PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

CRIAÇÃO DE UM SOFTWARE DE APOIO AO ENSINO E À APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR

Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

José Renato Fialho Rodrigues

BELO HORIZONTE

2009

José Renato Fialho Rodrigues

CRIAÇÃO DE UM SOFTWARE DE APOIO AO ENSINO E À APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR

Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

Dissertação apresentada ao Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares

BELO HORIZONTE

2009

R696c Rodrigues, José Renato Fialho
Criação de um software de apoio ao ensino e à aprendizagem de álgebra linear base e dimensão de um espaço vetorial./José Renato Fialho Rodrigues. Belo Horizonte, 2009.
150f. : Il.

Orientador: João Bosco Laudares
Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Álgebra linear – Ensino auxiliado por computador. 2. Ensino-aprendizagem. 3. Espaços vetoriais. 4. Base. 5. Dimensão. 6. Geometria. I. Laudares, João Bosco. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 512.8:681.3

PUC Minas

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "**CRIAÇÃO DE UM *SOFTWARE* DE APOIO AO ENSINO E À APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR: base e dimensão de um espaço vetorial**

Candidato: **JOSÉ RENATO FIALHO RODRIGUES**

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Bosco Laudares – Orientador (PUC Minas)
Doutorado em Educação: História, Política, Sociedade (PUC-SP)

Profª. Drª. Sônia Barbosa Camargo Igliori – (PUC São Paulo)
Doutorado em Matemática – (PUC São Paulo)

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda (PUC Minas)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial (PUC Minas)

Prof. Dr. Sandro Laudares (PUC Minas)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial (PUC Minas)

Belo Horizonte, 20 de março de 2009.

A Minha Filha Clarissa,

fonte de inspiração e alegria.

À memória de minha Mãe

Larcy Fialho de Jesus.

E à memória de Ronald Mordente:

Um grande exemplo em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Professor Doutor João Bosco Laudares, pela sua orientação e incentivo.

Aos Professores da banca examinadora, Professora Doutora Sônia Barbosa Camargo Igliori, Professor Doutor Dimas Felipe de Miranda e Professor Doutor Sandro Laudares, pela avaliação criteriosa desta pesquisa e pelas contribuições sugeridas.

A todos os Professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUCMINAS, que com seus ensinamentos contribuíram para a escolha e desenvolvimento desta pesquisa.

A Professora Doutora Agnela da Silva Giusta, pela sua solidariedade nos momentos difíceis.

Agradecimento especial a toda equipe de auxiliares desta pesquisa pela participação e empenho no trabalho colaborativo na construção, aplicação e avaliação do *SOFTWARE* desenvolvido.

Aos meus amigos Professor Bernardo Jeunon de Alencar e Professor Murilo Barros Alves por estarem sempre presentes, de alguma forma, nos momentos necessários.

A todos os funcionários da PUCMINAS dos quais, em especial, destaco Isabel Cristina Correa dos Passos, que com grande simpatia sempre se colocaram a disposição.

A Senhora Juracir Maria de Souza pelo zelo dispensado a minha família.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar a criação de um *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. Foram criadas atividades animadas e interativas no sistema de autoria Macromedia® *Flash*, utilizando-se vários recursos multimídia, tais como: imagens, vídeo, som e texto. Na criação desse *SOFTWARE*, foram considerados alguns aspectos históricos da Álgebra Linear, uma concepção teórica de aprendizagem e um ambiente de programação para o desenvolvimento dos seguintes conteúdos: Combinação Linear, Independência Linear, Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. O *SOFTWARE* criado é dividido em três seções: Introdução, Base e Dimensão. Na seção Introdução, são trabalhados os conceitos de Combinação Linear e Independência Linear em várias subseções, das quais se destaca a subseção Programação, por propiciar uma autonomia que permite ao aluno interagir com o *SOFTWARE* por meio da inversão de papéis, na medida em que o aluno passa a "ensinar" para o computador a mecanização do conceito que foi adquirido por ele nas atividades apresentadas anteriormente. Nas seções Base e Dimensão, os conceitos são trabalhados, utilizando-se o *SOFTWARE* como recurso que propicia a interação do conteúdo com o aluno e inter-relaciona os conceitos utilizados nas suas definições. Em caráter experimental, este *SOFTWARE* foi utilizado por uma turma da disciplina de Álgebra Linear do Curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS de Betim. Os resultados desta pesquisa apontaram para uma possível melhoria na qualidade do ensino e conseqüente eficácia na aprendizagem de Álgebra Linear.

PALAVRAS-CHAVE: *Software* Educativo, Ensino e Aprendizagem, Álgebra Linear, Base e Dimensão.

ABSTRACT

This dissertation is a goal of the development of a SOFTWARE to support teaching and learning of Basis and Dimension of a Vector Space. Animated and interactive activities were created through the Macromedia® Flash system, using several multimedia resources such as: images, videos, sounds and text. While creating this SOFTWARE, historical aspects of linear algebra where considered such as the theoretical conception of learning and the programming environment that best suits to the following topics: Linear Combination, Linear Independence, Basis and dimension of a Vector Space. The SOFTWARE have three sections: Introduction, Basis and Dimension. In the Introduction section the concepts of Linear Combination and Linear Independence in many subsections of which is highlighted the subsection related to Programming because it provides an autonomy that allows the student to interact with the SOFTWARE through roles inversion in the way that the student starts to "teach" the computer program the mechanics of the concept he acquired through the activities presented before. In the sections related to Basis and Dimension, the concepts are worked using the SOFTWARE as a resource that allows the interaction with the student relating the concepts used in the definitions. As an experiment, this SOFTWARE was used by a Linear Algebra classroom of the PUC Minas Mathematics Bachelor course from Betim. The results of this research aimed at a possible improvement of teaching and a resulting effectiveness in learning Linear Algebra.

KEYWORDS: Educative Software, Teaching and Learning, Linear Algebra, Basis and Dimension.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde 1996, trabalhando com a disciplina de Álgebra Linear no curso de Licenciatura em Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, em Betim – PUCMINAS –, foi possível perceber a enorme dificuldade apresentada pelos alunos na aprendizagem dos conteúdos iniciados com Espaço Vetorial e finalizados com Diagonalização: Autovalores e Autovetores.

Analisando as possíveis causas dessa dificuldade, num processo de reflexão da prática docente, foram identificados três fatores: a novidade dos conteúdos, o alto grau de abstração dos assuntos e o grande volume de informações.

Aplicando uma metodologia que valoriza a riqueza da estrutura matemática envolvida nos conteúdos de Álgebra Linear, eram apresentados aos alunos conceitos, teoremas e algoritmos que faziam com que eles se perdessem diante de tantas informações e novidades. Notava-se, no entanto, que quando eram exibidos alguns procedimentos para obter determinados resultados, os alunos se apropriavam do processo quase que mecanicamente, porém, percebia-se, por meio de perguntas e questionamentos, o desejo de entender as justificativas que validassem o algoritmo.

Ao se trabalhar Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, era possível reforçar os conceitos de Espaço Vetorial, Subespaço, Combinação Linear e Independência Linear, momento esse adequado para uma intervenção do professor.

Essa intervenção deve acontecer por meio de recursos metodológicos que agreguem novos significados ao conceitos trabalhados. Acompanhando as tendências mundiais, no campo das tecnologias aplicadas à educação matemática, os recursos computacionais também podem ser um grande aliado no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear, pois eles já se mostraram eficientes com cálculos numéricos, expressões algébricas, exposições gráficas, estatísticas e tratamento geométrico, por meio de *software*s educativos, como Maple, Matlab, Logo, Mathematica, Minitab, Statístic, entre tantos outros.

Existem "Sistemas de Autoria" que integram imagens, sons e textos, possibilitando a criação de um *software* educativo que permite a interatividade entre o conteúdo e o aluno. Nessa direção, foram desenvolvidas atividades dinâmicas e interativas que compõem um s*oftware* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, utilizando o Sistema de Autoria Macromedia® *Flash*. Dessa forma, esta pesquisa tem como foco central a criação de atividades que favoreçam o entendimento dos conceitos básicos da

Álgebra Linear, com o apoio da informática educativa.

Este trabalho estrutura-se em quatro capítulos. No Capítulo 1 – Álgebra Linear: História, ensino e aprendizagem – é feita uma síntese da gênese da Álgebra Linear, na intenção de encontrar alguns fatores que justifiquem as dificuldades percebidas no seu ensino e, conseqüentemente, em sua aprendizagem. Em seguida, são analisados alguns livros-texto para elaboração de atividades que possam ser implementadas em um *software*. Por fim, é feito um estudo de algumas pesquisas referentes ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear, em busca de algumas pistas que possam contribuir para a criação do *SOFTWARE* proposto.

Para justificar a utilização do computador como recurso auxiliar na aprendizagem, são discutidas, no Capítulo 2 – Mediação do computador na educação-, as tecnologias informatizadas na educação que dão sustentação teórica à criação de um *software* para o apoio em sala de aula, pelas obras, principalmente, de Oliveira, Costa e Moreira (2001), Masetto (2000) e Valente (1999). Em seguida, é analisado o Sistema de autoria *Flash MX*, ferramenta de edição de imagens vetoriais com animação, som e interatividade, e com um grande poder de processamento multimídia, o qual se constituiu como ambiente de programação onde se criou o *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear.

É feita uma descrição do *SOFTWARE* no Capítulo 3 – *SOFTWARE* para o ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear –, na qual são apresentados os conteúdos de Álgebra Linear, a concepção teórica de aprendizagem que permeia as atividades elaboradas, a escolha do ambiente de programação para a sua criação e a descrição de cada atividade proposta.

Na expectativa de uma indicação para validação do *SOFTWARE*, no Capítulo 4 – Aplicações do *SOFTWARE* – são mostrados alguns resultados obtidos com a sua aplicação em uma turma de Licenciatura em Matemática e, em seguida, são apresentados alguns subprodutos criados, adjacentes ao seu desenvolvimento.

Finalizando, são expostas algumas conclusões que apontam para a utilização desse recurso computacional, e também são colocadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 ÁLGEBRA LINEAR: HISTÓRIA, ENSINO E APRENDIZAGEM

2.1 Alguns aportes da história da Álgebra Linear

Com base nos textos de Moore (1995): *The Axiomatization of Linear Álgebra*: 1975 – 1940 e Dorier (1993): *A General Outline of the Gênesis of Vector Space Theory*, foi feita uma síntese da história da Álgebra Linear, de tal forma a propiciar ao leitor um conhecimento geral do assunto, abordando a razão do surgimento e do desenvolvimento desse conteúdo ao longo do tempo.

A formalização da Álgebra Linear teve início no final do século XIX. Até então, o que havia era uma necessidade de relacionar a Álgebra com a Geometria, momento em que a legitimação dos números complexos emergiu como precursor de tal necessidade. Neste contexto, a aceitação dos números complexos se deu por meio de sua representação geométrica e as tentativas de representá-los em três dimensões levaram Willian Rowan Hamilton a descobrir os quatérnios, o que, por sua vez, possibilitou a criação de um sistema no qual a operação de multiplicação não gozava da propriedade comutativa. Surgiram, dessa forma, os primeiros passos na direção da criação da Álgebra Linear.

A base para o desenvolvimento da teoria dos Espaços Vetoriais ocorreu por meio do estudo das curvas algébricas, na teoria de Sistemas Lineares, no começo do século XVIII, a partir das provas parciais de duas proposições referentes a essas curvas:

(1) Duas curvas algébricas distintas de ordens m e n, respectivamente, têm mn pontos em comum;

(2) Para determinar uma curva de ordem n, são necessários e suficientes $\frac{n(n+3)}{2}$ pontos.

Neste contexto, em 1750, tem-se a publicação de dois dos trabalhos mais importantes para a conceituação de Espaços Vetoriais: 1) *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* (CRAMER, 1750), e 2) *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes curbes* (EULER, 1750).

Cramer, em seu trabalho, preparou uma estrutura para a teoria de determinantes, enquanto Leonard Euler encontrou casos nos quais a proposição (2) não é válida, identificando a dependência de equações num sistema linear, que foi a base para a formalização do conceito de dependência linear.

Em 1844, quase um século após os primeiros passos na direção da conceituação de Espaços Vetoriais, Hermann Gunter Grassmann, em sua obra *Die Lineale Ausdehnungslehre* aproximou de uma formalização axiomática para Espaços Vetoriais. Devido a uma apresentação não muito clara, sua divulgação não atingiu a amplitude necessária, tendo grande parte de seus resultados redescobertos, independentemente, por outros matemáticos.

Uma grande contribuição que podemos atribuir a Grassmann foi o conceito de base como sendo o número máximo de vetores independentes no Espaço. Tal conceito permite provar que, em um Espaço Vetorial de dimensão n, um subconjunto deste Espaço, de n vetores linearmente independentes, gera esse Espaço, formando, assim, uma base para ele. O estudo do número mínimo de vetores de um sistema de geradores não foi realizado, o que provaria que o número de elementos em uma base é único. Essa questão só foi completamente resolvida na "Teoria de Corpos", descrita pelo matemático Richard Dedekind (1831 – 1916), que, também, contribuiu com a definição a qual hoje conhecemos como Independência Linear.

Uma apresentação mais clara dos resultados elementares de Espaços Vetoriais dados por Grassmann foi realizada por Peano, em 1888, no trabalho intitulado "Calcolo Geométrico", que contém, basicamente, as mesmas propriedades fundamentais da obra de Grassmann, no que se refere à definição axiomática de Espaço Vetorial, porém de uma forma mais compacta e precisa. Em 1898, Peano atribui um tratamento axiomático aos sistemas lineares, dando origem ao que conhecemos hoje por Espaço Vetorial. Deve-se a ele a definição de n-uplas de reais com as operações de adição e multiplicação por número real, o que, na verdade, é uma definição de Espaço Vetorial sobre o corpo dos reais.

Além de Peano, em 1918, o matemático Hermann Weyl, em seu livro *Raum-Zeit-Materie* (*Espaço-tempo-matéria)*, axiomatizou a noção de Espaço Vetorial sobre o corpo dos reais.

Entretanto, nem o trabalho de Peano, nem o de Weyl foram suficientes para a aceitação da axiomatização dos Espaços Vetoriais. O conceito teve de ser redescoberto, por uma terceira vez, por três matemáticos, trabalhando independentemente, em três países diferentes: Stefan Banach, na Polônia; Hans Hahn, na Áustria; e Norbert Wiener, nos Estados Unidos.

Os axiomas de Espaços Vetoriais trabalhados pelos três autores eram válidos para Espaços muito mais gerais do que os Espaços n-dimensionais, pois a intenção era a generalização das propriedades algébricas e topológicas de diversos Espaços. Surge, assim, por meio de pesquisas em análise, o conceito de Espaço Vetorial Normado, introduzido por Banach, Hahn e Wiener e publicado por Banach, em sua obra *Théorie des Opérations*

Linéaires (1932). Todos eles sabiam, com a possível exceção de Banach, da noção de Espaço Métrico de Fréchet e reconheciam a sua relevância em seu trabalho.

Para Fréchet, a axiomatização de Espaços Vetoriais havia acontecido antes de Banach, Hahn e Wiener, e cita o livro *Le Operazione Distributive*, escrito por Pincherle (1901), que continha tal axiomatização. Segundo Fréchet, Pincherle credita a Laguerre (1867) e Peano (1888) esta axiomatização. Na verdade, nos trabalhos de Laguerre a axiomatização foi feita somente para matrizes, enquanto a axiomatização feita por Peano foi para Espaços Vetoriais sobre o corpo dos reais. Fréchet foi o primeiro a axiomatizar Espaços Vetoriais, que possuíam uma topologia, mas não uma estrutura métrica.

O conceito de Espaço Vetorial Topológico foi reformulado alguns anos mais tarde por Kolmogorov, que não foi influenciado por Fréchet, mas por Banach, em seu livro de 1932 sobre geradores lineares.

Antes disso, porém, no início de 1927, cerca de cinco anos após os trabalhos de Banach, Hahn e Wiener sobre Espaços Vetoriais Normados, encontra-se no trabalho de Von Neumann (1903 – 1957) a axiomatização de Espaço de Hilbert, cujos vetores são: seqüências infinitas de números complexos $x_1, x_2, \cdots$ para os quais a série $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \cdots$ converge. Até então, esses Espaços não tiveram nenhuma participação na evolução da Álgebra linear, apesar de esta idéia ter sido iniciada em 1904, no trabalho de Hilbert sobre Equações Lineares Integrantes.

Por uma segunda vez, Von Neumann, em 1930, em seu trabalho sobre Operadores Hermetianos do Espaço de Hilbert, enunciou cinco axiomas que caracterizavam o conceito de Espaço de Hilbert.

Assim, a Álgebra Linear atinge um alto grau de desenvolvimento, em 1941, quando os processos de investigações algébricos e analíticos de Espaços Vetoriais e módulos foram mais ou menos independentes. Neste contexto, Van Der Waerden (1903 – 1996) desempenha um papel importante para a noção de Espaço Vetorial, quando apresenta as matrizes no contexto de Espaços Vetoriais.

2.2 Licenciatura em Matemática – conteúdos de Álgebra Linear e livro texto

Para verificação dos conteúdos de Álgebra Linear, trabalhados nos cursos de Licenciatura em Matemática, foram selecionadas três instituições de ensino, utilizando-se os seguintes critérios:

1º) Instituição na qual se originou a questão desta pesquisa.

É bastante relevante o local onde surgiu a necessidade de intervenção no processo de ensino-aprendizagem, pois as observações anotadas ao longo dos anos podem ser aproveitadas para obtenção de um resultado que possa colaborar nesse processo.

2º) Instituição de ensino público.

A escolha desse critério justifica-se por se tratar de universidades de grande notoriedade no cenário educacional brasileiro, e por receber alunos com perfil diferente dos recebidos nas instituições privadas.

3º) Instituição de ensino privado.

A escolha se deve ao fato da relevante contribuição, na formação de profissionais na área de Educação, dada por essas instituições. Levou-se em conta, neste critério, a existência de Programas de Pós-graduação em Educação Matemática, o que evidencia uma preocupação na busca de soluções que favoreçam o ensino-aprendizagem.

Atendendo aos critérios estabelecidos acima, foram selecionadas as seguintes instituições de ensino: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais; Universidade Federal de Minas Gerais; e Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Dentro dos critérios já relacionados, foi considerada a facilidade de acesso às informações como trâmite entre instituições, *sites* atualizados e com grande número de informações.

Uma vez escolhidas as instituições de ensino, foram analisados os Planos de Ensino de Álgebra Linear, com a intenção de estudar suas Ementas e selecionar três livros-texto nos quais foram verificadas as abordagens dos conteúdos Base e Dimensão de um Espaço Vetorial.

Para se ter uma visão global deste levantamento, segue, abaixo, um quadro comparativo com a Ementa e a Bibliografia da Disciplina de Álgebra Linear no Curso de Licenciatura em Matemática, de cada uma das instituições selecionadas:

INSTITUIÇÃO	EMENTA	BIBLIOGRAFIA
PUCMINAS	Espaços Vetoriais com Produto Interno, Transformações Lineares e Diagonalização de Matrizes.	**Básica:** 1) KOLMAN, Bernard; HILL, David R.; tradução: Valéria de Magalhães Iório. **Introdução à álgebra linear com aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1998. 2) ANTON, Howard; Rorres Chris; trad. Clasus Ivo Doering. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
UFMG	Sistemas de Equações Lineares e Matrizes, Determinantes, O espaço Euclidiano R^n , Transformações Lineares do R^n ao R^m , Auto Valores e Auto Vetores e Aplicações e Geometria Analítica.	**Básica:** 1) ANTON, Howard; Rorres Chris; trad. Clasus Ivo Doering. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. 2) BOLDRINI, José Luiz; [et al.]. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.
PUCRGS	Espaços Vetoriais e Transformações Lineares.	**Básica:** ANTON, Howard; Rorres Chris; trad. Clasus Ivo Doering. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. **Complementar:** LAY, David C; tradução: Ricardo Camelier; Valéria de Magalhães Iório. **Álgebra linear e suas aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

Quadro 1: Instituições de ensino - ementas e bibliografias para a disciplina de Álgebra Linear
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Com base no Quadro apresentado, verifica-se que os conteúdos de Espaços Vetoriais e Transformações Lineares são comuns às três instituições.

Levando-se em conta os objetivos apresentados nos Planos de Ensino, pode-se afirmar que existe uma valorização da estrutura algébrica dos conteúdos e uma preocupação com a aplicação desta para resolução de problemas.

Para verificação da interatividade propiciada pela abordagem, e também da utilização de recursos geométricos na exposição dos conteúdos, foram selecionados, dentre os livros adotados nas três instituições de ensino, os seguintes livros-texto:

Introdução à Álgebra Linear: com aplicações de Bernard Kolman, 8 edição, livro adotado na instituição que gerou o estudo apresentado nesta dissertação.

Álgebra Linear: com aplicações de Anton Howard, 8 edição, livro indicado na bibliografia básica das três instituições pesquisadas.

Álgebra Linear e suas aplicações de David C. Lay, 2 edição, livro indicado na bibliografia complementar da PUCRGS, apresentando uma linguagem diferente das encontradas na maioria dos textos do gênero.

Realizou-se uma análise de cada um dos livros selecionados, com base nos conteúdos de Base e Dimensão de Espaços Vetoriais e nos exercícios apresentados em cada obra, para verificação da forma de abordagem dos conteúdos.

2.2.1 Introdução à álgebra linear: com aplicações, de Bernard Kolman, 8. ed.

Antes de tratar, diretamente, do conteúdo “Base e Dimensão”, foi lido o Prefácio, com o propósito de encontrar a intenção do autor na abordagem dos conteúdos.

No Prefácio, o autor destaca o seguinte objetivo: “Desenvolver um livro-texto que ajudará o professor a ensinar e o aluno a aprender as idéias básicas da Álgebra Linear e conhecer algumas de suas aplicações”.

Além do objetivo, encontra-se, explicitamente, no Prefácio uma ênfase aos aspectos computacionais e geométricos para minimizar o impacto da abstração, e, quando conveniente, ao invés de demonstrar alguns teoremas, eles sãos aplicados por meio de exemplos. É destacado que os exercícios são agrupados em três classes: Exercícios Rotineiros; Exercícios Teóricos e Exercícios de Matlab.

Com relação às aplicações, é preconizado pelo autor que elas são inteiramente independentes e que o professor tem autonomia para a escolha tanto do conteúdo, quanto do método de estudo das aplicações referentes aos conteúdos.

Pela análise do Prefácio, constata-se a intenção de utilizar recursos geométricos e computacionais na exposição dos conteúdos, e de mostrar aplicações.

Consultando o Sumário, encontra-se a seguinte disposição do capítulo 6, o qual contém o tema “Base e Dimensão”: Espaços Vetoriais; Subespaços; Independência Linear; Base e Dimensão; Sistemas Homogêneos; O Posto de uma Matriz e Aplicações; Mudança de Coordenadas e de Base; Bases Ortonormais em R^n; Complementos Ortogonais.

Os conteúdos que precedem “Base e Dimensão” são: Espaços Vetoriais, Subespaços e Independência Linear, estabelecendo, dessa forma, uma ordem dos assuntos.

Analisando a seção “Base e Dimensão”, encontra-se, inicialmente, a definição de base de um Espaço Vetorial, seguida de exemplos de bases canônicas de R^2, R^3 e R^n. Logo após, são dados um exemplo de uma base qualquer em R^4 e um exemplo de uma base para P_2, apresentando, em seguida, a base canônica de P_n.

É apresentado e demonstrado o seguinte teorema relativo à Base:

Teorema: Se $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é uma base para um espaço vetorial V, então todo vetor em V pode ser escrito de uma e apenas uma maneira como uma combinação linear dos vetores em S.

Teorema: Seja $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ um conjunto de vetores não-nulos em um espaço vetorial V e seja $W = [S]$, então algum subconjunto de S é uma base para W.

Com isso, a representação de um vetor de um espaço vetorial é escrita como uma única Combinação Linear dos vetores de uma base, e se um conjunto gera um Espaço Vetorial, então ele contém uma base para esse espaço, evidenciando, dessa forma, a importância do conceito de Independência Linear.

É apresentado, em seguida, um procedimento para encontrar um subconjunto T de um conjunto S, tal que T é uma base para gerar $W = [S]$. Para ilustrar este fato, é dado um exemplo em R^4.

Finalizando o assunto "Base de um Espaço Vetorial", são dados um teorema e um corolário com suas demonstrações. Seguem, abaixo, os respectivos enunciados:

Teorema: Se $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é uma base para um espaço vetorial V e $T = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_r\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores em V, então $r \leq n$.

Corolário: Se $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ e $T = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$ são bases para um espaço vetorial, então $n = m$.

O tema é concluído pelo autor (2006, p.284) da seguinte maneira: *"Assim, embora um espaço vetorial tenha várias bases, acabamos de mostrar que, para um espaço vetorial particular V, todas as bases têm o mesmo número de vetores".* Fica clara a preparação para a definição de dimensão de um Espaço Vetorial.

Passando para o tema "Dimensão", verifica-se que ele é iniciado com a sua definição; em seguida, são dados dois exemplos referentes à dimensão de Espaços Vetoriais formados por n-uplas ordenadas e polinômios, e um terceiro exemplo referente a um subespaço do R^4.

É enunciado, sem demonstrar, um teorema relativo à extensão de um conjunto linearmente independente de um Espaço Vetorial, de modo a obter uma base para este espaço. Seu enunciado é o seguinte:

Teorema: Se S é um conjunto de vetores linearmente independente em um espaço vetorial de dimensão finita V, então há uma base T para V que contém S.

Como o autor antecede no Prefácio, algumas vezes são dados exemplos para se trabalharem os teoremas ao invés de demonstrá-los. É o caso desse teorema.

Em seguida, é enunciado o seguinte teorema:

Teorema: Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ um conjunto de n vetores em V.

(a) Se S é linearmente independente, então ele é uma base para V;

(b) Se S gera V, estão ele é uma base para V.

Nesse teorema, também é dada uma aplicação e um exemplo em R^4, para sua aceitação. Portanto, com esse teorema, fica minimizado o problema de verificar se um conjunto é uma base de um espaço vetorial, desde que se saiba a dimensão desse espaço.

Finalizando este tema, é dado Base e Dimensão em B^n como um assunto opcional, aproveitando-se todas as definições e teoremas dados anteriormente.

Nessa obra os contéudos de Base e Dimensão são trabalhados incialmente em R^2 e R^3 antes de serem generalizados para o R^n, o que contribuiu para a a elaboração das atividades desenvolvidas no *SOFTWARE* produto dessa pesquisa.

Antes de se introduzirem os exercícios, são destacadas algumas palavras e expressões, as quais o autor chama de "Termos-chave". Para a seção de "Base e Dimensão", foram listadas: Base, Base natural (ou base canônica), Espaço vetorial de dimensão finita, Espaço vetorial de dimensão infinita e Dimensão, o que nos dá uma idéia geral dos principais conceitos tratados na seção.

Com relação aos exercícios, de fato, como antecipado no Prefácio, eles são separados em três grupos, com suas respectivas finalidades destacadas pelo autor:

> Exercícios Rotineiros: são exercícios numéricos, que envolvem várias situações diretas do assunto tratado;
> Exercícios Teóricos: são exercícios que completam algumas demonstrações feitas na parte teórica do livro e ampliam os conteúdos do texto;
> Exercícios com o Matlab: são exercícios para usar o Matlab, que relacionam a teoria desenvolvida com procedimentos computacionais, para auxiliar na sua análise. (KOLMAN, 1998).

São dadas, separadamente, em um capítulo no final do livro, as aplicações relacionadas a todo o conteúdo, inclusive aplicações em Equações Diferenciais.

Em alguns exercícios é utilizado a ferramenta computacional, com a finalidade de auxiliar na análise das situações apresentadas e eliminar o trabalho dos cálculos.

A contribuição desta obra foi a de trabalhar os conceitos de Base e Dimensão, inicialmente, nos Espaços Bi e Tridimensional, para depois generalizar para o Espaço de dimensão n.

2.2.2 Algebra linear: com aplicações, de Anton Howard, 8. ed.

Já no Prefácio, o autor destaca o décimo primeiro capítulo, o qual consiste de 21 aplicações da Álgebra Linear escolhidas, segundo ele, nas áreas de conhecimento de Administração, Economia, Engenharia, Física, Ciência da Computação, Teoria da Aproximação, Ecologia, Sociologia, Demografia e Genética; cada uma delas vem antecedida por uma lista de pré-requisitos matemáticos. O autor explicita, ainda, que é dado "um tratamento elementar à Álgebra Linear e suas aplicações" e que "o objetivo é apresentar os fundamentos de Álgebra Linear e suas aplicações da maneira mais clara possível", e que, apesar do conteúdo de Cálculo não ser pré-requisito, são dados exemplos e sugeridos "exercícios, claramente assinalados, para alunos que têm conhecimento de Cálculo".

São assinaladas, no Prefácio, as seguintes mudanças feitas para esta edição:

Acréscimo de Exercícios que Requerem o Uso de Recursos Computacionais. – "Os exercícios foram projetados para acostumar o aluno com os comandos básicos necessários para resolver problemas de Álgebra Linear, usando recursos computacionais";

Acréscimo de Exercícios de Discussão e Descoberta. – Segundo o autor, são exercícios "mais abertos que os demais, incluindo verdadeiro/falso, conjecturas, descobertas e explicações informais sobre como chegar às conclusões";

Refinamento da Exposição. – Sem mudança substancial, partes do texto foram aprimoradas;

Uma Nova Aplicação em Deformações e Morfismos, para fornecer uma introdução às modernas técnicas de processamento de imagens disponíveis em computação gráfica.

Logo em seguida, o autor traz algumas características marcantes em sua obra, que são:

Relações entre os Conceitos. – É estabelecida, através de teoremas, uma relação intrínseca entre os assuntos estudados.

Transição Suave para a Abstração. – É colocado que, para o aluno, a transição do R^n para espaços vetoriais arbitrários é traumática, e que, por essa razão, "*esta transição foi suavizada, enfatizando a geometria subjacente aos conceitos e desenvolvendo as idéias centrais do R^n antes de passar a espaços vetoriais mais gerais*". (ANTON, 2001).

Apresentação Antecipada das Transformações Lineares e Autovalores. – Para evitar que Transformações Lineares e Autovalores se percam no final do período, alguns dos conceitos básicos destes assuntos são tratados antecipadamente em outros conteúdos, e mais adiante, no texto revisado, quando o assunto é tratado com maior profundidade.

Na linha dos exercícios, é colocado no Prefácio que, ao final de cada seção, aqueles começam com problemas rotineiros, evoluem para problemas de maior substâncias e finalizam com problemas teóricos, os quais são classificados pelo autor de exercícios regulares, e seguidos por problemas de “Discussão e Descoberta”. Há, ainda, exercícios suplementares que são mais rigorosos e exigem que o estudante pense em todo o capítulo e não só em uma seção específica, segundo o autor. Fechando a seção prática, têm-se os exercícios computacionais que utilizam as ferramentas Matlab, Maple e Mathematica, que são disponibilizadas no *site* <http//:www.wiley.com/college/anton>.

Evidencia-se a intenção de se utilizarem recursos geométricos e computacionais na exposição dos conteúdos, e de se mostrarem aplicações relacionadas a eles. Diferente da obra anterior, esta apresenta uma preocupação em fazer uma transição suave do Espaço Vetorial R^n para Espaços Vetoriais mais arbitrários.

Consultando o Sumário, identifica-se, no capítulo 5, o tema “Base e Dimensão”, o qual tem a seguinte disposição: Espaços Vetoriais Reais; Subespaços; Independência Linear; Bases e Dimensão; Espaço-Linha, Espaço-Coluna e Espaço-Nulo; Posto e Nulidade.

Constata-se, pela disposição do capítulo 5, uma ordem dos assuntos.

Dirigindo-se diretamente para a seção “Bases e Dimensão”, antes mesmo de uma leitura minuciosa, é possível identificar um apego aos recursos geométricos, devido ao grande número e qualidade das figuras apresentadas.

Nessa seção, o autor não começa com a definição de base, e sim com uma discussão de sistemas de coordenadas não-retangulares nos espaços bi e tridimensionais, apresentando como primeiro objetivo estender o conceito de sistema de coordenadas a Espaços Vetoriais arbitrários.

Logo após, o autor dá a seguinte definição para base de um espaço vetorial:

Definição: Se V é um espaço vetorial qualquer e $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é um conjunto de vetores em V, dizemos que S é uma base de V, se valerem as seguintes condições:

(a) S é linearmente independente;

(b) S gera V.

Segue-se o seguinte teorema, juntamente com sua demonstração:

Teorema: Unicidade da Representação em Base

Se $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então cada vetor em V pode ser expresso da forma $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n$ de uma única maneira.

É introduzida, antecipadamente, a definição de "Coordenadas em Relação a uma Base", e são dados, em seguida, seis exemplos trabalhando em R^n, P_n e M_{mn}, relacionando essas duas definições, e fechando com um sétimo exemplo, que relaciona base para o subespaço gerado por um conjunto S.

Antes de enunciar a definição de dimensão, são definidos Espaços Vetoriais de dimensão finita e infinita, e é dado o seguinte teorema com a sua demonstração:

Teorema: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ uma base qualquer de V.

(a) Um conjunto com mais do que n vetores é linearmente dependente;

(b) Um conjunto com menos do que n vetores não gera V.

Assim, conclui o autor que um dos resultados mais importantes em Álgebra Linear é dado por meio do teorema:

Teorema: Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

Portanto, toda uma preparação é dada para a seguinte definição de dimensão finita: *"A dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita V é definida como o número de vetores de uma base de V e denotada por dim(V). Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero."* (ANTON, 2001, p.179).

São dados dois exemplos: o primeiro envolvendo a dimensão dos Espaços Vetoriais R^n, P_n, M_{mn}, e o segundo, com relação à dimensão de um Espaço-solução. Em seguida, a seção é fechada com uma série de teoremas com suas demonstrações, que, segundo o autor, *"revelam a sutil inter-relação entre os conceitos de gerador, independência linear, base e dimensão",* e diz: *"[...] eles são essenciais ao entendimento de espaços vetoriais e neles são baseadas muitas das aplicações práticas da Álgebra Linear."* (ANTON, 2001, p.179).

Identifica-se, analisando a parte teórica desta seção, um cuidado muito grande com os conceitos e os resultados obtidos, os quais são descritos minuciosamente, demonstrados e exemplificados e, ainda, ilustrados geometricamente, sempre que possível.

Quanto aos exercícios, verifica-se que há uma seqüência gradativa de exercícios rotineiros e, em seguida, têm-se os exercícios classificados como "Discussão e Descoberta", dos quais é descrito, abaixo, um deles, como ilustração:

(a) A equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ pode ser vista como um sistema linear de uma equação em n incógnitas. Faça uma conjectura sobre a dimensão do espaço-solução desta equação;

(b) Confirme sua conjectura, encontrando uma base.

Esse procedimento está de acordo com o preconizado no Prefácio desta obra, pois o exercício descrito, acima, leva o estudante a fazer uma conjectura e depois confirmá-la através de um exemplo, fazendo com que o estudante desenvolva o raciocínio através da leitura e da reflexão e inter-relacione os conteúdos, fixando, desta maneira, os conceitos. Busca-se, dessa forma, interagir conteúdo e aluno, o que acontece em alguns exercícios de “Discussão e Descoberta”.

2.2.3 Álgebra linear e suas aplicações, de David C. Lay, 2 ed.

É informado no Prefácio desta obra que o texto fornece uma introdução elementar e moderna à Álgebra Linear e a algumas de suas aplicações interessantes. Nesse Prefácio, segundo o autor, são destacadas as seguintes características relevantes da obra:

Introdução Precoce de Conceitos-chave – As idéias fundamentais de Álgebra Linear são introduzidas no contexto concreto de R^n e generalizadas de modo natural, através da intuição geométrica desenvolvida inicialmente.

Uma Visão Moderna de Multiplicação Matricial – “*As definições e as demonstrações são feitas com as colunas, em vez dos elementos, de uma matriz*”. É explicitado que uma “*abordagem moderna simplifica muitos argumentos e une idéias de espaços vetoriais ao estudo de sistemas lineares.”* (LAY, 1999).

Transformações Lineares – Este assunto é tratado desde o primeiro capítulo, permeando todo o conteúdo da obra.

Autovalores e Sistemas Dinâmicos – É trabalhado através de Sistemas Dinâmicos, o que cria uma motivação, aliada às descrições gráficas de tais sistemas.

Ortogonalidade e Problemas de Mínimos Quadrados – É dado um tratamento mais amplo do que o usual em textos para iniciantes.

De acordo com o autor, nesse Prefácio, as características pedagógicas estão alicerçadas nas aplicações que ilustram o poder da Álgebra Linear para explicar princípios fundamentais e simplificar os cálculos; na forte ênfase geométrica com utilização de figuras inéditas e em maior quantidade; nos exemplos que são dados em maior quantidade e com maior riqueza de detalhes e, principalmente, no exemplo introdutório no começo de cada capítulo, que tem o objetivo de estimular a curiosidade para apresentação dos conceitos; nos teoremas e demonstrações, com a utilização, em alguns casos, de exemplos como auxiliares;

nos problemas resolvidos que ajudam a resolver exercícios propostos ou alertam para algum ponto sutil; nos exercícios que variam de rotineiros aos que contêm questões conceituais que necessitam de maiores reflexões, procurando aprofundar na compreensão do conteúdo, em vez de se limitarem a cálculos mecânicos, incluindo, também, exercícios que exigem uma justificativa escrita; e, finalmente, nos tópicos computacionais, os quais o texto chama a atenção, quando necessário.

A obra contém, aproximadamente, 200 exercícios para serem resolvidos com o auxílio de um programa para computadores do tipo do Matlab, Maple, Mathematica, Mathcad, Derive, ou uma calculadora programável com capacidade de manipular matrizes.

Encontra-se, no Prefácio, um diferencial das outras obras estudadas nesta pesquisa, que é uma seção que trabalha com aplicações às equações diferenciais em circuitos elétricos.

Como o Prefácio, geralmente, é a carta de intenções de uma obra, na qual se pode prever como o autor vai fazer a exposição dos conteúdos, neste, pode-se dizer que há uma boa apresentação de seu intuito, porém, não é possível perceber uma preocupação com uma abordagem interativa dos conteúdos. O que se tem é um indicativo, percebido nas entrelinhas, de que isso pode acontecer nas listas de exercícios.

No Sumário, é apresentada a seguinte disposição, para o capítulo 4, no qual se encontra os conteúdos de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial: Exemplo Introdutório: Vôo espacial e Sistemas de Controle; Espaços Vetoriais e Subespaços; Espaço Nulo, Espaço das Colunas e Transformadas Lineares; Conjuntos Linearmente Independentes; Bases; Sistemas de Coordenadas; Dimensão de Espaço Vetorial; Posto; Mudança de Base; Aplicações às Equações de Diferenças; Aplicações a Cadeias de Markov; Exercícios Suplementares.

As novidades, nessa apresentação, são, basicamente, as seguintes:

O conteúdo Base é discutido junto com conjuntos linearmente independentes.

Bases e Dimensão são separadas pela seção que trata de sistemas de coordenadas.

As duas últimas seções são reservadas às aplicações.

Na seção: "Conjuntos Linearmente Independentes; Bases" são dadas, inicialmente, as definições de Conjunto Linearmente Independente e Dependente, juntamente com um teorema sobre Conjunto Linearmente Independente e dois exemplos sobre o tema, para, em seguida, dar a seguinte definição de Base de um Subespaço Vetorial:

Definição: Seja H um subespaço de um espaço vetorial V.

Um conjunto indexado de vetores $B = \{\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_p\}$ em V é uma base para H se:

(i) B é um conjunto linearmente independente, e

(ii) O subespaço gerado por B coincide com H; isto é, $H = Span\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_p\}$.

Comparando com as definições de Base nas outras duas obras analisadas, pode-se dizer que essa última tem uma linguagem mais rigorosa do que as outras, no sentido do formalismo matemático.

No parágrafo seguinte da seção mencionada, o autor esclarece que a definição de Base se aplica ao caso em que H = V, e dá uma explicação da definição quando H $\neq$ V.

Em seguida, são dados cinco exemplos ilustrando a definição de base.

Antes de enunciar o teorema do Conjunto Gerador, é dado um exemplo mostrando que uma Base é um Conjunto Gerador que não contém “vetores desnecessários”.

Teorema: Teorema do Conjunto Gerador

Seja $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ um conjunto em V e seja $H = Span\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$.

a. Se um dos vetores de S --- digamos, $\vec{v}_k$ --- é uma combinação linear dos demais vetores de S, então o conjunto obtido de S removendo $\vec{v}_k$ ainda gera H.

b. Se $H \neq \{\vec{0}\}$, então algum subconjunto de S é uma base para H.

Depois da demonstração desse teorema, é dado um algoritmo simples para se obter uma Base para o Espaço das Colunas de uma Matriz A (ColA), através de dois exemplos que, também, ilustram o seguinte teorema:

Teorema: As colunas pivôs de uma matriz A formam uma base para ColA.

Logo após, é dada a sua demonstração, seguida da seguinte observação:

“Tenha o cuidado de usar as próprias colunas de A como uma base para ColA. Muitas vezes as colunas da forma escalonada reduzida B não pertencem ao espaço das colunas de A”. (LAY, 1999, p.217).

O autor termina a seção concluindo que uma Base é o menor conjunto que gera um Espaço Vetorial e o maior conjunto linearmente independente deste Espaço. É dado um exemplo, seguido de três exercícios resolvidos, e exercícios propostos, que se subdividem em: exercícios numéricos rotineiros; exercícios do tipo verdadeiro e falso, que fixam o conteúdo da seção; exercícios mais elaborados de demonstração; e dois exercícios computacionais.

Antes de tratar do conteúdo da Dimensão de Espaço Vetorial, é aberta uma seção que trabalha o tema: Sistemas de Coordenadas.

Ao iniciar a seção: “Dimensão de Espaço Vetorial”, é colocado que o assunto dará uma visão adicional das propriedades das Bases, e então enuncia e demonstra os seguintes teoremas:

Teorema: Se um espaço vetorial V tem base $B = \{\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_n\}$, então todo subconjunto de V contendo mais de n vetores é linearmente dependente.

Teorema: Se um espaço vetorial V tem uma base com n vetores, então toda base de V também tem exatamente n vetores.

Com isso, tem-se toda uma preparação para a seguinte definição de Dimensão de um Espaço Vetorial V:

Definição: Se V é gerado por um conjunto finito, então V é chamado de Espaço de dimensão finita, e a dimensão de V, denotada por dimV, é o número de vetores de qualquer Base de V. A Dimensão do Espaço Vetorial trivial $\{\vec{0}\}$ é definida como sendo igual a zero. Se V não é gerado por um conjunto finito, então ele é chamado de Espaço de Dimensão Infinita.

São dados três exemplos numéricos e um quarto exemplo que trata dos Subespaços do R^3, no qual é usado um recurso geométrico que pode auxiliar a sua compreensão.

Em seguida, o autor trata dos Subespaços de um Espaço de Dimensão Finita, enunciando e demonstrando os seguintes teoremas:

Teorema: Seja H um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita. Todo subconjunto de H linearmente independente pode ser expandido, se necessário, até formar uma base para H. Mais ainda, H é de dimensão finita e $\dim(H) \leq \dim(V)$.

Teorema: Teorema da Base

Seja V um espaço vetorial p-dimensional, $p \geq 1$. Todo subconjunto linearmente independente com exatamente p elementos é automaticamente uma base para V. Todo subconjunto com exatamente p elementos e que gera V é automaticamente uma base para V.

Os exercícios desta seção têm a mesma metodologia dos exercícios analisados na seção: *"Conjuntos Linearmente Independentes; Bases"*.

A análise da obras pesquisadas, procurou identificar métodos que privilegiem a interação entre conteúdo e aluno, no sentido de levá-lo a desenvolver o raciocínio através da leitura e da reflexão e de inter-relacionar os conteúdos, contribuíndo, desta maneira, para a comprreensão dos conceitos. Como especificado acima, existem fatores específicos de cada obra, que colaboram para o entendimento dos conteúdos analisados.

2.3 Ensino-aprendizagem de álgebra linear – produção acadêmica

Após o levantamento da dificuldade no ensino e aprendizagem em Álgebra Linear, observada com base na experiência docente do pesquisador, foram analisados resultados de pesquisas que tratam do assunto, para verificar se este problema também é enfrentado por outros professores, em diversas localidades no Brasil e no Exterior.

Foram selecionadas as pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, ou a assuntos precedentes a esse tema. Dessa forma, chegou-se aos seguintes trabalhos:

Araújo (2002): "A Metamatemática no Livro Didático de Álgebra Linear".

Grande (2005): "A Noção de Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica".

Oliveira (2005): "Como Funcionam os Recursos-Meta em Aula de Álgebra Linear?".

Padredi (2003): "'As alavancas Meta' no Discurso do Professor de Álgebra Linear".

Silva (1997): "Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear".

Os trabalhos foram analisados com a intenção de identificar problemas e soluções envolvendo o ensino e o aprendizado de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, e também identificar as possíveis metodologias de ensino que facilitam este aprendizado. Essa análise visou estabelecer direções que colaborem na elaboração de atividades informatizadas, para contribuir com o ensino e com a aprendizagem de Álgebra Linear.

Na dissertação de Araújo (2002): "A Metamatemática no Livro Didático de Álgebra Linear", é colocada a dificuldade no ensino e na aprendizagem de Base de um Espaço Vetorial, a qual é atribuída, entre outros fatores, à maneira como é abordada essa noção, e à forma abstrata e axiomática utilizada para o seu tratamento.

Na busca de uma solução para esse problema, é apontado o caminho do grupo de pesquisa de Dorier: *"[...] procurar metamatemáticas eficientes, que possam levar o aluno a refletir e compreender melhor a noção estudada"*. (DORIER, 1997, apud ARAÚJO, 2002). Essa Metamatemática é denominada por esse grupo de "alavancas meta", que são tudo que diz respeito ao uso de informações ou conhecimentos sobre a Matemática.

Araújo (2002) faz uma análise qualitativa de três dos livros mais utilizados na disciplina de Álgebra Linear, das principais Universidades de São Paulo, com o objetivo de encontrar alavancas meta que levem o aluno à compreensão de conceitos de Espaços

Vetoriais, especificamente, Base de um Espaço Vetorial.

Ao final de sua análise, chega à seguinte conclusão:

> [...] os três livros indicados pelas mais tradicionais Universidades de São Paulo não trazem sugestões de alavancas meta e utilizam um formalismo que, embora essencial para a teoria, em um primeiro curso deveria ser menos enfatizado e uma abordagem mais intuitiva deveria ser utilizada para tornar claro o papel unificador e generalizador da teoria [...]. (ARAÚJO, 2002, p.86).

No trabalho de Araújo (2002), é constatada a dificuldade no ensino e aprendizado de Álgebra Linear, mas não é encontrado nenhum recurso, ou alavancas meta, para colaborar no ensino e aprendizado de Base de um Espaço Vetorial. Muito menos pode-se identificar uma interação conteúdo e aluno, que pudesse funcionar como alavanca meta nos livros analisados. No entanto, é deixada por ele uma sugestão de utilizar menos o formalismo e adotar uma abordagem mais intuitiva. Essa foi a contribuição do trabalho de Araújo (2002), adotada dentro das atividades do *SOFTWARE* criado nessa pesquisa.

Na pesquisa de Grande (2005), "A Noção de Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica", são analisados os capítulos referentes à Dependência Linear de cinco livros didáticos, na identificação de Registros de Representação Semiótica da teoria de Raymond Duval (1999), e de como esses registros são articulados, quais são os tratamentos e as suas conversões.

Segundo Duval (1999), as representações semióticas *"são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento"*. (DUVAL, 1993, apud GRANDE, 2005, p.63).

As representações semióticas, quando representam um objeto matemático, são denominadas por Duval de sistemas semióticos, que, conforme Grande (2005), *"[...] são importantes não somente como um sistema de comunicação, mas também para organizar informações a respeito do objeto representado"*. (GRANDE, 2005, p.63).

Grande (2005), recomenda que se explore, inicialmente, o registro geométrico, o que aponta na direção de trabalhar os primeiros conceitos de Álgebra Linear no R^2 *e* R^3, para uma posterior generalização para o R^n e outros Espaços Vetoriais arbitrários. Porém, conforme ele relata: *"[...] não foi encontrado nos livros didáticos analisados nenhuma atividade, exercício ou até mesmo uma situação que permitisse a conversão utilizando-se o registro geométrico"*. (GRANDE, 2005, p.178).

A contribuição de Grande (2005) para a criação das atividades encontradas no

SOFTWARE de Apoio ao Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear foi de trabalhar os conceitos e definições, inicialmente, em R^2 *e* R^3.

Em relação à dificuldade na aprendizagem de Álgebra Linear em outros países, é apresentado na dissertação de Oliveira (2005) – "Como Funcionam os Recursos-Meta em Aula de Álgebra Linear?" – que um grupo francês, composto por pesquisadores da Didática da Matemática, fez um levantamento, desde a década de 80, e obteve o seguinte resultado:

> [...] sobre as principais dificuldades encontradas pelos estudantes franceses no primeiro ano da universidade. O resultado apontou que a forma axiomática utilizada para tratar as primeiras noções da Álgebra Linear, como espaço vetorial e base, causa no aluno uma sensação de fracasso que o impede de avançar no aprendizado. (OLIVEIRA, 2005, p.14).

Segundo Oliveira (2005), existe, também, nos Estados Unidos, dificuldade na aprendizagem de Álgebra Linear. No livro *On the Teaching of* Linear Álgebra, de Jean Luc Dorier, no capítulo *Three Principles of Learning and Teaching Mathematics*, de autoria de Guershon Harel (2000), é colocado que:

> [...] em 1990, nos Estados Unidos da América (EUA), foi formado um grupo de professores de vários departamentos de Matemática de diferentes Universidades, denominado Linear Álgebra *Curriculum Study Group* (LACSG), do qual ele fazia parte e cujo objetivo era encaminhar propostas relativas ao ensino e aprendizagem da Álgebra Linear. (HAREL, 2000 apud OLIVEIRA, 2005, p.16).

Nesse mesmo capítulo, Harel (2000) retira das propostas do LACSG três princípios:

O Princípio da concretização – Esse princípio consiste em criar situações concretas, possibilitando a visualização, pelo aluno, do conceito trabalhado. Dessa forma, é aberto um canal de entrada para abstrair a estrutura matemática envolvida naquele modelo.

O Princípio da necessidade – Tem de existir uma necessidade intelectual, por parte do aluno, daquilo que pretende aprender. Sem esse estímulo, torna-se difícil a aquisição do conhecimento, apesar de todo o recurso que se possa disponibilizar para a sua obtenção.

O Princípio da generalização – É importante que as atividades, além de apresentarem os conceitos e as definições utilizando sempre que possível o concreto, a fim de estabelecer um modelo da estrutura matemática envolvida, permitam e estimulem a generalização desses conceitos e definições.

Portanto, as dificuldades no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear estão presentes em diversas universidades, também fora do Brasil.

O objetivo da pesquisa de Oliveira é investigar *"o emprego de recursos-meta em sala de aula de Álgebra Linear, focando o ensino da noção de Base de um Espaço Vetorial"*

(OLIVEIRA, 2005, p.118), o que se assemelha muito com a pesquisa de Araújo (2002), com relação à procura de recursos-meta, embora seja em livros didáticos.

Oliveira (2005) destaca os recursos-meta utilizados em sala de aula, e quais se tornaram alavanca-meta para algum aluno desta sala: *"Dentre os nove recursos-meta empregados nas entrevistas, só dois deles não se constituíram em alavanca-meta para essa amostra de alunos".*(OLIVEIRA, 2005, p.120).

Dentre eles, os que foram julgados mais pertinentes para contribuir para a pesquisa da Criação de um *Software* Educativo para o Ensino de Álgebra Linear – Base e Dimensão são:

a) Problemas propostos na primeira parte da atividade "Aula 2: Espaços Vetoriais". – São problemas que mostram coincidências estruturas dos Espaços Vetoriais. Segundo Oliveira (2005): *"[...] quando lançam mão de "coincidências" estruturais dos conjuntos para atingir a descontextualização via definição de Espaço Vetorial, que apresenta um discurso sobre Espaços Vetoriais, isto é, recurso-meta."* (OLIVEIRA, 2005, p.49)

Elaborar atividades as quais mostram coincidências estruturais, tem um papel importante na compreensão do conceito de Espaço Vetorial.

b) Retomada da Atividade "Aula 3: Subespaços Vetoriais" – Encontrava-se, nesta atividade, a definição de Subespaço Vetorial. De acordo com Oliveira (2005):

O professor alerta os alunos sobre o fato de que nem sempre é preciso trabalhar com todo o Espaço Vetorial, pois, geralmente, pode-se trabalhar com um seu subconjunto. Aqui o professor utiliza o recurso-meta de antecipar uma noção a ser introduzida, sugerindo uma vantagem "à guisa" de motivação. (OLIVEIRA, 2005, p.55).

Com relação a esse recurso-meta, elaborar atividades com o intuito de antecipar resultados pode colaborar para o aprendizado do conceito de Dimensão de um Espaço Vetorial.

c) Questionamento – Esse recurso é usado quando o professor, na pesquisa de Oliveira (2005), solicita do aluno a noção de Subespaço Vetorial ao perguntar: "é possível garantir que um Subespaço Vetorial é Espaço Vetorial, sem verificar os oito axiomas de Espaço?" Em seguida, Oliveira destaca a importância do questionamento ao citar Dorier: *"[...] este recurso-meta pode fazer o aluno refletir sobre a noção matemática em evidência".* (OLIVEIRA, 2005, p.57). Portanto, é desejável utilizar questionamentos para o desenvolvimento de atividades para levar o aluno à reflexão.

d) Exemplos com Vetores da Geometria Analítica – Para trabalhar com Combinação Linear, foi criada uma situação concreta com vetores. Logo em seguida, relacionou-a com a *"idéia de matrizes de ordem 2 x 2"* (OLIVEIRA, 2005, p.66), fazendo com que os alunos percebessem a necessidade de uma técnica. Oliveira afirma que foram usados dois dos três princípios de Harel: o da concretização e o da necessidade.

Nesse sentido, atividades que trabalhem no R^2 e R^3 podem facilitar o entendimento e uma possível generalização de conceitos.

e) Fornecer Informações Sobre o que Constitui o Conhecimento Matemático – Para trabalhar o conceito de Independência Linear, foi feito um diálogo com os alunos, levando-os a *"refletir nas vantagens de um conjunto gerador minimal".* (OLIVEIRA, 2005, p.70). A intenção foi chegar à idéia de que, se num conjunto um vetor é combinação linear dos demais, então este conjunto é linearmente dependente.

Uma atividade que leve o aluno à reflexão, para constituição de conceitos, é uma forma de interação entre conteúdo e aluno.

Portanto, a pesquisa de Oliveira (2005) pode dar uma contribuição para a elaboração de atividades no *software* educativo para o ensino de Álgebra Linear, levando-se em conta os recursos-meta identificados nela.

Analisando a pesquisa de Padredi (2003): "As alavancas Meta" no Discurso do Professor de Álgebra Linear, que teve como objetivo identificar os recursos-meta utilizados por professores universitários, na disciplina de Álgebra Linear, percebe-se uma aproximação muito grande com a pesquisa de Araújo (2002): "A Metamatemática no Livro Didático de Álgebra Linear", que analisa três livros de Álgebra Linear com o objetivo de encontrar alavancas meta para compreensão de conceitos de Espaços Vetoriais, e principalmente com a de Oliveira (2005): "Como Funcionam os Recursos-Meta em Aula de Álgebra Linear", a qual teve como objetivo o emprego de recursos-meta em sala de aula de Álgebra Linear.

Nas entrevistas realizadas por Padredi com professores de Álgebra Linear, para encontrar recursos-meta que possam se transformar em alavancas meta, foram destacados os seguintes pontos:

I) O Princípio da Necessidade e da Generalização – Esse princípio está no discurso do professor quando diz da vantagem de encontrar um menor conjunto que gera um Espaço Vetorial. Oliveira (2005) e Araújo (2002) também destacam esses recursos. É dada uma prioridade na necessidade de uma Noção de Base de um Espaço Vetorial, para facilitar o trabalho dentro dessa estrutura.

II) O Princípio da Concretização – A idéia de trabalhar no R^2 e R^3, para depois generalizar para outros Espaços Vetoriais mais arbitrários, constitui num recurso que pode ser utilizado na criação de um *software* educativo que colabore para o entendimento de conceitos.

III) Relacionar Computação Gráfica – Esse recurso foi identificado na abordagem das transformações de plano, feita por um dos professores entrevistados. A utilização de tecnologias computadorizadas é o foco da pesquisa da criação de um *software* educativo para o ensino de Álgebra Linear.

IV) Passagem do Antigo para o Novo – Relacionar a Álgebra Linear com a Geometria Analítica, iniciando com $R^2 \ e \ R^3$ como o concreto, para depois generalizar em outros Espaços Vetoriais. Aqui encontra-se um grande recurso para trabalhar as atividades do *SOFTWARE*, dando significação ao seu contexto, para facilitar a aquisição dos conceitos.

V) Aplicações Compreensíveis aos Alunos Iniciantes – É encontrada no discurso de mais de um professor a importância de trabalhar com aplicações que sejam de fácil entendimento para o aluno, pois, desta maneira, pode-se fixar conceitos e definições.

Podem-se selecionar aplicações de alguns conceitos, de tal forma que o aluno não se perca na compreensão dos conhecimentos adjacentes, possibilitando o entendimento das relações estabelecidas entre eles. Esse caminho pode ser muito útil para atingir a aprendizagem no ensino de Álgebra Linear. Porém, Padredi (2005) conclui em sua pesquisa que: *"não existem aplicações que pudessem inspirar a elaboração de situações problema condizentes com os conhecimentos dos alunos de um primeiro curso [...]"* (PADREDI, 2005, p.116). Nesse momento, o computador pode colaborar para criar essa possibilidade.

VI) Provocações – Na introdução das noções de Álgebra Linear, foram detectadas formas coloquiais e provocações, nos discursos dos professores, tais como: "tijolos", "parede", "vetores bem comportados", "grau de liberdade", etc. Isso estabelece analogias que podem contribuir para a passagem do concreto para a generalização, na medida em que o aluno estabelece relações significativas para ele.

Aqui se encontra um recurso que pode ser usado nos enunciados de atividades e aplicações, para ligar analogias aos conceitos, visando à apropriação de conhecimentos.

VII) Enfatizar as Operações de Adição e Multiplicação por Escalar – Evidenciar que essas operações estão presentes em qualquer Espaço Vetorial e que, através delas, é possível caracterizar um elemento genérico por meio de um conjunto finito de vetores, estabelece, antecipadamente, a idéia de Combinação Linear e Independência Linear, recurso que leva o aluno a reflexões e colabora para a criação da noção de Base de um Espaço Vetorial.

Por fim, mas não menos importante, Padredi destaca o seguinte recurso utilizado por todos os professores: *"Fornecer informações sobre a natureza das noções a serem introduzidas [...]"*.(PADREDI, 2005, p.119).

Todos os recursos-meta identificados na pesquisa de Padredi (2005) constituem-se numa valiosa fonte para elaborações de atividades que podem colaborar na criação de um *software* educativo para o ensino de Álgebra Linear.

Na dissertação de Silva (1997): "Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear", o objetivo é analisar a produção de significados para a noção de Base em Álgebra Linear, a partir do Modelo Teórico dos Campos Semânticos, que, segundo o autor, é *"um modelo epistemológico que nos permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em Matemática."*(SILVA, 1997, p.18).

A compreensão de aspectos do processo de produção de significados em Matemática pode contribuir para a elaboração de atividades em um *software* de apoio ao ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, na medida em que essas atividades possam dar significados consideráveis para a aquisição dos conceitos abstratos que envolvem as definições de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial.

Nesta direção, inicialmente, são identificados por Silva (1997) os campos semânticos utilizados pelos matemáticos que, historicamente, contribuíram para a constituição da noção de Base, descritos a seguir:

- Campo Semântico das Soluções Independentes – Refere-se ao núcleo constituído por Frobenius, que, de acordo com Silva (1997), tinha como objetos: determinantes, sistemas homogêneos, soluções de sistemas homogêneos, soluções independentes, posto, matriz, etc. Neste núcleo, a noção de Base é construída dentro das soluções de um sistema homogêneo.
- Campo Semântico dos Quatérnios – Atribuído a Hamilton por operar com os seguintes objetos: números complexos, quatérnios, propriedades algébricas, operações com números complexos e quatérnios, a noção de vetor, pares, ternos e quadras ordenadas. Trabalhando com estes objetos, Hamilton "constituiu a noção de base de quatérnios". (SILVA, 1997, p.43).
- Campo Semântico Grassmaniano – Neste campo, os objetos são: grandezas extensivas, deriváveis e elementares e sistemas de unidades. Com os objetos deste núcleo, Grassman chegou à noção de Base.
- Campo Semântico do Sistema Linear Operando com os objetos: pontos, segmentos, superfícies e volumes por meio de sistemas, Peano constituiu a noção de Base, estabelecendo, segundo Silva (1997), o campo semântico do sistema linear. Dentro desse contexto, podemos destacar os campos semânticos das soluções independentes e do sistema linear como norteadores para a criação de atividades que podem promover a produção de significados para a noção de Base, uma vez que o assunto sistemas lineares precede o estudo de Espaços

Vetoriais nos cursos de Licenciatura em Matemática nas três Universidades estudadas nesta pesquisa.

Em seguida, Silva (1997) apresenta uma série de frases para a noção de Base, geradas a partir da leitura de alguns livros-texto dos autores discriminados a seguir.

Gonçalves (1978) - A partir da leitura de Gonçalves (1978) e Silva (1997) enuncia a seguinte definição de Base: “Base de um espaço vetorial é um conjunto ordenado de vetores que possui as propriedades de gerar o espaço e ser linearmente independente.” (SILVA, 1997, p. 64).

Birkhoff e Maclane (1980) - Com relação aos textos desses autores, Silva (1997) gera as seguintes definições, com significados diferentes, para Base:

> 1ª Uma base de um espaço vetorial é um conjunto de vetores geradores do espaço tal que o número de vetores desse conjunto é igual à dimensão do espaço.
>
> 2ª Uma base é um conjunto de vetores linearmente independente de um espaço vetorial tal que o número de vetores desse conjunto é igual à dimensão do espaço. (SILVA, 1997, p.65).

Por último, destaca que, dado um sistema de coordenadas, podemos determinar as coordenadas de um vetor de um único modo, o que motiva a seguinte frase elaborada por ele, para Base: “Uma base é um sistema de coordenadas.” (SILVA, 1997, p.67).

De acordo com essas definições, são trabalhados os conceitos de Conjunto Gerador e Conjunto Linearmente Independente, além de preparar o caminho para a definição de Dimensão de um Espaço Vetorial. Dentro desta perspectiva, esses conceitos podem ser condutores para aquisição da noção de Base e Dimensão, por meio de atividades informatizadas que trabalhem inicialmente a definição de Combinação Linear.

Carvalho (1979) - Do texto de Carvalho (1979), Silva (1997) traz a seguinte proposição: “Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto linearmente independente maximal.” (SILVA, 1997, p.68).

A idéia de atribuir o significado de que Base é o maior Conjunto Linearmente Independente que gera o Espaço Vetorial pode ajudar a compreender esse conceito, na medida em que sejam elaboradas atividades que relacionem esses conceitos, criando um campo semântico que poderá dar ao aluno um significado relevante para o entendimento da noção de Base e Dimensão.

Steinbruch e Winterle (1987) - Pela análise dos textos desses autores, é destacada a seguinte proposição: “Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto gerador sem vetores supérfluos ou um conjunto gerador minimal.” (SILVA, 1997, p.71).

Analogamente ao item anterior, é verificado que o menor conjunto que gera um Espaço Vetorial é uma base para esse Espaço. Esse significado constitui-se num ponto que deve ser observado na elaboração de atividades para auxiliar na aprendizagem desse conhecimento, pois traz a idéia de "dispensar" vetores de um conjunto que não farão falta para gerar qualquer vetor de um Espaço Vetorial.

Para Silva (1997), as frases produzidas pela leitura dos textos dos autores selecionados podem gerar diversos significados que se constituirão em núcleos distintos que operarão com objetos diversos, caracterizando diferentes campos semânticos.

Finalizando, o autor faz um estudo de caso, onde ele aponta que "[...] os significados produzidos pelo aluno são em relação aos núcleos que eles próprios constituíram." (SILVA, 1997, p. 114).

Portanto, algo que pode ser observado na produção de atividades informatizadas é a diversificação de objetos que, aliados com a interação que o computador pode propiciar, levem o aluno a criar seu próprio núcleo, gerando um processo de produção de significados para o entendimento da noção de Base e Dimensão.

3 MEDIAÇÃO DO COMPUTADOR NA EDUCAÇÃO

3.1 Tecnologias informatizadas na educação

Inicialmente, foi objetivo final desta pesquisa a criação de software educativo para o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, que, conforme Oliveira, Costa e Moreira (2001, p.73), "é uma classe de software educacional cujo objetivo é favorecer os processos de ensino-aprendizagem"; este, por sua vez, se caracteriza por "sua inserção em contextos de ensino-aprendizagem [...] mesmo que não tenha sido produzido com a finalidade de uso no sistema escolar".

As características que devem apresentar um software educativo, segundo Oliveira, Costa e Moreira (2001), são:

> - Definição e presença de uma fundamentação pedagógica que permeie todo o seu desenvolvimento;
> - Finalidade didática;
> - Interação entre aluno/usuário e programa, mediada pelo Professor;
> - Facilidade de uso. (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001, p.74).

Para um software educativo que promova o ensino de um conteúdo de maneira independente, possibilitando a interação do conteúdo com o aluno, com o professor e com outros alunos, e que permita, além disso, a intervenção do professor quando necessário, é desejável que a concepção teórica de aprendizagem seja o Construtivismo, pois este permeia a interação do conteúdo com o aluno, por meio da ação do estudante com o objeto do conhecimento, abstraindo, num processo reflexivo, o conteúdo, através da sua própria ação.

Um software educativo, na concepção construtivista, segundo Vieira (2008), em seu artigo – "Avaliação de Software Educativo: reflexões para uma análise criteriosa" –, dentre outras características, deve "ser um ambiente interativo que proporcione ao aprendiz investigar, levantar hipóteses, testá-las e refinar suas idéias iniciais", o que não é algo fácil de desenvolver num programa que exige uma equipe diversificada e altamente especializada, agregado a uma série de recursos de programação.

É necessário, antes de analisar as dificuldades no desenvolvimento de um software educativo, identificar as características centrais da concepção de aprendizagem construtivista, uma vez que esta norteará o seu desenvolvimento. Segundo Oliveira, Costa e Moreira (2001, p.34), “para Piaget a inteligência é o saldo adaptativo do homem nas suas interações com o meio”, ou seja, é “[...] o saldo das trocas dialéticas que o indivíduo realiza com o meio [...], às quais dão origem ao conhecimento e à formação de estruturas cognitivas específicas para o ato de conhecer”, denominadas por Piaget de estruturas mentais “responsáveis pela nossa capacidade de estabelecer relações”.

Possibilitar recursos que colaborem para que haja uma troca entre o indivíduo e o meio pode estabelecer relações que darão origem ao conhecimento. Nesse sentido, o computador é uma ferramenta que idealiza modelos para o desenvolvimento dessas estruturas mentais indispensáveis para o ato de conhecer.

Laudares e Miranda defendem:

> Uma relação entre o processo de produção e as demandas da sociedade, numa constante intervenção intencional na realidade, baseada na atividade prática, produz construções mentais, que são componentes da estrutura do saber científico ou a gênese do que se denomina teoria. (LAUDARES; MIRANDA, 2007, p.71).

Para Piaget, como relata Oliveira, Costa e Moreira (2001, p.35), “a inteligência funciona sempre seriando, ordenando, classificando ou fazendo implicações”. Isso estabelece uma lógica subjacente às ações que geram um processo responsável pela formação das estruturas mentais, às quais “são construídas mediante as trocas realizadas com o meio do conhecimento”. A esse processo dialético de construção recorrente Piaget dá o nome de gênese, que é o “objeto da epistemologia genética desenvolvida por ele”, a qual:

> Ocorre mediante um sistema de auto-regulações progressivas, à medida que o organismo procura compensar o desequilíbrio causado pela pressão do meio e o funcionamento desse sistema resulta na construção do conhecimento e na seqüência de estágios no desenvolvimento da inteligência. (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001, p.36).

Atividades desenvolvidas em um software educativo, elaboradas de modo a propiciar desequilíbrios, podem, na tentativa de retomar uma acomodação, ajudar o aluno a construir o conhecimento e a desenvolver a inteligência. Mas é necessário que essas atividades façam do aluno o sujeito da ação, pois, caso contrário, corre-se o risco de não promover situações que colaborem para a busca do equilíbrio.

Deve-se criar uma estrutura em um sistema de relações, por meio de ações executadas sobre as atividades elaboradas na direção da construção de determinado conceito, que auxiliem o aluno a criar uma representação para a construção do conhecimento. A integração das atividades do software educativo, dentro de um sistema de relações, pode ocorrer através de experiência física e experiência lógico-matemática, que, conforme Oliveira, Costa e

Moreira (2001, p.37), Piaget classificou em dois tipos de abstração: a empírica (resultados constatáveis) e a “reflexiva, que decorre da construção de relações entre objetos com as suas duas formas: reflexionamento e reflexão”, estabelecendo, dessa forma, uma recursividade no processo de desenvolvimento. O papel do software educativo pode ser o de possibilitar, por meio de atividades empíricas, a constatação de resultados, e através de relações entre conteúdos estabelecer reflexões.

De acordo com Oliveira, Costa e Moreira (2001, p.38), Piaget explica a formação do conhecimento, do pensamento e da inteligência, também, por meio do que ele denomina “Equilibração Majorante”. “Para ele, os processos mentais resultam de uma interação adaptativa do indivíduo ao meio do conhecimento por organizações progressivas explicadas pelos processos de “Assimilação” e de “Acomodação”, das quais discorre Vieira do seguinte modo:

> Todas as idéias tendem a serem assimiladas às possibilidades de entendimento até então construídas pelo sujeito. Se ele já possui as estruturas necessárias, a aprendizagem tem o significado real a que se propôs. Se, ao contrário, ele não possui essas estruturas, a assimilação resulta no ERRO CONSTRUTIVO. Diante disso, havendo o desafio, o sujeito faz um esforço contrário ao da assimilação. Ele modifica suas hipóteses e concepções anteriores ajustando-as às experiências impostas pela novidade que não foi passível de assimilação. É o que Piaget chama de ACOMODAÇÃO: o sujeito age no sentido de transformar-se em função das resistências impostas pelo objeto. (VIEIRA, 2008).

Quando o indivíduo interage com o conteúdo, por meio do software, este deve promover situações de desequilíbrio, para que haja a construção do conhecimento por meio da equilibração, a qual pode ser obtida através da “Assimilação” e da “Acomodação”, desde que as atividades elaboradas para esse fim sejam pensadas de modo a dar condições para o aluno criar estruturas mentais para estabelecer relações. Havendo desequilíbrio diante de um obstáculo, surge a necessidade de buscar o reequilíbrio, podendo acontecer, neste momento, a “Abstração Reflexiva”, onde, segundo Vieira (2008) “[...] se dá a construção do conhecimento lógico – matemático (inteligência), resultando num equilíbrio superior e na conseqüente satisfação da necessidade”.

Portanto, o erro apresenta uma conotação importante no processo de aprendizagem, pois discutindo-o, imediatamente, quando ocorre, o aluno pode utilizá-lo como um obstáculo a ser superado (desequilíbrio), e neste exercício chegar a uma abstração reflexiva, podendo atingir o equilíbrio superior, satisfazendo, desse modo, ao Princípio da necessidade discutido no Capítulo 1 desta pesquisa, na seção 1.3 Ensino-aprendizagem de Álgebra Linear – produção acadêmica.

A passagem de um estado de menor equilíbrio para um de maior equilíbrio é estabelecida por uma seqüência de estágios do desenvolvimento cognitivo, que caracteriza, segundo Piaget, a formação da inteligência, conforme destaca Oliveira:

> ▪ Estágio da Inteligência Sensório-motora
> A inteligência é essencialmente prática e regulada pela percepção.
> ▪ Estágio da Inteligência Lógico-concreta
> Subdivide em dois subestágios: o da Inteligência Pré-operatória que envolve, basicamente, a aquisição inicial da linguagem e as manifestações do pensamento intuitivo e o da Inteligência Operatório-concreta que é a fase final da inteligência Lógico-concreta. Nela, o indivíduo, ao raciocinar, mostra a presença da reversibilidade, da invariância e da coordenação de relações.
> ▪ Estágio da Inteligência Lógico-formal
> O indivíduo avança na direção de raciocínios que já não carecem de apoio no real. O pensamento passa a se regular por raciocínios formais e abstratos. (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001, p.39).

A abstração em termos de suas relações com as tecnologias intelectuais, segundo definiu Lévy (1974, p.159), *"é todo problema fora de nossas capacidades de manipulação e de reconhecimento imediatos"* e que para resolvê-lo é necessário um sistema de representações externas que os transforme de tal maneira a possibilitar o uso de uma série de operações simples e concretas as quais são realizadas por meio de nossas faculdades operativas e perceptivas. Dentro dessa perspectiva, o *software* pode ser utilizado para criar um sistema de representações externas que darão condições para o aluno operar concretamente na solução do problema.

De acordo com Oliveira, Costa e Moreira (2001), o *software* educativo pode ser utilizado não só para a aprendizagem, mas também para o desenvolvimento da inteligência do aluno, pois pode promover a interatividade e propiciar uma mediação pedagógica entre aluno e conteúdo, dentro dos estágios de inteligência formulados por Piaget.

Neste contexto, o uso de tecnologia é discutido como uma mediação pedagógica, a qual só tem sentido se aliada a vários recursos. Mediação pedagógica, segundo Masetto (2000), é:

> [...] a atitude, o comportamento do professor que se coloca como um facilitador, incentivador ou motivador da aprendizagem, que se apresenta com a disposição de ser uma ponte entre o aprendiz e sua aprendizagem – não uma ponte estática, mas uma ponte "rolante", que ativamente colabora para que o aprendiz chegue aos seus objetivos. É a forma de se apresentar e tratar um conteúdo ou tema que ajuda o aprendiz a coletar informações, relacioná-las, organizá-las, manipulá-las, discuti-las e debatê-las com seus colegas, com o professor e com outras pessoas (interaprendizagem), até chegar a produzir um conhecimento que seja significativo para ele, conhecimento que se incorpore ao seu mundo intelectual e vivencial, e que o ajude a compreender sua realidade humana e social, e mesmo a interferir nela. (grifo nosso) (MASETTO, 2000, p.144).

Um software educativo para o ensino de Álgebra Linear pode apresentar e tratar um conteúdo de modo a colaborar com o aluno no sentido de fornecer informações e relacioná-las, por meio de imagens, sons e movimentos, de modo dinâmico, ajudando-o a construir um conhecimento em um campo semântico que tenha significado para ele. Uma evidência do grande potencial das tecnologias informatizadas pode ser constatada navegando nas páginas da Internet e verificando o dinamismo e as interatividades que elas apresentam, analisando os diversos jogos interativos que podem ser jogados, ao mesmo tempo, por diversos participantes, em diversas localidades, e trabalhando com software gráfico, como o autocad.

De acordo com Laudares e Miranda:

> [...] é imprescindível o estudo das experiências exitosas da informática educativa para que o professor acredite no potencial dos instrumentos da mídia e do computador como recursos didáticos no ensinar e no aprender. Assim, conhecer a potencialidade das novas tecnologias, acreditar no seu poder eficaz, criar disponibilidade e coragem para mudar são os ingredientes para uma nova didática produzir melhores resultados. (LAUDARES; MIRANDA, 2007, p.76).

Dessa forma, o computador pode se tornar um meio para uma mediação pedagógica, na medida em que estabelece novas relações entre conteúdo, aluno e professor, pois “A mediação pedagógica busca abrir caminho a novas relações do estudante: com os materiais, com o próprio contexto, com seus companheiros de aprendizagem, incluindo o professor, consigo mesmo e com seu futuro”.(PEREZ E CASTILLO, 1999 apud MASETTO, 2000, p.145).

Segundo Masetto (2000, p.146), “A mediação pedagógica coloca em evidência o papel de sujeito do aprendiz e o fortalece como ator de atividades que lhe permitirão aprender e conseguir atingir seus objetivos”. Portanto, o desenvolvimento de um software educativo, de maneira conveniente aos objetivos desejados, pode ser eficiente e eficaz no ensino e aprendizado de Álgebra Linear, desde que colocado como um mediador pedagógico, aliado a outros recursos que já dão resultados em sala de aula.

Para que se desenvolva um software educativo que estimule o aprendizado e, de fato, contribua para a construção do conhecimento, são apontados por Masetto (2000) alguns princípios básicos:

> [...] o aluno não pode fazer o papel de assistente passivo diante daquilo que se desenrola diante dele; o CD ou o power point não podem querer substituir as atividades do aprendiz; é necessário que se prevejam atividades, (grifo do pesquisador), tempo, momentos para o aluno perguntar, refletir, debater, pesquisar, trabalhar, redigir etc. (MASETTO, 2000, p.162)

Deve-se criar um software educativo que coloque o aluno em uma posição ativa diante do conteúdo que lhe é apresentado, para que ele interaja no processo, criando-se, dessa maneira, um estímulo que pode levá-lo à compreensão do que é estudado. Para tanto, as atividades elaboradas para o software devem pressupor uma série de fatores, como os citados acima por Masetto (2000), para que, de fato, se atinja a interação conteúdo/aluno, dando sentido a esse processo.

É um grande equívoco utilizar o recurso tecnológico como o salvador do processo ensino-aprendizagem. Assim, segundo Masetto (2000, p.139): “A tecnologia reveste-se de um valor relativo e dependente” do processo de aprendizagem; “Ela tem sua importância apenas como um instrumento significativo para favorecer a aprendizagem de alguém”. Um software educativo não deve ser utilizado para resolver o problema de ensino e aprendizagem de um conteúdo, mas, sim, para colaborar nesse processo. Os recursos computacionais devem vir para se agregar a uma série de recursos didáticos que visem a facilitar a aprendizagem dos conceitos básicos de Álgebra Linear e suas aplicações, colaborando, dessa forma, para atingir a eficiência e a eficácia na sua aprendizagem.

Segundo Laudares e Lachini, a didática com atividades informatizadas consiste em:

> Dar ao estudante a chance de simular, de perguntar, de investigar. Fazer um estudo pela pesquisa. Cabe ao professor o papel de organizador, de acompanhante do estudante na assimilação e reelaboração do conteúdo, mostrando-lhes as limitações, os recortes, as variáveis de suas simulações. Disponibilizar ao aluno o ferramental para seu caminho heurístico. (LAUDARES; LACHINI, 2001, p.87).

Quando é escolhida uma técnica para a apresentação de um determinado conteúdo, é importante prever de que modo podem ser alcançados os desenvolvimentos intelectuais do aluno e como ele participará da construção desse conhecimento. Além do mais, é importante conscientizar o aprendiz de que uma técnica pode não ser suficiente para a aprendizagem do que se está propondo. Com relação ao processo de aprendizagem, tem-se que:

> Como o processo de aprendizagem abrange o desenvolvimento intelectual, afetivo, o desenvolvimento de competências e de atitudes, pode-se deduzir que a tecnologia a ser usada deverá ser variada e adequada a esses objetivos. Não podemos ter esperança de que uma ou duas técnicas, repetidas à exaustão, dêem conta de incentivar e encaminhar toda a aprendizagem esperada. (MASETTO, 2000, p.143).

Um software educativo é uma tecnologia que pode constituir-se num meio para se alcançar um objetivo. Logo, ele deverá estar adequado a essa finalidade, para que seja eficiente e eficaz naquilo a que se propõe. Portanto, é de extrema importância que se estabeleçam objetivos claros, nas elaborações das atividades, as quais devem levar o aluno a interagir com os conteúdos, para que ele seja sujeito no processo, podendo tomar decisões, fazer questionamentos e adquirir conhecimentos.

Masetto (2000) traz uma contribuição expressiva para esta pesquisa, quando define mediação pedagógica e estabelece alguns princípios básicos que ela deve conter, além de registrar as suas limitações.

Quando se pretende criar atividades para um software educativo, é necessário que essas atividades promovam a construção do conceito envolvido e aperfeiçoem habilidades através da troca com o objeto de estudo, criando, dessa forma, as estruturas cognitivas que possibilitarão o desenvolvimento de competências e atitudes necessárias para a construção do conhecimento.

De acordo com Oliveira, Costa e Moreira (2001), o desenvolvimento de um software educativo envolve uma multiplicidade de campos de conhecimento, necessitando, portanto, da formação de uma equipe multi e interdisciplinar, composta por:

> Professores e peritos no conteúdo curricular a ser trabalhado no software, especialistas em Informática na Educação, planejadores de tela, profissionais da área de programação e comunicação, além de docentes e alunos que irão experimentar os títulos produzidos. (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001, p.90).

Porém, também, conforme Oliveira, Costa e Moreira (2001, p.91), é possível "que no interior das escolas, quando se tratar da construção de software de apoio ao desenvolvimento de certos conteúdos, esse tipo de trabalho possa envolver um número menor de profissionais".

De acordo com os parâmetros teóricos apresentados, realizou-se um trabalho investigativo, que ora se apresenta nesta dissertação. Nessa perspectiva, idealizou-se a criação de atividades em um ambiente de programação, com apoio de uma equipe, citada, a seguir, no Capítulo 3.

Não se teve a pretensão de desenvolver um software educativo em uma abordagem mais completa, no que diz respeito aos aspectos envolvidos na produção empresarial. O que se pretendeu foi criar atividades em ambientes informatizados, que colaborem para o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, tratando-se, então, de um software de apoio ao desenvolvimento de certos conteúdos.

Procurou-se, então, definir um ambiente de programação, no qual foram desenvolvidas atividades para o ensino e a aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. Analisando-se as categorias de software educativos, que, segundo Oliveira, Costa e Moreira (2001), viabilizam a criação de ambientes enriquecidos de aprendizagem que, "por sua interação com o usuário, permite um melhor aproveitamento pedagógico, podendo ser utilizado numa perspectiva construtivista", chegou-se, basicamente, a três: Os Tutoriais, A Simulação e Os Jogos Educacionais. (CAMPOS E GAIO, 1996, apud OLIVEIRA; COSTA;

MOREIRA, 2001, p.78)

Como define Valente (1999, p.51), o Tutorial é responsável "por planejar e governar a interação com o aluno" e "por gerar uma seqüência de atividades pedagógicas capaz de apresentar com sucesso determinado tópico ao estudante".

O Tutorial também promove uma série de recursos que podem auxiliar na aquisição de conhecimentos, pois são:

> Programas que disponibilizam on-line recursos que por meio de comandos ou ícones possibilitam o acesso do usuário ao conteúdo didático com o qual está operando e que buscam garantir a não-passividade do aluno diante do software pela proposição de questões às quais ele deve reagir ou responder. (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001, p.78).

Os Tutoriais são softwares educativos que podem direcionar a elaboração de atividades para compor um software de apoio para o ensino e a aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. Porém é conveniente conhecer a sua limitação, a qual, segundo Valente (1999):

> [...] está justamente na capacidade de verificar se a informação foi processada e, portanto, se passou a ser conhecimento agregado aos esquemas mentais. Por exemplo, é difícil um tutorial ter condições de corrigir a solução de um problema aberto com mais de um tipo de solução, em que o aprendiz pode exercitar sua criatividade e explorar diferentes níveis de compreensão de um conceito. (VALENTE, 1999, p.90).

Figura 1: Interação Aprendiz-computador Mediado por um *Software* Tipo Tutorial
Fonte: Valente, 1999, p.90.

Essa limitação pode ser amenizada por meio da mediação do professor, que deverá aferir se houve ou não construção de conhecimento e criar, segundo Valente (1999, p.90), *"situações para o aluno manipular as informações recebidas, de modo que elas possam ser transformadas em conhecimento e esse conhecimento ser aplicado corretamente na resolução de problemas significativos para o aluno"*, e que, devido às limitações apresentadas pelos Tutoriais, *"o professor tem que interagir mais com ele para auxiliá-lo a compreender o que* *faz ou a processar a informação obtida, convertendo-a em conhecimento."*

Pelas razões apresentadas, é indispensável que as atividades elaboradas para o ensino e a aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, na pesquisa que originou esta dissertação, propiciem a interação do conteúdo com o aluno e a mediação do professor, por meio de questionamentos e levantamento de hipóteses, que podem ser averiguadas pelo aluno, interagindo com o conteúdo, quando aquele explora os recursos visuais do *software* e utiliza simulações na criação de premissas, para uma posterior verificação.

Nessa direção, para o desenvolvimento de atividades para o ensino de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial na pesquisa realizada, foram utilizados programas que permitem o desenvolvimento de tutoriais, de maneira simplificada, para um usuário que não seja da área de programação, denominado, segundo Oliveira, Costa e Moreira (2001, p.81), Sistema de autoria. Esse sistema permite o desenvolvimento de *software* educativo de qualidade, pela diversidade de recursos que *"integram, de forma intuitiva e fácil, texto, imagem e som por meio de uma linguagem computacional de manipulação de ícones, links de hipertexto e telas gráficas"*, que também, *"por darem acesso a recursos de vídeo, possibilitam a construção de software multimídia com muita facilidade."*

Uma característica dos Sistemas de Autoria é a existência de ambientes de programação que podem ter usuários desprovidos de conhecimentos de informática. Isto possibilita a criação de atividades pelo próprio professor, que é a pessoa mais indicada para mediar o processo de produção de conhecimento. Esse profissional poderá priorizar a apresentação do conteúdo dentro dos Princípios da concretização, da necessidade e da generalização, discutidos no capítulo anterior, agregando, dessa forma, núcleos de objetos que darão significados para o aluno dentro de um Campo Semântico por ele criado.

Dentre os Sistemas de Autoria existentes, o Flash Mx foi escolhido para que, em seu ambiente de programação, fossem criadas atividades que favorecessem a construção do conhecimento na área de Álgebra linear, especificamente, Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. Essa escolha deve-se aos seus recursos e à facilidade de programação, que serão discutidos na próxima seção.

3.2 O sistema de autoria: Flash MX

A origem do *Flash* se deu por meio de *software*s desenvolvidos para desenhos sem animações. O *Apple II*, que foi o primeiro até chegar ao *Flash*, foi um *software* mais parecido com o *Paint*, o qual possibilitava a criação de desenhos, porém sem o recurso de animação.

Com o objetivo de desenvolver um *software* que tivesse alguma interatividade e animação, Jonathan Gay, em 1995, criou o *Cellanimator*, que era o *Smartsketch*, *software* criado para melhorar a maneira de desenhar no computador, porém com animação, e usava o *Java* para renderizar um *player* de *web*, que logo em seguida passou a se chamar *Future Splash Animator*, para, em 1996, com a fusão da Macromedia com a *FutureWave*, receber o nome de *Flash* 1.0.

O desenvolvimento e a comercialização do *Flash* foi feito pela Macromedia, empresa especializada em desenvolvimento de programas que auxiliam o processo de criação de páginas *web*, que atualmente foi adquirida pela *Adobe System*, fabricante de programas conhecidos, como, por exemplo, o *Photoshop*.

O *Flash* Mx é uma ferramenta de autoria e edição de imagens vetoriais com animação, som e interatividade, com um grande poder de processamento multimídia otimizados para a publicação na *internet*. Seu conteúdo é baseado em imagens vetoriais, o que permite a criação de efeitos avançados em arquivos bastante pequenos, pois as imagens vetoriais são geradas por meio de cálculos matemáticos executados pelo computador, onde os arquivos que contêm essas imagens armazenam somente as fórmulas matemáticas que representam formas, curvas e cores, o que minimiza bastante o tamanho dos arquivos. Isso viabiliza a sua utilização na web, pois, devido a essa grande redução, os programas carregam bem mais rápidos.

Os conteúdos produzidos em *Flash* podem ser: botões; *banners*; jogos; formulários; descanso de tela; interfaces de navegação e sites.

O *script* é a forma pela qual é feita a comunicação com um programa. No *Flash*, o *ActionScript* é a linguagem de criação de *scripts*; ele permite informar ao *Flash* o que deve ser feito e perguntar o que está acontecendo durante a execução de um aplicativo. Devido a esse fato, é possível adicionar interatividade por meio de comunicação entre os elementos dos aplicativos desenvolvidos no *Flash*.

Devido à utilização da linguagem de programação *ActionScript* em seus aplicativos, o *Flash* vai além de simples animações para uma ferramenta de desenvolvimento de aplicações mais completas.

As seqüências de animação no *Flash* são chamadas de “filmes”. Os filmes criados no *Flash* podem incorporar interatividade, permitindo a entrada de dados pelo aluno, o que é desejável para a criação de atividades para o ensino e a aprendizagem de um conteúdo, podendo, ainda, interagir com outros aplicativos da Web.

O ambiente de criação do *Flash* proporciona um conjunto completo de ferramentas para a construção de animações para serem disponibilizadas na Web, *"e também para uso offline, na criação de apresentações interativas para CD/DVD-ROMs e multimídia em geral."* (DAMASCENO, 2005, p.1). O *Flash* disponibiliza recursos para a importação de imagens de outros programas gráficos, mas permite, também, por meio de suas ferramentas, a criação de imagens e texto.

Sua capacidade de responder à entrada de dados do usuário e iniciar páginas da Web torna-o útil na construção dos elementos da interface do usuário, como barras de navegação e menus suspensos, facilitando, desse modo, a elaboração de atividades interativas, que podem fazer do aluno o sujeito da ação.

No desenvolvimento de um aplicativo no *Flash*, procede-se, independentemente, talvez da ordem, de acordo com as seguintes etapas básicas:

Decidir quais tarefas básicas o aplicativo irá executar.

Criar e importar elementos multimídia, tais como: imagens, vídeo, som, texto, e assim por diante.

Organizar os elementos que comporão os meios de comunicação do usuário, sobre o Estágio no cronograma, para definir quando e como eles aparecerão no seu aplicativo.

Aplicar efeitos especiais aos elementos que farão a comunicação do usuário, que lhe parecer mais conveniente.

Escrever código *ActionScript* para controlar a forma como comportaram os elementos dos meios de comunicação do usuário, incluindo a forma como esses elementos responderam às interações entre usuários.

Teste do aplicativo para determinar se ele está trabalhando como planejado e localizar qualquer erro na sua construção.

Publicar o seu arquivo FLA como um arquivo SWF, que pode ser exibido em uma página da web e reproduzido com o *Flash Player*.

4 O SOFTWARE DE APOIO AO ENSINO E à APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR

Nesta fase do trabalho, é apresentado e analisado o *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear, objeto desta pesquisa. A metodologia de ensino inserida neste aplicativo será explicitada; serão feitas diversas conjeturas a respeito deste *SOFTWARE* e serão mostradas telas de acordo com a sua execução. As devidas conclusões preliminares sobre seu funcionamento também serão formuladas.

Este trabalho trata da criação de um *software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, não tendo como foco o estudo de sua utilização e a conseqüente verificação da sua eficiência. No entanto, foi feita uma experimentação em uma turma do 6º período de Licenciatura em Matemática para indicação, ou não, desse recurso como auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Para auxiliar no desenvolvimento do *SOFTWARE*, foram estipulados os seguintes objetivos específicos:

Identificar, nos livros didáticos que tratam o conteúdo Base e Dimensão dos Subespaços Vetoriais do R^n, as diversas abordagens metodológicas adotadas.

Estudar o conteúdo de Base e Dimensão dos Subespaços Vetoriais do R^n, para definir estratégias metodológicas convenientes, a fim de elaborar atividades a serem implementadas pelo *SOFTWARE*.

Estudar o Sistema de Autoria: *Flash* MX para verificar a sua potencialidade de recursos visuais e interativos.

Utilizar o *SOFTWARE* em uma turma de Licenciatura em Matemática, para apontar a sua viabilidade, ou não, como auxiliar no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo.

Deste modo, nesta pesquisa realiza-se o desenvolvimento de um *software* de apoio ao ensino de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, tendo como característica a análise de dados qualitativos em educação.

A criação do *SOFTWARE* contou com a seguinte equipe de trabalho:

Orientador[1] - Dirigiu os estudos da pesquisa e acompanhou o desenvolvimento de todas as atividades do *SOFTWARE*.

Pesquisador2 – Responsável pela escolha do ambiente de programação, pelos

---

[1] Professor Dr. João Bosco Laudares, titular do Departamento de Matemática e Estatística da PUCMINAS.

[2] José Renato Fialho Rodrigues, Professor do Departamento de Matemática e Estatística da PUCMINAS. Leciona a disciplina de Álgebra Linear no 6º período do Curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS em Betim.

conteúdos a serem trabalhados no SOFTWARE, pela escolha da concepção teórica de aprendizagem, a qual norteou as atividades no SOFTWARE, pela elaboração das atividades e pelo apoio matemático na elaboração das fórmulas matemáticas que compõem os códigos de programação (Anexo B).

Bolsista de Iniciação Científica – O projeto para criação do SOFTWARE de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial foi aprovado no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC/CNPq – da PUCMINAS, resultando na contratação de um aluno3, como bolsista de iniciação científica, desta instituição. Este aluno foi responsável pelo layout das telas e pela programação da seção "Introdução". Esta seção contou, também, com a participação de um programador, o qual realizou a programação das Atividades 1, 2 e o desenvolvimento da subseção Aplicação, que serão descritos neste capítulo, no tópico 3.4 Descrição das Atividades Elaboradas no Flash MX.

Programador4 – Responsável pela programação das Atividades em todas as seções do SOFTWARE. O pesquisador descrevia as atividades para o programador, que, então, analisava a viabilidade da sua execução no ambiente de programação do Flash, para, em seguida, solicitar ao pesquisador as fórmulas matemáticas necessárias para a codificação do programa.

Auxiliar de Pesquisa - Auxiliou o pesquisador autor desta dissertação. Assim, a preparação das atividades para Avaliação do SOFTWARE desenvolvido nesta pesquisa, bem como a apresentação e a análise dos resultados do mesmo, tiveram a participação efetiva de uma estudante5, a qual usou todo este material para elaboração de seu Trabalho de Conclusão de Curso.

Além dessa equipe, houve a participação do setor de comunicação da PUCMINAS na confecção do vídeo apresentado no início do SOFTWARE, o qual teve como apresentadora uma aluna6 do curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS em Betim.

[3] Yuri Possa, aluno do 7º período do Curso de Sistemas de Informação da PUCMINAS em Betim. Apresentou um projeto de monografia na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso sobre a utilização do Sistema de Autoria Flash para ensino e a aprendizagem de Matemática.

[4] William Francisco Gimenes, graduado em Desenho Industrial – Programação Visual pela UNESP – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" , funcionário do SERPRO – Serviço Federal de Processamento de Dados no cargo de Analista e na função de Programador Visual.

[5] Joyce Frade Machado, aluna do 8º período do Curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS em Betim. Apresentou um Artigo como requisito parcial para aprovação na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso orientada pela professora Drª Cristiane Neri Nobre do Instituto de Informática da PUCMINAS e co-orientada pela professora Carina Pinheiro Soares de Torres Alves do Departamento de Matemática e Estatística da PUCMINAS.

[6] Taís Gonçalves Gadoni, aluna do 5º período do Curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS em Betim.

O SOFTWARE foi aplicado em uma turma na disciplina de Álgebra Linear do curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS em Betim, cujos resultados são apresentados no Capítulo 4: Aplicação do *Software*.

4.1 Conteúdo matemático trabalhado no software

Aplicando uma metodologia que valoriza a riqueza da estrutura matemática envolvida nos conteúdos de Álgebra Linear, são apresentados conceitos, teoremas e algoritmos que vão se avolumando, fazendo com que os alunos se percam diante de tantas informações e novidades.

Um fato evidenciado nas aulas de Álgebra Linear deste pesquisador é que quando são apresentados alguns procedimentos para a obtenção de determinados resultados, os alunos se apropriam do processo quase que mecanicamente. Porém nota-se uma necessidade, por parte do aluno, de entender as justificativas que validam o algoritmo. É neste momento, quando se está numa fase investigativa para o seu entendimento, que se tem a oportunidade de rever os conteúdos precedentes e reforçar o seu aprendizado.

Devido à experiência adquirida ao longo dos anos lecionando conteúdos de Álgebra Linear, foi possível identificar que o momento adequado para uma intervenção é quando se faz o estudo de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. Nesta ocasião, podem-se reforçar os conceitos de Espaço Vetorial, Subespaço, Combinação Linear, Independência Linear e validar teoremas relacionados a esses conteúdos.

Além disso, como já relatado no capítulo 1, os conteúdos Base e Dimensão de um Espaço Vetorial apresentam dificuldades no ensino e aprendizagem, tanto em Universidades brasileiras, quanto em Universidades de outros países.

Por essas razões, definiu-se o conteúdo: Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, para a elaboração de atividades criadas em um ambiente informatizado, que colaborem para o ensino e a aprendizagem. Tem-se, então, o primeiro passo na direção da criação de um *software*.

4.2 Definição da concepção teórica de aprendizagem utilizada

Como a forma pela qual se fará a mediação do conteúdo com o aluno é a informática, por meio de um *software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, foi necessário definir a concepção teórica de aprendizagem que permeou a elaboração das atividades que compõem o *SOFTWARE* criado.

Para *"que o aluno não seja levado a uma simples submissão a esquemas interpretativos, já direcionada pelo programa ou simplesmente abandonado aos seus próprios esquemas"*, é desejável, para o desenvolvimento de um *software* educativo, que se opte por uma abordagem construtivista (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001, p.117).

Uma maior discussão que orientou para a escolha da concepção construtivista na criação de atividades informatizadas foi feita no capítulo 2 desta pesquisa. Tem-se, então, o segundo passo que orientou e permeou todo o trabalho de criação do *SOFTWARE*.

4.3 O Ambiente de programação

Uma vez definido o conteúdo e a concepção teórica a qual norteou a criação das atividades que auxiliam no ensino e na aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, optou-se pelo Sistema de Autoria: Macromedia Flash®, como sendo o ambiente informatizado onde foram criadas as atividades. Essa ferramenta cria um ambiente muito propício para o desenvolvimento de aplicações em que o componente visual, além de textual, pode priorizar a interação entre software e usuário. Essa escolha deve-se ao fato de o Flash possibilitar a integração de imagens sons e textos de uma maneira acessível a um usuário que não seja da área de informática, e por permitir a esse mesmo usuário a entrada de dados, podendo estabelecer, desta maneira, uma interatividade entre o conteúdo e o usuário.

O programa Flash é uma ferramenta capaz de criar animações bidimensionais e tridimensionais interativas com a possibilidade de desenvolver aplicações relacionando conteúdos. Para tanto, dispõe de um ambiente de programação que pode ser utilizado até mesmo por quem não é programador.

Desse modo, o Flash é um ambiente de programação que pode promover a criação de um software capaz de auxiliar o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear.

Pelos recursos diversificados que apresenta essa ferramenta, o Flash foi escolhido como ambiente computacional onde foi desenvolvido um Software de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial de uma maneira interativa, buscando facilitar a sua aprendizagem.

4.4 Descrição das atividades elaboradas no Flash MX

É bom ressaltar que os recursos computacionais vêm para agregar a uma série de recursos didáticos que visem a facilitar a aprendizagem dos conceitos básicos de Álgebra Linear e suas aplicações, não sendo, portanto, algo que irá substituir o que já vem sendo feito com sucesso em sala de aula. Dessa forma, após a aplicação do Software de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear, é necessário que se faça uma retomada do assunto em sala de aula, para que se tenha um espaço onde se esclareçam pontos que não foram totalmente entendidos pelo aluno, além de discutir as generalizações e trabalhar com exercícios algébricos, visando a uma complementação para um efetivo aprendizado do conteúdo.

No desenvolvimento do SOFTWARE proposto, foi criada uma seção denominada Introdução, onde foram elaboradas atividades e aplicações referentes à Combinação Linear e Independência Linear. Essa seção foi criada para tratar dos assuntos que fundamentam as definições de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. Encontra-se, ainda, nessa seção, um ambiente de programação que possibilita a criação de um programa pelo aluno, o qual, pelo grau de liberdade, pela interatividade e pela abertura que apresenta para a mediação do professor, é caracterizada como a principal atividade dessa seção.

Em seguida, são apresentadas as seções Base e Dimensão, que, de forma interativa, visam à construção desses conceitos.

Para a apropriação, por parte do aluno, do conceito de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, estabeleceu-se a seguinte estrutura para o desenvolvimento do SOFTWARE:

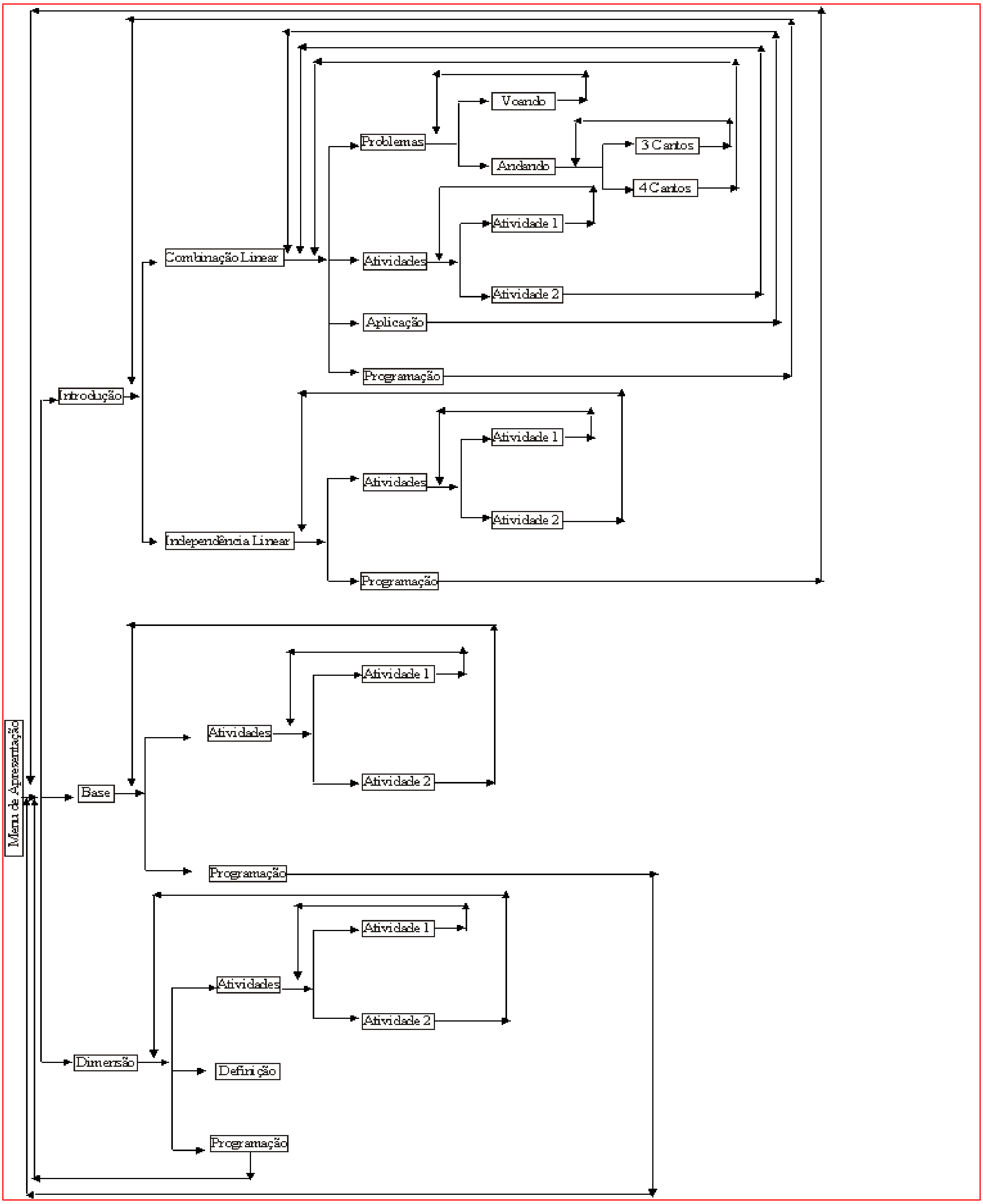


Figura 2: Estrutura do *software*.
Fonte: Elaborada pelo Pesquisador, 2008.

No *SOFTWARE* é apresentada, inicialmente, uma tela, denominada *menu* de navegação, onde, por meio de um vídeo, é feita uma introdução dos conteúdos a serem trabalhados.

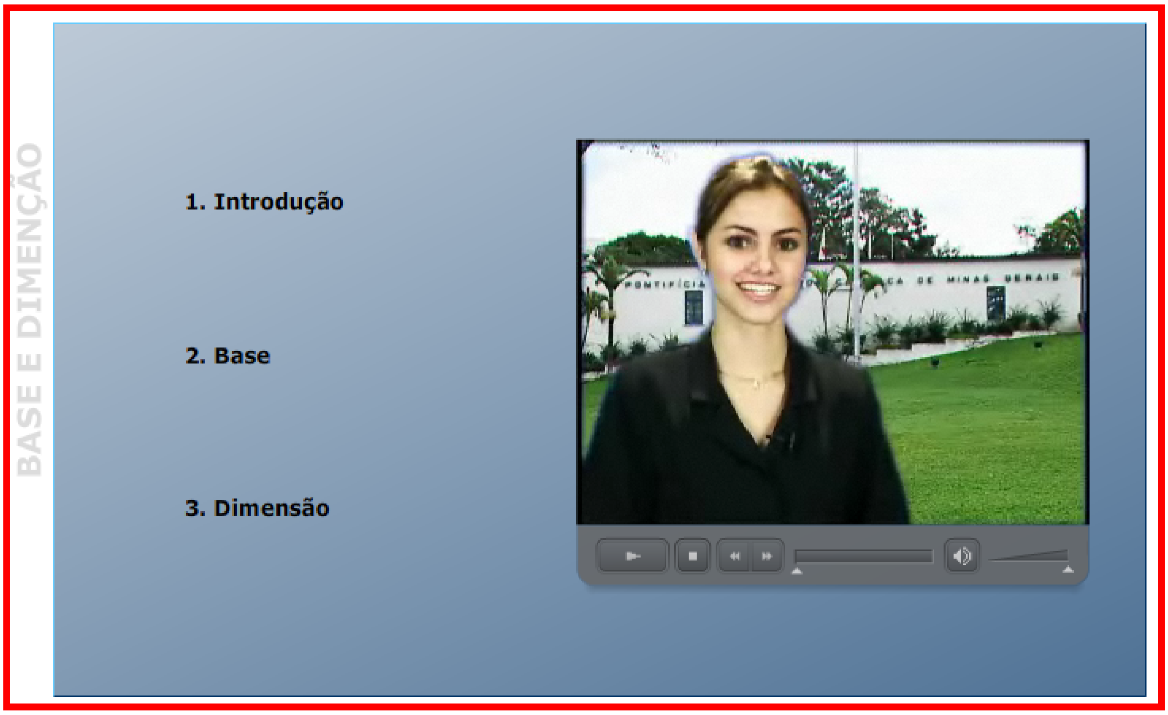


Figura 3: Tela de Apresentação
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Selecionando a opção "Introdução", por meio do mouse, passa-se para a segunda tela, onde é apresentado um pequeno texto, que resume a introdução feita pelo vídeo na tela anterior, colocando-se a maneira como serão tratados os assuntos iniciais que fundamentam os conceitos de Base e Dimensão.

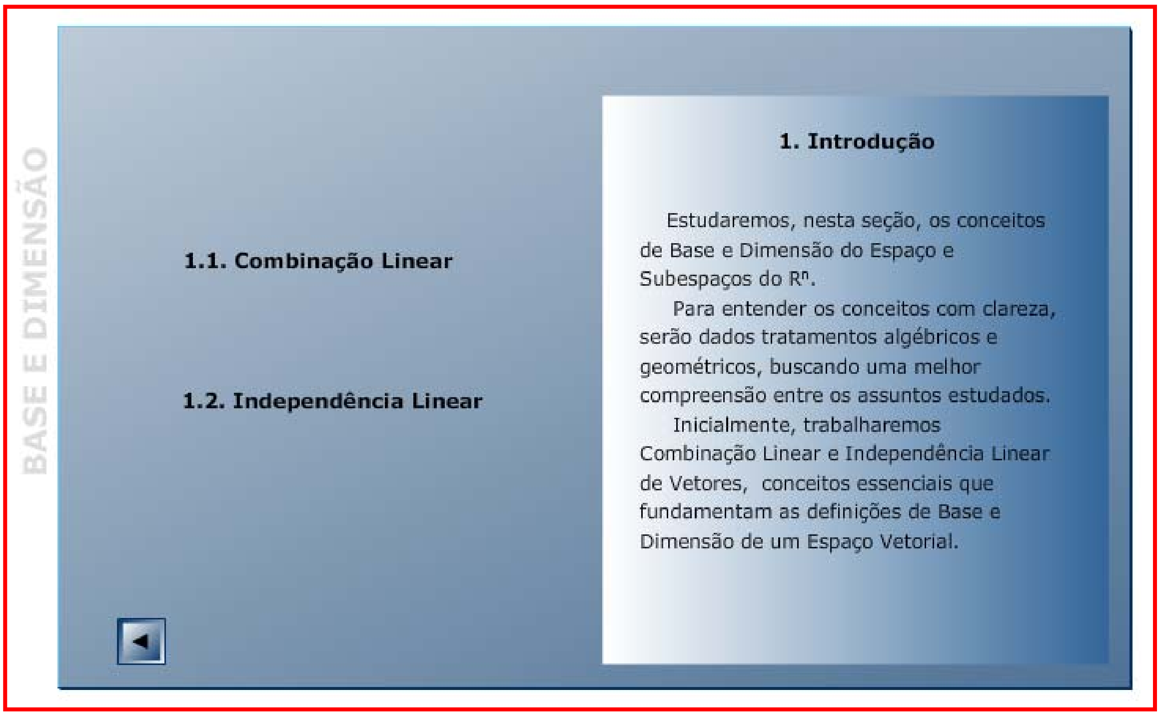


Figura 4: Tela da Introdução
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Clicando com o mouse sobre a opção "Combinação Linear", é apresentada a tela a seguir, que enuncia como será discutido esse assunto.

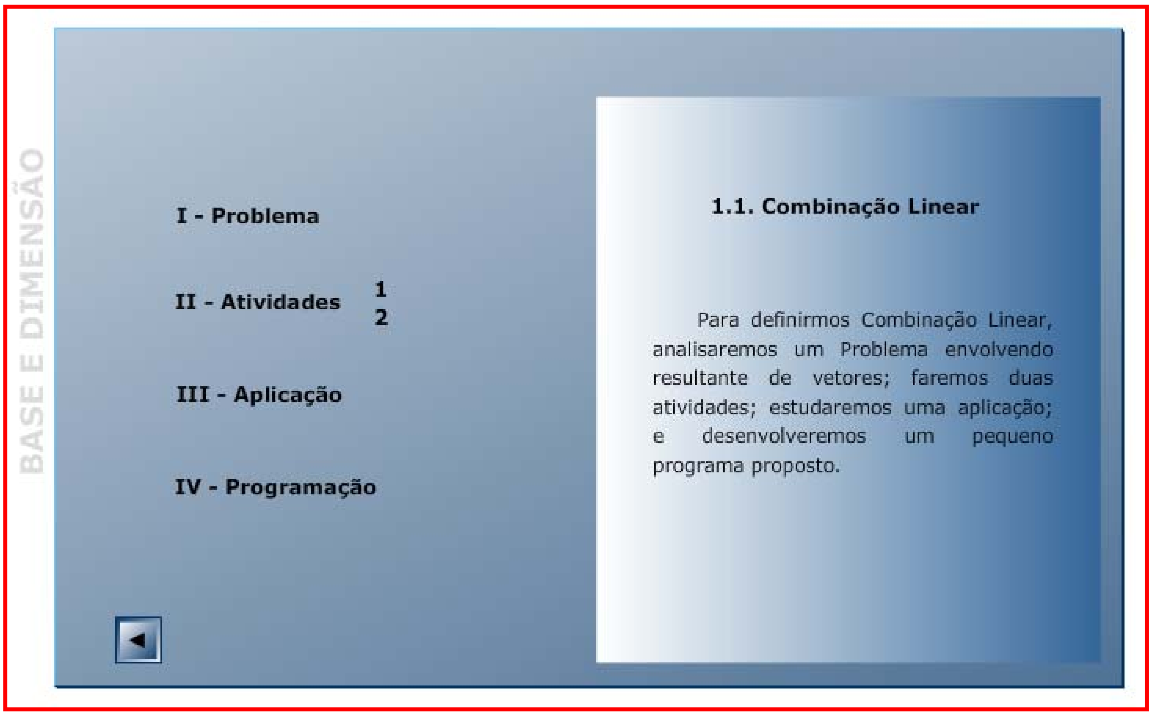


Figura 5: Tela da Combinação Linear
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Na tela anterior, é possível iniciar o estudo de Combinação Linear, pela opção "Problema", que dá acesso à seguinte tela:

Figura 6: Tela do Problema
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Procura-se, com essa situação, dar significado para o aluno buscar soluções que passarão a fundamentar novos conceitos, criando-se, dessa forma, um estímulo para a construção do conhecimento. Por enquanto não há uma ação livre do sujeito para com o objeto, mas existe uma situação "real" na qual pode haver uma acomodação para uma posterior assimilação, contribuindo, assim, para a elaboração das estruturas mentais, responsáveis pela construção do conhecimento.

Quando o aluno escolhe a opção "Voando", uma tela se abre, mostrando a animação do percurso realizado pelo inseto para ir do ponto P ao ponto Q (Apêndice A.1). Há, nessa atividade, a intenção de mostrar ao aluno que a solução do problema, em termos geométricos, é um segmento de reta orientado, com início no ponto P e final no ponto Q.

Após essa verificação geométrica, o aluno retorna à tela anterior por meio do botão "Voltar", situado no lado inferior esquerdo da tela. Ao retornar, a opção "Voando" estará marcada, indicando que o aluno já passou por ela.

Essa idéia será complementada pela opção "Andando", onde o aluno escolherá caminhos diferentes para obter o mesmo deslocamento. Pretende-se usar a definição de resultante, para construir o conceito de Combinação Linear.

Clicando na opção "Andando", aparece uma tela que orienta o aluno com relação às maneiras diferentes de solução do problema: Três cantos e Quatro cantos (Apêndice A.2). É solicitado ao aluno que encontre essas soluções.

Nessa fase, de acordo com as possibilidades que o inseto tem para realizar o proposto, o objetivo é que o aluno descubra quantos caminhos há em cada caso e quais são eles.

Ao optar pelo modo "Três Cantos", é apresentada a definição de segmento de reta orientado que representa geometricamente um vetor para a situação descrita no problema e uma alternativa algébrica para ele descobrir todos os caminhos possíveis, aliado a um recurso de animação ao lado.

Neste exercício, procurou-se dar um estímulo, por meio da animação e da simulação, para o aluno descobrir que, independente do caminho que o inseto percorra, o deslocamento (resultante) é o mesmo e, dessa forma, tem-se que esse deslocamento é escrito como a soma de dois outros deslocamentos, particularizando uma Combinação Linear.

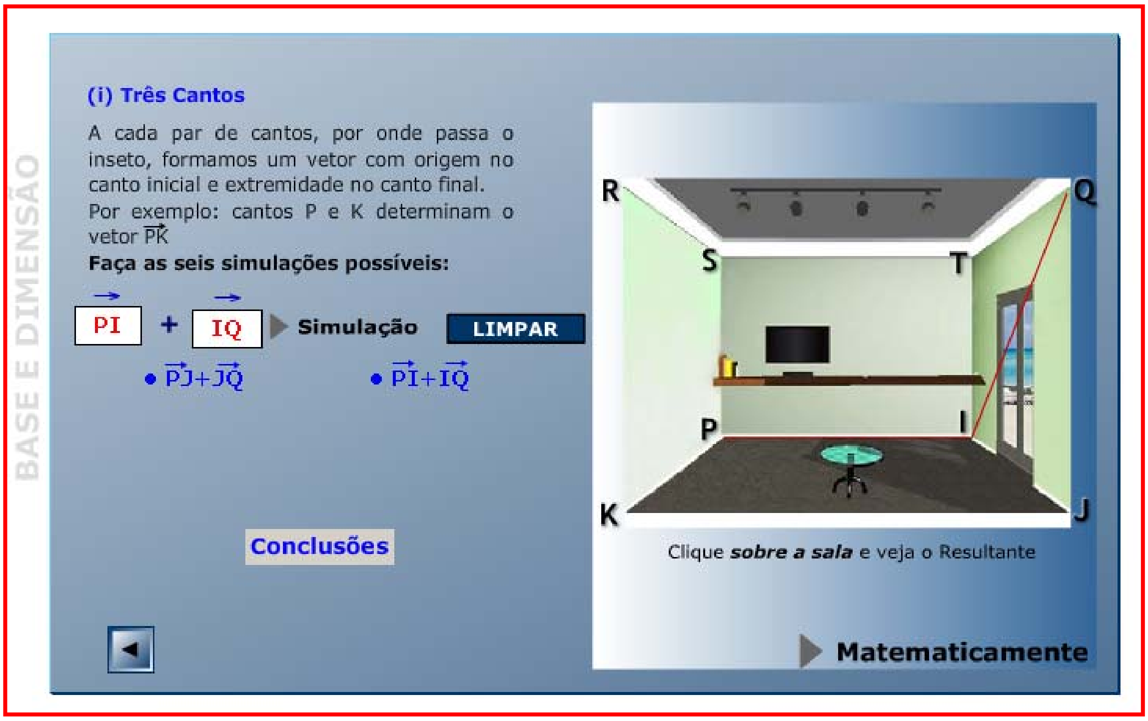


Figura 7: Tela Três Cantos
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

A cada simulação solicitada pelo aluno, ele pode observar pela animação o que está acontecendo e por meio do botão “Matematicamente”, ele tem um modelo matemático para a situação (Apêndice A.3).

O aluno deverá fazer seis simulações, verificando que em todas, o deslocamento realizado pelo inseto é sempre o segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$.

O objetivo, nesta atividade, é levar o aluno a escrever um vetor como a soma de outros dois vetores, particularizando, desse modo, um caso de Combinação Linear. Nesta atividade, há uma condução do aluno para encontrar resultados, mas existe, também, um espaço para a sua reflexão na medida em que ele faz a sua escolha para atingir o proposto, analisando-a por meio de um recurso visual.

Os recursos visuais utilizados para o aluno realizar as suas análises são de dois tipos: “Real” e “Matemático”. No primeiro, existe uma animação onde o inseto percorre as opções solicitadas pelo aluno, simuladas em uma sala de estar de uma residência; e o segundo, as mesmas simulações realizadas no primeiro recurso são apresentadas em um paralelepípedo com três arestas adjacentes, coincidindo com os lados positivos dos eixos cartesianos de um Sistemas de Coordenadas do R^3, onde cada dois cantos percorridos pelo inseto é representado, geometricamente, por um segmento de reta orientado.

Clicando no botão “Conclusões”, é apresentada uma tela na qual o aluno responderá a algumas perguntas com relação ao problema trabalhado por ele (Apêndice A.4).

O objetivo deste exercício é fixar a idéia de que o vetor resultante, neste caso, pode ser escrito como a soma de dois outros vetores. Esse conceito auxiliará na definição de Combinação Linear.

Ainda neste exercício, pode-se trabalhar com um possível erro do aluno, por meio de animações, às quais ele terá acesso, em caso de erro, clicando dentro da sala e observando-a para buscar uma acomodação e uma posterior assimilação do conhecimento.

Clicando no botão "Definição", é apresentada a definição do conceito que foi trabalhado (Apêndice A.5).

Nesta tela, ainda são feitas algumas perguntas com relação ao conceito, para verificação da aprendizagem.

O erro do aluno, nesta atividade, é trabalhado como no exercício anterior, ou seja, se necessário, o aluno pode acessar a tela anterior para observar todas as simulações feitas por ele, automaticamente, clicando dentro da sala.

Após finalizar as atividades, pode-se passar para a próxima fase, clicando no botão "Próxima Fase", a qual trabalhará o mesmo problema, porém, utilizando os Quatro Cantos da sala. As telas são semelhantes às apresentadas em Três Cantos. A diferença é que o conceito de Combinação Linear é estudado por meio do vetor resultante, como a soma de três outros vetores (Apêndice A.6, A.7, A.8 e A.9).

Nesta primeira subseção do assunto Combinação Linear, o objetivo é construir a sua definição, utilizando simulações para duas situações particulares: um vetor escrito como a soma de dois outros vetores e depois escrito como a soma de três outros vetores. Esse conteúdo ainda é tratado em mais três subseções: Atividades; Aplicações e Programação.

Essas subseções podem ser acessadas após clicar no botão: Próxima Fase da última tela da Subseção: Quatro Cantos. Quando isso é feito, a opção "Problema" recebe uma marca, indicando ao aluno que ele já passou por essa subseção, podendo, então, numa ordem natural, acessar a subseção "Atividade", a qual lhe dará acesso a duas outras atividades: Atividade 1- Paralelogramo e Atividade 2 - Paralelepípedo.

Na Atividade 1: Paralelogramo, o aluno, com o mouse, arrasta a extremidade de uma das diagonais de um paralelogramo para obter um vetor $\vec{v}$ como a Combinação Linear de outros dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, que são os lados adjacentes desse paralelogramo. Em seguida, são feitas cinco perguntas com relação ao vetor $\vec{v}$ criado pelo aluno.

Nesta atividade, o aluno tem um grau de liberdade bastante elevado no que diz respeito à escolha do vetor $\vec{v}$ que é construído, geometricamente, como Combinação Linear de outros dois vetores.

Até então, há um apego geométrico para a construção do conceito de Combinação Linear.

É explorada, no exercício 1, a multiplicidade do vetor $\vec{v}_1$, na medida em que o aluno interage com o SOFTWARE, criando várias situações para o vetor $\vec{v}$.

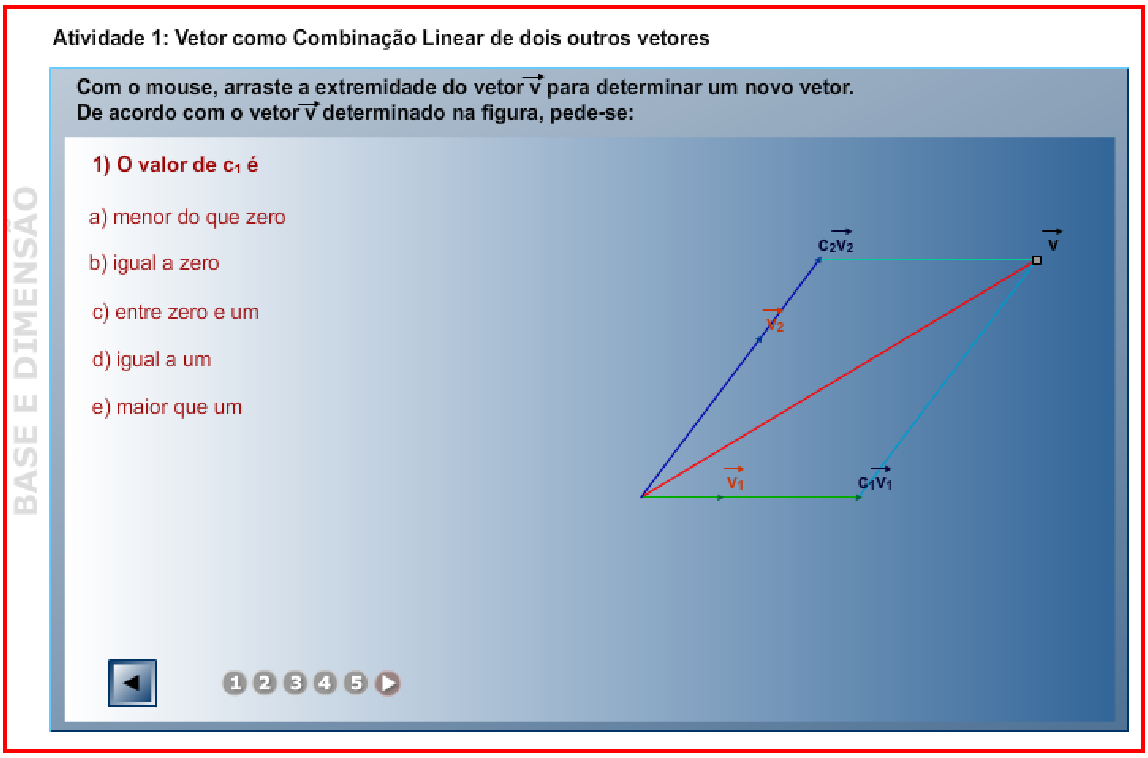


Figura 8: Tela do Paralelogramo 1
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Analogamente, no exercício 2, é explorada a multiplicidade do vetor $\vec{v}_2$ (Apêndice A.10).

Para essas duas questões, independentemente do vetor $\vec{v}$ criado pelo aluno, existe um programa que verifica se a resposta está correta. A intenção desta atividade não é encontrar o valor exato de c_1 e c_2, mas a de entender o significado geométrico da definição de multiplicação de um vetor por um escalar, utilizando o recurso geométrico para associar o conceito dessa definição com o fato de o resultado desta operação prolongar, comprimir ou mudar de sentido o novo vetor determinado.

Pode-se, nesta atividade, levar o aluno a descobrir que qualquer vetor do plano pode ser escrito como Combinação Linear de dois outros vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ apropriados. Para tanto, cabe, neste momento, a mediação do professor, que deverá orientar o aluno para que ele explore bem as opções desses exercícios.

No exercício 3, o aluno cria um vetor $\vec{v}$ de acordo com as orientações do enunciado do exercício, e constata que, para qualquer vetor $\vec{v}$ criado, ele é uma Combinação Linear dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Neste momento, pode -se reforçar a idéia de que dois vetores apropriados podem gerar qualquer vetor do plano, dando início à construção da definição de Conjunto Gerador (Apêndice A.11).

Fazendo o vetor $\vec{v}$ coincidir com o vetor $\vec{v}_1$ e depois com o vetor $\vec{v}_2$, respectivamente, nos exercícios 4 e 5, buscam-se situações particulares para verificação da aquisição do conceito de Combinação Linear, associando a parte algébrica com a geométrica (Apêndice A.12 e A.13).

Em todos os exercícios da atividade Paralelogramo, pode-se trabalhar com o erro, fazendo análise do recurso geométrico.

No último exercício, o de nº 5, ao clicar no botão "Próxima Fase", volta-se à tela das opções que trabalha o assunto Combinação Linear (Figura 5). Clicando na Atividade 2: Paralelepípedo, tem-se uma situação análoga à da Atividade 1: Paralelogramo, porém, trabalhando no R^3:

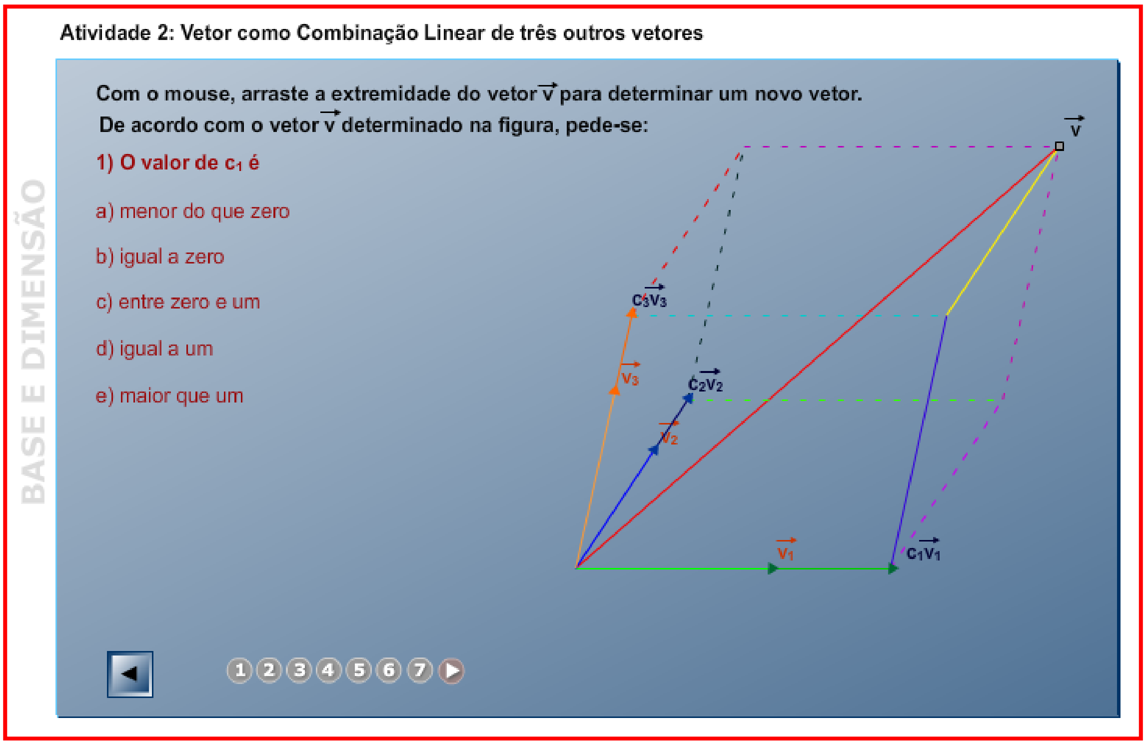


Figura 9: Tela do Paralelepípedo 1
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

O exercício 1, desta Atividade, é análogo ao exercício 1 da Atividade 1: Paralelogramo. Porém, nesse caso, o conceito de Combinação Linear é estendido para três vetores. O mesmo acontece para os exercícios de 2 a 5 (Apêndice A.14, A.15, A.16 e A.17).

Devido ao fato de trabalhar no R^3, pode-se explorar situações novas, diferentes das apresentadas nos exercícios da Atividade 1. O exercício 6 é um desses casos, no qual é pedido para o aluno determinar, geometricamente, o vetor $\vec{v}$ como a diagonal da face do paralelepípedo, cujos lados adjacentes são os vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Em seguida, pede-se para escrevê-lo como Combinação Linear desses vetores. Neste exercício, existe um espaço para o professor propor questões que levem a novas descobertas, podendo, dessa forma, estimular o aluno a explorar outras situações (Apêndice A.18).

O objetivo deste exercício é fazer com que o aluno perceba que, mesmo trabalhando com três vetores, para se escrever um vetor arbitrário $\vec{v}$ como Combinação Linear de três outros vetores particulares $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, pode não ser necessário utilizar algum deles.

No exercício 7, encontra-se uma reafirmação conceitual da situação apresentada na seção "Problema", na qual um inseto deveria sair de um canto de uma sala e chegar ao canto diametralmente oposto. Porém, neste exercício, é apresentado um modelo matemático dessa situação de uma forma genérica, pois a diagonal do paralelepípedo (vetor $\vec{v}$) é de livre escolha do aluno.

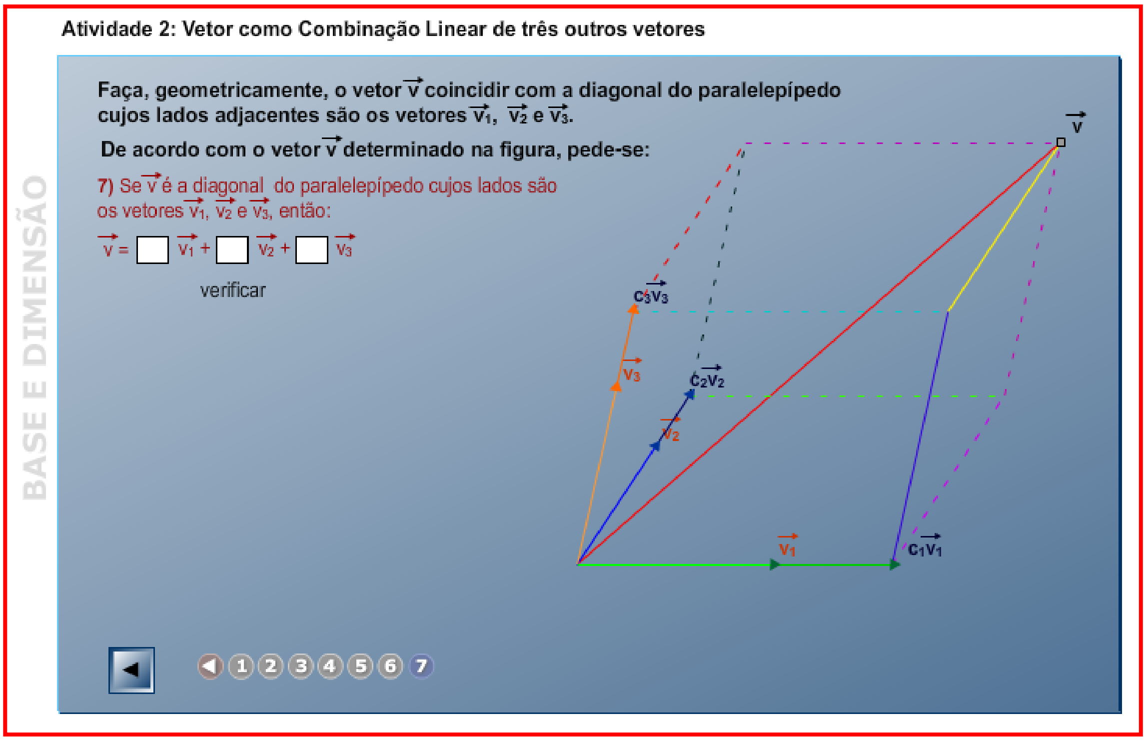


Figura 10: Tela do Paralelepípedo 7
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Tem-se como objetivo, neste exercício, fazer com que o aluno extrapole a idéia dada pelo deslocamento final do inseto como sendo uma Combinação Linear cujas constantes que multiplicavam os vetores deslocamentos determinados por dois cantos eram iguais a um, para uma generalização do conceito de Combinação Linear cujas constantes que multiplicam os vetores podem assumir qualquer valor no conjunto dos números reais.

Neste ponto, espera-se que o aluno tenha assimilado o conceito de Combinação Linear, o qual será consolidado por meio de uma aplicação, tema da próxima subseção, a ser acessada ao clicar no botão "Retornar", situado no canto inferior esquerdo da tela do exercício 7. Dessa forma, o Aplicativo retorna à tela de opções que trabalha o assunto Combinação Linear (Figura 5).

Ao clicar na subseção "Aplicação" do assunto Combinação Linear, acessa-se a tela que trabalha a aplicação denominada Cubo de Cores.

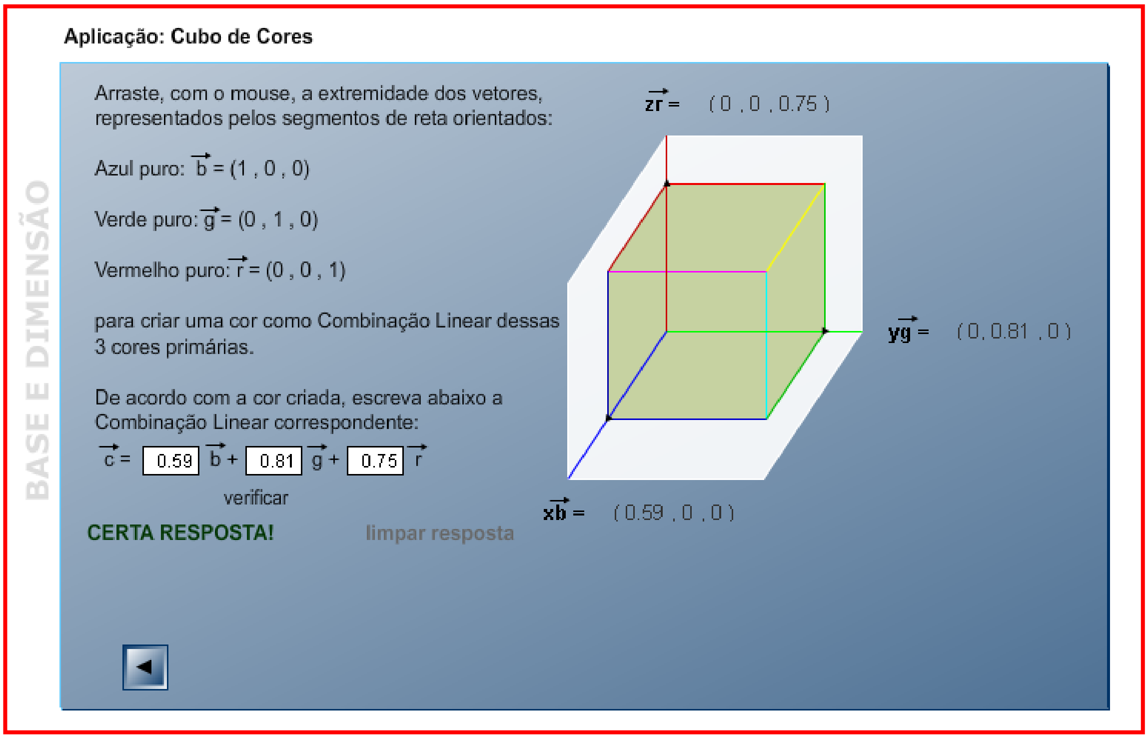


Figura 11: Tela Cubo de Cores
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Na Aplicação: Cubo de Cores, é apresentado um cubo, em que as (três) arestas adjacentes representam as cores: azul, verde e vermelho. O cubo é posicionado em um Sistema de Coordenadas Cartesianas de tal forma que a aresta que representa a cor azul está situada no eixo x, a aresta que representa a cor verde está situada no eixo y e a aresta que representa a cor vermelha está situada em cima do eixo z.

Nesta aplicação, é mostrado como o conceito de Combinação Linear pode ser utilizado no Modelo de Cores RGB (Red - Vermelho; Green - Verde e Blue - Azul), as quais são denominadas cores primárias, que dão origem às cores das telas de monitores de computadores, por meio de agrupamento de porcentagens dessas cores.

Assim, representando as cores primárias pelos vetores: $\vec{b} = (1,0,0)$: Azul Puro; $\vec{g} = (0,1,0)$: Verde Puro e $\vec{r} = (0,0,1)$: Vermelho Puro, tem-se que o conjunto de todas as cores é o Cubo de Cores RGB, onde cada vetor cor $\vec{c}$, neste cubo, é uma Combinação Linear da forma: $\vec{c} = c_1\vec{b} + c_2\vec{g} + c_3\vec{r}$.

Espera-se com essa atividade trazer elementos concretos para a compreensão do conceito de Combinação Linear.

Esse fato poderá ser verificado na próxima subseção “Programação", que consiste num ambiente de programação, onde o aluno é solicitado a desenvolver um programa que escreva um vetor $\vec{v}$ qualquer do R^2 como Combinação Linear de dois outros vetores arbitrários $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, também do R^2.

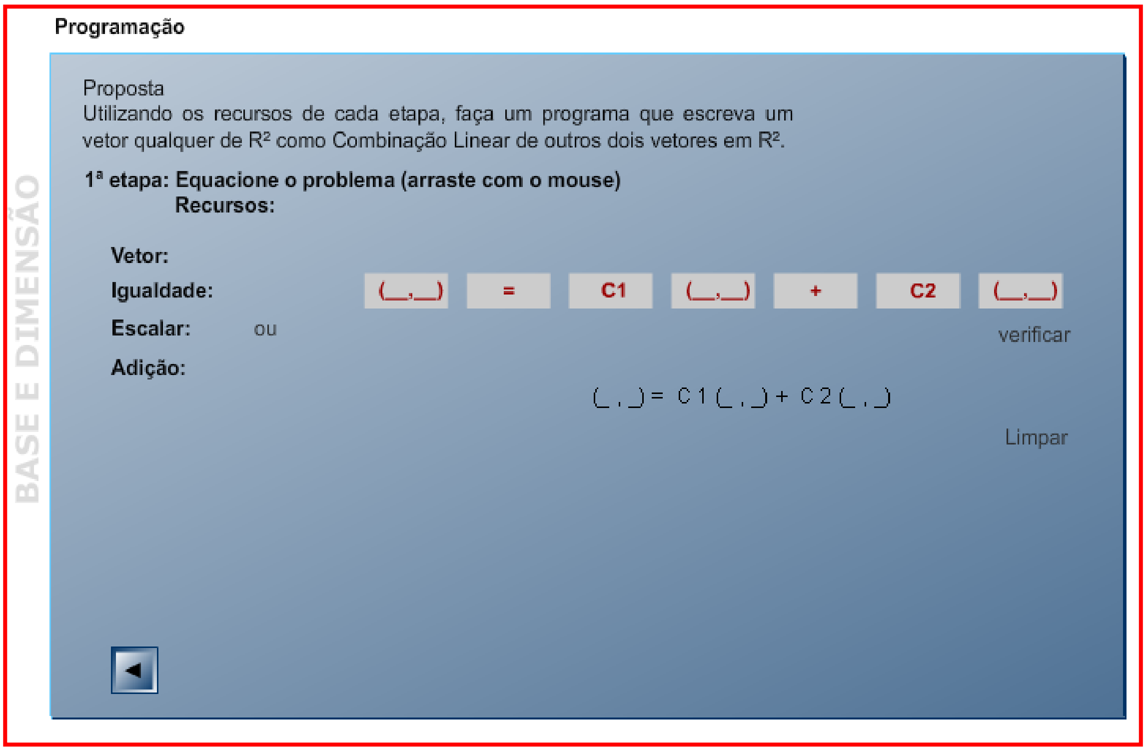


Figura 12: Tela Programação 1
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

São disponibilizados para o aluno diversos comandos que possibilitarão o desenvolvimento do programa solicitado, porém, propositalmente, não há nenhuma orientação de como fazê-lo.

O objetivo nesta etapa é fazer com que o aluno coloque em prática todo o conhecimento que adquiriu estudando Combinação Linear. Isso poderá ser verificado na montagem da equação descrita pelo aluno, a qual deverá escrever um vetor como Combinação Linear de outros dois vetores (Figura 12), na nomeação das variáveis (Apêndice A.19) e na maneira pela qual o aluno irá "ensinar" o computador a resolver esse problema (Apêndice A.20). Para realização dessas etapas, serão utilizados: resolução de sistemas, determinantes e Regra de Cramer, portanto, revisando, relacionando e fixando diversos conteúdos.

Na última tela da subseção "Programação", é disponibilizado o programa feito pelo aluno para que ele possa testá-lo (Apêndice A.21). Ao validar o seu programa, o aluno poderá dar prosseguimento aos seus estudos, retornando, por meio do botão situado à esquerda desta tela, à tela que dá as opções de trabalho da seção Introdução (Figura 4).

Optando, agora, pela subseção "Independência Linear", é apresentada a seguinte tela:

Figura 13: Independência Linear
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Essa tela informa como será discutido o assunto Independência Linear, além de dar acesso às duas maneiras pelas quais esse assunto será tratado.

Ao posicionar o mouse no botão "Problema", aparecem as opções 1 e 2 . Acessando a opção 1: O Vetor Nulo como Combinação Linear de Dois Vetores, é colocada ao aluno uma questão à qual ele deverá responder, usando um recurso geométrico, disponibilizado nesta tela.

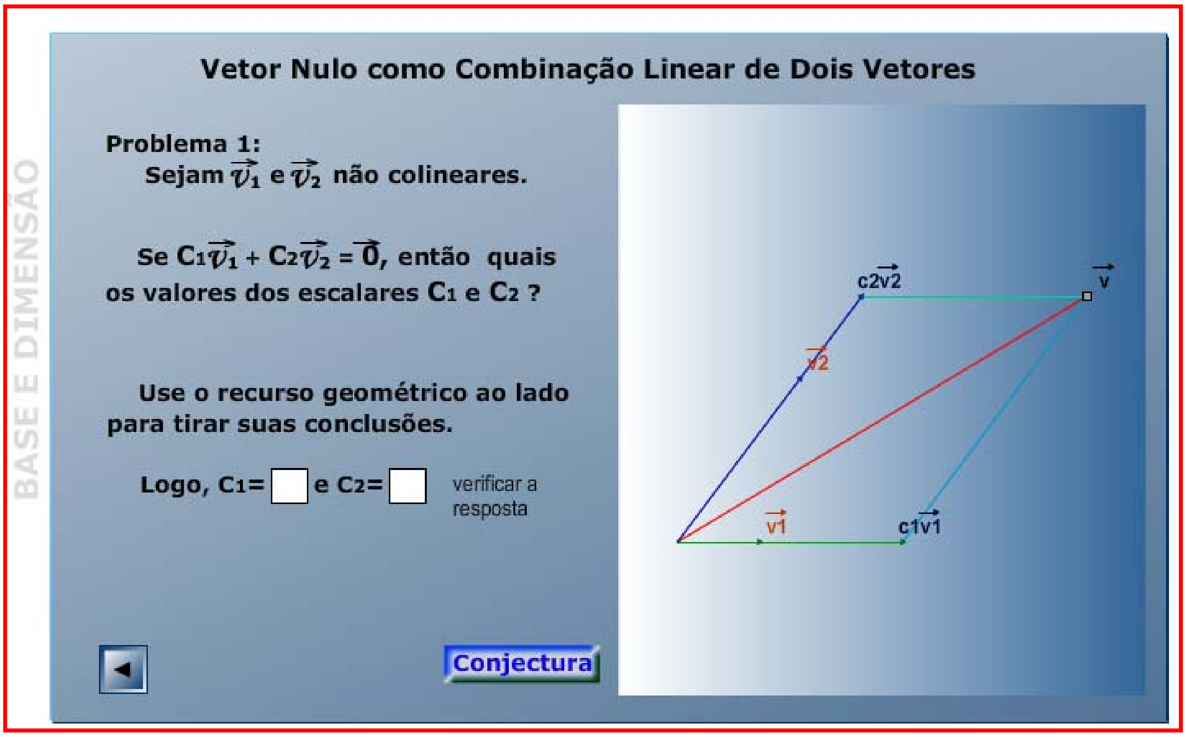


Figura 14: Independência Linear
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

O objetivo desta atividade é possibilitar, por meio da análise geométrica, que a questão seja respondida corretamente pelo aluno. Dessa forma, é criada uma conjectura que, a princípio, ele validou devido à utilização de um recurso geométrico dinâmico, que possibilitou que ele transformasse o vetor $\vec{v}$ no vetor nulo, podendo, desse modo, geometricamente, verificar o que aconteceu com as constantes c_1 e c_2. É importante observar que, neste momento, começa a ser preparado todo um caminho para ligar o conceito de dois vetores linearmente independentes, com o fato de eles não serem colineares.

Clicando no botão "Conjectura", é proposto ao aluno que ele monte uma conjectura com base nos resultados obtidos na tela anterior. Para tanto, ele disponibilizará de várias palavras as quais ele deve arrastar com o mouse e colocar em um lugar apropriado, na ordem correta, de modo a formar a conjectura proposta. Estando correta a conjectura, é solicitado ao aluno que ele monte, agora, a hipótese e, em seguida, a tese dessa conjectura (Apêndice A.22).

Esta tarefa tem como objetivo fixar a idéia de que o vetor nulo escrito como Combinação Linear de dois outros vetores, implica nas constantes que multiplicam esses vetores serem iguais a zero, se esses vetores não forem colineares.

Essa idéia é reforçada, após o aluno clicar no botão "Demonstração", passando para uma nova tela, onde existem botões os quais permitem que o aluno transporte para essa tela a conjectura, a hipótese e a tese, para, em seguida, começar a fazer a demonstração algebricamente (Apêndice A.23).

O objetivo desta atividade é confirmar a conjectura elaborada pelo aluno e validada geometricamente por ele, preparando-o para a definição de Conjunto Linearmente Independente e, um pouco mais à frente, facilitando o entendimento da necessidade desse conceito na definição de Base de um Espaço Vetorial.

Em seguida, clicando no botão definição, é apresentada, em outra tela, a definição de um Conjunto de dois vetores linearmente independentes (Apêndice A.24).

Nesta última tela, no canto inferior direito, existe um botão “Próxima fase”, o qual retorna para a tela das opções de trabalho do assunto Independência Linear. (Figura 13). Acessando a opção 2: O Vetor Nulo como Combinação Linear de Três Vetores, é colocada para o aluno uma situação análoga à apresentada na opção 1, porém trabalhando, agora, no R^3 (Apêndices A.25, A.26, A.27 e A.28).

O objetivo é o mesmo da opção 1, resguardando que, neste momento, trabalhando com três vetores, a condição geométrica para atender à proposição é que eles não sejam coplanares.

Clicando no botão “Próxima fase” da última tela desta tarefa, retorna-se à tela das opções de trabalho do assunto Independência Linear (Figura 13), na qual resta a opção “Programação” para ser acessada.

Acessando a opção “Programação” da Independência Linear, é encontrada uma situação bem próxima da programação da Combinação Linear. A diferença é que o programa solicitado refere-se à Combinação Linear de dois vetores, resultando no vetor nulo. Espera-se, neste ponto, que o aluno esteja preparado para realizar o programa solicitado, no que diz respeito à conceituação de Independência Linear.

Desta vez, o objetivo é verificar se o aluno adquiriu o conceito de Independência Linear, uma vez que, agora, é ele que passa a ensinar o computador a verificar quando um conjunto de dois vetores é Linearmente Independente (Apêndices A.29, A.30 e A.31).

Percorrido esse caminho, termina aqui a primeira seção intitulada “Introdução”, onde são trabalhados os conceitos de Combinação Linear e Independência Linear, os quais fundamentam as definições de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial.

Voltando à tela de “Apresentação” (Figura 3), pode-se passar para a próxima seção denominada “Base”, clicando o botão correspondente, onde é apresentada a seguinte tela:

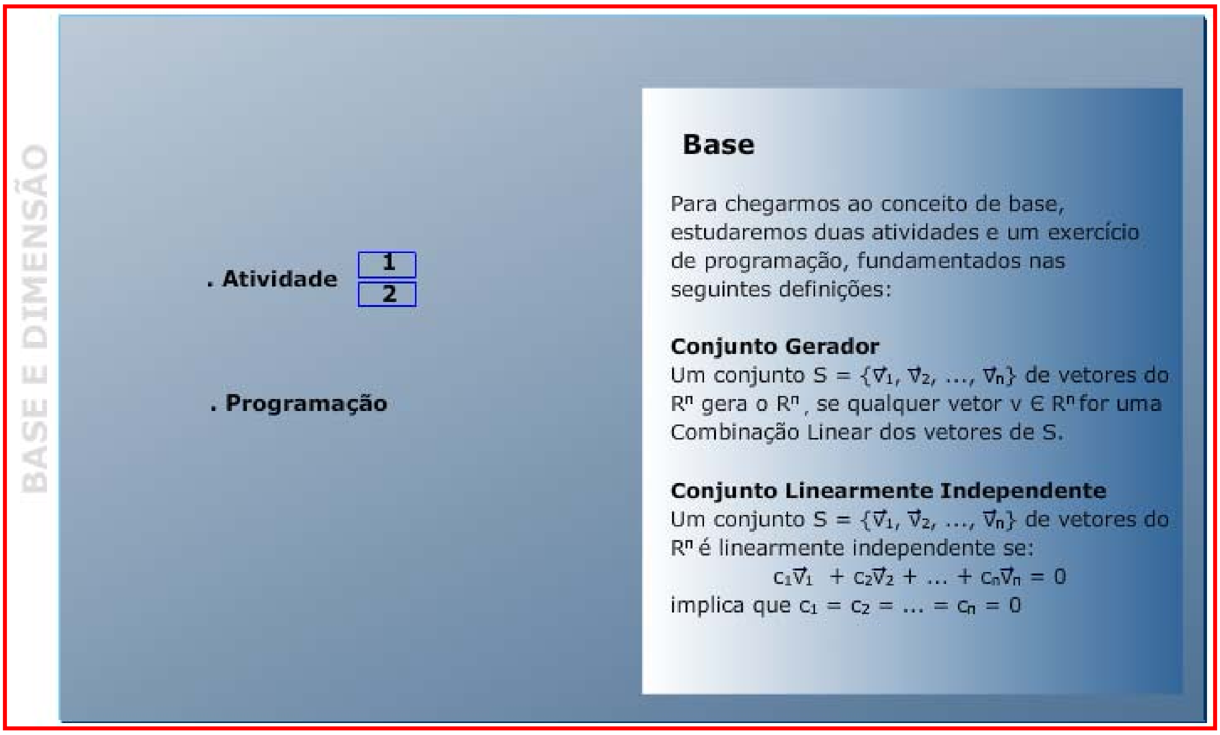


Figura 15: Base
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Nessa tela, é enunciado como é tratado o conceito de base, enfatizando as definições que fundamentaram, no SOFTWARE, este conceito. À esquerda da tela, encontram-se os botões que acessam as subseções que trabalham o conceito de base: Atividade 1 e 2 e Programação.

Acessando a Atividade 1: O Espaço Vetorial $W = \{x \in R / y = ax\}$, é solicitado ao aluno que atribua um valor para a, determinando, desse modo, uma reta que passa pela origem. Em seguida, pede-se que ele determine dois vetores quaisquer pertencentes a W, clicando, com o mouse, sobre a reta. Além da representação geométrica é dado, logo abaixo do plano cartesiano, a representação algébrica desses vetores.

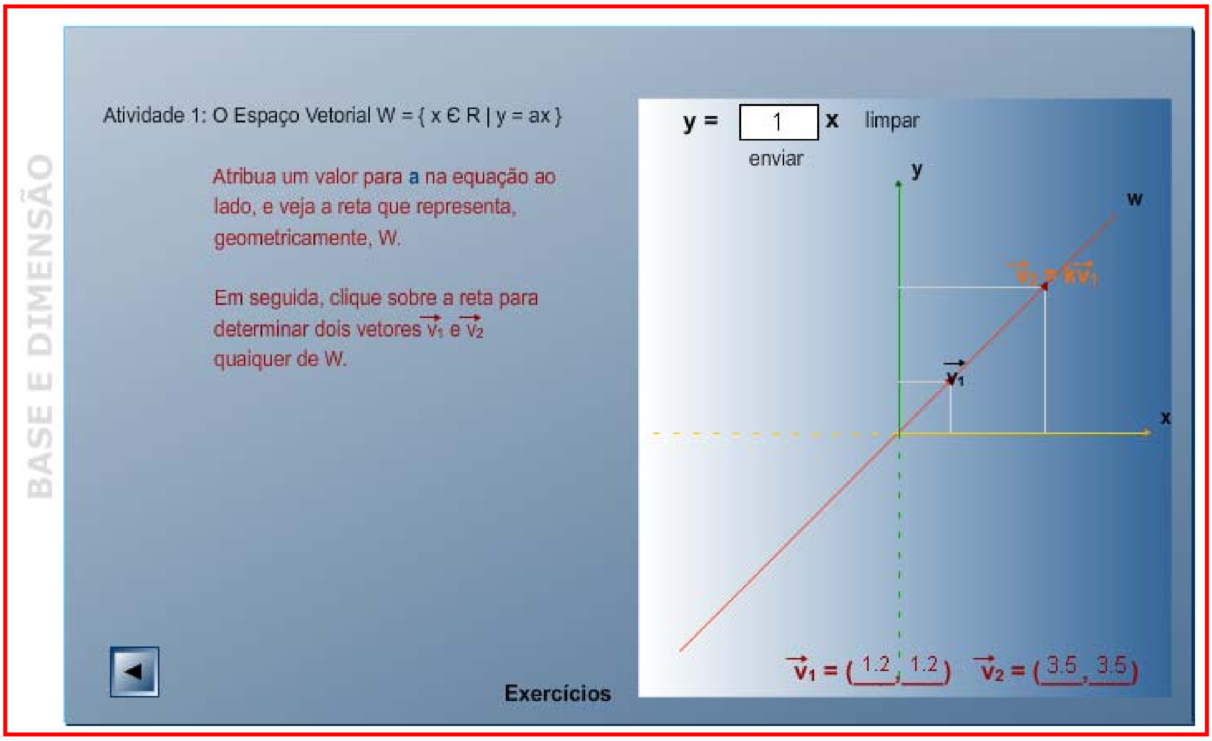


Figura 16: Base – Atividade 1
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Pela interatividade apresentada nessa tela, na medida em que o aluno pode representar uma infinidade de retas que passam pela origem, o objetivo é levar o aluno a descobrir as regularidades que apresentam todas elas, no que diz respeito aos Conjuntos Geradores e aos Conjuntos Linearmente Independentes, fundamentando, desse modo, o conceito de base para esses tipos de Espaços Vetoriais.

Para atingir esse objetivo, foram elaborados oito exercícios, que trabalham os conceitos de Conjuntos Geradores e Conjuntos Linearmente Independentes de W, utilizando duas abordagens diferentes: geométrica e algébrica.

A seguir, é feita uma descrição desses exercícios, pontuando o objetivo que se pretende com cada um deles:

Exercício 1: Analisando, geometricamente, verifique se $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ gera W.

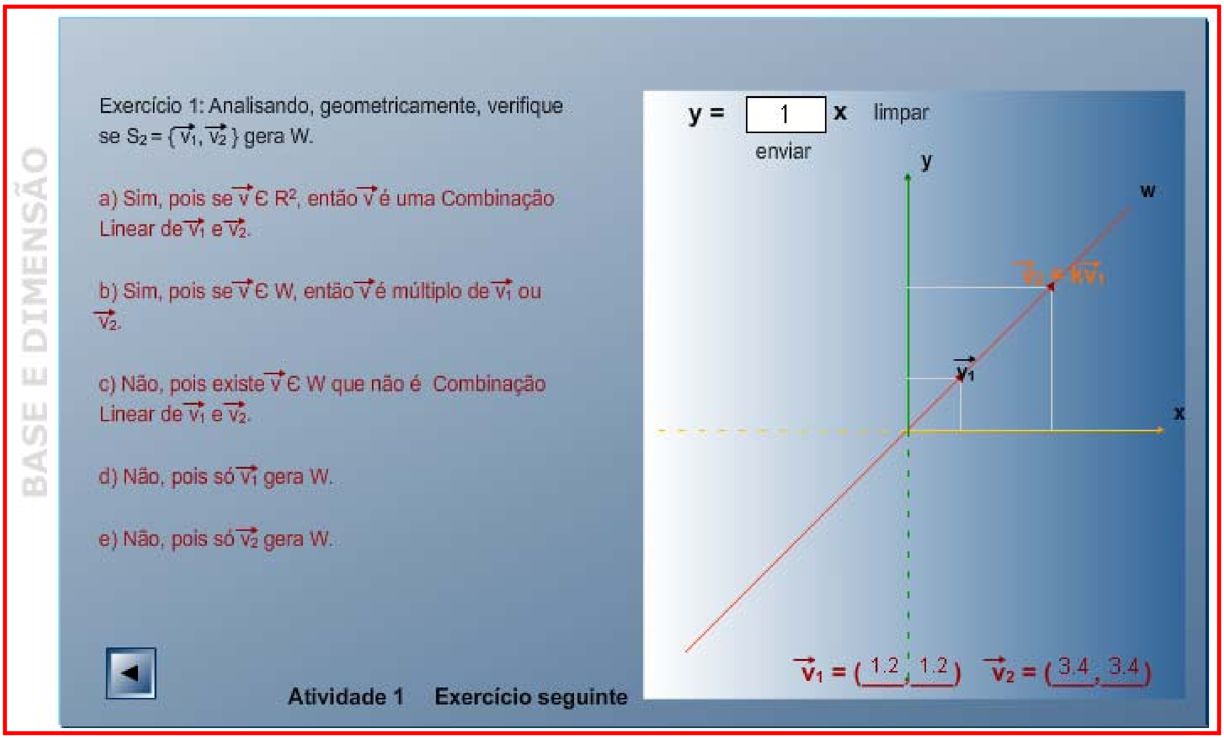


Figura 17: Base – Exercício 1 da Atividade 1
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Além de verificar se $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ gera W, é preciso justificar essa afirmação. O objetivo é, por meio do recurso gráfico disponibilizado na tela, ao lado desse exercício, levar o aluno à reflexão do conceito envolvido.

Exercício 2: Utilize o programa desenvolvido por você no exercício de Programação da subseção Combinação Linear, para verificar se $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ gera W (Apêndice A.32).

O Programa que o aluno desenvolveu na subseção Combinação Linear determina as constantes c_1 e c_2 utilizadas na equação que escreve um vetor como Combinação Linear de dois outros vetores: $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$. Utilizando os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ que ele determinou na reta, deverão ser feitas diversas simulações variando o vetor $\vec{v} \in W$, para que se chegue à conclusão, empiricamente, de que S_2 gera W. O objetivo é fazer com que o aluno interprete as soluções dadas pelo seu programa, além de associar o conceito de Combinação Linear com o de Conjunto Gerador.

Exercício 3: Analisando, geometricamente, podemos afirmar que $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é:

Linearmente Independente, pois gera o vetor nulo.

Linearmente Independente, pois $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares.

Linearmente Independente, pois $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são colineares.

Linearmente Dependente, pois $\vec{v}_1$ *e* $\vec{v}_2$ são colineares.

Linearmente Dependente, pois gera o vetor nulo. (Apêndice A.33).

Assim como o Exercício 1 analisa, geometricamente, se S_2 gera o Espaço Vetorial W, agora a análise, também geométrica, é para verificar se S é Linearmente Independente. Juntando as respostas dos Exercícios 1 e 3, é possível determinar se $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é uma base para W.

O objetivo, neste exercício, é associar o conceito de Linearmente Independente com o conceito de vetores não colineares, o que é possível, uma vez que o conjunto S_2 possui dois vetores, permitindo, desta forma, tirar uma conclusão pela observação geométrica.

Exercício 4: Utilize o programa desenvolvido por você no exercício de Programação da subseção Independência Linear, para verificar se $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é Linearmente Independente ou Dependente (Apêndice A.34).

Assim como o Exercício 2, em que é utilizado um programa desenvolvido pelo aluno na subseção Combinação Linear, o Exercício 4 pede que ele utilize outro programa desenvolvido também por ele, porém na subseção Independência Linear, no qual se verifica se dois vetores são Linearmente Independentes. Neste exercício, basta o aluno utilizar os vetores $\vec{v}_1$ *e* $\vec{v}_2$ que ele determinou na reta, para que o programa calcule os valores de c_1 e c_2 da equação $\vec{0} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$. Espera-se, com isso, que o aluno interprete a solução dada pelo seu programa, de modo a optar pela resposta correta, nas alternativas dadas, analisando as justificativas. Isso poderá consolidar o conceito de Independência Linear trabalhado na seção anterior.

Até o Exercício 4 foram trabalhados os conceitos de Conjunto Gerador e Conjunto Linearmente Independente para o conjunto $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Esse trabalho foi feito de acordo com duas abordagens distintas: Geométrica e Algebricamente. Além de serem reforçados esses conceitos, tem-se a intenção de preparar o caminho para a definição de Base de um Espaço Vetorial, uma vez que essa definição utilizará esses conceitos.

Os Exercícios 5 e 6 trabalham com o conjunto $S_1 = \{\vec{v}_1\}$. Desse modo, a abordagem utilizada é a geométrica, uma vez que os programas desenvolvidos pelo aluno nas subseções de Combinação Linear e Independência Linear são para conjuntos com dois vetores, não possibilitando a sua utilização, como foram os casos dos Exercícios 2 e 4 para o conjunto $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Exercício 5: Analisando, geometricamente, verifique se $S_1 = \{\vec{v}_1\}$gera W (Apêndice A.35).

Exercício 6: Analisando, geometricamente, podemos afirmar que $S_1 = \{\vec{v}_1\}$ é:

Linearmente Independente, pois gera o vetor nulo.

Linearmente Independente, pois $c_1\vec{v}_1 = \vec{0}$, então $c_1 = 0$.

Linearmente Dependente, pois não gera o vetor nulo.

Linearmente Dependente, pois se $c_1\vec{v}_1 = \vec{0}, c_1 \neq 0$.

Linearmente Dependente, pois não gera qualquer vetor de R^2. (Apêndice A.36).

Verifica-se, pelo enunciado, que os Exercícios 5 e 6 são análogos aos Exercícios 1 e 3, porém o conjunto S_1 possui, agora, somente um vetor. O objetivo desses dois exercícios é reforçar os conceitos de Conjunto Gerador, associado à multiplicidade de vetor, e de Conjunto Linearmente Independente, associado à colinearidade, por meio do recurso geométrico disponibilizado neles.

O Exercício 7 faz uma retomada dos conceitos trabalhados nos Exercícios anteriores.

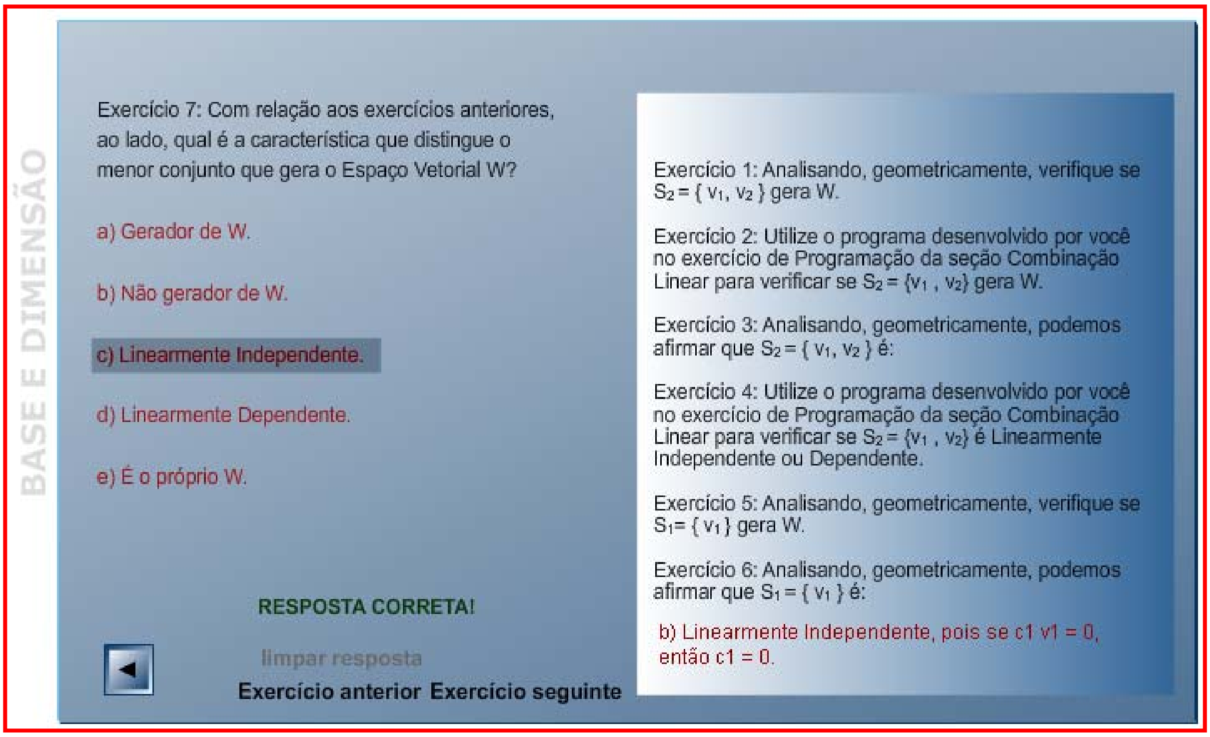


Figura 18: Base – Exercício 7
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Do lado direito da tela desse exercício, são colocados todos os enunciados dos exercícios anteriores, para que o aluno possa relembrá-los sem ter de sair dessa tela. Quando cada um desses exercícios é clicado com o mouse, aparece no canto inferior abaixo a sua resposta, caso ele tenha sido respondido pelo aluno; caso contrário, surge uma mensagem avisando que ele ainda não respondeu a esse exercício.

O objetivo deste exercício é levar o aluno a concluir que o menor conjunto que gera o Espaço Vetorial W é Linearmente Independente.

A Atividade 1 é finalizada com o Exercício 8.

Exercício 8: Analise a definição informal de Base de um Espaço Vetorial, ao lado, e responda: Quais são os dois conceitos de Álgebra Linear, trabalhados nessa seção, utilizados na definição? (Figura 19).

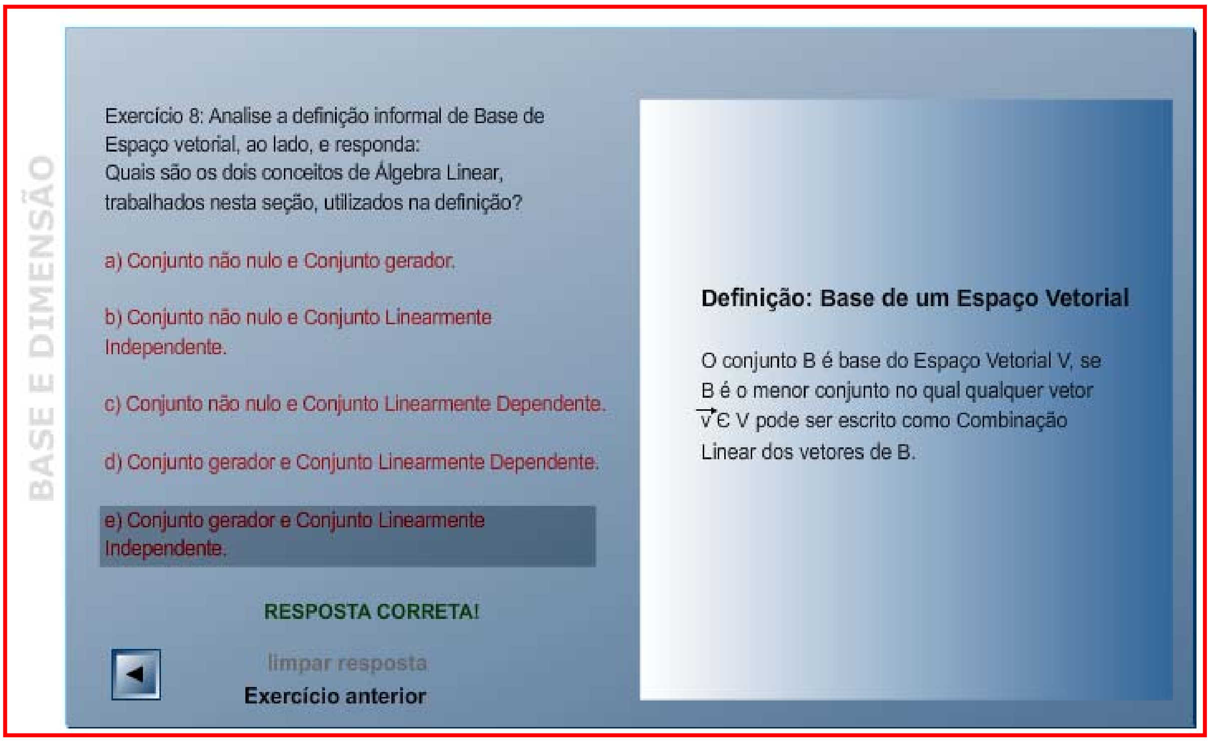


Figura 19: Base – Definição
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Além de apresentar uma definição informal de Base de um Espaço Vetorial, é pedido para o aluno analisá-la e responder quais são os conceitos de Álgebra Linear trabalhados na seção Base e utilizados na definição.

Na definição de Base apresentada, é dito que para um conjunto B ser Base de um Espaço Vetorial V, é necessário que esse conjunto atenda às seguintes condições:

Qualquer vetor $\vec{v} \in V$ pode ser escrito como Combinação Linear dos vetores de B. O aluno deverá associar esta condição com o conceito de Conjunto Gerador;

O Conjunto B terá que ser o menor conjunto que atende à condição (i). Essa condição deverá ser associada ao conceito de Conjunto Linearmente Independente.

Em todos os exercícios da Atividade 1, procurou-se enfatizar os conceitos de Conjunto Gerador e Conjunto Linearmente Independente como norteadores para a definição de Base de um Espaço Vetorial.

Essa idéia é reforçada nos exercícios da Atividade 2, que podem ser acessados ao retornar à tela da seção Base (Figura 15).

Clicando na opção Atividade 2, é apresentada a tela a seguir, que trabalha com o Espaço Vetorial R^2.

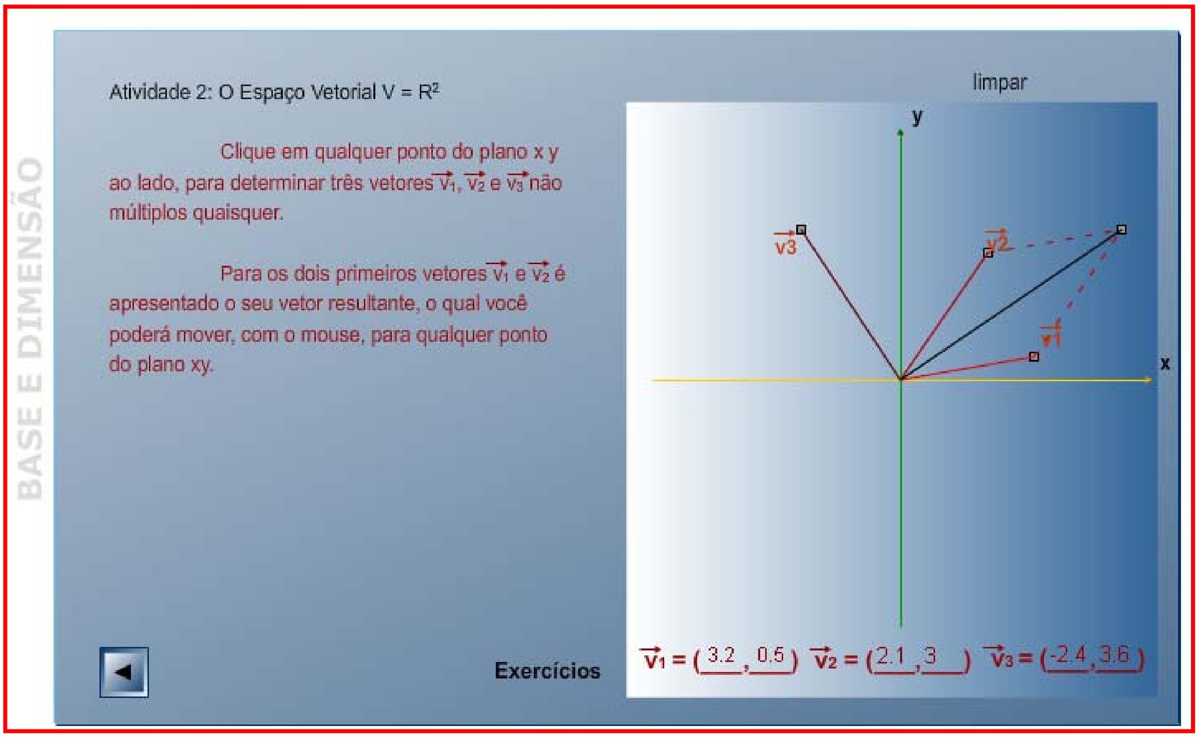


Figura 20: Base – Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Nessa tela, o aluno tem a liberdade de clicar, com o mouse, em qualquer ponto do Espaço Vetorial R^2, para determinar, geometricamente, três vetores $\vec{v}_{1,}\ v_2\ e\ \vec{v}_3$ quaisquer, que são descritos logo abaixo, por meio de suas componentes. Após ser determinado o terceiro vetor, aparece, automaticamente, o resultante dos dois primeiros, o qual pode ser deslocado, com o mouse, para qualquer ponto do R^2, alterando o paralelogramo cujos lados adjacentes são, inicialmente, os vetores $\vec{v}_1\ e\ \vec{v}_2$, passando a ser, agora, múltiplos desses vetores.

Nos nove exercícios trabalhados nessa atividade, busca-se, como na Atividade 1, trabalhar os conceitos de Conjunto Gerador e Conjunto Linearmente Independente.

Os exercícios são similares aos exercícios da Atividade 1, com a particularidade que os exercícios 1 e 2 da Atividade 2 trabalham com o conjunto $S_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, e o Espaço Vetorial analisado em todos os exercícios é o R^2. Dessa forma, todos os exercícios apresentam objetivos análogos aos da Atividade 1, cujos enunciados são apresentados a seguir:

Exercício 1: Analisando, geometricamente, verifique se $S_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ gera R^2.

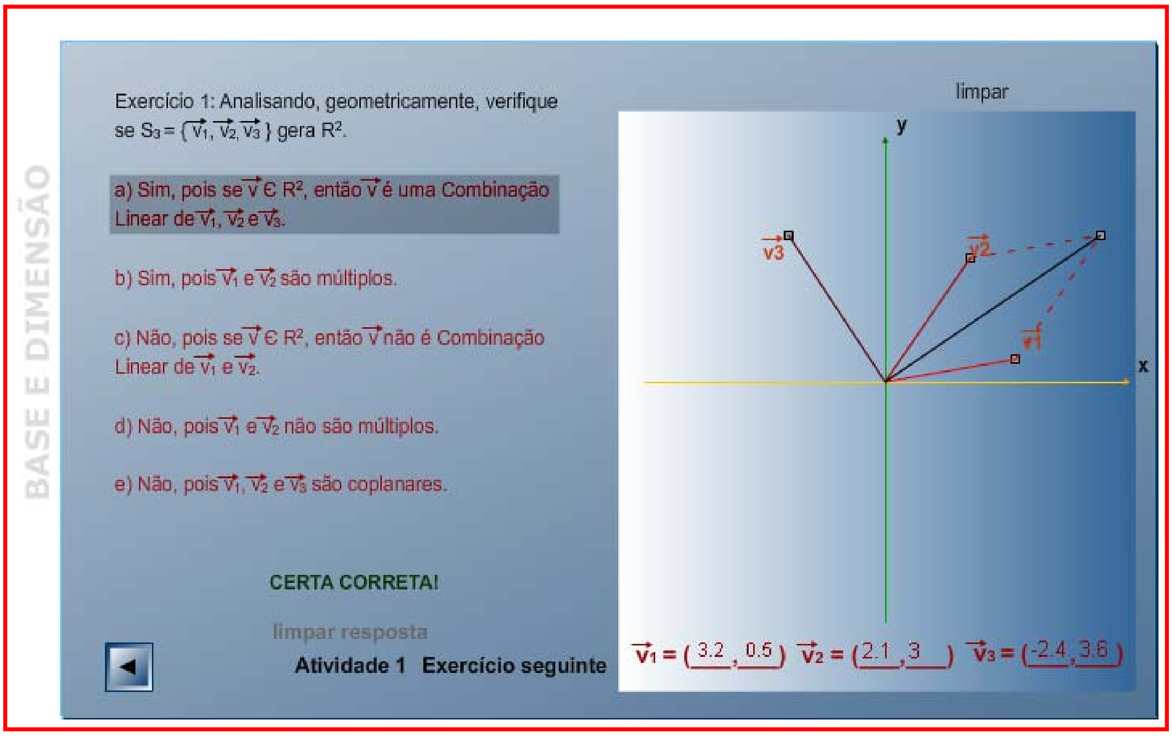


Figura 21: Base – Exercício 1 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Exercício 2: Analisando, geometricamente, podemos afirmar que $S_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é: (Apêndice A.37).

Exercício 3: Analisando, geometricamente, verifique se $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ gera R^2 (Apêndice A.38).

Exercício 4: Utilize o programa desenvolvido por você no exercício de Programação da subseção Combinação Linear para verificar se $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ gera R^2 (Figura 22).

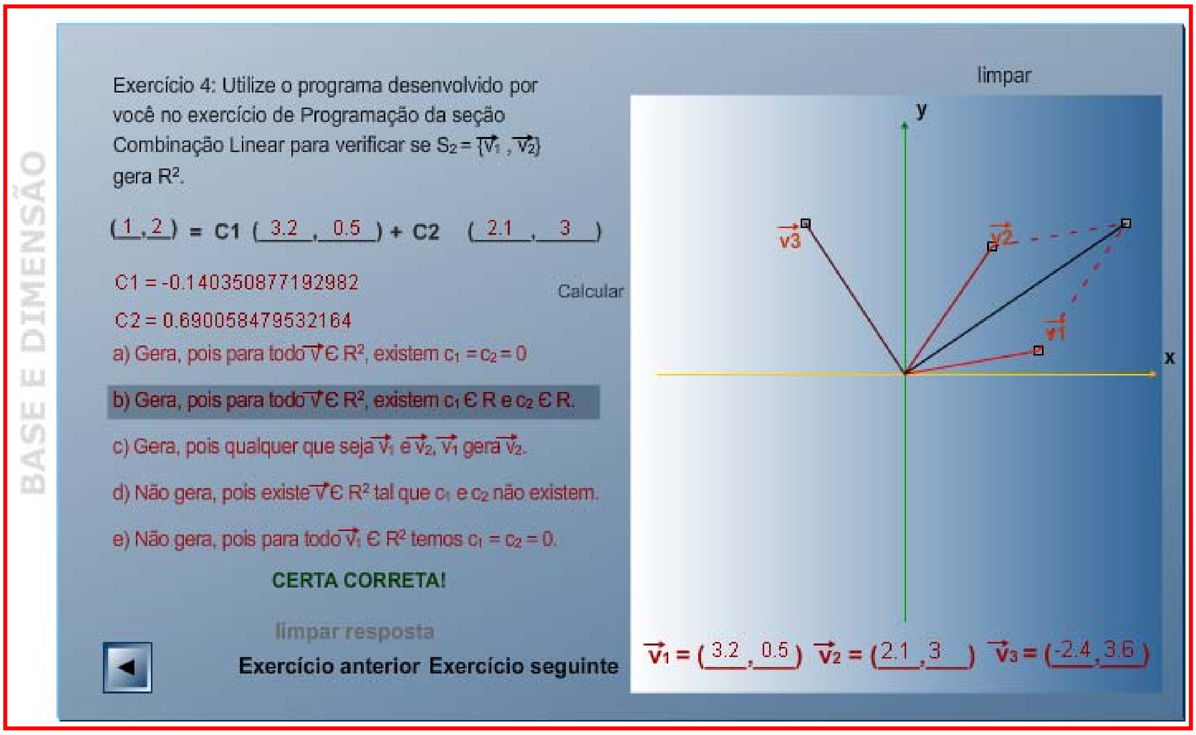


Figura 22: Base – Exercício 4 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Exercício 5: Analisando, geometricamente, podemos afirmar que $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é: (Apêndice A.39).

Exercício 6: Utilize o programa desenvolvido por você no exercício de Programação da Seção Independência Linear, para verificar se $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é Linearmente Independente ou Dependente (Apêndice A.40).

Exercício 7: Analisando, geometricamente, verifique se $S_1 = \{\vec{v}_1\}$ gera R^2 (Apêndice A.41).

Exercício 8: Analisando, geometricamente, podemos afirmar que $S_1 = \{\vec{v}_1\}$ é: (Apêndice A.42).

Exercício 9: Com relação aos exercícios anteriores, ao lado, qual é a característica que distingue o menor conjunto que gera o Espaço Vetorial R^2? (Apêndice A.43).

A Atividade 2 é encerrada com o exercício 9, o qual permite retornar à seção Base (Figura 15), por meio do botão “Voltar” situado no canto inferior esquerdo da tela.

Nas duas Atividades 1 e 2 da seção Base, são analisados vários conjuntos que geram os Espaços Vetoriais $W = \{x \in R \,/\, y = ax\}$ e R^2, e é evidenciado que o menor conjunto que gera cada um desses Espaços é Linearmente Independente. Com esse estudo, tem-se toda uma preparação para a definição de Base de um Espaço Vetorial.

Portanto, espera-se que o aluno, com o núcleo de objetos trabalhados na seção Base, tais como: retas que passam pela origem, vetores no R^2, vetores colineares e vetores coplanares, crie um significado particular para o conceito de Base de um Espaço Vetorial, percebendo o que acarreta a falta de cada uma dessas condições em um conjunto que deverá ser Base de um Espaço.

Terminados os trabalhos com a seção Base, clica-se no botão de retornar para acessar a tela "Introdução" (Figura 3). Pode-se, agora, clicar na opção 3 "Dimensão" para trabalhar esse conteúdo.

Acessando a última seção denominada Dimensão, é apresentada a seguinte tela:

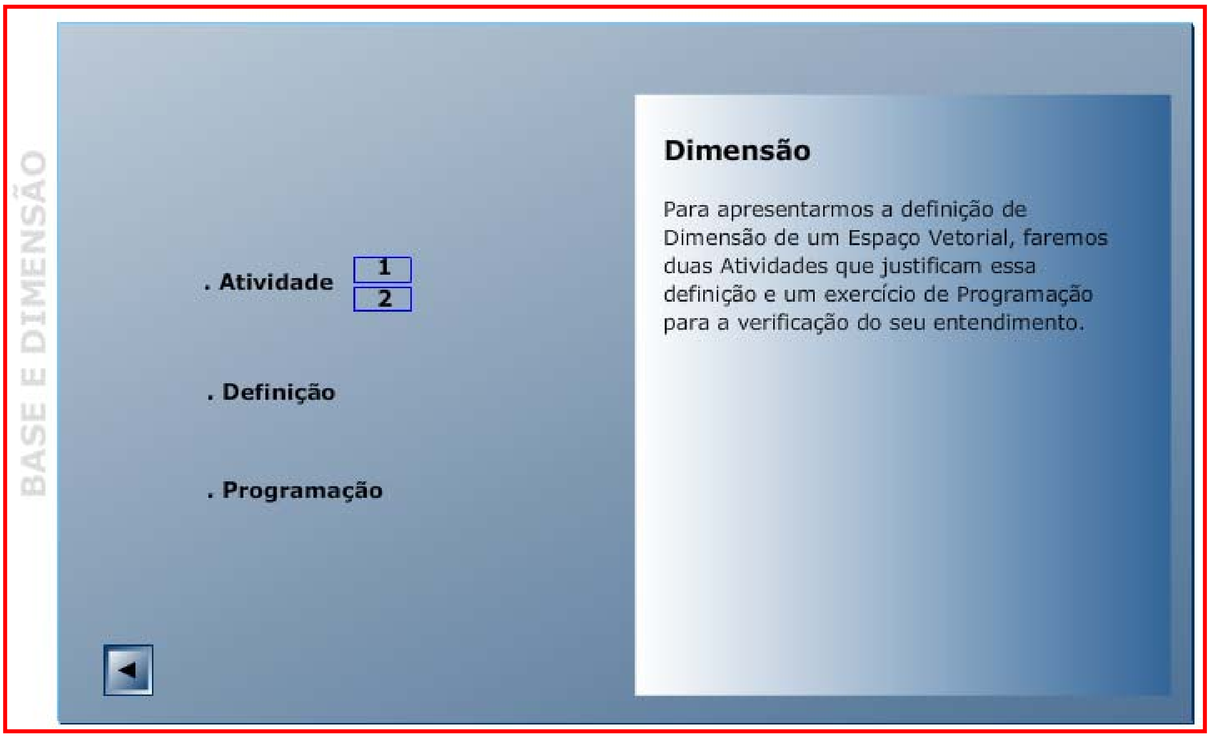


Figura 23: Dimensão – Apresentação
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Nessa tela, é enunciado que a seção Dimensão será trabalhada por meio de duas atividades que darão suporte à definição de Dimensão, e um exercício de "Programação", o qual verificará o entendimento do conceito.

Optando pela Atividade 1, acessa-se uma tela onde, inicialmente, são dadas algumas instruções para determinar um vetor , geometricamente, na área reservada ao recurso geométrico que trabalha o Espaço Vetorial R^2. Em seguida, é solicitado ao aluno que determine dois vetores $\vec{v}_1\ e\ \vec{v}_2$, de modo que o conjunto B formado por esses dois vetores seja uma Base para esse Espaço. É, também, pedido ao aluno para determinar um terceiro vetor $\vec{v}_3$

, de modo que se tenha um conjunto S formado por esses três vetores.

Ao determinar o segundo vetor $\vec{v}_2$, aparece, na representação geométrica, o resultante de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Além dessa representação, são dadas, logo abaixo do gráfico, as representações algébricas desses vetores, juntamente com a informação de que o conjunto B formado é, ou não, uma Base de R^2 (Apêndice 44).

Depois de determinados os conjuntos $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, o aluno, por meio do botão “Exercício”, pode iniciar a tarefa dada pela seguinte tela:

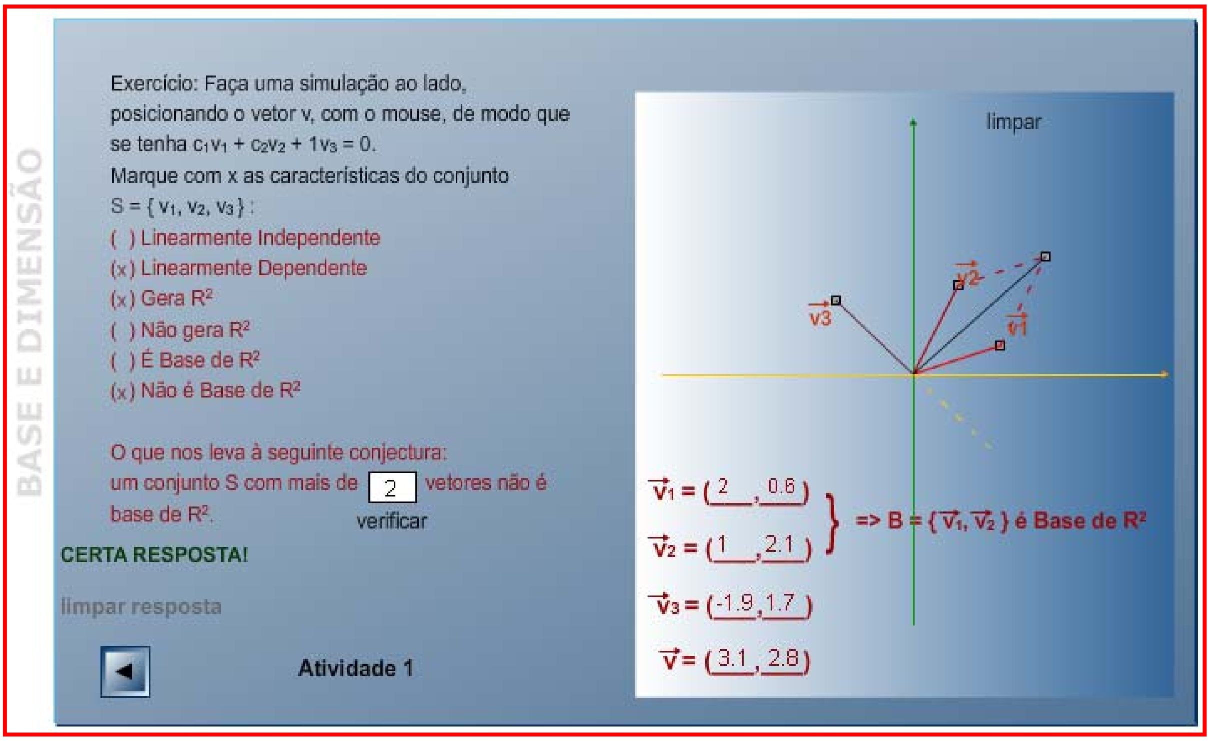


Figura 24: Dimensão – Exercício da Atividade 1
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Neste exercício, a partir de uma simulação geométrica, o aluno deverá chegar à conclusão de que o conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é Linearmente Dependente e, portanto, não é uma Base de R^2, o que o leva a completar a seguinte conjectura: um conjunto S com mais de dois vetores não é base de R^2.

O objetivo da Atividade 1 é levar o aluno a trabalhar o conceito de Base de um Espaço Vetorial, por meio de sua definição e com a utilização da representação geométrica desse Espaço. Pretende-se, com essa atividade, encontrar alguma regularidade com relação à Base de um Espaço Vetorial. Neste caso, o Espaço Vetorial trabalhado é o R^2, e a regularidade que deverá ser observada é a de que um conjunto com mais de dois vetores não é base de R^2.

Retornando à tela da seção Dimensão (Figura 23) e clicando no botão Atividade 2, é apresentada a seguinte tela:

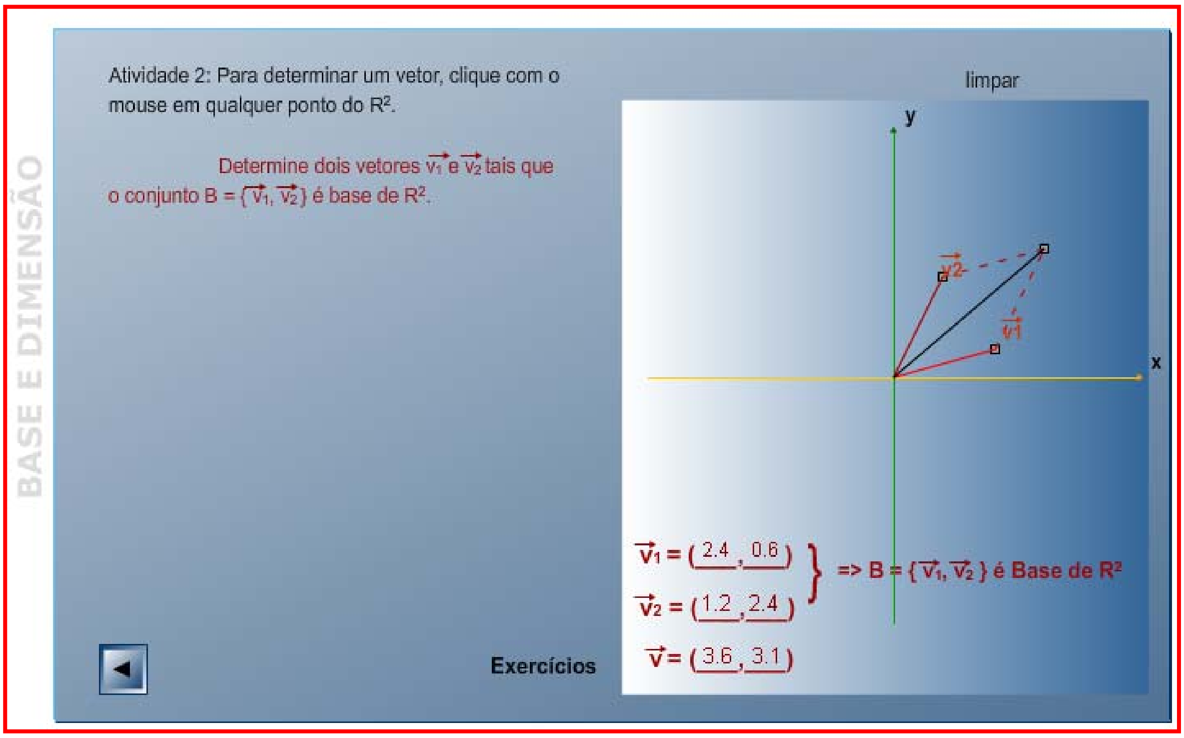


Figura 25: Dimensão – Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

A Atividade descrita nessa tela é análoga à Atividade 1, com a ressalva de que o Conjunto S, agora, é formado apenas com um vetor: $\vec{v}_1$ *ou* $\vec{v}_2$.

Clicando no Botão “Exercício”, acessa-se a tela Dimensão – Exercício da Atividade 2 (Apêndice 45), na qual é apresentada uma tarefa similar à do exercício da Atividade 1, disponibilizando os mesmos recursos para a sua solução. O aluno, neste exercício, deverá, novamente, chegar à conclusão de que S não é Base de R^2, porém, devido ao fato de S não gerar R^2. Essa justificativa deverá levar o aluno à formulação da seguinte conjectura: um conjunto S com menos de 2 vetores não é Base de R^2.

Na Atividade 2, tem-se o mesmo objetivo que o da Atividade 1, porém a regularidade observada deverá ser a de que um conjunto com menos de dois vetores não é base de R^2.

Finalizadas as Atividades 1 e 2, retorna-se à tela Dimensão (Figura 23), onde o aluno tem acesso à definição de Dimensão (Apêndice 46), clicando no botão correspondente.

Nessa tela, é enunciado o seguinte teorema: Todas as bases do R^n têm o mesmo número de vetores; é apresentada, ainda, a definição da Dimensão finita de um Espaço Vetorial.

O teorema é o resultado das regularidades apresentadas nas Atividades 1 e 2, o qual justifica a definição da Dimensão de um Espaço Vetorial. Procurou-se, dessa forma, dar um significado a essa definição.

Finalizando a seção Dimensão, tem-se a subseção "Programação", a qual apresenta a seguinte tela:

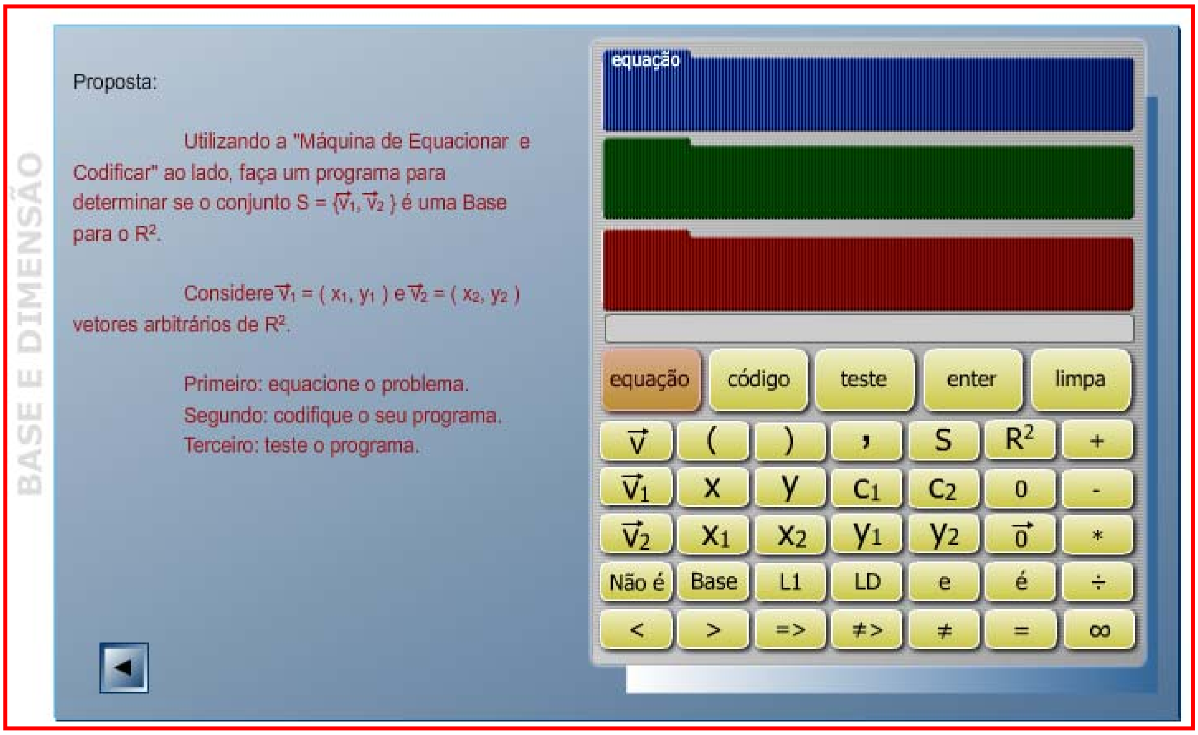


Figura 26: Dimensão – Programação
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Nessa tela, pretende-se que o aluno utilize o seguinte teorema:

Seja V um Espaço Vetorial de dimensão n e B um conjunto de V com n vetores. Então, B é uma base de V se B gera V ou se B é Linearmente Independente.

Então, é proposto ao aluno fazer um programa para determinar se o conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, onde $\vec{v}_1$ *e* $\vec{v}_2$ são quaisquer vetores de R^2, é uma base para o R^2.

Para tanto, é disponibilizada uma "Máquina de Equacionar e Codificar", que oferece recursos para a execução do proposto, que é composto de três etapas.

Na 1ª etapa, o aluno deverá equacionar o problema.

Com os recursos disponibilizados, ele poderá equacionar de dois modos:

1º Modo: $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$.

Ou seja, com a utilização do teorema, basta verificar se $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ gera R^2.

2º Modo: $\vec{0} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$.

Desta forma, utilizando o teorema, tem-se a opção de verificar somente se $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é Linearmente Independente.

Para as duas equações, os códigos para a solução do problema são os mesmos, e de acordo com os recursos da “Máquina de Equacionar e Codificar”, eles são dados por: $x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1 \neq 0 \Rightarrow S\ \acute{e}\ base$ ou $x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1 = 0 \Rightarrow S\, não\ \acute{e}\ base$.

O objetivo, além da utilização do teorema apresentado nesta subseção, é associar o conceito de Conjunto Gerador com Combinação Linear e o conceito de Conjunto Linearmente Independente com o caso particular da Combinação Linear do vetor nulo. Encontra-se, também, nesta tarefa a necessidade de recordar como encontrar a solução de um Sistema de Equações Lineares.

Em todas as três seções – Introdução, Base e Dimensão – procurou-se trabalhar os conceitos envolvidos, associando a parte algébrica à geométrica, o que justifica desenvolvê-las nos Espaços Vetoriais $R^2\ e\ R^3$.

Desta forma, é possível que o aluno se aproprie do conhecimento pretendido, uma vez que tenha dado significados aos conceitos trabalhados em um núcleo de objetos caracterizados por ele, por meio das diversas atividades ora apresentadas.

5 APLICAÇÃO DO SOFTWARE

5.1 Descrição da utilização do Software

O Estágio Obrigatório do Mestrado, referente a este trabalho foi realizado em uma turma do 6º período de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS de Betim, na disciplina de Álgebra Linear. Nessa turma foi feita uma experimentação do *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial.

O *SOFTWARE* foi aplicado para 39 alunos em um Laboratório de Informática com 20 computadores. Foram utilizadas quatro aulas para a aplicação da seção Introdução e duas aulas para a seção Base, de 100 minutos cada uma. A primeira seção contou com a presença do professor da disciplina de Álgebra Linear, autor desta dissertação, fazendo a mediação do processo e da auxiliar de pesquisa, observando, esclarecendo dúvidas dos alunos, gravando e filmando as aulas. A aplicação da seção Base não contou com a participação da auxiliar de pesquisa.

Na **primeira aula**, foi feita uma pequena apresentação do *SOFTWARE* pelo professor com a duração, de aproximadamente, 5 minutos. Nessa aula, foi trabalhado o conceito de Combinação Linear, por meio das subseções: problemas, atividades e aplicações.

A exploração das Atividades nas subseções do *SOFTWARE* foi realizada de forma independente pelos alunos, motivo pelo qual tornou-se necessário um fechamento de cada subseção, conduzido pelo professor. Nesse fechamento, houve a mediação do professor, por meio de orientações que otimizavam a sua exploração.

A maior parte das solicitações para esclarecimentos, com relação ao que fazer nas atividades, foi devido à falta de uma leitura mais atenciosa, pois era só pedir para o aluno ler, cuidadosamente, o proposto na tela, para que a dúvida fosse sanada. Isso se deve, em parte, à mudança da metodologia na qual o aluno busca a informação para a construção do conhecimento, difrerente da anterior, em que as informações eram transmitidas pelo professor, colocando, desse modo, o aluno numa posição passiva dentro do processo de ensino.

Era possível observar, nesse primeiro contato com o *SOFTWARE*, diversas manifestações de satisfação da maioria dos alunos. Isso indicou, a princípio, que esse recurso pode estimular o estudo de conteúdos de Álgebra Linear.

Foram, também, observadas algumas manifestações de impaciência com relação ao tratamento do erro. Isso acontecia quando o *SOFTWARE* não considerava uma resposta correta e quando, para corrigir uma resposta errada, era necessário refazer todo o processo. Esse fato foi observado em um número pequeno de atividades.

A **segunda aula** com a utilização do *SOFTWARE* contou com a presença do orientador desta pesquisa[7], o qual participou como observador, avaliando o Estágio Obrigatória do Programa.

Nessa aula, foi trabalhada a subseção Programação da Subseção Combinação Linear. Iniciou-se a aula com algumas informações preliminares com relação às etapas dessa atividade. Foi proposto, nessa atividade, que o aluno desenvolvesse um programa que escreva um vetor qualquer de R^2, como combinação linear de outros dois vetores quaisquer de R^2. Esse desenvolvimento deveria cumprir três etapas: equacionar; nomear as variáveis e codificar.

Na primeira etapa, a informação foi a de que a equação a ser montada deveria seguir a definição de Combinação Linear apresentada na subseção anterior, ou seja, $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$, pois, apesar de poder apresentar outra ordem, o programa não dispunha desse recurso. Esse fato ocasionou descontentamento por parte de alguns alunos. Dada essa informação, a etapa foi realizada por todos os alunos sem maiores dificuldades.

A informação para a segunda etapa foi com relação à nomeação das variáveis que seriam utilizadas para codificar o programa. Como havia uma limitação de nomes para essas variáveis e o programa só aceitaria uma ordem, o professor orientou que os alunos fizessem uma escolha conveniente. A conveniência desta escolha estava no fato de se considerar os vetores $\vec{v}_1 \; e \; \vec{v}_2$, da equação $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$, como colunas da matriz utilizada na Regra de Cramer, para encontrar a solução de um Sistema de Equações Lineares gerado por essa equação. Houve uma certa dificuldade nessa etapa, o que foi previsto e desejado na elaboração da tarefa, pois, assim, com o desconforto criado, foi possível buscar uma acomodação que propiciou a construção do conhecimento, o qual envolveu o conceito de Combinação Linear associado à resolução de Sistemas Lineares.

A terceira etapa era codificar as constantes $c_1 \; e \; c_2$, que compunham a equação $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$, para encontrar os seus valores quando escolhidos: $\vec{v}, \; \vec{v}_1 \; e \; \vec{v}_2$. Nessa etapa, as informações dadas eram de que o código para essas constantes não poderia conter espaços entre os dígitos, e para a disposição das variáveis, só era considerada uma ordem, apesar de

[7] Professor Dr. João Bosco Laudares, titular do Departamento de Matemática e Estatística da PUCMINAS.

existirem diversas maneiras corretas de escrever esses códigos. Nesse momento, devido a esses fatos, também foi registrada uma insatisfação por parte de uma minoria de alunos. Depois de algumas tentativas, a maioria dos alunos não apresentou dificuldades.

Ao final da terceira etapa, é disponibilizado o programa que o aluno criou para que ele possa testá-lo. Novamente, por meio de expressões faciais, expressões verbais e da euforia da maioria dos alunos, foi possível "quantificar" a satisfação dos estudantes, ao verificar que o programa criado por eles realmente consegue encontrar as constantes $c_1 \ e \ c_2$ que satisfazem o problema proposto.

Finalizado o estudo de Combinação Linear com o *SOFTWARE*, retornou-se para a sala de aula, onde foram sanadas as dúvidas, generalizado e reforçado o tratamento algébrico desse conceito. As maiores dificuldades surgiram nos Espaços Vetoriais de Matrizes e Polinômios, devido à falta de representação geométrica e à diversidade na notação algébrica, comparando-se com o $R^2 \ e \ R^3$.

Iniciando o estudo da "Subseção Independência Linear" por meio das atividades 1 e 2, observou-se, na **terceira aula** com a utilização do *SOFTWARE*, que os alunos estavam mais à vontade, pois eles acessavam as atividades solicitadas e interagiam com os exercícios, sem a necessidade de maiores orientações. Outro fato importante com relação à facilidade de interação entre conteúdo e aluno, por meio do *SOFTWARE*, é que as solicitações de intervenção foram bem menores, ocasionando uma disponibilidade de tempo para o fechamento das atividades no próprio laboratório. Nesse fechamento, associou-se o conceito de Independência Linear para dois vetores em R^2, com o fato de esses vetores não serem colineares e, analogamente, para três vetores Linearmente Independentes em R^3, com ao fato de esses vetores não serem coplanares.

É importante ressaltar que a mediação do professor, nas atividades 1 e 2 desta subseção, foi fundamental para que o aluno pudesse explorar o maior número de casos possíveis, otimizando, desse modo, o entendimento dos conceitos relativos ao assunto.

O conceito de "Independência Linear" foi, também, discutido em sala de aula, propiciando um momento em que foram tiradas as dúvidas e foi generalizado o seu conceito para Espaços Vetoriais arbitrários. Novamente, as maiores dificuldades apresentadas foram nos "Espaços Vetoriais das Matrizes e Polinômios", devido à falta de representação geométrica e de suas representações algébricas.

A maioria das intervenções solicitadas pelo aluno foi por falta de leitura das instruções apresentadas nas telas. Esse fato, provavelmente, é devido à falta de hábito na utilização de um recurso que busca uma interação do aluno com o conteúdo, tirando-o da posição passiva que normalmente ocorre nas aulas tradicionais.

Na **quarta aula** com a utilização do *SOFTWARE*, foi aplicada a última atividade da "Subseção Independência Linear" denominada Programação. Como essa atividade é análoga à da Programação na "Subseção Combinação Linear", não foram encontradas grandes dificuldades na sua execução. As que surgiram foram as mesmas encontradas na primeira atividade, ou seja, na forma de digitar os códigos sem espaços e na ordem das variáveis dispostas nesse código.

Conforme foi previsto na atividade de Programação da "Subseção Combinação Linear", essa atividade na "Subseção Independência Linear" também tem um alto grau de dificuldade. É essa uma situação desejável, uma vez que leva o aluno a consolidar esse conceito, pois, agora, utilizando recursos limitados, é ele que passa a "ensinar" para o computador como identificar se um conjunto de dois vetores do R^2 é "Linearmente Independente".

Após essa atividade, os alunos foram encaminhados para a sala de aula, onde foi aplicado um questionário para aferimento da satisfação do *SOFTWARE* utilizado.

A partir daí, a aplicação do *SOFTWARE* não contou mais com a participação da auxiliar de pesquisa. Nessa nova fase, não houve uma avaliação rigorosa[8] nos critérios que nortearam a avaliação da seção Introdução. Mas houve uma avaliação pedagógica e por meio de observações do professor, autor desta dissertação, foi possível encontrar indicativos favoráveis quanto à sua utilização, os quais são apresentados no próximo tópico deste capítulo.

Na **quinta aula**, abrindo essa nova fase, foi trabalhada a atividade 1 da "Seção Base", que analisa o Espaço Vetorial $W = \{x \in R / y = ax\}$, cuja representação gráfica é uma reta que passa pela origem. Pela dinâmica do recurso geométrico que possibilita a representação gráfica de uma infinidade de retas, atribuindo valores aleatórios para a, observou-se uma grande exploração desse recurso. A empolgação dos alunos era percebida por meio das perguntas feitas com relação aos tipos de retas que podiam ser representadas e pelos vetores determinados ao clicar em um ponto qualquer delas, os quais eram, automaticamente, representados algebricamente.

Nos exercícios referentes a esse Espaço Vetorial, havia uma necessidade muito grande de analisar o recurso geométrico. Esse fato pode justificar a concentração observada na

[8] Avaliação rigorosa no sentido de contemplar três métodos: Avaliação Heurística, Questionário de Satisfação e Avaliação Pedagógica.

maioria dos alunos.

Com relação à atividade 2, trabalhada na **sexta aula** dessa fase, observou-se o mesmo comportamento apontado na atividade 1, já que essa atividade é análoga à anterior, com a diferença de que o Espaço Vetorial trabalhado, agora, é um Subespaço do R^3.

Novamente, pelos mesmos fatores apontados na aplicação da "Seção Introdução", a utilização do *SOFTWARE* para trabalhar o conceito de Base mostrou que pode ser um recurso estimulador no ensino e na aprendizagem desse conteúdo.

5.2 Resultados obtidos na aplicação do software

A Avaliação do *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear, assim como a sua aplicação, foi realizada em duas fases. A primeira fase, que avaliou a Seção Introdução foi aplicada pelo pesquisador e contou com a participação da auxiliar de pesquisa, orientada pela Professora Drª Cristiane Neri Nobre do Instituto de Informática da PUCMINAS e co-orientada pela Professora Carina Pinheiro Soares de Torres Alves do Departamento de Matemática e Estatística da PUCMINAS, denominada Equipe de Avaliação do *Software*. Os gráficos e as tabelas referentes aos resultados da avaliação dessa seção foram elaborados por essa Equipe num trabalho colaborativo supervisionado pelo pesquisador. A segunda fase, que avaliou as Seções Base e Dimensão, não contou com a participação da auxiliar de pesquisa.

5.2.1 Avaliação da Seção Introdução

Para avaliação desta seção, foram utilizados três métodos: Avaliação Heurística, Questionário de Satisfação e Avaliação de Aprendizagem de Conteúdo.

- Avaliação Heurística

Essa avaliação tem como objetivo identificar problemas de usabilidade do *SOFTWARE*. Para facilitar a compreensão dos problemas encontrados na Avaliação Heurística, esses são apresentados com as respectivas sugestões de solução, no seguinte Quadro:

Nº	Tipos de Problemas Encontrados	Solução Sugerida
01	Erro sem feedback na simulação das opções de caminhos do inseto e no Programa de Combinação Linear feito pelo aluno.	Criar feedback.
02	Posicionamento inadequado de botões.	Posicionar adequadamente os botões.
03	Nome de botão inadequado.	Trocar o nome do botão.
04	Atividade não pode ser interrompida.	Proporcionar a liberdade de interrupção da atividade.
05	Botão sem função.	Retirar botão sem função.
06	Botões iguais para ações diferentes.	Padronizar os botões.
07	Espaço e cor utilizados na tela.	Melhorar espaçamento/cor.
08	Recorrer à tela anterior para buscar respostas.	Criar recurso para rever situações trabalhadas.
09	Resposta sem flexibilidade.	Aceitar outras opções.
10	Animação invadindo enunciado.	Limitar o espaço da animação.
11	Tipos diferentes de tratamento de um vetor (Cubo de Cores).	Padronizar os vetores.
12	Ponto para separar decimais.	Aceitar vírgula ou ponto.
13	Problema no vetor da cor azul (Cubo de Cores).	Consertar posicionamento do vetor.
14	Falta do botão de limpar.	Colocar o botão de limpar.
15	Falta de clareza na etapa Teste o seu Programa.	Instruir com mais clareza.
16	Botão sem clareza na sua funcionalidade.	Mudar o nome do botão.
17	Falta de informações do Espaço Vetorial trabalhado.	Informar o Espaço Vetorial trabalhado.

Quadro 2: Resultado da Avaliação Heurística
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Buscou-se apontar os tipos de problemas de usabilidade encontrados no *SOFTWARE*, os quais serão solucionados no Grupo de Estudo e Pesquisa em Informática Educativa para o Ensino de Matemática da PUCMINAS, do qual faz parte o pesquisador. Maiores detalhes da Avaliação Heurística realizada são encontrados no Anexo 1: Avaliação Heurística.

- Questionário de Satisfação

O objetivo desse método de avaliação é verificar o grau de satisfação do usuário quanto a abordagem do conteúdo pelo *SOFTWARE*. Nessa avaliação, destacam-se os seguintes resultados:

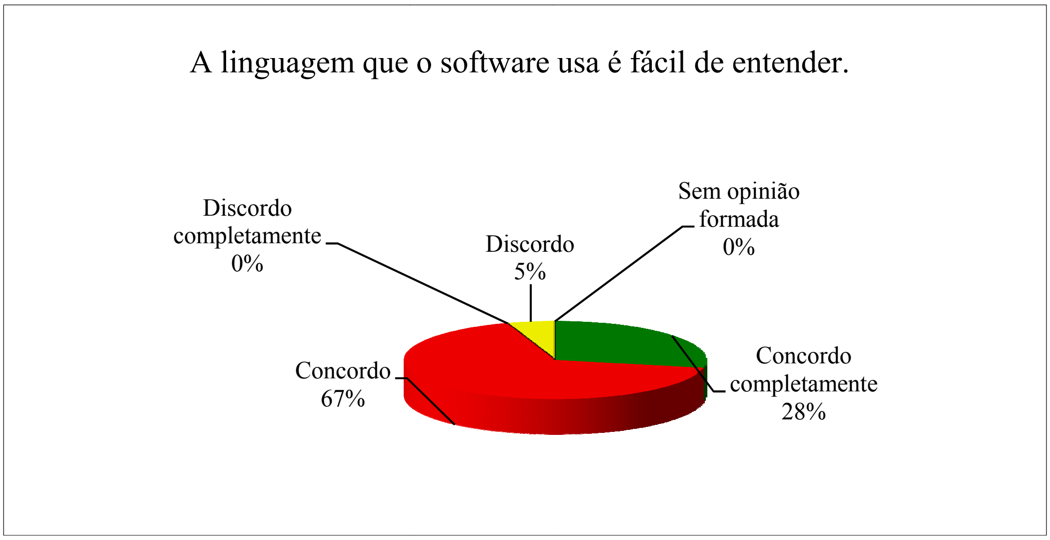


Gráfico 1: Questionário de Satisfação – Linguagem do *Software*
Fonte: Equipe de Avaliação do Softweare.

Para minimizar as dificuldades na aprendizagem de um conteúdo trabalhado em um *software*, é desejável que sua linguagem seja de fácil entendimento, evitando, dessa forma, que se gastem esforços para compreender o que está sendo proposto nas atividades.

De acordo com o gráfico apresentado acima, 95% dos alunos que utilizaram o *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear não encontraram dificuldades com a sua linguagem. Devido a esse fato, tem-se, com relação a esse quesito, uma boa aceitação do *SOFTWARE*, o que pode, conseqüentemente, servir de estímulo para a sua utilização.

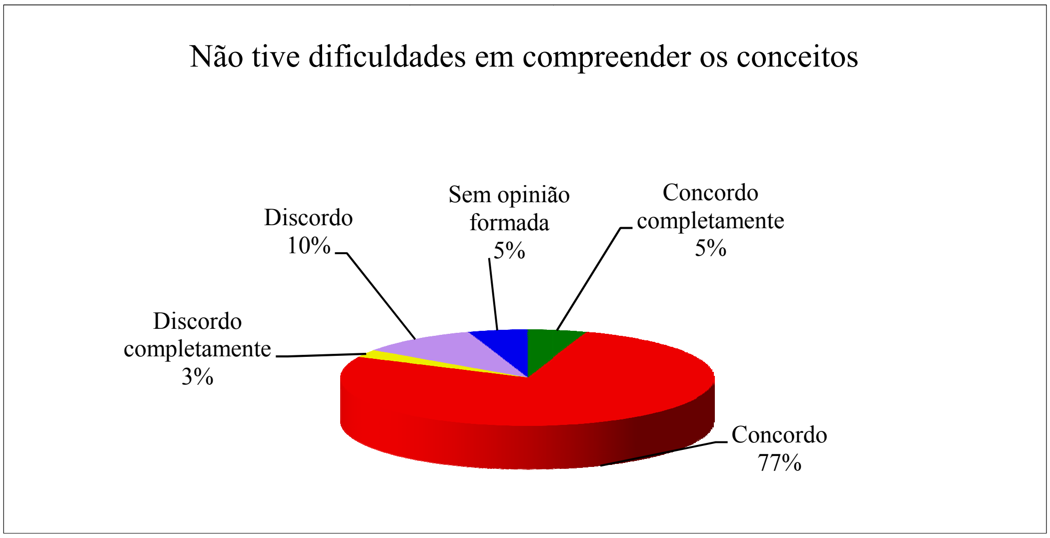


Gráfico 2: Questionário de Satisfação – Conceitos
Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

Uma linguagem fácil de entender, dentre outros fatores, pode ajudar na compreensão dos conceitos. Isso pode ter influenciado no entendimento dos conceitos apresentados no

SOFTWARE, uma vez que analisando o gráfico 2, tem-se que 82% dos alunos entenderam os conceitos nele apresentados, já que 95% (Gráfico 1) não tiveram problemas com a sua linguagem.

O recurso geométrico utilizado para a construção dos conceitos pode, também, ter contribuído para o seu entendimento. Outro fato que pode ser apontado como colaborador nesse processo de ensino e aprendizagem é a interatividade apresentada nas atividades do *SOFTWARE*, a qual tira o aluno da posição passiva dentro desse contexto.

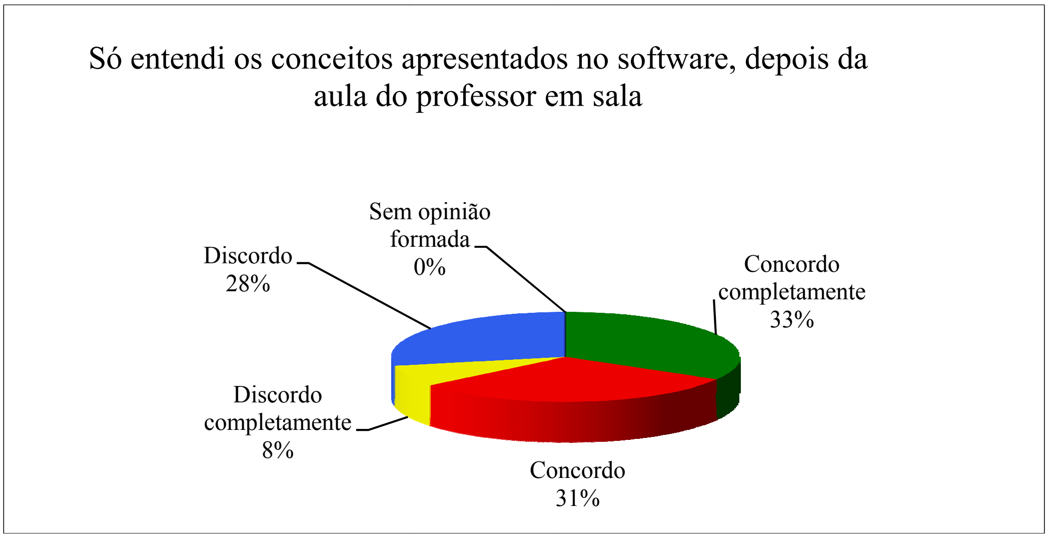


Gráfico 3: Questionário de Satisfação – Sala de Aula
Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

Um dos objetivos da utilização do *SOFTWARE* é auxiliar o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, portanto, torna-se necessário, para uma complementação, sistematização e consolidação da aprendizagem, que os conceitos sejam retomados em sala de aula. E, assim, foram feitas generalizações e foi reforçado o tratamento algébrico em sala, uma vez que o apego maior no tratamento dos conceitos trabalhados no *SOFTWARE* foi o geométrico.

A confirmação dessa necessidade é dada, analisando-se o gráfico 3: "Questionário de Satisfação – Sala de Aula", onde 64% dos alunos concordaram com a afirmação de que a aprendizagem dos conceitos apresentados no *SOFTWARE* ficou mais sedimentada com a aula do professor em sala.

Porém, é constatado, no gráfico a seguir, que 100% dos alunos conseguiram relacionar os exemplos dados em sala de aula com as atividades apresentadas no *SOFTWARE*, demonstrando que esse recurso ajudou o entendimento desses exemplos, uma vez que o conceito não foi trabalhado, diretamente, em sala de aula.

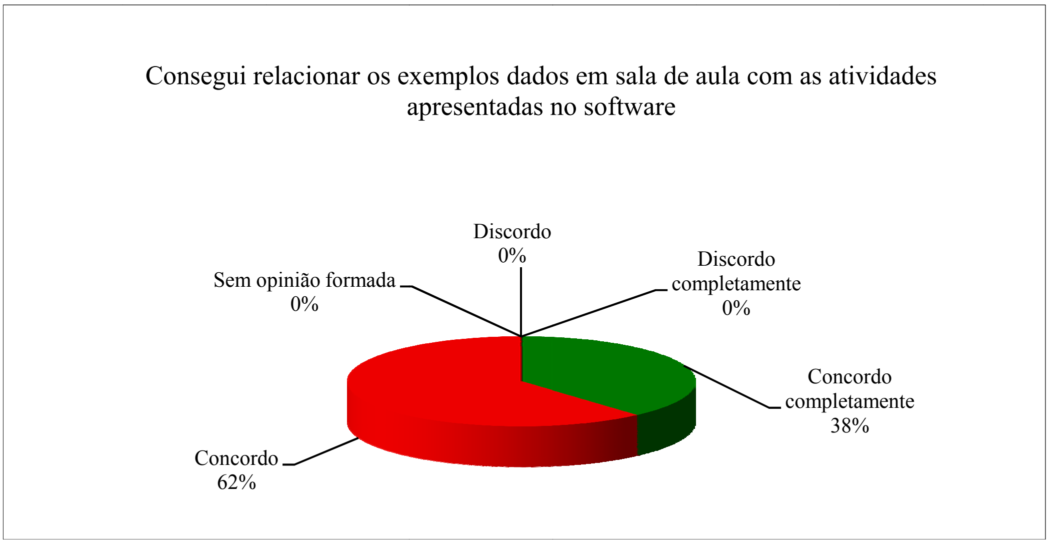


Gráfico 4: Questionário de Satisfação – Exemplos e Atividades no *Software*
Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

Um fato bastante relevante para a continuação da utilização do *SOFTWARE* é que 100% dos alunos avaliados acharam interessante a abordagem dos assuntos nele apresentados, conforme se pode verificar no gráfico a seguir:

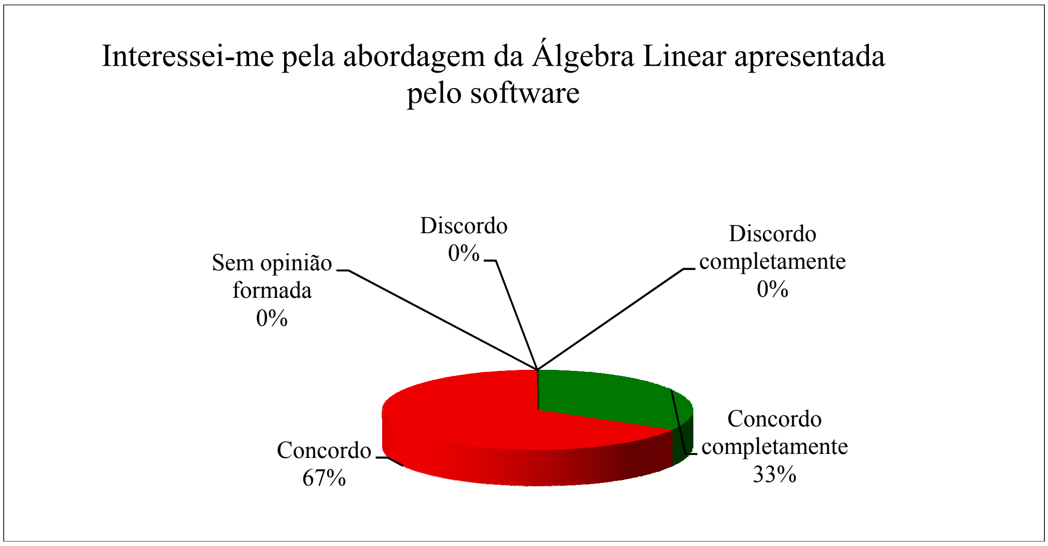


Gráfico 5: Questionário de Satisfação – Abordagem de Assuntos
Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

Pelos resultados apontados na Avaliação Heurística e no Questionário de Satisfação, pode-se concluir que as insatisfações surgidas na utilização do *SOFTWARE* devem-se a sua usabilidade, não interferindo, significativamente, no estímulo que esse recurso propiciou.

Uma comprovação dessa afirmação é dada pelas notas atribuídas ao *SOFTWARE*, conforme o gráfico a seguir:

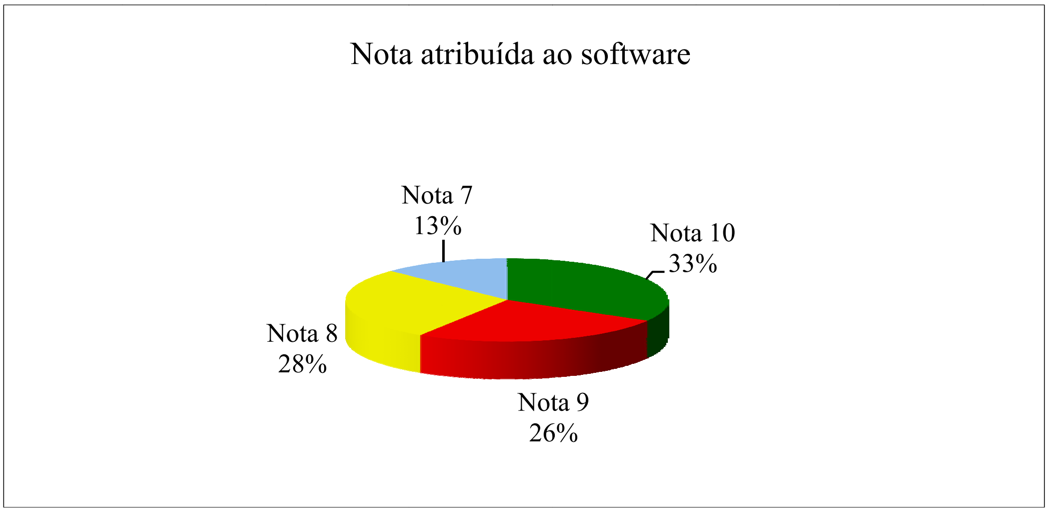


Gráfico 6: Questionário de Satisfação – Nota
Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

São destacados, a seguir, alguns depoimentos dos alunos conforme sua nota:

> *Nota 7 – a idéia de se trabalhar com álgebra linear usando recursos como a informática é muito válida. O software tem bons problemas e exemplos (demonstrações), mas na minha opnião deveria ter uma estrutura de fundo mais fixa e uma maior variedade lógica na resposta a ser dada, como a diferença de maiúsculas e o uso de espaços.* (ALUNO C)

> *Nota 9.0 – Como uma ferramenta auxiliar é um ótimo software onde podemos absorver as informações de uma maneira dinâmica e, juntamente com a aula em sala, absorver o conteúdo de um modo mais prático, rápido e fácil. A nota 9.0 é pela dificuldade que senti no momento de "montar" ou "programar" com linguagem matemática, mas nada que um pouco mais de prática e paciência não resolvam. No mais, é isso, considero como um ótimo software.* (ALUNO E).

Portanto, a avaliação do *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear, por meio do Questionário de Satisfação, indica a sua aprovação com relação à exposição dos conteúdos de "Combinação Linear" e "Independência Linear", podendo se tornar um recurso que auxilia a aprendizagem desses conteúdos.

- Avaliação de Aprendizagem de Conteúdo

Para a Avaliação de Aprendizagem de Conteúdo desta seção, foram aplicadas duas atividades escritas e individuais: a primeira, avaliando o conteúdo de Combinação Linear e a segunda, avaliando os conteúdos de Combinação Linear e Independência Linear.

1ª Atividade: Avaliação do Conteúdo de Combinação Linear

Para essa atividade, o objetivo foi de identificar se os alunos conseguiram compreender o conceito de Combinação Linear nos Espaços Vetoriais R^2 e R^3, e em Espaços Vetoriais arbitrários, especificamente, os Espaços Vetoriais: M_{mxn} e R^n.

Essa atividade é composta de quatro questões e os resultados da sua aplicação são apresentados, por questão, nas quatro tabelas a seguir:

TABELA 1

Resultado da 1ª questão da 1ª atividade

1ª Questão: O que é, para você, uma Combinação Linear?	
CORREÇÃO	Nº DE ALUNOS
Acertou completamente	7
Acertou parcialmente	19
Errou completamente	9
Não respondeu	4
T O T A L	39

Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

TABELA 2

Resultado da 2ª questão da 1ª atividade

2º Questão: Com base nos conceitos de Espaço Vetorial (visto em sala) e Combinação Linear (introduzido com o uso do *software*), diga quais das sentenças abaixo representam combinações lineares. Em caso afirmativo, justifique seu ponto de vista. Em caso negativo, diga o que precisa ser modificado para que o exemplo apresentado torne-se uma combinação linear dos vetores dados.

Sentença	Acertou completamente	Acertou Parcialmente	Errou completamente	Não Respondeu
(a) $1(3,5)+1(-2,4)$	25	8	2	4
(b) $(7,3)-1(2,-4)$	11	4	19	5
(c) $\sqrt{3}(0,2,1)+\frac{2}{7}(8,1,5)$	23	8	2	6
(d) $1(0,2,3)\div 1(-2,-1,4)$	21	7	5	6
(e) $2\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -4\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-8 & 6\\ -1 & 5\end{pmatrix}$	24	6	3	6
(f) $-4\begin{pmatrix}0 & 3\\ -9 & 5\\ 12 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-8 & 6\\ -1 & 5\end{pmatrix}$	25	5	4	5
(g) $1(-1,2,-3,4)+8(1,-1,4,0)$	23	5	5	6

Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

TABELA 3

Resultado da 3ª questão da 1ª atividade

3ª Questão: Encontre as constantes c_1 e c_2 tais que $(2,1,0)=c_1(1,1,0)+c_2(1,0,0)$. Conclusão: o vetor $(2,1,0)$ é uma combinação linear dos vetores $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$?	
CORREÇÃO	Nº DE ALUNOS
Acertou completamente	21
Acertou parcialmente	8
Errou completamente	6
Não respondeu	4
T O T A L	39

Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

TABELA 4

Resultado da 4ª questão da 1ª atividade

4ª Questão: Encontre as constantes c_1 e c_2 tais que $(2,3,1) = c_1(1,1,0) + c_2(1,2,0)$. O que você pode concluir nesse caso?	
CORREÇÃO	Nº DE ALUNOS
Acertou completamente	19
Acertou parcialmente	11
Errou completamente	5
Não respondeu	4
T O T A L	39

Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

De forma geral, de acordo com os objetivos propostos e os resultados apresentados para essa atividade, pode-se afirmar que o conceito de Combinação Linear foi compreendido pela maioria dos alunos que participaram dela.

2ª Atividade: Avaliação dos Conteúdos de Combinação Linear e Independência Linear Assim como na atividade avaliativa de Combinação Linear, nessa Avaliação houve, também, uma distribuição de pontos válidos para a disciplina de Álgebra Linear na turma que participou desta pesquisa.

O objetivo dessa atividade foi o de verificar se os alunos compreenderam e relacionaram os conceitos de Combinação Linear e Independência Linear, apresentados no *SOFTWARE* e nas aulas em sala. Essa Atividade, composta de cinco questões, encontra-se no Anexo 2, e os resultados obtidos com a sua aplicação são apresentados na tabela a seguir:

TABELA 5

Resultados da Avaliação dos Conteúdos de Combinação Linear e Independência Linear

QUESTÕES	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Demonstraram que compreenderam o(s) conceito(s) envolvido(s) na questão (resposta correta).	7	31	12	17	36
Demonstraram que compreenderam parcialmente o(s) conceito(s) envolvido(s) na questão (resposta parcialmente correta).	15	6	11	21	0
Demonstraram que não compreenderam o conceito envolvido na questão (resposta incorreta)	14	2	9	0	2
Não responderam	3	0	7	1	1

Fonte: Equipe de Avaliação do *Software*.

Os conceitos de Combinação Linear e Independência Linear foram compreendidos pela maioria dos alunos, conforme resultados apresentados na tabela 2. Porém, foi constatado na correção dessa 2ª atividade avaliativa que alguns alunos demonstraram compreender que qualquer vetor pode ser representado na reta. A ocorrência desse fato pode ter sido influenciada pela utilização do SOFTWARE que trabalhou os conceitos de Combinação Linear e Independência Linear, associados à representação geométrica dos vetores de R^2 e R^3.

Também se observou uma deficiência no tratamento algébrico para verificar se um conjunto de vetores é Linearmente Independente. A saída encontrada pelos alunos, quando possível, foi associar o conceito de Independência Linear ao tratamento geométrico. Esse recurso foi muito utilizado no SOFTWARE.

Por meio da análise dos três métodos utilizados para avaliar a seção introdução, pode-se dizer que o SOFTWARE contribuiu para o entendimento dos conceitos de Combinação Linear e Independência Linear, pois o tratamento geométrico desses conceitos no SOFTWARE é identificado nas duas atividades aplicadas.

5.2.2 Avaliação da Seção Base

Para a aferição desta seção, como recurso auxiliar no processo de ensino e aprendizagem do conceito de Base, foi aplicada uma atividade escrita e individual pelo professor da turma avaliada, que também é o autor desta dissertação. Essa atividade contou com a participação de 38 alunos, cujos resultados são apresentados, por questão, nas cinco tabelas a seguir:

TABELA 6

Resultado da 1ª questão

1ª Questão: Foi visto, no *software* trabalhado em aula, que toda reta que passa pela origem ($y = ax$) é um Espaço Vetorial. Mostre que todo plano que passa pela origem ($ax + by + cz = 0$) é, também, um Espaço Vetorial.	
Acertou completamente	0
Acertou parcialmente (acertou o conceito e errou a álgebra)	16
Errou completamente	16
Não respondeu	6
TOTAL	38

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Nessa questão, observa-se que nenhum aluno acertou-a completamente. Analisando as respostas dadas, verifica-se que o erro cometido foi na parte algébrica. A maioria dos alunos representaram, algebricamente, um vetor genérico de um plano que passa pela origem do seguinte modo: $\vec{v} = a_1 x + b_1 y + c\ z$, ou seja, o conjunto o qual se quer mostrar que é um Espaço Vetorial, para o aluno, é o conjunto formado por todos os planos que passam pela origem, e não o conjunto de todos os ternos que verificam a equação: $ax + by + cz$. Isso aponta para o apego geométrico dado pelo SOFTWARE, pois com relação ao conceito, a maioria utilizou-o corretamente.

TABELA 7

Resultado da 2ª questão

2ª Questão: Para a definição de Base de um Espaço Vetorial são utilizados dois conceitos. Cite esses conceitos, justificando o que acarreta a falta de cada um deles na definição.	
Acertou completamente	8
Acertou parcialmente (acertou o conceito e errou a álgebra)	27
Errou completamente	1
Não respondeu	2
TOTAL	38

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

No resultado dessa questão, verifica-se que 8 alunos compreenderam o conceito de Base de um Espaço Vetorial, e 27 alunos conhecem a sua definição, mas não conseguiram justificar o que acarretaria a falta de um dos conceitos nela envolvidos.

Isso mostra que, num primeiro momento, o *SOFTWARE* contribuiu para a construção do conceito de Base para, aproximadamente, 21% dos alunos, o que é algo significativo, levando-se em conta a abstração dos conceitos envolvidos em sua definição.

3ª Questão: Com relação à tela do Software de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear, abaixo, responda:

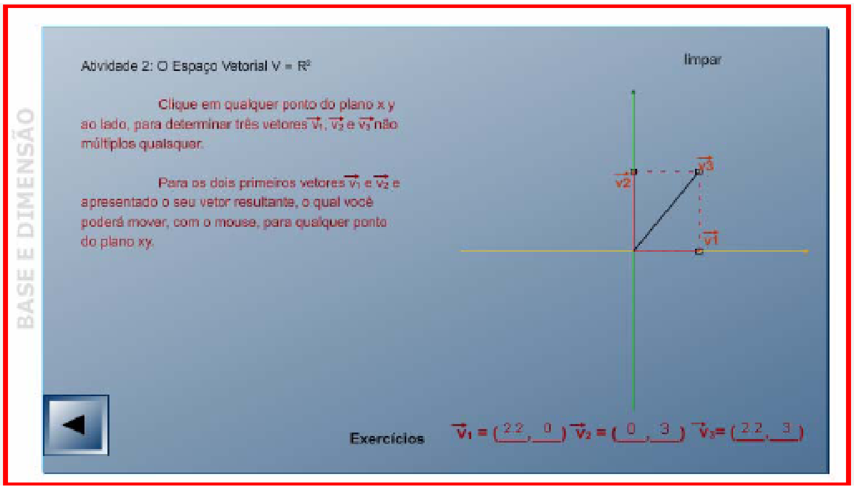


TABELA 8

Resultado da 3ª Questão

	Acertou completamente	**Acertou Parcialmente**	**Errou completamente**	**Não Respondeu**	**Total**
a) Sem efetuar operações matemáticas, somente observando a tela: encontre c_1 e c_2 da equação $\vec{v}_1 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$.	24	0	14	0	38
b) $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ gera R^2? Justifique.	16	12	9	1	38
c) $S = \{\vec{v}_1\}$ é Linearmente Independente? Justifique.	18	11	8	1	38
d)Dos vetores apresentados na tela, forme um conjunto S base de R^2.	24	0	12	2	38

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

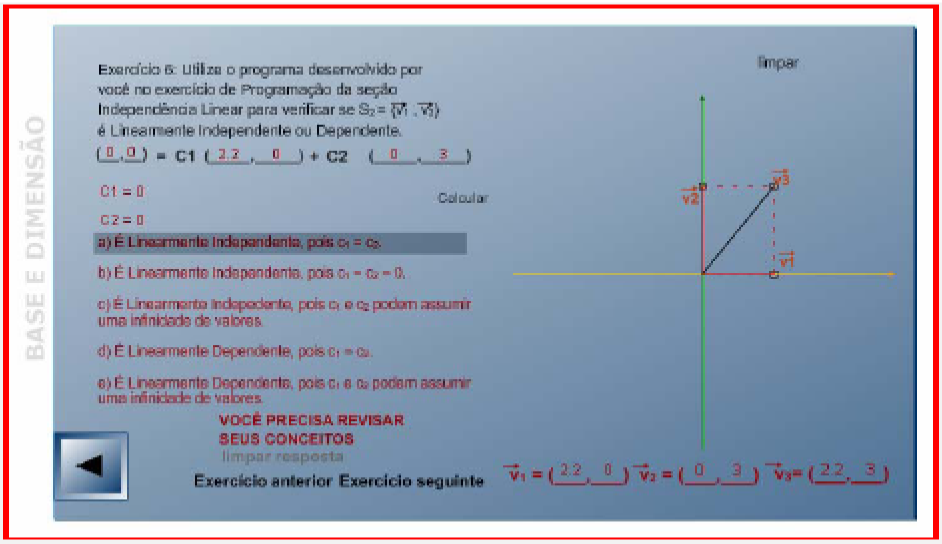
A maioria dos alunos acertou a resposta da letra (a). Com relação às respostas erradas, observa-se uma troca do conceito de Combinação Linear com Independência Linear, o que pode ter ocorrido por falta de atenção ao se analisar a situação proposta.

Tem-se, nas letras (b) e (c), um número reduzido de erros. Dentre os alunos que acertaram essas perguntas, a maioria justificou corretamente as suas respostas, o que indicou, na prática, o entendimento da definição de Conjunto Gerador, que envolve o conceito de Combinação Linear, e a definição de Conjunto Linearmente Independente, para o Espaço Vetorial R^2.

Complementando as letras (b) e (c), é pedido na letra (d) uma Base para o R^2 formada com os vetores da tela. Na tela são apresentados três vetores dos quais o aluno teria de escolher dois quaisquer. Com o acerto de 24 alunos, verifica-se que o conceito de Base foi associado aos conceitos de Conjunto Gerador e Conjunto Linearmente Independente para a maioria dos alunos.

Novamente, existe um indicativo de que o *SOFTWARE* colaborou para o entendimento dos conceitos de Combinação Linear, Conjunto Gerador, Conjunto Linearmente Independente e Base de um Espaço Vetorial, uma vez que as respostas, para essa questão, foram dadas por meio de análise geométrica, sem a utilização do recurso algébrico.

4ª Questão: Na tela abaixo, foi utilizado o programa desenvolvido pelo aluno, na seção Independência Linear do software, para verificar se $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LI .



Analise e justifique por que a resposta marcada foi considerada errada.

TABELA 9

Resultado da 4ª Questão

Acertou completamente	**32**
Acertou parcialmente (acertou o conceito e errou a álgebra)	3
Errou completamente	3
Não respondeu	0
TOTAL	38

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Essa questão demonstra, pelo número de acertos, que os alunos compreenderam a definição de vetores Linearmente Independentes, na medida em que reafirmam a necessidade de $c_1 = c_2$, mas reconhecem a insuficiência dessa informação, completando-a para $c_1 = c_2 = 0$

.

TABELA 10

Resultado da 5ª Questão

5ª Questão: Dados que o conjunto $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} / a,b \in R \right\}$ **é um Subespaço de** M_{22}**, pede-se:**		
	a) Uma base de W	b) A dimensão de W
Acertou completamente	11	10
Acertou parcialmente	2	11
Errou completamente	20	9
Não respondeu	5	8
TOTAL	38	38

Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

Essa questão visava verificar se o conceito de Base foi estendido para Espaços Vetoriais diferentes do R^n. Pelos resultados apresentados e pela análise das respostas encontradas nessa atividade, pode-se afirmar que a representação algébrica dos vetores caracterizou um ponto de grande dificuldade para a maioria dos alunos, apesar de eles terem assimilado o conceito de Base de um Espaço Vetorial.

Essa representação algébrica foi, geralmente, confundida com n-uplas ordenadas. Para exemplificação desse fato, são apresentadas, a seguir, a abordagem de dois alunos:

- Aluno (A): Considerou os vetores genéricos de $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} / a,b \in R \right\}$ como sendo as linhas da matriz $\begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix}$, ou seja, $\vec{v}_1 = (a,\, a-b)$ e $\vec{v}_2 = (a-b,\, b)$.
- Aluno (B): Considerou o vetor genérico de $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} / a,b \in R \right\}$ como sendo um vetor do R^4, onde as suas componentes eram as entradas da matriz $\begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix}$, ou seja, $\vec{v} = (a,\, a-b,\, a-b,\, b)$.

5.3 Produtos desta pesquisa

O **primeiro produto** desta pesquisa é esta dissertação intitulada: “Criação de um

Software de Apoio ao Ensino e à Apredizagem de Álgebra Linear", a qual norteou os caminhos para a obtenção do **segundo produto** que é o *SOFTWARE* criado para colaborar no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.

Além dos dois produtos citados anteriormente, tem-se como **terceiro produto** a elaboração de um projeto que analisa a utilização do *Flash* para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Esse projeto é parte de um Trabalho de Conclusão de Curso de um aluno do curso de Sistemas de Informação da PUCMINAS de Betim, que será apresentado no final do primeiro semestre de 2009. Esse aluno participou como bolsista de iniciação científica – PIBIC/CNPq no desenvolvimento do *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial.

O projeto pretende mostrar os recursos disponíveis no *Flash* MX para trabalhar com o ensino de Matemática, e como a Matemática contribui para a elaboração dos códigos que compõem os programas gráficos. Além de outros exemplos, será exposto como foram elaboradas as atividades no *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear e como elas interagem com o usuário, devido ao seu dinamismo.

O **quarto produto** é o artigo escrito pela aluna do curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS de Betim, também como Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado no final do segundo semestre de 2008. Esse artigo teve como objetivo avaliar a "seção Introdução" do *SOFTWARE*, quanto à sua usabilidade, à satisfação do usuário e à sua contribuição para o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear.

Esse artigo contribuiu para esta pesquisa fornecendo resultados obtidos por meio de uma Avaliação Heurística, de um Questionário de Satisfação e da aplicação de duas atividades para verificação de aprendizagem do conteúdo proposto.

Além dos quatro produtos apresentados, este trabalho deverá gerar outras pesquisas no Grupo de Estudo e Pesquisa em Informática Educativa para o Ensino de Matemática (GEPIEM), da PUCMINAS, do qual faz parte este pesquisador, uma vez que um dos propósitos do grupo é *"criar ambientes informatizados de estudo para oportunizar aos alunos e professores a incorporação da linguagem e do método matemático."* (Encarte do GEPIEM, p.7)

6 CONCLUSÃO

Uma abordagem do conteúdo da Matemática para atingir o desenvolvimento de hábitos do pensar se faz no tratamento integrado dos vários compartimentos da estrutura da ciência matemática: aritmética, álgebra, geometria, cálculo, probabilidade, dentre outros.

A aprendizagem das ciências exatas, por sua natureza lógica, exige o rigor de procedimentos sistematizados, formalizados, construídos em conexões hierarquizadas através de relações, cuja tradução objetiva se faz na formulação de modelos, seja com funções algébricas e transcendentes, seja com equações diferenciais, ordinárias ou parciais, ou ainda com estruturas algébricas ou vetoriais.

A base para a metodologia do estudo da Matemática é elaborada no contexto da edificação da Matemática e do trabalho construtor dos matemáticos, que não elaboram teorias oriundas apenas da abstração, pois experimentam, inventam, fazem conjecturas, levantam evidências, desenham, fazem cálculos, desmontam idéias.

Os matemáticos, no seu processo de elaboração científica, são articuladores que tentam identificar regularidades, padrões, variâncias e invariantes, utilizando-se, para esse propósito, figuras, gráficos, diagramas, cálculos numéricos, transformações geométricas. Não se limitam a descobertas em qualquer área da geometria, da álgebra, da aritmética, do cálculo, da estatística, por processos específicos da área em estudo, mas propõem integração, articulação, conexão dos vários campos, usando ora deduções, ora experimentações, interpretando e registrando suas descobertas na busca de provas para as evidências.

No ensino e aprendizagem da Matemática, em qualquer da sua partição, não há como abordar um conceito isoladamente; assim, a Álgebra pode ser trabalhada com suporte geométrico, a Geometria pode ser entendida e interpretada pela modelagem algébrica.

Geômetras usam o raciocínio proporcional, tentando identificar relações entre grandezas, com medidas, usando variáveis e descobrindo invariâncias. Usam linguagem vetorial, gráfica e de diagramas.

Já os algebristas usam o cálculo com números, símbolos, expressões, algoritmos. Propõem abstrações, generalizações para sistematizar idéias, como formatar modelos.

Algebristas e geômetras na mobilização da analítica para a síntese, desenvolvem o pensamento flexível, da construção e desconstrução, da segmentação e da integração, com a generalização, usando o discreto, conjunto dos inteiros relativos, e dos contínuos, conjunto dos reais, para a proposição de padrões numéricos e de representações, sejam gráficas ou sejam algébricas com a possibilidade de modelar, ou criar estruturas algébricas, bem como vetoriais.

A partir dessas considerações teóricas, foram determinados os objetivos da pesquisa ora apresentada, quais sejam: trabalhar os conceitos de Álgebra Linear de uma forma concreta, a partir da elaboração de atividades geométricas e gráficas em R^2 e R^3, para depois generalizar para o R^n e, para outros Espaços Vetoriais arbitrários.

Para isso se buscou, no hábito importante do pensamento matemático da visualização, a elaboração de representações visuais, pelos diagramas, gráficos e esboços.

Por meio da visualização o estudante pode iniciar seu raciocínio, criar seus hábitos de interpretação, de análise na manipulação de imagens concretas para argumentação e proposição teórica de exploração e tratamento de conceitos e algoritmos.

Perseguindo o propósito de trabalhar os conceitos básicos e elementares da Álgebra Linear, de Base e Dimensão de Espaços Vetoriais, passando pela Combinação Linear e Independência Linear de vetores, com recursos computacionais e geométricos, no intuito de minimizar o impacto da abstração, própria desses conceitos, buscou-se estudar as obras didáticas para o ensino de Álgebra Linear, dos autores KOLMAN, ANTON E LAY.

As abordagens metodológicas adotadas, pelos autores citados, as quais podem ser caracterizadas, geralmente, pelo rigor na apresentação dos conceitos e dos resultados obtidos, contribuiram para o direcionamento das atividades trabalhadas no *SOFTWARE* com a idéia de se trabalhar os conceitos de Base e Dimensão, inicialmente, nos Espaços Bi e Tridimensional, para depois generalizar para o Espaço de dimensão n, a de levar o aluno a fazer conjecturas para depois confirmá-las, e, também, a de considerar nas atividades características pedagógicas alicerçadas nas aplicações.

Nas cinco dissertações analisadas sobre o tema, nas quais são discutidas as dificuldades no ensino e na aprendizagem do conceito de Base de um Espaço Vetorial, são dadas sugestões para minimizar essas dificuldades. Das sugestões apresentadas para a elaboração de atividades com *SOFTWARE*, na pesquisa desenvolvida, foram utilizadas as seguintes: adotar uma abordagem mais intuitiva nos conceitos; explorar os registros geométricos; mostrar coincidências estruturais; antecipar resultados; levantar questionamentos; trabalhar no R^2 e R^3; propiciar a reflexão; e diversificar objetos para gerar significados. Tem-se, pelo exposto, uma expressiva contribuição dada pelo estudo das dissertações.

O referencial teórico Valente (1999) deu o suporte ao defender que o *software* deve promover mudanças pedagógicas, transformando uma educação centrada no ensino e focada na transmissão de informações, numa educação onde a abordagem de ensino prioriza a criação de condições de aprendizagem. Decorre dessa metodologia uma mudança no papel do professor que passa de transmissor do conhecimento, para o criador de ambientes informatizados e orientador do processo de aprendizagem.

Valente (1999) possibilitou, também, a escolha do tutorial como plataforma de desenvolvimento do *SOFTWARE* e determinou o papel do professor como mediador desse processo, para que haja a transformação das informações em conhecimento.

Já o desenvolvimento do *SOFTWARE*, bem como a avaliação da eficácia do aplicativo elaborado com as atividades, se apoiaram na obra de Oliveira, Costa e Moreira (2001) a qual trata da criação de ambientes informatizados de aprendizagem, bem como determina parâmetros para produção e avaliação de *software* educativo.

De acordo com a definição de tutorial de Oliveira, Costa e Moreira (2001), isto é, tutorial é um programa que por meio de comandos objetiva garantir a não passividade do aluno ao questioná-lo e provocá-lo a responder, o *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear, resultado da pesquisa realizada, pode ser classificado como um tutorial, pois além de ser possível a sua exibição em uma página da web, suas atividades colocam o aluno como sujeito da ação. Isso pode ser comprovado por meio de suas atividades, em que o aluno interage com o *SOFTWARE* fazendo as suas próprias escolhas e respondendo a uma série de perguntas com relação a cada uma delas. Um exemplo da não-passividade do aluno pode ser encontrado na Atividade 1 da Subseção Combinação Linear, onde o aluno determina um vetor $\vec{v}$ qualquer de R^2 e é perguntado a ele informações sobre as constantes que compõem a equação que escreve esse vetor como combinação linear de dois outros vetores fixos de R^2.

O desenvolvimento do *SOFTWARE* e das atividades relativas aos conceitos de Álgebra Linear, aqui apresentados, foram resultados de um trabalho colaborativo de uma equipe composta pelo autor desta dissertação, seu orientador, dois programadores, um bolsista de iniciação científica, e duas estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS, além de professores do Departamento de Matemática e Estatística e da Computação, seguindo orientação de Oliveira, Costa e Moreira (2001), o qual defende que o professor para propor um ambiente informatizado como recurso metodológico de educação, deve se acercar de outros profissionais tais como programadores, analistas, pedagogos, profissionais da área de comunicação, bem como outros docentes e aluno, o que ocorreu na consecução dos produtos desta pesquisa.

A riqueza da constituição e trabalho da equipe se fizeram nos expressivos resultados: o desenvolvimento do *SOFTWARE* e a consequente dissertação de mestrado, ora apresentada, dois Trabalhos de Final de Curso dos estudantes auxiliares de pesquisa, o programador do *SOFTWARE* e a estudante que colaborou na aplicação e avaliação das atividades informatizadas.

Com a aplicação e a avaliação do *SOFTWARE* em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS, foi possível identificar alguns problemas quanto à usabilidade, que serão corrigidos, futuramente, no Grupo de Estudo e Pesquisa em Informática Educativa para o Ensino de Matemática da PUCMINAS. Também se constatou um alto grau de satisfação dos alunos com a utilização do *SOFTWARE*, além de se verificar, por meio de avaliações escritas, a compreensão dos conceitos de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial para a maioria desses alunos.

Isso indica que um *SOFTWARE* desenvolvido no Sistema *Flash* MX, para o ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear, pode colaborar para alcançar a eficácia da aprendizagem, desde que esse recurso venha como uma mediação pedagógica, e que o aluno seja um agente ativo neste processo.

O *Software* de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Álgebra Linear desenvolvido nessa pesquisa possui um potencial significativo de variação em suas atividades. Esse potencial deve ser explorado, orientado pelo professor, entendendo, segundo Masetto (2000), o uso da tecnologia como mediação pedagógica, o que ocorreu quando se teve maximizado o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos. Para tanto, é necessário que, ao aplicá-lo, planeje-se a forma e se conheçam todas as suas possibilidades de exploração, podendo criar, para que não se percam informações importantes na construção do conhecimento, uma seqüência de atividades adequadas.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra linear contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006.

ANTON, Howard; Ris Chris. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ARAÚJO, C. C. V. B. **A metamatemática no livro didático de álgebra linear.** São Paulo, 2002. 110f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. 2. ed. ampl. e rev. São Paulo: Harbra & Row do Brasil, 1980.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

DAMASCENO, Anielle. **Macromedia Flash MX 2004:** design e animação para web e multimídia. 2. ed. Florianópolis: Visual Books, 2005.

DORIER, Jean-Luc. *Genesis of vector space theory*. In: **Historia mathematica 22**, Canadá: Elsevier Inc. 1995, vol. 3, p.227-261.

GRANDE, A. Lúcio. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de álgebra linear**. São Paulo, 2006. 208f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à álgebra linear com aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1998.

LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. **O uso do computador no ensino de Matemática na graduação**. In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. **A prática educativa sobre o olhar de professores de cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC – Gráfica e Editora – 2001.

LAUDARES, João Bosco; MIRANDA, Dimas Felipe. **Informatização no ensino de Matemática: investindo no ambiente de aprendizagem**. Campinas (SP): ZETETIKÉ. Vol. 15, no 27, janeiro/junho, 2007.

LAY, David C. **Álgebra linear e suas aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LA TAILLE, Yves de; OLIVEIRA, Marta K. de; DANTAS, Heloysa. **Piaget, Vygotsky, Wallon:** teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus, 1992.

LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. 3. ed. São Paulo: 34 Literatura S/C Ltda, 1996.

LOLLINI, Paolo. **Didática e computador:** quando e como a informática na escola. 3. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2003.

MASETTO, Marcos T. **Mediação Pedagógica e o Uso da Tecnologia**. In: MORAN, José Manuel; MASETTO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas: Papirus, 2000. p.133-172.

MOORE, G. H. *The axiomatization of linera algebra.* In: **Historia mathematica 22**, Canadá: Elsevier Inc. 1995, vol. 3, p.262-303.

OLIVEIRA, Celina C. de; COSTA, José Wilson da; MOREIRA, Mércia. **Ambientes informatizados de aprendizagem:** produção e avaliação de *software* educativo. Campinas: Papirus, 2001.

OLIVEIRA, Luis C. Barbosa. **Como funcionam os recursos-meta em aula de álgebra linear?**. 123f. São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

PADREDI, Z. L. N.. **As "alavancas meta" no discurso do professor de álgebra linear**. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

SILVA, A. M.. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear**. Rio de Janeiro, RJ, 1997. 147f. Dissertação de Mestrado. Universidade Santa Úrsula.

SPIEGEL, Murray R. **Análise vetorial**. 5. ed. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1974.

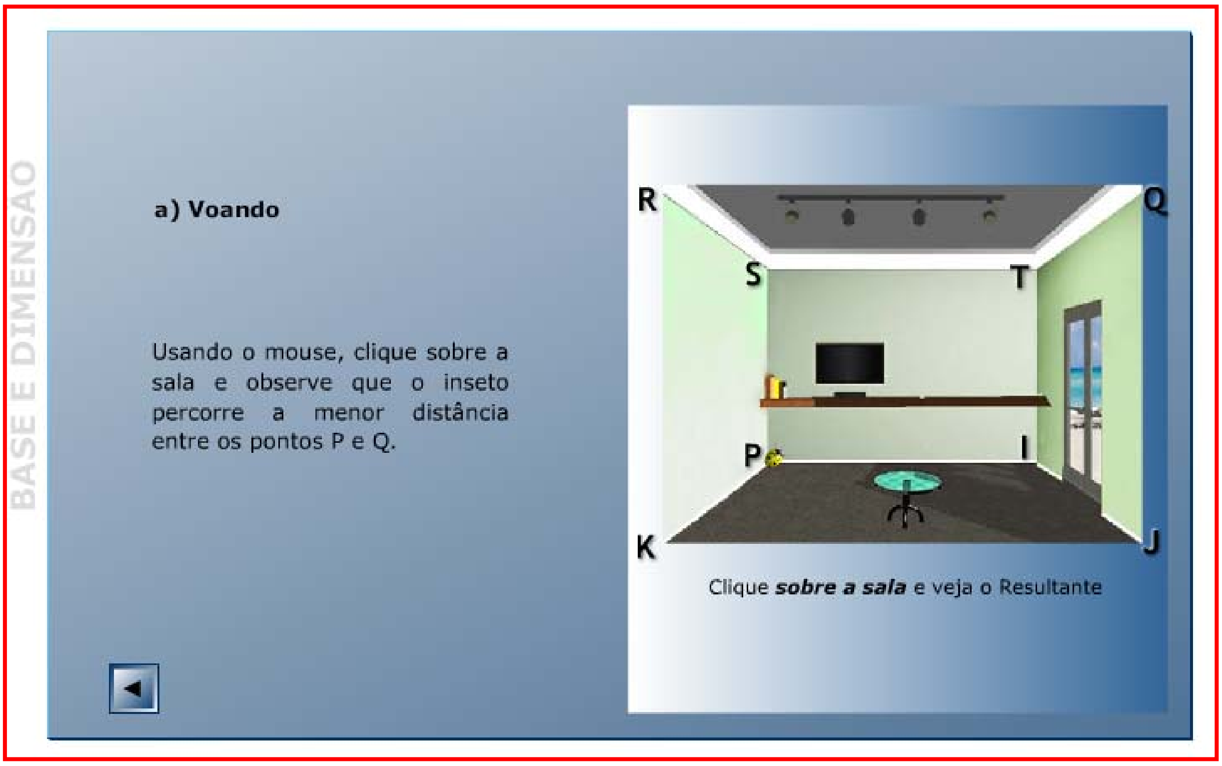
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS. Ementa: Álgebra Linear I. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/disciplinas/ementas/MAT606.htm>. Acesso em: 10 maio 2008.

VALENTE, J.A. (org.) (1999b). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Unicamp/Nied.

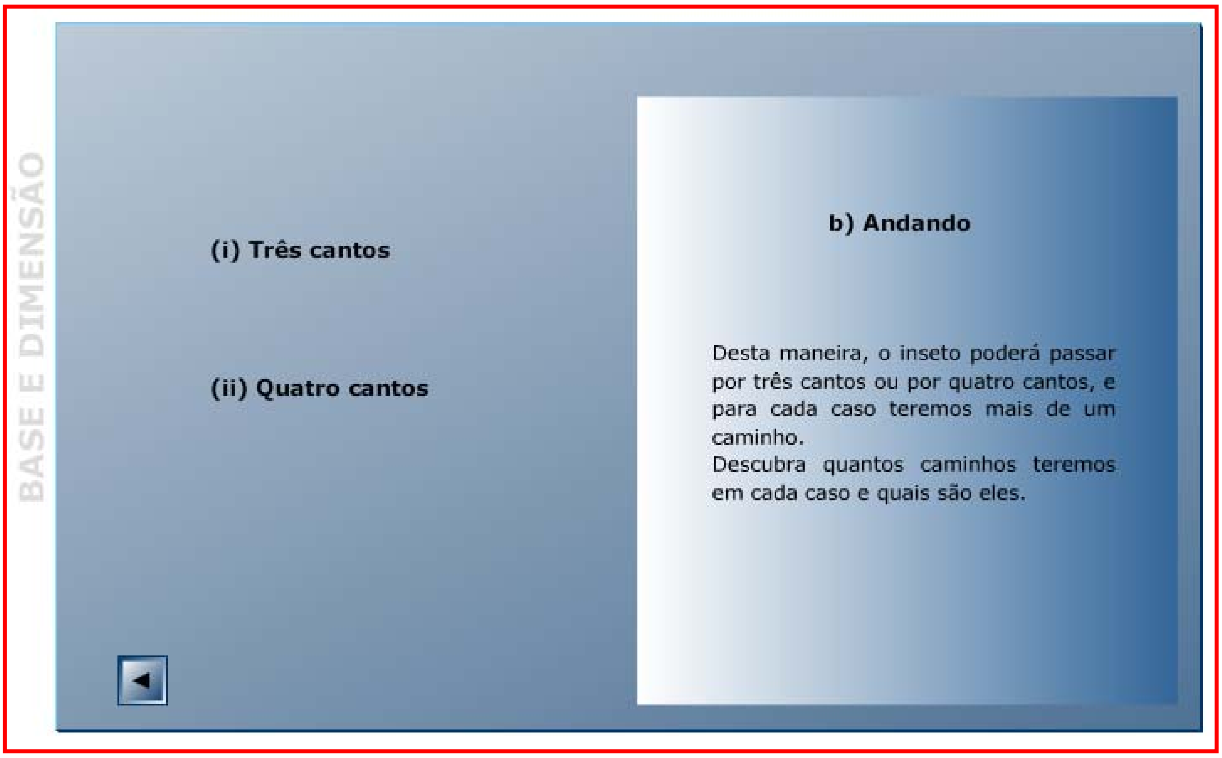
VIEIRA, Fábia Magali Santos. **Avaliação de Software Educativo:** reflexões para uma análise criteriosa. Disponível em: <http://edutec.net/Textos/Alia/MISC/ edmagali2.htm> Acesso em: 19 jan. 2008.

APÊNDICES

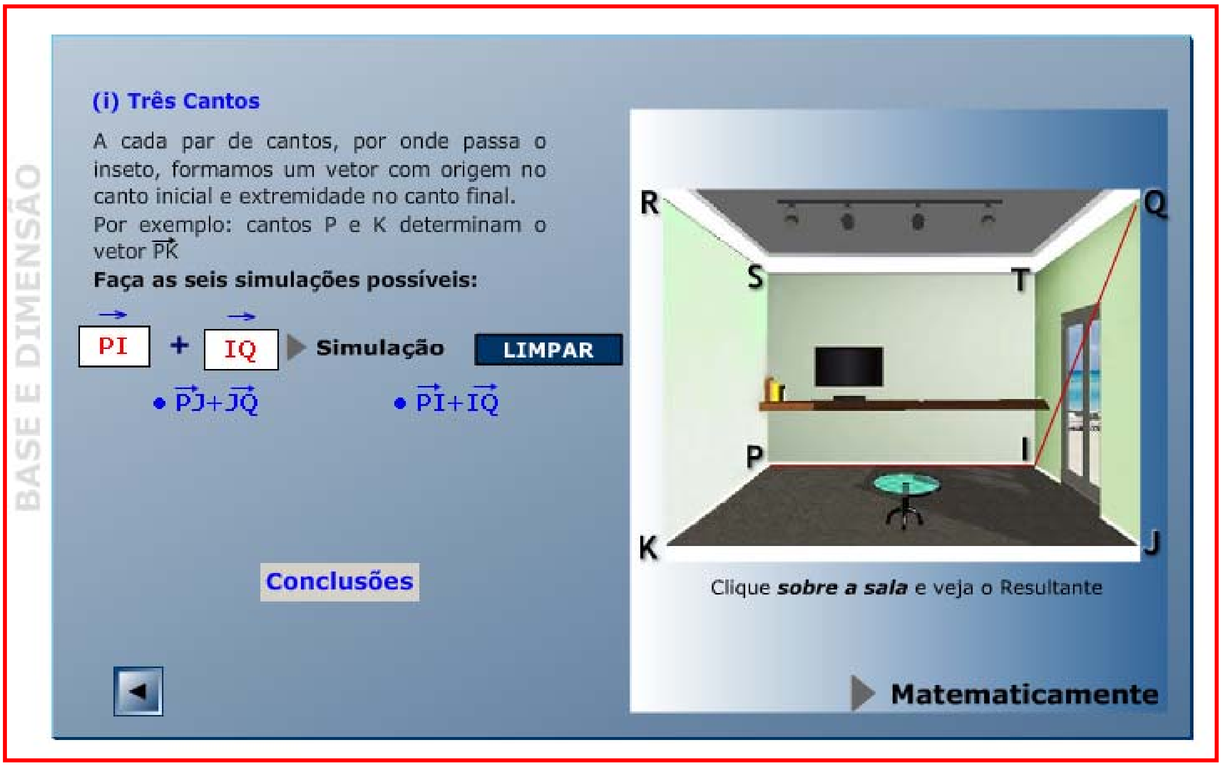
APÊNDICE A – Telas do *Software*



Apêndice A.1: Tela do modo voando
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

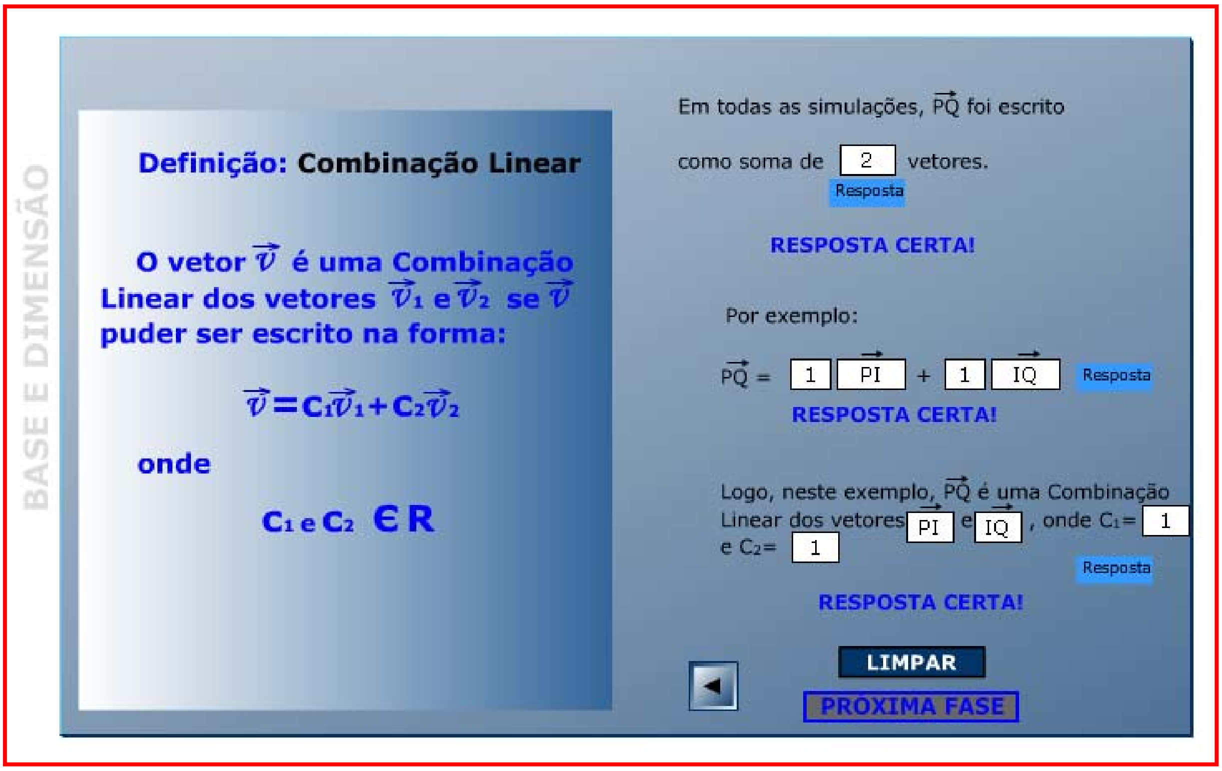


Apêndice A.2: Tela do modo andando
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

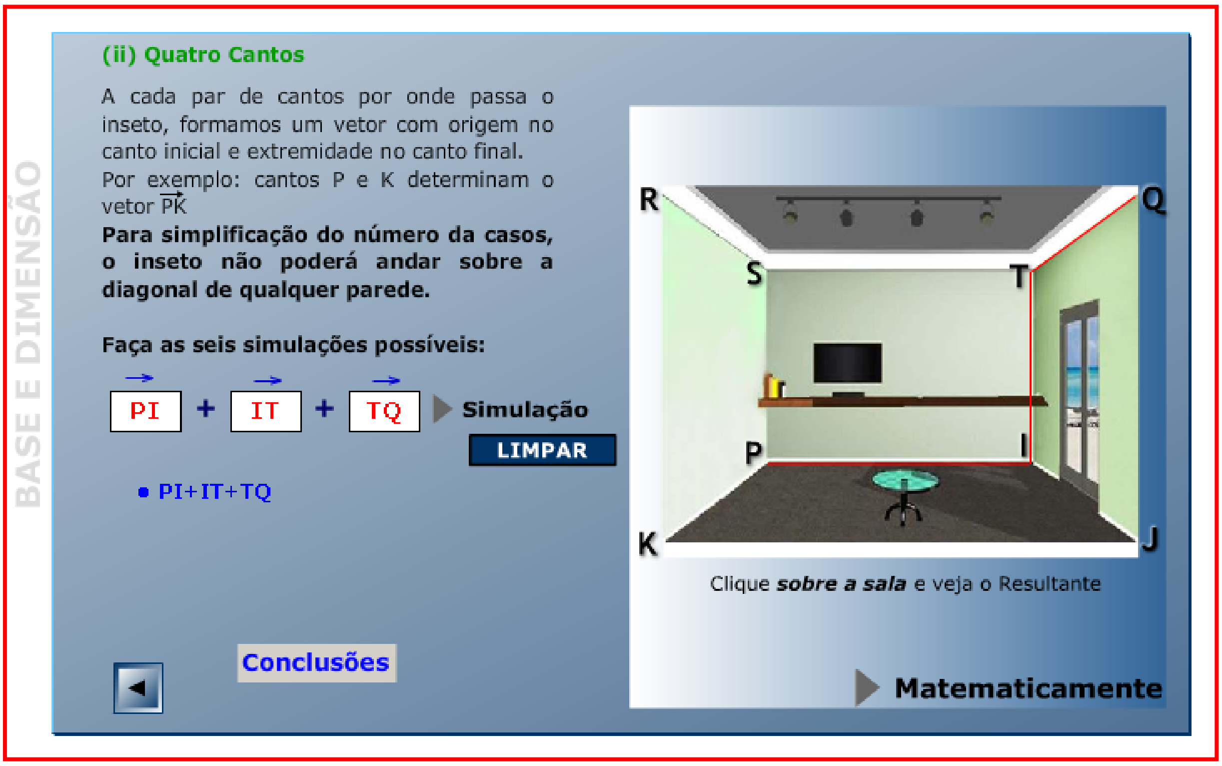


Apêndice A.3: Tela três cantos matematicamente
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

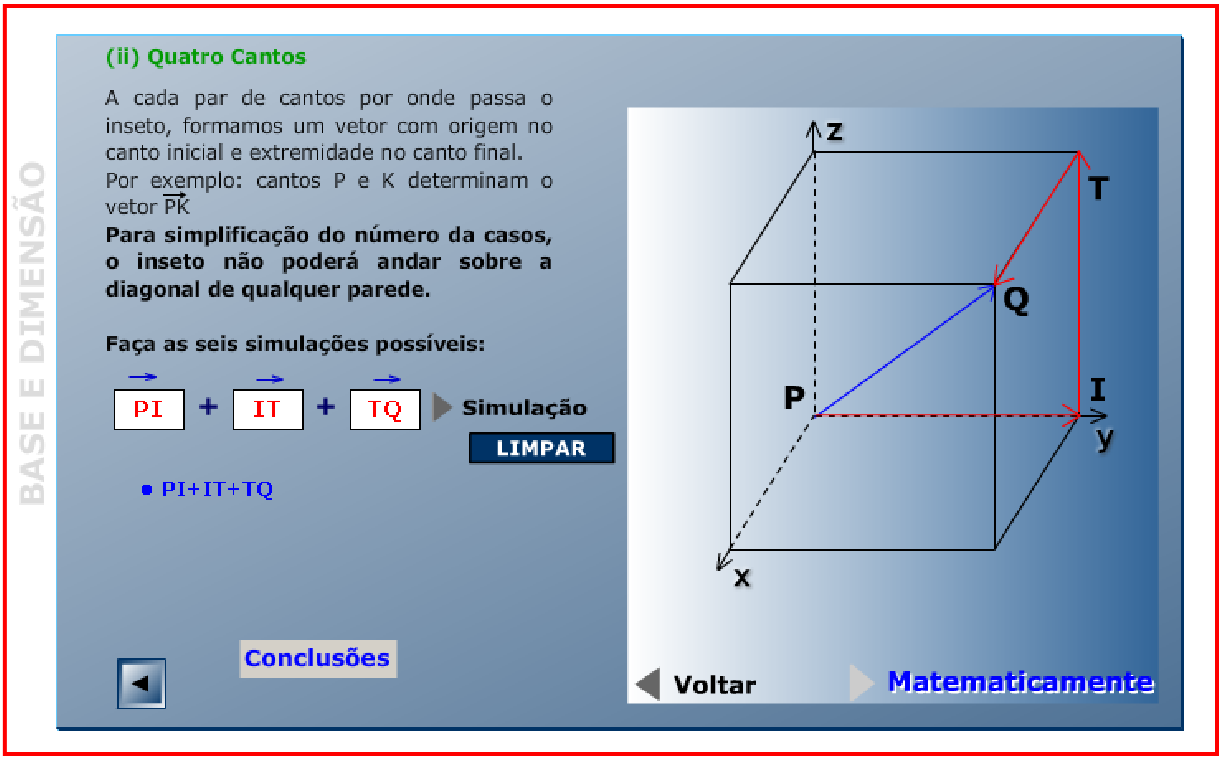
Apêndice A.4: Tela de conclusões de três cantos
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



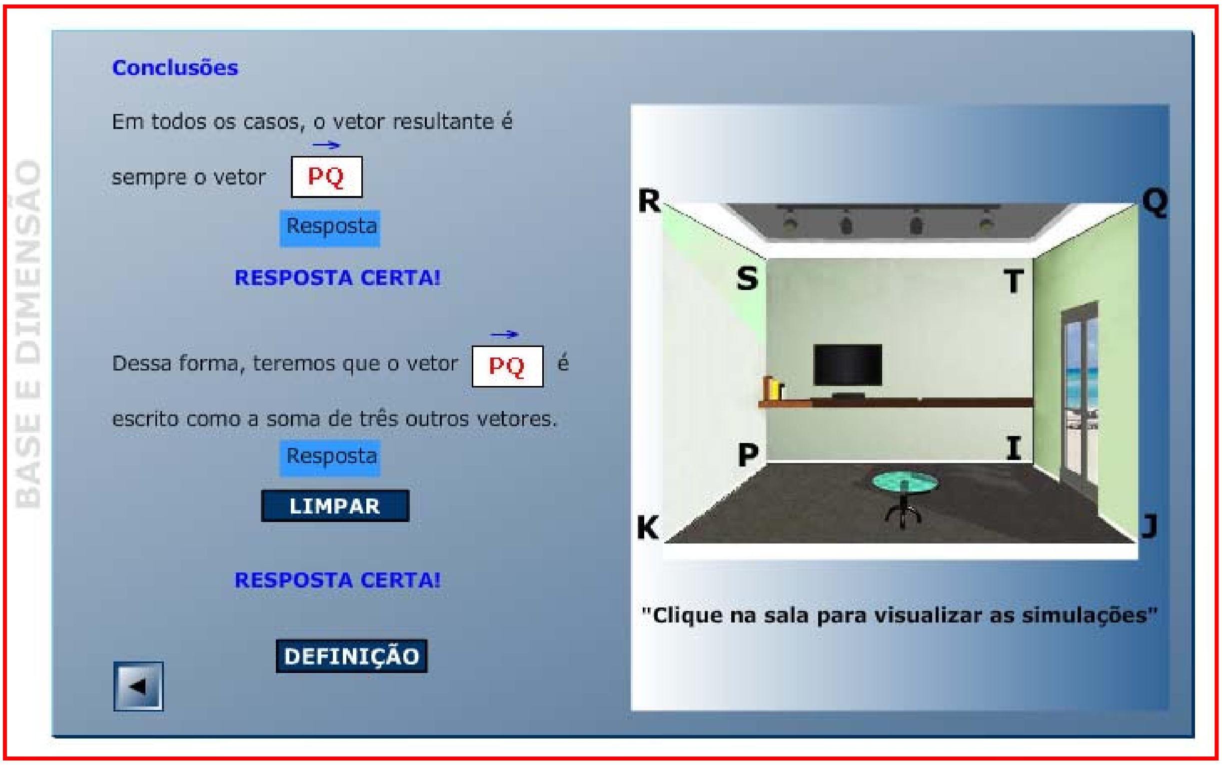
Apêndice A.5: Tela definição de combinação linear de dois vetores
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



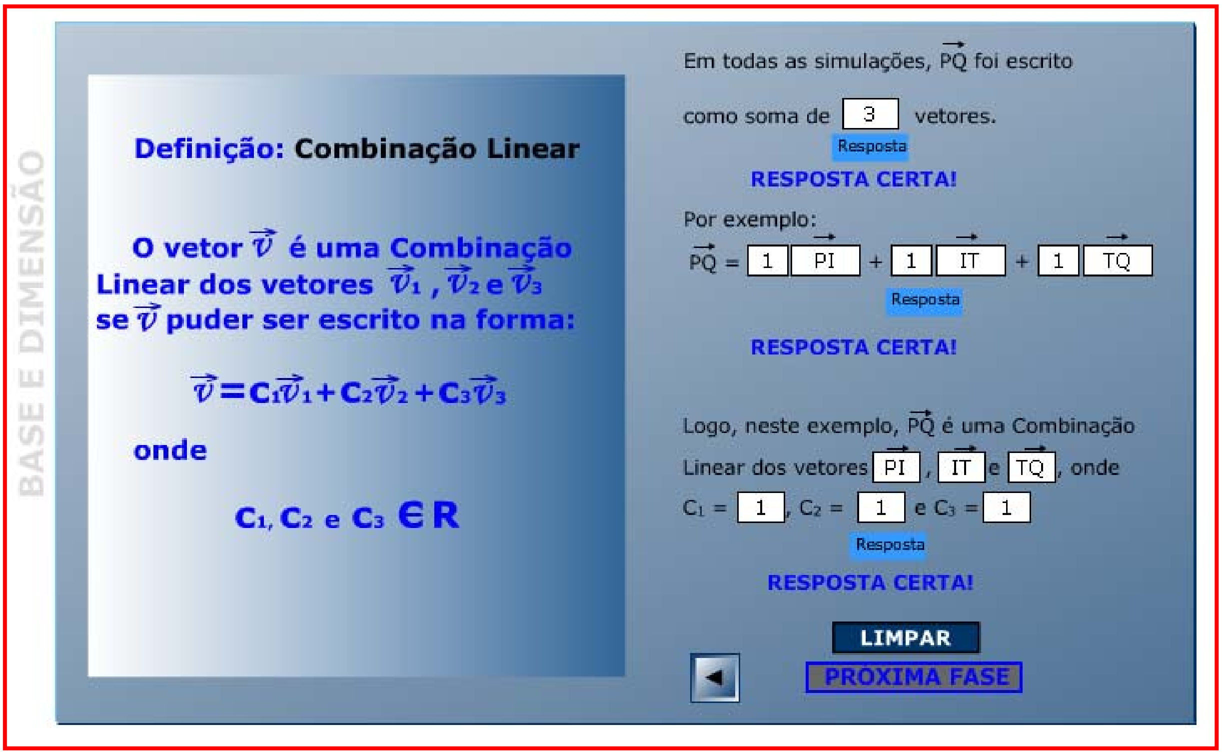
Apêndice A6: Tela combinação linear de três vetores
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



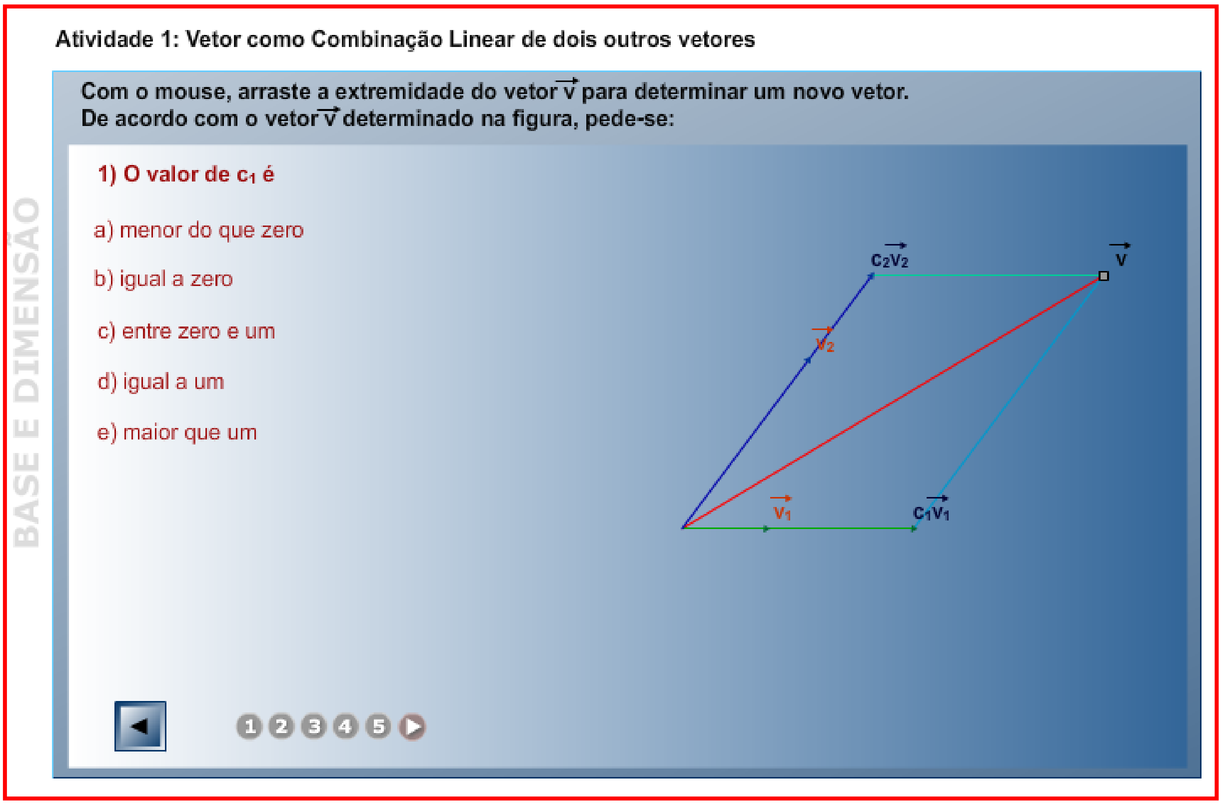
Apêndice A.7: Tela quatro cantos matematicamente
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



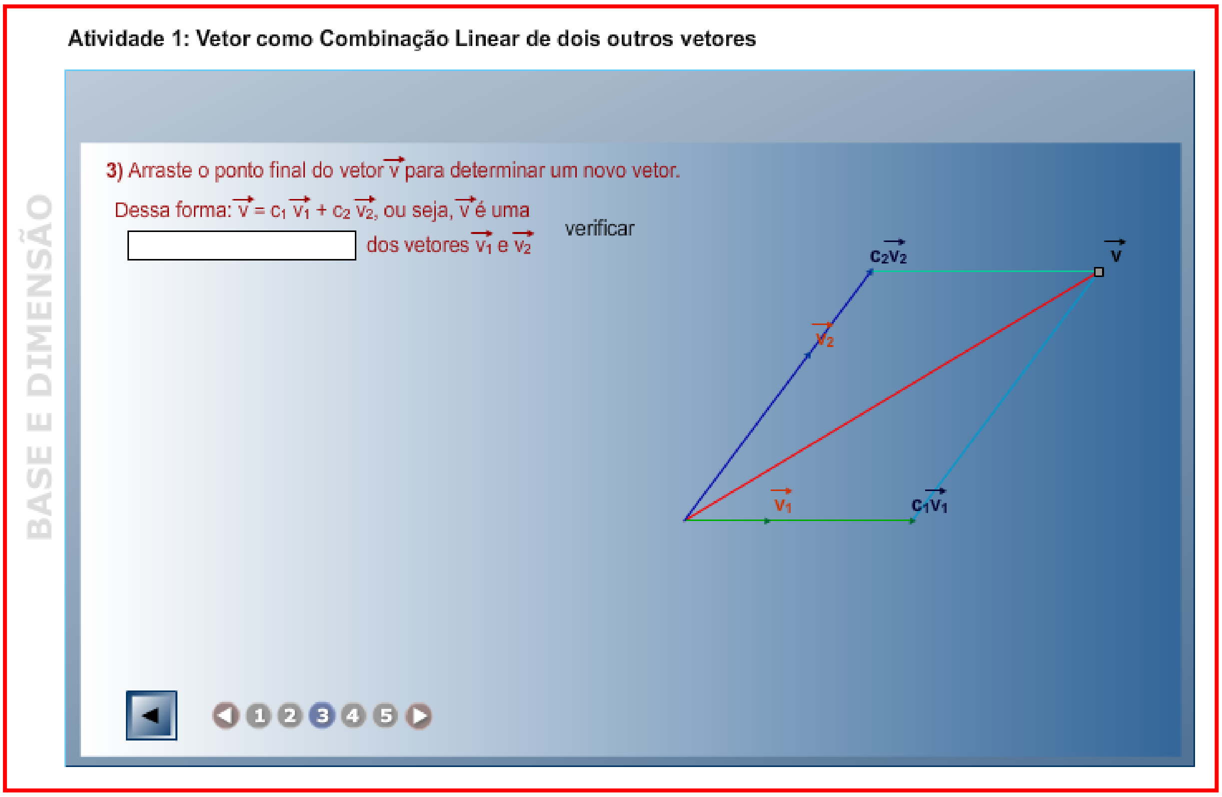
Apêndice A.8: Tela de conclusões de quatro cantos
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



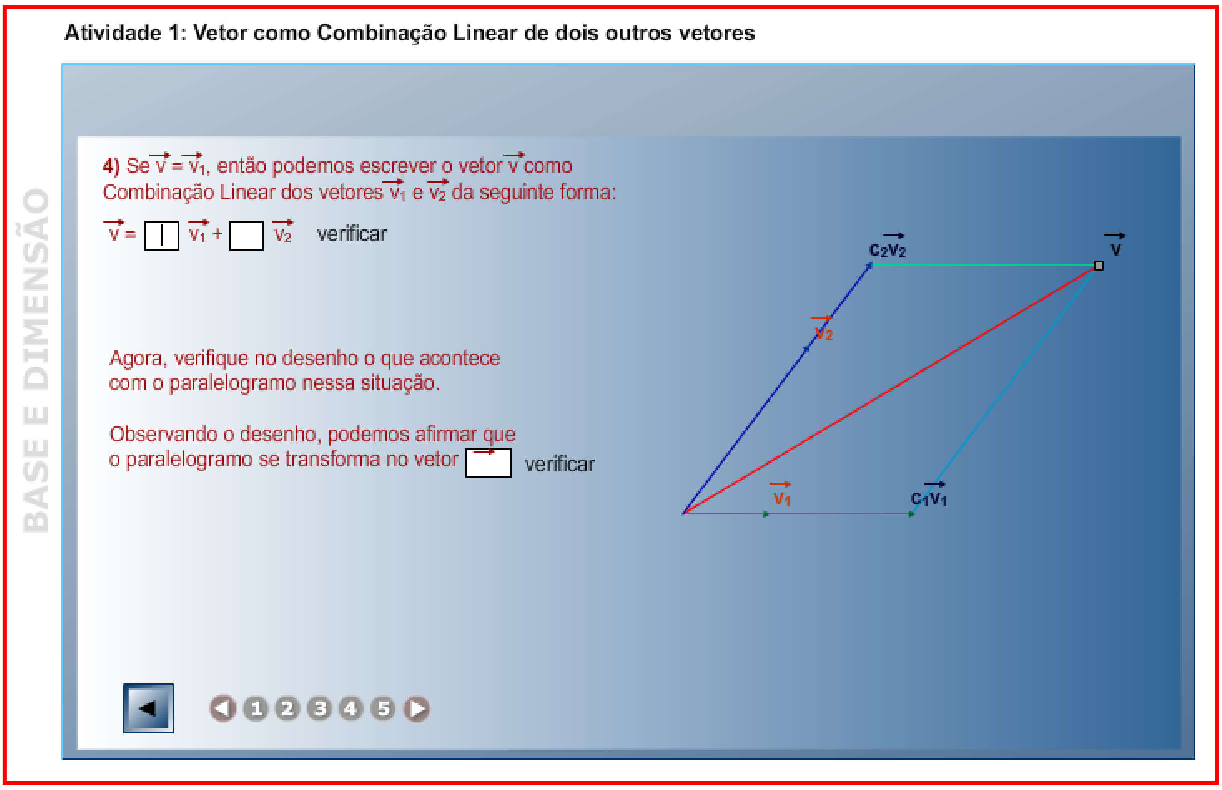
Apêndice A.9: Tela de definição de quatro cantos
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



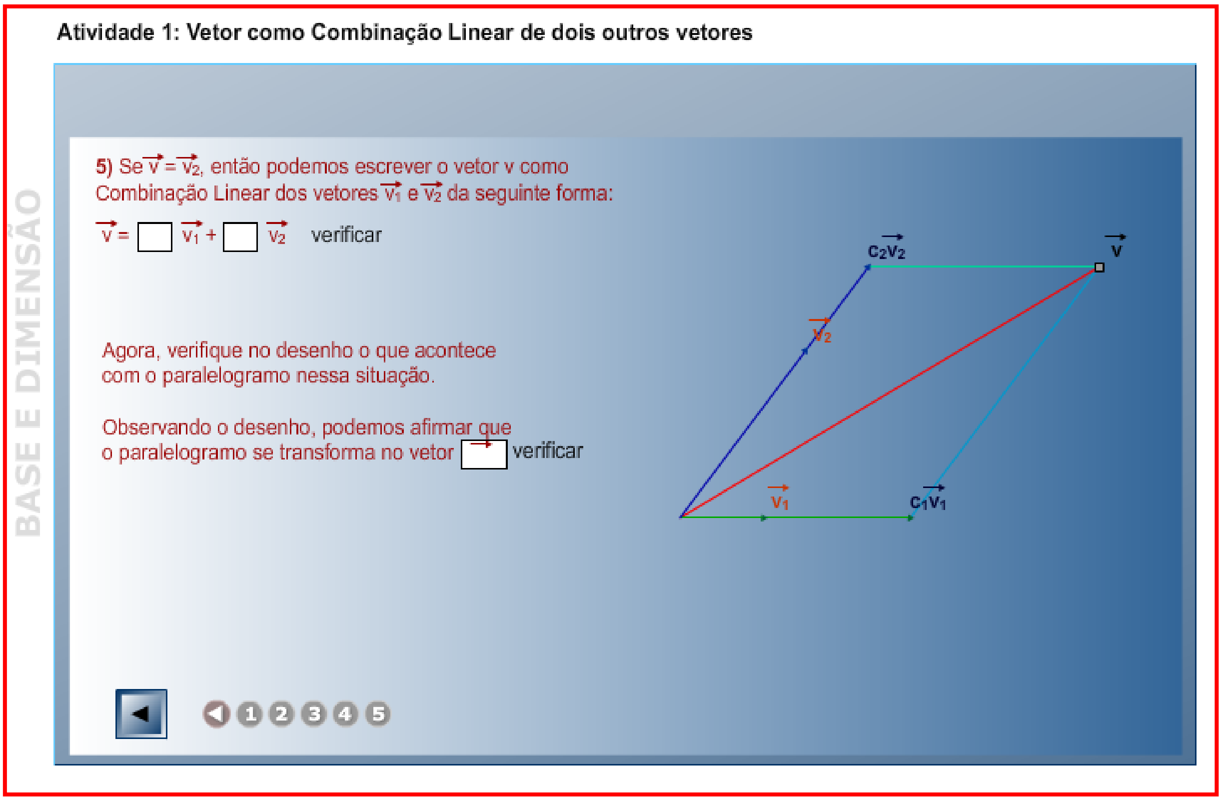
Apêndice A.10: Tela paralelogramo 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



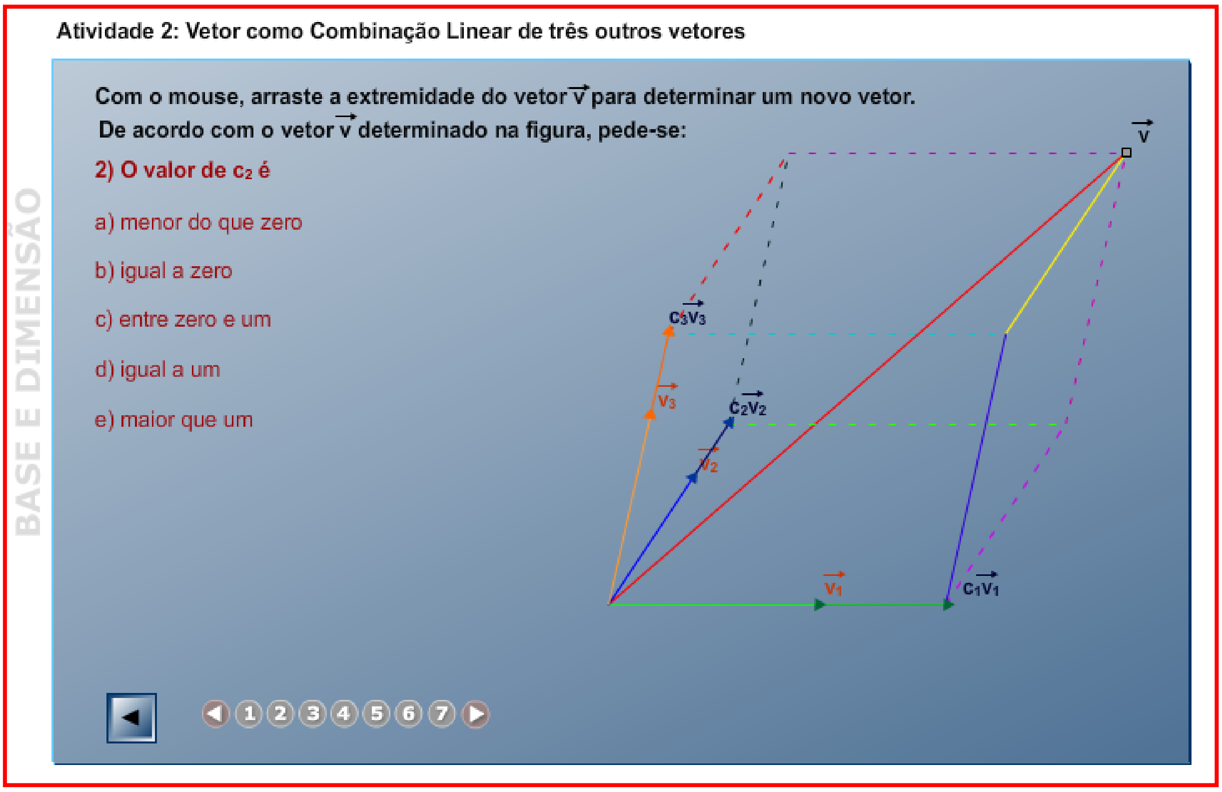
Apêndice A.11: Tela do paralelogramo 3
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



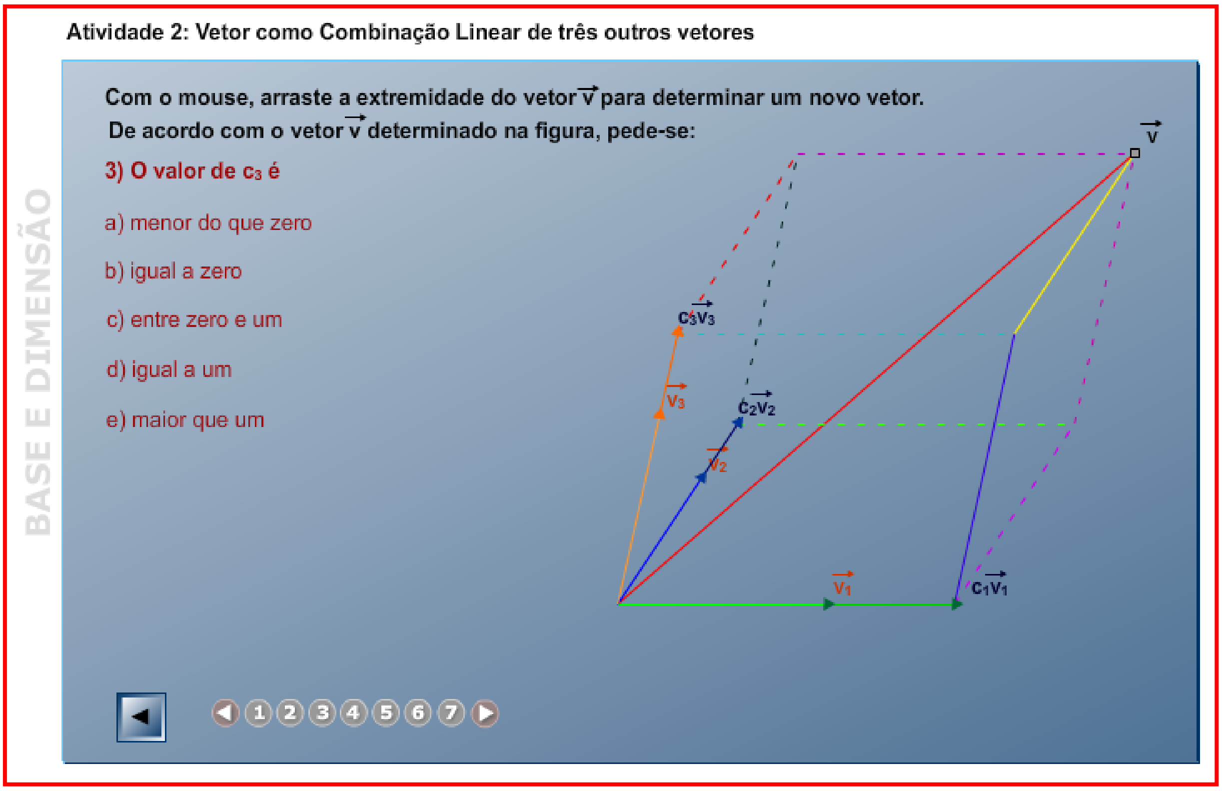
Apêndice A.12: Tela do paralelogramo 4
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



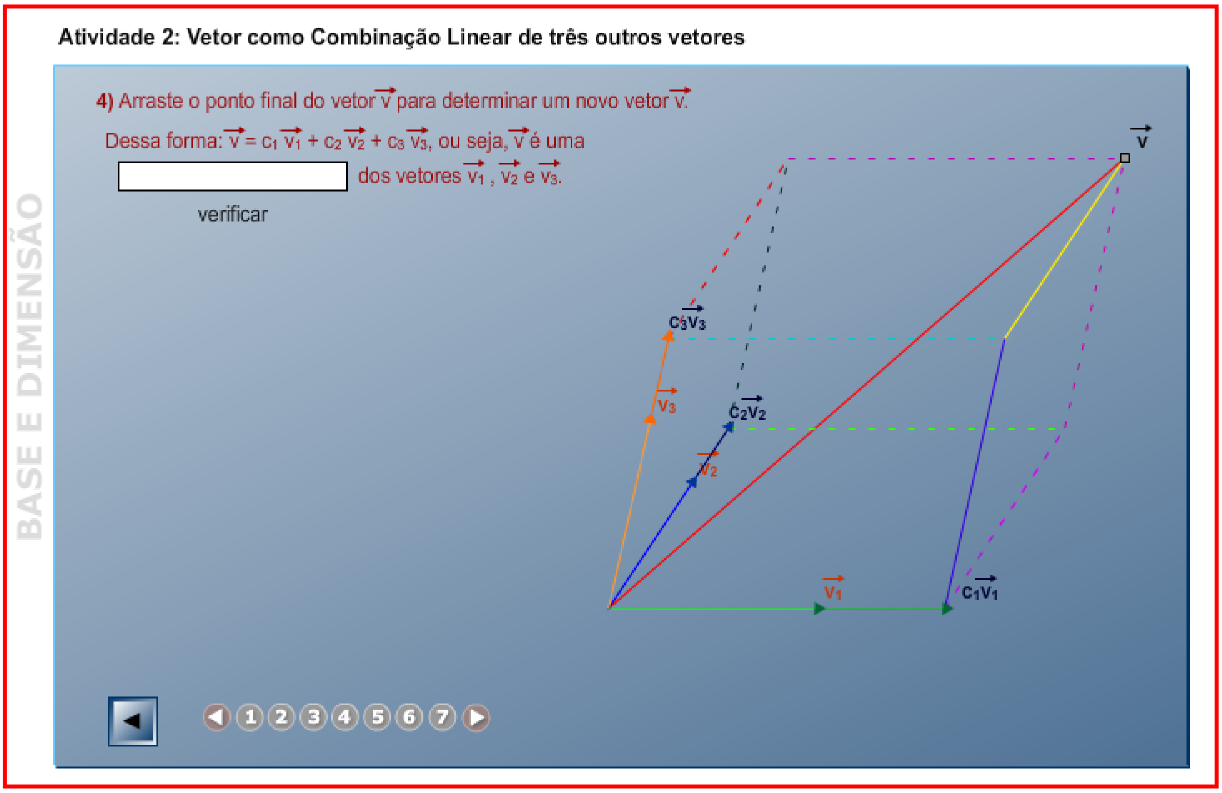
Apêndice A.13: Tela do paralelogramo 5
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



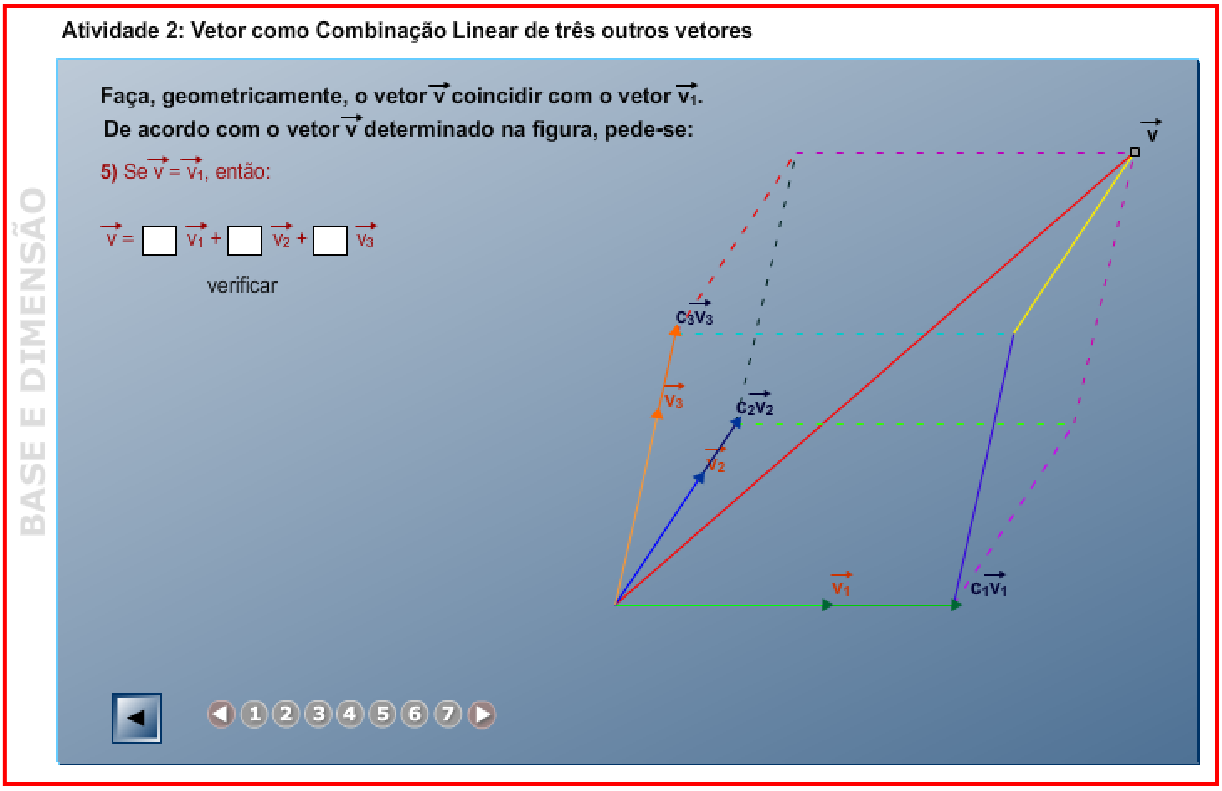
Apêndice A.14: Tela do paralelepípedo 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



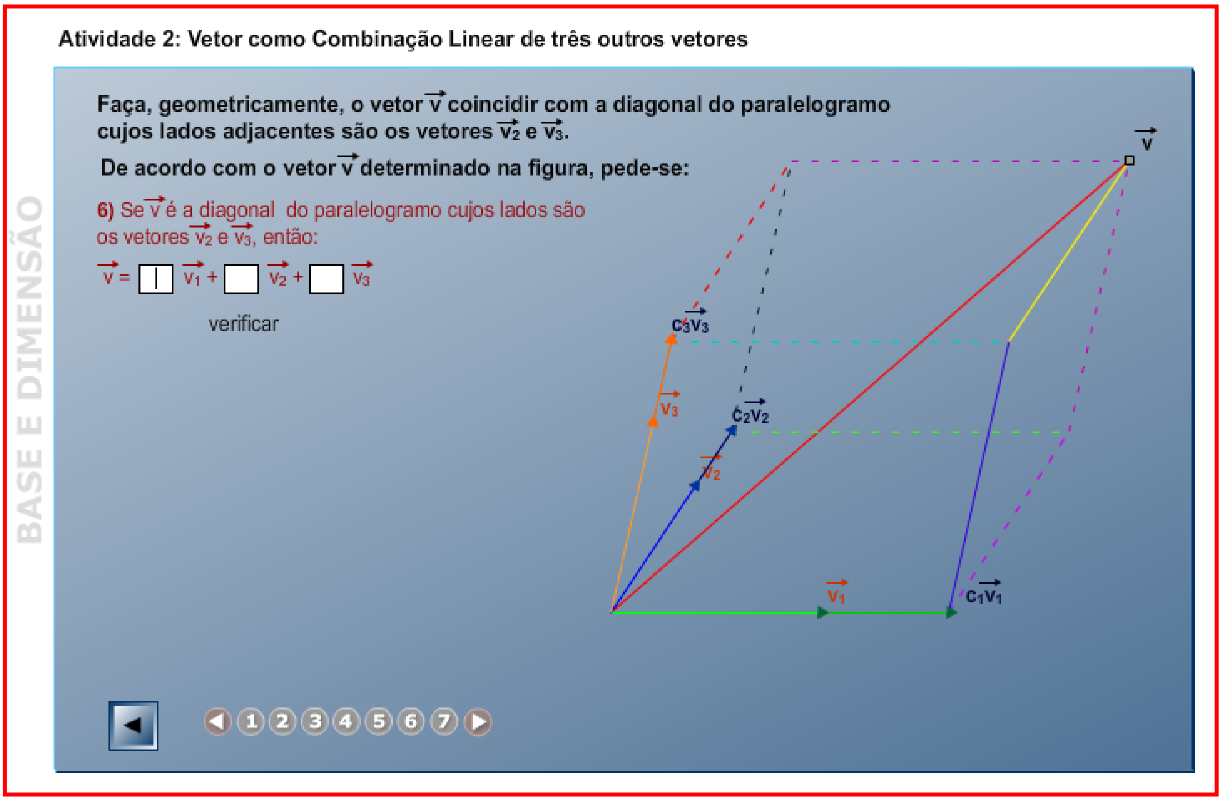
Apêndice A.15: Tela do paralelepípedo 3
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



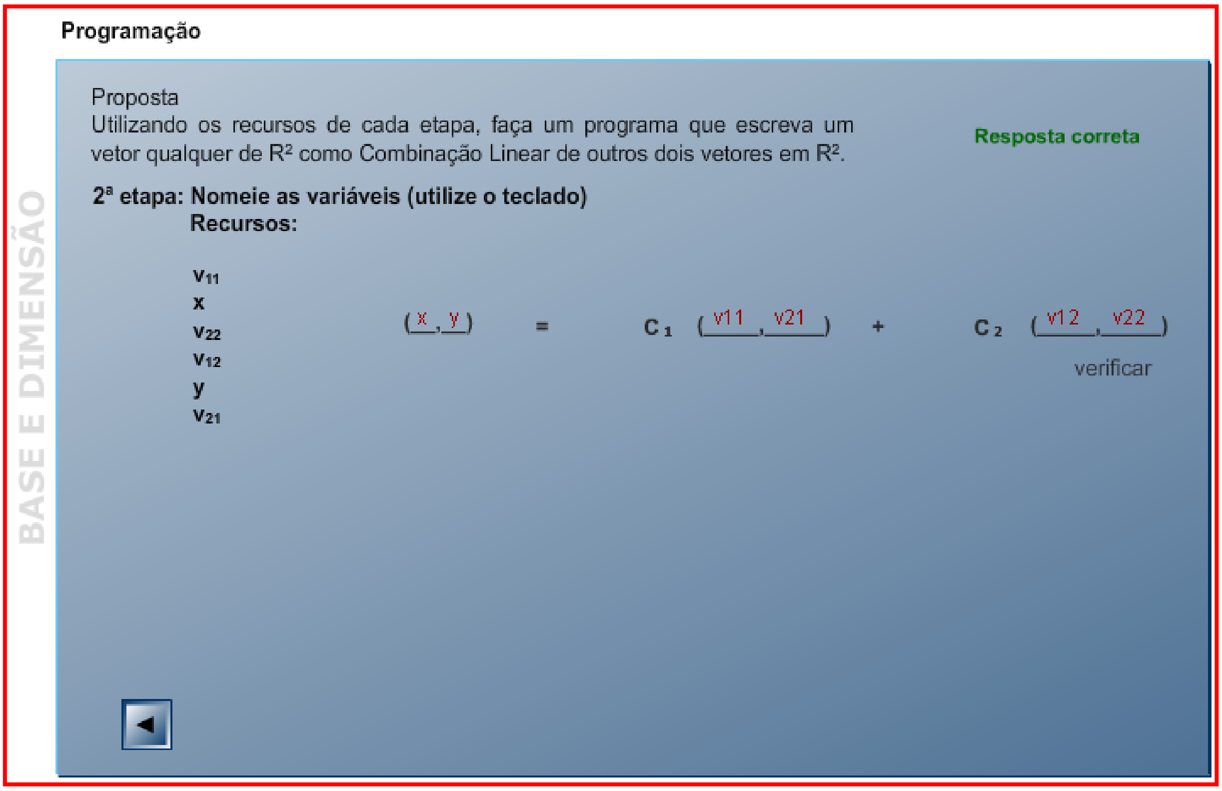
Apêndice A.16: Tela do paralelepípedo 4
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



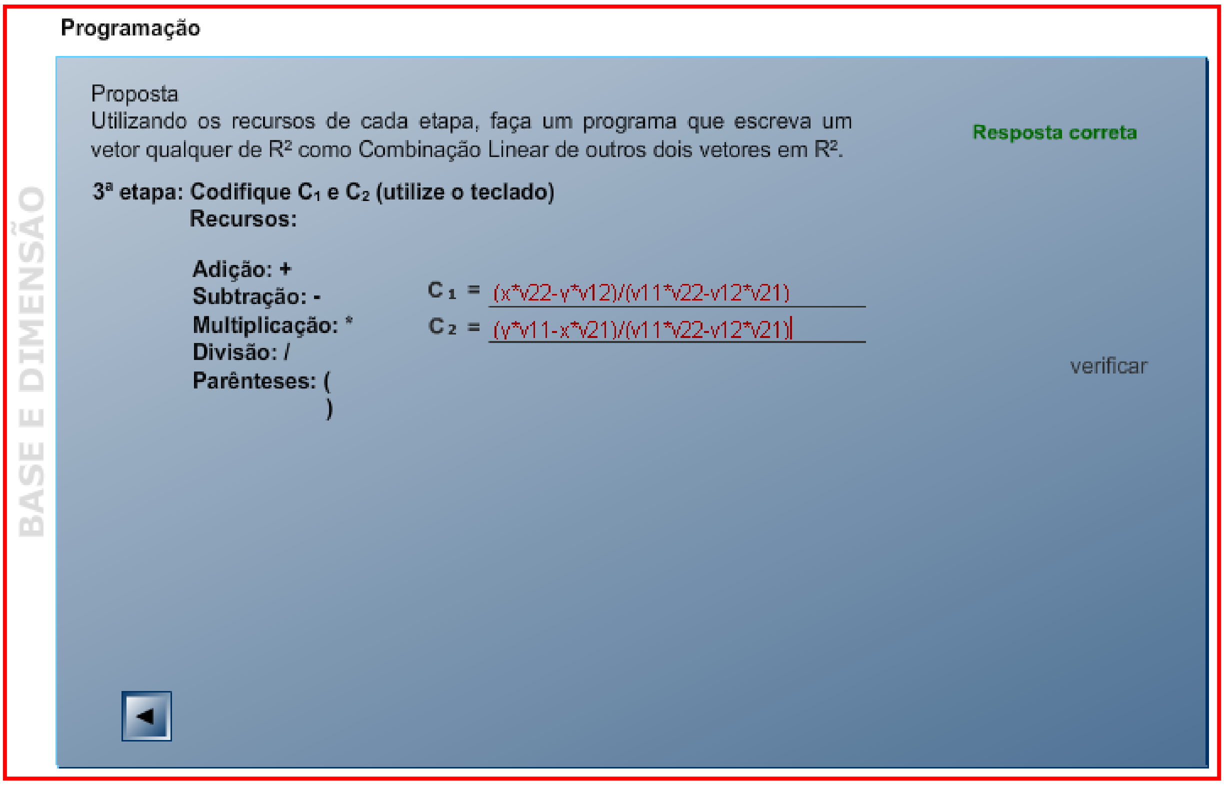
Apêndice A.17: Tela do paralelepípedo 5
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



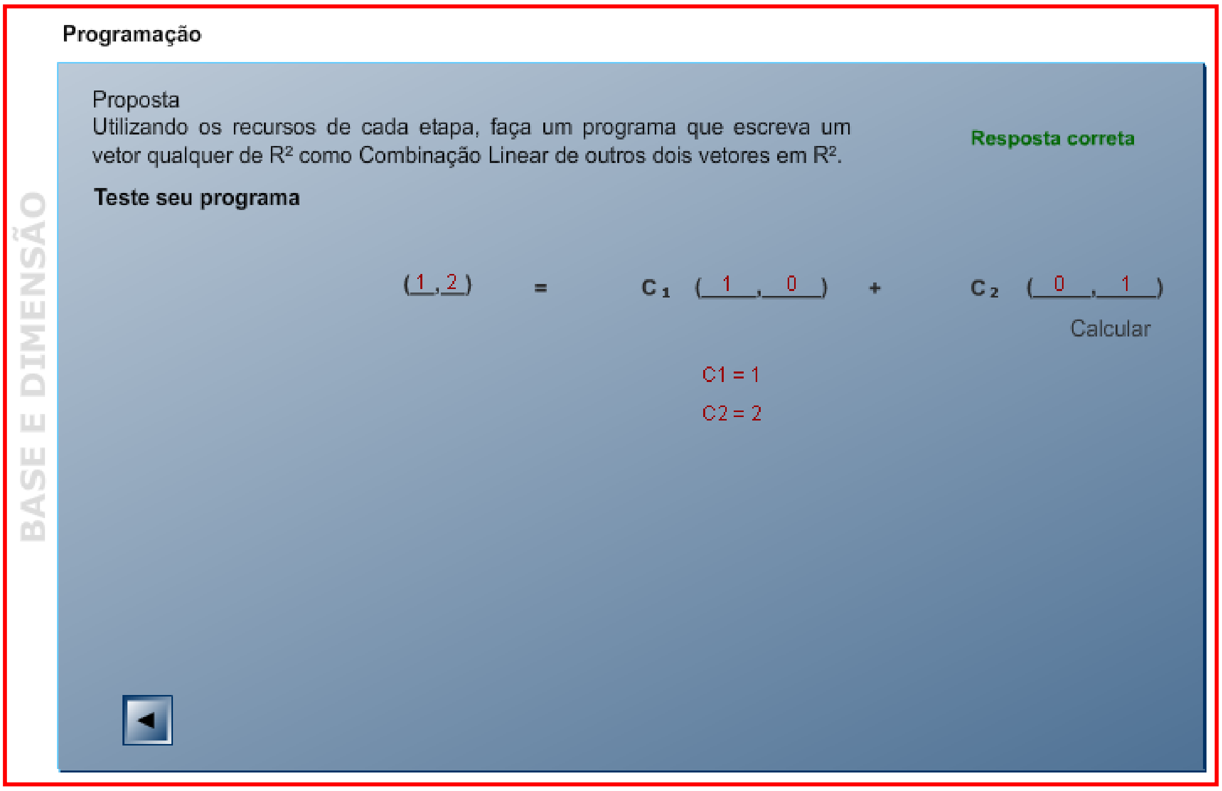
Apêndice A.18: Tela do paralelepípedo 6
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



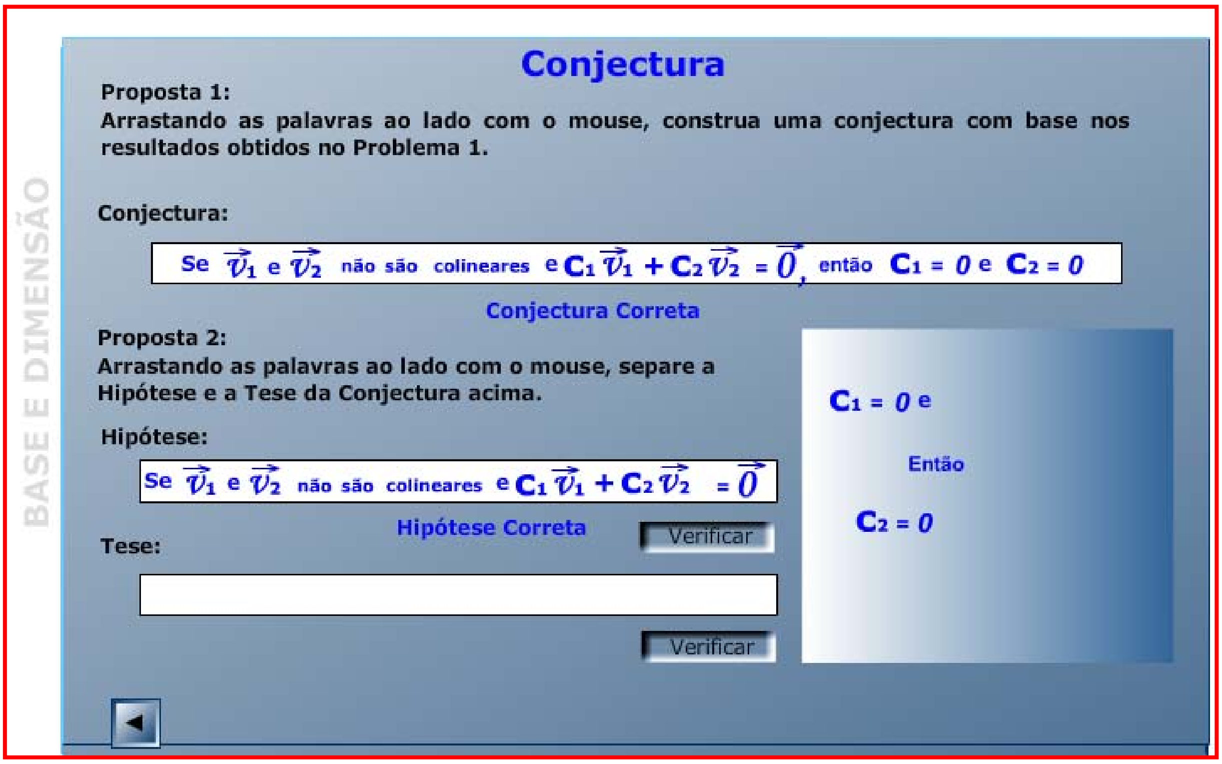
Apêndice A.19: Programação Combinação Linear 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



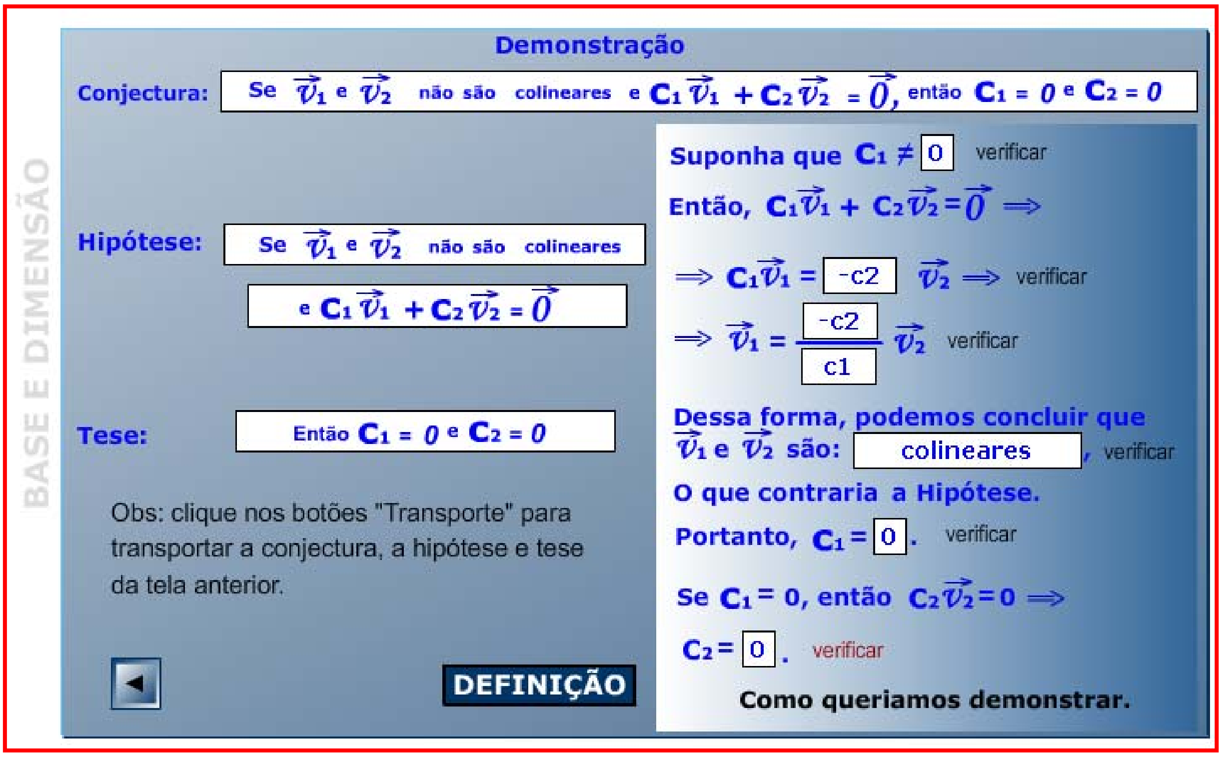
Apêndice A.20: Programação Combinação linear 3
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



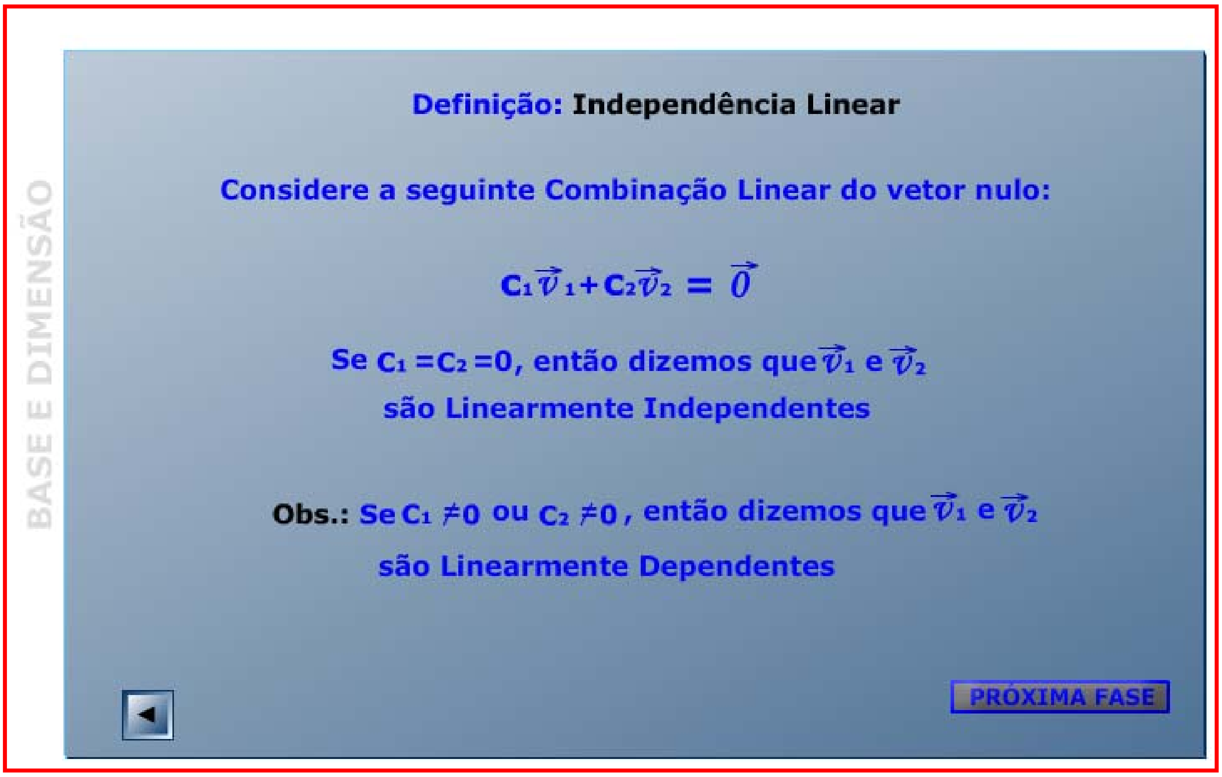
Apêndice A.21: Programação Combinação linear 4
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



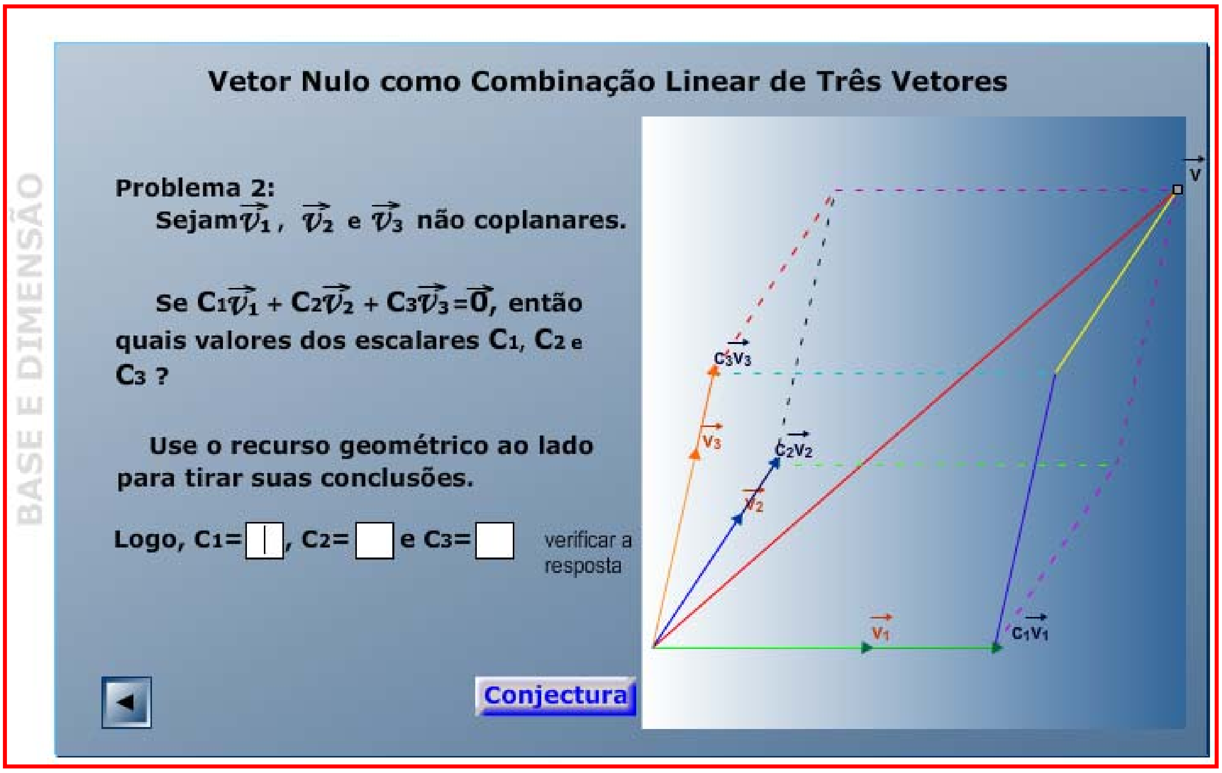
Apêndice A.22: Conjectura dois vetores
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



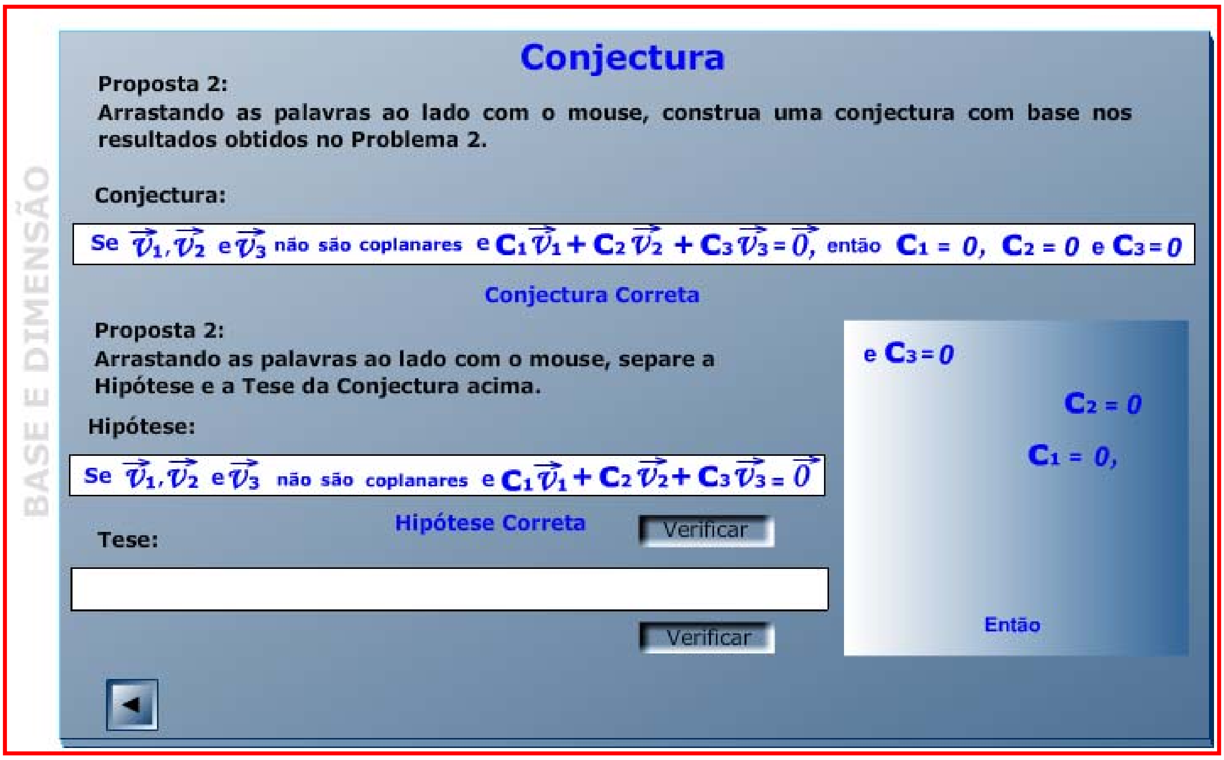
Apêndice A.23: Conjectura dois vetores – demonstração
Fonte: Elaborado pelo autor, 2008.



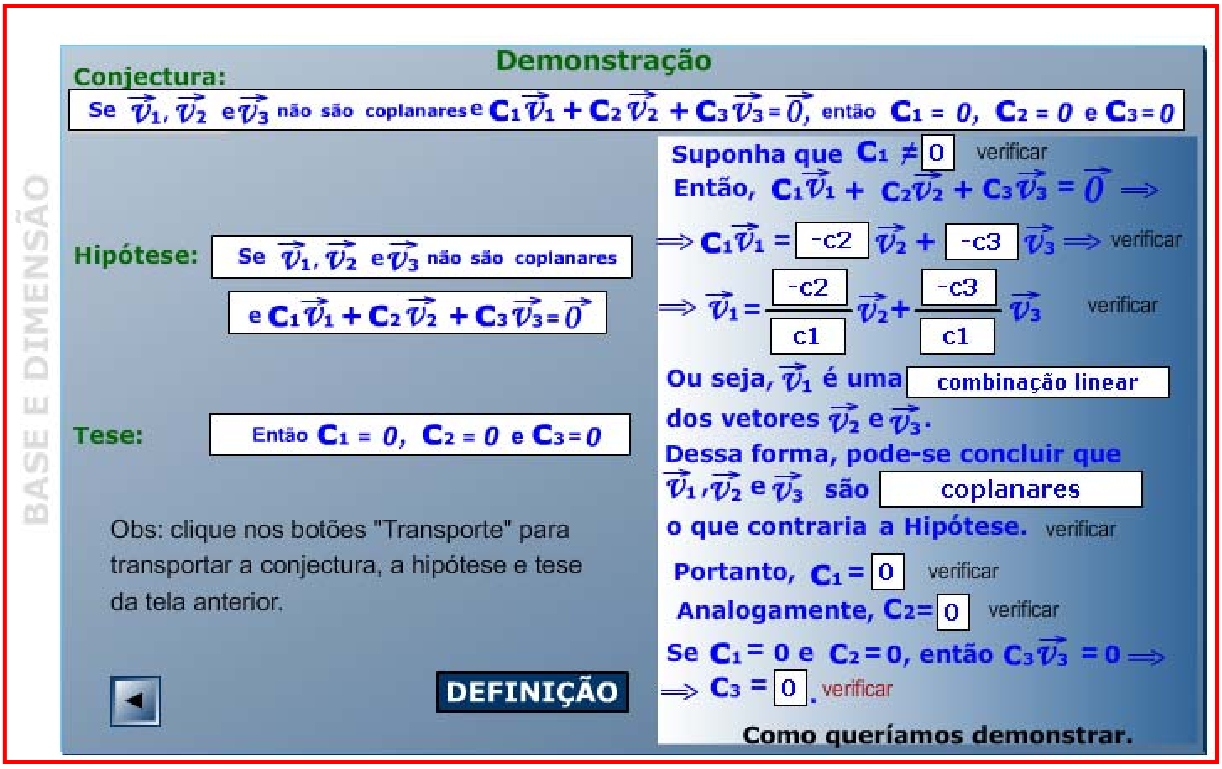
Apêndice A.24: Definição de dois vetores Linearmente Independentes
Fonte: Elaborado pelo autor, 2008.



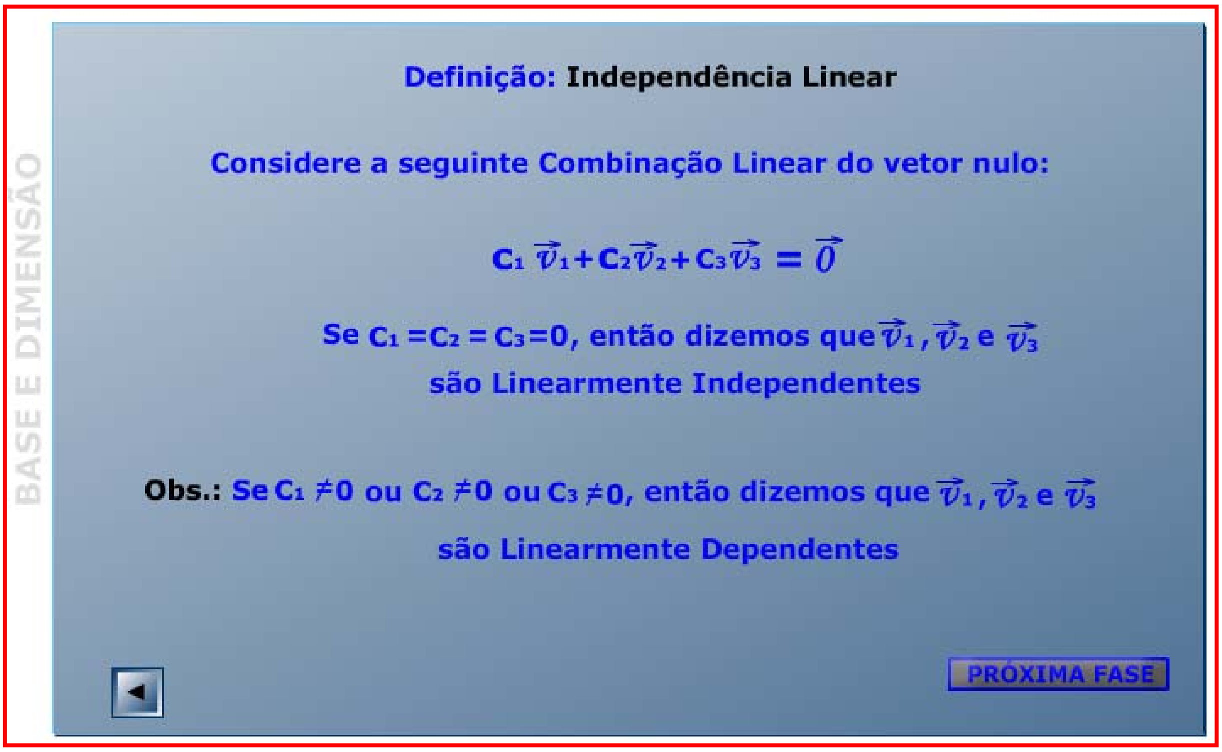
Apêndice A.25: Independência Linear – três vetores
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



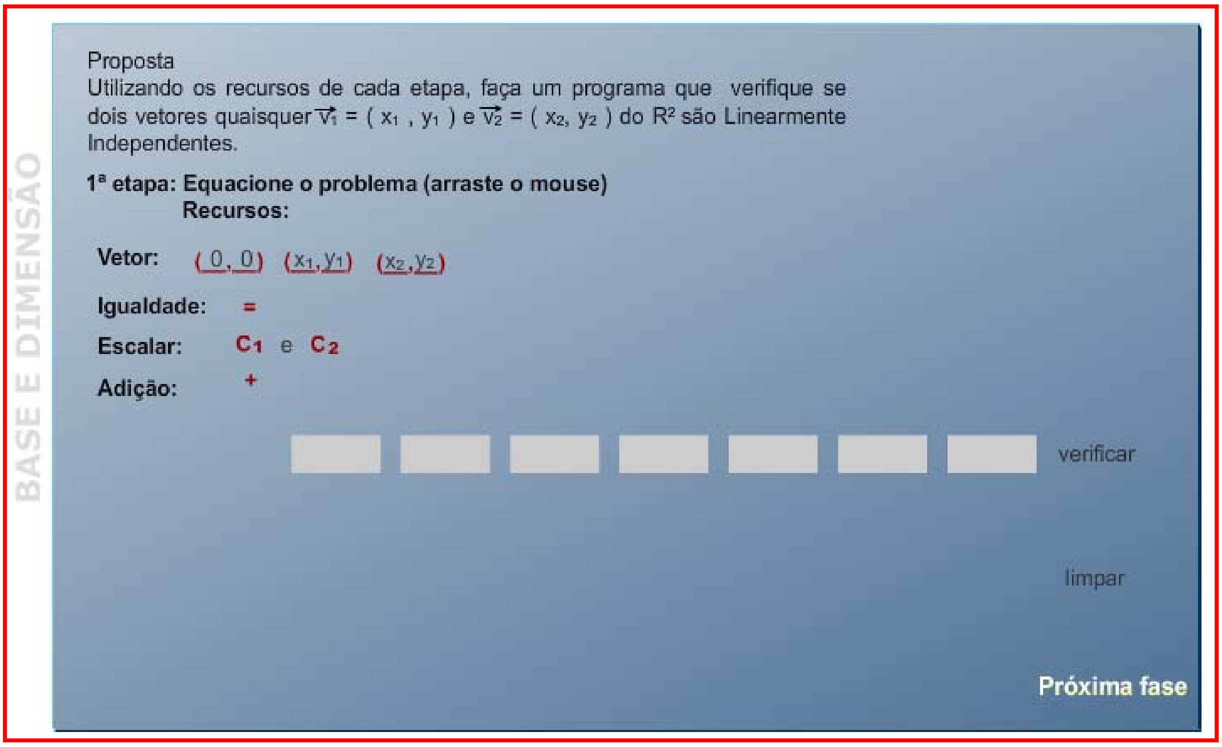
Apêndice A.26: Conjectura - três vetores
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



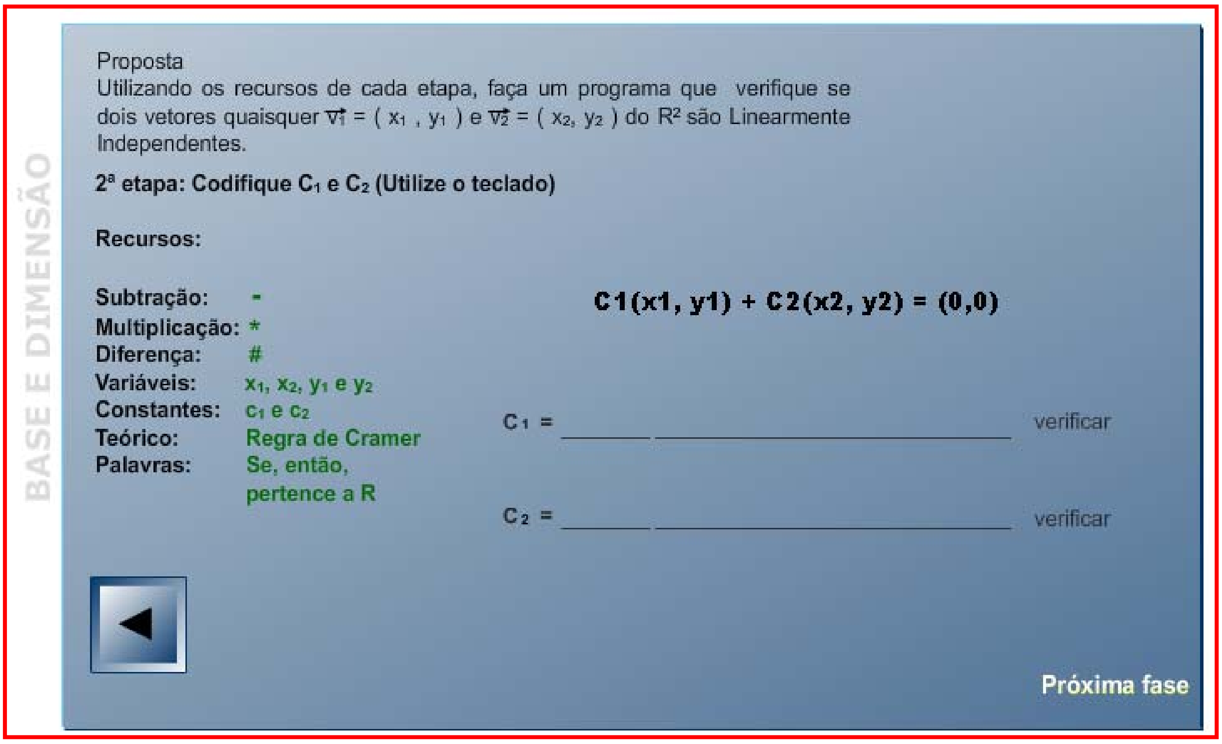
Apêndice A.27: Conjectura três vetores – demonstração
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



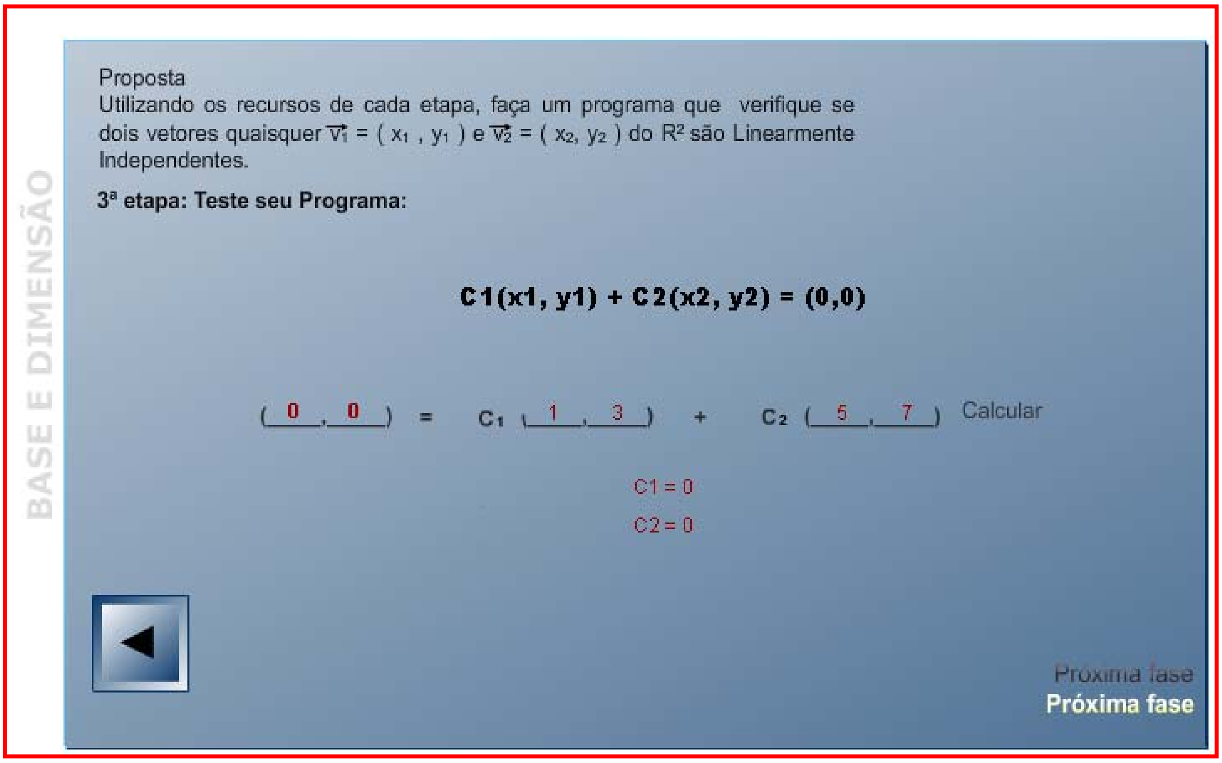
Apêndice A.28: Definição de três vetores Linearmente Independentes
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



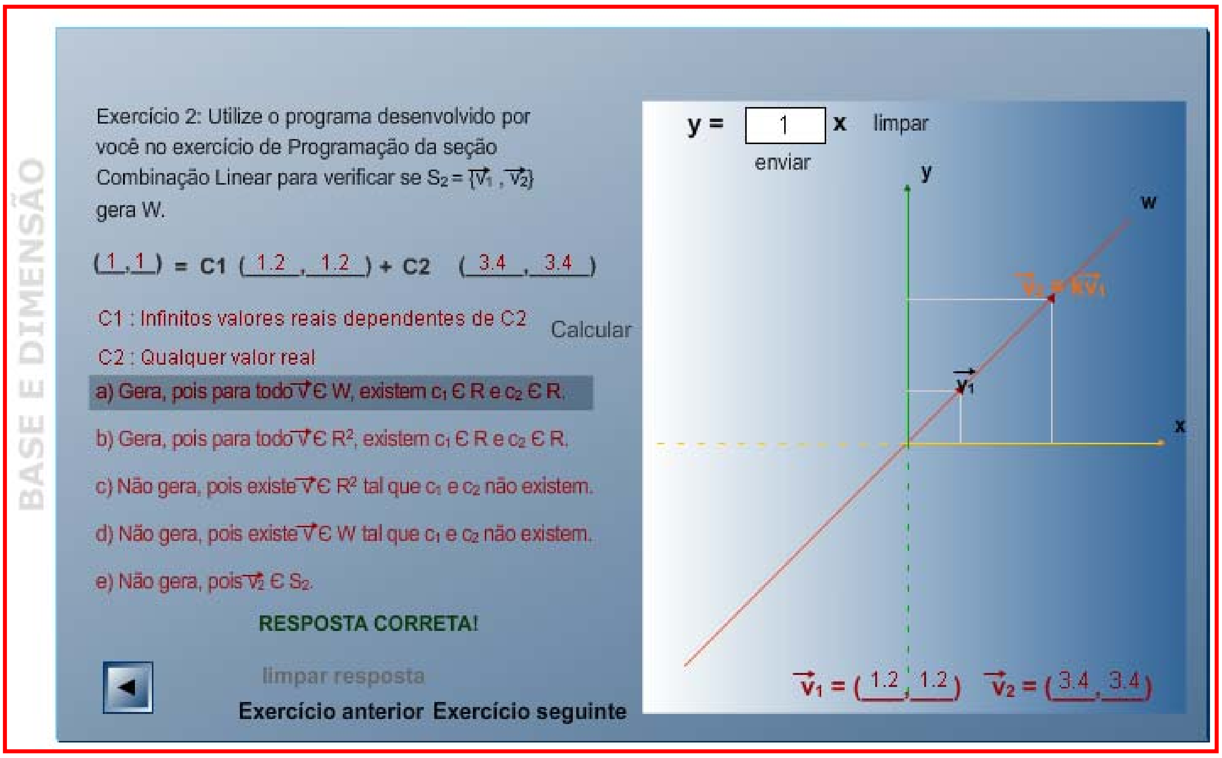
Apêndice A.29: Programação Independência Linear 1
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



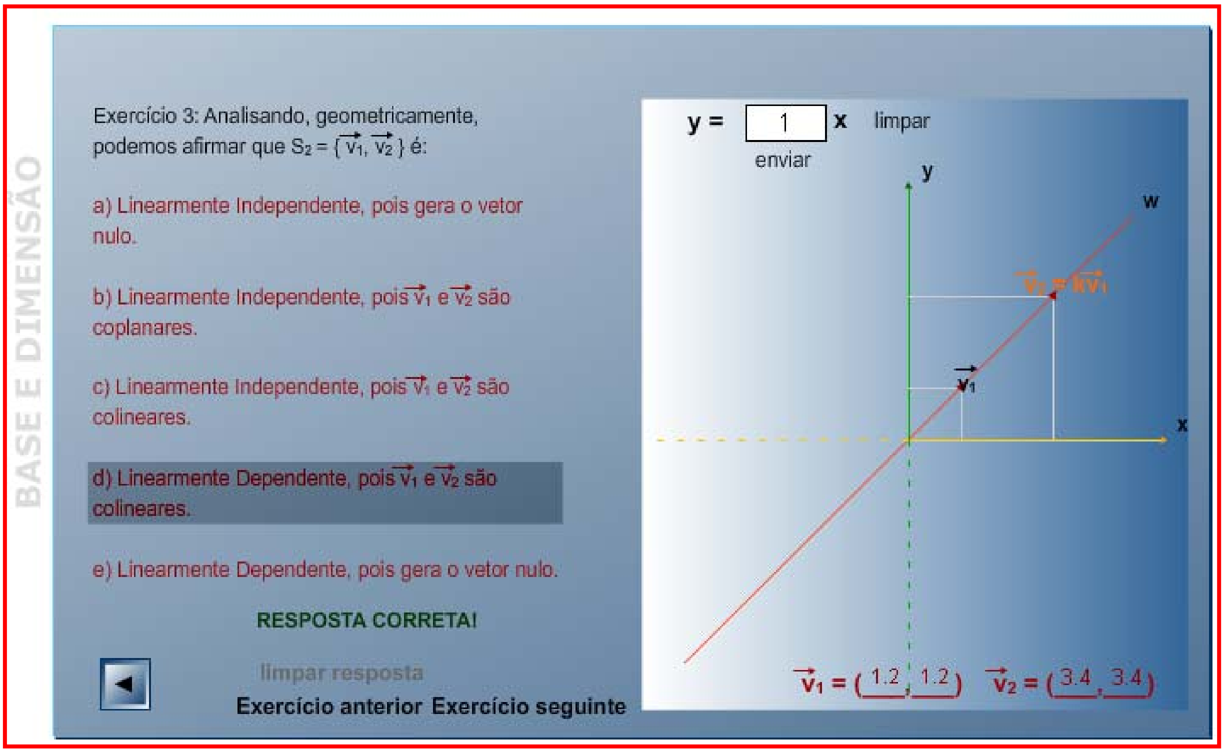
Apêndice A.30: Programação Independência Linear 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



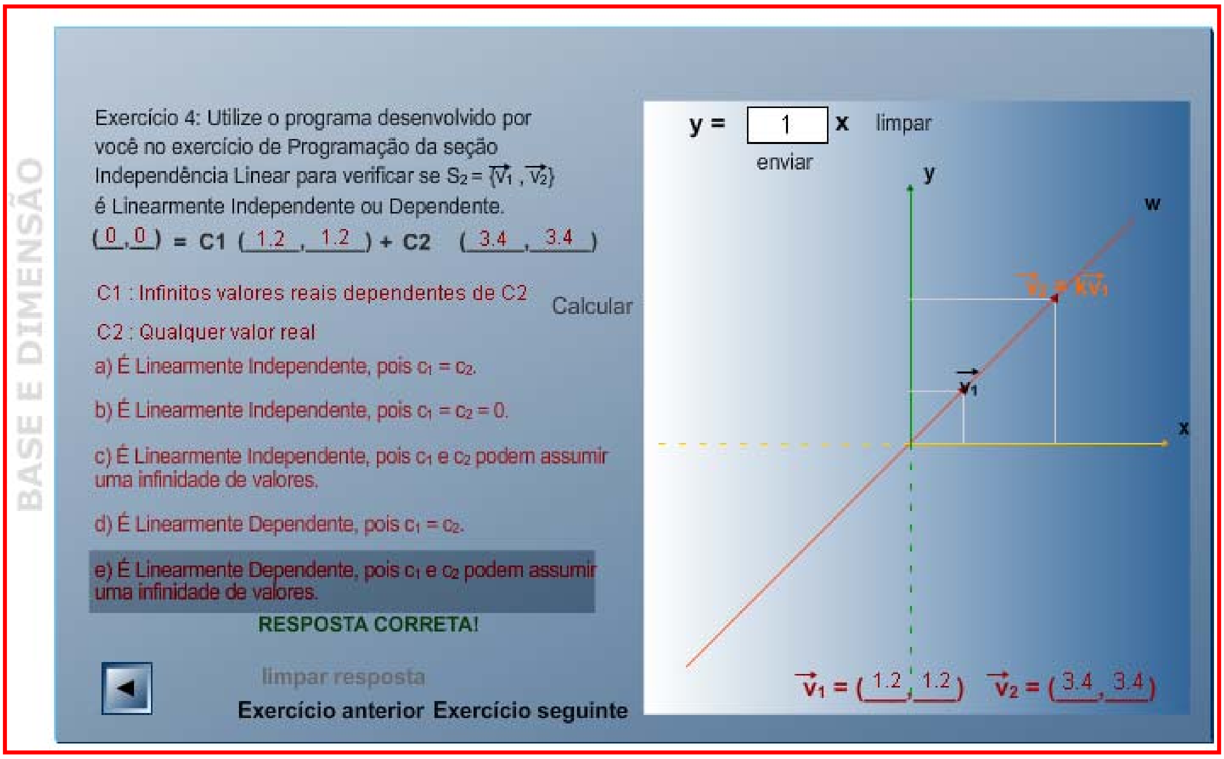
Apêndice A.31: Programação Independência Linear
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



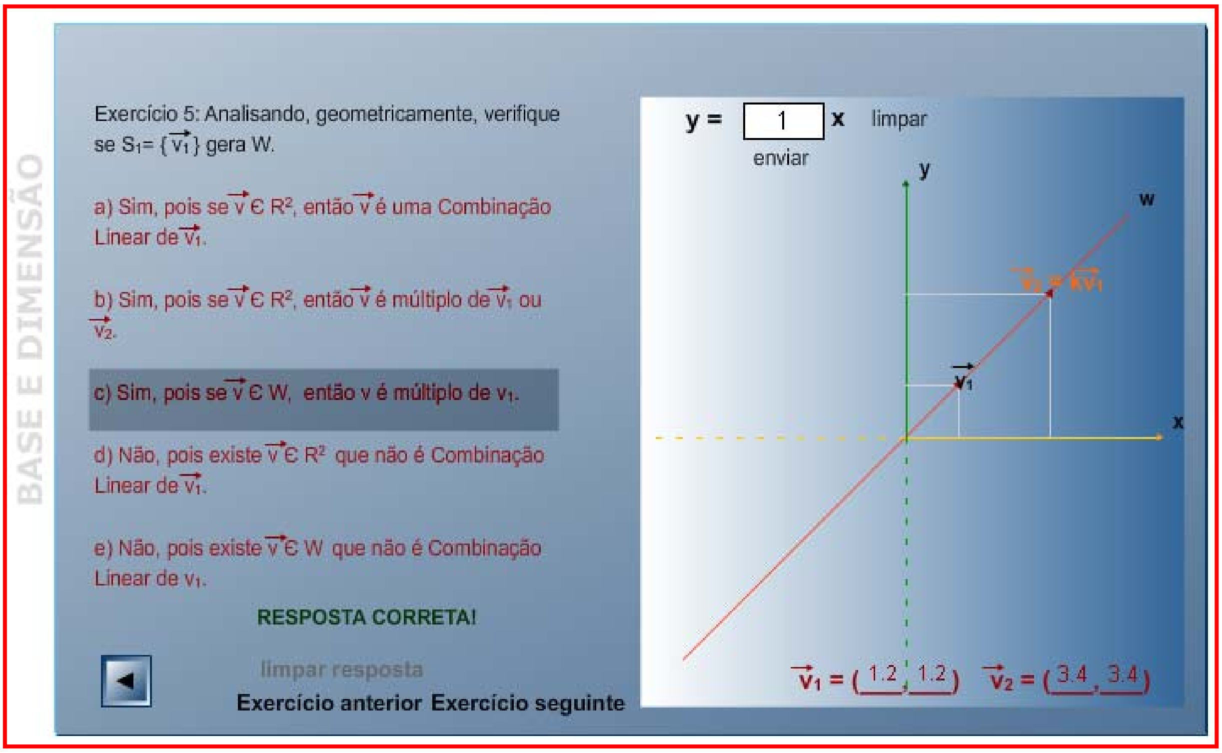
Apêndice A.32: Base – Exercício 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



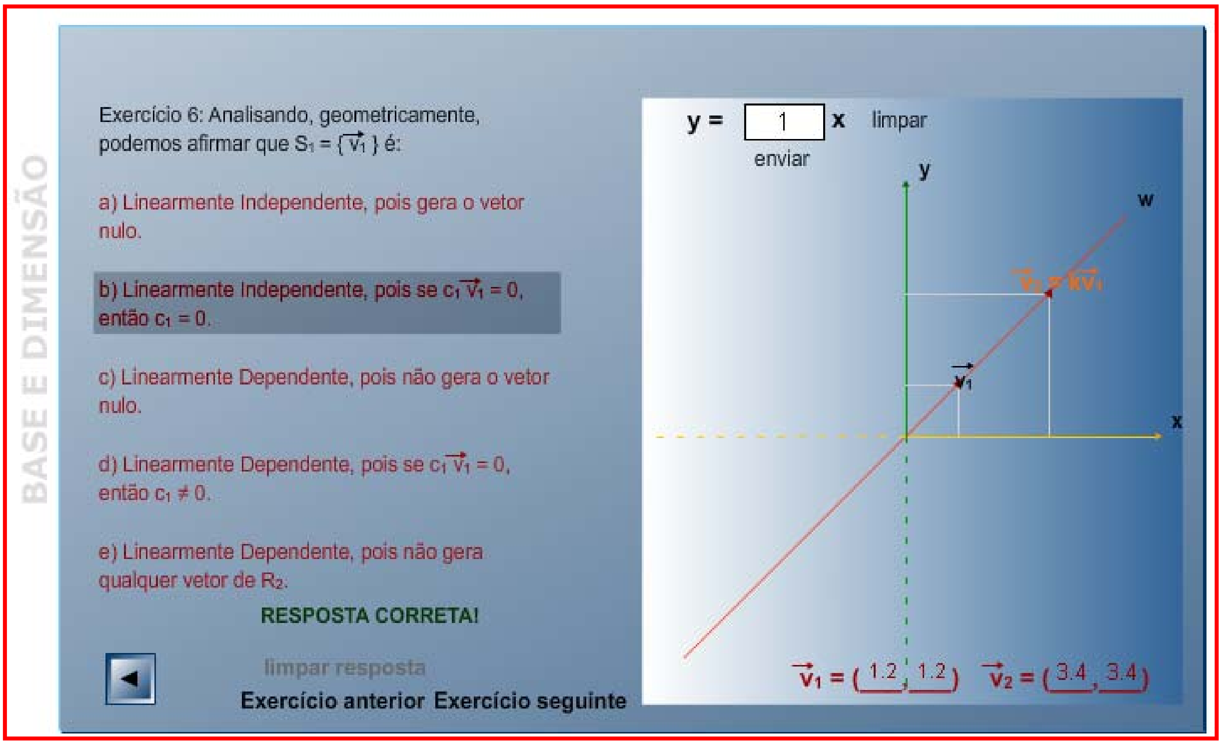
Apêndice A.33: Base – Exercício 3
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



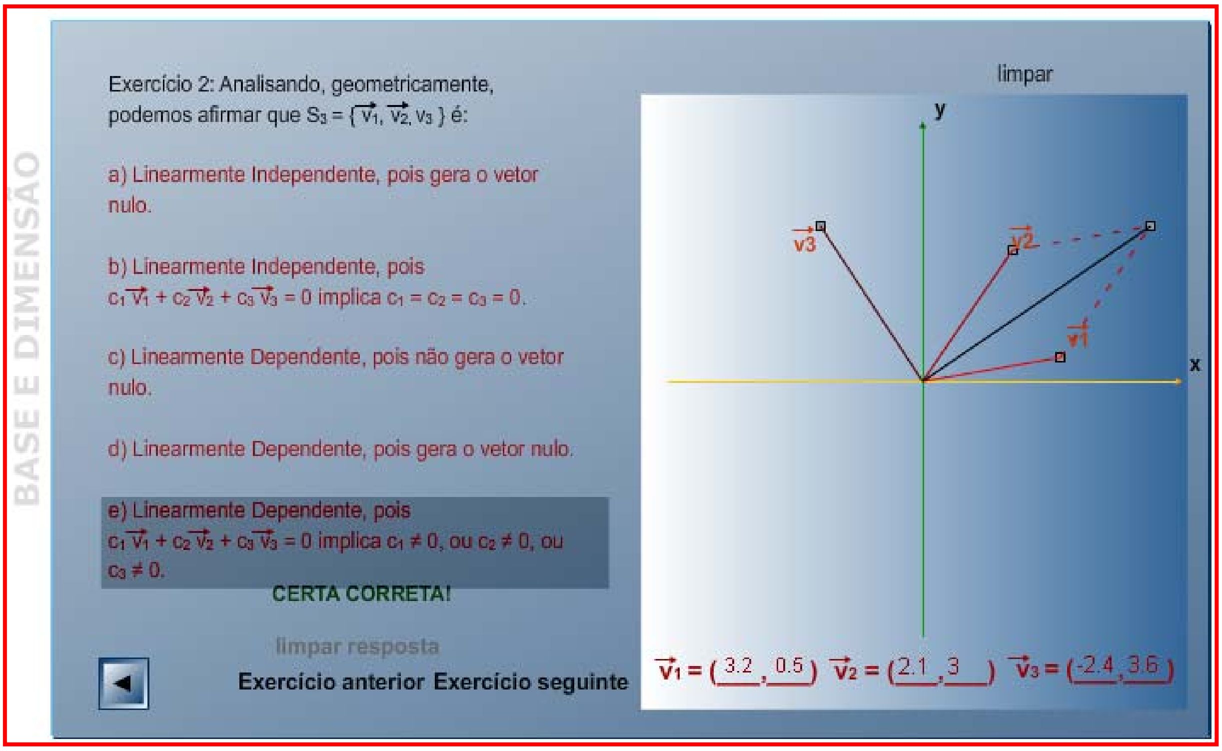
Apêndice A.34: Base – Exercício 4
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



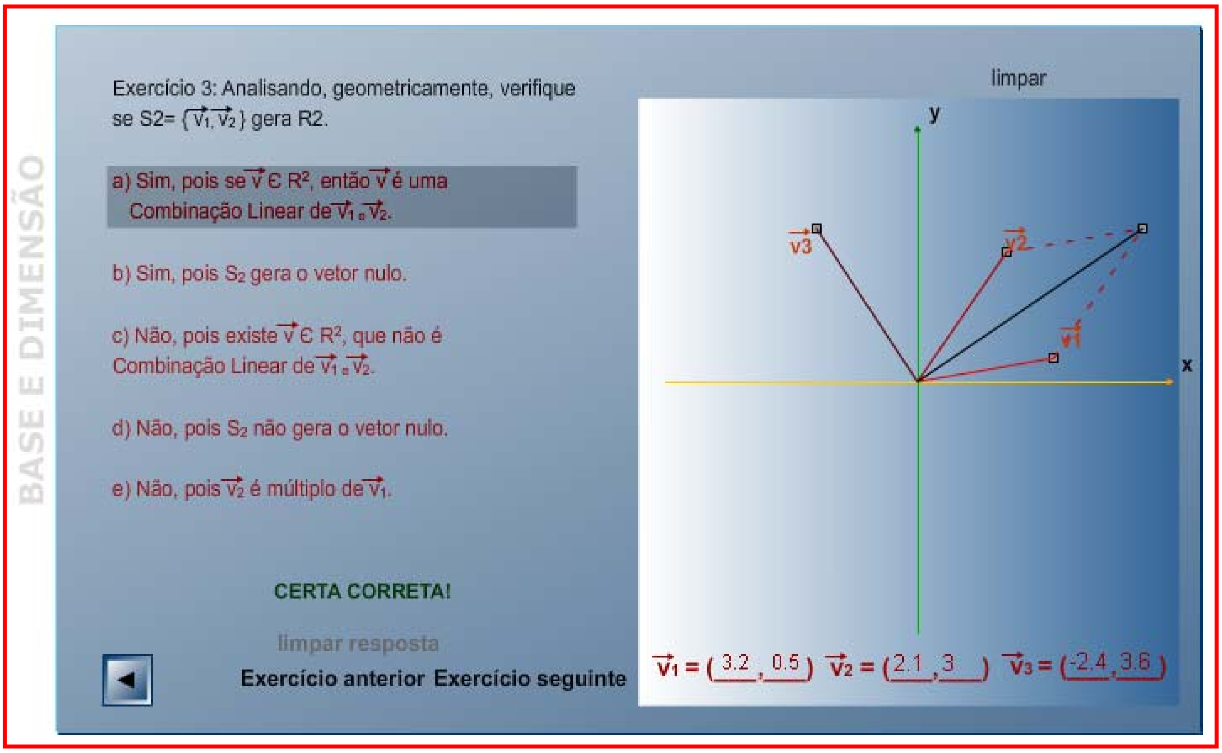
Apêndice A.35: Base – Exercício 5
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



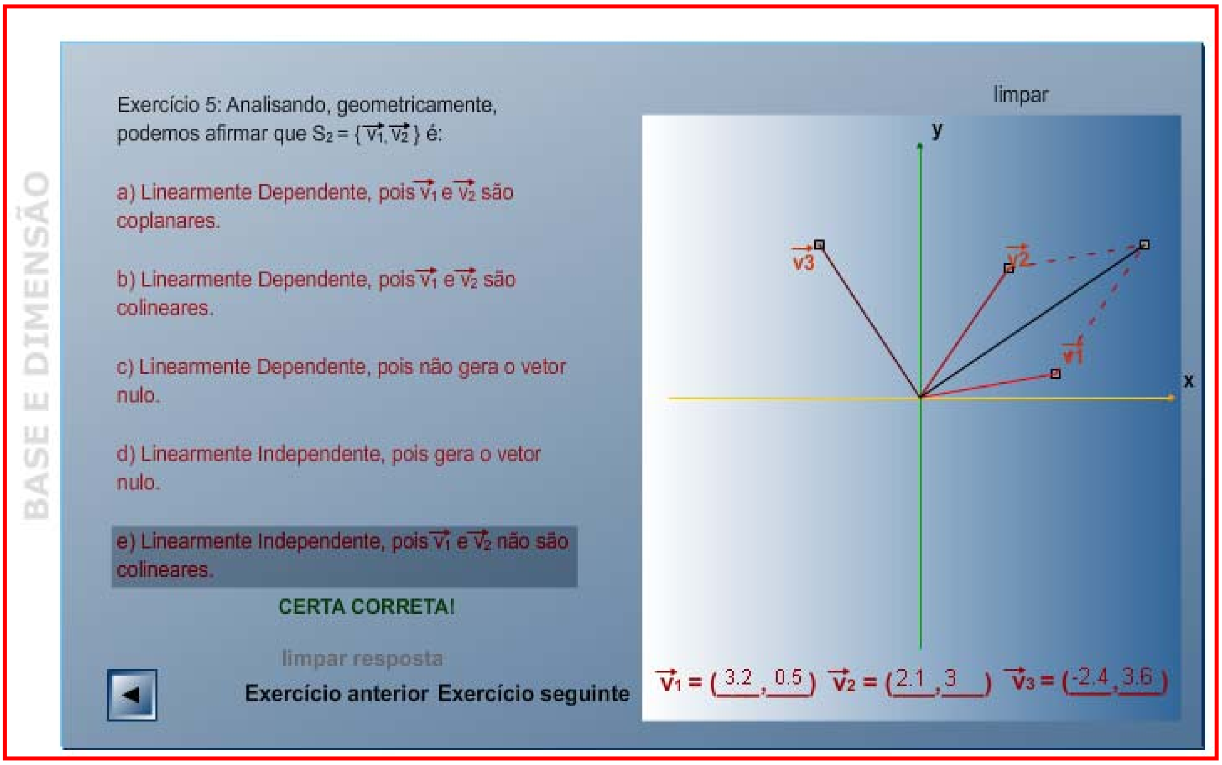
Apêndice A.36: Base – Exercício 6
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



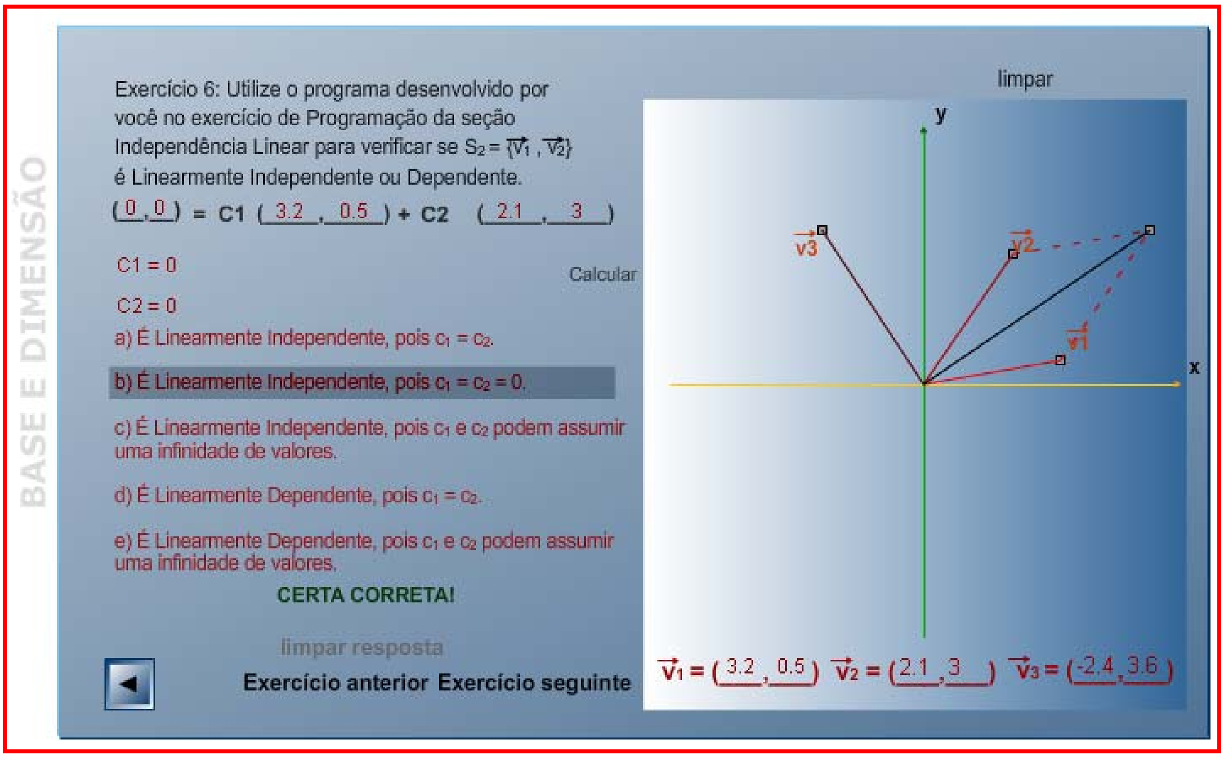
Apêndice A.37: Base – Exercício 2 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



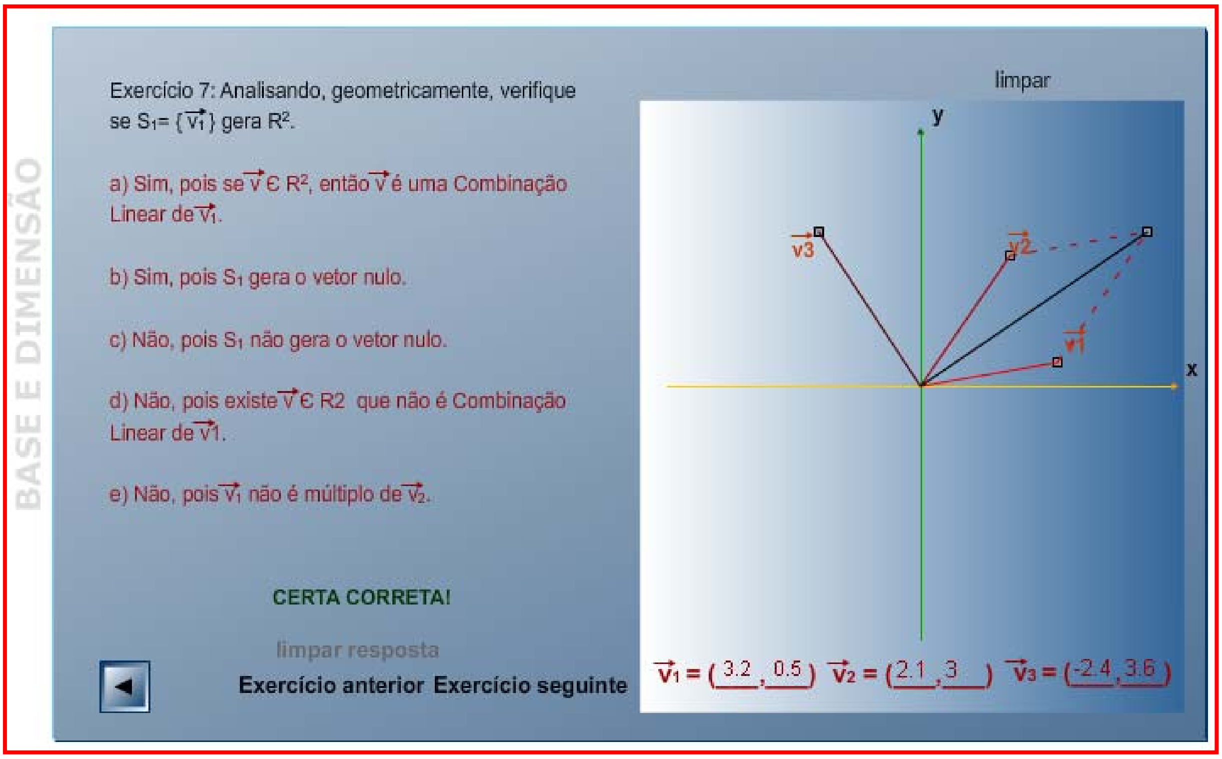
Apêndice A.38: Base – Exercício 3 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



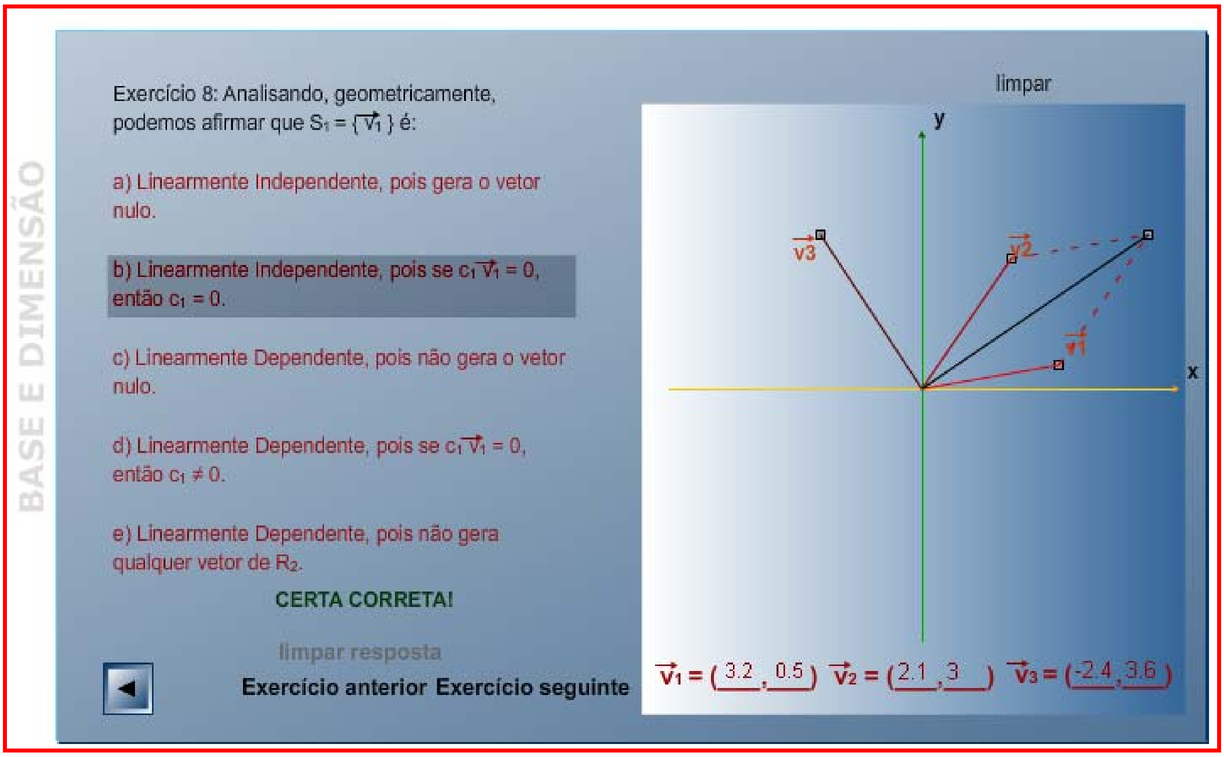
Apêndice A.39: Base – Exercício 5 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



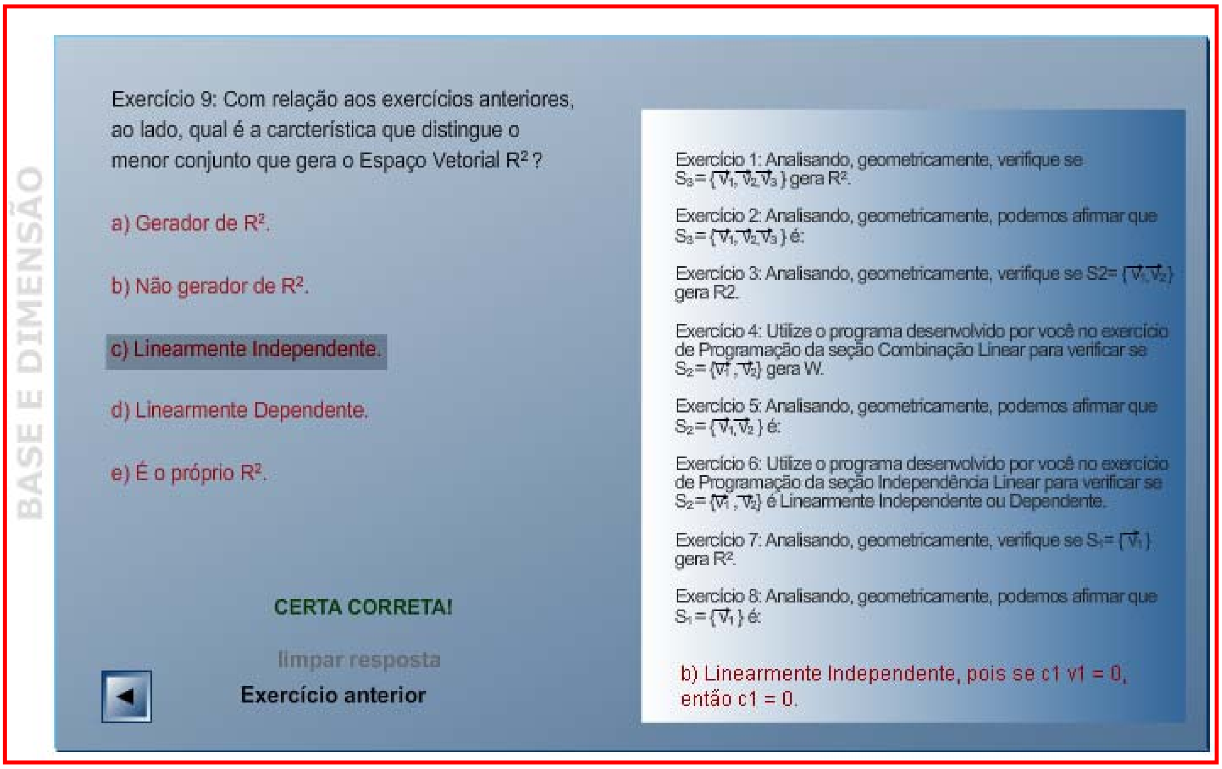
Apêndice A.40: Base – Exercício 6 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



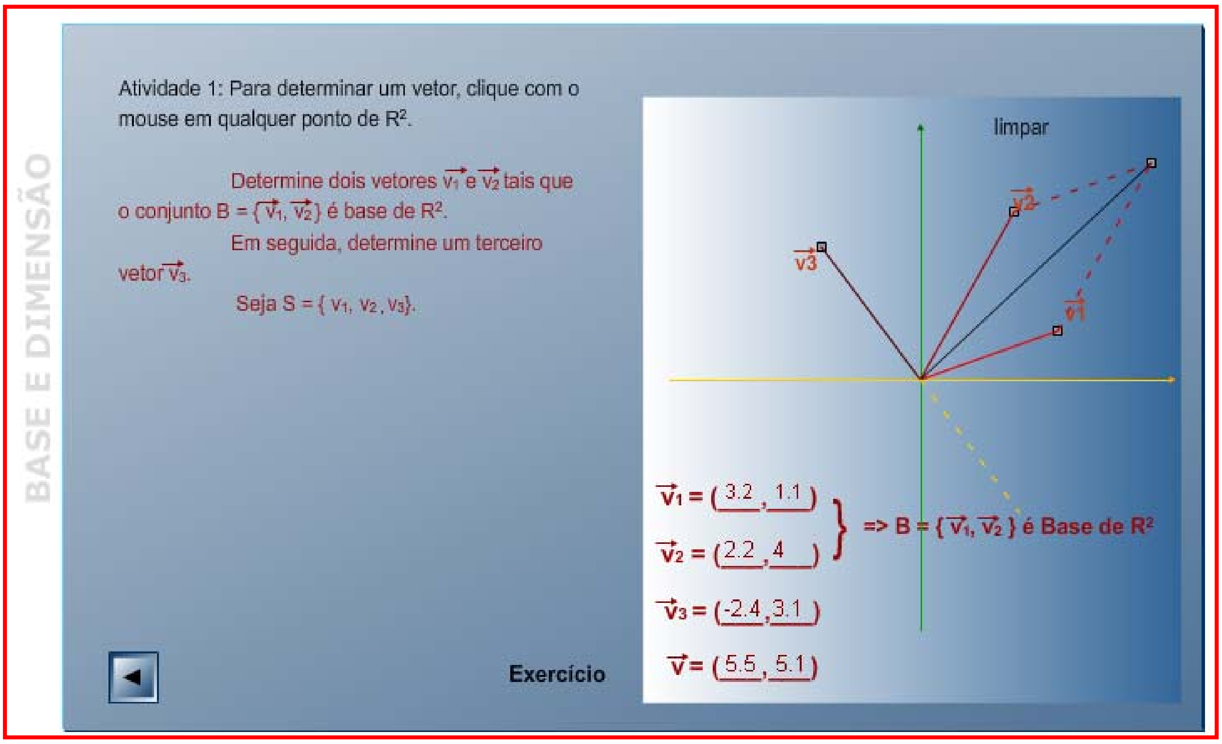
Apêndice A.41: Base – Exercício 7 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



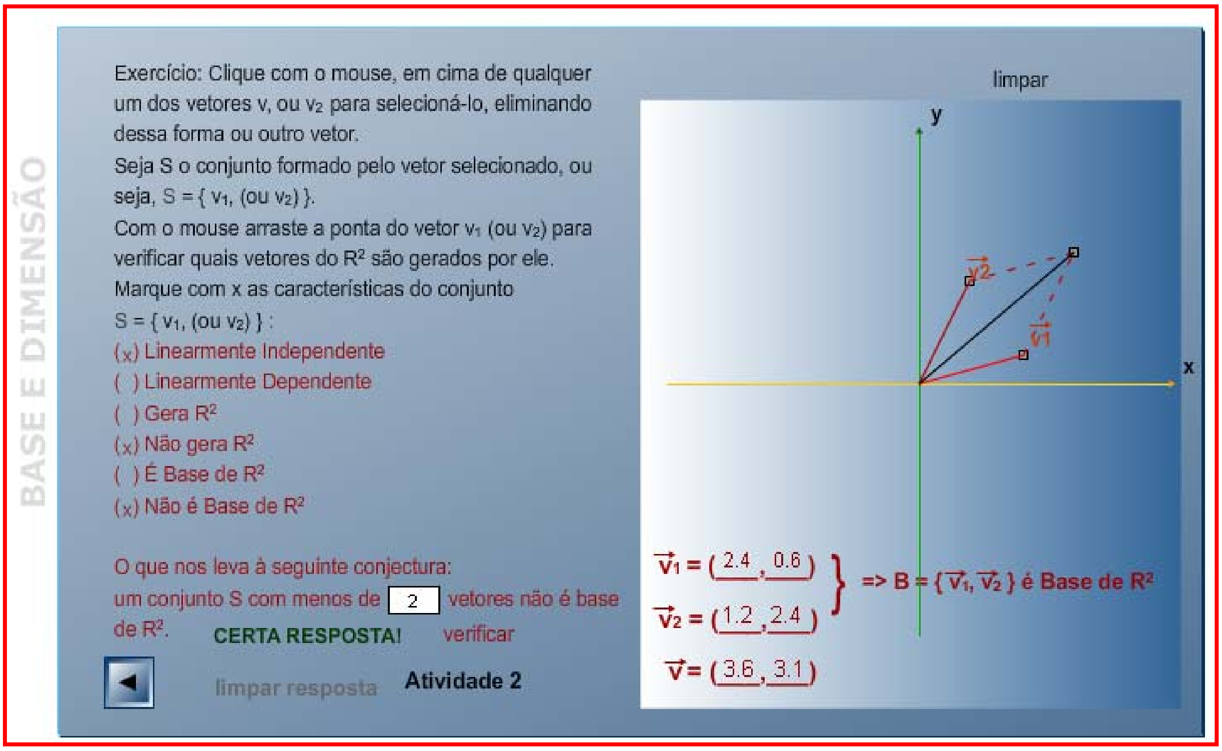
Apêndice A.42: Base – Exercício 8 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



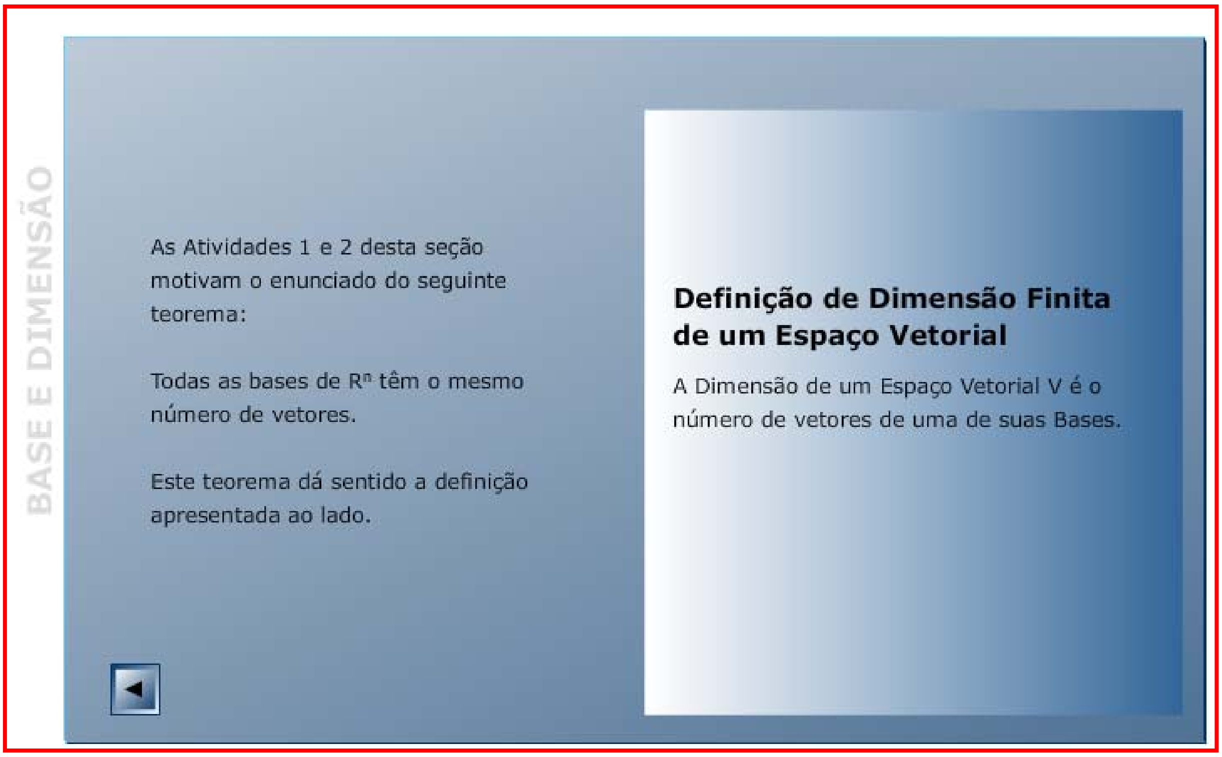
Apêndice A.43: Base – Exercício 9 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



Apêndice A.44: Dimensão – Atividade 1
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.



Apêndice A.45: Dimensão – Exercício da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

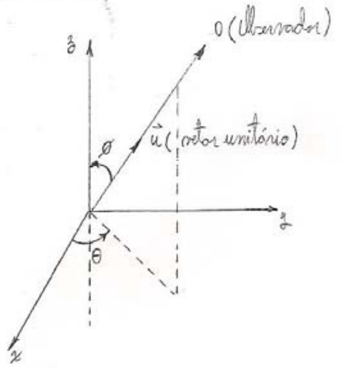


Apêndice A.46: Definição de Dimensão
Fonte: Elaborado pelo Pesquisador, 2008.

APÊNDICE B – Fórmulas Matemáticas

Apêndice B.1: Fórmulas Matemáticas para representar ponto do R^3 em R^2.

. Desenho em 3D

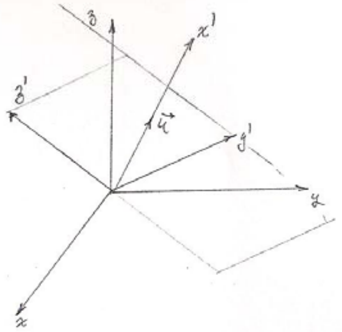


$\vec{u} = (\cos\theta \,\text{sen}\,\phi,\ \text{sen}\,\theta\, \text{sen}\,\phi,\ \cos\phi)$

- Matriz de transformação para um novo sistema de Coordenadas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\,\text{sen}\,\phi & \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi & \cos\phi \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta\cos\phi & -\text{sen}\,\theta\cos\phi & \text{sen}\,\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Obs.: Neste novo sistema de Coordenadas o eixo x' coincide com o vetor $\vec{u}$.



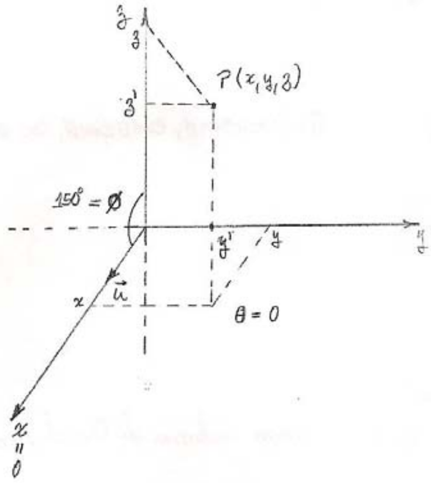
$P(x, y, z)$

$P'(x', y', z')$

$$x' = \cos\theta\,\text{sen}\,\phi\, x + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\, y + \cos\phi\, z$$

$$y' = -\text{sen}\,\theta\, x + \cos\theta\, y$$

$$z' = -\cos\theta\cos\phi\, x - \text{sen}\,\theta\cos\phi\, y + \text{sen}\,\phi\, z$$



$\vec{u} = (1, 0, 0)$

$\underbrace{Fln}_{} = 4$

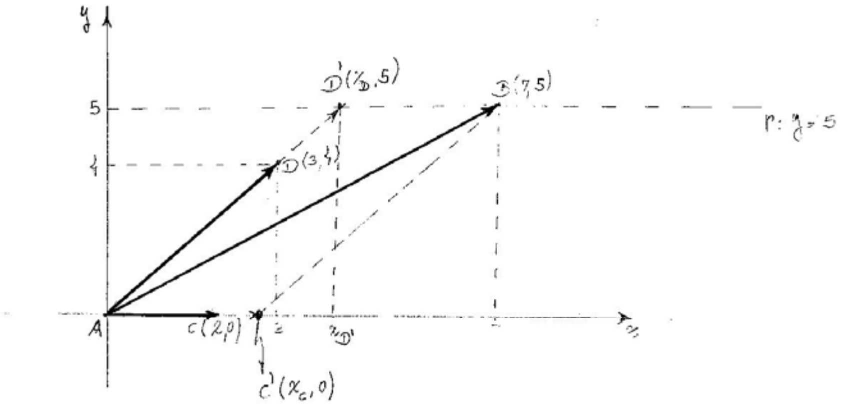
Distância do observador à origem

$P(x, y, z)$

$$\left.\begin{aligned}
x' &= (\underset{\overset{\|}{1}}{\cos 0}\ \operatorname{sen}150^\circ)x + (\underset{\overset{\|}{0}}{\operatorname{sen} 0}\ \operatorname{sen}150^\circ)y + (\cos 150^\circ)z = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z \\
y' &= (\underset{\overset{\|}{0}}{\operatorname{sen} 0})x + (\underset{\overset{\|}{1}}{\cos \theta})y = y \\
z' &= (-\underset{\overset{\|}{1}}{\cos 0}\ \cos 150^\circ)x - (\underset{\overset{\|}{0}}{\operatorname{sen} 0}\ \cos 150)y + (\operatorname{sen}150^\circ)z = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z
\end{aligned}\right\} P'(x', y', z')$$

$$\left.\begin{aligned}
y'' &= \frac{4}{4 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}(y) \\
z'' &= \frac{4}{4 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z\right)
\end{aligned}\right\} \text{Ponto do } \mathbb{R}^3 \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Apêndice B.2: Fórmulas matemáticas para a atividade do paralelogramo



$$\left.\begin{array}{l} m_{AD} = 4/3 \\ D(3,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AD}: \ y - 4 = \frac{4}{3}(x-3) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 4 + 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

$$r \cap \overleftrightarrow{AD} = \frac{4}{3}x = 5 \Rightarrow \boxed{x_{D'} = \frac{15}{4}}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{BC'} = 4/3 \\ B(7,5) \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC'}: \ y - 5 = \frac{4}{3}(x-7) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{28}{3} + 5 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$$

$$\overleftrightarrow{BC'} \cap \overrightarrow{Ax} = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3} = 0 \Rightarrow 4x = 13 \Rightarrow \boxed{x_{C'} = \frac{13}{4}}$$

$$\overleftrightarrow{BC'}: \ y - y_B = \frac{4}{3}(x - x_B) \Rightarrow y = \frac{4}{3}(x - x_B) + y_B$$

$$\frac{4}{3}(x_{C'} - x_B) + y_B = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}x_{C'} - \frac{4}{3}x_B + y_B = 0 \Rightarrow$$

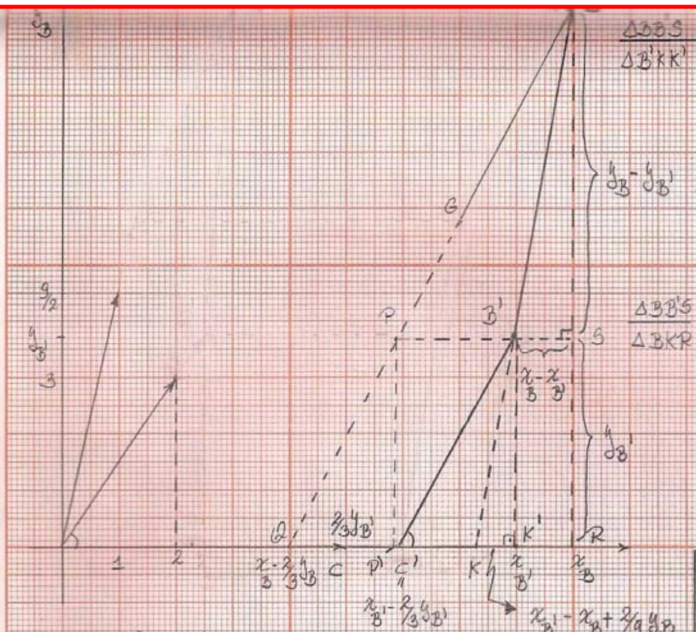
$$\Rightarrow x_{C'} = x_B - \frac{3}{4}y_B$$

Portanto, $\boxed{C'\left(x_B - \frac{3}{4}y_B, 0\right)}$

$$\frac{4}{3}x_{D'} = y_B \Rightarrow x_{D'} = \frac{3}{4}y_B$$

Portanto, $\boxed{D'\left(\frac{3}{4}y_B, y_B\right)}$

Apêndice B.3: Fórmulas matemáticas para a atividade do paralelepípedo



$$\frac{\Delta BB'S}{\Delta B'KK'} : \frac{y_B - y_{B'}}{y_{B'}} = \frac{x_B - x_{B'}}{x_{B'} - x_B + \frac{2}{9}y_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B - y_{B'} = \frac{x_B - x_{B'}}{x_{B'} - x_B + \frac{2}{9}y_B}\, y_{B'} \quad \text{I}$$

$$\frac{\Delta BB'S}{\Delta BKR} \quad \frac{y_B - y_{B'}}{\cancel{y_B}} = \frac{x_B - x_{B'}}{\frac{2}{9}\cancel{y_B}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B - y_{B'} = \frac{9}{2}(x_B - x_{B'}) \quad \text{II}$$

De I e II: $\dfrac{\cancel{x_B - x_{B'}}}{x_{B'} - x_B + \frac{2}{9}y_B}\, y_{B'} = \dfrac{9}{2}\cancel{(x_B - x_{B'})} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{B'} = \frac{9}{2}\left(x_{B'} - x_B + \frac{2}{9}y_B\right) \quad (i)$$

0 $\quad x_B - \frac{2}{3}y_B \quad$ Q $\quad \frac{2}{3}y_{B'} \quad$ C' $\quad \frac{2}{3}y_{B'} \quad$ K'

$$\therefore x_{B'} = x_B - \frac{2}{3}y_B + \frac{4}{3}y_{B'} \quad (ii)$$

De (i) e (ii):

$$y_{B'} = \frac{9}{2}\left(\cancel{x_B} - \frac{2}{3}y_B + \frac{4}{3}y_{B'} - \cancel{x_B} + \frac{2}{9}y_B\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{B'} = \frac{9}{2}\left(-\frac{4}{9}y_B + \frac{4}{3}y_{B'}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{B'} = -2y_B + 6y_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y_{B'} = 2y_B \Rightarrow \boxed{y_{B'} = \frac{2}{5}y_B}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{BB'} = \frac{9}{2} \\ B \in \overrightarrow{BB'} \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_B = \frac{9}{2}(x - x_B) \Rightarrow y = \frac{9}{2}x - \frac{9}{2}x_B + y_B$$

$$y = 0 \Rightarrow K \quad \therefore \frac{9}{2}x_K = \frac{9}{2}x_B - y_B \Rightarrow x_K = x_B - \frac{2}{9}y_B$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{B'C'} = \frac{3}{2} \\ B' \in \overrightarrow{B'C'} \end{array}\right\} y - y_{B'} = \frac{3}{2}(x - x_{B'}) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x_{B'} + y_{B'}$$

$$y = 0 \Rightarrow C' \quad \therefore \frac{3}{2}x_{C'} = \frac{3}{2}x_{B'} - y_{B'} \Rightarrow x_{C'} = x_{B'} - \frac{2}{3}y_{B'}$$

$$C'K' = \frac{2}{3}y_{B'}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{BP} = \frac{3}{2} \\ B \in \overrightarrow{BP} \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_B = \frac{3}{2}(x - x_B) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x_B + y_B$$

$$\overrightarrow{PB'} : y = y_{B'}$$

$$\overrightarrow{BP} \cap \overrightarrow{PB'} = P \Rightarrow \frac{3}{2}x_P - \frac{3}{2}x_B + y_B = y_{B'} \Rightarrow \frac{3}{2}x_P = \frac{3}{2}x_B - y_B + y_{B'} \Rightarrow x_P = x_B - \frac{2}{3}y_B + \frac{2}{3}y_{B'}$$

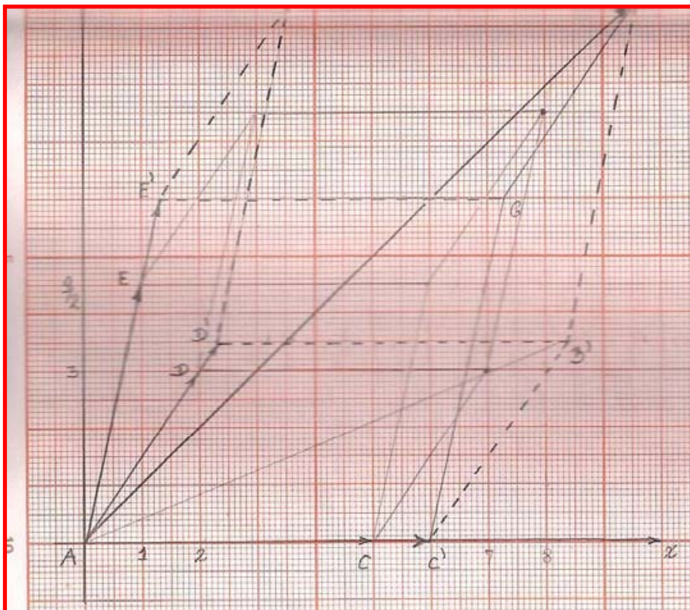
$$QC' = \frac{2}{3}y_{B'}$$

Portanto,

$$x_{B'} = x_B - \frac{2}{3}y_B + \frac{4}{3}\left(\frac{2}{5}y_B\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{B'} = x_B - \frac{2}{3}y_B + \frac{8}{15}y_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{B'} = x_B - \frac{2}{15}y_B}$$



$A(0, 0)$

$B(x_B, y_B)$ $\quad$ $B'\left(x_B - \frac{2}{15}y_B ,\ \frac{2}{5}y_B\right)$

$C(5, 0)$ $\quad$ $C'\left(x_B - 2/5\, y_B ,\ 0\right)$

$D(2, 3)$ $\quad$ $D'\left(4/15\, y_B ,\ 2/5\, y_B\right)$

$E(1, 9/2)$ $\quad$ $E'\left(2/15\, y_B ,\ 3/5\, y_B\right)$

$F\left(2/5\, y_B ,\ y_B\right)$

$G\left(x_B - 4/15\, y_B ,\ 3/5\, y_B\right)$

$$\left.\begin{array}{l} m_{\overrightarrow{B'C'}} = 3/2 \\ B' \in \overrightarrow{B'C'} \end{array}\right\} \Rightarrow y - \frac{2}{5}y_B = \frac{3}{2}\left(x - x_B + 2/15\, y_B\right) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x_B + 1/5\, y_B + 2/5\, y_B \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x_B + \frac{3}{5}y_B$$

$\overrightarrow{AC'} : y = 0$

$$\overrightarrow{B'C'} \cap \overrightarrow{AC'} = C' \Rightarrow \frac{3}{2}x_{C'} = \frac{3}{2}x_B - \frac{3}{5}y_B \Rightarrow \boxed{x_{C'} = x_B - 2/5\, y_B} \ ; \ \boxed{y_{C'} = 0}$$

$m_{AD'} = 3/2 \ \therefore \ \overrightarrow{AD'} : y = \frac{3}{2}x$

$\overrightarrow{B'D'} : y = 2/5\, y_B$

$$\overrightarrow{AD'} \cap \overrightarrow{B'D'} = D' \Rightarrow \frac{3}{2}x_{D'} = \frac{2}{5}y_B \Rightarrow \boxed{x_{D'} = \frac{4}{15}y_B} \ e \ \boxed{y_{D'} = \frac{2}{5}y_B}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{D'F} = 9/2 \\ D' \in \overrightarrow{D'F} \end{array}\right\} \Rightarrow y - 2/5\, y_B = \frac{9}{2}\left(x - 4/15\, y_B\right) \Rightarrow y = \frac{9}{2}x - \frac{6}{5}y_B + \frac{2}{5}y_B \Rightarrow y = \frac{9}{2}x - \frac{4}{5}y_B$$

$\overrightarrow{BF} : y = y_B$

$$\overrightarrow{D'F} \cap \overrightarrow{BF} = F \Rightarrow y_B = \frac{9}{2}x_F - \frac{4}{5}y_B \Rightarrow \frac{9}{2}x_F = y_B + \frac{4}{5}y_B \Rightarrow \frac{9}{2}x_F = \frac{9}{5}y_B \Rightarrow \boxed{x_F = \frac{2}{5}y_B} \ ; \ \boxed{y_F = y_B}$$

$m_{AE'} = \frac{9}{2} \ \therefore \ \overrightarrow{AE'} = \frac{9}{2}x$

$$\left.\begin{array}{l} m_{E'F} = \frac{3}{2} \\ F \in \overrightarrow{E'F} \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_B = \frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{5}y_B\right) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}y_B + y_B \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{2}{5}y_B$$

$$\overrightarrow{AE'} \cap \overrightarrow{E'F} = E' \Rightarrow \frac{9}{2}x_{E'} = \frac{3}{2}x_{E'} + \frac{2}{5}y_B \Rightarrow 3x_{E'} = \frac{2}{5}y_B \Rightarrow \boxed{x_{E'} = \frac{2}{15}y_B} \ e \ y_{E'} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{15}_{5}} y_B \Rightarrow \boxed{y_{E'} = \frac{3}{5}y_B}$$

Vide Verso

$$\left.\begin{array}{l} m_{BG} = \frac{3}{2} \\ B \in \overrightarrow{BG} \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_B = \frac{3}{2}(x - x_B) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x_B + y_B$$

$\overrightarrow{E'G} : y = \frac{3}{5} y_B$

$$\overrightarrow{C'G} \cap \overrightarrow{E'G} = G \Rightarrow \frac{3}{2}x_G - \frac{3}{2}x_B + y_B = \frac{3}{5}y_B \Rightarrow \frac{3}{2}x_G = \frac{3}{2}x_B + \frac{3}{5}y_B - y_B \Rightarrow$$

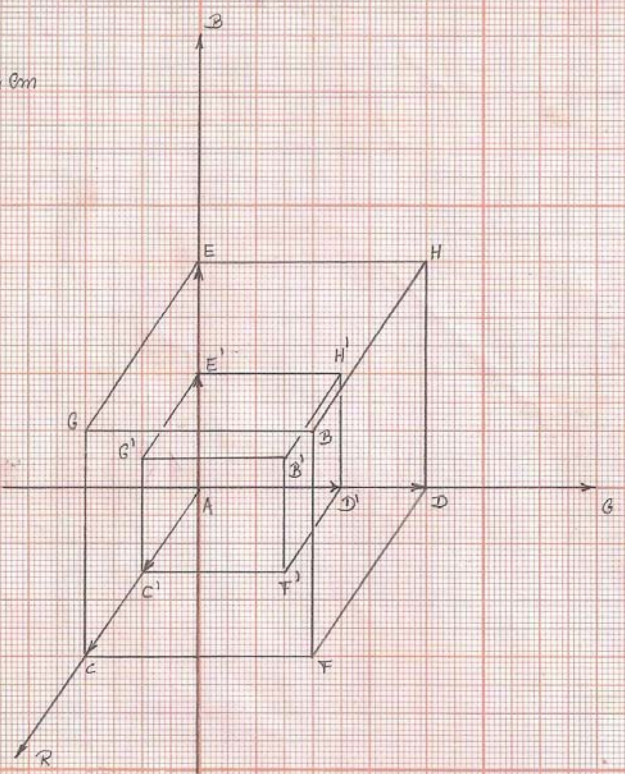
$$\Rightarrow \frac{3}{2}x_G = \frac{3}{2}x_B - \frac{2}{5}y_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_G = x_B - \frac{4}{15}y_B} \text{ e } \boxed{y_G = \frac{3}{5}y_B}$$

Apêndice B.4: Fórmulas matemáticas para a aplicação cubo de cores

• Aplicação (Cores: RGB)

1 u = 4 cm



$A(0,0)$

$B(2,1)$ $\quad B'\left(x_{D'}+\frac{2}{3}y_{C'},\ \frac{3}{2}x_{C'}+y_{E'}\right)$

$C(-2,-3)$ $\quad C'(x_{C'},\ y_{C'})$

$D(4,0)$ $\quad D'(x_{D'},\ 0)$

$E(0,4)$ $\quad E'(0,\ y_{E'})$

$F(2,-3)$ $\quad F'\left(x_{D'}+\frac{2}{3}y_{C'},\ y_{C'}\right)$

$G(-2,1)$ $\quad G'\left(x_{C'},\ \frac{3}{2}x_{C'}+y_{E'}\right)$

$H(4,4)$ $\quad H'(x_{D'},\ y_{E'})$

$\overrightarrow{D'F'}: m_{D'F'} = \frac{3}{2}$

$|\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{x_{C'}^2 + y_{C'}^2}$

$D' \in \overrightarrow{D'F'} \Rightarrow y = \frac{3}{2}(x - x_{D'}) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x_{D'}$

$\overrightarrow{C'F'}: y = y_{C'}$

$\overrightarrow{D'F'} \cap \overrightarrow{C'F'} = F' \Rightarrow x_{F'} = x_{D'} + \frac{2}{3}y_{C'}$

$\overrightarrow{E'G'}: m_{E'G'} = \frac{3}{2}$

$E' \in \overrightarrow{E'G'} \Rightarrow y - y_{E'} = \frac{3}{2}x \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + y_{E'}$

$\overrightarrow{C'G'}: x = x_{C'}$

$\overrightarrow{E'G'} \cap \overrightarrow{C'G'} = G' \Rightarrow y_{G'} = \frac{3}{2}x_{C'} + y_{E'}$

Obs.: Clicar e arrastar nos vetores cores

ANEXOS

ANEXO 1: A Avaliação Heurística[9] e as observações

Para melhor orientação na leitura dos resultados da Avaliação Heurística, nas Figuras abaixo, existem "balões" numerando cada problema identificado no *software*, tal que, serão apresentados em respectivos Quadros.

As observações feitas aos comportamentos dos alunos durante a interação da seção "Introdução" do *software*, estão descritas nos Quadros, relacionando-as com os problemas identificados na Avaliação Heurística.

O Quadro 1 apresenta a Avaliação Heurística da tela "Problema – três cantos I" apresentada na Figura 4.

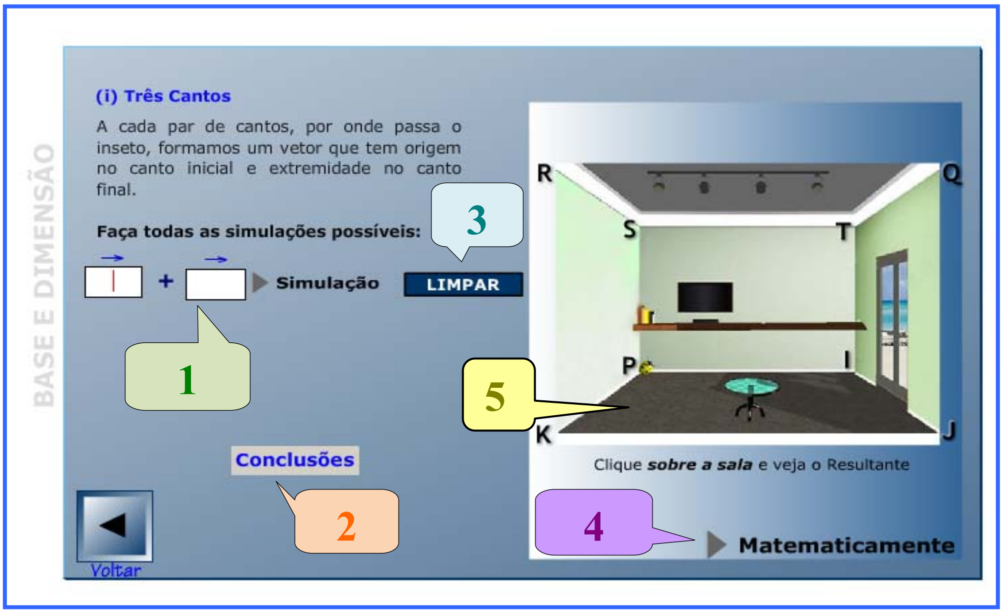


Figura 4: Tela do *software:* Problema – três cantos I
Fonte: *Software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

[9] Foram apresentados apenas os problemas de usabilidade considerados mais graves. O restante dessa Avaliação Heurística está resumido no Quadro 10.

PROBLEMA 1

Problema Identificado	Solução
Não tem *feedback* quando um aluno comete um erro.	Oferecer *feedback* à resposta errada.

Heurísticas Violadas: H_1
Nível de Gravidade: 3
OBS: Alguns alunos demonstraram expressão de confusão ao cometer um erro e não receber *feedback*.

PROBLEMA 2

Problema Identificado	Solução
O botão "Conclusões" está mal posicionado, não aproveitando o espaço que a tela oferece.	Posicionar o botão "Conclusões" mais na parte inferior. Assim, haverá mais espaço para outras informações.

Heurísticas Violadas: H_2
Nível de Gravidade: 1

PROBLEMA 3

Problema Identificado	Solução
O botão "Limpar" está mal posicionado, concorrendo inclusive com a opção "Simulação".	Esteticamente, o botão "Limpar" poderia ficar na parte inferior da resposta e oferecer maior destaque à opção "Simulação".

Heurísticas Violadas: H_2
Nível de Gravidade: 1

PROBLEMA 4

Problema Identificado	Solução
A opção "Matematicamente" ficou muito isolada e não expressa a sua funcionalidade.	Posicionar a opção "Matematicamente" próxima ao botão "Conclusões" ou ainda, substituí-la por uma pequena frase que seja mais significativa para o aluno, por exemplo: *Veja o modelo matemático de representação da sala.*

Heurísticas Violadas: H_2, H_5
Nível de Gravidade: 3
OBS: Alguns alunos não clicaram no botão Matematicamente por iniciativa própria. Foi necessária a orientação do professor.

PROBLEMA 5

Problema Identificado	Solução
Durante a animação do "inseto percorrendo a sala", não é permitida ao usuário a paralisação dessa animação.	Permitir que o usuário paralise a animação, caso seja necessário.

Heurísticas Violadas: H_6
Nível de Gravidade: 2
OBS: Foram poucos os alunos que, ao cometerem um erro, retornaram e fizeram a simulação novamente.

Quadro 1: Avaliação Heurística correspondente à Figura 4
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

O Quadro 2 apresenta a Avaliação Heurística da tela “Problema – três cantos II” apresentada na Figura 5.

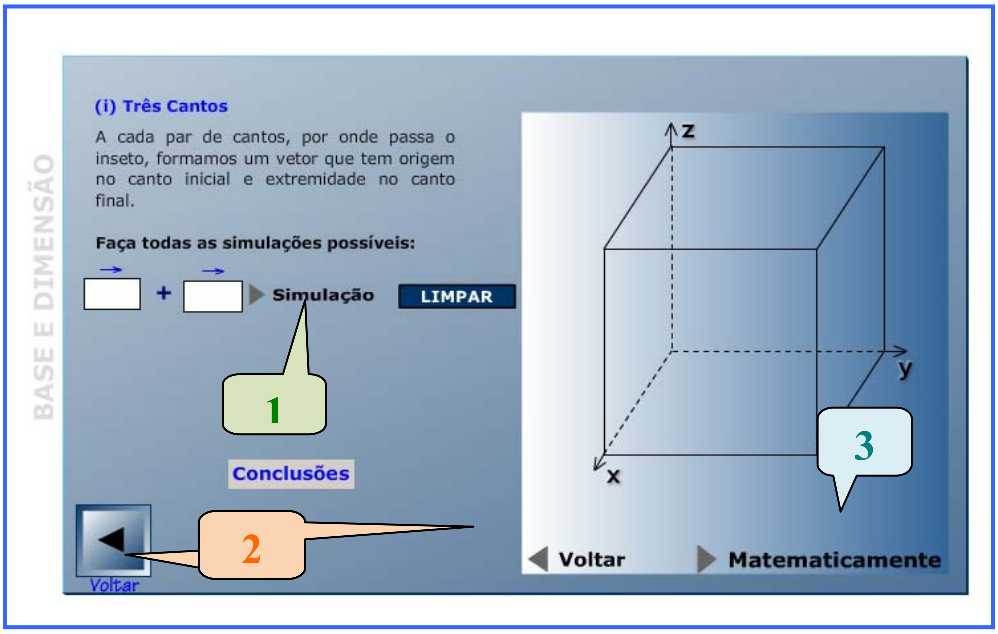


Figura 5: Tela do *software:* Problema – três cantos II
Fonte: *Software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

	Problema Identificado	Solução
PROBLEMA 1	A opção “Simulação”, nesta tela, não tem a função de simular o inseto andando na representação da sala.	Programar a opção para cumprir sua função.
	Heurísticas Violadas: H_7 **Nível de Gravidade:** 3	
	Problema Identificado	**Solução**
PROBLEMA 2	O *software* utiliza opções iguais para ações diferentes.	Substituir a opção “Voltar” para *“Visualização da Sala”*, por exemplo.
	Heurísticas Violadas: H_7, H_8 **Nível de Gravidade:** 3	
	Problema Identificado	**Solução**
PROBLEMA 3	Opção desnecessária, porque já estamos na tela “Matematicamente”.	Retirar esta opção.
	Heurísticas Violadas: H_7 **Nível de Gravidade:** 2	

Quadro 2: Avaliação Heurística correspondente à Figura 5
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

O Quadro 3 apresenta a Avaliação Heurística da tela “Problema – Conclusões” apresentada na Figura 6.

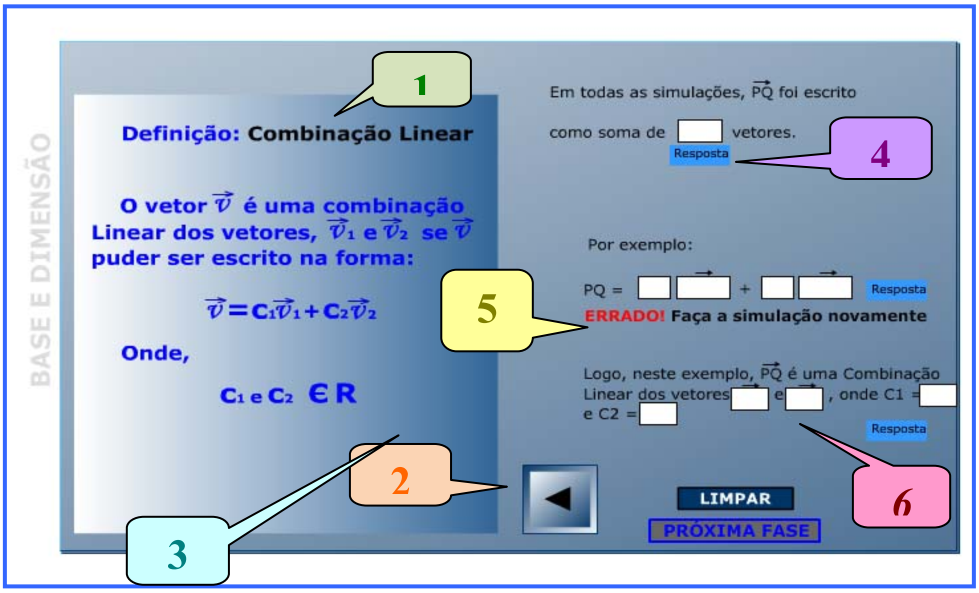


Figura 6: Tela do *software:* Problema – Conclusões
Fonte: *Software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

	Problema Identificado	Solução
PROBLEMA 1	O espaço não foi bem utilizado e as cores não proporcionaram um contraste leve e agradável.	Melhorar o espaçamento entre as frases. Podem-se mudar as palavras na cor preta para a mesma tonalidade
	Heurísticas Violadas: H_2 **Nível de Gravidade:** 1	
PROBLEMA 2	**Problema Identificado**	**Solução**
	O ícone "Voltar" mudou de localização.	Manter o ícone na mesma posição.
	Heurísticas Violadas: H_7 **Nível de Gravidade:** 2	
PROBLEMA 3	**Problema Identificado**	**Solução**
	Para desenvolver a atividade, é necessário que o aluno relembre detalhes da tela que contém o desenho que representa a sala.	Incluir na tela o desenho da sala, ou adicionar um ícone com a função de abrir outra tela com o desenho que representa a sala.
	Heurísticas Violadas: H_9 **Nível de Gravidade:** 3 **OBS:** Alguns alunos precisaram visualizar o desenho que representa a sala para desenvolver esta atividade.	

(conclusão)

	Problema Identificado	Solução
PROBLEMA 4	A localização dos botões "Resposta" não está padronizada.	Manter a localização dos botões no canto esquerdo da tela.
	Heurísticas Violadas: H_2, H_7 **Nível de Gravidade:** 1	
PROBLEMA 5	**Problema Identificado**	**Solução**
	A mensagem de erro é uma dica para o aluno simular novamente o inseto andando pela sala. No entanto, para desenvolver a simulação novamente, é necessário voltar a telas anteriores perdendo todo o desenvolvimento já feito até esta etapa.	Incluir "abas" ou ícones que ofereçam a possibilidade do aluno fazer a simulação sem precisar retornar e perder a atividade que já foi feita. Uma idéia é utilizar o *feedback* como opção para abrir a tela onde é desenvolvida a simulação.
	Heurísticas Violadas: H_4, H_6, H_{10} **Nível de Gravidade:** 3 **OBS:** Foram poucos os alunos que, ao cometeram um erro, retornaram e fizeram a simulação novamente.	
PROBLEMA 6	**Problema Identificado**	**Solução**
	Não é permitido comutar, o que obriga o aluno a usar exatamente a mesma ordem apresentada na definição.	Programar o *software* para aceitar comutação.
	Heurísticas Violadas: H_4, H_5, H_8, H_9, H_{11} **Nível de Gravidade:** 3	

Quadro 3: Avaliação Heurística correspondente à Figura 6
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

O Quadro 4 apresenta a Avaliação Heurística da tela “Atividade 1” apresentada na Figura 7.

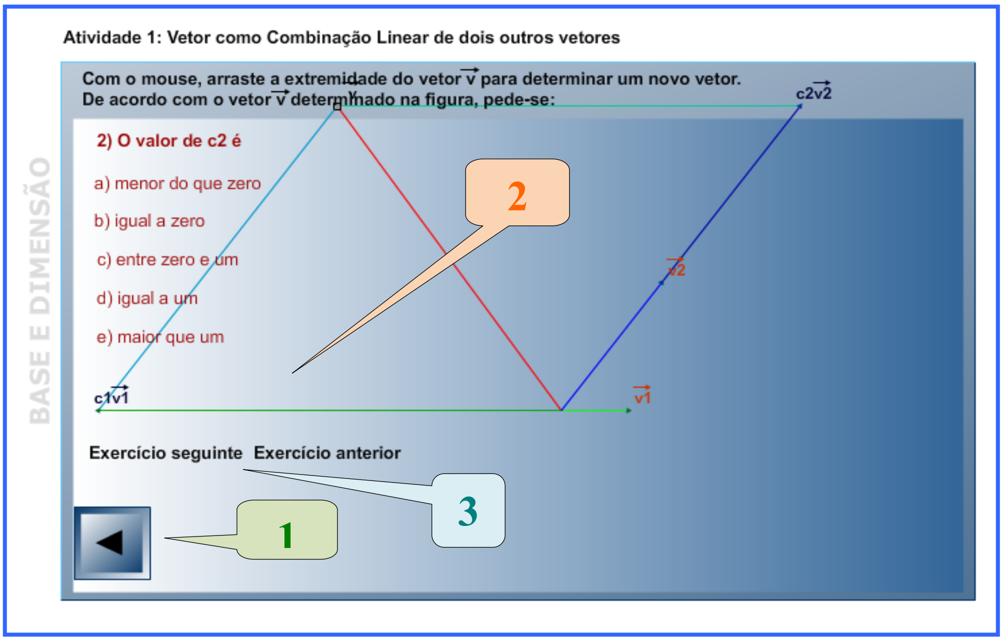


Figura 7: Tela do *software:* Atividade 1.
Fonte: *Software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

	Problema Identificado	Solução
PROBLEMA 1	O ícone “Voltar” retorna para a tela inicial.	Manter a função do ícone conforme telas anteriores, ou mudar o tipo do botão, informando que sua função é voltar para a tela inicial.
	Heurísticas Violadas: H_6, H_7 **Nível de Gravidade:** 3	
PROBLEMA 2	**Problema Identificado**	**Solução**
	O desenho não tem limite de espaço	Limitar o desenho ao espaço que foi reservado para ele.
	Heurísticas Violadas: H_2 **Nível de Gravidade:** 1	
PROBLEMA 3	**Problema Identificado**	**Solução**
	A ordem das opções não está relacionada com a prática do mundo real. Ainda, existe um rígido controle no percurso das entradas e saídas das atividades propostas.	Dispor as tarefas em *hiperlink*, oferecendo ao aluno a opção de clicar no lugar que ele quiser e uma melhor condução.
	Heurísticas Violadas: H_3, H_5, H_6 **Nível de Gravidade:** 3 **OBS:** Alguns alunos clicaram, por engano, em Exercício anterior.	

Quadro 4: Avaliação Heurística correspondente à Figura 7
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

O Quadro 5 apresenta a Avaliação Heurística da tela “Aplicação – Cubo de cores ” apresentada na Figura 8.

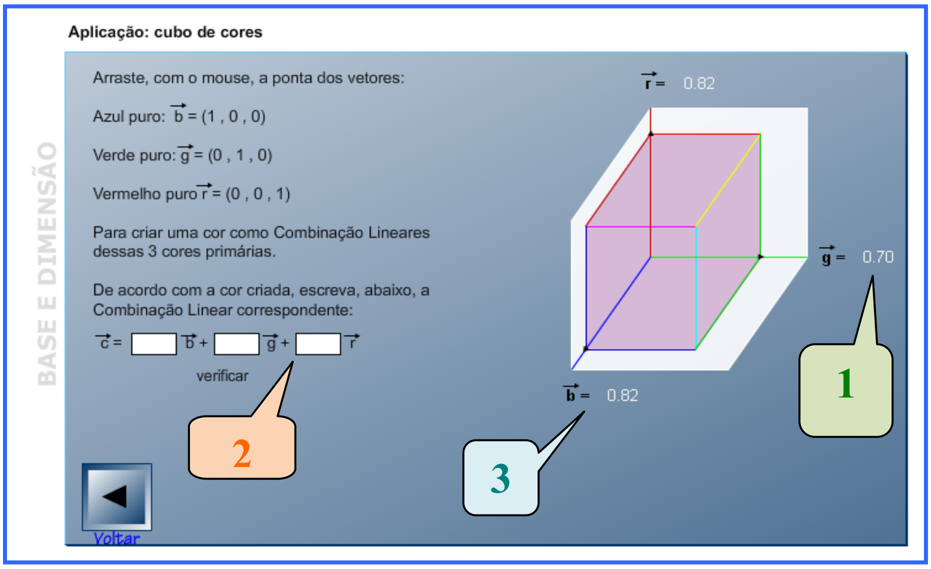


Figura 8: Tela do *software:* Aplicação – Cubo de cores
Fonte: *Software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

(continua)

	Problema Identificado	Solução
PROBLEMA 1	No enunciado da aplicação, $\vec{b}$, $\vec{g}$ e $\vec{r}$ são tratados como vetores. No entanto, próximo ao cubo de cores, $\vec{b}$, $\vec{g}$ e $\vec{r}$ são tratados como as constantes que representam seus coeficientes na combinação linear.	No cubo de cores, tratar $\vec{b}$, $\vec{g}$ e $\vec{r}$ como vetores, descrevendo suas componentes.
	Heurísticas Violadas: H_5, H_8, H_{11} **Nível de Gravidade:** 4	
PROBLEMA 2	**Problema Identificado**	**Solução**
	Ao digitar os decimais, aceita-se ponto e não se aceita vírgula.	Programar o *software* para aceitar as duas opções: vírgula ou ponto.
	Heurísticas Violadas: H_4, H_5, H_8 **Nível de Gravidade:** 3 **OBS:** Muitos alunos digitaram vírgula e questionaram o motivo do *feedback* de erro. Foi necessária a orientação do professor para que digitassem ponto e não vírgula.	

(conclusão)

	Problema Identificado	Solução
PROBLEMA 3	Não é possível retornar para $\vec{b}=(1,0,0)$.	Programar para que seja possível retornar ao vetor $\vec{b}$
	Heurísticas Violadas: H_{11} **Nível de Gravidade:** 3 **OBS:** Problema percebido também pelos alunos.	

Quadro 5: Avaliação Heurística correspondente à Figura 8
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

O Quadro 6 apresenta a Avaliação Heurística da tela “Programação - Equacionar ” apresentada na Figura 9.

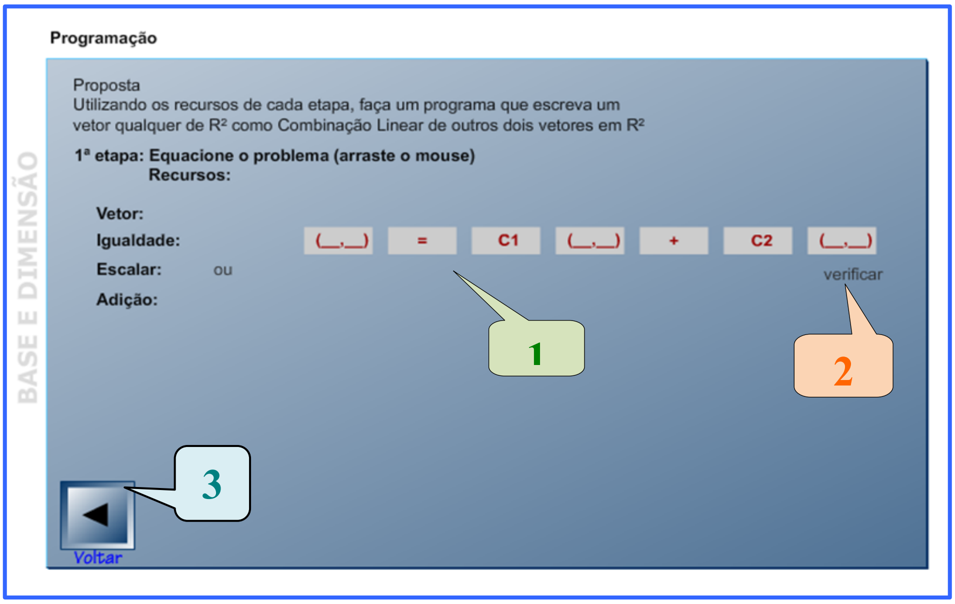


Figura 9: Tela do *software:* Programação - Equacionar
Fonte: *Software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

PROBLEMA 1

Problema Identificado	Solução
Não se aceita nenhum tipo de comutação, o que exige do usuário transcrever a definição tal como foi apresentada.	Programar o *software* para receber quaisquer comutações.
Heurísticas Violadas: H_5, H_8, $H_9 H_{11}$ **Nível de Gravidade:** 4 **OBS:** Alguns alunos comutaram a igualdade e, ao verificarem a resposta, o *feedback* era referente ao erro. Os alunos demonstraram expressão de confusão e solicitaram ajuda.	

(conclusão)

PROBLEMA 2

Problema Identificado	Solução
A opção “verificar” está em posição com pouco destaque.	Mudar a localização, o tamanho e a estética da opção. Por exemplo, colocá-la mais centralizada, abaixo da resposta, e colocar no formato de botão.
Heurísticas Violadas: H_2 **Nível de Gravidade:** 3	

PROBLEMA 3

Problema Identificado	Solução
Ausência da opção “limpar” (ou “desfazer”).	Incluir esta opção.
Heurísticas Violadas: H_4 H_6 **Nível de Gravidade:** 4 **OBS:** Muitos alunos demonstraram impaciência ao precisarem dessa opção.	

Quadro 6: Avaliação Heurística correspondente à Figura 9
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

O Quadro 7 apresenta a Avaliação Heurística da tela "Programação – Teste seu programa " apresentada na Figura 10.

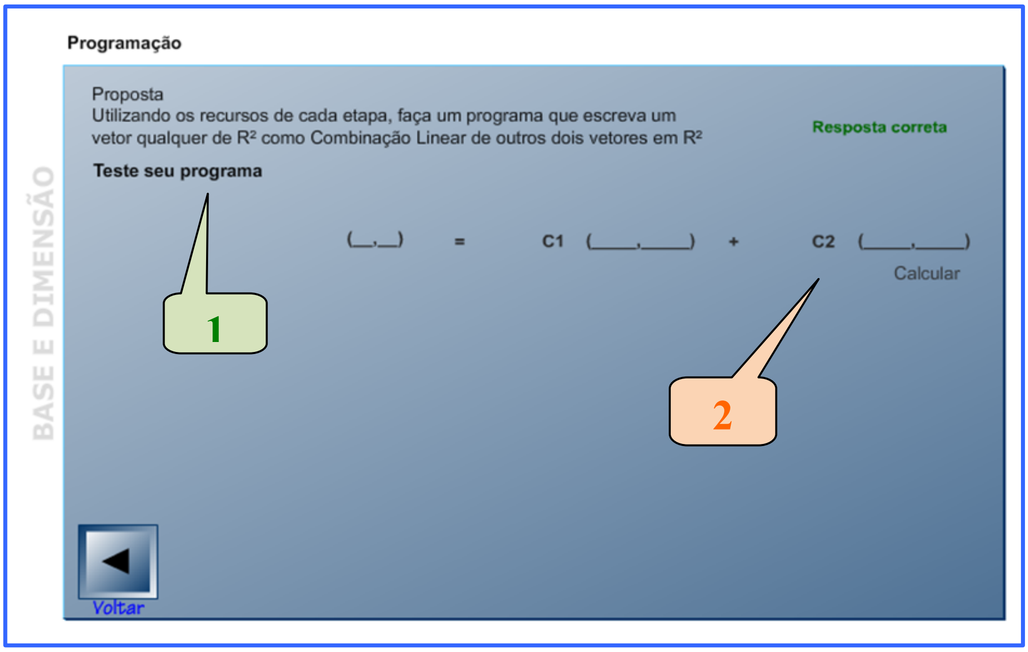


Figura 10: Tela do *software* - Teste seu programa
Fonte: *Software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

	Problema Identificado	Solução
PROBLEMA 1	O significado da informação "Teste seu programa" não está claro.	Alterar a frase, de forma que explique como se deve testar o programa.
	Heurísticas Violadas: H_5, H_{10} **Nível de Gravidade: 3** **OBS:** Muitos alunos não entenderam a informação "Teste seu programa". Destes, alguns testaram errado, outros solicitaram ajuda.	
PROBLEMA 2	**Problema Identificado**	**Solução**
	Se o aluno escolher vetores que não podem ser escritos como Combinação Linear do primeiro vetor escolhido, o *feedback* (NaN) não tem significado.	Alterar o *feedback* de forma que seja claro e tenha significado para a linguagem do aluno.
	Heurísticas Violadas: H_5, H_{10} **Nível de Gravidade: 4** **OBS:** Os alunos não compreenderam o *feedback* "NaN" e solicitaram ajuda.	

Quadro 7: Avaliação Heurística correspondente à Figura 10
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

O Quadro 8 apresenta a Avaliação Heurística da tela “Demonstração – Independência Linear I” apresentada na Figura 11.

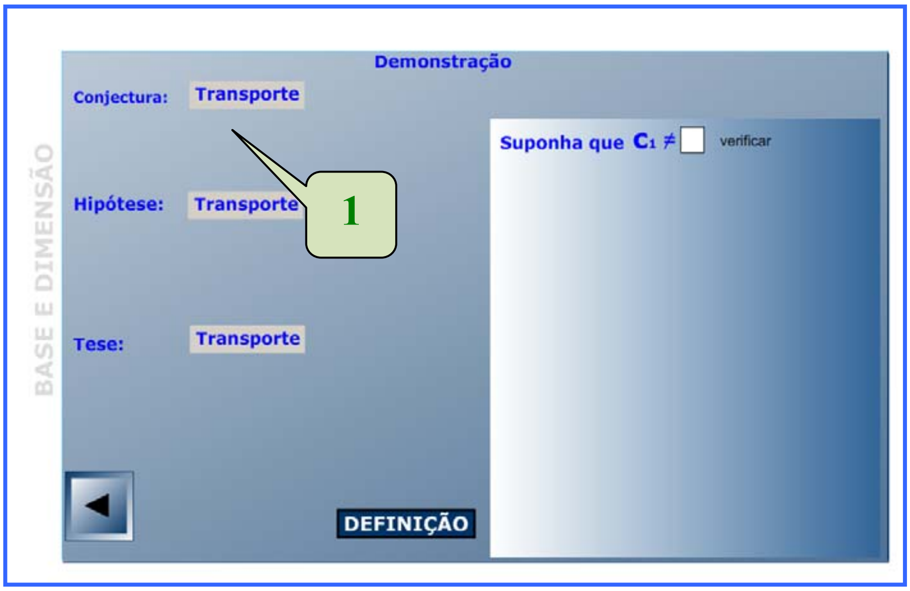


Figura 11: Tela do *software* - Demonstração – Independência Linear I
Fonte: *Software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

	Problema Identificado	Solução
PROBLEMA 1	Não está clara a funcionalidade do botão “Transporte”.	Trocar a palavra “Transporte” por “Visualizar a conjectura”, por exemplo.
	Heurísticas Violadas: H_5 **Nível de Gravidade:** 3 **OBS:** Muitos alunos não utilizaram o botão “Transporte”. Foi preciso orientá-los para que o fizessem.	

Quadro 8: Avaliação Heurística correspondente à Figura 11
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

O Quadro 9 apresenta a Avaliação Heurística da tela “Demonstração – Independência Linear II” apresentada na Figura 12.

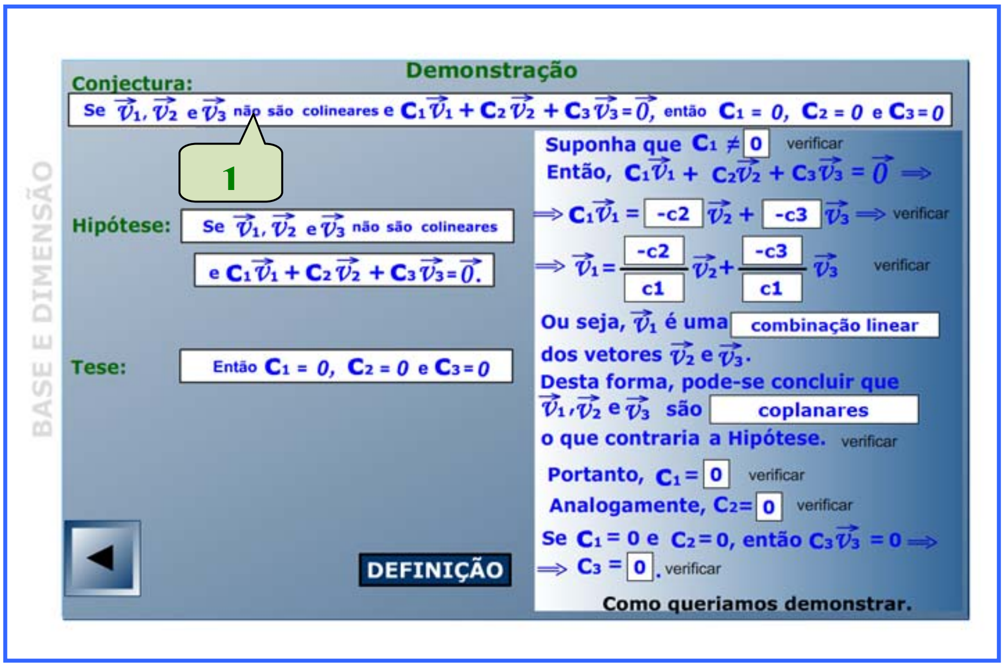


Figura 12: Tela do *software* - Demonstração – Independência Linear II
Fonte: *Software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

PROBLEMA 1

Problema Identificado	Solução
Na conjectura deve ser mencionado que os vetores pertencem ao R^3 e na hipótese os vetores devem ser não coplanares, ao invés de não colineares.	Alterar a conjectura e a hipótese.
Heurísticas Violadas: **H_{11}** **Nível de Gravidade:** **4** **OBS:** Muitos alunos foram influenciados pela conjectura e responderam incorretamente.	

Quadro 9: Avaliação Heurística correspondente à Figura 12
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

O Quadro 10 abaixo apresenta outros problemas de usabilidade identificados em outras telas do *software* com sugestões de solução.

Problema Identificado	**Solução**
O ícone "Voltar" é desproporcional à tela do *software*.	Melhorar a estética do ícone.
Os acessos aos tópicos não são padronizados.	Padronizar os acessos.
O *feedback* está ausente em algumas atividades.	Oferecer *feedback* às ações dos usuários.
Alguns botões "verificar respostas" não estão em destaque.	Dar mais ênfase aos botões.
Falta de padronização na estética de alguns botões.	Padronizar a estética.

Quadro 10: Problemas de usabilidade identificados
Fonte: Elaborada pela autora

O Quadro 11 apresenta uma lista de comportamentos dos alunos durante a interação da seção "Introdução" do *software*.

Satisfação diante de respostas corretas.
Solicitação de ajuda para compreender a multiplicação de vetores por escalares.
Impaciência quando o *software* considerava como "erro" uma expressão correta escrita em ordem diferente da apresentada na definição. Por isso, dentre os 39 alunos, 2 abandonaram o *software* antes do término da atividade.
Interesse de alguns alunos em continuar as atividades no *software* após a aula. (Dentre os 39 alunos, 7 continuaram as atividades, mesmo após a aula.)
Ajuda mútua, de maneira geral, no decorrer das atividades no *software*.
Dúvidas na resolução de Sistemas Lineares, tanto através da Regra de Cramer quanto por Escalonamento.
Impaciência quando se necessitava de retornar às telas do *software* para corrigir um erro e refazer toda a atividade.

Quadro 11: Comportamentos dos alunos durante a interação com o *software*
Fonte: Equipe de Avaliação do *SOFTWARE*.

ANEXO 2: Segunda atividade

1) A conjectura abaixo está correta? Caso afirmativo, demonstre-a. Caso contrário, faça as correções necessárias e demonstre-a.

Se $\overrightarrow{v_1}$ *e* $\overrightarrow{v_2}$ *não são colineares e* $c_1\overrightarrow{v_1} + c_2\overrightarrow{v_2} = \vec{0}$, *então* $c_1=0$ *e* $c_2=0$

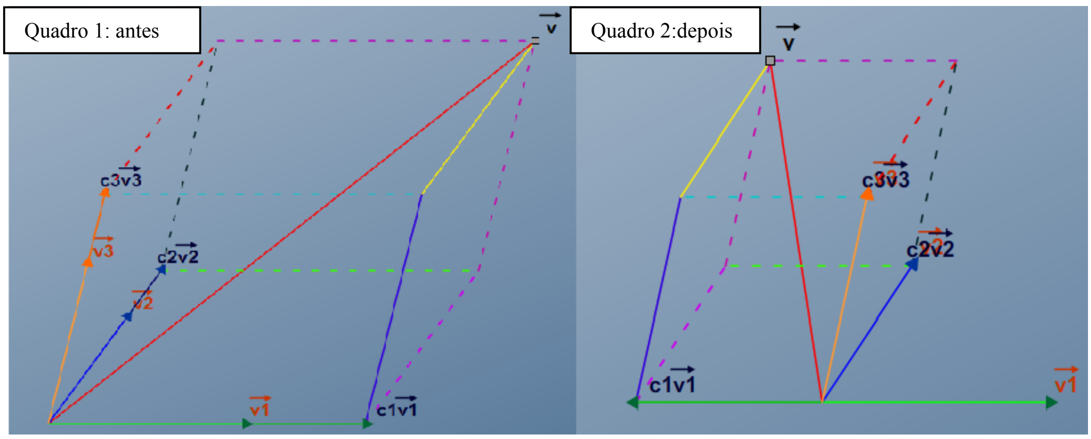
2) Verifique se $\vec{v}$ é Combinação Linear de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, tal que:

$\vec{v} = (32, -7)$, $\overrightarrow{v_1} = (7, 4)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1, 9)$.

3) Observe as representações geométricas no R^3 abaixo.

O vetor $\overrightarrow{v_1}$ *foi multiplicado por uma constante* c_1, *resultando num novo vetor* $c_1\overrightarrow{v_1}$.

O mesmo acontece com $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$.



Com base no Quadro 2, responda:

a) Atribua valores para c_2 e c_3. Quanto à constante c_1, o que você observa em relação ao seu possível valor? Por estimativa, atribua um valor para c_1.
b) Elabore uma Combinação Linear qualquer usando os valores de c_1, c_2 e c_3 atribuídos na letra (a) e faça a representação geométrica.
c) Verifique se os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ elaborados na letra (b), são Linearmente Independentes.

4) O que significa dizer que os polinômios p_1, p_2 e p_3 são Linearmente Dependentes?

5) Considere uma Combinação Linear $c_1\overrightarrow{v_1} + c_2\overrightarrow{v_2} = \vec{v}$, na qual $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$. Encontre os valores das constantes c_1 e c_2. Que relação existe entre $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$?