

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS**  
**Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática**

**Anderson Gonçalves Siqueira**

**DAS CÔNICAS AOS CILINDROS E QUÁDRICAS:**  
**a transição do plano para o espaço tridimensional**

**Belo Horizonte**

**2018**

Anderson Gonçalves Siqueira

DAS CÔNICAS AOS CILINDROS E QUÁDRICAS:  
a transição do plano para o espaço tridimensional

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudaes

Belo Horizonte

2018

#### FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| S618d | <p data-bbox="454 1285 1345 1422">Siqueira, Anderson Gonçalves<br/>Das cônicas aos cilindros e quádricas: a transição do plano para o espaço tridimensional / Anderson Gonçalves Siqueira. Belo Horizonte, 2018.<br/>202 f. : il.</p> <p data-bbox="454 1444 1345 1534">Orientador: João Bosco Laudares<br/>Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.<br/>Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática</p> <p data-bbox="454 1601 1345 1758">1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Sequências (Matemática). 3. Geometria analítica - Estudo e ensino. 4. Equações quadráticas. 5. Cilindros. 6. Material didático - Análise. I. Laudares, João Bosco. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.</p> <p data-bbox="710 1780 965 1814">SIB PUC MINAS</p> <p data-bbox="1189 1803 1345 1839">CDU: 51:373</p> |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Ficha catalográfica elaborada por Fernanda Paim Brito - CRB 6/2999

**Anderson Gonçalves Siqueira**

**DAS CÔNICAS AOS CILINDROS E QUÁDRICAS:  
a transição do plano para o espaço tridimensional**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

Prof. Dr. João Bosco Laudares (Orientador/PUC Minas)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Adriana Maria Tonini (CEFET/MG)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Teresinha Fumi Kawasaki (UFMG)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cláudia de Vilhena Schayer Sabino (PUC Minas)

Belo Horizonte, 05 de outubro de 2018.

Dedico esta dissertação aos meus pais, Edir e Nilson (*in memoriam*), aos meus avós maternos, Maria e Messias (*in memoriam*), à minha esposa, Cláudia, e à minha grande amiga, Dona Maria.

Obrigado por todo apoio, amizade, carinho e também, por acreditarem em mim, em meu sucesso. Vocês são os grandes autores desta obra.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por toda obra que fez e faz em minha vida, pela família que tenho, por meu trabalho, saúde e toda a orientação para que eu seja uma pessoa melhor.

Ao meu grande professor orientador, João Bosco Laudares, que contribuiu de maneira inestimável, durante toda a execução e realização deste trabalho, com suas experiências, orientações, sugestões e cobranças.

À minha querida mãe, Edir, e meu saudoso pai, Nilson (*in memoriam*), que sempre me incentivaram na realização deste trabalho, me orientaram e me deram força em todos os momentos.

Aos professores Révero Campos, Suzete, Roberto Elias, Elenice, que foram pessoas importantes em meu processo de formação acadêmica, cultural e pessoal.

Aos grandes amigos Júlio Corgozinho, Marcio Cometti, muito importantes durante toda essa etapa de trabalho.

Aos amigos-irmãos, Flávio, Welinton, Adelson, Joana, Mariana e Miguel, Riza, Sílvia, por acreditarem no sucesso de minha carreira como professor.

À minha esposa, Cláudia, que me apoiou e incentivou na realização de um trabalho de excelência, acreditando em minha competência e sabedoria para a realização do mesmo.

Aos meus amigos das escolas Instituto Eros Gustavo e Newton Amaral, que sempre se preocuparam e me incentivaram em toda a caminhada.

## RESUMO

A pesquisa apresentada nesta dissertação tem como objeto o estudo da transição das cônicas, figuras do espaço bidimensional, para os cilindros e as quádricas do espaço tridimensional. A metodologia de ensino utilizada para a pesquisa de campo se fundamentou numa sequência didática e na informática educativa, explorando e potencializando as habilidades de visualização espacial dos sujeitos da pesquisa. Foram elaboradas duas atividades que abordaram superfícies cilíndricas e superfícies quádricas. O desenvolvimento dessas atividades explorou a construção, primeiro de forma manual, com lápis e papel, e em seguida a utilização de um *software* dinâmico, o *Winplot 3D*. Os sujeitos da pesquisa foram graduandos de engenharia de uma faculdade da rede privada de ensino da região metropolitana de Belo Horizonte/MG. A análise qualitativa dos resultados evidenciou a potencialização da capacidade de visualização por parte dos sujeitos da pesquisa, assim como suas conjecturas e análises durante o desenvolvimento das atividades. Como produto final, elaborou-se um *Caderno de Atividades*, que compõe o apêndice desta dissertação e que servirá de ponto de partida para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

**Palavras-chave:** Cônicas, Cilindros, Quádricas, Sequência didática, Visualização.

## ABSTRACT

The research presented in this dissertation has as its object the study of the conic transition, two-dimensional space figures, to the cylinders and the quadrics of the three-dimensional space. The methodology was based on the didactic sequence and in the educational computing, promoting the skills of the subjects of the research with the spatial visualization. Two activities were organized that boarded cylindrical surfaces and quadrics surfaces. The development of these activities explored the construction, first in the manual form with pencil and paper, and after the use of a dynamic software, the *Winplot 3D*. The subjects of the research were graduating students of Engineering of a private college in the metropolitan region of Belo Horizonte/MG. The qualitative analysis of the results showed up the potentiation of the visual capacity of the subject of the research, as well as theirs conjectures and analysis during the development of the activities. As final product, there was elaborated a schedule of activities that composes the appendix of this dissertation that will serve of starting point for the development of future works.

**Keywords:** Conic, Cylinders, Quadrics, Didactic Sequence, Visualization.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Cilindro elíptico.....                                                       | 35 |
| Figura 2 – Cilindro hiperbólico.....                                                    | 35 |
| Figura 3 – Elipsoide.....                                                               | 36 |
| Figura 4 – Cilindro parabólico.....                                                     | 37 |
| Figura 5 – Cilindro hiperbólico.....                                                    | 37 |
| Figura 6 – Paraboloide elíptico.....                                                    | 38 |
| Figura 7 – Paraboloide hiperbólico (Sela). ....                                         | 38 |
| Figura 8– Cálculo de um elipsoide. ....                                                 | 39 |
| Figura 9 – elipsoide de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .....                             | 39 |
| Figura 10 – Etapas de construção de um paraboloide hiperbólico.....                     | 40 |
| Figura 11 – Quadro-síntese: Gráfico de quádras com suas respectivas equações. ....      | 41 |
| Figura 12 – Parábola e seus elementos. ....                                             | 47 |
| Figura 13 – Cilindro parabólico construído no <i>Winplot 3D</i> . ....                  | 48 |
| Figura 14 – Etapas de construção do cilindro parabólico.....                            | 49 |
| Figura 15 – Círculo e seus elementos.....                                               | 49 |
| Figura 16 – Cilindro circular construído no <i>Winplot 3D</i> . ....                    | 50 |
| Figura 17 – Etapas de construção do cilindro circular.....                              | 51 |
| Figura 18 – Elipse e seus elementos. ....                                               | 52 |
| Figura 19 – Cilindro elíptico construído no <i>Winplot 3D</i> .....                     | 52 |
| Figura 20 – Etapas de construção do cilindro elíptico.....                              | 53 |
| Figura 21 – Hipérbole e seus elementos.....                                             | 54 |
| Figura 22 – Cilindro hiperbólico.....                                                   | 54 |
| Figura 23– Etapas de construção do cilindro hiperbólico. ....                           | 55 |
| Figura 24 – Comandos iniciais para a construção da Parábola no <i>Winplot 3D</i> . .... | 57 |
| Figura 25 – Construção da curva parabólica.....                                         | 57 |
| Figura 26 – Construção do plano tridimensional. ....                                    | 58 |
| Figura 27 – Construção dos pontos da parábola no plano XY. ....                         | 58 |
| Figura 28 – Construção da curva parabólica no plano XY. ....                            | 59 |
| Figura 29 – Construção dos pontos no espaço tridimensional. ....                        | 59 |
| Figura 30 – Construção da curva parabólica no espaço tridimensional. ....               | 60 |
| Figura 31 – Construção da superfície parabólica no espaço tridimensional. ....          | 60 |
| Figura 32 – Preenchimento da superfície tridimensional.....                             | 60 |

|                                                                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 33 – Item 1 – Construindo cilindros parabólicos no espaço tridimensional usando lápis e papel. ....               | 61 |
| Figura 34 – Item 2 – Construindo cilindros parabólicos no espaço tridimensional usando <i>software Winplot 3D</i> . .... | 62 |
| Figura 35 – Gráfico da curva de equação $y = x^2 + 1$ . ....                                                             | 63 |
| Figura 36 – Etapas de construção da curva de equação $y = x^2 + 1$ com <i>software Winplot 3D</i> . ....                 | 64 |
| Figura 37 – Gráfico da curva de equação $z = x^2$ . ....                                                                 | 65 |
| Figura 38 – Construindo cilindros circulares no espaço tridimensional. ....                                              | 66 |
| Figura 39 – Construção de cilindros circulares com <i>software Winplot 3D</i> . ....                                     | 66 |
| Figura 40 – Superfície gerada pelo software. ....                                                                        | 67 |
| Figura 41 – Construção manual do cilindro circular com o centro fora da origem do plano XY. ....                         | 67 |
| Figura 42 – Construção de cilindro elíptico no espaço tridimensional. ....                                               | 68 |
| Figura 43 – Construção da curva de equação $(x - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$ com lápis e papel. ....                           | 69 |
| Figura 44 – Construção da elipse de equação $y^2 - x^2 = 1$ com lápis e papel. ....                                      | 69 |
| Figura 45 – Construção das retas oblíquas ao plano XY. ....                                                              | 72 |
| Figura 46 – Construção das circunferências concorrentes com as retas. ....                                               | 72 |
| Figura 47 – Elipsoide construído no <i>Winplot 3D</i> . ....                                                             | 73 |
| Figura 48 – Desenvolvimento do Paraboloide circular. ....                                                                | 74 |
| Figura 49 – Hiperboloide elíptico de uma folha construído no <i>Winplot 3D</i> . ....                                    | 75 |
| Figura 50 – Hiperboloide elíptico de duas folhas construído no <i>Winplot 3D</i> . ....                                  | 76 |
| Figura 51 – Etapas de construção do cilindro parabólico. ....                                                            | 81 |
| Figura 52 – Sujeitos da pesquisa desenvolvendo as atividades no <i>Winplot 3D</i> . ....                                 | 82 |
| Figura 53 – Construção do gráfico de equação $y = -x^2$ por D4. ....                                                     | 83 |
| Figura 54 – Construção do gráfico de equação $y = -x^2$ por D7. ....                                                     | 84 |
| Figura 55 – Construção da curva de equação $y = -x^2$ no plano XY do espaço tridimensional por D4. ....                  | 85 |
| Figura 56 – Construção da curva de equação $y = -x^2$ no plano XY do espaço tridimensional por D7. ....                  | 85 |
| Figura 57 – Superfície Cilíndrica construída no espaço tridimensional por D4. ....                                       | 86 |
| Figura 58 – Superfície Cilíndrica construída no espaço tridimensional por D7. ....                                       | 87 |
| Figura 59 – Superfície Cilíndrica construída no espaço tridimensional por D3. ....                                       | 87 |
| Figura 60 – Curva construída por D2. ....                                                                                | 88 |
| Figura 61 – Cilindro Parabólico construído por D2 utilizando o <i>Winplot 3D</i> . ....                                  | 88 |

|                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 62 – Construção do cilindro Parabólico pela dupla D8 com o <i>Winplot 3D</i> .....                                 | 89  |
| Figura 63 – Esboço do gráfico de equação $y = x^2 + 1$ por D1. ....                                                       | 90  |
| Figura 64 – Esboço do gráfico de equação $y = x^2 + 1$ por D6. ....                                                       | 90  |
| Figura 65 – Esboço do gráfico de equação $y = x^2 + 1$ por D5. ....                                                       | 91  |
| Figura 66 – Esboço do gráfico de equação $y = x^2 + 1$<br>no plano bidimensional e tridimensional.....                    | 92  |
| Figura 67 – Resposta da dupla D8.....                                                                                     | 92  |
| Figura 68 – Cilindro feito pela dupla D8. ....                                                                            | 93  |
| Figura 69 – Cilindro feito pela dupla D9. ....                                                                            | 93  |
| Figura 70 – Superfície cilíndrica de equação $y = x^2 + 1$<br>construída no <i>software Winplot 3D</i> pela dupla D1..... | 94  |
| Figura 71 – Gráfico de equação $z = x^2$ construído pela dupla D2.....                                                    | 95  |
| Figura 72 – Gráfico da equação $z = x^2$ construída pela dupla D6.....                                                    | 95  |
| Figura 73 – Gráfico da equação $z = x^2$ construída pela dupla D4.....                                                    | 97  |
| Figura 74 – Esboço da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$<br>feito pela dupla D7. ....                              | 98  |
| Figura 75 – Gráfico da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ no espaço<br>tridimensional esboçado pela dupla D7.....  | 99  |
| Figura 76 – Superfície esboçada pela dupla D7.....                                                                        | 100 |
| Figura 77 – Esboço da circunferência com centro<br>fora da origem pela dupla D1. ....                                     | 101 |
| Figura 78 – Esboço da circunferência com centro<br>fora da origem pela dupla D2 .....                                     | 101 |
| Figura 79 – Esboço de um cilindro circular com o<br>centro fora da origem do espaço tridimensional pela dupla D1.....     | 102 |
| Figura 80 – Resposta da dupla D4.....                                                                                     | 103 |
| Figura 81 – Esboço de um cilindro circular pela dupla D4. ....                                                            | 103 |
| Figura 82 – Esboço de um cilindro circular da dupla D2. ....                                                              | 103 |
| Figura 83 – Esboço da curva de equação $x^{24} + y^{29} = 1$<br>feito pela dupla D3. ....                                 | 105 |
| Figura 84 – Cilindro circular esboçado pela dupla D5.....                                                                 | 106 |
| Figura 85 – Esboço do cilindro circular pela dupla D6. ....                                                               | 106 |
| Figura 86 – Elipse construída no plano bidimensional pela dupla D6. ....                                                  | 107 |
| Figura 87 – Esboço do cilindro elíptico feito pela dupla D6.....                                                          | 108 |
| Figura 88 – Construção de segmentos oblíquos ao<br>plano XY do espaço tridimensional. ....                                | 113 |
| Figura 89 – Construção das circunferências tangentes aos segmentos .....                                                  | 113 |
| Figura 90 – Cone quádrico preenchido. ....                                                                                | 114 |

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 91 – Cone Quádrico construído pela dupla D9<br>com o auxílio do software <i>Winplot 3D</i> . .... | 115 |
| Figura 92 – Etapas de construção do elipsoide com o <i>Winplot 3D</i> . ....                             | 115 |
| Figura 93 – Elipsoide construído pela dupla D9 com o software <i>Winplot 3D</i> . ....                   | 116 |
| Figura 94 – Etapas de construção do parabolóide circular. ....                                           | 117 |
| Figura 95 – Depoimento da dupla D3.....                                                                  | 119 |
| Figura 96 – Depoimento da dupla D4.....                                                                  | 121 |
| Figura 97 – Depoimento da dupla D5.....                                                                  | 122 |
| Figura 98 – Depoimento da dupla D7.....                                                                  | 123 |
| Figura 99 – Depoimento da dupla D3.....                                                                  | 124 |
| Figura 100 – Depoimento da dupla D9.....                                                                 | 125 |
| Figura 101 – Depoimento da dupla D8.....                                                                 | 125 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Quadro 1 – Livros utilizados para análise comparativa do tópico da pesquisa. ....                         | 33 |
| Quadro 2 – Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” nos livros didáticos (Categorias 3 a 6). .... | 43 |
| Quadro 3 – Equações do cilindro parabólico.....                                                           | 48 |
| Quadro 4 – Equações do cilindro circular.....                                                             | 50 |
| Quadro 5 – Equações do cilindro elíptico.....                                                             | 53 |
| Quadro 6 – Equações do cilindro hiperbólico.....                                                          | 55 |
| Quadro 7 – Equações do elipsoide. ....                                                                    | 73 |
| Quadro 8 – Equação parabolóide.....                                                                       | 74 |
| Quadro 9 – Equação do hiperboloide elíptico de uma folha.....                                             | 75 |
| Quadro 10 – Equações do hiperboloide elíptico de duas folhas. ....                                        | 76 |

## LISTA DE GRÁFICOS

|                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| Gráfico 1 – Expectativa dos estudantes. ....                 | 118 |
| Gráfico 2 – Avaliação dos alunos. ....                       | 120 |
| Gráfico 3 – Alunos que conheciam o <i>Winplot 3D</i> . ....  | 121 |
| Gráfico 4 – Alunos que conheciam as figuras planas. ....     | 122 |
| Gráfico 5 – Alunos que conheciam as figuras espaciais. ....  | 123 |
| Gráfico 6 – Avaliação do <i>Caderno de Atividades</i> . .... | 124 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SAC – Sistema de Álgebra por Computador

GT04 – Grupo de Trabalho 04

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

GAAL – Geometria Analítica e Álgebra Linear

## SUMÁRIO

|       |                                                                                                             |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO.....                                                                                             | 17 |
| 1.1   | Justificativa do trabalho .....                                                                             | 18 |
| 1.2   | Objetivos.....                                                                                              | 19 |
| 1.2.1 | Objetivo geral.....                                                                                         | 19 |
| 1.2.2 | Objetivos específicos .....                                                                                 | 19 |
| 1.3   | Objeto e sujeito de estudo .....                                                                            | 19 |
| 1.4   | Metodologia .....                                                                                           | 20 |
| 1.5   | Estrutura da dissertação .....                                                                              | 20 |
| 2     | A VISUALIZAÇÃO DESENVOLVIDA COM A<br>SEQUÊNCIA DIDÁTICA E A INFORMÁTICA NA ÁREA EDUCATIVA.....              | 22 |
| 2.1   | A Geometria Analítica e seu ensino.....                                                                     | 22 |
| 2.2   | A visualização favorece a compreensão conceitual .....                                                      | 24 |
| 2.3   | Ambientes e situações que facilitam a visualização .....                                                    | 26 |
| 2.4   | Informática educativa.....                                                                                  | 28 |
| 2.5   | Práticas educativas e sequência didática .....                                                              | 31 |
| 3     | ANÁLISE, DO CONTEÚDO INVESTIGADO, EM LIVROS DIDÁTICOS.....                                                  | 33 |
| 3.1   | Categoria 1. Apresentação dos cilindros e<br>das quádras quanto à equação.....                              | 34 |
| 3.1.1 | Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 1 .....                                            | 34 |
| 3.1.2 | Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 2 .....                                            | 36 |
| 3.1.3 | Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 3 .....                                            | 36 |
| 3.1.4 | Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 4 .....                                            | 38 |
| 3.2   | Categoria 2. A representação gráfica das figuras completas,<br>com ou sem análise da sua constituição. .... | 41 |
| 3.2.1 | Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 1 .....                                            | 41 |
| 3.2.2 | Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 2 .....                                            | 41 |
| 3.2.3 | Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 3 .....                                            | 42 |



|       |                                                                                                                  |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2.4 | Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 4 .....                                                 | 42  |
| 3.4   | Categorias 3, 4, 5 e 6 – Considerações gerais .....                                                              | 42  |
| 3.5   | Categoria 7. Abordagem com a utilização de algum <i>software</i> ,<br>ou pelo menos a indicação. ....            | 43  |
| 4     | CONSTRUÇÃO DAS ATIVIDADES – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E A<br>INFORMÁTICA PARA FAVORECER A VISUALIZAÇÃO.....           | 44  |
| 4.1   | A parametrização das cônicas e quádricas:<br>uma apresentação teórica .....                                      | 46  |
| 4.1.1 | A equação da parábola e sua parametrização .....                                                                 | 46  |
| 4.1.2 | Cilindro parabólico .....                                                                                        | 48  |
| 4.1.3 | A equação da circunferência e sua parametrização .....                                                           | 49  |
| 4.1.5 | A equação da elipse e sua parametrização .....                                                                   | 51  |
| 4.1.6 | Cilindro elíptico .....                                                                                          | 52  |
| 4.1.7 | A equação da hipérbole e sua parametrização.....                                                                 | 53  |
| 4.1.8 | Cilindro hiperbólico .....                                                                                       | 55  |
| 4.2   | Atividade 1 – Construção dos cilindros quádracos no<br>espaço bidimensional para o espaço tridimensional.....    | 56  |
| 4.2.1 | Atividade Guiada – construção de um cilindro parabólico<br>utilizando o <i>software Winplot 3D</i> .....         | 57  |
| 4.3   | Atividade 2: Construção das quádricas partindo de um<br>plano bidimensional para um espaço tridimensional .....  | 70  |
| 5     | APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS .....                                                                         | 77  |
| 5.1   | Apresentação e análise da aplicação das atividades .....                                                         | 80  |
| 5.1.1 | Atividade 1 – Construção dos cilindros quádracos<br>no espaço bidimensional para o espaço tridimensional.....    | 80  |
| 5.1.2 | Atividade guiada – Construção de um cilindro parabólico<br>com a utilização do <i>software Winplot 3D</i> .....  | 81  |
| 5.1.3 | Atividade 2 – Construção das quádricas partindo de um<br>espaço bidimensional para um espaço tridimensional..... | 110 |
| 6     | ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO .....                                                                                    | 118 |

|   |                                                                                                          |     |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS.....                                                                                | 126 |
|   | REFERÊNCIAS.....                                                                                         | 129 |
|   | APÊNDICE 1 - LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO (Realizado quando da<br>construção do projeto de pesquisa) ..... | 131 |
|   | APÊNDICE 2 - PRODUTO DA PESQUISA.....                                                                    | 143 |

## 1 INTRODUÇÃO

A Matemática, concomitante aos vários processos de educação, evoluiu com o passar dos anos. Seu ensino se mostra instigante e desafiador para estudantes e professores, seja na Educação Básica ou na Superior.

A evolução dos conhecimentos matemáticos foi de fundamental importância para o desenvolvimento de novas tecnologias, exigindo sempre uma interdisciplinaridade de conhecimentos. De fato:

A Matemática por si só é desafiadora e estimulante. Para a solução de um determinado problema, muitas vezes, é necessária a utilização dos mais variados recursos. O ensino é justificado pelo desenvolvimento intelectual que esta disciplina proporciona ao aluno. (ÁVILA, 2010. p. 6)

As dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de Matemática, me direcionaram na busca por metodologias de ensino que proporcionem uma aprendizagem significativa, tanto para alunos do Ensino Médio quanto no Ensino Superior. As ricas experiências vivenciadas por mim durante o curso de Licenciatura Plena em Matemática se juntam a conhecimentos acumulados em dez anos de sala de aula, em vários níveis de ensino, impondo uma busca incessante na melhora da prática docente. O Mestrado trouxe mais parâmetros na construção de uma didática que privilegiasse uma aprendizagem ativa.

Durante os cinco anos lecionando no Ensino Superior, para turmas dos períodos iniciais dos cursos de engenharia, as dificuldades apresentadas pelos alunos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL), e até mesmo no conhecimento de conceitos da Matemática básica, foram desafiadoras. Em particular, observei uma dificuldade acentuada no campo da Geometria Especial, pois grande parte dos alunos não conseguia visualizar uma figura espacial, e muito menos classificá-la de forma correta.

As inquietudes provocadas por essas observações me conduziram ao desenvolvimento de um projeto sobre cônicas e quádricas, base desta dissertação. A compreensão de cônicas, cilindros e quádricas é pré-requisito básico para o desenvolvimento dos alunos em outras disciplinas, especialmente Cálculo Diferencial e Integral.

## 1.1 Justificativa do trabalho

Em pesquisas recentes, são apresentados diversos trabalhos desenvolvidos em níveis médio e superior, sobre Cônicas, Cilindros e Quádricas.

A maioria dos trabalhos é constituída por dissertações de mestrado, que abordam o estudo de cônicas, cilindros e quádras com *softwares* matemáticos que visam à interação entre professor, aluno e conteúdo, buscando proporcionar uma aprendizagem mais significativa para o estudante, tornando-o um agente no processo ensino/aprendizagem.

O conteúdo de cônicas, cilindros e quádras nos cursos da área de exatas (Química, Matemática, Física e Engenharia), no Ensino Superior, é um pré-requisito para o desenvolvimento da capacidade de visualização, competência necessária para profissionais dessa área do conhecimento.

A aplicação das cônicas, cilindros e quádras transcende a sala de aula, e proporciona ao aluno associações a outras áreas do conhecimento, além da Matemática.

Considerando um elipsoide, que é uma superfície gerada pela rotação da elipse em torno de seu eixo, e as propriedades da elipse, podemos destacar algumas aplicações dessa superfície. Por exemplo, na odontologia, as luminárias encontradas na maioria dos consultórios dos dentistas usam espelhos refletores na forma de uma superfície elíptica. (GASPAR, 2014, p. 57).

Sendo assim, a pesquisa aqui apresentada se justifica pela abordagem desse conteúdo matemático, voltada para o Ensino Superior, notadamente para as engenharias, buscando, através de uma sequência didática, levar o aluno a observar a geração de uma quádras em um espaço tridimensional ( $R^3$ ), a partir de uma cônica do espaço bidimensional ( $R^2$ ).

O conteúdo “Cônicas, cilindros e quádras” é geralmente trabalhado nas disciplinas de Geometria Analítica e Cálculo III, ministradas nos cursos de engenharia e matemática, inclusive no curso no qual as atividades provenientes da pesquisa foram experimentadas.

Em posse da coleta dos dados da pesquisa e das observações feitas durante o desenvolvimento das atividades com alunos de um curso de engenharia, foi elaborado um material didático que poderá auxiliar os professores na área das

Ciências Exatas, em uma abordagem significativa e de maneira mais interativa, por meio de uma sequência didática que utiliza um *software* matemático, o *Winplot 3D*.

Na pesquisa realizada, buscou-se a exploração da visualização pela dinâmica de transição da construção do cilindro e da quádrlica no movimento de passos, do espaço bidimensional para o tridimensional, com base nas cônicas. Tal opção se justifica pela questão que norteou todo o processo investigativo, bem como seu desdobramento analítico: **a observação empírica da transição do plano para o espaço tridimensional permitiria melhor compreensão, ou seja, a visualização das cônicas, cilindros e quádrlicas?**

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo geral

Observar o impacto no desenvolvimento da habilidade de visualização a partir da aplicação de atividades elaboradas com o intuito de facilitar a compreensão da transição das cônicas para os cilindros e quádrlicas no processo de ensino/aprendizagem.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar as estruturas da cônicas e a construção das quádrlicas;
- verificar a abordagem das cônicas e quádrlicas em livros didáticos;
- verificar a formação das quádrlicas no espaço  $R^3$  utilizando a tecnologia de lápis e papel;
- desenvolver atividades utilizando um *software* matemático: *Winplot 3D*;
- construir um *Caderno de Atividades* com o objetivo de apresentar as atividades elaboradas e testadas na pesquisa.

## 1.3 Objeto e sujeito de estudo

O objeto deste projeto são os estudos e o ensino das quádrlicas e cônicas na transição do plano bidimensional  $R^2$  para o espaço tridimensional  $R^3$ . A pesquisa desenvolvida em torno desse objeto teve como sujeitos alunos de nível superior dos cursos de engenharia de uma faculdade particular da região metropolitana de Belo Horizonte/MG.

## 1.4 Metodologia

A pesquisa foi desenvolvida numa perspectiva qualitativa, buscando observar e analisar o aprendizado do conteúdo “Cônicas, cilindros e quádricas”, a partir de uma proposta didática desenvolvida para este estudo e aplicada junto a um grupo de dezoito graduandos em Engenharia Química e Engenharia de Produção, que constituíram os sujeitos desta pesquisa. O grupo foi dividido em nove duplas, as quais foram acompanhadas durante a realização das atividades propostas, aplicadas em dois encontros. Ao final, com vistas a avaliar o experimento, esses participantes responderam a um questionário, cujas respostas, somadas à proposta didática desenvolvida, devem constituir subsídios para pesquisas futuras e para aprimoramento do processo ensino/aprendizagem do referido conteúdo.

Tanto para se elaborar o material didático quanto para acompanhar e analisar o desempenho do grupo participante da pesquisa, foi feita uma revisão bibliográfica à época da construção do projeto, resultando num aporte teórico inicial. Esse referencial foi acrescido de estudos sobre o conceito de “visualização”, central neste trabalho, e do conhecimento produzido em torno da “informática educativa” e das práticas educativas orientadas em Zabala (2008) e D’Amore (2007). Também serviu de base para a pesquisa a análise de quatro livros didáticos tidos como referenciais para as disciplinas de Geometria Analítica e Cálculo, que, normalmente, abordam o conteúdo contemplado nesta pesquisa.

A metodologia de ensino adotada para o experimento de campo consistiu na aplicação de uma sequência didática junto aos sujeitos participantes deste estudo, tendo por base o processo de visualização, para o ensino do conteúdo de cônicas, cilindros e quádricas, sendo demonstrado qual o cilindro ou a quádrica gerou-se na transição do plano em  $R^2$  para o espaço tridimensional em  $R^3$ , utilizando um *software* dinâmico, o *Winplot 3D*. Para tanto, foi elaborado um *Caderno de Atividades* que apresentou uma sequência de passos para a construção das superfícies cilíndricas ou quádricas.

## 1.5 Estrutura da dissertação

Além desta primeira seção, um texto introdutório em que se apresentam as justificativas em relação ao tema, destacando da pesquisa: seus objetivos, os sujeitos e a sua metodologia, esta dissertação se desenvolve com a seguinte estrutura:

- na segunda seção, apresento os embasamentos teóricos deste estudo, nos quais se destacam a visualização, a informática educativa, a geometria analítica e seu ensino, a prática educativa e a sequência didática;
- na terceira seção, encaminho uma análise, em livros didáticos, da produção acadêmica do tema em estudo;
- na quarta seção, descrevo a geração das cônicas e a construção das atividades;
- na quinta seção, trago o relato de como ocorreu a aplicação das atividades para os alunos;
- na sexta seção, consta a exposição da sequência didática, com uma análise dos resultados obtidos; e,
- na sétima seção, são apresentadas as considerações finais.

Para uma adequada compreensão do trabalho realizado, a dissertação ainda traz anexo o *Caderno de Atividades* aplicado junto aos sujeitos da pesquisa.

## 2 A VISUALIZAÇÃO DESENVOLVIDA COM A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E A INFORMÁTICA NA ÁREA EDUCATIVA

A educação matemática no Ensino Superior é cada vez mais estudada por professores e pesquisadores da área, a exemplo do grupo de trabalho GT04, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, criado em 2000, que tem como objetivo desenvolver e divulgar tais trabalhos relacionados a essa área de pesquisa científica, sendo as discussões e estudos relacionados a esse tema apresentados em diversos eventos.

A fundamentação teórica desta pesquisa se baseou na “visualização” e na “informática educativa”, com subsídios da produção de estudos do referido grupo GT04 da SBEM e de pesquisas realizadas dentro dos programas de pós-graduação na área. Neste capítulo, serão apresentados argumentos que darão sustentação teórica da pesquisa aqui apresentada.

### 2.1 A Geometria Analítica e seu ensino

Os conhecimentos geométricos são de fundamental importância para o homem, uma vez que este tem a incrível capacidade de criar, descobrir e adaptar, sendo a visualização e percepção são capacidades essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A geometria, historicamente, teve seu desenvolvimento através da agrimensura, ou medição de terras.

Domingues (1994) destaca a importância de algumas noções primitivas da geometria, como a ideia de “distância”:

[...] daqui até aquele local é mais longe, menos longe ou a mesma coisa que daqui até aquele outro local? “É uma questão que envolve a ideia de linha reta e que certamente é inevitável em qualquer forma de vida inteligente, por mais elementar que ela seja”. (DOMINGUES, 1994, p. 4).

Em concordância com Domingues, Mota (2010) destaca que a observação é necessária para que os estudantes desenvolvam habilidades que necessitam principalmente da visualização:

[...] a geometria constitui de um conjunto de conhecimentos fundamentais para a compreensão do espaço e das figuras que representam objetos utilizados no cotidiano, e, nesse sentido, é rica em possibilidades que proporcionam ao estudante comparar,



relacionar, discutir, investigar, descrever e perceber características geométricas. Dessa forma, entendemos que a geometria pode proporcionar, ao estudante, o desenvolvimento de habilidades baseadas na observação e na experiência. (MOTA, 2010, p. 25).

Ao discorrer sobre o conceito de visualização, Mota (2010) esclarece que se trata de uma aptidão que “está relacionada com a habilidade de gerar uma imagem mental”, com a percepção de transformações operadas com objetos e da retenção das alterações produzidas sobre os mesmos. Nesse sentido, é necessário que o estudante tenha um conjunto de conhecimentos matemáticos necessários para a manipulação dos conhecimentos geométricos para a compreensão dos mais variados fenômenos e a resolução de problemas.

Mais especificamente, na Geometria Analítica, Leivas e Soares (2013) afirmam que:

[...] nos cursos de licenciatura em Matemática, é necessário que conteúdos de matemática, educação matemática, geometria e educação geométrica sejam abordados de forma conjunta e complementar, eliminando possíveis discriminações entre as disciplinas constituintes da proposta curricular do curso. (LEIVAS; SOARES, 2013, p. 261)

Ainda, segundo os mesmos autores, é importante destacar que, em relação à geometria, a sua melhor compreensão e entendimento estão diretamente relacionados com a visualização e a imaginação geométrica. Contudo, a geometria voltada para o Ensino Superior é mais aprofundada e específica, não se resumindo à memorização de axiomas e postulados.

Um dos objetivos da Geometria Analítica é conciliar os fatos geométricos com as relações algébricas, o que permite um estudo sistemático das figuras geométricas e uma interpretação geométrica das relações algébricas, ressalta Oliveira (2011).

Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) são considerados os protagonistas no desenvolvimento da Geometria Analítica, integrando a álgebra com a geometria. Com essa integração, a Geometria Analítica e a Álgebra enriquecem ainda mais os conceitos matemáticos, proporcionando uma aprendizagem mais significativa ao aluno, o que vai ao encontro das ideias de Santos, Almeida e Correia (2002), no entendimento da ideia de aprendizagem significativa.

Compreendemos que uma aprendizagem significativa apenas é possível quando, contextualizada, promove relações entre as novas

informações e aquelas já adquiridas, de modo a transformá-la em conhecimento cognitivamente. O aprendiz, é deste modo, capaz de derivar generalizações e entender novas situações e analogias. (SANTOS; ALMEIDA; CORREIA, 2002, p. 2-3)

Nos cursos de nível superior, devido ao compartilhamento de alguns conceitos, ocorreu a junção da Geometria Analítica com a Álgebra Linear, gerando uma nova disciplina, a Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL), destacada por Oliveira (2011):

Já no curso superior dos cursos da área de exatas (Matemática, Física, Engenharia, entre outras), a Geometria Analítica é conteúdo presente nos currículos, mas não com o mesmo status do Cálculo. Assim, nos últimos anos, houve uma fusão com Álgebra Linear, denominada em muitas universidades como GAAL (Geometria Analítica e Álgebra Linear). Parte da Geometria Analítica Espacial está nos planos de Cursos de Cálculo. (OLIVEIRA, 2011, p. 28)

Para o estudo de vetores ou de retas, são necessários fundamentos iniciais da Geometria Analítica, como o conhecimento do plano cartesiano. Para o desenvolvimento do produto vetorial e condição de alinhamento de três ou mais pontos, é necessária a utilização do cálculo de determinantes em matrizes quadradas, sendo esses alguns dos exemplos dos pré-requisitos abordados nas duas disciplinas. Desse modo, a GAAL se torna uma exigência para disciplinas importantes para a área das engenharias, como Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais Ordinárias, entre outras.

## **2.2 A visualização favorece a compreensão conceitual**

Na Educação Matemática, destaca-se a “visualização” como uma importante linha de estudo e pesquisa. Os processos que favorecem a investigação em visualização são evidenciados, especialmente em Cálculo, quando se demanda o uso intensivo de figuras nos espaços bidimensional e tridimensional.

Presmeg (2006) realizou um estudo da arte da pesquisa em visualização, no qual alguns aspectos se mostram relevantes como objetos de pesquisa: propostas de aprendizagem e ensino que enfatizam modos visuais de pensar e raciocinar, as conexões entre as formas visuais e simbólicas, como, por exemplo, as equações e os gráficos, o uso das novas tecnologias computacionais e da informática educativa como suporte ao traçado de figuras.

Assim, Tall (1991) salienta que a visualização é um processo que auxilia tanto a Matemática quanto a Educação Matemática, ou seja, na concepção epistemológica da Matemática, quanto nos processos do aprender e ensinar da prática educativa. Desta forma, a visualização não se limita a ilustrar situações, mas, se torna como ferramenta imprescindível à compreensão conceitual e como parâmetro na resolução de problemas.

Segundo Presmeg (2006), Arcavi (2003), Tall e Vinner (1991), a visualização requer processos de construção e transformação de imagens virtuais e mentais. Quanto à natureza espacial, ao criar ou interpretar imagens na comunicação e constituição das ideias matemáticas, demandando a tradução de uma informação verbal ou simbólica em informação visual, por meio de diagramas, figuras, gráficos, desenhos. A leitura desses instrumentos conduz à compreensão cognitiva conceitual das propriedades inerentes aos processos matemáticos, principalmente do Cálculo, com base na Geometria Analítica, no desenvolvimento do pensamento visual e espacial, quanto à percepção de parâmetros cognitivos das ideias matemáticas, isto é, objetivando nas relações entre imagens e exteriorização do pensamento.

As estratégias que favorecem os processos do Cálculo, a partir da visualização gráfica, permitem uma leitura mais compreensiva do texto matemático, com uma linguagem, ao perpassar por vários tipos de representação, facilitando o manuseio da informação presente e a busca de novas informações por operações mais complexas na geração de saberes (FROTA, 2013).

As teorias cognitivas, no que se referem à compreensão dos processos operacionais e das ideias no interior dos mesmos, passam pela análise de figuras mentais e das propriedades e processos associados às mesmas, requerendo um tratamento da visualização que estimula a construção da cognição, pela aquisição dos conceitos e das definições.

A compreensão conceitual pode ser viabilizada mais facilmente por uma representação visual, através de experimentações e das visualizações possíveis, facilitando a assimilação do conteúdo em estudo (VINNER, 1991).

Ao analisar os estilos de aprendizagem, Nasser (2009) assegura que um número significativo de estudantes de engenharia possui um estilo visual, usando esboços de gráficos, esquemas, diagramas e ilustrações. Com isso, a exploração da visualização ocorre mais facilmente, facilitando a efetividade dos processos de aprendizagem, quanto à compreensão conceitual.

As diversas representações podem trazer uma base construtiva da cognição eficaz, quando há uma passagem de uma para a outra representação numa transição contínua, segundo Duval (1995). Muito utilizada, a representação algébrica é a mudança da via da equação para a geométrica/gráfica. Facilitar a compreensão das propriedades de uma figura na interação da representação da equação com o desenho gráfico da figura, nos seus diversos espaços constituintes, se torna um objetivo da aprendizagem significativa.

A formação de um conceito é estruturada no campo de múltiplas situações, da mesma forma que numa dada circunstância é possível ter a presença de muitos conceitos. Assim, situação e conceito são instrumentos para representação de um objeto cognitivo, e que podem se manifestar em linguagem natural, por meio de um gráfico, uma fórmula algébrica (PAIS, 2001).

Para o tratamento da formação dos conceitos e da prática procedimental, via visualização, requer-se a utilização de instrumentos pelos quais o trabalho do saber matemático é viabilizado, isto é, a presença das tecnologias. Dessa forma, a identificação e a seleção tecnológica, na prática didática, dependem da natureza do conteúdo, bem como da situação escolar quanto ao saber conceitual ou procedimental.

Com a expansão da informática e suas ferramentas de comunicação/expressão, baseadas nos processos tecnológicos da eletrônica e da computação, fica facilitada a diversificação de métodos e materiais informatizados, na criação de novos espaços e atividades que favorecem a visualização.

### **2.3 Ambientes e situações que facilitam a visualização**

Criar ambientes e situações que podem facilitar a visualização são premissas da prática educativa, na perspectiva de uma didática mais voltada aos processos de aprendizagem. Desse modo, buscar estratégias que favorecem a visualização suscita uma demanda contínua de tecnologias computacionais e de comunicação que podem auxiliar os estudantes nas relações entre as diversas representações visuais, especial para aquisição de conceitos e o desenvolvimento das ideias matemáticas.

Nos dias atuais, quando atingimos o terceiro tempo do espírito, após os dois primeiros, o da fala e o da escrita, o que define esse novo espírito é a informática e a

comunicação pelo computador, que amplia e alavanca as telecomunicações e outras tecnologias, qual imensa máquina integradora, segundo Lévy (1996).

Ainda segundo o mesmo autor, o computador, assim como as máquinas das tecnologias de informação e comunicação, constituem um conjunto de dispositivos e programas que atuam em interface, numa contínua descoberta de inovações. Trata-se de uma nova experiência epistemológica, via simulação, que não se assemelha ao saber puramente teórico, nem à experiência prática, tampouco à da acumulação cultural da tradição oral e escrita (cf.: LÉVY, 1996).

As simulações realizadas nos *softwares*, na verdade, criam um poderoso ambiente acelerador, para explorar situações complexas ou de difícil visualização em outras mídias, segundo Furletti e Laudares (2018).

O lugar para uma aprendizagem ativa requer novas situações a provocarem uma atitude reflexiva e de constante interação, na prática social, entre estudante e professor, seja na sala de aula, no laboratório ou mesmo fora do espaço convencional de aula.

As novas tecnologias de informática e computacionais permitem novas condições que levam a transmissão e a elaboração cognitiva a outro patamar, isto é, à prática da atividade que envolve professor e estudante, numa contínua troca em espaço de trabalho desses dois atores, longe da ideia da responsabilidade fixa de doar ou receber, ambos ativos e descobridores do novo saber em estudo e investigação.

A visualização é favorecida por técnicas, a partir das novas tecnologias, pois pode ser explorada com uma multiplicidade de situações dinâmicas e diversificadas, em velocidade crescente, tornando o estudo, antes passivo, agora com possibilidade de estratégias variadas, em contínua comunicação e troca pelos agentes envolvidos no processo da aprendizagem ativa e significativa do conceito e procedimental.

A exploração de estratégias, em ambientes de tecnologia da informação e computacional, traz um espaço facilitador para a construção ou reelaboração do conhecimento matemático, que se faz mais facilmente com a visualização que estabelece relações em diversos espaços.

Entretanto, as concepções de aprendizagem pelas novas tecnologias não inviabilizam a atividade produtora do estudante na sua formulação oral ou escrita do tratamento dos saberes, seja para aquisição conceitual ou procedimental.

Contudo, é fundamental entender que, na mediação entre o saber e os métodos de estudo, estão os materiais e artefatos tecnológicos que os professores utilizam para viabilizar a didática. Os meios, isto é, as ferramentas tecnológicas nas mãos dos agentes se tornam instrumentos para obtenção de resultados.

As ferramentas, computador e outras mídias, são instrumentos que favorecem a visualização e podem proporcionar um ambiente de ação efetiva para a aprendizagem. Mas somente a máquina não proporciona o conhecimento, pois a intuição, a formulação e a assimilação são propriedades inatas do homem. Logo, o instrumento tecnológico é apoio para a explicitação da qualidade dos agentes inteligentes, professor e estudante.

O papel do professor é elaborar e mediar as tarefas, articuladas com os diversos recursos utilizados na proposta de um ensino e aprendizagem ativos (livro, calculadora, computador e material concreto).

O papel do estudante é de ser agente ativo nas novas situações articuladas, com seus colegas e o professor, na procura de desafios e motivação para aprender com mais significado.

A visualização se efetiva no ambiente profícuo da interação, pela via tecnológica, dos agentes da aprendizagem, professor e estudante.

## **2.4 Informática educativa**

O homem está em constante processo de evolução, nas mais diversas áreas do conhecimento, tendo a tecnologia como um dos grandes agenciadores.

A informática se tornou cada vez mais presente no cotidiano das pessoas, e a educação tenta acompanhar esse processo, porém, seu desenvolvimento ainda é considerado lento. As discussões em palestras e seminários sobre a utilização dessa tecnologia em sala de aula são constantes.

Novas metodologias e práticas educativas são cada vez mais comuns nas salas de aula, e a possibilidade de troca de informações, quase que em tempo real, proporcionada pela informática, permite aos estudantes e pesquisadores um desenvolvimento mais rápido e preciso em seus estudos.

As escolas e universidades têm um papel importante e fundamental nesse processo de mudança. Antes, tais instituições tinham como objetivo principal, preparar os alunos culturalmente para serem aprovados em concursos e vestibulares. Mas

agora, um de seus principais objetivos é preparar os estudantes para essa nova realidade, e, segundo Toffler, “[...] a educação deve ser voltada para o amanhã” (*apud* TAJRA, 2008, p. 25), pois é certo que a realidade futura será diferente da atual.

Oliveira (1997, p. 21) também reforça essa ideia de mudança de perfil dos estudantes, ao afirmar que “a escola, passaria a ter o papel de formar novos profissionais, uma vez que os avanços tecnológicos fizeram com que o mercado requisitasse um novo tipo de profissional”.

Tajra também corrobora essa opinião, quando observa e destaca essas mudanças:

Hoje, o que prevalece é a empregabilidade, nos tornamos empregáveis. Com certeza, o profissional de amanhã não deve ser preparado para concursos e atividades rotineiras. Deverá ser motivado e estimulado para resolver problemas, agir pró-ativamente e se comunicar de forma abrangente. (TAJRA, 2008, p. 25-26)

Borba e Penteado (2003, p. 16) colocam que a tecnologia “interfere cada vez mais no mercado de trabalho. Seu domínio tem servido de base de decisão sobre quem vai assumir determinadas posições no mercado de trabalho”.

Observa-se que a escola acumula, também, o papel de formar novos profissionais para o mercado de trabalho, levando em consideração suas exigências. Torna-se imprescindível, portanto, estar atenta às novas tecnologias e tendências do mercado, observando também as economias futuras.

Tentando acompanhar tais mudanças, a utilização de recursos informáticos em sala de aula ocupa um espaço cada vez maior nas escolas, mesmo não sendo ainda um consenso entre professores de todos os níveis. Os profissionais que não adotam metodologias informatizadas argumentam que esses recursos não são imprescindíveis à aprendizagem dos alunos. Enquanto aqueles que são favoráveis, apoiam-se nas possibilidades de motivação e interação que tais recursos podem proporcionar entre professor, aluno e conteúdo. Borba e Penteado apresentam argumentos sobre ambos os pontos de vista:

[...] o computador, portanto, pode ser um problema a mais na vida já atribulada do professor, mas pode também desencadear o surgimento de novas possibilidades para o seu desenvolvimento como um profissional da educação. (BORBA E PENTEADO, 2003, p. 15)

Já para Oliveira (1997), a utilização do computador em sala de aula, é uma prática capaz de proporcionar “uma nova relação entre professor aluno”, uma vez que esta metodologia exige um comportamento diferente por parte do professor. Quanto ao aluno, essa prática pode desencadear um avanço em suas estratégias de resolução de problemas.

Laudares e Furletti (2018), também apresentam argumentos favoráveis à utilização de recursos tecnológicos em sala de aula. De acordo com esses autores, em sua grande parte, são voltados para disciplinas que exigem um raciocínio mais abstrato, como na Matemática por exemplo. Entende-se, assim, que o uso de tais recursos pode proporcionar uma mudança de postura por parte do professor e do aluno, e, ainda, dinamizar mais a aula:

Por meio de aulas expositivas, o aluno exerce o papel de expectador, realizando pouca ou nenhuma participação e, com isso grande parte dos conceitos apresentados pelo professor não é assimilada. O uso de computadores pode criar uma alternativa para tal situação, por exemplo, despertando o interesse do aluno pela possibilidade de simulação, uma vez que é possível testar, ver como é o funcionamento, ou o que ocorre quando se troca um parâmetro ou uma constante nas equações ou funções. (LAUDARES; FURLETTI, 2018, p. 239)

Para Penteado e Borba (2003), o acesso à informática na educação, além de ser um direito, deve também ser visto como parte de um processo democratizado quanto ao acesso a tecnologias desenvolvidas pela sociedade. Para esses autores, a informática na educação é justificada pela alfabetização tecnológica e pelo direito ao acesso.

A capacitação profissional para o desenvolvimento dessa prática pedagógica se afirma como peça chave para o sucesso dessa metodologia. Ainda de acordo com Tajra (2008), é através da capacitação profissional que o professor estará apto a desenvolver e planejar atividades, projetos ou plano de aulas, utilizando o computador como uma ferramenta pedagógica.

Já Oliveira (1997) destaca alguns pontos importantes para que uma determinada capacitação sirva de modelo: atitudes de desmistificação, diminuição da resistência tecnológica educacional, quebra do ceticismo em relação às contribuições do computador na educação, necessárias para o trabalho com Informática Educativa.



Assim, o ambiente de aprendizagem criado para o aluno, seja ele presencial, a distância ou *blended*, deve ser capaz de proporcionar ao estudante “uma ampliação significativa de seu nível intelectual e de sua capacidade de articular conhecimentos numa postura reflexiva, ativa e dialógica” (LAUDARES; FURLETTI, 2018, p. 247).

## 2.5 Práticas educativas e sequência didática

O ensino de Matemática, nos diversos níveis de ensino, evoluiu com o passar dos anos, reflexo da mudança de perfil dos alunos. Novas didáticas e metodologias, que possam ser eficazes em sala de aula são frequentemente discutidas em encontros voltados para a Educação.

O desenvolvimento profissional ou em sua metodologia didática, que é parte importante e fundamental nesse processo de evolução do ensino, advém da experiência e do conhecimento que ele consegue acumular com o passar dos anos de trabalho (ZABALA, 2008):

[...] provavelmente a melhoria de nossa atividade profissional, como todas as demais, passa pela análise do que fazemos de nossa prática e do contraste com outras práticas. Mas certamente a comparação com outros colegas não será suficiente. Assim, pois, frente a duas ou três posições diferentes, necessitamos de critérios que nos permitam realizar uma avaliação racional e fundamentada. (ZABALA, 2008, p. 13-14).

Para o mesmo autor, entender os processos envolvidos na educação pode apontar os caminhos que o professor deve seguir para melhorar a sua prática educativa.

A dificuldade em uma definição mais formalizada da prática educativa se deve à complexidade dos processos educativos envolvidos na sala de aula. Segundo Zabala (2008, p. 16) “a prática é algo fluído, fugidio, difícil de limitar com coordenadas simples e, além do mais, complexa, já que nela se expressam múltiplos fatores, ideias, valores, hábitos pedagógicos [...]”.

Já Libâneo apresenta uma definição mais formal da prática educativa:

[...] a prática educativa não é apenas uma exigência da vida em sociedade, mas também o processo de prover os indivíduos dos conhecimentos e experiências culturais que os tornam aptos a atuar no meio social e transformá-lo em função de necessidades econômicas, sociais e políticas da coletividade. (LIBÂNEO, 1994, p. 17).

Dentro das práticas desenvolvidas pelo professor, Zabala (2008) destaca as sequências didáticas, desde a aula mais tradicional, até os “projetos de trabalho global”, todas têm como elementos identificados as atividades que compõem a prática. Nesse sentido, o autor define uma sequência didática como sendo:

Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores quanto pelos alunos. (ZABALA, 2008, p. 18).

O objetivo dessas sequências didáticas é proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa, fazendo com que ele participe na construção do próprio conhecimento.

D’Amore (2007) destaca a importância do papel do professor nesse processo, e, de acordo com esse autor, o papel do professor é proporcionar aos estudantes experiências para que sejam capazes de associar o conhecimento adquirido com a prática a ser utilizada, em outras palavras, unir a teoria à prática. O objetivo dessa associação é fazer com que os alunos aproveitem o conhecimento ao máximo.

Assim, a investigação realizada teve seus fundamentos na necessidade de desenvolvimento da capacidade de visualização das figuras do espaço bidimensional, do plano, para o espaço tridimensional.

Os recursos metodológicos da sequência didática e da informática educativa, com o uso do *software Winplot 3D*, favoreceram a dinâmica no movimento da transição e criação dos cilindros e quádras, a partir das cônicas, constituindo essa dinâmica, pela atividade e com o *software*, a inovação da pesquisa realizada.

### 3 ANÁLISE, DO CONTEÚDO INVESTIGADO, EM LIVROS DIDÁTICOS

Com o intuito de ampliar cada vez mais os conhecimentos adquiridos com o desenvolvimento deste trabalho, fez-se necessária a análise de alguns livros didáticos tidos como referenciais para as disciplinas de Geometria Analítica e Cálculo, e que também nortearam nossa pesquisa.

Esta análise se mostra muito significativa, uma vez que me permitiu ter conhecimento de como é feita a abordagem do referido tema da pesquisa nos livros adotados pelas Instituições de Ensino Superior (IES), uma vez que o tema proposto é um pré-requisito importante para o desenvolvimento de outras disciplinas específicas dos cursos de engenharias e de matemática.

Os livros selecionados para análise são apresentados no quadro a seguir.

**Quadro 1 – Livros utilizados para análise comparativa do tópico da pesquisa.**

| Código | Título                                                                                                  | Autores                                                                                 | Editora           | Edição          | Ano  |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------|------|
| L1     | Cálculo v.2                                                                                             | George B. Thomas<br>Ross L. Finney<br>Maurice D. Weir<br>Frank R. Giordano              | Addison<br>Wesley | 10 <sup>a</sup> | 2003 |
| L2     | Vetores e Geometria Analítica                                                                           | Paulo Winterle                                                                          | Makron<br>Books   | 1 <sup>a</sup>  | 2010 |
| L3     | Cálculo v.2                                                                                             | James Stewart                                                                           | Thomsom           | 5 <sup>a</sup>  | 2006 |
| L4     | Plano, Cilindros e Quádricas – Um enfoque no traçado de gráficos com exploração das seções transversais | João Bosco Laudares<br>Dimas Felipe de Miranda<br>Janine Freitas Mota<br>Saulo Furletti | Pucminas          | 1 <sup>a</sup>  | 2013 |

**Fonte: Elaborado pelo autor.**

Os livros 1, 2 e 3 estão presentes no Plano de Ensino da disciplina de Cálculo III de cursos de engenharia, nos quais os sujeitos desta pesquisa estão matriculados. Para cada um dos livros citados, foi analisado o tratamento dado ao tema, de acordo com as categorias abaixo:

**Categoria 1.** Apresentação dos cilindros e das quádricas quanto à equação.

**Categoria 2.** A representação gráfica das figuras completas, com ou sem análise da sua constituição.

**Categoria 3.** Existência de aplicação dos cilindros e das quádricas.

**Categoria 4.** Abundância de gráficos no plano e no espaço.

**Categoria 5.** Destaque de algum tipo de cilindro.

**Categoria 6.** Referência às quádricas, como superfície de revolução.

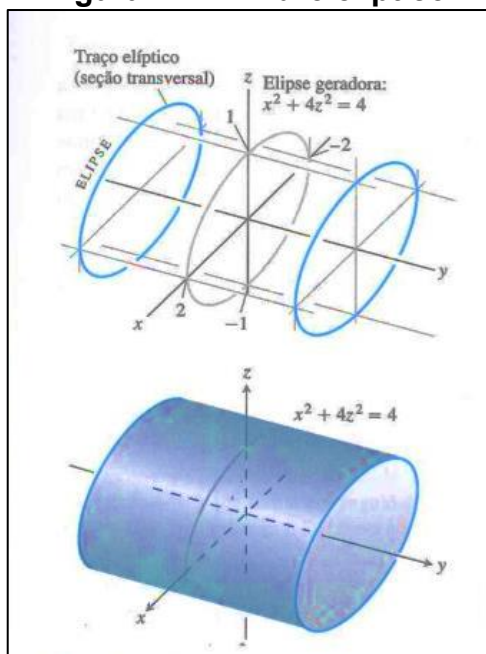
**Categoria 7.** Abordagem com a utilização de algum software, ou pelo menos a indicação.

Com o objetivo de apresentar as categorias citadas acima, fizemos um comparativo das mesmas em todos os livros, de forma simultânea, buscando visualizar tais categorias de uma maneira mais ampla.

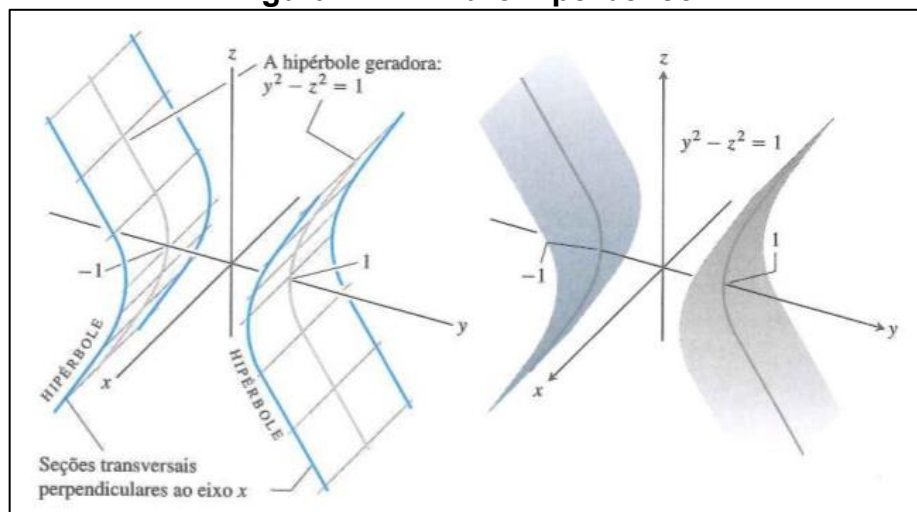
### **3.1 Categoria 1. Apresentação dos cilindros e das quádricas quanto à equação**

#### **3.1.1 Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 1**

Nesse livro, tanto o conteúdo de “Cilindros” quanto o de “Quádricas” são iniciados com suas respectivas definições. Os cilindros são apresentados a partir das retas paralelas ao eixo  $y$ , já dando uma ideia da figura a ser formada para, em seguida, o preenchimento da superfície. A abordagem inicial é feita com um exemplo, já relacionando a superfície com sua equação correspondente. São apresentados dois exemplos de cilindros, ambos sendo formados a partir de sua curva geradora, ou seja, primeiramente são formadas as curvas em um determinado plano, e na sequência, o preenchimento para a formação do cilindro.

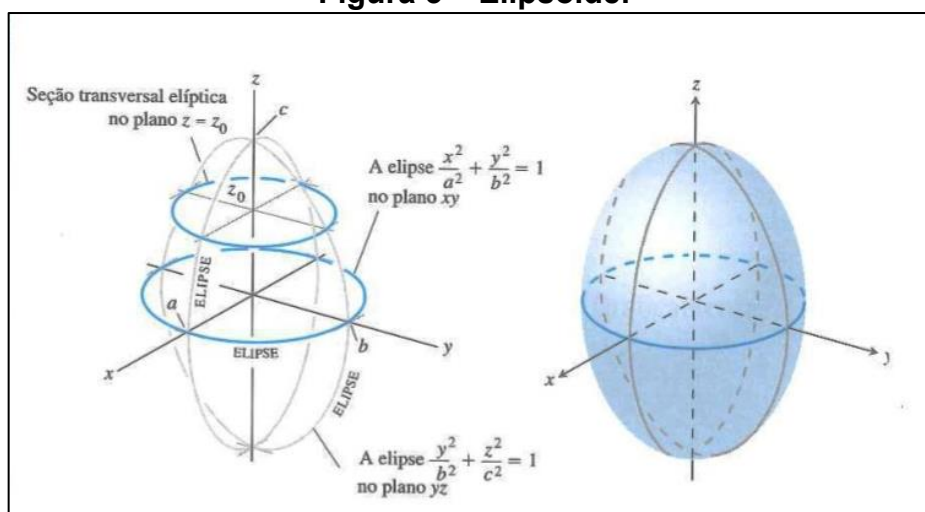
**Figura 1 – Cilindro elíptico.**

Fonte: Cálculo –THOMAS, George B. et al., Ano 2003.

**Figura 2 – Cilindro hiperbólico.**

Fonte: Cálculo –THOMAS, George B. et al., Ano 2003.

Em relação às quádricas, sua apresentação segue o mesmo padrão anterior. Inicia-se com a apresentação da equação correspondente à superfície, para, em seguida, mostrar a construção da mesma no espaço tridimensional XYZ, destacando as curvas geradoras da superfície.

**Figura 3 – Elipsoide.**

Fonte: Cálculo –THOMAS, George B. et al., Ano 2003.

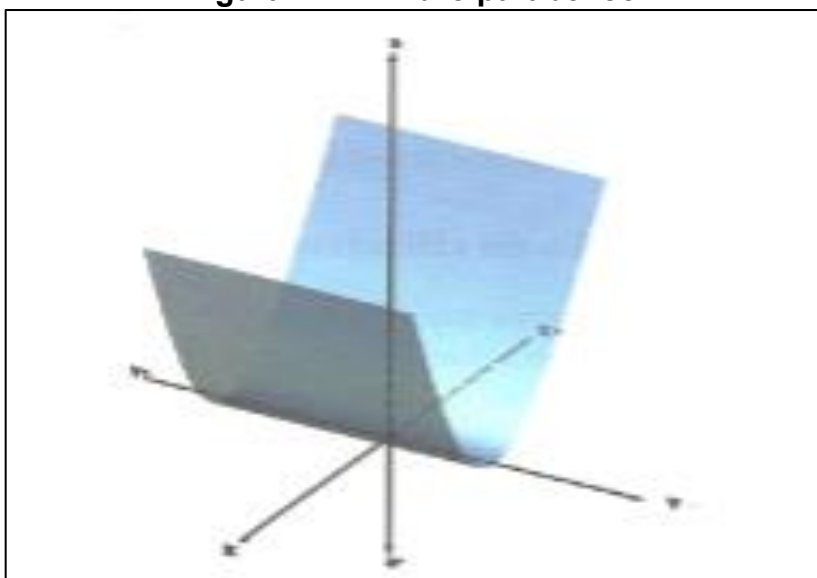
### 3.1.2 Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 2

Na abordagem do conteúdo de “Quádricas”, é feita uma introdução, com a apresentação imediata de uma equação de grau 2, nas variáveis  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . Ressalta-se que, para essa abordagem, no capítulo anterior, o autor discute o conteúdo de cônicas, apresentando os conceitos, as definições e exercícios para fixação do conteúdo. Junto às definições, são colocadas algumas figuras ilustrando as curvas, com o objetivo de proporcionar ao leitor uma melhor compreensão e visualização desse conteúdo. As superfícies cilíndricas são abordadas como um item do capítulo, depois das superfícies quádricas, no qual são apresentadas suas definições, mas não é feito dado exemplo de aplicação.

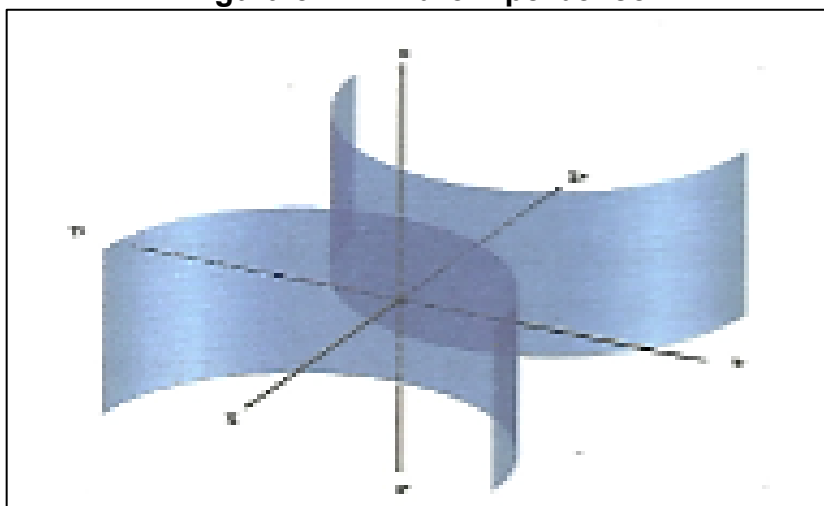
### 3.1.3 Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 3

Nesse livro, os autores destinaram um capítulo para o conteúdo de “Cilindros”, no qual, além da definição, são apresentados exemplos de cilindros quádricos e não quádricos, cilindros oblíquos e retos, demonstrando a diferença existente entre eles. Os elementos que compõem um cilindro são bem destacados, inclusive com algumas observações pertinentes ao assunto.

Os cilindros são apresentados totalmente preenchidos, não havendo um destaque para as curvas geratrizes dos mesmos.

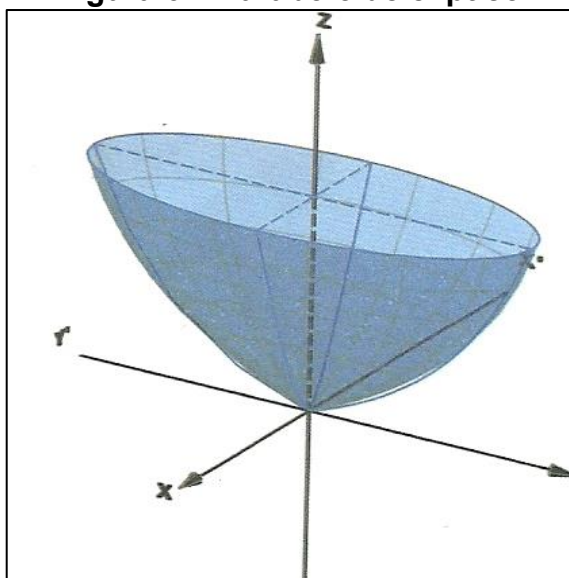
**Figura 4 – Cilindro parabólico.**

Fonte: Planos, Cilindros e Quádricas, 2013.

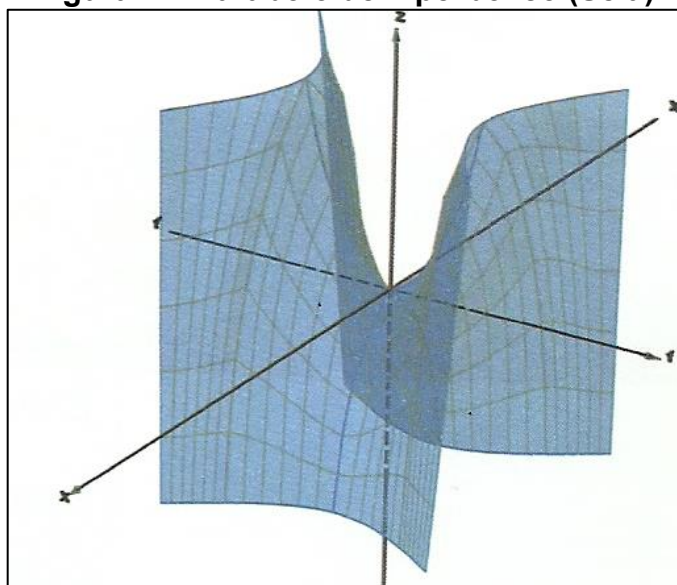
**Figura 5 – Cilindro hiperbólico.**

Fonte: Planos, Cilindros e Quádricas, 2013.

As superfícies quádricas compõem o capítulo 4 desse livro. Após uma introdução sobre o assunto, é formalizada a definição, seguida da apresentação das superfícies construídas em um *software* específico. Ressalta-se que toda a proposta desse livro se refere à construção de cilindros e superfícies com a utilização de um *software* dinâmico.

**Figura 6 – Paraboloide elíptico.**

Fonte: Planos, Cilindros e Quádricas, 2013.

**Figura 7 – Paraboloide hiperbólico (Sela).**

Fonte: Planos, Cilindros e Quádricas, 2013.

#### 3.1.4 Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 4

Nesse livro, o conteúdo de “Cilindros” compõe o item 6 do capítulo 12. Após uma breve introdução sobre o assunto, é apresentada a definição dos cilindros e, em seguida, é feito um esboço da superfície de equação  $z = x^2$ . O destaque da curva geratriz do cilindro é feito na apresentação da solução do exemplo e demonstrada na figura ilustrativa (Figura 8).

Além do cilindro parabólico, também é apresentado como exemplo o cilindro circular. Não é feita a distinção entre o cilindro oblíquo e o circular, nem entre os



cilindros quádricos e não quádricos. As superfícies quádricas são apresentadas já com as definições, e cada superfície é abordada a partir de exemplos e esboço da superfície no espaço tridimensional XYZ.

**Figura 8– Cálculo de um elipsoide.**

**EXEMPLO 3** □ Utilize traços para fazer o esboço da quádrica com equação

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

**SOLUÇÃO** Substituindo  $z = 0$ , determinamos que o traço no plano  $xy$  é  $x^2 + y^2/9 = 1$ , que reconhecemos ser a equação de uma elipse. Em geral, o traço horizontal no plano  $z = k$  é

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \quad z = k$$

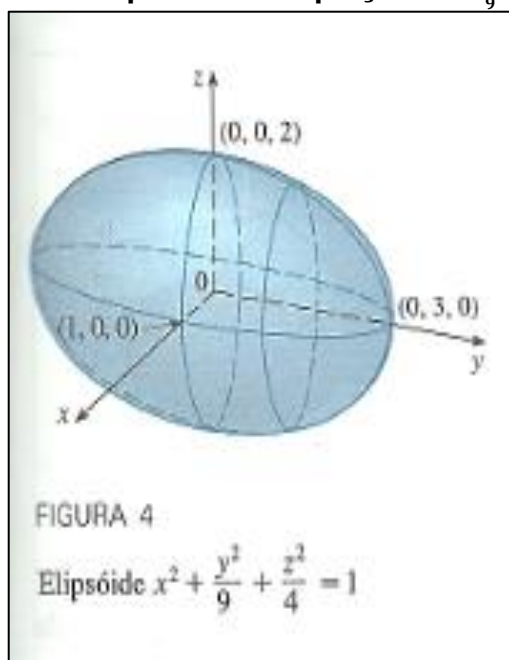
que é uma elipse, desde que  $k^2 < 4$ , ou seja,  $-2 < k < 2$ .  
Da mesma forma, os traços verticais também são elipses:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2 \quad x = k \quad (\text{if } -1 < k < 1)$$

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9} \quad y = k \quad (\text{if } -3 < k < 3)$$

Fonte: Cálculo – Volume II – Stewart, 2013.

**Figura 9 – elipsoide de equação  $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$**

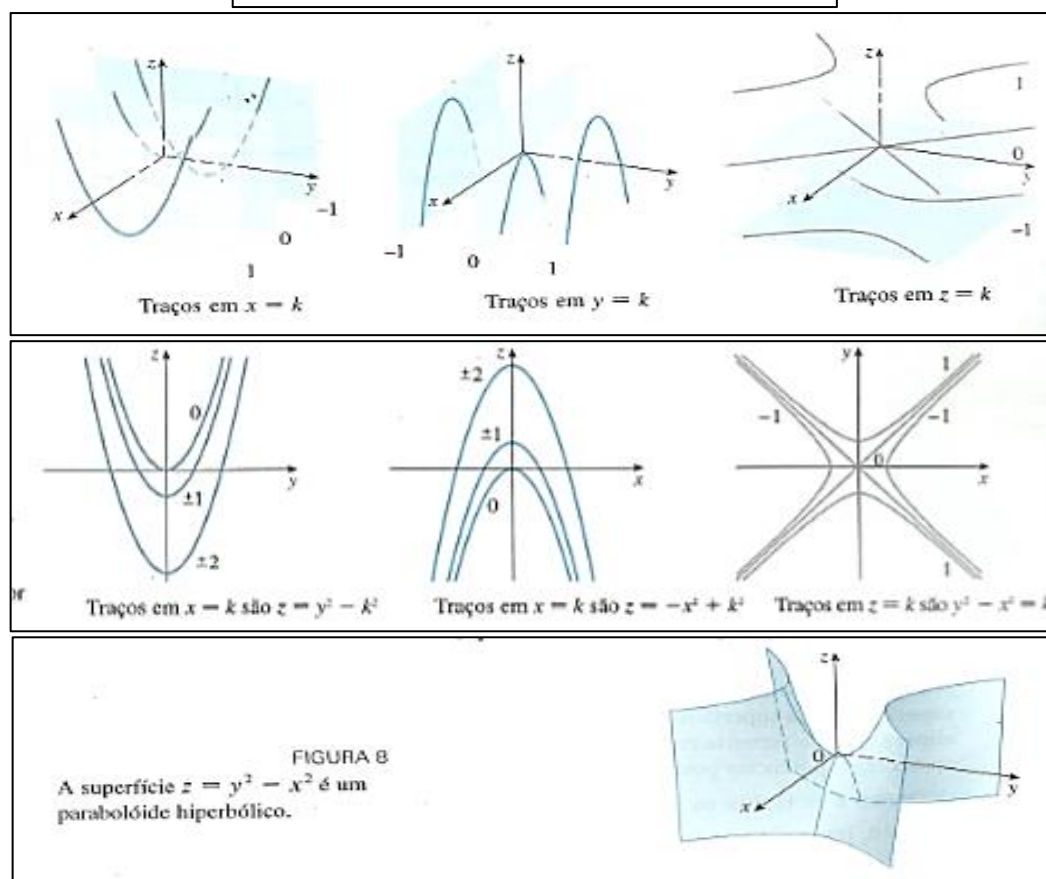


Fonte: Cálculo – Volume II – Stewart, 2013.

Nesse livro, a superfície  $z = y^2 - x^2$  é construída partindo-se de curvas esboçadas no plano  $XY$ , sendo que, em seguida, as curvas são representadas nos planos paralelos aos eixos coordenados, para uma posterior composição da figura.

Figura 10 – Etapas de construção de um parabolóide hiperbólico.

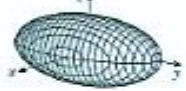
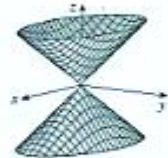
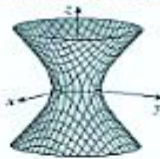
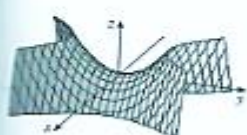
**EXEMPLO 5** □ Esboce a superfície  $z = y^2 - x^2$ .



Fonte: Cálculo – Volume II – Stewart, 2013.

Após a apresentação das superfícies, é fornecido um quadro-resumo com todas as superfícies quádricas e suas respectivas equações explícitas.

**Figura 11 – Quadro-síntese: Gráfico de quádricas com suas respectivas equações.**

| Superfície                                                                                                          | Equação                                                                                                                                                                                       | Superfície                                                                                                                | Equação                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Elipsóide</b><br>               | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Todos os traços são elipses. Se <math>a = b = c</math>, o elipsóide é uma esfera.</p>                                            | <b>Cone</b><br>                         | $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>Traços horizontais são elipses. Traços verticais nos planos <math>x = k</math> e <math>y = k</math> são hipérboles se <math>k \neq 0</math>, mas são um par de retas quando <math>k = 0</math>.</p>    |
| <b>Parabolóide Elíptico</b><br>    | $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>Traços horizontais são elipses. Traços verticais são parábolas. A variável elevada à primeira potência indica o eixo do parabolóide.</p> | <b>Hiperbolóide de Uma Folha</b><br>    | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Traços horizontais são elipses. Traços verticais são hipérboles. O eixo de simetria corresponde à variável cujo coeficiente é negativo.</p>                                                        |
| <b>Parabolóide Hiperbólico</b><br> | $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ <p>Traços horizontais são hipérboles. Traços verticais são parábolas. O caso aqui ilustrado corresponde a <math>c &lt; 0</math>.</p>        | <b>Hiperbolóide de Duas Folhas</b><br> | $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Traços horizontais em <math>z = k</math> são elipses se <math>k &gt; c</math> ou se <math>k &lt; -c</math>. Traços verticais são hipérboles. Os dois sinais de subtração indicam duas folhas.</p> |

Fonte: Cálculo – Volume II – Stewart, 2013.

### 3.2 Categoria 2. A representação gráfica das figuras completas, com ou sem análise da sua constituição.

#### 3.2.1 Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 1

Em relação aos gráficos, todas as figuras são construídas em gráficos 3D. Nas ilustrações, são identificados elementos importantes da superfície, como as curvas geratrizes, além de apresentar uma análise da constituição da figura. Trata-se de uma abordagem bem ilustrativa. Em relação às atividades, apenas uma propõe a associação da superfície à sua respectiva equação. As demais atividades fazem uma abordagem de cálculos específicos, como área, volume das superfícies e a construção gráfica, a partir da equação da superfície. Uma atividade propõe a construção gráfica da superfície com a utilização de um SAC (Sistema de Álgebra por Computador), mas não faz menção a um específico.

#### 3.2.2 Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 2

As superfícies são apresentadas já constituídas no plano XZ, não sendo feita uma análise aprofundada de suas constituições. Inicialmente, se apresenta a curva

geratriz da superfície no plano XY para, em seguida, demonstrar a figura construída no plano XZ. Nas atividades propostas, em sua maioria, o objetivo é relacionar as equações com suas respectivas superfícies, ora identificando de qual superfície se trata, ora, além de identificar, fazendo-se o esboço da mesma.

### 3.2.3 Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 3

Nesse livro, a abordagem gráfica se apresenta de forma abundante. Todos os exemplos são apresentados com uma figura ilustrativa em um gráfico 3D. De forma geral, apresenta-se a curva no plano XY para, em seguida, constituir a superfície no plano XZ. Como um dos objetivos desse livro é a construção das superfícies com a utilização de um *software*, a maioria dos exercícios é referente a essa prática. Primeiramente, são feitos os esboços das curvas no plano XY, para, em seguida, apresentar a construção da superfície no gráfico 3D. As atividades propõem a identificação das superfícies com suas respectivas equações, sendo que a construção das superfícies quádricas foi desenvolvida ao longo do capítulo, de acordo com a abordagem que estava sendo desenvolvida.

### 3.2.4 Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” – Livro 4

Nesse livro, as superfícies são representadas já em gráficos 3D. Nas figuras, é possível visualizar a curva geratriz da superfície, mas não é feita nenhuma análise mais detalhada da mesma. Apenas o parabolóide hiperbólico é apresentado de uma maneira mais completa, quando são feitos os esboços das curvas no plano XY. Em seguida, essas curvas são construídas em planos paralelos aos eixos coordenados para que, por fim, a figura seja apresentada de forma completa e totalmente preenchida. A maioria das atividades são referentes à associação ou identificação da superfície com sua respectiva equação, e apenas uma atividade propõe a utilização da construção gráfica com o auxílio de um *software*, porém, não há qualquer especificação.

## 3.4 Categorias 3, 4, 5 e 6 – Considerações gerais

As categorias 3, 4, 5 e 6 têm respostas mais diretas. Dessa forma, para essas categorias, entendo ser mais funcional apresentar um quadro-síntese com as categorias e um resultado sintético da análise feita.

**Quadro 2 – Análise do tema “Cônicas, Cilindros e Quádricas” nos livros didáticos (Categorias 3 a 6).**

| CATEGORIA                                                                  | L1                             | L2            | L3            | L4            |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| <b>Categoria 3.</b> Existência de aplicação dos cilindros e das quádricas. | Apresenta apenas uma atividade | Não apresenta | Não apresenta | Não apresenta |
| <b>Categoria 4.</b> Abundância de gráficos no plano e no espaço.           | Existe                         | Não existe    | Existe        | Existe        |
| <b>Categoria 5.</b> Destaque de algum tipo de cilindro.                    | Sim                            | Sim           | Sim           | Sim           |
| <b>Categoria 6.</b> Referência às quádricas, como superfície de revolução. | Não                            | Não           | Não           | Não           |

Fonte: Elaborado pelo autor.

### **3.5 Categoria 7. Abordagem com a utilização de algum software, ou pelo menos a indicação.**

Nos livros analisados, apenas o livro 3 faz uma abordagem dos cilindros e das quádricas com a utilização do *software Winplot 3D*.

Os livros 1 e 3 sugerem, em algumas atividades, a utilização de um programa computacional para a realização das mesmas, enquanto no livro 2, em momento algum foi mencionada a utilização de algum *software*.

Concluindo, de todos os livros analisados, apenas o livro 4 apresenta uma representação das figuras completas, com ou sem análise da constituição (Categoria 2). Porém, não foi encontrada a metodologia proposta, como interessava a esta investigação, para a construção, com sequência didática de passos, da transição das cônicas para as superfícies quádricas, com atividades desenvolvidas pelo *software Winplot 3D*.

#### 4 CONSTRUÇÃO DAS ATIVIDADES – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E A INFORMÁTICA PARA FAVORECER A VISUALIZAÇÃO

Para o desenvolvimento da pesquisa, foi elaborado um *Caderno de Atividades* que relaciona as curvas cônicas com as superfícies cilíndricas e quádricas, a partir de uma sequência didática, na qual os estudantes deveriam ser os protagonistas no processo ensino/aprendizagem.

O objetivo dessa sequência didática foi permitir ao estudante visualizar o que acontece na transição de uma curva cônica, contida no plano bidimensional XY, para o espaço tridimensional XYZ, ou seja, acompanhar a transformação de uma superfície cilíndrica ou quádrica. Além disso, com a utilização dessa prática metodológica, foi possível formalizar a definição das superfícies cilíndricas e quádricas.

Buscando alcançar os resultados desejados, utilizamos o *software Winplot 3D*, que apresenta uma interface constituída por ícones e menus intuitivos, e ser utilizado tanto na Educação Básica quanto na Superior, sendo esta última o foco desta pesquisa.

Também, com a utilização desse *software*, foi possível criar um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes fizeram simulações em que o processo de visualização ficou bem evidenciado na construção das superfícies. De acordo com Laudares e Furletti (2018):

[...] cabe apontar que na simulação não existe reducionismo conceitual para a facilitação da aprendizagem; as simulações realizadas nos *softwares* na verdade criam poderoso ambiente acelerador para explorar algumas situações complexas ou de difícil visualização em outras mídias. A tecnologia é um instrumento favorecedor da aprendizagem, se for utilizada adequadamente, mas ela sozinha não é a solução dos problemas educacionais. (LAUDARES; FURLETTI, 2018, p. 235)

O *Caderno de Atividades* foi composto em duas etapas. A primeira compreendendo a Atividade 1, na qual abordamos as superfícies cilíndricas retas. Essa atividade foi dividida em quatro momentos, sendo eles:

**1º momento:** apresentação dos objetivos da atividade, quais os conteúdos a serem abordados e a definição dos cilindros.

**2º momento:** esse momento consistiu em uma atividade guiada por mim, na função de professor pesquisador, e cujo objetivo era apresentar o *software Winplot*

3D, assim como as ferramentas que seriam utilizadas no desenvolvimento das atividades. Para que tal finalidade fosse alcançada, construí, com os estudantes, um cilindro parabólico, utilizando uma metodologia de passos que serviu de modelo para a construção de outros cilindros.

**3º momento:** aqui, foram escolhidas oito equações de curvas, de maneira a utilizar duas tecnologias: lápis e papel, e o *software*. Inicialmente, os estudantes faziam o esboço de uma curva, de acordo com sua respectiva equação, utilizando lápis e papel no plano bidimensional XY para, em seguida, fazer a transcrição para o espaço tridimensional. Após essa transcrição, era solicitada a identificação do eixo geratriz da curva, e, finalmente, o esboço da superfície cilíndrica, ainda de maneira manual, ou seja, com lápis e papel.

**4º momento:** após todo processo de forma manual, esse momento consistia na construção da superfície, porém, agora, utilizando o *software Winplot 3D*. Como os alunos já haviam assistido uma demonstração por parte do professor pesquisador no momento 2, foram fornecidas as orientações, agora passo-a-passo, para a utilização do *software*, apenas nas duas primeiras equações, deixando de maneira proposital, que os estudantes desenvolvessem as demais atividades de maneira mais autônoma, com o objetivo de enriquecer mais a pesquisa.

A Atividade 2 abordou as superfícies quádricas, sendo dividida em três momentos:

**1º momento:** apresentação da definição das superfícies quádricas, dos objetivos, conteúdos abordados e da metodologia para o desenvolvimento da atividade.

**2º momento:** esse momento consistiu em uma atividade guiada, na qual foi construído um cone quádrico. Essa superfície foi escolhida por apresentar uma equação mais simples, propiciando uma melhor familiarização e interação, por parte dos estudantes, com o *software* e com algumas ferramentas importantes, que permitiram dinamizar ainda mais a atividade.

Para a construção dessa superfície, foi usada uma sequência metodológica de passos, seguida por uma tabela de valores fornecida pelo professor pesquisador, porém, agora, intencionalmente, a quantidade de informações foi reduzida, com o objetivo de deixar os estudantes atuarem de maneira mais autônoma.

**3º momento:** esse momento consistiu na construção de um elipsoide e de um parabolóide, pelos estudantes, utilizando diretamente o *software*, uma tabela de valores e as equações paramétricas das respectivas superfícies.

Não utilizei, nessa segunda atividade, a tecnologia de lápis e papel, para priorizar a utilização do *software*, sendo este uma ferramenta indispensável nesta pesquisa e também para verificar como foi, após o desenvolvimento da primeira atividade, a visualização por partes dos estudantes, na transição de uma curva do espaço bidimensional geradora de uma superfície no espaço tridimensional.

Destaco também que, para o desenvolvimento dessas duas atividades, foi necessário e indispensável apresentar aos estudantes as equações paramétricas dos cilindros e superfícies no espaço tridimensional. Tal fato se justifica pelo *software Winplot 3D* apresentar uma resposta melhor em relação às superfícies tridimensionais, quando foi utilizado esse tipo de equação. Assim, apresento, a seguir, a parametrização das curvas cônicas e das superfícies quádricas.

#### 4.1 A parametrização das cônicas e quádricas: uma apresentação teórica

As cônicas são casos especiais de curvas, assim como as quádricas são das superfícies. Ambas podem ser apresentadas parametricamente ou implicitamente. É desejável, aqui, que se determine equações paramétricas para algumas cônicas, bem como para suas quádricas. Escrevem-se essas equações no formato:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Uma curva parametrizada no espaço com parâmetro  $t$  é uma função contínua, na qual  $I = (a, b)$  é um intervalo da reta real. Assim, o processo de descrever uma curva geométrica como uma função  $X: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é conhecido como parametrização. O mesmo ocorre com o espaço  $\mathbb{R}^3$ .

##### 4.1.1 A equação da parábola e sua parametrização

O primeiro experimento com os estudantes consistiu em expor a equação mais simples de uma parábola, sendo  $f(x) = y = \frac{1}{4p}x^2 = x^2$ , que, por sua vez, pôde ser

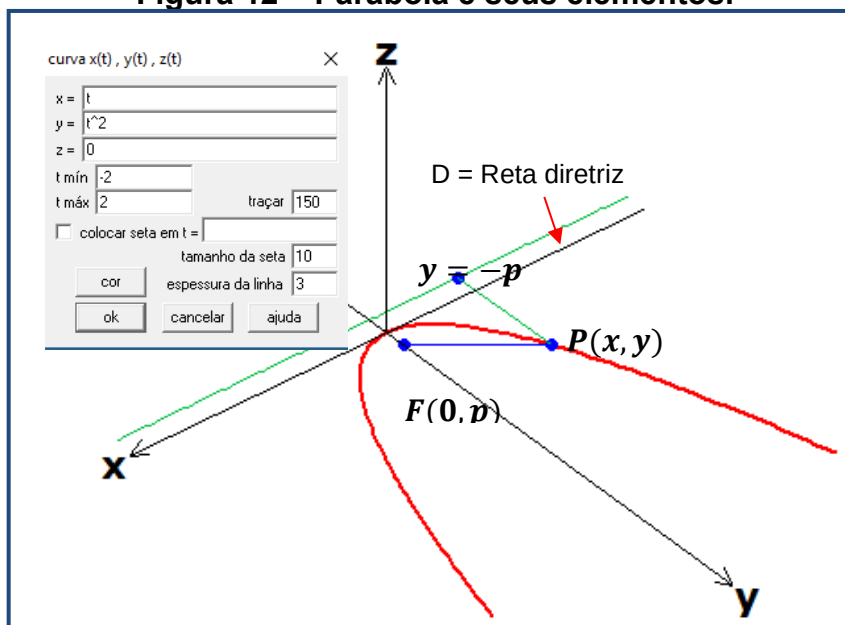
Equação cartesiana



trivialmente transformada em uma parametrização, utilizando um parâmetro livre  $t$ , estabelecendo:  $\underline{x = t, y = t^2, z = 0}$ , limitando o intervalo para  $-2 < t < 2$

*Equação paramétrica*

**Figura 12 – Parábola e seus elementos.**



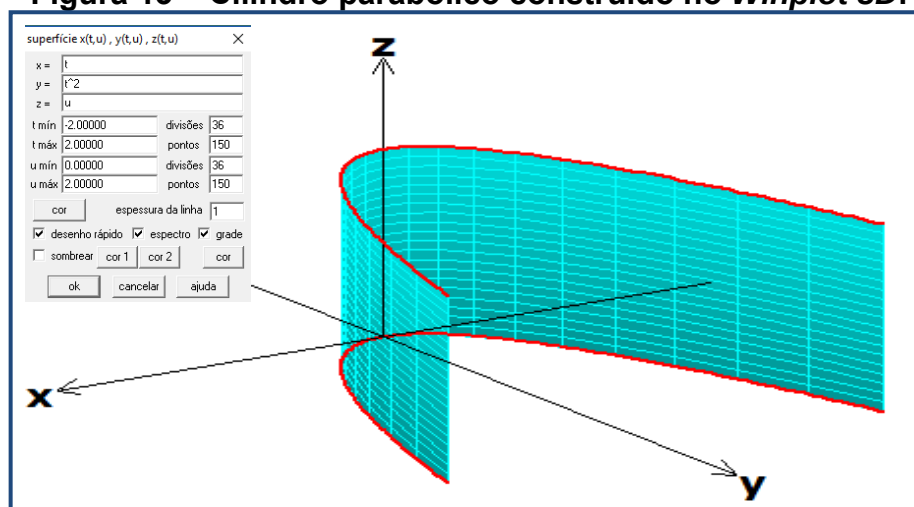
Fonte: Elaborado pelo autor.

O mesmo ocorre com uma superfície cilíndrica parabólica. O que se faz na verdade é transformar a equação em uma superfície definida por três variáveis em apenas duas, numa nova relação de dependência, ficando estabelecido o seguinte formato:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = u \end{cases} \text{ com } -2 \leq t \leq 2 \text{ e } 0 \leq u \leq 2$$

Assim, temos:

**Figura 13 – Cilindro parabólico construído no Winplot 3D.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.1.2 Cilindro parabólico

EXPERIMENTO 1 – Atividade com equação explícita no espaço bidimensional, transferida para o espaço tridimensional através de equações parametrizadas.

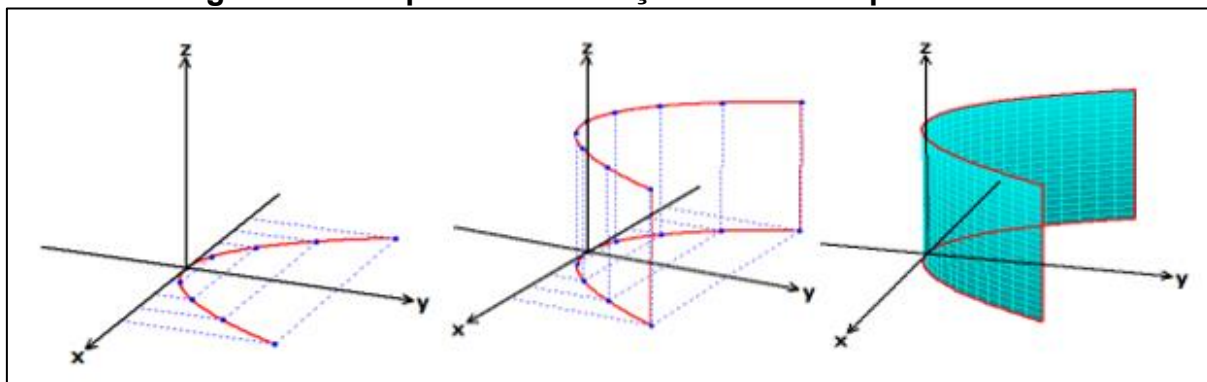
**Quadro 3 – Equações do cilindro parabólico.**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Essa atividade destina-se a construir uma <b>PARÁBOLA</b> no espaço bidimensional utilizando uma lista de pontos, concomitantemente com a inserção da equação explícita. Posteriormente faremos o mesmo procedimento no espaço tridimensional, usando a mesma lista de pontos, porém, mudando a equação de explícita para paramétrica. Sua transformação resultará em <b>SUPERFÍCIE CILÍNDRICA PARABÓLICA</b>.</p> |                                                                                                                                                                                               |
| <p>ESPAÇO BIDIMENSIONAL</p> <p>Lista de pontos: <math>-4 \leq x \leq 4</math></p> <p>Equação Explícita:</p> $y = x^2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <p>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</p> <p>Lista de pontos: <math>-4 \leq x \leq 4</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= 0 \end{aligned}$                    |
| <p>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</p> <p>Lista de pontos: <math>-4 \leq x \leq 4</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \end{aligned}$ <p>Utilizamos altura <math>z = 2</math></p>                                                                                                                                                                                                          | <p>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</p> $\begin{aligned} 0 &\leq t \leq 2\pi \\ 0 &\leq u \leq 2 \end{aligned}$ <p>Equação paramétrica:</p> $\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= u \end{aligned}$ |

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Obs.:** A variável  $u$  na equação paramétrica consiste em dar preenchimento na superfície, no sentido do eixo  $Z$ .

**Figura 14 – Etapas de construção do cilindro parabólico.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.1.3 A equação da circunferência e sua parametrização

Para encontrarmos sua equação cartesiana, consideremos uma circunferência de raio  $r$  e centro na origem  $O$   $(0, 0)$ . Para que  $P(x, y)$  seja um ponto da circunferência, devemos ter  $|PO| = r$ , e, assim, pela fórmula da distância entre dois pontos, obtemos:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 = r^2}$$

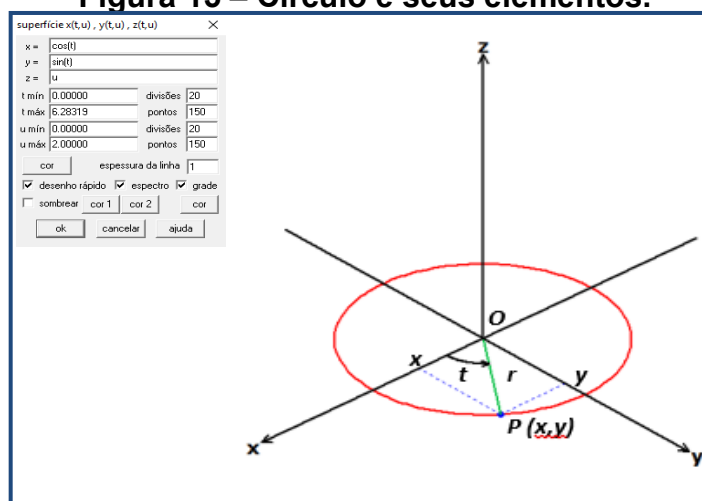
*Equação cartesiana*

Para equação paramétrica, temos:

$$\cos(t) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos(t), \quad \sin(t) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin(t) \therefore \begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases}$$

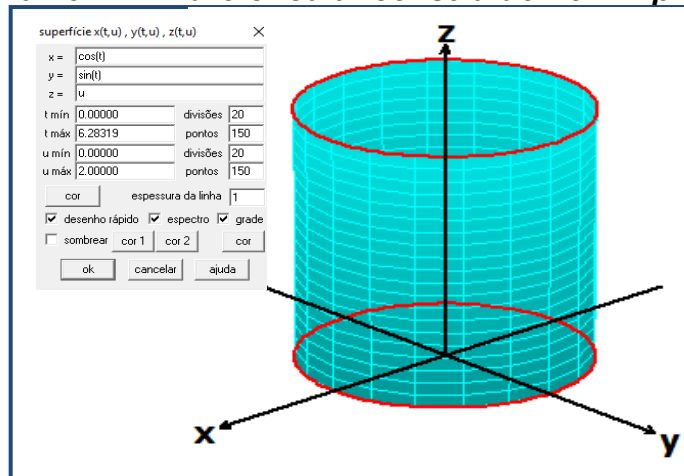
*Equação Paramétrica*

**Figura 15 – Círculo e seus elementos.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 16 – Cilindro circular construído no Winplot 3D.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.1.4 Cilindro quádrico circular

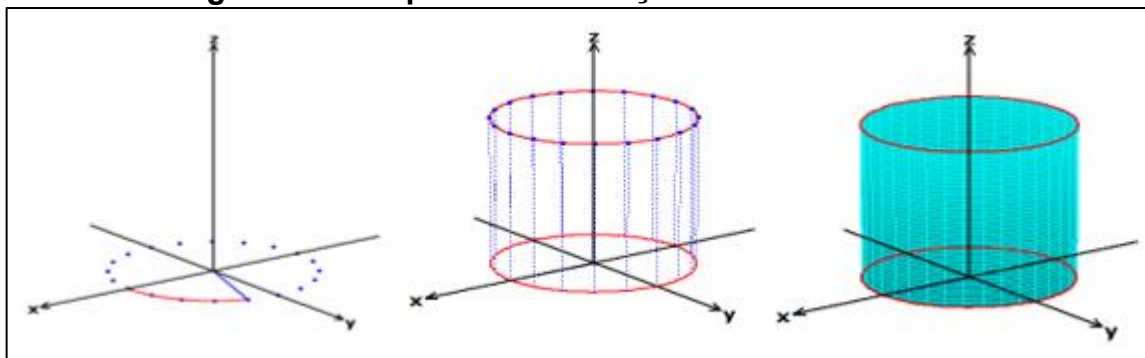
EXPERIMENTO 2 – Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferida para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.

#### Quadro 4 – Equações do cilindro circular.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Essa atividade destina-se a construir um <b>CÍRCULO</b> no espaço bidimensional utilizando uma lista de pontos, inserindo em seguida a equação implícita/explicita. Posteriormente faremos o mesmo procedimento no espaço tridimensional, usando a mesma lista de pontos, porém, mudando a equação de <b>implícita/explicita</b> para <b>paramétrica</b>. Sua transformação resultará em <b>CILINDRO QUÁDRICO</b>. Assim, temos:</p> |                                                                                                                                                                         |
| <p>ESPAÇO BIDIMENSIONAL</p> <p>Lista de pontos: <math>-10 \leq x \leq 10</math></p> <p>Equação Implícita:</p> $x^2 + y^2 = 1$ <p>Equação Explícita:</p> $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$                                                                                                                                                                                                                                                         | <p>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$ $z = 0$                                      |
| <p>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$ <p>Utilizamos altura <math>z = 2</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p><math>0 \leq u \leq 2</math></p> <p>Equação Paramétrica:</p> $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$ $z = u$ |

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 17 – Etapas de construção do cilindro circular**



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.1.5 A equação da elipse e sua parametrização

Para encontrarmos sua **equação cartesiana**, consideremos uma elipse de eixo maior horizontal de comprimento **2a** e centro na origem O (0, 0), **Figura 1**. Usando medidas convencionadas, temos:

⇒ os vértices são os pontos  $V_1(-a, 0)$  e  $V_2(a, 0)$ ;

⇒ os focos são os pontos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ ;

⇒ as extremidades do eixo menor são os pontos  $P_1(0, b)$  e  $P_2(0, -b)$ .

Para que **P(x, y)** seja um ponto da elipse, devemos ter  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ , e, assim, pela fórmula da distância, obtemos:

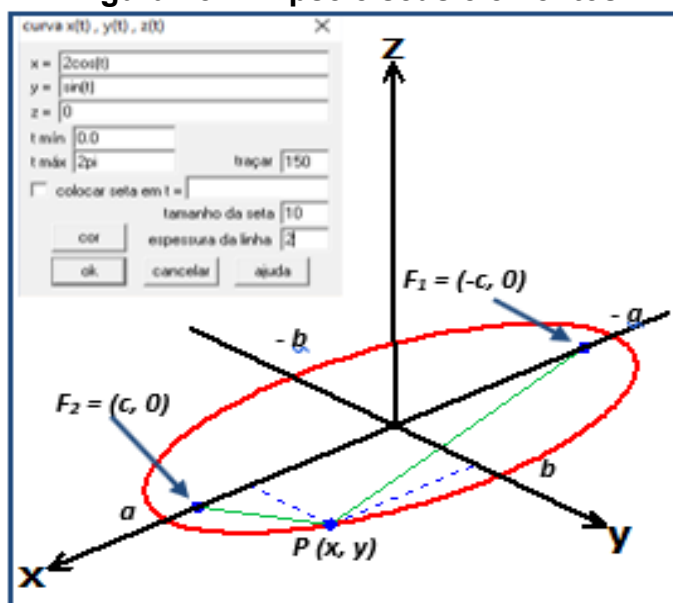
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{Equação cartesiana}}$$

Para equação paramétrica, temos:

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \\ z = u \end{cases}$$

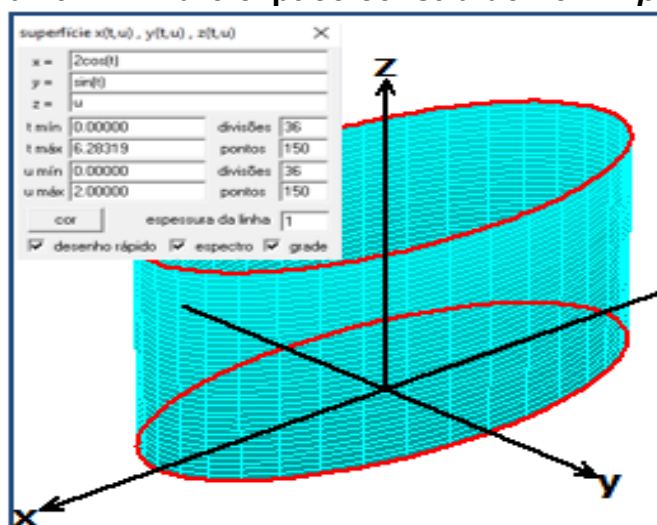
*Equação paramétrica*

**Figura 18 – Elipse e seus elementos.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 19 – Cilindro elíptico construído no *Winplot 3D*.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.1.6 Cilindro elíptico

EXPERIMENTO 3 – Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferida para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.

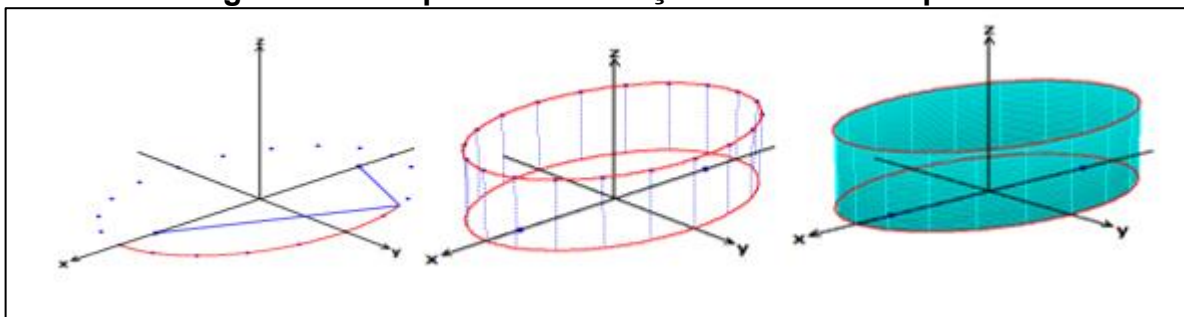
### Quadro 5 – Equações do cilindro elíptico.

Essa atividade destina-se a construir uma **ELIPSE** no espaço bidimensional utilizando uma lista de pontos, inserindo em seguida a equação implícita/explicita. Posteriormente faremos o mesmo procedimento no espaço tridimensional, usando a mesma lista de pontos, porém, mudando a equação de implícita/explicita para paramétrica. Sua transformação resultará em **CILINDRO ELÍPTICO**. Assim, temos:

|                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p>Equação da (curva):</p> <p><math>x = a \cos(t)</math></p> <p><math>y = b \sin(t)</math></p> <p>Utilizamos altura <math>z = 2</math></p>               | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p><math>0 \leq u \leq 2</math></p> <p>Equação Paramétrica:</p> <p><math>x = a \cos(t)</math></p> <p><math>y = b \sin(t)</math></p> <p><math>z = u</math></p> |
| <p><b>ESPAÇO BIDIMENSIONAL</b></p> <p>Lista de pontos: <math>-10 \leq x \leq 10</math></p> <p>Equação Implícita:</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>Equação Explícita:</p> $y = \pm \frac{\sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2}}{a}$ | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p>Equação da (curva):</p> <p><math>x = a \cos(t)</math></p> <p><math>y = b \sin(t)</math></p> <p><math>z = 0</math></p>                                      |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 – Etapas de construção do cilindro elíptico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.1.7 A equação da hipérbole e sua parametrização

Para encontrarmos sua **equação cartesiana**, consideremos uma hipérbole de eixo principal horizontal de comprimento **2a** e centro na origem  $O(0, 0)$ , **Figura 1**. Usando medidas convencionadas, temos:

⇒ os vértices são os pontos  $V_1(-a, 0)$  e  $V_2(a, 0)$ ;

⇒ os focos são os pontos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ ;

⇒ as extremidades do eixo menor são os pontos  $P_1(0, b)$  e  $P_2(0, -b)$ .





## 4.1.8 Cilindro hiperbólico

EXPERIMENTO 4 – Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferida para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.

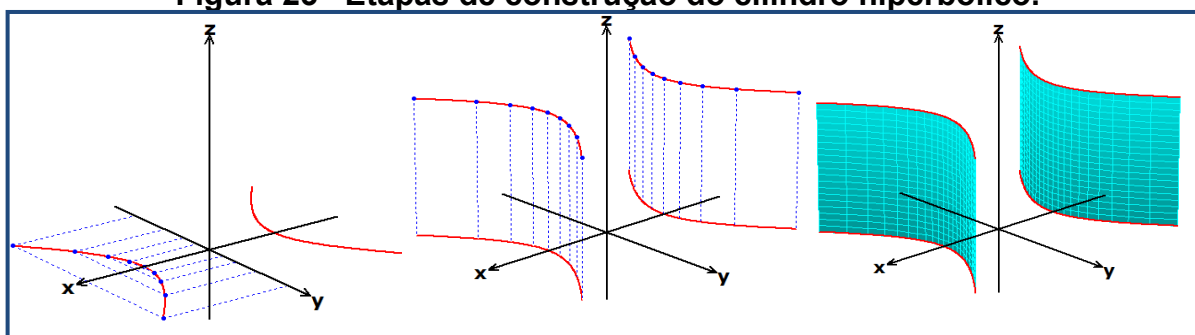
**Quadro 6 – Equações do cilindro hiperbólico.**

Essa atividade destina-se a construir uma **HIPÉRBOLE** no espaço bidimensional utilizando uma lista de pontos, inserindo em seguida a equação implícita/explicita. Posteriormente faremos o mesmo procedimento no espaço tridimensional, usando a mesma lista de pontos, porém, mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**. Sua transformação resultará em **CILINDRO HIPÉRBOLICO**. Assim, temos:

|                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>ESPAÇO BIDIMENSIONAL</b></p> <p>Lista de pontos: <math>-4 \leq x \leq 4</math></p> <p>Equação Implícita:</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>Equação Explícita:</p> $y = \pm \frac{\sqrt{-a^2 b^2 + x^2}}{a}$ | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>-1 \leq t \leq 1</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = \pm a \sec(t)$ <p><math>y = b \operatorname{tg}(t)</math></p> <p><math>z = 0</math></p>                                      |
| <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>-1 \leq t \leq 1</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = \pm a \sec(t)$ <p><math>y = b \operatorname{tg}(t)</math></p> <p><math>z = 2</math></p>                               | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>-1 \leq t \leq 1</math></p> <p><math>0 \leq u \leq 1</math></p> <p>Equação paramétrica:</p> $x = \pm a \sec(t)$ <p><math>y = b \operatorname{tg}(t)</math></p> <p><math>z = u</math></p> |

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 23– Etapas de construção do cilindro hiperbólico.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, são apresentadas e descritas as atividades desenvolvidas pelos estudantes no *Caderno de Atividades*.<sup>1</sup>

#### **4.2 Atividade 1 – Construção dos cilindros quádracos no espaço bidimensional para o espaço tridimensional**

**1º Momento:** Apresentação dos objetivos, dos conteúdos abordados da metodologia e definição formal dos cilindros.

##### ⇒ **OBJETIVOS**

- Construir cilindros quádracos a partir de uma sequência didática utilizando a definição formal dos cilindros;
- Reconhecer um cilindro quádraco;
- Observar a transição de uma curva no espaço XY para o plano XYZ;
- Utilizar o software *Winplot 3D*.

##### ⇒ **CONTEÚDOS ABORDADOS**

- Cilindros;
- Definição de um cilindro quádraco e não quádraco;
- Elementos dos cilindros;
- Classificação;
- Construção de um cilindro.

##### ⇒ **METODOLOGIA**

A título de demonstração e orientação para uma construção empírica por parte dos estudantes participantes dessa atividade, foi realizada uma atividade guiada e, em seguida, ficaram a cargo dos estudantes as demais construções: primeiro com a tecnologia *lápiz e papel*, em seguida, com o software *Winplot 3D*.

---

<sup>1</sup> Observe-se que, quando reproduzidas, as atividades usadas para exemplificar a discussão aqui encaminhada foram digitalizadas dos *Cadernos de Atividades* dos sujeitos da pesquisa, portanto, a numeração que consta no enunciado das mesmas é do documento original.

#### 4.2.1 Atividade Guiada – construção de um cilindro parabólico utilizando o software Winplot 3D

Também a título de demonstração e orientação para experiência significativa por parte dos estudantes participantes desta pesquisa, construí um cilindro parabólico, seguindo uma metodologia de passos, que serviu de modelo para a construção de outros cilindros.

- a) Usando o software: Uma demonstração da construção de uma curva de equação  $f(x) = x^2$  no plano bidimensional XY.

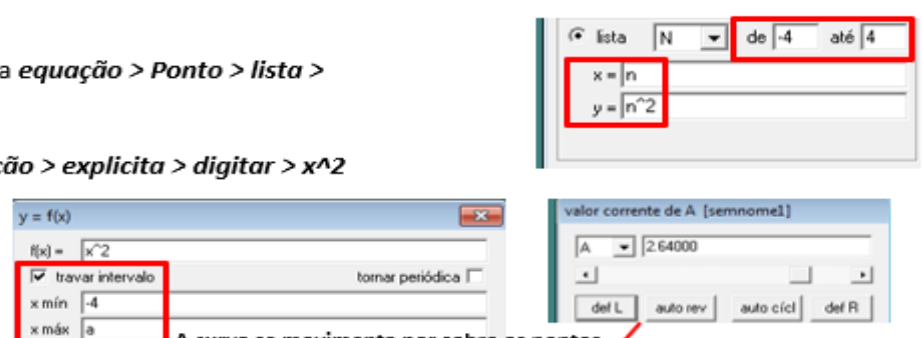
**Figura 24 – Comandos iniciais para a construção da Parábola no Winplot 3D.**

**1.2 – CONSTRUÇÃO DE UM CILINDRO PARABÓLICO**

**Passo 1** – Criamos uma tabela dando valores arbitrários para x, encontrando assim, valores para y.

**Passo 2** – Inserir aba *equação* > *Ponto* > *lista* >

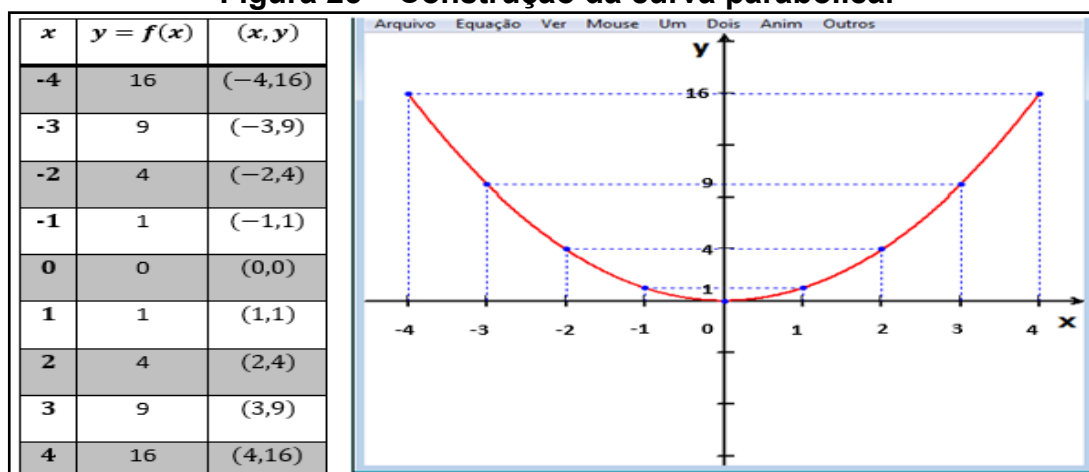
**Passo 3** - aba *equação* > *explicita* > *digitar* >  $x^2$



A curva se movimenta por sobre os pontos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 25 – Construção da curva parabólica.**



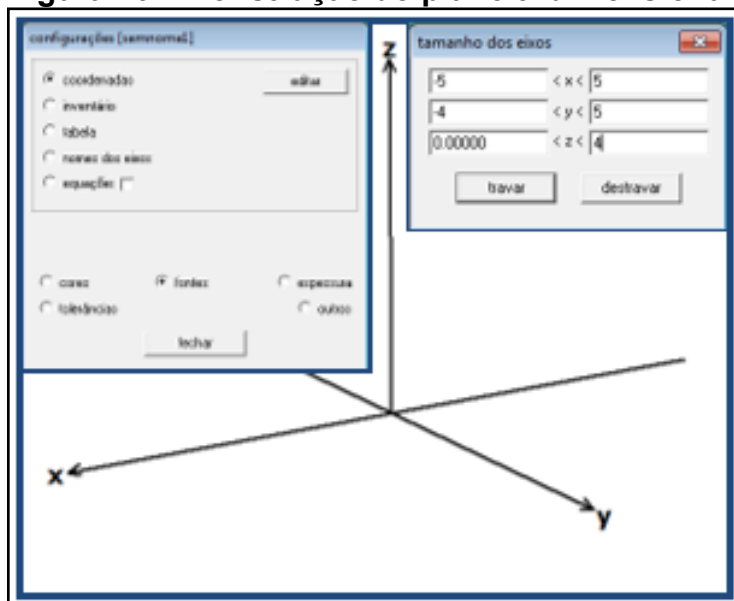
Fonte: Elaborado pelo autor.

O mesmo procedimento deve ser feito no **ambiente tridimensional**. Assim, temos:

**Passo 1** – Configuração dos eixos. Aba outros > configurações > nome dos eixos – editar > negrito – tamanho 14 > ok – Ir para espessura > espessura na tela – eixo > 2 – ok.

**Passo 2** – Aba ver > eixos > definir tamanho >  $-5 < x < 5$  |  $-3 < y < 5$  |  $0 < z < 4$  | – 0k. Use a tecla “pg dn” ou “pg up” para centralizar as coordenadas na tela.

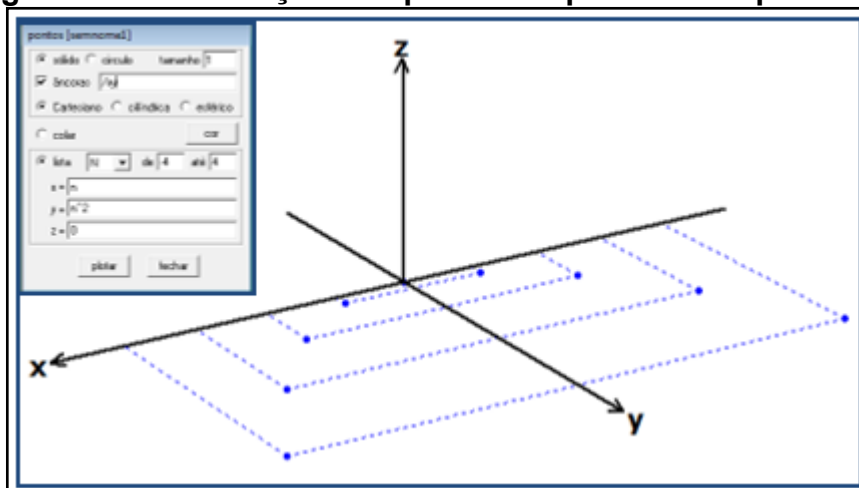
**Figura 26 – Construção do plano tridimensional.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Passo 3** – Aba Equação > ponto > lista > Podemos utilizar a letra que quisermos. O padrão no Winplot 3D é a letra **N**. Clicamos em <lista N de -4 até 4 >  $x = n$  |  $y = n^2$  |  $z = 0$  > tamanho 1 > âncoras > /xy > Plotar

**Figura 27 – Construção dos pontos da parábola no plano XY.**

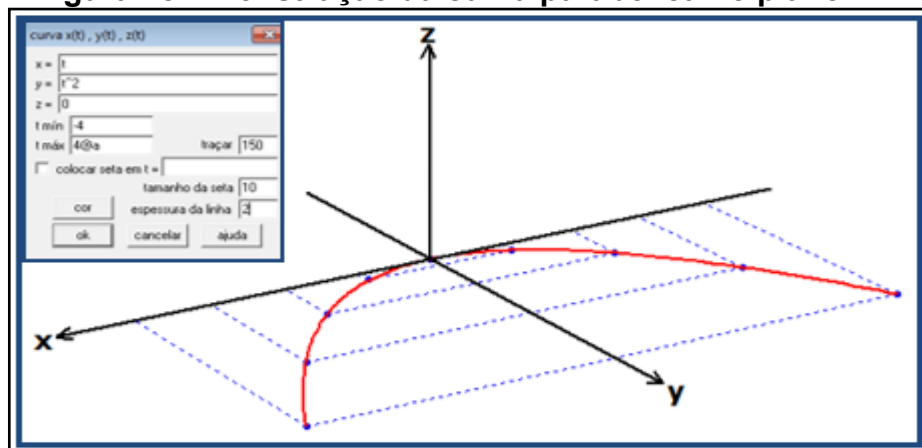


Fonte: Elaborado pelo autor.

**Passo 4** – Equação > curva >  $x = t \mid y = t^2 \mid z = 0$  > t min = -4, t max = (4@a)\*  
> ok.

\* – O símbolo (@ + letra) provoca animação da curva dada.

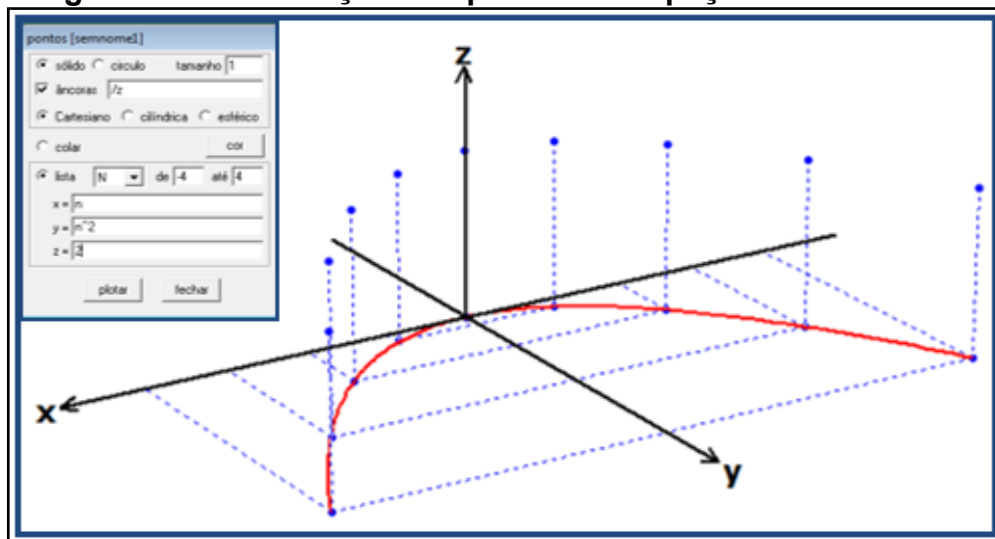
**Figura 28 – Construção da curva parabólica no plano XY.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Passo 5** – Vamos inserir os mesmos pontos dados, porém, com o eixo z de altura 2. Assim temos: Aba Equação > ponto > lista > lista N de -4 até 4 >  $x = n \mid y = n^2 \mid z = 2$  > tamanho 1 > âncoras > /z > Plotar.

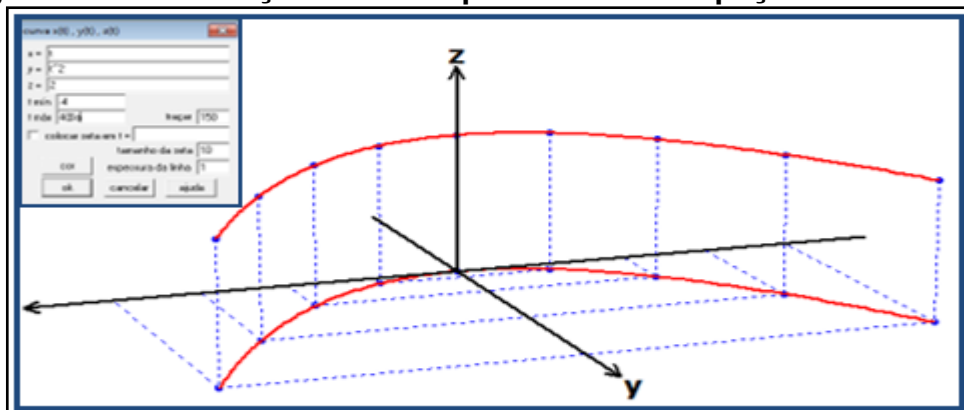
**Figura 29 – Construção dos pontos no espaço tridimensional.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

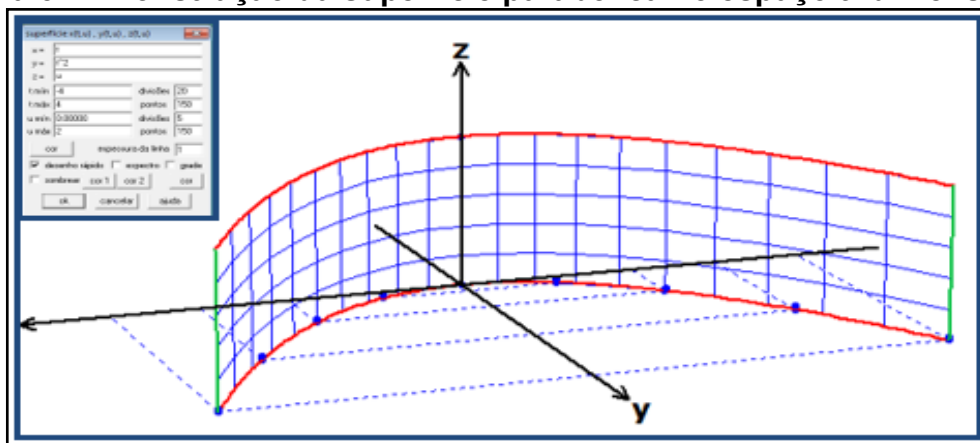
**Passo 6** – Equação > curva >  $x = t \mid y = t^2 \mid z = 2$  > t min = -4, t max = (4@a)  
> ok.

**Figura 30 – Construção da curva parabólica no espaço tridimensional.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

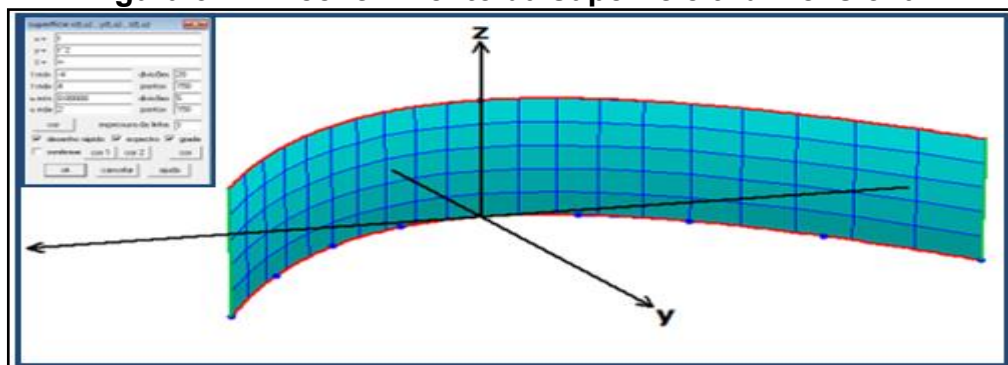
**Figura 31 – Construção da superfície parabólica no espaço tridimensional.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Passo 7** – Para finalizar, plotamos a superfície, usando a equação paramétrica. Equação > Paramétrica >  $x = t \mid y = t^2 \mid z = u$  >  $-4 \leq t \leq 4$ ,  $0 \leq u \leq 2$ .

**Figura 32 – Preenchimento da superfície tridimensional.**



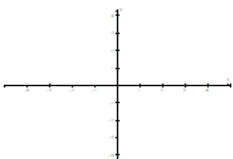
Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a familiarização com o *software*, o item seguinte da Atividade 1 consistiu na construção manual, com lápis e papel, de uma curva no plano XY, para, em

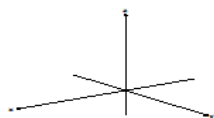
seguida, fazer a transcrição dessa curva para o espaço tridimensional, XYZ. Após a transcrição da curva, foi solicitado que os estudantes fizessem o esboço, ainda de forma manual, do cilindro gerado pela curva. O objetivo desses itens foi proporcionar ao estudante a visualização da transição do plano bidimensional para o espaço tridimensional, tendo por referência o esboço manual feito com lápis e papel.

**Figura 33 – Item 1 – Construindo cilindros parabólicos no espaço tridimensional usando lápis e papel.**

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano bidimensional xy a curva  $y = -x^2$ .



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva geratriz do plano, esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Faça o esboço do cilindro.

**Fonte: Elaborado pelo autor.**

Após a construção de forma manual, o próximo item consistiu na construção da superfície com a utilização do *software*, seguindo uma sequência orientada. A associação destas duas maneiras de construção da superfície, se demonstra importante, ao permitir que o estudante, quando da utilização de um *software*, não o tenha apenas como uma maneira de “encurtar caminhos” ou criar “atalhos” mas que compreenda todo o processo que está por trás dessa construção, ou seja, que perceba todos os passos e qual leitura que os *softwares* está fazendo das informações inseridas nele.

**Figura 34 – Item 2 – Construindo cilindros parabólicos no espaço tridimensional usando software Winplot 3D.**

**Passo 1)** Equação → Ponto → Lista - Marque a opção âncoras – digite na aba:  $xy$   
 Marque a opção Lista – N → -4 até 4 -  $X = n$ ;  $Y = (-n^2)$ ;  $Z = 0$

Observe o gráfico traçado no plano  $xy$ .

**Passo 2)** Equação → Ponto → Lista - Marque a opção âncoras – digite na aba:  $/z$   
 Marque a opção Lista – N → -4 até 4;  $X = n$ ;  $Y = (-n^2)$ ;  $Z = 1$  (por exemplo)

Após os passos listados acima, construir a curva que passa pelos pontos plotados.

**Passo 3)** Equação → Curva -  $X = t$ ;  $Y = -t^2$ ;  $Z = 0$   
 (se quiser altere a curva para a cor que desejar) - Ok

Alterando o parâmetro  $z$

**Passo 4)** Equação → Curva;  $X = t$ ;  $Y = -t^2$ ;  $Z = 1$ ; Ok

**Fechando o cilindro:**

**Passo 1)** Equação → Paramétrica (abrirá a janela ao lado)

$X = t$   
 $Y = -t^2$   
 $Z = u$   
 $T \text{ mín.: } -4 \rightarrow T \text{ máx.: } 4 \rightarrow \text{Divisões: } 20$   
 $U \text{ mín.: } 0 \rightarrow U \text{ máx.: } 1 \rightarrow \text{Divisões: } 20$

Colocar a cor que desejar → espectro → grade → ok



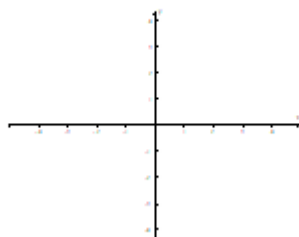

Fonte: Elaborado pelo autor.

Objetivando verificar a compreensão e o entendimento que os estudantes tiveram, quando da visualização das curvas, na transcrição do plano bidimensional para o espaço tridimensional, assim como dos conceitos e definições das superfícies cilíndricas, na etapa seguinte, a curva diretriz da superfície foi modificada, e novamente se pediu que o estudante fizesse a toda a construção, primeiramente manual e depois com a utilização do *software*.

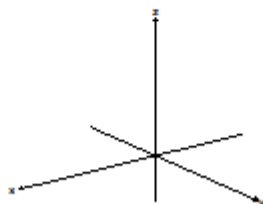


**Figura 35 – Gráfico da curva de equação  $y = x^2 + 1$ .**

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano bidimensional  $xy$  a curva  $y = x^2 + 1$ .



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos.



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Já o item seguinte consistiu na construção da superfície com a utilização do *software*. Porém, agora, os estudantes já haviam compreendido o processo de construção da superfície.

**Figura 36 – Etapas de construção da curva de equação  $y = x^2 + 1$  com software Winplot 3D.**

**Passo 1)** Equação → Ponto → Lista - Marque a opção âncoras – digite na aba: /xy - Marque a opção Lista – N → -4 até 4  
 $X = n$ ;  $Y = n^2 + 1$ ;  $Z = 0$

Observe o gráfico traçado no plano xy.

**Passo 2)** Equação → Ponto → Lista - Marque a opção âncoras – digite na aba: /z  
 Marque a opção Lista – N → -4 até 4 -  $X = n$ ;  $Y = n^2 + 1$ ;  $Z = 1$  (por exemplo)

Após os passos listados acima, construir a curva que passa pelos pontos plotados.

Equação → Curva -  $X = t$ ;  $Y = t^2 + 1$ ;  $Z = 0$   
 Ok

**Alterando o parâmetro z**

Equação → Curva -  $X = t$ ;  $Y = t^2 + 1$ ;  $Z = 1$ ; Ok

**Fechando o cilindro:**

Equação → Paramétrica (abrirá a janela ao lado)

$X = t$ ;  $Y = t^2 + 1$ ;  $Z = u$   
 T mín.: -4 → T máx.: 4 → Divisões: 25  
 U mín.: 0 → U máx.: 1 → Divisões: 25

Colocar a cor que desejar → espectro → grade → ok

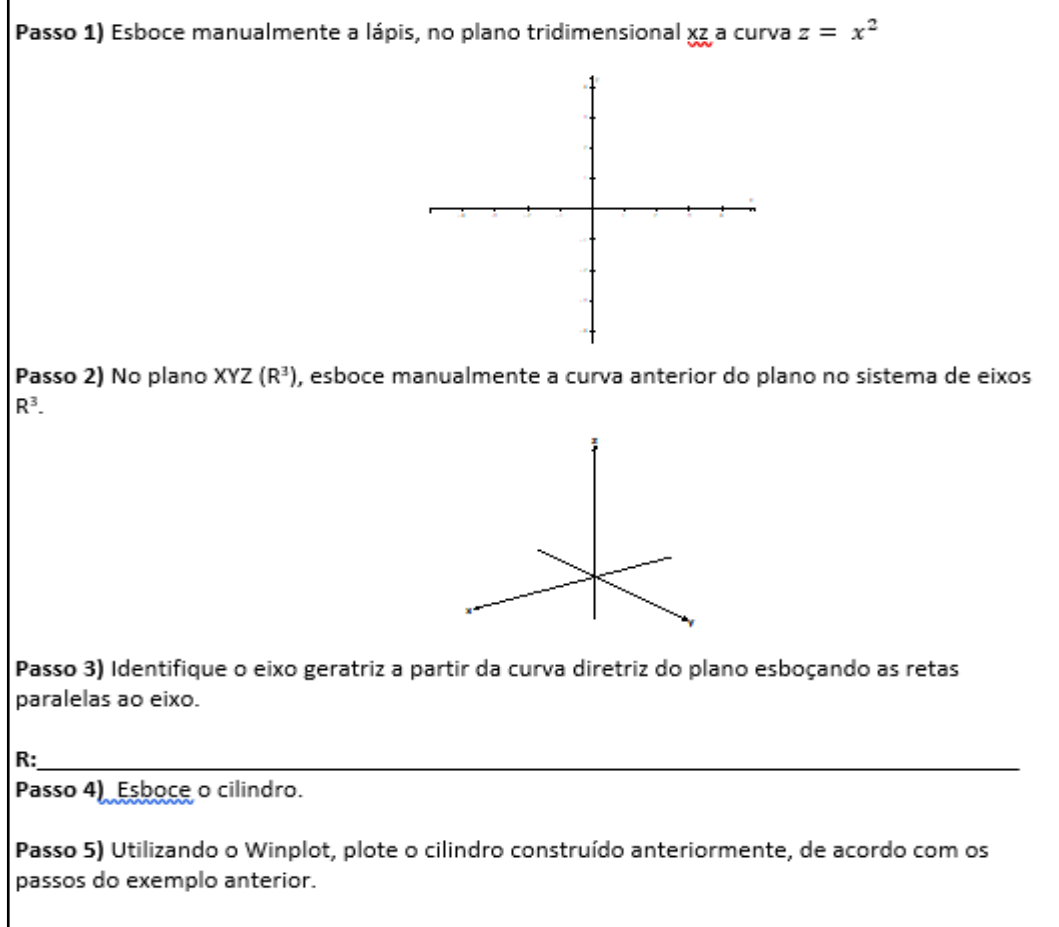



Fonte: Elaborado pelo autor.

Esses dois itens, 1 e 2, tiveram os mesmos objetivos, proporcionar ao estudante a visualização na transição do bidimensionais para o espaço tridimensional. Porém, no item 2, a curva diretriz teve o seu vértice fora da origem do plano bidimensional. Esperava observar com essa mudança de vértice qual o comportamento dos estudantes quando o eixo de orientação da curva diretriz foi modificado.

No item 3, novamente, o eixo de orientação da curva diretriz foi alterado. Não foi fornecido, de forma proposital, o passo a passo para a construção da superfície no software Winplot 3D, uma vez que esperava que os estudantes já estivessem familiarizados com o programa e que conseguiriam utilizá-lo de maneira mais autônoma. O objetivo foi verificar se os mesmos conseguiriam desenvolver essa atividade com a mesma desenvoltura das atividades anteriores.

**Figura 37 – Gráfico da curva de equação  $z = x^2$**



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

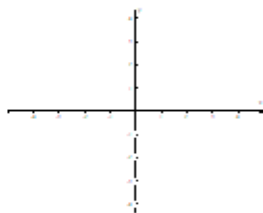
A partir do item 4 da sequência didática, são abordados os cilindros quádricos, ou seja, aqueles que têm como curva diretriz uma cônica, circunferência, elipse, parábola e hipérbole (MOTA *et al.*, 2013). O padrão de desenvolvimento foi o mesmo dos itens anteriores, em que o estudante fazia primeiramente a construção de maneira manual, ou seja, com lápis e papel, para, na sequência, construir a mesma superfície utilizando o *software Winplot 3D*.

Por meio desse item, foram explorados os conceitos de cilindros circulares e, através da definição formal de um cilindro, o estudante foi levado a perceber que, para classificação e construção da superfície, o elemento importante era curva diretriz da superfície.

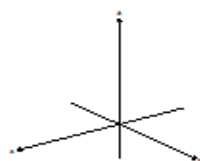
Os estudantes também começaram a utilizar as **equações paramétricas** das superfícies, uma vez que estas podem ser utilizadas tanto no espaço bidimensional quanto no espaço tridimensional.

**Figura 38 – Construindo cilindros circulares no espaço tridimensional.**

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva  $x^2 + y^2 = 1$ .



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A utilização da equação paramétrica para a construção do cilindro permitiu dar um significado ainda maior a esse tipo de equação, uma vez que os estudantes de engenharia e de outros cursos da área de Ciências Exatas já tiveram contato com as mesmas, mas não conseguiam compreender ou assimilar bem seus conceitos e aplicações.

**Figura 39 – Construção de cilindros circulares com software Winplot 3D.**

**Passo 1)** Equação → Paramétrica

**Passo 2)** Digitar os seguintes dados:

$X = \sin(t) \rightarrow y = \cos(t) \rightarrow Z = u$

Os demais dados da caixa da superfície podem permanecer inalterados.

**Passo 3)** Definindo o raio do cilindro

T mín.: -4 → T máx.: 4.

**Passo 4)** Definindo a altura do cilindro

O parâmetro u representa a altura do cilindro. Vamos definir sua altura a partir de zero e limitar a 2, por exemplo.

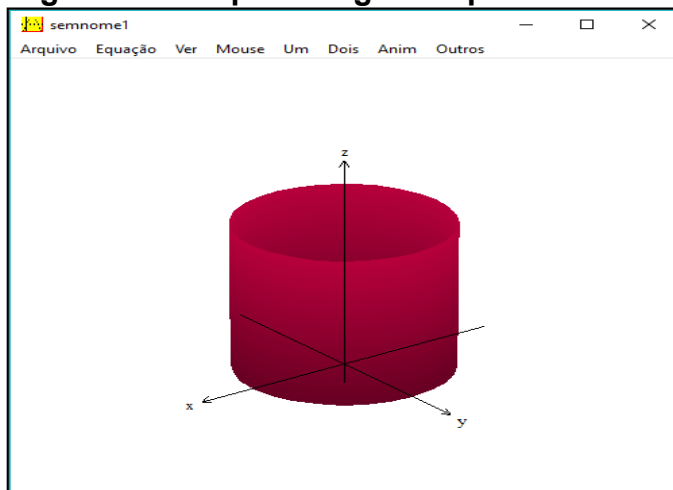
**Passo 5** – Clicar em ok.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a inserção dos dados acima, a superfície a ser visualizada no *software Winplot 3D* será a seguinte:

**Figura 40 – Superfície gerada pelo software.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

O item seguinte da atividade consistiu na construção de um cilindro circular, porém, com seu centro fora da origem do plano bidimensional. Seguindo as atividades anteriores, foi necessário que os estudantes fizessem o esboço da superfície manualmente para, em seguida, utilizar o *software*.

**Figura 41 – Construção manual do cilindro circular com o centro fora da origem do plano XY.**

**1.4.2 - Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

**Passo 5)** Utilizando o Winplot, plote o cilindro construído anteriormente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

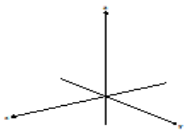
Como o a superfície construída é semelhante à superfície anterior, se diferenciando por estar fora da origem do sistema de eixos tridimensionais, deixamos a cargo do estudante, desenvolver de maneira autônoma a plotagem da superfície com a utilização do *software*. A atividade a seguir, consistiu na construção de um cilindro elíptico.

**Figura 42 – Construção de cilindro elíptico no espaço tridimensional.**

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva  $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$



**Passo 2)** No plano XYZ ( $\mathbb{R}^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $\mathbb{R}^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

**1.5.1 - Utilizando o Winplot, plote o cilindro construído anteriormente.**

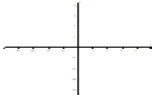
**Passo 1)** Equação → Paramétrica →  $X = 2\cos(t)$ ;  $Y = u$ ;  $Z = 3\sin(t)$

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

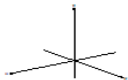
Agora, foi o centro da superfície que foi alterado, e ficou a cargo do estudante o desenvolvimento da atividade.

**Figura 43 – Construção da curva de equação  $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$  com lápis e papel.**

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$$


**Passo 2)** No plano XYZ ( $\mathbb{R}^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $\mathbb{R}^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

**1.5.2 - Utilizando o Winplot, plote o cilindro construído anteriormente.**

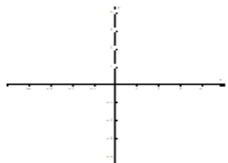
**Passo 1)** Equação → Paramétrica →  $X = 2 + 2\cos(t)$ ;  $Y = u$ ;  $Z = 3 + 3\sin(t)$

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

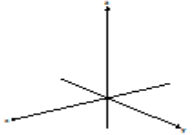
Para finalizar a abordagem dos cilindros quádricos, o último item consistiu na construção, de maneira análoga às atividades anteriores, de um cilindro hiperbólico, primeiramente de maneira manual, com lápis e papel, para em seguida fazer sua construção com a utilização do *software Winplot 3D*.

**Figura 44 – Construção da elipse de equação  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$  com lápis e papel.**

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$



**Passo 2)** No plano XYZ ( $\mathbb{R}^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $\mathbb{R}^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

**1.5.3 - Utilizando o Winplot, plote o cilindro construído anteriormente.**

**Passo1)** Equação → Paramétrica →  $X = 2\sin(t)$ ;  $Y = 3\cos(t)$ ;  $Z = u$

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 4.3 Atividade 2: Construção das Quádricas partindo de um Plano Bidimensional para um espaço Tridimensional

**1º Momento:** Apresentação dos objetivos, conteúdos abordados, definição de uma superfície Quádrica e da metodologia de pesquisa.

#### ⇒ OBJETIVOS

- Facilitar a compreensão da transição das cônicas para as quádricas;
- Observar a geração de uma quádrica no plano tridimensional;
- Analisar a construção de uma quádrica a partir de uma cônica;
- Identificar os tipos de quádricas e suas classificações;
- Construir gráficos das superfícies quádricas manualmente;
- Construir gráficos das quádricas utilizando o *Software Winplot 3D*.

#### ⇒ CONTEÚDOS ABORDADOS

- Cônicas;
- Tipos de quádricas;
- Gráficos bidimensionais;
- Gráficos tridimensionais;
- Identificação das equações de superfície.

#### ⇒ DEFINIÇÃO DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Uma quádrica é uma superfície representada por um gráfico de uma equação quadrática, nas três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A forma mais geral é dada por:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ...,  $J$  são constantes.

Essas superfícies são classificadas em:

- Elipsoide
- Esferoide
- Esfera
- Hiperboloide de uma folha
- Hiperboloide de duas folhas
- Paraboloide elíptico
- Paraboloide hiperbólico (sela)
- Cone quádrico



As seguintes quádricas podem ser de revolução: esferoide, esfera, hiperboloides de uma ou de duas folhas, paraboloides de revolução e o cone quádrico. Não podem ser de revolução: o elipsoide, paraboloides hiperbólicos.

#### ⇒ **METODOLOGIA**

A metodologia utilizada para o desenvolvimento da Atividade 2 se diferenciou da metodologia da Atividade 1. Houve uma opção em fazer, propositalmente, toda a construção da superfície diretamente no *software Winplot 3D*, ou seja, não houve construção em lápis e papel.

Essa modificação na metodologia se justifica, porque os estudantes, participantes da pesquisa, já estavam familiarizados com o *software* e também, pela necessidade de verificar a potencialização proporcionada pela atividade na capacidade de visualização da construção das superfícies, partindo do plano bidimensional para o espaço tridimensional.

Como nessa atividade não se abordou as equações das superfícies, uma vez que esse não era o foco da pesquisa, toda a atividade foi desenvolvida com a utilização das equações paramétricas das mesmas, pois se percebeu que o programa está mais adaptado às superfícies tridimensionais com a utilização desse tipo de equação.

2º Momento: Atividade guiada – Construção de um cone quádrico, partindo do plano bidimensional para o espaço tridimensional

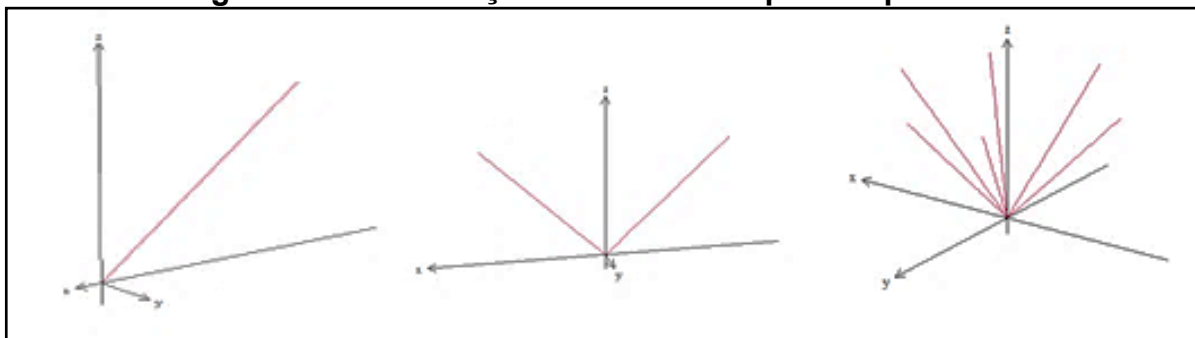
Esse momento consistiu em uma atividade guiada pelo professor pesquisador, na qual os estudantes participantes da pesquisa foram orientados na construção de um cone quádrico. A escolha dessa superfície se justificou por ser formada apenas por retas e círculos, figuras muito conhecidas dos estudantes.

Também foi utilizada a metodologia de passos, proporcionando aos estudantes uma visualização mais clara e objetiva de todo o processo de construção. Nosso passo inicial foi à construção de segmentos, oblíquos ao plano XZ. Em seguida, construímos os círculos, tangentes aos segmentos. Por fim, fizemos o preenchimento de toda a superfície utilizando a equação paramétrica da mesma.

Toda essa sequência de passos foi desenvolvida utilizando a substituição das variáveis **u** e **t**, nas equações paramétricas, por um conjunto de valores, contidos em uma tabela previamente construída pelo professor pesquisador.

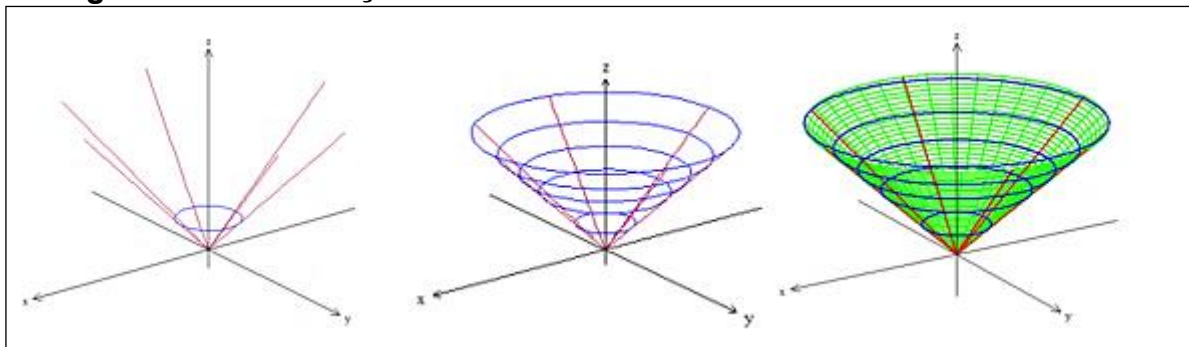
A seguir, é apresentado um quadro-resumo do desenvolvimento da atividade proposta.

**Figura 45 – Construção das retas oblíquas ao plano XY.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 46 – Construção das circunferências concorrentes com as retas.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3º Momento: Construção de superfícies quádricas.

Esse momento foi desenvolvido de forma autônoma pelos estudantes participantes da pesquisa. Solicitei que os mesmos construíssem duas superfícies quádricas: um elipsoide e um parabolóide. Essas superfícies foram escolhidas por apresentarem equações mais simples, que permitiriam uma melhor visualização de toda sua construção pelos estudantes.

Assim, como na atividade guiada, foram fornecidas aos estudantes duas tabelas de valores: uma para a construção do elipsoide e outra para a construção do parabolóide. Esses valores deverão substituir as variáveis **u** e **t** nas equações paramétricas das respectivas superfícies, e foram previamente calculadas pelo professor pesquisador. As demonstrações de tais cálculos poderão ser desenvolvidas em atividade futuras.

Para o desenvolvimento dessa ação, assim como nas superfícies cilíndricas, necessitou-se do conhecimento das **curvas paramétricas** das superfícies a serem

desenvolvidas. Logo, se fez necessária a apresentação das mesmas, conforme é demonstrado a seguir.

### ⇒ O elipsoide e sua parametrização

O elipsoide é uma superfície quádrlica na qual todos os traços são elipses (traço é a curva resultante da interseção de qualquer plano, paralelo aos planos coordenados  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ , à superfície).

EXPERIMENTO 5 – Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.

#### Quadro 7 – Equações do elipsoide.

Essa atividade destina-se a construir um **ELIPSOIDE** no espaço tridimensional mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**.

##### ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Equação do Implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Equação explícita:

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}}$$

##### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

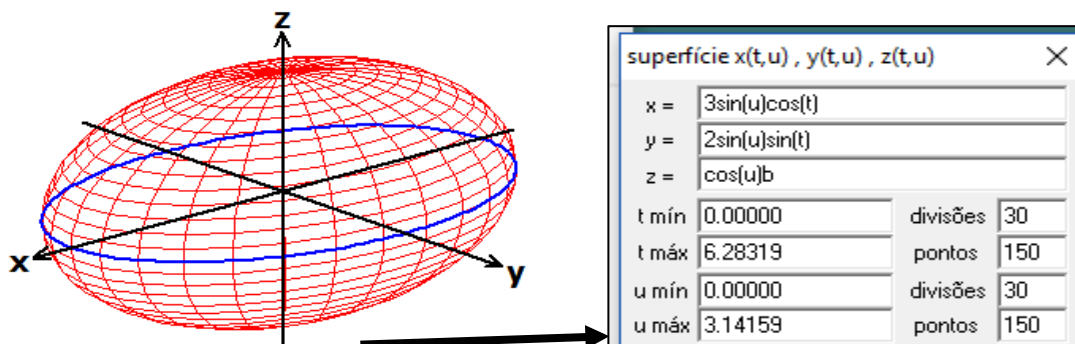
Equação paramétrica:

Equação paramétrica (3D) do elipsoide:

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \\ z = c \cos(u) \end{cases}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 47 – Elipsoide constuido no Winplot 3D.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### ⇒ O parabolóide e sua parametrização

O parabolóide é uma superfície cuja equação possui um termo com variável do 1º grau. É uma superfície constituída de elipses e hipérboles.

EXPERIMENTO 6 – Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.

### Quadro 8 – Equação parabolóide.

Essa atividade destina-se a construir um **PARABOLOIDE** no espaço tridimensional mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**.

#### ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Equação do Implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a}$$

Equação explícita:

$$y = \pm b^2 \sqrt{\frac{z}{c} - \frac{x^2}{a^2}}$$

#### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

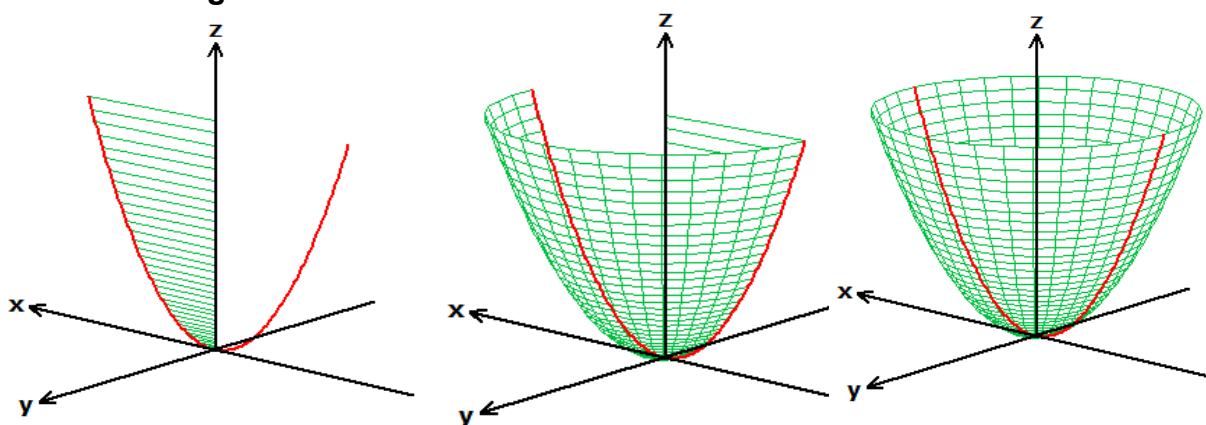
Equação paramétrica:

Equação paramétrica (3D) do elipsoide:

$$\begin{cases} x = u \cos(t) \\ y = u \sin(t) \\ z = u \end{cases}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 – Desenvolvimento do Parabolóide circular.



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### ⇒ O hiperbolóide elíptico de uma folha

O hiperbolóide é uma superfície que tem uma equação semelhante à equação de um elipsoide, uma vez que apresenta um termo ao quadrado, porém, precedido por um sinal negativo.

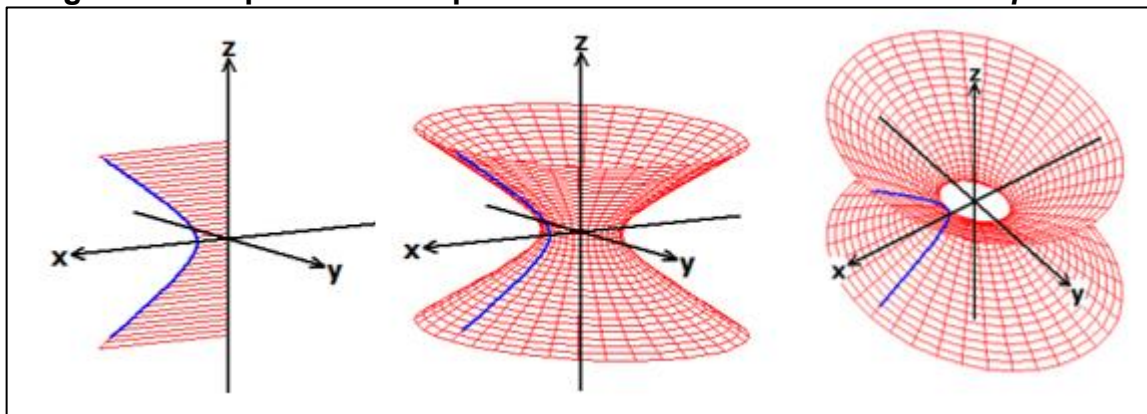
EXPERIMENTO 7 – Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferida para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.

**Quadro 9 – Equação do hiperboloide elíptico de uma folha.**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Essa atividade destina-se a construir um <b>HIPERBOLOIDE ELÍPTICO DE UMA FOLHA</b> no espaço tridimensional mudando a equação de <b>implícita/explicita</b> para <b>paramétrica</b> .                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p>ESPAÇO BIDIMENSIONAL</p> <p>Equação Implícita</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Equação Explícita:</p> $y = \pm b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}}$ | <p>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</p> $-1 \leq t \leq 1$ $0 \leq u \leq 1$ <p>Equação Paramétrica:</p> <p>Equação Paramétrica (3D) do Hiperboloide de uma folha</p> $\begin{cases} x = a \cos(u) \\ y = b \sin(u) \\ z = ct \end{cases}$ |

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 49 – Hiperboloide elíptico de uma folha constuido no Winplot 3D.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

⇒ **O hiperboloide elíptico de duas folhas**

É uma superfície que apresenta dois termos quadráticos precedidos de sinal negativo.

EXPERIMENTO 8 – Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferida para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.

### Quadro 10 – Equações do hiperboloide elíptico de duas folhas.

Essa atividade destina-se a construir um **HIPERBOLOIDE ELÍPTICO DE DUAS FOLHAS** no espaço tridimensional mudando a equação de *implícita/explicita* para *paramétrica*.

#### ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Equação Implícita

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Equação Explícita:

$$-y = \pm b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}}$$

#### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

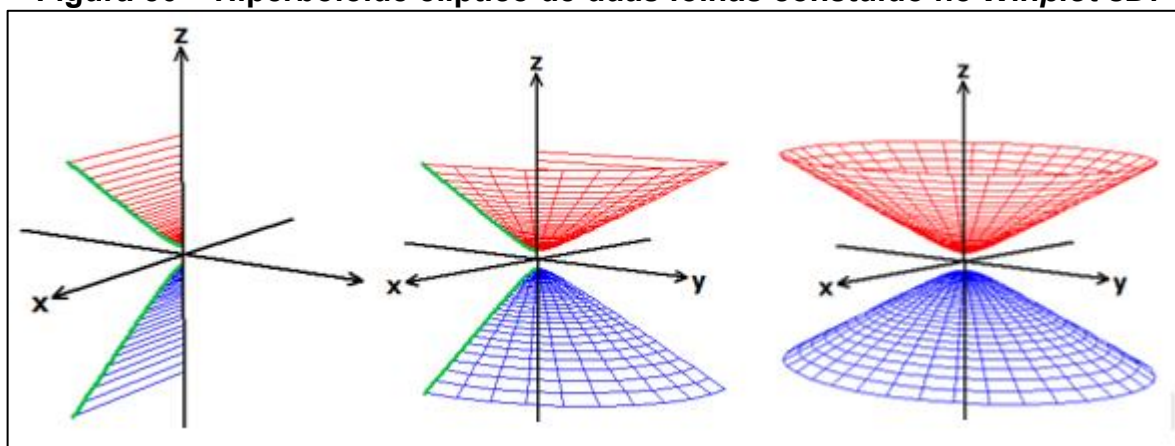
Equação Paramétrica:

Equação Paramétrica (3D) do Hiperboloide de uma folha

$$\begin{cases} x = a \sinh(u) \cos(t) \\ y = b \sinh(u) \sin(t) \\ z = d \cosh(u) \end{cases}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 50 – Hiperboloide elíptico de duas folhas construído no Winplot 3D.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Os sujeitos da investigação foram estudantes de uma faculdade privada da região metropolitana da cidade de Belo Horizonte, que estavam cursando Engenharia Química e Engenharia de Produção, matriculados na disciplina de Cálculo III. Na ementa dos cursos, consta o assunto abordado neste trabalho, o que vai ao encontro da proposta aqui sugerida. Como integrante do corpo docente dessa instituição, lecionando disciplinas para os primeiros períodos dos cursos de engenharia, fui naturalmente impelido a escolher esse campo de pesquisa, vendo-me, assim, na condição de professor pesquisador.

Por se tratar de uma sequência didática, com a utilização de um *software* dinâmico, toda a atividade foi realizada no laboratório de informática da faculdade, que suporta, confortavelmente, 25 alunos.

A pesquisa foi pensada e planejada para acontecer em dois encontros, com duração de 2 horas e 30 minutos, totalizando 5 horas. Seguindo o horário normal de aula da instituição. Os encontros aconteceram nos dias 26 de fevereiro e 5 de março de 2018, e contamos com a colaboração do professor titular da disciplina que, nesta pesquisa, denominaremos como professor colaborador.

Participaram do primeiro encontro desta pesquisa 31 alunos, sendo necessária a formação de duplas, para dividir o *Caderno de Atividades* e os computadores. Já no segundo encontro, estiveram presentes 24 alunos, que optaram por continuar em duplas para o desenvolvimento das demais atividades propostas.

Foram considerados, como amostragem para a pesquisa, os trabalhos nos quais os alunos resolveram, no mínimo, 75% dos itens constantes nas atividades propostas no *Caderno de Atividades*.

Levando em conta o critério de seleção das atividades desenvolvidas pelos alunos, foram escolhidos os Cadernos de Atividades de nove duplas, ou seja, de dezoito alunos, para análise, que denominaremos: Dupla 1- D1, Dupla 2 – D2, Dupla 3 – D3, ..., Dupla 9 – D9.

Os encontros foram pensados e planejados da seguinte maneira:

### ⇒ 1º Encontro: Desenvolvimento da Atividade 1

- Apresentação dos conceitos e definições de cilindros quádricos retos;
- Apresentação das equações paramétricas das superfícies cilíndricas;

- Desenvolvimento da atividade guiada, que consistiu na construção de um cilindro parabólico, utilizando o *software Winplot 3D*, pelo professor pesquisador juntamente com os sujeitos da investigação, seguindo a metodologia de passos contida no *Caderno de Atividades*;
- Desenvolvimento dos itens contidos no *Caderno de Atividades* relacionados com os cilindros quádracos retos

## ⇒ 2º Encontro: Desenvolvimento da Atividade 2

- Definição de uma superfície quádraca;
- Apresentação das equações paramétricas das superfícies quádracas;
- Desenvolvimento da atividade guiada, que consistiu na construção de um cone quádraco, partindo do plano  $R^2$  para um plano  $R^3$ , utilizando o *software Winplot 3D*;
- Construção de um elipsoide, pelos estudantes, partindo do plano  $R^2$  para um plano  $R^3$ , utilizando o *software Winplot 3D*;
- Construção de um parabolóide circular, pelos estudantes, partindo do plano  $R^2$  para um plano  $R^3$ , utilizando o *software Winplot 3D*;
- Preenchimento de um questionário avaliativo das atividades.

O *software* escolhido para pesquisa foi o *Winplot 3D*. Trata-se de um programa de domínio público, produzido pelo professor Richard Parris, da *Phillip Exeter Academy*. O *Winplot 3D* é um ótimo programa para plotar gráficos de uma ou duas variáveis, utilizando o *Windows*. Além disso, executa uma série de outros comandos, permitindo realizar animações gráficas com um ou mais parâmetros.

As equações paramétricas serão usadas para trabalhar as atividades das quádracas, uma vez que essas facilitam as representações das superfícies nos ambientes gráficos. Ressaltamos que o uso desse *software* é justificado pela devida apresentação de definições e teorias no ensino de Cálculo, sem prejuízo de suas técnicas tradicionais, além de, no meu entendimento, enquanto professor pesquisador, ser um dos programas precursores para o desenvolvimento de outros *softwares*. O nosso propósito é que o *software* auxilie o aluno na compreensão dos conceitos estudados, e que possa permitir a visualização na construção de uma superfície tridimensional, partindo de um plano bidimensional, sendo ele o agente no processo ensino/aprendizagem. Com isso, desejamos que o aluno tenha mais



autonomia, ou seja, que ele consiga saber se acertou ou não a resolução de um exercício e, com o próprio uso do *software*, encontrar o erro (caso tenha ocorrido). Essa busca colabora efetivamente com o aprendizado.

As sequências didáticas aqui apresentadas foram ordenadas, estruturadas e articuladas de acordo com as orientações de Zabala (2008), objetivando proporcionar aos sujeitos da pesquisa uma aprendizagem mais efetiva e significativa.

Foi solicitado aos sujeitos da pesquisa que fizessem anotações, observações, e, ao final do segundo encontro, preenchessem um questionário anexado ao *Caderno de Atividades* e que nortearia a análise dos resultados colhidos na pesquisa.

Durante todo o desenvolvimento da pesquisa, o papel do professor pesquisador foi de anotar todas as informações possíveis, assim como os comentários feitos pelos alunos e intervindo o mínimo possível. Ao final de cada encontro, o *Caderno de Atividades* era recolhido pelo professor pesquisador para uma posterior análise dos resultados obtidos.

Durante a realização das atividades propostas, percebeu-se a interação entre os sujeitos da investigação, professor pesquisador, professor colaborador, com o *software* escolhido para a realização das atividades e entre os colegas.

Foi fornecido aos sujeitos da pesquisa um *Caderno de Atividades* dividido em duas partes. A primeira parte contempla o conteúdo de “Cilindros Quádricos”, onde foi apresentada uma Sequência Didática, que aborda a definição de um cilindro e as diferenças entre um cilindro quádrico e um não quádrico, e de um reto de um oblíquo. Neste caderno, foram abordados apenas os cilindros quádricos retos. O objetivo desta sequência didática foi explorar a visualização da transição entre o plano XY e o plano XYZ.

A segunda parte aborda as superfícies quádricas, sendo apresentada a definição dessas superfícies e uma sequência didática que também explora a transição das figuras, do plano bidimensional para o espaço tridimensional, tendo como apoio tecnológico o *software Winplot 3D*.

Inicialmente, há uma introdução feita pelo professor colaborador sobre o conteúdo da aula, seguida da exposição do professor pesquisador. Nesse texto introdutório, foi explicado sobre o programa de Mestrado Profissional, de forma breve, e a finalidade das atividades compostas no *Caderno de Atividades*, sendo este o produto do mestrado.

Após essa introdução, foi realizada a apresentação do *software Winplot 3D*, tendo os sujeitos da pesquisa manifestado, de forma verbal, que não o conheciam. Seguindo o *Caderno de Atividades*, foi apresentado o *template* do programa, com alguns comandos básicos necessários para o desenvolvimento das atividades, e as equações paramétricas das superfícies que seriam construídas nesse primeiro encontro.

Como forma de familiarizar os sujeitos da pesquisa com o *software*, foi feita a atividade guiada, pelo professor pesquisador, em que se usou, além do *software*, o *Data Show*. Essa atividade consistiu na construção de um cilindro parabólico, seguindo uma sequência de passos sugerida no *Caderno de Atividades*.

Em um primeiro momento, os sujeitos da pesquisa demonstraram algumas dificuldades na manipulação do *software*, sendo necessária a intervenção do professor pesquisador em alguns casos. Após essa familiarização, os estudantes conseguiram realizar a construção do cilindro, acompanhando as orientações do professor pesquisador.

Na condição de professor pesquisador, acompanhei todo o processo de desenvolvimento das atividades propostas, durante as quais realizei a coleta das observações, dos comentários e fiz algumas intervenções e orientei os estudantes, sempre que necessário.

## **5.1 Apresentação e análise da aplicação das atividades**

Neste tópico do trabalho, serão apresentados e analisados os dados coletados durante a realização da pesquisa. Devido à variação do número de participantes, foram considerados para análise os resultados de nove duplas, que corresponde a dezoito alunos, representando 75% dos participantes. Ressalto, ainda, que as atividade aqui reproduzidas foram digitalizadas dos Cadernos de Atividades dos estudantes participantes, portanto, a numeração que consta no enunciado das mesmas é do documento original.

### **5.1.1 Atividade 1 – Construção dos cilindros quádracos no espaço bidimensional para o espaço tridimensional**

Essa atividade constituiu dois processos: a construção dos cilindros com lápis e papel, e depois com a utilização do *software Winplot 3D*. O objetivo da adoção dessa metodologia foi proporcionar que os estudantes participantes da pesquisa, além de

desenvolver melhor seu processo de visualização entre os espaços de dimensões diferentes, compreendessem como e o que ocorre na transição entre os espaços bidimensionais e tridimensionais.

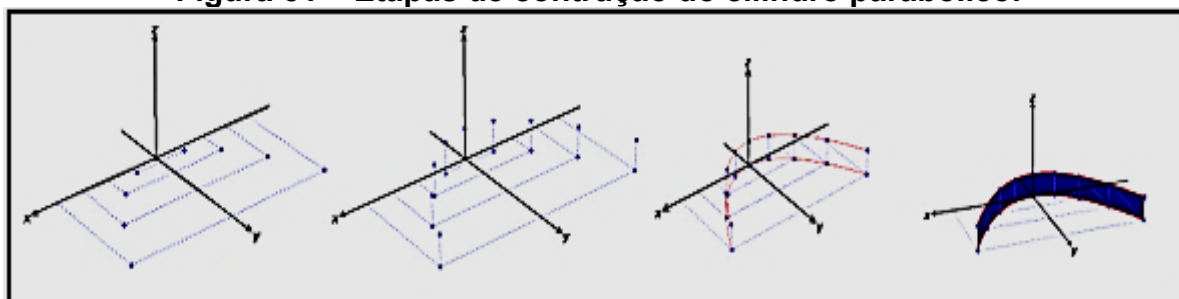
#### 5.1.2 Atividade guiada – Construção de um cilindro parabólico com a utilização do *software Winplot 3D*

Foi elaborado um trabalho dirigido e cooperativo que consistiu na construção de um cilindro parabólico, seguindo uma sequência de passos sugeridos no *Caderno de Atividades*. O principal objetivo dessa atividade foi familiarizar os estudantes, participantes da pesquisa com o *software Winplot 3D*, apresentando ferramentas e ícones importantes para o desenvolvimento das atividades da pesquisa.

Além disso, tinha a intenção de proporcionar, de uma maneira mais empírica, os primeiros contatos com a metodologia adotada no desenvolvimento da pesquisa, assim como a parametrização de curvas.

Assim, proporcionar aos sujeitos da pesquisa, a oportunidade de observar a transição de uma curva no plano XY para o espaço xyz.

**Figura 51 – Etapas de construção do cilindro parabólico.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas observações preliminares, verifiquei que os alunos demonstraram um pouco de dificuldade para iniciar as atividades propostas.

Parte dessa dificuldade observada pelo professor pesquisador se justificou pelo fato de ser o primeiro contato dos sujeitos da pesquisa com o *software* escolhido e com esse tipo de prática pedagógica. Outro fator a ser levado em consideração é o desconhecimento dos mesmos quanto à definição de um cilindro, uma vez que, para muitos, cilindros eram apenas as superfícies circulares. Esse momento foi propício para formalizarmos a definição de um cilindro, além de apresentar a diferença entre os cilindro reto e oblíquo.

Essas dificuldades foram sendo sanadas com algumas intervenções por parte do professor pesquisador, tendo uma contribuição do material fornecido, que foi elaborado de forma bem explicativa. Após alguns minutos, os sujeitos da pesquisa já estavam familiarizados com o *software*, desenvolvendo as tarefas propostas com mais tranquilidade e desenvoltura. Percebi, então, uma boa interação entre os sujeitos da pesquisa com o *software* e também com a prática.

**Figura 52 – Sujeitos da pesquisa desenvolvendo as atividades no *Winplot 3D*.**



Fonte: Foto dos sujeitos da pesquisa realizando atividades – *Winplot 3D*.

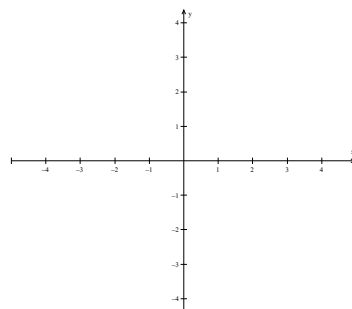
### ***Item 1 – Construindo cilindros parabólicos no espaço tridimensional com lápis e papel***

A partir do entendimento da definição de um cilindro, seguido da construção de um cilindro parabólico, na atividade guiada, esse item teve como principal objetivo proporcionar aos estudantes uma compreensão significativa da transição de uma

figura do plano XY para o espaço XYZ. Para que tal objetivo fosse alcançado, solicitei a construção de uma curva no plano bidimensional XY, de maneira manual, utilizando lápis e papel.

a) Construção da parábola  $y = -x^2$ .

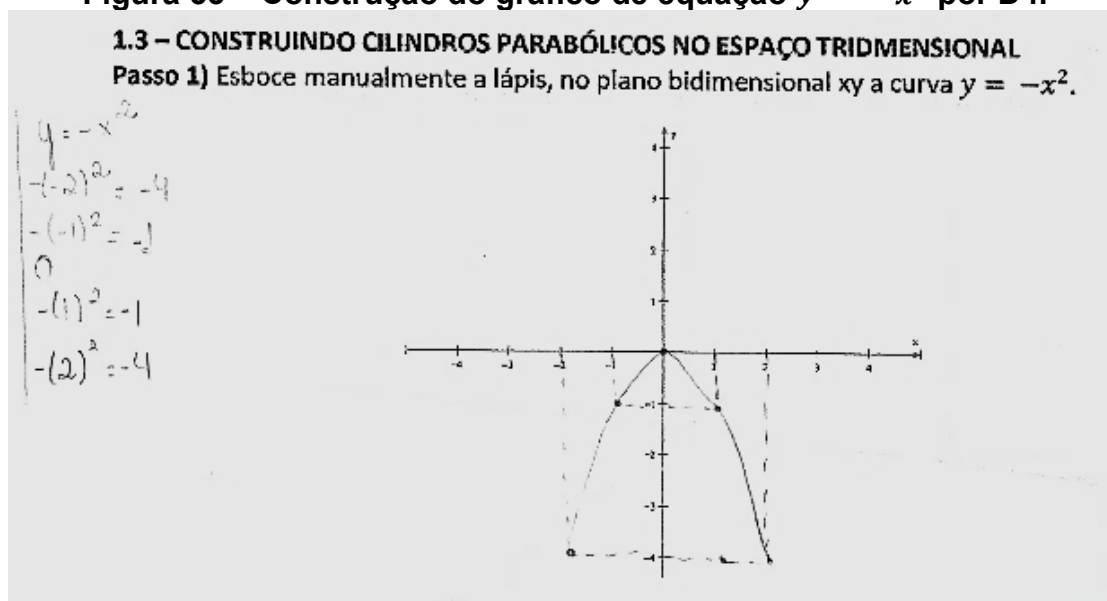
**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano bidimensional xy a curva  $y = -x^2$ .



Fonte: Elaboração do autor – *Caderno de Atividades*.

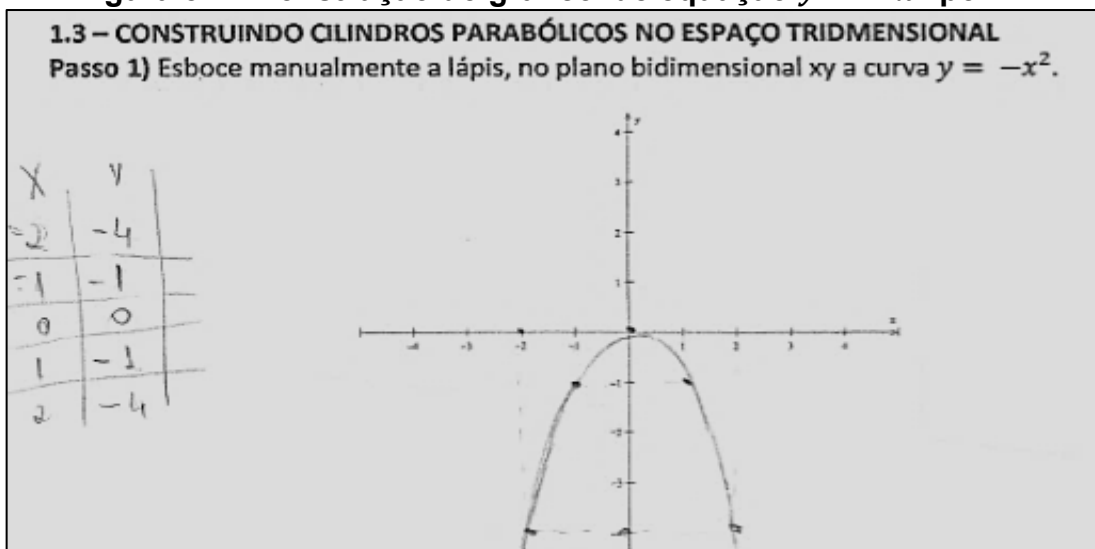
Nessa atividade, os sujeitos da pesquisa não demonstraram dificuldades no esboço do gráfico solicitado, por conhecerem e se depararem com frequência com a função quadrática. Os mesmos utilizavam o sistema de tabela para a construção do gráfico, e perceberam de imediato que, a parábola representativa da função tem o seu vértice coincidente com a origem do plano cartesiano e sua concavidade voltada para baixo.

**Figura 53 – Construção do gráfico de equação  $y = -x^2$  por D4.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Figura 54 – Construção do gráfico de equação  $y = -x^2$  por D7**



**Fonte:** Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

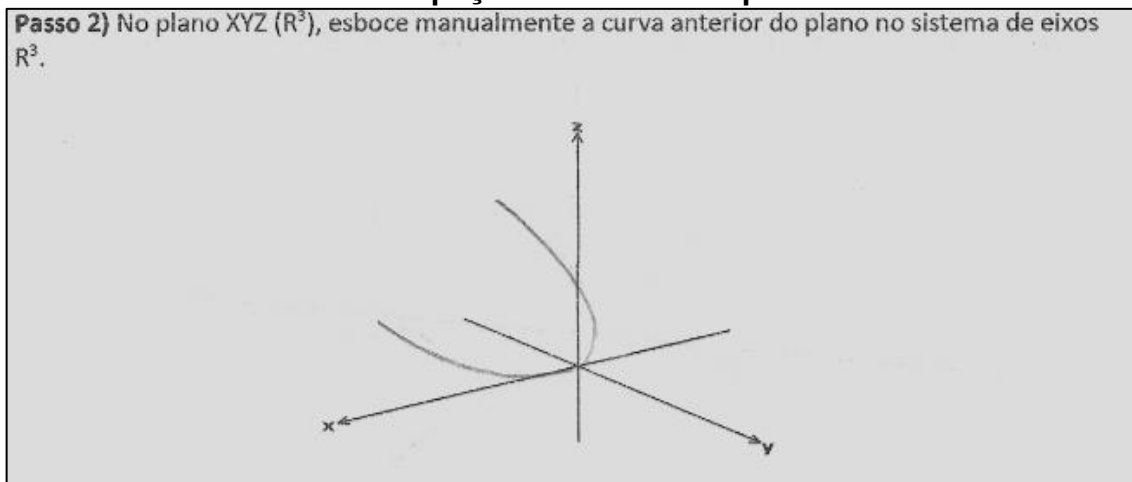
Das nove duplas participantes, todas representaram o gráfico de forma correta, o que indica domínio e reconhecimento de funções no plano XY.

**Passo 2)** No espaço XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .

O objetivo desse item da atividade era proporcionar ao aluno, de uma maneira empírica, a visualização da transição de um gráfico do espaço bidimensional para um espaço tridimensional.

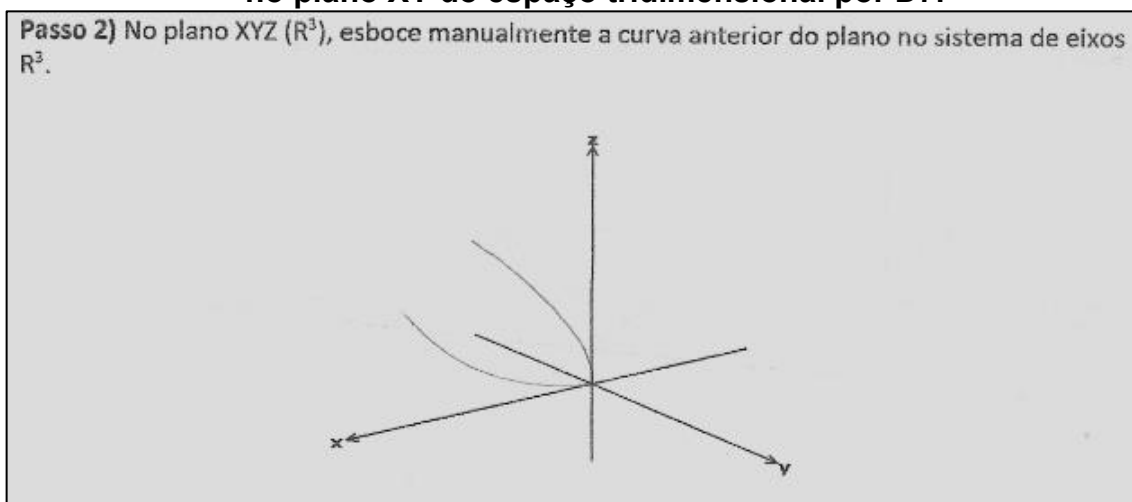
Foi observada uma grande dificuldade por parte dos sujeitos, no esboço do gráfico no plano XZ. Os mesmos não demonstravam uma boa capacidade de visualização na transição do plano  $R^2$  para o espaço  $R^3$ , a começar pela identificação da posição correta no esboço da curva. Os sujeitos da pesquisa, a todo instante, giravam o *Caderno de Atividades* procurando identificar corretamente a posição do gráfico. Mesmo após identificar a posição correta do eixo, não apresentaram maestria no esboço manual do cilindro.

**Figura 55 – Construção da curva de equação  $y = -x^2$  no plano XY do espaço tridimensional por D4**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Figura 56 – Construção da curva de equação  $y = -x^2$  no plano XY do espaço tridimensional por D7.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

Observei que todas as duplas realizaram a atividade, apesar das dificuldades apresentadas inicialmente.

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano, esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

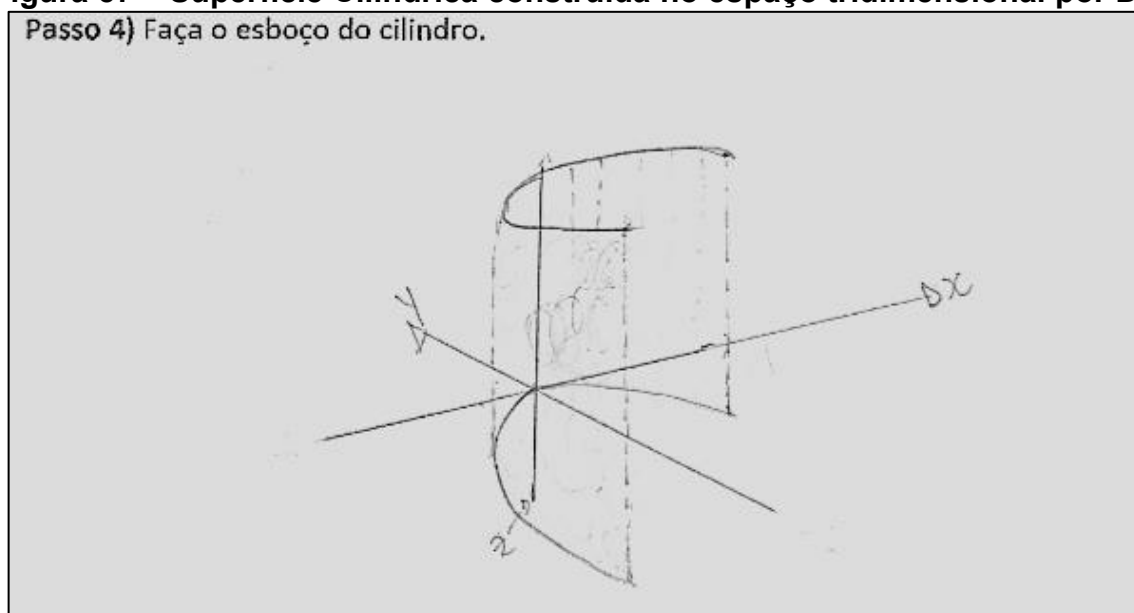
Nesse item da atividade, sete duplas responderam corretamente, ou seja, conseguiram identificar o eixo z como sendo o eixo geratriz do cilindro, enquanto duas

duplas não conseguiram identificar o eixo geratriz correspondente. Nenhuma das duplas fez o esboço das retas paralelas ao eixo.

**Passo 4)** Faça o esboço do cilindro.

As nove duplas conseguiram esboçar de maneira correta o cilindro representativo da curva  $y = -x^2$ . Uma observação importante nessa atividade foi a visualização dos alunos em relação ao plano XZ, que se mostrou diversificada. Para conseguirem finalizar essa tarefa, cada dupla utilizou uma estratégia diferente, mas sempre rotacionando o sistema de eixo.

**Figura 57 – Superfície Cilíndrica construída no espaço tridimensional por D4.**

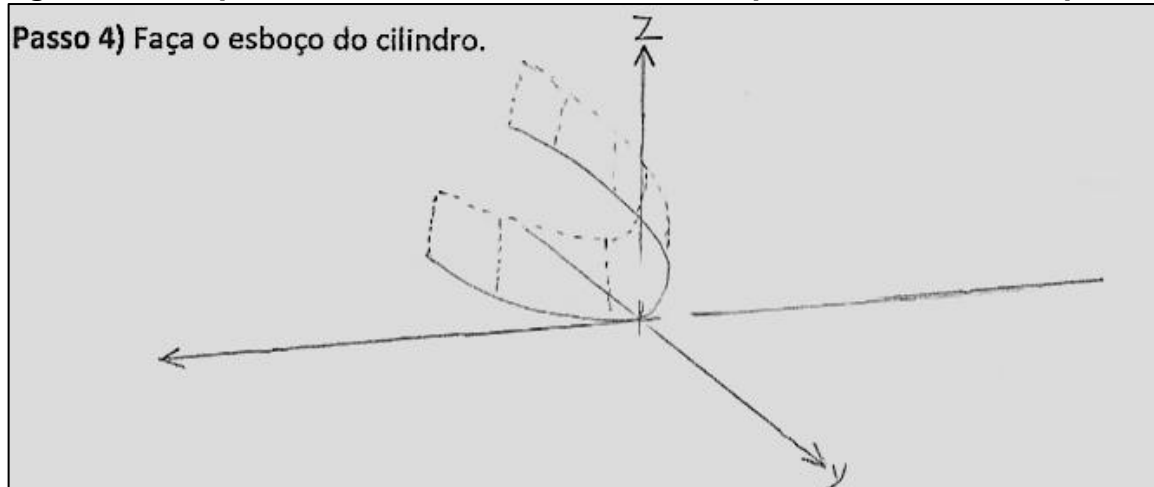


Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

No esboço acima, a dupla de sujeitos rotacionou o sistema de eixos no momento do desenho do cilindro.

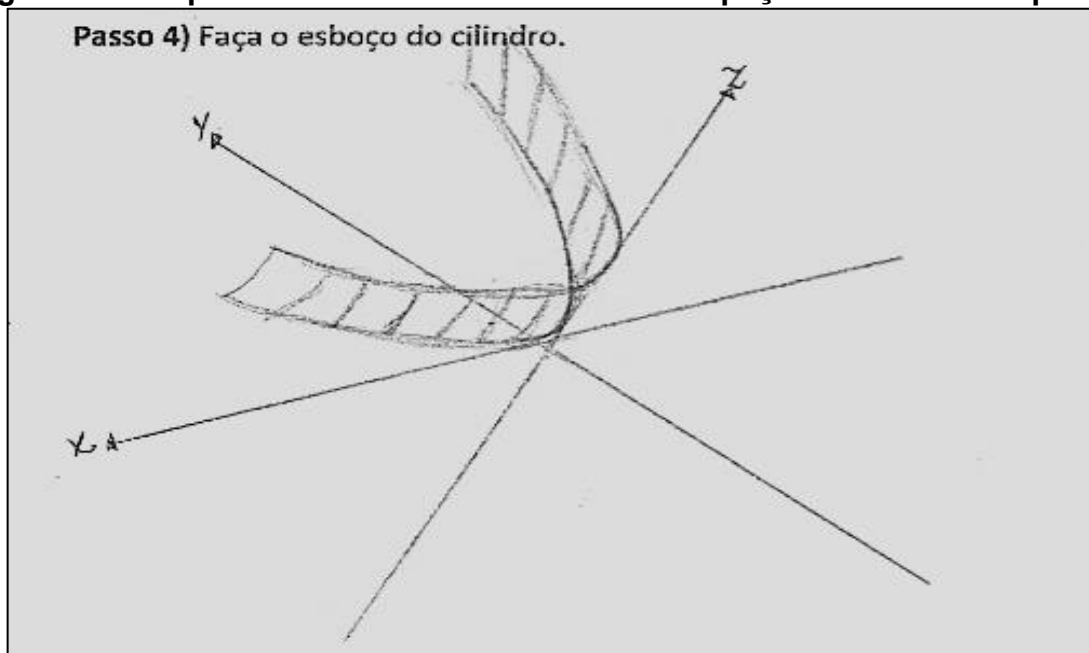


**Figura 58 – Superfície Cilíndrica construída no espaço tridimensional por D7.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Figura 59 – Superfície Cilíndrica construída no espaço tridimensional por D3.**

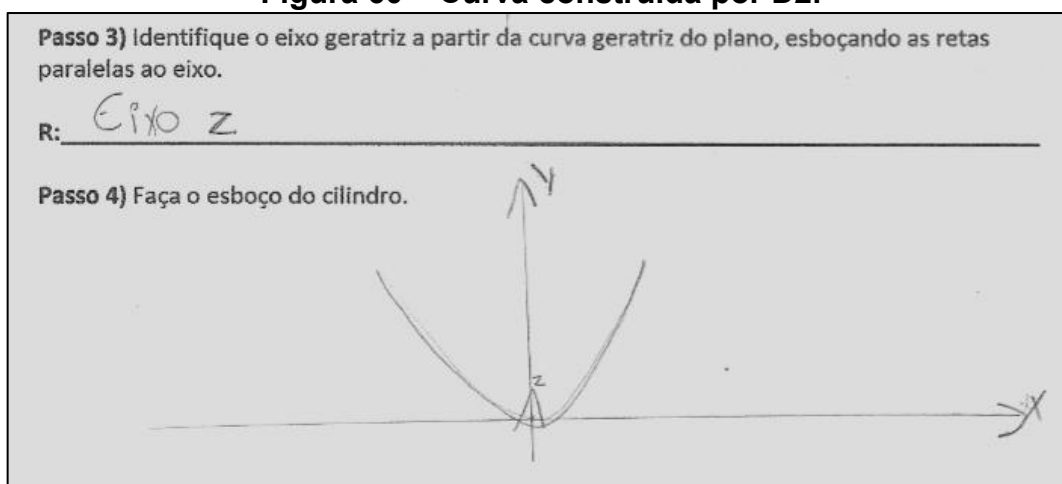


Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

Os resultados apresentados demonstram que os alunos entenderam e compreenderam a definição de um cilindro.

Na figura a seguir, foi adotada uma estratégia diferente. A dupla fez o esboço como se estivesse vendo o cilindro por “cima”, ou seja, apenas no plano XY, representando apenas uma curva nesse plano, porém, quando respondem corretamente que o eixo Z é o eixo geratriz do cilindro, demonstraram que entenderam a definição formal do cilindro.

**Figura 60 – Curva construída por D2.**



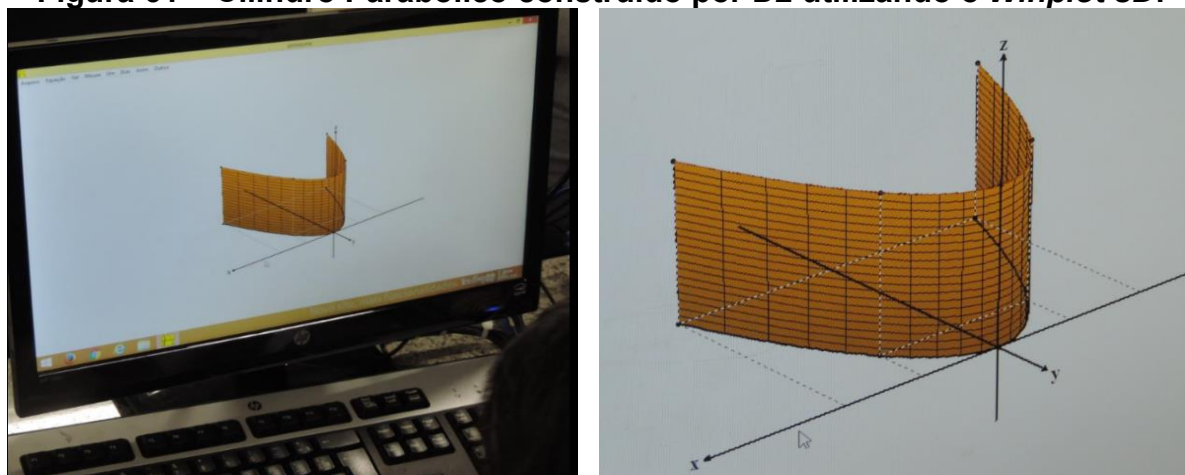
Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

Assim, de acordo com resultados apresentados pelos sujeitos da pesquisa, entendo que o objetivo da questão foi devidamente alcançado, uma vez que os mesmos demonstraram entender e compreender a definição de um cilindro.

**Passo 5)** Utilizando o *Winplot 3D*, plote o cilindro construído anteriormente

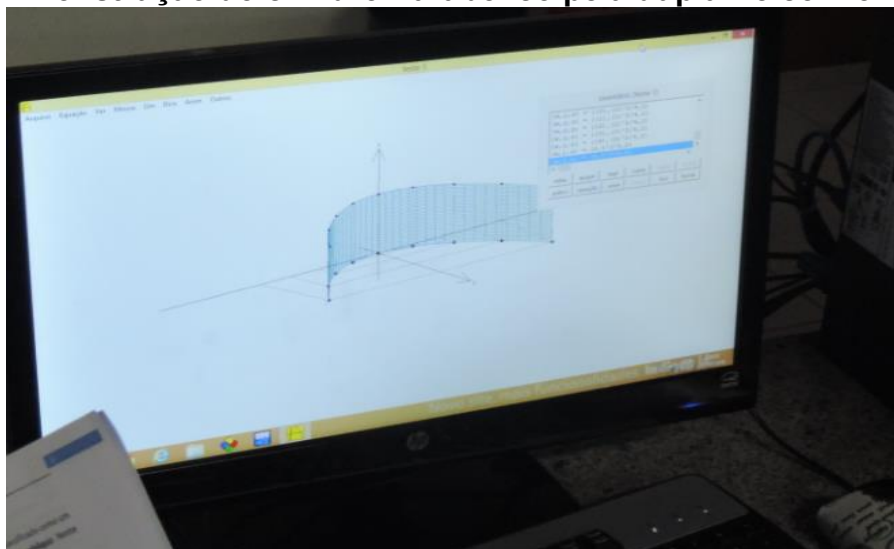
Esse passo consistiu na construção do cilindro de equação  $y = -x^2$ , com a utilização do software *Winplot 3D*. Todas as nove duplas completaram esse item, sem dificuldades, demonstrando já estarem familiarizados com o programa e que o mesmo estava cumprindo seu objetivo no processo ensino-aprendizagem com os sujeitos da pesquisa.

**Figura 61 – Cilindro Parabólico construído por D2 utilizando o *Winplot 3D*.**



Fonte: Foto de atividade feita por estudantes – *Winplot 3D*.

**Figura 62 – Construção do cilindro Parabólico pela dupla D8 com o Winplot 3D.**

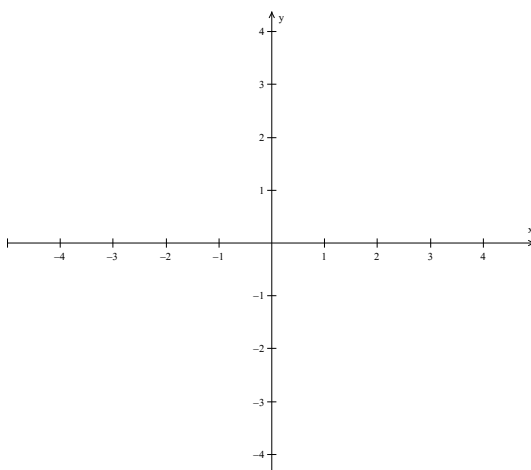


**Fonte:** Foto de atividade feita por estudantes – Winplot 3D.

### **Item 2 – Gráfico da curva $y = x^2 + 1$**

Com o objetivo de verificarmos a compreensão e o entendimento dos estudantes, quando da definição de uma superfície cilíndrica e da metodologia adotada para o desenvolvimento da pesquisa, apresentamos aos mesmos uma curva, modificando a posição de seu vértice. Assim, este item consistiu na construção de cilindro parabólico com o vértice fora da origem do plano cartesiano.

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano bidimensional xy a curva  $y = x^2 + 1$ .

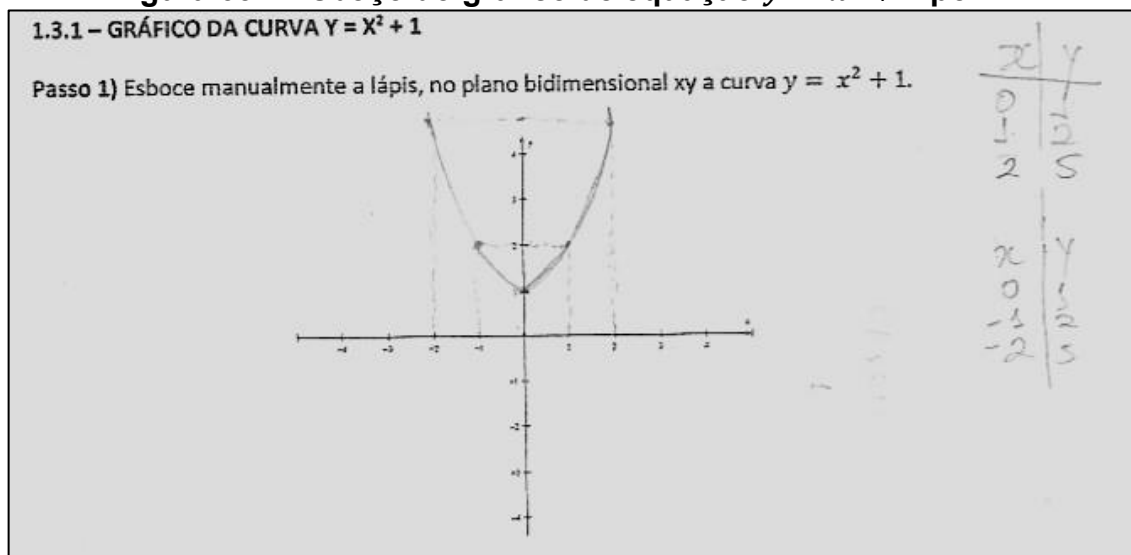


**Fonte:** Elaboração do autor – *Caderno de Atividades*.

Todas as duplas esboçaram de forma correta a curva no plano XY, ou seja, fizeram a curva com o vértice fora da origem do plano cartesiano, utilizando a mesma estratégia na atividade anterior, quando construíram uma tabela de valores para,

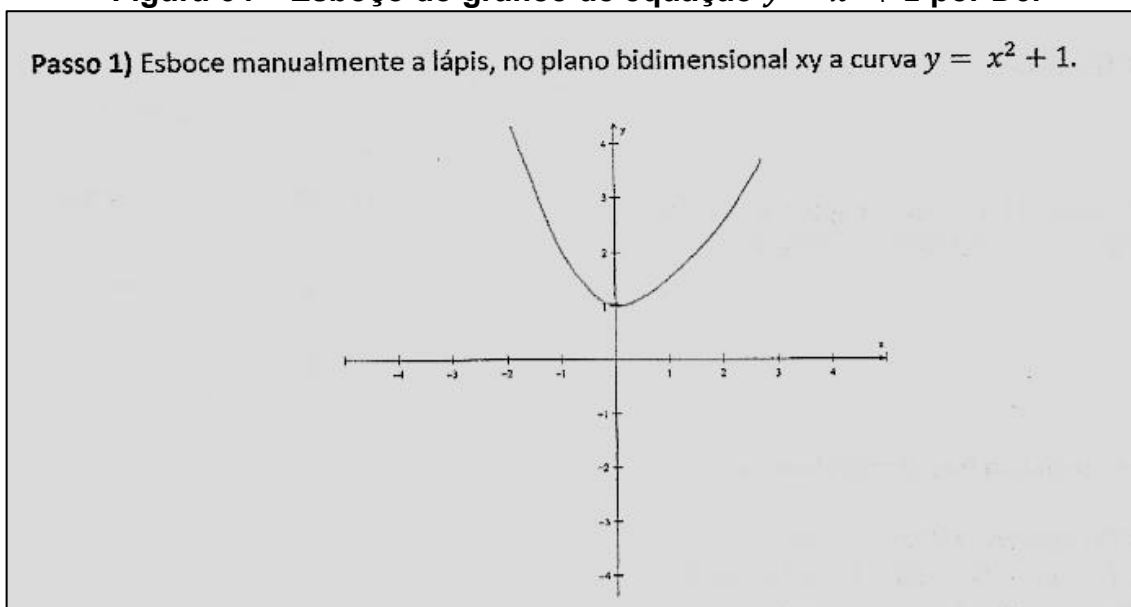
posteriormente, marcar os pontos no plano cartesiano e, em seguida, traçar a curva representativa da equação.

**Figura 63 – Esboço do gráfico de equação  $y = x^2 + 1$  por D1.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

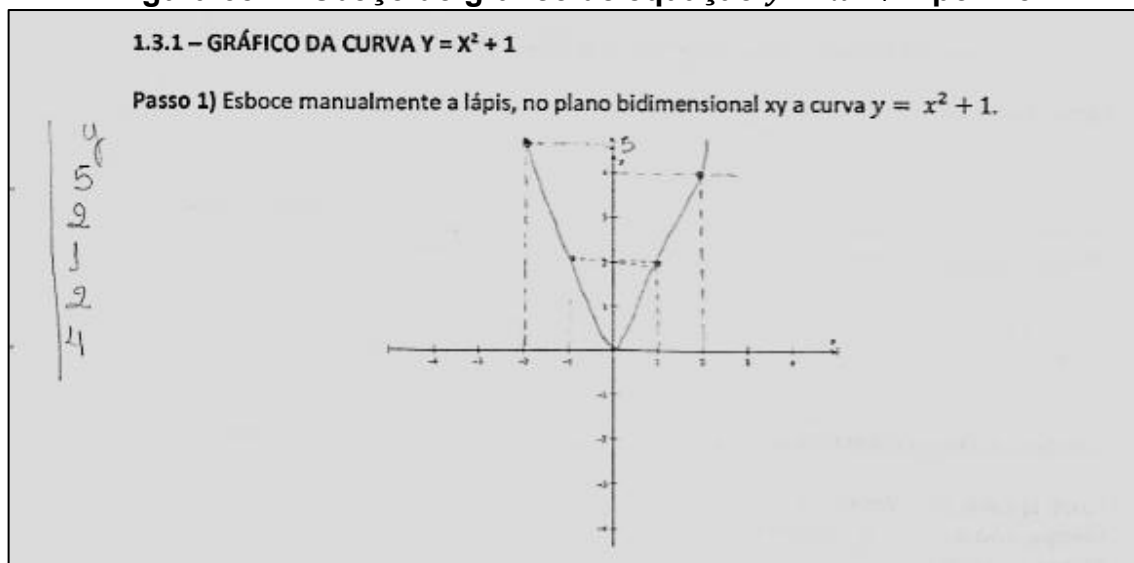
**Figura 64 – Esboço do gráfico de equação  $y = x^2 + 1$  por D6.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

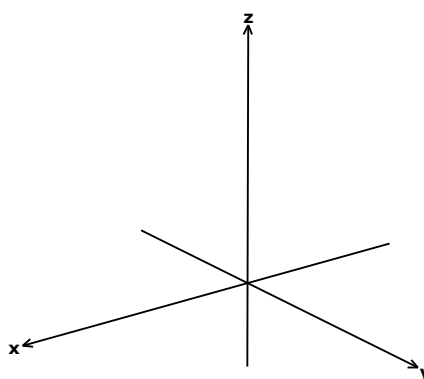
Das nove duplas, oito esboçaram de forma correta a curva de equação  $y = x^2 + 1$ . Uma dupla esboçou o gráfico com a curva tendo o seu vértice na origem, ou seja, o gráfico não estava de acordo com a equação. Tais dados evidenciam que a maioria dos sujeitos da pesquisa não apresentam dificuldades em relacionar equações quadráticas com o seu respectivo gráfico no plano XY.

**Figura 65 – Esboço do gráfico de equação  $y = x^2 + 1$  por D5.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

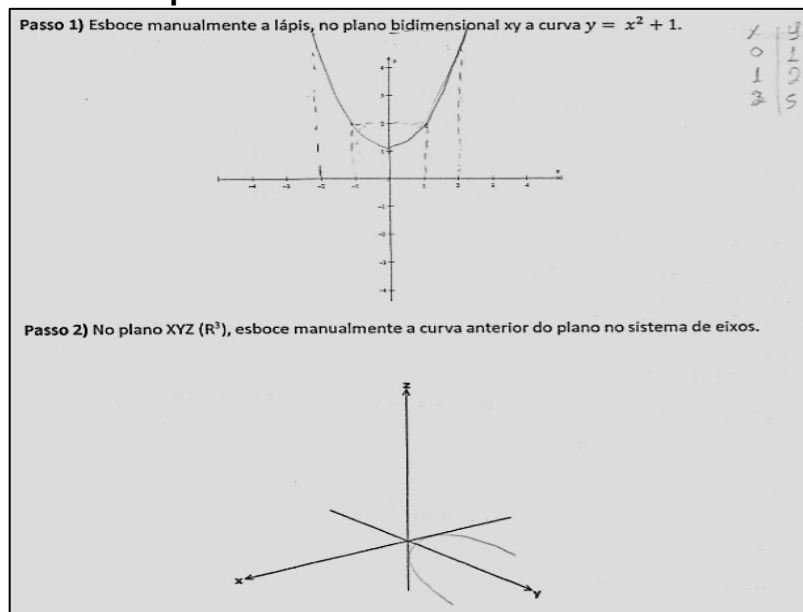
**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos.



Fonte: Elaboração do autor – *Caderno de Atividades*.

Das nove duplas, seis fizeram o desenho da curva corretamente no plano XZ e as demais duplas fizeram o desenho da curva com o vértice na origem do plano XY. Observei que, mesmo esboçando corretamente a curva com o vértice fora da origem, tal não aconteceu na transição para o espaço tridimensional. Nesse caso, os estudantes levaram em consideração o ângulo de visualização que possam ter imaginado, uma vez que realizaram o Passo 1 de maneira correta, mas no Passo 2 esboçaram a curva com o seu vértice na origem do plano XY, conforme imagem a seguir.

**Figura 66 – Esboço do gráfico de equação  $y = x^2 + 1$  no plano bidimensional e tridimensional.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

Nesse passo, sete duplas responderam corretamente que o eixo Z representa o eixo geratriz da curva diretriz, ou seja, as retas paralelas ao eixo partindo da curva. Uma dupla respondeu que o eixo seria o x, e outra dupla afirmou que os eixos x e y seriam os responsáveis pela geratriz do cilindro. Nenhuma das duplas fez as retas paralelas ao eixo.

**Figura 67 – Resposta da dupla D8.**

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: os eixos responsáveis são o x e y como pontos móveis

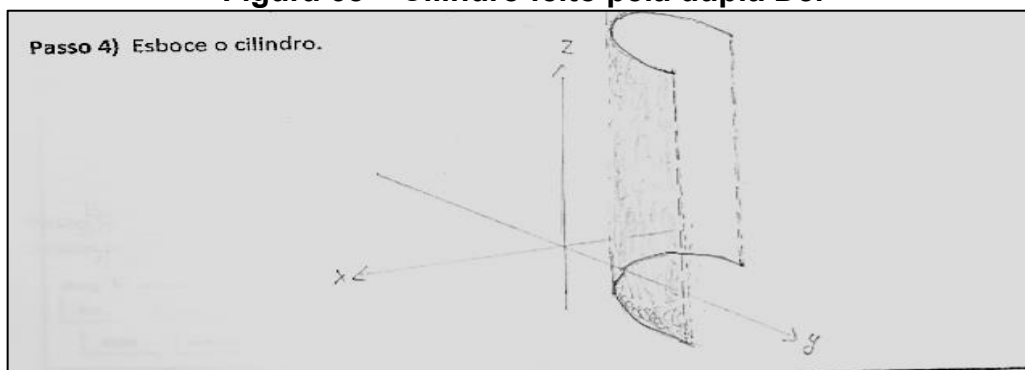
Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

Essa dupla, ao se referir aos eixos x e y como pontos móveis, na verdade, estava se referindo à curva plotada no plano XY, com a geratriz percorrendo tais pontos e gerando o cilindro.

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

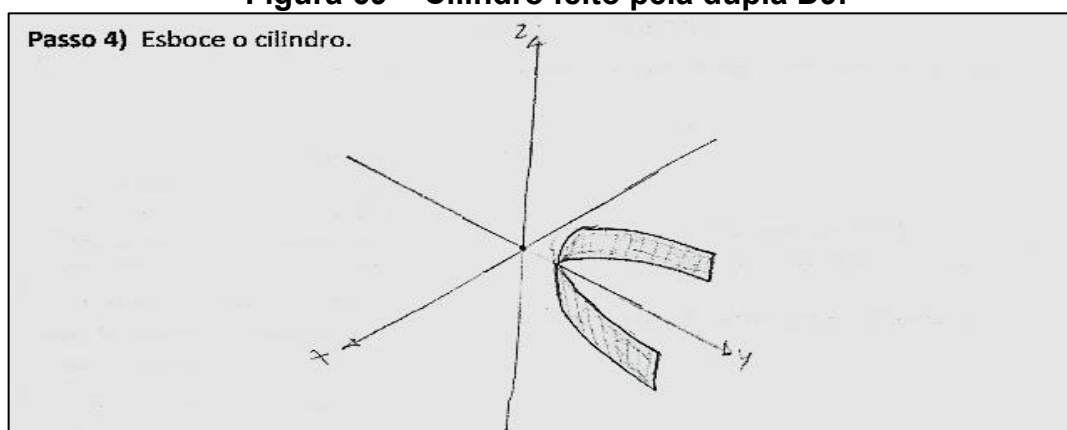
Todas as duplas fizeram o esboço correto do cilindro de curva  $y = x^2 + 1$ , demonstrando que haviam compreendido e entendido a definição de um cilindro e visualizando a transição de uma figura do plano XY para o plano XYZ.

**Figura 68 – Cilindro feito pela dupla D8.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Figura 69 – Cilindro feito pela dupla D9.**

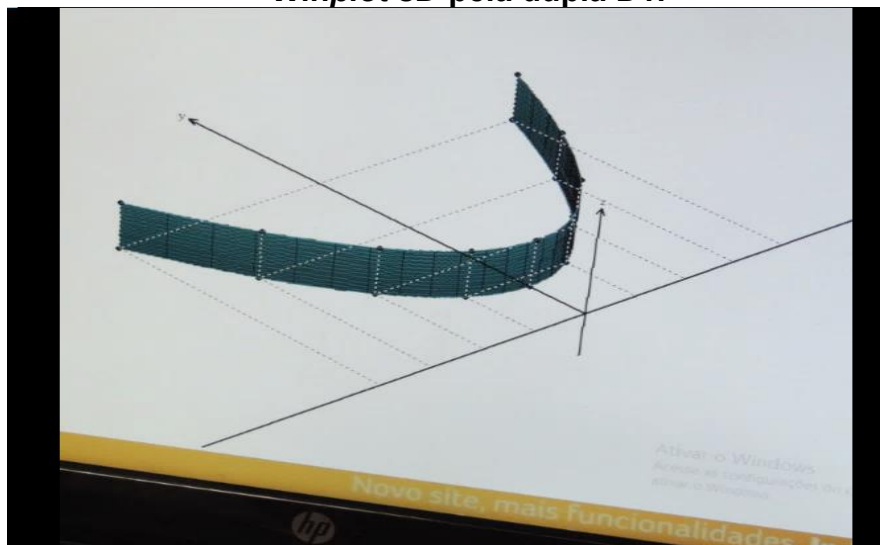


Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 5)** Construção do cilindro de equação  $y = x^2 + 1$  com a utilização do *Winplot 3D*.

De acordo com as observações que pude fazer como professor pesquisador, os sujeitos já estavam familiarizados com o *software* dinâmico e realizaram esse passo, seguindo as orientações do *Caderno de Atividades*, de maneira mais autônoma. Nessa etapa, as intervenções eram necessárias apenas quando o *software* apresentava algum problema ou para identificar alguma digitação incorreta dos comandos necessários para a construção do cilindro.

**Figura 70 – Superfície cilíndrica de equação  $y = x^2 + 1$  construída no software Winplot 3D pela dupla D1.**

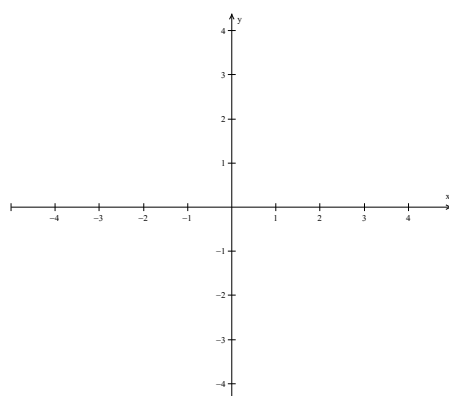


Fonte: Foto de atividade feita por estudantes – Winplot 3D.

### **Item 3 – Gráfico da curva $z = x^2$**

Nessa etapa da atividade, optei por mudar o eixo de orientação do gráfico com o objetivo de verificar se os sujeitos da pesquisa haviam compreendido de fato as ideias propostas na mesma. A curva representativa do gráfico proposto está fixada no plano XZ, tendo a curva geratriz do cilindro paralela ao eixo y.

**Passo 1)** Esboce manualmente, a lápis, no plano tridimensional xz, a curva  $z = x^2$



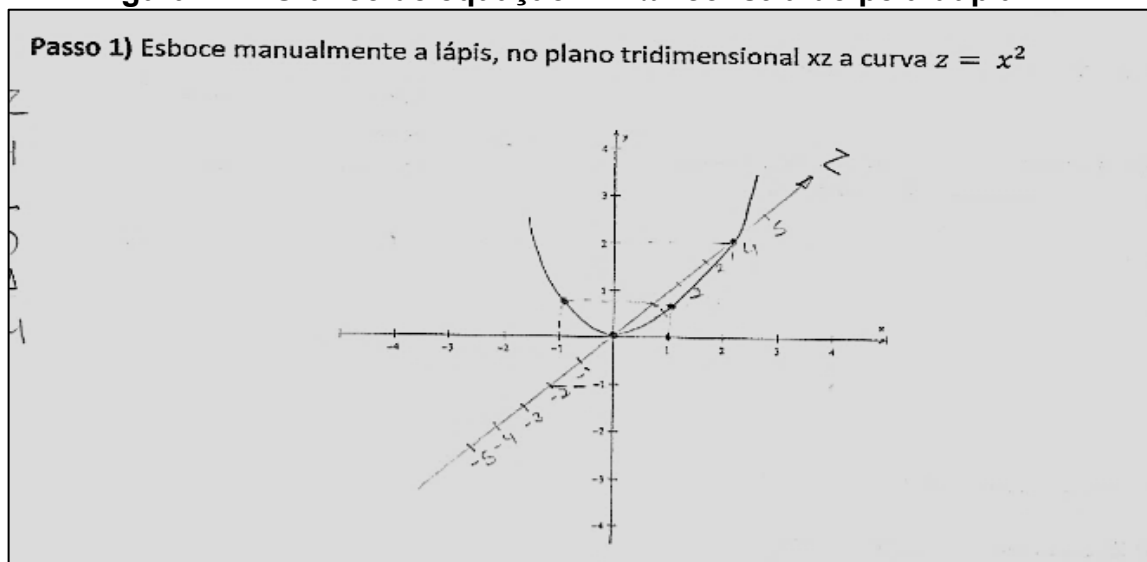
Fonte: Elaborado pelo autor – Caderno de Atividades.

Das nove duplas participantes da pesquisa, três fizeram o esboço da curva de forma correta, três deixaram a atividade em branco, e três fizeram a curva no plano XY.



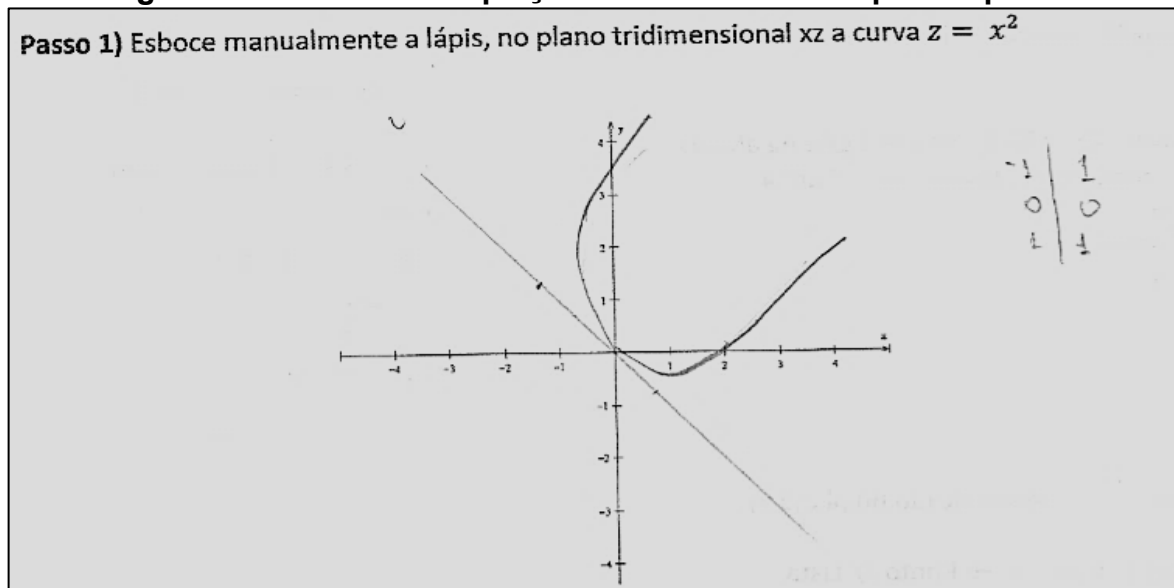
As três duplas que fizeram de forma correta, para uma melhor visualização, fizeram um eixo diagonal, passando pela origem do plano XY, simbolizando o eixo Z, para, em seguida, fazer o esboço da curva.

**Figura 71 – Gráfico de equação  $z = x^2$  construído pela dupla D2.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Figura 72 – Gráfico da equação  $z = x^2$  construída pela dupla D6.**



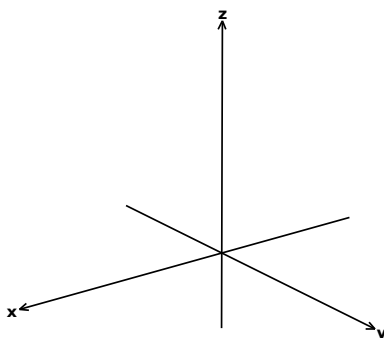
Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

No entendimento deste professor pesquisador, ao fazerem o terceiro eixo, esses estudantes tentaram fazer uma interpretação no tridimensional, apesar de dar a entender, na figura, que os três eixos coordenados estão no mesmo plano. Entretanto, conseguiram identificar, de forma correta, o eixo geratriz da curva,

demonstrando entendimento na relação do eixo  $z$ , ou seja, a curva não poderia estar no plano  $XY$ , uma vez que mudamos o eixo de orientação da curva, mas sim no  $XZ$ .

Antecipando o Passo 3, como resposta, essas duplas estavam corretas ao identificar que o eixo geratriz do cilindro da curva  $z = x^2$  é o eixo  $z$ , demonstrando entendimento e compreensão deste item da atividade.

**Passo 2)** No plano  $XYZ$  ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



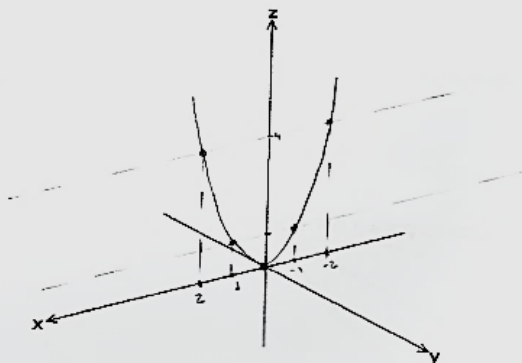
**Fonte:** Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

Se, no Passo 1, as soluções foram diversificadas, nesse item, seis duplas apresentaram a curva corretamente no plano  $XZ$ , demonstrando um entendimento melhor em relação à transição do plano no espaço. Foi observado também que, nessa etapa da atividade, os alunos já se mostravam mais confortáveis na resolução das atividades, uma vez que já estavam mais familiarizados com o plano  $XZ$ . Perceptivelmente, a capacidade de visualização dos sujeitos da pesquisa estava sendo potencializada com a realização das atividades.

Observei também que, apesar de demonstrarem entendimento em relação aos elementos importantes de uma superfície cilíndrica, como o eixo geratriz, por exemplo, a dificuldade apresentada pelos estudantes estava em esboçar as superfícies utilizando lápis e papel, ou seja, não conseguiam colocar no papel, com clareza, a superfície que “viam mentalmente”.

**Figura 73 – Gráfico da equação  $z = x^2$  construída pela dupla D4.**

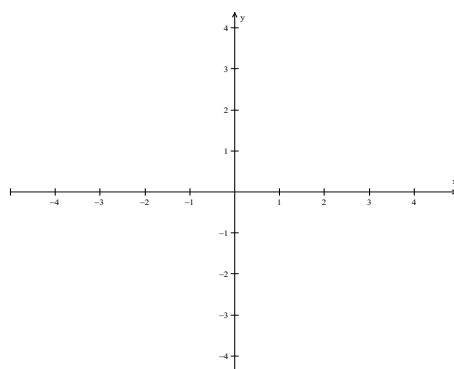
**Passo 2)** No plano XYZ ( $\mathbb{R}^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $\mathbb{R}^3$ .



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

#### **Item 4 – Construindo cilindros circulares no espaço tridimensional**

Ao se referir a cilindros, é comum a associação apenas aos cilindros circulares. Na seção anterior, quando apresentada a definição de cilindro, ficou claro que a classificação de um cilindro está diretamente relacionada a sua curva geratriz, ou seja, sua classificação será definida pela sua curva. Nos itens seguintes, serão explorados os cilindros circulares retos, centrados na origem do plano XY ou fora da origem.



Fonte: Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva  $x^2 + y^2 = 1$ .

Das nove duplas, cinco associaram a equação a uma circunferência com centro na origem do plano XY. As quatro duplas restantes deixaram esse item da atividade em branco.

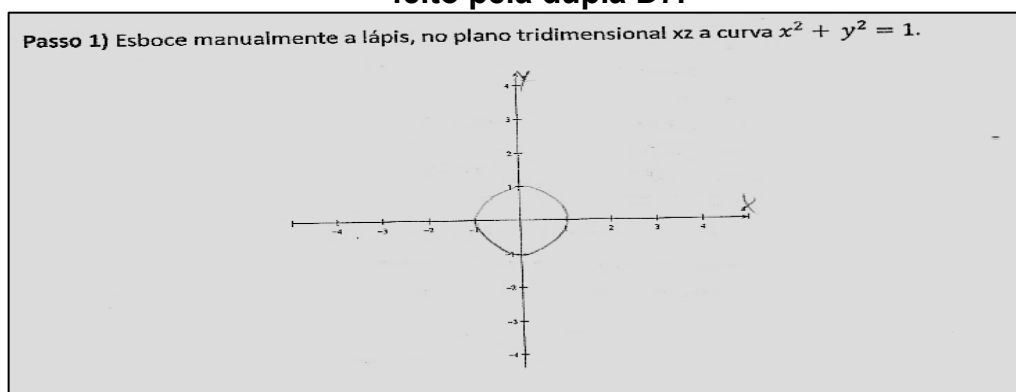
No momento da resolução desse item da atividade, percebemos, professor pesquisador e professor colaborador, que alguns sujeitos da pesquisa não estavam

reconhecendo a equação apresentada na atividade. Dessa forma, foi necessária uma breve intervenção pelo professor pesquisador. O professor colaborador aproveitou a oportunidade para relacionar a equação da circunferência com a sua curva representativa, e fez um breve resumo no quadro branco.

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ equação de uma circunferência no plano } xy \text{ com centro na origem.}$$

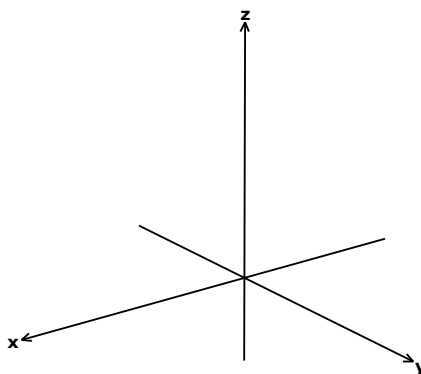
Após essa breve intervenção, alguns dos sujeitos da pesquisa conseguiram fazer o esboço no plano XY.

**Figura 74 – Esboço da circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$  feito pela dupla D7.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

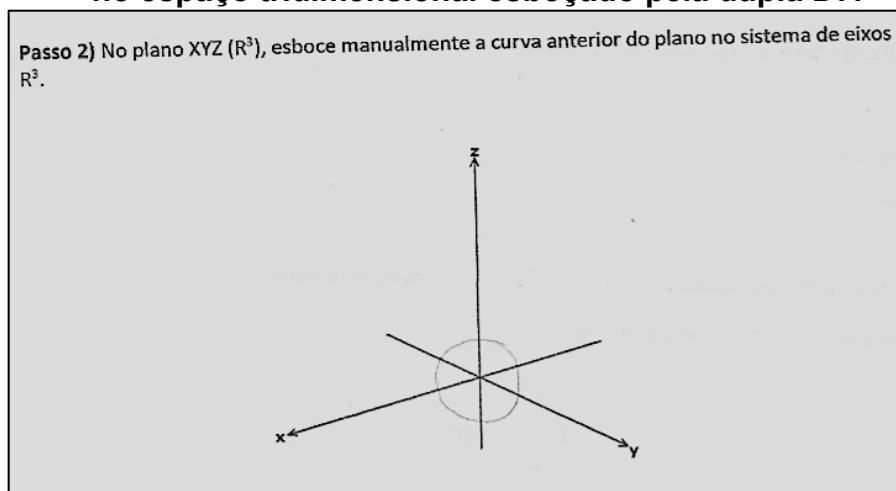
Esse item da atividade foi corretamente desenvolvido pelas duplas, que identificaram e realizaram o Passo 1. Apesar de afirmarem verbalmente ter compreendido e relacionado a equação à circunferência, foi necessária, ainda, uma pequena intervenção junto a um dos estudantes, que tinha dificuldades para realizar a atividade. Oportunamente, o professor pesquisador questionou o estudante:

Professor pesquisador: “Você consegue identificar de que curva é essa equação?”

Sujeito da pesquisa: “Se está falando de cilindro, então ela é cilindro.”

Ao fazer essa afirmação, observei que a ideia do estudante estava fixada nas superfícies cilíndricas, ou seja, independentemente de qual equação fosse disponibilizada para eles, deveria tratar-se de um cilindro, e, quando fosse fazer o esboço no espaço XYZ, as etapas de construção da superfície passariam despercebidas.

**Figura 75 – Gráfico da circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$  no espaço tridimensional esboçado pela dupla D7.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano, esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

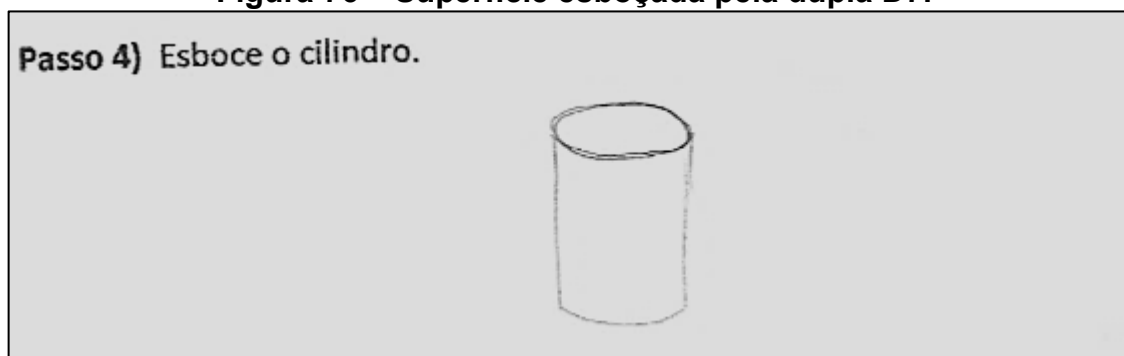
Esse item da atividade foi corretamente respondido por todas as nove duplas participantes, demonstrando que já relacionavam o eixo Z como sendo o

representativo da altura do cilindro. Porém, nenhuma das duplas esboçou as retas paralelas ao eixo.

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

Em comparação com as outras atividades propostas, esse item foi desenvolvido com maior desenvoltura pelos sujeitos da pesquisa, uma vez que os mesmo já haviam relacionado a equação à circunferência e que se tratava de um cilindro circular, sendo esse tipo de cilindro mais presente no cotidiano dos sujeitos da pesquisa.

**Figura 76 – Superfície esboçada pela dupla D7.**



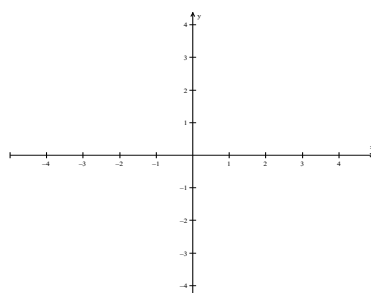
Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 5)** Utilizando o *Winplot 3D*, plote o cilindro construído anteriormente.

Observei que os sujeitos da pesquisa já manipulavam a *software* com facilidade e tranquilidade. Seguindo os passos sugeridos no *Caderno de Atividades*, esse item da atividade foi desenvolvido com desenvoltura pelos estudantes.

**Item 5 – Construção de um cilindro circular com centro fora da origem**

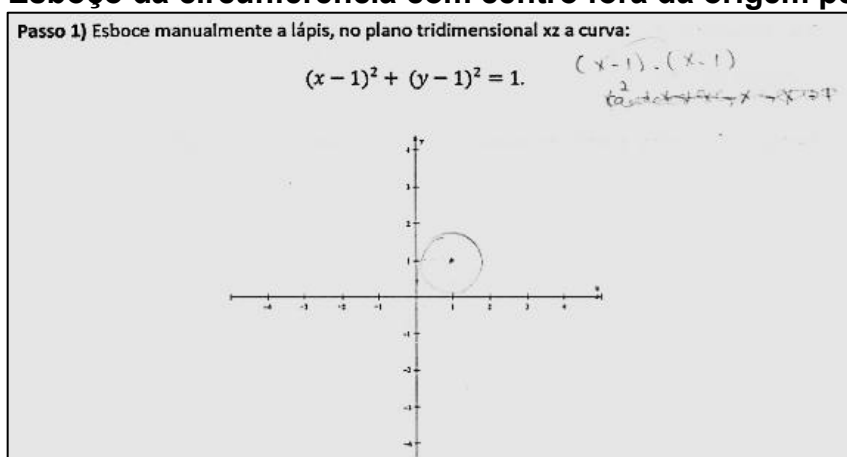
**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva:  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

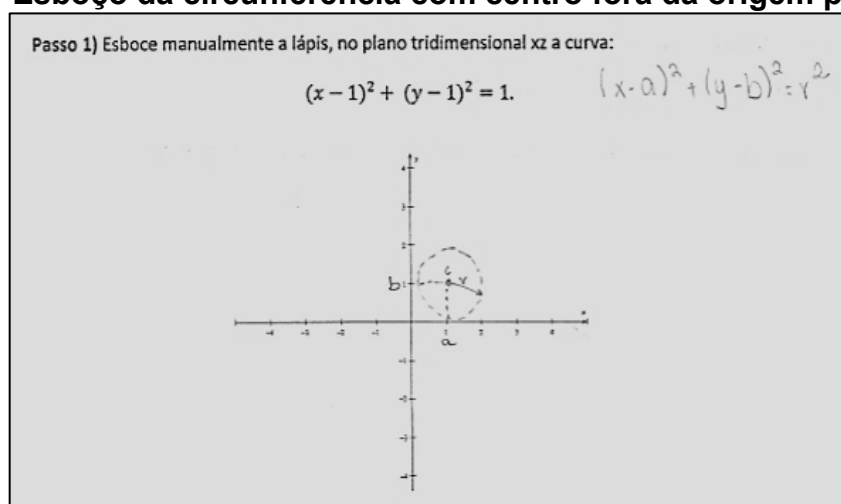
Esse item da atividade foi desenvolvido corretamente pela maioria das duplas participantes da pesquisa. Identificaram corretamente que a equação representa uma circunferência, com o centro fora da origem do plano cartesiano.

**Figura 77 – Esboço da circunferência com centro fora da origem pela dupla D1.**



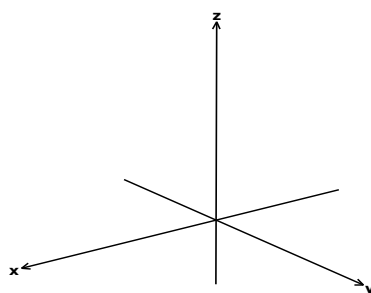
Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Figura 78 – Esboço da circunferência com centro fora da origem pela dupla D2**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

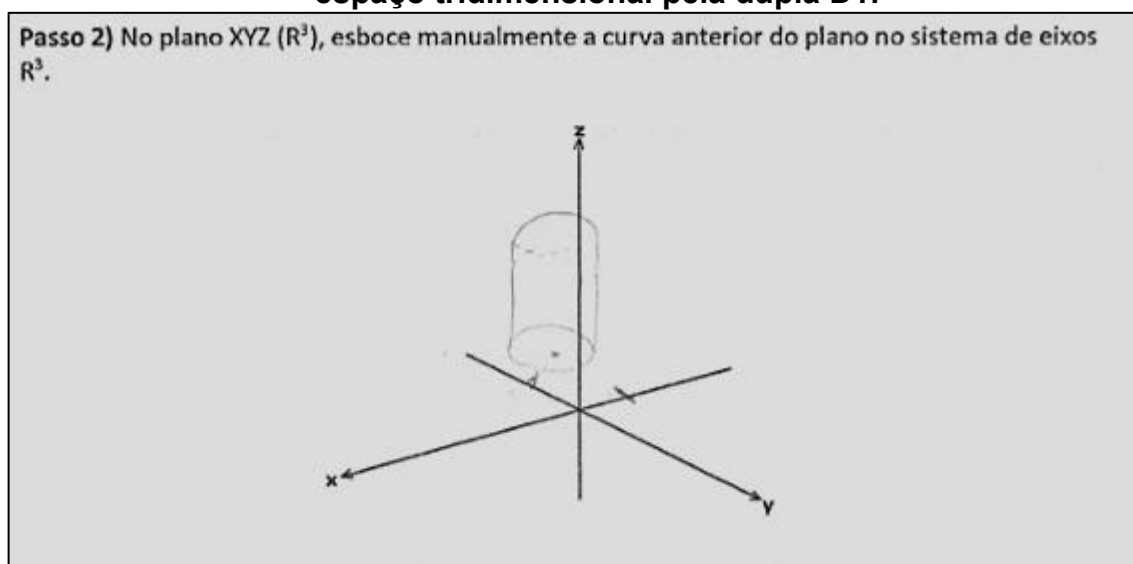
**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

Das nove duplas, seis realizaram corretamente o Passo 1; duas duplas fizeram o esboço da circunferência fora da origem do plano XY, porém, no 3º quadrante, uma dupla deixou esse passo em branco. Antecipando o próximo passo, uma vez que já relacionavam e compreendiam que a curva que pertencia ao plano XY, quando esboçada no plano XZ, não representa mais uma curva, e sim uma superfície, que, nesse caso, se refere a um cilindro circular.

**Figura 79 – Esboço de um cilindro circular com o centro fora da origem do espaço tridimensional pela dupla D1.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_



Todas as duplas responderam corretamente esse passo do item 5, identificando o eixo Z como geratriz da superfície. Nenhuma das duplas fez o esboço das retas paralelas ao eixo.

**Figura 80 – Resposta da dupla D4.**

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

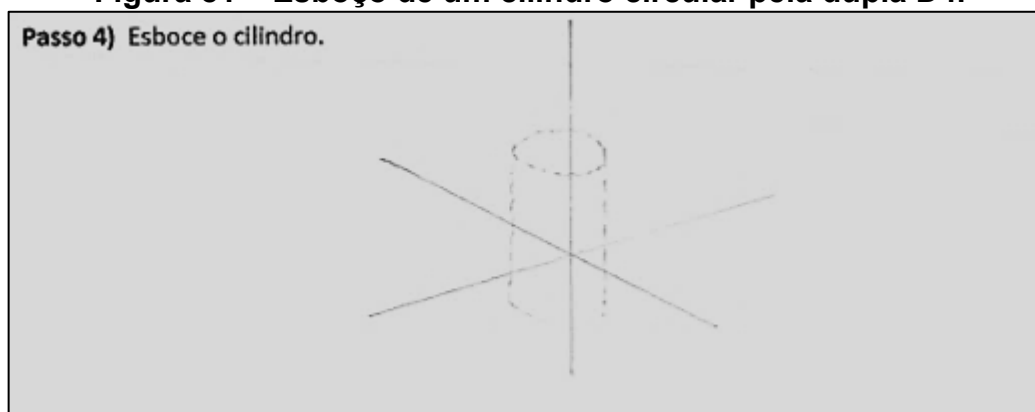
R: eixo z

Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

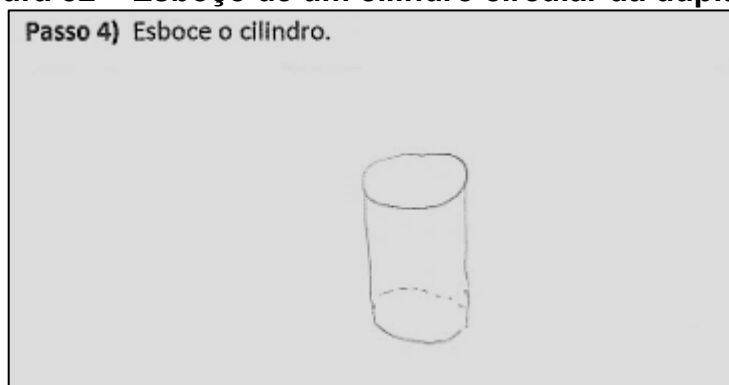
Como dito anteriormente, esse passo do item foi realizado no Passo 2, quando os sujeitos da pesquisa esboçaram o cilindro no plano XZ. Porém, algumas duplas repetiram o esboço do cilindro com o intuito de completarem a tarefa.

**Figura 81 – Esboço de um cilindro circular pela dupla D4.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Figura 82 – Esboço de um cilindro circular da dupla D2.**

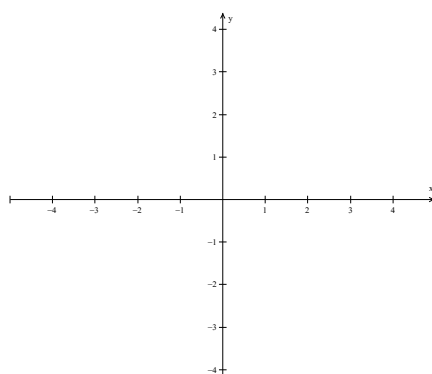


Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 5)** Utilizando o *Winplot 3D*, plote o cilindro construído anteriormente.

Todas as duplas conseguiram realizar esse passo do item. De maneira verbal, demonstravam interesse em realizar as demais atividades diretamente no *software*, por entenderem que o mesmo poderia “facilitar” a realização das atividades e por estarem familiarizados com o mesmo.

### ***Item 6 – Construindo cilindros elípticos no espaço tridimensional***



**Fonte:** Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

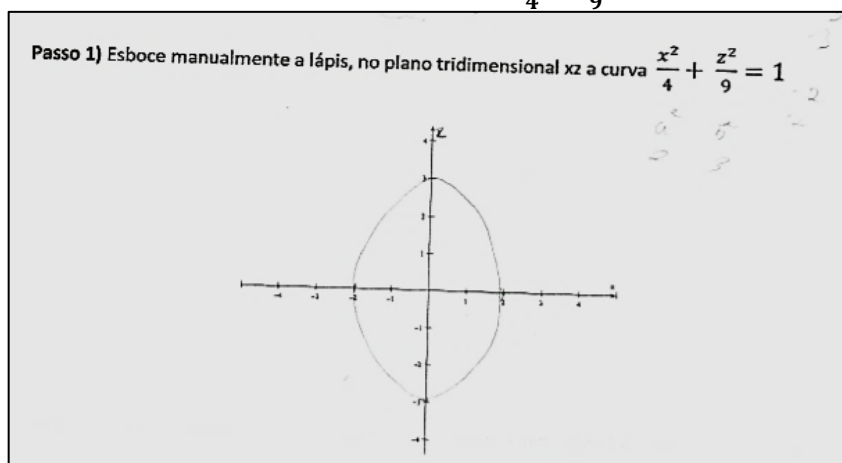
**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano bidimensional xz a curva  $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

O objetivo desse item da atividade proposta era proporcionar aos sujeitos da pesquisa a identificação de uma curva cônica no plano XY e fazer seu esboço de acordo com a respectiva equação.

Dos sujeitos da pesquisa, apenas três duplas conseguiram identificar a equação da curva elíptica com o centro na origem do plano XY. As demais duplas deixaram esse item em branco. As seis duplas que não realizaram esse passo, argumentaram que ainda não tinham estudado o conteúdo de Cônicas, o que dificultou a realização da tarefa.

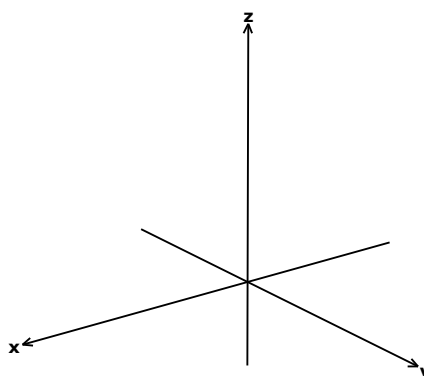
Sendo assim, para análise, foram considerados apenas os resultados das duplas que completaram esse item da atividade.

**Figura 83 – Esboço da curva de equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  feito pela dupla D3.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

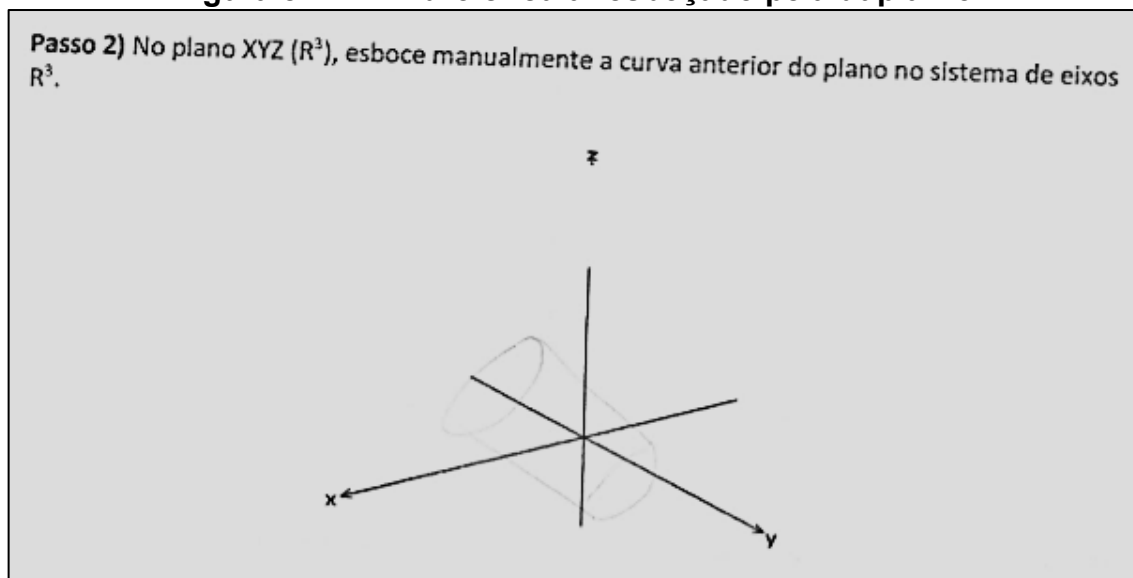
**Passo 2)** No plano XY ( $\mathbb{R}^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $\mathbb{R}^3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

As duplas que fizeram o esboço da curva no plano XY não tiveram dificuldades para realizarem esse item da tarefa, porém, de maneira semelhante a itens anteriores, fizeram o esboço do cilindro direto, antecipando o que seria solicitado no Passo 4.

**Figura 84 – Cilindro circular esboçado pela dupla D5.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

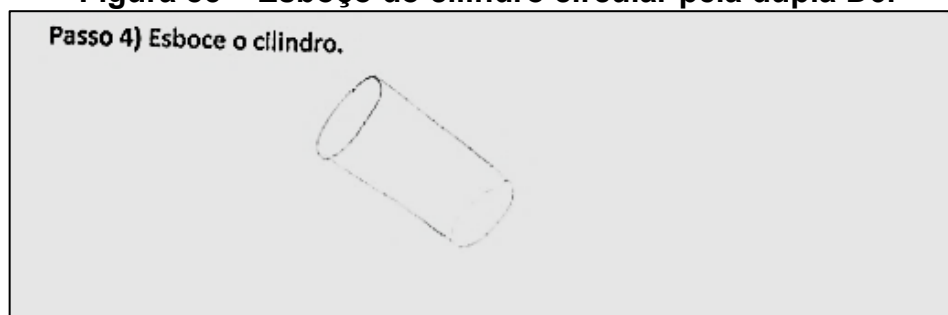
R: \_\_\_\_\_

Todas as duplas que fizeram o esboço correto da curva nos planos XY e XZ, identificaram corretamente que, agora, o eixo geratriz do cilindro era o Y, fazendo assim uma boa leitura e identificação da equação fornecida para a realização da atividade.

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

Este item da atividade foi realizado de maneira correta, porém, de forma antecipada no Passo 3.

**Figura 85 – Esboço do cilindro circular pela dupla D6.**



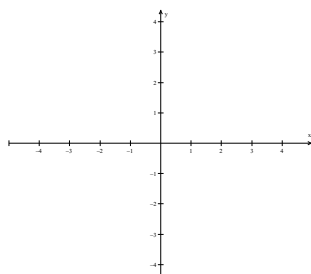
Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 5)** Utilizando o *Winplot 3D*, plote o cilindro construído anteriormente.

Foi observado que os sujeitos da pesquisa realizaram esse item da atividade de maneira rápida e sem dificuldades, uma vez que os mesmos já estavam devidamente familiarizados com o *software* e os comandos necessários para a realização da tarefa.

### **Item 7 – Construindo cilindros elípticos no espaço tridimensional**

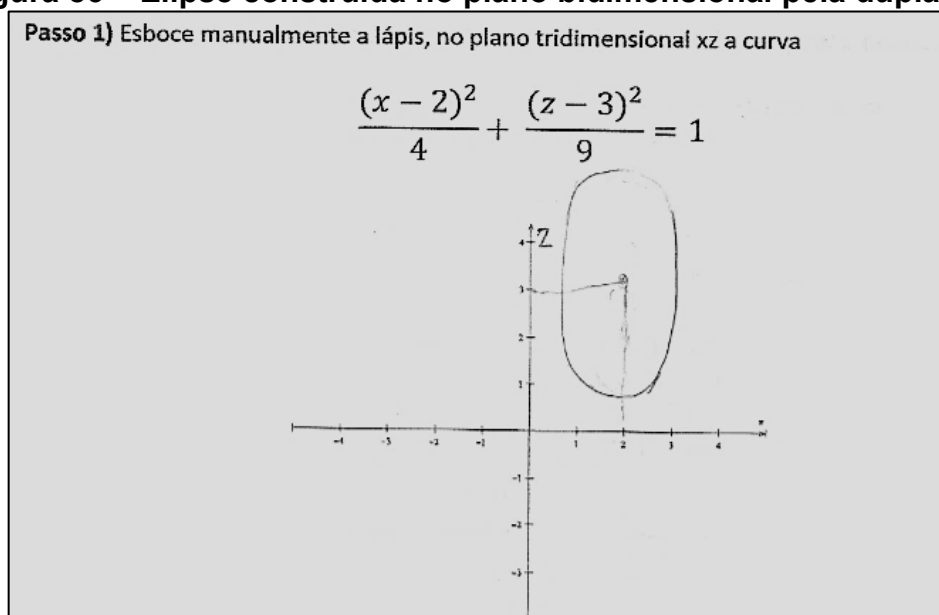
**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano bidimensional xz a curva  $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

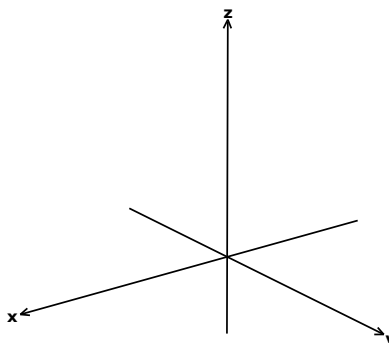
Esse item da atividade foi realizado de maneira correta por três duplas participantes da pesquisa. Esboçaram a elipse com o centro fora da origem do plano XY, demonstrando conseguir correlacionar uma equação e sua curva representativa.

**Figura 86 – Elipse construída no plano bidimensional pela dupla D6.**



Fonte: Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

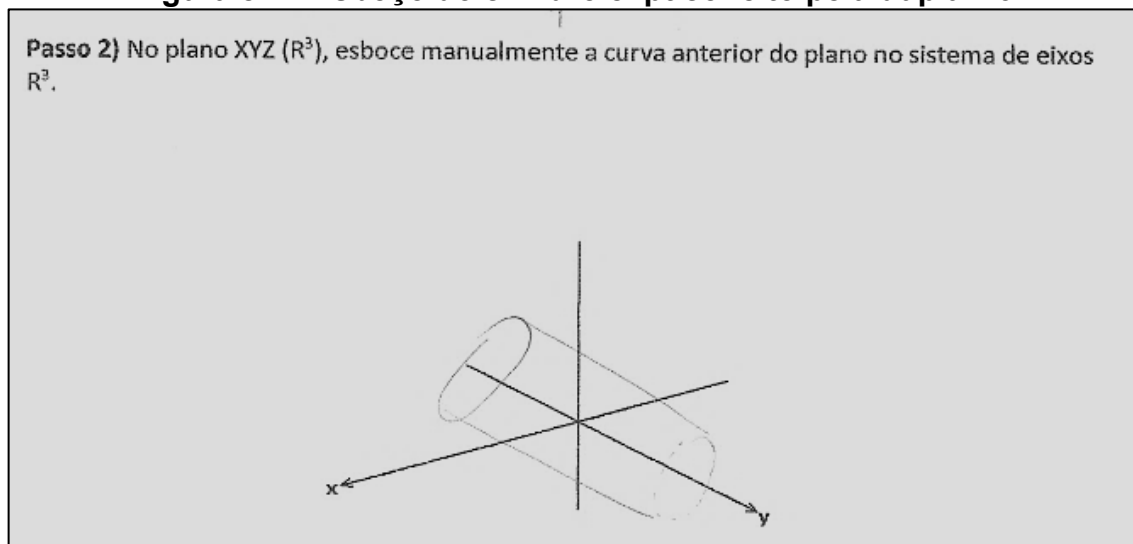
**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

Novamente, nesse item, as duplas anteciparam o que seria solicitado no Passo 4, ao esboçarem o cilindro e não a curva geratriz do cilindro no plano XZ. Interpreta-se que os sujeitos participantes da pesquisa demonstraram um satisfatório domínio do conteúdo de “Cilindros”.

**Figura 87 – Esboço do cilindro elíptico feito pela dupla D6.**



**Fonte:** Reprodução de atividade feita por estudantes – *Caderno de Atividades*.

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

As duplas participantes da pesquisa responderam corretamente que as retas seriam paralelas ao eixo  $y$ , demonstrando compreensão e entendimento das equações referentes as curvas.

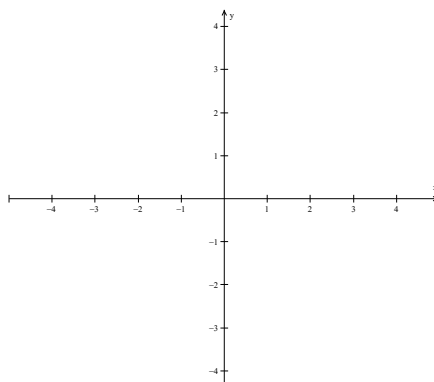
**Passo 4)** Esboce o cilindro.

Como dito anteriormente, as duplas que realizaram a tarefa, anteciparam esse item no Passo 3, quando esboçaram o cilindro solicitado no item de maneira precipitada.

**Passo 5)** Utilizando o *Winplot 3D*, plote o cilindro construído anteriormente.

Ao se fornecer a equação paramétrica do cilindro, os sujeitos da pesquisa conseguiram realizar esse item da atividade de maneira tranquila e sem a necessidade de intervenção por parte do professor pesquisador.

### ***Item 8 – Construindo cilindros elípticos no espaço tridimensional***

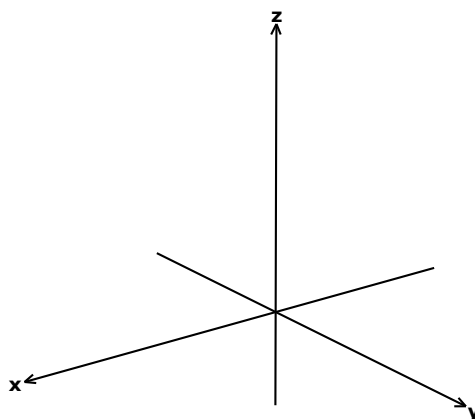


**Fonte:** Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

**Passo 1)** Esboce manualmente, a lápis, no plano tridimensional  $xz$  a curva  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

Nenhuma das duplas participantes da pesquisa realizou esse passo do item 8. Observei que um dos fatores que contribuíram para que isso ocorresse foi o tempo destinado para a realização das atividades anteriores; além disso, as duplas relataram que não estavam familiarizadas com a curva representativa da equação.

**Passo 2)** No plano  $XYZ$  ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

**Passo 5)** Utilizando o *Winplot 3D*, plote o cilindro construído anteriormente.

Apesar da não realização da tarefa anterior, de posse da equação paramétrica da hipérbole, seis duplas fizeram a plotagem da superfície utilizando o *software Winplot 3D*. Observei, nessa etapa da atividade, que os estudantes participantes da pesquisa se mostraram bem familiarizados com a mesma, e que conseguiriam realizar outras atividades com mais autonomia.

### 5.1.3 Atividade 2 – Construção das quádras partindo de um espaço bidimensional para um espaço tridimensional

#### ⇒ **Superfícies quádras**

Para a realização da Atividade 2, foi necessário, inicialmente, fazer uma breve introdução sobre as quádras, apresentando a definição formal e quais são os tipos de quádras. Optamos, professor pesquisador e professor colaborador, pela não utilização de lápis e papel, de maneira proposital, para verificar o desenvolvimento, por parte dos estudantes participantes da pesquisa, da capacidade de visualização de superfícies tridimensionais já atingido na primeira atividade. Também foi apresentado



aos sujeitos da pesquisa quais eram os objetivos e a metodologia a ser adotada para o desenvolvimento da Atividade 2.

Assim, utilizamos quatro momentos:

**1º Momento:** apresentação da definição formal de uma superfície quádrlica, e as equações paramétricas das mesmas.

**2º Momento:** consistiu na realização de uma atividade guiada pelo professor pesquisador, onde, em conjunto com os estudantes, foi construído um cone quádrlico, seguindo a metodologia de passos. Nosso passo inicial foi a construção de segmentos oblíquos ao plano  $XY$ , do espaço tridimensional  $XYZ$ . Elaboramos, previamente, uma tabela de valores para tais segmentos, utilizando algumas ferramentas importantes do *software Winplot 3D*. Em seguida, construímos algumas circunferências, concorrentes com os segmentos, alterando a medida de seus raios de acordo com uma tabela de valores, destinada às circunferências.

O passo final consistiu no preenchimento de toda superfície, utilizando sua equação paramétrica. Todos esses passos permitiram que os estudantes, visualizassem a transição das figuras entre o plano bidimensional e o espaço tridimensional.

**3º Momento:** nesse momento, deixamos a cargo dos estudantes da pesquisa, a construção de um elipsoide e um parabolóide circular, seguindo a metodologia de passos e as orientações contidas no *Caderno de Atividades*. Ficou a cargo do professor pesquisador anotar todas as observações que pudessem enriquecer os dados da pesquisa, e, também, fazer algumas intervenções quando da manipulação do *software*.

Foram trabalhadas as seguintes superfícies:

- Cone quádrlico;
- Elipsoide;
- Parabolóide circular.

**4º Momento:** Preenchimento de uma *Ficha de Avaliação da Atividade*.

Com o intuito de se verificar o posicionamento dos estudantes participantes da pesquisa, quando da realização e participação na pesquisa, solicitou-se que os mesmos respondessem a nove perguntas e fizessem algumas observações

referentes às atividades da pesquisa. Os dados coletados nessa ficha foram analisados em um capítulo destinado a esse fim.

Foram considerados para análise os dados das nove duplas de estudantes que participaram dos dois encontros da pesquisa, ou seja, aqueles que tiveram 100% de presença nas duas atividades.

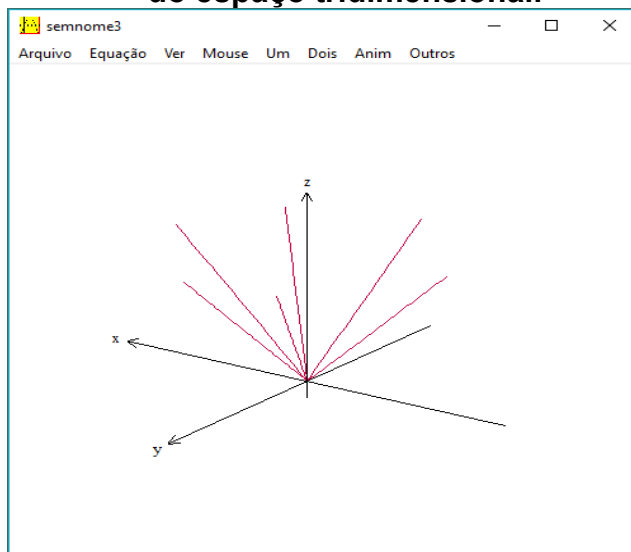
## **2º Momento: construção de um cone quádrico partindo do espaço bidimensional para o espaço tridimensional**

Para familiarizar os sujeitos da pesquisa com a construção de uma superfície quádrica, os mesmos foram orientados pelo professor pesquisador durante a construção de um cone quádrico. A escolha dessa superfície se justificou pelo fato de a mesma apresentar uma equação mais simples, servindo de forma introdutória na abordagem das superfícies quádricas.

### **a) Construção de segmentos oblíquos ao plano XY do espaço tridimensional XYZ**

O primeiro passo consistiu na construção de segmentos oblíquos e simétricos passando pela origem do plano XY. Esse primeiro passo foi realizado, sem dificuldades, por todos os sujeitos participantes da pesquisa. O desenvolvimento desse item oportunizou a apresentação de mais algumas ferramentas importantes para o desenvolvimento de tarefas com a utilização do *software Winplot 3D*, como por exemplo DUPL e EDITAR.

**Figura 88 – Construção de segmentos oblíquos ao plano XY do espaço tridimensional.**

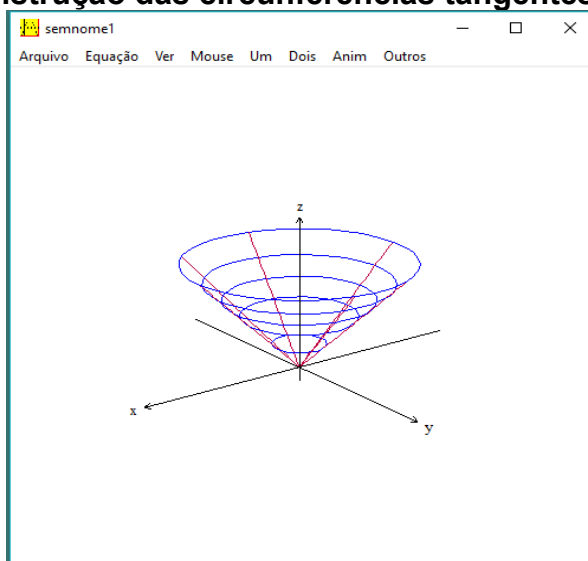


Fonte: Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

#### **b) Construção das circunferências**

Após a construção dos segmentos, a partir de uma tabela de valores fornecida no *Caderno de Atividades*, chegou o momento de construção das circunferências concorrentes aos segmentos. Os sujeitos da pesquisa se mostraram bem familiarizados com o *software*, uma vez realizaram todos os passos com desenvoltura e sem a necessidade de intervenções por parte do professor pesquisador. Também, de forma verbal, manifestaram satisfação no desenvolvimento das mesmas. Todos os estudantes participantes conseguiram realizar essa etapa da atividade.

**Figura 89 – Construção das circunferências tangentes aos segmentos**

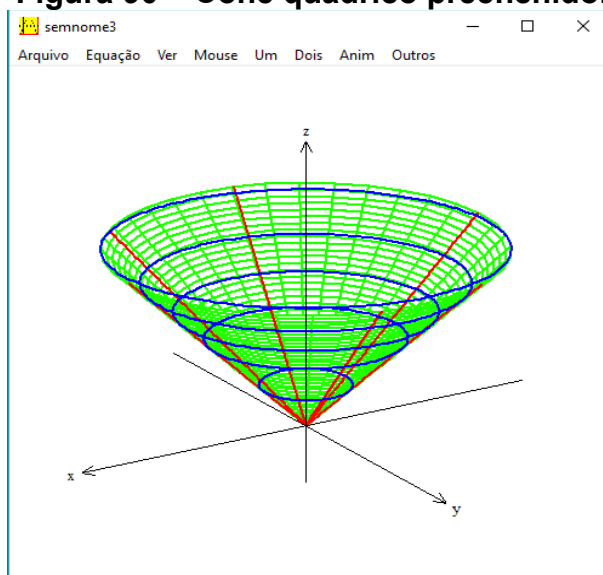


Fonte: Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

### c) Preenchimento do cone

Para o preenchimento do cone, foi fornecida a equação paramétrica do mesmo. Os estudantes participantes então perceberam que poderiam fazer a superfície digitando o comando diretamente no programa, porém, se isso acontecesse não visualizariam quais as curvas necessárias para a formação dessa superfície, foco desta pesquisa.

**Figura 90 – Cone quádrico preenchido.**



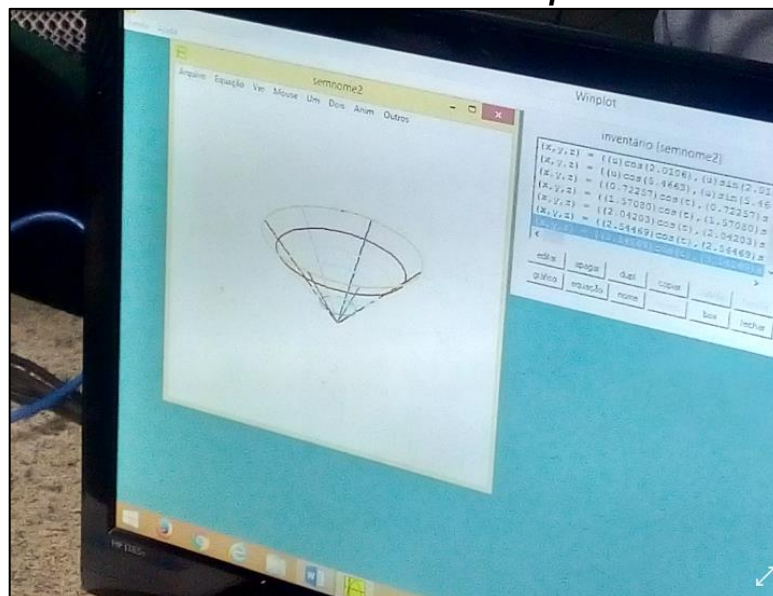
**Fonte:** Elaborado pelo autor – *Caderno de Atividades*.

O desenvolvimento dessa atividade constitui uma importante oportunidade de explorar as potencialidades que essa prática pedagógica pode proporcionar ao professor. Nesse sentido, concordamos com Tajra (2008), quando afirma que:

O ganho do computador em relação aos demais recursos tecnológicos, no âmbito educacional, está relacionado à sua característica de interatividade, à sua grande possibilidade de ser um instrumento que pode ser utilizado para facilitar a aprendizagem individualizada, visto que só executa o que ordenamos; portanto, limita-se aos nossos potenciais e anseios. (TAJRA, 2008, p. 45).

A adoção dessa prática tem como objetivo elevar o nível de aprendizagem dos estudantes a diferentes níveis de conhecimento. A capacidade de visualização, no desenvolvimento das atividades propostas na sequência didática, é facilitada com a utilização do computador, além da interação entre o aluno, professor e o conhecimento que se está adquirindo.

**Figura 91 – Cone Quádrico construído pela dupla D9 com o auxílio do software Winplot 3D.**



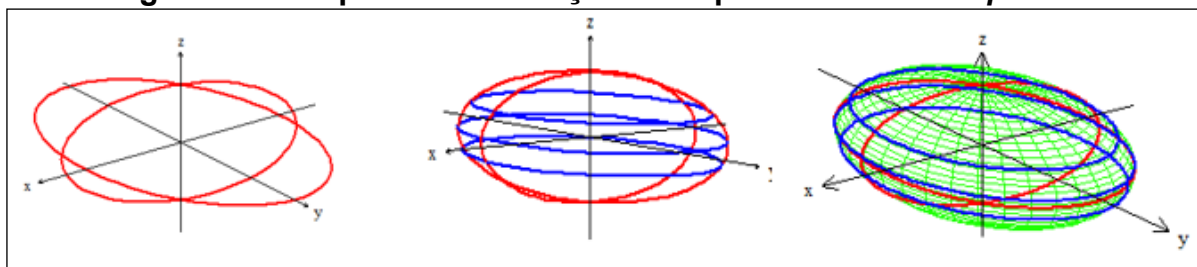
Fonte: Foto de atividade realizada pelos sujeitos da pesquisa – Winplot 3D.

### 3º Momento: construção de um elipsoide e de um parabolóide circular

#### a) Construção de um elipsoide

O objetivo dessa etapa foi a construção de um elipsoide, seguindo o exemplo do cone quádrico, com passos sugeridos no *Caderno de Atividades*. Para a realização dessa tarefa, foi fornecida uma tabela de valores para a construção das elipses. Primeiro, para as elipses paralelas ao plano XZ, no qual a variável  $t$  era substituída pelos valores constantes na tabela e, em seguida as elipses paralelas ao plano XY, no qual quem assumia valores era a variável  $u$ , e, por fim, o preenchimento de toda superfície utilizando sua equação paramétrica.

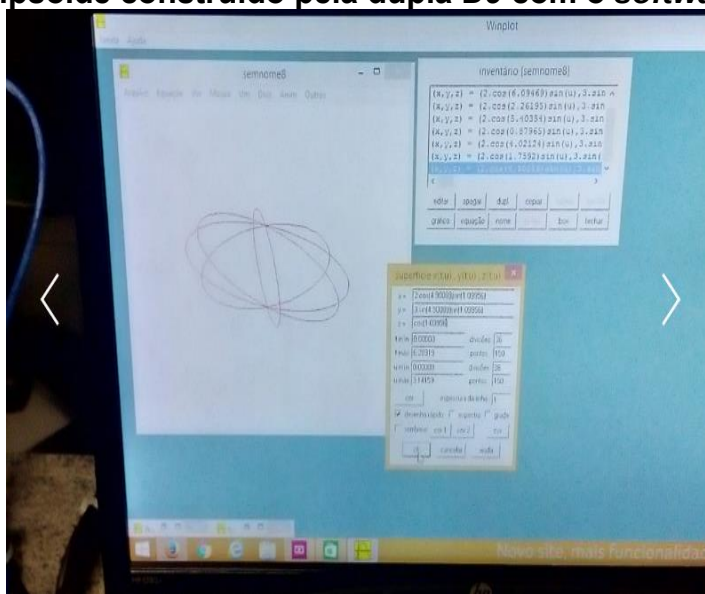
**Figura 92 – Etapas de construção do elipsoide com o Winplot 3D.**



Fonte: Elaborado pelo autor – Winplot 3D.

Todas as duplas de estudantes conseguiram realizar esse item da atividade, não relataram dificuldades durante a realização e manipulação do *software*. A seguir, demonstramos uma imagem da construção de uma das duplas.

**Figura 93 – Elipsoide construído pela dupla D9 com o *software* Winplot 3D.**

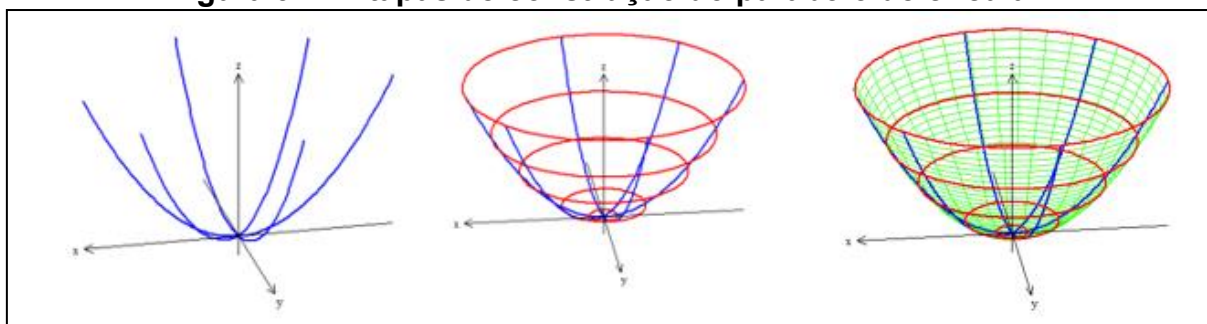


Fonte: Foto de atividade realizada pelos sujeitos da pesquisa – Winplot 3D.

#### b) Construção de um parabolóide circular

Nesse momento, de maneira semelhante à atividade anterior, o objetivo foi a construção de um parabolóide circular, partindo das curvas construídas nos planos XZ e YZ. Para a construção do mesmo, primeiramente foram construídas as parábolas, contidas na família de plano XZ, para, em seguida, os círculos, na família de planos XY. Foi fornecida no *Caderno de Atividades* uma tabela com a sugestão de valores para as variáveis  $u$  e  $t$ . Inicialmente, foi substituída a variável  $t$  pelos valores constantes na tabela, formando as parábolas que compõem a superfície, para, em seguida, mantendo essa variável  $t$  como uma constante, alterar a variável  $u$ , formando as circunferências tangente às parábolas. O último passo dessa atividade consistiu no preenchimento da superfície. Para isso, bastou a digitação da equação paramétrica para a construção da superfície.

A seguir, ilustramos os passos de execução desse item.

**Figura 94 – Etapas de construção do parabolóide circular.**

Fonte: Elaborado pelo autor – *Winplot 3D*.

Durante a realização das atividades, observei, como professor pesquisador, que os sujeitos da pesquisa estavam realizando as atividades sem a necessidade de intervenções, mesmo não conhecendo as equações ou até mesmo as superfícies quádricas. Os mesmos já estavam totalmente familiarizados com o *software* e seus comandos, interagindo de forma satisfatória com a proposta pedagógica. Verbalmente, houve manifestação quanto à satisfação em participar da pesquisa e se propuseram a realizar outras atividades semelhantes.

## 6 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Após a realização de todas as atividades da pesquisa, solicitamos que os estudantes preenchessem uma *Ficha de Avaliação de Atividade*, cujo objetivo foi verificar o nível de satisfação dos estudantes ao realizarem as atividades propostas.

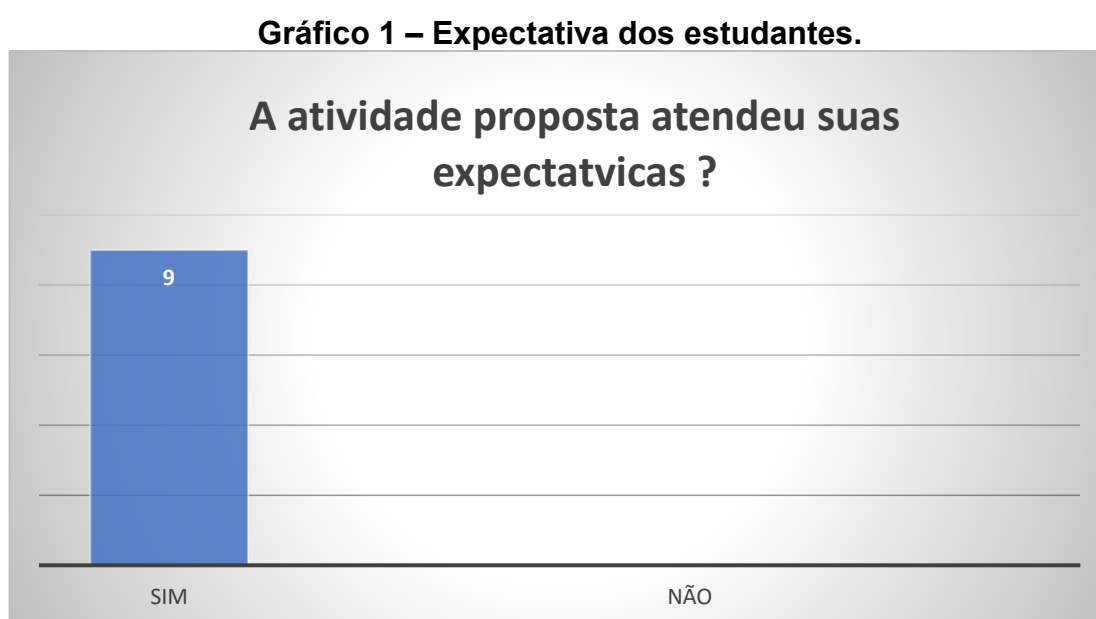
Esse momento final se configurou como uma *Avaliação de conteúdos procedimentais*, que, de acordo com Zabala (2008):

[...] devem ser atividades abertas, feitas em aula, que permitam um trabalho de atenção por parte dos professores e a observação sistemática de como cada um dos alunos transfere o conteúdo para a prática. (ZABALA, 2008, p. 207)

Assim, os dados coletados proporcionaram uma riqueza maior para análise das informações coletadas com a realização da pesquisa, sendo um impulso na continuidade dessa prática pedagógica e no desenvolvimento de pesquisas posteriores. O questionário está no Apêndice desta dissertação. Seguem as perguntas e a análise qualitativa das respostas.

### 1. A atividade proposta atendeu suas expectativas?

O Gráfico 1 apresenta a tabulação das respostas referentes às expectativas quanto à participação das duplas na pesquisa.



Fonte: Elaborado pelo autor.



De acordo com os dados apresentados no Gráfico 1, podemos afirmar que todos os sujeitos da pesquisa relataram que a atividade atendeu às suas expectativas.

A adoção de uma didática diferenciada, objeto deste trabalho, mostrou-se importante no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, uma vez que a mesma instigou e estimulou os estudantes a potencializem seu nível de conhecimento, como afirma Libâneo (1994),

[...] o processo de ensino é uma atividade conjunta de professores e alunos, organizada sob a direção do professor, com a finalidade de prover condições e meios pelos quais os alunos assimilam ativamente conhecimentos, habilidades, atitudes e convicções. (LIBÂNEO, 1994, p. 29).

Como em todas as etapas da pesquisa, um dos objetivos foi de proporcionar aos estudantes uma aprendizagem mais significativa, conseguimos alcançar tal objetivo. A seguir, apresentamos o relato de uma das duplas de estudantes que participaram da pesquisa.

**Figura 95 – Depoimento da dupla D3**

|                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. A atividade proposta atendeu suas expectativas?</p> <p>Sim, pois tivemos uma boa visão e entendimento<br/>das curvas e eixos da parábola Wuplat</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fonte: Resposta de dupla participante da pesquisa – Ficha de Avaliação de Atividade.

**2. Quanto ao conteúdo, que é a visualização de figuras no plano e no espaço, você o considerou difícil?**

O Gráfico 2 apresenta a tabulação referente à segunda questão da *Ficha de Avaliação de Atividade*.

**Gráfico 2 – Avaliação dos alunos.**

**Fonte: Elaborado pelo autor.**

De acordo com os dados apresentados no gráfico, é possível concluir que a maioria dos sujeitos da pesquisa respondeu que não achou o conteúdo de visualização de figuras no plano e no espaço difícil, porém, a quantidade de sujeitos que achou parcialmente difícil foi muito próxima, e somente uma dupla classificou as atividades como difícil. A possibilidade para essa diversidade nas respostas pode ser creditada ao fato de ser o primeiro contato dos sujeitos com uma atividade com essa proposta.

Outro fator que também deve ser levado em consideração é o desconhecimento dos sujeitos da pesquisa em relação às figuras e superfícies espaciais. O estudo aprofundado das equações e das relações das figuras deve ser abordado e discutido pelo professor titular da disciplina. A atividade foi importante para esse primeiro contato, pois pode proporcionar aos sujeitos uma visualização e entendimento de importantes conceitos das superfícies abordadas.

A seguir, apresentamos um extrato do relato de uma das duplas, participantes da pesquisa.

**Figura 96 – Depoimento da dupla D4.**

2. Quanto ao conteúdo, que é a visualização de figuras no plano e no espaço, você o considerou difícil?

Não, pois a visualização do desenho é bem útil na geometria.

Fonte: Resposta de dupla participante da pesquisa – Ficha de Avaliação de Atividade.

### 3. Quanto ao software WINPLOT, você já o conhecia?

O Gráfico 3, apresenta os dados obtidos do 3º item da Ficha de Avaliação.

**Gráfico 3 – Alunos que conheciam o Winplot 3D.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

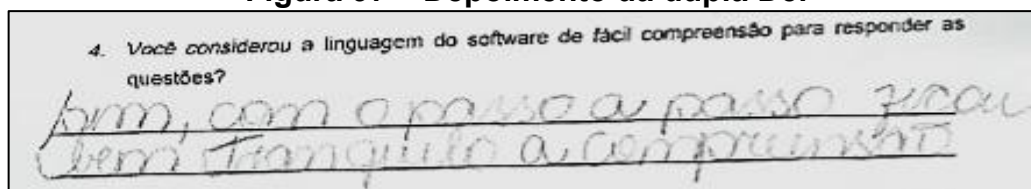
De acordo com os dados apresentados no gráfico, é possível afirmar que, dos sujeitos da pesquisa, nenhum conhecia o *software Winplot 3D*. Porém, é importante destacar que, mesmo sendo o primeiro contato com ele, a realização das atividades propostas na pesquisa não ficaram prejudicadas. Porém, deve ser ressaltado que a apresentação e introdução prévias do *software* e da metodologia que seria utilizada para a realização dos trabalhos se mostraram importantes e influentes nesse resultado.

A partir dessa prática, devido ao que foi verbalizado pelos sujeitos, é muito provável que muitos continuem a utilizar o *software* em seus estudos, tendo alguns solicitado uma cópia do *Caderno de Atividades* para esse fim.

**4. Você considerou a linguagem do software de fácil compreensão para responder as questões?**

Todos os sujeitos da pesquisa afirmaram, positivamente, quanto à linguagem do *software*, mesmo não o conhecendo, como dito anteriormente.

**Figura 97 – Depoimento da dupla D5.**

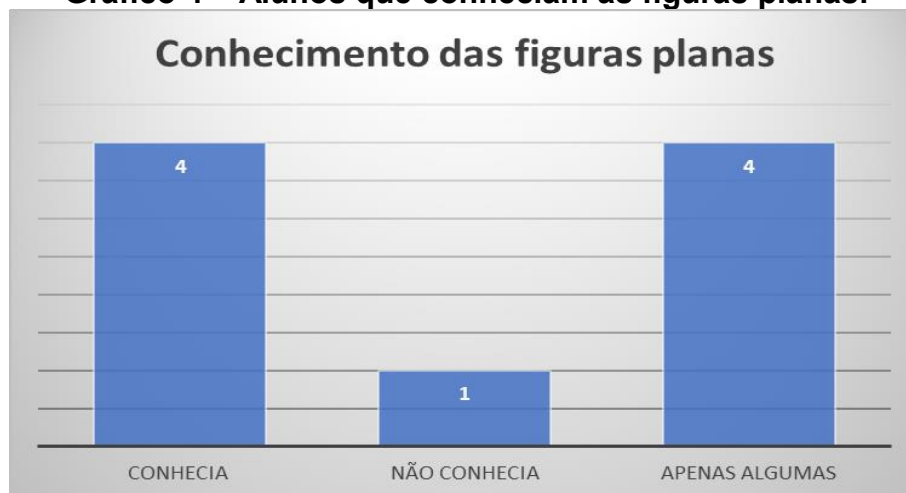


Fonte: Resposta de dupla participante da pesquisa – Ficha de Avaliação de Atividade.

**5. Das figuras planas, você já estava familiarizado com elas? (Parábola, Hipérbole, Elipse). Se sim, quais?**

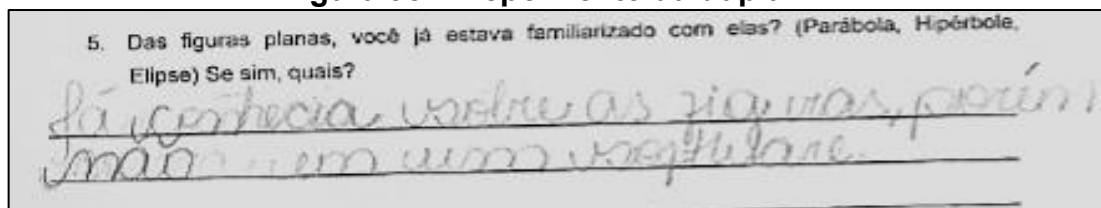
O Gráfico 4 apresenta os dados tabulados quanto ao nível de conhecimento dos estudantes quanto às figuras planas.

**Gráfico 4 – Alunos que conheciam as figuras planas.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

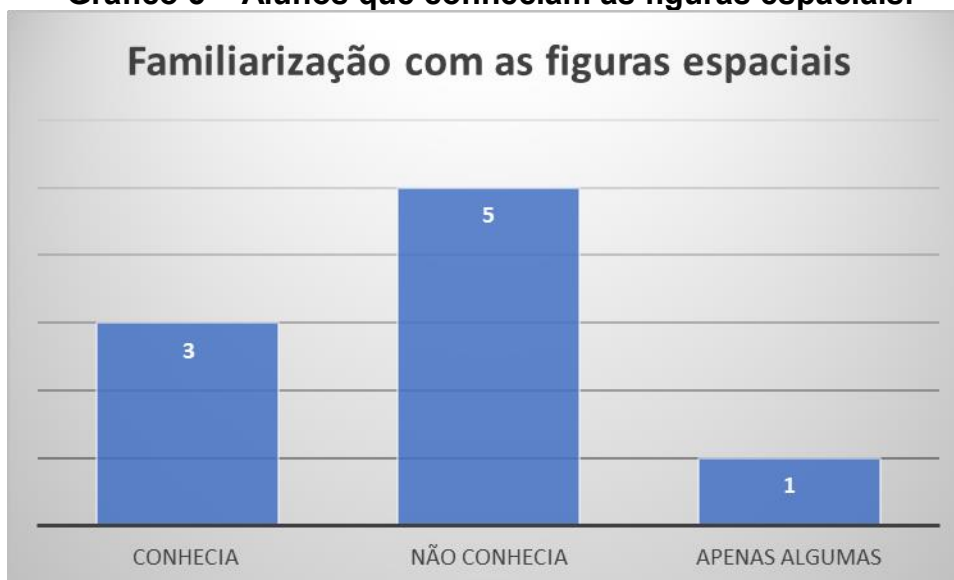
Em relação à familiarização com as figuras planas, apenas uma dupla afirmou que não conheciam todas, os demais sujeitos tinham conhecimento das figuras, sendo parábola e hipérbole as mais conhecidas, e elipse a menos conhecida, de acordo com o coletado na *Ficha de Avaliação de Atividade*.

**Figura 98 – Depoimento da dupla D7.**

Fonte: Resposta de dupla participante da pesquisa – Ficha de Avaliação de Atividade.

**6. Quanto às figuras espaciais, você já está familiarizado com elas ou já as conhecia?**

O gráfico a seguir, representa os dados obtidos em relação à familiarização dos estudantes com as figuras espaciais.

**Gráfico 5 – Alunos que conheciam as figuras espaciais.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com os dados apresentados no gráfico, a maioria dos sujeitos não tinha conhecimento das figuras espaciais. A atividade se mostrou importante nesse primeiro contato, uma vez que permitiu aos sujeitos visualizarem a transição das figuras do plano XY para o espaço XZ. Certamente, numa abordagem futura dessas superfícies, a familiarização contribuirá para uma aprendizagem mais significativa desses conteúdos.

**7. Qual a sua avaliação referente às atividades propostas?**

Os sujeitos da pesquisa avaliaram as atividades como boas ou excelentes, não aparecendo nenhuma avaliação negativa.

**Figura 99 – Depoimento da dupla D3.**

7. Qual a sua avaliação referente as atividades propostas?

*Me ajudaram a compreender as figuras  
com R3.*

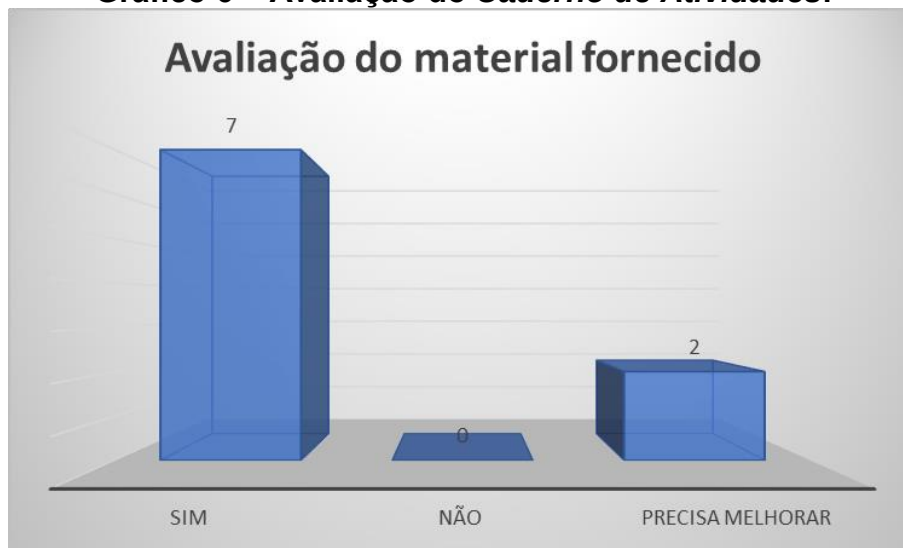
Fonte: Resposta de dupla participante da pesquisa – Ficha de Avaliação de Atividade.

### **8. Você gostou de ter participado desta atividade?**

Todos os sujeitos da pesquisa afirmaram ter gostado de participar da atividade. Durante o desenvolvimento e realização da mesma, foi observado pelo professor pesquisador uma boa interação e empolgação dos sujeitos com a atividade proposta.

### **9. O material fornecido para a execução das atividades é considerado por você, eficiente?**

A seguir, apresentamos os dados gráficos da avaliação do *Caderno de Atividades*.

**Gráfico 6 – Avaliação do Caderno de Atividades.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observamos que a maioria dos sujeitos participantes avaliou o material como eficiente, mas devem ser levados em consideração alguns pontos importantes a serem melhorados no material. Durante a realização das atividades, foram observados alguns erros no *Caderno de Atividades* que deverão ser corrigidos para a realização de práticas futuras, embora esses não tenham impactado de forma negativa ou impossibilitado a realização da pesquisa.

**Figura 100 – Depoimento da dupla D9.**

9. O material fornecido para a execução das atividades é considerado por você, eficiente?

*sim, necessita de pequenas correções nos valores, mas  
não é suficiente para diminuir o valor da mesma.*

Fonte: Resposta de dupla participante da pesquisa – Ficha de Avaliação de Atividade.

**Figura 101 – Depoimento da dupla D8.**

9. O material fornecido para a execução das atividades é considerado por você, eficiente?

*Sim, pois mostra com clareza pontos a ponto  
das tarefas*

Fonte: Resposta de dupla participante da pesquisa – Ficha de Avaliação de Atividade.

## 10. Observações

O objetivo desse item foi deixar um espaço para que os sujeitos manifestassem suas observações, conjecturas e sugestões durante a realização da pesquisa. Tais observações são vistas, pelo professor pesquisador e pelo professor colaborador, como uma importante avaliação, que será útil para potencializar e aprimorar cada vez mais o material elaborado.

Não houve nenhuma observação negativa por parte dos sujeitos da pesquisa, mas sim de incentivo na continuidade desse tipo de trabalho. De forma geral, os estudantes demonstraram satisfação em participar da pesquisa.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, ressaltamos a grandeza de conhecimento que o desenvolvimento desta pesquisa proporcionou aos professores pesquisadores durante todo processo de criação das atividades e de sua aplicação. O referencial teórico que fundamentou este trabalho no que se refere às noções em torno de “visualização”, “informática educativa”, “sequência didática” e “práticas educativas” constituem parâmetros relevantes para o docente e os estudantes do Ensino Superior, facilitando a aquisição de conhecimento de uma maneira mais heurística, ou seja, como protagonista em seu processo de ensino/aprendizagem.

O objetivo geral desta pesquisa foi: criar atividades que facilitem a compreensão da transição das cônicas para as quádricas, desenvolvendo e explorando as habilidades de visualização. Foi dada, nesse sentido, uma continuidade ao trabalho desenvolvido por Mota (2010), que também discorreu sobre esse tema, utilizando o mesmo *software* dinâmico, *Winplot 3D*, com metodologia diferenciada.

Com base nas observações dos pesquisadores e nas interações efetivas dos sujeitos da pesquisa, foram evidenciadas potencialidades para a aquisição da capacidade de visualização proporcionadas pela execução das atividades, principal propósito da pesquisa. Os estudantes, ao serem submetidos a metodologias diferentes da tradicional, demonstraram um envolvimento maior na realização das atividades. As estratégias operantes da transição do espaço bidimensional para o tridimensional mostraram-se eficazes para as transformações desses espaços.

Para a realização da pesquisa, fiz a opção por uma metodologia de passos, a partir de uma sequência didática, seguindo as orientações de Zabala (2008), e nas práticas educativas de D'Amore (2007). Essa escolha metodológica consistiu na experimentação inicial, pelos sujeitos da pesquisa, da construção das superfícies cilíndricas utilizando lápis e papel, para, em seguida, utilizar o *software Winplot 3D*.

Foi observado, também, que essa utilização de metodologias, segundo D'Amore (2007), permitiu que estudantes fizessem conjecturas, observações e aproveitassem ao máximo o conhecimento que estava sendo adquirido por eles, além de compreender melhor o processo de construção das superfícies, indo ao encontro dos objetivos específicos deste estudo, com o desenvolvimento da visualização, permitindo identificar as estruturas das cônicas no plano bidimensional e, ainda, verificar a formação dos cilindros e das quádricas no espaço  $R^3$ .



Os resultados da pesquisa indicaram que os estudantes reagiram positivamente, com as atividades baseadas no processo, tanto da plotagem dos gráficos quanto da elaboração com lápis e papel. Ressalta-se, dessa forma, o que Frota (2013) enfatizou nas conclusões de suas investigações, quanto à criação de diferentes espaços e metodologias para a troca de experiências e reconstrução das ideias matemáticas.

Após serem submetidos à realização de algumas atividades para se familiarizarem com o *software*, os estudantes se mostraram bem confortáveis na execução das atividades com a utilização do *software*. As simulações, os testes e as trocas de parâmetros, criados pelo ambiente virtual, constituíram importantes ferramentas durante toda a realização das atividades.

Em relação ao *software*, a escolha do mesmo foi justificada pela familiarização dos professores pesquisador e colaborador com o mesmo, e também pela existência de poucos trabalhos desenvolvidos com esse *software*;

Outro ponto a ser destacado em relação ao *software Winplot 3D* é o fato de ser uma espécie de “precursor” de outros *softwares* mais recentes, ou seja, um dos pontos de partida para o desenvolvimento de outros existentes no mercado atual, o que se buscou valorizar, demonstrando suas potencialidades.

Porém, deve ser observado alguns pontos que podem ser considerados negativos em relação ao *software*, como: a necessidade de vários comandos para execução de tarefas e apresentar uma melhor resposta com as superfícies tridimensionais, sendo utilizadas as equações paramétricas das mesmas. Porém, ressaltamos que tais pontos não desmerecem ou desvalorizam o *software*.

No capítulo de análise dos livros didáticos, entendo que foi alcançado o objetivo específico de “verificar a abordagem das cônicas e quádras em livros didáticos”.

Os dados da análise feita nos quatro livros selecionados apontam para o seguinte quadro: na abordagem das superfícies, cilíndricas ou quádras, inicialmente, é feita uma breve introdução, destacando-se a definição a partir das equações de tais superfícies, e fazendo a apresentação das mesmas em gráficos 3D. Entretanto, apenas um dos livros faz indicação de utilização de um *software* dinâmico, sem mencionar qual, uma vez que esta é sua proposta didática. Também, não é feito o levantamento do contexto histórico das superfícies, sendo que somente um dos livros realiza uma abordagem, de caráter meramente ilustrativo, das quádras a partir de suas curvas cônicas.

Em relação a atividades de aplicação das superfícies, apenas um dos livros apresenta uma proposta com caráter semelhante ao proposto nesta pesquisa, mas não destaca nenhum tipo de superfície cilíndrica ou quádrlica.

A construção de um *Caderno de Atividades* atende o último objetivo específico de nossa pesquisa: “construir um *Caderno de Atividades* com o objetivo de apresentar as atividades elaboradas e testadas na pesquisa”.

As atividades que compõem tal caderno foram pensadas de modo a formalizar a definição das superfícies cilíndricas e quádrlicas, potencializando o conhecimento dos estudantes. A interação entre as tecnologias lápis e papel e informática proporcionou uma diversificação na sequência didática, na qual não se evidenciou a sobreposição de uma sobre a outra, mas sim sua complementaridade para a resolução das atividades propostas.

Assim, após a análise dos resultados coletados na pesquisa, saliento que é necessário experimentar para uma efetiva visualização, dessa maneira, a prática educativa demanda a incorporação de novos processos didáticos do pensar e do fazer matemática.

## REFERÊNCIAS

- ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O método nas ciências naturais e sociais**. São Paulo: Pioneira, 1998.
- ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n. 52, p. 215-241, 2003.
- ÁVILA, Geraldo. **Várias faces da Matemática**: tópicos para licenciatura e leitura em geral. São Paulo: Blucher, 2010. 203 p.
- BOERO, P.; GUTIÉRRES, A. (Orgs.) **Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future**. Roterdã: Sense Publishers, 2006.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 100 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da Matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- DOMINGUES, Hygino H. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.
- DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. (Org.) **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.
- FROTA, Maria Clara R. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em Cálculo. In: FROTA, M. C. et al. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: Papirus, 2013. p. 61-88.
- FURLETTI, Saulo; LAUDARES, João Bosco. A informática educativa no Ensino Superior de matemática em cursos de graduação com o apoio dos *softwares Winplot 3D* e Máxima. In: **Tecnologias digitais** – desafios, possibilidades e relatos. Brasília: IBICT, 2018. p. 227-249.
- GASPAR, Antônio Simões. **As cônicas, quádricas e suas aplicações**. 2014. 75 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. 2014.
- GIL, Antônio Carlos. **Metodologia do Ensino Superior**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- LEIVAS, José Carlos Pinto; SOARES, Maria Tereza Carneiro. **Números Complexos e Geometria**: uma envolvente conexão. São Paulo: Papirus, 2013. 366 p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
- LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.
- LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994. 263 p. (Coleção magistério. Série formação do professor).
- MOTA, Janine et al. **Planos, cilindros e quádricas** – um enfoque no traçado de gráficos com exploração das seções transversais. Belo Horizonte: Editora PUC-Minas, 2013.
- MOTA, Janine Freitas. **Um estudo de planos, cilindros e quádricas explorando secções transversais, nas perspectiva de habilidades de visualização com o**

**software Winplot.** 2011. 205 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. 2010.

NASSER, Lilian. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. e NASSER, L. (Orgs.) **Educação matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates.** 2009. p. 45-56.

OLIVEIRA, Adilson Lopes de. **Objeto de aprendizagem para o desenvolvimento de habilidades de visualização e representação de seções cônicas:** atividades para o Ensino Médio. 2011. 106 p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. 2011.

OLIVEIRA, Ramon. **Informática educativa.** Campinas: Papirus, 1997. 167 p. (Coleção Magistério: Formação e trabalho pedagógico).

PAIS, Luiz Carlos. **Didática matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001, 128 p.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: BOERO, P.; GUTIÉRRES, A. (Orgs.) **Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future.** Roterdã: Sense Publishers, 2006. p. 205-235.

SANTOS, Josenildo; ALMEIDA, Iolanda Andrade C.; CORREIA, Ana Magda A. **Interpretando a geometria euclidiana através do estudo de telhados.** In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA GRÁFICA, XIV, 2002, Espanha, Ingegraf, 2002, p. 2-10.

TAJRA, Sanmya Feitosa. **Informática na Educação:** novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade. 8. ed. São Paulo: Érica, 2008. 181 p.

TALL, D. (Org.) **Advanced mathematical thinking.** Londres: *Kluwer Academic Publisher*, 1991.

VINNER, S. The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Org.) **Advanced mathematical thinking.** Londres: *Kluwer Academic Publisher*, 1991. p. 65-81.

ZABALA, Antoni. **A prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p.

## APÊNDICE 1

## LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO (Realizado quando da construção do projeto de pesquisa)



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – 2016

PROFESSOR ORIENTADOR: DR. JOÃO BOSCO LAUDARES

MESTRANDO: ANDERSON GONÇALVES SIQUEIRA

| Índice | Tipo        | Título                                                                                                                     | Autores                   | Programa | Instituição | Revista<br>Evento<br>Editora | Publicação | Local | Ano |
|--------|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|----------|-------------|------------------------------|------------|-------|-----|
| 1      | Dissertação | Secções Cônicas: Atividades com Geometria dinâmica com base no currículo do Estado de São Paulo                            |                           | Mestrado | PUC – SP    |                              |            | SP    |     |
| 2      | Dissertação | Geometria Esférica por meio de materiais manipuláveis                                                                      | Joana D'Arc da Silva Reis | Mestrado | UNESP – SP  |                              |            | SP    |     |
| 3      | Dissertação | Ensino aprendizagem de Geometria: Uma proposta fazendo uso de caleidoscópio, sólidos geométricos e softwares educacionais. | Renata Aparecida Martins  | Mestrado | UNESP – SP  |                              |            | SP    |     |

|    |             |                                                                                                                                                                                          |                                  |                                              |                                            |  |  |    |      |
|----|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------|--|--|----|------|
| 4  | Dissertação | Objeto de aprendizagem para o desenvolvimento de habilidades de visualização e representação de secções cônicas.                                                                         | Adilson Lopes de Oliveira        | Mestrado Profissional                        | PUC – MG                                   |  |  | MG | 2011 |
| 5  | Dissertação | Planos, Cilindros e Quádricas – Um enfoque no traçado de gráficos com exploração das seções transversais na perspectiva da habilidade de visualização com o <i>software Winplot 3D</i> . | Janine Freitas Mota              | Mestrado Profissional                        | PUC – MG                                   |  |  | MG | 2010 |
| 6  | Dissertação | Relações entre Cônicas e Funções no Ensino Médio                                                                                                                                         | Silvia Louzada                   | Mestrado Profissional                        | Universidade Federal do Espírito Santo     |  |  | MG |      |
| 7  | Dissertação | Cônicas e Aplicações                                                                                                                                                                     | Juracêlio Ferreira Lopes         | Mestrado Profissional                        | Universidade Estadual do Rio Grande do Sul |  |  | RS |      |
| 8  | Dissertação | Sobre Secções Cônicas                                                                                                                                                                    | José Adriano dos Santos Oliveira | PROFMAT                                      | Universidade Federal do Ceará              |  |  | CE |      |
| 9  | Dissertação | Cônicas: Apreciando uma obra prima da Matemática                                                                                                                                         | Luiz Efigênio da Silva Filho     | PROFMAT                                      | Universidade Federal do Ceará              |  |  | CE |      |
| 10 | Dissertação | Sequência Didática para o estudo das secções cônicas com o auxílio do software Geogebra na Matemática                                                                                    | Sandra Pereira Lopes             | Estudos pós graduados em Educação Matemática | PUC – SP                                   |  |  | SP |      |
| 11 | Dissertação | Estudo das Cônicas através de roteiros didáticos aplicados no Geogebra                                                                                                                   | Nercionildo Pereria Vaz          | PROFMAT                                      | Universidade Federal da Paraíba            |  |  | PB |      |

|    |             |                                                                                                                                                          |                                      |         |                                               |  |  |    |        |
|----|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|---------|-----------------------------------------------|--|--|----|--------|
| 12 | Dissertação | As curvas cônicas com o uso do Geogebra                                                                                                                  | Graciano Francisco Rodrigues         | PROFMAT | Universidade Federal de Alagoas               |  |  | AL |        |
| 13 | Dissertação | O uso das construções como metodologia de ensino e aprendizagem das cônicas                                                                              | Washington Luis Parga Garrido Junior | PROFMAT | Universidade Federal do Maranhão              |  |  | MA |        |
| 14 | Dissertação | Uma proposta de abordagem para a aula de cônicas com auxílio de uma applet                                                                               | Alexandre Assemany da Guia           | PROFMAT | IMPA                                          |  |  | RJ | nov/16 |
| 15 | Dissertação | Cônicas: Construções, atividades e aplicações                                                                                                            | Allan de Souza Soares                | PROFMAT | Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia    |  |  | BA | out/16 |
| 16 | Dissertação | Uma abordagem do estudo de cônicas e quádras com auxílio do software geogebra                                                                            | Luiz Fernando Giolo Alves            | PROFMAT | UNESP – SP                                    |  |  | SP | ago/16 |
| 17 | Dissertação | Utilizando o software geogebra como ferramenta auxiliar no ensino de parametrização das cônicas                                                          | Francisco Amarildo Andrade de Souza  | PROFMAT | Universidade Federal do Acre                  |  |  | AC | ago/16 |
| 18 | Dissertação | Ensino Aprendizagem de cônicas em turmas com número reduzido de alunos: Aplicação e avaliação de metodologia alternativa pelo método de Rasch Dicotômico | Waldiclecyo Souza Silva              | PROFMAT | Universidade Federal do Vale do São Francisco |  |  | PE | ago/16 |
| 19 | Dissertação | Reconhecimento de cônicas via diagonalização de Matrizes                                                                                                 | Suely Silva Santos Gama              | PROFMAT | Faculdades Unidas de Feira de Santana         |  |  | BA | mai/16 |
| 20 | Dissertação | Estudando as cônicas através da Geometria Analítica e da Álgebra Linear                                                                                  | Josiana Gomes Barbosa Arenhardt      | PROFMAT | Universidade Federal de Goiás                 |  |  | GO | mar/16 |

|    |             |                                                                                                        |                                 |         |                                              |  |  |    |        |
|----|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|---------|----------------------------------------------|--|--|----|--------|
| 21 | Dissertação | Propriedades de reflexão das cônicas: Construção de um concentrador solar e de um comunicador acústico | Elias Santos Nascimento         | PROFMAT | Universidade Estadual de Santa Cruz          |  |  | BA | mar/16 |
| 22 | Dissertação | O uso do material concreto para o ensino da propriedade reflexiva das cônicas                          | Fernando Rocha Barbosa          | PROFMAT | Universidade Federal do Piauí                |  |  | PI | mar/16 |
| 23 | Dissertação | Uma contribuição para o ensino de Cálculo no Ensino Médio, utilizando a classe das cônicas             | Willian Febronio de Mattos      | PROFMAT | USP                                          |  |  | SP | nov/15 |
| 24 | Dissertação | Um estudo sobre cônicas e curvas cúbicas no plano e o aplicativo Easymath                              | Giselle Cacure Pedroso          | PROFMAT | UNICAMP                                      |  |  | SP | out/15 |
| 25 | Dissertação | Cônicas e gráficos de funções de uma variável                                                          | Leonardo de Souza Leite         | PROFMAT | PUC                                          |  |  |    |        |
| 26 | Dissertação | Cônicas: Uma abordagem utilizando planilhas eletrônicas                                                | Marcelo da Silva Pires          | PROFMAT | Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia   |  |  | BA | set/15 |
| 27 | Dissertação | Uma proposta de ensino de cônicas com o auxílio do Geogebra                                            | Alan Jorge Cirqueira Gonçalves  | PROFMAT | Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro |  |  | RJ | ago/15 |
| 28 | Dissertação | Uma abordagem dinâmica e atual para o ensino das cônicas na Educação Básica                            | Ana Carolina Rabello Nascimento | PROFMAT | Universidade de Brasília                     |  |  | DF | jul/15 |
| 29 | Dissertação | Seções cônicas: uma proposta de atividades com ênfase nas propriedades refletoras e aplicações         | Moacir Carvalho Alves Junior    | PROFMAT | Universidade de Brasília                     |  |  | DF | jun/15 |
| 30 | Dissertação | Estudo das Cônicas com Geometria Dinâmica                                                              | Fernando Neres Gomide           | PROFMAT | Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia   |  |  | BA | abr/15 |



|    |             |                                                                                                            |                                |         |                                             |  |  |    |        |
|----|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|---------|---------------------------------------------|--|--|----|--------|
| 31 | Dissertação | Aplicações das Cônicas                                                                                     | Almir Pereira Filho            | PROFMAT | Universidade Federal do Rio Grande do Norte |  |  | RN | fev/15 |
| 32 | Dissertação | O estudo das cônicas através do origami                                                                    | Bruna Mayara Batista Rodrigues | PROFMAT | PUC                                         |  |  |    | fev/15 |
| 33 | Dissertação | Classificação das cônica e quádras                                                                         | Keide Tukamoto Oyafuço         | PROFMAT | UNESP – SP                                  |  |  | SP | fev/15 |
| 34 | Dissertação | Cônicas: Situações didáticas para o Ensino Médio                                                           | Rosana Silva Bonfim            | PROFMAT | UNESP – SP                                  |  |  | SP | fev/15 |
| 35 | Dissertação | Cônicas: Atividades aplicáveis no Ensino Médio com auxílio de geometria dinâmica e dobraduras Campo Grande | Eder Regiollé Dias             | PROFMAT | Universidade Federam de Mato Grosso do Sul  |  |  | MT | dez/14 |
| 36 | Dissertação | Estudo das cônicas com aplicações e o software geogebra como ferramenta de apoio                           | Julio Cesar Calvoso            | PROFMAT | Universidade Federam de Mato Grosso do Sul  |  |  | MT | dez/14 |
| 37 | Dissertação | Cônicas, Álgebra Linear e geogebra, uma combinação que deu certo                                           | Vitor Rodrigues Braga de Souza | PROFMAT | Universidade Federal de Goiás               |  |  | GO | set/14 |
| 38 | Dissertação | O estudo das cônicas a partir da construção geométrica                                                     | Mainara Lenz                   | PROFMAT | UNESP – SP                                  |  |  | Sp | set/14 |
| 39 | Dissertação | O estudo das cônicas a partir da construção geométrica                                                     | Eduardo dos Santos Peres       | PROFMAT | UNIRIO                                      |  |  | RJ | ago/14 |
| 40 | Dissertação | Softwares de geometria dinâmica na formação continuada do professor de Matemática: Estudo das cônicas      | Robertson de Carvalho Borges   | PROFMAT | Univesidade Federal do Acre                 |  |  | AC | ago/14 |

|    |             |                                                                                                       |                                |         |                                          |  |  |    |        |
|----|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|---------|------------------------------------------|--|--|----|--------|
| 41 | Dissertação | Estudando curvas cônicas usando materiais concretos e geogebra                                        | Ademar Francisco do Nascimento | PROFMAT | Universidade Federal do Oeste do Pará    |  |  | PA | jul/14 |
| 42 | Dissertação | Utilizando as planilhas eletrônicas para determinar os elementos das cônicas                          | Fernando do Carmo Batista      | PROFMAT | Universidade Federal do Ceará            |  |  | CE | jun/14 |
| 43 | Dissertação | Translação e rotação de cônicas em R2                                                                 | Marcio Lopes Campolino         | PROFMAT | Universidade de Brasília                 |  |  | DF | jun/14 |
| 44 | Dissertação | Cônicas e suas propriedades Notáveis                                                                  | Lindomar Duarte de Souza       | PROFMAT | Universidade Federal de Santa Catarina   |  |  | SC | jun/14 |
| 45 | Dissertação | As cônicas, quádras e suas aplicações                                                                 | Antonio Simões Gaspar          | PROFMAT | Universidade de Brasília                 |  |  | DF | jun/14 |
| 46 | Dissertação | Números Complexos e Cônicas                                                                           | Tacildo de Souza Araújo        | PROFMAT | Universidade Federal do Amazonas         |  |  | AM | mai/14 |
| 47 | Dissertação | Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico | João Paulo de Lima             | PROFMAT | Universidade Federal Rural do Semi-Árido |  |  | RN | abr/14 |
| 48 | Dissertação | Desenho Geométrico: um recurso para o ensino das cônicas                                              | Osiel Gomes da Silva           | PROFMAT | Universidade Federal Rural do Semi-Árido |  |  | RN | abr/14 |
| 49 | Dissertação | Resgate do Teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o Geogebra                                    | Rubens Marinho Monteiro        | PROFMAT | Universidade Federal do Espírito Santo   |  |  | ES | abr/14 |

|    |             |                                                                                   |                                |         |                                             |  |  |    |        |
|----|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|---------|---------------------------------------------|--|--|----|--------|
| 50 | Dissertação | O uso de dobraduras no processo de ensino de cônicas no ensino básico             |                                | PROFMAT | Universidade Estadual de Santa Catarina     |  |  | SC | abr/14 |
| 51 | Dissertação | Secções Cônicas: Uma proposta de ensino utilizando o software geogebra            | Jorge Adriano Carneiro Nunes   | PROFMAT | Universidade Estadual de Feira de Santana   |  |  | BA | abr/14 |
| 52 | Dissertação | Cônicas Unificadas em coordenadas polares para uma nova abordagem no Ensino Médio | João Gilberto Gonçalves Nunes  | PROFMAT | Universidade Federal do Ceará               |  |  | CE | abr/14 |
| 53 | Dissertação | Propriedades reflexivas das cônicas                                               | Leandro de Souza Gonçalves     | PROFMAT | PUC                                         |  |  |    | mar/14 |
| 54 | Dissertação | Cônicas no Ensino Médio, da contextualização à álgebra                            | Marcelo Honório dos Santos     | PROFMAT | Universidade Federal de Goiás               |  |  | GO | mar/14 |
| 55 | Dissertação | Cônicas e curvas de Cassini                                                       | Alessandro Iavorski            | PROFMAT | Universidade Tecnológica do Paraná          |  |  | PR | mar/14 |
| 56 | Dissertação | O Ensino das cônicas através de materiais concretos: uma proposta pedagógica      | Alcides Peres Junior           | PROFMAT | Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul |  |  | MS | mar/14 |
| 57 | Dissertação | Cônicas e suas diferentes representações                                          | Naralina Viana Soares da Silva | PROFMAT | Universidade Federal do Amapá               |  |  | AP | dez/13 |
| 58 | Dissertação | Diagonalização de matrizes 2x2 e reconhecimento de cônicas                        | Juarez Alves Barbosa Neto      | PROFMAT | Universidade Federal do Ceará               |  |  | CE | ago/13 |
| 59 | Dissertação | Cônicas: Lugares Geométricos e construções dinâmicas                              | Claudio Barros Vitor           | PROFMAT | Universidade Federal do Amazonas            |  |  | AM | ago/13 |

|    |                      |                                                                                                                |                                  |         |                                           |          |            |    |        |
|----|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|---------|-------------------------------------------|----------|------------|----|--------|
| 60 | Dissertação          | O teorema de classificação das cônicas – Uma aplicação no Ensino Médio                                         | Mauricio Evandro Eloy            | PROFMAT | UNESP – SP                                |          |            | SP | ago/13 |
| 61 | Dissertação          | Uma abordagem introdutória de cônicas para o Ensino Médio através do Geogebra                                  | Marcelo de Moura Costa           | PROFMAT | Universidade Federal de Juiz de Fora      |          |            | MG | mar/13 |
| 62 | Dissertação          | A construção de uma mesa de bilhar elíptica como recurso motivacional para o estudo de cônicas no Ensino Médio | Cátia Menezes de Miranda         | PROFMAT | Universidade Estadual de Santa Catarina   |          |            | SC | mar/13 |
| 63 | Dissertação          | Explorando as definições de cônicas                                                                            | João Calixto Garcia              | PROFMAT | UNESP – SP                                |          |            | SP | mar/13 |
| 64 | Dissertação          | Cônicas: uma abordagem geométrica e algébrica                                                                  | Silvio Tomé da Silva             | PROFMAT | Universidade Estadual de Maringá          |          |            | SC | mar/13 |
| 65 | Dissertação          | O ensino das cônicas através de estudos contextualizados até sua concepção na geometria analítica: parábola    | Gisele Polyana Rodrigues Pereira | PROFMAT | Universidade Federal de Lavras            |          |            | MG | mar/13 |
| 66 | Dissertação          | Uso do Geogebra no ensino de Matemática com atividades de aplicação em geometria analítica: as cônicas         | Windson Moreira Candido          | PROFMAT | Fundação Universidade Federal de Rondônia |          |            | RO | fev/13 |
| 67 | Artigo em periódicos | Secções Cônicas: Atividades com Geometria dinâmica com base no currículo do Estado de São Paulo                | Marcelo Balduino Silva           |         |                                           | PUC – SP | V.3, n.3   | SP | 2011   |
| 68 | Artigo em periódicos | Elipse, Parábola e Hipérbole em uma geometria que não é euclidiana                                             | José Carlos Pinto Leivas         |         |                                           | Revemat  | v. 9, n. 2 |    | 2004   |
| 69 | Artigo em periódicos | Atividades para a cônica e a hipérbole                                                                         | Neder do Carmo Pereira Habib     |         |                                           | Revemat  | v. 8,      |    | 2013   |

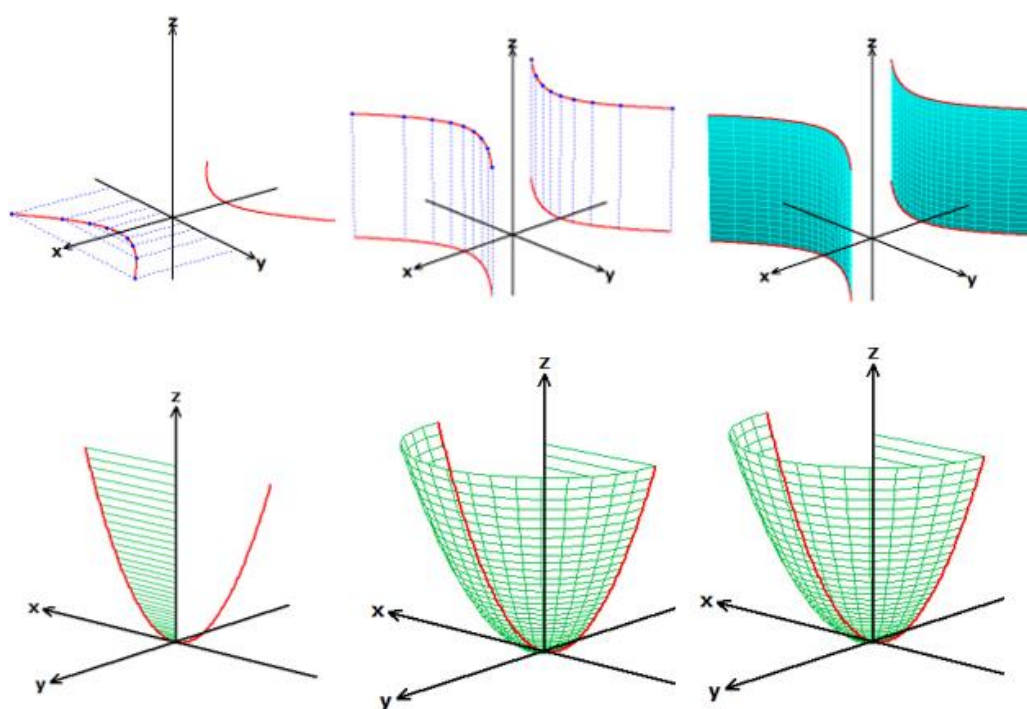
|    |                      |                                                                                                    |                                                                                                                                               |  |                                    |      |  |    |      |
|----|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------------------------------------|------|--|----|------|
| 70 | Artigo em Evento     | As cônicas sob o olhar dos registros de representação semiótica nos livros didáticos de matemática | Márcio Alexandre Volpato                                                                                                                      |  |                                    | ENEM |  |    | 2016 |
| 71 | Artigo em periódicos | O Geogebra como ferramenta para o Estudo das cônicas                                               | Enio Marques M. Junior<br>Henriche da S. Santos<br>Magna P. de Souza Ferreira<br>Ranielle F. de Brito Freitas<br>Tania M. Machado de Carvalho |  | Universidade Federal de Uberlândia | ENEM |  | MG | 2013 |
| 72 | Artigo em periódicos | O estudo geométrico das cônicas com o geogebra                                                     | Gisela Maria da Fonseca Pinto<br>Agnaldo da Conceição Esquinhalha<br>Luiz Paulo Ferretti Ferreira                                             |  | UFRRJ                              | ENEM |  | RJ | 2013 |
| 73 | Artigo em periódicos | Uma proposta de atividade para o ensino e aprendizagem de cônicas com o uso do software geogebra   | Elisangela Silva Farias<br>Fabiana Serra<br>Fabiana Santana<br>Sirlêda Santos                                                                 |  | UESC                               | ENEM |  | SC | 2013 |
| 74 | Artigo em periódicos | Um estudo do campo conceitual das cônicas                                                          | Jusley Talita Grimas de Souza<br>Lilian Akemi Kato                                                                                            |  | Universidade Estadual do Maringá   | ENEM |  | PR | 2013 |

|    |                       |                                                                                                                         |                                                                                                                                         |  |                                             |      |  |    |      |
|----|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------|------|--|----|------|
| 75 | Minicurso             | O velho e o novo em aulas: seccionando um cubo com diferentes recursos e desenvolvendo o pensamento geométrico          | Marcelo Almeida<br>BairralFelipe de<br>Jesus Ribeiro<br>MarquesThaís<br>Fernanda de Oliveira<br>SettiniVinicius dos<br>Santos Honorato  |  | UFRRJ                                       | ENEM |  | RJ | 2013 |
| 76 | Minicurso             | Dos fundamentos da Geometria à geometria hiperbólica plana: um estudo a partir de sua história e apoiado em um software | Mariana de Avelar<br>Gabino Lima<br>Jorge Isidro Orjuela<br>Bernal<br>Simone Aparecida da<br>Costa Sader<br>Maria Francisca da<br>Cunha |  | UNESP – SP                                  | ENEM |  | SP | 2013 |
| 77 | Relato de experiência | As cônicas: uma experiência utilizando diversas abordagens                                                              | Eder Pereira Neves                                                                                                                      |  | Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul | ENEM |  | MT | 2013 |
| 78 | Relato de experiência | Reflexões sobre a abordagem do conceito de hipérbole no Ensino Médio                                                    | Nayara Katherine<br>Duarte Pinto<br>Mariana Lima Vilela<br>Fernanda Godoy dos<br>Santos<br>Nora Olinda Cabrera<br>Zuniga                |  | UFMG                                        | ENEM |  | MG | 2013 |
| 79 | Relato de experiência | Uma abordagem para o ensino de cônicas por meio de tecnologias digitais                                                 | Lahis Braga Souza<br>Vanessa Oedisher                                                                                                   |  |                                             | ENEM |  |    | 2013 |

|    |                        |                                                                                      |                                                                                                                 |  |        |                        |  |              |      |
|----|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--------|------------------------|--|--------------|------|
| 80 | Comunicação Científica | Explorando a parábola da função polinomial do 2º grau em um ambiente informático     | Neomar Lacerda da Silva<br>Renato Pereira de Figueiredo<br>Maria Elizabete Souza Couto<br>Wagner Ribeiro Aguiar |  |        | ENEM                   |  |              | 2013 |
| 81 | Comunicação Científica | Um objeto de aprendizagem como recurso didático para reconhecer e conceituar cônicas | Adilson Lopes de Oliveira                                                                                       |  | PUC-MG | ENEM                   |  |              | 2013 |
| 82 | Comunicação Científica | As cônicas nas construções civis de Brusque                                          | Paloma Gabriele Novaes de Lorenzo<br>Janilson Lopes                                                             |  |        | ENEM                   |  |              | 2013 |
| 83 | Livros                 | Cônicas e Quádricas                                                                  | Jacir J. Venturi                                                                                                |  |        | Ed. Unificado          |  |              | 2003 |
| 84 | Livros                 | Geometria Analítica                                                                  | Fabiano José Silvimar Fábio Ferreira                                                                            |  |        | Ed. Bookman            |  | Porto Alegre | 2009 |
| 85 | Livros                 | Geometria Analítica                                                                  | Alfredo Strinbrudi<br>Paulo Winterle                                                                            |  |        | Ed. Makron Books       |  |              | 1987 |
| 86 | Livros                 | Vetores e Geometria Analítica                                                        | Paulo Winterle                                                                                                  |  |        | Ed. Makron Books       |  |              | 2000 |
| 87 | Livros                 | Vetores e uma iniciação a Geometria Analítica                                        | Dorival A. de Mello<br>Renate G. Watanabe                                                                       |  |        | Ed. Livraria da Física |  |              |      |

## APÊNDICE 2

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática  
Área de concentração: Matemática

**PRODUTO DA PESQUISA**

**AUTOR: ANDERSON GONÇALVES SIQUEIRA**

**ORIENTADOR: PROFESSOR DOUTOR JOÃO BOSCO LAUDARES**



## APRESENTAÇÃO

As atividades constantes neste *Caderno de Atividades* foram pensadas e planejadas de forma a proporcionar aos estudantes de graduação de áreas das ciências exatas, uma experiência visual de como acontece a transição de uma curva, que está contida no plano bidimensional,  $XY$ , na sua transição para o espaço tridimensional,  $XYZ$ . As propostas apresentadas nas atividades buscam proporcionar aos estudantes do ensino superior experiências diferentes das comumente utilizadas em sala de aula.

Todo o processo de desenvolvimento das atividades objetivou integrar a álgebra com a geometria, em especial, a Geometria Analítica, sendo essa um dos pilares para as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Com a utilização de um *software* dinâmico o *Winplot 3D*, foi possível relacionar a construção das superfícies de uma maneira mais empírica, uma vez que o estudante foi o protagonista de seu próprio conhecimento.

A metodologia utilizada para a realização das atividades consiste em uma sequência didática composta por duas atividades. Na Atividade 1, abordamos as superfícies cilíndricas, enquanto na Atividade 2 exploramos as superfícies quádricas. A seguir, apresentamos o organograma das atividades.

### **Atividade 1: Construção de cilindros quádricos no espaço tridimensional**

A Atividade 1 foi dividida em 4 momentos:

- 1º momento: apresentação da proposta metodológica da pesquisa, dos objetivos, dos conteúdos abordados e das equações paramétricas.
- 2º momento: consistiu em uma atividade guiada pelo professor pesquisador, na qual os estudantes, seguindo suas orientações, construíram um cilindro parabólico.
- 3º momento: foram fornecidas aos estudantes algumas equações de curvas, para que fizessem o esboço das mesmas, primeiro no plano  $XY$ , depois no espaço  $XYZ$ , e, enfim, a superfície cilíndrica. Toda essa

construção foi feita utilizando lápis e papel, explorando a visualização durante a construção das superfícies.

- 4º momento: Construção da superfície com a utilização do *Software Winplot 3D*.

### **Atividade 2: Construção das quádricas partindo de um espaço bidimensional para um espaço tridimensional**

A Atividade 2 foi dividida também em 3 momentos:

- 1º momento: apresentação da definição de uma superfície quádrica e suas equações paramétricas.
- 2º momento: desenvolvimento de uma atividade guiada, pelo professor pesquisador, na qual, com os estudantes, foi construído um cone quádrico, utilizando o *software Winplot 3D*.
- 3º Momento: construção de um elipsoide, pelos estudantes.

Toda a Atividade 2 foi desenvolvida apenas no *software*, seguindo as orientações do *Caderno de Atividades*.

A sequência didática desenvolvida para a pesquisa se baseou nas orientações de Zabala (1998), na Informática Educativa, e em Borba e Penteado (2003) e Tajra (2013), explorando a capacidade de visualização dos estudantes.

Utilizamos o *software Winplot 3D*, que é um programa gratuito, e que permitiu dinamizar e animar as superfícies cilíndricas e quádricas construídas nas atividades, explorando a visualização na transição do plano bidimensional para o espaço tridimensional.

## SUMÁRIO

|                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Comandos Básicos do <i>Winplot</i> .....                                                                         | 148 |
| 1 Atividade 1 – Construção dos cilindros quádricos no espaço<br>bidimensional para o espaço tridimensional ..... | 149 |
| 1.1 Objetivos .....                                                                                              | 149 |
| 1.2 Conteúdos abordados.....                                                                                     | 149 |
| 1.3 Metodologia .....                                                                                            | 149 |
| 2 Cilindros.....                                                                                                 | 150 |
| 2.1 Definição .....                                                                                              | 150 |
| 3 Atividade guiada – Construção de um cilindro Parabólico .....                                                  | 152 |
| 4 Construção das curvas de acordo<br>com as equações com lápis e papel .....                                     | 157 |
| 4.1 Item 1 – Construindo cilindro parabólicos no<br>espaço tridimensional utilizando lápis e papel .....         | 157 |
| 4.2 Construção da superfície cilíndrica com o <i>Software Winplot</i> .....                                      | 158 |
| 4.3 Item 2 – Gráfico da curva $y = x^2 + 1$ .....                                                                | 160 |
| 4.4 Construção da superfície cilíndrica com o <i>Software Winplot</i> .....                                      | 161 |
| 4.5 Item 3 - Gráfico da curva $Z = x^2$ .....                                                                    | 163 |
| 4.6 Construindo cilindros circulares no espaço tridimensional.....                                               | 164 |
| 4.7 Construção da superfície cilíndrica circular com o <i>Software Winplot</i> .....                             | 165 |
| 4.8 Item 5 – Construção de um cilindro circular fora da origem do plano XY .....                                 | 166 |
| 4.9 Construindo cilindros elípticos no espaço tridimensional .....                                               | 167 |

|      |                                                                                                                            |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.10 | Construção da superfície cilíndrica com o <i>Software Winplot</i> .....                                                    | 169 |
| 4.11 | Construção de um cilindro elíptico com o<br>centro fora da origem do plano XY .....                                        | 169 |
| 4.12 | Construção da superfície cilíndrica com o <i>Software Winplot</i> .....                                                    | 171 |
| 4.13 | Item 8 – Construção de um cilindro Hiperbólico.....                                                                        | 171 |
| 4.14 | Construção da superfície cilíndrica hiperbólica<br>com o <i>Software Winplot</i> .....                                     | 172 |
| 2    | Atividade 2 – Construção das Quádricas partindo de um espaço<br>bidimensional para um espaço tridimensional .....          | 173 |
| 2.1  | Definição .....                                                                                                            | 173 |
| 2.2  | Objetivos .....                                                                                                            | 174 |
| 2.3  | Conteúdos abordados.....                                                                                                   | 175 |
| 2.4  | Metodologia .....                                                                                                          | 175 |
| 3    | Atividade Guiada: Construção de um Cone Quádrico<br>partindo de um espaço bidimensional para um plano tridimensional ..... | 175 |
| 3.1  | Construindo segmentos oblíquos ao plano XY .....                                                                           | 176 |
| 3.2  | Construção das Circunferências .....                                                                                       | 181 |
| 3.3  | Preenchimento do Cone Quádrico.....                                                                                        | 184 |
| 4    | Construção de um Elipsoide pelos estudantes .....                                                                          | 184 |
| 5    | Verificação de aprendizagem.....                                                                                           | 185 |
|      | Apêndice .....                                                                                                             | 187 |

### **COMANDOS BÁSICOS DO WINPLOT**

- a)  $a + b$  = adição entre os valores a e b
- b)  $a - b$  = subtração entre os valores a e b
- c)  $a * b = ab$  = multiplicação entre os valores a e b
- d)  $a/b$  = divisão entre os valores a e b
- e)  $a^b = a$  elevado a b
- f)  $\text{sqr}(x) = \text{sqrt}(x)$  = raiz quadrada de x
- g)  $\log(x)$  = logaritmo de x na base 10
- h)  $\log(b,x) = \ln(x)/\ln(b)$  = logaritmo de x na base b
- i)  $\ln(x)$  = logaritmo natural de x
- j)  $\exp(x)$  = exponencial de x

### **FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**

- a)  $\sin(x)$  = seno de x
- b)  $\cos(x)$  = cosseno de x
- c)  $\tan(x)$  = tangente de x
- d)  $\csc(x)$  = cossecante de x
- e)  $\sec(x)$  = secante de x
- f)  $\cot(x)$  = cotangente de x

### **FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS**

- a)  $\arcsin(x)$  = arco seno de x
- b)  $\arccos(x)$  = arco cosseno de x
- c)  $\arctan(x)$  = arco tangente de x
- d)  $\text{arccot}(x)$  = arco cotangente de x

### **FUNÇÕES HIPERBÓLICAS**

- a)  $\sinh(x)$  = seno hiperbólico de x
- b)  $\cosh(x)$  = cosseno hiperbólico de x
- c)  $\tanh(x)$  = tangente hiperbólica de x
- d)  $\coth(x)$  = cotangente hiperbólica de x

## ATIVIDADE 1

### CONSTRUÇÃO DOS CILINDROS QUÁDRICOS NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL PARA O ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

#### 1º MOMENTO

**Apresentação dos objetivos, conteúdos abordados, da metodologia e definição dos cilindros.**

#### 1.1 OBJETIVOS

- Construir cilindros quádricos a partir de uma sequência didática utilizando a definição formal dos cilindros;
- Classificar os cilindros quádricos;
- Observar a transição de uma curva no plano  $xy$  para um plano  $xyz$ ;
- Utilizar o *software winplot*.

#### 1.2 CONTEÚDOS ABORDADOS

- Cilindros;
- Definição de um cilindro quádrico e não quádrico;
- Elementos dos cilindros;
- Classificação;
- Construção de um cilindro.

#### 1.3 METODOLOGIA

O primeiro passo para o desenvolvimento desta sequência didática será a apresentação e orientação sobre o *software winplot* 3D aos estudantes que irão participar das atividades propostas. Em seguida, será fornecido uma atividade de construção de um cilindro parabólico, com a sequência passo a passo dessa construção.

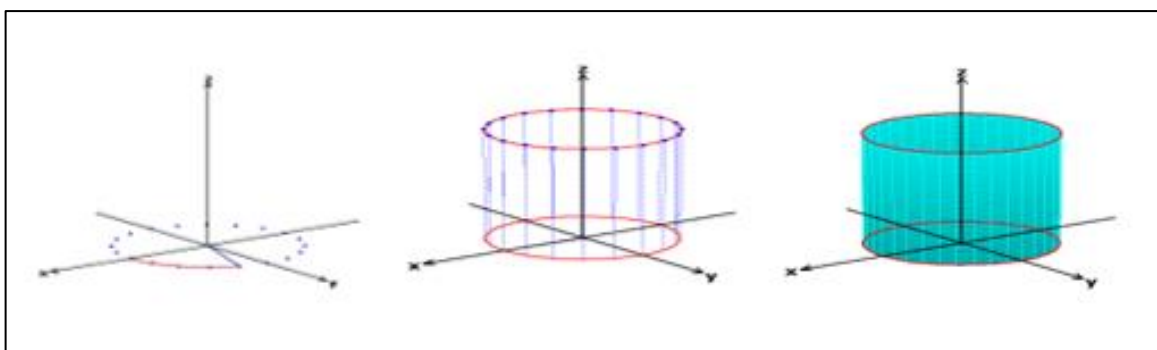
No momento seguinte, será fornecido aos estudantes uma lista de atividades para que os mesmos possam construir os cilindros quádricos propostos na atividade seguindo o exemplo anterior.

Durante o desenvolvimento das atividades, os estudantes deverão fazer anotações de suas observações, de sua compreensão e de seu entendimento das atividades propostas.

## 2 CILINDROS

### 2.1 DEFINIÇÃO

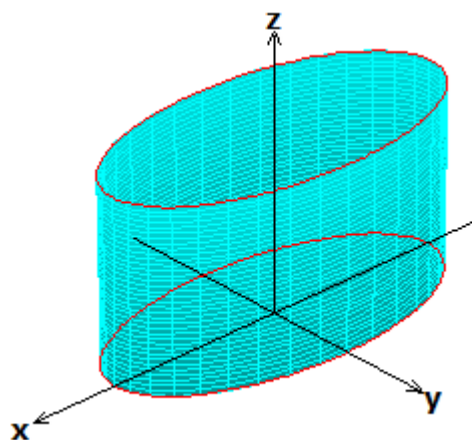
Um cilindro é uma figura tridimensional que é gerada a partir de uma reta móvel, paralela a uma reta fixa e em contato constante com uma curva plana, denominada **geratriz do cilindro** e a curva plana é denominada **diretriz do cilindro**. Qualquer posição de uma geratriz é chamada **determinante** do cilindro.



Se a reta diretriz for perpendicular ao plano que contém a curva, este será classificado como um **cilindro reto**, e se a diretriz for oblíqua ao plano o cilindro será **denominado oblíquo**. Neste trabalho, será abordado apenas os cilindros retos.

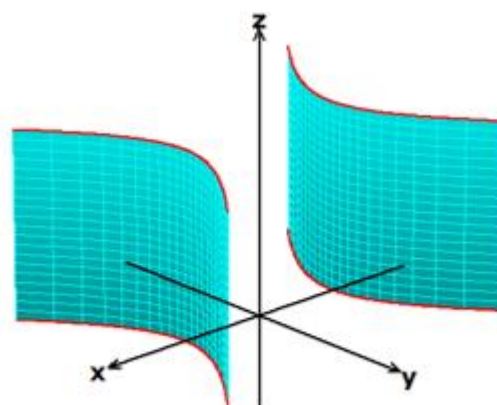
É comum associar a ideia de cilindro apenas aqueles que são gerados por círculos, que são chamados de cilindros circulares, mas de acordo com a definição acima qualquer curva plana pode gerar um cilindro. Quando o mesmo é gerado por uma curva **cônica** temos os cilindros quádricos enquanto que os que são gerados por outros tipos de curvas são classificados como os não quádricos. O nome do cilindro é dado de acordo com a curva que o gerou.

Por exemplo:



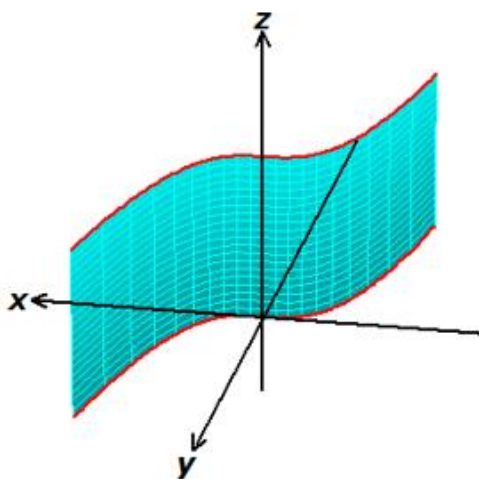
**CILINDRO QUÁDRICO ELÍPTICO:** gerado por uma elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



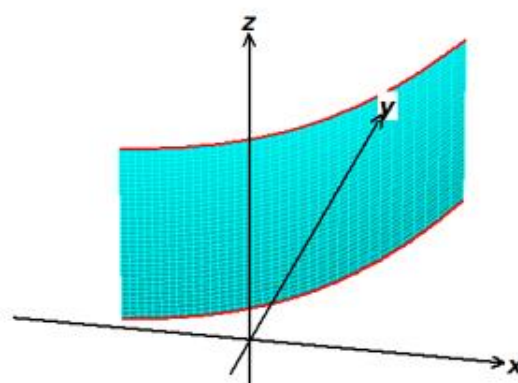
**CILINDRO QUÁDRICO HIPERBÓLICO:** gerado por uma hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



**CILINDRO NÃO QUÁDRICO:** gerado pela função

$$y = x^3$$



**CILINDRO NÃO QUÁDRICO:** gerado pela função

$$y = \exp(x)$$



Como o objetivo deste trabalho está voltado para as quádricas, os cilindros estudados aqui serão apenas os quádricos.

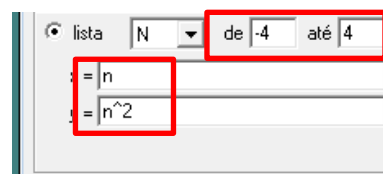
- Cilindro Parabólico;
- Cilindro Elíptico;
- Cilindro Hiperbólico.

A título de demonstração e orientação para uma construção empírica por parte dos estudantes participantes desta atividade, construiremos um cilindro parabólico com todo o passo a passo que servirá de modelo para a construção de outros cilindros.

## 2º MOMENTO

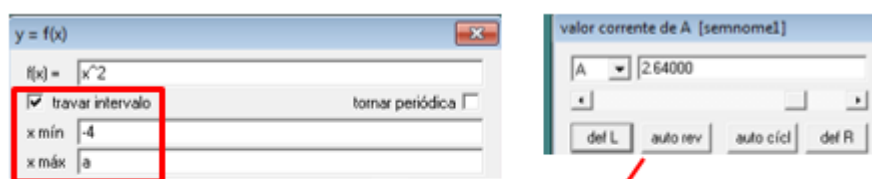
### 3 ATIVIDADE GUIADA – CONSTRUÇÃO DE UM CILINDRO PARABÓLICO

**Passo 1** – Criamos uma tabela dando valores arbitrários para  $x$ , encontrando assim, valores para  $y$ .



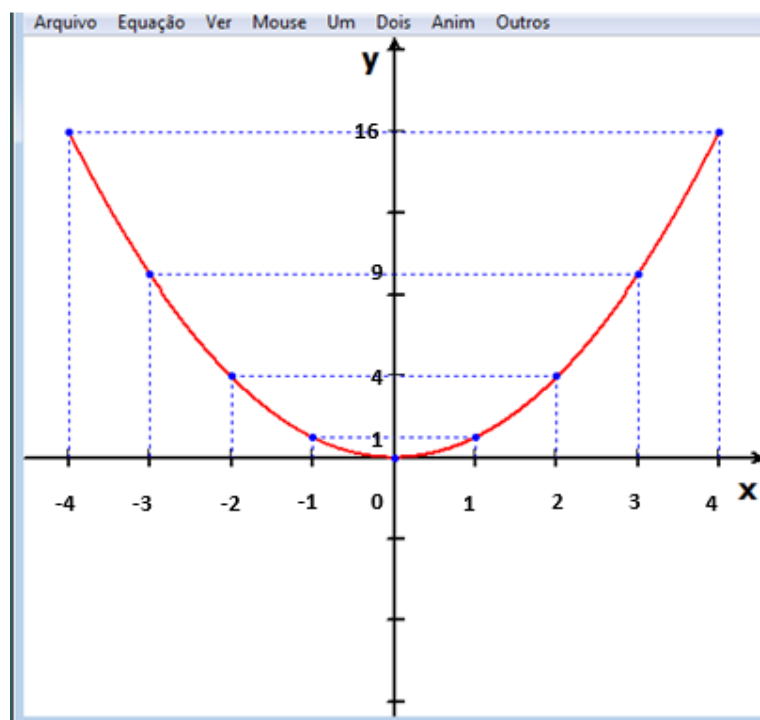
**Passo 2** – Inserir aba **equação** > **Ponto** > **lista** >

**Passo 3** - aba **equação** > **explícita** > **digitar** >  $x^2$



A curva se movimenta por sobre os pontos.

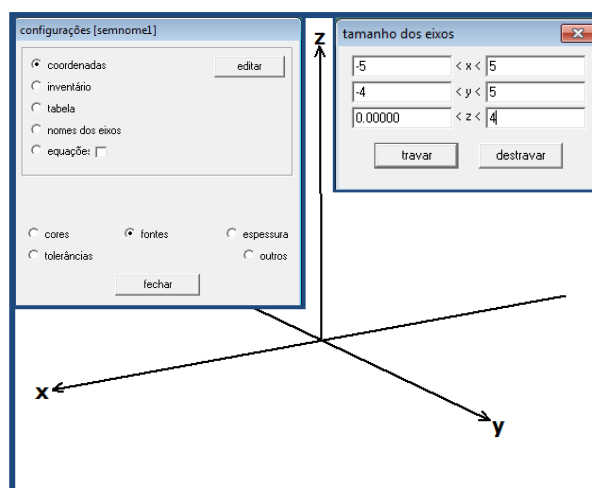
| $x$ | $y = f(x)$ | $(x, y)$   |
|-----|------------|------------|
| -4  | 16         | $(-4, 16)$ |
| -3  | 9          | $(-3, 9)$  |
| -2  | 4          | $(-2, 4)$  |
| -1  | 1          | $(-1, 1)$  |
| 0   | 0          | $(0, 0)$   |
|     |            |            |



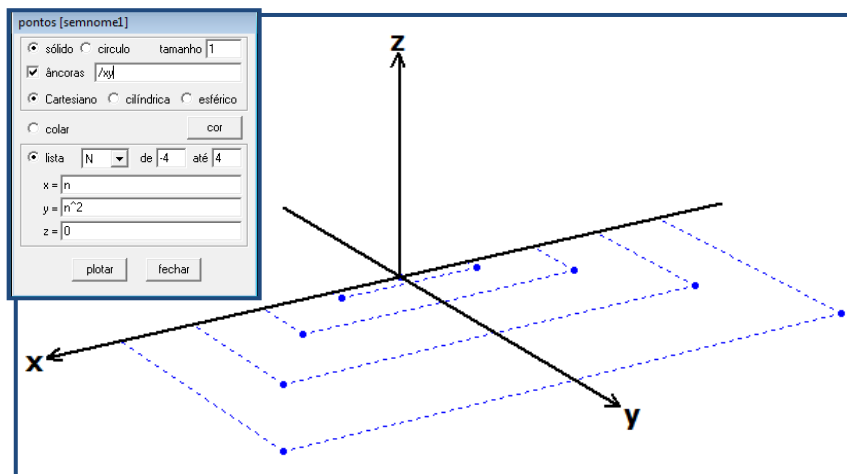
Faremos o mesmo procedimento no **ambiente tridimensional**. Assim, temos:

**Passo 1** – Configuração dos eixos. Aba outros > configurações > nome dos eixos – editar > negrito – tamanho 14 > ok – Ir para espessura > espessura na tela – eixo > 2 – ok.

**Passo 2** – Aba ver > eixos > definir tamanho >  $-5 < x < 5$  |  $-3 < y < 5$  |  $0 < z < 4$  | – Ok. Use a tecla “pg dn” ou “pg up” para centralizar as coordenadas na tela.

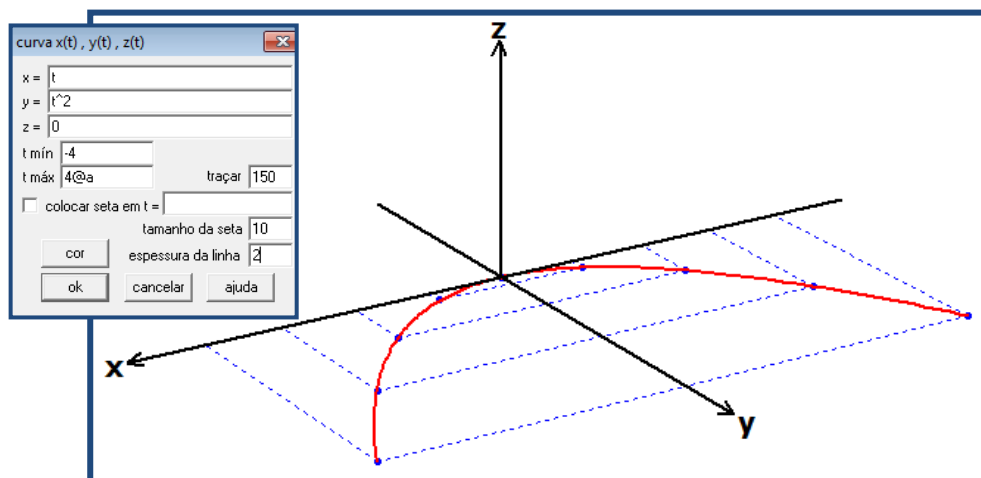


**Passo 3** – Aba Equação > ponto > lista > Podemos utilizar a letra que quisermos. O padrão no *Winplot* é a letra **N**. Clicamos em <lista N de -4 até 4 >  $x = n$  |  $y = n^2$  |  $z = 0$  > tamanho 1 > âncoras > /xy > Plotar.



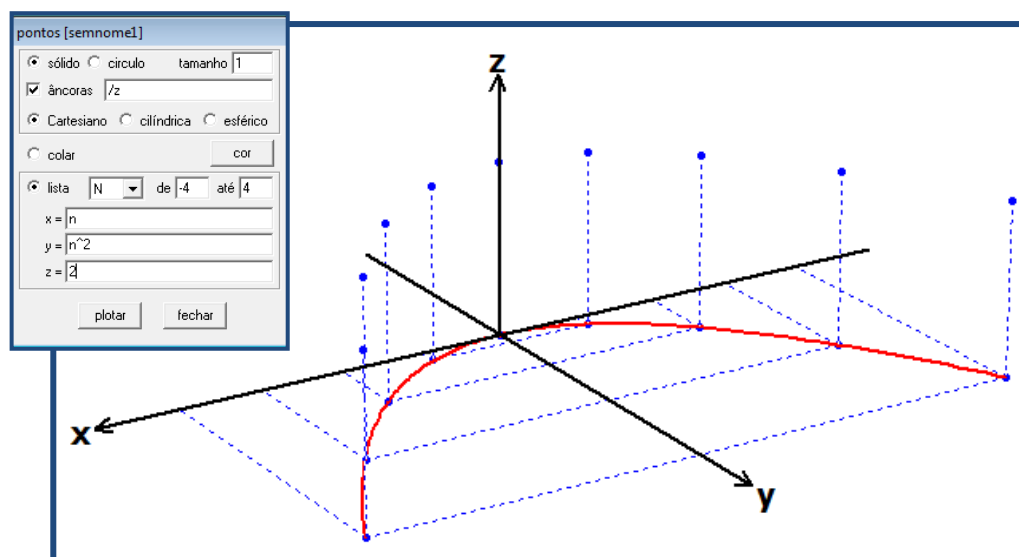
**Passo 4** – Equação > curva >  $x = t \mid y = t^2 \mid z = 0$  > t min = -4, t máx. =  $(4@a)^*$  > ok.

\* - O símbolo (@ + letra) provoca animação da curva dada.

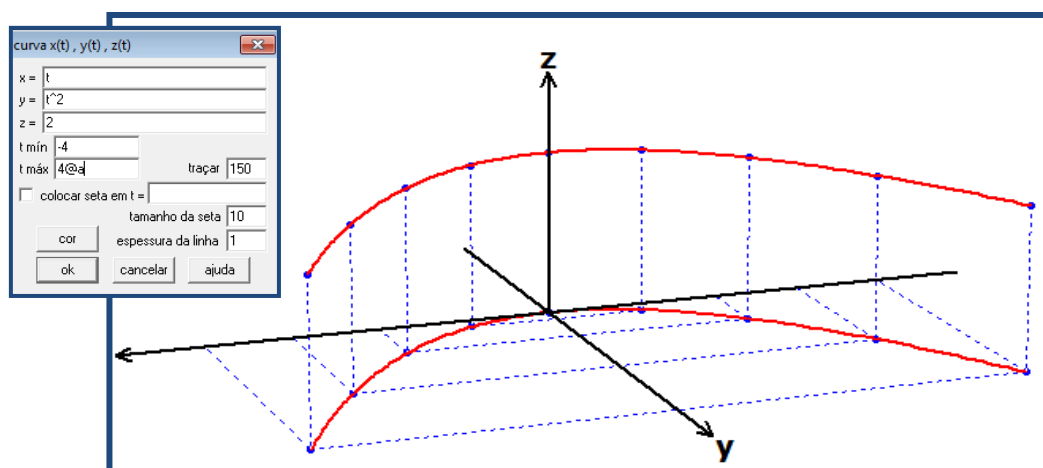


**Passo 5** – Vamos inserir os mesmos pontos dados, porém, com o eixo z de altura 2.

Assim temos: Aba Equação > ponto > lista > lista N de -4 até 4 >  $x = n \mid y = n^2 \mid z = 2$  > tamanho 1 > âncoras > /z > Plotar.



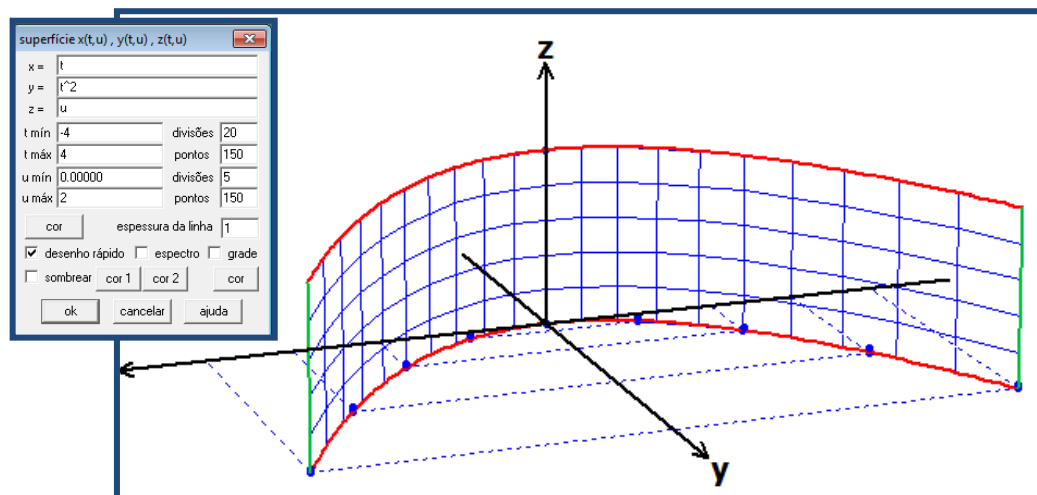
**Passo 6** - Equação > curva >  $x = t \mid y = t^2 \mid z = 2$  > t min = -4, t máx. = (4@a) > ok.



**Passo 7** – Traçamos dois segmentos: um fixo e o outro dinâmico, dando a impressão de varredura da superfície cilíndrica parabólica. Segue seu formato:

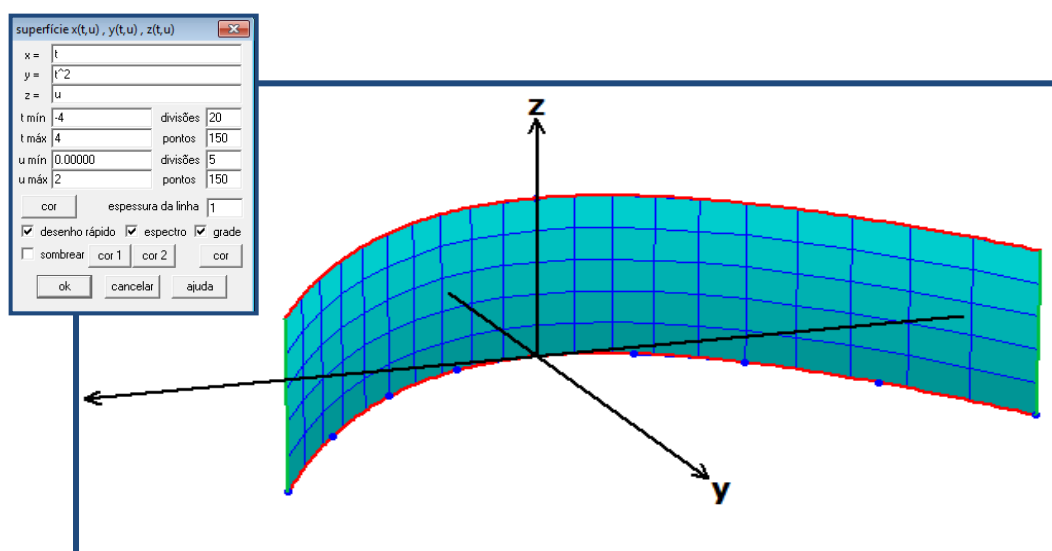
Equação > seg. >  $(a = -4, b = 16, c = 0) - (c = -4, d = 16, e = 2)$  (ponto fixo).

Equação > seg. >  $(a = n, b = n^2, c = 0) - (c = n, d = n^2, e = 2)$  (ponto dinâmico)



**Passo 8** – Para finalizar, plotamos a superfície, usando a equação paramétrica.

Equação > Paramétrica >  $x = t \mid y = t^2 \mid \mathbf{z} = \mathbf{u}$  >  $-4 \leq t \leq 4$ ,  $0 \leq u \leq 2$

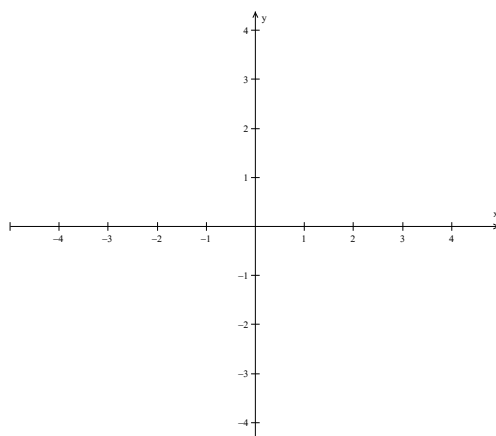


### 3º MOMENTO

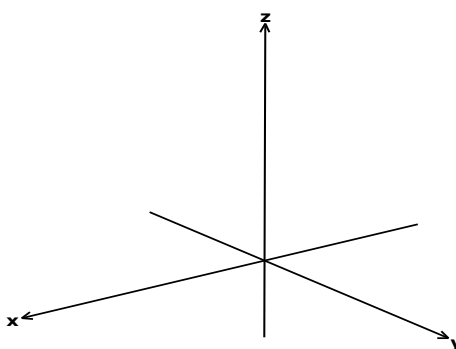
#### 4 CONSTRUÇÃO DAS CURVAS DE ACORDO COM AS EQUAÇÕES COM LÁPIS E PAPEL

##### 4.1 ITEM 1 – CONSTRUINDO CILINDROS PARABÓLICOS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL UTILIZANDO LÁPIS E PAPEL

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano bidimensional xy a curva  $y = -x^2$ .



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva geratriz do plano, esboçando as retas paralelas ao eixo.

**R:** \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Faça o esboço do cilindro.

## 4º MOMENTO

### 4.2 CONSTRUÇÃO DA SUPERFÍCIE CILINDRICA COM SOFTWARE WINPLOT 3D

Utilizando o *Winplot*, plote o cilindro construído anteriormente.

**Passo 1)** Equação → Ponto → Lista

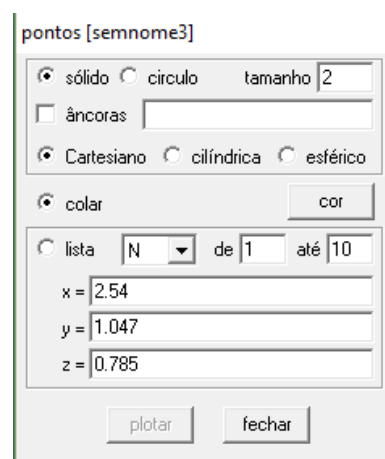
Marque a opção âncoras – digite na aba: /xy

Marque a opção Lista – N → -4 até 4

$$X = n$$

$$Y = (-n^2)$$

$$Z = 0$$



Observe o gráfico traçado no plano xy.

**Passo 2)** Equação → Ponto → Lista

Marque a opção âncoras – digite na aba: /z

Marque a opção Lista – N → -4 até 4

$$X = n$$

$$Y = (-n^2)$$

$$Z = 1 \text{ (por exemplo)}$$

Após os passos listados acima, construir a curva que passa pelos pontos plotados.

**Passo 3) Equação → Curva**

$$X = t$$

$$Y = -t^2$$

$$Z = 0$$

(se quiser altere a curva para a cor que desejar)

Ok

Alterando o parâmetro z

**Passo 4) Equação → Curva**

$$X = t$$

$$Y = -t^2$$

$$Z = 1$$

Ok

**Fechando o cilindro:****Passo 1) Equação → Paramétrica (abrirá a janela ao lado)**

$$X = t$$

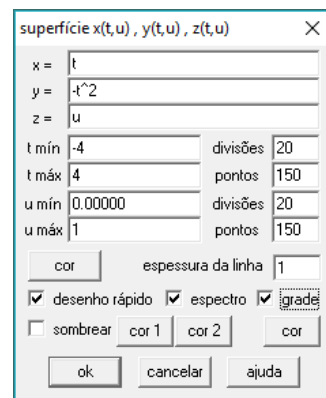
$$Y = -t^2$$

$$Z = u$$

T mín.: - 4 → T máx.: 4 → Divisões: 20

U mín.: 0 → U máx.: 1 → Divisões: 20

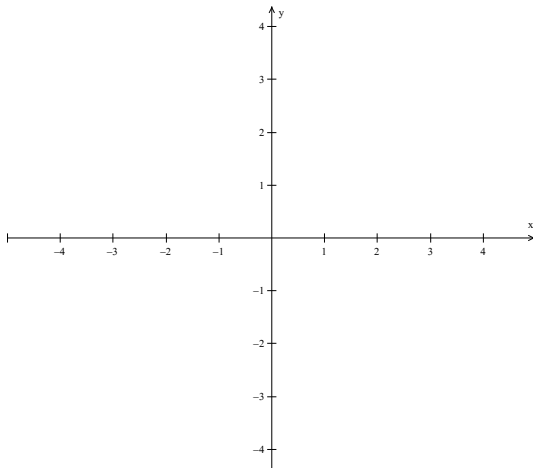
Colocar a cor que desejar → espectro → grade → ok



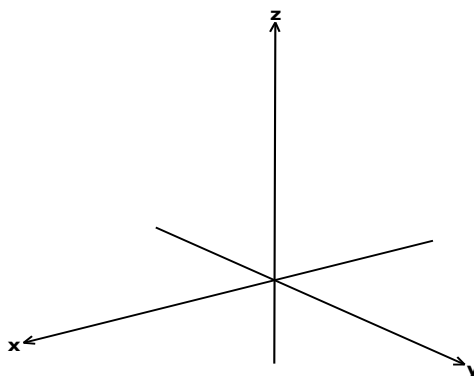


### 4.3 ITEM 2 – GRÁFICO DA CURVA $Y = X^2 + 1$

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano bidimensional xy a curva  $y = x^2 + 1$ .



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos.



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

#### 4.4 CONSTRUÇÃO DA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA COM SOFTWARE WINPLOT

**Passo 1)** Equação → Ponto → Lista

Marque a opção âncoras – digite na aba: /xy

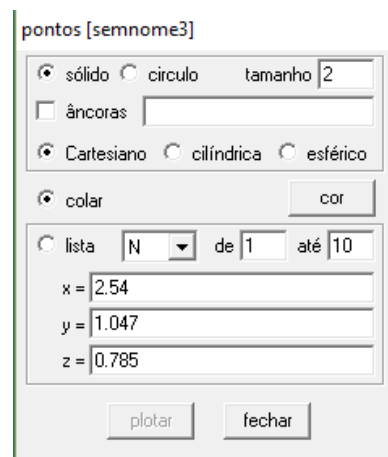
Marque a opção Lista – N → -4 até 4

$$X = n$$

$$Y = n^2 + 1$$

$$Z = 0$$

Observe o gráfico traçado no plano xy.



**Passo 2)** Equação → Ponto → Lista

Marque a opção âncoras – digite na aba: /z

Marque a opção Lista – N → -4 até 4

$$X = n$$

$$Y = n^2 + 1$$

$$Z = 1 \text{ (por exemplo)}$$

Após os passos listados acima, construir a curva que passa pelos pontos plotados.

Equação → Curva

$$X = t$$

$$Y = t^2 + 1$$

$$Z = 0 \text{ (se quiser altere a curva para a cor que desejar)}$$

Ok

**Alterando o parâmetro z**

Equação → Curva

$$X = t$$

$$Y = t^2 + 1$$

$$Z = 1$$

Ok

**Fechando o cilindro:**

Equação → Paramétrica (abrirá a janela ao lado)

$$X = t$$

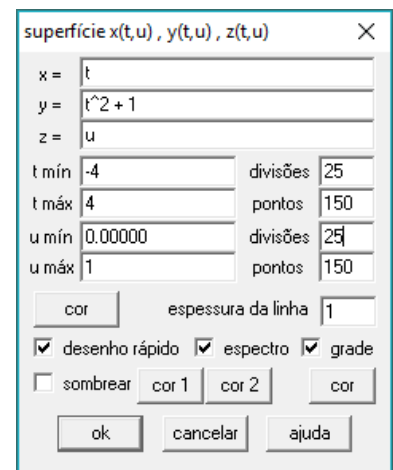
$$Y = t^2 + 1$$

$$Z = u$$

T mín.: - 4 → T máx.: 4 → Divisões: 25

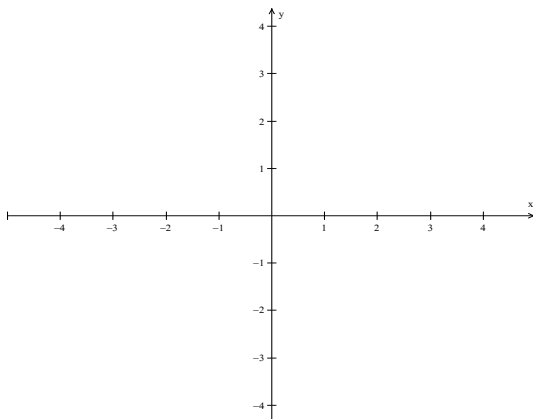
U mín.: 0 → U máx.: 1 → Divisões: 25

Colocar a cor que desejar → espectro → grade → ok

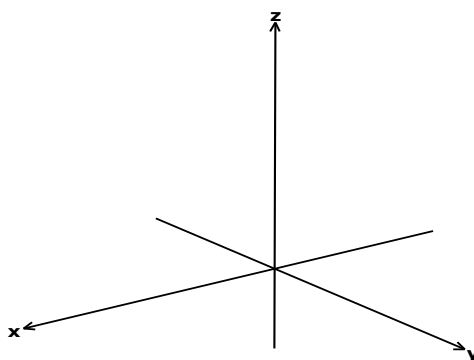


### 4.5 ITEM 3 - GRÁFICO DA CURVA $Z = X^2$

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva  $z = x^2$



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

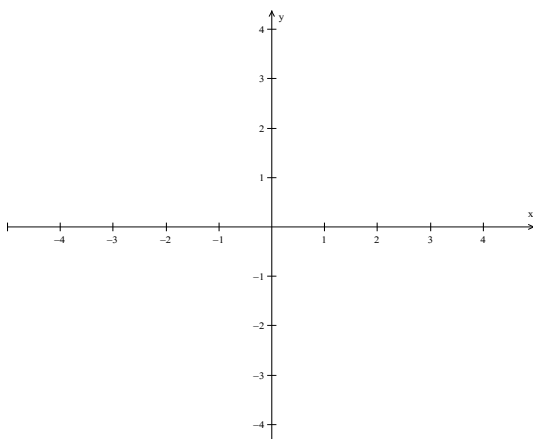
**Passo 4)** Esboce o cilindro.

**Passo 5)** Utilizando *software Winplot 3D*, plote o cilindro construído anteriormente, utilizando a metodologia de passos, como nos exercícios anteriores.

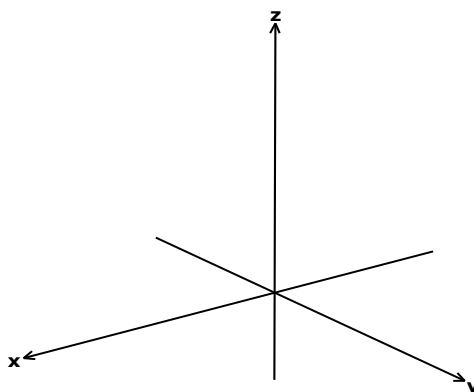
#### 4.6 ITEM 4 – CONSTRUINDO CILINDROS CIRCULARES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

O cilindro circular é o mais comumente utilizado e identificado. Suas aplicações e utilizações são muito diversificadas, uma vez que encontramos essa superfície facilmente em nosso cotidiano.

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva  $x^2 + y^2 = 1$ .



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

#### 4.7 CONSTRUÇÃO DA SUPERFÍCIE CILINDRICA CIRCULAR COM SOFTWARE WINPLOT 3D

**Passo 1)** Equação → Paramétrica

superfície  $x(t,u)$ ,  $y(t,u)$ ,  $z(t,u)$

x =  $\sin(u)\cos(t)$

y =  $\sin(u)\sin(t)$

z =  $\cos(u)$

t mín 0.00000 t máx 6.28319 divisões 36 pontos 150

u mín 0.00000 u máx 3.14159 divisões 36 pontos 150

cor \_\_\_\_\_ espessura da linha 1

☒ desenho rápido ☐ espectro ☐ grade

☐ sombrear cor 1 cor 2 cor

ok cancelar ajuda

**Passo 2)** Digitar os seguintes dados:

$$X = \sin(t)$$

$$y = \cos(t)$$

$$Z = u$$

superfície  $x(t,u)$ ,  $y(t,u)$ ,  $z(t,u)$

x =  $\sin(t)$

y =  $\cos(t)$

z =  $u$

Os demais dados da caixa da superfície podem permanecer inalterados.

**Passo 3)** Definindo o raio do cilindro

T mín.: -4 → T máx.: 4.

|       |          |
|-------|----------|
| t mín | -4.00000 |
| t máx | 4.00000  |

**Passo 4)** Definindo a altura do cilindro

O parâmetro u representa a altura do cilindro. Vamos definir sua altura a partir de zero e limitar a 2, por exemplo.

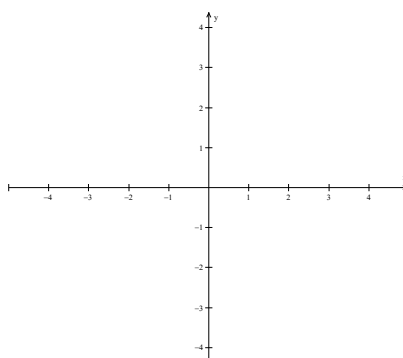
|       |         |
|-------|---------|
| u mín | 0.00000 |
| u máx | 2.00000 |

**Passo 5** – Clicar em ok.

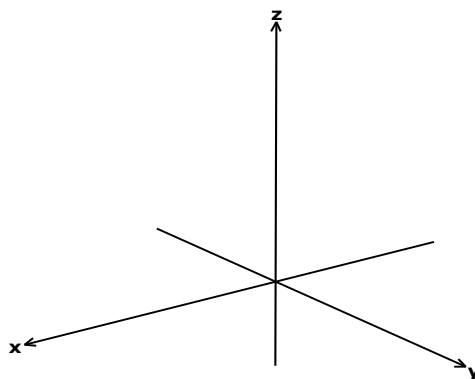
#### 4.8 ITEM 5 – CONSTRUÇÃO DE UM CILINDRO CIRCULAR FORA DA ORIGEM DO PLANO XY

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano bidimensional xy a curva:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

**R:** \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

**Passo 5)** Utilizando o *software Winplot 3D*, construa o cilindro esboçado anteriormente.

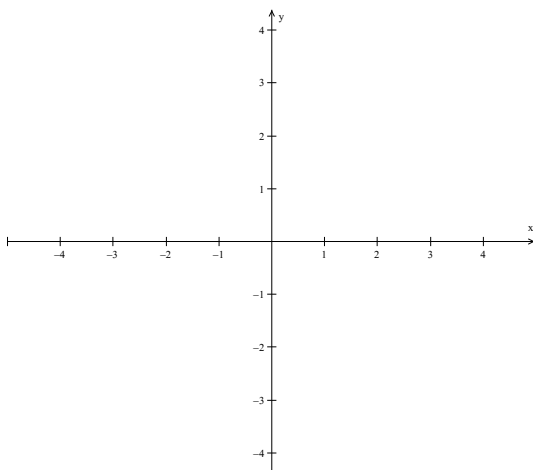
#### 4.9 ITEM 6 – CONSTRUINDO CILINDROS ELÍPTICOS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

O cilindro elíptico é formado por curvas elípticas no plano.

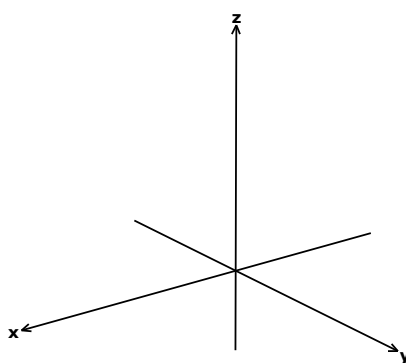
**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$





**Passo 2)** No plano  $XYZ$  ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

**R:** \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

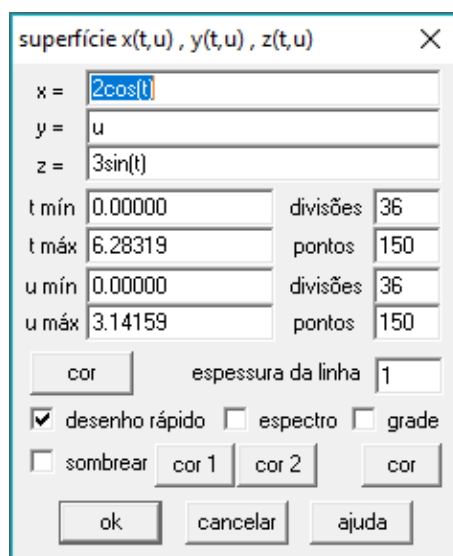
#### 4.10 CONSTRUÇÃO DA SUPERFÍCIE CILINDRICA COM SOFTWARE WINPLOT 3D

**Passo 1)** Equação → Paramétrica

$$X = 2\cos(t)$$

$$Y = u$$

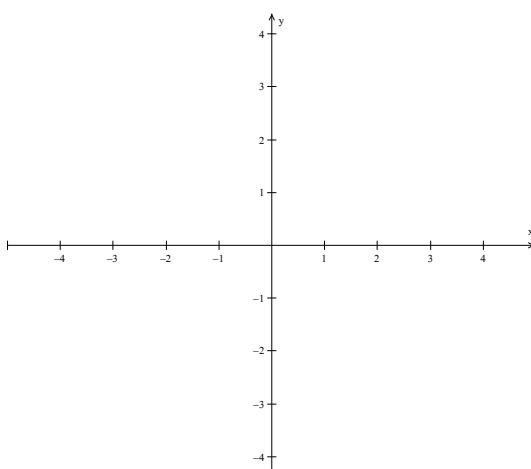
$$Z = 3\sin(t)$$



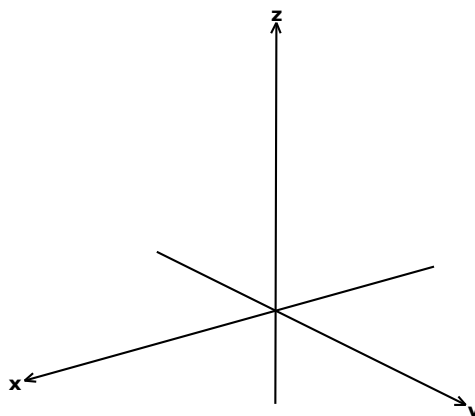
#### 4.11 ITEM 7 – CONSTRUÇÃO DE UM CILINDRO ELÍPTICO COM O CENTRO FORA DO ORIGEM DO PLANO XY

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(z - 3)^2}{9} = 1$$



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

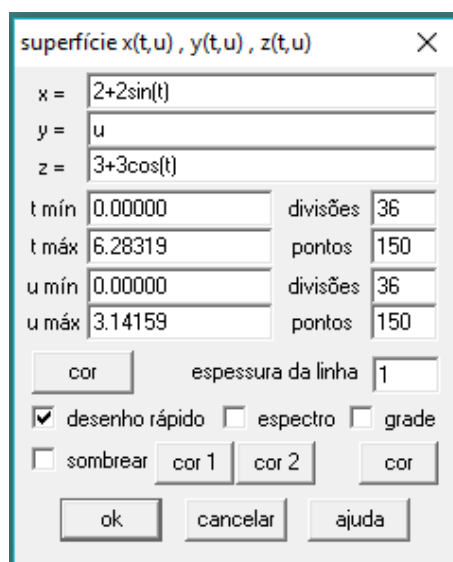
#### 4.12 CONSTRUÇÃO DA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA ELÍPTICA COM SOFTWARE WINPLOT 3D

**Passo 1)** Equação → Paramétrica

$$X = 2 + 2\cos(t)$$

$$Y = u$$

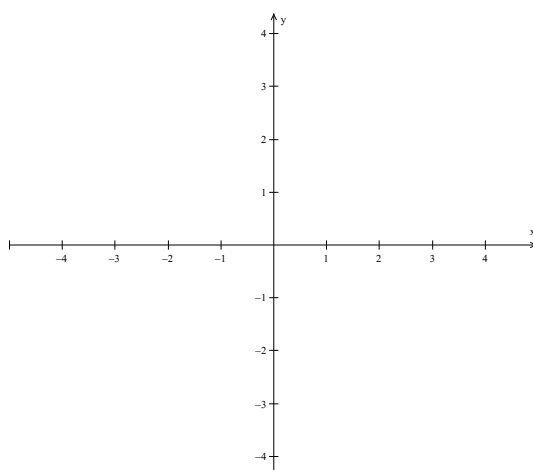
$$Z = 3 + 3\sin(t)$$



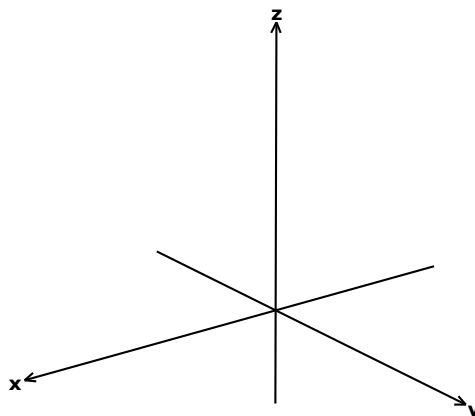
#### 4.13 ITEM 8 – CONSTRUÇÃO DE UM CILINDRO HPERBÓLICO

**Passo 1)** Esboce manualmente a lápis, no plano tridimensional xz a curva

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$



**Passo 2)** No plano XYZ ( $R^3$ ), esboce manualmente a curva anterior do plano no sistema de eixos  $R^3$ .



**Passo 3)** Identifique o eixo geratriz a partir da curva diretriz do plano esboçando as retas paralelas ao eixo.

R: \_\_\_\_\_

**Passo 4)** Esboce o cilindro.

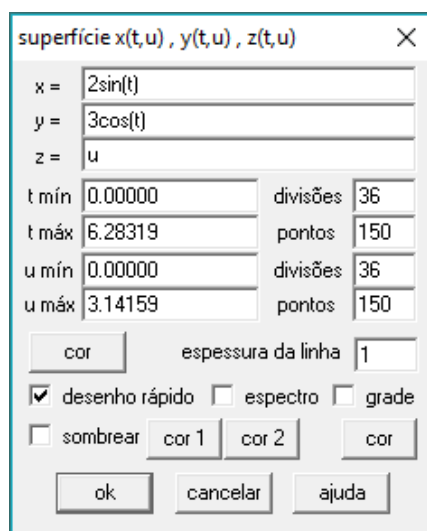
#### 4.14 CONSTRUÇÃO DA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA HIPERBÓLICA COM SOFTWARE WINPLOT 3D

**Passo1)** Equação → Paramétrica

$$X = 2\sin(t)$$

$$Y = 3\cos(t)$$

$$Z = u$$



## ATIVIDADE 2

### CONSTRUÇÃO DAS QUÁDRICAS PARTINDO DE UM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL PARA UM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

#### 1º MOMENTO

**Apresentação da definição de uma superfície Quádrica, dos objetivos e dos conteúdos abordados e da metodologia.**

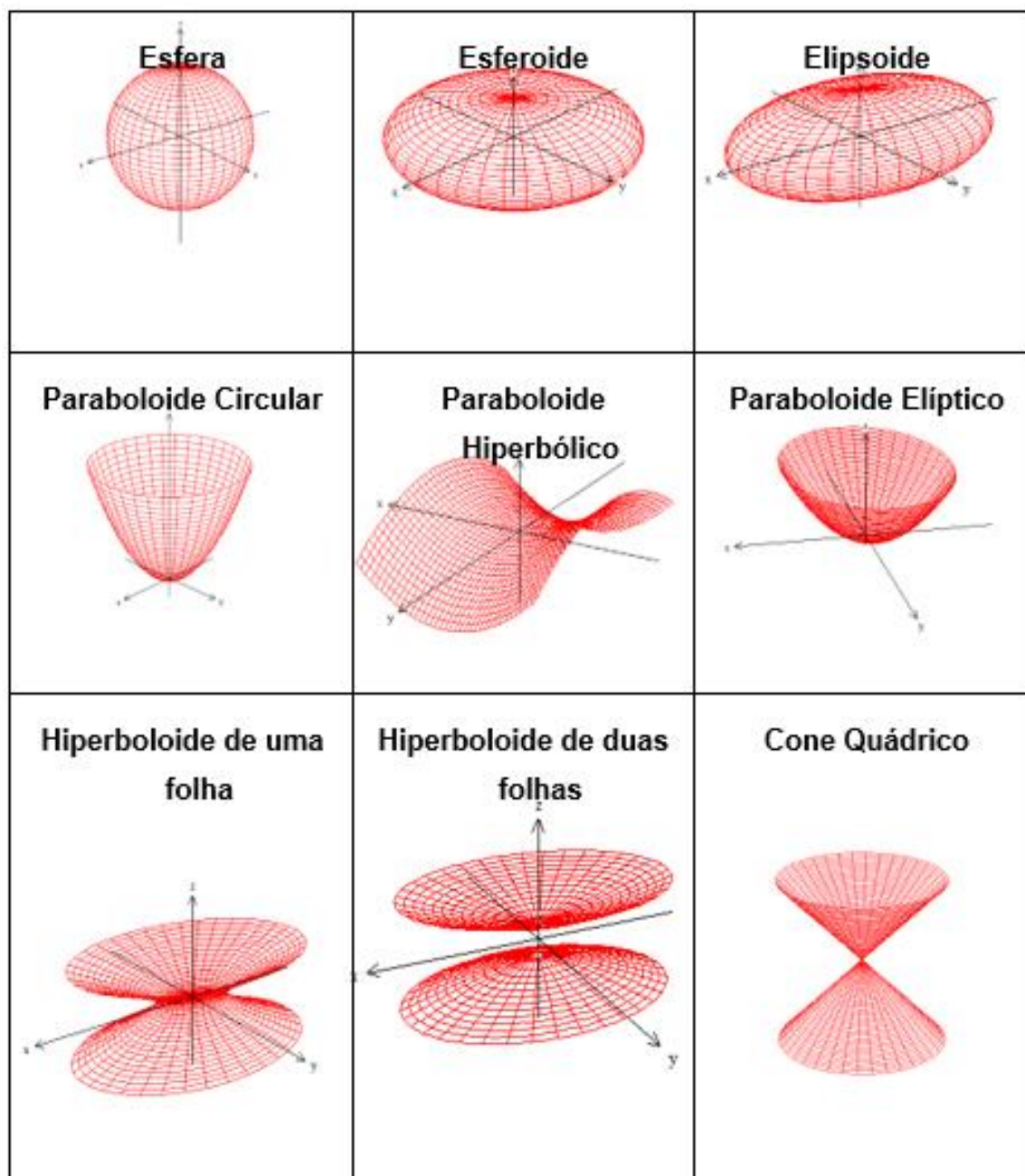
#### 2.1 DEFINIÇÃO

Uma superfície quádricas é o gráfico de uma equação quadrática nas três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . De uma forma mais geral a equação é dada por:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde  $A, B, C, \dots, J$  são constantes. O produto das variáveis XYZ correspondem as quádricas rotacionadas. A equação pode ser simplificada translação e rotação como no caso bidimensional. Neste trabalho, os eixos serão sempre retangulares e será abordado as superfícies quádricas mais básicas que são:

- A Esfera, o Esferoide e o Elipsoide;
- O Paraboloides Elíptico e o Paraboloides Hiperbólico;
- O Cone quádrico;
- O Hiperboloides de uma folha e o Hiperboloides de duas folhas.



## 2.2 OBJETIVOS

- Facilitar a compreensão da transição das cônicas para as quádricas;
- Observar a geração de uma quádrica no plano tridimensional;
- Analisar a construção de uma quádrica a partir de uma cônica;
- Identificar os tipos de quádricas e suas classificações;
- Construir gráficos das superfícies quádricas manualmente;
- Construir gráficos das quádricas utilizando o *software winplot*.

## 2.3 CONTEÚDOS ABORDADOS

- Cônicas;
- Tipos de quádricas;
- Gráficos bidimensionais;
- Gráficos tridimensionais;
- Identificação das equações de superfície.

## 2.4 METODOLOGIA

A construção das superfícies Quádricas, será desenvolvida seguindo a metodologia de passos. Inicialmente, construiremos as curvas que compõem a superfície, para em seguida, fazer o preenchimento de toda a superfície. De maneira intencional, toda a construção será realizada diretamente no *software*, objetivando verificar a visualização dos estudantes na transição entre os espaços bidimensionais e tridimensionais.

### 2º MOMENTO

## 3 ATIVIDADE GUIADA: CONSTRUÇÃO DE UM CONE QUÁDRICO PARTINDO DE UM ESPAÇO BIDIMENSIONAL PARA UM PLANO TRIDIMENSIONAL

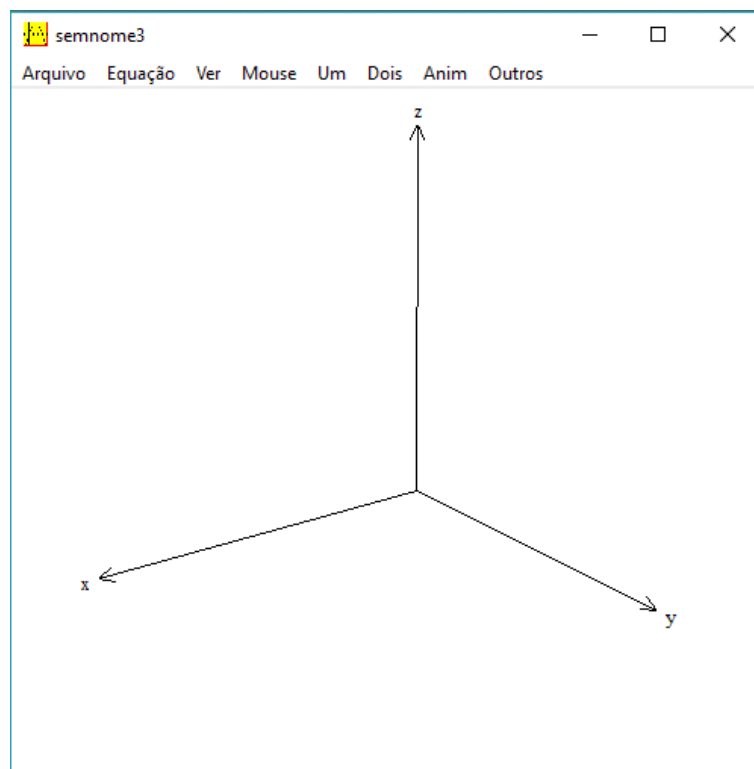
Um cone quádrico é uma superfície gerada por uma reta que gira em torno de um dos eixos coordenados, passando por um mesmo ponto, denominado de vértice da superfície cônica. Suas equações são representadas da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0; -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

A proposta desta atividade é a construção de um cone de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  partindo de um espaço bidimensional para um espaço tridimensional com a utilização do *winplot*, seguindo os passos sugeridos a seguir:



**Passo 1)** Janela → 3 – dim.



### 3.1 CONSTRUINDO SEGMENTOS OBLÍQUOS AO PLANO XY

Para a construção de um cone de revolução serão necessários segmentos oblíquos na origem do plano tridimensional ( $R^3$ ). Tais segmentos tem como equação paramétrica:  $x = u.\cos(t)$  ;  $y = u.\sin(t)$  e  $z = u$ .

**Passo 2)** Equação → Paramétrica

Vamos construir esses segmentos utilizando valores que serão substituídos na variável **t** sendo a variável **u** como uma constante na equação. Por exemplo, vamos manter a variável **u** constante e substituir **t** (em todos os campos em que aparecer) por 3.1416;

superfície  $x(t,u)$ ,  $y(t,u)$ ,  $z(t,u)$  ✕

$x =$

$y =$

$z =$

t mín  divisões

t máx  pontos

u mín  divisões

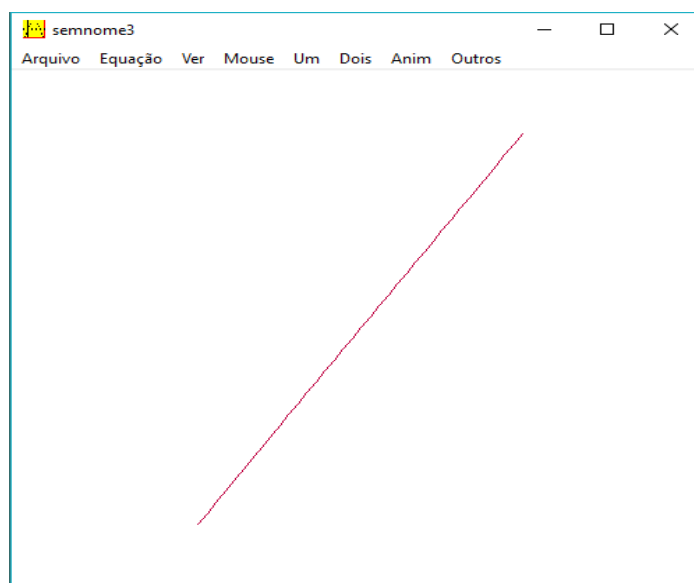
u máx  pontos

espessura da linha

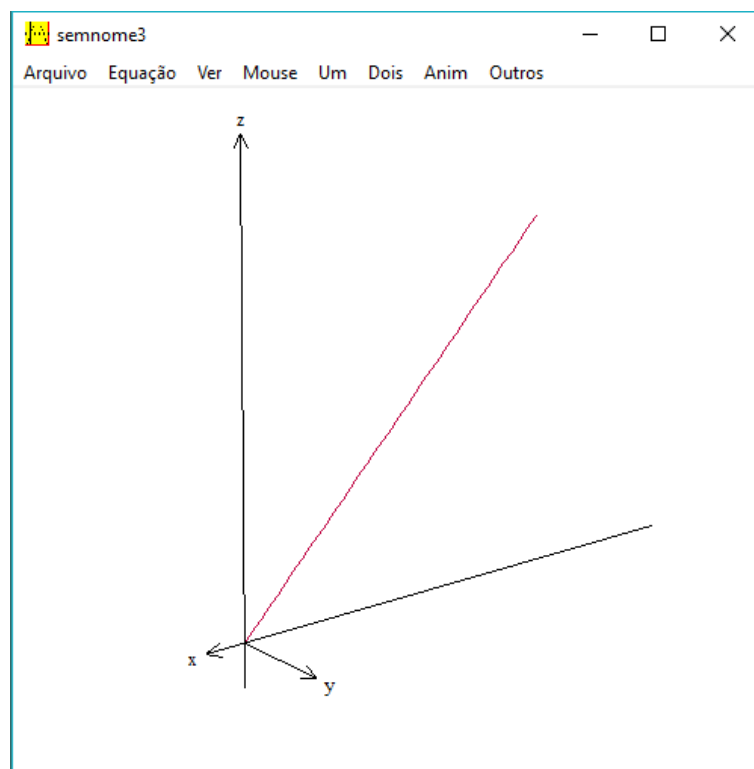
☒ desenho rápido ☐ espectro ☐ grade

☐ sombrear

Em seguida, clique em ok.

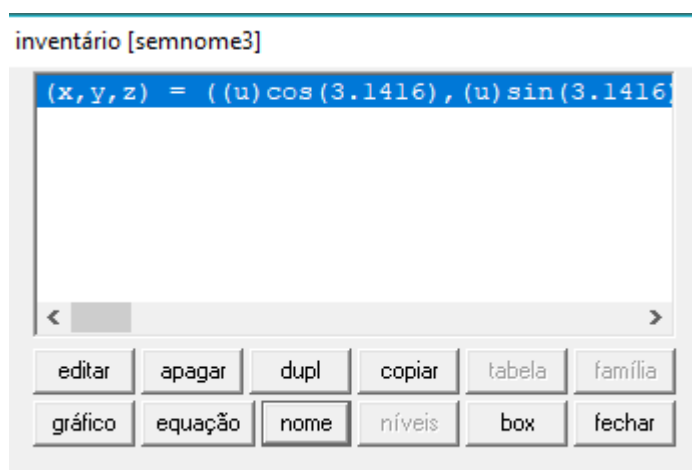


Observe que o segmento aparece na “tela do programa”, porém os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  não aparecem. Para tanto, basta dar ao programa o comando CTRL + E. Os eixos apareceram na tela.



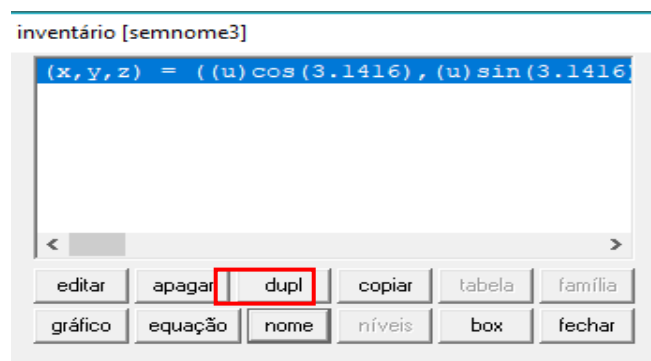
Será necessário construir outro segmento simétrico ao primeiro, também partindo da origem do plano  $R^3$ . Para isso, basta alterar o valor da variável  $t$  novamente.

### **Passo 3)** Equação → Inventário

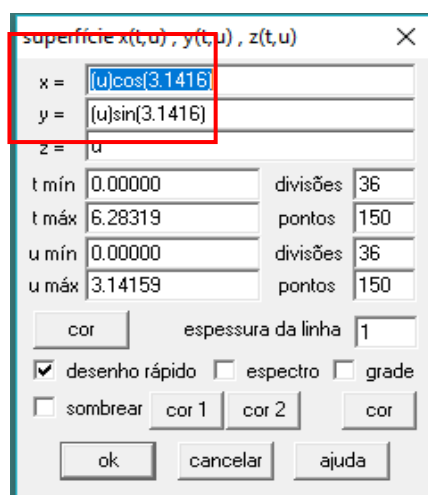


Nesta caixa ficarão registradas todas as equações que construímos. Para construir um novo segmento, vamos duplicar a primeira equação e alterar o valor da variável  $t$ .

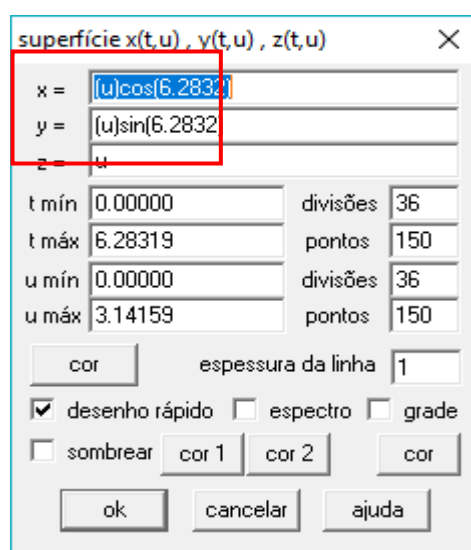
### **Passo 4)** Clique em “dupl”



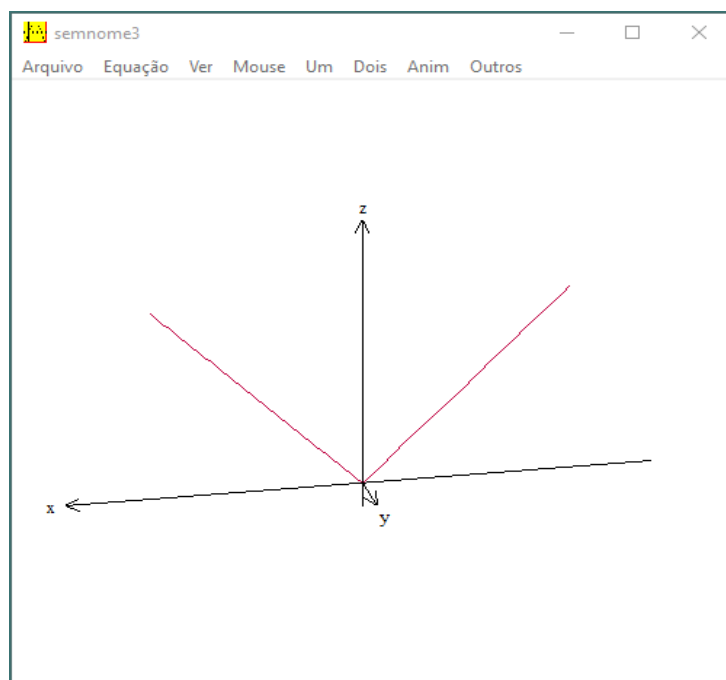
Ao clicar em “dupl”, uma nova janela de equação é aberta, porém, com os mesmos dados anteriores.



Faça a alteração na variável t por 6.2832;



Clique em ok.

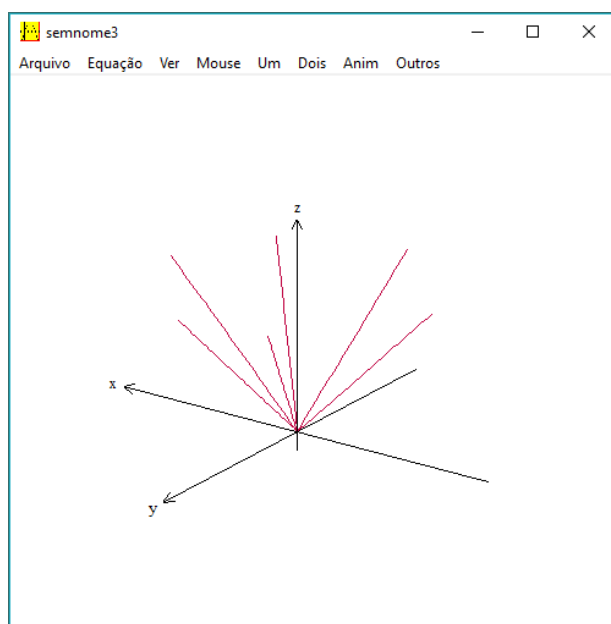


Temos agora um segmento simétrico ao primeiro.

**Passo 5)** Construir outros segmentos substituindo a variável  $t$  de acordo com a tabela abaixo.

| Valor a ser substituído na variável $t$ |        |        |        |        |
|-----------------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| $t$                                     | 1.3823 | 4.5239 | 2.0106 | 5.4663 |

Após a substituição de  $t$  pelos valores sugeridos teremos a construção que se segue:

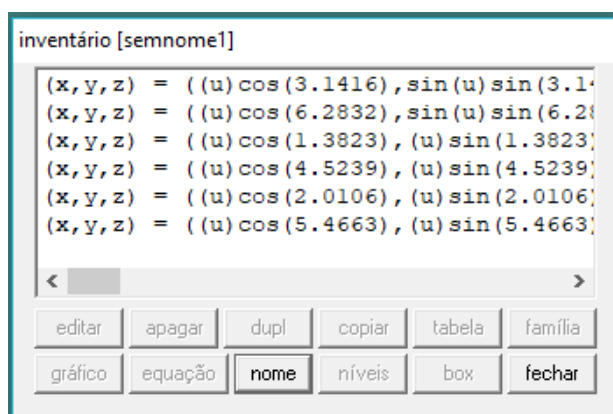


### 3.2 CONSTRUÇÃO DAS CIRCUNFERÊNCIAS

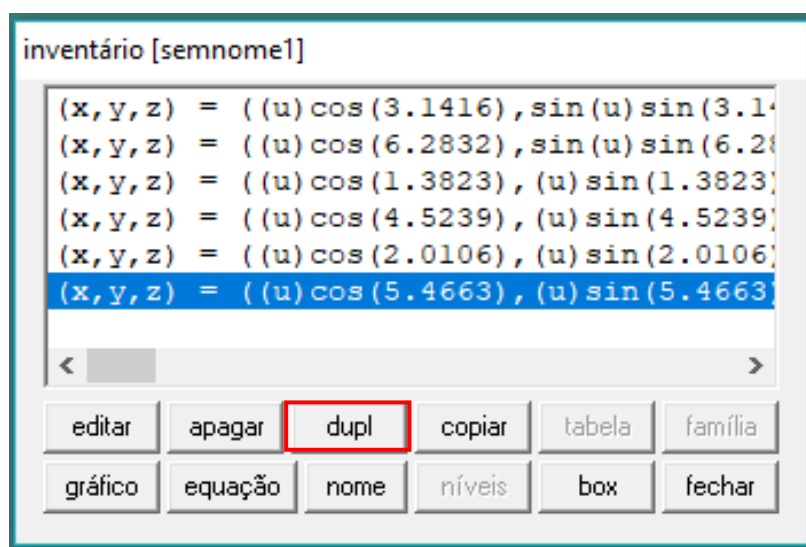
Para completar o cone, será necessário a construção de algumas circunferências que tocam nos segmentos oblíquos construídos para o cone.

Utilizaremos a mesma equação paramétrica dos segmentos, porém, agora iremos dar valores para a variável  $u$  e manter a variável  $t$  como constante. Para isso, serão adotados os seguintes procedimentos:

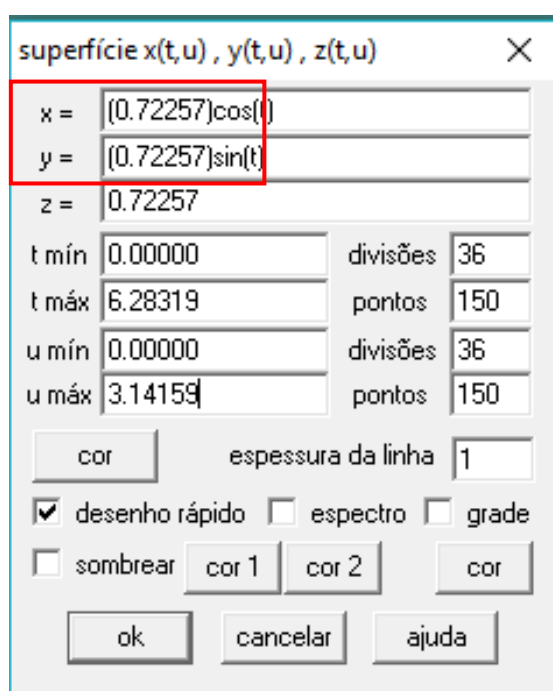
- 1) Menu Equação → opção inventário.



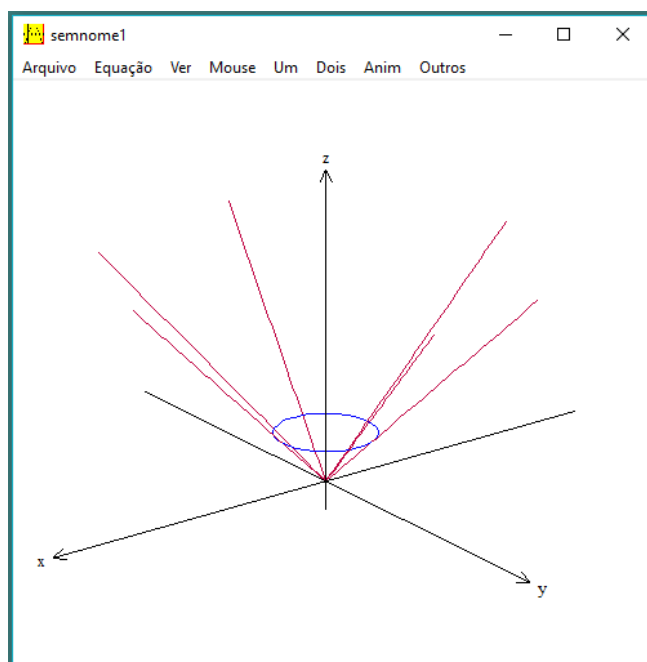
2) Selecione a última equação do inventário e em seguida clique em “dupl”.



3) Na janela de equação, substitua a variável u por 0.72257 e mantenha t constante.



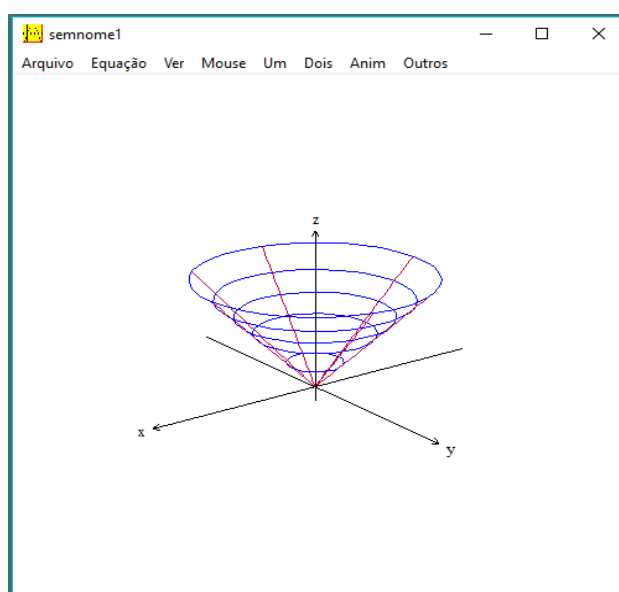
4) Clique em ok.



Observe que a circunferência foi construída com o seu raio coincidindo com os segmentos.

Vamos agora, utilizar os valores sugeridos na tabela abaixo para a construção de outras circunferências de raios diferentes.

| Valor a ser substituído na variável $u$ |                |                |                |                |
|-----------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b><math>u</math></b>                   | <b>1.57080</b> | <b>2.04203</b> | <b>2.54469</b> | <b>3.14169</b> |

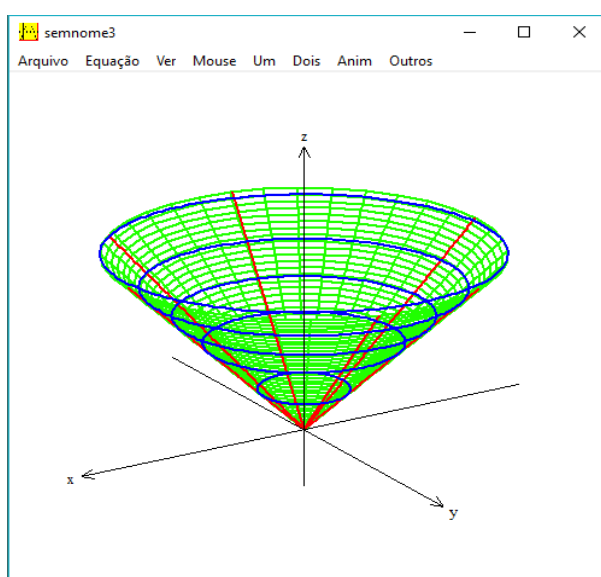




### 3.3 PREENCHIMENTO DO CONE QUÁDRICO

Para preencher todo o espaço do cone, utilizaremos a equação paramétrica do cone.

1. Menu Equação → Paramétrica
2. Digitar os comandos:  $X = (u)\cos(t)$  ;  $Y = (u)\sin(t)$  ;  $Z = u$ . Observe que agora, tanto a variável **u** quanto a variável **t** são constantes.
3. Clique em ok.



### 3º MOMENTO

## 4 CONSTRUÇÃO DE UM ELIPSOIDE PELOS ESTUDANTES

**Passo 1)** Abra uma nova janela 3 – dim.

A figura a ser construída tem como equação Paramétrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = a.\cos(t)\sin(u) \\ Y = b.\sin(t)\sin(u) \\ Z = c.\cos(u) \end{array} \right.$$

**Passo 2)** Na equação acima, altere o valor da variável **t** de acordo com a tabela abaixo e mantenha a variável **u** constante. (Dica: utilize o comando **dupl**).

| Valor a ser substituído na variável t |         |         |         |         |         |         |        |         |
|---------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| <b>t</b>                              | 2.95310 | 6.09469 | 2.26195 | 5.40354 | 0.87965 | 4.02124 | 1.7592 | 4.90089 |

**Passo 3)** Na mesma figura que você está construindo, mantenha a variável **t** constante e substitua a variável **u** pelos valores apresentados na tabela seguinte:

| Valor a ser substituído na variável u |         |         |         |         |         |
|---------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <b>u</b>                              | 1.09956 | 1.50796 | 1.85354 | 2.13628 | 2.35619 |

**Passo 4)** Vamos agora preencher toda a figura construída. Para isso, siga as instruções abaixo:

- Equação → Paramétrica
- Digitar os comandos abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 2\cos(t)\sin(u) \\ Y = 3.\sin(t)\sin(u) \\ \dots \end{array} \right.$$

## 5 VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

**Construa uma figura no plano  $R^3$ , utilizando o programa *winplot*, de acordo com as instruções abaixo:**

5.1 Abra uma nova janela 3 – dim.

A figura a ser construída tem como equação Paramétrica os seguintes dados:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = a.u.\cos(t) \\ Y = a.u.\sin(t) \\ Z = u^2 \end{array} \right.$$

5.2 Na equação acima, altere o valor da variável **t** de acordo com a tabela abaixo e mantenha a variável **u** constante. (Dica: utilize o comando **dupl.**).

| Valor a ser substituído na variável t |                |                |                |                |                |                |                |                |
|---------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>T</b>                              | <b>0.69115</b> | <b>4.02124</b> | <b>1.75929</b> | <b>4.90089</b> | <b>3.14160</b> | <b>6.28316</b> | <b>1.25664</b> | <b>4.52390</b> |

5.3 Na mesma figura que você está construindo, mantenha a variável **t** constante e substitua a variável **u** pelos valores apresentados na tabela abaixo:

| Valor a ser substituído na variável u |            |            |            |            |          |
|---------------------------------------|------------|------------|------------|------------|----------|
| <b>U</b>                              | <b>0.1</b> | <b>0.3</b> | <b>0.6</b> | <b>0.8</b> | <b>1</b> |

5.4 Vamos agora preencher toda a figura construída. Para isso, siga as instruções abaixo:

- Equação → Paramétrica
- Digitar os comandos da caixa ao lado:

$$X = u.\cos(t)$$

$$Y = u.\sin(t)$$

$$Z = u^2$$

## APÊNDICE

A seguir, apresentamos um documento complementar de nossa pesquisa, que objetivou auxiliar os estudantes no entendimento e compreensão das definições apresentadas, assim como das parametrizações das equações das curvas e superfícies construídas no desenvolvimento das atividades propostas.

## A PARAMETRIZAÇÃO DAS CÔNICAS E QUÁDRICAS

As **cônicas** são casos especiais de **curvas** e as **quádricas**, casos especiais de **superfícies**. Ambas podem ser apresentadas parametricamente ou implicitamente. Desejamos determinar equações paramétricas para algumas cônicas, bem como para suas quádricas. Escreveremos essas equações no formato:

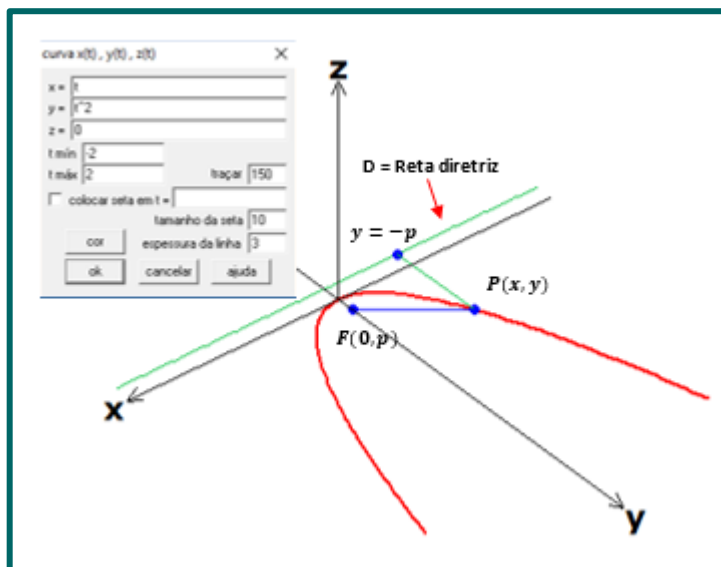
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Uma curva **parametrizada** no espaço com parâmetro  $t$  é uma função contínua, no qual  $I = (a, b)$  é um intervalo da reta real. Assim, o processo de descrever uma curva geométrica como uma função  $X: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é conhecido como parametrização. O mesmo ocorre com o espaço  $\mathbb{R}^3$ .

### A EQUAÇÃO DA PARÁBOLA E SUA PARAMETRIZAÇÃO

O nosso primeiro experimento foi expor a equação mais simples de uma parábola, sendo  $f(x) = y = \frac{1}{4p}x^2 = x^2$ , que por sua vez pode ser trivialmente transformada em uma parametrização utilizando um parâmetro livre  $t$ , estabelecendo:

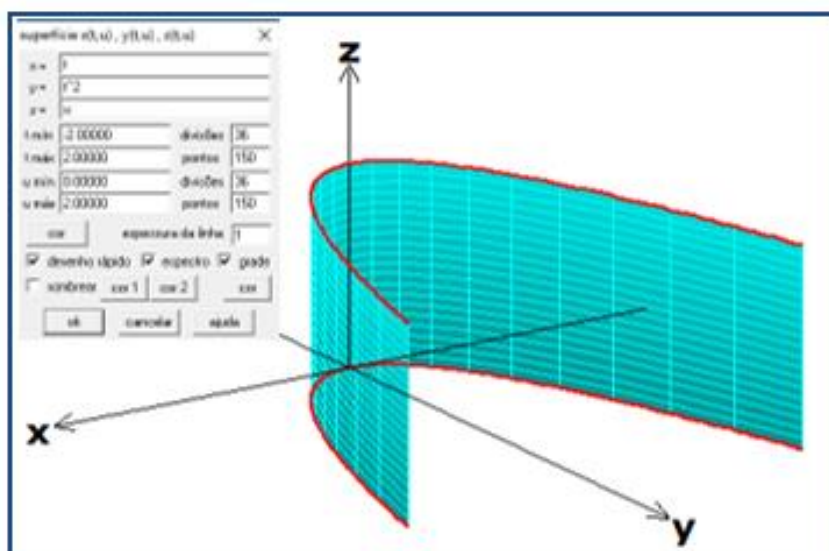
$x = t, y = t^2, z = 0$ , limitando o intervalo para  $-2 < t < 2$   
*Equação paramétrica*



O mesmo ocorre com **superfície** cilíndrica parabólica. O que fazemos na verdade é transformar uma superfície definida por três variáveis em apenas duas, ficando estabelecido o seguinte formato:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = u \end{cases} \text{ com } -2 \leq t \leq 2 \text{ e } 0 \leq u \leq 2$$

Assim, temos:



## DETALHAMENTO DA AÇÃO EMPÍRICA

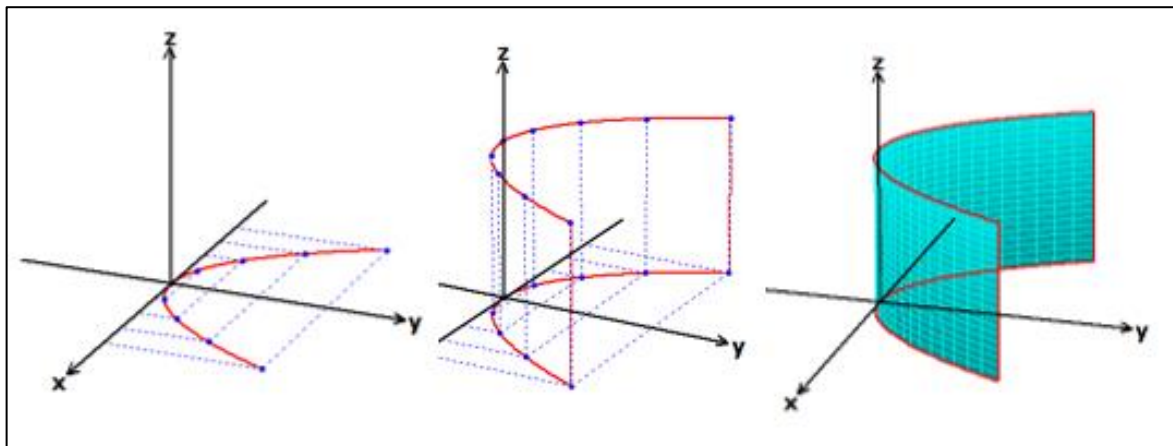
### SUPERFÍCIE CILÍNDRICA PARABÓLICA

EXPERIMENTO 1 - **Atividade com equação explícita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional através de equações parametrizadas.**

Essa atividade destina-se a construir uma **PARÁBOLA** no espaço bidimensional utilizando uma lista de pontos, concomitantemente com a inserção da equação explícita. Posteriormente faremos o mesmo procedimento no espaço tridimensional, usando a mesma lista de pontos, porém, mudando a equação de explícita para paramétrica. Sua transformação resultará em **SUPERFÍCIE CILÍNDRICA PARABÓLICA**.

|                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>ESPAÇO BIDIMENSIONAL</b></p> <p>Lista de pontos: <math>-4 \leq x \leq 4</math></p> <p>Equação Explícita:</p> $y = x^2$           | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p>Lista de pontos: <math>-4 \leq x \leq 4</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = t$ $y = t^2$ $z = 0$                 |
| <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p>Lista de pontos: <math>-4 \leq x \leq 4</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = t$ $y = t^2$ | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p><math>0 \leq u \leq 2</math></p> <p>Equação paramétrica:</p> $x = at$ $y = at^2$ |

**Obs.:** A variável  $u$  na equação paramétrica consiste em dar preenchimento na superfície, no sentido do eixo **Z**.



## A EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA E SUA PARAMETRIZAÇÃO

Para encontrarmos sua **equação cartesiana**, consideremos uma circunferência de **raio  $r$**  e **centro na origem**  $O(0, 0)$ . Para que  $P(x, y)$  seja um ponto da circunferência, devemos ter  $|PO| = r$ , e, assim, pela fórmula da distância entre dois pontos, obtemos:

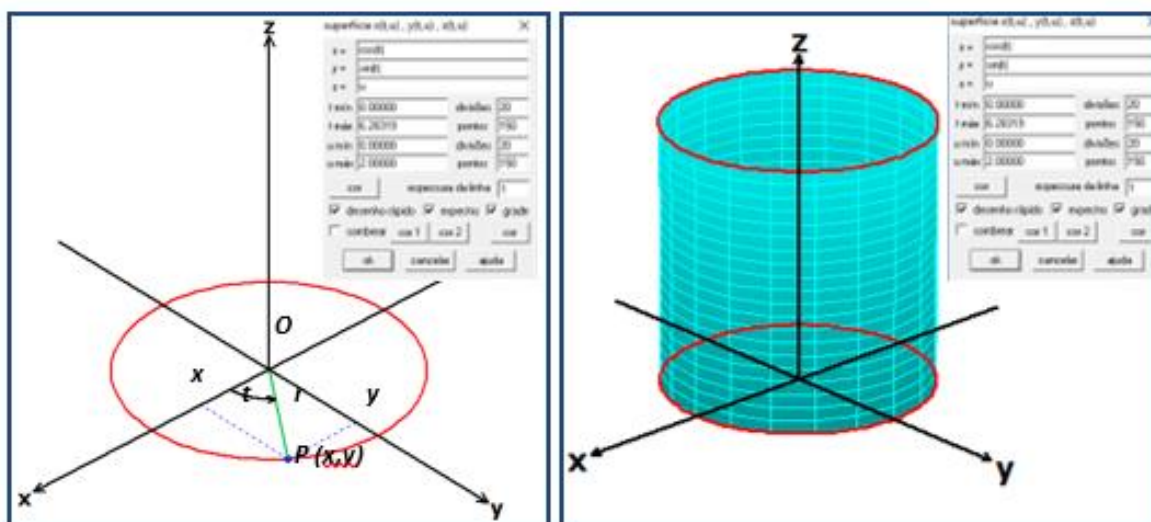
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 = r^2}$$

*Equação cartesiana*

Para **equação paramétrica**, temos:

$$\cos(t) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos(t), \quad \sin(t) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin(t) \therefore \begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \end{cases}$$

*Equação Paramétrica*



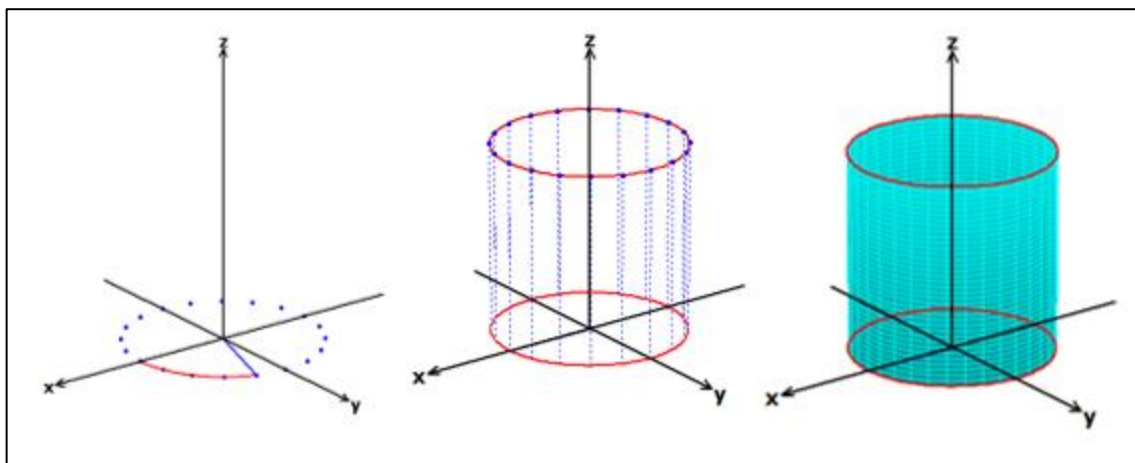


## CILINDRO QUÁDRICO

**EXPERIMENTO 2 - Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.**

Essa atividade destina-se a construir um **CÍRCULO** no espaço bidimensional utilizando uma lista de pontos, inserindo em seguida a equação implícita/explicita. Posteriormente faremos o mesmo procedimento no espaço tridimensional, usando a mesma lista de pontos, porém, mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**. Sua transformação resultará em **CILINDRO QUÁDRICO**. Assim, temos:

|                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>ESPAÇO BIDIMENSIONAL</b></p> <p>Lista de pontos: <math>-10 \leq x \leq 10</math></p> <p>Equação Implícita:</p> $x^2 + y^2 = 1$ <p>Equação Explícita:</p> $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$ $z = 0$                              |
| <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$ <p>Utilizamos altura <math>z = 2</math></p>           | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p><math>0 \leq u \leq 2</math></p> <p>Equação Paramétrica:</p> $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$ |



## A EQUAÇÃO DA ELIPSE E SUA PARAMETRIZAÇÃO

Para encontrarmos sua **equação cartesiana**, consideremos uma elipse de eixo maior horizontal de comprimento  $2a$  e centro na origem  $O(0, 0)$ , **Figura 1**. Usando medidas convencionadas, temos:

$\Rightarrow$  os vértices são os pontos  $V_1(-a, 0)$  e  $V_2(a, 0)$ ;

$\Rightarrow$  os focos são os pontos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ ;

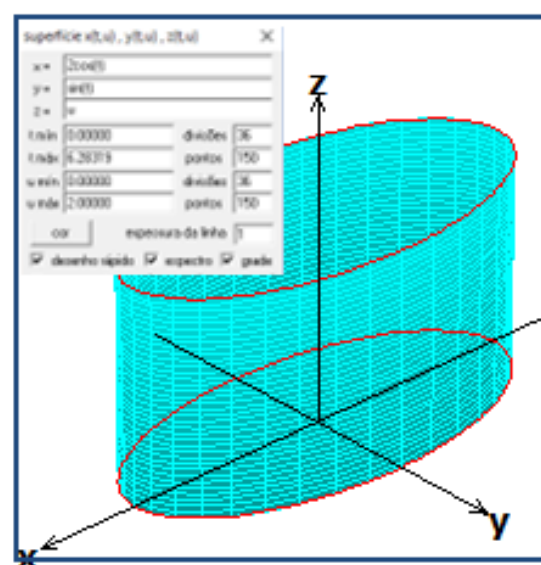
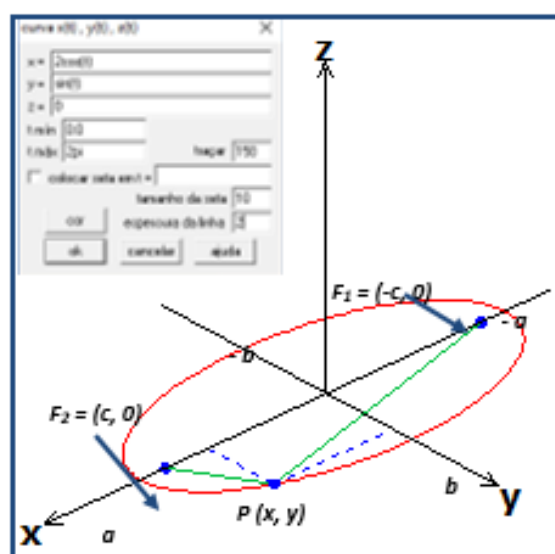
$\Rightarrow$  as extremidades do eixo menor são os pontos  $P_1(0, b)$  e  $P_2(0, -b)$ .

Para que  $P(x, y)$  seja um ponto da elipse, devemos ter  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ , e, assim, pela fórmula da distância, obtemos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{Equação cartesiana}}$$

Para **equação paramétrica**, temos:

$$\underbrace{\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \\ z = u \end{cases}}_{\text{Equação paramétrica}}$$

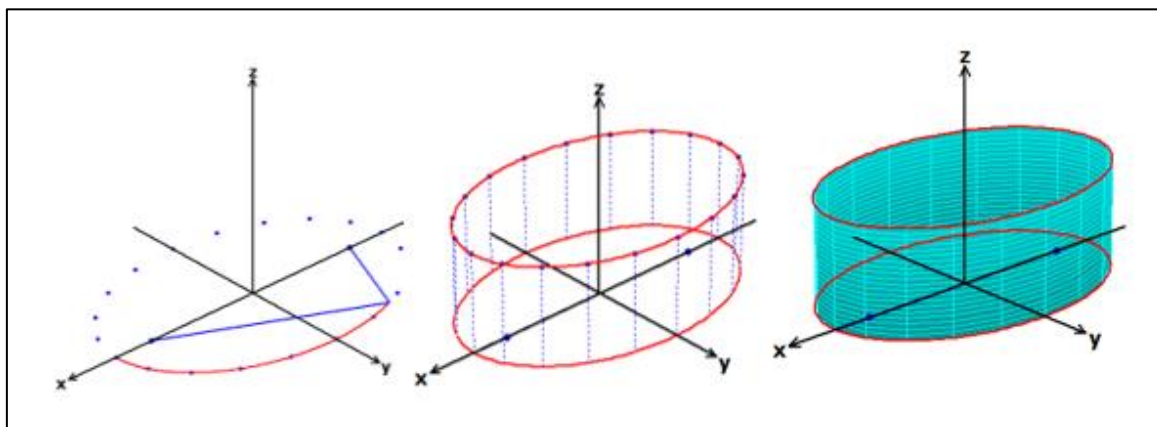


## CILINDRO ELÍPTICO

**EXPERIMENTO 3 - Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.**

Essa atividade destina-se a construir uma **ELIPSE** no espaço bidimensional utilizando uma lista de pontos, inserindo em seguida a equação implícita/explicita. Posteriormente faremos o mesmo procedimento no espaço tridimensional, usando a mesma lista de pontos, porém, mudando a equação de implícita/explicita para paramétrica. Sua transformação resultará em **CILINDRO ELÍPTICO**. Assim, temos:

|                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>ESPAÇO BIDIMENSIONAL</b></p> <p>Lista de pontos: <math>-10 \leq x \leq 10</math></p> <p>Equação Implícita:</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>Equação Explícita:</p> $y = \pm \frac{\sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2}}{a}$ | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = a \cos(t)$ $y = b \sin(t)$ $z = 0$              |
| <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p>Equação da (curva):</p> $x = a \cos(t)$ $y = b \sin(t)$                                                                                               | <p><b>ESPAÇO TRIDIMENSIONAL</b></p> <p><math>0 \leq t \leq 2\pi</math></p> <p><math>0 \leq u \leq 2</math></p> <p>Equação Paramétrica:</p> $x = a \cos(t)$ |





## CILINDRO HIPÉRBOLICO

EXPERIMENTO 4 - Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.

Essa atividade destina-se a construir uma **HIPÉRBOLE** no espaço bidimensional utilizando uma lista de pontos, inserindo em seguida a equação implícita/explicita. Posteriormente faremos o mesmo procedimento no espaço tridimensional, usando a mesma lista de pontos, porém, mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**. Sua transformação resultará em **CILINDRO HIPÉRBOLICO**. Assim, temos:

### ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Lista de pontos:  $-4 \leq x \leq 4$

Equação Implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação Explícita:

$$y = \pm \frac{\sqrt{-a^2 b^2 + x^2}}{a}$$

### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

$$-1 \leq t \leq 1$$

Equação da (curva):

$$x = \pm a \sec(t)$$

$$y = b \operatorname{tg}(t)$$

$$z = 0$$

### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

$$-1 \leq t \leq 1$$

Equação da (curva):

$$x = \pm a \sec(t)$$

$$y = b \operatorname{tg}(t)$$

$$z = 2$$

### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

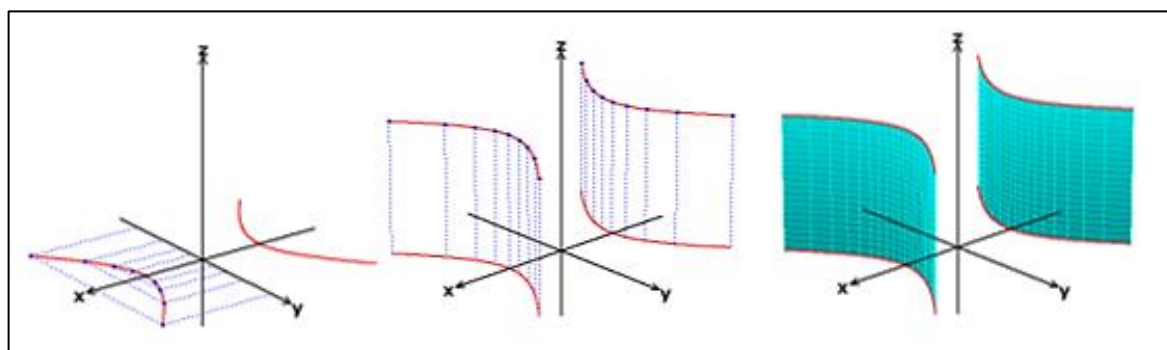
$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Equação paramétrica:

$$x = \pm a \sec(t)$$

$$y = b \operatorname{tg}(t)$$



## QUÁDRICAS

Uma quádricas, é uma superfície representada por um gráfico de uma equação quadrática nas três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A forma mais geral é dada por:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde  $A, B, C, \dots, J$  são constantes.

Essas superfícies são classificadas em:

- ⇒ Esferoide, Elipsoide e Esfera;
- ⇒ Hiperboloide de uma folha e Hiperboloide de duas folhas;
- ⇒ Paraboloide elíptico e Paraboloide Hiperbólico (sela);
- ⇒ Cone Quádrico.

Assim, como nas cônicas apresentadas acima, a Parametrização das curvas quádricas será de fundamental importância para o desenvolvimento das atividades no *software winplot*.

## O ELIPSOIDE E SUA PARAMETRIZAÇÃO

O elipsoide é uma superfície quádrlica no qual todos os seus traços são elipses.

**EXPERIMENTO 5 - Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.**

Essa atividade destina-se a construir um **ELIPSOIDE** no espaço tridimensional mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**.

### ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Equação do Implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Equação explícita:

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}}$$

### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

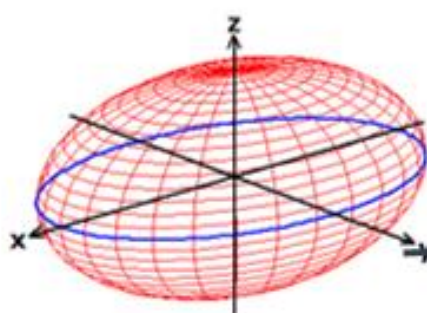
$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Equação paramétrica:

**Equação paramétrica (3D) do elipsoide:**

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \sin(u) \\ y = b \sin(t) \sin(u) \\ z = c \cos(u) \end{cases}$$



| superfície x(t,u) , y(t,u) , z(t,u) |               |          |     |
|-------------------------------------|---------------|----------|-----|
| x =                                 | 3sin(u)cos(t) |          |     |
| y =                                 | 2sin(u)sin(t) |          |     |
| z =                                 | cos(u)b       |          |     |
| t mín                               | 0.00000       | divisões | 30  |
| t máx                               | 6.28319       | pontos   | 150 |
| u mín                               | 0.00000       | divisões | 30  |
| u máx                               | 3.14159       | pontos   | 150 |



## O PARABOLOIDE CIRCULAR E SUA PARAMETRIZAÇÃO

O parabolóide é uma superfície na qual sua equação possui um termo com variável do 1º grau. É uma superfície constituída de elipses e hipérbolas.

**EXPERIMENTO 6 - Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.**

Essa atividade destina-se a construir um **PARABOLOIDE** no espaço tridimensional mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**.

### ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Equação do Implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a}$$

Equação explícita:

$$y = \pm b^2 \sqrt{\frac{z}{c} - \frac{x^2}{a^2}}$$

### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

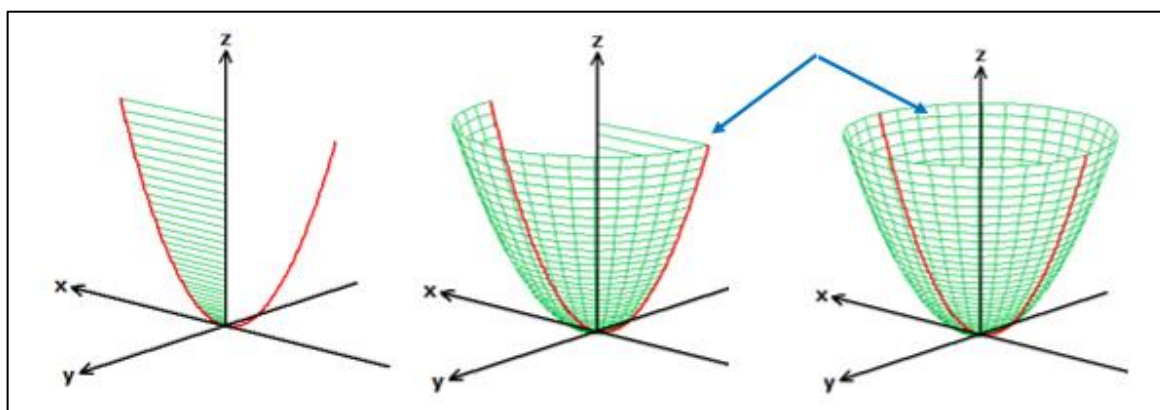
$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Equação paramétrica:

**Equação paramétrica (3D) do elipsoide:**

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = a \sin(t) \\ z = u^2 \end{cases}$$



## O PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (SELA)

O Parabolóide hiperbólico é uma superfície que tem uma equação semelhante à equação de um elipsoide, uma vez que apresenta um termo ao quadrado, porém precedido por um sinal negativo.

**EXPERIMENTO 7 - Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.**

Essa atividade destina-se a construir um **PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (SELA)** no espaço tridimensional mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**.

### ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Equação Implícita

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Equação Explícita:

$$y = \pm b \sqrt{-\frac{z}{c} + \frac{x^2}{a^2}}$$

### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

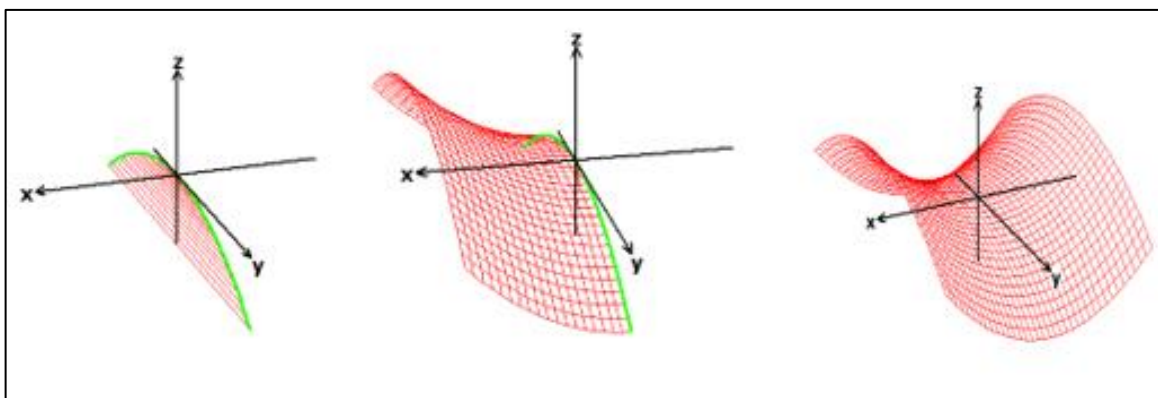
$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Equação Paramétrica:

**Equação Paramétrica (3D) do Parabolóide Hiperbólico**

$$\begin{cases} x = a \cdot t \\ y = b \cdot u \\ z = t^2 - u^2 \end{cases}$$



## O HIPERBOLOIDE ELÍPTICO DE UMA FOLHA

O hiperboloide é uma superfície que tem uma equação semelhante à equação de um elipsoide, uma vez que apresenta um termo ao quadrado, porém precedido por um sinal negativo.

**EXPERIMENTO 8 - Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.**

Essa atividade destina-se a construir um **HIPERBOLOIDE ELÍPTICO DE UMA FOLHA** no espaço tridimensional mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**.

### ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Equação Implícita

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Equação Explícita:

$$y = \pm b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}}$$

### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

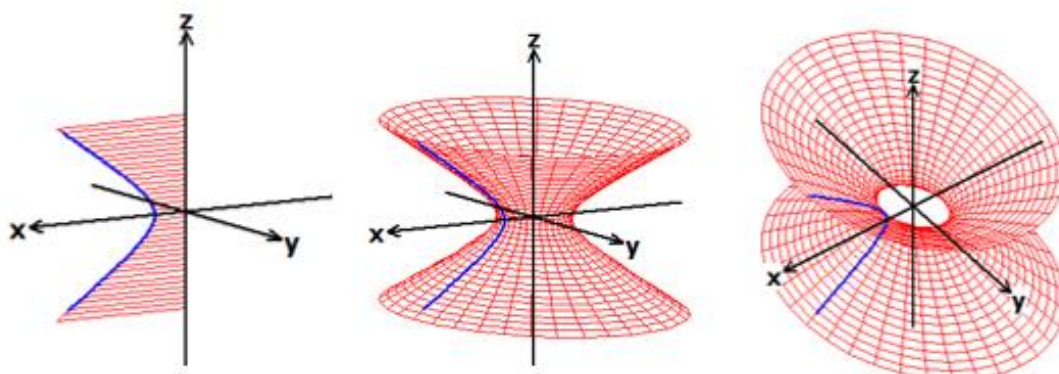
$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Equação Paramétrica:

**Equação Paramétrica (3D) do Hiperboloide Elíptico de uma folha**

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \sqrt{1 + u^2} \\ y = b \sin(t) \sqrt{1 + u^2} \\ z = c \cdot u \end{cases}$$



## O HIPERBOLOIDE ELÍPTICO DE DUAS FOLHAS

É uma superfície que apresenta dois termos quadráticos precedidos de sinal negativo.

**EXPERIMENTO 9 - Atividade com equação implícita/explicita no espaço bidimensional, transferindo-as para o espaço tridimensional utilizando equações parametrizadas.**

Essa atividade destina-se a construir um **HIPERBOLOIDE ELÍPTICO DE DUAS FOLHAS** no espaço tridimensional mudando a equação de **implícita/explicita** para **paramétrica**.

### ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Equação Implícita

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Equação Explícita:

$$-y = \pm b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}}$$

### ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Equação Paramétrica:

Equação Paramétrica (3D) do Hiperboloide Elíptico de duas folhas

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \sqrt{u^2 - 1} \\ y = b \sin(t) \sqrt{u^2 - 1} \\ z = \pm c \cdot u \end{cases}$$

