PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Carine Rodrigues de Souza

UMA ABORDAGEM DO ENSINO DE CÁLCULO, INCENTIVANDO O DESENVOLVIMENTO DE ESTILOS DE APRENDIZAGEM E PROPORCIONANDO O ENTENDIMENTO DAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Belo Horizonte
2013

Carine Rodrigues de Souza

UMA ABORDAGEM DO ENSINO DE CÁLCULO, INCENTIVANDO O DESENVOLVIMENTO DE ESTILOS DE APRENDIZAGEM E PROPORCIONANDO O ENTENDIMENTO DAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda

Belo Horizonte
2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

S729u Souza, Carine Rodrigues de
Uma abordagem do ensino de cálculo, incentivando o desenvolvimento de estilos de aprendizagem e proporcionando o entendimento das técnicas de integração / Carine Rodrigues de Souza. Belo Horizonte, 2013.
133f.: il.

Orientador: Dimas Felipe de Miranda
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Cálculo – Estudo e ensino. 2. Integração escolar. 3. Aprendizagem. 4. Estratégias de aprendizagem. I. Miranda, Dimas Felipe de. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 517

Carine Rodrigues de Souza

UMA ABORDAGEM DO ENSINO DE CÁLCULO, INCENTIVANDO O DESENVOLVIMENTO DE ESTILOS DE APRENDIZAGEME PROPORCIONANDO O ENTENDIMENTO DAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

____

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda (orientador) – PUC Minas

____

Prof. Dr. Edson Crisostomo dos Santos - Unimontes

____

Profª Dra. Tânia Fagundes Bogutchi - PUC Minas

____

Profª Dra. Eliane Scheid Gazire - PUC Minas

Belo Horizonte, 19 de novembro 2013

DEDICATÓRIA

A todos os meus familiares e principalmente meu filho Pedro que, felizmente, foi gerado durante o curso de mestrado e que chegou para iluminar nossas vidas.

AGRADECIMENTOS

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para que este trabalho fosse desenvolvido.

Ao professor doutor Dimas Felipe de Miranda por ter sido meu orientador, pelas valiosas contribuições e acima de tudo por ser um grande amigo.

A Professora Doutora Maria Clara Rezende Frota, que orientou grande parte deste trabalho, meus eternos agradecimentos, pelas sugestões e incentivos, lições de comprometimento e dedicação.

Aos Professores do curso de mestrado, por compartilharem suas experiências e conhecimentos.

Aos Professores Doutores Edson Crisostomo dos Santos, Tânia Bogutchi e Eliane Scheid Gazire, meus sinceros agradecimentos por participarem da banca e pelas sugestões valiosas.

Aos meus alunos que participaram diretamente, tornando possível a execução desta pesquisa.

A Werter, meu marido, amigo, companheiro de todos os momentos, pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis.

À Anna Júlia, minha enteada, agradeço pelo amor demonstrado a cada retorno para casa.

A minha mãe, meu pai e aos meus irmãos, por estarem ao meu lado e torcerem sempre pelo meu sucesso.

A todos, muito obrigada!

EPÍGRAFE

"Se os teus projetos forem para um ano, semeie o grão. Se forem para dez anos plante uma árvore. Se forem para cem anos, eduque o povo."

(Provérbio chinês)

RESUMO

Esta pesquisa investigou as contribuições de uma abordagem de ensino com foco no uso de estratégias de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral que incentivem estilos de aprendizagem, tais como: Estilos com orientação prática, teórica e investigativa. A metodologia adotada foi qualitativa que compreendeu um estudo empírico desenvolvido com alunos dos cursos de Engenharia de Produção e de Sistemas de Informação de uma Instituição de Ensino Superior da cidade de Montes Claros, norte de Minas Gerais. Foram elaboradas dezesseis atividades e uma avaliação, que foram fundamentadas no ensino de integrais com entendimento, objetivando a aprendizagem das Técnicas de Integração. As atividades mesclavam discussões teóricas, por meio da exposição dos pontos principais de cada tema e discussões práticas, conduzidas primeiramente em duplas, seguidas de momentos de socialização das resoluções das tarefas e de confronto de soluções. Os resultados encontrados evidenciaram que atividades incentivando estilos de aprendizagem podem proporcionar aos alunos a compreensão das Técnicas de Integração.

Palavras-chave: Ensino de cálculo. Técnicas de Integração. Estilos de Aprendizagem. Estratégias.

ABSTRACT

This research investigated the contributions of a teaching approach focused on the use of learning strategies of Differential and Integral Calculus that encourage learning styles, such as: Styles with practical guidance, theoretical and investigative. The adopted methodology was qualitative which comprised an empirical study developed with students of Production Engineering and Information Systems from a Higher Education Institution from Montes Claros, Minas Gerais north. Were prepared sixteen activities and one assessment that were grounded in teaching of integrals with understanding, aiming at learning the Techniques of Integration. The activities mingled theoretical discussions, through the exposure of the main points of each topic and practical discussions, conducted firstly in pairs, followed by moments of socialization of the resolutions of the tasks and of confrontation of solutions. The found results showed that activities encouraging learning styles can provide students the understanding of the Integration Techniques.

Keywords: Teaching of calculus. Integration Techniques . Learning Styles. Strategies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

TIC – Tecnologia da Informação e Comunicação

TFC – Teorema Fundamental do Cálculo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como tema estratégias de aprendizagem no estudo das técnicas de integração. Muito se tem discutido sobre a questão do ensino e aprendizagem de cálculo no Ensino Superior. Pesquisas têm sido conduzidas investigando sobre a incorporação de novas tecnologias para o ensino de cálculo, dificuldades na sua aprendizagem, uso de diferentes abordagens metodológicas etc., entretanto, percebi que pouco se pesquisou sobre a dificuldade de aprendizagem das técnicas de integração.

Iniciei minha trajetória de professora universitária em 2005 e, desde então, venho trabalhando com o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) nos cursos de Engenharias Ambiental, Produção e Elétrica; no curso de Sistemas de Informação e no curso de Matemática (licenciatura). Nessas aulas, sempre trabalhei com resoluções de listas de exercícios visando a uma maior aprendizagem dos conteúdos, mas essa estratégia não funciona com todos os alunos. Percebi que, ao resolver exercícios utilizando as Técnicas de Integração, por exemplo, quando os exercícios estão separados em blocos determinados pelas Técnicas de Integração, os acadêmicos conseguem resolver as questões, porém, quando esses exercícios são dispostos de maneira aleatória, quanto à técnica a ser utilizada, não conseguem resolvê-los.

Decorre dessa experiência a percepção de que os alunos apresentam grande dificuldade na aprendizagem do cálculo, sobretudo das técnicas de integração. É por esse motivo que pensei em desenvolver uma pesquisa sobre as estratégias de aprendizagem no estudo de integrais, prioritariamente no estudo das Técnicas de Integração. Mas, como contribuir para melhoria do entendimento dessas Técnicas?

A introdução do Cálculo Diferencial e Integral requer do professor uma atenção especial, mas não necessariamente os professores se sentem preparados para abordar tal conteúdo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem alternativas diante da necessidade de "flexibilidade" dos professores.

> "Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos." (BRASIL, 1998, p.36).

Perceber a Matemática como ciência dinâmica, aberta à incorporação de novos conhecimentos requer disposição para romper com o tradicionalismo que continua sendo frequentemente utilizado no ensino, no qual o conteúdo é apresentado oralmente pelo professor, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguido de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem.

Essa prática tradicional de ensino, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, tem-se mostrado ineficaz, pois os alunos têm desenvolvido a capacidade de reproduzir procedimentos mecânicos, mas não aprendem o conteúdo e não sabem utilizá-lo em outros contextos.

Quanto ao ensino e à aprendizagem das Técnicas de Integração, levanto a questão: Que tipo de abordagem de ensino pode favorecer o entendimento das técnicas de integração?

Considerando as dificuldades dos alunos ao trabalhar com o Cálculo Integral, pude observar que uma delas diz respeito a identificar qual é a técnica de integração adequada em cada situação a ser utilizada. Assim é importante verificar "que tipo de atividades pode facilitar a aprendizagem das técnicas de integração pelos alunos?" e se "uma abordagem do ensino de cálculo incentivando o desenvolvimento de estilos de aprendizagem facilita o entendimento das técnicas de integração?".

O objetivo geral da pesquisa proposta é investigar as abordagens de ensino que podem contribuir para o estudo com entendimento das Técnicas de Integração, e, para alcançá-lo, os objetivos específicos:

- Analisar a forma em que as Técnicas de Integração são abordadas em livros de CDI.
- Elaborar e testar um conjunto de atividades para o estudo de Técnicas de Integração a partir do desenvolvimento de estratégias/estilos de aprendizagem: a partir do desenvolvimento do estilo com orientação prática; a partir do desenvolvimento do estilo com orientação teórica; a partir do desenvolvimento do estilo com orientação investigativo.
- Verificar se as tarefas desenvolvidas favoreceram o entendimento das técnicas de integração e a aprendizagem de integrais.

A pesquisa foi estruturada em seis capítulos, sendo o primeiro a Introdução, que apresenta as ideias gerais que originaram, sustentaram teórica e metodologicamente a pesquisa.

No segundo capítulo apresento pesquisas sobre o Ensino e Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, apontando alguns dos pesquisadores que se dedicam às pesquisas na área. Discuto sobre as dificuldades e as expectativas no ensino e aprendizagem do CDI. Dedico ainda uma seção exclusiva para apresentar pesquisas sobre o ensino de integrais.

No terceiro capítulo apresento a Revisão de Literatura que sustentou minhas investigações, dando-me suporte para elaborar, aplicar e analisar as tarefas. Na primeira seção, investigo sobre ensinar com entendimento, segundo Perkins (1993, 1995 e 1998) e também Carpenter e Lehrer (1999). Na segunda seção, investigo e estudo sobre as estratégias de ensino e aprendizagem da matemática, segundo Frota (2002, 2006 e 2010) e Felder (1966).

No quarto capítulo, apresento a metodologia adotada. Busco caracterizar o contexto de pesquisa, o ambiente onde foi desenvolvida e os estudantes que dela participaram. Apresento as etapas de desenvolvimento, descrevendo o processo de elaboração e as contribuições que as tarefas podem proporcionar a professores e alunos. Encerro o capítulo descrevendo os instrumentos de coleta por mim utilizados na pesquisa a partir de uma abordagem qualitativa.

No quinto capítulo, apresento as análises dos resultados e o finalizo apresentando os resultados das avaliações desenvolvidas pelos alunos.

No sexto capítulo, apresento as considerações finais, apontando minha expectativa, destacando os principais resultados e as limitações da pesquisa, as questões que emergem a partir dessa e as suas contribuições para a própria pesquisadora.

2 ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO

Neste Capítulo procuramos situar esta pesquisa no campo do Ensino e da Aprendizagem de Cálculo.

A Educação Matemática, área do conhecimento de característica multidisciplinar, vem-se ocupando há décadas com problemas relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática, em particular, do Cálculo Diferencial e Integral em nível universitário. (SILVA, 2011).

2.1 Dificuldades no ensino e da aprendizagem do Cálculo

Trabalhamos nos cursos da área tecnológica desde 2006 e sabemos que as ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral são abordadas desde o primeiro semestre desses cursos. Devido a esse fato, existe a preocupação quanto ao ensino e aprendizagem do Cálculo, principalmente pelos altos índices de reprovação, pela falta de motivação e de domínio de matemática básica dos alunos.

Uma das principais razões para que isso ocorra pode ser desencadeada pela aula expositiva, que geralmente é metodologia utilizada pelo professor. (DIAS, 1999).

Nessa mesma linha de pesquisa, Franchi (1993) descreve o ensino tradicional do Cálculo em salas de aulas como sendo aulas expositivas, centradas na fala do professor, conteúdos apresentados como prontos e inquestionáveis, sem relação a situações reais.

É sabido que a falta de motivação não é a única razão para a preocupação com o ensino de Cálculo, a falta de base matemática, ou seja, a falta de conhecimentos elementares e fundamentais para a aprendizagem de limites, derivadas e integrais, corrobora para aumentar os índices de reprovação e desistência.

Frota (2002) investigou as concepções de matemática e as estratégias de estudo utilizadas por estudantes de Cálculo, além de estudar as motivações e expectativas desses alunos ao escolherem o curso. Ao discutir os fatores que influenciam os estilos de aprendizagem de estudantes de Cálculo e a autorregulação da aprendizagem, Frota (2009) destaca a importância da motivação.

> A motivação do aluno, por exemplo, é um fator que contribui para a aprendizagem, compreendendo as expectativas de desempenho que o aluno tem, fundamentadas em uma autoavaliação das próprias capacidades e na avaliação dos colegas, professores, familiares, bem como na importância ou valor que atribui à tarefa, ou seja, o valor da meta. (FROTA, 2009, p.61).

Assim a falta de motivação pode ser um dentre os fatores que influenciam para que não ocorra a aprendizagem.

David Tall e Vinner (1976), por exemplo, tem sido um dos principais articuladores da área de pesquisa “pensamento matemático avançado”, cujas questões giram em torno das dificuldades encontradas na aprendizagem dos conceitos básicos do Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para as suas análises epistemológicas.

Tall (2010) comenta que, para que os conceitos do Cálculo, como limite, continuidade, tangente, derivada, façam sentido, é preciso considerar como nós pensamos sobre eles, escrever o que eles significam. Não se trata de apenas colocar as definições, mas de apresentar as ideias e as relações entre elas, para que façam sentido para nós e para os estudantes.

A maioria dos professores de Cálculo não são educadores matemáticos, por isso não utilizam estratégias de ensino diferenciadas nas aulas de CDI o que dificulta ainda mais o aprendizado da matéria.

> Geralmente os docentes que lecionam disciplinas de matemática em cursos da área de ciências exatas são, de um modo geral, bacharéis ou licenciados em Matemática, com pós-graduação em Matemática Pura ou Aplicada, alguns poucos têm mestrado ou doutorado em Educação Matemática. (CURY, 2001, p. 31)

Muitos alunos concluem a graduação sem entender corretamente os conceitos do Cálculo e sem saber as relações entre limites, derivadas e integrais. Os conceitos de limite, derivada e integral são os fundamentos para as aplicações em problemas, o que intensifica ainda mais a importância de seu estudo.

Barbosa (2004) realizou uma pesquisa que buscava indicadores para tentar compreender porque os índices de reprovação na disciplina Cálculo Diferencial e Integral são tão altos. Para tal, aplicou questionários para acadêmicos dos cursos de Engenharia Mecatrônica, Engenharia Química, Engenharia da Computação e Ciência da Computação que foram reprovados na disciplina nos anos 2001 e 2002.

O questionário aplicado buscava diagnosticar as dificuldades na aprendizagem do Cálculo e identificar quais métodos de estudo e quais as expectativas em relação ao CDI. Além dos questionários foram feitas entrevistas com os professores das disciplinas dos cursos citados.

A pesquisa de Barbosa (2004) constatou que tanto os alunos como os professores têm uma forte tendência de práticas de estudos e de ensino tradicionais para o cálculo e chegou à conclusão de que o sistema didático é um fator determinante para o fracasso do aluno na disciplina.

Cury (2009), ao relatar as dificuldades encontradas pelos professores e alunos de Cálculo Diferencial e Integral, aponta que essa é uma das causas para a grande desistência e evasão dos cursos superiores da área de ciências exatas.

A pesquisa apresenta levantamentos feitos em anais indicando os percentuais de comunicações com temas relacionados ao ensino e à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral que têm aumentado nas últimas décadas, mas admite que, para vislumbrar mudanças nos cursos, o número de estudos teria que ser ainda maior.

Cury (2006) propõe um conhecimento mais aprofundado sobre os erros cometidos por estudantes de Cálculo:

> ...é fundamental fazer uma avaliação diagnóstica das dificuldades de cada turma para adaptar o ensino às necessidades dos estudantes, procurando evitar a desistência e a reprovação. (CURY, 2006, p.235).

Cury (2006) se apoiou na metodologia que pode ser entendida como uma análise de conteúdo, no sentido usado por Bardin (1979), em que é escolhida uma amostra de participantes e suas respostas analisadas, os erros detectados são categorizados, descrita cada classe de erro e é dada uma interpretação dos resultados. Essa pesquisa foi formada por uma equipe de 14 docentes e 368 alunos de oito Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul. Foi elaborado um teste composto por 12 questões a serem respondidas por calouros da disciplina de cálculo dos cursos de Engenharia, Arquitetura, Ciências Contábeis e licenciatura em Matemática.

Com esse teste foi possível fazer a análise qualitativa e quantitativa, pois os alunos eram convidados a responder questões de matemática com os conhecimentos que eles traziam da educação básica. Aos alunos foi solicitado que primeiro resolvessem as questões, apresentando o desenvolvimento e somente depois que marcariam a resposta correta (CURY, 2009). A pesquisadora concluiu, a partir dos dados da pesquisa, que os alunos pesquisados apresentavam sérias dificuldades em relação ao conceito de funções, e esse conhecimento é base para os tópicos da disciplina CDI. Sugeriu o uso de computadores no estudo de funções e gráficos para auxiliar os estudantes que iniciam os cursos de Ciências Exatas sem esses conhecimentos básicos. A pesquisadora afirma:

> [...] entendemos a realização de atividades a partir dos erros como uma possibilidade de auxiliar os alunos, individualmente ou em pequenos grupos, de modo que possam refletir sobre suas dificuldades e o professor possa detectar, pontualmente, as

> necessidades individuais, para depois elaborar as aulas seguintes para o grande grupo. (CURY, 2006, p. 236).

Barufi (1999) buscou compreender as dificuldades existentes no ensino de Cálculo nos cursos iniciais da Universidade a partir dos livros didáticos, por constituírem um instrumento sempre presente no trabalho do professor na sala de aula. Além do livro didático, ela considera o computador como aliado do professor, sendo um instrumento facilitador que abre horizontes e possibilita o estabelecimento de múltiplas relações.

> A sala de aula não pode ficar alheia a tudo a que está presente na atualidade. Torna-se certo sentido, paradoxal, viver no presente, esquecendo-se das coisas que existem no presente. Deste modo, não podemos mais fazer de conta que o computador não existe. (BARUFI, 1999, p. 165).

Barufi (1999) teve como referencial teórico a rede de conhecimentos e significados e afirma que a compreensão não resulta apenas da transmissão de conhecimento; resulta da captação do significado do conhecimento. Os significados formam um conjunto de relações entre o que se quer conhecer com o que se conhece, e podem surgir das experiências entre indivíduos e objetos.

> [...] o conhecimento não pode ser feito de um simples ato de transmissão de informações, onde que sabe, ou conhece, expõe para quem não sabe, que naturalmente, aprende. A aprendizagem ocorre quando o aprendiz conseguiu estabelecer significados para o objeto de conhecimento – nó – em questão, quando, portanto, conseguiu estabelecer novas relações – feixes – em sua própria rede, articulando assim o novo aos diversos nós já existentes. É dessa maneira que os novos conhecimentos constituem enredamentos. (BARUFI, 1999, p. 13).

Reis (2001) em sua pesquisa objetivou compreender como a relação tensional entre rigor e intuição acontece e manifesta-se no ensino universitário de Cálculo e Análise. A pesquisa abordou aspectos históricos e epistemológicos do Cálculo e da Análise e de seu ensino. Analisou categorias de saberes docentes manifestados e percepções que eles apresentam da relação entre rigor e intuição no ensino dessas disciplinas e na formação do professor.

Reis (2001) buscou compreender melhor a forma como o rigor e a intuição são entendidos no ensino, fazendo remeter ao estudo da história do desenvolvimento do Cálculo e da Análise, investigando sobre de que maneira a busca pelo rigor foi um determinante histórico.

Por fim, questionando a prática pedagógica dos professores de Cálculo, Reis (2001) reafirma:

> A prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecerem, enfim, que prática pedagógica desenvolver. (REIS, 2001, p. 23).

2.2 Perspectivas para o ensino e a aprendizagem do Cálculo

O problema com o ensino e a aprendizagem do Cálculo não é exclusivo da sociedade brasileira, também nos países "desenvolvidos" é uma realidade, visto que trabalhos sobre esse tema têm sido publicados e recebido merecido destaque por parte da literatura especializada internacional.

A *International Conference on the Teaching of Mathematics* (ICMT) encoraja a comunicação entre matemáticos e educadores matemáticos e promove fóruns entre diferentes culturas. Essas conferências acontecem sempre de quatro em quatro anos e são de grande interesse tanto para professores de matemática quanto para aqueles que estão envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática do nível universitário. (SILVA, 2011).

Como exemplo, podemos citar o movimento em prol da reforma do ensino de Cálculo, iniciado na década de 80 e que ficou conhecido por *Calculus Reform*, ou Reforma do Cálculo.

A Reforma do Cálculo veio com o objetivo de repensar o Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior, que apresentava problemas semelhantes aos do ensino de matemática no ensino médio; então, projetos foram propostos em resposta a esse movimento.

Apesar da discussão quase sempre polêmica sobre o uso (ou não) da informática educacional, eram raras as propostas que não incorporavam o uso de calculadoras gráficas e do computador no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo.

Rezende (2003), ao escrever sobre o *Calculus Reform*, destaca as características básicas dessa reforma como sendo o uso de tecnologia, isto é, uso de *softwares* e calculadoras gráficas tanto para o aprendizado de conceitos e teoremas como para a resolução de problemas; o ensino dos tópicos e todos os problemas devem ser abordados numérico, geométrico e analiticamente; grande preocupação, ou pretensão, em mostrar a aplicabilidade do Cálculo por meio de exemplos reais e com dados referenciados; tendência a exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos, suprindo essa falta com o treinamento no uso de Sistemas de Computação Algébrica.

O projeto *Calculus Reform* teve grande influência no ensino de Cálculo no Brasil a partir dos anos 90, principalmente na utilização dos programas CAS – *Computer Algebraic*

Systems – nos cursos introdutórios de Cálculo das Universidades. Como exemplo, apresentamos o projeto PROIN – Programa de apoio à Integração graduação pós-graduação, iniciado em dezembro de 1995, na Universidade Federal de São Carlos, tendo por objetivo principal a melhoria do ensino das disciplinas básicas de Matemática, utilizando recursos computacionais como os programas CAS, *Mathematic, Maple V* e *Matlab*. (Mometti, 2007).

No Brasil há grupos que estudam e pesquisam sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Como exemplo, temos o grupo de trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior criado no I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (I SIPEM), em Serra Negra de 2000, sob a coordenação da professora Lilian Nasser. Esse grupo é formado por pesquisadores preocupados com o ensino da matemática nos cursos superiores e que tem como um dos focos de pesquisa o ensino de Cálculo.

Como fruto desses estudos foi publicado o livro *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates* que foi organizado pelas pesquisadoras Maria Clara Rezende Frota e Lilian Nasser (2009).

Nasser (2009) analisa o desempenho e as dificuldades de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. No referencial teórico, a pesquisadora apoiou-se em outros pesquisadores que se preocupam com os fatores que provocam dificuldades de aprendizagem. Ela cita Brousseau (1983) que distingue três tipos de obstáculos à aprendizagem: os de origem ontogênica, oriundos das dificuldades de ordem neurofisiológica, da maturidade do aluno; os de natureza didática que dependem das escolhas do professor, de um projeto de um sistema educativo; e os de ordem epistemológica, relacionados com o desenvolvimento histórico do conhecimento, sendo característicos do saber. A pesquisadora também cita Sierpinska (1994) que diz que os obstáculos epistemológicos não são obstáculos à compreensão 'correta' de um conceito, mas dificultam mudanças e reorganizações na mente.

Nasser (2009) tem como objetivo analisar o progresso de alunos de cálculo no traçado de gráficos de funções reais de uma e duas variáveis. Segundo a teoria de estilos de aprendizagem, Nasser aplicou um teste que continha 11 itens com duas opções de resposta para oito alunos da turma de Cálculo III. As alternativas (a) indicaram tendências para o estilo visual e (b) se referiram ao estilo verbal. Com esse teste, a pesquisadora classificou seus alunos segundo cada estilo, tendo como maioria o estilo visual.

Nasser (2009), objetivando que os alunos superassem o obstáculo da dificuldade no traçado de gráficos, desenvolveu estratégias de ensino apropriadas, respeitando o estilo visual de aprendizagem. A pesquisadora utilizou *softwares* matemáticos para que os alunos chegassem ao gráfico pretendido por meio de transformações (translações, homotetias, reflexões e composições) nos gráficos básicos, que são familiares. E também utilizou de mímicas com as mãos para ressaltar a curvatura de parábolas e de superfícies como paraboloides e cones.

Nasser (2009) obteve resultados satisfatórios com a estratégia adotada, pois os alunos passaram a identificar superfícies de paraboloides e cones com mais facilidade e conseguiram traçar seus gráficos. Porém, esse progresso não foi percebido em superfícies fechadas como esfera e elipsóide.

Nasser (2009) investiga acerca de obstáculos epistemológicos, analisando o desempenho e as dificuldades de alunos de Cálculo no traçado de gráficos, desenhando estratégias de ensino, a partir do estudo de estilos de aprendizagem desses alunos. A autora afirma que a aprendizagem também pode ser dificultada se o estilo adotado no ensino não se adequar aos estilos de aprendizagem dos alunos. E ainda afirma:

> Parece que os alunos chegam à Universidade com preguiça de raciocinar e que foram acostumados apenas a aplicar algoritmos e fórmulas decoradas, sem saberem o que estão fazendo e por que adotam determinado procedimento. (NASSER, 2009, p. 47).

A partir do final da década de noventa, observamos o surgimento de grupos no interior das universidades brasileiras que desenvolveram trabalhos educativos muito importantes, relacionados às Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral.

A Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC) incorporada às práticas sociais transforma a forma de viver do ser humano porque oferece outras maneiras de comunicação, produção e comercialização de bens e mercadorias, divertimento e educação. (MARIN, 2009).

Villarreal (1999) apresenta seus apontamentos sobre processos de pensamento matemático de estudantes de CDI que trabalham em ambiente computacional, abordando questões matemáticas relacionadas ao conceito de derivadas. Realizou-se uma pesquisa com três duplas voluntárias de estudantes do curso de Biologia, com cada dupla foi realizado um experimento de ensino que é uma variação das entrevistas clínicas. Esses experimentos foram vídeo-gravados.

Villarreal (1999) apresenta questões relacionadas com cálculo e computadores. Em princípio, refere-se às dificuldades na aprendizagem do cálculo, baseada em estudos que tratam sobre concepções dos estudantes no conceito de derivadas. Apresenta também uma análise de concepções de estudantes em ciência, matemática e programação.

A sua proposta, do uso de tecnologias na Educação Matemática, é uma alternativa para superar as dificuldades como reprovação, repetição e abandono de cursos e visa a uma transformação no ensino de cálculo. Pode ser apresentada e analisada como proposta didática e como área de pesquisa. Na análise dos dados, a autora destaca a importância do computador para o aprendizado da Matemática:

> [...] o computador pode ser tanto um reorganizador quanto um suplemento nas atividades dos estudantes para aprender Matemática, dependendo da abordagem que eles desenvolvam nesse ambiente computacional. Do tipo de atividades propostas, das relações que for estabelecida com o computador, da frequência no uso e da familiaridade que se tenha com ele. (VILLAREAL, 1999, p. 362).

Motivado pelos problemas no ensino e na aprendizagem do Cálculo, Marin (2009) buscou compreender como os professores dessa disciplina fazem uso da Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) em suas aulas. Realizou, assim, um estudo da literatura a respeito do ensino de Cálculo, do trabalho e formação do professor universitário, da TIC e o trabalho docente, tendo entrevistado treze professores de Matemática que atuam nesse grau de ensino. Com base nas entrevistas, em uma ficha preenchida pelos professores e na literatura que trata do tema, apresentou uma discussão a respeito do perfil dos professores, da estrutura física oferecida pelas instituições, do planejamento e gestão da aula e, por fim, das vantagens e desvantagens do uso da TIC.

Escher (2011) descreveu um “Cenário de Investigação” criado por algumas dimensões teórico-metodológicas, as quais apresentaram, em duas perspectivas inter-relacionadas, as influências, limites e potencialidades do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação no Cálculo Diferencial e Integral: em uma perspectiva histórica e outra, em uma perspectiva de ensino e de aprendizagem. O objetivo do trabalho consistiu em investigar as dimensões teórico-metodológicas presentes nas inter-relações do Cálculo Diferencial e Integral e as TICs.

A pesquisa foi desenvolvida usando uma metodologia qualitativa, com o Paradigma Indiciário de Carlo Ginzburg, e fornece uma síntese conceitual das perspectivas citadas, viabilizando-nos a percorrer um caminho teórico-metodológico em busca dos indícios que influenciam os processos de ensinar e aprender Cálculo no contexto das Tecnologias de Informação e Comunicação. Dimensões como epistemológicas, da linguagem, formalista, sociocultural, metodológica, entre outras, emergem da revisão da literatura relativa ao uso das tecnologias no ensino e aprendizagem do Cálculo, da análise preliminar dos livros selecionados, das entrevistas efetuadas com professores que lecionaram, ou que ainda lecionam Cálculo e da prática em sala de aula. Concluiu que as TICs adquirem uma característica forte o bastante para alterar todas as dimensões, logo, assumindo seu caráter epidêmico, justificando assim sua característica revolucionária.

O livro "*A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo"* vem tratar justamente dos assuntos "TICs e Cálculo", em que os organizadores salientam sua importância:

> Essa obra representa uma valiosa contribuição para que se possa implementar e incorporar um processo de ensino-aprendizagem de Cálculo que incorpore o uso da tecnologia – livros, computadores e calculadoras – cuja ênfase seja colocada mais na compreensão de conceitos e menos na manipulações rotineiras e mecânicas; mais no desenvolvimento de conceitos a partir de investigações baseadas no cotidiano e menos em deduções fundamentadas em definições abstratas. (LAUDARES; LACHINI, 2001, p. 9).

Machado (2008) analisa a contribuição do *software* MPP na resolução de problemas que vão além do cálculo funcional no ensino de matemática, em especial no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. A autora enfatiza a necessidade da utilização dessa ferramenta, principalmente para o conhecimento matemático adquirido a partir da visualização e salienta que:

> [...] as aulas de Matemática com o auxílio da ferramenta computacional provoca mudanças nos papéis e nas interações de professores e estudantes. Na sala de aula com a ferramenta computacional não tem espaço para o saber pronto e acabado, a ação educativa ocorre em lócus. A sala de aula ou laboratório é transformada em local de trabalho com o conhecimento, espaço de construção de habilidades e competências tanto do educando quanto do educador. (MACHADO, 2008, p.193).

O computador é uma ferramenta muito útil e que auxilia as aulas de CDI, porém, se o professor não utilizar uma metodologia adequada e explorar bem as definições e teoremas do CDI, de nada servirá o computador. Autores têm chamado a atenção para o fato de que os computadores por si só não vão modificar a Educação e o ensino do Cálculo nas universidades. (BORBA; VILLARREAL, 2005).

2.2.1 O Ensino de integrais

Nosso estudo está focado no ensino de Cálculo Integral, exclusivamente nas Técnicas de Integração, que é largamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática, mas de Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química etc.

Existem trabalhos sobre o ensino de integrais que tem como tema o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

> O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona integração e diferenciação, sendo apresentado em duas partes. Sua descoberta, feita independentemente por Leibniz e Newton, iniciou os avanços da matemática que alimentaram a revolução científica nos 200 anos seguintes e constitui o que ainda é considerado a descoberta mais importante do cálculo na história da humanidade. (GEORGE THOMAS, 2002).

Anacleto (2007) faz uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo dos alunos que estudaram anteriormente a disciplina CDI quanto à inter-relação da diferenciação e a integração.

Tem sua fundamentação nos pressupostos teóricos contidos na dialética ferramenta--objeto, que consiste na observação e estudo da análise de uma situação feita nos diferentes campos da matemática por professores e alunos; e, também, no jogo de quadros que evidencia a importância da formação de imagens mentais na construção de conhecimentos e resolução de problemas com base na pesquisa realizada por Segadas (1998), em sua tese de doutorado, na qual verifica o entendimento do TFC pelos estudantes.

O Teorema Fundamental do Cálculo é considerado um dos tópicos mais importantes ensinados em cálculo, por estabelecer uma relação entre a derivação e integração. Um dos resultados obtidos pela pesquisadora foi que se não utilizarmos imagens gráficas de maneira eficiente, como na resolução de problemas ou para auxiliar na compreensão de uma definição ou teorema, pouco será sua serventia. Ela também verificou que a maior parte dos estudantes pesquisados apresentava dificuldades para solucionar problemas simples que, com a visualização de um gráfico, evitaria os longos cálculos, com ou sem o uso de computadores.

Tall (1991) discute aspectos formais ligados ao Teorema Fundamental do Cálculo. Um programa de computação gráfica facilita o entendimento do TFC e na compreensão do conceito de função contínua.

Scucuglia (2006), em sua pesquisa de mestrado, discute como estudantes investigam o Teorema Fundamental do Cálculo usando calculadoras gráficas (TI-83). Tendo como referencial teórico Seres-Humanos-com-Mídias, que evidencia o papel das TICs no processo de construção do conhecimento, sua pesquisa foi desenvolvida com duas duplas de estudantes de licenciatura em matemática da UNESP.

Andersen (2011) relata os resultados de uma pesquisa qualitativa, cujo objetivo era investigar quais processos mentais podiam intervir e ser combinados por alunos no desenvolvimento de atividades envolvendo a expressão $F(x)=\int f(t)dt$. Além disso, verificar se esse tipo de atividade favorece a compreensão das ideias centrais envolvidas no Teorema Fundamental do Cálculo. A pesquisa fundamentou-se no estudo de Tommy Dreyfus intitulado Processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA); o instrumento de pesquisa foi elaborado, aplicado e analisado, utilizando algumas fases da Engenharia Didática. Os catorze participantes desse estudo eram alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular da cidade de São Paulo. A análise dos protocolos dos estudantes indica que os processos do PMA mobilizados foram: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, intuição, definição, descoberta, validação, generalização, síntese e abstração. O que possibilitou que muitos dos participantes conjecturassem que a derivação e integração são operações inversas uma da outra. Os resultados da pesquisa explicitaram que um trabalho dessa natureza muito contribui para que os alunos se apropriem de inter-relações entre conceitos envolvidos no Teorema Fundamental do Cálculo.

Dietrich (2009) desenvolveu uma pesquisa com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina de Cálculo II de uma Universidade do Rio Grande do Sul. O foco principal dessa investigação foi a análise das possibilidades de aquisição dos conceitos básicos de integral definida, por meio da metodologia da Engenharia Didática, sob a ótica da teoria de conceito imagem e conceito definição proposta por Tall e Vinner (1976).

Dietrich (2009) fez uma análise de livros didáticos utilizados pelos professores da disciplina de Cálculo II e aplicou um teste diagnóstico. Os resultados dessa investigação demonstraram que a sequência didática proposta contribuiu para a criação de imagens conceituais e favoreceu a compreensão dos conceitos e propriedades da integral definida.

Silva (2004) analisa, em dois livros didáticos (Guidorizzi e Stewart), o conteúdo Integral à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e os resultados mostram que, se os livros forem bem explorados, podem levar o aluno ao entendimento, por meio da utilização das conversões, com visualização gráfica dos conceitos em uma situação contextualizada e motivadora. Os dois livros estudados apresentam o assunto na mesma sequência: antiderivada ou primitiva, definição de integral, técnicas de integração e aplicações.

No próximo capítulo, apresentaremos os principais referenciais teóricos que fundamentaram o desenvolvimento da pesquisa aqui relatada.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Tivemos como foco de pesquisa investigar abordagens de ensino que possam favorecer a aprendizagem com entendimento de algumas técnicas de integração. Assim, inicialmente consideramos relevante discutir o que entendemos por aprender matemática com entendimento.

Nesta pesquisa investigamos uma abordagem de ensino que incentive o desenvolvimento de estratégias e estilos de aprendizagem para o entendimento das Técnicas de Integração.

Na próxima seção, discutiremos e estudaremos o significado de ensinar e aprender com entendimento.

3.1 Aprendendo matemática com entendimento

O que é entendimento? Quando os alunos alcançam o entendimento o que eles conseguiram?

Iniciamos essa seção com duas perguntas essenciais para a construção de uma pedagogia da compreensão e que foram feitas por Perkins (1993) ao iniciar o seu artigo intitulado *O que é entendimento*?[1]

Quando ensinamos cálculo integral para nossos alunos é possível afirmar que eles compreenderam o cálculo integral?

Perkins (1998) usa uma metáfora da torneira para explicar o que é conhecimento e habilidade. O aluno tem conhecimento se ele pode reproduzi-lo quando solicitado, assim como “abrir uma torneira”. Por exemplo, queremos verificar se o aluno conhece as técnicas de integração, então, solicitamos que esse resolva algumas integrais. Já habilidades são desempenhos do conhecimento, que descobrimos se estão presentes “abrindo a torneira”.

O pesquisador afirma que o entendimento não se reduz ao conhecimento. Compreender o significado de uma integral exige mais do que calcular o seu valor. O aluno poderá resolver uma lista de integrais definidas, por exemplo, sem, todavia, ter compreendido o Teorema Fundamental do Cálculo, limitando-se seguir um conjunto de procedimentos.

Ferreira (2012) investigou as contribuições de uma abordagem de ensino com foco no uso de exemplos para a aprendizagem de integrais. Elaborou lições fundamentadas no uso de

[1]What is understanding?

exemplos, objetivando a aprendizagem conceitual e procedimental de Cálculo Integral. Teve como referencial teórico Hiebert e Lefevre (1986) que citam conhecimento conceitual e procedimental.

Para Hiebert e Lefevre (1986), o conhecimento conceitual é caracterizado pela riqueza das relações, dessa forma, a unidade de conhecimento não pode se restringir a uma parte isolada da informação. Esse conhecimento se desenvolve a medida que redes independentes são organizadas, por meio de relações estabelecidas entre elas e isso pode ocorrer com parte da informação já estocadas na memória, ou entre um conhecimento prévio e uma nova informação.

Conhecimento procedimental é constituído de duas partes: a linguagem matemática simbólica ou formal e os algoritmos ou regras para executar as tarefas matemáticas. Costuma-se distinguir dois tipos de procedimentos, conforme se opere com os objetos formais da matemática, símbolos, ou com objetos mais concretos, como diagramas visuais, imagens mentais ou outros objetos, não necessariamente símbolos matemáticos padronizados.

Hiebert e Lefevre (1986) caracterizam o conhecimento conceitual como aquele que é parte de uma rede composta por peças individuais de informação e as relações entre essas peças, por exemplo, conhecimento das regras de derivadas e suas propriedades. Já se referindo aos conhecimentos procedimentais, definem que esses incluem uma familiaridade com o sistema de representação de símbolos da matemática e os conhecimentos de regras e procedimentos para a resolução de exercícios de matemática. Por exemplo, o aluno conhece as técnicas de integração e sabe escolher qual a técnica de integração mais adequada para a resolução.

Quanto à pergunta “O que é entendimento?”, consoante Perkins (1998, p. 40),“Entendimento é a capacidade de pensar e agir de forma flexível com que se sabe.”.[2]

Perkins (1998) afirma ainda que aprender fatos é necessário para a aprendizagem com entendimento, mas a aprendizagem de fatos não é suficiente para aprender com entendimento.

Ao explorar o significado de entendimento, estudam-se comportamentos que podem ser chamados de “desempenhos de entendimento” e apresentam três características principais: oferecer explicações; articular conhecimento relacional; exibir uma rede de explicação flexível e que possa ser atualizada. (PERKINS, 1998).

Ao oferecer explicações, por exemplo, o estudante busca explicar a integral indefinida, apresentando exemplos de primitivas e derivando para comprovar. Ao articular

---

[2] Understanding is the ability to think and act flexibly with what one knows.

conhecimentos, estabelecendo relações ricas, o estudante pode relacionar as operações de derivada e integral por meio do Teorema Fundamental do Cálculo. Pode, então, exibir uma rede de explicação flexível que possa ser continuamente revisada e atualizada, demonstrando entendimento, revisando e estendendo suas explicações.

Para entender melhor desempenhos de entendimento, Perkins (1995) criou um quadro de acesso da compreensão. Para construir, ampliar e revisar as estruturas de explicação, precisa-se de:

> 1. Acesso ao conhecimento.
> 2. Acesso à representação para o conhecimento facilitado por representações bem escolhidas, por exemplo, metáforas esclarecedoras, diagramas lúdicos.
> 3. Acesso a mecanismos de recuperação é importante que recuperemos informações importantes da memória ou de um livro.
> 4. Acesso aos mecanismos de construção de novas implicações, elaborações e aplicações. (PERKINS, 1995, p.77, tradução nossa)[3]

A obtenção da compreensão depende do conhecimento de conteúdo; uma compreensão do Cálculo, por exemplo, depende de conhecimentos centrais como função, gráficos, infinitésimos, taxas de variações, somas infinitas etc.

> Compreender não é uma questão de tudo ou nada. (...) é mais apropriado pensar a compreensão como emergindo ou se desenvolvendo, em vez de presumir que alguém compreenda ou não um tópico, uma ideia ou um processo. (CARPENTER e LEHRER, 1999, p.20, tradução nossa)[4]

Porém, o entendimento não depende somente do conhecimento, ele auxilia no processo de construção de estruturas de explicação, o conhecimento é um apoio à informação. Outras duas classes de conhecimento também auxiliarão nessa construção do entendimento: conhecimento de resolução de problemas, que capacita os alunos a irem além de fórmulas ou estratégias de tentativa e erro, capacita a pensar e refletir sobre problemas em um contexto; conhecimento epistêmico que é o conhecimento das teorias científicas. (PERKINS, 1995).

Em suma, para aprender com entendimento, contribuem conhecimentos variados; não só do conteúdo, mas também outros conhecimentos, igualmente importantes, relacionados, por exemplo, à resolução de problemas: o conhecimento epistêmico, o conhecimento conceitual e o conhecimento procedimental.

---

[3]1. Knowledge Access;
2. Representation Access to the knowledge facilitated by well-chosen representations (for instance, prototypical cases, clarifying metaphors, lucid diagrams).
3. Retrieval mechanisms Access made possible by retrieval mechanisms that recover relevant information from memory or an external source
4. Construction mechanisms Access to new implications, elaborations, applications.

[4]Understanding is not an all- or- none. (…)it is more appropriate to think of understanding as emerging or developing rather than presuming that someone either does or does not understand a given topic, idea or process.

Outra pergunta importante a levantar é a seguinte: Por que educar para o entendimento? Embora existam várias razões, uma se destaca:

> Conhecimento e habilidade por si mesmos não garantem a compreensão. [...] Os alunos armazenam conhecimento e habilidade nas escolas, de forma que possa colocá-los em ação no trabalho – em papéis profissionais – cientista, engenheiro, designer, médico, empresário, escritor, artista, músico – e em papéis comuns – cidadão, eleitor, pai – que exigem apreciação, compreensão e julgamento. [...] Em suma, temos de ensinar para a compreensão, a fim de perceber os retornos em longo prazo da educação. (PERKINS, 1993, p. 29).[5]

Perkins (1993), juntamente com seus colaboradores, aponta prioridades para ensinar para a compreensão: tornar o aprendizado um processo de longo prazo, centrado no pensamento; fornecer uma avaliação rica e contínua; apoiar a aprendizagem com representações fortes; prestar atenção a fatores de desenvolvimento; introduzir os alunos na disciplina; ensinar para a transferência.

Objetivando tornar o aprendizado um processo de longo prazo, centrado no pensamento, o professor deve ter em mente que os alunos aprenderão cálculo, e principalmente integrais, em longo prazo e não apenas em um semestre.

Para fornecer uma avaliação rica e contínua, as avaliações devem ocorrer durante todo o processo de aprendizagem. Os estudantes ao estudarem limites devem receber um *feedback* antes de estudarem derivadas e o mesmo ocorre com integrais.

Apoiar a aprendizagem com representações fortes exige que o professor empregue representações significativas para a aprendizagem dos alunos. Por exemplo, ao estudar a integral definida e sua aplicação no cálculo de áreas, uma boa alternativa pode ser o uso de programas computacionais que podem facilitar a visualização, por exemplo, da região a ser integrada, bem como o próprio entendimento da integral definida.

Ao prestar atenção em fatores de desenvolvimento, professores que ensinam para a compreensão devem ter em mente fatores como a complexidade, mas sem concepções rígidas do que os alunos podem ou não aprender em determinadas idades.

Devem-se introduzir os alunos na disciplina, de forma que possam compreender como essa funciona. As disciplinas têm suas formas próprias de testar hipóteses e demonstrar resultados. No caso da matemática demonstramos teoremas usando, por exemplo, os métodos

---

[5][…] Knowledge and skill in themselves do not guarantee understanding. […] Students garner knowledge and skill in schools so that they can put them to work--in professional roles--scientist, engineer, designer, doctor, businessperson, writer artist, and musician--and in lay roles--citizen, voter, and parent--that require appreciation, understanding, and judgment. […]. In short, we must teach for understanding in order to realize the long-term payoffs of education.

de indução, ou os métodos de dedução. O desenvolvimento da Educação Matemática trouxe à tona uma discussão sobre outras formas de verificar hipóteses e argumentar sobre a sua validade, as etnoargumentações. (GARNICA, 2002).

> Etnoargumentações – “demonstrações” em sentido amplo – têm, sempre, a função de convencer, tomado “convencimento”, aqui, como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados. A essa ampliação de escopo vincula-se uma ampliação das próprias concepções sobre Matemática. (GARNICA, 2002 p. 8).

Quanto a ensinar para a transferência, o aluno, ao aprender determinada disciplina, deverá adquirir a habilidade de utilizá-la em qualquer contexto. Perkins (1993) aponta a importância de ensinar para a transferência: os professores têm que ajudar os alunos a cultivar hábitos mentais de fazer conexões. Por exemplo, os alunos aprendem na escola a calcular juros simples e compostos, quando o aluno aprende com entendimento ele saberá ao comprar uma mercadoria a prazo o quanto estará pagando em juros, ou pelos menos poderá comparar qual a melhor escolha, se é o pagamento à vista ou a prazo.

Segundo Carpenter e Lehrer (1999), o importante em aprender com entendimento é que os estudantes podem aplicar esse conhecimento para aprender novos tópicos e resolver problemas novos. Os autores propõem cinco formas de atividade mental das quais a compreensão matemática surge: construir relações; estender e aplicar o conhecimento matemático; refletir sobre as experiências; articular o que se sabe; apropriar-se do conhecimento matemático. Como podemos perceber, essas atividades mentais estão intimamente relacionadas, mesmo assim descreveremos cada uma separadamente.

a. Construir relações: Para que a matemática da escola tenha significado para o aluno, o educador deverá manter uma relação entre o que se estuda na sala de aula e o que se aprende fora dela. Por exemplo, o aluno não deve apenas saber calcular integrais, deve ter conhecimento de suas aplicações fora da sala de aula.
b. Estender e aplicar o conhecimento matemático: Para desenvolver a compreensão, não basta adicionar ao conhecimento adquirido novos conceitos e processos, envolve a construção de estruturas fortes e integradas. O conhecimento quando é fortemente estruturado pode relacionar e incorporar novos conhecimentos aos existentes. Nada em matemática, e principalmente em Cálculo, é isolado, para conhecer integrais tem que ter o conhecimento de derivadas.

c. Refletir sobre as experiências: Devemos como educadores desenvolver em nossos alunos a habilidade da reflexão, ou seja, a reflexão deve fazer parte do processo de aquisição do conhecimento. Alunos que refletem sobre seu aprendizado conseguem organizar melhor o que sabem e o que estão aprendendo.
d. Articular o que se sabe: Articular as próprias ideias é primordial na educação e é um ponto de referência para a aprendizagem com entendimento. Quem articula o que se sabe, reflete sobre o conhecimento adquirido.
e. Apropriar-se do conhecimento matemático: Para aprender com entendimento cada indivíduo deverá construir seu conhecimento, considerando seus próprios interesses, de atividades específicas.

Carpenter e Lehrer (1999) apontam que os estudantes tornam-se autores de sua própria aprendizagem, e que nem todos aprendem da mesma maneira.

Para aprender com compreensão, Carpenter e Lehrer (1999) sugerem que as salas de aula precisam fornecer aos estudantes oportunidades para desenvolver relações adequadas; estender e aplicar o conhecimento matemático; refletir sobre sua própria experiência matemática e articular o que se sabe a fim de fazer o seu próprio conhecimento matemático.

Para organizar uma sala de aula que permita aos alunos participarem dessas atividades, devem ser consideradas três instruções: tarefas, que são atividades que envolvam os estudantes e problemas que eles resolvam; ferramentas, que são representações de ideias matemáticas e situações problemas; práticas normativas são as “regras do jogo”, padrões reguladores das atividades matemáticas acordados entre professor e aluno. (CARPENTER e LEHRER, 1999).

Os autores afirmam que a compreensão é o objetivo tanto de alunos como de professores. Para haver ensino com entendimento, o professor precisa compreender a matemática a ser ensinada e também compreender o pensamento dos seus alunos.

Todo curso, seja ele da educação básica ou do ensino superior, possui um projeto a ser executado, com ementário e bibliografia. Se o professor não compreender a matemática, tampouco compreender seus alunos, ele será apenas um transmissor dos livros didáticos. Suas aulas serão repetições de ideias de terceiros e dessa forma não ocorrerá a aprendizagem com entendimento.

Os professores devem assumir a responsabilidade de seu aprendizado contínuo, ou seja, o professor deve sempre buscar a capacitação e aperfeiçoamento, tanto em relação à matemática como também em relação aos estudantes. (CARPENTER e LEHRER, 1999).

Enfim, o desenvolvimento da compreensão para alunos e professores é um processo contínuo e permanente, que deve ser feito um pouco a cada dia.

Após termos discutido sobre a aprendizagem com entendimento, apresentamos uma discussão sobre estratégias e estilos de aprendizagem na matemática.

3.2 Estratégias e estilos de aprendizagem de Matemática

De acordo com as discussões feitas anteriormente sobre o que significa entendimento e o que seja aprender matemática com entendimento, consideramos importante discutir as estratégias para aprender Matemática, focalizando as estratégias de aprender Cálculo.

A palavra estratégia esteve, historicamente, vinculada à arte militar no planejamento das ações a serem executadas nas guerras, atualmente, largamente utilizada no ambiente empresarial. Porém, Petrucci e Batiston admitem que:

> [...] a palavra 'estratégia' possui estreita ligação com o ensino. Ensinar requer arte por parte do docente, que precisa envolver o aluno e fazer com ele se encante com o saber. O professor precisa promover a curiosidade, a segurança e a criatividade para que o principal objetivo educacional, a aprendizagem do aluno, seja alcançado. (PETRUCCI e BATISTON, 2006, p. 263).

O uso do termo "estratégias de ensino" refere-se aos meios utilizados pelos docentes na articulação do processo de ensino, de acordo com cada atividade e os resultados esperados.

> As estratégias visam à consecução de objetivos, portanto, há que ter clareza sobre aonde se pretende chegar naquele momento com o processo de ensinagem. Por isso, os objetivos que norteiam devem estar claros para os sujeitos envolvidos – professores e alunos [...]. (ANASTASIOU e ALVES, 2004, p. 71).

Frota (2002) argumenta que, para que as estratégias de aprendizagem sejam desenvolvidas, é preciso que haja interações entre o sujeito e os objetos, entre o sujeito e outros indivíduos e do sujeito com o meio ambiente. Estratégias de aprendizagem são flexíveis e modificam-se, cada indivíduo incorpora suas características pessoais na forma de utilizar uma determinada estratégia, o que de certa forma configura um estilo de aprendizagem.

> Estratégias de aprendizagem podem, ainda, ser empregadas de maneiras diferentes por uma mesma pessoa. Assim, “cada indivíduo pode utilizar a mesma estratégia de maneira diferenciada, incorporando suas habilidades, aptidões, interesses e, também, suas energias, seu espectro de motivações”. (FROTA, 2002, p. 41).

Assim, Frota (2002) define estilos de aprendizagem como estratégias de aprendizagem personalizadas.

Para Cury (2001), as pessoas têm diferentes estilos de aprendizagem, ou seja, cada um tem sua forma de absorver as informações, armazená-las e adquirir novos conhecimentos. Por exemplo, há estudantes que são mais curiosos, têm o instinto investigativo e querem sempre algo mais. Outros são criteriosos, gostam de seguir um roteiro. Devemos, portanto, desenvolver o equilíbrio entre os estilos de aprendizagem de forma a proporcionar maiores chances de aprendizagem.

De acordo com Felder (1966), os estudantes, em geral, têm diferentes estilos de aprendizagens-característica e preferências quanto à maneira como eles tomam e processam a informação.

Cury (2000) resume os cinco aspectos distintos de estilos de aprendizagem que foram identificados por meio de um teste chamado ILS, apresentado por Felder e Silverman apoiados em Felder (2000a, 2000b, 2000c): visual /verbal, indutivo /dedutivo, sequencial /global, sensorial /intuitivo e ativo /reflexivo**.** A seguir, relacionaremos esses aspectos com o processo de ensino-aprendizagem de Cálculo Integral.

Os aprendizes ativos compreendem e retêm melhor a informação participando ativamente da realização de uma atividade; aprendem fazendo algo. Em aulas de Cálculo, esses estudantes querem logo aplicar as regras de integração, por exemplo, numa lista de exercícios padronizados, sentem-se satisfeitos quando conseguem resolvê-los e encontrar as respostas do livro. Discutem as dúvidas com o colega do lado, resolvem em voz alta os exercícios e com isso vão explicando ao amigo o que lhes passa pela mente.

O aluno reflexivo prefere pensar sobre as coisas, pensa antes, com cuidado, retém e compreende melhor a informação pensando, refletindo calmamente sobre ela, levantando alternativas. Em geral, prefere sentar sozinho. Não costuma resolver logo os exercícios, pensa sobre eles e depois, se solicitado pelo professor ou por um colega, resolve-os. No caso de técnicas de integração, o aluno reflexivo, em primeiro lugar, reflete sobre a técnica, analisa-a e procura estabelecer relações com algo já estudado.

Os aprendizes sensoriais preferem resolver problemas por meio de procedimentos bem estabelecidos e não apreciam complicações inesperadas. Têm interesse por fatos e dados concretos e práticos e preferem resolver os problemas por tentativas. No estudo de áreas, por exemplo, seguem sempre a mesma rotina, esboçam o gráfico e calculam a integral definida utilizando uma das técnicas de integração de forma detalhada. Ainda que tenham a possibilidade de usar uma calculadora gráfica ou um *software* matemático.

Os intuitivos gostam de inovação, apreciam a variedade, novos desafios, e evitam as atividades que dependem de memorização, que sejam rotineiras ou repetitivas. São criativos, estão sempre em busca de significados, desafios e novas possibilidades. No mesmo tipo de atividade citada anteriormente, os intuitivos já começam solicitando ao *software* o esboço do gráfico para visualizar a região a ser calculada a sua área, e vão estimando o resultado.

Os aprendizes visuais aprendem olhando, capturam mais informações por meio de gráficos, quadros, figuras, cronogramas, filmes e demonstrações.

Os aprendizes verbais aprendem lendo e ouvindo, tiram mais proveito do material verbal, seja ele escrito, falado, por meio das palavras ou mesmo por meio de fórmulas matemáticas.

Em aulas de Cálculo Diferencial e Integral, como em muitas aulas de Matemática em cursos de Engenharia, o professor explana o conteúdo verbalmente, solicitando aos alunos que complementem as informações por meio da leitura do livro-texto. A dificuldade de esboçar com giz, no quadro-verde, gráficos de funções que não são as “básicas”, por exemplo, lineares, quadráticas, exponenciais ou trigonométricas, faz que o professor evite-as. Mas, se o aprendiz, especialmente o visual, não tiver a oportunidade de vivenciar a construção do gráfico, com todas as suas dificuldades, não conseguirá aprendê-los. Um aprendiz verbal, por outro lado, satisfaz-se mais facilmente com as explicações do professor e “aceita” os exemplos de gráficos apresentados no livro.

Os aprendizes indutivos preferem ver primeiramente os casos específicos (as observações, os resultados de experiências, os exemplos gráficos ou numéricos) para depois chegar à compreensão dos princípios e teorias.

Os dedutivos, ao contrário, preferem ter primeiramente a visão geral da teoria e deduzir as suas aplicações para os casos específicos. Em Cálculo, isso fica muito claro quando iniciamos o conteúdo “Integração” a partir de exemplos de área. Os estudantes indutivos gostam dos exemplos práticos, logo relacionam com o que já sabem e procuram deduzir regras para entender os primeiros exemplos. Os dedutivos, no entanto, aceitam a explicação, mas não se “convencem”, querem que lhes seja apresentada alguma dedução para entender a razão pela qual a integral definida pode representar em alguns casos como a área da região limitada pela curva, pelo eixo x e pelas retas verticais que correspondem ao intervalo.

Os aprendizes sequenciais gostam de aprender passo a passo, avançam com entendimento parcial, absorvendo pequenas partes da informação que vão se conectando logicamente para garantir o entendimento da situação. São capazes de resolver problemas ainda que não tenham uma compreensão global do assunto em pauta e suas soluções são ordenadas e fáceis de entender.

Os aprendizes globais enxergam o contexto em que a situação ocorre, para então compreender como juntar as partes para resolver o problema. Têm facilidade para "juntar conhecimento" de maneira inovadora. Precisam ver como aquele conteúdo apresentado se relaciona com suas aprendizagens anteriores; ao compreender o todo. São capazes de resolver problemas complexos, mas têm dificuldade em explicar as sequências de passos de seus raciocínios.

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral, em cursos nos quais essa disciplina é ferramenta para o trabalho com conteúdos específicos das respectivas áreas, explora demasiadamente os procedimentos sequenciais. Um dos exemplos mais claros é o da derivação de função composta: o aluno conhece a regra e "treina" os procedimentos, sendo capaz de fazer a derivada de compostas de *n* funções, mas não se questiona sobre o significado disso. Os aprendizes sequenciais se satisfazem em resolver corretamente exercícios desse tipo e gostam de seguir um conjunto de regras capazes de levar à solução do problema proposto. Outros, os globais, ainda que consigam também executar os passos, sentem-se incomodados com esse tipo de exercício e reclamam, pois, não compreendem o todo e não conseguem relacionar o assunto com outros já desenvolvidos ou com seus interesses mais específicos.

A partir dessa classificação, Felder (1966) propõe aos professores que adaptem suas aulas de acordo com a diversidade de estilos de aprendizagem que seus alunos possuem e que as habilidades de cada estilo sejam exploradas nas atividades propostas.

> Nas últimas décadas, o ensino de engenharia foi fortemente direcionado para os aprendizes intuitivos, verbais, dedutivos, reflexivos e sequenciais. No entanto, poucos estudantes de engenharia encaixam-se em todas essas cinco categorias. Portanto, a maioria dos estudantes de engenharia recebe uma educação incompatível com seus estilos de aprendizagem. Isto pode prejudicar o desempenho as atitudes desses estudantes em relação às disciplinas, ao currículo e à própria carreira da engenharia. (FELDER, 1966, p.2, citado por NASSER).

Outros pesquisadores também estudaram e pesquisaram sobre estratégias de ensino, como é o caso de Pinto (2009).

Pinto (2009) estudou os processos cognitivos por meio dos quais o aluno de Matemática lida com as definições formais e deduções. A pesquisa dela analisou a passagem de uma formação de Cálculo para uma formação de Análise de futuros matemáticos. Acompanhou na pesquisa estudantes do curso de matemática em seu primeiro curso de Análise Real. Procurou descrever a relação com a nova matemática estabelecida pelos estudantes por meio de análise indutiva das definições, argumentações e imagens.

Pinto (2009), em sua pesquisa, identificou duas estratégias que as denominou de *Extraindo significado*, que se refere à estratégia de desenvolver a nova matemática, tendo como ponto de partida a definição formal e executa deduções para provar teoremas. E a outra ela chamou de *Atribuindo significado*, que se refere à estratégia que busca ressignificar a definição formal a partir de um repertório de imagens, percepções, processos, exemplos e contra exemplos.

Frota (2002, 2006 e 2010) apresenta resultados de uma pesquisa que objetivou caracterizar os estilos de aprendizagem matemática de estudantes universitários da área das Ciências Sociais Aplicadas. Análises fatoriais exploratórias permitiram aperfeiçoar escalas de estilos de aprendizagem matemática e classificar os 591 estudantes pesquisados, segundo um perfil de estilos de aprendizagem matemática.

> Conhecer os seus alunos do ponto de vista de seus perfis de estilos de aprendizagem matemática pode contribuir para que o professor passe a propor para seus alunos o confronto com situações didáticas que demandem estratégias de aprendizagem distintas. (FROTA, 2010, p.106).

Os três estilos de aprendizagem matemática: estilo com orientação teórica; estilo com orientação prática e estilo com orientação investigativa – propostos por Frota (2006), serão caracterizados a seguir.

Os estudantes que apresentam um "estilo com orientação teórica" se caracterizam por ler o assunto antes da explicação do professor e marcar as dúvidas. Releem a teoria no livro e fazem exercícios, elaboram resumos da teoria e fazem resumos dos métodos de solução de exercícios. Destacam os conceitos e relacionam uns com os outros. No estudo de integrais, por exemplo, ao resolverem uma lista de integrais, primeiro separam em blocos de acordo com a técnica adequada para resolução e somente depois resolvem a partir das sistematizações teóricas que fizeram.

Os estudantes com "Estilo com orientação prática" fazem todos os exercícios recomendados, releem as notas de aula e fazem mais exercícios, estudam os exemplos resolvidos no caderno e/ou no livro. Por exemplo, uma atividade com essa orientação consiste em solicitar a resolução de uma série de integrais que podem ou não utilizar a mesma técnica de integração.

Os estudantes que apresentam o “Estilo com orientação investigativa” assim como os de “orientação teórica” leem o assunto antes da explicação do professor e marcam as dúvidas. Pesquisam sobre o assunto, tentam verificar se o princípio funciona, destacam os conceitos e relacionam uns com os outros, resolvem os exercícios explicando as passagens e buscam explicações para as definições e resoluções de questões. Os estudantes com essa orientação gostam de desafios e de fazer conexões entre teoria e a prática.

Ao elaborar as atividades que integram o módulo de ensino de integrais, procuramos incentivar o desenvolvimento de estratégias de aprendizagem com orientações teórica, prática e investigativa. Ressaltamos que existem aspectos comuns entre essas orientações, como ler o assunto antes da explicação do professor e marcar as dúvidas é um item comum entre os estudantes que apresentam o estilo com orientação investigativa e os estudantes que apresentam o estilo com orientação teórica.

A nossa pretensão é incentivar os alunos a integrarem diferentes tipos de estratégias de aprendizagem, que podem constituir o que Frota (2006, 2010) chama de perfis de estilos de aprendizagem.

Frota (2002) discute o fato de que estilos se manifestam de forma situada e histórica, o que pressupõe considerar que os estilos de aprendizagem podem se modificar em função do tempo e da situação, assim como são dinâmicas e flexíveis as estratégias de aprendizagem. O desenvolvimento de estilos de aprendizagem é um processo decorrente de interações do sujeito com os objetos matemáticos e com o conhecimento, e também de interações entre sujeitos, ocorridas em determinada situação.

Para isso, tanto alunos como professores devem-se conhecer e conhecer suas habilidades como educadores e aprendizes, respectivamente:

> No desenvolvimento de perfis de estilos de aprendizagem matemática há aspectos relevantes a considerar do ponto de vista dos estudantes e dos professores. Os estudantes precisam: 1) conhecer-se enquanto aprendizes, identificando não apenas seus conhecimentos matemáticos, mas também suas preferências de método de estudo e aprendizagem; 2) experimentar tarefas variadas com orientações teóricas, práticas e investigativas, sabendo definir quais as estratégias de aprendizagem mais adequadas para lidar em situações diversas. Os professores precisam: 1) conhecer seus alunos enquanto aprendizes, avaliando não apenas seus conhecimentos matemáticos, mas conhecendo seus métodos preferenciais de estudo e aprendizagem; 2) ampliar em qualidade o tipo de tarefas propostas, como forma de possibilitar que os alunos desenvolvam estilos de aprendizagem variados, com orientação teórica, prática e investigativa. (FROTA, 2006, p.107).

Os resultados de pesquisa de Frota (2006, 2010) apontam a importância do professor para que o aluno desenvolva estratégias de estudo e aprendizagem. Desde as séries iniciais ao curso superior, as deficiências vão, por vezes, se acumulando, provocando reações diversas nos estudantes, como a sensação de incompetência e a insatisfação com o curso. Os alunos perdem o interesse em estudar Matemática. Muitos desses estudantes desistem de buscar o entendimento matemático e limitam-se, muitas vezes, a adotar estratégias de estudos que priorizam repetições de modelos, na maioria das vezes sem nenhum entendimento.

Assim, implementar estratégias dessa natureza, por mais simples que sejam, defronta com obstáculos de ordem institucional, decorrentes, por exemplo, da limitação da carga horária de matemática nos cursos de graduação, ou do valor que a comunidade universitária costuma atribuir à aula expositiva tradicional. A resistência dos próprios alunos a ampliar e transformar suas estratégias de aprender matemática e, por vezes, a resistência do professor de matemática em incorporar outras estratégias de ensino à sua prática são obstáculos igualmente relevantes a serem transpostos. Essas são questões que demandam investimentos de pesquisa e ações que levem professores e alunos a repensarem as estratégias de aprender e ensinar matemática com entendimento, segundo Frota (2010).

4 METODOLOGIA

A questão norteadora dessa pesquisa foi: uma abordagem do ensino de Cálculo incentivando o desenvolvimento de estratégias e estilos de aprendizagem que podem facilitar o entendimento das técnicas de integração? E para respondê-la a partir dos referenciais teóricos citados nos capítulos anteriores, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa por meio de um estudo empírico junto a acadêmicos de Engenharia de Produção e Sistemas de Informação, de uma Faculdade particular de Montes Claros, norte de Minas Gerais.

A pesquisa qualitativa objetiva obter dados descritivos obtidos por meio de uma participação ativa entre o investigador e os sujeitos. Enfatiza muito mais o processo que o produto, ocupando-se dos fenômenos cujos significados procuram-se captar e compreender o contato direto do pesquisador com a situação estudada e busca retratar a perspectiva dos participantes.

A pesquisa qualitativa apresenta cinco características básicas que configuram esse tipo de estudo:

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador instrumento principal;
> 2. A investigação qualitativa é descritiva;
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 47, 48, 49 e 50).

Araújo e Borba (2004) enfatizam que pesquisa qualitativa deve ter por trás uma visão de conhecimento que esteja em sintonia com procedimentos como entrevistas, análises de vídeos etc. e interpretações. O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa prioriza procedimentos descritivos à medida que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro dessa concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento.

4.1 Contexto da pesquisa

A pesquisa foi realizada com alunos do 2º período do curso de Sistemas de Informação (Turma A) e do curso de Engenharia de Produção (Turma B), ambas de uma Faculdade particular de Montes Claros. As aulas acontecem no período noturno das 19h10min às 22h40min.

Montes Claros é o principal centro urbano do Norte de Minas Gerais, apresentando características de capital regional. Seu raio de influência abrange todo o Norte de Minas Gerais e do Sul da Bahia. Ao longo dos últimos anos, o município tem experimentado sólido crescimento na área da educação e indústria.

Os alunos que ingressam nos cursos de engenharia e sistemas de informação nesta instituição, normalmente, realizam um vestibular que não tem um caráter seletivo, não exigindo dos aprovados conhecimentos matemáticos básicos que já deveriam possuir para prosseguirem em um curso de graduação da área de ciências exatas.

Os alunos ingressantes são, em sua maioria, egressos do Ensino Médio da Escola Pública que atualmente trabalham nas indústrias localizadas nos municípios de Montes Claros, Pirapora, Várzea da Palma, entre outros. Os ingressantes apresentam considerável defasagem de aprendizagem nas disciplinas do núcleo básico.

No intuito de adequar a grade curricular a essa clientela e reduzir a defasagem supracitada é oferecida aos sábados uma disciplina de reforço em matemática que revisa tópicos de Matemática do Ensino Médio relevantes para as disciplinas de Cálculo dos Cursos de Engenharia e de Sistemas de Informação.

Ao ingressarem, os alunos cursam, entre outras disciplinas, Fundamentos da Matemática, que tem por objetivo rever conceitos e procedimentos importantes, estudados anteriormente, e que fundamentam o estudo das disciplinas de Cálculo.

Muitos dos alunos concluíram seus estudos há muito tempo e estão retornando à faculdade. Há também um grande número de alunos que concluíram seus estudos em supletivos e cursos similares que aceleram o processo de ensino e muitas vezes não tiveram a oportunidade de apreender alguns conteúdos básicos. Com esse perfil, são alunos com várias dificuldades de aprendizagem e concentração.

O Curso de Engenharia de Produção contribui para o atendimento da demanda por engenheiros voltados para a realidade da indústria e capacitados para o desenvolvimento de atividades ligadas a projeto, à operação e à gestão de sistemas de trabalho e de sistemas de produção, conscientes ainda de que seu papel no campo tecnológico não os desvincula das iniciativas de responsabilidade social e ambiental.

Assim, a formação do Engenheiro de Produção está em sintonia com o desenvolvimento das iniciativas de qualidade e produtividade em Minas Gerais, proporcionando e viabilizando novas condições para o avanço industrial e de serviços no Estado e na Região Sudeste.

Os cursos da área de computação têm alcançado alto índice de evolução. Nos últimos anos, essa evolução tem provocado uma massificação de sistemas computacionais em empresas públicas e ou privadas. Sua integração com o mundo externo por meio de redes e, principalmente, da Internet, tornou-se um instrumento de trabalho necessário a um grande número de pessoas.

Analisando os aspectos abordados, a faculdade, inserida no contexto socioeconômico do Norte de Minas Gerais, como agente de transformação social, por meio de uma proposta pedagógica moderna, realista, preparando profissionais voltados para o mercado de trabalho e com um perfil adequado às novas exigências.

Hoje é crescente o número de organizações empresariais que utilizam os sistemas de computadores. De cada 100 (cem) empresas, 76% a 99% estão ligadas em rede, sem que isso se caracterize numa formação específica. A utilização dos sistemas computacionais advém dos investimentos das empresas em tecnologia, pois, de cada cinco empresas, quatro declaram que vão investir mais em tecnologia em 2002 (24% o aumento médio), fato que caracteriza a interconexão do mercado. (REVISTA Exame. 15/05/02. Parte integrante da Edição nº 766. Editora Abril, pp. 89-90).

Dada essa realidade, Montes Claros não poderia ficar à margem desse processo, apresenta na sua realidade de mercado uma exigência para o mundo da informatização. Primeiro, porque os investimentos em tecnologia de informação são metas das corporações empresariais ou institucionais; segundo, porque a realidade de mercado é mais complexa, exigindo maior eficiência com menos custos e prejuízos.

Com um mercado mais seletivo, competitivo e globalizado e com um modelo de negócios mais flexível no padrão de atendimento surge, assim, a necessidade de bacharéis em Sistemas de Informação do norte de Minas Gerais, com uma formação técnico-científica sólida, que contribua para os processos de produção, pois na região existe, nas universidades públicas, apenas um curso de graduação na área.

Sendo assim, deseja-se formar profissionais na área da ciência e da tecnologia da informação, de tal forma que possam atuar em atividades empreendedoras, técnicas, de pesquisa, promovendo o desenvolvimento científico e tecnológico com suporte institucional à pesquisa, a promover ideias inovadoras que possam transformar o mercado de trabalho.

4.2 Etapas da pesquisa

A escolha por essas turmas deve-se ao fato de que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I é ministrada no 2º período dos cursos de Engenharia e Sistemas de Informação e tem como ementa Limites e continuidade; Derivadas e suas aplicações; Integrais indefinidas e definidas, ou seja, é nessa disciplina que os alunos iniciam o estudo de Integrais.

O desenvolvimento da pesquisa teve duração de aproximadamente dois meses, sendo que, nesse período, foram realizados dezoito encontros.

No primeiro encontro, foi realizada uma apresentação dos objetivos dessa pesquisa. Algumas condições foram criadas para a aplicação do trabalho, como a solicitação aos acadêmicos que trabalhassem em duplas, formadas de acordo com as suas preferências.

No início de cada encontro, era realizado um debate sobre os assuntos vistos na aula anterior. Foi propiciado aos alunos um momento para que apresentassem as dificuldades encontradas na realização das atividades. Após esse momento, novas atividades a serem realizadas eram entregues aos alunos. No final da aula era distribuída a atividade para casa.

Pretendemos elaborar um módulo de ensino que incentive estratégias de aprendizagem no estudo de integrais. A sequência de atividades que compõem o módulo de ensino terá como objetivo incentivar estratégias de aprendizagem com ênfase nos três estilos: estilo com orientação prática; estilo com orientação teórica e estilo com orientação investigativa.

O cronograma da aplicação das atividades e avaliação encontra-se no Quadro 1:

Quadro 1 – Cronograma de aplicação das Atividades

(continua)

Sistemas de Informação		**Engenharia de Produção**	
Datas	**Atividades**	**Datas**	**Atividades**
04/10	Apresentação da pesquisa	06/10	Apresentação da pesquisa
05/10	I e II	07/10	I e II
18/10	III	20/10	III
19/10	IV e V	21/10	IV e V
26/10	VI	27/10	VI
29/10	VII	28/10	VII

(conclusão)

	Sistemas de Informação		Engenharia de Produção
Datas	**Atividades**	**Datas**	**Atividades**
01/11	VIII	03/11	VIII
05/11	IX	04/11	IX
08/11	X (Desafio)	10/11	X (Desafio)
09/11	XI	11/11	XI
16/11	XII	18/11	XII
22/11	XIII	24/11	XIII
23/11	XIV	25/11	XIV
26/11	XV	01/11	XV
29/11	XVI	01/12	XVI
30/11	XVII Avaliação	02/12	XVII Avaliação

Fonte: Elaborado pela autora

4.3 Instrumentos de coleta de dados

Foram desenvolvidas dezesseis atividades e uma avaliação. As Atividades, realizadas em sala, foram planejadas para que os alunos trabalhassem em duplas, mas também havia para casa. Cada dupla recebia duas cópias das atividades, uma cópia resolvida era devolvida à professora.

A execução das atividades foi gravada em áudio, ficando alguns questionamentos feitos pelos alunos, por vezes, mais evidentes; outros foram prejudicados pelo alto índice de ruído detectado pelo aparelho. Também foram feitas algumas fotografias.

Nas aulas sempre que um aluno solicitava a presença da pesquisadora, a fim de elucidar ou expor suas conjecturas, essa, atenta à importância desse momento para as investigações, registrou-os fazendo anotações sobre cada atividade.

Ao final de cada atividade, os registros escritos de cada dupla foram coletados, obtendo-se com esses registros um conjunto de dados amplo e relevante. Optamos por analisar os registros das duplas que permaneceram juntas durante o desenvolvimento das atividades.

Assim, entre os alunos da Turma A, analisamos os registros das atividades de 08 duplas e, entre os da Turma B, consideramos os registros de 10 duplas. Quanto à avaliação, analisamos as avaliações dos alunos que realizaram as atividades nessas duplas.

As Atividades foram analisadas tendo como foco as respostas das tarefas propostas, buscando identificar semelhanças e diferenças na forma de os alunos se expressarem, justificando, ou não, as tarefas realizadas. Consideramos os tipos de estratégias de aprendizagem incentivadas pela tarefa e as características das respostas, que permitiram evidenciar o entendimento matemático das técnicas de integração em destaque. E ainda comparamos o estilo de aprendizagem de cada aluno com a estratégia de aprendizagem incentivada.

4.4 Atividades

Neste item faremos uma descrição das atividades desenvolvidas em sala e em casa, que foram elaboradas com sustentação no referencial teórico de nossa pesquisa, buscando incentivar estratégias de aprendizagem de acordo com os estilos citados.

Fizemos um quadro resumo dessas atividades com respectivos objetivos e indicando as estratégias e estilos que foram incentivados a partir de cada uma dessas atividades, para isso, chamaremos as atividades que tiveram como foco o desenvolvimento de estratégias com orientação prática de EOP; as estratégias com orientação teórica EOT, e as estratégias com orientação investigativa EOI.

Quadro 2 – Atividades desenvolvidas

(continua)

ATIVIDADE	CONTEÚDO	OBJETIVOS	ESTRATÉGIA /ESTILO
Atividade I sala	Integrais imediatas	Identificar padrões no cálculo de integrais indefinidas; construir a tabela de integrais imediatas; identificar a relação de derivadas e integrais.	EOT e EOI
Atividade II casa	Integrais imediatas e Substituição Simples	Aprender e fixar as integrais imediatas; introduzir a técnica de integração simples através de padrões da integral imediata.	EOP
Atividade III sala	Substituição Simples	Verificar que algumas funções como produto no integrando não podem ser resolvidas usando a tabela de integrais imediatas; determinar a relação entre as funções do integrando; sistematizar a técnica de substituição simples; definir a técnica de integração por substituição simples.	EOP, EOT e EOI

(continua)

ATIVIDADE	CONTEÚDO	OBJETIVOS	ESTRATÉGIA /ESTILO
Atividade IV casa	Substituição Simples	Reconhecer as integrais que podem ser resolvidas pela técnica de integração por substituição simples; desenvolver a pesquisa e o estudo das técnicas de integração.	EOP e EOI
Atividade V casa	Substituição Simples	Identificar padrões nas integrais que podem ser resolvidas pela técnica de integração por substituição simples; Fixar a técnica de integração por substituição simples.	EOP
Atividade VI sala	Integração por partes	Identificar a diferença entre integrais que podem ser resolvidas pela técnica de substituição simples ou pela técnica de integração por partes; Definir a técnica de Integração por partes.	EOP e EOT
Atividade VII – casa	Integração por partes	Fixar a Técnica de Integração por Partes.	EOP
Atividade VIII: laboratório de informática	Laboratório de informática: Áreas	Apresentar o *software Geogebra* para a turma; Estudar somas inferiores e superiores; Calcular áreas de triângulos e regiões irregulares aproximando por meio de somas infinitas.	EOP e EOI
Atividade IX sala	Integral definida	Definir integrais definidas; Relacionar algumas integrais definidas com a área da região limitada pela função em algum intervalo; definir o Teorema Fundamental do Cálculo.	EOT e EOI
Atividade X sala	Calculando as integrais definidas e estudando áreas	Fixar a Integral definida e verificar quais delas podem corresponder à área limitada pela função no intervalo dado.	EOP e EOI
Atividade XI sala: Desafio	Desafio: frações parciais	Rever fatoração de polinômios e frações parciais	EOT e EOI
Atividade XII sala	Integração por decomposição em Frações Parciais	Definir frações parciais; Definir Integração por decomposição em Frações Parciais	EOP, EOT e EOI
Atividade XIII casa	Integração por decomposição em Frações Parciais	Fixar a Técnica de Integração por decomposição em Frações Parciais; Identificar quais das integrais do exercício podem representar áreas.	EOP e EOI

(conclusão)

ATIVIDADE	CONTEÚDO	OBJETIVOS	ESTRATÉGIA /ESTILO
Atividade XIV – sala	Integrais	Identificar qual a técnica adequada para resolução das integrais.	EOP e EOI
Atividade XV casa	Integrais	Identificar qual a técnica adequada para resolução das integrais; Identificar quais das integrais do exercício podem representar áreas.	EOP, EOT e EOI
Atividade XVI sala	Integrais	Estudar áreas através de integrais definidas	EOP
Atividade XVII: sala Avaliação	Integrais	Certificar a aprendizagem; conhecer as técnicas de integração estudadas; calcular integrais definidas e indefinidas; representar graficamente uma integral definida; utilizar integrais em exercícios aplicados.	EOP, EOT e EOI

Fonte: Elaborado pela autora

5 ANÁLISES DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos os principais resultados da pesquisa desenvolvida. Para cada atividade indicamos o conteúdo matemático abordado e os objetivos principais, de acordo com as estratégias de aprendizagem que se pretendia desenvolver, tendo como meta a aprendizagem com entendimento.

Para as atividades a serem desenvolvidas em sala, cada aluno recebia uma folha com as tarefas propostas que eram resolvidas em duplas. O registro era feito de forma duplicada, de forma que uma folha de respostas era entregue para a professora pesquisadora e a outra mantida com a dupla para as discussões posteriores. Num segundo momento, eram feitos a socialização das ideias e debate. Nessa fase, cada dupla tinha em mãos uma folha com as suas soluções, sendo convidada a apresentar as resoluções, dúvidas e questionamentos.

Terminada a socialização, os alunos recebiam uma folha contendo outras atividades a serem resolvidas em casa e em dupla e entregues ao professor na aula seguinte.

Os aspectos mais importantes na avaliação do trabalho consistiam na participação e no empenho em resolver as tarefas e, assim, os alunos eram orientados a não se preocuparem apenas com a resposta obtida, mas com as ideias para a resolução da mesma e as justificativas dos procedimentos adotados.

A análise dos resultados foi qualitativa. Na análise qualitativa das respostas, buscamos identificar semelhanças e diferenças na forma de os alunos se expressarem, justificando, ou não, as tarefas realizadas. No processo de análise, a partir dos referenciais teóricos e do desenho metodológico da pesquisa, consideramos os tipos de estratégias de aprendizagem incentivadas pela tarefa e as características das respostas, que permitiram evidenciar o entendimento matemático da técnica de integração em destaque.

5.1 Atividade I: Descobrindo a operação de integração

A Atividade I compreendeu oito tarefas. As tarefas foram elaboradas objetivando que os alunos pudessem identificar padrões no cálculo de integrais indefinidas; construir a tabela de integrais imediatas e identificar a relação entre as operações de derivação e integração.

Iniciamos a atividade apresentando a definição de função primitiva, exemplificando e propondo três tarefas que incentivavam o uso de estratégias de aprendizagem com uma orientação investigativa. Para cada tarefa era solicitada uma justificativa da resposta apresentada, com o objetivo de incentivar a estratégia de aprendizagem com orientação teórica.

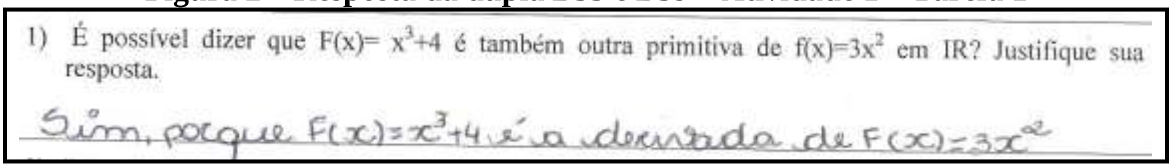
Figura 1 – Atividade I- Tarefas 1, 2 e 3

DEFINIÇÃO 1: Uma função F é uma primitiva (antiderivada) de f em um intervalo I se F'(x) = f(x) para qualquer x em I. Assim, por exemplo, sabemos que $F(x) = x^3$ é uma primitiva de $f(x) = 3x^2$ em IR, uma vez que $F'(x) = 3x^2$ em IR.
1)É possível dizer que $F(x) = x^3+4$ é também outra primitiva de $f(x) = 3x^2$ em IR? Justifique sua resposta.
2)Dê mais dois exemplos de primitivas de $f(x) = 3x^2$ em IR. Justifique sua resposta.
3)Determine uma primitiva para a função $f(x) = x^3$ em IR. Justifique sua resposta.

Fonte: Elaborada pela autora

De modo geral os alunos não apresentaram dificuldades na resolução das tarefas. Entretanto, a etapa de justificar a resposta foi omitida por muitos e considerada difícil. Na Figura 2, percebemos a falta de rigor matemático ou, talvez, a falta de atenção da dupla ao confundir derivada e primitiva.

Figura 2 – Resposta da dupla B35 e B39 – Atividade 1 – Tarefa 1

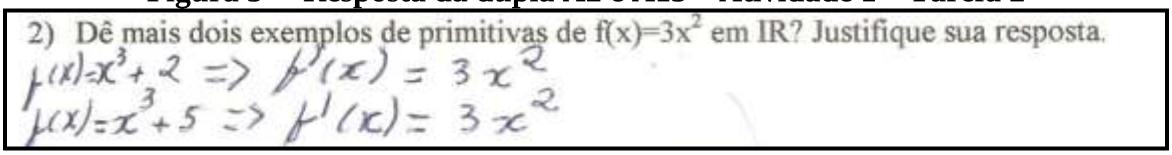

1) É possível dizer que $F(x)= x^3+4$ é também outra primitiva de $f(x)=3x^2$ em IR? Justifique sua resposta.

Sim, porque $F(x)=x^3+4$ é a derivada de $F(x)=3x^2$

Fonte: Dados da pesquisa

Todas as duplas, tanto da turma A quanto da turma B, acertaram a Tarefa 2. A Figura 3 ilustra a solução justificada por uma das duplas.

Figura 3 – Resposta da dupla A2 e A13 – Atividade 1 – Tarefa 2


2) Dê mais dois exemplos de primitivas de $f(x)=3x^2$ em IR? Justifique sua resposta.

$f(x)=x^3+2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

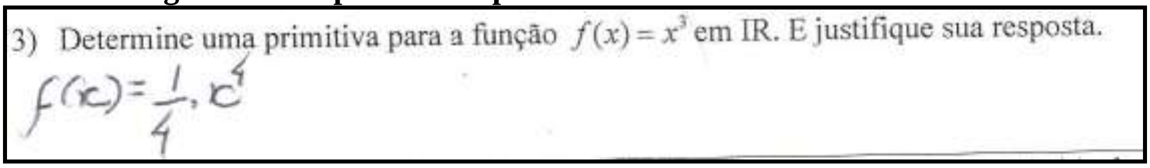
$f(x)=x^3+5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla A2 e A13 da turma A, entendendo que a constante de integração poderia ser um número qualquer, apresentou os exemplos: f(x) = 2+ x^3 e f(x) = x^3 + 5, mas não justificou a resposta.

A falta de justificativa das tarefas, evidenciada nos registros de seis duplas da turma B, ao resolverem a Tarefa 3, demonstra que houve pouco envolvimento dos alunos na articulação dos conceitos matemáticos ou na reflexão sobre o seu aprendizado. Registrar por escrito que a primitiva dada era correta, porque sua derivada coincidia com a função original fornecida, não parece ter sido uma preocupação dos alunos, objetivando o entendimento dos procedimentos realizados, conforme percebemos na Figura 4, que apresenta a resposta de apenas uma dupla, mas que ilustra o tipo de resposta usual apresentada pelos estudantes.

Figura 4 – Resposta da dupla B15 e B32 – Atividade I – Tarefa 3


3) Determine uma primitiva para a função $f(x) = x^3$ em IR. E justifique sua resposta.

$f(x) = \frac{1}{4} . x^4$

Fonte: Dados da pesquisa

Na sequência dos trabalhos, apresentamos a definição de integral indefinida e solicitamos aos alunos que resolvessem três integrais indefinidas, justificando suas respostas, de maneira a incentivar o desenvolvimento de estratégias de aprendizagem com orientação teórica. A Tarefa 4 tem como objetivo que o acadêmico associe a primitiva da função com a integral indefinida.

Figura 5 – Atividade I – Tarefa 4

4)Calcule a integral indefinida para cada função abaixo e justifique sua resposta:

$a)\int x^4 dx$

$b)\int x^2 dx$

$c)\int (x+1)dx$

Fonte: Elaborada pela autora

A maioria das duplas não teve dificuldades em resolvê-la. Novamente as duplas não se preocuparam em justificar as respostas dadas, não demonstrando desempenho de entendimento, como “oferecer explicações”, de acordo com Perkins (1993).

Na Tarefa 5 foi proposto aos alunos que completassem a tabela de integrais imediatas a partir da tabela de derivadas. A resolução da mesma não apresentou dificuldades e/ou problemas. A falta de justificativas foi observada também na resolução dessa tarefa, talvez pela falta de hábito de explicar os procedimentos adotados para resolver uma questão de Matemática.

A Tarefa 6 teve como objetivo introduzir a propriedade da integral da soma. Esperávamos que os alunos percebessem que a propriedade estudada para derivada, permanecia válida para o cálculo da integral.

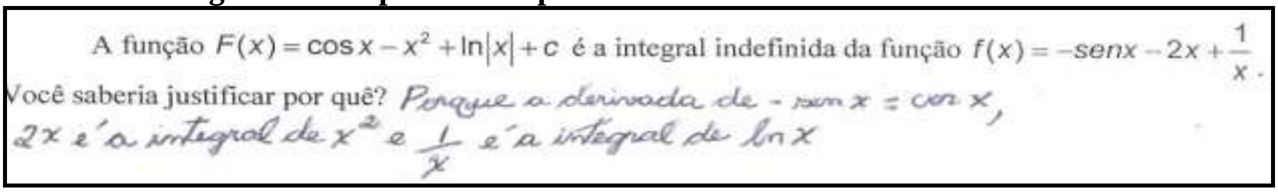
Figura 6 – Atividade I – Tarefa 6

6)A função $F(x) = \cos x - x^2 + \ln|x| + c$ é a integral indefinida da função $f(x) = -senx - 2x + \dfrac{1}{x}$. Você saberia justificar por quê?

Fonte: Elaborada pela autora

Algumas duplas confundiram integração com derivação, o que pudemos identificar por meio das justificativas das respostas apresentadas (FIG.7).

Figura 7 – Resposta da dupla B14 e B24 Atividade I – Tarefa 6



A função $F(x) = \cos x - x^2 + \ln|x| + c$ é a integral indefinida da função $f(x) = -senx - 2x + \dfrac{1}{x}$.
Você saberia justificar por quê? Porque a derivada de $-sen\,x = cos\,x$, $2x$ é a integral de x^2 e $\dfrac{1}{x}$ é a integral de $ln\,x$

Fonte: Dados da pesquisa

As Tarefas 7e 8 foram elaboradas com o objetivo de incentivar o desenvolvimento da estratégia de aprendizagem com orientação investigativa.

Figura 8 – Atividade I – Tarefa 7

7)***Desafio***: Encontre a primitiva mais geral de $f(x) = 2\cos x + \sqrt{x} - 3\sec^2 x$, justificando sua resposta.

Fonte: Elaborada pela autora

Na Tarefa 7, o objetivo era que os alunos retomassem o que haviam aprendido por meio das questões anteriores, utilizando a tabela que foi preenchida na Tarefa 5, e as propriedades relativas à integral da soma de duas funções e da integral de uma função multiplicada por uma constante, justificando adequadamente as etapas de resolução.

Entretanto, nem todas as duplas conseguiram estabelecer as relações adequadas, lançando mão de conhecimentos anteriores. (FIG. 9)

Figura 9 – Resposta da dupla A8 e A9 – Atividade I – Tarefa 7

Desafio: Encontre a primitiva mais geral de $f(x)=2\cos x+\sqrt{x}-3\sec^2 x$

Justificando sua resposta.

$F(x)=(-\operatorname{sen} x)^2+\sqrt{x} \quad -3\cdot tg\, x$

Fonte: Dados da pesquisa

A Tarefa 8 apresentava um problema de aplicação da integral indefinida. Para a resolução dessa o aluno teria que articular conhecimentos novos e anteriores.

Figura 10 – Atividade I – Tarefa 8

8)***Desafio***: Uma partícula desloca-se sobre o eixo y e sabe-se que no instante t, t ≥ 0, a velocidade é v(t) $=\dfrac{dy}{dt}=2t+1$. Sabe-se ainda que no instante t = 0, a partícula encontra-se na posição y = 1. Determine a posição y = y(t) da partícula no instante t.

Fonte: Elaborada pela autora

Somente uma dupla conseguiu resolver corretamente o desafio. A dupla demonstrou o entendimento da operação de integração, justificando detalhadamente as etapas da resolução (FIG.11).

Figura 11 – Resposta da dupla A6 e A14 – Atividade I – Tarefa 8

Desafio: Uma partícula desloca-se sobre o eixo y e sabe-se que no instante t, t≥0, a velocidade é $v(t)=\dfrac{dy}{dt}=2t+1$. Sabe-se ainda que no instante t = 0 a partícula encontra-se na posição y = 1. Determine a posição y = y(t) da partícula no instante t.

$v(t)=y'=2t+1+c$

$y(t)=t^2+t+C \rightarrow 1=0^2+0+C$

$C=1$

$\boxed{y(t)=t^2+t+1}$

$y=0^2+0+1$

$Y=1$

a antiderivada de $2t+1$ é t^2+t quando $y=1$ e $t=0$ C fica valendo 1 então chegamos a formula

$y(t)=t^2+t+1$

Fonte: Dados da pesquisa

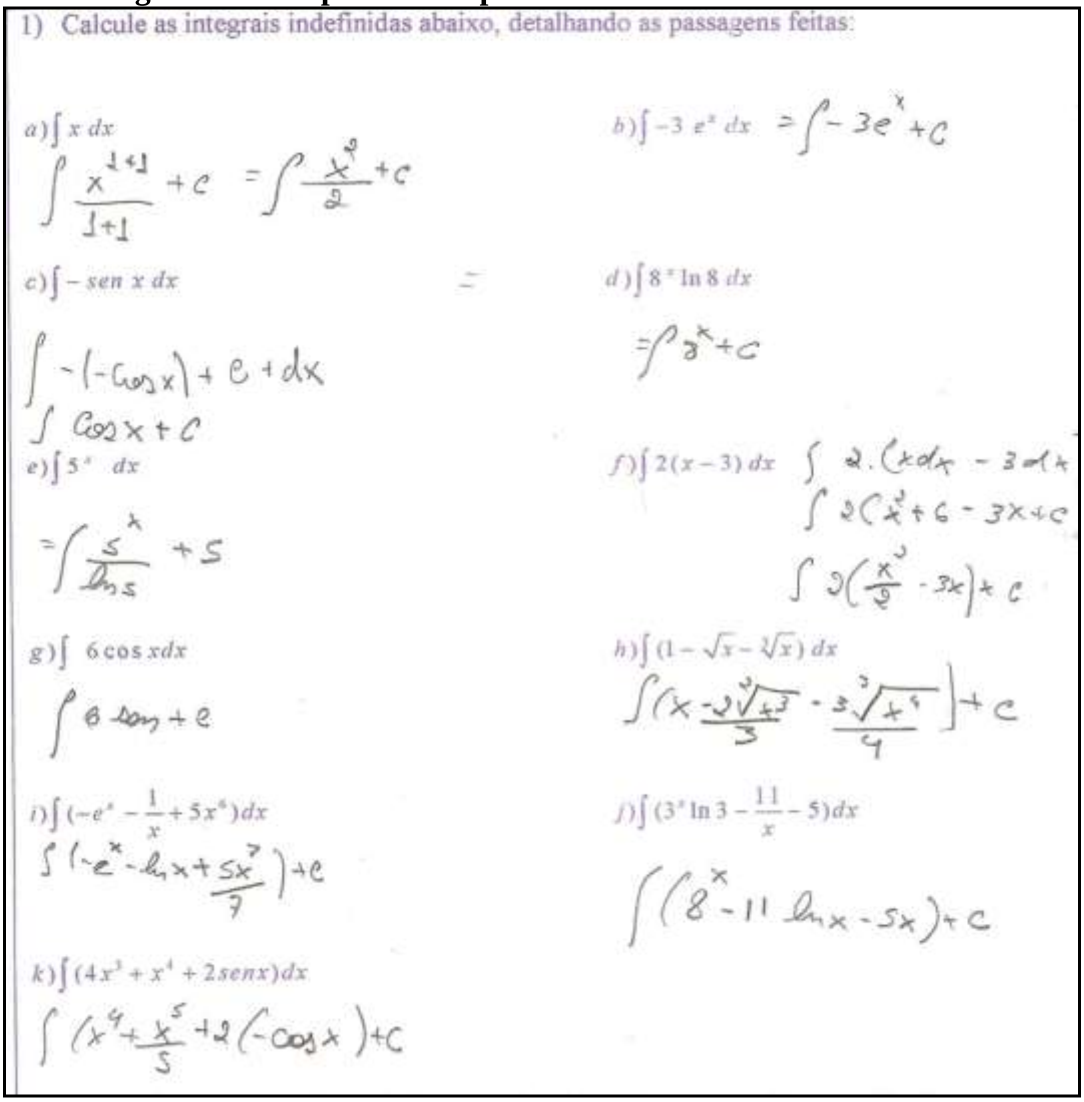
5.2 Atividade II: Fixando as integrais imediatas e introduzindo integrais por substituição simples

A Atividade II foi composta por duas partes A primeira parte possuía uma tarefa com onze alíneas com integrais com o objetivo de fixar as integrais imediatas. Já a segunda parte era composta por três tarefas que tinham como objetivo introduzir a técnica de integração por substituição simples.

Na primeira parte da Atividade II, a Tarefa 1 incentiva o estilo de aprendizagem com orientação prática e também teórica, uma vez que tinham que detalhar as passagens.

A turma A não teve dificuldades em resolver essa tarefa, havendo apenas alguns erros e/ou confusões em relação à simbologia. A seguir um exemplo da dupla A4 e A5 para ilustrar tais problemas. (FIG. 12).

Figura 12 – Resposta da dupla A4 e A5 – Atividade II– Tarefa 1


1) Calcule as integrais indefinidas abaixo, detalhando as passagens feitas:

a) $\int x\,dx$

b) $\int -3\,e^x\,dx$

c) $\int -sen\,x\,dx$

d) $\int 8^x \ln 8\,dx$

e) $\int 5^x\,dx$

f) $\int 2(x-3)\,dx$

g) $\int 6\cos x dx$

h) $\int (1-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\,dx$

i) $\int (-e^x - \frac{1}{x} + 5x^6)dx$

j) $\int (3^x \ln 3 - \frac{11}{x} - 5)dx$

k) $\int (4x^3 + x^4 + 2senx)dx$

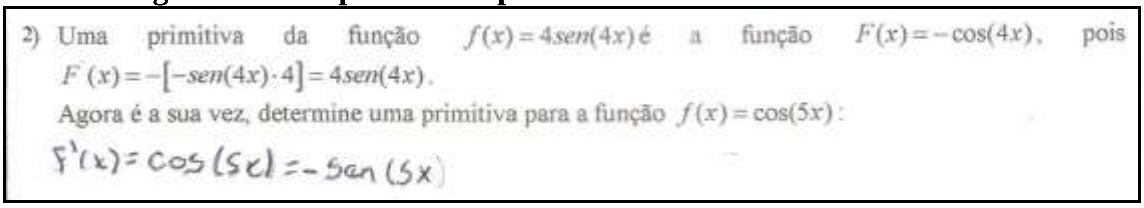
Fonte: Dados da pesquisa

A turma B também não teve problemas com a solução correta da Tarefa 1, salvo alguns problemas com a simbologia ou erros de sinal.

Na segunda parte da Atividade II, almejávamos a que os alunos fizessem analogia em integrar funções compostas com as integrais imediatas e derivando a primitiva para comprovar o resultado. Para isso, incentivamos a estratégia de ensino que utilizasse o estilo de aprendizagem com orientação mais investigativa, mas também teria que utilizar o estilo com orientação teórico para justificar as respostas.

Na turma A, nesta segunda parte da Atividade, houve duplas com dificuldades em calcular, por exemplo, a primitiva da função $f(x) = \cos(5x)$. Na Figura 13, pode ser verificada como a dupla A1 e A17 derivaram a função derivada de forma incorreta.

Figura 13 – Resposta da dupla A1 e A17 – Atividade II – Tarefa 2



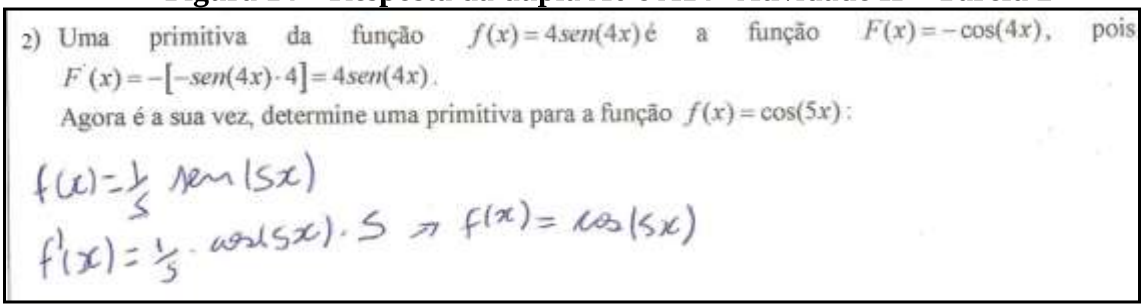
2) Uma primitiva da função $f(x) = 4sen(4x)$ é a função $F(x) = -\cos(4x)$, pois $F'(x) = -[-sen(4x)\cdot 4] = 4sen(4x)$.
Agora é a sua vez, determine uma primitiva para a função $f(x) = \cos(5x)$:

$f'(x) = \cos(5x) = -sen(5x)$

Fonte: Dados da pesquisa

Porém, houve duplas que entenderam a ideia de calcular uma primitiva e escreveram corretamente a justificativa, por exemplo, a A6 e A14, conforme a Figura 14.

Figura 14 – Resposta da dupla A6 e A14– Atividade II – Tarefa 2



2) Uma primitiva da função $f(x) = 4sen(4x)$ é a função $F(x) = -\cos(4x)$, pois $F'(x) = -[-sen(4x)\cdot 4] = 4sen(4x)$.
Agora é a sua vez, determine uma primitiva para a função $f(x) = \cos(5x)$:

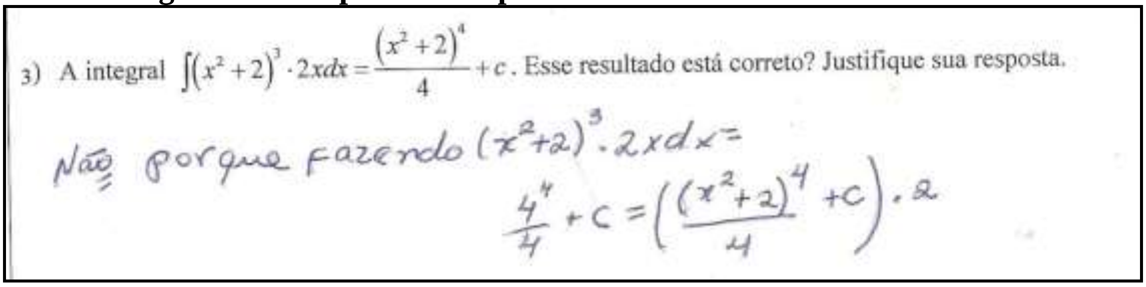
$f(x) = \frac{1}{5}\, sen(5x)$

$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot \cos(5x) \cdot 5 \Rightarrow f(x) = \cos(5x)$

Fonte: Dados da pesquisa

A metade das duplas da turma B teve dificuldades em determinar uma primitiva para as funções $f(x) = (x^2 + 2)^3$, por exemplo, a dupla B4 e B21.

Figura 15 - Resposta da dupla B4 e B21 – Atividade II – Tarefa 3



3) A integral $\int (x^2+2)^3 \cdot 2xdx = \frac{(x^2+2)^4}{4} + c$. Esse resultado está correto? Justifique sua resposta.

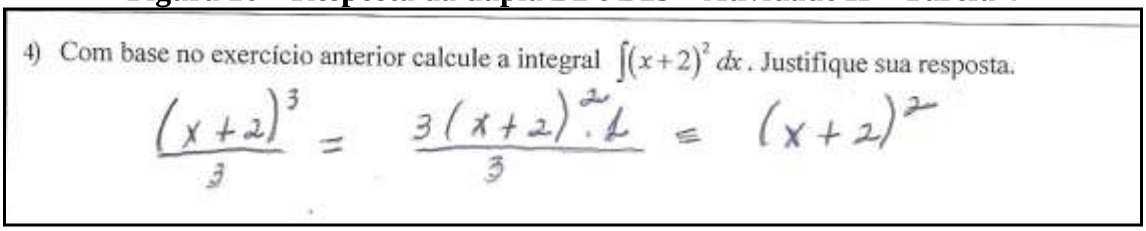
Não porque fazendo $(x^2+2)^3 \cdot 2xdx =$

$\frac{4^4}{4} + C = \left(\frac{(x^2+2)^4}{4} + C\right) \cdot 2$

Fonte: Dados da pesquisa

A Tarefa 4 solicitava o cálculo da integral $\int (x+2)^2 dx$. A turma B não teve dificuldade para resolver, apenas não simbolizou corretamente. Na Figura 16, observa-se a resposta da dupla B2 e B23.

Figura 16 – Resposta da dupla B2 e B23 – Atividade II – Tarefa 4



4) Com base no exercício anterior calcule a integral $\int (x+2)^2 \, dx$. Justifique sua resposta.

$\frac{(x+2)^3}{3} = \frac{3(x+2)^2 \cdot 1}{3} = (x+2)^2$

Fonte: Dados da pesquisa

5.3 Atividade III: Integração por Substituição Simples

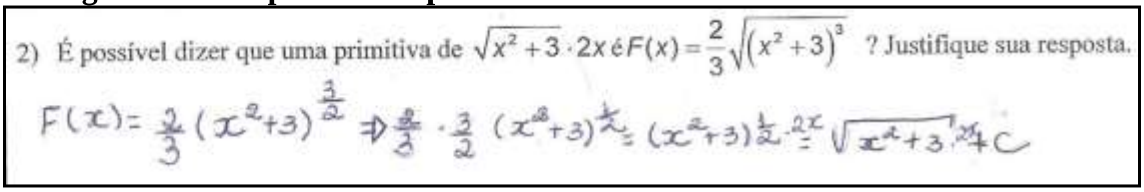
O objetivo dessa atividade é ensinar a técnica de integração por substituição simples. Iniciamos a atividade informando que existem funções para as quais não era possível determinar uma primitiva por integrais imediatas e exemplificamos com a integral $\int \sqrt{(x^2+3)}\,2xdx$ onde $f(g(x)) = \sqrt{(x^2+3)}$, $g(x) = (x^2+3)$ e $h(x) = 2x$.

Na Tarefa 1, perguntamos se havia alguma relação entre g(x) e h(x). Nesse caso usamos a estratégia de aprendizagem que incentiva o estilo de aprendizagem com orientação investigativa. Todas as duplas, tanto da turma A quanto da turma B, disseram que h(x) era a derivada de g(x).

Na Tarefa 2, perguntamos se $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}$ era uma primitiva da função integrando dada no exemplo. Esperávamos que os alunos derivassem a primitiva usando a Regra da Cadeia, ou seja, a derivada de função composta para verificar se estava correto. E dessa forma incentivamos os estilos com orientação prática e teórica.

Na turma B, das dezessete duplas que respondem a Atividade III, onze delas atingiram nossa expectativa fazendo a derivada da primitiva, conforme a Figura 17, em que se demonstra a resposta da dupla B35 e B39.

Figura 17 – Resposta da dupla B35 e B39 – Atividade III – Tarefa 2

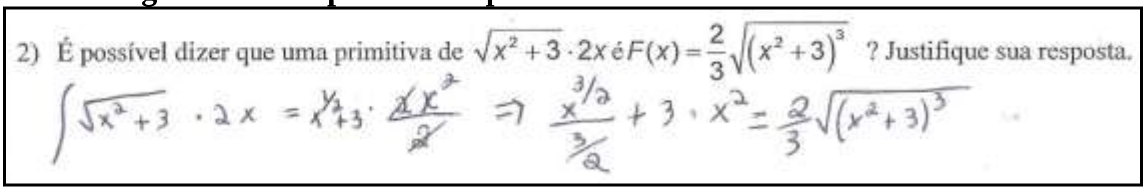

2) É possível dizer que uma primitiva de $\sqrt{x^2+3}\cdot 2x$ é $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}$? Justifique sua resposta.

$F(x)=\frac{2}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+3)^{\frac{1}{2}} = (x^2+3)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x = \sqrt{x^2+3}\cdot 2x + C$

Fonte: Dados da pesquisa

As outras seis duplas não conseguiram chegar ao resultado correto, algumas por não derivarem corretamente, outras por não entenderem que $\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)\ \forall x.$ Como exemplo, a resposta da dupla B14 e B24 na Figura 18.

Figura 18 – Resposta da dupla B14 e B24 – Atividade III – Tarefa 2


2) É possível dizer que uma primitiva de $\sqrt{x^2+3}\cdot 2x$ é $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}$? Justifique sua resposta.

$\int \sqrt{x^2+3}\cdot 2x = x^{1/2}+3\cdot\frac{2x^2}{2} \Rightarrow \frac{x^{3/2}}{3/2}+3\cdot x^2 = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}$

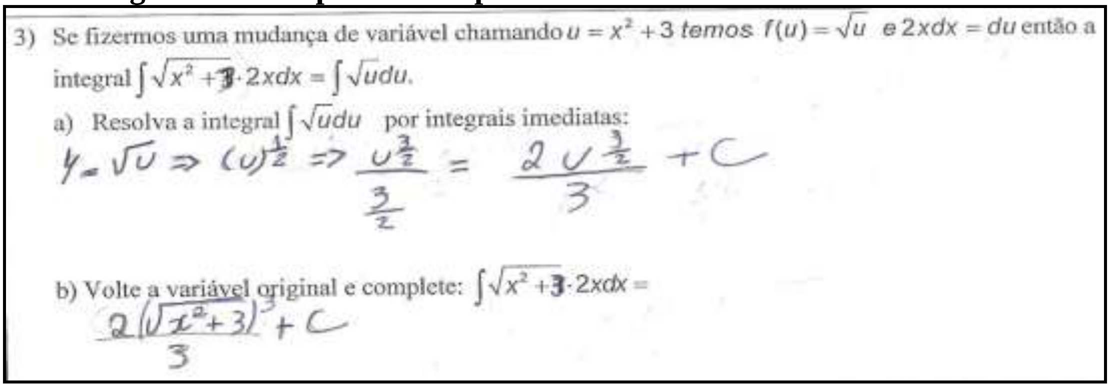
Fonte: Dados da pesquisa

Na turma A houve oito duplas respondentes e todas derivaram corretamente a primitiva.

Na Tarefa 3, objetivando apresentar a mudança de variável, usamos o mesmo exemplo anterior chamando de $u=g(x)$, ou seja, $u=x^2+3$, $f(u)=\sqrt{u}$ e $du=2xdx$, ficando $\int\sqrt{(x^2+3)}2xdx=\int\sqrt{u}du$. Na alínea a, solicitamos a resolução da integral $\int\sqrt{u}du$ e na alínea b, solicitamos o retorno para a variável original o resultado encontrado em a.

De modo geral, nenhuma dupla das turmas A e B tiveram problemas em resolver a integral imediata, tampouco para retornar para a variável original. Como exemplo, a respostada dupla A2 e A13, na Figura 19.

Figura 19 – Resposta da dupla A2 e A13 – Atividade III – Tarefa 3


3) Se fizermos uma mudança de variável chamando $u = x^2 + 3$ temos $f(u) = \sqrt{u}$ e $2xdx = du$ então a integral $\int \sqrt{x^2+3} \cdot 2xdx = \int \sqrt{u}du$.

a) Resolva a integral $\int \sqrt{u}du$ por integrais imediatas:

$y = \sqrt{u} \Rightarrow (u)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

b) Volte a variável original e complete: $\int \sqrt{x^2+3} \cdot 2xdx =$

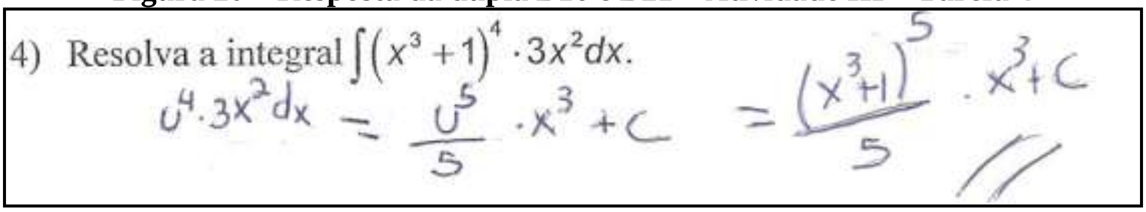
$\frac{2(\sqrt{x^2+3})^3}{3} + C$

Fonte: Dados da pesquisa

Na Tarefa 4, para verificar se os alunos tinham entendido a maneira de fazer a mudança de variável, solicitamos a resolução da integral $\int (x^3+1)^4 3x^2dx$, detalhando as passagens nas alíneas a, b e c.

Na turma B, às sete duplas das dezessete que responderam a atividade faltou entendimento do processo de mudança de variável na resposta da Tarefa 4, como exemplo, citaremos a dupla B16 e B21. (FIG.20)

Figura 20 – Resposta da dupla B16 e B21 – Atividade III – Tarefa 4


4) Resolva a integral $\int (x^3+1)^4 \cdot 3x^2dx$.

$u^4 \cdot 3x^2 dx = \frac{u^5}{5} \cdot x^3 + C = \frac{(x^3+1)^5}{5} \cdot x^3 + C$ //

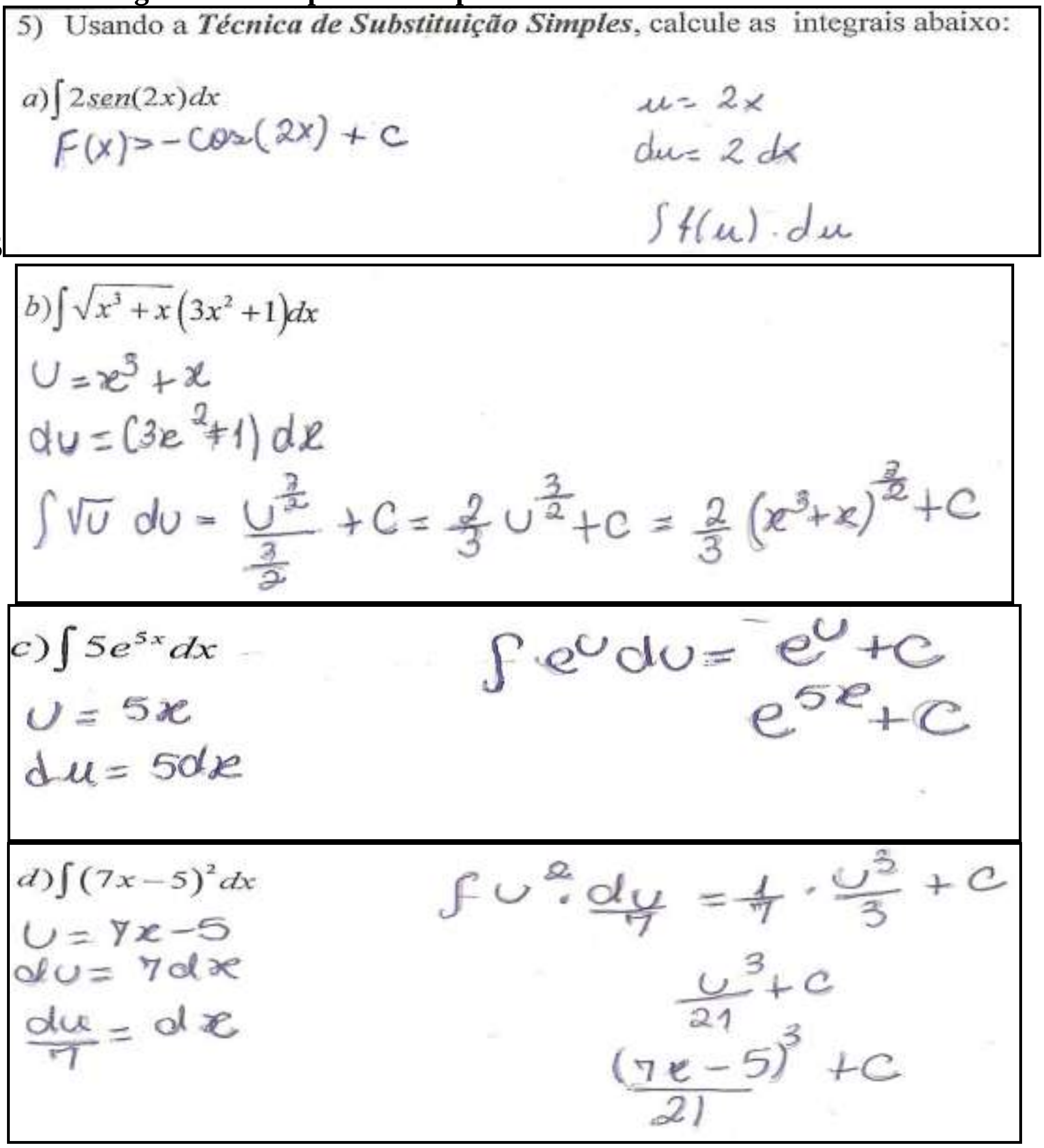
Fonte: Dados da pesquisa

Na turma A, oito duplas responderam a tarefa e apenas duas tiveram problemas com a volta da variável original.

Sustentados pela definição de conhecimento procedimental definido por Hiebert e Lefevre (1986), que afirmam que o conhecimento é constituído de duas partes: a linguagem matemática simbólica ou formal e os algoritmos, ou regras para executar as tarefas matemáticas, enunciamos o teorema da técnica de Substituição Simples e descrevemos a técnica da substituição.

Na Tarefa 5, foi solicitada a resolução de quatro integrais, utilizando a técnica de substituição simples. Nessa tarefa incentivamos uma estratégia de aprendizagem que permite aos alunos que apresentam estilos de aprendizagem com orientação prática, teórica e investigativa para que se identifiquem com a mesma e consigam alcançar o entendimento da técnica. Essa tarefa, na turma B, seis duplas não resolveram. Três duplas resolveram incorretamente a tarefa e oito duplas demonstraram o entendimento da técnica de substituição simples resolvendo corretamente, fazendo a mudança de variável adequada e retornando para a variável original. Cita-se, como exemplo, a resolução da dupla B4 e B22. (FIG. 21).

Figura 21 – Resposta da dupla B4 e B22 – Atividade III –Tarefa 5



5) Usando a ***Técnica de Substituição Simples***, calcule as integrais abaixo:

$a)\int 2sen(2x)dx$

$F(x) = -\cos(2x) + c$

$u = 2x$

$du = 2\,dx$

$\int f(u) \cdot du$

$b)\int \sqrt{x^3+x}\left(3x^2+1\right)dx$

$U = x^3 + x$

$dU = (3x^2+1)\,dx$

$\int \sqrt{U}\,dU = \frac{U^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}U^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^3+x)^{\frac{3}{2}} + C$

$c)\int 5e^{5x}dx$

$U = 5x$

$du = 5dx$

$\int e^U dU = e^U + C$

$e^{5x} + C$

$d)\int (7x-5)^2 dx$

$U = 7x - 5$

$dU = 7dx$

$\frac{du}{7} = dx$

$\int U^2 \cdot \frac{dU}{7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{U^3}{3} + C$

$\frac{U^3}{21} + C$

$\frac{(7x-5)^3}{21} + C$

Fonte: Dados da pesquisa

As duplas da turma A usaram todo o tempo da aula com as tarefas anteriores, não conseguindo resolver a Tarefa 5. Levaram para casa para terminarem, porém, não trouxeram de volta.

No desenvolvimento das atividades, pudemos perceber que na turma B havia duplas descompromissadas com seus estudos, não se esforçando para aprender o conteúdo proposto pela ementa do curso, dificultando ainda mais o papel do professor e o alcance dos objetivos das atividades que é, em resumo, o entendimento das técnicas de integração.

5.4 Atividade IV para casa e sala: Integração por substituição simples

Essa atividade foi elaborada com o objetivo de fazer que os alunos pudessem reconhecer as integrais que podem ser resolvidas usando a técnica de substituição simples.

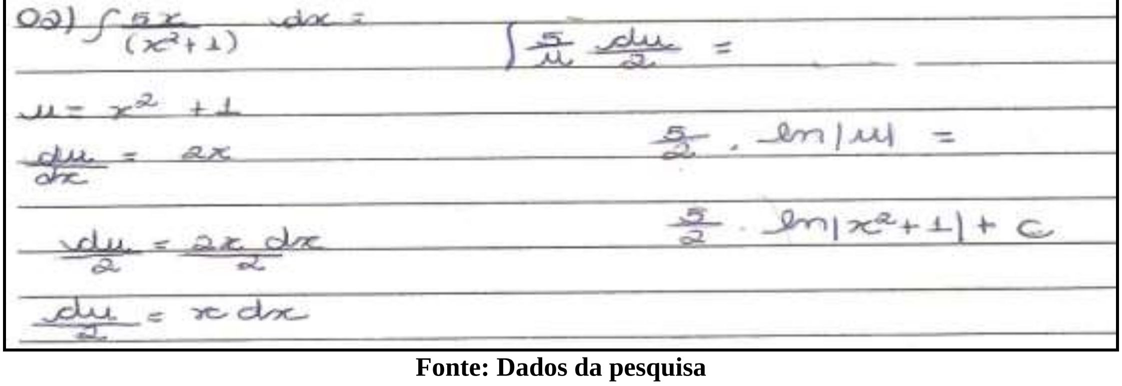
A atividade quatro foi elaborada para dois momentos, o primeiro como pesquisa a ser realizada em casa, em que as duplas deveriam listar cinco integrais que possam ser resolvidas usando a técnica substituição simples, como fonte de pesquisa, foram sugeridos livros de Cálculo I. No segundo momento, em sala, as duplas deveriam trocar as listas trazidas de casa, resolvê-las e depois corrigi-las.

Consideramos que essa atividade foi muito rica para a construção do conhecimento com entendimento, pois, além da pesquisa, houve o momento de interação entre as duplas na resolução e correção das integrais.

Com essa atividade, proporcionamos aos acadêmicos, o que Perkins (1998), ao explorar o significado de entendimento, chamou de “desempenhos de entendimento” e que apresentava três características principais: oferecer explicações; articular conhecimento relacional; exibir uma rede de explicação flexível e que pudesse ser atualizada.

Vamos mostrar a seguir dois exemplos de integrais e suas resoluções. O primeiro exemplo foi proposto pela dupla B5 e B9 e foi resolvido pela dupla B15 e B32 da turma B.O segundo exemplo foi proposto pela dupla A10 e A15 e foi resolvido pela dupla A3 e A12 da turma A.(FIG. 22)

Figura 22 – Resposta da dupla B15 e B32 – Atividade IV


02) $\int \frac{5x}{(x^2+1)} dx =$

$u = x^2 + 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2} = \frac{2x\,dx}{2}$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

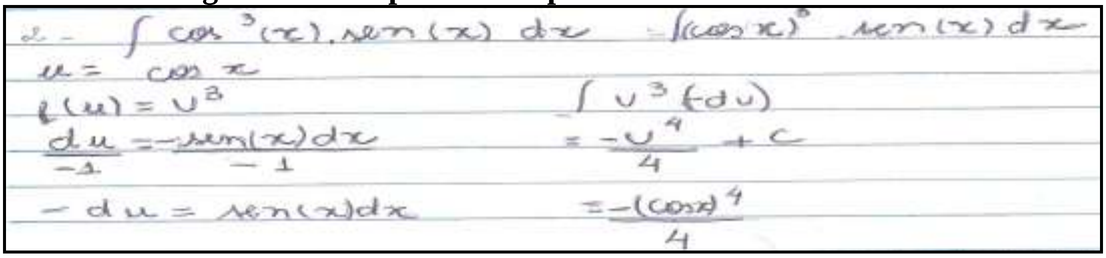
$\int \frac{5}{u} \frac{du}{2} =$

$\frac{5}{2} \cdot \ln|u| =$

$\frac{5}{2} \cdot \ln|x^2+1| + C$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 23 – Resposta da dupla A3 e A12 – Atividade IV



Fonte: Dados da pesquisa

5.5 Atividade V para casa: Fixando a Integração por Substituição Simples

Essa atividade foi elaborada para casa com o objetivo de fixar a técnica substituição simples. O estilo de aprendizagem mais favorecido nessa atividade foi o estilo com orientação prática.

A atividade foi composta de duas tarefas: a primeira dada uma lista com seis integrais e foi questionado o que havia de comum entre elas. Esperávamos que as duplas dissessem que todas elas podiam ser resolvidas utilizando a mesma técnica, a substituição simples. Na segunda tarefa solicitamos a resolução daquelas.

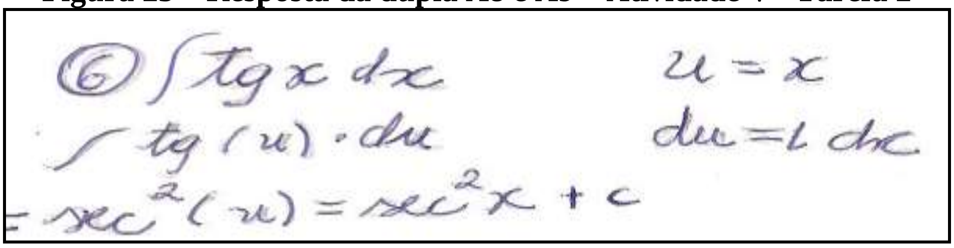
Figura 24 – Integrais propostas – Atividade V

$\int e^{x^2-4x}(2x-4)dx$	$\int (x^2+3)sen(x^3+9x)dx$	$\int \frac{5x^4-4x^3}{x^5-x^4}dx$
$\int e^x \cos(e^x)\,dx$	$\int \sqrt{x+1}\,dx$	$\int tg\,x dx$

Fonte: Dados da pesquisa

Na turma A, apenas cinco duplas responderam a atividade e todas elas erraram a integral $\int tgxdx$, isso se justifica pelo fato de conhecerem pouco sobre trigonometria e não substituírem $tgx = \frac{senx}{\cos x}$. Como exemplo, a resposta da dupla A8 e A9 na Figura 25.

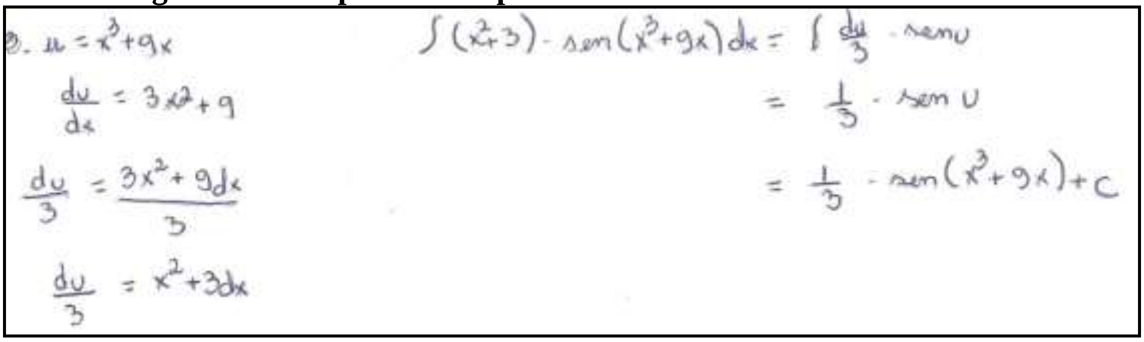
Figura 25 – Resposta da dupla A8 e A9 – Atividade V– Tarefa 2



Fonte: Dados da pesquisa

Na turma B, dezessete duplas resolveram a atividade sem grandes problemas com a técnica, exceto a integral $\int (x^2+3)sen(x^3+9x)dx$, em que quinze duplas erraram sua resposta por não integrarem $\int \frac{1}{3} senudu$. Na Figura 26, como exemplo, a resolução da dupla B29 e B42.

Figura 26 – Resposta da dupla B29 e B42– Atividade V – Tarefa 2



Fonte: Dados da pesquisa

5.6 Atividade VI: Técnica de integração por partes

O objetivo dessa atividade é ensinar a técnica de integração por partes e, para isso, mostramos um exemplo de integral $\int xe^x dx$ que não pode ser resolvida utilizando a técnica de substituição simples.

Em princípio, utilizamos a estratégia de aprendizagem que incentiva o estilo de aprendizagem com orientação teórica, deduzindo a fórmula de integração por partes baseada na derivação de produto de duas funções.

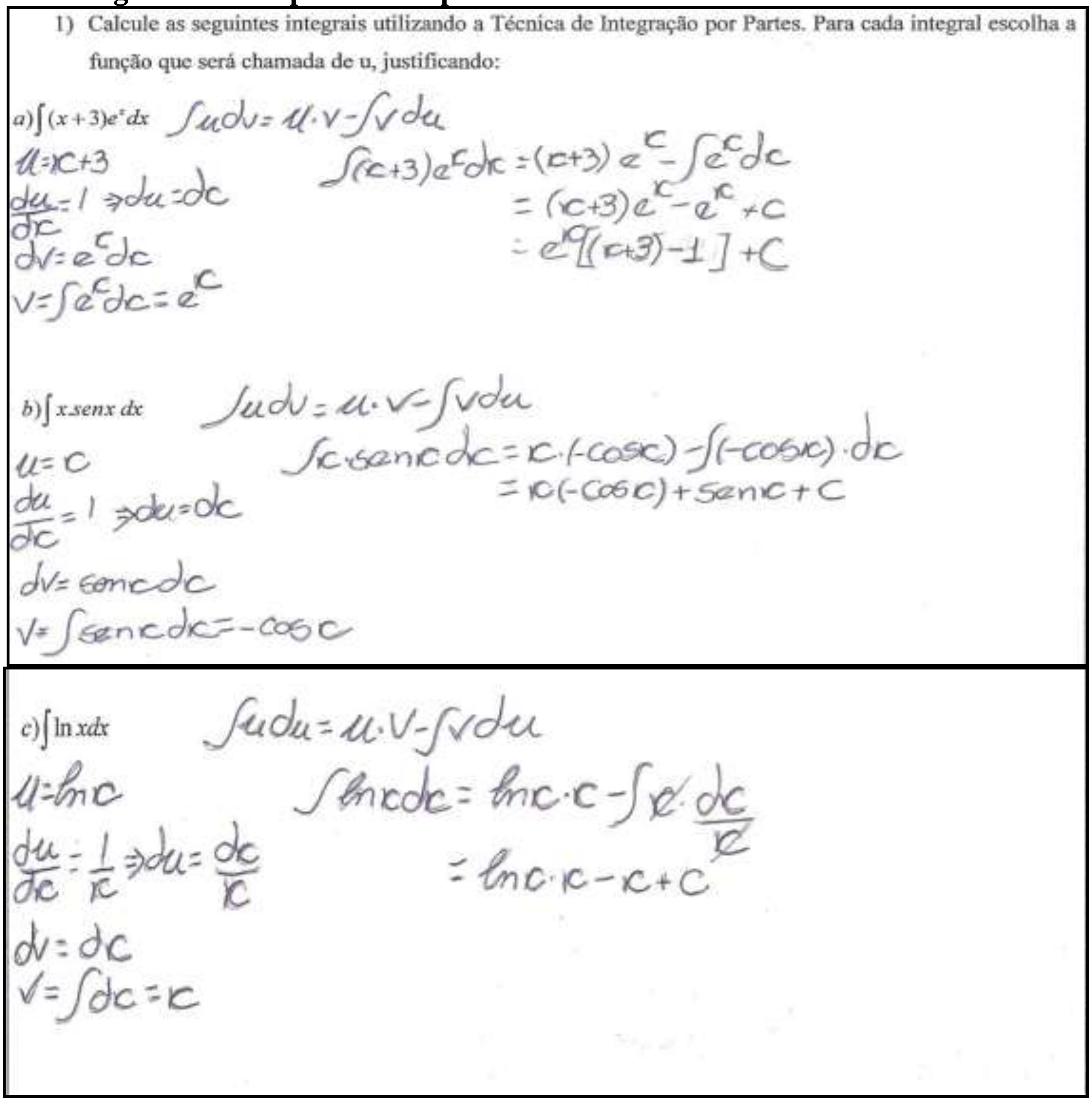
Em seguida, resolvemos a integral dada como exemplo, detalhando as passagens na utilização da fórmula da integração por partes.

Propomos a Tarefa 1 com três alíneas, que consistiam em integrais para serem resolvidas, utilizando a técnica de integração por partes, incentivando assim o estilo com orientação prática.

Na turma B, quatro duplas demonstraram por meio da resolução das tarefas que entenderam a utilização da técnica, pois fizeram a escolha adequada da variável *u*. Outras quatro duplas acertaram duas das três integrais propostas. Os dois principais erros foram de sinal na integração de $\int senxdx$ e o outro foi na integral $\int \ln xdx$, onde os alunos fizeram a escolha adequada u=lnx, porém, não souberam continuar a resolução. Oito duplas demonstraram ainda não entender a técnica, pois erraram duas das três integrais e também houve uma dupla que não resolveu as integrais propostas.

Na Figura 27, como exemplo, a resolução correta da dupla B8 e B31.

Figura 27 – Resposta da dupla B8 e B31 – Atividade VI – Tarefa 1



1) Calcule as seguintes integrais utilizando a Técnica de Integração por Partes. Para cada integral escolha a função que será chamada de u, justificando:

a) $\int (x+3)e^x dx$ $\quad \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

$u = x+3$

$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx$

$v = \int e^x dx = e^x$

$\int (x+3)e^x dx = (x+3)e^x - \int e^x dx$

$= (x+3)e^x - e^x + C$

$= e^x[(x+3) - 1] + C$

b) $\int x\,sen x\,dx$ $\quad \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

$u = x$

$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$

$dv = sen x\,dx$

$v = \int sen x\,dx = -\cos x$

$\int x \cdot sen x\,dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot dx$

$= x(-\cos x) + sen x + C$

c) $\int \ln x\,dx$ $\quad \int u\,du = u \cdot v - \int v\,du$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx$

$v = \int dx = x$

$\int \ln x\,dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x}$

$= \ln x \cdot x - x + C$

Fonte: Dados da pesquisa

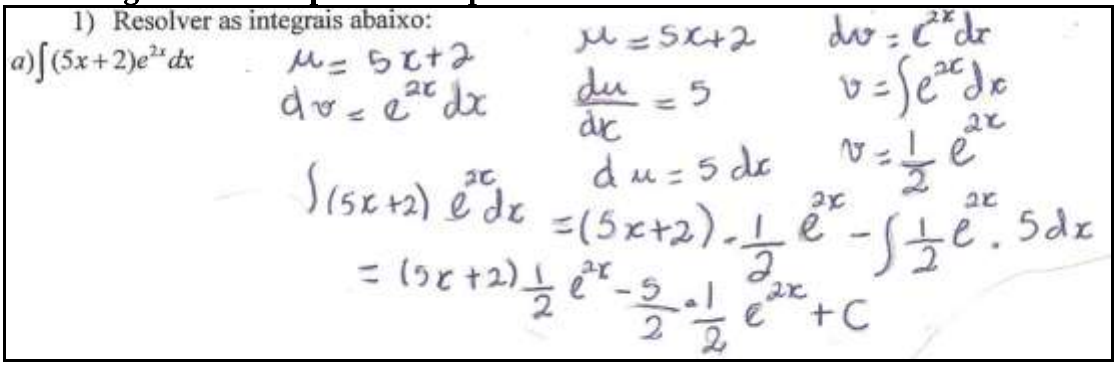
Na turma A, duas duplas demonstraram o entendimento da técnica resolvendo corretamente as três integrais. Outras quatro duplas acertaram parcialmente a tarefa e outras duas duplas acertaram apenas uma integral demonstrando que não adquiriram o entendimento da técnica.

5.7 Atividade VII para casa: Fixando a Técnica de integração por partes

Essa atividade foi elaborada com o objetivo de fixar a fórmula da técnica de integração por partes. Buscamos nessa atividade incentivar o estilo de aprendizagem com orientação prática, para tanto propusemos quatro tarefas:

Na primeira tarefa, solicitamos a resolução de cinco integrais utilizando a Técnica de integração por partes. As duplas, tanto da turma A como da turma B, não tiveram dificuldades para a resolução dessa tarefa. Nas Figuras 28, 29, 30 e 31, as respostas de quatro duplas.

Figura 28 – Resposta da dupla A8 e A9 – Atividade VII – Tarefa 1 a



1) Resolver as integrais abaixo:

a) $\int (5x+2)e^{2x}dx$

$\mu = 5x+2$ $\quad dv = e^{2x}dx$

$\mu = 5x+2$ $\quad \frac{du}{dx} = 5$ $\quad du = 5\,dx$

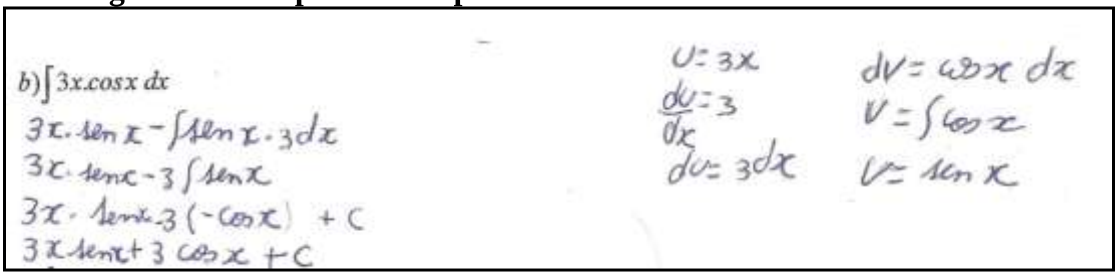
$dv = e^{2x}dx$ $\quad v = \int e^{2x}dx$ $\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$\int (5x+2)e^{2x}dx = (5x+2)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 5dx$

$= (5x+2)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 29 – Resposta da dupla B35 e B39 – Atividade VII – Tarefa 1 b



b) $\int 3x.\cos x\,dx$

$U = 3x$ $\quad \frac{dU}{dx} = 3$ $\quad dU = 3dx$

$dV = \cos x\,dx$ $\quad V = \int \cos x$ $\quad V = \operatorname{sen} x$

$3x\cdot\operatorname{sen}x - \int \operatorname{sen}x\cdot 3dx$

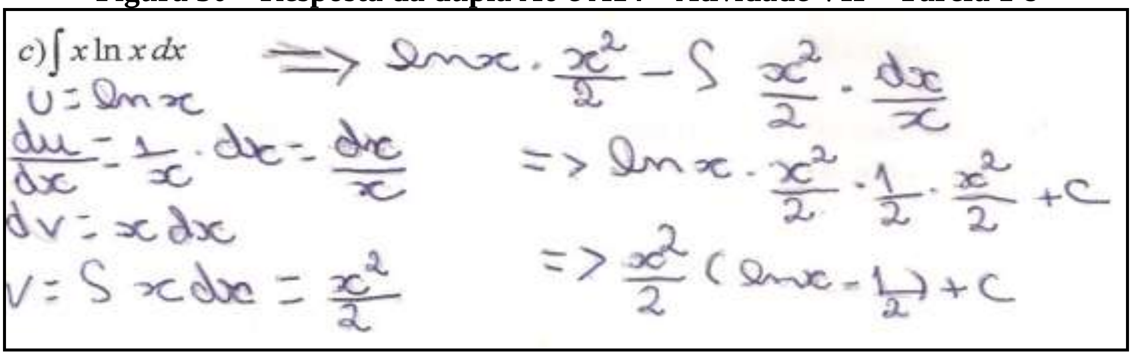
$3x\cdot\operatorname{sen}x - 3\int \operatorname{sen}x$

$3x\cdot\operatorname{sen}x - 3(-\cos x) + C$

$3x\operatorname{sen}x + 3\cos x + C$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 30 – Resposta da dupla A6 e A14 – Atividade VII – Tarefa 1 c



c) $\int x\ln x\,dx \Longrightarrow \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}$

$U = \ln x$

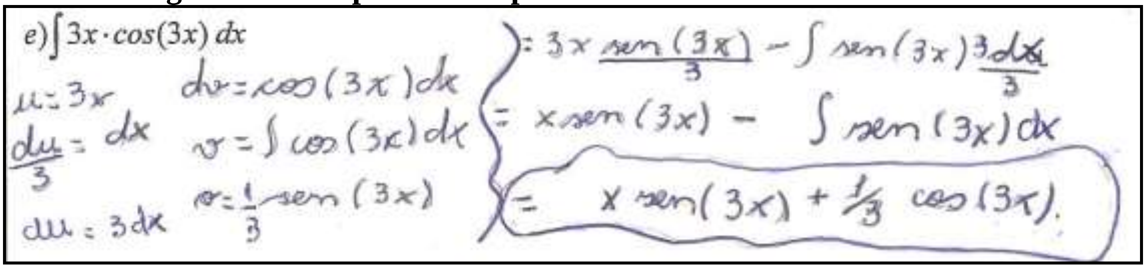
$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\cdot dx = \frac{dx}{x}$ $\quad \Rightarrow \ln x\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$

$dv = x\,dx$

$v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ $\quad \Rightarrow \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 31 – Resposta da dupla B7 e B33 – Atividade VII – Tarefa 1 d



Fonte: Dados da pesquisa

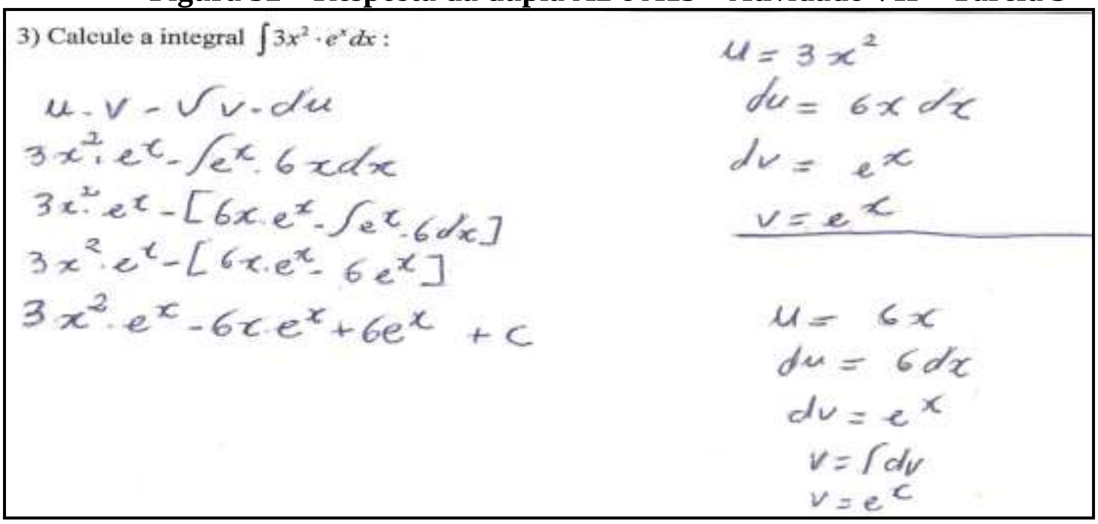
Somente a integral $\int \ln(4x+1))$ nenhuma das duplas conseguiu resolver corretamente, pois nessa, em princípio, teria que usar a técnica substituição simples e depois usar a técnica de Integração por partes.

Em seguida, exemplificamos com a $\int e^x.senx\,dx$ que é uma integral que utiliza a técnica de integração por partes mais de uma vez e, em seguida, apresentamos a sua resolução.

Na Tarefa 2, solicitamos a resolução da mesma integral, fazendo a escolha por $u = e^x$. Nessa tarefa, todas as duplas puderam verificar que a escolha do *u* não alterava o resultado.

Na Tarefa 3, solicitamos a resolução da integral $\int 3x^2 e^x\, dx$, que é uma integral que utiliza a técnica de integração por partes mais de uma vez. Na turma A, apenas a dupla A2 e A13 resolveu corretamente a integral proposta. Na turma B, nenhuma dupla conseguiu resolver corretamente essa integral.

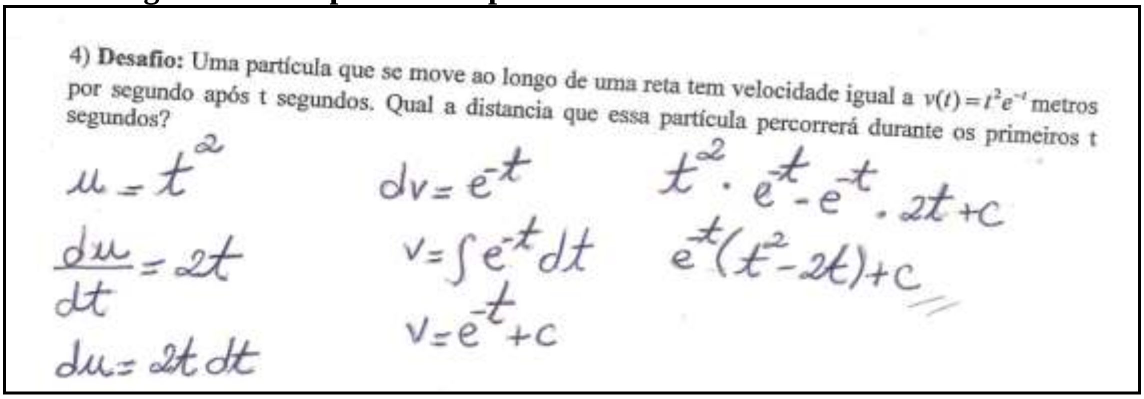
Figura 32 – Resposta da dupla A2 e A13 – Atividade VII – Tarefa 3



Fonte: Dados da pesquisa

Na Tarefa 4 lançamos o desafio: Uma partícula que se move ao longo e uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ m/s após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros t segundos? Essa tarefa a maioria não resolveu e das duplas que resolveram, três erraram apenas o sinal e as demais erraram seu desenvolvimento. Como exemplo, na Figura33, a resolução da dupla B4 e B10:

Figura 33 – Resposta da dupla B4 e B10 – Atividade VII – Tarefa 4



4) Desafio: Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distancia que essa partícula percorrerá durante os primeiros t segundos?

$u = t^2$ $\quad dv = e^{-t}$ $\quad t^2 \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot 2t + C$

$\frac{du}{dt} = 2t$ $\quad v = \int e^{-t} dt$ $\quad e^{-t}(t^2 - 2t) + C$

$v = e^{-t} + C$

$du = 2t\,dt$

Fonte: Dados da pesquisa

5.8 Atividade VIII: Laboratório de Informática – Área

Os objetivos dessa atividade foram apresentar o *software Geogebra* para as turmas A e B, estudar somas inferiores e superiores, calcular áreas de triângulos e regiões irregulares aproximadas por somas infinitas.

Elaboramos essa atividade de forma a incentivar os estilos de aprendizagem com orientação investigativa e prática.

Nessa atividade, os acadêmicos foram levados para o laboratório de informática, onde lhes apresentamos o *software Geogebra*, uma vez que nenhum deles o conhecia. Foi distribuído para cada dupla o roteiro da atividade que faríamos, utilizando o *Geogebra*.

Elaboramos uma tarefa para calcular a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = x + 1$, pelo eixo x e pelo eixo y. Essa área deveria ser aproximada por meio dos comandos chamados somas inferiores e somas superiores, que consistem em subdividir a região em n intervalos formados por retângulos. Depois foi solicitado que o acadêmico repetisse a sequência de comandos para calcular a área da região limitada pela função $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, pelo eixo x e pela reta vertical x = 2.

As duas questões deveriam ser enviadas via *e-mail* para a professora.

Figura 34 – Atividade VIII – Laboratório informática

1.Calcule a área da região plana compreendida pela função $f(x)=x+1$ pelo eixo *x* e pelo eixo *y*.

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO

Aproximação da área sob a reta no intervalo [-1, 0] através das ferramentas do Geogebra:

1.1 Plote o gráfico de parábola f(x) = x + 1, localizando a região A compreendida pela reta, pelo eixo x e pelo eixo y.

1.2 Use o comando *soma inferior* do Geogebra para determinar as somas das áreas dos retângulos cujas bases são 1/n, no intervalo I_1 =[-1, 0], onde *n* representa a quantidade de retângulos (número de partições). Use o comando seletor para definir a variável *n*, no intervalo [0, 100] e incremento 1.

1.3 No *menu opções* do Geogebra, configure *arredondamento* para 5 casas decimais.

1.4 Observe e anote as somas inferiores parciais para n=10, n=50 e n=100.

1.5Visualize as somas inferiores parciais ativando *animação* no seletor.

1.6Utilize o seletor do Geogebra no intervalo de 0 a 100 para fazer uma estimativa da área sob a reta.

1.7Altere o parâmetro *Max* do seletor, respectivamente para 500, 1000, 10000, 100000 e verifique para que valor as *somas inferiores* convergem.

1.8Refaça as etapas anteriores para o comando *Somas Superiores*.

1.9Analisando os resultados das somas inferiores e das somas superiores o que você observa?

1.10Agora use a fórmula da Geometria Euclidiana para calcular a área do triângulo formado pela função dada e pelos eixos *x* e *y*. Compare o resultado com os das somas inferiores e superiores.

1.11Salve as atividades no *menu Arquivo* – Gravar como Área de Trabalho colocando as iniciais da dupla AP_E1, como exemplo, AP são as inicias de Antônio e Paula E1(Exercício 1). Enviar para o e-mail: *carinemoc@yahoo.com.br*

2) Calcule a área da região plana compreendida pela função $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ pelo eixo x e pela reta vertical x = 2 usando as ferramentas do Geogebra. (Faça como o exercício 1)

Fonte: Elaborada pela autora

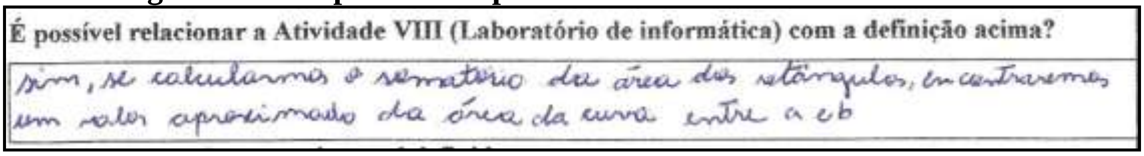
5.9 Atividade IX: Integral definida

Elaboramos essa atividade com o objetivo de definir a integral definida e incentivarmos o estilo de aprendizagem com orientação teórica e investigativa.

Iniciamos a atividade definindo a integral definida e questionamos se era possível relacionar a definição dada na Atividade VIII, feita no laboratório de informática.

As duplas relacionaram a integral definida com as somas inferiores e superiores para o cálculo de áreas limitadas por f(x). Como exemplo, as respostas das duplas A6 e A14 e B15 e B32, nas Figuras 35 e 36.

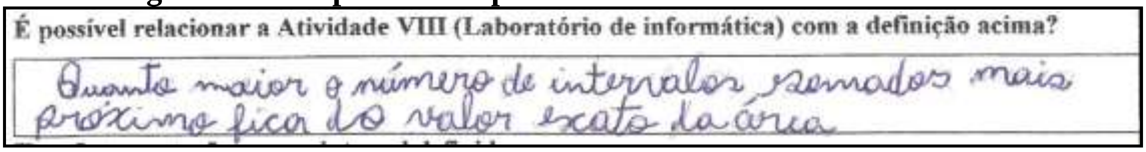
Figura 35 – Resposta da dupla A6 e A14 – Atividade IX – Tarefa 1


É possível relacionar a Atividade VIII (Laboratório de informática) com a definição acima?

sim, se calcularmos o somatório da área dos retângulos, encontraremos um valor aproximado da área da curva entre a e b

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 36 – Resposta da dupla B15e B32 – Atividade IX – Tarefa 1


É possível relacionar a Atividade VIII (Laboratório de informática) com a definição acima?

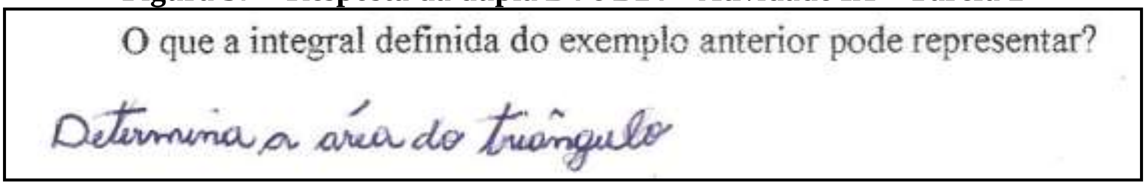
Quanto maior o número de intervalos somados mais próximo fica do valor exato da área

Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida fizemos uma interpretação da integral definida que pode representar a área de uma região limitada por uma curva de f(x) não negativa e em um intervalo dado. E depois enunciamos o Teorema Fundamental do Cálculo.

Na sequência da atividade, fizemos um exemplo usando o gráfico da função f(x) = x + 1 em [-1, 1] e calculamos a integral definida. Perguntamos o que a integral definida dada pode representar e obtivemos como respostas que podia determinar a área do triângulo. Na Figura 37, a resposta da dupla B4 e B24:

Figura 37 – Resposta da dupla B4 e B24 – Atividade IX – Tarefa 2

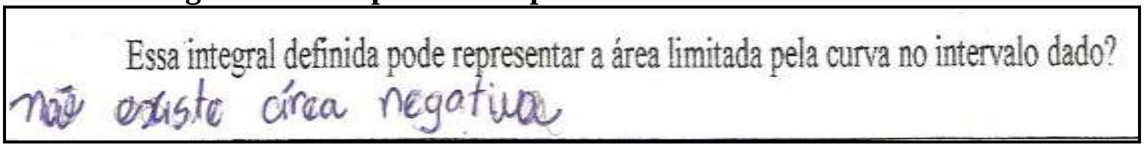

O que a integral definida do exemplo anterior pode representar?

Determina a área do triângulo

Fonte: Dados da pesquisa

Continuamos a atividade apresentando outro exemplo, a integral $\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2+4}(3x)dx$, cujo resultado é negativo, e perguntamos se essa integral definida podia representar a área da região limitada pela curva de $\sqrt{x^2+4}(3x)$ em [-1, 0]. Na Figura 38, resposta da dupla B1 e B11:

Figura 38 – Resposta da dupla B1 e B11 – Atividade IX – Tarefa 3

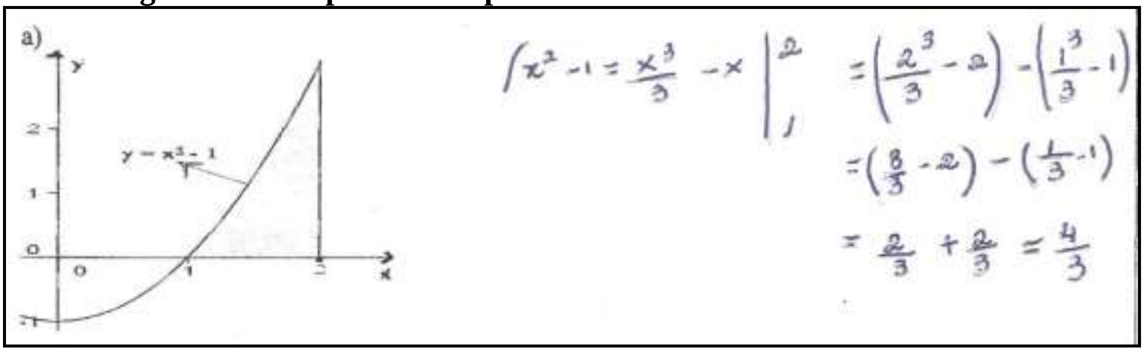

Essa integral definida pode representar a área limitada pela curva no intervalo dado?

não existe área negativa

Fonte: Dados da pesquisa

Na Tarefa 4, solicitamos expressarem por meio de uma integral definida as áreas de quatro regiões sombreadas e determinar o seu valor. Mostraremos, nas Figuras 39, 40, 41 e 42, as respostas corretas de quatro duplas, demonstrando o entendimento da técnica.

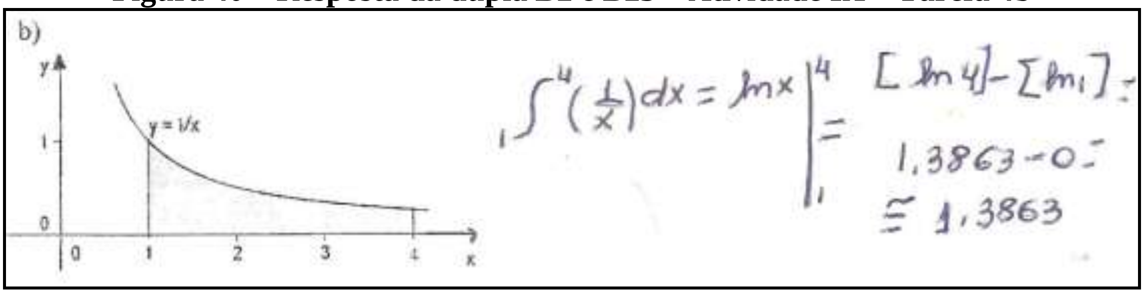
Figura 39 – Resposta da dupla A3 e A12 – Atividade IX – Tarefa 4a



Fonte: Dados da pesquisa

Essa dupla demonstrou o conhecimento da integral definida, pecando apenas na sua montagem, pois não colocou o intervalo de integração, tampouco o *dx*.

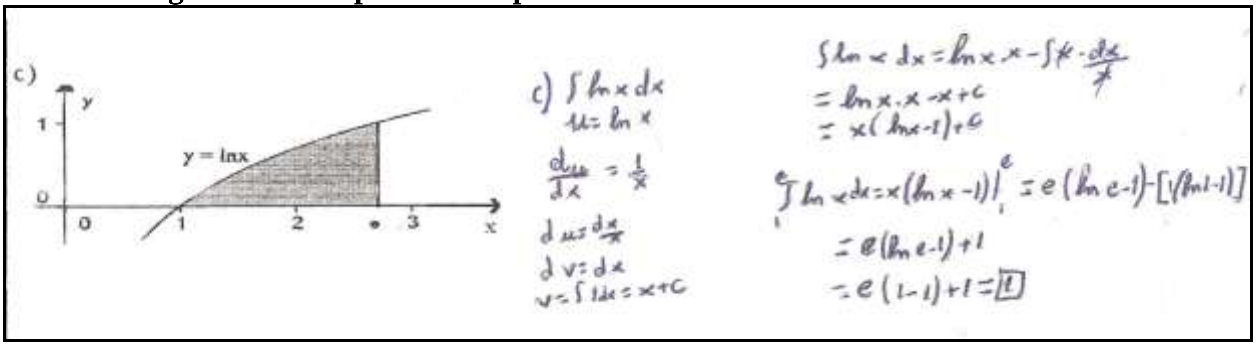
Figura 40 – Resposta da dupla B2 e B23 – Atividade IX – Tarefa 4b



Fonte: Dados da pesquisa

A dupla evidenciada na Figura 40 demonstrou o entendimento da técnica de integração uma vez que expressou e resolveu corretamente a tarefa.

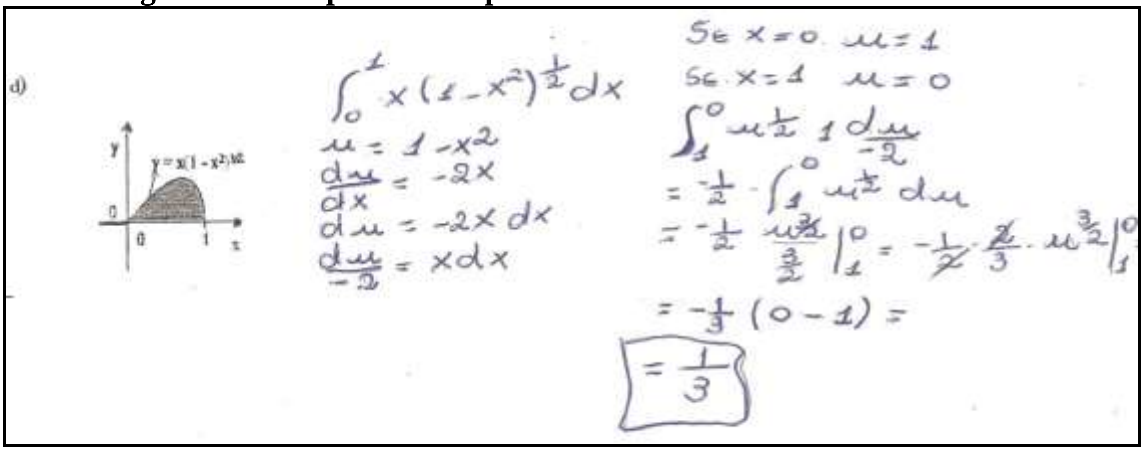
Figura 41 – Resposta da dupla A11 e A16 – Atividade IX – Tarefa 4c



Fonte: Dados da pesquisa

Essa tarefa propunha a resolução de uma integral por partes e a dupla A11 e A16 detalhou a sua resolução.

Figura 42 – Resposta da dupla B5 e B34 – Atividade IX – Tarefa 4d



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 42, temos uma integral que pode ser resolvida pela técnica de substituição simples e foi o que a dupla B5 e B34 escolheu e resolveu corretamente com riqueza de detalhes.

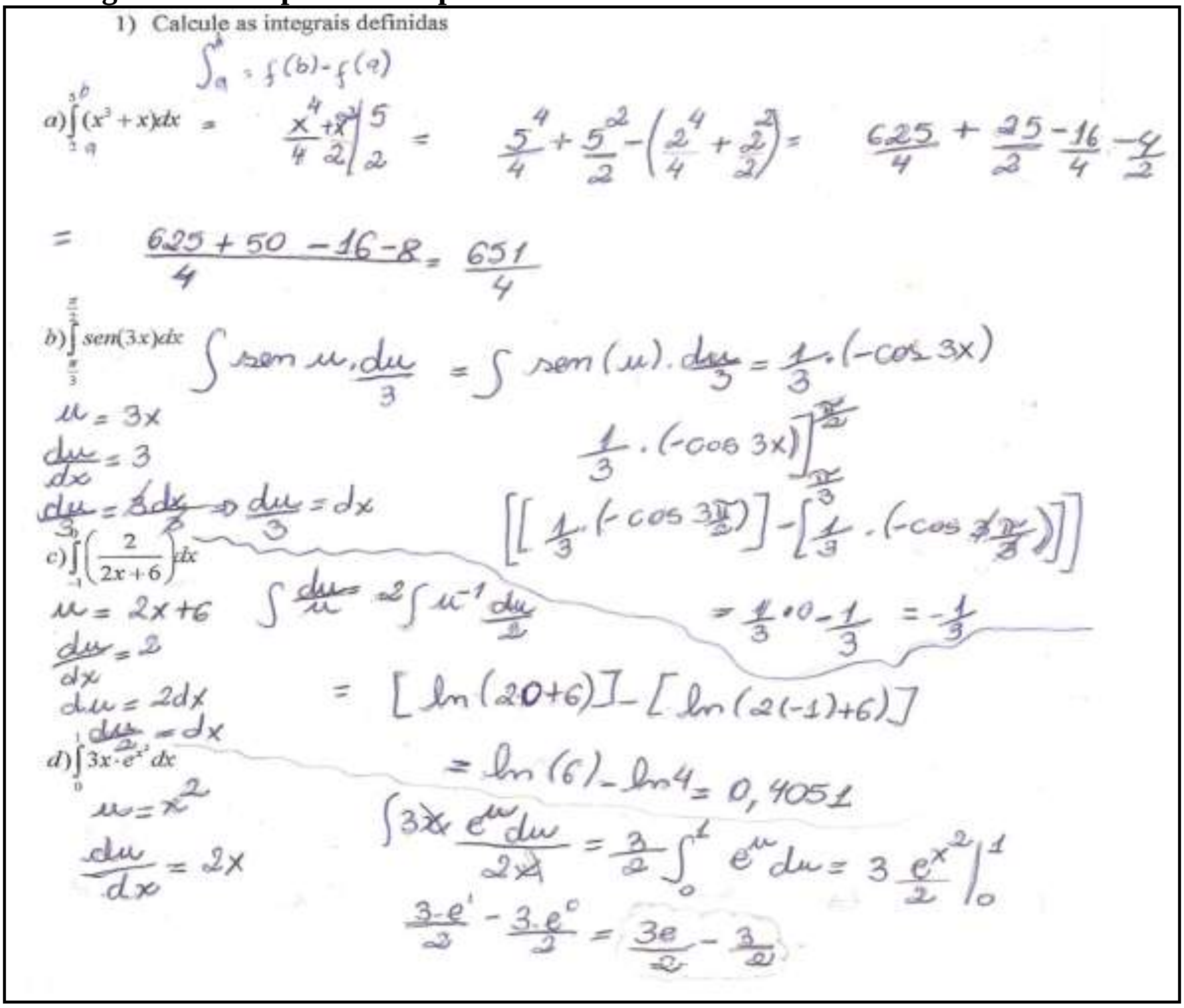
5.10 Atividade X para casa: Calculando as integrais definidas e estudando áreas

Os objetivos dessa atividade foram: fixar o cálculo das integrais definidas; representar graficamente a integral definida e estudar áreas utilizando a integral definida.

Elaboramos tal atividade utilizando a estratégia de aprendizagem que incentiva os estilos de aprendizagem com orientação prática e investigativa.

Foram propostas três tarefas para os alunos. A primeira tarefa consistia na resolução de quatro integrais definidas. As duplas que resolveram essa tarefa não demonstraram dificuldades em sua resolução; na Figura 43, como exemplo, a resposta da dupla B4 e B27.

Figura 43 - Resposta da dupla B4 e B27 - Atividade X – Tarefa 1



1) Calcule as integrais definidas

$\int_a^b = f(b)-f(a)$

a) $\int_2^5 (x^3+x)dx = \frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\Big|_2^5 = \frac{5^4}{4}+\frac{5^2}{2}-\left(\frac{2^4}{4}+\frac{2^2}{2}\right) = \frac{625}{4}+\frac{25}{2}-\frac{16}{4}-\frac{4}{2}$

$= \frac{625+50-16-8}{4} = \frac{651}{4}$

b) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sen(3x)dx$ $\int sen\, u.\frac{du}{3} = \int sen(u).\frac{du}{3} = \frac{1}{3}.(-cos\, 3x)$

$u = 3x$

$\frac{du}{dx} = 3$

$\frac{du}{3} = \frac{3dx}{3} \Rightarrow \frac{du}{3} = dx$

$\frac{1}{3}.(-cos\, 3x)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\left[\left[\frac{1}{3}.(-cos\, 3\tfrac{\pi}{2})\right]-\left[\frac{1}{3}.(-cos\, 3\tfrac{\pi}{3})\right]\right]$

$= \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

c) $\int_{-1} \left(\frac{2}{2x+6}\right)dx$

$u = 2x+6$ $\int \frac{du}{u} = 2\int u^{-1}\frac{du}{2}$

$\frac{du}{dx} = 2$

$du = 2dx$

$\frac{du}{2} = dx$

$= [ln(20+6)] - [ln(2(-1)+6)]$

$= ln(6) - ln4 = 0,4051$

d) $\int_0^1 3x\cdot e^{x^2} dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\int 3x\, \frac{e^u du}{2x} = \frac{3}{2}\int_0^1 e^u du = 3\,\frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^1$

$\frac{3e^1}{2} - \frac{3e^0}{2} = \frac{3e}{2} - \frac{3}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla evidenciada na Figura 43 demonstrou clareza na resolução das integrais fazendo a escolha adequada para a mudança de variável (u).

Na segunda tarefa, foram apresentadas três funções e respectivos intervalos para que os alunos representassem graficamente cada função e depois calculassem a integral definida. Na alínea d dessa tarefa, foi questionado sobre quais das integrais definidas calculadas anteriormente poderiam representar a área da região limitada.

Na Tarefa 3, solicitamos o cálculo das áreas das regiões sombreadas e esboçamos os gráficos de quatro funções limitadas por um intervalo.

5.11 Atividade XI: Desafio

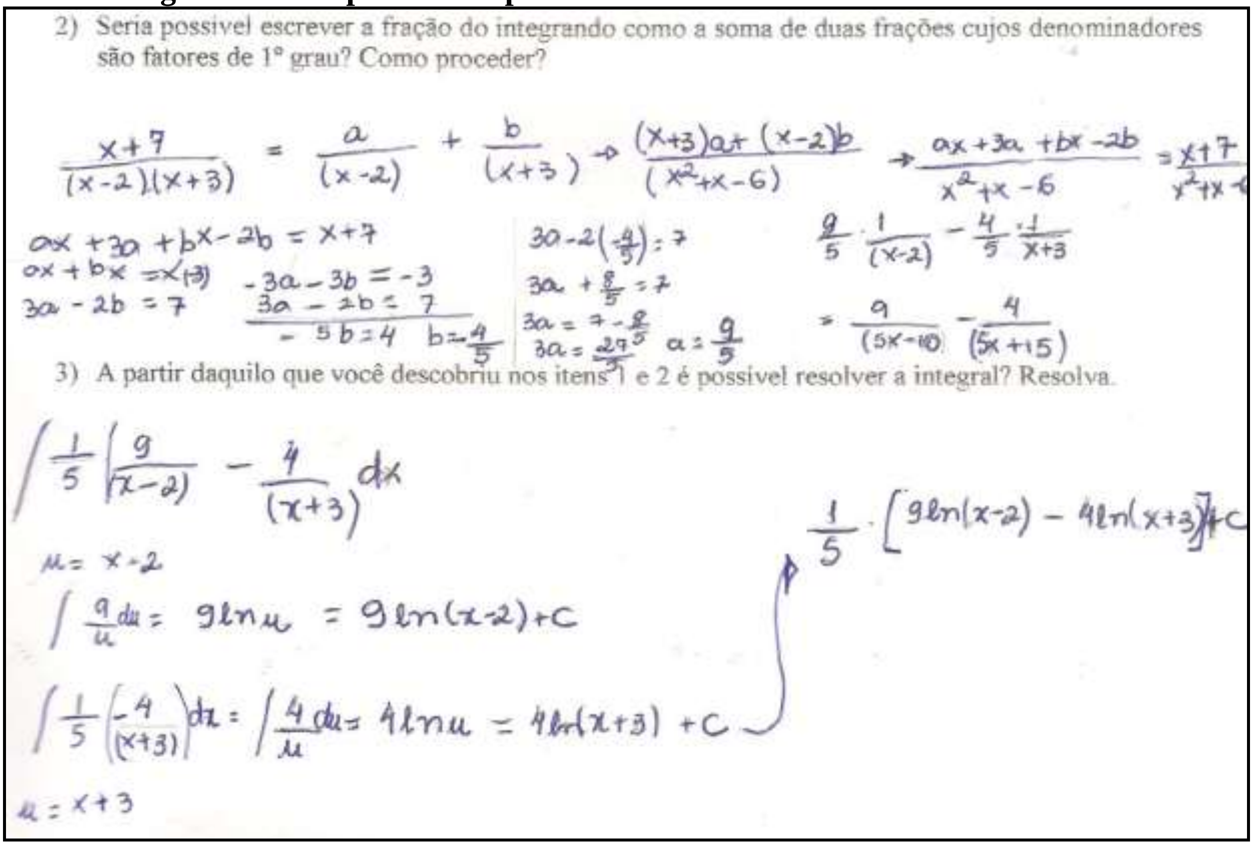
Esse desafio teve como objetivo rever fatoração de polinômios e frações parciais. Elaboramos tal desafio buscando incentivar os estilos de aprendizagem com orientação investigativa e teórica.

O desafio consistia em resolver a integral $\int \left(\frac{x+7}{x^2+x-6} \right) dx$. Primeiro questionamos se era possível fatorar o denominador; segundo, se era possível escrever o integrando como a soma de duas frações cujos denominadores fossem fatores do primeiro grau e, em caso afirmativo, como proceder e,no terceiro momento, solicitamos a resolução da integral dada.

Essa atividade foi muito interessante. Os alunos apresentaram dificuldades para resolver o desafio e ficavam sempre solicitando a intervenção da professora que apenas dava algumas sugestões e/ ou pistas. Em um momento da resolução, um dos alunos da turma A pediu para resolver no quadro com a ajuda de seus colegas; foi bastante proveitoso, pois todos os alunos participaram da resolução.

Na Figura 44, a resolução da dupla A2 e A13:

Figura 44 – Resposta da dupla A2 e A13 – Atividade XI – Tarefa 2 e 3



2) Seria possível escrever a fração do integrando como a soma de duas frações cujos denominadores são fatores de 1º grau? Como proceder?

$\frac{x+7}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)} \rightarrow \frac{(x+3)a+(x-2)b}{(x^2+x-6)} \rightarrow \frac{ax+3a+bx-2b}{x^2+x-6} = \frac{x+7}{x^2+x-6}$

$ax+3a+bx-2b = x+7$

$ax+bx = x \ (3)$

$3a-2b=7$

$-3a-3b=-3$

$3a-2b=7$

$-5b=4 \quad b=-\frac{4}{5}$

$3a-2\left(-\frac{4}{5}\right)=7$

$3a+\frac{8}{5}=7$

$3a=7-\frac{8}{5}$

$3a=\frac{27}{5} \quad a=\frac{9}{5}$

$\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+3} = \frac{9}{(5x-10)} - \frac{4}{(5x+15)}$

3) A partir daquilo que você descobriu nos itens 1 e 2 é possível resolver a integral? Resolva.

$\int \frac{1}{5}\left(\frac{9}{(x-2)} - \frac{4}{(x+3)}\right) dx$

$u = x-2$

$\int \frac{9}{u} du = 9\ln u = 9\ln(x-2)+C$

$\int \frac{1}{5}\left(\frac{-4}{(x+3)}\right) dx = \int \frac{4}{u} du = 4\ln u = 4\ln(x+3)+C$

$u = x+3$

$\frac{1}{5}\cdot\left[9\ln(x-2) - 4\ln(x+3)\right]+C$

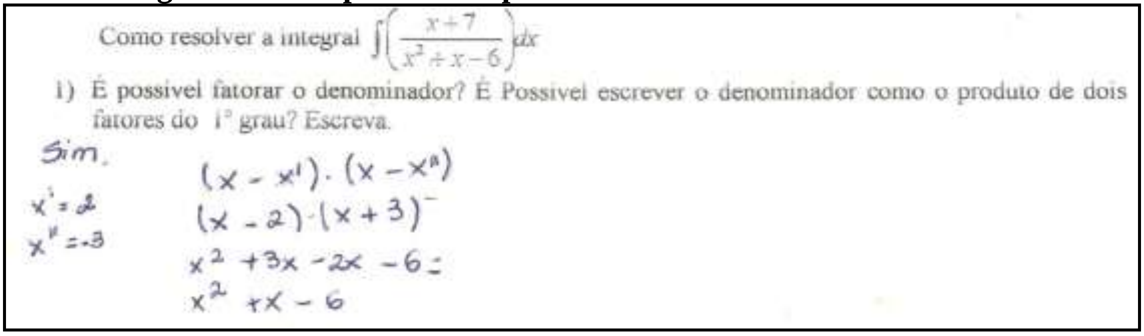
Fonte: Dados da pesquisa

Segundo Carpenter e Lehrer (1999), o fundamental em aprender com entendimento é os estudantes poderem aplicar esse conhecimento para aprender novos tópicos e resolver problemas novos.

A turma B teve muitas dificuldades para executar as tarefas, também foi contrária à proposta de ensino, reclamando que não estavam entendendo e não sabiam responder às tarefas solicitadas. A única tarefa que conseguiram executar foi a primeira, que propunha a fatoração do denominador.

Na Figura 45, a resolução da dupla B1 e B8:

Figura 45 – Resposta da dupla B1 e B8 – Atividade XI – Tarefa 1



Como resolver a integral $\int\left(\frac{x+7}{x^2+x-6}\right)dx$

1) É possível fatorar o denominador? É Possível escrever o denominador como o produto de dois fatores do 1º grau? Escreva.

Sim.

$x' = 2$

$x'' = -3$

$(x - x') \cdot (x - x'')$

$(x - 2) \cdot (x + 3)$

$x^2 + 3x - 2x - 6 =$

$x^2 + x - 6$

Fonte: Dados da pesquisa

No momento da socialização, fomos até o quadro e ensinamos aos acadêmicos da turma B como poderia ser escrita uma fração por meio de outras duas frações com denominadores formados com fatores do primeiro grau.

5.12 Atividade XII: Integração por Decomposição em Frações Parciais

Os objetivos dessa atividade são: definir frações parciais e definir integração por decomposição em frações parciais e foi elaborada, buscando incentivar estilos de aprendizagem com orientação investigativa, teórica e prática.

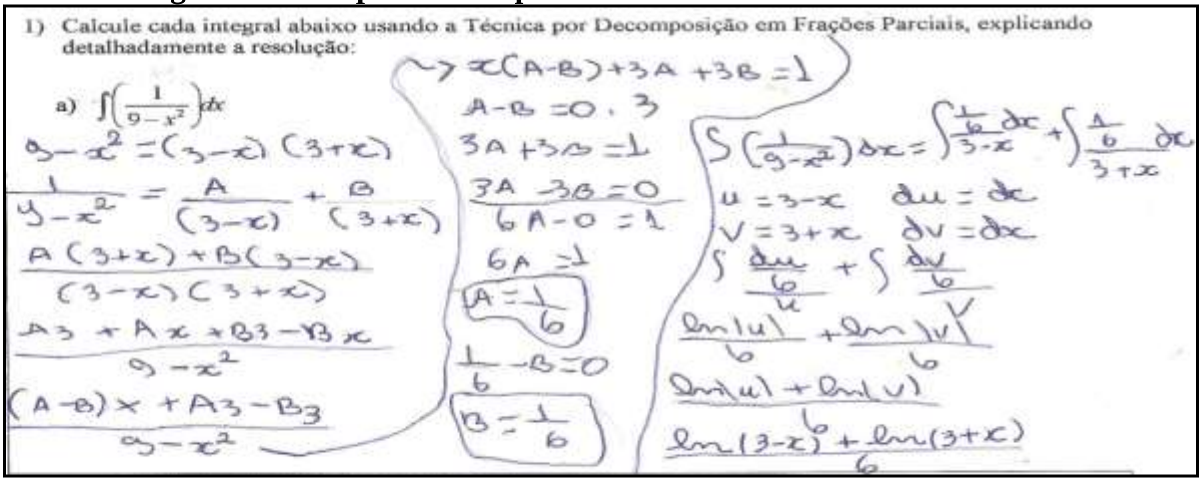
Na atividade anterior (desafio), as tarefas foram propostas para resolução com o conhecimento que os alunos já detinham e, nesta atividade, as tarefas foram propostas após a definição e sistematização de frações parciais e a técnica de integração por decomposição em frações parciais.

Iniciamos a atividade definindo frações parciais, depois fizemos um exemplo e questionamos se era possível resolvê-lo de outra maneira. Em seguida, pedimos que fizessem a decomposição da fração $\left(\frac{x}{x^2+2x+1}\right)$.

Em um segundo momento, deixamos como tarefa, três integrais para serem resolvidas utilizando a técnica. Nenhuma das turmas teve dificuldades em sua execução.

Na Figura 46, a resposta da dupla A6 e A14:

Figura 46 – Resposta da dupla A6 e A14 – Atividade XII – Tarefa 1



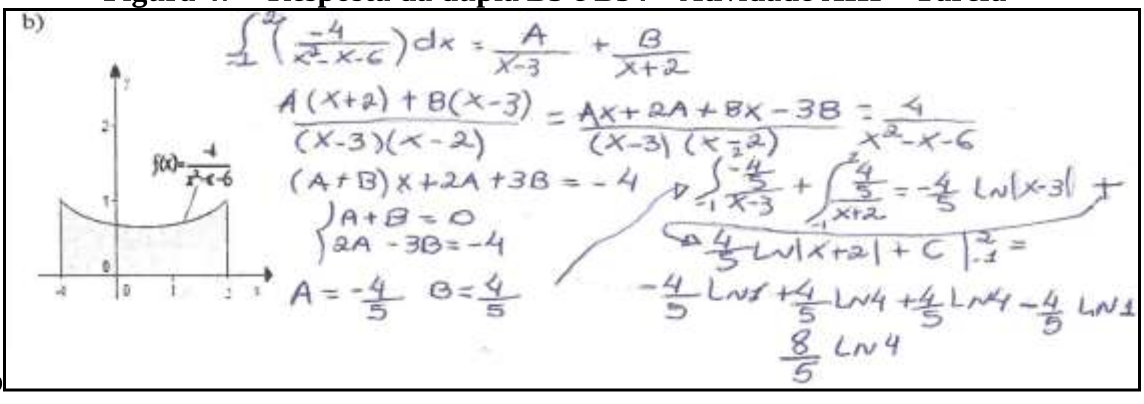
Fonte: Dados da pesquisa

5.13 Atividade XIII para casa: Integração por Decomposição em frações parciais

Os objetivos desta atividade foram fixar a técnica de integração por decomposição em frações parciais e identificar quais das integrais do exercício podem representar áreas. Nela, buscamos incentivar estilos de aprendizagem com orientação investigativa, teórica e prática.

A Tarefa1 da atividade contém duas alíneas com regiões limitadas para suas áreas serem calculadas. Na Figura 47, a resolução da dupla B3 e B34:

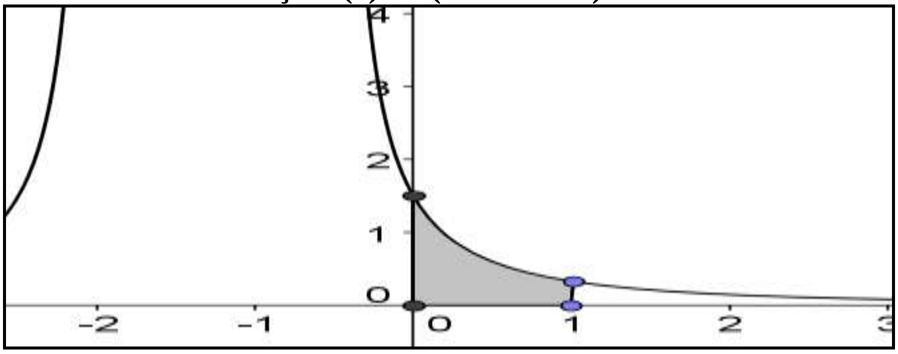
Figura 47 – Resposta da dupla B3 e B34 – Atividade XIII – Tarefa 1b



Fonte: Dados da pesquisa

A Tarefa2 contém duas integrais definidas para serem resolvidas, utilizando a técnica de integração por decomposição em frações parciais, conforme a Figura 48.

Figura 48 – Gráfico da função f(x)= 3/(2x^2+5x+2) – Atividade XIII – Tarefa 2a



Fonte: Elaborada pela autora/ Geogebra

Na Tarefa3 foi questionado qual das integrais da Tarefa 2 poderia representar a área da região limitada pela função, o eixo *x*, no intervalo dado. Foi sugerido que o aluno utilizasse o *software Geogebra.*

Essa atividade foi bem interessante, pois além de abordarmos decomposição em frações parciais, também trabalhamos integrais definidas e áreas com o uso do *software Geogebra*.

5.14 Atividade XIV: Integrais

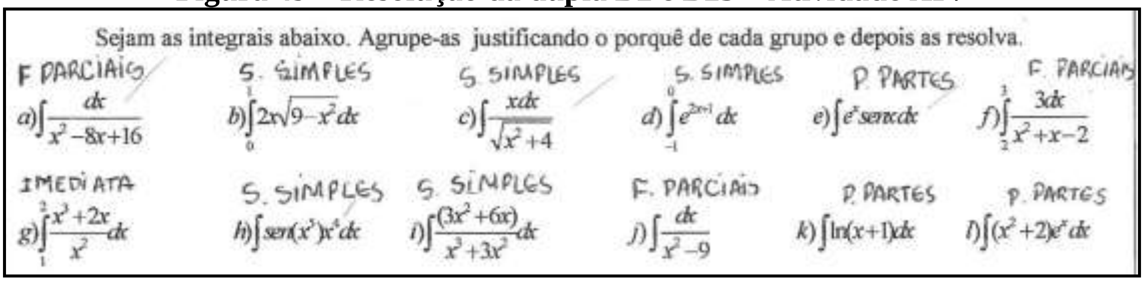
A atividade abordou todas as técnicas de integração estudadas anteriormente e tem como objetivo identificar qual a técnica mais adequada para resolver integrais.

Elaboramos esta atividade buscando incentivar estilos de aprendizagem com orientação investigativa e prática.

Nesta atividade foi dado à dupla um conjunto de doze integrais para serem agrupadas de acordo com a técnica de integração mais adequada e proposta sua resolução.

A Figura 49 mostra como a dupla B2 e B23 classificou as integrais dadas e as resolveu de acordo com a técnica.

Figura 49 – Resolução da dupla B2 e B23 – Atividade XIV



Sejam as integrais abaixo. Agrupe-as justificando o porquê de cada grupo e depois as resolva.

F PARCIAIS $a)\int \frac{dx}{x^2-8x+16}$

S. SIMPLES $b)\int_0^1 2x\sqrt{9-x^2}\,dx$

S. SIMPLES $c)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$

S. SIMPLES $d)\int_{-1}^{0} e^{2x+1}\,dx$

P. PARTES $e)\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

F. PARCIAIS $f)\int_2^3 \frac{3dx}{x^2+x-2}$

IMEDIATA $g)\int_1^2 \frac{x^3+2x}{x^2}dx$

S. SIMPLES $h)\int \operatorname{sen}(x^5)x^4\,dx$

S. SIMPLES $i)\int \frac{(3x^2+6x)}{x^3+3x^2}dx$

F. PARCIAIS $j)\int \frac{dx}{x^2-9}$

P. PARTES $k)\int \ln(x+1)\,dx$

P. PARTES $l)\int (x^2+2)e^x\,dx$

Fonte: Dados da pesquisa

5.15 Atividade XV – Para casa: Integrais

Essa atividade objetiva identificar padrões na resolução de integrais e identificar que integrais definidas podem representar áreas. Ela incentiva estilos de aprendizagem com orientação investigativa, teórica e prática.

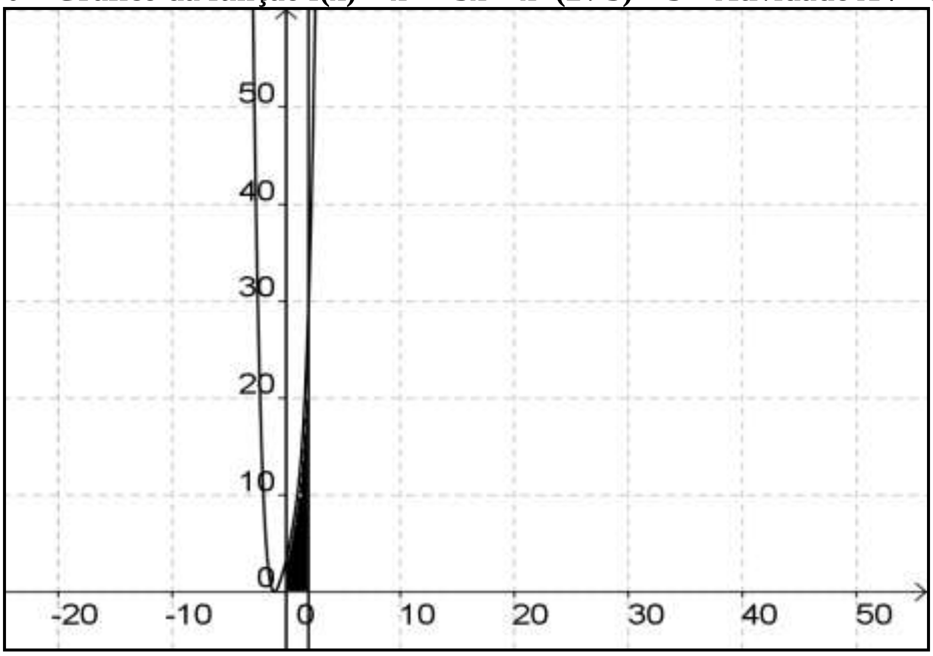
Na Tarefa1 foi proposta a resolução de oito integrais, identificando qual a técnica mais adequada.

Na Tarefa 2 foi pedido ao acadêmico para indicar quais das integrais da Tarefa 1 poderiam representar a área de uma figura plana e que, ao justificar, apontasse a região por meio do *Geogebra*.

Das integrais propostas na Tarefa 1, quatro são integrais definidas e dessas quatro, três representavam a área da região limitada pela função, o intervalo e o eixo *x*, conforme as Figuras 50, 52 e 53.

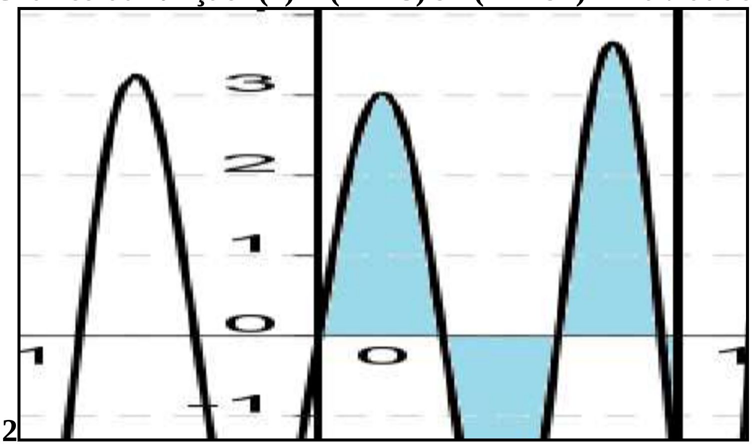
Na Figura 51 ilustramos a integral definida que não representa a área da função $f(x) = (x^2 + 3) \sin(x^3 + 9x)$ em [0, 1].

Figura 50 – Gráfico da função $f(x) = x^4 + 5x + x^{(2/3)} + 3$ – Atividade XV– Tarefa 2



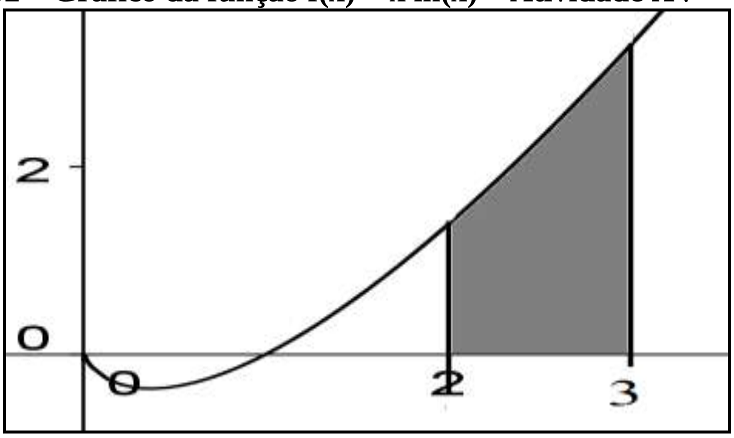
Fonte: Elaborada pela autora/ Geogebra

Figura 51 – Gráfico da função f(x) = (x² + 3) sin(x³ + 9x) – Atividade XV –Tarefa 2



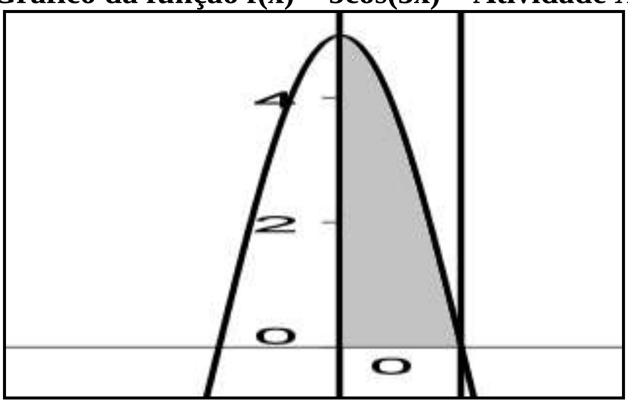
Fonte: Elaborada pela autora/ Geogebra

Figura 52 – Gráfico da função f(x) = x ln(x) – Atividade XV – Tarefa 2



Fonte: Elaborada pela autora/ Geogebra

Figura 53 – Gráfico da função f(x) = 5cos(3x) – Atividade XV– Tarefa 2



Fonte: Elaborada pela autora/ Geogebra

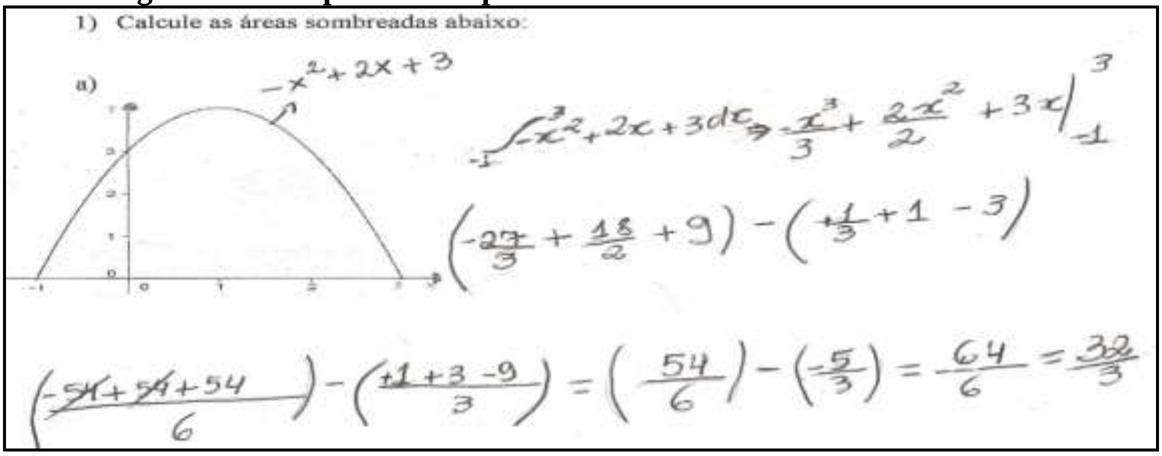
Essas últimas atividades estão abordando as técnicas de integração estudadas, o que possibilita aos alunos uma revisão. As turmas não apresentaram problemas com a resolução das tarefas.

5.16 Atividade XVI: Integrais

O objetivo dessa atividade é estudar áreas por meio de integrais definidas e busca incentivar estilos de aprendizagem com orientação prática.

Nesta atividade, esboçamos quatro regiões planas limitadas por funções e solicitamos o cálculo da área utilizando integrais definidas. Na Figura 54, como exemplo, a resolução da dupla A2 e A13 da turma A, que resolveu detalhadamente a integral definida, demonstrando o entendimento da técnica.

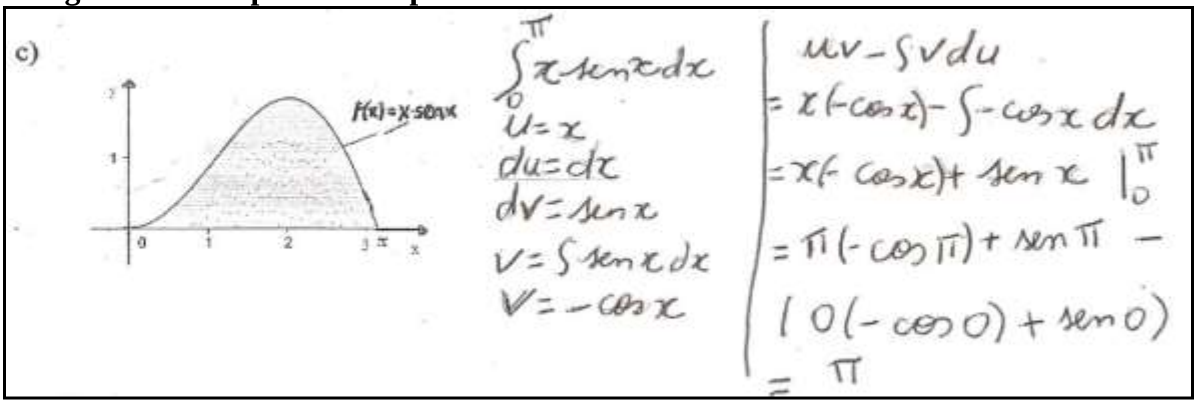
Figura 54 – Resposta da dupla A2 e A13 – Atividade XVI – Tarefa 1a



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 55, a resolução da dupla B35 e B39 da turma B ilustra que a integral dessa tarefa corresponde a uma integral por partes e definida, e que foi resolvida corretamente, escolhendo *u* e *dv*.

Figura 55 – Resposta da dupla B35 e B39 – Atividade XVI – Tarefa 1c



Fonte: Dados da pesquisa

5.17 Atividade XVII - Avaliação: Técnicas de Integração

Os objetivos dessa avaliação foram certificar a aprendizagem; conhecer as técnicas de integração estudadas; calcular integrais definidas e indefinidas; representar graficamente uma integral definida; utilizar integrais em exercícios aplicados. Seu foco é incentivar estilos de aprendizagem com orientação investigativa, teórica e prática.

A Tarefa 1solicitava que a dupla enumerasse as integrais de acordo com as técnicas de integração adequadas. Como exemplo, na Figura 56 a resposta da dupla A1 e A17 que enumerara corretamente. Ressaltamos que a segunda integral também pode ser resolvida usando decomposição em frações parciais.

Figura 56 – Resposta da dupla A1 e A17– Atividade XVII – Tarefa

1) Indique o número da Técnica de Integração mais adequada para resolver cada integral

1- Integrais imediatas;
2- Substituição simples;
3- Integração por partes;
4- Decomposição em frações parciais.

(2) $\int_1^2 (2^{3x+1})dx$

(2) $\int \left(\frac{5}{x^2+6x+9}\right)dx = \int 5(x+3)^{-2}dx$

(2) $\int sen(x^4+2x)\cdot(4x^3+2)dx$

(3) $\int_2^3 e^{2x}(4x+5)dx$

(1) $\int_0^1 (\sqrt[3]{x}-6x^2+10)dx$

(1) $\int \left(\frac{\sec^2 x}{3}\right)dx$

(4) $\int_{-3}^{-2} \left(\frac{x+5}{x^3-x}\right)dx$

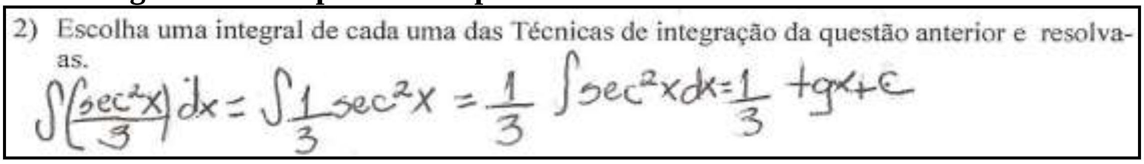
(3) $\int (x\cdot \ln x)dx$

1

Fonte: Dados da pesquisa

A Tarefa2 solicitava a escolha de integrais do exercício anterior que poderiam ser resolvidas com cada uma das técnicas de integração estudadas. A dupla A6 e A14 da turma A escolheu para resolver a integral imediata $\int \frac{\sec^2 xdx}{3}$ e a resolveu corretamente. (FIG. 57).

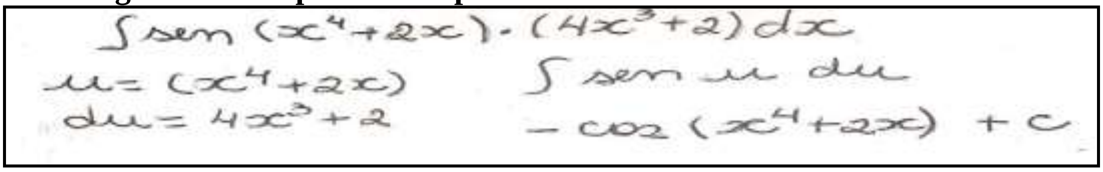
Figura 57 – Resposta da dupla A6 e A14 – Atividade XVII – Tarefa 2



Fonte: Dados da pesquisa

Na Tarefa 2, selecionamos também a resolução da integral $\int sen(x^4 + 2x)(4x^3 + 2)dx$, da dupla B35 e B39 da turma B, que utilizou a técnica de substituição simples. (FIG. 58).

Figura 58 - Resposta da dupla B35 e B39 - Atividade XVII -Tarefa 2

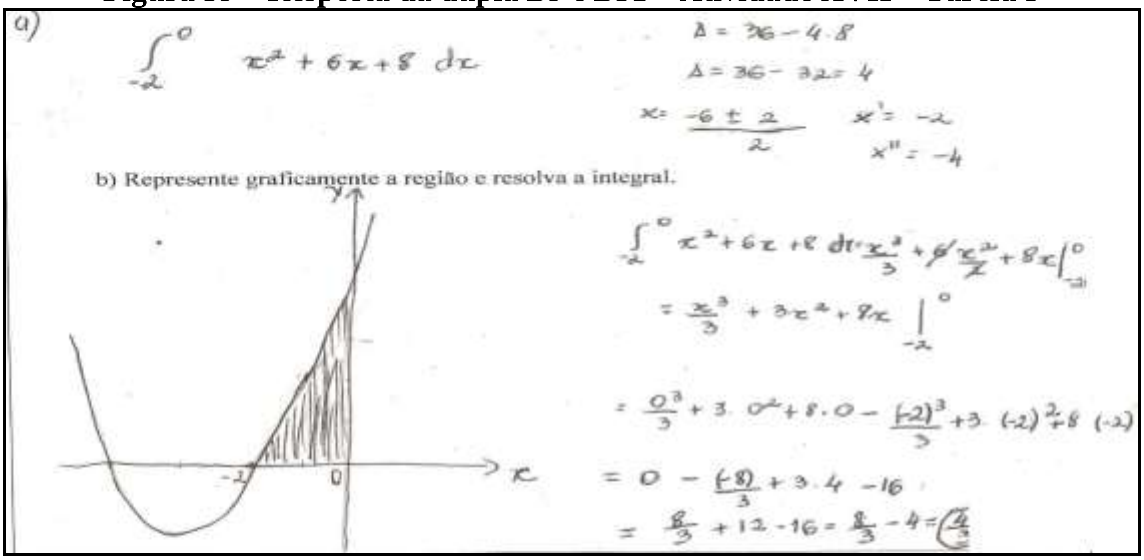


Fonte: Dados da pesquisa

Na Tarefa3, alínea a, pedimos um exemplo de uma integral definida que poderia representar área. Na alínea b, solicitamos o esboço da região e a sua resolução.

A Figura 59 ilustra a resposta da dupla B9 e B31 que apresentou uma região limitada por uma parábola, os eixos *x* e *y* e o intervalo [-2,0].

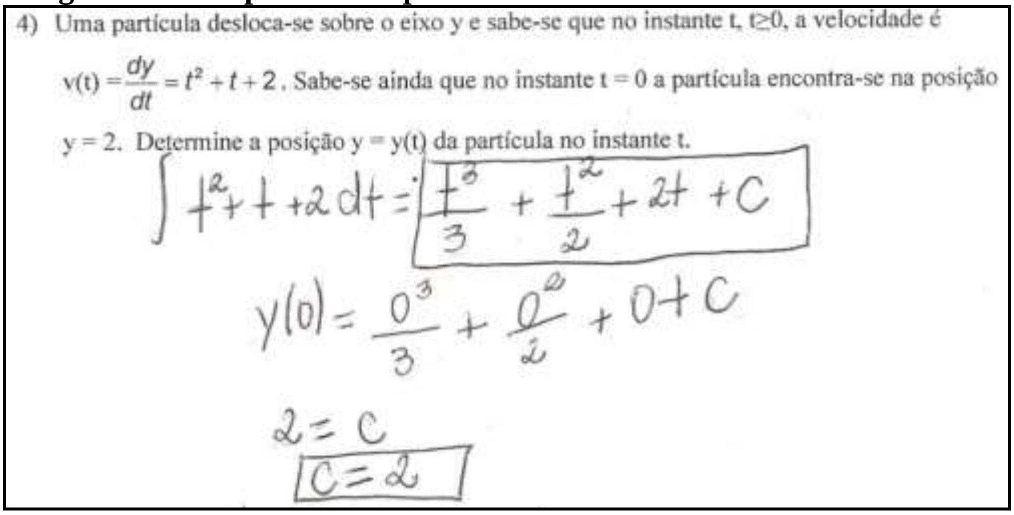
Figura 59 – Resposta da dupla B9 e B31 – Atividade XVII – Tarefa 3



Fonte: Dados da pesquisa

Na Tarefa 4elaboramos uma questão de cálculo aplicado utilizando velocidade e solicitando função deslocamento. Conforme a Figura 60, a dupla B20 e B42 resolveu corretamente a tarefa proposta, apenas não respondeu dentro do contexto.

Figura 60 – Resposta da dupla B20 e B42 – Atividade XVII – Tarefa 4



4) Uma partícula desloca-se sobre o eixo y e sabe-se que no instante t, t≥0, a velocidade é $v(t) = \frac{dy}{dt} = t^2 + t + 2$. Sabe-se ainda que no instante t = 0 a partícula encontra-se na posição y = 2. Determine a posição y = y(t) da partícula no instante t.

$$\int t^2 + t + 2\,dt = \boxed{\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t + C}$$

$$y(0) = \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 0 + C$$

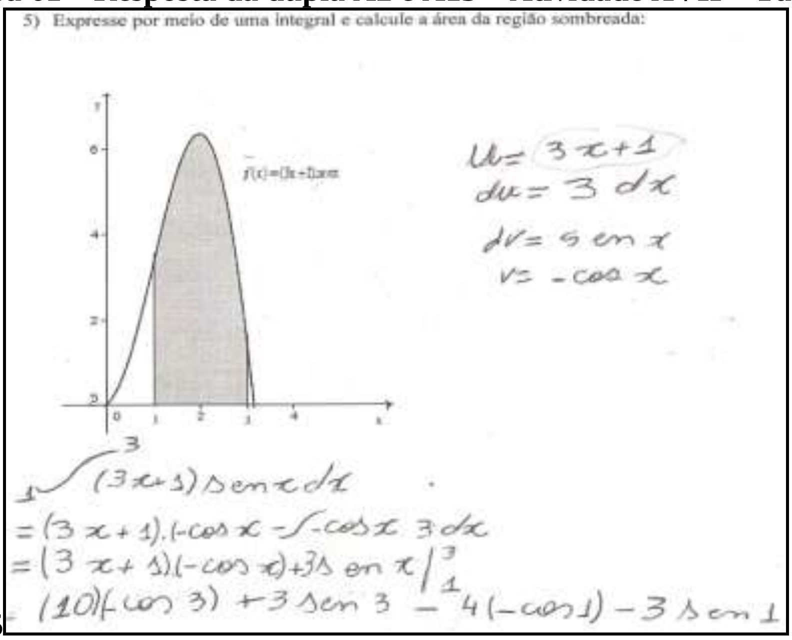
$$2 = C$$

$$\boxed{C = 2}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Por último, na Tarefa 5, demos o esboço da região limitada pela função $f(x) = (3x+1)senx$ em [1, 3] e solicitamos a expressão e o valor da área por meio de integral definida. A Figura 61 demonstra que a dupla A2 e A13 entendeu a técnica de integração por partes, pois fez a escolha adequada para a mudança de variáveis e aplicação da fórmula.

Figura 61 – Resposta da dupla A2 e A13 – Atividade XVII – Tarefa 5



5) Expresse por meio de uma integral e calcule a área da região sombreada:

$u = 3x+1$
$du = 3\,dx$
$dv = sen\,x$
$v = -cos\,x$

$$\int_1^3 (3x+1)\,sen\,x\,dx$$
$$= (3x+1).(-cos\,x - \int -cos\,x\;3\,dx$$
$$= (3x+1)(-cos\,x) + 3\,sen\,x \Big|_1^3$$
$$(10)(-cos\,3) + 3\,sen\,3 - 4(-cos\,1) - 3\,sen\,1$$

Fonte: Dados da pesquisa

Com essas atividades, visamos proporcionar aos acadêmicos o entendimento das técnicas de integração.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como finalidade investigar se o uso de estratégias de ensino que incentivem estilos de aprendizagem pode facilitar ou favorecer o entendimento das técnicas de integração. Escolhemos integrais e suas técnicas de integração, primeiro por já trabalhar com o tema há algum tempo e, segundo, por entender que é uma matéria muito importante da disciplina CDI.

Ao estudar dissertações e teses pudemos perceber que existem grandes dificuldades no ensino e aprendizagem do cálculo, o que nos motivou ainda mais na realização deste trabalho.

Nosso referencial teórico foi fundamentado nas pesquisas de Perkins (1993, 1998) e Carpenter e Lehrer (1999). Eles afirmam que o entendimento não depende somente do conhecimento, ele auxilia no processo de construção de estruturas de explicação e o conhecimento é um apoio à informação. Ainda mencionam que os estudantes tornam-se autores de sua própria aprendizagem e que nem todos aprendem da mesma maneira.

Frota (2002, 2006 e 2010), em seu trabalho, argumenta que para que as estratégias de aprendizagem sejam desenvolvidas é preciso que haja interações entre o sujeito e os objetos, entre o sujeito e outros indivíduos e do sujeito com o meio ambiente. Estratégias de aprendizagem são flexíveis e se modificam, cada indivíduo incorpora suas características pessoais na forma de utilizar uma determinada estratégia, o que de certa forma configura um estilo de aprendizagem.

Para alcançar nosso objetivo utilizamos atividades como instrumentos de pesquisa. As Atividades aqui apresentadas objetivaram promover situações de aprendizagem que possibilitem a professores e alunos estudar importantes temas que fundamentam os cursos de Engenharia e de outros cursos de graduação que têm o Cálculo Integral como parte importante da formação matemática.

No desenvolvimento dessas atividades percebemos a importância da preparação, planejamento e elaboração de uma tarefa, refletindo sobre os objetivos que desejamos atingir. Não basta elaborar uma atividade que nos desperte atenção pela sua complexidade, ou nos atraia por qualquer motivo, nossa preocupação é desenvolver habilidades e procedimentos, refletindo sobre esses procedimentos a fim de promover discussões teóricas e práticas, criando estratégias de ensino que possibilitem a aprendizagem com entendimento.

Esperamos que as atividades, elaboradas de forma a enfatizar o uso de diferentes tipos de estratégias de ensino, tenham desempenhado o seu papel, provocando os desequilíbrios necessários à construção de conceitos e procedimentos para lidar com integrais, fornecendo meios para que os alunos compreendam o conteúdo de forma significativa. Esperamos ainda que as atividades contribuam para outros pesquisadores, apontando possibilidades para a sua prática docente. Certamente as atividades poderão ser melhoradas, incorporando novos exemplos, com o mesmo objetivo de incentivar o uso de estratégias de ensino para aprendizagem com entendimento das técnicas de integração.

Os resultados apontam que os alunos apresentam características preferenciais de estudo da matemática, que caracterizam estilos de aprendizagem com orientações diferenciadas. Esse conhecimento sobre o estilo de aprendizagem matemática dos alunos, e sobre estilos específicos - “estilo com orientação teórica” (EOT), “estilo com orientação prática” (EOP) e “estilo com orientação investigativa” (EOI) - incorpora-se a outros conhecimentos docentes, permitindo ao professor redefinir o seu planejamento de ensino, no sentido de incentivar o desenvolvimento e, sobretudo, a articulação de diferentes estilos de aprendizagem matemática.

Conhecer os seus alunos do ponto de vista de seus perfis de estilos de aprendizagem matemática pode contribuir para que o professor passe a propor para seus alunos o confronto com situações didáticas que demandem estratégias de aprendizagem distintas. Entretanto para viabilizar o desenvolvimento de perfis de estilos de aprendizagem matemática o professor necessita propor tarefas que demandem estratégias de aprendizagem adequadas. Não obstante muitos professores de matemática que atuam no Ensino Superior acreditem na importância da teoria na formação matemática de seus alunos e valorizam o estilo de aprendizagem matemática “com orientação teórica”, as tarefas que propõem em sala de aula demandam, por vezes, estratégias eminentemente práticas de estudo; exercícios que exigem apenas a repetição de técnicas apresentadas e avaliações orientadas pela memorização.

O estudo desenvolvido suscita algumas reflexões acerca de nossas práticas educacionais, com vistas a indagar em que medida tais práticas podem estar limitando as oportunidades do desenvolvimento de perfis de estilos de aprendizagem matemática dos estudantes, uma vez que podem estar sendo orientadas para criar oportunidades, por exemplo, apenas para os alunos que estudam resolvendo listas exaustivas de exercícios, característica de um estilo com orientação prática, ou apenas para aqueles que desenvolveram melhor os processos de abstração e formalização em Matemática, caracterizadores de um estilo com orientação teórica. É igualmente importante indagar se as práticas adotadas desenvolvem estratégias de leitura e pesquisa, por exemplo, que incentivem o estilo de aprendizagem “com orientação investigativa”.

No desenvolvimento de perfis de estilos de aprendizagem matemática há aspectos relevantes a considerar do ponto de vista dos estudantes e dos professores. Os estudantes precisam: conhecer-se enquanto aprendizes, identificando não apenas seus conhecimentos matemáticos, mas também suas preferências de método de estudo e aprendizagem; experimentar tarefas variadas com orientações teóricas, práticas e investigativas, sabendo definir quais as estratégias de aprendizagem mais adequadas para lidar em situações diversas. Os professores precisam: conhecer seus alunos enquanto aprendizes, avaliando não apenas seus conhecimentos matemáticos, mas conhecendo seus métodos preferenciais de estudo e aprendizagem; ampliar em qualidade o tipo de tarefas propostas, como forma de possibilitar que os alunos desenvolvam estilos de aprendizagem variados, com orientações: teórica, prática e investigativa. Frota (2010)

Enfim, o desenvolvimento do entendimento para alunos e professores é um processo contínuo e permanente, que deve ser feito um pouco a cada dia. Apenas demos o primeiro passo.

Feitas estas considerações, encerramos esta dissertação com a expectativa de que o trabalho possibilite discussões sobre as abordagens utilizadas e, com isso, contribua para superar dificuldades do processo de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

ANACLETO, Grácia Maria Catelli. **Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ANASTASIOU, Léa das Graças Camargos; ALVES, Leonir Pessate. Estratégias de ensinagem. In: ANASTASIOU, Léa das Graças Camargos; ALVES, Leonir Pessate. (Orgs.). **Processos de ensinagem na universidade**. Pressupostos para as estratégias de trabalho em aula. 3. ed. Joinville: Univille, 2004. p. 67-100.

ANDERSEN, E. **As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizadas por alunos de Licenciatura em Matemática**. 2011. 128p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**, Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BARBOSA, M. A. O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. 2004. Dissertação (Mestrado), Curitiba.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1979.

BARUFI, Maria Cristina Banomi. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Rio Claro, 1999.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Trad. M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. p. 47, 48, 49 e 50 Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, p. 36, 1998.

CARPENTER, Thomas P. LEHRER, Richard. Teaching and Learning Mathematics with Understanding**.** In: FENNEMA, Elizabeth; ROMBERG, Thomas**. Ed. Mathematics Classrooms that Promote Understanding**, p 19-32.Lawrence Erllaum Associates. New Jersey, 1999.

CURY, Helena Noronha. Pesquisas em análise de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates, p. 223-238. Recife: SBEM, 2009.

CURY, H. N. **Estilos de aprendizagem de alunos de engenharia**. In: XXVIII CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2000, Ouro Preto, MG. XXVIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2000.

CURY, Helena Noronha. Novas experiências de ensino e avaliação em Cálculo Diferencial e Integral. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA (27: 1999: Natal). Anais. p.786-791. mk CD-ROM.

CURY, H. N. Trabalhos realizados com alunos de Cálculo Diferencial e Integral A. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2001, Rio de Janeiro. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2001. 1 CD-ROM.

DIAS, Teresa Cleidecer.**O ensino do Cálculo Diferencial e Integral e o pensamento reversível**. 1999. Dissertação (Mestrado) UCB, orientadora Maria Therezinha de L. Monteiro, Brasília.

DIETRICH, P. S.**Ensino e Aprendizagem da Integral Definida:** Contribuições da Engenharia Didática. 2009.Dissertação (Mestrado). UNIFRA, Santa Maria.

ESCHER, M. A**. Dimensões teórico-metodológicas do cálculo diferencial e integral**: perspectivas histórica e de ensino e aprendizagem. 2009. Dissertação (Mestrado). UNESP, Rio Claro.

FERREIRA, S. L.**Lições de cálculo com um foco no uso de exemplos para a aprendizagem de integrais.**152p. . 2012. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

FANTINEL, P.C. **Representações Gráficas Espaciais para o Ensino de Cálculo e álgebra Linear.**1998**.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

FELDER, R.M. SILVERMAN, L.K. **Learning and teaching styles in engineering Education.** Eng. Education.V.78, n. 7, p. 674-681, 1988.

FELDER, Richard M. **Reaching the second tier**: learning and teaching styles in college science education. 04 fev. 2000. Disponível em < http://www2.ncsu.edu/unity/lockers/users /f/felder/public/Papers/Secondtier.html> Acesso em: 02 ago. 2012 (a).

FELDER, Richard M. **Learning styles**. 10 jun. 2000. Disponível em: <http://www2.ncsu.edu/ unity/lockers/users/f/felder/public/Learning_Styles.htm>Acesso em: 02 ago. 2012 (b)

FELDER, Richard M. **Matters of style**. 08 abril 2000. Disponível em <http://www2.ncsu. edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/LS-Prism.htm>Acesso em: 02 ago. 2012 (c)

FELDER, R.M. **Questões de estilo**. ASEE Prism, 1966.

FRANCHI, R. H. O. **A modelagem como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia**.1993. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

FROTA, Maria Clara Rezende. Estilos de aprendizagem matemática e autocontrole do processo de aprendizagem. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates, p. 59-79. Recife: SBEM, 2009.

FROTA, M. C. R. **Estilos de Aprendizagem Matemática de Estudantes da Área de Ciências Sociais Aplicadas**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006, Águas de Lindóia. Anais... Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

FROTA, M. C. R. **O pensar matemático no ensino superio**r: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos. 287p. 2002. Tese (Doutorado em Educação) – UFMG, Belo Horizonte.

FROTA, M. C. R. Perfis de Estilos de Aprendizagem Matemática de Estudantes Universitários. In: **Educação Matemática Pesquisas**, São Paulo, v.12, n.1, pp.89-110, 2010.

GARNICA, A. V. M.. **As demonstrações em educação matemática**: Um ensaio. *Bolema, 18*, 91-122. 2002.

HIEBERT, James; LEFEVRE, Patrícia. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). **Conceptual and procedural knowledge**– The case of mathematics.p.1-27.Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erbaum, 1986.

JACYNTO, Luiz Antonio. Uso de Episódios Históricos e de Geometria Dinâmica para Desenvolvimento de Conceitos de Integral de Riemann e do Teorema Fundamental do Cálculo para Funções Reais de Variável Real.2008. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP.

LAUDARES, J. B & LACHINI. J (org.). **A Prática Educativa sob o Olhar de Professores de Cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001.

LÜDKE, M. e ANDRÉ, M. E. D. **A pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo. EPU, 1986.

MACHADO, R.M. **A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP**. 2008.Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MARIN, Douglas. Professores de matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior - Rio Claro: [s.n.], 2009.

MOMETTI, A. L. **Reflexão sobre a Prática**: Argumentos e Metáforas no discurso de um grupo de professores de Cálculo. 273p. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates, p. 43-58. Recife: SBEM, 2009.

PERKINS, David. Teaching for understanding. **The Professional Journal of the American Federation of Teachers**; v17 n3, pp. 8, 28-35, Fall 1993.

PERKINS, David; GARDNER, Howard; WISKE, Martha Stone; PERRONE, Vito. What is Understanding? In: WISKE, Martha Stone. **Teaching for understanding:** Linking research with practice**.**pp. 39-41. 1998.

PERKINS, N. David; CRISMOND, David; SUMMONS, Rebeca and UNGER, Chris. *Inside Undertanding*. in: PERKINS, N. David; SHUWARTZ, L. Judh; WEST, M. Mary; WISKE S. Martha (Eds). **Software Goes to School**: Teaching for understanding with new Technologies. p. 70-87. 1995.

PETRUCCI, Valéria Bezzera Cavalcanti; BATISTON, Renato Reis. Estratégias de ensino e avaliação de aprendizagem em contabilidade. In: PELEIAS, Ivam Ricardo. (Org.) **Didática do ensino da contabilidade**. São Paulo: Saraiva, 2006.

PINTO, M. M. F. Re-visitando uma teoria: o desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de análise real. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates, p. 27-42 . Recife: SBEM, 2009.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise**: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (Doutorado em educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise In: FROTA, M.C.R. e NASSER, L (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates, pp. 81-97. Recife: SBEM, 2009.

REVISTA Exame. 15/05/02. Parte integrante da Edição nº 766. Editora Abril, pp. 89-90.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistemológica.2003. Tese (Doutorado). FE-USP, São Paulo.

SEGADAS, V. C. **Students Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus**: an Exploration of Definitions and Visual Imagery.1998.Tese (Doutorado). Institute of Education University of London.

SILVA, B. A, Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. In: **Revista Educação Matemática em Pesquisa.** São Paulo, v.13, n.3, pp.393-413, 2011.

SILVA, C. A. **A noção de Integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica.** 2004. 157p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SCUCUGLIA, R.**A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas**.145 f. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

TALL, D. e VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, p. 151-169. 1976.

TALL. D. Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus, Mathematics Teaching 137, 29-32 1991.

TALL, David. **A Sensible Approach to the Calculus**. (Plenary at The National and International Meeting on the Teaching of Calculus, 23–25th September 2010, Puebla, Mexico.).Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010a-sensible-calculus.pdf.> Acesso em: 27 ago. 2012.

VILLARREAL, M. E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 1999.

APÊNDICE

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

MÓDULO DE ENSINO: TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Carine Rodrigues de Souza

Belo Horizonte
2013

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Este trabalho é o produto da dissertação de mestrado intitulada "Uma abordagem do ensino de cálculo incentivando o desenvolvimento de estilos de aprendizagem proporcionando o entendimento das técnicas de integração", desenvolvida por Carine Rodrigues de Souza, sob a orientação da professora Dra. Maria Clara Rezende Frota e defendida no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

As atividades de Cálculo abordam o estudo das técnicas de integração por substituição simples, integração por partes e decomposição em frações parciais. As atividades introduzem as integrais indefinidas e definidas, o Teorema Fundamental do Cálculo e algumas aplicações das integrais definidas ao cálculo de áreas.

As atividades foram elaboradas objetivando o uso de estratégias de aprendizagem para proporcionar situações de ensino que possam promover o aprendizado de Cálculo Integral. As tarefas propostas buscam apresentar conceitos e procedimentos que são sistematizados após um processo de reflexão do qual participam os alunos e o professor.

Esperamos que este texto possa ser útil para professores e para alunos de cursos de engenharia e de outros cursos de graduação no estudo inicial das integrais.

2 ATIVIDADES

As atividades foram elaboradas com sustentação no referencial teórico de nossa pesquisa, buscando incentivar estratégias de aprendizagem de acordo com os estilos citados anteriormente.

Fizemos um quadro resumo dessas atividades com respectivos objetivos e indicando as estratégias e estilos que foram incentivados a partir de cada uma dessas atividades, para isso chamaremos as atividades que tiveram como foco o desenvolvimento de estratégias com orientação prática de EOP; as estratégias com orientação teórica de EOT e as estratégias com orientação investigativa de EOI.

Quadro 1 – Atividades desenvolvidas

(Continua)

ATIVIDADE	CONTEÚDO	OBJETIVOS	USA TIC	ESTRATÉGIA /ESTILO
Atividade I sala	Integrais imediatas	Identificar padrões no cálculo de integrais indefinidas; construir a tabela de integrais imediatas; identificar a relação de derivadas e integrais.	Não	EOT e EOI
Atividade II casa	Integrais imediatas e Substituição Simples	Aprender e fixar as integrais imediatas; introduzir a técnica de integração simples por meio de padrões da integral imediata.	Não	EOP
Atividade III sala	Substituição Simples	Verificar que algumas funções como produto no integrando não podem ser resolvidas usando a tabela de integrais imediatas; determinar a relação entre as funções do integrando; sistematizar a técnica de substituição simples; definir a técnica de integração por substituição simples.	Não	EOP, EOT e EOI
Atividade IV casa	Substituição Simples	Reconhecer as integrais que podem ser resolvidas pela técnica de integração por substituição simples; desenvolver a pesquisa e o estudo das técnicas de integração.	Não	EOP e EOI

Atividade V casa	Substituição Simples	Identificar padrões nas integrais que podem ser resolvidas pela técnica de integração por substituição simples; Fixar a técnica de integração por substituição simples.	Não	EOP

(conclusão)

ATIVIDADE	CONTEÚDO	OBJETIVOS	USA TIC	ESTRATÉGIA /ESTILO
Atividade VI sala	Integração por partes	Identificar a diferença entre integrais que podem ser resolvidas pela técnica de substituição simples ou pela técnica de integração por partes; Definir a técnica de Integração por partes.	Não	EOP e EOT
Atividade VII casa	Integração por partes	Fixar a Técnica de Integração por Partes.	Não	EOP
Atividade VIII: laboratório de informática	Laboratório de informática: Áreas	Apresentar o *software Geogebra* para a turma; Estudar somas inferiores e superiores; Calcular áreas de triângulos e regiões irregulares aproximando através de somas infinitas.	Sim	EOP e EOI
Atividade IX sala	Integral definida	Definir integrais definidas; Relacionar algumas integrais definidas com a área da região limitada pela função em algum intervalo; definir o Teorema Fundamental do Cálculo.	Não	EOT e EOI
Atividade X sala	Calculando as integrais definidas e estudando áreas	Fixar a Integral definida e verificar quais delas podem corresponder à área limitada pela função no intervalo dado.	Sim	EOP e EOI
Atividade XI sala: Desafio	Desafio: frações parciais	Rever fatoração de polinômios e frações parciais	Não	EOT e EOI
Atividade XII sala	Integração por decomposição em Frações Parciais	Definir frações parciais; Definir Integração por decomposição em Frações Parciais	Não	EOP, EOT e EOI
Atividade XIII casa	Integração por decomposição em Frações Parciais	Fixar a Técnica de Integração por decomposição em Frações Parciais; Identificar quais das integrais do exercício podem representar áreas.	Sim	EOP e EOI
Atividade XIV sala	Integrais	Identificar qual a técnica adequada para resolução das integrais.		EOP e EOI
Atividade XV casa	Integrais	Identificar qual a técnica adequada para resolução das integrais; Identificar quais das integrais do exercício podem representar áreas.	Sim	EOP, EOT e EOI
Atividade XVI sala	Integrais	Estudar áreas por meio de integrais definidas	Não	EOP
Atividade		Certificar a aprendizagem; Conhecer as		

XVII: sala Avaliação	Integrais	técnicas de integração estudadas; calcular integrais definidas e indefinidas; representar graficamente uma integral definida; utilizar integrais em exercícios aplicados.	Não	EOP, EOT e EOI

Fonte: Elaborado pela autora

ATIVIDADE I – DESCOBRINDO A OPERAÇÃO INTEGRAÇÃO

DEFINIÇÃO 1: Uma função F é uma primitiva (ou antiderivada) de *f* em um intervalo *I* se
F'(x) = f(x) para qualquer *x* em *I*.
Assim, por exemplo, sabemos que $F(x)= x^3$ é uma primitiva de $f(x)=3x^2$ em IR, uma vez que $F'(x)=3x^2$ em IR.

1)É possível dizer que $F(x)= x^3+4$ é também outra primitiva de $f(x)=3x^2$ em IR? Justifique sua resposta.

2)Dê mais dois exemplos de primitivas de $f(x)=3x^2$ em IR. Justifique sua resposta.

3)Determine uma primitiva para a função $f(x) = x^3$ em IR. Justifique sua resposta.

DEFINIÇÃO 2: O conjunto de todas as primitivas de *f* é chamado integral indefinida de *f* e denotado por $\int f(x)dx = F(x) + C$.

1)Calcule a integral indefinida para cada função abaixo e justifique sua resposta:

$a)\int x^4 dx$

$b)\int x^2 dx$

$c)\int (x+1)dx$

2)Como você já aprendeu a calcular a derivada de vários tipos de funções, sabe também determinar uma primitiva para várias funções. Complete o quadro seguinte, determinando o valor de algumas derivadas e das integrais indefinidas, justificando como fez para obter cada resposta.

Derivadas	Integral indefinida	Justificativa
$\left(x^{n+1}\right)` = (n+1)x^{(n+1)-1} = (n+1)x^{n}$	$\int x^{n}\mathrm{dx} =$ (para $n \neq -1$)	
$(\ln x)` = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} =$	
$\left(a^{x}\right)` = a^{x}\ln a$	$\int a^{x}dx =$	
$\left(e^{x}\right)` =$	$\int e^{x}dx =$	
$(\cos x)` = -senx$	$\int senxdx =$	
$(senx)` =$	$\int \cos xdx =$	
$(tgx)` =$	$\int \sec^{2}xdx =$	
$(cotgx)` = -cos\sec^{2}x$	$\int \cos\sec^{2}xdx =$	
$(\sec x)` = \sec x \cdot tgx$	$\int \sec xtgxdx =$	
$(kx)` = k \quad k \in IR$	$\int k\,dx = \quad k \in IR$	

3)A função $F(x) = \cos x - x^{2} + \ln|x| + c$ é a integral indefinida da função $f(x) = -senx - 2x + \frac{1}{x}$. Você saberia justificar por quê?

4)***Desafio***: Encontre a primitiva mais geral de $f(x) = 2\cos x + \sqrt{x} - 3\sec^2 x$, justificando sua resposta.

5)***Desafio***: Uma partícula desloca-se sobre o eixo *y* e sabe-se que no instante t, t ≥ 0, a velocidade é v(t) = $\dfrac{dy}{dt} = 2t + 1$. Sabe-se ainda que no instante t = 0 a partícula encontra-se na posição y = 1. Determine a posição y = y(t) da partícula no instante *t*.

ATIVIDADE II – Para casa - FIXANDO AS INTEGRAIS IMEDIATAS

1)Calcule as integrais indefinidas abaixo, detalhando as passagens feitas:

$a)\int x\, dx$

$b)\int -3\, e^{x}\, dx$

$c)\int -sen\, x\, dx$

$d)\int 8^{x} \ln 8\, dx$

$e)\int 5^{x}\quad dx$

$f)\int 2(x-3)\, dx$

$g)\int \; 6\cos x dx$

$h)\int (1-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\, dx$

$i)\int (-e^{x} - \frac{1}{x} + 5x^{6})dx$

$j)\int (3^{x} \ln 3 - \frac{11}{x} - 5)dx$

$k)\int (4x^{3} + x^{4} + 2senx)dx$

Introduzindo integrais por substituição simples

2)Uma primitiva da função $f(x) = 4sen(4x)$ é a função $F(x) = -\cos(4x)$, pois $F'(x) = -\left[-sen(4x) \cdot 4\right] = 4sen(4x)$.

Agora é a sua vez, determine uma primitiva para a função $f(x) = \cos(5x)$:

3)A integral $\int \left(x^2 + 2\right)^3 \cdot 2x dx = \dfrac{\left(x^2 + 2\right)^4}{4} + c$. Esse resultado está correto? Justifique sua resposta.

4)Com base no exercício anterior calcule a integral $\int \left(x + 2\right)^2 dx$. Justifique sua resposta.

ATIVIDADE III - INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO SIMPLES

Existem funções para as quais não conseguimos determinar uma primitiva usando a tabela de integrais imediatas. Por exemplo, na integral $\int \sqrt{x^2+3}\cdot 2xdx$ o integrando é um produto de duas funções $f(g(x))=\sqrt{x^2+3}$ com $g(x)=x^2+3$ e $h(x)=2x$

1)Que relação é possível estabelecer entre as funções do integrando g(x) e h(x)?

2)É possível dizer que uma primitiva de $\sqrt{x^2+3}\cdot 2x$ é $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}$?

Justifique sua resposta.

3)Se fizermos uma mudança de variável chamando $u=x^2+3$ *temos* $f(u)=\sqrt{u}$ *e* $2xdx=du$ então a integral $\int\sqrt{x^2+3}\cdot 2xdx=\int\sqrt{u}du.$

a) Resolva a integral $\int\sqrt{u}du$ por integrais imediatas:

b) Volte para variável original e complete: $\int\sqrt{x^2+3}\cdot 2xdx=$

4)Resolva a integral $\int\left(x^3+1\right)^4\cdot 3x^2dx.$

a)Descreva a relação entre as funções do integrando.

b)Faça a mudança de variável adequada.

c)Resolva a nova integral obtida e retorne à variável original.

Técnica de Substituição Simples

Teorema: Se u = g(x) for uma função derivável, cuja imagem é um intervalo *I* e f for contínua em *I*, então $\int f(g(x)) \cdot g`(x)dx = \int f(u)du$.

A técnica é usada quando o integrando é uma função composta multiplicada pela sua derivada (a menos de uma constante).

Se a integral é do tipo $\int f(g(x)) \cdot g`(x)dx$ devemos fazer a substituição $u = g(x)$ $e$ $du = g`(x)dx$ ficando a integral $\int f(u) \cdot du$.

Resolvemos a integral imediata em função de *u* encontrando F(u) + c e finalmente retornamos à variável original, usando o fato que u=g(x).

5)Usando a ***Técnica de Substituição Simples***, calcule as integrais abaixo:

$a)\int 2sen(2x)dx$

$b)\int \sqrt{x^3 + x}\left(3x^2 + 1\right)dx$

$c) \int 5e^{5x} dx$

$d) \int (7x-5)^2 dx$

ATIVIDADE IV – Para casa - FIXANDO A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO SIMPLES

1)Consulte livros de Cálculo Diferencial e Integral vol. 1 e elabore uma lista com cinco integrais que podem ser resolvidas pela Técnica de Substituição Simples.

ATIVIDADE V – Para casa - FIXANDO A INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO SIMPLES

1)O que existe de comum nas seguintes integrais?

$\int e^{x^2-4x}(2x-4)dx$ $\quad$ $\int (x^2+3)sen(x^3+9x)dx$ $\quad$ $\int \frac{5x^4-4x^3}{x^5-x^4}dx$

$\int e^x \cos(e^x)\, dx$ $\quad$ $\int \sqrt{x+1}\, dx$ $\quad$ $\int tg\, x dx$

2)R

esolva-as.

ATIVIDADE VI - TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

Nem sempre é possível resolver as integrais usando a técnica de substituição simples. A técnica não é aplicável para resolver, por exemplo, a integral $\int xe^x dx$. Verifique:

Quando temos integrais do tipo $\int [f(x) \cdot g(x)] dx$ cujo integrando é um produto de duas funções entre as quais não existe uma relação de derivação, não podemos recorrer à Técnica de Substituição Simples. Voltemos um pouco, recordando a regra de derivação do produto de duas funções:

Sejam u e v funções deriváveis de x, tais que $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$.

Vamos integrar ambos os termos em relação a x e rearranjá-los:

$$\int \frac{d}{dx}(u \cdot v)dx = \int \left(\frac{du}{dx} \cdot v \right) dx + \int \left(u \cdot \frac{dv}{dx} \right) dx$$

subtraindo $\int \left(\frac{du}{dx} \cdot v \right) dx$ em ambos membros

$$\int \frac{d}{dx}(u \cdot v)dx - \int \left(\frac{du}{dx} \cdot v \right) dx = \int \left(u \cdot \frac{dv}{dx} \right) dx$$

escrevendo $\int \left(u \cdot \frac{dv}{dx} \right) dx = \int \frac{d}{dx}(u \cdot v)dx - \int \left(\frac{du}{dx} \cdot v \right) dx$

que pode ser escrita na forma $\int udv = u \cdot v - \int vdu \quad (\mathrm{I})$

A fórmula (I) é usada para calcular integrais pela ***Técnica de Integração por Partes.***

<u>Exemplo:</u> Para resolver a integral $\int xe^x dx$ devemos utilizar a *Técnica de Integração por Partes*:

fazendo $u = x$ temos que $\frac{du}{dx} = 1$ e portanto $du = dx$.

Sendo $dv = e^x dx$ integramos para determinar v

$v = \int e^x dx = e^x + c$ (fazemos $c = 0$).

Usando a formula (I) temos:
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$
$$= e^x(x-1) + C$$

Tarefas:

1)Calcule as seguintes integrais utilizando a Técnica de integração por partes. Para cada integral escolha a função que será chamada de *u*, justificando:

$a)\int (x+3)e^x dx$

$b)\int x.senx\, dx$

$c)\int \ln x dx$

ATIVIDADE VII – Para casa - FIXANDO A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

1)Resolver as integrais abaixo:

$a)\int (5x+2)e^{2x}dx$

$b)\int 3x.cos x\, dx$

$c)\int x\ln x\, dx$

$d)\int 3x\cos(3x)dx$

$e)\int \ln(4x+1)dx$

Para algumas integrais, devemos utilizar a *Técnica de Integração por Partes* mais de uma vez.

Veja o exemplo:

1) Seja a integral $\int (senx \cdot e^x)dx$

Fazendo $u = senx$ temos que $\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow du = \cos x dx$

Tomamos $dv = e^x dx$, integrando temos $v = \int e^x dx = e^x + C$ e fazendo C = 0, $v = e^x$.

Assim, usando a fórmula de integração por partes $\int (senx \cdot e^x)dx = senx \cdot e^x - \int (e^x \cdot \cos x)dx$

A integral do segundo membro é resolvida usando a integração por partes novamente.

Escolhemos $u = \cos x$ temos que $\frac{du}{dx} = -senx \Rightarrow du = (-senx)dx.$

Tomamos $dv = e^x dx$, logo $v = e^x$ conforme já vimos.

A integral $\int (e^x \cdot \cos x)dx = e^x \cdot \cos x + \int (e^x \cdot senx)dx.$

Substituindo na integral que desejamos calcular temos $\int (e^x senx)dx = senx \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - \int (e^x senx)dx$

Percebemos que a integral do segundo membro é igual a integral original.

Assim somando em ambos membros a integral $\int (e^x senx)dx$ temos,

$$\int (e^x senx)dx + \int (e^x senx)dx = senx \cdot e^x - \cos x \cdot e^x$$

$$2\int (e^x senx)dx = senx \cdot e^x - \cos x \cdot e^x$$

colocando e^x em evidência, dividindo por 2 e acrescentando a constante de integração C

temos o resultado da integral $\int (e^x senx)dx = \frac{e^x (senx - \cos x)}{2} + C$

2) Resolver o exemplo 1, escolhendo $u = e^x$

3)Calcule a integral $\int 3x^2 \cdot e^x dx$:

4) **Desafio:** Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após *t* segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros *t* segundos?

ATIVIDADE VIII - Laboratório de Informática - ÁREA

1.Calcule a área da região plana compreendida pela função $f(x)=x+1$ pelo eixo *x* e pelo eixo *y*.

<u>PROCESSO DE CONSTRUÇÃO:</u>

Aproximação da área sob a reta no intervalo [-1, 0] por meio das ferramentas do Geogebra:

1.1 Plote o gráfico de parábola f(x) = x + 1, localizando a região A compreendida pela reta, pelo eixo *x* e pelo eixo *y*.

1.2 Use o comando *soma inferior* do Geogebra para determinar as somas das áreas dos retângulos cujas bases são 1/n, no intervalo I_1 =[-1, 0], onde *n* representa a quantidade de retângulos (número de partições). Use o comando seletor para definir a variável *n*, no intervalo [0, 100] e incremento 1.

1.3 No *menu* “Opções”do Geogebra, configure “Arredondamento”para 5 casas decimais.

1.4 Observe e anote as somas inferiores parciais para n=10, n=50 e n=100.

1.5 Visualize as somas inferiores parciais ativando “Animação”no seletor.

1.6 Utilize o seletor do Geogebra no intervalo de 0 a 100 para fazer uma estimativa da área sob a reta.

1.7 Altere o parâmetro “Max”do seletor, respectivamente para 500, 1000, 10000, 100000 e verifique para que valor as “somas inferiores”convergem.

1.8 Refaça as etapas anteriores para o comando “Somas Superiores”.

1.9 Analisando os resultados das somas inferiores e das somas superiores o que você observa?

1.10 Agora use a fórmula da Geometria Euclidiana para calcular a área do triângulo formado pela função dada e pelos eixos *x* e *y*. Compare o resultado com os das somas inferiores e superiores.

1.11 Salve as atividades no *menu* “Arquivo” – Gravar como Área de Trabalho colocando as iniciais da dupla AP_E1, como exemplo, AP são as inicias de Antônio e Paula E1(Exercício 1). Enviar para o *e-mail* da professora:

2. Calcule a área da região plana compreendida pela função $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ pelo eixo *x* e pela reta vertical x = 2 usando as ferramentas do Geogebra. (Faça como a Tarefa 1).

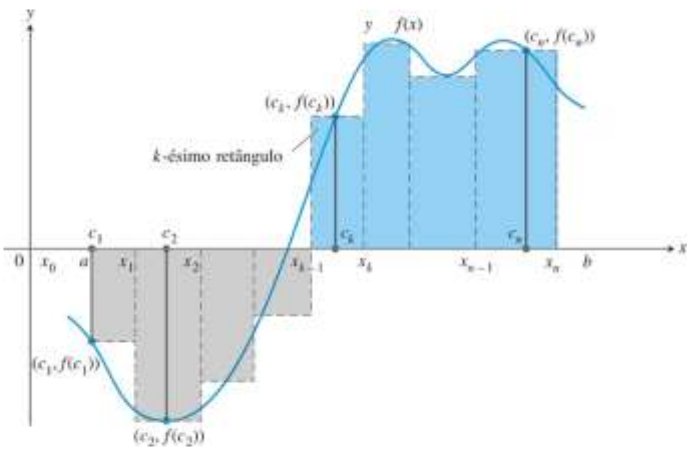
ATIVIDADE IX- INTEGRAL DEFINIDA

Definição de integral definida: Se *f* é uma função contínua definida em um intervalo fechado [a, b], dividimos o intervalo em *n* subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = (b-a)/n$. Sejam $x_0(= a)$, $x_1, x_2, ..., x_n(= b)$ as extremidades desses subintervalos, escolhemos os números c_k arbitrariamente nos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

Então a **integral definida de *f* em [a, b]** é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \quad (1)$$ desde que esse limite exista.

Se o limite dado em (1) existir, dizemos que *f* é integrável em [a, b].



É possível relacionar a Atividade VIII (Laboratório de informática) com a definição acima?

Uma Interpretação para a integral definida:

Se y = f(x) for não negativa e integrável em um intervalo fechado [a, b], então a área sob a curva de y = f(x) desde *a* até *b* será a integral definida de *f* no intervalo [a, b].

Como é complicado calcular a área por meio do limite do somatório, temos uma maneira de fazê-lo por meio do *Teorema Fundamental do Cálculo*, veja a seguir:

O Teorema Fundamental do Cálculo

Parte 1

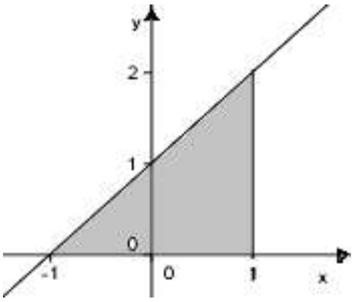
Se *f* for contínua em [a, b], então a função *g* definida por

$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \le x \le b$ é contínua em [a, b] e derivável em (a, b) e g'(x) = f(x).

Parte 2

Se *f* é contínua em todo ponto do intervalo [a, b] e se F é qualquer primitiva de *f* em [a, b], então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

Exemplo 1: Seja $f(x) = x + 1$ no intervalo $[-1,1]$. Seja a região limitada por *f*, pelo eixo *x* e pela reta x = 1 que é representada pelo gráfico abaixo:



Resolvendo a integral definida dessa função temos:

$$\int_{-1}^{1}(x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} + 1 - \left[\frac{(-1)^2}{2} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1$$

$$= 2$$

1) O que a integral definida do exemplo anterior pode representar?

Exemplo 2: Seja a função $f(x) = \sqrt{(x^2+4)} \cdot 3xdx.$

Calcule a integral definida da função f(x) no intervalo [-1, 0]:

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2+4} \cdot 3xdx \quad \text{seja } u = x^2 + 4$$

$$\Rightarrow du = 2xdx \ \text{ logo } \ \frac{du}{2} = xdx$$

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2+4} \cdot 3xdx = \int_{5}^{4} \sqrt{u}\, 3\frac{du}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{u^3} \Bigg|_{5}^{4}$$

$$= \sqrt{4^3} - \sqrt{5^3}$$

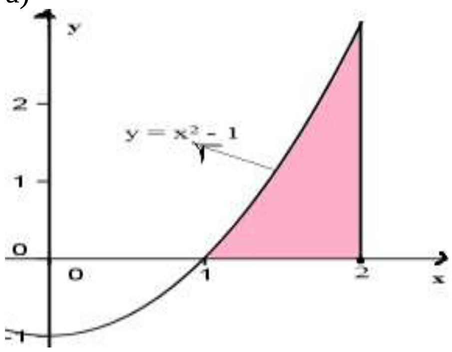
$$= 8 - 5\sqrt{5}$$

$$\cong -3{,}18$$

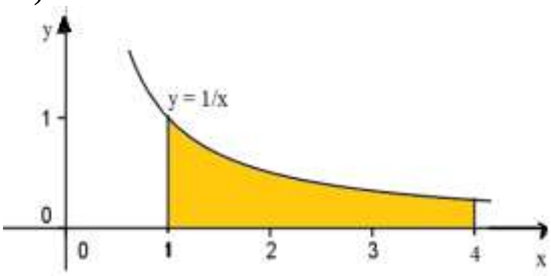
2) Essa integral definida pode representar a área limitada pela curva no intervalo dado?

3) Expresse por meio de uma integral definida a área de cada região sombreada e calcule seu valor:

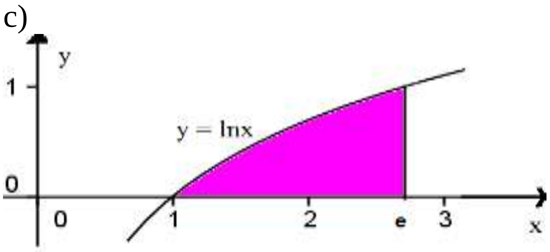
a)



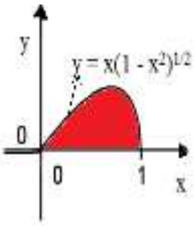
b)



c)



d)



ATIVIDADE X – Para Casa - CALCULANDO AS INTEGRAIS DEFINIDAS E ESTUDANDO ÁREAS

1)Calcule as integrais definidas e diga qual a técnica utilizada:

$a)\int_{2}^{5}(x^3+x)dx$

$b)\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sen(3x)dx$

$c)\int_{-1}^{0}\left(\frac{2}{2x+6}\right)dx$

$d)\int_{0}^{1} 3x\cdot e^{x^2}\,dx$

2)Represente graficamente a função *f*, no intervalo indicado e calcule a integral definida:

$a)\ f(x) = -3 \quad [3,5]$

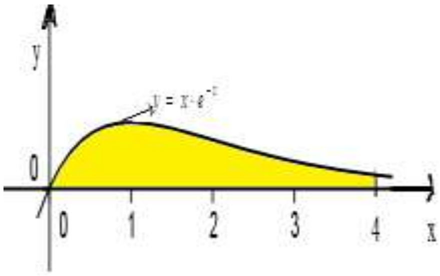
$b)\ f(x) = 5x + 10 \quad [-4,0]$

$c)\ f(x) = -x^2 + 4 \quad [0,2]$

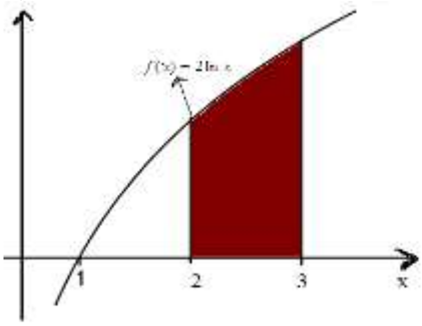
3.Quais das integrais definidas acima podem ser consideradas as áreas das regiões limitadas pela curva de *f*, acima do eixo *x* e entre o intervalo dado?

4.Calcule as áreas das regiões sombreadas:

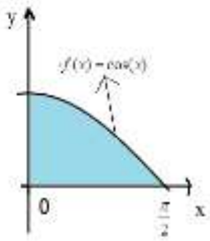
a)



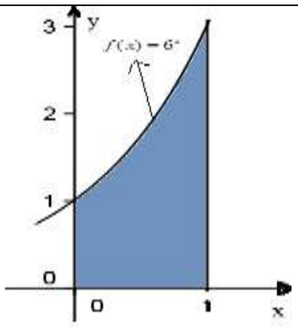
b)



c)



d)


y
3
2
1
0
0
1
x

ATIVIDADE XI - DESAFIO – ATIVIDADE SALA

Como resolver a integral $\int \left(\frac{x+7}{x^2+x-6} \right) dx$

1)É possível fatorar o denominador? É Possível escrever o denominador como o produto de dois fatores do 1º grau? Escreva.

2)Seria possível escrever a fração do integrando como a soma de duas frações cujos denominadores são fatores de 1º grau? Como proceder?

3)A partir do que você descobriu nos itens 1 e 2, é possível resolver a integral? Resolva.

ATIVIDADE XII - INTEGRAÇÃO POR DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

Vamos estudar a técnica de integração conhecida como Decomposição em frações parciais. Essa técnica envolve a decomposição de uma fração racional na soma de duas ou mais frações parciais com denominadores do 1º grau.

Frações Parciais:

Um Teorema da Álgebra diz que qualquer função racional, não importa quanto seja complicada, pode ser reescrita como uma soma de frações simples, ou seja, qualquer função, racional *p(x)/q(x)*, onde *"p(x)"* e "*q(x)"* são polinômios, com grau de *p(x)* menor que o grau de *q(x)*, pode ser escrita como a soma de funções racionais (frações parciais). Fatore q(x) e escreva uma equação da forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \text{(soma de fracoes parciais)}$$

Para cada fator linear *diferente* da forma ax+b, o lado direito da equação deve incluir um termo da forma

$$\frac{A}{ax+b}$$

Para cada fator linear *repetido* da forma (ax + b)^n, o lado direito da equação deve incluir *n* termos da forma:

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\dots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Se o grau de p(x) não é inferior ao grau de q(x), use a divisão para chegar à forma adequada.

Exemplo 1: Escreva a fração $\frac{x}{2x^2-x-1}$ em frações parciais:

Seja $\frac{x}{2x^2-x-1}$ primeiro deve-se fatorar o denominador

$2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$ e escrever da forma

$$\frac{x}{2x^2-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x+1} \quad \text{Calcula-se o mmc}$$

$$=\frac{A(2x+1)+B(x-1)}{(x-1)(2x+1)} \quad \text{multiplica-se A e B pelos parenteses}$$

$$=\frac{2Ax+A+Bx-B}{2x^2-x-1} \quad \text{coloca-se x em evidencia}$$

$$=\frac{(2A+B)x+A-B}{2x^2-x-1} \quad \text{e iguala ao numerador de origem}$$

$$\begin{cases} 2A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{3} \;\; e \;\; B=\frac{1}{3}$$

logo $\quad \dfrac{x}{2x^2-x-1}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2x+1}\right)$

De que outra maneira é possível proceder para calcular A, B e C?

Agora é a sua vez, escreva a fração $\dfrac{x}{x^2+2x+1}$, decompondo-a em frações parciais:

Tarefas

1)Calcule cada integral abaixo usando a Técnica por Decomposição em Frações Parciais, explicando detalhadamente a resolução:

a) $\int \left(\dfrac{1}{9-x^2}\right) dx$

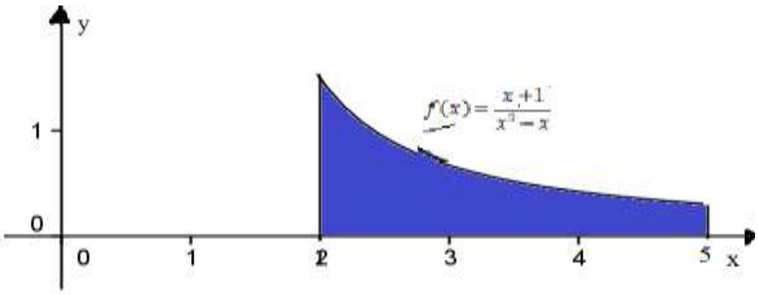
$$b)\int_0^1 \left(\frac{4x-13}{x^2-3x-10} \right) dx$$

$$\text{c)} \int \left(\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} \right) dx$$

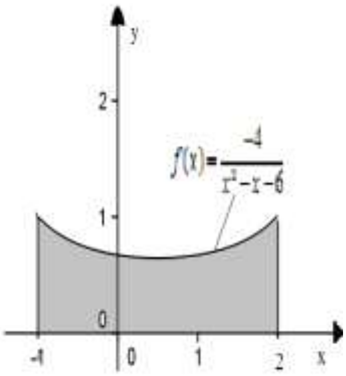
ATIVIDADE XIII – Para Casa - INTEGRAÇÃO POR DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

1)Determine a área da região sombreada:

a)



b)



2)Calcule as integrais:

$$a)\int_0^1 \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} \right) dx$$

$$b)\int_{1}^{2}\left(\frac{x-1}{x^{2}\left(x+1\right)}\right)dx$$

3)Entre as integrais definidas da Tarefa 2, quais as que podem representar a área de uma região plana? Justifique sua resposta, em caso afirmativo indique a região.

Dica: Use o Geogebra para representar graficamente a função do integrando.

ATIVIDADE XIV - INTEGRAIS

Sejam as integrais abaixo. Agrupe-as justificando o porquê de cada grupo e depois as resolva.

$a) \int \frac{dx}{x^2 - 8x + 16}$ $\quad b) \int_0^1 2x\sqrt{9 - x^2}\,dx$ $\quad c) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$ $\quad d) \int_{-1}^{0} e^{2x+1}\,dx$ $\quad e) \int e^x senx\,dx$ $\quad f) \int_2^3 \frac{3dx}{x^2 + x - 2}$

$g) \int_1^2 \frac{x^3 + 2x}{x^2}dx$ $\quad h) \int sen(x^5)x^4\,dx$ $\quad i) \int \frac{(3x^2 + 6x)}{x^3 + 3x^2}dx$ $\quad j) \int \frac{dx}{x^2 - 9}$ $\quad k) \int \ln(x+1)\,dx$ $\quad l) \int (x^2 + 2)e^x\,dx$

ATIVIDADE XV – Para casa - INTEGRAIS

1)Calcule as integrais abaixo dizendo qual a técnica apropriada.

$$a)\int_0^2 (x^4 + 5x + \sqrt[3]{x^2} + 3)dx$$

$$b)\int \left(\frac{2x+3}{x^2-1}\right)dx$$

$$c)\int_0^1 (x^2+3)sen(x^3+9x)dx$$

$$d)\int (2x+2)senx\,dx$$

$$e)\int_2^3 (x\ln x)dx$$

$$f)\int \frac{2}{x^2-4x+4}dx$$

$$g)\int_0^{\frac{\pi}{6}} 5\cos(3x)dx$$

$$h)\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

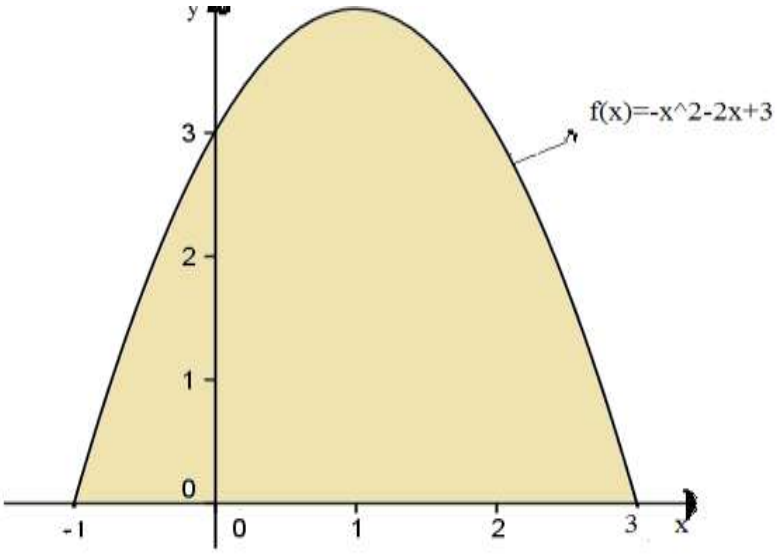
2)Dentre as integrais definidas da Tarefa 1, quais as que podem representar a área de uma região plana? Justifique sua resposta, indicando, em caso afirmativo, a região.

Dica: Use o Geogebra para representar graficamente do integrando.

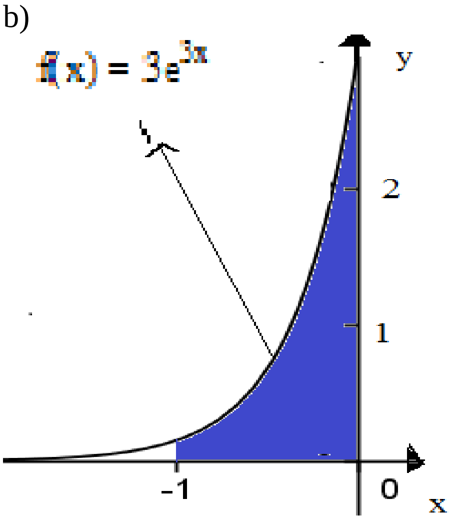
ATIVIDADE XVI - INTEGRAIS

1)Calcule as áreas sombreadas abaixo:

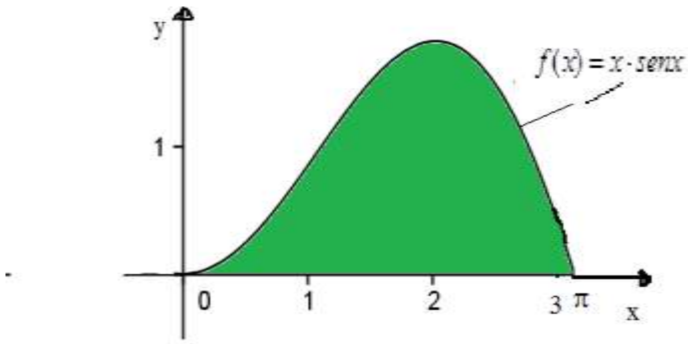
a)



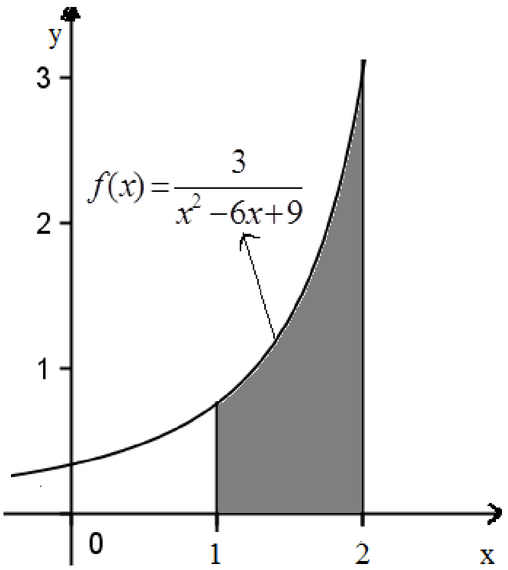
b)



c)



d)



ATIVIDADE XVII – AVALIAÇÃO - TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

1)Indique o número da Técnica de Integração mais adequada para resolver cada integral:

1-Integrais imediatas;
2-Substituição simples;
3-Integração por partes;
4-Decomposição em frações parciais.

( ) $\int_{1}^{2}\left(2^{3x+1}\right)dx$

( ) $\int\left(\frac{5}{x^2+6x+9}\right)dx$

( ) $\int sen(x^4+2x)\cdot\left(4x^3+2\right)dx$

( ) $\int_{2}^{3} e^{2x}(4x+5)dx$

( ) $\int_{0}^{1}(\sqrt[3]{x}-6x^2+10)dx$

( ) $\int\left(\frac{\sec^2 x}{3}\right)dx$

( ) $\int_{-3}^{-2}\left(\frac{x+5}{x^3-x}\right)dx$

( ) $\int\left(x\cdot\ln x\right)dx$

2)Escolha uma integral de cada uma das Técnicas de integração da questão anterior e resolva-as.

3)a) Dê um exemplo de uma integral definida que pode representar a área de uma determinada região plana, justificando.

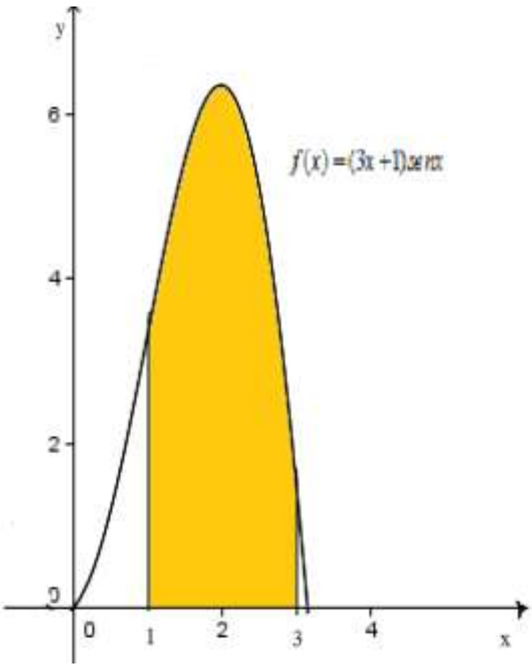
b) Represente graficamente a região e resolva a integral.

4)Uma partícula desloca-se sobre o eixo *y* e sabe-se que no instante t, t≥0, a velocidade é

$v(t) = \dfrac{dy}{dt} = t^2 + t + 2$. Sabe-se ainda que no instante t = 0 a partícula encontra-se na posição

y = 2. Determine a posição y = y(t) da partícula no instante *t*.

5)Expresse por meio de uma integral e calcule a área da região sombreada:



REFERÊNCIAS

CARPENTER, Thomas P. LEHRER, Richard. *Teaching and Learning Mathematics with Understanding***.** In: FENNEMA, Elizabeth; ROMBERG, Thomas. Ed. **Mathematics Classrooms that Promote Understanding**, p 19-32.Lawrence Erllaum Associates. New Jersey, 1999.

FROTA, Maria Clara Rezende. Estilos de aprendizagem matemática e autocontrole do processo de aprendizagem. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates, p. 59-79. Recife: SBEM, 2009.

FROTA, M. C. R. Estilos de Aprendizagem Matemática de Estudantes da Área de Ciências Sociais Aplicadas. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

FROTA, M. C. R. **O pensar matemático no ensino superior**: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos. 287 p. 2002. Tese (Doutorado em Educação) – UFMG, Belo Horizonte.

PERKINS, David. Teaching for understanding. In: **The Professional Journal of the American Federation of Teachers**; v17 n3, pp. 8, 28-35, Fall 1993.

PERKINS, David; GARDNER, Howard; WISKE, Martha Stone; PERRONE, Vito. What is Understanding? In: WISKE, Martha Stone. **Teaching for understanding:** Linking research with practice. P. 39-41. 1998