor do conhecimento. Nesse sentido, Ponte (2003) defende que o estudante deve articular seus conhecimentos atuando como um profissional que investiga, levanta hipóteses e desenvolve e analisa um projeto, construindo novos conceitos.

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O estudante é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (PONTE, 2003, p. 23).

No processo de investigação, é importante que os alunos tenham o momento de investigar individualmente ou em pequenos grupos os problemas propostos e, posteriormente, socializem com o resto do grupo suas conclusões. Para Ponte, Brocardo e Oliveira

> Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, (iii) discussão dos resultados, nos quais os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 25).

O trabalho investigativo pode proporcionar um ensino mais significativo, na medida em que pode despertar o prazer nos alunos em aprender e incentivar o uso criatividade a partir da curiosidade. A aula deixa de ser uma simples palestra de transmissão de informação para se tornar uma aula de ação. Para Fiorentini (2005), o desenvolvimento dessas atividades em sala de aula representa um contexto desafiador tanto para aluno quanto para professor. Nesse sentido, o aluno passa a constituir-se em sujeito de conhecimento.

> O desenvolvimento de Investigações Matemáticas em sala de aula representa um contexto rico e desafiador de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. Para o aluno, porque este passa a constituir-se em sujeito de conhecimento, isto é, alguém que sente o prazer de participar da produção/criação das ideias matemáticas. Para o professor, porque pode encontrar nas Investigações Matemáticas um modo significativo de ensinar, compreender, trabalhar e estabelecer relação com a Matemática, levando os alunos a se interessarem pelas aulas de álgebra, fato pouco comum, atualmente, em nossas escolas. (FIORENTINI et al., 2005, p. 21).

Além disso, quando se trabalha com a investigação matemática, o aluno vivencia alguns processos matemáticos como, por exemplo, a abstração e a generalização.

A abstração está associada a algo que não é real. Segundo Davis e Hersh (1995), a abstração como idealização pode ser entendida quando se parte da observação de uma situação do cotidiano para a criação de um modelo, usado para se analisar ou estudar um ente matemático. Já a abstração como extração pode ser entendida quando se considera, em um estudo, uma semelhança entre situações descritas de formas distintas, de modo a auferir uma nova ideia, ou, até mesmo, a atribuição de outro conceito aos elementos inicialmente analisados.

Ainda segundo Davis e Hersh (1995), o processo de generalização é a consolidação do conhecimento. Ocorre pela compreensão do que se estuda ou se analisa. Parte de uma proposição qualquer para uma descrição de maior aspecto da situação apresentada. Em sala de aula, ao generalizar situações, busca-se a compreensão e a assimilação de conceitos.

2.3 A transição do ensino médio para o ensino superior

Não há dúvidas de que a transição matemática do ensino médio para o ensino superior é uma dificuldade para muitos alunos. Palis (2008) afirma que é crescente o número de alunos que enfrentam problemas nessa transição. Sabe-se que as mudanças vão desde detalhes básicos, como a diferença entre recreio e intervalo, até detalhes mais sutis como a estrutura e a linguagem dos novos livros (que não mais resumem tudo). Mas o que podemos perceber é que, na maioria das vezes, da forma como a matemática é trabalhada numa sala de aula de ensino médio, os alunos não conseguem atribuir sentido ao conteúdo que estudam. Mais do que isso, na matemática superior, além da mudança do enfoque, também muda a linguagem.

Artigue (1998) afirma que a aprendizagem matemática não é um processo sequencial. Ela exige reconstruções, reorganizações e, por vezes, rompe com uma forma anterior de pensar. Ainda segundo a autora, a aprendizagem matemática não pode ser concebida como uma simples progressão de níveis crescentes de abstração.

Pode-se perceber que muitas vezes, no ensino básico, o aluno preocupa-se muito com o estudo para aprovação e não para a compreensão do conteúdo. Esse tipo de atitude traz consequências nas disciplinas iniciais de matemática no ensino superior em que o aluno necessita de familiaridade com conceitos do ensino básico

e que são aplicados nessas disciplinas. Para isso, o aluno que não desenvolveu bem as competências do ensino fundamental e médio precisará revisitar tais assuntos, tentando criar um laço entre os assuntos abordados na educação básica e o que está em estudo naquele momento do ensino superior. Artigue (1999) cita, por exemplo, que a construção dos números reais introduzida no nível universitário se torna, em grande parte, ineficaz se os alunos não são confrontados com as incoerências de suas concepções, gerando, dessa forma, conflitos cognitivos. Infelizmente, pode-se perceber também que esse cenário vem se repetindo no ensino superior. A preocupação dos alunos tem se tornado uma preocupação em aprender para ser aprovado.

Segundo Gueudet (2008), as dificuldades dos alunos são o ponto central nos estudos sobre transição, porque elas podem indicar a existência de um problema dessa transição. Percebe-se que alguns alunos, frequentemente, são incapazes de aplicar conceitos e habilidades básicas de álgebra, por exemplo, e não compreendem o comportamento de certas estruturas algébricas.

Uma menor exigência de conhecimentos matemáticos para aprovação tanto no ensino médio quanto nos exames de admissão na universidade podem ter uma parcela de responsabilidade nessa dificuldade de transição de um nível de ensino para o outro. Em consequência disso, muitas faculdades oferecem, no 1º Período, o curso de pré-cálculo em que os alunos revisam tópicos do ensino médio com um aprofundamento um pouco maior e com foco na preparação para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Artigue (2001), parece que, embora a matemática ocupe uma posição de destaque no ensino fundamental e médio, o conhecimento e as habilidades demonstradas pelos estudantes universitários não refletem esse fato. Hong (2009) acrescenta que uma das possíveis razões para isso é o número de mudanças que ocorrem na transição para o ensino superior, incluindo mudanças no estilo de ensinar e aprender, no tipo de pensamento matemático, na compreensão de conceitos, no conhecimento de procedimentos requeridos para avançar através do material, e necessidade de conhecimento de um maior número de conceitos e procedimentos característicos do pensamento matemático avançado.

Nota-se que a dificuldade nessa transição não é tipicamente do ensino no Brasil. Artigue (2004) analisa as condições do ensino universitário da França e afirma que há uma crescente defasagem em relação ao ensino médio, e que este

vem buscando atualizar tanto as propostas curriculares quanto as práticas pedagógicas. A autora atribui essa defasagem à massificação do ensino secundário e ressalta que o mesmo tentou adaptar-se a essa nova realidade.

3 A HEURÍSTICA DOS LOGARITMOS

A que potência deve ser elevado certo número para fornecer um número dado? A resposta para essa pergunta foi uma das motivações para a criação dos logaritmos. Segundo Boyer (1974), os babilônios já usavam tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhantes às tabelas de antilogaritmos que conhecemos atualmente. Nesse contexto, a questão inicial equivale a perguntar qual o logaritmo de certo número numa dada base.

3.1 A criação dos logaritmos

A criação dos logaritmos também se dá num contexto histórico importante. Eves (2004) salienta que a expansão da Europa entre os anos de entre os séculos XV e XVII deu-se através de três fases. Nesse período, a primeira fase caracterizou-se pelo comércio, quando se iniciaram as viagens comerciais, em que mercadores negociavam com a Ásia, facilitados pela posição geográfica que certas cidades europeias ocupavam. Porém, em outras cidades não tão bem localizadas geograficamente, necessitavam de procurar rotas alternativas, o que incentivou a navegação em busca de rotas marítimas que culminaram, inclusive, com o descobrimento de novas terras.

A segunda fase foi marcada pela conquista e anexação de novos territórios, impondo a hegemonia sobre os nativos das novas terras, muitas vezes violentamente. A terceira fase foi marcada pela efetiva colonização e migração dos europeus para outros continentes.

Nesse contexto, o desenvolvimento da navegação, da astronomia, do comércio e da engenharia demandou cálculos numéricos cada vez mais rápidos e precisos. Eves (1995) afirma que quatro invenções vieram atender sucessivamente a essas demandas: a notação indoarábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores (que surgiram bem mais tarde).

Criados por John Napier (1550-1617), no fim do século XVI, os logaritmos reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração. Arquimedes, segundo Boyer (1974), também já havia mencionado, incidentalmente, em seus trabalhos, o princípio que levou a essa invenção: a adição das “ordens” dos números corresponde a achar o produto dos números.

Outra predecessora dessa ideia é a fórmula trigonométrica $2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$, bem conhecida na época de Napier. Johannes Werner (1468-1522) já havia usado essa fórmula em conjunto com outras fórmulas[4] trigonométricas para simplificar cálculos que apareciam no estudo da astronomia. Esse método tornou-se conhecido como *prostaférese*, nome criado a partir de uma palavra grega que significa "adição e subtração". De acordo com Eves(2004, p. 343), como Napier estava inteirado do método da prostaférese, ele possivelmente foi influenciado por esse método na sua criação.

Segundo esse mesmo autor, apesar dessa influência, a ideia de Napier difere consideravelmente do método da *prostaférese*. Napier procura associar aos termos de uma progressão geométrica *b*, b^2, b^3, ..., b^m, ..., b^n, ... os termos de uma progressão aritmética *1*, *2*, *3*, ..., *m*, ..., *n*, ... de tal forma que o *produto* $b^m\ b^n = b^{m+n}$ da progressão geométrica corresponda à *soma m + n* da progressão aritmética. Escolhendo o número *b* próximo de 1, era possível manter suficientemente próximos os termos numa progressão geométrica, de tal forma que se pudesse usar interpolações para preencher lacunas entre os termos na correspondência precedente. Para isso, Napier usou $b = 1 - 1/10^7 = 0{,}9999999$ e multiplicava cada potência por 10^7 de forma a se evitar os decimais. Desse modo, ficou definido o "*logaritmo*" *L* do número *N* como

$$N = 10^7(1-1/10^7)^L.$$

Segue-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de 9999999 é 1.

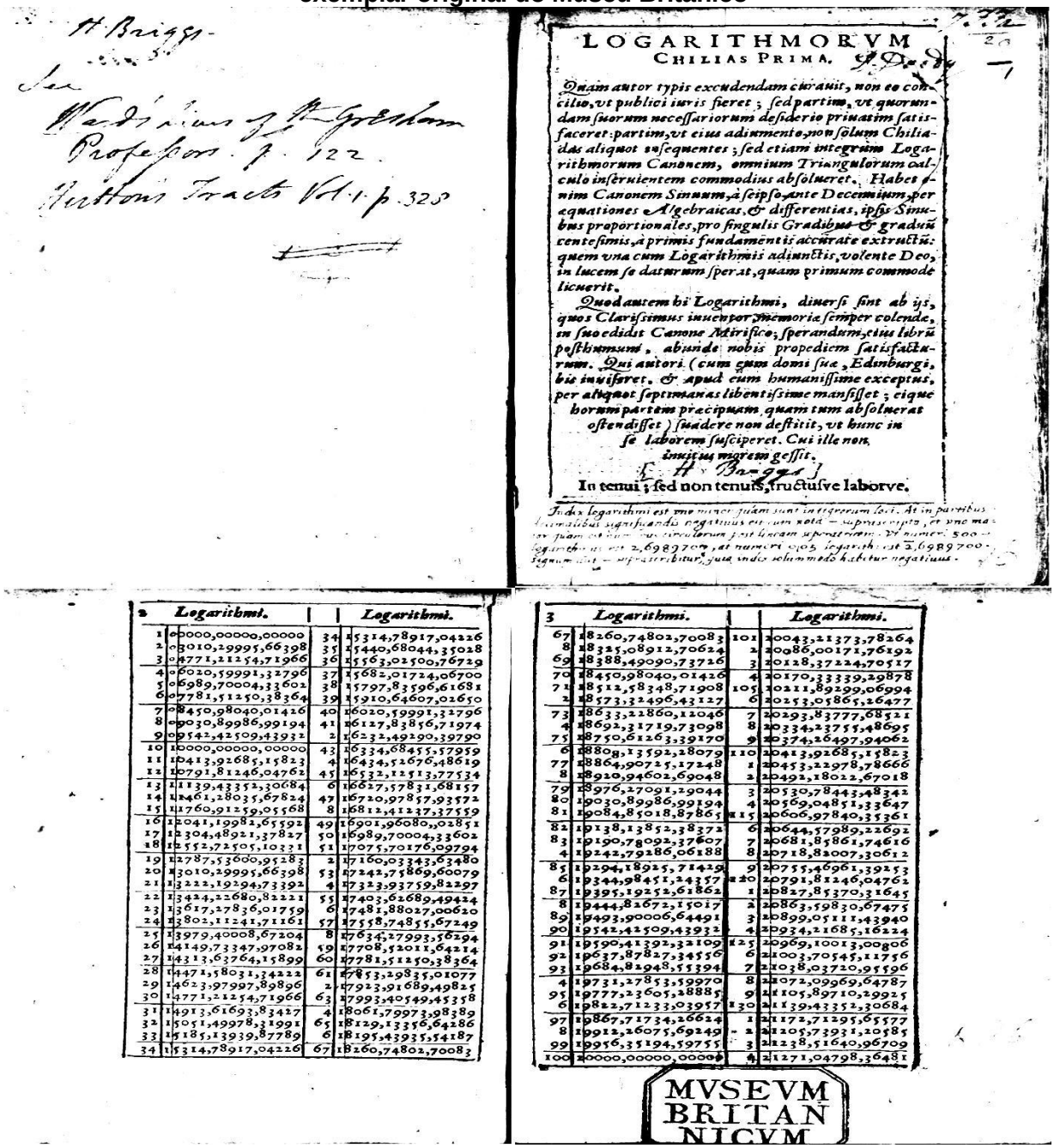
Boyer (1974) atenta para o fato de que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição é diferente da que temos atualmente. Ele também observa que o conceito de função logarítmica está implícito na definição de Napier e em toda sua obra, embora não fosse essa a relação preponderante no trabalho de Napier.

Logo após a publicação, em 1614, do seu sistema de logaritmos, Henry Briggs propõe uma modificação no método utilizado por Napier. Ambos constroem uma proposta em que se utilizavam as potências de base 10 e concordam em utilizar que o logaritmo de 1 deveria ser 0 e que o logaritmo de 10 deveria ser 1.

[4] A fórmula trigonométrica citada juntamente com as fórmulas
$2\text{sen}\,A\cos B = \text{sen}\,(A+B)+\text{sen}\,(A-B)$, $2\cos A\text{sen}\,B = \text{sen}\,(A+B)-\text{sen}\,(A-B)$ e
$2\text{sen}\,A\text{sen}\,B = \cos\,(A-B)-\cos\,(A+B)$ ficaram conhecidas como *fórmulas de Werner.*

Com a morte de Napier em 1617, recai sobre Henry Briggs (1561-1630) a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos, chamados comuns ou briggsianos, a partir do cálculo de raízes sucessivas. Por exemplo, dado que $\sqrt{10} = 3{,}162277$, Briggs tinha que $\log 3{,}162277 = 0{,}5000000$. Exatamente no ano da morte da Napier, Briggs publicou seu *Logarithmorum chilias prima*, uma tabela com os logaritmos dos números de 1 a 1.000, cada um calculado com quatorze casas decimais.

Figura 1: *Logarithmorum Chilias Prima* – algumas páginas de microfilmagem de exemplar original do Museu Britânico



LOGARITHMORVM
CHILIAS PRIMA.

Quam autor typis excudendam curauit, non eo consilio, vt publici iuris fieret; sed partim, vt quorundam suorum necessariorum desiderio priuatim satisfaceret: partim, vt eius adiumento, non solum Chiliadas aliquot subsequentes; sed etiam integrum Logarithmorum Canonem, omnium Triangulorum calculo inseruientem commodius absolueret. Habet enim Canonem Sinuum, à seipso, ante Decennium, per æquationes Algebraicas, & differentias, ipsis Sinubus proportionales, pro singulis Gradibus & gradûm centesimis, à primis fundamentis accuratè extructû: quem vna cum Logarithmis adiunctis, volente Deo, in lucem se daturum sperat, quam primum commode licuerit.

Quod autem hi Logarithmi, diuersi sint ab ijs, quos Clarissimus inuentor, memoriæ semper colendæ, in suo edidit Canone Mirifico; sperandum, eius libru posthumus, abunde nobis propediem satisfacturum. Qui autori (cum cum domi suæ, Edinburgi, bis inuisseret, & apud eum humanissime exceptus, per aliquot septimanas libentissime mansisset; eique horum partem præcipuam, quam tum absolverat ostendisset) suadere non destitit, vt hunc in se laborem susciperet. Cui ille non inuitus morem gessit.

In tenui; sed non tenuis, fructusve laborve.

1	0,00000,00000,00000	34	1,53514,78917,04226
2	0,30103,29995,66398	35	1,54406,80443,35028
3	0,47712,12547,19662	36	1,55630,25076,09729
4	0,60205,99913,27932	37	1,56820,17247,06700
5	0,69897,00043,36018	38	1,57978,35966,61681
6	0,77815,12502,38643	39	1,59106,46072,02650
7	0,84509,80400,14163	40	1,60205,99913,27932
8	0,90308,99869,91947	41	1,61278,38356,71974
9	0,95424,25094,33932	42	1,62324,92509,39790
10	1,00000,00000,00000	43	1,63346,84455,57959
11	1,04139,26855,15823	44	1,64345,26760,48619
12	1,07918,12460,47621	45	1,65321,25139,77534
13	1,11394,33521,30684	46	1,66276,04626,71057
14	1,14612,80357,67824	47	1,67209,78576,93372
15	1,17609,12559,05568	48	1,68124,12337,37559
16	1,20411,99814,65592	49	1,69019,60080,02851
17	1,23044,89211,37827	50	1,69897,00043,36021
18	1,25527,25051,10321	51	1,70757,01767,09794
19	1,27875,36009,95283	52	1,71600,33433,63480
20	1,30103,29995,66398	53	1,72427,58696,60079
21	1,32221,92945,73392	54	1,73239,37589,82297
22	1,34242,26801,82221	55	1,74036,26891,49424
23	1,36172,78356,01759	56	1,74818,80270,00620
24	1,38021,12417,71161	57	1,75587,48855,67249
25	1,39794,00086,67204	58	1,76342,79933,56294
26	1,41497,33347,97082	59	1,77085,20116,64214
27	1,43136,37649,15899	60	1,77815,12503,38364
28	1,44715,80311,34222	61	1,78533,29835,01077
29	1,46239,79997,89896	62	1,79239,91689,49825
30	1,47712,12547,19662	63	1,79934,40549,45358
31	1,49136,16693,83427	64	1,80617,99973,98389
32	1,50514,99788,31991	65	1,81291,33356,64286
33	1,51851,13939,87789	66	1,81954,39355,54187
34	1,53147,78917,04226	67	1,82607,48020,70083

67	1,82607,48020,70083	101	2,00432,13737,78264
68	1,83250,89125,70624	102	2,00860,01717,76192
69	1,83884,90900,73726	103	2,01283,72244,70517
70	1,84509,80400,14163	104	2,01703,33339,29878
71	1,85125,83487,71908	105	2,02118,92999,06994
72	1,85733,32496,43127	106	2,02530,58865,26477
73	1,86332,28860,12046	107	2,02938,38777,68521
74	1,86923,17179,73098	108	2,03342,37555,48695
75	1,87506,06126,39170	109	2,03742,64497,94062
76	1,88080,81359,28079	110	2,04139,26857,15823
77	1,88649,07257,17248	111	2,04532,29978,78666
78	1,89209,94602,69048	112	2,04921,80122,67018
79	1,89762,70911,29044	113	2,05307,84434,48342
80	1,90308,99386,99194	114	2,05690,48851,33647
81	1,90848,50187,87865	115	2,06069,78406,35361
82	1,91381,38523,83721	116	2,06445,79893,22692
83	1,91907,80920,37607	117	2,06818,58861,74616
84	1,92427,92860,60188	118	2,07188,20073,30612
85	1,92942,88925,71429	119	2,07554,69961,39253
86	1,93449,84511,24357	120	2,07918,12460,04762
87	1,93951,92521,61862	121	2,08278,53703,31645
88	1,94448,26721,15017	122	2,08635,98830,67475
89	1,94939,00006,64491	123	2,08990,51117,43940
90	1,95424,25094,43932	124	2,09342,16857,16224
91	1,95904,13923,23109	125	2,09691,00133,00806
92	1,96378,78274,34556	126	2,10037,05451,11756
93	1,96848,29481,55394	127	2,10380,37202,95596
94	1,97312,78533,59970	128	2,10720,99693,64787
95	1,97772,36059,28885	129	2,11058,97210,29925
96	1,98227,12133,03957	130	2,11394,33352,30684
97	1,98677,17734,26624	131	2,11727,12951,65577
98	1,99122,60759,69249	132	2,12057,39311,20585
99	1,99563,51949,59755	133	2,12385,16402,96709
100	2,00000,00000,00000	134	2,12710,47983,64814

MVSEVM BRITANNICVM

Fonte: http://www.pmonta.com/tables/logarithmorum-chilias-prima/index.html

Stewart (2013) afirma que uma das consequências da criação dos logaritmos foi a criação de métodos eficientes para calcular fenômenos astronômicos, tais como eclipses e órbitas planetárias e formas rápidas de executar cálculos científicos.

Atualmente, com o uso de calculadores científicas e dos (super)computadores, os logaritmos não são mais necessários para simplificar os cálculos, mas são usados na modelagem de certos fenômenos e na resolução de equações exponenciais. Eves (2004) afirma que o logaritmo nunca morrerá pelo simples fato de que as variações exponenciais e logarítmicas são partes vitais da natureza.

3.2 Logaritmo, um expoente

A que potência deve ser elevado certo número para que resulte num outro número dado?

Diversas vezes fazemos essa pergunta na resolução de problemas envolvendo potência, mas ela está presente desde textos babilônicos do ano 600 a.C. Os logaritmos foram fundamentais para responder a ela.

Na maioria dos livros didáticos voltados para o Ensino Médio, encontramos a seguinte definição para logaritmos: “Sendo *a* e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo* de *b* na base *a* o expoente que se deve dar à base *a* de modo que a potência obtida seja igual a *b*.”(Iezzi et al., 2011)

Dessa forma, temos que, por exemplo, o logaritmo de 32 na base 2 é igual a 5, pois $2^5 = 32$ e podemos escrever $log_2 32 = 5$.

Usando símbolos, escrevemos que

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1 \text{ e } b > 0.$$

Dizemos que *a* é a base do logaritmo e *b* é o logaritmando.

3.2.1 Propriedades

Algumas propriedades decorrem diretamente da definição de logaritmo. Sendo a, b e c números reais, tais que $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, temos que:

- $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$.
- $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$.
- $a^{\log_a x} = x$, pois, sendo $\log_a b = c$, então $a^c = b$, mas $a^c = a^{\log_a b} = b$.
- $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$, pois, se $\log_a b = \log_a c$, então $a^{\log_a c} = b$ e da propriedade anterior $c = b$.
- $b = c \Rightarrow \log_a b = \log_a c$, pois, sendo $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, temos que $a^x = b$ e $a^y = c$. Mas como $b = c$, segue que $a^x = a^y$, o que implica que $x = y$ e, consequentemente, $\log_a b = \log_a c$.

Outras propriedades decorrem das propriedades dos expoentes.

- **Logaritmo do produto**

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração:

Consideremos que

i. se $\log_a b = x$, então $a^x = b$,
ii. se $\log_a c = y$, então $a^y = c$,
iii. se $\log_a(b.c) = z$, então $a^z = b.c$.

Substituindo b e c no item (iii) pelas igualdades de (i) e (ii), obtemos que $a^z = a^x.a^y = a^{x+y}$ e, portanto, $z = x + y$. Logo, $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$.

- **Logaritmo do quociente**

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração:

Consideremos agora que

i. se $\log_a b = x$, então $a^x = b$,
ii. se $\log_a c = y$, então $a^y = c$,
iii. se $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = z$, então $a^z = \left(\frac{b}{c}\right)$.

Substituindo b e c no item (iii) pelas igualdades de (i) e (ii), obtemos que $a^z = \left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$ e, portanto, z = x - y. Logo, $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

- **Logaritmo da potência**

$\log_a b^p = p.\log_a b$

Demonstração:

Consideremos agora que

i. se $\log_a b = x$, então $a^x = b$,

ii. se $\log_a b^p = y$, então $a^y = b^p$.

Substituindo b do item (i) no item (ii), obtemos que $a^y = (a^x)^p = a^{px}$ e, portanto, y = px, o que leva a $\log_a b^p = p.\log_a b$.

3.2.2 Sistemas de Logaritmos

Chamamos de *sistema de logaritmos de base a* (a > 0 e a ≠1) o conjunto formado por todos os logaritmos nessa base. Os dois sistemas mais utilizados são o de logaritmos decimais e o de logaritmos neperianos.

O sistema de logaritmos decimais ou logaritmos de Briggs são aqueles que utilizam a base 10. Foram desenvolvidos por Henry Briggs, a partir dos trabalhos de Napier. Por convenção, quando omitimos base na notação dos logaritmos, estamos nos referindo aos logaritmos de Briggs, ou seja, estamos usando a base 10. Por exemplo, indicamos $\log_{10} 3$ simplesmente por log 3.

O sistema de logaritmos neperianos ou naturais utiliza a base *e*. O nome deriva de Napier, cujos trabalhos envolviam, de forma não explicita, o que hoje conhecemos como número *e*. Usamos a notação *ln.* para representar o logaritmo natural. Assim, indicamos $\log_e 3$ por *ln.* 3.

As calculadoras científicas possuem as teclas

e

que fornecem, de maneira simples, os valores dos logaritmos decimais e naturais de um número real não negativo.

3.2.3 Mudança de base

Em alguns casos, estamos interessados em calcular logaritmos em uma base diferente da base decimal ou da base natural. Para realizar esse cálculo, devemos convertê-los para as bases conhecidas, nas quais podemos calcular o logaritmo com o auxílio da calculadora. Para essa conversão, utilizamos a seguinte relação:

$$\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$$

sendo a, b e c números reais não negativos, com a e b diferentes de 1.

Essa relação é válida, pois, se considerarmos que

$$\log_a c = x \Leftrightarrow a^x = c \quad \text{e}$$
$$\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$$

temos que $a^x = b^y$. Assim,

$$\log_b\left(a^x\right) = \log_b\left(b^y\right) \Rightarrow x.\log_b(a) = y.\log_b(b) = y\,.$$

Como a ≠ 1, sabe-se que $\log_a b \neq 0$ e, portanto,

$$x = \frac{y}{\log_b(a)} \Rightarrow \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}\,.$$

3.2.4 Algumas aplicações

Apresentamos, a seguir, algumas aplicações do sistema de logaritmos, como o fator pH, as escalas Richter e Decibel e a resolução de equações exponenciais.

3.2.4.1 <u>Fator pH</u>

O fator pH é um índice muito usado pelos químicos para medir a concentração de íons positivos numa solução. As soluções ácidas apresentam uma concentração entre 10^{-2} e 10^{-7} moles por litro desses íons. Já as soluções básicas apresentam uma concentração entre 10^{-7} e 10^{-12} moles por litro de íons positivos. As substâncias neutras são aquelas que apresentam a concentração de 10^{-7} moles por litro.

Como a concentração desses íons são números muito pequenos, a utilização dos logaritmos é uma maneira mais adequada para caracterizar essas soluções. O pH de uma solução é dado pela equação $pH = \log\frac{1}{H^+}$, em que H^+ é o número de moles de íons de hidrogênio por litro. Dessa forma, temos que as soluções ácidas são aquelas que têm pH inferior a 7, as básicas têm pH superior a 7 e as neutras têm pH igual a 7.

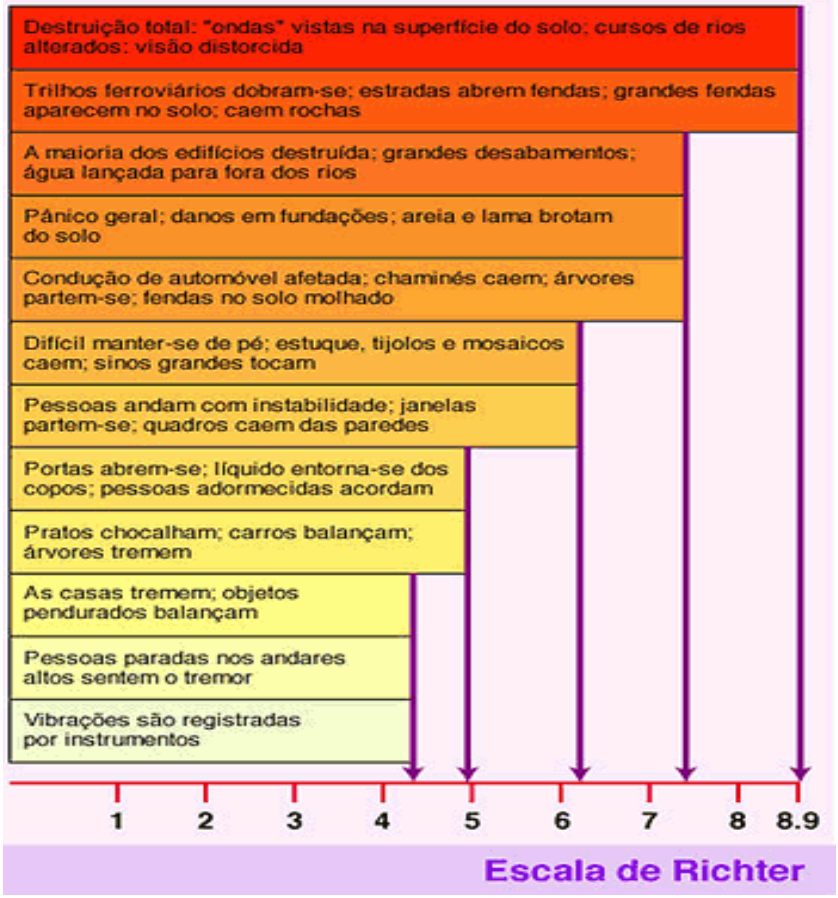
3.2.4.2 Escala Richter

A escala Richter é uma escala logarítmica decimal que mede a intensidade das ondas geradas por um centro sísmico em um terremoto. Análogo ao caso do pH, aqui ocorrem números muito grandes nas medidas da energia liberada nos terremotos, sendo mais adequado o uso de logaritmos na construção dessa escala. Charles F. Richter, sismólogo americano, formulou essa escala com base na amplitude dos registros das estações sismográficas.

Segundo Demana (2009, p.155), a grandeza R de um terremoto, medida pela escala Richter, é $R = \log\frac{a}{t} + B$, em que a é a amplitude (em micrômetros, μm) do movimento vertical do solo que é informado num sismógrafo, t é o período do abalo sísmico em segundos e B é a amplitude do abalo sísmico com distância crescente partindo do epicentro do terremoto.

Apresentamos a seguir os efeitos de terremotos e a medição de sua magnitude na Escala Richter (Figura 2).

Figura 2: Efeitos dos terremotos e medição de sua magnitude



Fonte: Adaptado de: http://www.geomundo.com.br/meio-ambiente-40113.htm

3.2.4.3 Escala Decibel

A percepção do volume está relacionada à intensidade de uma onda sonora. Segundo Bauzer (2013), em 1923, Harvey Fletcher e seus colegas da Bell System, nos Estados Unidos, introduziram o conceito de “unidade de sensação” baseada em uma escala logarítmica. Ele afirma que o ouvido humano funciona dentro de uma vasta faixa de potência e frequência, com um comportamento que se aproxima de uma função logarítmica e que, a partir dessa ideia, surgiu a escala Decibel.

A escala Decibel é uma das mais utilizadas em Acústica e expressa a sensação (S) de um indivíduo a um estímulo sonoro (I), que pode ser dado pela lei:

$$S = k.log\frac{I}{I_{ref}}$$

S: Sensação auditiva

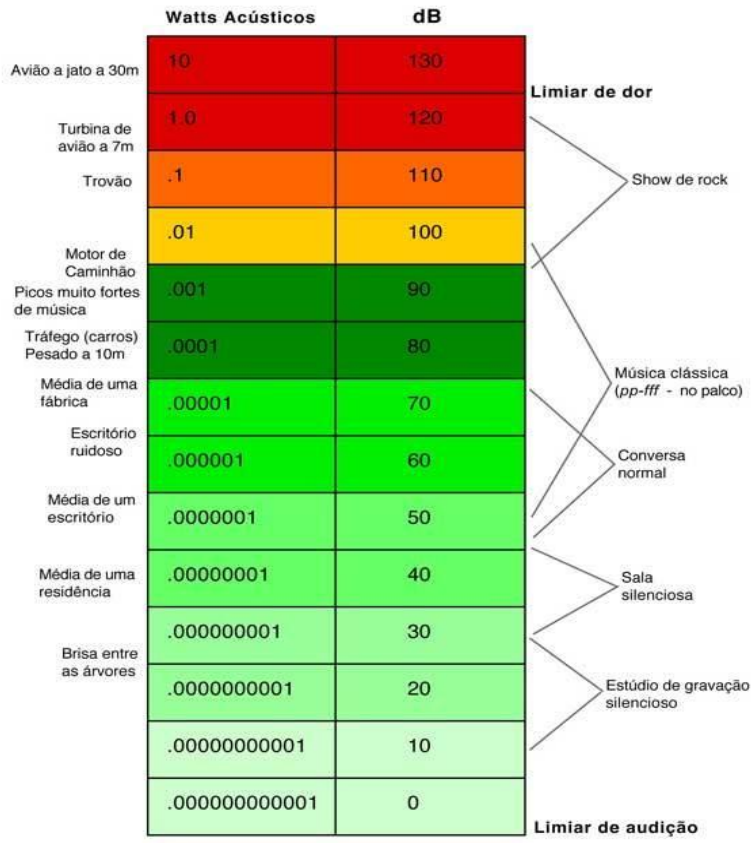
K: Constante de proporcionalidade

I: Estímulo

I_{ref}: Estímulo de referência

A tabela a seguir apresenta alguns valores medidos.

Tabela 1: Escala Decibel



Fonte: http://www.etelj.com.br/etelj/artigos/e25e1be1075a875af1aad3b0ce2ffe0f.pdf

3.2.4.4 Resolução de equações exponenciais

A utilização dos logaritmos para resolver equações exponenciais talvez seja uma das aplicações mais comuns. Quando precisamos resolver uma equação do tipo $2^x = 1024$, podemos fatorar o número 1024 e comparar as bases e os expoentes. Nesse exemplo, temos que $2^x = 1024 = 2^{10}$ e, portanto, x = 10.

Mas resolver a equação $2^x = 3$, por exemplo, não é tão simples, pois não conseguimos fatorar o número 3 em uma potência de base 2.

O que fazer quando não conseguimos escrever ambos os membros com a mesma base? O uso de logaritmos é a solução!

Usando as propriedades dos logaritmos, podemos reescrever a equação $2^x = 3$ como uma igualdade de logaritmos em uma base conveniente, por exemplo:

$$\log(2^x) = \log(3).$$

Escrevendo dessa maneira, podemos usar a propriedade do logaritmo da potência e reescrever novamente como

$$x.\log(2) = \log(3).$$

Essa forma nos permite facilmente encontrar um valor para *x*, pois log(2) e log(3) são números (não nulos) que podem ser determinados com o auxílio de uma calculadora. Assim, temos que:

$$x = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx \frac{0{,}4771}{0{,}3010} \approx 1{,}5850\,.$$

Geralmente, usamos a base 10 ou o logaritmo natural, pois estes estão presentes em qualquer calculadora científica, porém o resultado não é influenciado pela escolha da base, já que, para qualquer base b escolhida, temos a razão $\frac{\log_b(3)}{\log_b(2)}$ que, segundo a propriedade de mudança de base, representa o mesmo número, no caso $\log_2(3)$.

3.3 A função logarítmica

Analisando gráficos das funções exponenciais, podemos notar que todos eles passam no teste da linha horizontal[5], isto é, são funções injetoras. Logo, podemos afirmar que a relação inversa à função exponencial é também uma função. Podemos achar a inversa de uma função trocando os valores de *x* pelos de *y* e vice-versa, nos

[5] Dada uma função f(x), quando desejamos saber a sua função inversa, precisamos anteriormente descobrir se a função dada é injetora, ou seja, dado qualquer valor do conjunto Imagem (Im_f), há apenas um correspondente no conjunto Domínio (Dom_f). Isso é necessário porque, a partir do momento em que se realiza a inversão de funções, o conjunto Imagem da função original passa a ser o domínio. Uma forma de descobrir se uma função é injetora ou não é esboçar o seu gráfico e traçar retas horizontais (paralela ao eixo x) e verificar se esta intersecta a curva em dois ou mais pontos.

pares ordenados das funções. Por exemplo, se tomarmos a função f(x): $y = 5^x$, sua inversa será a função $f^{-1}(x)$: $x = 5^y$.

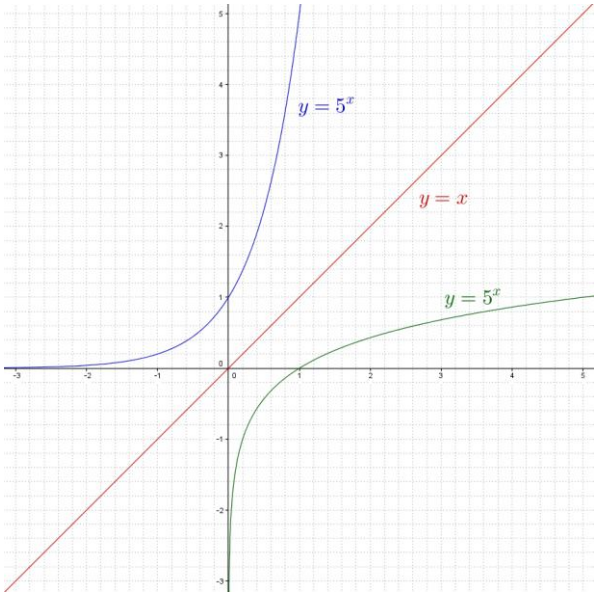
Tabela 2: Funções Exponenciais

$f(x)$: $y = 5^x$		$f^{-1}(x)$: $x = 5^y$	
x	y	x	y
−3	0.008	0.008	−3
−2	0.004	0.004	−2
−1	0.2	0.2	−1
0	1	1	0
1	0	0	1
2	25	25	2
3	125	125	3

Fonte: Elaborada pelo autor

Vale lembrar que o gráfico de uma função e sua inversa são simétricos em relação à reta y = x.

Gráfico 1: Função e sua inversa



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos generalizar essa situação para todas as funções $y = a^x$ em que a inversa é $x = a^y$. Podemos definir a função logarítmica como aquela que associa a determinado número o seu logaritmo na base dada $y = \log_a x$. Desse modo, a cada equação logarítmica podemos associar uma equação exponencial.

Como as funções exponenciais e logarítmicas são inversas umas das outras, temos que a função composta entre elas gera a função identidade f(x) = x. Isto é, se f(x) = $\log_a x$ e g(x) = a^x, vamos mostrar que f(g(x)) = x e g(f(x)) = x. O que é verdade, pois, por um lado, f(g(x)) = f(a^x) = $\log_a a^x$ = x; e, por outro, g(f(x)) = g($\log_a x$) = $a^{\log_a x}$ = x.

3.4 O número *e*

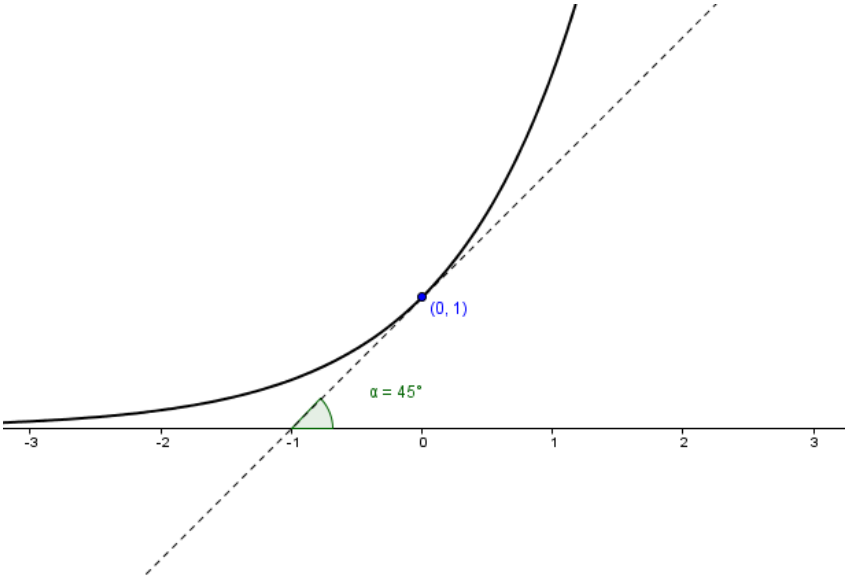
Desde a Antiguidade, questões financeiras são foco de preocupações. Maor (2008) afirma que nenhum outro aspecto da vida tem uma característica mais comum do que o impulso para acumular riqueza e conseguir a independência financeira. Ele ainda sugere que o modo como o dinheiro se acumula e o comportamento de certa expressão matemática no infinito tenham sido notados desde o início do século XVII. Nesse contexto, os babilônios já haviam encontrado aproximações para o número *e*.

A história do número *e* confunde-se com a história do cálculo integral e diferencial. Na tentativa de calcular a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$, Newton e Leibnitz encontraram motivação para estudar processos infinitos e, assim, toparem com o cálculo e com o número *e*. Por esse motivo, o número *e* é definido com frequência pelo limite

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Simons (1987) destaca que essa definição tem a vantagem da brevidade, mas a desvantagem de não lançar qualquer luz sobre o significado de um número tão importante. Ele destaca que a função y = e^x é a única função que permanece inalterada com a derivação e que essa é a única função das funções exponenciais y = a^x (a >1), cuja reta tangente no ponto (0,1) tem inclinação igual a 1.

Figura 3: Função do número *e*



Fonte: Simons (1987)

3.5 O logaritmo natural

O número $\log_e x$ ou, simplesmente, ln x é chamado de **logaritmo natural de *x***. Segundo Simons (1997), essa nomenclatura se deve ao fato de esse ser o logaritmo mais conveniente para se utilizar em Cálculo e suas aplicações, já que a derivada do logaritmo é dada por

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e\,,$$

e, como $\log_e e = 1$, a derivada toma sua forma mais simples, se a base *a* for escolhida como sendo o número *e*

$$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}\,.$$

Segundo Dante (2009), os logaritmos naturais aparecem em diversas aplicações como, por exemplo, os juros compostos e o crescimento de bactérias.

4 PERCURSO DA PESQUISA

O ensino da Matemática, como mostram os PCN (BRASIL, 1999), deve ser composto por uma série de temas ou tópicos em Matemática, escolhidos a partir de critérios que visam ao desenvolvimento de certas atitudes e habilidades.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (PCN, 1999, p. 44)

Os PCN+ (2002) ainda destacam que o aluno deve saber consultar, analisar e interpretar textos veiculados em diferentes meios:

> - Ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem matemática, desde livros didáticos até artigos de conteúdo econômico, social ou cultural, manuais técnicos, contratos comerciais, folhetos com propostas de vendas ou com plantas de imóveis, indicações em bulas de medicamentos, artigos de jornais e revistas.
> - Acompanhar e analisar os noticiários e artigos relativos à ciência em diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e televisão, identificando o tema em questão e interpretando, com objetividade, seus significados e implicações para, dessa forma, ter independência para adquirir informações e estar a par do que se passa no mundo em que vive. (PCN+, p. 114).

Schoenfeld (1997) afirma que, mesmo que pudéssemos preparar os alunos com treinamento em cada uma das estratégias para resolução de problemas isoladamente, isso poderia resultar em pequena ou nenhuma diferença em seu desempenho global na resolução de problemas.

Na tentativa de indagar acerca dessas estratégias, buscamos uma aprendizagem mais significativa através de uma sequência didática interdisciplinar, utilizando atividades exploratórias sobre vários aspectos dos logaritmos e que apresentam níveis de dificuldade diferenciados, partindo de situações-problema, algumas aplicadas a situações com referência na realidade. Tais atividades podem requerer o eventual apoio de recursos computacionais, com o objetivo de despertar o interesse dos alunos em buscar soluções, utilizando seus conhecimentos prévios e novos, sem que a aprendizagem se restrinja a uma memorização de fórmulas, regras e definições.

Inicialmente, passamos por um processo de revisão sistemática bibliográfica, que teve seus principais aspectos destacados nos capítulos 2 e 3. Logo após, nos

dedicamos à elaboração de dois tipos de atividades: as primeiras, com caráter investigativo e que procurassem levar o aluno a (re)construir o conceito de logaritmos e verificar suas propriedades; as demais, atividades que procuravam aplicar os conceitos e as propriedades em problemas. Para finalizar, foi feita a análise qualitativa dos dados, que será discutida nos capítulos posteriores.

4.1 A elaboração das atividades

As atividades que compõem esta pesquisa foram criadas tendo por finalidade (re)significar conceitos, propriedades e aplicações dos logaritmos através da resolução de problemas, utilizando diversos gêneros textuais. Essas atividades foram planejadas no modelo de investigação matemática, para que os alunos fossem capazes de construir o conhecimento e ressignificá-lo de forma autônoma. Além de poderem ser aplicadas em disciplinas introdutórias ao cálculo no ensino superior, como neste caso, as atividades podem ser aplicadas também em salas de aula do ensino médio ou em cursos de formação e capacitação de professores.

Pretende-se, por meio da organização de um caderno de atividades, proporcionar ao educador a possibilidade de criação de investigações e experimentações em sala de aula, relacionando aspectos históricos e interdisciplinares dos logaritmos. Schneuwly e Dolz (1999) destacam a importância de ações que incentivem a produção, compreensão e interpretação de enunciados escritos para oportunizar diferentes ações de linguagem. Por esse motivo, as atividades são sempre iniciadas com a leitura de textos de diversas fontes, que trazem informações da história da Matemática ou da atualidade. Segundo Miranda (2010), essa estratégia visa a incentivar e valorizar o hábito de leitura e escrita dos estudantes, bem como aproximá-los dos meios de comunicação. Miranda ainda destaca que tais textos motivam os envolvidos nessas atividades a um conhecimento interdisciplinar.

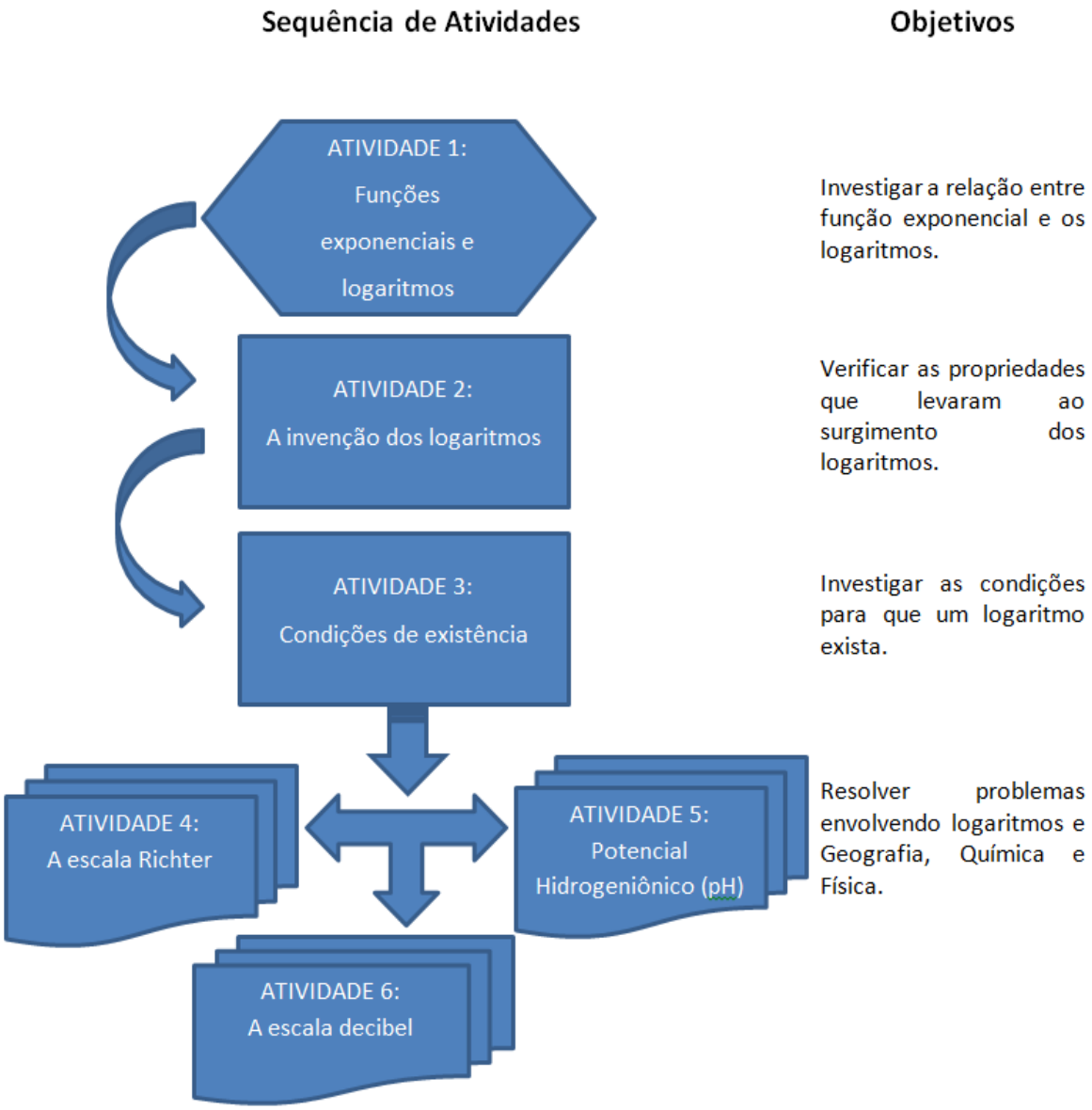
Portanto, a partir da leitura do texto de cada atividade, o aluno é levado a investigar, discutir e resolver as situações-problema. Com essa proposta, espera-se que o estudante vivencie experiências matemáticas de investigação, conjecturação e generalização.

> Em uma metodologia centrada na resolução de problemas, o aluno tem a possibilidade de colocar em ação seus conhecimentos e desenvolver a capacidade para ler e gerenciar informações expressas de diferentes

> maneiras, ampliando sua visão acerca da Matemática. (KLESSER, 2006, p. 113).

As atividades deverão ser aplicadas na ordem numérica pré-estabelecida, visto que a sequência das atividades pretende levar o aluno a refletir sobre a necessidade da criação dos logaritmos e a motivação dessa criação pelo uso de certas propriedades antes de se tratar da aplicação dos logaritmos em contextos interdisciplinares.

Figura 4: Sequência das atividades



Fonte: Elaborada pelo autor

Para a realização das atividades, propomos o agrupamento em duplas. Coll (1997) nos motiva a usar esse agrupamento quando afirma que se deve dar ênfase às relações que se estabelecem entre aluno-aluno, isto é, entre o grupo de pares. O mesmo autor afirma que numerosas investigações revelaram que as relações entre alunos incidem de formas decisivas sobre aspectos como a socialização, a aquisição de competências, o aumento do nível de desempenho e o rendimento escolar.

4.2 A instituição e os sujeitos da pesquisa

A instituição de ensino superior na qual foram aplicadas as atividades está localizada no município de Belo Horizonte, Minas Gerais, e conta com mais de 2.000 alunos matriculados em cursos de Engenharia, distribuídos em diversas ênfases: Ambiental, Automação, Civil, Elétrica, Mecânica, Produção e Química.

Os sujeitos da pesquisa são alunos de uma turma especial da disciplina de Cálculo I, do ciclo básico de todos os cursos de Engenharia dessa IES, e já conheciam o pesquisador como professor da disciplina. As aulas aconteceram aos sábados, pela manhã, de 7h 35min às 12h 55min. Os alunos eram regularmente matriculados dos turnos da manhã e da noite

5 APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

A aplicação ocorreu em meados do mês de setembro de 2013 e a investigação se deu em um contexto rotineiro de sala de aula, envolvendo 24 alunos. A previsão era de que a aplicação das atividades e a discussão dos resultados acontecessem em uma aula (100 min).

No início de cada aplicação, os alunos foram orientados a executar a atividade em dupla, possibilitando a discussão das atividades. Desse modo, o professor passa a assumir o papel de mediador. Cada aluno recebia uma cópia da atividade, sendo que apenas uma das cópias seria devolvida ao professor, ficando a outra cópia em posse da dupla para que pudessem fazer suas anotações no momento da discussão. As duplas também foram orientadas a fazer uma leitura das atividades com bastante calma e atenção, sem se preocupar com os possíveis erros e acertos, e a fazer uma análise reflexiva das atividades.

Os alunos foram alertados sobre a importância da frequência durante os encontros para não prejudicar o andamento das atividades. Também foi pedido a eles que, preferencialmente, as atividades fossem realizadas com a mesma dupla.

Para a realização de cada atividade, foi disponibilizado apenas lápis, borracha, papel, caneta e calculadora. Durante a realização da tarefa, os alunos foram observados informalmente e, a partir dessa observação, as informações sobre as atitudes dos alunos e o modo como articulam os conhecimentos matemáticos formais e informais foram coletados em um diário de bordo e através de gravações de áudio. Os registros realizados pelos alunos na resolução de cada situação proposta se deram através de pequenos textos, de registro numérico e registro algébrico.

Após o cumprimento de cada atividade, as duplas socializaram suas experiências, dificuldades e reflexões e houve uma sistematização do conteúdo pelo pesquisador. Para isso, utilizaram como base a folha de atividades que permaneceu em posse da dupla.

5.1 Atividade 1

Leia o seguinte texto:

Carro não é investimento: isso é um fato constatado por qualquer comprador de carro 0 km, que vê seu patrimônio desvalorizar-se algumas dezenas de reais no momento em que tira o carro da concessionária. Isso é uma característica de todos os mercados automotivos desenvolvidos.

Apesar disso, em função da elevada liquidez dos automóveis, muitas famílias ainda veem o carro como uma "reserva de valor" - um recurso que pode estar disponível em caso de emergência, e, para esses casos, o índice de depreciação do veículo é um dado importante, pois define o quanto de dinheiro o consumidor irá perder.

A depreciação média dos carros brasileiros em um ano é de 15,3%, variando para mais ou para menos de acordo com as características (carros importados e mais caros tendem a desvalorizar mais). A agência Molicar fez um estudo com os índices de desvalorização dos automóveis no Brasil, e elaborou um *ranking* dos carros com base nesse requisito.

Por exemplo, o Celta, com desvalorização média de 9,7% depois de doze meses de uso, é o carro que menos desvaloriza. Em segundo lugar vem o Mille Economy, da Fiat, com 10,1% de depreciação. Aliás, os carros da Fiat aparecem, em média, como os menos depreciados do mercado, junto com os modelos mais acessíveis da Volkswagen.

Subindo um pouco nos preços, vemos a Ford EcoSport XLT Freestyle e o Honda Fit 1.4 LX-AT, com um índice de desvalorização de 12,2% depois de doze meses. Entre os carros grandes, a Captiva Sport 2.4 foi a que menos desvaloriza, com 12,5% de perda de valor. Na outra ponta, temos o Omega, com desvalorização de 25%, mesmo assim ainda à frente do Kia Carnival, que perde 25,5%.

FONTE: HTTP://WWW.CAR.BLOG.BR/2012/01/RANKING-DE-DESVALORIZACAO-DE-CARROS.HTML - ACESSO EM 25/07/2013

Segundo o texto, o valor de um automóvel Mille Economy sofre uma depreciação de cerca de 10% ao ano. Supondo que essa desvalorização é constante, podemos modelar uma função que representa o valor deste automóvel após **t** anos da seguinte forma:

$$f(t) = 25000.(0{,}9)^t$$

I. Com base na fórmula apresentada, responda:

a. Qual o valor do automóvel no momento da compra? Justifique.
b. Existe algum valor de **t** para que o valor do carro seja de R$15.000? Se possível, determine.

O texto afirma que todo comprador de carro 0 km sabe que carro não é investimento. Isso porque a desvalorização sempre ocorre.

II. Com base na fórmula apresentada, construa uma tabela com o valor do carro (em reais) após *t* anos para alguns valores de *t*.

III. Com os dados obtidos na tabela anterior, construa um gráfico relacionando o tempo e o valor do carro.

IV. Analisando o gráfico e a tabela, responda:
a. Em quanto tempo **t** o valor do carro é de aproximadamente R$15.000? Compare sua resposta com o item I.b.
b. Aproximadamente em quanto tempo o valor do carro é a metade do valor inicial?
c. Qual a tendência do valor do carro ao passar de muitos anos (mais de 30)?
d. Existe algum tempo em que o valor do carro é R$ 0,00? Justifique.

A aplicação dessa primeira atividade se iniciou logo após o estudo das funções exponenciais. Seu objetivo era verificar a necessidade de algum meio que permitisse resolver equações exponenciais em que não fosse possível utilizar algum dos métodos estudados até então: igualar as bases ou fazer uma substituição $a^x = y$.

O texto apresentado nessa atividade é um texto informativo que foi retirado de um *site* especializado[6] em automóveis e descreve o que acontece com o preço dos carros ao longo dos anos. Diante disso, com base em um exemplo citado no texto em que a desvalorização de determinado carro era de cerca de 10% ano, foram propostas as atividades desse primeiro momento.

[6] http://www.car.blog.br – Acesso em 25/07/2013 às 13:47

Tão logo as atividades começaram a ser distribuídas, certa aluna disse alto: *“Que texto grande!”.*

Na verdade, nenhum daqueles alunos nunca havia trabalhado com textos durante uma aula de Matemática, conforme ficou constatado pelos dados recolhidos do questionário de avaliação final. Na medida em que as atividades foram sendo distribuídas, mais dois alunos comentaram sobre o tamanho do texto:

Aluno E1: *“Nunca vi uma atividade de Matemática com texto tão grande. Nem no ENEM!”.*

Aluno A1: *“Nossa, tem que ler tudo isso para poder responder as questões?”*.

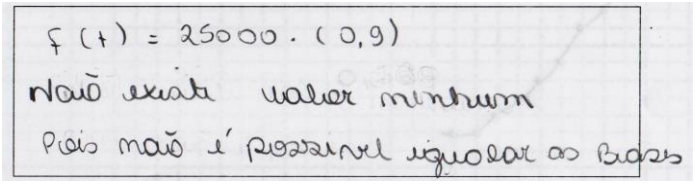
Com todas as duplas de posse das atividades, os alunos foram orientados a fazer a leitura do texto e das questões com bastante atenção e a procurar, durante a resolução da atividade, refletir sobre cada problema. Também foi solicitado que, sempre que houvesse alguma dúvida, essa deveria ser discutida, primeiramente, entre a dupla, antes de solicitarem alguma intervenção do professor. Além disso, foi pedido que, em cada questão, a dupla deixasse registrada a justificativa da resposta, utilizando um pequeno texto ou a linguagem matemática. Depois das orientações, houve um momento de silêncio em que os alunos se concentraram na leitura do texto.

A primeira questão gerou pouca dúvida. O primeiro item era bem simples do ponto de vista do pesquisador, que esperava 100% de acerto. Porém, foi verificado que apenas 75% dos alunos acertaram essa questão. O erro aconteceu na interpretação do trecho que diz que a função apresentada “representa o valor deste automóvel após **t** anos”. Os alunos que erraram a questão consideraram **t = 1** para descobrir o valor inicial do carro, enquanto que o correto era considerar **t = 0**.

O item (b) da primeira questão é fundamental para início da reflexão sobre a necessidade de uma estratégia para resolver certas equações exponenciais. Como esperado, as respostas foram bastante diversificadas.

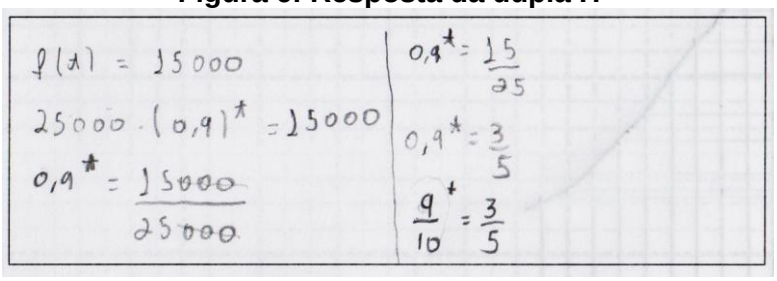
Algumas duplas tentaram utilizar o método já conhecido de igualar as bases. Porém, ao verificar que não era possível, ou paravam a resolução ou simplesmente escreviam que era impossível.

Figura 5: Resposta da dupla C



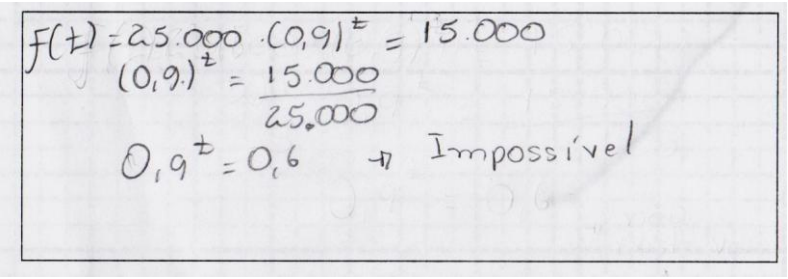
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 6: Resposta da dupla H



Fonte: Dados da pesquisa

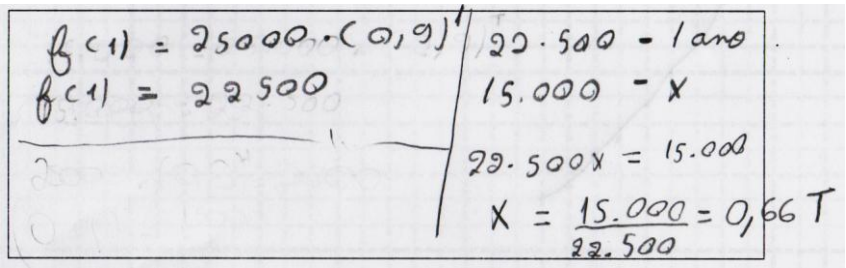
Figura 7: Resposta da dupla E



Fonte: Dados da pesquisa

Não observando que a função não era linear, uma dupla tentou utilizar a regra de três.

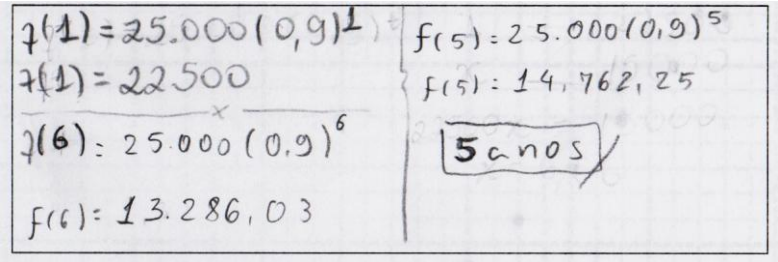
Figura 8: Resposta da dupla J



Fonte: Dados da pesquisa

Por tentativas, uma dupla conseguiu acertar a questão.

Figura 9: Resposta da dupla L



Fonte: Dados da pesquisa

Durante a resolução desse item, alguns alunos chegaram a argumentar com o professor sobre a impossibilidade de haver uma solução:

Aluno A1: *"Professor, mas isso aqui é impossível. Não estou conseguindo igualar as bases!"*

O professor tentou provocá-los com várias perguntas:

Professor: *"Será mesmo impossível? Será que não existe nenhum número que satisfaz essa equação?"*

Professor: *"Então esse carro nunca poderá ter esse preço?"*

Nesse momento, novamente foi solicitado que deixassem registradas todas as justificativas das respostas.

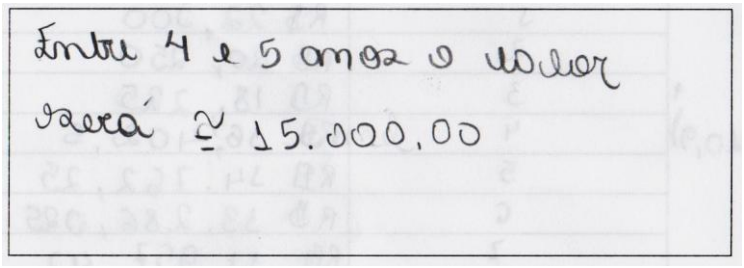
As questões seguintes, II e III, também eram questões simples, em que se propunha construir uma tabela com valores do carro durante alguns anos (questão II) e, posteriormente, com base nessa tabela, construir um gráfico (questão III). Essas duas questões tiveram 100% de acerto e não geraram dúvidas. Um único auxílio por parte do pesquisador foi prestado a algumas duplas durante a resolução da questão II no que se refere à utilização da calculadora para realizar a potenciação. Alguns alunos não sabiam como utilizá-la para calcular potências utilizando a tecla ^.

A última questão dessa primeira atividade era composta de quatro perguntas sobre o gráfico e a tabela construídos.

Logo de início, o primeiro item pedia para verificar em quanto tempo o valor do carro seria de R$ 15.000,00. Pergunta semelhante ao item I.b.

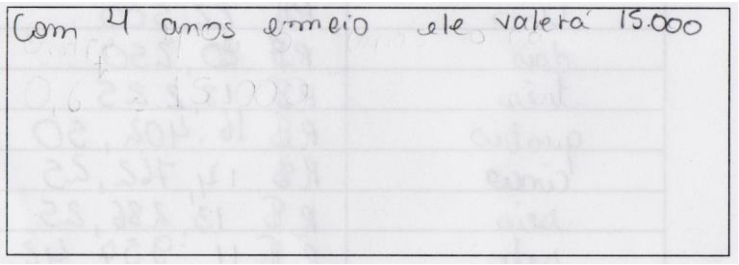
Analisando a tabela, as duplas conseguiram fazer boas aproximações do tempo em que o carro chegaria ao valor desejado, mesmo aquelas que responderam que era impossível descobrir esse tempo na questão I.b.

Figura 10: Resposta da dupla C



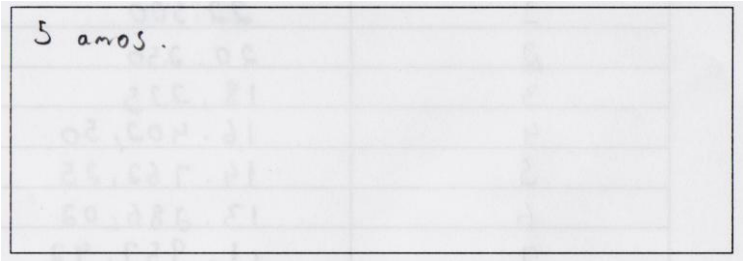
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 11: Resposta da dupla E



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 12: Resposta da dupla H

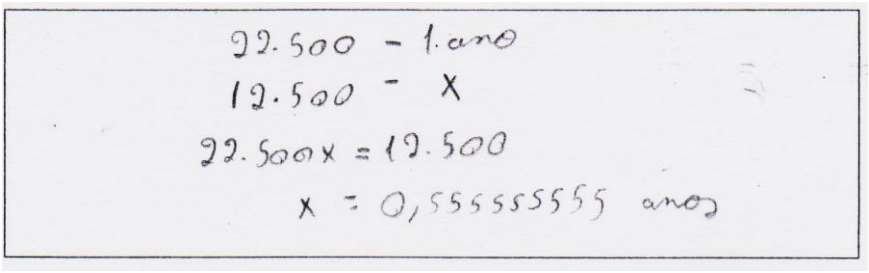


Fonte: Dados da pesquisa

O item b dessa questão era semelhante ao item a. Verificar em quanto tempo o valor do carro é a metade do valor inicial corresponde a achar o valor de **t** para o qual o carro valerá R$ 12.500,00.

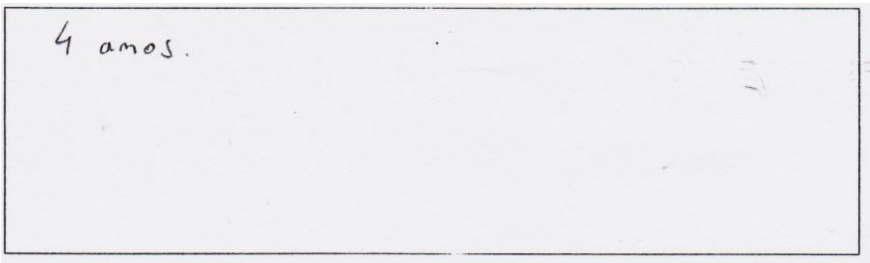
Destacam-se aqui a resposta da dupla J que, novamente, usou uma regra de três na resolução do problema, e a resposta da dupla H que, apesar de ter verificado que após cerca de 5 anos o carro valeria R$ 15.000,00, afirmou que após 4 anos o valor do carro seria R$ 12.500,00.

Figura 13: Resposta da dupla J



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 14: Resposta da dupla H



Fonte: Dados da pesquisa

Os itens c e d tinham o objetivo de recordar o comportamento assintótico do gráfico da função exponencial. Talvez por conta do assunto já ter sido discutido em sala de aula, foram os itens que não apresentaram dúvidas e as respostas foram todas dentro do esperado. Todas as duplas responderam corretamente que, com o passar dos anos, de acordo com a fórmula, o valor do carro tenderia a zero, nunca chegando a esse valor.

A previsão era de que todos conseguissem realizar essa atividade em 50 minutos, porém foi necessário estender em 10 minutos esse prazo. Depois desse período, as folhas de atividades foram recolhidas e aconteceu a socialização dos resultados.

O primeiro questionamento foi sobre o porquê de se utilizar **t = 0** para se calcular o valor inicial do carro. Um aluno questionou:

*"Por que não pode ser **t = 1**?"*

Foi necessário que o professor chamasse a atenção para o enunciado da questão, especialmente para o trecho que afirma que a função dada "representa o valor deste automóvel após **t** anos" e enfatizasse o significado da palavra "após".

*"Se usarmos **t = 1**, quer dizer que estamos calculando o valor do carro após 1 ano. Nesse caso, **t = 0** significa que é o valor do carro após **0** ano, isto é, no momento da compra."*, afirmou o professor.

No item b, o professor afirmou que era realmente possível que o carro chegasse àquele valor. Calculando o valor da função para alguns valores de **t** (4,8, 4,9, 4,84, 4,85), os alunos constataram que o valor do carro se aproximava de R$ 15.000.

Para as questões II e III, o professor apresentou a tabela e o gráfico no *data show*. Como o gráfico foi apresentado utilizando o software Geogebra[7], um aluno questionou sobre como era o programa e onde o encontrava para baixar. O professor deu algumas dicas e se colocou à disposição para ajudá-los. O professor também aproveitou o *data show* para mostrar a foto de uma calculadora e explicar novamente o uso da tecla ⌃.

Com a tabela e o gráfico projetados no quadro, passou-se à discussão da última questão. Nesse momento, uma dupla relatou que havia colocado como resposta para o item I.b que era impossível encontrar uma solução. Porém, ao responder o item IV.a, alterou sua resposta para o item I.b, mas não sabia como justificar. Após esse relato, um aluno questionou se poderiam usar logaritmos para resolver essa questão. O professor respondeu afirmativamente e questionou o aluno se ele havia usado. O aluno respondeu que não, pois não sabia como usar e o professor relatou que esse seria o assunto das próximas aulas.

Para os dois últimos itens dessa atividade, foi possível mostrar aos alunos, usando a ferramenta “zoom” do Geogebra, como era o comportamento da função para valores muito altos de **t**.

Foi possível perceber que o clima durante a realização da atividade foi muito bom e que houve muita interação entre as duplas durante a discussão sobre cada questão.

Durante a análise das folhas de atividades entregues, o pesquisador pôde verificar que as respostas não possuíam muitas justificativas, embora ele tivesse orientado os alunos diversas vezes para que todas as questões apresentassem essas justificativas. Além disso, percebeu-se uma grande dificuldade dos alunos em justificar as respostas na forma de texto utilizando a linguagem escrita. As justificativas em forma de textos eram poucas e notou-se dificuldade em articular ideias na linguagem escrita.

[7] Disponível em http://www.geogebra.org/.

5.2 Atividade 2

A invenção dos logaritmos

Os logaritmos, como instrumento de cálculo, surgiram para realizar simplificações, uma vez que transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração.

Napier foi um dos que impulsionaram fortemente seu desenvolvimento, perto do início do século XVII. Ele é considerado o inventor dos logaritmos, muito embora outros matemáticos da época também tenham trabalhado com ele.

Já antes dos logaritmos, a simplificação das operações era realizada através das conhecidas relações trigonométricas, que relacionam produtos com somas ou subtrações. Esse processo de simplificação das operações envolvidas passou a ser conhecido como prostaférese, sendo largamente utilizado numa época em que as questões relativas à navegação e à astronomia estavam no centro das atenções. De fato, efetuar multiplicações ou divisões entre números muito grandes era um processo bastante dispendioso em termos de tempo. A simplificação, provocada pela prostaférese, era relativa e, sendo assim, o problema ainda permanecia. O método de Napier baseou-se no fato de que associando aos termos de uma progressão geométrica

$$\mathbf{b, b^2, b^3, b^4, b^5, \dots, b^n, \dots}$$

os termos da progressão aritmética

$$\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots}$$

então, ao produto de dois termos da primeira progressão, $\mathbf{b^m.b^p}$, está associada a soma **m+p** dos termos correspondentes na segunda progressão.

Considerando, por exemplo,

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

Para efetuar, por exemplo, 256 x 32, basta observar que:

256 na segunda linha corresponde a 8 na primeira;

32 na segunda linha corresponde a 5 na primeira;

como 8+5=13, 13 na primeira linha corresponde a 8192 na segunda.

Assim, 256x32=8192 resultado esse que foi encontrado através de uma simples operação de adição.

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm

Acesso em 30/07/2013

O texto apresenta uma relação entre uma progressão aritmética e uma progressão geométrica.

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

Para cada termo da progressão geométrica, o termo correspondente é seu logaritmo na base 2 (pois a razão da progressão geométrica é 2). Ou seja, o logaritmo na base 2 de 512 é 9.

I. Com base nessa associação, qual é:

a. o logaritmo de 2048 na base 2?

b. o logaritmo de 32768 na base 2?

c. o logaritmo de $\frac{1}{2}$ na base 2?

d. o logaritmo de $\frac{1}{16}$ na base 2?

e. o logaritmo de 1 na base 2?

Você pôde observar que o logaritmo corresponde ao expoente da potência. Mais formalmente, dizemos que o logaritmo de *y* na base *x* é o expoente *w* tal que $y = x^w$. Em notação matemática, escrevemos;

$$\log_x y = w \Leftrightarrow x^w = y.$$

Podemos usar essa definição para calcular, por exemplo, o logaritmo de 125 na base 5:

$$\log_5 125 = w \Leftrightarrow 5^w = 125$$

Resolvendo a equação exponencial $5^w = 125$, encontramos que $5^w = 5^3$ e, portanto, $w = 3$. Logo, podemos afirmar que $\log_5 125 = 3$.

II. Usando a definição, calcule:

a. o logaritmo de 2401 na base 7.

b. o logaritmo de $\frac{1}{81}$ na base 3.

III. Construa uma tabela que associe os termos da progressão aritmética 1, 2, 3,... aos termos da progressão geométrica das potências de base 3.

IV. Com base nessa tabela, qual é:

a. o logaritmo de 27 na base 3?

b. o logaritmo de 2187 na base 3?

c. o logaritmo de 59049 na base 3?

d. o logaritmo de 1 na base 3?

De acordo com o texto, uma propriedade que motivou a criação dos logaritmos foi a possibilidade de transformar produtos em somas. Verifique esta e outras propriedades fazendo o que se pede a seguir:

V. Faça a multiplicação 27 x 2187 e procure o resultado na tabela.

a. Qual a relação entre os logaritmos dos números multiplicados e o logaritmo do resultado encontrado?

Em linguagem matemática, podemos escrever que

$\log_3(27x729) = \log_3 27 + \log_3 729$

Generalizando, você verificou um exemplo da seguinte propriedade dos logaritmos:

$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

VI. Faça agora a divisão 531441 ÷ 243 e procure o resultado na tabela.

a. Qual a relação entre os logaritmos desses dois números e o logaritmo do resultado encontrado?

Generalizando, você verificou um exemplo da seguinte propriedade dos logaritmos:

$\log_a(b \div c) = \log_a b - \log_a c$

VII. Encontre o resultado da potenciação $(27)^2$ e procure o resultado na tabela.

a. Qual a relação entre os logaritmos de 27 e o logaritmo do resultado encontrado?

Generalizando, você verificou um exemplo da seguinte propriedade dos logaritmos:

$\log_a(b)^c = c \times \log_a(b)$

Na aula seguinte à aula da primeira atividade, tão logo o professor foi entrando em sala, os alunos já lhe perguntaram sobre a atividade do dia.

Aluno A2: *"Vai ter texto hoje de novo, professor?"*

O professor respondeu afirmativamente e escutou outro comentário.

Aluno B2: *"O texto era grande, mas até que a atividade foi legal. Deu pra aprender muita coisa. Assim a gente aprende mais."*

Assim que os alunos se assentaram, o professor iniciou a distribuição das folhas com as atividades enquanto comentava sobre a atividade do dia. O professor afirmou que eles deveriam seguir as mesmas orientações da aula anterior e salientou que justificassem a resolução das questões por escrito, em pequenos textos ou com cálculos matemáticos.

O texto da atividade 2 foi retirado de um *site*[8] que contém diversos tópicos sobre o cálculo diferencial e integral, bem como sobre funções. A intenção aqui era de levar o aluno a refletir sobre a criação dos logaritmos, bem como sobre as propriedades que fizeram essa ferramenta matemática ser tão útil.

De fato, o texto cita a necessidade de serem reduzidos alguns cálculos e introduz a noção de logaritmos através da associação entre os termos de uma progressão aritmética e os termos de uma progressão geométrica.

Sendo assim, a primeira questão procura chamar atenção do aluno para o exemplo citado no texto e o enunciado afirma que "para cada termo da progressão geométrica, o termo correspondente é seu logaritmo na base 2". Com base no exemplo citado no enunciado, o logaritmo na base 2 de 512 é 9, os alunos foram capazes de resolver todos os itens dessa questão. Uma única intervenção foi necessária: o aluno D2 questionou o fato de a tabela não possuir, por exemplo, os números 32768 e $\frac{1}{2}$, e se era possível ampliar a tabela. O professor respondeu que ali estava um pedaço de uma tabela que poderia ser considerada infinita e que, no caso da atividade, era necessário que o aluno verificasse o padrão de crescimento

[8] http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm - Acesso em: 30/07/2013.

da progressão geométrica e construísse outros termos para responder aos questionamentos.

A atividade continua com um pequeno exemplo que formaliza a notação dos logaritmos. Ao iniciar a resolução da questão II, o aluno D1 se espantou:

"Mas fazendo isso que está aqui, vira uma equação exponencial!"

"Exatamente!", disse o professor, que completou: *"Essa definição nos mostra a estreita relação entre logaritmos e expoentes."*

Depois disso, não houve mais questionamentos sobre a questão 2.

A dupla D foi a primeira a iniciar a resolução da questão III. Logo após lerem o enunciado, perguntaram sobre o tamanho da tabela a ser construída. O professor orientou que calculassem diversas potências de 3 associadas aos números de -5 a 15 e que, se fosse necessário, ampliassem essa tabela posteriormente. Construída a tabela, os alunos não tiveram dificuldades para responder à questão III. Provavelmente, isso se deve ao fato de já terem respondido à questão I, que era bem parecida.

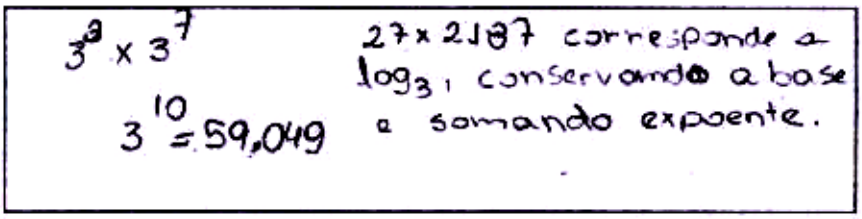
As questões seguintes tinham como objetivo fazer com que o aluno percebesse três importantes propriedades dos logaritmos:

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a(b \div c) = \log_a b - \log_a c$$

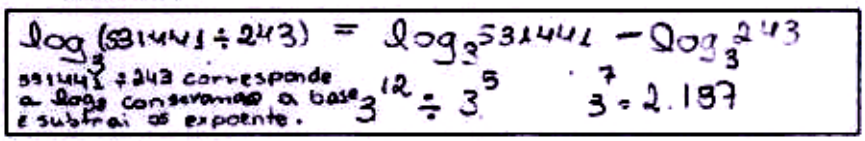
$$\log_a(b)^c = c \times \log_a(b)$$

Figura 15: Resposta da dupla D



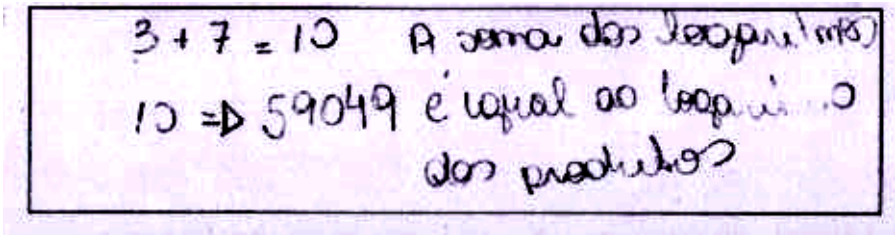
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 16: Resposta da dupla F



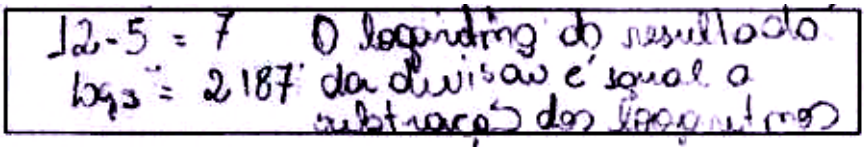
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 17: Resposta da dupla E



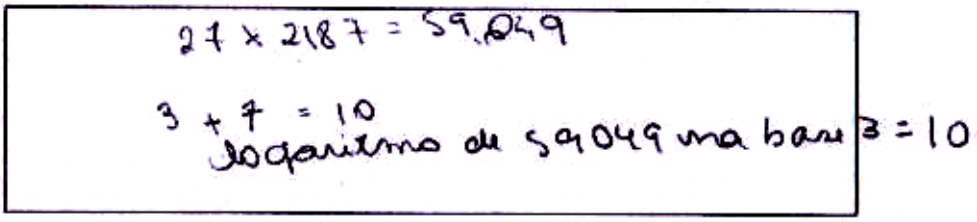
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 18: Resposta da dupla H



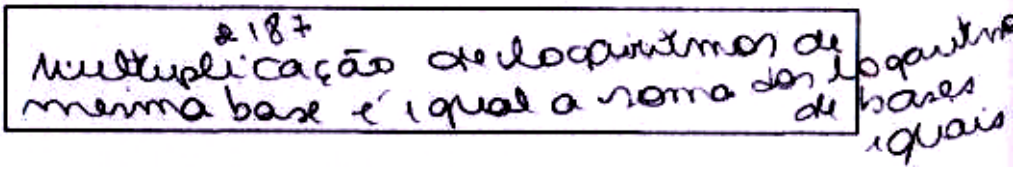
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 19: Resposta da dupla I



Fonte: Dados da pesquisa

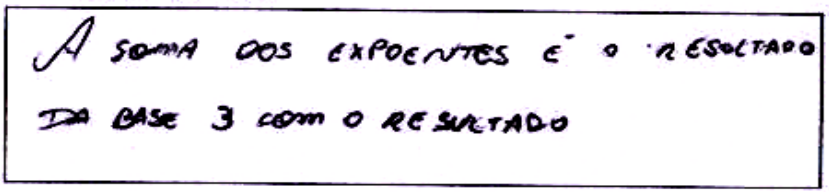
Figura 20: Resposta da dupla J



Fonte: Dados da pesquisa

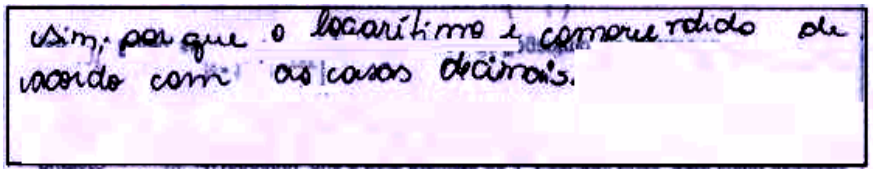
Embora as respostas mostrassem que o objetivo foi atingido, alguns alunos não conseguiram se expressar de uma maneira satisfatória. A dificuldade em escrever uma resposta em forma de texto algumas vezes persistiu.

Figura 21: Resposta da dupla A



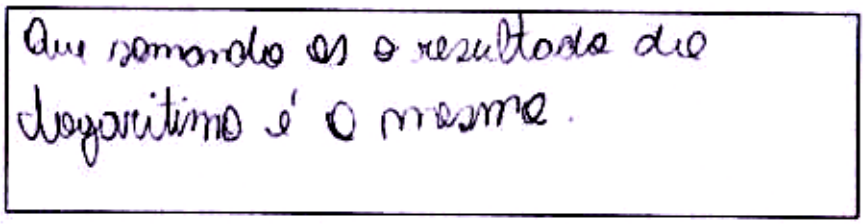
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 22: Resposta da dupla F



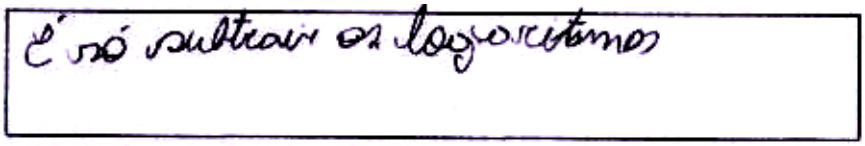
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 23: Resposta da dupla G



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 24: Resposta da dupla J



Fonte: Dados da pesquisa

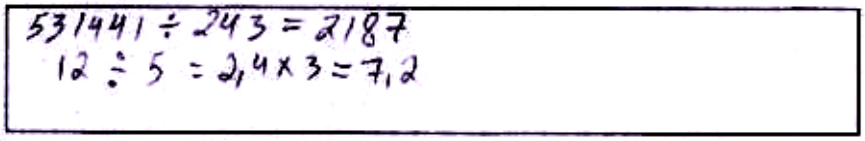
Algumas vezes, os alunos tiveram dificuldades de generalizar ao realizar a investigação. Por exemplo, para o item V, a dupla E deixou indícios de ter encontrado uma relação para o que foi pedido.

Figura 25: Resposta da dupla E

Fonte: Dados da pesquisa

Mas para o item VI, utilizaram operações inadequadas para comparar os números.

Figura 26: Resposta da dupla E



Fonte: Dados da pesquisa

O tempo de 50 minutos reservado para essa atividade foi suficiente para quase todas as duplas. A dupla E ainda precisou de cinco minutos a mais. Ao término desse tempo, o professor recolheu uma folha de atividade de cada dupla e passou-se à socialização dos resultados.

Durante a discussão da primeira atividade, um aluno comentou sobre a dificuldade em se associar os termos da progressão aritmética aos termos da progressão geométrica:

Aluno D1: *"Mas, professor, quer dizer que o povo antigo tinha que construir uma tabela para cada número (base)?"*

O professor respondeu negativamente e completou:

"Isso nem seria possível, pois existem infinitos números. A definição de logaritmos que vocês trabalharam na questão II e as propriedades diminuíam a necessidade de haver tantas tabelas. Sendo assim, utilizava-se uma quantidade limitada de tabelas e calculava-se com base nas tabelas existentes e, sobretudo, utilizando algumas propriedades."

Para as questões seguintes, o professor construiu uma enorme tabela no quadro branco com as potências de base 3 cujos expoentes variavam de -7 a 17. Com base nessa tabela, verificaram-se as respostas da questão IV e verificaram-se as propriedades relatadas nas questões V, VI e VII.

Nesse momento, o professor apresentou aos alunos um exemplar de uma tábua de logaritmos e explicou que, antes do advento das calculadoras científicas, o cálculo dos logaritmos era realizado utilizando essas enormes tabelas chamadas de tábua de logaritmos.

Figura 27: Capa de exemplar de Tábua de Logaritmos

Fonte: SERRÃO, Alberto N. Tábua de Logaritmos. Brasil: MEC - Fename, 1975

Após essas verificações, o professor deu alguns exemplos de como essas propriedades eram realmente importantes no cálculo dos logaritmos e relembrou a pergunta feita pelo aluno D1 sobre a necessidade de construção de infinitas tabelas.

"Conhecendo os valores de alguns logaritmos, não é necessário construir uma tabela para cada base e que contenha todos os números, o que seria impossível. Por exemplo, sabendo que log 2 é aproximadamente 0,30 e que log 3 é aproximadamente 0,48, o valor de log 6 pode ser facilmente calculado utilizando esses dois logaritmos conhecidos. Notemos que 6 = 2x3. Usando a propriedade apresentada na questão V, podemos escrever:

log 6 = log 2x3 = log 2 + log 3 = 0,30 + 0,48 = 0,78

Viram como foi fácil?"

O professor terminou a aula relatando que, devido à facilidade de acesso a calculadoras atualmente, esse processo para cálculo de logaritmos caiu em desuso na prática. Foi proposto, então, que os alunos solucionassem algumas atividades do livro-texto relacionadas aos conceitos trabalhados nessa atividade.

5.3 Atividade 3

No dia da aplicação da atividade 3, o professor iniciou a aula atendendo aos pedidos de alguns alunos para que corrigisse alguns exercícios propostos do livro-texto. O professor pôde perceber que a dificuldade dos alunos não estava na utilização da definição e das propriedades dos logaritmos, mas, sim, em utilizar as propriedades das potências para se resolver a equação exponencial obtida.

Depois de alguns exercícios corrigidos, passou-se então para a aplicação da seguinte atividade.

ATIVIDADE 3 – Condições de existência

Uma das ideias dos logaritmos surgiu de uma associação entre progressões aritméticas e geométricas. A escolha de uma base adequada foi importante para que os logaritmos se tornassem verdadeiramente úteis. O seguinte texto ilustra um pouco a ideia de Napier:

> A fim de que os números da progressão geométrica estivessem bem próximos, para ser possível usar interpolação e preencher as lacunas entre os termos na correspondência estabelecida, evitando erros muito grosseiros, Napier escolheu para razão o número $b = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$, que é bem próximo de 1. Segundo Eves, para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7. Então, se $N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, ele chamava L de "logaritmo" do número N.
>
> Assim, o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ é 1.
>
> Enquanto Napier trabalhava com uma progressão geométrica em que o primeiro termo era $\mathbf{10^7.b}$ e a razão **b**, ao que parece, de forma independente, Bürgi também lidava com o problema dos logaritmos.
>
> Bürgi empregou uma razão um pouco maior do que 1, qual seja $1{,}0001 = 1 + 10^{-4}$. O primeiro termo de sua PG era 10^8 e ele desenvolveu uma tabela com 23027 termos.
>
> Como Napier, Bürgi considerou uma PG cuja razão era muito próxima de 1, a fim de que os termos da sequência fossem muito próximos e os

cálculos pudessem ser realizados com boas aproximações.

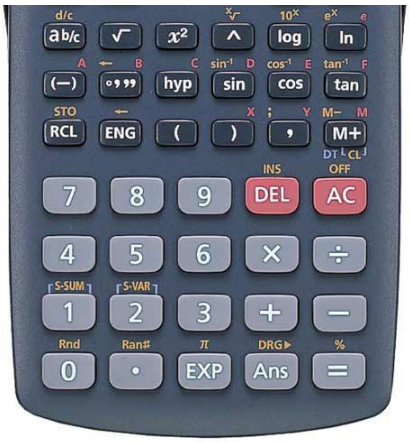
Posteriormente, Napier, juntamente com Briggs, elaborou tábuas de logaritmos mais úteis, de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos *briggsianos* ou comuns, ou seja, os logaritmos dos dias de hoje.

Ainda segundo Eves, durante anos ensinou-se a calcular com logaritmos na escola média ou no início dos cursos superiores de Matemática; também por muitos anos a régua de cálculo logarítmica foi o símbolo do estudante de engenharia do campus universitário.

Hoje, porém, com o advento das espantosas e cada vez mais baratas e rápidas calculadoras, ninguém mais, em sã consciência, usa uma tábua de logaritmos ou uma régua de cálculo para fins computacionais. O ensino dos logaritmos, como um instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas; os famosos construtores de réguas de cálculo de precisão estão desativando sua produção e célebres manuais de tábuas matemáticas estudam a possibilidade de abandonar as tábuas de logaritmos. Os produtos da grande invenção de Napier tornaram-se peças de museu.

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm

Em geral, as calculadoras científicas possuem duas teclas para se calcular diretamente os logaritmos: log e ln .



A tecla log calcula o logaritmo de um número na base 10 e a tecla ln calcula o logaritmo de um número na base *e*. Normalmente, primeiro digitamos

a função escolhida, depois o número do qual será calculado o logaritmo e, por fim, a tecla de igual.

Com o auxílio de uma calculadora científica, faça o que se pede:

I. Calcule os logaritmos decimais de alguns números entre 1 e 10 e anote em uma tabela. O que você pode observar em relação aos **valores** dos logaritmos dos números entre 1 e 10? Esses valores estão limitados entre dois números?

II. Calcule os logaritmos decimais de alguns números entre 10 e 100 e anote em uma tabela. O que você pode observar em relação aos **valores** dos logaritmos dos números entre 10 e 100?

III. Calcule os logaritmos decimais de alguns números entre 100 e 1000 e anote em uma tabela. O que você pode observar em relação aos **valores** dos logaritmos dos números entre 100 e 1000?

IV. a. O que aconteceria com os logaritmos dos números entre 1000 e 10.000?

b. Sem calcular os logaritmos, determine entre quais números inteiros consecutivos estaria o logaritmo de 5.256.364.

c. A que generalização podemos chegar para os números compreendidos entre 10^n e 10^{n+1}, para valores naturais de **n**?

V. Use a calculadora para determinar o valor de log 1 e o valor de ln 1.

a. Com base na definição apresentada anteriormente e nas propriedades das potências, esse resultado é o esperado? Explique.

VI. Use a calculadora para determinar o valor de log 0.

a. Com base na definição apresentada anteriormente e nas propriedades das potências, esse resultado é o esperado? Explique.

VII. Use a calculadora para determinar o valor dos seguintes logaritmos decimais:

Log (-2) Log (-10) Log (-32,1) Log (-123)

a. Qual o resultado apresentado pela calculadora?

b. Por que isso acontece? Com base na definição apresentada anteriormente e nas propriedades das potências, explique.
c. Que condição sobre *y* deve ser satisfeita para que possa existir o $\log_x y$? Explique por que isso deve ocorrer.

VIII. Usando a definição, tente calcular os logaritmos a seguir:

$\text{Log}_{1}\,3$	$\text{Log}_{-2}\,8$	$\text{Log}_{0}\,7$

O que você pode observar nos cálculos acima? Que condições sobre *y* devem ser satisfeitas para que possa existir o $\log_x y$?

Além de uma condição sobre y, devemos ter outras duas condições, agora sobre x, para que o $\log_x y$ *exista:* ***x > 0*** *e* ***x ≠ 1.***

O texto da terceira atividade foi retirado do mesmo *site* que o texto da segunda atividade. Esse texto traz alguns aspectos históricos sobre a criação dos logaritmos, bem como uma ideia da definição das bases decimais e naturais.

A atividade tem como objetivo levar o aluno a verificar algumas propriedades ligadas à existência ou não do logaritmo de certo número. Além disso, um objetivo secundário é fazer com que o aluno adquira maior habilidade no uso da calculadora, que, futuramente, fará parte do seu arsenal de instrumentos de trabalho.

Nas três primeiras questões, o aluno é chamado a construir uma tabela com alguns números entre 1 e 10 (questão I), 10 e 100 (questão 2) e 100 e 1000 (questão 3) e seus respectivos logaritmos decimais. A intenção é levar o aluno a verificar os padrões que ocorrem nos logaritmos dos números calculados. Percebe-se que todos os alunos conseguiram verificar que os logaritmos calculados se encontram sempre entre dois números inteiros consecutivos. Por exemplo, os logaritmos dos números entre 100 e 1000 são valores situados entre 2 (que é o logaritmo de 100) e 3 (que é o logaritmo de 1000). Mais uma vez, os alunos apresentaram dificuldade ao tentarem descrever o que acontecia. A aluna B1 chegou a afirmar:

"Professor, eu sei o que está acontecendo, mas não sei como falar isso."

O professor perguntou a ela o que estava acontecendo e ela respondeu:

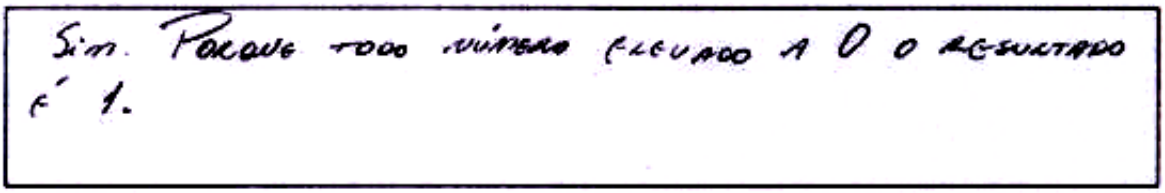
“Os números (logaritmos) ficam sempre entre 0 e 1.”

O professor orientou que ela escrevesse exatamente como ela havia relatado.

Da mesma forma, ao passarem à questão IV, os alunos responderam fácil e rapidamente os itens a e b. Porém tiveram dificuldade em se expressar na hora de escrever uma generalização, como pedia o item c.

A questão V procurava levar o aluno a verificar que o logaritmo decimal e o logaritmo natural do número 1 eram iguais a zero, de duas formas: usando a calculadora e usando a definição. Todos calcularam corretamente usando a calculadora. Alguns, rapidamente, perceberam a relação entre esse logaritmo e as potências de expoente zero.

Figura 28: Resposta da dupla H



Fonte: Dados da pesquisa

Outros tiveram dificuldade em perceber essa relação e estranharam o enunciado pedir para recorrer à definição. O aluno B2 perguntou:

“Mas como é mesmo a definição?”.

O professor orientou que eles recorressem à atividade 2 e aos exercícios corrigidos no início da aula e verificassem. Depois disso, facilmente chegaram à conclusão de que o logaritmo era zero porque todo número, não nulo, elevado a zero é igual a 1.

De forma análoga, a atividade VI tinha por objetivo levar o aluno a verificar por que não existe o logaritmo de zero. Utilizando a calculadora, encontravam ERRO como resposta e ficavam sem ação por algum tempo. Tentavam repetir o procedimento e novamente encontravam ERRO. Nisso, pediam ajuda ao professor e contavam o que estava acontecendo. A primeira dupla a tentar resolver essa questão foi a dupla B. Eles chamaram o professor e argumentaram:

“Não sei o que a gente está fazendo errado, mas só aparece ERRO na resposta.”

O professor retrucou:

“Mas e se essa for a resposta correta? Deixem um pouco de lado a calculadora e tentem calcular usando a definição.” Ao seguirem a orientação do professor, escreveram a equação exponencial $0 = 10^x$ e ficaram olhando fixamente para o papel durante alguns segundos. Quando perceberam o que estava por trás daquela equação, se espantaram:

“Mas isso é impossível!”.

Na questão seguinte, ao encontrar novamente o ERRO da calculadora, a mesma dupla perguntou:

“Então não existe logaritmo de nenhum número negativo?”.

O professor os motivou a testar com outros números:

“Será? Calcule o logaritmo de outros números negativos.”

Ao encontrar novamente a palavra ERRO na calculadora, o aluno afirmou:

“É, acho que não tem mesmo!”.

E o professor completou:

“Mas por que não tem?”.

Novamente, o aluno passou à definição e escreveu $10^x = -2$. Depois de alguns segundos analisando a equação, afirmou:

“É! Não vai dar também. Não tem jeito de dar negativo.”

Na questão VIII, os alunos já conseguiram perceber facilmente o que o aluno D1 chamou de pegadinha:

“Isso é pegadinha, professor! Esses daqui também não vão dar certo.”

O professor corrigiu:

“Não é questão de dar certo ou não dar certo. É questão de existência!”

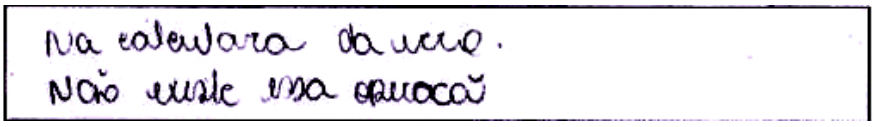
O aluno retrucou:

“Então é só escrever ‘não existe’?”

O professor esclareceu:

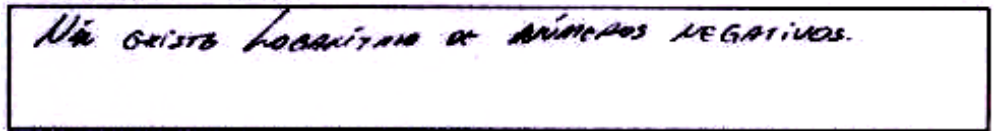
“A calculadora dava erro porque não existiam os logaritmos que você pedia a ela que calculasse. Igualmente nessa questão, estão outros casos em que você pode verificar que não é possível resolver a equação exponencial montada. Por isso é necessário que, para que exista o $\log_x y$*, os valores de x e y respeitem as condições:* ***x > 0*** *e* ***x ≠ 1 e y > 0.****”*

Figura 29: Resposta da dupla E



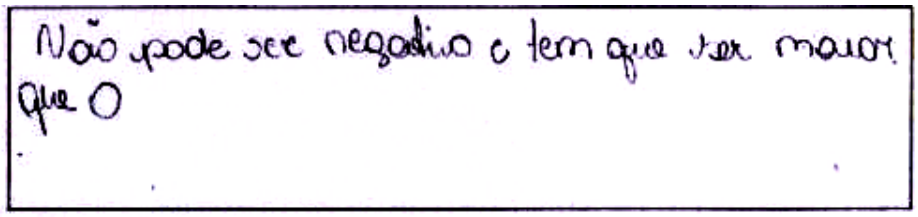
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 30: Resposta da dupla H



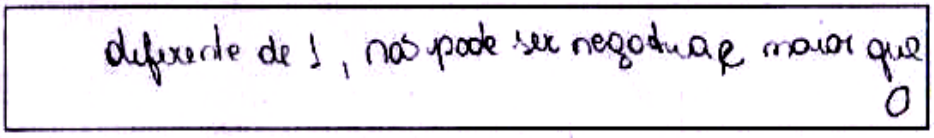
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 31: Resposta da dupla J



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 32: Resposta da dupla J



Fonte: Dados da pesquisa

A dupla D foi a primeira a finalizar a atividade em 50 minutos. Após 10 minutos, todos já haviam entregado as folhas de atividades.

Na discussão, o professor chamou atenção para o fato de logaritmos de números muito grandes serem números razoavelmente pequenos. Além disso, como os alunos puderam verificar, os números inteiros imediatamente abaixo e acima do valor do logaritmo correspondiam aos logaritmos de alguma potência de 10.

O professor também atentou para o fato de que, como todo número não nulo elevado a zero é igual a 1, o logaritmo do número 1 independe da base e é sempre igual a zero.

Para finalizar, o professor voltou a salientar que os erros que apareceram na calculadora não foram impossibilidades de cálculo, mas, sim, erros ligados à inexistência dos logaritmos. O professor escreveu no quadro as equações exponenciais correspondentes aos logaritmos propostos para que pudesse analisar junto com os alunos:

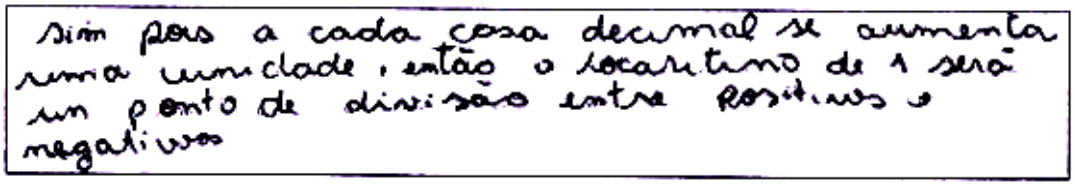
$\log 0$	$\log_1 3$	$\log_{-2} 8$	$\log_0 7$
$10^x = 0$	$1^x = 3$	$(-2)^x = 8$	$0^x = 7$

Com base no quadro apresentado, o professor pôde concluir com os alunos:

- Log 0 não existe, pois 10 elevado a qualquer número nunca será 0.
- $\log_1 3$ não existe, pois 1 elevado a qualquer número sempre é igual a 1, nunca será igual a 3.
- $\log_{-2} 8$ não existe, pois -2 elevado a um número par resulta em um número positivo e elevado a um número ímpar resulta em um número negativo. Dessa forma, $(-2)^3 = -8$ e não existe um número tal que (-2) elevado a ele resulte em 8. Aqui o professor relembrou que, nas funções exponenciais, a base não poderia ser um número negativo.
- $\log_0 7$ não existe, pois 0 elevado a qualquer número sempre resulta em 0.

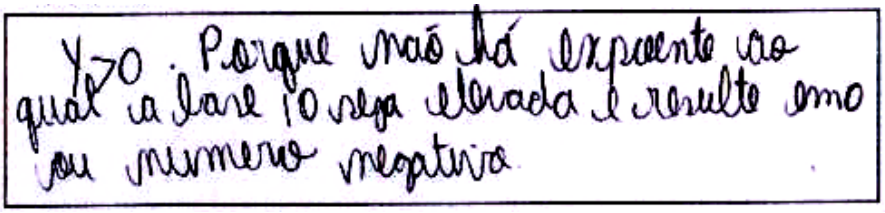
Destacamos aqui que algumas respostas dadas pelos alunos foram de difícil entendimento.

Figura 33: Resposta da dupla I ao item V.a



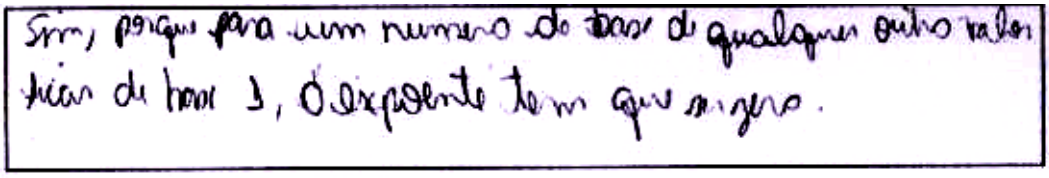
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 34: Resposta da dupla J ao item VII.c



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 35: Resposta da dupla C ao item V.a



Fonte: Dados da pesquisa

Durante a análise das atividades, o professor pôde perceber, novamente, que muitos alunos possuem uma grande dificuldade de se expressar através de texto escrito.

5.4 Atividade 4

Em 2010, um forte terremoto causou mais de 300 mortes no Chile, como noticiou o portal G1:

MORTOS POR CAUSA DE TERREMOTO NO CHILE JÁ SÃO MAIS DE 300, DIZ GOVERNO

Tremor de magnitude 8,8 afetou 2 milhões de pessoas, diz presidente.
Tragédia põe à prova a capacidade dos chilenos, afirma Bachelet.
Do G1, com agências internacionais*

O terremoto de magnitude 8,8 que sacudiu o Chile neste sábado (27) causou a morte de mais de 300 pessoas, informou durante a noite a diretora do Escritório Nacional de Emergência (Onemi, na sigla em espanhol), Carmen Fernández.

Mais cedo, a presidente chilena Michelle Bachelet havia dito que o desastre afetou de alguma maneira 2 milhões de pessoas.

“As forças da natureza golpearam duramente nossa pátria e mais uma vez põem à prova nossa capacidade de enfrentar adversidades e ficarmos de pé”, declarou a presidente em um pronunciamento transmitido em cadeia de rádio e TVs.

Segundo Bachelet, que sobrevoou de helicóptero as áreas atingidas neste sábado, o terremoto afetou 80% do país, e há pelo menos 1 milhão de casas danificadas. A presidente mandou condolência e solidariedade às vítimas e pediu "força" aos cidadãos.

"Todas as autoridades do governo vão colocar toda energia para a volta à normalidade. Temos adiante uma árdua tarefa, não será fácil, requer muito tempo e recursos, mas, sobretudo, a generosidade e voluntarismo de todos nós", disse a presidente.

Além dos mortos durante o terremoto, o número de vítimas aumenta devido aos tremores secundários, que continuam até a manhã deste domingo (28).

Veja no mapa as regiões mais atingidas pelo tremor (Foto: Editoria de Arte / G1)

O terremoto, de cerca de um minuto de duração, ocorreu às 3h34 (horário local de verão, o mesmo de Brasília) e atingiu a região central do Chile, perto da cidade de Concepción, 400 km ao sul de Santiago. Na capital chilena, a 325 km de distância, o terremoto estremeceu diversos prédios, e várias regiões da cidade ficaram sem energia. Com medo, muitos chilenos saíram às ruas.

Em entrevista, a presidente do Chile, Michelle Bachelet, pediu união dos setores público e privado na reconstrução dos setores essenciais do país. Bachelet disse que a destruição provocada pelo tremor poderia ter causado um número ainda maior de mortos, o que mostra que muitas pessoas conseguiram deixar suas casas no momento da tragédia.

O tremor foi sentido nos países vizinhos, inclusive no Brasil. O Corpo de Bombeiros e a Defesa Civil de São Paulo informaram que receberam chamados para verificar pequenos tremores em vários bairros da capital paulista.

O terremoto atingiu a região central do Chile, perto de Concepción, 400 km ao sul de Santiago, segundo o Instituto Geológico dos Estados Unidos (USGS, na sigla em inglês). O epicentro do tremor foi localizado no mar, a 35 km de profundidade, em Maule, a 99 km da cidade de Talca.

Fonte: http://g1.globo.com/Noticias/Mundo/0,,MUL1508896-5602,00.html
Acesso em 23/07/2013 às 18:00

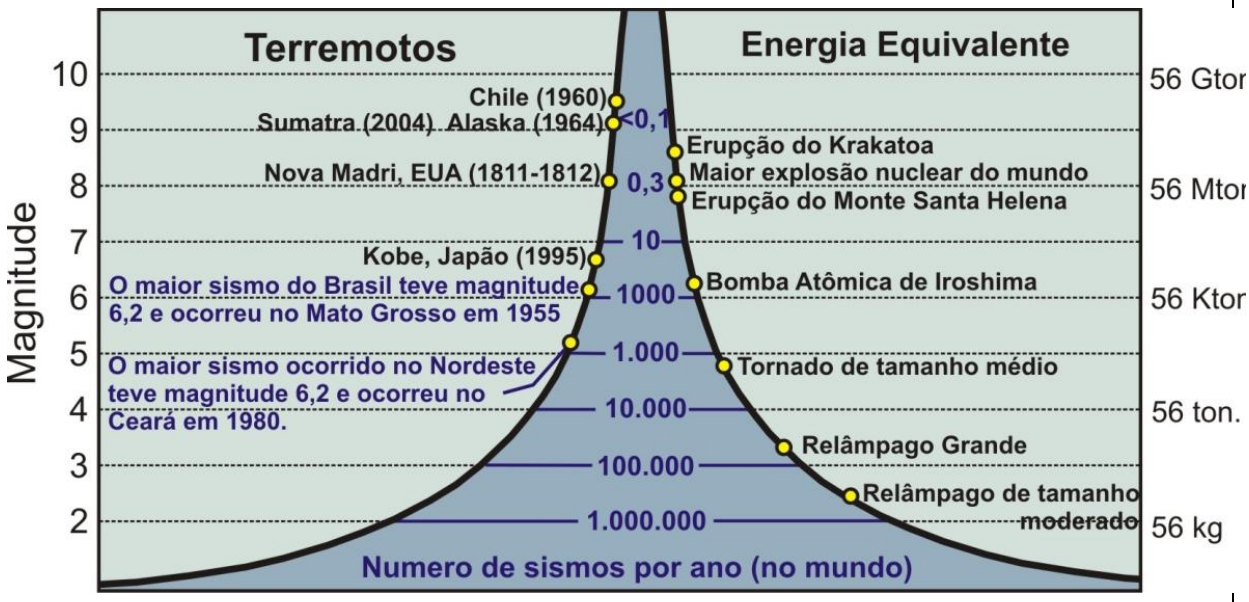
Quando acontece um terremoto, uma das primeiras informações contidas no noticiário é “quantos graus” teve aquele tremor. A intensidade de um terremoto é

descrita por um número na Escala Richter. Esse número pode ser dado por diferentes fórmulas e cada uma das fórmulas nos dá a energia liberada em unidades diferentes: ergs, joule, kWh etc. Uma dessas fórmulas é:

$$\log \mathbf{E} = 11{,}8 + 1{,}5\mathbf{R},$$

em que **E** é a energia liberada (em ergs) e **R** a magnitude da escala Richter.

Veja um quadro comparativo entre a magnitude dos terremotos e a energia liberada equivalente a explosivos.



Fonte:www.afonsovasconcelos.com/aulas/agg5722/aula04_Magnitude.pptx

Com base na fórmula apresentada e na reportagem, responda:

I. Qual a energia liberada no terremoto no Chile?

II. Quantas vezes mais energia é liberada por um terremoto de magnitude 5,0 na escala Richter do que um terremoto de magnitude 4,0 nessa mesma escala?

III. Segundo o *site* Terra[9], o terremoto de 1955, em Porto dos Gaúchos (MT), foi um dos maiores já ocorridos no Brasil, atingindo 6,2 graus na escala Richter. Qual a energia liberada por esse terremoto?

IV. Itaipu produziu em 2012 um total de 98.287.128 megawatts-hora (98,2 milhões de MWh), quebrando seu próprio recorde mundial de produção de

[9] http://noticias.terra.com.br/educacao/voce-sabia/qual-foi-o-maior-terremoto-da-historia-do-brasil,de08c087e60ea310VgnCLD200000bbcceb0aRCRD.html. Acesso em: 23/07/2013

energia[10]. Dado que 1 erg = 2,778 x 10^{-17} MWh, compare a energia liberada pelo terremoto de Porto de Galinhas e a energia produzida por Itaipu. Registre suas observações.

Fonte: http://www.itaipu.gov.br/energia/geracao

Uma aplicação bastante conhecida dos logaritmos é a Escala Richter, que mede a intensidade dos terremotos. A atividade 4 se inicia com uma reportagem do portal G1[11] sobre um terremoto ocorrido no Chile em 2010, que causou a morte de várias pessoas. Após essa reportagem, o pesquisador fornece uma breve explicação para a escala Richter e uma fórmula para calcular a intensidade dos terremotos usando essa escala.

A primeira questão propõe que o aluno retorne ao texto e, com base no valor apresentado para a intensidade do terremoto no Chile, descubra, usando a fórmula apresentada, a energia liberada por esse terremoto. Esse era um problema considerado fácil pelo pesquisador, porém as duplas A e J cometeram o mesmo erro: consideraram 8,8 o valor de **E** na fórmula e resolveram a equação criada para descobrir o valor de **R**. O professor chamou a atenção dos alunos para esse fato, sugerindo que eles relessem o enunciado e prestassem mais atenção no significado de cada variável. As duplas, então, seguiram o sugerido e perceberam que estavam substituindo as variáveis de maneira equivocada. Desmancharam os cálculos incorretos e refizeram, corretamente.

Na segunda questão, o aluno é levado a comparar a quantidade de energia liberada por um terremoto de intensidade 5 na escala Richter com um terremoto de intensidade 4 nessa mesma escala. Assim, o aluno deveria calcular a energia liberada no terremoto de intensidade 5, a energia liberada no terremoto de intensidade 4 e verificar quantas vezes uma energia é maior que a outra. O cálculo da energia liberada foi feito corretamente por todos os alunos, mas algumas duplas, ao compararem a energia liberada, fizeram a subtração dos valores encontrados e não a divisão, como era esperado.

A terceira questão propunha calcular a energia liberada pelo terremoto de Porto de Galinhas em 1955, um dos maiores tremores de terra do Brasil. Nessa

[10] http://www.itaipu.gov.br/energia/geracao
[11] http://g1.globo.com/Noticias/Mundo/0,,MUL1508896-5602,00.html

questão, os alunos não apresentaram dificuldades e todos conseguiram resolver rapidamente.

Na última questão dessa atividade, o aluno devia comparar a energia liberada pelo terremoto em Porto de Galinhas com a energia produzida por Itaipu em 2012. Um primeiro passo para essa comparação era transformar a energia calculada na questão III, em ergs, para MWh. Alguns alunos demoraram a perceber que essa transformação deveria ser feita usando uma simples regra de três. O aluno A1 se espantou:

“Como vou transformar de erg para MWh? É só fazer uma regra de três para transformar?”.

O professor respondeu afirmativamente e o aluno prosseguiu com os cálculos.

Como nas demais questões que exigiam que o aluno relatasse as observações em um pequeno texto, os alunos novamente apresentaram bastante dificuldade nesse momento.

Dado o pequeno número de questões dessa atividade, todos conseguiram realizá-la dentro do período determinado de 50 minutos. Após o professor recolher a folha de atividades, passou-se então à discussão dos resultados.

Em primeiro lugar, o professor perguntou se alguém não sabia o que era a escala Richter. Todos responderam que conheciam. Então o professor perguntou se sabiam que aquela era uma aplicação dos logaritmos. Cerca de 40% dos alunos responderam afirmativamente. Depois disso, o professor destacou que a utilização da escala Richter é importante, pois reduz a ordem de grandeza dos valores em que se trabalha na medição da intensidade dos terremotos. Nesse ponto, o professor destacou que o resultado encontrado pelos alunos de 10^{25} ergs era um número muito grande, enquanto 8,8 era um valor bem mais fácil de trabalhar e essa era uma razão para se usar os logaritmos nessa escala.

Os alunos puderam perceber essa facilidade de lidar com valores menores na discussão da questão II. Um terremoto de intensidade 4 na escala Richter gerava uma energia de $10^{17,8}$, enquanto um terremoto de intensidade 5 gerava uma energia de $10^{19,3}$. Isso representa que, a cada unidade em que a intensidade aumentava na escala Richter, a energia liberada era $10^{1,5}$ vezes maior. Nesse momento, o professor chamou a atenção para o significado da expressão “quantas vezes maior”. Ele deu o seguinte exemplo:

“Quantas vezes o 10 é maior que 2? A resposta é 5, pois 2 x 5 = 10. Então, para compararmos quantas vezes uma grandeza é maior que a outra, devemos dividir a maior pela menor e não fazer a subtração da maior pela menor. Se a subtração fosse a operação a ser realizada, diríamos que o 10 é 8 vezes maior que o 2, pois 10 – 2 = 8, mas isso não é verdade. O número 2 ‘cabe’ apenas 5 vezes dentro do número 10”.

As questões 3 e 4 foram analisadas simultaneamente. Com base nos cálculos dos alunos, foi possível fazê-los perceber que a quantidade de energia liberada pelo terremoto é quase igual à energia total produzida por Itaipu durante o ano de 2012.

5.5 Atividade 5

A acidez de um líquido é caracterizada por um indicador chamado de pH (potencial Hidrogeniônico), determinado pela presença de íons H_3O^+. O pH de uma solução pode ser modelado pela equação

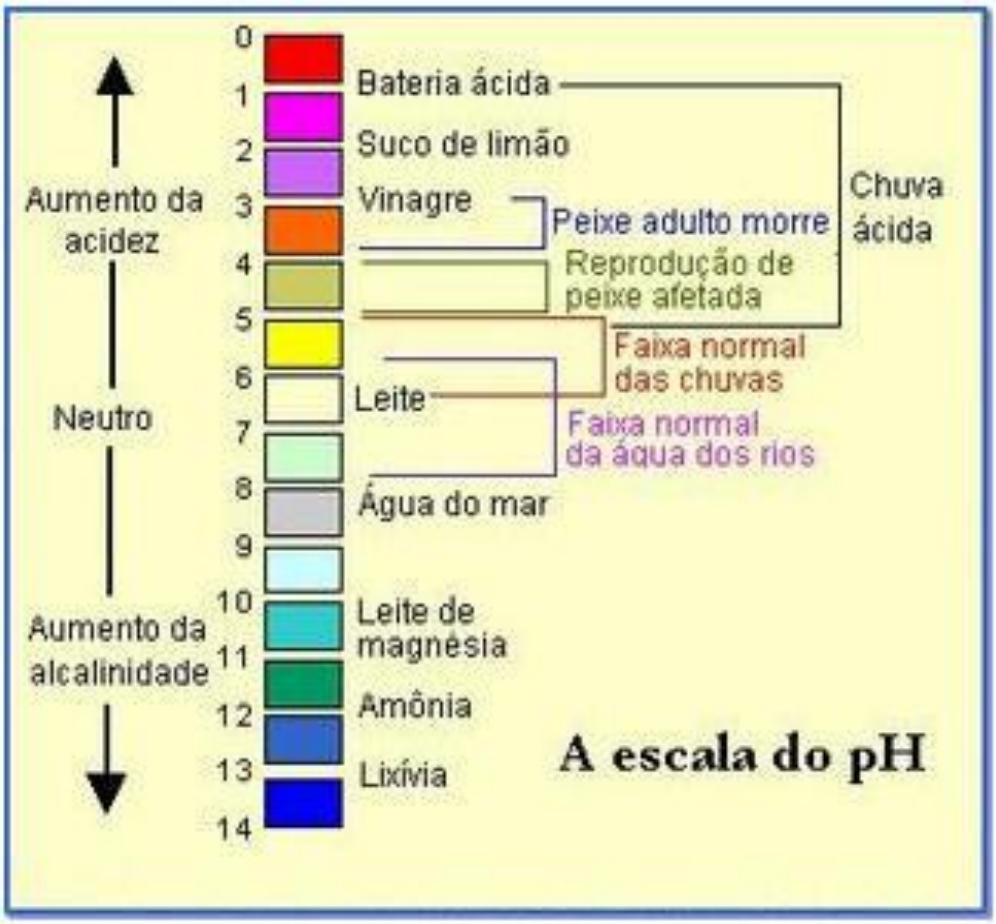
$$pH = -\log(H^+)$$

em que H^+ é o número de moles de íons de hidrogênio por litro.

A classificação da acidez de uma solução se dá de acordo com a seguinte tabela:

Solução Ácida	pH < 7
Solução Neutra	pH = 7
Solução Básica	pH > 7

Seguem abaixo algumas soluções e respectivos valores de pH:



I. O pH do sangue humano e o surgimento de doenças

Nossos líquidos corporais - linfa, sangue e líquido crânio-sacral - representam cerca de 65% da massa total de um corpo adulto, e o sangue, pelas suas funções de grande transportador, mediador, solvente, provedor e agente de ligação entre os órgãos e tecidos, é o mais importante.

A faixa ideal de pH do sangue humano está entre 7,36 a 7,42; portanto, levemente alcalino. E, variações bruscas desse pH sanguíneo irão comprometer não só o estado de consciência do Ser, como também poderá colocar em risco a própria vida. Se o pH do sangue baixa a um valor de 6,95 (levemente ácido), a pessoa poderá entrar num estado de coma, e, no outro extremo, um sangue humano com pH a partir do 7,7 irá desencadear um estado de irritação extrema, espasmos, propensão à tetania e convulsões.

Em síntese, a qualidade de vida de uma célula está diretamente relacionada ao pH do sangue que a irriga continuamente. Reforçando: o sangue, o líquido no qual a célula está mergulhada, tem de ser mantido constantemente com o pH ideal: entre 7,36 – 7,42.

Qualquer diminuição no pH do sangue, que é a situação mais comum em nossa sociedade, irá refletir-se na desvitalização das células, ou seja, células com vida mais curta e, necessariamente, envelhecidas.

A causa mais típica dessa situação metabólica é a ingestão frequente de alimentos que acidificam rapidamente o sangue: açúcar branco, farinha branca, carnes (principalmente a vermelha e a de suínos), frituras, alimentos "aditivados" pelo progresso industrial, alimentos instantâneos, congelados ou excessivamente cozidos, bebidas gasosas etc. Enfim, tudo aquilo que conhecemos como alimentos de natureza biocida (bio = vida + cida = mata), ou seja, alimentos que matam a vida.

Estes alimentos são os grandes protagonistas para acelerar o processo de envelhecimento, a baixa vitalidade e produtividade, os desequilíbrios emocionais e, finalmente, as doenças. Pelo tempo que esse ciclo vicioso (maus hábitos alimentares) durar, o organismo irá manter-se sob padrões de degeneração orgânica contínua, e a chegada da doença será inevitável.

Fonte: http://somostodosum.ig.com.br/conteudo/conteudo.asp?id=3548

a. O texto cita que bebidas gasosas são alimentos que acidificam rapidamente o sangue. Por exemplo, em um refrigerante de cola, encontramos uma concentração H^+ de aproximadamente 10^{-3} mols/L, enquanto em um cafezinho essa concentração é de, aproximadamente, 10^{-5} mols/L. Qual desses produtos é mais ácido?

b. A concentração H^+ no sangue de uma pessoa foi medida por $4,0 \times 10^{-8}$. De acordo com o texto, o pH do sangue dessa pessoa está dentro do intervalo

ideal?

II. O pH do xampu e a química do cabelo

Os xampus que andam mexendo com a cabeça da mulherada são os xampus com pH neutro. Essa onda garante beleza e proteção às madeixas, além de conservar melhor os modernos tratamentos, tudo porque esse xampu possui a propriedade de não agredir os cabelos, será verdade? Existe uma explicação científica para esse fato?

Antes de explicar como os xampus auxiliam nos tratamentos capilares, vejamos em que consiste a estrutura dos cabelos. Um fio de cabelo contém moléculas que se ligam de maneiras diferentes, a estrutura do cabelo muda conforme a ligação.

São basicamente três formas de ligações moleculares presentes nos cabelos: pontes salinas, ligações de hidrogênio e pontes de dissulfeto. O segredo dos xampus está justamente aqui: mudar as interações que formam o fio de cabelo.

Para exemplificar, vejamos como mudar o visual apenas molhando o cabelo. Você já observou que os cabelos molhados tendem a permanecer sem volume? As pessoas com cabelos rebeldes usam dessa propriedade para compor um visual mais agradável, mas o problema é que, quando secos, os cabelos voltam à posição inicial.

A explicação científica para esse fato é que, quando os fios de cabelo são molhados, as ligações de hidrogênio presentes se quebram, mas, ao secarem, essas ligações são novamente formadas. Foi com base nessa teoria que surgiram os xampus com pH neutro.

Quando o cabelo é lavado com xampu ácido (pH ≈ 1,5), além das ligações de hidrogênio, são quebradas também as pontes salinas: o resultado é o cabelo rebelde e seco. E não adianta procurar um xampu com pH elevado (pH ≥ 8), estes são os piores, pois são responsáveis pelo aparecimento das famosas pontas duplas, em razão das quebras das pontes de dissulfeto presentes nas extremidades dos cabelos.

Então, qual é o xampu ideal para manter os cabelos fortes e saudáveis? O recomendável é usar xampus com pH entre 4,0 e 5,0 (pH moderado). Com base nessas informações, é possível formular um xampu ideal para seus cabelos, além de aprender mais sobre pH ainda ganhará um visual novo.

(Fonte: http://www.brasilescola.com/quimica/o-ph-xampu-quimica-cabelo.htm)

a. De acordo com o texto, um xampu com pH baixo é responsável por um cabelo rebelde e seco. Qual é a concentração de íons de hidrogênio de um xampu com pH igual a 1,5?

b. Determinado xampu teve a concentração H^+ medida em $3,7 \times 10^{-9}$ mols/L.

De acordo com o texto, qual o possível efeito para os cabelos de quem usa esse xampu?

Outra aplicação importante dos logaritmos é a escala de pH, que mede a acidez de uma solução. A atividade 5 começa com uma breve explicação dessa escala e é composta de duas questões com textos que mostram a utilização do pH.

Na primeira questão, o texto apresenta uma relação entre o pH do sangue e o aparecimento de doenças. O primeiro item dessa questão pede que o aluno compare o pH de um refrigerante com o pH de um cafezinho. Os alunos puderam resolver essa questão rapidamente. Alguns utilizaram a fórmula do pH apresentada no texto inicial e, posteriormente, uma calculadora.

Outros utilizaram a fórmula e aplicaram uma propriedade do logaritmo para efetuar o cálculo.

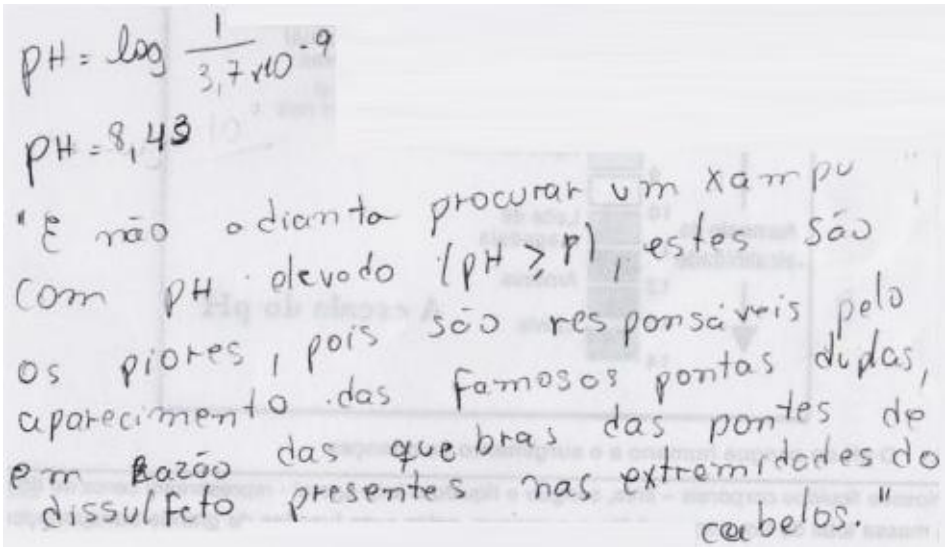
Já no segundo item, é proposto que o aluno calcule o pH do sangue de um indivíduo e indique se, de acordo com o texto, esse pH é o ideal. Os alunos também não apresentaram dificuldade nesse item, sendo que o professor não foi chamado em nenhum momento e apenas observou a realização da atividade. Pode-se destacar que mesmo os alunos que utilizaram propriedade dos logaritmos para calcular os valores pedidos no primeiro item, nesse item não fizeram da mesma forma, sendo necessário utilizar uma calculadora.

A segunda questão se inicia com um texto que relaciona a acidez dos xampus com os efeitos produzidos nos cabelos. No primeiro item, o aluno devia calcular a concentração de íons de hidrogênio de um xampu com pH igual a 1,5. Para esse cálculo, o aluno deveria, após substituir o valor de 1,5 na fórmula apresentada no texto, usar a definição de logaritmos. Todos fizeram corretamente, mas a dupla A precisou da intervenção do professor. Inicialmente, os alunos dessa dupla substituíram o valor de 1,5 no lugar do H^+ na fórmula do pH. Foi então que o professor chamou a atenção dos alunos para o que era pedido nesse item. Ele sugeriu que os alunos relessem o texto inicial e a pergunta desse item para verificarem o que deveriam calcular. Enquanto reliam o texto, perceberam que estavam fazendo errado. Logo, desmancharam e fizeram corretamente. O aluno A1 ainda comentou:

“Que vacilo! É isso que acontece na hora prova. Por isso que eu não passo em Cálculo!”.

Para o segundo item, os alunos utilizaram a calculadora e não tiveram problemas em resolver. A dificuldade em escrever um texto para justificar continuou. A dupla E optou por copiar do texto original uma justificativa para o que foi pedido.

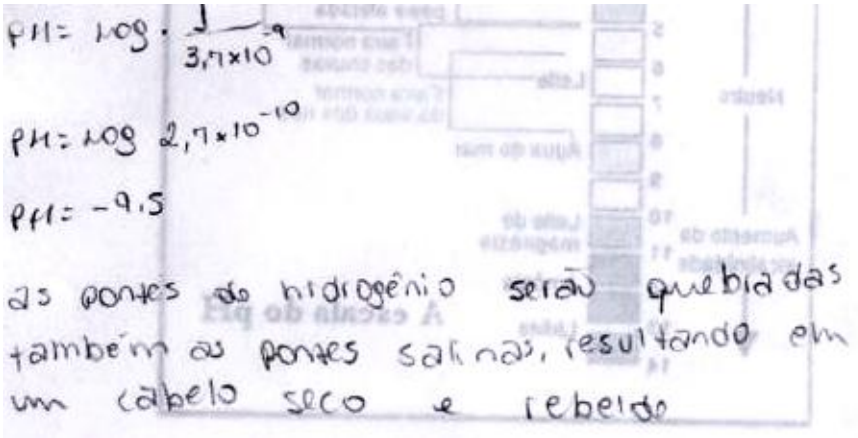
Figura 36: Resposta da dupla E



Fonte: Dados da pesquisa

Possivelmente, os alunos da dupla J utilizaram de maneira equivocada a calculadora e encontraram um valor negativo para o pH. Para escrever a resposta, desprezaram o quarto passo sugerido por Polya (1975) de se fazer um retrospecto sobre o que foi executado para avaliar a solução

Figura 37: Resposta da dupla J



Fonte: Dados da pesquisa

Como já haviam feito cálculos parecidos na primeira questão, terminaram rapidamente.

Para essa atividade o prazo de 50 minutos foi mais que suficiente. Após 45 minutos da entrega das atividades, todas as duplas já haviam terminado. Depois de recolhida uma das folhas de atividades de cada dupla, o professor passou à discussão, perguntando se alguém não conhecia essa aplicação. O professor constatou que todos os alunos já conheciam e o aluno B2 destacou que, no primeiro período, na disciplina de Química Geral, eles haviam estudado sobre o cálculo de pH. O aluno B1 afirmou:

"Aprendi mais agora do que na aula de Química. Por isso que eu tomei bomba! Química já é difícil, ainda mistura com logaritmo!".

Os demais alunos riram e alguns ainda concordaram com essa dificuldade.

Como as questões eram de cálculos fáceis e diretos, os alunos não apresentaram dúvidas. Dessa forma, a discussão se deu em torno das informações presentes nos textos.

Na discussão da primeira questão, o professor comentou que uma das causas da diminuição no pH do sangue é a ingestão frequente de alimentos que acidificam rapidamente o sangue, mas que isso não significa que não se deve ingerir substâncias ácidas. O problema não são as substâncias ácidas, mas, sim, como afirma o texto, substâncias que acidificam o sangue. O professor citou o exemplo do limão que, apesar de ser bastante ácido no sabor, é um agente alcalinizante do sangue[12]. Ele também sugeriu que os interessados no assunto consultassem o *site*[13] de onde foi retirado o texto, pois havia muitas dicas interessantes de alimentação e saúde.

Para começar a discussão, o professor citou a moda dos xampus sem sal e com pH neutro. Ele chamou a atenção para o *marketing* que é feito sobre esses produtos no seguinte sentido:

"Todo mundo fala que é bom, mas ninguém explica por quê. Além disso, ninguém te conta o que acontece se você não usar."

O professor ainda completou:

[12] O ácido cítrico do limão, quando ingerido, irá se combinar com sais minerais livres (biodisponíveis) a base de cálcio, magnésio e ferro, formando os respectivos citratos salinos, que conferirão o desejado pH ideal que é levemente alcalino.
(Fonte:http://www.docelimao.com.br/site/limao/conceito/14-limao-agente-alcalinizante-e-mineralizante)

[13] http://somostodosum.ig.com.br/conteudo/conteudo.asp?id=3548 - Acesso em: 25/07/2013

“Ninguém vai ficar levando todo tipo de xampu pro laboratório para ficar medindo o pH. Nos resta acreditar nas propagandas e rótulos.”

No final, a aluna B2 exclamou:

“Eu achava isso tudo besteira!”.

5.6 Atividade 6

A escala Decibel

O som que ouvimos são ondas sonoras produzidas por vibrações de partículas do meio. Por exemplo, ao acontecer uma explosão num dado ponto, as moléculas do ar em volta desse ponto são comprimidas e vão propagando ao longo dos meios materiais. O nosso ouvido, ao ser atingido por essa onda sonora, possui a capacidade de converter a variação de pressão no ar em estímulo nervoso, o qual, quando alcança o cérebro, nos passa uma sensação auditiva, o som. A onda sonora pode ser um ruído como a do exemplo citado ou um som musical, produzido pela vibração periódica de uma fonte.

A classificação do som como forte ou fraco está relacionada ao nível de intensidade sonora, medida em watt/m². A menor intensidade sonora audível ou limiar de audibilidade possui intensidade $I_0 = 10^{-12}$ W/m². A relação entre as intensidades sonoras permite calcular o nível sonoro do ambiente, que é dado em decibéis. Em virtude dos valores das intensidades serem muito pequenos ou muito grandes, utilizam-se as noções de logaritmos na fórmula capaz de calcular níveis sonoros.

(Fonte: http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/medindo-intensidade-dos-sons.htm)

A escala decibel de som é definida pela expressão

$$NS = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

em que ***NS*** é o nível do som em decibéis (dB) de um ruído de intensidade **I,** e $\mathbf{I_0} = 10^{-12}$ W/m^2 é a intensidade de referência associada ao som mais fraco percebido pelo ouvido humano.

A figura abaixo mostra algumas intensidades sonoras medidas em decibéis.

(Fonte:http://crv.educacao.mg.gov.br)

I. De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), sons de até 55dB são aceitáveis. Para os metrôs, estima-se que a intensidade sonora seja de aproximadamente 10^{-2} W/m^2. Esse nível está dentro do aceitável?

II. Um dos fatos marcantes da Copa do Mundo de 2010 na África do Sul foi o barulho das vuvuzelas, um tipo de corneta usada pela torcida local. O som ensurdecedor da vuvuzela irritou muita gente. Não é para menos. Estudos constataram que uma única vuvuzela pode emitir um ruído de aproximadamente $10^{-2,5}$ W/m^2 Qual a intensidade sonora, em dB, dessa vuvuzela?

III. Estima-se que, quando se dobra a quantidade de vuvuzelas tocadas simultaneamente, há um aumento de 3dB na escala sonora. Quantas vuvuzelas seriam necessárias para se ultrapassar o limiar da dor?

IV. Cientistas afirmam que, a partir de 160 dB, pode haver ruptura do ouvido humano. Qual a intensidade, em W/m^2, de um som de 160 dB?

A atividade 6 se inicia com um texto que relata uma aplicação não muito conhecida dos logaritmos: a escala Decibel. São feitas algumas considerações sobre as condições físicas e biológicas que nos permitem ouvir, depois é

apresentada a fórmula para cálculo da intensidade do som em dB e alguns exemplos.

Na primeira questão, o aluno é levado a determinar, com base nos dados apresentados, se o nível de ruído numa estação do metrô está dentro do aceitável pela OMS. Uma simples substituição na fórmula apresentada é o primeiro passo para a resolução do problema. Feita essa substituição, basta realizar o cálculo do logaritmo e multiplicar o valor encontrado por 10 para se obter o valor da intensidade sonora em questão em dB.

Os alunos estranharam um pouco o fato de terem que fazer a substituição de dois valores na fórmula. O aluno G1 ainda perguntou:

"O valor de I_0 é esse que tá aqui?"

O professor alertou a turma:

"O valor $\boldsymbol{I_0}$ que aparece na fórmula é uma constante, ele se refere ao som mais fraco percebido pelo ouvido humano."

Dito isso, os alunos prosseguiram sem nenhuma dificuldade.

A segunda e a terceira questões conduziam o aluno a investigar sobre a intensidade do som produzido por uma vuvuzela[14], instrumento que ficou famoso na Copa do Mundo de 2010. Dada a semelhança com a primeira questão, os alunos responderam a segunda com rapidez, mas demoraram um pouco para entender a terceira questão. Encontrado o valor de 95 dB para a intensidade do som produzido por uma única vuvuzela, o aluno era questionado a determinar quantas vuvuzelas seriam necessárias para se ultrapassar o limiar da dor com base nos dados apresentados no texto.

Como a questão não envolvia um cálculo direto de logaritmo como as questões anteriores, os alunos apresentaram maior dificuldade. Várias perguntas surgiram e o professor orientava.

Aluno G1: *"Tenho que usar o número que encontrei na questão II?"*

Aluno F1: *"Mas onde eu tenho que substituir esse valor?"*

[14] Conhecida no Brasil como corneta ou cornetão, é um aerofone cilíndrico de cerca de um metro de comprimento, usada por torcedores em jogos de futebol. As vuvuzelas ganharam forte exposição na mídia devido à Copa do Mundo 2010 realizada na África do Sul e à função sonora que exercem para comemorar gols ou durante a partida.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Vuvuzela - Acesso em 26/11/2013 às 21:54

Professor: *“Vocês devem usar o resultado obtido na questão II. Por isso, confiram esse resultado para não propagar o erro.”*

Aluno F1: *“Já conferi, mas coloca onde na fórmula?”*

Professor: *“Leia novamente a questão e fique atento. A fórmula serve para calcular quantos decibéis determinado valor em W/m^2 representa. Não tem que fazer tudo usando essa fórmula.”*

Nisso, o aluno F2 cochicha com o aluno F1:

“Já sei aqui... Vamos fazer uma tabela e ir calculando.”

Visto que eles estavam seguindo por caminho correto, o professor não mais interveio.

Na última questão, para determinar a intensidade em W/m^2 de um som de 160 dB, os alunos deviam substituir o valor de 160 no lugar de *B* na fórmula e calcular *I*. Novamente, a dupla J não percebeu esse detalhe e o professor interveio:

“Muito cuidado! Vocês devem ler com atenção os textos e interpretá-los. Vocês não estão fazendo exercícios de substituição e cálculo. Reparem no texto o que significa cada item da fórmula e o que vocês devem calcular.”

Rapidamente, o aluno J1 percebeu o erro e exclamou:

“De novo!”

Ao término dos 50 minutos, apenas a dupla H não havia finalizado a atividade. O professor recolheu a folha de atividades das outras duplas e, ao se aproximar da mesa da dupla, foi pedido que o professor esperasse um pouco, pois já estavam terminando. O professor esperou e, em três minutos, a dupla entregou.

Para iniciar a discussão, o professor questionou se os alunos já conheciam o que significava decibel. Eles afirmaram que conheciam a utilização da escala decibel, sabiam da existência de um aparelho para se medir a intensidade do som, mas não sabiam a estreita relação entre essa escala e os logaritmos. Isso foi notado quando o professor perguntou se sabiam como era feito o cálculo e o aluno F1 afirmou:

“Eu achei que era com um aparelhinho!”

O professor explicou que a medição da intensidade era feita com um aparelho, porém, a criação da escala decibel foi feita utilizando uma escala logarítmica, como citado no texto. E acrescentou:

“Os cálculos que vocês fizeram é o que está por ‘dentro’ do aparelho. O aparelho capta e mede o som e depois transforma o valor medido em W/m^2 para dB.”

Como o professor havia verificado que todas as duplas encontraram corretamente as respostas para as duas primeiras questões, ele apenas refletiu com os alunos o significado daqueles valores dentro do quadro apresentado no texto. O professor citou que, às vezes, não se percebe o quão nocivo está para nós o som em uma estação de metrô ou o som de um fone de ouvido.

Para a terceira questão, o professor salientou que todos os alunos chegaram ao resultado construindo tabelas. Ele destacou que, embora seja um método válido de se encontrar o resultado, seria muito trabalho se os valores em questão fossem maiores. O professor fez a seguinte observação com os alunos:

“Se o valor encontrado para a intensidade sonora da vuvuzela foi de 95 dB e a intensidade do limiar da dor é de 120 dB, a diferença entre esses valores é de 25 dB. Já que, com o aumento de duas vuvuzelas, se aumenta em 3 dB a intensidade sonora, dividindo-se 25 por 3, temos que são necessários mais 8 pares de vuvuzelas para se aumentar em 24 dB. Logo, para ultrapassar essa quantidade, devemos ter 9 pares, o que dá um total de 18 vuvuzelas que, somadas à vuvuzela inicial, produzem o resultado procurado de 19 vuvuzelas.”

E completou:

“Se cada um aqui na sala soprasse uma vuvuzela agora, o som seria tão forte que iria causar dor.”

Da última atividade, o professor chamou a atenção que o problema pedia para que se determinasse a intensidade em W/m^2 e que era importante ficar mais atento aos enunciados dos problemas para não substituir as variáveis erradas na fórmula. Para terminar, o professor citou que, “muitas vezes se escutam histórias em que o barulho deixa o indivíduo surdo. Isso ocorre quando a pessoa é submetida a sons de 160 dB ou mais. Por isso devemos ter muito cuidado quando vamos a algum *show* e ficamos próximos das caixas de som.”

5.7 Questionário

Ao final das atividades, foi aplicado um questionário de avaliação do trabalho realizado. Nesse questionário, os alunos não se identificaram, de modo que pudessem se expressar com mais liberdade.

Questionário

1) a. Como você classificaria as aulas de Cálculo nas quais tratamos do tema Logaritmos?
( ) Ótimas ( ) Muito boas ( ) Boas ( ) Regulares ( ) Ruins

b. Comentário:

2) a. Como você avalia a sua participação nas aulas de Cálculo?
( ) Muito interessado(a) ( ) Interessado(a)
( ) Pouco interessado(a) ( ) Desinteressado(a)

b. Comentário:

3) a. Comparando as aulas em que tratamos do tema logaritmo com as demais aulas de Cálculo, seu interesse
( ) aumentou.
( ) continuou o mesmo.
( ) diminuiu.

b. Comentário:

4) a. O que você achou das atividades realizadas?
( ) Ótimas ( ) Muito boas ( ) Boas ( ) Regulares ( ) Ruins

b. Comentário:

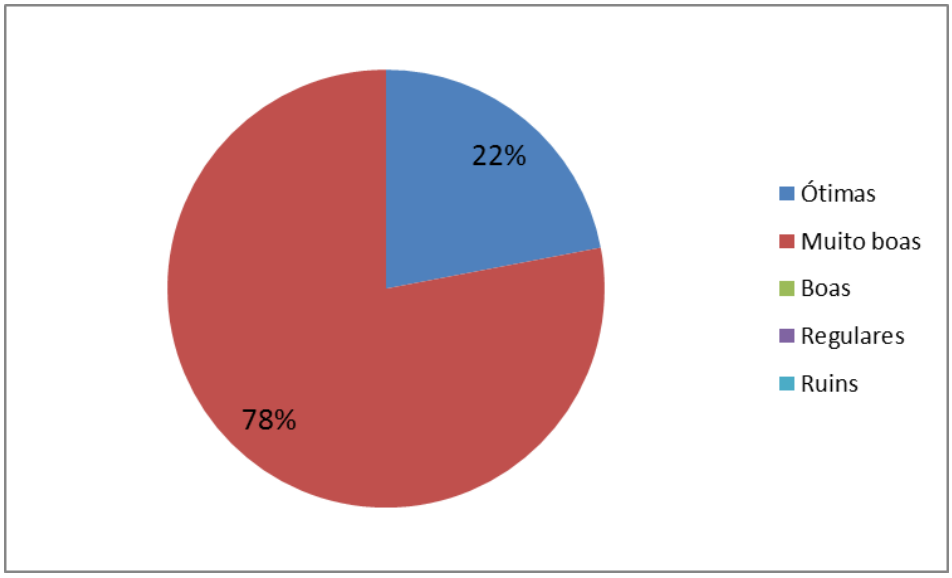
5) Você conhecia as aplicações dos logaritmos apresentadas nas atividades?

Escala Richter	( ) Sim	( ) Não
pH	( ) Sim	( ) Não
Escala Decibel	( ) Sim	( ) Não

6) Sobre as aulas e as atividades, relate aqui pontos positivos, pontos negativos, suas sugestões, criticas ou observações.

Na primeira pergunta, o aluno deveria classificar as aulas nas quais foi tratado o tema de Logaritmos com a aplicação das atividades e, se quisesse, poderia deixar um comentário. Todos os alunos classificaram as aulas como ótimas ou muito boas.

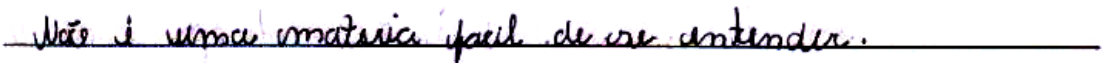
Gráfico 2: Avaliação das aulas em que foram aplicadas as atividades



Fonte: Elaborado pelo autor

De fato, durante a aplicação das atividades o professor pôde perceber uma maior dedicação dos alunos. No primeiro dia de aula, ao citar a palavra logaritmo, ouviram-se muitos comentários de aversão ao tema. No questionário, verificou-se que as aulas foram mais interessantes, apesar de a matéria causar espanto em alguns, como sugere o comentário de um aluno:

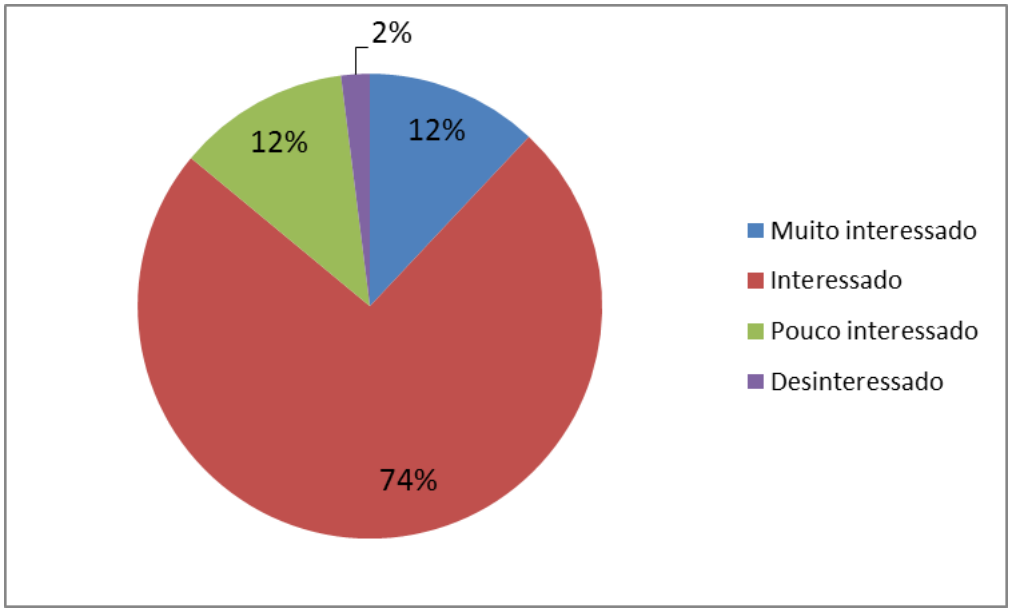
Figura 38: Comentário de um aluno



Fonte: Dados da pesquisa

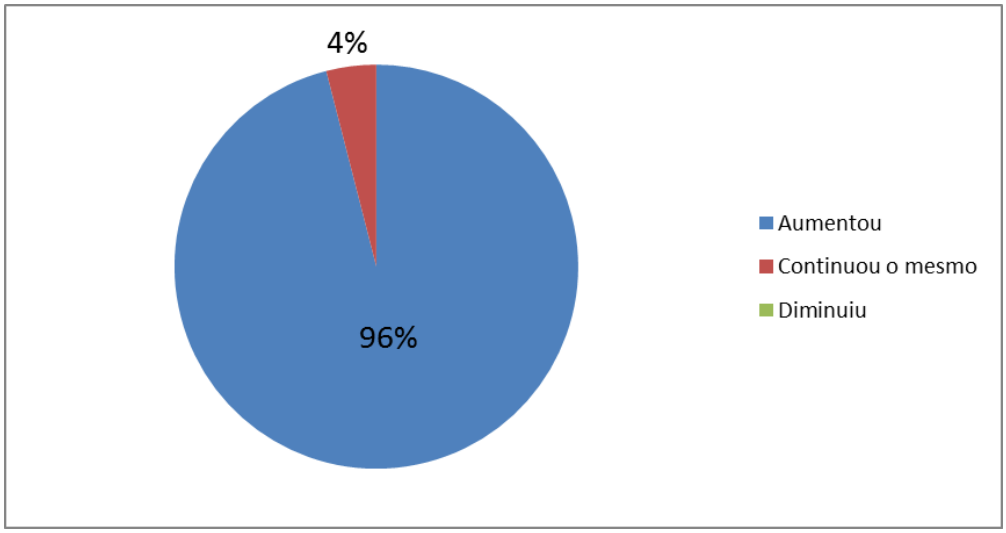
A segunda e a terceira questões indagaram aos estudantes quanto à própria participação nas aulas de Cálculo, antes da aplicação das atividades e durante a aplicação das atividades.

Gráfico 3: Interesse dos alunos pelas aulas de Cálculo



Fonte: Elaborado pelo autor

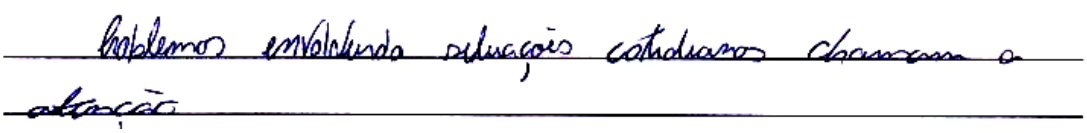
Gráfico 4: Modificação do interesse dos alunos pelas aulas de Cálculo



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se aqui que o interesse aumentou na maioria dos alunos, talvez pelas aplicações dos logaritmos apresentadas, como sugere o texto de um dos entrevistados:

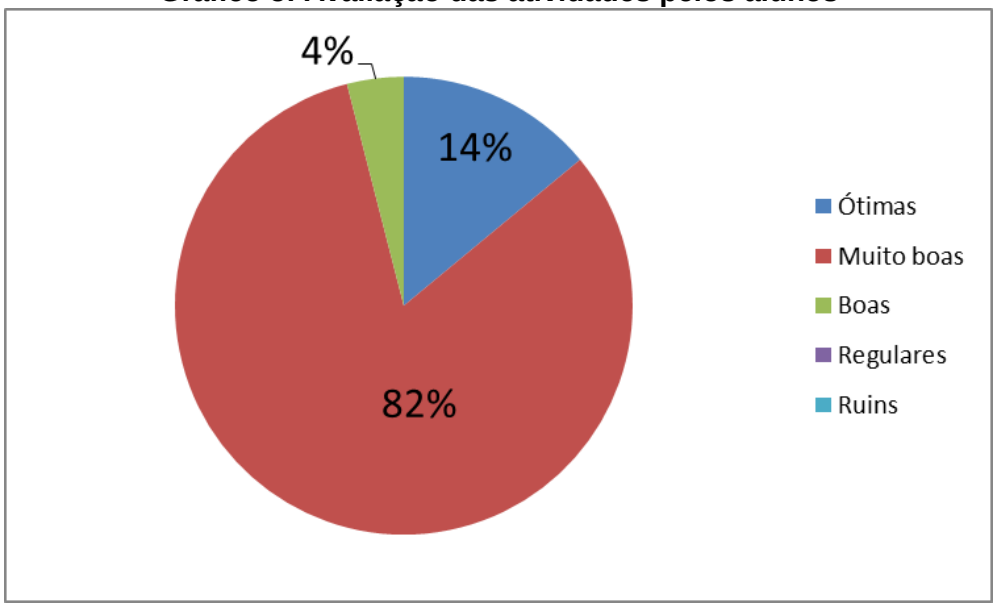
Figura 39: Comentário de um aluno



Fonte: Dados da pesquisa

A quarta questão pedia que o aluno avaliasse as atividades. Os resultados foram os seguintes:

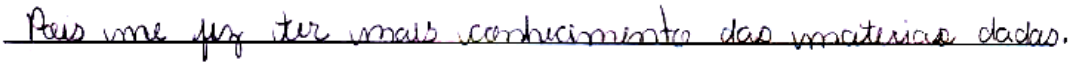
Gráfico 5: Avaliação das atividades pelos alunos



Fonte: Elaborado pelo autor

O mesmo aluno que afirmou que logaritmos não é uma matéria fácil de entender avaliou positivamente as atividades e justificou:

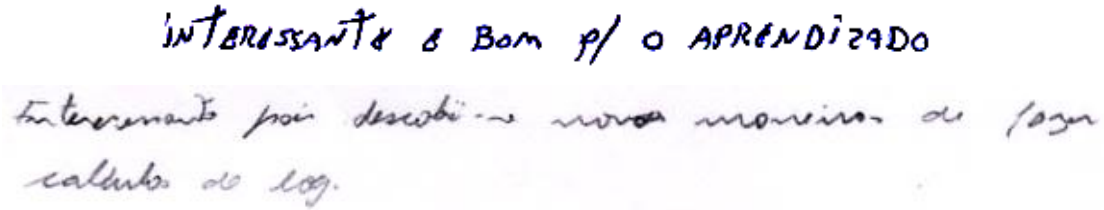
Figura 40: Comentário de um aluno



Fonte: Dados da pesquisa

Outros alunos compartilharam da mesma opinião.

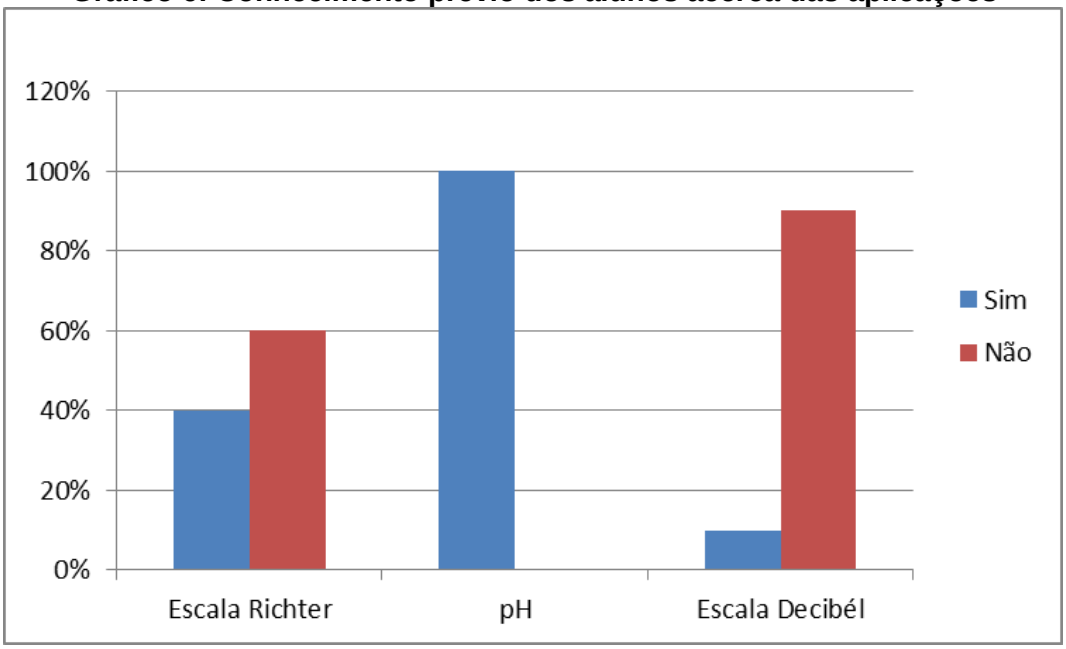
Figura 41: Comentários de alunos



Fonte: Dados da pesquisa

A quinta questão avaliava o conhecimento prévio dos alunos acerca das aplicações apresentadas.

Gráfico 6: Conhecimento prévio dos alunos acerca das aplicações

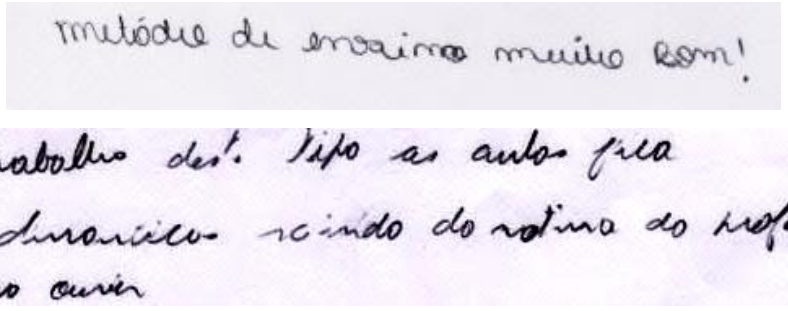


Fonte: Elaborado pelo autor

Destaca-se aqui que, no momento da atividade relacionada à escala pH, todos os alunos afirmaram já conhecer o que significava essa escala. Porém, pelos resultados obtidos no questionário, parece que não conheciam a estreita relação entre essa escala e os logaritmos.

Por fim, o questionário pedia que o aluno registrasse pontos positivos, pontos negativos e outras considerações a respeito das atividades. A maioria dos alunos registrou alguma informação, porém nenhum ponto negativo foi registrado. Verificou-se que os alunos gostaram de trabalhar com a resolução das atividades tirando o foco das aulas do professor.

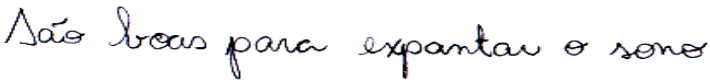
Figura 42: Comentários de alunos



Fonte: Dados da pesquisa

Pelo fato de as aulas acontecerem no sábado pela manhã, um aluno ainda destacou.

Figura 43: Comentário de um aluno



Fonte: Dados da pesquisa

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa realizada teve a intenção de contribuir para uma aprendizagem mais significativa do conceito de logaritmo, tendo como foco a resolução de problemas. Buscando uma ressignificação do conceito de logaritmo preexistente e a melhora da compreensão do mesmo, foi aplicada uma sequência de atividades referente a esse conteúdo a alunos da disciplina de Cálculo I de diversos cursos de engenharia de um centro universitário particular de Belo Horizonte. Embora a aplicação tenha ocorrido com alunos do ensino superior, por se tratar de uma estratégia de ressignificação, o produto pode ser utilizado também para alunos do ensino médio que já tiveram um primeiro contato com os logaritmos.

Primeiramente, com a revisão de literatura, procurou-se analisar de que forma os livros utilizados durante o ensino básico do pesquisador tratavam o assunto e analisar se uma estratégia de ensino baseada na resolução de situações problemas poderia contribuir para que a aprendizagem ocorresse de maneira mais efetiva. Verificou-se que as atividades exploratórias de situações problemas muitas vezes levam os alunos a realizarem tarefas de investigação matemática e a vivenciarem experiências matemáticas de processos como a abstração e a generalização (Davis & Hersh (1995)).

A as atividades foram elaboradas com objetivos específicos a serem atingidos (conforme esquema da Figura 4, p. 41) e a construção das atividades considerou a utilização de textos informativos que pudessem colocar os alunos diante de um problema a ser resolvido, na medida em que as atividades propostas se baseavam nas informações contidas no texto.

Além disso, a utilização de tais textos pretendia contribuir para o desenvolvimento não somente das habilidades matemáticas, mas também de habilidades de leitura e interpretação. Durante a aplicação das atividades foi possível observar que o trabalho com textos chamou a atenção dos alunos que, em um primeiro momento, tiveram dificuldade no trato com interpretação de textos, bem como uma resistência ao fato de ter que ler textos “grandes” em uma aula de Matemática. Realmente, os alunos não estão habituados a esse tipo de atividades, de modo que os livros didáticos mais utilizados trazem apenas alguns textos, geralmente, desvinculados das questões. Assim, os alunos são levados a ler, no máximo, enunciados de questões que, normalmente, não passam de cinco linhas.

Também foi possível verificar que os alunos da turma em que as atividades foram aplicadas ficaram mais motivados durante as aulas sobre logaritmos do que alunos das turmas em que foram propostas apenas atividades do tipo listas de exercícios. Infelizmente, em ambos os casos, constatou-se sempre uma preocupação, por parte do aluno, no aprendizado imediatista, voltado apenas para obter um resultado satisfatório em uma futura avaliação. Isso ficou claro em situações em que algum tópico trabalhado na aula imediatamente anterior era dado por “esquecido” por parte dos alunos. Essa preocupação, que visa ao aprendizado imediatista para a resolução de certa atividade ou avaliação, colabora para que a aprendizagem não seja significativa.

Dessa forma, verificou-se que existe uma necessidade de levar o aluno a refletir que todo aquele conhecimento adquirido vai ser necessário para a resolução de problemas que farão parte das avaliações, das atividades das aulas seguintes, das técnicas matemáticas de outras disciplinas e, consequentemente, da sua vida profissional.

Assim, a estratégia de um trabalho em dupla, baseado na proposta de investigação matemática de Ponte (2003), mostrou-se um facilitador da aprendizagem, permitindo que o aluno, ao revisitar um assunto já estudado, obtivesse uma melhor compreensão do mesmo buscando ressignificar o conceito. Os resultados apresentados evidenciaram que tal estratégia contribuiu para que os alunos adotassem uma perspectiva mais reflexiva e investigadora na construção do próprio conhecimento matemático, à medida que buscavam estratégias para resolver os problemas propostos.

Após a aplicação das atividades, constatou-se que grande parte da dificuldade apresentada no estudo dos logaritmos decorre de uma defasagem no conceito de potenciação e de pouca habilidade algébrica no trato das equações exponenciais. Principalmente por se tratar de cursos de engenharia, em que o aluno apresenta uma maior afinidade com as ciências exatas, espera-se que essa defasagem não ocorra. Nesse sentido, percebe-se, novamente, a preocupação dos alunos no aprendizado imediatista, visto que tais conceitos são trabalhados desde o ensino fundamental e suas aplicações são necessárias em assuntos tratados até no ensino médio.

Após essa constatação, fica claro, então, que o professor deve procurar estratégias para minimizar esses efeitos. Algumas questões complementam e ficam em aberto para futuras pesquisas:

- Como trabalhar as habilidades relativas à potenciação e suas propriedades, de forma a amenizar o impacto da defasagem no estudo de equações exponenciais e logaritmos?
- Quais estratégias a serem utilizadas antes do ensino de logaritmos (e equações exponenciais) permitirão ao aluno adquirir as habilidades algébricas necessárias?

Nota-se, então, que esta pesquisa não se encerra aqui. A partir dessas novas questões e em busca de outros esclarecimentos que, porventura, venham a ser necessários, torna-se importante a ampliação dos conhecimentos discutidos nesta pesquisa, procurando examinar novas possibilidades, propor novas hipóteses e gerar novas conclusões.

.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte**. V.1. 6ª. ed. Porto Alegre. Ed. Bookman, 2000.

ARTIGUE, M. **What can we learn from research at the university level?** Em D. Holton (Ed.), The teaching and learning of mathematics at the university level: An ICMI study (p. 237-254). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

ARTIGUE, M. **Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques?** Actes du premier congrès franco-canadien de sciences mathématiques, Toulouse, 2004

BACHELARD, G. **O racionalismo aplicado**. Rio de Janeiro, Zahar, 1977.

BAUZER, Eduardo. **Introdução à Teoria Acústica.** Disponível em: http://www.cpdee.ufmg.br/~semea/anais/artigos/EduardoBauzer.pdf. Acesso em: 23/02/13 às 12:10.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e perspectivas. São Paulo, Editora UNESP, 1999. (Seminários e Debates).

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. 11. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Secretária da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRASIL. Secretária da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.

COLL, César. **Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento.** Barcelona: Editorial Paidós Ibérica, S.A. 1997.

DAVIS, P. & HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

DEMANA; WAITS; FOLEY; KENNEDY. **Pré-Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2009.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A Solução de Problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução Beatriz Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ERNEST, Paul. **Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia**. 1996.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D. et al. **Um Estudo das Potencialidades Pedagógicas das Investigações Matemáticas no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.** Faculdade de Educação: Unicamp, 2005.

FROTA, M. C. R. ***Experiência Matemática na Sala de Aula da Educação Superior***. In: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 9, 2007.

GAZIRE, E. S. **Perspectivas da resolução de problemas em educação matemática.** 1988. Dissertação (Mestrado em Educação) UNESP / Rio Claro.

GIOVANNI, José R.; BONJORNO, José R. **Matemática**. São Paulo: FTD, 1996.

GUEUDET, G. Investigating the secondary-tertiary transition. **Educational Studies in Mathematics**, 67(3), 237-254, 2008.

HONG, Y. Teachers' Perspectives on the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics Education. In: HUNTER,R.; BICKNELL, B.; BURGESS T. (Eds.). **Crossing divides**: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 1). Palmerston North, NZ: MERGA. 2009

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: volume único. 5. ed. São Paulo: Atual, 2011.

KARAM, R. A. S.; PIETROCOLA, M.; SOTOMAIOR, Ricardo Avelar. Habilidades Técnicas Versus Habilidades Estruturantes: Resolução de Problemas e o Papel da Matemática como Estruturante do Pensamento Físico. **ALEXANDRIA,** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 181-205, jul. 2009.

KANTOWSKI, Mary G. Algumas Considerações sobre o ensino para a Resolução de Problemas. In: KRULIK, S.; REYS, R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997, p. 270-282.

KLESSER, Maria Cristina. Educação de Jovens e Adultos: (des)construindo saberes nos espaços do aprender e ensinar matemática. **Zetetiké**: UNICAMP,v. 14, n. 26, p. 103-121, jul./dez. 2006.

MAOR, Eli. **e**: A História de um Número. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MIRANDA, Paula R. **Uma proposta para o ensino de matemática para o curso técnico de agente comunitário de saúde na modalidade PROEJA.** Dissertação de Mestrado. PUCMINAS, 2010.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

PALIS, G.L.R. **Pesquisa sobre a própria prática no ensino superior de matemática**. Coleção SBEM, v. 5, p. 203-221, 2009.

PAIVA, Manoel. **MATEMÁTICA** VOL 1,2 e 3. Ed. Moderna, 1995.
POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência. 1975.

POLYA, G. **Mathematical Discovery:** on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving. 2 v. John Wiley,1962-65, p. ix.

PONTE, J.P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

POZO, Juan I. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998.

SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim. Os gêneros escolares: das práticas de linguagem aos objetos de ensino. **Revista Brasileira de Educação**. ANPED, n. 11, maio-ago. 1999. p. 5-16.

SCHOENFELD, A. Por que toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P.; L. C. LEAL, L. C.; PONTE, J.P. (Eds.). **Investigar para aprender matemática.** Lisboa: APM e Projecto MPT, 1997. p. 61-72.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica.** Tradução Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

STEWART, I. **17 equações que mudaram o mundo**. São Paulo: ed. Zahar, 2013. 402 p.

STEWART, J. **Cálculo**: Volume I e II, 6ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. v. 1. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

THOMAS, George B. **Cálculo**: Volume I, 11ª edição. Editora Pearson e Addison Wesley, 2009.

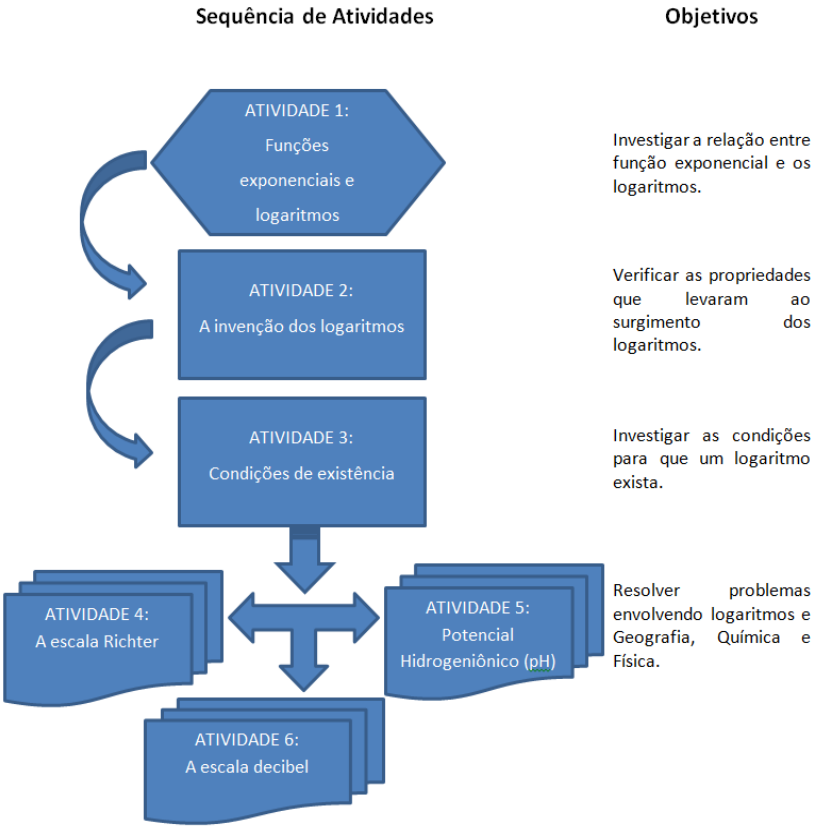
VALE, Isabel. http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/ivale-palestratexto.pdf. Acesso em: 12/01/13 – 23:17

VARGAS, A. F. **O Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas**. 2009, Dissertação (Mestrado em Ensino). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Caderno de Atividades

A seguir, apresentamos o caderno de atividades produto dessa pesquisa. Este caderno é constituído de 6 (seis) atividades que foram elaboradas de modo a levar o aluno a trilhar um percurso desde a necessidade da criação dos logaritmos até algumas de suas aplicações conforme mostra o esquema a seguir:



Sugere-se que os alunos sejam agrupados em duplas para que durante a realização de cada atividade possam discutir sobre os resultados encontrados e sanar dificuldades que venham a ocorrer na interpretação dos enunciados, entre outras. Os questionamentos dos alunos, decorridos durante a aplicação das atividades, além de outras dificuldades encontradas, devem ser trabalhados pelo professor e aplicador destas atividades durante um momento de socialização no encerramento de cada atividade.

Caderno de Atividades:

A criação dos logaritmos e algumas aplicações

Atividade 1 – A necessidade da criação dos logaritmos

Leia o seguinte texto:

Carro não é investimento: isso é um fato constatado por qualquer comprador de carro 0 km, que vê seu patrimônio desvalorizar-se algumas dezenas de reais no momento em que tira o carro da concessionária. Isso é uma característica de todos os mercados automotivos desenvolvidos.

Apesar disso, em função da elevada liquidez dos automóveis, muitas famílias ainda veem o carro como uma "reserva de valor" - um recurso que pode estar disponível em caso de emergência, e, para esses casos, o índice de depreciação do veículo é um dado importante, pois define o quanto de dinheiro o consumidor irá perder.

A depreciação média dos carros brasileiros em um ano é de 15,3%, variando para mais ou para menos de acordo com as características (carros importados e mais caros tendem a desvalorizar mais). A agência Molicar fez um estudo com os índices de desvalorização dos automóveis no Brasil, e elaborou um ranking dos carros com base nesse requisito.

Por exemplo, o Celta, com desvalorização média de 9,7% depois de doze meses de uso, é o carro que menos desvaloriza. Em segundo lugar vem o Mille Economy, da Fiat, com 10,1% de depreciação. Aliás, os carros da Fiat aparecem, em média, como os menos depreciados do mercado, junto com os modelos mais acessíveis da Volkswagen.

Subindo um pouco nos preços, vemos a Ford EcoSport XLT Freestyle e o Honda Fit 1.4 LX-AT com um índice de desvalorização de 12,2% depois de doze meses. Entre os carros grandes, a Captiva Sport 2.4 foi a que menos desvaloriza, com 12,5% de perda de valor. Na outra ponta temos o Omega, com desvalorização de 25%, mesmo assim ainda à frente do Kia Carnival, que perde 25,5%.

FONTE: HTTP://WWW.CAR.BLOG.BR/2012/01/RANKING-DE-DESVALORIZACAO-DE-CARROS.HTML

Segundo o texto, o valor de um automóvel Mille Economy sofre uma depreciação de cerca de 10% ao ano. Supondo que essa desvalorização é constante, podemos modelar uma função que representa o valor deste automóvel após **t** anos da seguinte forma:

$$f(t) = 25000.(0{,}9)^t$$

V. Com base na fórmula apresentada, responda:

a. Qual o valor do automóvel no momento da compra? Justifique.

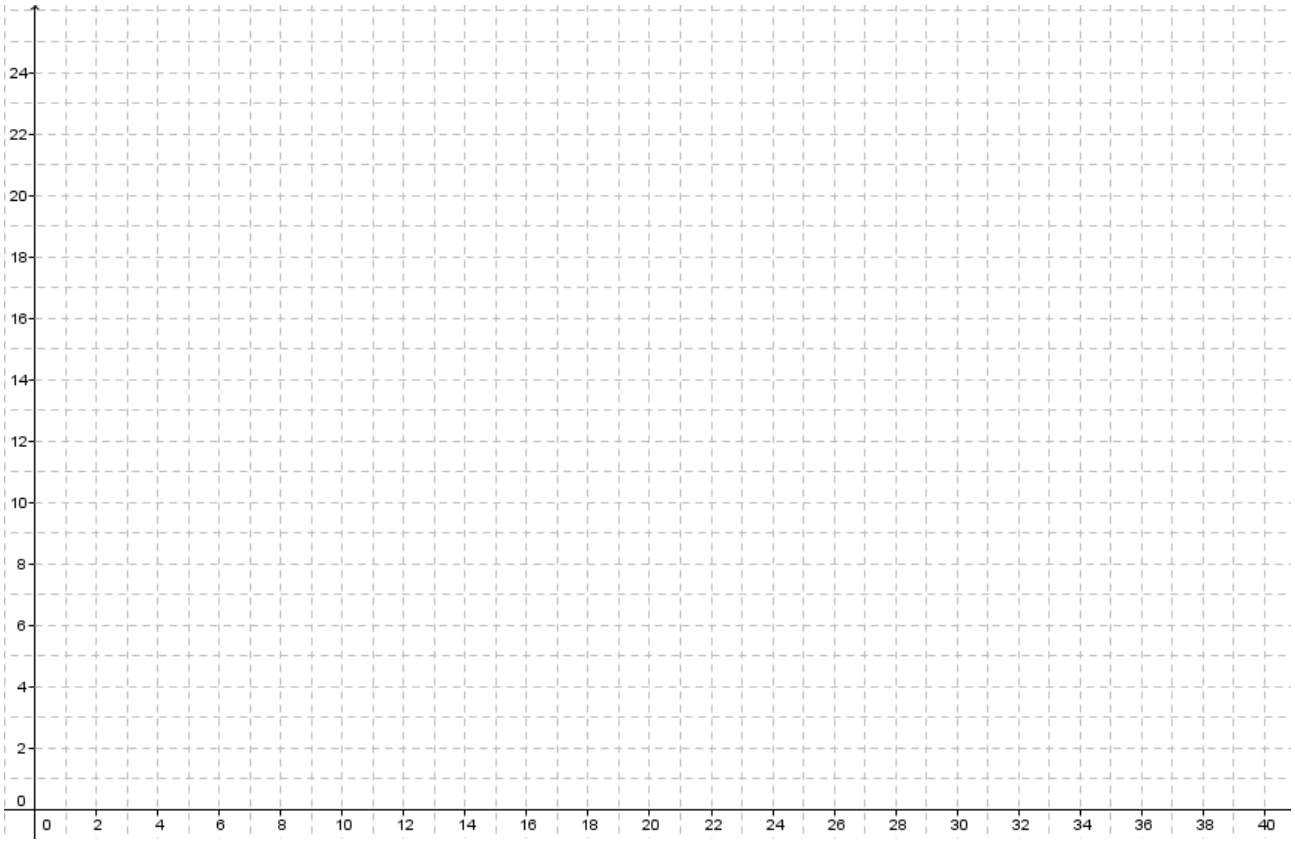
b. Existe algum valor de **t** para que o valor do carro seja de R$15000? Se possível, determine.

O texto afirma que todo comprador de carro 0 km sabe que carro não é investimento. Isso porque a desvalorização sempre ocorre.

VI. Com base na fórmula apresentada, construa uma tabela com o valor do carro (em reais) após *t* anos para alguns valores de *t*.

t (anos)	**f(t) (reais)**

VII. Com os dados obtidos na tabela anterior, construa um gráfico relacionando o tempo e o valor do carro.



VIII. Analisando o gráfico e a tabela, responda:

e. Em quanto tempo **t** o valor do carro é de aproximadamente R$15000? Compare sua resposta com o item I.b.

f. Aproximadamente em quanto tempo o valor do carro é a metade do valor inicial?

g. Qual a tendência do valor do carro ao passar de muitos anos (mais de 30)?

h. Existe algum tempo em que o valor do carro é R$ 0,00? Justifique.

Atividade 2 - A invenção dos logaritmos

Leia o seguinte texto que destaca alguns aspectos importantes da criação dos logaritmos.

Os logaritmos, como instrumento de cálculo, surgiram para realizar simplificações, uma vez que transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração.

Napier foi um dos que impulsionaram fortemente seu desenvolvimento, perto do início do século XVII. Ele é considerado o inventor dos logaritmos, muito embora outros matemáticos da época também tenham trabalhado com ele.

Já antes dos logaritmos, a simplificação das operações era realizada através das conhecidas relações trigonométricas, que relacionam produtos com somas ou subtrações. Esse processo de simplificação das operações envolvidas passou a ser conhecido como prostaférese, sendo largamente utilizado numa época em que as questões relativas à navegação e à astronomia estavam no centro das atenções. De fato, efetuar multiplicações ou divisões entre números muito grandes era um processo bastante dispendioso em termos de tempo. A simplificação, provocada pela prostaférese, era relativa e, sendo assim, o problema ainda permanecia. O método de Napier baseou-se no fato de que associando aos termos de uma progressão geométrica

$$\mathbf{b, b^2, b^3, b^4, b^5, \dots, b^n, \dots}$$

os termos da progressão aritmética

$$\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots}$$

então ao produto de dois termos da primeira progressão, $\mathbf{b^m.b^p}$, está associada a soma **m+p** dos termos correspondentes na segunda progressão.

Considerando, por exemplo,

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

Para efetuar, por exemplo, 256 x 32, basta observar que:
256 na segunda linha corresponde a 8 na primeira;
32 na segunda linha corresponde a 5 na primeira;
como 8+5=13, 13 na primeira linha corresponde a 8192 na segunda.

Assim, 256x32=8192 resultado esse que foi encontrado através de uma simples operação de adição.

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm

O texto apresenta uma relação entre uma progressão aritmética e uma progressão geométrica.

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

Para cada termo da progressão geométrica, o termo correspondente é seu logaritmo na base 2 (pois a razão da progressão geométrica é 2). Ou seja, o logaritmo na base 2 de 512 é 9.

VIII. Com base nessa associação qual é:

a. o logaritmo de 2048 na base 2?

b. o logaritmo de 32768 na base 2?

c. o logaritmo de $\frac{1}{2}$ na base 2?

d. o logaritmo de $\frac{1}{16}$ na base 2?

e. o logaritmo de 1 na base 2?

Você pôde observar que o logaritmo corresponde ao expoente da potência. Mais formalmente, dizemos que o logaritmo de *y* na base *x* é o expoente *w* tal que, $y = x^w$. Em notação matemática, escrevemos;

$$\log_x y = w \Leftrightarrow x^w = y.$$

Podemos usar essa definição para calcular, por exemplo, o logaritmo de 125 na base 5:

$$\log_5 125 = w \Leftrightarrow 5^w = 125$$

Resolvendo a equação exponencial $5^w = 125$ encontramos que $5^w = 5^3$ e, portanto, $w = 3$. Logo, podemos afirmar que $\log_5 125 = 3$.

IX. Usando a definição, calcule:

a. o logaritmo de 2401 na base 7.

b. o logaritmo de $\frac{1}{81}$ na base 3.

X. Construa uma tabela que associe os termos da progressão aritmética 1, 2, 3,... aos termos da progressão geométrica das potências de base 3.

XI. Com base nessa tabela qual é:

a. o logaritmo de 27 na base 3?

b. o logaritmo de 2187 na base 3?

c. o logaritmo de 59049 na base 3?

d. o logaritmo de 1 na base 3?

De acordo com o texto, uma propriedade que motivou a criação dos logaritmos foi a possibilidade de transformar produtos em somas. Verifique esta e outras propriedades fazendo o que se pede a seguir:

XII. Faça a multiplicação 27 x 2187 e procure o resultado na tabela.

a. Qual a relação entre os logaritmos dos números multiplicados e o logaritmo do resultado encontrado?

Em linguagem matemática, podemos escrever que

$$\log_3(27 \times 729) = \log_3 27 + \log_3 729$$

Generalizando, você verificou um exemplo da seguinte propriedade dos logaritmos:

$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

XIII. Faça agora a divisão 531441 ÷ 243 e procure o resultado na tabela.

a. Qual a relação entre os logaritmos desses dois números e o logaritmo do resultado encontrado?

Generalizando, você verificou um exemplo da seguinte propriedade dos logaritmos:

$\log_a(b \div c) = \log_a b - \log_a c$

XIV. Encontre o resultado da potenciação $(27)^2$ e procure o resultado na tabela.

a. Qual a relação entre os logaritmos de 27 e o logaritmo do resultado encontrado?

Generalizando, você verificou um exemplo da seguinte propriedade dos logaritmos:

$\log_a(b)^c = c \times \log_a(b)$

Atividade 3 - Condições de existência

Uma das ideias dos logaritmos surgiu de uma associação entre progressões aritméticas e geométricas. A escolha de uma base adequada foi importante para que os logaritmos se tornassem verdadeiramente úteis. O seguinte texto ilustra um pouco a ideia de Napier:

A fim de que os números da progressão geométrica estivessem bem próximos, para ser possível usar interpolação e preencher as lacunas entre os termos na correspondência estabelecida, evitando erros muito grosseiros, Napier escolheu para razão o número $b = 1 - \frac{1}{10^7}$ =0,9999999, que é bem próximo de 1. Segundo Eves, para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7. Então, se $N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, ele chamava L de "logaritmo" do número N.

Assim, o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ é 1.

Enquanto Napier trabalhava com uma progressão geométrica onde o primeiro termo era $\mathbf{10^7.b}$ e a razão **b**, ao que parece, de forma independente, Bürgi também lidava com o problema dos logaritmos.

Bürgi empregou uma razão um pouco maior do que 1, qual seja $1{,}0001=1+10^{-4}$. O primeiro termo de sua PG era 10^8 e ele desenvolveu uma tabela com 23027 termos.

Como Napier, Bürgi considerou uma PG cuja razão era muito próxima de 1, a fim de que os termos da sequência fossem muito próximos e os cálculos pudessem ser realizados com boas aproximações.

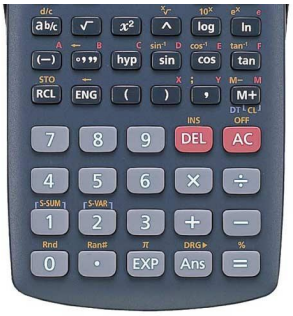
Posteriormente, Napier, juntamente com Briggs, elaboraram tábuas de logaritmos mais úteis de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos *briggsianos* ou comuns, ou seja, os logaritmos dos dias de hoje.

Ainda segundo Eves, durante anos ensinou-se a calcular com logaritmos na escola média ou no início dos cursos superiores de matemática; também por muitos anos a régua de cálculo logarítmica foi o símbolo do estudante de engenharia do campus universitário.

Hoje, porém, com o advento das espantosas e cada vez mais baratas e

> rápidas calculadoras, ninguém mais em sã consciência usa uma tábua de logaritmos ou uma régua de cálculo para fins computacionais. O ensino dos logaritmos, como um instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas, os famosos construtores de réguas de cálculo de precisão estão desativando sua produção e célebres manuais de tábuas matemáticas estudam a possibilidade de abandonar as tábuas de logaritmos. Os produtos da grande invenção de Napier tornaram-se peças de museu.
>
> Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm

Em geral, as calculadoras científicas possuem duas teclas para se calcular diretamente os logaritmos: $\ln$ e $\log$.



A tecla $\log$ calcula o logaritmo de um número na base 10 e a tecla $\ln$ calcula o logaritmo de um número na base *e*. Normalmente, primeiro digitamos a função escolhida, depois o número do qual será calculado o logaritmo e, por fim, a tecla de igual.

Com o auxílio de uma calculadora científica, faça o que se pede:

IX. Calcule os logaritmos decimais de alguns números entre 1 e 10 e anote na tabela a seguir. O que você pode observar em relação aos **valores** dos logaritmos dos números entre 1 e 10? Esses valores estão limitados entre dois números?

X	Log(x)	Observações

X. Calcule os logaritmos decimais de alguns números entre 10 e 100 e anote na tabela a seguir. O que você pode observar em relação aos **valores** dos logaritmos dos números entre 10 e 100?

X	Log(x)	Observações

XI. Calcule os logaritmos decimais de alguns números entre 100 e 1000 e anote na tabela a seguir. O que você pode observar em relação aos **valores** dos logaritmos dos números entre 100 e 1000?

X	Log(x)	Observações

XII. a. O que aconteceria com os logaritmos dos números entre 1000 e 10.000?

_____

b. Sem calcular os logaritmos, determine entre quais números inteiros consecutivos estaria o logaritmo de 5.256.364.

_____

c. A que generalização podemos chegar para os números compreendidos entre 10^n e 10^{n+1}, para valores naturais de **n**?

XIII. Use a calculadora para determinar o valor de log 1 e o valor de ln 1 e anote os resultados.

a. Com base na definição apresentada anteriormente e nas propriedades das potências, esse resultado é o esperado? Explique.

XIV. Use a calculadora para determinar o valor de log 0 e ln 0 e anote os resultados.

a. Com base na definição apresentada anteriormente e nas propriedades das potências, esse resultado é o esperado? Explique.

XV. Use a calculadora para determinar o valor dos seguintes logaritmos decimais e anote os resultados:

Log (-2) Log (-10) Log (-32,1) Log (-123)

d. Com base na definição apresentada anteriormente e nas propriedades das potências, explique os resultados obtidos.

e. Que condição sobre *y* deve ser satisfeita para que possa existir o $\log_x y$? Explique porque isso deve ocorrer.

XVI. Usando a definição, tente calcular os logaritmos a seguir:

$\text{Log}_1 3$	$\text{Log}_{-2} 8$	$\text{Log}_0 7$

O que você pode observar nos cálculos acima? Que condições sobre *y* deve ser satisfeita para que possa existir o $\log_x y$?

Além de uma condição sobre y, devemos ter outras duas condições, agora sobre x, para que o $\log_x y$ *exista:* ***x > 0*** *e* ***x ≠ 1.***

Atividade 4 – A escala Richter

Em 2010, um forte terremoto causou mais de 300 mortes no Chile como noticiou o portal G1:

MORTOS POR CAUSA DE TERREMOTO NO CHILE JÁ SÃO MAIS DE 300, DIZ GOVERNO

Tremor de magnitude 8,8 afetou 2 milhões de pessoas, diz presidente.

Tragédia põe à prova a capacidade dos chilenos, afirma Bachelet.
Do G1, com agências internacionais*

O terremoto de magnitude 8,8 que sacudiu o Chile neste sábado (27) causou a morte de mais de 300 pessoas, informou durante a noite a diretora do Escritório Nacional de Emergência (Onemi, na sigla em espanhol), Carmen Fernández.

Mais cedo, a presidente chilena Michelle Bachelet, havia dito que o desastre afetou de alguma maneira 2 milhões de pessoas.

“As forças da natureza golpearam duramente nossa pátria e mais uma vez põem à prova nossa capacidade de enfrentar adversidades e ficarmos de pé”, declarou a presidente em um pronunciamento transmitido em cadeia de rádio e TVs.

Segundo Bachelet, que sobrevoou de helicóptero as áreas atingidas neste sábado, o terremoto afetou 80% do país, e há pelo menos 1 milhão de casas danificadas. A presidente mandou condolência e solidariedade às vítimas e pediu "força" aos cidadãos.

"Todas as autoridades do governo vão colocar toda energia para a volta à normalidade. Temos adiante uma árdua tarefa, não será fácil, requer muito tempo e recursos, mas sobretudo a generosidade e voluntarismo de todos nós", disse a presidente.

Além dos mortos durante o terremoto, o número de vítimas aumenta devido aos tremores secundários, que continuam até a manhã deste domingo (28).

Veja no mapa as regiões mais atingidas pelo tremor (Foto: Editoria de Arte / G1)

O terremoto, de cerca de um minuto de duração, ocorreu às 3h34 (horário local de verão, o mesmo de Brasília) e atingiu a região central do Chile, perto da cidade de Concepción, 400 km ao sul de Santiago. Na capital chilena, a 325 km de distância, o terremoto estremeceu diversos prédios, e várias regiões da cidade ficaram sem energia. Com medo, muitos chilenos saíram às ruas.

Em entrevista, a presidente do Chile, Michelle Bachelet, pediu união dos setores público e privado na reconstrução dos setores essenciais do país. Bachelet disse que a destruição provocada pelo tremor poderia ter causado um número ainda maior de mortos, o que mostra que muitas pessoas conseguiram deixar suas casas no momento da tragédia.

O tremor foi sentido nos países vizinhos, inclusive no Brasil. O Corpo de Bombeiros e a Defesa Civil de São Paulo informaram que receberam chamados para verificar pequenos tremores em vários bairros da capital paulista.

O terremoto atingiu a região central do Chile, perto de Concepción, 400 km ao sul de Santiago, segundo o Instituto Geológico dos Estados Unidos (USGS, na sigla em inglês). O epicentro do tremor foi localizado no mar, a 35 km de profundidade, em Maule, a 99 km da cidade de Talca.

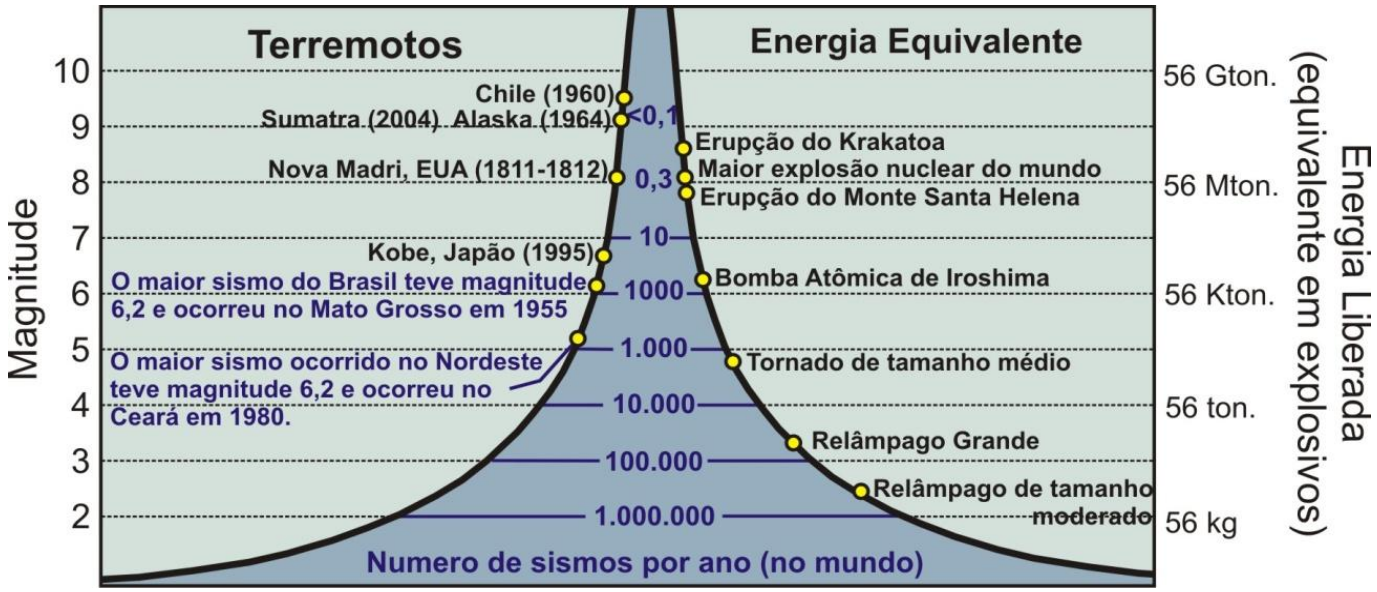
Fonte: http://g1.globo.com/Noticias/Mundo/0,,MUL1508896-5602,00.html
Acesso em 23/07/2013 às 18:00

Quando acontece um terremoto, uma das primeiras informações contidas no noticiário é “quantos graus” teve aquele tremor. A intensidade de um terremoto é descrita por um número na Escala Richter. Esse número pode ser dado por diferentes fórmulas e cada uma das fórmulas nos dá a energia liberada em unidades diferentes: ergs, joule, kWh, etc. Uma dessas fórmulas é:

$$\log \mathbf{E} = 11{,}8 + 1{,}5\mathbf{R},$$

onde **E** é a energia liberada (em ergs) e **R** a magnitude da escala Richter.

Veja um quadro comparativo entre a magnitude dos terremotos e a energia liberada equivalente a explosivos.



Fonte: www.afonsovasconcelos.com/aulas/agg5722/aula04_Magnitude.pptx

Com base na fórmula apresentada e na reportagem, responda:

V. Qual a energia liberada no terremoto no Chile?

VI. Quantas vezes mais energia é liberada por um terremoto de magnitude 5,0 na escala Richter do que um terremoto de magnitude 4,0 nessa mesma escala?

VII. Segundo o site Terra[15], o terremoto de 1955, em Porto dos Gaúchos (MT) foi um dos maiores já ocorridos no Brasil, atingindo 6,2 graus na escala Richter. Qual a energia liberada por esse terremoto?

[15] http://noticias.terra.com.br/educacao/voce-sabia/qual-foi-o-maior-terremoto-da-historia-do-brasil,de08c087e60ea310VgnCLD200000bbcceb0aRCRD.html

VIII. Itaipu produziu em 2012 um total de 98.287.128 megawatts-hora (98,2 milhões de MWh), quebrando seu próprio recorde mundial de produção de energia[16]. Dado que 1 erg = 2,778 x 10^{-17} MWh, compare a energia liberada pelo terremoto de Porto de Galinhas e a energia produzida por Itaipu. Registre suas observações.

[16] http://www.itaipu.gov.br/energia/geracao

Atividade 5 – A escala pH

A acidez de um líquido é caracterizada por um indicador chamado de pH (potencial Hidrogeniônico), determinado pela presença de íons H_3O^+. O pH de uma solução pode ser modelado pela equação

$$pH = -\log(H^+)$$

onde H^+ é o número de moles de íons de hidrogênio por litro.

A classificação da acidez de uma solução se dá de acordo com a seguinte tabela:

Solução Ácida	pH < 7
Solução Neutra	pH = 7
Solução Básica	pH > 7

Segue abaixo algumas soluções e respectivos valores de pH:

II. O pH do sangue humano e o surgimento de doenças

A acidez do sangue pode estar relacionada com o aparecimento de diversas doenças como mostra o seguinte texto:

Nossos líquidos corporais – linfa, sangue e líquido crânio-sacral - representam cerca de 65% da massa total de um corpo adulto, e o sangue, pelas suas funções de grande transportador, mediador, solvente, provedor e agente de ligação entre os órgãos e tecidos, é o mais importante.

A faixa ideal de pH do sangue humano está entre 7,36 a 7,42; portanto, levemente alcalino. E, variações bruscas deste pH sanguíneo irão comprometer não só o estado de consciência do Ser, como também poderá colocar em risco a própria vida. Se o pH do sangue baixa a um valor de 6,95 (levemente ácido), a pessoa poderá entrar num estado de coma, e, no outro extremo, um sangue humano com pH a partir do 7,7 irá desencadear um estado de irritação extrema, espasmos, propensão à tetania e convulsões.

Em síntese, a qualidade de vida de uma célula está diretamente relacionada ao pH do sangue que a irriga continuamente. Reforçando: o sangue, o líquido no qual a célula está mergulhada, tem de ser mantido constantemente com o pH ideal: entre 7,36 – 7,42.

Qualquer diminuição no pH do sangue, que é a situação mais comum em nossa sociedade, irá refletir-se na desvitalização das células, ou seja, células com vida mais curta e, necessariamente, envelhecidas.

A causa mais típica desta situação metabólica é a ingestão frequente de alimentos que acidificam rapidamente o sangue: açúcar branco, farinha branca, carnes (principalmente a vermelha e a de suínos), frituras, alimentos "aditivados" pelo progresso industrial, alimentos instantâneos, congelados ou excessivamente cozidos, bebidas gasosas, etc. Enfim, tudo aquilo que conhecemos como alimentos de natureza biocida (bio = vida + cida = mata), ou seja, alimentos que matam a vida.

Estes alimentos são os grandes protagonistas para acelerar o processo de envelhecimento, a baixa vitalidade e produtividade, os desequilíbrios emocionais e, finalmente, as doenças. Pelo tempo que esse ciclo vicioso (maus hábitos alimentares) durar, o organismo irá manter-se sob padrões de degeneração orgânica contínua, e a chegada da doença será inevitável.

Fonte: http://somostodosum.ig.com.br/conteudo/conteudo.asp?id=3548
Acesso em 25/07/2013 às 13:42

a. O texto cita que bebidas gasosas são alimentos que acidificam rapidamente o sangue. Por exemplo, em um refrigerante de cola, encontramos uma concentração H^+ de aproximadamente 10^{-3} mols/L enquanto em um cafezinho, essa concentração é de aproximadamente 10^{-5} mols/L. Qual desses produtos é mais ácido?

b. A concentração H^+ no sangue de uma pessoa foi medida por 4,0 x 10^{-8}. De acordo com o texto, o pH do sangue dessa pessoa está dentro do intervalo ideal?

III. O pH do xampu e a química do cabelo

O xampu que você está usando pode não ser o ideal para os seus cabelos. Confira no texto como o pH dos xampus afeta os seus cabelos.

Os xampus que andam mexendo com a cabeça da mulherada são os xampus com pH neutro. Essa onda garante beleza e proteção às madeixas, além de conservar melhor os modernos tratamentos, tudo porque esse xampu possui a propriedade de não agredir os cabelos, será verdade? Existe uma explicação científica para esse fato?

Antes de explicar como os xampus auxiliam nos tratamentos capilares, vejamos em que consiste a estrutura dos cabelos. Um fio de cabelo contém moléculas que se ligam de maneiras diferentes, a estrutura do cabelo muda conforme a ligação.

São basicamente três formas de ligações moleculares presentes nos cabelos: pontes salinas, ligações de hidrogênio e pontes de dissulfeto. O segredo dos xampus está justamente aqui: mudar as interações que formam o fio de cabelo.

Para exemplificar, vejamos como mudar o visual apenas molhando o cabelo. Você já observou que os cabelos molhados tendem a permanecer sem volume? As pessoas com cabelos rebeldes usam dessa propriedade para compor um visual mais agradável, mas o problema é que quando secos, os cabelos voltam à posição inicial.

A explicação científica para este fato é que quando os fios de cabelo são molhados as ligações de hidrogênio presentes se quebram, mas ao secarem estas ligações são novamente formadas. Foi baseada nesta teoria que surgiram os xampus com pH neutro.

Quando o cabelo é lavado com xampu ácido (pH ≈ 1,5), além das ligações de hidrogênio, são quebradas também as pontes salinas, o resultado é o cabelo rebelde e seco. E não adianta procurar um xampu com pH elevado (pH ≥ 8), estes são os piores, pois são responsáveis pelo aparecimento das famosas pontas duplas, em razão das quebras das pontes de dissulfeto presentes nas extremidades dos cabelos.

Então, qual é o xampu ideal para manter os cabelos fortes e saudáveis? O recomendável é usar xampus com pH entre 4,0 e 5,0 (pH moderado). Com base nestas informações é possível formular um xampu ideal para seus cabelos, além de aprender mais sobre pH ainda ganhará um visual novo.

Fonte: http://www.brasilescola.com/quimica/o-ph-xampu-quimica-cabelo.htm
Acesso em 25/07/2013 às 19:13

c. De acordo com o texto, um xampu com pH baixo é responsável por um cabelo rebelde e seco. Qual é a concentração de íons de hidrogênio de um xampu com pH igual a 1,5?

d. Determinado xampu teve a concentração H^+ medida em 3,7 x 10^{-9} mols/L. De acordo com o texto, qual o possível efeito para os cabelos de quem usa esse xampu?

Atividade 6 - A escala Decibel

Você sabe por que conseguimos ouvir os sons?

Quando um som é considerado alto para nossos ouvidos?

O texto a seguir traz algumas informações importantes sobre esses aspectos.

O som que ouvimos são ondas sonoras produzidas por vibrações de partículas do meio. Por exemplo, ao acontecer uma explosão num dado ponto, as moléculas do ar em volta desse ponto são comprimidas e vão propagando ao longo dos meios materiais. O nosso ouvido, ao ser atingido por essa onda sonora, possui a capacidade de converter a variação de pressão no ar em estímulo nervoso, o qual, quando alcança o cérebro, nos passa uma sensação auditiva, o som. A onda sonora pode ser um ruído como a do exemplo citado ou um som musical, produzido pela vibração periódica de uma fonte.

A classificação do som como forte ou fraco está relacionada ao nível de intensidade sonora, medida em watt/m². A menor intensidade sonora audível ou limiar de audibilidade possui intensidade $I_0 = 10^{-12}$ W/m². A relação entre as intensidades sonoras permite calcular o nível sonoro do ambiente que é dado em decibéis. Em virtude dos valores das intensidades serem muito pequenos ou muito grandes, utilizam-se as noções de logaritmos na fórmula capaz de calcular níveis sonoros.

Fonte: http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/medindo-intensidade-dos-sons.htm

Acesso em 25/07/2013 às 21:33

A escala decibel de som é definida pela expressão

$$B = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

em que **B** é o nível do som em decibéis (dB) de um ruído de intensidade **I,** e $\mathbf{I_0} = 10^{-12}$ W/m^2 é a intensidade de referência associada ao som mais fraco percebido pelo ouvido humano.

A figura abaixo mostra algumas intensidades sonoras medidas em decibéis.

(Fonte:http://crv.educacao.mg.gov.br)

V. De acordo com a Organização Mundial de saúde (OMS), sons de até 55dB são aceitáveis. Para os metrôs, estima-se que a intensidade sonora seja de aproximadamente 10^{-2} W/m^2. Esse nível está dentro do aceitável?

VI. Um dos fatos marcantes da Copa do Mundo de 2010 na África do Sul foi o barulho das vuvuzelas, um tipo de corneta usada pela torcida local. O som ensurdecedor da vuvuzela irritou muita gente. Não é para menos. Estudos constataram que uma única vuvuzela pode emitir um ruído de aproximadamente $10^{-2,5}$ W/m^2 Qual a intensidade sonora, em dB, dessa vuvuzela?

VII. Estima-se que quando se dobra a quantidade de vuvuzelas tocadas simultaneamente, há um aumento de 3dB na escala sonora. Quantas vuvuzelas seriam necessárias para se ultrapassar o limiar da dor?

VIII. Cientistas afirmam que a partir de 160 dB pode haver ruptura do ouvido humano. Qual a intensidade, em W/m^2, de um som de 160 dB?

BIBLIOGRAFIA

http://crv.educacao.mg.gov.br - Acesso em 24/07/2013 às 18:35

http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm - Acesso em 19/07/2013 às 18:00

http://g1.globo.com/Noticias/Mundo/0,,MUL1508896-5602,00.html - Acesso em 23/07/2013 às 18:34

http://noticias.terra.com.br/educacao/voce-sabia/qual-foi-o-maior-terremoto-da-historia-do-brasil,de08c087e60ea310VgnCLD200000bbcceb0aRCRD.html - Acesso em 23/07/2013 às 18:00

http://somostodosum.ig.com.br/conteudo/conteudo.asp?id=3548 - Acesso em 25/07/2013 às 13:42

http://www.afonsovasconcelos.com/aulas/agg5722/aula04_Magnitude.pptx - Acesso em 23/07/2013 às 18:37

http://www.brasilescola.com/quimica/o-ph-xampu-quimica-cabelo.htm - Acesso em 25/07/2013 às 19:13

http://www.car.blog.br/2012/01/ranking-de-desvalorizacao-de-carros.html - Acesso em 21/07/2013 às 18:00

http://www.itaipu.gov.br/energia/geracao - Acesso em 24/07/2013 às 18:00

http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/medindo-intensidade-dos-sons.htm - Acesso em 24/07/2013 às 13:00

APÊNDICE B – Questionário de auto avaliação

Questionário

1) a. Como você classificaria as aulas de Cálculo nas quais tratamos do tema Logaritmos?
( ) Ótimas
( ) Muito boas
( ) Boas
( ) Regulares
( ) Ruins

b. Comentário:

2) a. Como você avalia a sua participação nas aulas de Cálculo?
( ) Muito interessado(a)
( ) Interessado(a)
( ) Pouco interessado(a)
( ) Desinteressado(a)

b. Comentário:

3) a. Comparando as aulas em que tratamos do tema logaritmo com as demais aulas de Cálculo, seu interesse
( ) aumentou.
( ) continuou o mesmo.
( ) diminuiu.

b. Comentário:

4) a. O que você achou das atividades realizadas?
( ) Ótimas
( ) Muito boas
( ) Boas
( ) Regulares
( ) Ruins

b. Comentário:

5) Você conhecia as aplicações dos logaritmos apresentadas nas atividades?

Escala Richter	( ) Sim	( ) Não
pH	( ) Sim	( ) Não
Escala Decibel	( ) Sim	( ) Não

6) Sobre as aulas e as atividades, relate aqui ponto positivos, ponto negativos, suas sugestões, criticas ou observações.