

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS**  
**Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática**

**Adriana Aparecida Pereira Rocha**

**CONSTRUÇÃO DE MANDALAS E O ENSINO DE GEOMETRIA**

**Belo Horizonte**

**2017**

**Adriana Aparecida Pereira Rocha**

**CONSTRUÇÃO DE MANDALAS E O ENSINO DE GEOMETRIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

**Orientadora:** Professora Dr<sup>a</sup> Eliane Scheid Gazire

**Belo Horizonte  
2017**

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

R672c	<p>Rocha, Adriana Aparecida Pereira Construção de mandalas e o ensino de geometria / Adriana Aparecida Pereira Rocha. Belo Horizonte, 2017. 195 f. : il.</p> <p>Orientadora: Eliane Scheid Gazire Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática</p> <p>1. Mandala. 2. Geometria. 3. Ensino - Meios auxiliares. 4. Matemática - Estudo e ensino. 5. Desenho geométrico. I. Gazire, Eliane Scheid. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.</p> <p>SIB PUC MINAS</p> <p>CDU: 513.1</p>
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Rosane Alves Martins da Silva – CRB 6/2971



**PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**ADRIANA APARECIDA PEREIRA ROCHA**

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof.ª Dr.ª Eliane Scheid Gazire - Orientadora - (PUC Minas)  
Doutorado em Educação - (UNICAMP)

Prof. Dr. Ronan Dare Tocafundo - (IFMG/Congonhas)  
Doutorado em Educação - (UFMG)

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda - (PUC Minas)  
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial - (PUC Minas)

Belo Horizonte, 17 de novembro de 2017.

Dedico este trabalho a minha família.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, pelo amor e cuidado proporcionado ao longo da minha vida.

Aos meus pais que me oportunizaram o privilégio de viver.

A minha família, em especial a meu marido e meus filhos, pelo amor e apoio incondicional nos momentos difíceis.

A todos que, de alguma forma, incentivaram-me e auxiliaram-me a trilhar meu caminho, e a concluir esse trabalho.

À professora Dra. Eliane Scheid Gazire, pela paciência, dedicação e incentivo em tornar essa jornada possível.

Aos professores do mestrado: Dr. Dimas, Dra. Maria Clara, Dra. Eliane e Dr. João Bosco, por todo conhecimento compartilhado e por representarem uma possibilidade de se fazer uma educação de qualidade.

Aos alunos que participaram deste trabalho e se fizeram muito mais que participantes da pesquisa.

Ao Colégio Sagrado Coração de Maria, por oportunizar a execução da mesma.

*Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender.*

*[...] Ensinar inexistente sem aprender e vice-versa e foi aprendendo socialmente que, historicamente, mulheres e homens descobriram que era possível ensinar. Foi assim, socialmente aprendendo, que ao longo dos tempos mulheres e homens perceberam que era possível – depois, preciso – trabalhar maneiras, caminhos, métodos de ensinar.*

(FREIRE, 1996, p.12)

## RESUMO

Esta pesquisa, elaborada numa perspectiva qualitativa, buscou, através de estratégias inovadoras, promover a construção de Mandalas Geométricas como um recurso didático nas aulas de geometria. O estudo foi realizado em uma escola particular de Belo Horizonte – MG. O trabalho realizado tem, por objetivo, procurar contribuir na evolução dos alunos no que tange ao conhecimento matemático, mais especificamente ao conhecimento e desenvolvimento de saberes geométricos, bem como a apropriação e aprimoramento de habilidades e competências matemáticas num âmbito maior. Entendendo a dificuldade dos alunos em lidar com a geometria, foi realizada uma revisão da literatura baseada, principalmente, nos trabalhos de Boyer (1974), Eves (2004), Gazire (2000), Lorenzato (2006), Nacarato (2005), Pais (1996), Pavanello (1989), no que tange ao desenvolvimento da geometria bem como ao do pensamento geométrico. Além disso, acerca da utilização de mandalas como recurso didático, foram pesquisados os autores Yamada (2013), Ramos (2016), Nascimento, Benutti e Neves (2007), que acreditam na viabilidade de resgatar “novas” possibilidades educativas nas aulas de geometria. Tem-se, para tanto, como procedimento de coleta de dados, a utilização de recursos didáticos diversos, a observação do trabalho realizado junto aos alunos e a associação com uma atividade intelectual compatível à idade dos sujeitos. O produto final gerado por essa pesquisa dirigiu-se aos professores da Educação Básica e se constituiu na formulação de um caderno de atividades, buscando possibilitar a construção e o desenvolvimento de saberes matemáticos não só para a vida acadêmica, mas para uma leitura crítica, refinada, efetiva e dinâmica do espaço.

**Palavras-chave:** Mandalas. Geometria. Recurso didático. Educação Matemática.

## ABSTRACT

This research, elaborated in a qualitative perspective, sought, through innovative strategies, to promote the construction of Geometric Mandalas as a didactic resource in geometry classes. The study was carried out in a private school in Belo Horizonte - MG. This essay aimed, as objective, to contribute to students improvement in the field of Mathematics Knowledge, more specifically in regard of understanding and development of geometric concepts as well as in terms of enhancement of mathematical skills and competences in a major purpose. In order to understand the difficulty of students in dealing with geometry, a review of the literature was performed based mainly on Boyer (1974), Eves (2004), Gazire (2000), Lorenzato (2006), Nacarato (1996), Pavanello (1989), regarding the development of geometry as well as the geometric thinking. Furthermore, referred to the application of mandalas as didactic resources, a large number of researches were used from authors such as Yamada (2013), Ramos (2016), Nascimento, Benutti and Neves (2007), who investigated the feasibility of rescuing "new" educational possibilities in geometry classes. As data collection procedures, this present study used different didactic resources, the observation of the work performed with the students and the association with an intellectual activity compatible with the students ages. The final product generated by this research was directed to teachers of Basic Education and was constituted in the formulation of a book of activities, seeking to enable the construction and development of mathematical knowledge not only for academic life, but also for a critical, refined reading, effective and dynamic space.

Keywords: Mandalas. Geometry. Didactic resource. Mathematical Education.

## **LISTA DE SIGLAS**

MEC	Ministério da Educação e Cultura
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - Manifestações naturais.....	27
QUADRO 2 - Exemplos de manifestações acidentais .....	28
QUADRO 3 - Exemplos de manifestações artesanais.....	29
QUADRO 4 - Manifestações sistemáticas.....	30
QUADRO 5 - Atividades realizadas na pesquisa.....	57
QUADRO 6 - 1ª etapa da pesquisa .....	66
QUADRO 7 - Registros dos alunos acerca da ideia dos entes primitivos da Geometria .....	70
QUADRO 8 - Um mundo de formas .....	75
QUADRO 9 – Atividade aplicada na pesquisa .....	88
QUADRO 10 – Proposta para a 2ª etapa da pesquisa: .....	91
QUADRO 11 - Atividade aplicada na pesquisa .....	95
QUADRO 12 – Questionário aplicado na pesquisa .....	98
QUADRO 13 – Registros acerca das construções geométricas com utilização dos instrumentos do desenho geométrico.....	102
QUADRO 14 - Mandalas Humanas formadas pelos alunos .....	109
QUADRO 15 - Construindo com o Geogebra no laboratório de informática .....	115
QUADRO 16 – Encontros da Mostra Cultural .....	118
QUADRO 17 – Material apresentado na mostra cultural .....	120

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Corda cheia de nós .....	23
FIGURA 2 - Corda para construção de ângulo reto .....	23
FIGURA 3 – Grafismo em braço de Índio Pataxó .....	25
FIGURA 4 - Esquema das manifestações geométricas .....	26
FIGURA 5 – Definindo os entes primitivos.....	72
FIGURA 6 – Registrando as formas geométricas no interior da escola .....	74
FIGURA 7 – Texto apresentado aos alunos .....	80
FIGURA 8 - Introdução ao assunto.....	83
FIGURA 9 - Atividade aplicada na pesquisa .....	84
FIGURA 10 - Atividade aplicada na pesquisa .....	86
FIGURA 11 - Atividade aplicada na pesquisa .....	87
FIGURA 12 - Mandalas Geométricas apresentadas aos alunos .....	93
FIGURA 13 - Atividade aplicada na pesquisa .....	94
FIGURA 14 – Mandalas Geométricas .....	105
FIGURA 15 – Manipulando os instrumentos do desenho geométrico.....	106
FIGURA 16 - Colorindo as Mandalas Geométricas .....	107
FIGURA 17 - Socialização durante o trabalho .....	107
FIGURA 18 - Mandalas Geométricas construídas com o <i>software</i> GeoGebra.....	117
FIGURA 19 - Painel de Mandalas Geométricas.....	119
FIGURA 20 – Livro para colorir Mandalas Geométricas .....	121
FIGURA 21 - Interação dos visitantes com o trabalho .....	122
FIGURA 22 – As Mandalas Geométricas tomam novos espaços .....	123

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>13</b>
<b>2 DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO GEOMÉTRICO COM ATIVIDADES ALTERNATIVAS: UTILIZAÇÃO DA MANDALA COMO RECURSO GEOMÉTRICO</b> .....	<b>17</b>
2.1 O desenvolvimento da Geometria.....	17
2.2 O desenvolvimento do pensamento geométrico .....	31
2.2.1 <i>Os materiais didáticos</i> .....	35
2.3 A mandala como construção geométrica de padrão .....	49
<b>3 TRAJETÓRIA DA PESQUISA</b> .....	<b>53</b>
3.1 O contexto da pesquisa .....	54
3.2 A realização da pesquisa.....	56
<b>4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS ENCONTROS</b> .....	<b>65</b>
4.1 1ª Etapa: Identificação dos conceitos geométricos trazidos pelos alunos .65	
4.1.1 1º encontro: <i>Conversa Informal</i> .....	67
4.1.2 2º encontro: <i>Os entes primitivos</i> .....	69
4.1.3 3º encontro: <i>Explorando os espaços da escola</i> .....	73
4.1.4 4º encontro: <i>Um pouco da história do antigo Egito</i> .....	79
4.1.5 5º encontro: <i>A ideia de reta, suas partes e suas posições relativas no plano.</i> .....	82
4.1.6 6º encontro: <i>Investigando os ângulos</i> .....	84
4.1.7 7º encontro: <i>Identificação e medição de ângulos retos</i> .....	86
4.2 2ª Etapa: Proposta para os alunos de construção de Mandalas Geométricas .....	90
4.2.1 1º encontro: <i>Apresentação das Mandalas</i> .....	92
4.2.2 2º encontro: <i>Atividade corporal</i> .....	94
4.2.3 3º encontro: <i>Construção das Mandalas Geométricas com o recurso do desenho geométrico</i> .....	97
4.2.4 4º encontro: <i>Construção das Mandalas Humanas</i> .....	108
4.2.5 5º encontro – <i>Construção das Mandalas com o software Geogebra</i> .....	114
4.3 3ª Etapa: Exposição do projeto Mandalas na Mostra Cultural.....	118
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>125</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>127</b>
<b>APÊNDICE A – CARTILHA PRODUZIDA</b> .....	<b>128</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Diferentes autores (D'AMBRÓSIO, 1997; GARCIA, 2011; FIORENTINI, 2013; NACARATO, 2006) mostram que é através de um processo reflexivo e investigativo, mediado por aportes teóricos, que o professor se forma e constitui-se profissional, ainda que esse seja um processo sempre inacabado. Investigar a própria prática é um desafio tanto para o professor da escola quanto para o professor formador de professores, pois envolve o desenvolvimento de um novo modelo teórico-metodológico de investigação.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), a construção do pensamento geométrico deve ocorrer ao longo da Educação Básica e a geometria não deve ser considerada um conteúdo estanque, independente, separado da Matemática, pois é fato que a geometria oferece um vasto e fértil campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização.

O estudo da Geometria também ativa estruturas mentais, possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. Logo, é tema integrador entre os diversos ramos da Matemática, bem como campo propício para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar.

A busca incessante por uma educação de qualidade, aliada ao desejo de contribuir cada vez mais para que os alunos tenham uma aprendizagem permeada por experiências e as reflexões advindas das leituras de estudiosos (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; GRAVINA et al, 2006) da área culminaram na elaboração desse trabalho, bem como o desenvolvimento das questões que o permeiam:

Como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos?

Que aporte teórico poderia sustentar essa proposta de ressignificação desses conceitos geométricos?

A construção de Mandalas Geométricas favoreceria a construção do pensamento geométrico e o tornaria significativo?

Nosso fascínio em trabalhar com as construções de Mandalas Geométricas durante as aulas de geometria nos acompanha desde a adolescência. Foi nessa

época que fomos apresentados aos instrumentos e ao desenho geométrico. Primeiro veio o encanto com as formas e cores e, mais tarde, com a percepção e constatação de quão diferença esse raciocínio propiciou ao meu desenvolvimento espacial, sensorial e matemático.

O termo Mandala tem sua origem em uma palavra em sânscrito que significa “círculo, centro, circunferência” e apresenta algumas figuras geométricas inscritas. Tais figuras são constituídas por segmentos de retas e arcos que partem de pontos correspondentes à divisão igualitária da circunferência. Desse modo, acreditamos que tal construção poderá apresentar-se como um grande potencial na construção e desenvolvimento de saberes geométricos, além de propiciar aos alunos uma atividade lúdica e de interação com a disciplina e com o grupo que está inserido.

Diante de tal problemática acerca do ensino/aprendizagem da Matemática, e em especial, ao ensino da Geometria, acreditamos que se fazem latentes outras perguntas: será que os recursos didáticos não poderão ser utilizados como elementos para auxiliar a aprendizagem da Geometria? Em caso afirmativo, quais recursos seriam mais eficazes e atrativos para se estudar Geometria no século XXI? Como usar a tecnologia para facilitar e ressignificar conceitos geométricos? A construção de Mandalas Geométricas pode se configurar como um recurso didático nas aulas de Geometria?

Perpassando por todas essas indagações, a pesquisa realizada tentou elucidar e contribuir com os docentes da área, procurando promover não só a construção e aprimoramento de conceitos geométricos básicos, mas, também, de ressignificá-los.

Para que se obtivessem respostas às questões colocadas, foi realizado um minucioso estudo acerca de qual bibliografia seria conveniente. Desse modo, procuramos conhecer e nos apropriar das ideias de vários estudiosos no que tange à aprendizagem da Geometria e como se dá a construção e o desenvolvimento do pensamento geométrico. Nessa busca, percebemos que várias pesquisas enfatizam alguns recursos didáticos, e outras, utilizavam recursos variados. Comungando das atitudes e ideias desses autores e embasados em nossa prática docente de também utilizar diversificados recursos didáticos, que acreditamos serem fundamentais para o processo de ensino e aprendizagem, optamos em elaborar atividades exploratórias e investigativas que possibilitem a construção e a ressignificação de conceitos geométricos básicos. A manipulação de materiais concretos e as construções geométricas tanto com os instrumentos do desenho geométrico tanto com *softwares*

de Geometria dinâmica, se configuraram em uma prática comum durante todo o processo da pesquisa. Dentre os autores escolhidos, Serrazina (1999) ressalta a importância de se trabalhar com essa diversidade de recursos durante as aulas de matemática: “O desenho, a manipulação e a construção no computador de objetos geométricos permitem a exploração de conjecturas e a investigação de relações.”

Lorenzato (2006) também nos assegura tal tomada de atitude, ao reforçar que a ausência de materiais didáticos pode atrasar o desenvolvimento intelectual do aluno. Desse modo, cabe ao professor se planejar e sempre se questionar sobre a verdadeira intenção da utilização deste ou daquele material a ser utilizado. O mesmo autor também sugere que sendo o material uma novidade aos alunos, é pertinente que se dê um tempo a eles para que possam explorá-lo livremente em um primeiro contato. A troca de ideias, de raciocínios, de ações e de conclusões, num momento posterior pelo grupo também é de grande importância na elaboração e construção do processo. Decorrentes das atividades concretas e abstratas realizadas pelos alunos, o registro e a verbalização se configura em outra etapa de suma importância para a apropriação e o aprimoramento de novos saberes.

Assim, a fim de responder tais questões que nortearam esta pesquisa, delimitam-se as seguintes etapas de procedimento:

- 1ª etapa: Identificação dos conceitos geométricos trazidos pelos alunos;
- 2ª etapa: Proposta para os alunos de construções de Mandalas Geométricas;
- 3ª etapa: Exposição das Mandalas Geométricas como culminância de mostra cultural.

Desse modo, respaldada pela experiência em sala de aula e procurando responder algumas inquietações referentes ao fracasso escolar e à distância que se evidencia entre os processos de ensino e de aprendizagem, organiza-se a presente pesquisa em seis capítulos descritos a seguir:

Neste primeiro capítulo – Introdução – apresenta-se a trajetória da pesquisadora, bem como as razões que levaram a optar por essa linha de pesquisa.

No segundo capítulo – O Pensamento Geométrico – é realizada uma revisão da literatura que busca fornecer embasamento teórico para essa pesquisa acerca do desenvolvimento da geometria e do pensamento geométrico. Além disso, estuda-se a Mandala como um recurso didático nas aulas de geometria, indicando sua história e algumas possíveis contribuições com sua construção durante as aulas de geometria.

No terceiro capítulo – A Trajetória da Pesquisa – descrevem-se a metodologia adotada bem como o Projeto Mandalas, o delineamento dos participantes e os instrumentos para a coleta e análise dos dados.

O quarto capítulo - Descrição e Análise dos Encontros – apresentam-se os encontros e as análises de cada um.

Já no quinto capítulo – O Caderno de Atividades – configura-se o produto final exigido pelo Mestrado Profissional, que tem, como objetivo, disponibilizar para os professores da Educação Básica uma sequência de atividades que busquem proporcionar aos alunos a construção e apropriação de uma Geometria significativa.

No sexto capítulo – Considerações Finais – destacam-se os resultados da pesquisa realizada, bem como as potencialidades do atual trabalho. Seguem-se a esse as referências utilizadas no decorrer deste trabalho, e os apêndices, onde se encontra, também o produto dessa pesquisa.

## 2 DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO GEOMÉTRICO COM ATIVIDADES ALTERNATIVAS: UTILIZAÇÃO DA MANDALA COMO RECURSO GEOMÉTRICO

*A verdadeira viagem do descobrimento não consiste em buscar novas paisagens, mas em ver as coisas com outros olhos.*

**Marcel Proust**

Acredita-se que pesquisar sobre o desenvolvimento da geometria sob uma visão histórica e sob uma visão cognitiva, é de fundamental importância para esse trabalho. Assim, nessa fase da pesquisa busca-se construir um referencial teórico que oriente em tais questões. Em um primeiro momento, preocupa-se em discorrer, em parte, sobre o desenvolvimento da geometria e, em um momento posterior, sobre como o desenvolvimento do pensamento geométrico se dá por parte dos estudantes. Ao final procura-se perceber a Mandala como possibilidade de estratégia durante as aulas de geometria.

### 2.1 O desenvolvimento da Geometria

No que se refere à arte rupestre, Oleques (2017) informa que homens e mulheres primitivos que viviam essencialmente da caça, acreditavam que as imagens que desenhavam eram poderosas. Imaginavam que ao criarem imagens de suas presas em situações de caça, o êxito no mundo real para tal empreendimento seria inevitável. Desse modo, tais criações poderiam servir como uma espécie de magia para uma caça bem-sucedida. Porém, é difícil afirmar que o verdadeiro propósito e função dessas imagens, não desmerecendo as valiosas informações que elas trazem acerca da cultura e do modo de vida dessas civilizações, era realmente esse. O fato é que os nossos ancestrais eram dotados de uma capacidade simbólica, intelectual e artística bem parecida com a do homem contemporâneo.

Para Boyer (1974), os desenhos e figuras do homem neolítico sugerem uma preocupação com relações espaciais, as quais abriram caminho para a geometria. É fato que desde os tempos mais remotos, observar e tentar reproduzir o mundo à sua

volta através de desenhos parece uma prática bem comum ao homem. Comparar formas parece estar no DNA humano.

Em conformidade com esse pensamento Gazire (2000, p. 43) diz que:

Evidentemente são da natureza as primeiras manifestações de formas. Embevecido nesse verdadeiro mundo de formas e tendo os sentidos que tem e as razões que usa, seria inevitável que o homem nelas reparasse. Pelos mesmos motivos, seria normal que alguém observasse pontos comuns nessas formas e, de posse desses pontos comuns, que se descobrisse um padrão. Encontrado esse padrão, será que ele deixaria de comunicar aos demais essa curiosidade? É provável, então, que, a partir daí, procurasse-se registrar, reproduzir ou até modificar o padrão descoberto. Chegado a esse ponto, o homem então se encaminhava para o “mundo geométrico”.

Nesse contexto, depois de acumular, por vários séculos, uma gama invejável de experiências em padrões, regras e aplicações o homem fatalmente iria procurar sistematizar todo esse conhecimento adquirido. O início dessa sistematização aconteceu na Grécia antiga, a qual se tornou o berço da geometria formal.

Eves (2004, p.22) também relata que

Os primeiros povos viviam da caça de pequenos animais selvagens e das frutas, castanhas e raízes que colhiam. [...] Eram nômades e constantemente se deslocavam de um lugar para outro à procura de alimento e em resposta às mudanças climáticas. Tudo tinha que ser adaptar à caça: seus instrumentos de pedra, madeira, osso e carapaça de animais eram desenhados ou para a caça ou para a preparação de alimentos. [...] Sua arte retratava cenas de caçadas.

O mesmo autor nos esclarece que mesmo dotado de inteligência, durante a Idade da Pedra, esses caçadores, pouco avançaram científica e tecnologicamente. Porém, por volta de 20 000 a. C. já haviam desenvolvido uma cultura complexa que incluía a confecção de ferramentas, linguagem, religião, arte, música e comércio. Percebe-se também nesse período que os progressos na Matemática e na ciência eram impossibilitados pelas estruturas social e econômica vigente. Outro aspecto a ser considerado é que por se tratarem de caçadores e não agricultores, essa população tinha que se deslocar em consonância com as estações e com o sazonalidade de frutas e castanhas. Desse modo, só tinham condições de levar consigo ferramentas pequenas, fáceis de transportar, roupas e objetos pessoais. Não havia lugar, nessa sociedade, para o volumoso equipamento necessário para fundir metais nem para as proporções de uma biblioteca. Assim, as ferramentas metálicas e a linguagem escrita não se desenvolveram.

Somente no último milênio da Idade da Pedra, durante o período Neolítico, a humanidade passou do estágio de uma colheita simples e natural de frutas silvestres, castanhas, raízes e vegetais para o de efetivamente plantar sementes e colher a própria safra.

Após 3000 a.C., emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio e ao longo do rio Amarelo na China. Tais comunidades criaram culturas nas quais a ciência e a Matemática, começam a se desenvolver. Segundo Pavanello (1989, p.22),

A introdução da agricultura dá origem ao desenvolvimento de uma série de novas técnicas, não só daquelas diretamente ligadas ao cultivo das plantas e aos processos de preparação dos alimentos delas derivados, como também das geradas pela mudança no modo de vida.

Medir o comprimento, a área ou o volume de alguns objetos também tornou-se necessário no dia a dia dessas comunidades. Os padrões eram em geral, grosseiros. Utilizavam de partes do corpo humano para tais realizações, surgindo assim unidades de medidas como o pé, o passo, o palmo, a polegada e outros. Tais padrões seriam considerados posteriormente como geométricos. A pintura das cerâmicas, o entrelaçamento de juncos, a tecelagem de cestos, a fabricação de metais, sugerem a indução de várias ideias geométricas como as de simetria, de curva e de plano, e, como não poderia deixar de ser, das relações espaciais. Em consonância, Pavanello (1989, p.22), citando Bernal (1975, p.95-97), assegura que,

Uma técnica de construção mais avançada surge com a ocupação mais permanente do território, induzida pela agricultura, provoca a necessidade de abrigar homens, animais e alimentos; a técnica da tecelagem se desenvolve graças à abundância de materiais como a lã, o linho, o vime, atendendo às necessidades de vestuário e de armazenagem de alimentos. “Uma e outra contribuem para o desenvolvimento da geometria, em especial a tecelagem, visto que as formas dos padrões nela produzidos e o número de fios necessários para produzi-los são de natureza essencialmente geométrica”. (Bernal, 1975; 95/97). A análise da arte de tecer vai proporcionar uma maior compreensão das relações existentes entre forma e número, deixando assim patente uma ligação entre geometria e aritmética.

A Matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e tal embasamento surge com a evolução da sociedade. Segundo Eves (2004, p.57):

Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Ganges no sul da Ásia Central e o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental.

O controle de inundações e a irrigação realizados com a drenagem dos pântanos viria a possibilitar a transformação das terras ao longo desses rios em regiões propícias a ricas agriculturas. Projetos extensivos dessa natureza eram usados não só para ligar localidades antes separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da matemática concomitante. Desse modo, pode-se afirmar que a Matemática primitiva se originou em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente, como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Tais atividades necessitavam da organização de um calendário utilizável, do desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, da criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e da instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas para propósitos mercantis. Dessa necessidade de organizar o calendário, desenvolveria a astronomia e, portanto, a geometria.

Segundo Pavanello (1989, p.24), a confecção de um calendário ocupou gerações de sábios (sacerdotes) dessas civilizações, acabando os egípcios por adotar um calendário solar, baseado em observações prolongadas e cuidadosas do sol e das estrelas. Aos sumérios e seus sucessores, caberia uma tarefa muito mais difícil: a de conciliar o calendário lunar ao calendário solar. Muito conhecimento geométrico empírico resultou desse empreendimento, pois até hoje usasse para medir ângulos (e o tempo) o mesmo sistema sexagesimal utilizado na Mesopotâmia há milhares de anos.

Nesse contexto, a astronomia teve outra aplicação quando, com a navegação evolui dos rios para o mar e se impõe a necessidade de se desenvolver métodos de orientação tanto pelo sol quanto pelas estrelas, fato esse que decorre a ideia de mapa. Nasce, assim, a cartografia, na qual são aplicados vários conhecimentos geométricos.

É fato que a ênfase inicial da Matemática aconteceu na aritmética e na mensuração prática. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo,

aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, foram desenvolvidas tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evoluiu a partir da aritmética e a geometria teórica originou-se das mensurações já citadas.

A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. Infere-se que os babilônios do período 2000 a.C a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Considerava-se uma circunferência como sendo o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva (regras corretas para  $\pi = 3$ ) e se obtinha o volume de um cilindro circular reto como o produto da base pela altura. O volume de um tronco de cone e o de um tronco de pirâmide quadrangular regular era calculado de maneira errada como sendo o produto da altura pela semissoma das bases. Os babilônios também tinham o conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular, baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto. O teorema de Pitágoras também era conhecido. Existe ainda, uma tábua recentemente descoberta na qual se usa  $3\frac{1}{8}$  como estimativa para  $\pi$ .

A principal marca da geometria babilônica é seu caráter algébrico. Os problemas mais intrincados expressos em terminologia geométrica são, na sua essência, problemas não triviais de álgebra.

Sem sombras de dúvidas, deve-se aos babilônios antigos a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais. Várias explicações acerca desse fato já foram mencionadas por outros autores, porém a mais plausível e que é sustentada por Eves (2004, p.61) é a seguinte:

Nos remotos tempos dos sumérios, existia uma unidade de medida grande, uma espécie de **milha babilônica**, igual a sete milhas atuais. Como a milha babilônica era usada para medir distâncias mais longas, era natural que viesse a se transformar numa unidade de tempo, a saber, o tempo necessário para se percorrer uma milha babilônica. Mais tarde, talvez no primeiro milênio

a.C., quando a astronomia babilônica atingiu o estágio de manter registros sistemáticos de fenômenos celestes, a milha-tempo babilônica foi adotada para a mensuração de espaços de tempo. Como se determinou que um dia era formado de 12 milhas-tempo, e um dia completo equivale a uma revolução do céu, dividiu-se em ciclo completo em 12 partes iguais. Mas, por conveniência, a milha-tempo babilônica fora dividida em 30 partes iguais. Dessa forma chegamos a  $(12)(30) = 360$  partes iguais num ciclo completo.

No Egito antigo, a maior parte do trabalho manual era feita por uma classe escrava numerosa advinda da importação deliberada de nações estrangeiras, trabalho esse que na Babilônia resultava principalmente da derrubada de um império e assunção do poder por algum povo invasor. Era principalmente essa classe escrava que cavava e mantinha em funcionamento o sistema de irrigação, construía as zigurates (forma de templo) na Babilônia e erigia os grandes templos e as pirâmides do Egito. Nesse contexto, a agrimensura e a engenharia práticas, com sua matemática concomitante, foram criadas para auxiliar no planejamento e na execução desses trabalhos.

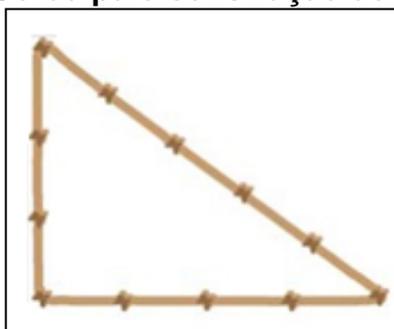
Ainda segundo Eves (2004), contrariando a opinião popular, a Matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela Matemática babilônica, fato esse que pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado por parte dos babilônios. A Babilônia localizava-se em uma região que era rota de grandes caravanas, ao passo que o Egito se manteve em semi-isolamento. Nem tampouco o sereno rio Nilo necessitava de obra de engenharia e esforços administrativos na mesma extensão que os rios Tigre e Eufrates.

Até que se decifrassem várias tabulas matemáticas babilônicas, o Egito foi, por muito tempo, o mais rico campo de pesquisas históricas sobre a Antiguidade. Porém, um fato inegável é que a medição de terras foi a situação problemática que induziu os egípcios a visualizar padrões geométricos (GAZIRE, 2000). Segundo a autora, os egípcios desenvolveram um esquema empírico de agrimensura do solo. A ideia básica surgiu da necessidade de se evitar que o transbordamento anual do rio Nilo desfizesse as subdivisões das terras feitas anteriormente. Tendo um governo centralizado e necessitando assegurar a arrecadação de taxas bem como evitar supostas disputas, as fronteiras entre os terrenos tinham de ser reestabelecidas sempre a cada inundação. Desse modo, o método deveria ser prático e simples. Usavam uma corda cheia de nós, apresentada na figura 1.

**Figura 1 - Corda cheia de nós**

Fonte: MATEMÁTICA..., 2013.

Para assegurar a confiabilidade da medição, usavam uma corda dividida em doze partes iguais para a construção do ângulo reto como mostra a figura 2. Quatro unidades formavam um lado do triângulo, três um segundo lado e cinco para o terceiro lado, ou seja, para a hipotenusa. Este método, usado até os tempos atuais, foi aplicado nas construções dos túmulos e templos. Essa técnica deu origem à história da “cordagem do templo” e, se configura como uma técnica relativamente simples de esboçar retângulos e outras figuras geométricas mais complexas.

**Figura 2 - Corda para construção de ângulo reto**

Fonte: MATEMÁTICA..., 2013.

De todos os povos do Mediterrâneo, o mais bem-sucedido, o que maior influência exerceu na civilização ocidental, é o grego, principalmente no tocante ao desenvolvimento do saber. Segundo Pavanello (1989, p.29),

Partindo, conscientemente ou não, dos conhecimentos acumulados pelas antigas civilizações – sobre os quais faz agir sua inteligência e objetividade – a civilização grega introduz uma mudança fundamental no espírito da ciência e da matemática: da consideração de fatos isolados, do recolhimento de casos singulares, passa-se à procura dos universais, à tentativa de isolar e abstrair uniformidades e permanências da heterogeneidade de fatos e eventos produzidos incessantemente na natureza e no conhecimento.

Desse modo, a civilização grega produz um tipo de pensamento, no qual se aliam racionalidade: capacidade de defender uma opinião por meio da argumentação, de investigar o porquê das coisas, e não apenas se contentando em saber como elas acontecem, e realismo: capacidade de distinguir afirmações fatuais e observáveis das emocionais e tradicionais, de apelar à experiência comum (EVES, 2004, p.69, citando Bernal, 1975).

Segundo Eves (2004, p.94), pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “*Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?*” e “*Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?*”. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de como, não bastavam mais para as indagações mais científicas na forma de porquê. O método demonstrativo foi se consolidando em algumas experiências e se impondo, e a estrutura dedutiva da matemática, considerada pelos sábios como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a Matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu na atmosfera de racionalismo. Segundo a tradição grega a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos “sete sábios” da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C..

Outras civilizações, como os hindus, por exemplo, praticavam alguns rituais que através de textos chamados *Sulvasutras* esclarece realizações bem parecidas como as citadas. Nestes textos aparecem alguns tratados que fixam regras de construção e orientação dos altares e dos edifícios destinados aos rituais de sacrifícios. Acreditavam que a eficácia do ritual se assentava na exata observação dessas regras, nas formas e nas proporções exigidas pelo culto e em concordância com o objetivo a ser alcançado.

O instrumento fundamental era o cordel (*sulua* ou *rajju*) feito de cânhamo ou bambu. As cordas (*sulva* ou *sulba*) eram usadas para medidas e um livro (*sultra*) de regras ou aforismos relativos a um ritual ou ciência. Daí, *Sulvasutras* – tratado dos Cordéis.

Segundo Zimmermann (1980), várias das construções geométricas encontradas nesse tratado são baseadas no conhecimento de diversos casos particulares de triângulos retângulos, com lados medindo 3, 4, 5 ou 5, 12, 13, ou 7, 24, 25 e outros. Essa regra não é formulada como um teorema, mas como uma prescrição para um ritual ideal, uma regra de construção.

Para Gazire (2000), a partir do trabalho etnográfico que atualmente vem sendo realizado com algumas tribos brasileiras, um material matemático muito rico vem sendo mostrado. Seja na riqueza do artesanato destes índios, seja na pintura corporal, a presença de vários padrões, como, por exemplo, simetria, perpendicularidade, paralelismo, ângulos, figuras geométricas planas, etc..

Segundo Lea (2000, p.185), na sociedade dos índios Mbengôkre, as pessoas tradicionalmente não vestem roupas de tecido, mas desenhos geométricos. Essa pintura corporal é a arte suprema do saber feminino, sendo essa, obrigatória e tornando-se cada vez mais rigorosa e requintada. A tinta usada na pintura é fabricada com o suco do jenipapo. Em seguida, esse suco, por ser inicialmente transparente, é misturado ao carvão moído. Essa pintura permanece no corpo, por aproximadamente, uma semana. Assim, o suporte do desenho é o corpo humano. O que define o bom desenho, nesse caso, é a simetria empregada e a habilidade matemática, pois exemplificando, as inspiradas na casca do jabuti devem percorrer 360° sem emendas. Motivos parecidos com aqueles feitos pelas mulheres na pintura corporal são usados pelos homens, na confecção de trançados, como, por exemplo, nas hastes das bordunas, usadas como armas de guerra. Vale ressaltar, que os Mbengôkre, segundo a autora, não produzem cerâmicas.

Outras tribos também se utilizam de pinturas corporais a partir de grafismos como, por exemplo, os Pataxós na figura abaixo:

**Figura 3 – Grafismo em braço de Índio Pataxó**



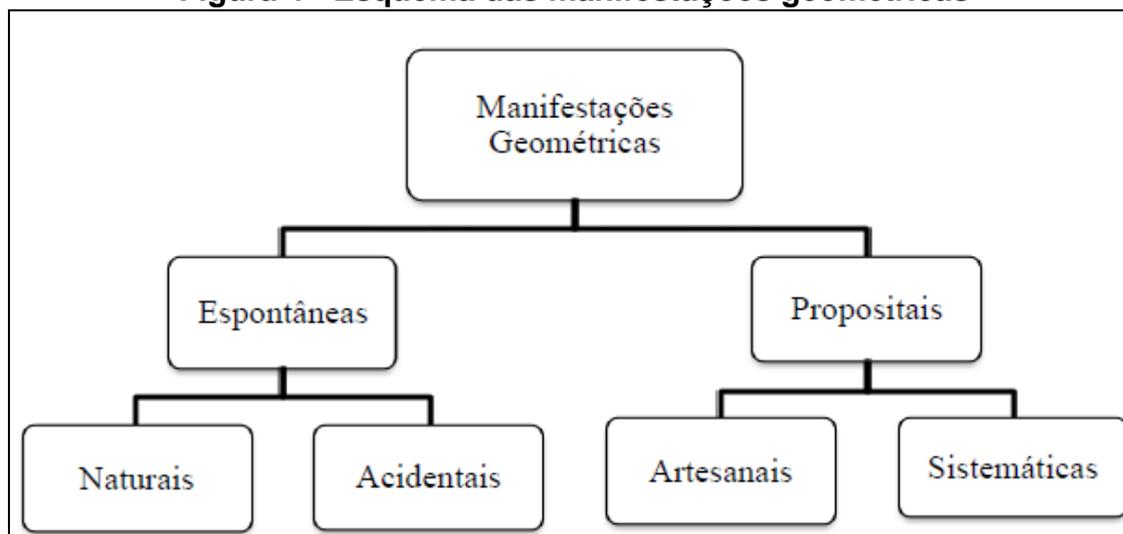
Fonte: Foto da pesquisadora.

As pinturas também sugerem informações acerca do usuário, como uma forma de comunicação entre as pessoas. Aponta a categoria de idade das pessoas, ingresso no resguardo do luto, o fato de ser tia ou avó de um recém-nascido. Porém, as pessoas doentes, em estado de luto ou resguardo não devem fazer uso das pinturas. Os homens, quando se pintam, simplesmente espalham a tinta com as mãos e dedos, sem referencial com a natureza.

Lea (2000, p.186) ainda nos esclarece que, os Mbengôkre fabricam, para comercializar, pulseiras de miçangas nas quais as combinações de cores permitem a reelaboração dos padrões decorativos empregados na pintura corporal.

Diante das ideias apresentadas, pode-se concluir que a observação de padrões foi fator primordial para o desenvolvimento da geometria, sendo num primeiro momento, um conhecimento intuitivo e empírico até alcançar um grau superior, abstrato, tendo como ápice a sistematização. Gazire (2000) expressa essa ideia, ao descrever os tipos de manifestações geométricas, conforme mostra o esquema a seguir (Figura 4).

**Figura 4 - Esquema das manifestações geométricas**



Fonte: GAZIRE, 2000, p.49.

Gazire (2000), ao referir-se sobre as formas da natureza e seus padrões sugeridos, classifica-as como sendo manifestações naturais da Geometria, conforme mostrado no Quadro 1.

**Quadro 1 - Manifestações naturais**

Troncos de árvores sugerem cilindros.	
A maioria dos cristais, bem como algumas flores e folhas ilustram a ideia de simetria.	
Muitos frutos nos dão a ideia de esfera.	
As estrelas-do-mar sugerem polígonos regulares.	

Fonte: GAZIRE, 2000, p.49.

Ao referenciar acerca das ações humanas que não visam à atividade geométrica, porém, apresentarão resultados induzidos a padrões geométricos, a mesma autora já citada classifica em manifestações acidentais, tal como evidenciado pelo Quadro 2:

**Quadro 2 - Exemplos de manifestações acidentais**

<p>O jato de água saindo do bebedouro nos dá a ideia de parábola.</p>	
<p>Uma pedra atirada em um lago sugere círculos concêntricos.</p>	
<p>Um cabo de fio enrolado forma uma espiral.</p>	
<p>Uma corrente de jardim forma uma catenária.</p>	

Fonte: GAZIRE, 2000, p.50.

Partindo das formas geradas por ações humanas que utilizam algoritmos (regras), que constroem padrões, Gazire (2000) utiliza-se da classificação manifestações artesanais para categorizá-las, exemplificados no Quadro 3.

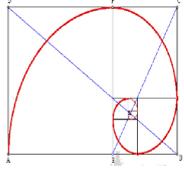
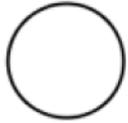
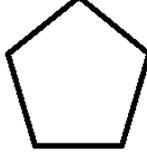
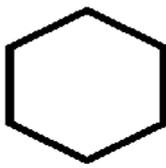
**Quadro 3 - Exemplos de manifestações artesanais**

Vasos de cerâmicas.	
Estampas tribais.	
Fachadas de algumas construções.	
Tetos de alguns templos.	

Fonte: GAZIRE, 2000, p.51.

Ao nos depararmos com o espírito filosófico grego que procura aliar o reconhecimento empírico dos padrões com o conhecimento de uso dos algoritmos para a reprodução desses padrões, Gazire (2000), opta em classificar tais manifestações como sistemáticas. Apresentamos essas manifestações no Quadro 4.

Quadro 4 - Manifestações sistemáticas

Objeto (um exemplo entre vários)	Induzindo padrões	Padrão matemáticação, algoritmação, propriedades, etc)	Sistematização (postulados, teoremas, etc)	
			<b>CURVAS</b>	<b>GEOMETRIA</b>
				
				
etc.				
			<b>POLÍGONOS</b>	
				
				
etc.				

Objeto (um exemplo entre vários)	Induzindo padrões	Padrão matemáticação, algoritmação, propriedades, etc)	Sistematização (postulados, teoremas, etc)		
			<b>SÓLIDOS</b>		
					
etc.					

Fonte: GAZIRE, 2000, p.53.

## 2.2 O desenvolvimento do pensamento geométrico

Procurando ampliar nossos horizontes, nos debruçamos sobre os trabalhos de Pais (1996) que se apoia na análise epistemológica da Geometria Espacial desenvolvida por Gonseth (1945), e destaca três questões fundamentais do conhecimento geométrico: o intuitivo, o experimental e o teórico. Segundo o autor, para construir o conhecimento teórico geométrico dos alunos é necessário que o professor considere tanto as questões intuitivas, quanto as atividades experimentais.

Nessa perspectiva, destaca quatro elementos fundamentais no processo de representação plana de um objeto tridimensional: objeto, desenho, imagem mental e conceito. Tais elementos influenciarão consideravelmente no processo de ensino e aprendizagem da geometria. O termo objeto é interpretado pelo autor como parte material, modelos, matérias didáticas palpáveis do mundo real e que pode ser associada à forma de alguns conceitos geométricos. Desse modo, o objeto é entendido como uma forma primária de representação do conceito, já que o processo de construção teórica é lento, gradual e complexo. Nesse sentido, o objeto é um modelo físico que irá contribuir para a formulação de ideias, mas não as substituirá. Pais (1996) afirma que a manipulação dos objetos na construção dos conceitos

geométricos é de grande importância, porém essa não deve limitar-se apenas ao nível sensitivo, a uma simples atividade lúdica. É pertinente reforçar que a finalidade da manipulação está voltada diretamente para uma aprendizagem formal. Segundo o autor, o significado que lhe é conferido é análogo à “experiência raciocinada” descrita por Bkouche (1989).

Assim, associada à manipulação dos objetos deve estar uma atividade intelectual, fazendo com que o aluno possa estabelecer uma relação entre a prática e a teoria. Para o autor, “o problema que surge com o uso desses materiais é que sua natureza contrasta frontalmente com a generalidade e a abstração dos conceitos visados, surgindo também daí a necessidade de se transpor sua própria materialidade”. (PAIS, 1996, p.67).

Com esse recurso de manipulação, cria-se, geralmente, uma grande expectativa, acreditando que o aluno, por si mesmo, e sob uma orientação pedagógica, possa descobrir propriedades que, uma vez abstraídas, contribuiriam na elaboração conceitual. Por exemplo, manipulando um objeto em forma de um cubo, o aluno pode identificar o número de vértices, faces, arestas, etc. Porém, essa mesma constatação pode ser feita através da leitura de um desenho em perspectiva, quando efetuada diretamente sobre o objeto, parece apresentar mais facilidade. Tal facilidade aparente se apresenta pelo imediatismo oferecido pelo objeto e, também, no fato da leitura do desenho requerer necessariamente um tipo de abstração. A questão em si, não é condenar o uso do objeto e sim reconhecer que a aprendizagem somente irá acontecer a partir do momento que o aluno conseguir fazer uma leitura geométrica da representação envolvida. Assim, é fato que a materialidade deve ser suplantada no sentido de possibilitar a gênese do processo abstrativo, caso contrário, recai-se no erro indesejável de admitir a existência de uma “geometria concreta”, o que seria totalmente contra aos objetivos da educação matemática. Segundo Pais (1996, p.67):

Neste ponto reside talvez o maior risco de um uso inadequado ou superficial dos materiais didáticos, quando sua manipulação se restringe puramente a seu aspecto mais imediato. O desafio didático, neste caso, é saber como dar a continuidade didática entre o uso do material e as questões que levariam à abstração.

Nesse contexto, o objeto pode ser considerado como uma representação primária do conceito. Primária no sentido de que é a forma mais acessível e imediata à sensibilidade humana, já que o processo de construção teórica se dá de forma lenta,

gradual e complexa e, a existência de diferentes níveis de conceitualização, é um fato inegável.

Pais (1996) enuncia que, um dos recursos didáticos mais consolidados no ensino e na aprendizagem da geometria, é sem dúvida a representação dos conceitos geométricos por um desenho. Seja na representação das figuras planas ou espaciais, o desenho tem se configurado, na realidade, uma passagem quase que totalmente obrigatória no processo de conceitualização geométrica. É presença garantida tanto nas aulas de geometria, como nos livros didáticos, ou apenas, para ilustrar os enunciados de exercícios, definições ou teoremas. Diante tal presença significativa, Pais (1996) sugere a necessidade de uma reflexão epistemológica e didática sobre o real estatuto na aprendizagem geométrica. *A priori*, podemos destacar, segundo o autor, que,

[...] da mesma maneira que o objeto, o desenho é também de natureza essencialmente concreta e particular, e, portanto, oposta às características gerais e abstratas do conceito. Essa correlação entre o particular e o geral, entre o concreto e o abstrato, que envolve a representação conceitual, revela, por si mesma, o desafio principal posto à atividade didática que é, como no caso dos objetos, a necessidade de transpor o próprio desenho. (PAIS, 1996, p.68).

A aplicabilidade do desenho na geometria plana, que é normalmente identificado pelo aluno ao próprio conceito, se mostra bem mais simples do que em geometria espacial, já que essa, quase sempre, recorre à técnica de perspectiva para sua execução. Colocar em evidência a terceira dimensão do objeto representado se configura como uma das dificuldades maiores encontradas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos espaciais. Desse modo, como argumenta Bonafe (1988), quando o aluno ainda não tem imagens mentais suficientemente operacionais para decodificar um desenho em perspectiva, as dificuldades no que tange ao ensino da geometria espacial se torna, incontestável. O autor ainda destaca o fato de que tanto a produção de um desenho em perspectiva pelo aluno como a sua leitura, podem constituir-se em obstáculos enfáticos para a aprendizagem.

O estudo realizado por Pais (1996) foi fundamentado em uma experiência com alunos que apresentavam idade entre 11 e 15 anos, e mostrou a frequente dificuldade que tinham na leitura de propriedades geométricas a partir dos próprios desenhos em perspectiva. Para o autor, durante essa leitura, o aluno pode fixar sua atenção num determinado aspecto gráfico particular da figura, fato esse, que lhe impedirá de

visualizar a mesma como um todo. Na análise da importância do desenho para a aprendizagem geométrica, foi possível destacar que tal recurso gráfico é utilizado para representar desde as noções fundamentais, até o caso de figuras ilustrando conceitos ou teoremas clássicos. Porém, no conjunto de todos os desenhos, alguns se apresentam de forma muito mais evidente do que outros. A importância desses desenhos recorrentes, são reveladas de maneira diferenciada e fundamental e, por isso, recebem o nome de “configurações geométricas”.

Diante este uso extensivo do desenho, permite-se considerá-lo uma segunda forma de representação conceitual com um nível de complexidade bem maior do que a representação por um objeto. A decodificação das informações geométricas intrínsecas num desenho requer o domínio de algumas informações técnicas que, geralmente não são explicitamente ensinadas em nível de primeiro grau. O que realmente aparecem nos desenhos dos livros didáticos, é uma série de grafismos que, embora possuindo um significado preciso, tem seu emprego baseado mais numa certa tradição do que numa aprendizagem formal. São estas dificuldades, que segundo Pais (1996), associadas aquelas da perspectiva, que levam a considerar o desenho uma forma de representação mais complexa do que a representação por um objeto.

No que se refere às imagens mentais, Pais (1996) nos informa que a formação dessas imagens é um tema de interesse central para a psicologia cognitiva justamente por permitir uma forma bem ampla de representação do conhecimento humano. Porém, limitando-se à associação dessas imagens aos conceitos geométricos, ressalta que essas imagens que são de uma natureza essencialmente diferente daquelas do objeto e do desenho podem ser destacadas por duas características básicas: a subjetividade e a abstração. Pelo fato de serem abstratas, podem ser relacionadas aos conceitos, embora o seu aspecto subjetivo as afaste da natureza científica. Mas alerta que, o que deve ser enfatizado é que a construção da objetividade passa necessariamente pelo estágio subjetivo da concepção individual do aluno.

Definir formalmente o que seja uma imagem mental não é tarefa fácil, porém pode-se dizer que o indivíduo tem uma dessas imagens quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos. Sendo as noções geométricas ideias abstratas, portanto, estranhas à sensibilidade exterior do homem, a formação de imagens mentais se torna uma consequência quase que exclusiva do trabalho com desenhos e objetos.

Nesse contexto, segundo Pais (1996), “A aprendizagem geométrica engloba necessariamente uma razoável habilidade racional de trabalho, com boas imagens mentais associadas não só aos conceitos como também aos teoremas e situações geométricas fundamentais”.

Algumas frases, como por exemplo, “Imagine uma reta perpendicular a um plano”, “Seja a diagonal principal de um cubo”, fazem um apelo direto ao uso de uma imagem desse tipo. É fato que, ao transcorrer da aprendizagem, aos poucos, o conjunto de tais imagens é enriquecido tanto no aspecto quantitativo como no qualitativo. Aos interesses educacionais, essas imagens se tornam tão melhor quanto mais operacionais, o que permitirá o desenvolvimento de um raciocínio mais dinâmico para a resolução de problemas ou para novas aprendizagens. Particularmente dizendo dos interesses da geometria, são os objetos e os desenhos que podem principalmente estimular a formação de boas imagens e, neste contexto, constituem uma terceira forma de representação das noções geométricas. Para Pais (1996), a natureza desta representação é bem mais complexa em relação ao uso de um objeto ou de um desenho, porém, permite uma utilização muito mais rápida e eficiente.

### **2.2.1 Os materiais didáticos**

A utilização de materiais manipuláveis no ensino foi destacada pela primeira vez no século XIX por Pestalozzi, quando defendeu que a educação deveria iniciar-se pela percepção de objetos concretos a partir de ações concretas e experimentais. No Brasil, a defesa desse discurso surgiu na década de 1920 com uma tendência no ensino de Matemática conhecido como empírico-ativista. Baseadas nos ideais escolanovistas que se contrapunham ao modelo dito tradicional de ensino em que o professor era tido como elemento central do processo de ensino, a concepção empírico-ativista passa a considerar o aluno o centro do processo e os métodos de ensino passam a ser pautados em atividades que valorizam a ação, a manipulação e a experimentação. Seguem o princípio de que “aprende-se a fazer fazendo”. Desse modo, uma prática rotineira era basear o ensino em atividades que promovessem o uso de jogos, materiais manipuláveis e situações lúdicas e experimentais.

Porém, como nos informa Nacarato (2004, p.1), tais ideias em nada influenciaram o ensino de Matemática, naquela época, quer seja pelo despreparo dos professores, quer seja pelas poucas inovações que se efetivaram nos livros didáticos.

Em decorrência de uma discussão mundial pautada pelos questionamentos ao Movimento da Matemática Moderna cujo fracasso se evidenciava, esse ideário empírico-ativista, a partir da década de 1970 é retomado segundo Fiorentini (1995) e instaura-se um grande movimento nacional de produção de novos materiais para o ensino de Matemática. No final da década de 1970 e início da década de 1980, vários materiais foram produzidos por grupos que se constituíram durante o movimento modernista ou até mesmo antes dele. Várias discussões que aconteciam no interior desses grupos foram incorporadas pelos autores dos livros didáticos e paradidáticos.

Segundo Nacarato (2004, p.2),

Paralelamente a esse movimento de produção e divulgação de novos materiais, há todo o incentivo governamental quanto ao livro didático. Em 1968, durante o Regime Militar, foi criada a Fundação Nacional de Material Escolar (FENAME), que passa a assumir a coordenação e distribuição do livro didático a estudantes de baixa renda. Inicia-se a era dos livros descartáveis. Mas, é a partir de 1980, que se constata uma proliferação de títulos de livros didáticos e, considerando as condições de trabalho do professor, que já vinha num processo de intensificação de suas atividades (baixos salários e, conseqüentemente, aumento de jornadas de trabalho para sobrevivência), o livro didático como afirmam Freitag, Costa e Mott, (1997, p.108), “não serve aos professores como simples fio condutor de seus trabalhos, mas passa a assumir o caráter de “critério de verdade” e “última palavra” sobre o assunto”.

Nesse contexto de produção, vale ressaltar as contribuições advindas da área de Psicologia destacadas com os trabalhos de Piaget, Bruner e Dienes para o caso da Matemática. Dienes, segundo Nacarato (2004-2005, p.2), foi o pesquisador que maiores contribuições e influências exerceu nos anos de 1970 no que se refere ao uso de materiais didáticos. Dedicou-se a estudar e promover atividades e materiais para o ensino de Matemática e propunha que a experiência deveria preceder a análise, ou seja, *as experiências cuidadosamente escolhidas pelo professor sustentariam o fundamento sobre o qual estaria baseado o aprendizado matemático*. Já Bruner, propôs um modelo de instrução, no qual apresentava a indiscutível necessidade de interação direta do aluno com o meio ambiente e, afirmava que “*o que é mais importante para ensinar um conceito básico é que a criança seja ajudada a passar gradativamente do pensamento concreto à utilização de métodos de pensar mais adequados conceitualmente*” (1960, apud PROST, 1981, p.11).

Assim, não se questiona as contribuições desses autores, bem como tantos outros vindos da Psicologia Cognitiva, na construção das produções curriculares nas décadas de 1970 e 1980, e que, conseqüentemente, foram incorporadas pelos materiais didáticos destinados aos professores. Nesse contexto, a tendência construtivista se evidencia cada vez mais, e passa a ser muito forte no ensino de Matemática – pelo menos em nível de discurso e, ocorrendo muitas vezes, com leituras completamente equivocadas.

A partir da década de 1990, além dos materiais manipuláveis, vários recursos didáticos vem sendo sugeridos para o ensino de Matemática. Com a chegada da era digital, a utilização de calculadoras e de computadores, passou a ser uma prática quase que obrigatória nos livros didáticos e nas escolas – mesmo sendo esses recursos ainda bastante distantes da maioria das salas de aula.

Segundo Nacarato (2005, p.2), outras tendências estão sendo apontadas e enfatizadas para o ensino de Matemática, fazendo com que tal discussão acerca da importância ou não da utilização de materiais manipuláveis seja renegada a um segundo plano. Porém, em concordância com o autor, e embasados em nossa experiência, percebemos uma contradição com a realidade que permeia a nossa vida de docente, já que na maioria das vezes, o professor em sua prática de sala de aula, conta apenas com o livro didático como suporte para o seu trabalho e depara-se, cada vez mais, com livros repletos de desenhos de materiais manipuláveis. Bem verdade que, a maioria desses não estão disponíveis nas escolas ou quando disponíveis, não são utilizados ou por desconhecimento em como lidar com eles ou por faltas de condições de trabalho, principalmente pelo elevado número de estudantes na mesma sala. O mesmo autor também nos relata que os sentimentos de impotência e os conflitos vividos pelos professores, preocupados que estão com o processo ensino aprendizagem, acabam se explicitando frequentemente, nos cursos de formação que participam.

Nesse contexto, aparecem algumas indagações pertinentes:

- a) Materiais manipuláveis para o ensino de Matemática: facilitador ou complicador?
- b) A solução para os problemas que enfrentam os professores no dia a dia da sala de aula está no uso dos materiais didáticos?

- c) O uso de algum material didático é realmente conveniente, ou até mesmo necessário, como facilitar do processo ensino aprendizagem?  
Caso afirmativo, qual o mais propício? Quando e como utilizá-lo?

Lorenzato (2006) reforça que a ausência de materiais didáticos pode atrasar o desenvolvimento intelectual do aluno. Desse modo, cabe ao professor se planejar e sempre se questionar sobre a verdadeira intenção da utilização deste ou daquele material a ser utilizado. Observa ainda que, quando o material for novidade para o aluno, é pertinente se dar um tempo aos alunos para que possam explorá-lo livremente num primeiro contato. A troca de ideias, de raciocínios, de ações e de conclusões num momento posterior pelo grupo, é de grande importância na elaboração e construção do processo. Decorrentes das atividades concretas e abstratas realizadas pelos alunos, o registro da verbalização se configura em outra etapa de suma importância na apropriação e aprimoramento de novos e importantes saberes.

Nessa perspectiva, acreditamos que a eficiência de qualquer material didático depende da concepção que o professor tem sobre o material didático e como ele conduzirá não só a sua utilização, mas como entende o processo ensino aprendizagem.

É fato que a Matemática se faz presente em praticamente todas as áreas do conhecimento, porém em minha experiência como docente percebo que nem sempre é fácil, apresentar aos estudantes as aplicações práticas e realistas acerca dos conteúdos ministrados ou motivá-los a partir de problemas contextualizados. Nesse contexto, acreditamos que permear as aulas ditas “tradicionais” com abordagens e estratégias diferenciadas e motivadoras, pode ser um caminho a se trilhar, visando sempre que possível, despertar os alunos para a beleza da Matemática e para a sua utilização prática, necessária e cada vez mais indispensável no nosso mundo atual.

Vivemos num mundo de formas e imagens. Elas estão presentes na natureza, nas construções, nas artes. O estudo das formas se configura como um dos mais importantes ramos da Matemática, a Geometria. Mas por que aprender Geometria?

Vários autores, como Pavanello (1995), destacam a Geometria como sendo o ramo da Matemática mais adequado para o desenvolvimento de capacidades intelectuais, tais como a criatividade, a percepção espacial, o raciocínio hipotético-dedutivo. Segundo a mesma (PAVANELLO, 1995, p.14):

Não se pode negar que a geometria oferece um maior número de situações nas quais o aluno pode exercitar sua criatividade ao interagir com as propriedades dos objetos, ao manipular e construir figuras, ao observar suas características, compará-las, associá-las de diferentes modos, ao conceber maneiras de representá-las.

Deguire (1994, p.73) salienta que é possível destacar várias razões para se que se estude Geometria nas séries iniciais e no Ensino Médio. Orienta-nos que uma delas é a oportunidade que a Geometria oferece de “ensinar a resolver problemas” e “ensinar para resolver problemas”.

[...] ensinar a resolver problemas ultrapassa a mera resolução de problemas para incluir a reflexão sobre processos de resolução, objetivando coligir estratégias de resolução de problemas que poderão ser úteis posteriormente; ensinar **para** resolver problemas envolve o ensino do conteúdo de uma maneira significativa, de modo que passe a ser utilizado em outros problemas e aprendizados. Uma maneira, pelo menos, de ensinar para resolver problemas consiste em desenvolver o conteúdo a partir de episódios de resolução de problemas.

Para Lorenzato (1995, p. 5):

Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

O mesmo autor também nos relata que as pesquisas psicológicas indicam que a aprendizagem geométrica se faz necessária ao desenvolvimento da criança, já que várias situações escolares requerem percepção espacial, tanto em Matemática como na Leitura e Escrita.

Desse modo, a Geometria se configura como um facilitador de processos mentais, pois ao prestigiar o processo de construção do conhecimento, valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar. Torna-se desse modo, um excelente apoio às outras disciplinas, desempenhando importante papel na aprendizagem.

Nesse sentido, Lorenzato (1995, p.6) também discorre que:

A Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque

os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz.

Algumas tendências atuais referentes ao ensino da Geometria sugerem que é na pré-escola que o processo escolar de desenvolvimento do pensamento geométrico deve se iniciar. A natureza do trabalho a ser desenvolvido nessa faixa escolar deve basear-se numa Geometria intuitiva e natural que promova a observação e a exploração das formas presentes no espaço físico imediato de ação e interação das crianças.

Configuram-se como tendências recentes para o 1º ciclo (1º/5º ano):

- Apresentação da Geometria como elemento fortemente presente no meio ambiente da criança; portanto, o conhecimento geométrico escolar inicial é natural, familiar;
- As formas são reproduzidas e investigadas, independentemente de serem planas ou não planas;
- Especial atenção é dada às transformações de forma (por combinação de formas, por subdivisão de uma forma, por artefatos, ...);
- Sempre que possível, associar as ideias geométricas às ideias numéricas ou sobre medidas;
- Vocabulário geométrico correto não é exigido;
- O maior objetivo é favorecer o desenvolvimento do senso espacial da criança.

Nesse contexto, o Conselho Nacional dos Professores de Matemática dos Estados Unidos (NCTM, 1989), em importante documento, expressou-se que recomenda a esta faixa etária (1º ao 5º anos), que sejam oferecidas muitas oportunidades para que as crianças:

- Explore Geometria em duas e em três dimensões;
- Desenvolvam o senso espacial e estabeleçam relações espaciais;
- Resolvam problemas que envolvam Geometria e suas aplicações a outros tópicos da Matemática e a outros campos de conhecimento.

Lorenzato (1985, p.8) ainda destaca que,

Em termos de prática pedagógica, as crianças devem realizar inúmeras experiências ora com o próprio corpo, ora com objetos e ora com imagens;

para favorecer o desenvolvimento do senso espacial das crianças é preciso oferecer situações onde elas visualizem, comparem e desenhem formas: é o momento do dobrar, recortar, moldar, deformar, montar, fazer sombras, decompor, esticar [...] para, em seguida, relatar e desenhar; é uma etapa que pode parecer mero passatempo, porém é de fundamental importância.

Desse modo, pode-se dizer que a criança começa a adquirir o senso espacial a partir do momento em que consegue exercer algum domínio das relações dinâmicas que são estabelecidas entre as partes do seu próprio corpo e/ou entre seu corpo e os demais níveis do pensamento consciente. Torna-se então, possível a aprendizagem de noções espaciais posicionais como as de direção, sentido, atrás, perto, em cima de, em baixo de e outras.

Aprender essas noções espaciais, juntamente com a de algumas noções lógicas elementares, são de suma importância para a identificação, distinção e representação de formas geométricas muito frequentes na Geometria elementar. Esta identificação só se torna significativa quando a criança demonstra ter consciência dos atributos específicos necessários que diferenciam determinada forma de todas as demais formas espaciais possíveis.

Para alcançar tal patamar, a criança necessita superar, mesmo que localmente, algumas ilusões que se manifestam no domínio do espaço perceptivo, como por exemplo, a de que a forma de uma figura ou objeto varia em função da posição que este ocupa no espaço.

Nesse percurso, o domínio do espaço inicial da criança é topológico (onde as linhas desenhadas ressaltam o dentro/fora e o aberto/fechado), depois projetivo (onde as propriedades espaciais invariantes são valorizadas) e finalmente euclidiano (onde surge a métrica).

Conforme Lorenzato (1995), as tendências recentes para o 2º ciclo (6º/9º anos) são:

- Apresentar a Geometria como meio de descrever o mundo físico;
- Explorar as transformações de figuras geométricas através de rotação, translação, simetria e deformação, ressaltando a semelhança e a congruência;
- Utilizar a Geometria como auxiliar para resolver problemas;
- Aplicar propriedades geométricas;
- Favorecer a emissão e a verificação de hipóteses;
- Integrar a Geometria com a Aritmética e Álgebra.

Nessa fase, os estudos da Geometria devem favorecer oportunizar os alunos a realizarem suas primeiras explorações de modo sistemático. As primeiras deduções lógicas são construídas, os resultados e os processos são discutidos, embora sem se preocupar com a formalização.

O vocabulário utilizado deve ser empregado de forma correta, com vistas ao domínio das definições e das propriedades. Longe de valorizar a memorização ou a evocação de definições, enunciados, demonstrações ou fórmulas, o objetivo é o processo pelo qual se chega ao resultado visando à compreensão e ao significado. Nessa perspectiva, a exploração informal da Geometria é bem apropriada e necessária para que os estudantes dessa faixa, 6<sup>o</sup>/9<sup>o</sup> anos, sejam oportunizados à comparação, classificação, medição, representação, construção, transformação, etc. O apoio do material didático, visual ou manipulável, ainda é fundamental. Aliás, para o autor, o material didático sempre será necessário porque ele simplesmente provoca a imaginação em qualquer idade.

Lorenzato (2012, p.18) define material didático da seguinte maneira:

Material didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, MD pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros.

Porém, vale ressaltar que os MD constituem apenas um dos inúmeros fatores que interferem no rendimento escolar do aluno. Os MD, dependendo do objetivo a que se prestam, podem desempenhar várias funções, e por isso, cabe ao professor pergunta-se para que ele deseja-se utilizar o MD para:

- Apresentar um assunto;
- Motivar os alunos;
- Auxiliar a memorização de resultados;
- Facilitar a redescoberta pelos alunos?

São as respostas a essas perguntas que permearão a escolha do MD mais conveniente à aula.

Fato é que, por melhor que seja o MD, o mesmo nunca ultrapassará a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno, e desse modo, o MD não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor.

Sendo assim, a atuação do professor se torna determinante para o sucesso ou fracasso escolar. Para que haja uma aprendizagem significativa, não basta que o professor disponha de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM). Tão importante quanto a escola possuir um LEM, é saber utilizar corretamente os MDs, é função do professor, pois os instrumentos utilizados exigem conhecimentos específicos de quem os manipula, de quem os utiliza.

Nesse viés, ao planejar sua aula, o professor precisa sempre perguntar-se: será conveniente, ou até mesmo necessário algum material didático para facilitar a aprendizagem? Com qual material o objetivo será alcançado? Em outras palavras, o professor está respondendo as questões: “Por que material didático?”, “Qual é o material?” e “Quando utilizá-lo?”. Em seguida, é preciso argumentar-se: “Como esse material deverá ser utilizado?”. Essa última questão, segundo Lorenzato (2012, p.24) é fundamental, embora não suficiente, para que possa ocorrer uma aprendizagem realmente significativa.

A maneira que cada professor irá utilizar cada MD está fortemente vinculada à concepção que ele tem a respeito da matemática e da arte de ensinar. Um professor que concebe a matemática como um conjunto de proposições dedutíveis, auxiliadas por definições, cujos resultados são regras ou fórmulas que servem para resolver exercícios em provas, concursos, exames, com certeza poderia, utilizando-se apenas da lousa, mostrar ou provar aos alunos que, por exemplo, a soma dos três ângulos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ , e em seguida, oferecer uma lista de exercícios para possibilitar a memorização dessa propriedade. A maioria de nós recebeu esse ensinamento de matemática desse modo e, por isso, não conseguimos admirar a beleza e harmonia da matemática, nem ver nela um instrumento essencial para cotidianamente ser colocado a nosso serviço. Para o aluno, mais importante que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria e o prazer da descoberta, a percepção da sua competência, a melhoria da autoimagem, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, não é aquele bicho-papão que dizem, e sim um campo de saber onde ele, aluno, pode navegar.

Comungando com essa ideia, Rêgo e Rêgo (2012, p. 40) nos diz que,

As novas demandas sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica pelo aluno.

Para tanto, faz-se necessário a introdução da aprendizagem de novos conteúdos de conhecimentos e de metodologias que, baseadas na concepção de que o aluno deve ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, reconheça, identifique e considere seus conhecimentos prévios como ponto de partida e o prepare para realizar-se como cidadão em uma sociedade submetida a constantes mudanças.

Nesse contexto, os autores sugerem a instalação de um laboratório de Ensino de matemática (LEM). Nesse espaço, a experimentação tanto para o aluno quanto para o professor é muito importante. Esse será o lugar onde o professor terá a oportunidade de avaliar na prática, sem as pressões do espaço formal tradicional da sala de aula, novos materiais, novas metodologias e resultados de pesquisas, disponibilizados na literatura, ampliando dessa maneira, sua formação de modo crítico.

Rêgo e Rêgo (2012) nos informa que, uma das linhas de investigação e ação em um LEM compreende a elaboração, adaptação e uso de materiais didáticos de matemática, considerando-se os objetivos educacionais que se queira atingir, sua potencialidade para auxiliar a aprendizagem de conhecimentos de naturezas diversas (informações, conceitos, habilidades ou atitudes), seu alcance e suas limitações e ainda, a sua adequação à competência dos alunos, levando-se em conta os conhecimentos prévios, a faixa etária, entre outros elementos. Alegam que se concebermos uma aula de matemática como um espaço em que os alunos terão a oportunidade de experimentar, descobrir significados e processos para essas experiências ou atividades de aprendizagem, como afirmam Grossnickle e Brueckner (1965, p.87), materiais adequados são necessários.

Nessa perspectiva, Rêgo e Rêgo (2012, p. 42) assegura que: "

Uma vez trabalhado e avaliado em sala de aula um recurso didático pode ser, caso indicado, reestruturado, compreende-se que a aprendizagem não reside em sua estrutura física ou na simples ação sobre ele, mas resulta do aprofundamento de reflexões sobre essa ação.

É fato que cada aluno tem um modo próprio e único de pensar e que este varia em cada fase de sua vida, estando seu pensamento em constante processo de mudança. Desse modo, a aprendizagem pela compreensão se configura em um processo pessoal e único que acontece no interior do indivíduo, embora relacionado a fatores externos, exigindo do raciocínio o que quase sempre é deixado apenas como

tarefa para a memória. As interações entre indivíduo e mundo possibilitam-lhe relacionar fatos, estruturar ideias e organizar informações, internalizando-os.

É através de experiências pessoais bem-sucedidas que o aluno desenvolve o gosto pela descoberta, a coragem para enfrentar desafios e para vencê-los, desenvolvendo conhecimentos na direção de uma ação autônoma. Nesse contexto, o material concreto tem fundamental importância, pois, a partir de sua utilização adequada, os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática, derrubando mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos.

Dessa forma, como sugerem os autores, as atividades realizadas em um LEM estão voltadas para o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e a formação geral do aluno, possibilitando-os a:

- Ampliar sua linguagem e promover a comunicação de ideias matemáticas;
- Adquirir estratégias de resolução de problemas e de planejamento de ações;
- Desenvolver sua capacidade de fazer estimativas e cálculos mentais;
- Iniciar-se nos métodos de investigação científica e na notação matemática;
- Estimular sua concentração, perseverança, raciocínio e criatividade;
- Promover a troca de ideias por meio de atividades em grupo;
- Estimular sua compreensão de regras, sua percepção espacial, discriminação visual e a formação de conceitos.

Ressaltam, ainda, que a utilização de todo e qualquer recurso didático exige cuidados básicos por parte do professor, e elencam os seguintes:

- Dar tempo para que os alunos conheçam o material (a princípio é importante a exploração livre do recurso por parte dos alunos);
- Incentivar a comunicação e a troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
- Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;

- Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
- Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e;
- Sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material.

Assim, possibilitar variadas experiências de ensino relativas a um mesmo conceito matemático, atribuir significado para a aprendizagem, criar situações para que o aluno redescubra padrões, regras e relações e criar um ambiente agradável em torno do ensino de matemática, promovendo o sucesso e evitando o fracasso, são princípios, que segundo os autores e defendidos por Irene Albuquerque (1951), são facilitados no espaço de um LEM.

Pensando em particular, num laboratório de ensino de geometria (LEG), Rêgo, Rêgo e Vieira (2012, p.16), nos apontam que o acervo de tal laboratório deve ser composto de uma série de matérias, com os quais são elaboradas atividades que servirão como elementos mediadores em ações e reflexões a serem concretizadas pelos alunos. Constituídas de desafios, inquietações e a construção de modelos, tais atividades possibilitam a incorporação de novos conhecimentos ou provocam a reorganização dos esquemas já existentes, promovendo novas aprendizagens.

Nessa perspectiva, os conceitos, procedimentos e atitudes relacionados aos padrões abstratos que envolvem formas e medidas serão desenvolvidos por meio de atividades cuja execução possibilite aos alunos alcançarem as aprendizagens explicitadas nos objetivos educacionais previamente definidos. Para os autores, alguns fatores importantes devem ser considerados no planejamento das tarefas, como por exemplo, as expectativas de aprendizagens a serem realizadas pelos alunos, os seus conhecimentos prévios, a realidade da escola e do quadro docente.

A percepção espacial, a elaboração de um sistema de propriedades de figuras, o domínio de uma linguagem de representação gráfica das figuras e formas geométricas, além do estudo de medidas (leitura e elaborações de mapas, construção de maquetes a partir de mapas, composição e decomposição de figuras, relações de medida entre diferentes elementos de uma figura geométrica, relações de medidas

entre figuras semelhantes, construção de modelos, entre outras), são algumas habilidades que se espera desenvolver no LEG.

Rêgo, Rêgo e Vieira (2012) ainda garantem que para uma maior eficiência de um processo de ensino que se baseia em atividades que possibilitam a participação ativa dos alunos, a elaboração antecipada de questões que visam ao aprofundamento das ideias envolvidas em cada ação deve ser criteriosa. Novas questões são apresentadas pelos alunos durante sua realização, e cabe ao professor, aproveitá-las, explicitando-as e colocando-as em discussão com o grupo.

De maneira similar e de mesma importância, a discussão dos resultados bem como o registro escrito dos alunos visam prepará-los para as fases de abstração, generalização e formalização. Estes se configuram como passos que sucedem a atividade prática (realização da atividade): a matematização inicial (que pode ser representada por um registro gráfico) e a abstração de regras gerais, propriedades e relações entre conceitos geométricos e entre estes e conceitos aritméticos e algébricos, bem como a aplicação dos resultados a outras situações.

Para facilitar a organização das atividades voltadas para a construção de conceitos geométricos, os autores sugerem uma lista de materiais básicos que, segundo eles, poderão compor o acervo de um Laboratório de Ensino de Geometria, indicados para o ensino/aprendizagem das geométricas plana e espacial e o estudo de medidas e grandezas. Ao interesse da nossa pesquisa, destacam-se:

- Os materiais de desenho: régua, esquadros, transferidor e compasso.
- As construções geométricas diversas (com canudos, arame, palitos, entre outros);
- Elementos da natureza (ex: sementes, folhas secas, conchas);
- Reproduções de pinturas (ex: Paul Klee, Volpi, Picasso, Kandinsky, Escher);
- Problemoteca de Geometria (conjunto de cartões contendo problemas diversos envolvendo elementos de Geometria Plana e Espacial, desafios com palitos de fósforos, problemas sobre secções planas e espaciais etc.);
- Fitas de vídeo e *softwares* diversos (vídeos do acervo da TV Escola, *softwares* diversos como Cabri Geometric, Geogebra, ligo, Poli,

Tabulac, etc. – alguns gratuitos, disponíveis na internet, filmes, como por exemplo, *Numbers* e *A História do Número 1*).

Mais uma vez, Rêgo, Rêgo e Vieira (2012, p.18) voltam a destacar que:

[...] a simples manipulação de um material concreto não é suficiente para que o aluno construa conceitos matemáticos ou de qualquer natureza. Toda a sua ação sobre o material precisa ser elemento de discussão e de reflexão, baseadas em questionamentos próprios ou induzidos pelo professor, junto aos colegas ou mediados pelo professor, para que a aprendizagem seja efetiva e significativa.

Outro equívoco, segundo os autores, acontece quando o próprio professor executa alguma atividade com material concreto mostrando o processo e o resultado para os alunos e, a partir dessa exposição, elabora individualmente as conclusões. É de suma importância que o aluno faça as atividades, participando de todo o processo, atuando como sujeito na construção de seu conhecimento.

Ainda sobre materiais manipuláveis ou materiais concretos, Passos (2012, p. 77) diz que:

Geralmente a expectativa da utilização de materiais manipuláveis por parte de professores que atuam no ensino fundamental está na esperança de que as dificuldades de ensino possam ser amenizadas pelo suporte da materialidade. Vale lembrar que tivemos forte influência do movimento Escola Nova, que defendia os chamados “métodos ativos” para o ensino e que, na maioria das vezes, envolvia o uso de materiais concretos para que os alunos pudessem **aprender fazendo**. (Grifos nossos).

Serrazina (1990), depois de analisar a utilização de materiais didáticos no ensino da matemática, observa que ter um cuidado especial quando se pretende fazer uso desse recurso é de suma importância, e que, nesse aspecto, o professor tem papel fundamental.

Assim, comungando com todas as ideias apresentadas, acreditamos que os recursos didáticos utilizados nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino e aprendizagem, porém, esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído.

### 2.3 A mandala como construção geométrica de padrão

Em encontros, palestras, seminários e cursos que participamos, é comum observarmos entre os docentes, a frequente opinião acerca do pouco ou nenhum conhecimento geométrico adquirido pelos estudantes durante o ensino fundamental e médio, assim bem como a pouca ou nenhuma familiaridade com os instrumentos do desenho geométrico: régua, transferidor, compasso e jogo de esquadros. Percebemos, também, que os mesmos apresentam ainda uma limitada percepção visual e “traumas” relacionados ao desenho. Esse cenário vem comprovar uma situação de adiamento ou até mesmo de exclusão do ensino da geometria das salas de aulas.

Segundo Yamada (2013), para que a aprendizagem em geometria aconteça de maneira efetiva, se faz necessário que os docentes, elaborem metodologias e utilizem abordagens diferentes das convencionais, a fim de estimular e incentivar o estudo e a compreensão da representação gráfica. Comungando dessa ideia, nos propomos nessa pesquisa em utilizar as Mandalas Geométricas como um recurso didático nas aulas de geometria.

Nesse contexto, acreditamos que se faz necessário considerar como o aluno percebe o conteúdo e utiliza o conhecimento matemático em outros contextos, construindo relações e tornando o aprendizado mais excitante e eficaz à medida que é observado no cotidiano. Segundo Kopke (2001), a visualização espacial é uma habilidade mental que precisa da estimulação do lado direito do cérebro e que, por isso, a aprendizagem da geometria pode ser feita de forma lúdica, sendo mais rapidamente apreendida e assimilada. Para Grande (1994, p.156),

A percepção espacial é a faculdade de reconhecer e discriminar estímulos no espaço, e a partir do espaço, e interpretar esses estímulos associando-os a experiências anteriores. Oitenta e cinco por cento das informações que chegam ao corpo vindas do meio ambiente penetram em nós através do sistema visual, e a visão se desenvolve como resultado de muitas experiências acumuladas.

Assim, procuramos realizar várias atividades que acreditamos proporcionar às partes envolvidas ao processo de ensino e aprendizagem, uma rica experiência estética, como também poderá ser uma oportunidade de discutir e trabalhar com uma

série de conceitos geométricos de maneira mais prazerosa, descontraída, sem desmerecer o devido rigor exigido pela ciência.

Como nos sugere Ramos (2016. p.2), “A construção de Mandalas apresenta grande potencial para explorar conceitos e relações geométricas a partir da construção da sua estrutura, assim como a melhora da percepção visual de figuras e linhas”.

No que tange a uma organização regular de elementos geométricos em função da circunferência e de seu centro, um primeiro conceito básico que poderá ser apontado é o da simetria de rotação. Tal simetria é caracterizada por uma transformação geométrica na qual uma figura se desloca em torno de um ponto, segundo um ângulo definido. A repetição continuada da transformada, segundo o mesmo ângulo, vai estabelecendo uma organização espacial do tipo radial e que, inevitavelmente, conduz ao conceito de ângulo central. Ao dividirmos a circunferência em partes iguais, os conceitos de polígonos regulares convexos e não convexos (os polígonos estrelados) bem como suas construções são resgatados.

Ao desenharmos polígonos estrelados deparamos com duas situações: a primeira, em que o traçado percorre todos os pontos de divisão, sem que haja interrupção; e a segunda, na qual a figura final precisa ser desenhada em mais de uma etapa (CARVALHO, 1953). A figura derivada da primeira situação apresentada é que rotineiramente chamamos de “polígono estrelado”, a qual remete a outro conceito: o de número primo. “Os polígonos regulares estrelados de  $n$  lados são tantos quantos os números primos com  $n$  e, menores que a metade de  $n$ .” (ALMEIDA, 1945, p.136)

Os conceitos mencionados anteriormente podem ser entendidos como componentes estruturais básicos quando buscamos explorar o traçado dessas formas. Entretanto, no processo de criação outros princípios geométricos são inseridos na sua elaboração, como nos afirmam Nascimento, Benutti e Neves (2007). É o caso, por exemplo, das concordâncias e também das simetrias da reflexão e da dilatação.

Nesse contexto, acreditamos que a produção de tais formas possibilitará um exercício ao desenvolvimento da criatividade, da percepção visual, da capacidade de abstração e imaginação, da coordenação motora e da concentração, aspectos essenciais na condução, elaboração e efetivação desse presente trabalho. Vale ressaltar a ressignificação e o aprendizado de conteúdos matemáticos e estéticos.

Em busca de resgatar “novas” possibilidades educativas, promover uma aprendizagem significativa e, galgados em todas as explanações referidas acerca do desenvolvimento do pensamento geométrico, esse trabalho propõe que a construção das Mandalas Geométricas poderá se configurar como um recurso didático para as aulas de geometria. Comungamos da indiscutível necessidade e importância da utilização de materiais manipulativos para a apropriação do desenvolvimento do pensamento geométrico bem como o seu aprimoramento, desse modo, apresentamos a seguir a descrição e análise das etapas de execução desse presente trabalho.

A fim de esclarecer, optamos em delinear, mesmo que superficialmente, sobre as Mandalas.

Em sânscrito a palavra Mandala significa “círculo”. Jung (1973) considera as Mandalas uma categoria especial de símbolos, que mesmo apresentando uma grande diversidade entre suas formas e temas, apresentam sempre alguns elementos comuns: geralmente formações circulares, esféricas ou ovais, apresentando um movimento de rotação.

Historicamente, as Mandalas se constituem como uma das mais antigas inscrições e grafismo da humanidade. Segundo Fioravanti (2003, p. 8), as Mandalas podem ser classificadas a partir da origem, da finalidade e da formação, porém podemos usar uma maneira mais simples e classificá-las em espontâneas e racionais:

As mandalas são espontâneas quando nascem sem uma elaboração mental consciente. ... Já as mandalas racionais são criadas a partir de uma simbologia, com uma finalidade determinada. Elas são elaboradas da razão, na maior parte das vezes são montadas sem muita inspiração inconsciente.

Quanto à origem, Fioravanti (2003) opta por classificá-las em orientais e ocidentais. As mandalas orientais atendem quase sempre a manifestações religiosas e fazem parte de um ritual que visa movimentar as energias divinas. Enquanto que no ocidente, são utilizadas como complementos arquitetônicos e decorativos.

No que se refere à finalidade, segunda a autora, são usadas de maneira sagrada e profana. Sagrada, na construção de templos, como é o caso das rosáceas cristãs que adornam algumas catedrais e, profana, no uso dos desenhos das janelas e pisos das casas, além de roupas, propagandas, logotipos e outros.

Quanto à formação, são classificadas pela base numerológica que contém, bem como pelas formas geométricas e as cores que as compõem.

Nesse contexto, classificamos as Mandalas geométricas tratadas nessa pesquisa quanto à formação, pois suas construções são feitas através da composição de figuras geométricas. A quadratura do círculo é expressa através de um círculo contido em um quadrado ou vice-versa. Mesmo sendo os motivos numerosos, a repetição dos padrões contemplados nessas formas apresenta pequenas variações. Os padrões triádicos, quadrangulares ou pentagonais são os mais comuns, bem como os seus múltiplos. Simbolicamente, o “três” se associa a um momento de equilíbrio, de solução de uma dualidade. O “quatro”, representa a totalidade da consciência, é o homem na sua forma espiritual, enquanto que o “cinco” vem associado ao homem natural, corpóreo.

Jung ressalta a expressão de polaridades presentes nessas figuras: o lado direito e o esquerdo, acima e abaixo. A dinâmica geral representa um princípio de ordenação, que dispõe as diferentes figuras em algum tipo de relação, o que geralmente, proporciona um movimento ou dele resulta. Os movimentos, como a simetria, são resultantes da conciliação entre os opostos, a rotação, se faz presente na expressão de circularidade das figuras, e da expressão de evolução ou de processos de desenvolvimento, temos os movimentos em espiral que caracterizam a geometria dinâmica das Mandalas.

Fioravanti (2003, p.7) ainda afirma que o nome mandala “[...] faz pensar em energia, em algo misterioso, o que provoca uma atração universal pelas mandalas. Como no passado, hoje todos querem saber o que realmente é uma mandala.” A autora também considera que o desenho das mandalas sempre tem por base uma estrutura geométrica, dividindo o espaço em partes simétricas.

Assim, por essa marcante interação entre a geometria e pelo interesse que desperta, a mandala, acreditamos que se tornará um elemento importante no processo educacional, abrindo possibilidades de explorar vários conceitos ligados à representação gráfica.

### 3 TRAJETÓRIA DA PESQUISA

Nossa pesquisa se propõe a investigar se, por meio das construções de Mandalas Geométricas, é possível construir e ressignificar conceitos geométricos diversos de maneira simples sem perder, no entanto, o rigor matemático.

Em discussões sobre o descaso como a Geometria é tratada nos nossos currículos brasileiros e na prática de alguns professores (PAVANELLO, 1989; GAZIRE, 2000; PEREIRA 2001), é comum se ouvirem questionamentos diversos sobre o baixo índice de acertos nas questões de Geometria no que tange aos processos de ingresso das universidades brasileiras ou mesmo sobre o “pavor” que a simples menção da palavra “Geometria” causa aos alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Como professora de Matemática e por consequência, participante desse cenário, nos ancoramos em tais trabalhos e desenvolvemos essa pesquisa como estudo de caso de cunho qualitativo.

Segundo Lüdke e André (1986), baseadas no trabalho de Bogdan e Biklen (1994), cinco características devem contemplar a pesquisa qualitativa, presentes em nosso trabalho, a saber:

A pesquisa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.

Como a pesquisadora também era a professora, a pesquisa aconteceu nos horários das aulas de Matemática, com todos os alunos que faziam parte da turma. Desse modo, garantimos um relacionamento direto e estreito com os participantes e com as etapas que ocorreram os fenômenos estudados.

Os dados coletados são predominantemente descritivos.

A partir das atividades propostas e desenvolvidas, dos registros escritos, de fotos realizadas ao longo do processo e dos protocolos de observação e intervenção executados durante as aulas e fora delas, coletamos os dados que foram utilizados no presente trabalho.

A preocupação com o processo deverá ser maior do que com o produto.

Ao longo do processo, procuramos investigar como a aplicação das atividades se manifestava na prática e no ambiente da sala de aula bem como fora dela. O interesse maior era perceber como as atividades diferenciadas propiciam a construção

do pensamento geométrico, e dessa maneira, sugerir uma aprendizagem diferenciada. Partimos dos conhecimentos prévios dos alunos, dando o real valor às experiências trazidas, acreditando propiciar com essa postura e dinâmica, um espaço aberto a diálogos, questionamentos, intervenções e sugestões de execução de novas tarefas exploratórias. Vale ressaltar que buscamos sempre favorecer a “curiosidade” e a construção do conhecimento geométrico.

O “significado” que os alunos dão às coisas e a sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador.

Segundo os PCN (1998, p.35):

Conhecer a história de vida dos alunos, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais, numa reflexão sobre o ensino de Matemática é de fundamental importância ao professor.

Nessa perspectiva, os primeiros encontros do projeto foram dedicados a pesquisar a “bagagem” que os alunos traziam para as aulas no que se refere principalmente, aos conceitos geométricos, já que a introdução dos mesmos havia sido abordada na série anterior pela maioria dos alunos, mesmo aqueles que não estudaram no colégio.

A análise de dados segue um processo indutivo.

Durante as elaborações e as aplicações das atividades, novos elementos surgiram e a busca por novos aportes teóricos se fizeram necessários para compreender aspectos relevantes para o desenvolvimento da mesma.

Como sugerem Lüdke e André (1986, p.18):

Mesmo que o investigador parta de alguns pressupostos teóricos iniciais, ele procurará se manter constantemente atento a novos elementos que podem emergir como importantes durante o estudo. O quadro teórico inicial servirá assim de esqueleto, de estrutura a partir do qual novos aspectos poderão ser, novos elementos ou dimensões poderão ser acrescentados, na medida em que o estudo avance.

### **3.1 O contexto da pesquisa**

A presente pesquisa foi realizada em três turmas de 6º ano do Ensino Fundamental II de uma escola da rede particular de Belo Horizonte. As turmas perfazem um total de 80 alunos, aproximadamente. A escola é parte integrante de

uma rede nacional e internacional de escolas pertencentes à Congregação das Religiosas do Sagrado Coração de Maria. Com quase 90 anos de fundação, a escola abrange segmentos que vão da educação infantil até o ensino médio, e também, algumas turmas noturnas dedicadas à Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Para ingressar nessa escola o aluno realiza uma avaliação diagnóstica que contempla os conteúdos de Matemática e Língua Portuguesa. A avaliação realizada tem como objetivo avaliar as habilidades e competências dos alunos.

A maioria dos alunos estudados reside na proximidade da escola e a faixa etária varia entre 10 e 12 anos. Todas as turmas têm cinco aulas semanais, ministradas no turno da manhã.

No início do ano o professor elabora um Plano de Trabalho Pedagógico que contempla as competências trabalhadas, os conteúdos, as habilidades, as estratégias de ensino, os temas iluminadores e a quantidade de dias necessários para os conteúdos. Esse plano é baseado na Proposta Curricular de Matemática (2012) elaborado pelo CAEP (Centro Administrativo Educacional da Província). A referida Proposta é subdividida nos eixos:

- Números e operações – construção do sentido numérico;
- Medidas e grandezas;
- Espaço e forma – construção da percepção geométrica;
- Números e operações – construção do sentido algébrico;
- Tratamento da informação.

Nela são destacados os tópicos, as habilidades e as orientações didático-metodológicas.

O ano letivo é subdividido em três etapas e em cada uma delas, é entregue ao aluno o Plano de Ensino Trimestral (PET) que contempla o tema iluminador, os temas e tópicos, as intervenções necessárias, as habilidades que serão trabalhadas ao longo da etapa, as situações de aprendizagem (Estratégias de ensino) e os instrumentos de avaliação e valorização. O professor, de comum acordo com o coordenador de área e com a supervisão pedagógica, tem a liberdade de adequar e conduzir o percurso e o desenvolvimento dos conteúdos ministrados no decorrer da etapa e do ano.

O livro adotado no período da realização da pesquisa é Matemática 6 do projeto Teláris. Esse nome é inspirado na forma latina *telarium*, que significa “tecelão”, para

evocar o entrelaçamento dos saberes na construção do conhecimento. O autor desse livro é Luiz Roberto Dante.

Vale ressaltar que os alunos, em geral, apresentam um nível de aprendizagem bem heterogêneo.

Iremos identificar os alunos por nomes fictícios para preservar suas identidades.

### **3.2 A realização da pesquisa**

Nilbert e Watt (1978) caracterizam o desenvolvimento do estudo de caso em três fases que se superpõem em diversos momentos, sendo difícil precisar as linhas que as separam “[...] sendo uma primeira aberta ou exploratória, a segunda mais sistemática em termos de coleta de dados e a terceira consistindo na análise e interpretação sistemática dos dados e na elaboração do relatório”.

Assim, desenvolvemos o estudo de caso delineando as fases:

1ª FASE: Exame da literatura pertinente e a construção do quadro teórico.

Ao iniciarmos essa pesquisa, procuramos examinar a literatura existente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento geométrico bem como à aprendizagem da Geometria. Analisamos vários artigos, dissertações e teses como Pavanello (1989), Pais (1996), Gazire (2000), Pereira (2001), Soares (2009), Amâncio (2013).

Em seguida, pesquisamos quais aportes teóricos poderiam sustentar a proposta de significação dos conceitos construídos a partir da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. Nessa perspectiva, elencamos o trabalho de Pais (2000), Kopke (2006), Oliveira (2014) e os acrescentamos ao quadro teórico.

Mais adiante, nos deparamos com o trabalho de Yamada (2013) que aborda a construção de Mandalas num contexto de formação de professores de matemática e decidimos assim, por acrescentá-la aos nossos aportes teóricos.

2ª FASE: Elaboração e construção do quadro de atividades

A elaboração e a construção das atividades se superpõem em vários momentos: hora com o interesse da turma, outras com interesse da professora/pesquisadora. Procuramos manter os alunos, sempre, que possível, motivados e “curiosos” em cada atividade desenvolvida. Para nos organizarmos, construímos o Quadro 5 de atividades apresentado a seguir.

Quadro 5 - Atividades realizadas na pesquisa

Encontros/Duração	Objetivos	Materiais	Atividades
<b>1ª Etapa: Identificação dos conceitos geométricos trazidos pelos alunos</b>			
<p>1º: Conversa informal.</p> <p>Duração: 1 aula</p>	<p>Selecionar quais as ideias e conceitos geométricos os alunos apresentavam.</p>	<p>Objetos existentes na sala de aula (prego na parede, buraco da fechadura, rodapé da sala, margem do quadro, piso e teto da sala e outros.).</p>	<p>Na sala: Explorando o nosso ambiente.</p> <p>Em casa: Escrever com as próprias palavras qual o significado de ponto, reta e plano.</p>
<p>2º: Os entes primitivos.</p> <p>Duração: 1 aula</p>	<p>Conceituar os entes primitivos.</p>	<p>Registro dos alunos.</p>	<p>Tabulação dos registros dos alunos.</p>
<p>3º: Explorando os espaços da escola.</p> <p>Duração: 1 aula</p>	<p>Perceber e registrar as formas geométricas em suas várias manifestações</p>	<p>Câmeras digitais e/ou celulares.</p>	<p>Elaboração do quadro: A geometria e suas manifestações.</p>
<p>4º: Um pouco da história do antigo Egito.</p> <p>Duração: 1 aula</p>	<p>Enfatizar a história da matemática.</p>	<p>Texto complementar.</p>	<p>Leitura e aprofundamento do texto.</p>

<b>Encontros/Duração</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Materiais</b>	<b>Atividades</b>
5º: A ideia de reta, suas partes e posições relativas no plano.  Duração: 1 aula	Retomar conceitos e ideias sobre a reta, suas partes e suas posições no plano.	Livro didático.	Atividades do livro: Explorando mapas.
6º: Investigando ângulos.  Duração: 1 aula	Selecionar quais ideias e conceitos os alunos dominavam sobre ângulos.	Livro didático e clipe.	Atividade do livro: Giros e ângulos.
7º: Identificação e medição de ângulos retos.  Duração: 1 aula	Identificar e medir ângulos retos.	Livro didático e dobradura.	Dobradura e ângulo reto.
<b>2ª Etapa: Proposta para os alunos de construção de Mandalas Geométricas</b>			
1º: Apresentação das Mandalas Geométricas.  Duração: 1 aula	Ilustrar e apresentar algumas Mandalas Geométricas.	Mandalas geométricas construídas por outros alunos.	Conversa informal sobre as Mandalas Geométricas.
2º: Atividade corporal.  Duração: 1 aula	Executar atividades corporais relacionadas a ângulos.	Livro didático adotado.	Atividade do livro: Brincando também se aprende.

Encontros/Duração	Objetivos	Materiais	Atividades
<p>3º: Apresentação e manuseio dos instrumentos do desenho geométrico.</p> <p>Duração: 3 aulas.</p>	<p>Apresentar e manusear os instrumentos do desenho geométrico.</p>	<p>Compasso, régua, transferidor, esquadro e caderno de desenho.</p>	<p>Conhecer e manipular os instrumentos do desenho geométrico.</p>
<p>4º: Construção das Mandalas Geométricas com o recurso do desenho geométrico.</p> <p>Duração: 15 aulas.</p>	<p>Construir ângulos com o auxílio do compasso e do transferidor;</p> <p>Aprimorar e ampliar conteúdos já estudados;</p> <p>Construir novos conhecimentos (bissetriz, ponto médio, alinhamento de pontos.).</p>	<p>Compasso, régua, transferidor, esquadro e caderno de desenho.</p>	<p>Construções geométricas.</p>
<p>5º: Construção das Mandalas Humanas.</p> <p>Duração: 10 aulas</p>	<p>Construir Mandalas Geométricas usando o corpo</p>	<p>Fotos selecionadas na <i>internet</i> e câmera fotográfica.</p>	<p>Pesquisar sobre formas de Mandalas Humanas na <i>internet</i>,</p>

Encontros/Duração	Objetivos	Materiais	Atividades
	como referência.		Atividade em grupo para elaboração e execução das Mandalas Humanas;  Registro pela professora das Mandalas Humanas.
6º: Construção das Mandalas Geométricas com o <i>software</i> Geogebra.  Duração: 10 aulas	Utilizar o computador como ferramenta na construção de Mandalas Geométricas.	Computador, <i>software</i> Geogebra.	Atividade em dupla para a construção das Mandalas Geométricas e montagem do livro para colorir.
<b>3ª Etapa: Exposição do Projeto Mandalas na mostra cultural</b>			
1º: Montagem e apresentação aos visitantes do projeto Mandalas Geométricas.  Duração: 4 aulas	Apresentar e relatar aos visitantes a elaboração e a execução das etapas do projeto;  Organizar os visitantes para a construção	Lápis de cor, livro para colorir, registro fotográfico, painel com as Mandalas Geométricas e instalação de fotos.	Atividade em grupo de exposição do trabalho e elaboração de Mandalas Humanas com os visitantes.

Encontros/Duração	Objetivos	Materiais	Atividades
	de Mandalas Humanas.		
2º: Avaliando o projeto. Duração: 1 aula	Avaliar o projeto e propor novas estratégias.	Questionário em papel A4.	Atividade em grupo: Avaliando o projeto Mandalas Geométricas.

Fonte: Elaboração da autora.

3ª FASE: Aplicação das atividades e coleta de dados.

Optamos por aplicar as atividades durante as aulas de matemática e em grupos de quatro ou mais dependendo da atividade a ser executada. Segundo Mizukami (1986, p. 79),

O trabalho em equipe, como estratégia, adquire com Piaget consistência teórica que extrapola a visão do grupo como em elemento importante na socialização do indivíduo. O trabalho com os outros indivíduos é decisivo no desenvolvimento intelectual do ser humano. A interação social decorrente do trabalho em grupo, assim como o fato dos indivíduos atuarem nos grupos compartilhando ideias, informações, responsabilidades, decisões, são imprescindíveis ao desenvolvimento operatório do ser humano. Os demais membros do grupo funcionam como uma forma de controle lógico do pensamento individual.

Os instrumentos utilizados para proceder nossa coleta de dados na presente pesquisa foram:

- a) Documentos que norteiam a educação no país.
- b) Livros didáticos de Matemática e Desenho Geométrico bem como os respectivos manuais, e artigos, dissertações e teses referentes ao ensino/aprendizagem da Geometria.

A escolha do primeiro item vem ao encontro de se procurar inteirar sobre os interesses oficiais que norteiam e regulamentam as diretrizes e bases da educação nacional.

O motivo pela escolha do segundo item se deve ao fato de que uma única análise, considerando apenas os documentos oficiais, não nos proporciona uma ideia clara das reais condições que a Geometria é tratada nos currículos escolares.

4ª FASE: Análise dos dados.

Os relatos de observação, as análises de documentos e as demais informações, como questionários e avaliações aplicados, foram organizados de modo a nos fornecer dados relevantes à elaboração, ao desenvolvimento e a aplicação das atividades propostas. Esses também serão reavaliados e utilizados para inferência e aprimoramento da pesquisa.

Bogdan e Biklen (1982) recomendam alguns procedimentos que o pesquisador deve ter para não correr o risco de terminar a coleta de dados com um amontoado de informações difusas e irrelevantes. São eles:

1) Delimitação progressiva do foco de estudo

Na fase inicial, procuramos adquirir uma visão mais ampla da situação, dos sujeitos, do contexto e das principais questões de estudo. A seguir, tentamos delimitar algumas questões que acreditamos serem de suma importância para tornar a coleta de dados mais concentrada e produtiva. Steke (1981) denomina tal ação como “focalização progressiva”.

2) A formulação de questões analíticas

Ao usarmos o processo de delimitação progressiva do foco principal da investigação, formulamos algumas questões ou proposições específicas, como por exemplo: quais conteúdos foram abordados e trabalhados no segmento anterior pelas professoras no que se refere ao estudo da Geometria? Como os livros didáticos utilizados nas séries anteriores abordam o estudo da Geometria?

3) Aprofundamento da revisão de literatura

Antes da fase final da coleta de dados voltamos à literatura escolhida para nos auxiliarmos durante a análise e levantamos algumas perguntas: o que realmente se ensina de geometria na sala de aula? O que tem sido proposto para o ensino de Geometria nas propostas curriculares, livros didáticos e outras publicações?

4) Testagem de ideias junto aos sujeitos

Sempre que possível elencávamos alguns alunos para testar junto a eles certas percepções do pesquisador. Essas informações reunidas foram de grande contribuição para esclarecer alguns pontos obscuros da análise e nos orientar quais procedimentos seriam mais pertinentes ao longo de cada atividade proposta.

5) Uso extensivo de comentários, observações e especulações ao longo da coleta

Os registros de algumas observações, acontecimentos, esclarecimentos e sentimentos que apareceram ao longo da pesquisa, serviram de orientação para não nos perdermos ao longo da análise final dos dados.



## **4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS ENCONTROS**

Neste capítulo descreveremos as atividades realizadas, apresentaremos os resultados alcançados, seguidos das respectivas análises e inferências.

### **4.1 1ª Etapa: Identificação dos conceitos geométricos trazidos pelos alunos**

Ao iniciarmos este trabalho, buscamos identificar os conceitos geométricos trazidos pelos alunos acreditando que tais informações seriam de suma importância na descoberta de um caminho a ser trilhado. Nessa direção, procuramos criar algumas estratégias que possibilitassem estimular o desenvolvimento e a realização individual e coletiva dos estudantes.

Embasados na experiência adquirida no exercício do magistério, acreditamos que identificar o “conhecimento prévio” dos alunos é uma boa estratégia a ser desenvolvida no dia a dia dos docentes. Percebemos, também, que, de maneira corriqueira, os conceitos desenvolvidos no decorrer das atividades práticas das crianças e suas interações sociais imediatas, são subestimadas e que, os conteúdos são geralmente, tratados de maneira única e esquematizada, impossibilitando aos alunos, desfrutar da riqueza de suas experiências pessoais. Nesse sentido, acreditamos que precisamos ser prudentes para que excessos e distorções na definição do que seja a “realidade do aluno” não promovam o efeito contrário ao que se propõe.

Assim, de acordo com o proposto, optamos nessa etapa da pesquisa em subdividi-la em sete encontros com duração de aproximadamente, 1 aula cada um e como descritos a seguir no Quadro 6. Em seguida, detalhamos cada um deles.

Quadro 6 - 1ª etapa da pesquisa

<b>1ª Etapa: Identificação dos conceitos geométricos trazidos pelos alunos</b>			
<b>Encontros/Duração</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Materiais</b>	<b>Atividades</b>
1º: Conversa informal. Duração: 1 aula	Selecionar quais as ideias e conceitos geométricos os alunos apresentavam.	Objetos existentes na sala de aula (prego na parede, buraco da fechadura, rodapé da sala, margem do quadro, piso e teto da sala e outros.).	Na sala: Explorando o ambiente da sala.  Em casa: Escrever com as próprias palavras qual a ideia ou o significado de ponto, reta e plano.
2º: Os entes primitivos. Duração: 1 aula	Conceituar os entes primitivos.	Registro dos alunos.	Tabulação dos registros dos alunos.
3º: Explorando os espaços da escola Duração: 1 aula	Perceber e registrar as formas geométricas em suas várias manifestações	Câmeras digitais e/ou celulares.	Elaboração do quadro: A geometria e suas manifestações.
4º: Um pouco da história do antigo Egito. Duração: 1 aula	Enfatizar a história da matemática.	Texto complementar.	Leitura e aprofundamento do texto.

5º: A ideia de reta, suas partes e posições relativas no plano.  Duração: 1 aula	Retomar conceitos e ideias sobre a reta, suas partes e suas posições no plano.	Livro didático.	Atividades do livro: Explorando mapas.
6º: Investigando ângulos.  Duração: 1 aula	Selecionar quais ideias e conceitos os alunos dominavam sobre ângulos.	Livro didático e clipe.	Atividade do livro: Giros e ângulos.
7º: Identificação e medição de ângulos retos.  Duração: 1 aula	Identificar e medir ângulos retos.	Livro didático e dobradura.	Dobradura e ângulo reto.

Fonte: Elaboração da autora.

#### **4.1.1 1º encontro: Conversa Informal**

Iniciamos nosso encontro por uma conversa informal, pois, como já citado, acreditamos que com base nas observações realizadas, no que se refere à forma de expressar dos alunos, como pensam, quais dificuldades apresentam, quais ideias dominam, teremos subsídios para nortear e fomentar nossos próximos passos durante a pesquisa. Nesse momento em especial, acreditamos que a troca de ideias, de percepções e de experiências se tornaram extremamente enriquecedoras para a pesquisa em questão. Segundo Dante (2015, p.15), “Ao se expressar oralmente, o aluno organiza suas ideias e seu pensamento. Ao verbalizar conceitos e procedimentos, ele promove a comunicação matemática, que auxilia a aprendizagem”.

Nesse encontro, procurávamos informações acerca de quais conteúdos de geometria e qual o grau de complexidade os alunos já haviam trabalhado nos anos anteriores. Nesse sentido, aproveitamos o momento para identificar as ideias que eles tinham sobre os entes primitivos explorando alguns objetos da sala de aula. Ressaltando um extrato da amostra, apresentamos o início da conversa, questionando:

Professora: Vocês já estudaram sobre a Geometria?

Ana: Sim! O ano passado, estudamos sobre retas, ângulos, figuras geométricas e áreas.

Professora: Ah! Entendi. Mas quais são as “coisas” mais básicas que precisamos para fazer um desenho?

Pedro: Uai, de um risco.

Professora: Certo. E um risco no papel, nos dá a ideia de quê?

Ana: De uma linha.

Pedro: De uma reta.

Professora: Isso mesmo. Porém, de que é feita a linha ou a reta?

Pedro: De pontos.

Professora: Muito bem. Mas para desenharmos precisamos de uma superfície para registrar o nosso desenho, correto? E essa superfície, alguém sabe me disser qual o nome que damos na Geometria?

Ana: É o plano, né!

Professora: Correto, Ana. Então quer dizer que para desenharmos, precisamos desses três componentes: o ponto, a reta e o plano. Aqui na sala, vamos identificar alguns deles?

Joaquim: A porta pode ser um plano. O prego na parede pode ser um ponto e o rodapé pode ser uma reta.

Fernanda: O quadro é um plano, o buraco da fechadura é um ponto e a madeira na parte de baixo do quadro é uma reta.

Letícia: O chão é um plano, a linha de encontro das paredes é uma reta e o pingo da letra i um ponto.

Professora: Muito bem, todos estão corretos no que diz respeito às ideias desses três componentes. Vamos tentar usar a língua escrita para documentar nossas ideias? Quem vai começar e por onde vamos começar?

Ana: A reta é um tanto de pontinhos bem juntinhos. Mas, o ponto e o plano ... Não “dá” pra falar.

Professora: Mas se não conseguimos dizer o que é um ponto, como podemos dizer o que é uma reta? Vocês não falaram que a reta é feita de pontinhos bem juntinhos? Então como vamos fazer? Pensem e me digam amanhã.

Pedro: Mas como assim?!

Professora: Pensem e me digam amanhã. Combinado?

Nesse momento de muitas dúvidas e questionamentos, propusemos aos alunos que, em casa, escrevessem com as próprias palavras o significado ou a ideia que tinham sobre o ponto, a reta e o plano. Ressaltamos que procurassem fazer a tarefa sem recorrer a outras fontes de pesquisa, pois nosso interesse era de verificar como essas ideias tinham sido assimiladas e até que ponto os alunos dominavam esses conceitos.

Pode-se entender, diante dos fatos narrados, que o objetivo principal de selecionar quais ideias e conceitos geométricos os alunos traziam a partir de um ambiente que promovesse a troca de ideias, de percepções e de experiências foi um importante norteador e nos auxiliou significativamente na decisão de tomadas para os próximos encontros.

#### **4.1.2 2º encontro: Os entes primitivos**

Nesse encontro, ao chegar à sala de aula, percebemos que a maioria estava preocupada, pois segundo o desabafo dos alunos, eles haviam tentado executar a atividade proposta de casa, mas não sabiam se estava certos ou errados. Abaixo, um relato do diálogo estabelecido entre os participantes da pesquisa e a professora, que começou questionando:

Professora: Bom dia gente! Vamos retomar os nossos estudos da Geometria?! Peguem, por favor, a atividade deixada para ser feita em casa.

Pedro: Eu tentei escrever e só deu para dizer que o ponto é marca “deixada” pela caneta no papel, que o papel é o plano e que a reta é um tanto de pontinhos juntos.

Mariana: O ponto é uma bolinha pequena, a reta, um tanto de bolinha uma atrás da outra e o plano, é o teto.

Professora: Mas é isso mesmo! O ponto, a reta e o plano não possuem uma definição, o que nós possuímos deles são ideias. Por isso, são chamados de entes primitivos, pois não possuem uma definição.

Pedro: Mas como assim? Tem que ter um significado, professora.

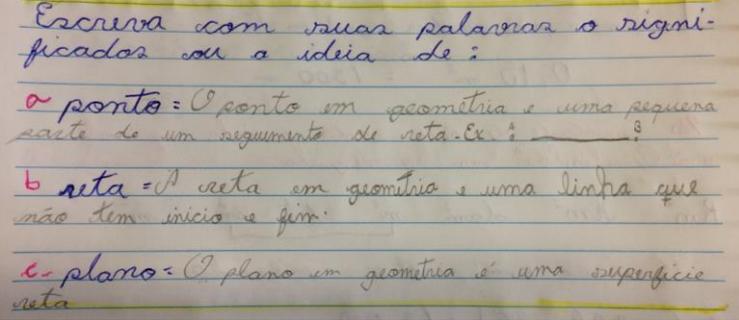
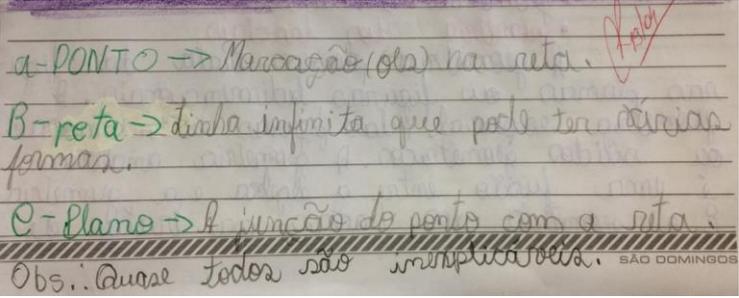
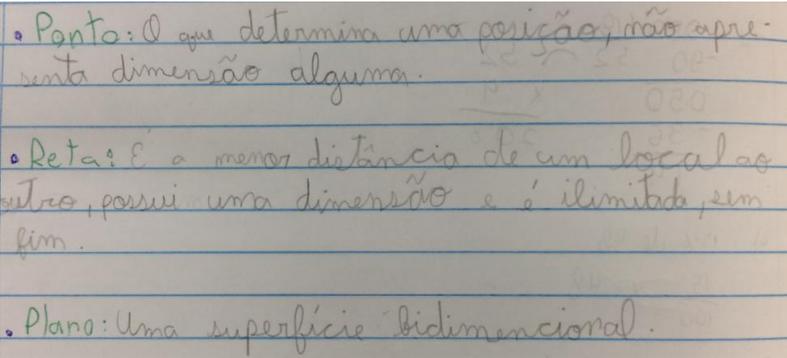
Professora: Vamos fazer o seguinte: vou recolher os cadernos e ver o que vocês escreveram. Depois voltamos ao nosso impasse, certo?!

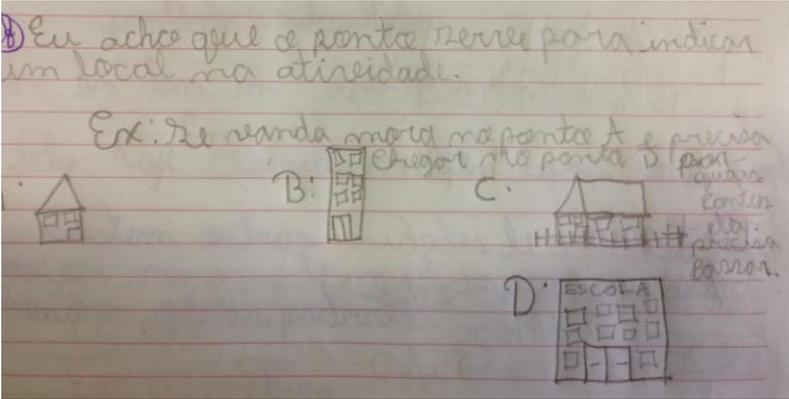
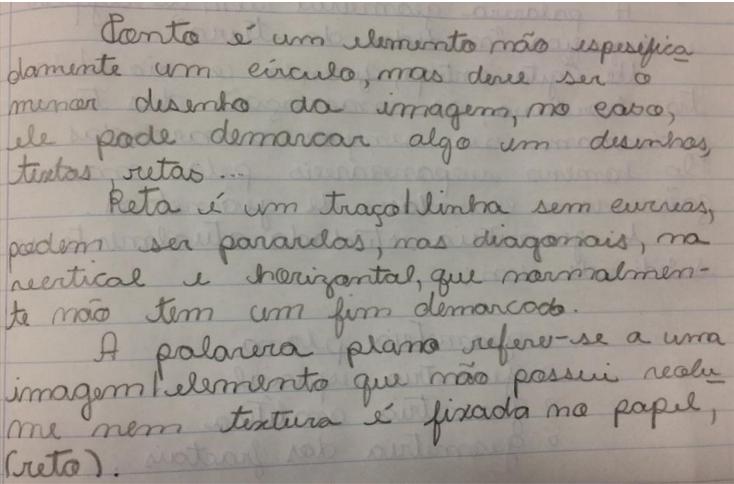
Deixamos o diálogo em aberto, pois como planejado, os próximos passos seriam o de recolher os cadernos e, a partir das informações obtidas, realizar uma seleção prévia de registros que intervissem significativamente na construção dos conceitos de ponto, de reta e de plano.

Na aula seguinte, de posse dos registros selecionados, retomamos o assunto sobre os entes primitivos. Sentados em círculo deixamos, inicialmente, que trocassem as ideias que haviam escrito. Percebemos que as ideias e dúvidas eram praticamente as mesmas. A seguir, projetamos no quadro os registros selecionados previamente e, logo depois, munidos de todas as informações, executamos as intervenções que acreditamos pertinentes ao objetivo proposto. Os registros selecionados e expostos

são apresentados no quadro 7 abaixo. Porém, os comentários apresentados foram omitidos durante a apresentação aos alunos.

### Quadro 7 - Registros dos alunos acerca da ideia dos entes primitivos da Geometria

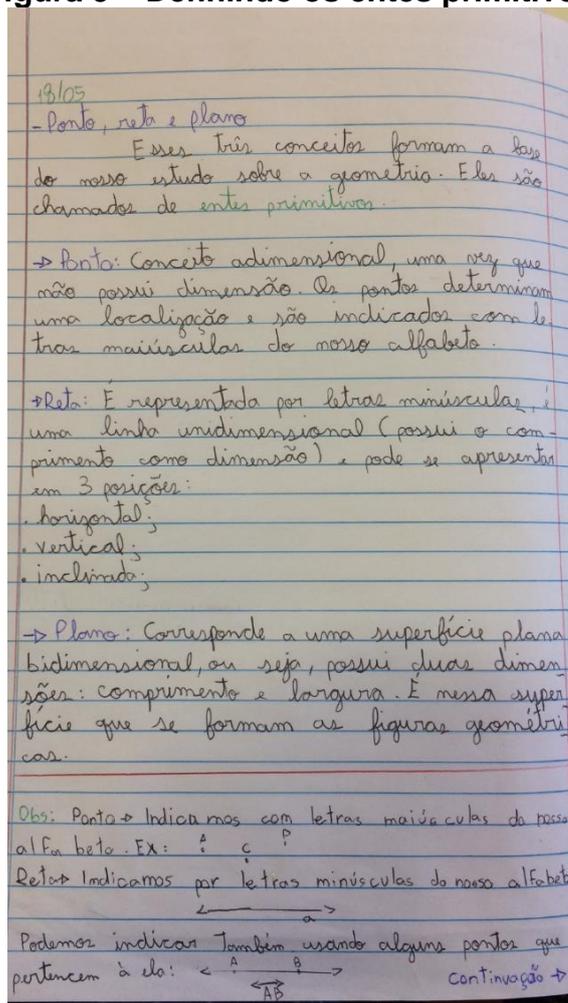
<p style="text-align: center;"><b>Registro 1</b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Comentário do registro 1</b></p> <p>Nesse registro, percebemos que a aluna demonstra um bom domínio das ideias sugeridas pelos entes primitivos geométricos.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Registro 2</b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Comentário do registro 2</b></p> <p>Nesse registro, a aluna coloca uma observação interessante em que mostra claramente, a “impossibilidade” da explicação dos entes primitivos. Esse registro será retomado durante as aulas subsequentes.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Registro 3</b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Comentário do registro 3</b></p> <p>O aluno apresenta nesse registro, alguns termos, como posição, dimensão, distância, ilimitado, superfície e bidimensional, que serão retomados para o aprimoramento do vocabulário da sala nas aulas subsequentes.</p>

<p style="text-align: center;"><b>Registro 4</b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Comentário do registro 4</b></p> <p>O fato de como o desenho se faz presente no cotidiano dos alunos, é claramente percebido nesse registro. A ideia de ponto aqui representada está interligada à ideia de localização.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Registro 5</b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Comentário do registro 5</b></p> <p>Nesse registro, o aluno mostra claramente a ideia de ser o ponto uma figura adimensional. Apresenta também ideias que serão retomadas e aprofundadas como curvas, paralelas, diagonais, verticais, horizontais durante aulas subsequentes.</p>

**Fonte: Dados da pesquisa. Fotos da pesquisadora.**

A partir da exposição e análise de todos esses relatos o passo seguinte da nossa pesquisa, foi organizar e montar na lousa, juntamente com os alunos, todas as ideias e considerações apresentadas. Vale ressaltar o envolvimento dos alunos durante a atividade. Sentiam-se motivados, interessados e “importantes” ao verem os próprios registros projetados do quadro. Aproveitamos o momento para ressaltar que a Matemática tem uma linguagem própria e que, para facilitar a comunicação de todas as suas ideias, precisamos entender seus códigos. Assim, apresentamos aos alunos a maneira que, usualmente “definimos” esses entes primitivos. O registro realizado é apresentado na figura 5 a seguir:

**Figura 5 – Definindo os entes primitivos**



**Fonte: Dados da pesquisa.**

Ao final desse encontro, acreditamos ter alcançado o objetivo inicial proposto de conceituar os entes primitivos a partir de uma construção elaborada dos conhecimentos prévios trazidos pelos alunos e alinhada à nossa formação acadêmica.

É perceptível ao pesquisador, como, ao oportunizar a troca de ideias, de experiências, de informações, a organização do pensamento se dá de forma clara e eficaz.

Para prosseguirmos com o planejado pela pesquisa, propusemos aos alunos registrar, no próximo encontro, com o auxílio de máquinas fotográficas digitais e/ou celulares, algumas formas geométricas no interior da escola. Percebíamos que a euforia era contagiante.

### **4.1.3 3º encontro: Explorando os espaços da escola**

Começamos nosso 3º encontro com as seguintes colocações:

Professora: Bom dia a todos! Vamos retomar nossa última aula?! Vivemos num mundo de formas e imagens. Elas estão em todo lugar: na natureza, nas construções, nas artes. O estudo das formas se configura como um dos mais importantes ramos da Matemática, a Geometria. Assim, convido-os a registrar o nosso mundo geométrico!

Ana: Vamos tirar fotos de quê, professora?

Professora: De tudo que lhe parecer figura geométrica.

Mateus: De qualquer coisa?

Professora: Sim. Se tiverem alguma dúvida é só me chamarem. Vamos lá?!

Assim, indo de encontro à ideia apresentada e com o objetivo de fazer com que os alunos percebam o mundo a sua volta, propusemos que os mesmos identificassem e registrassem em suas máquinas fotográficas digitais e/ou em seus celulares, algumas formas e imagens que mostrassem o nosso “mundo geométrico”, em especial, a nossa “escola geométrica”.

Para realizar os registros, dividimos, no começo do encontro, a sala em grupos de quatro ou cinco alunos, respeitando a escolha dos mesmos. Porém, vale ressaltar que ao longo da pesquisa esses grupos sofreram alterações em alguns momentos seja no número de integrantes, seja em prol de seus próprios interesses na realização das atividades propostas. Optamos em escolher o ambiente da escola para facilitar a participação e a condução do trabalho pelos participantes da pesquisa já que a faixa etária dos estudantes varia entre 10 e 12 anos.

Oportunizamos, então, que saíssem pela escola e registrassem utilizando os celulares e/ou as máquinas fotográficas digitais, tudo que lhes remetiam às formas geométricas. Abaixo na figura 6, apresentamos o registro dessa atividade.

**Figura 6 – Registrando as formas geométricas no interior da escola**



Na arquitetura da fachada da escola, esse grupo registra várias formas geométricas.



No parquinho, “descobrem” que várias vezes brincaram “dentro” da geometria!



Algumas formas geométricas, como a parábola, e até mesmo o pentágono foram percebidos por esse grupo de alunos.



Perceber a ideia de formas geométricas na natureza foi uma tarefa bem difícil para os alunos.

**Fonte: Dados da pesquisa.**

Após os registros, os alunos foram orientados a selecionarem as melhores fotos e enviá-las via e-mail ou trazê-las salvas em *pen drive* no próximo encontro.

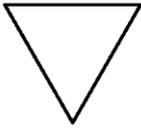
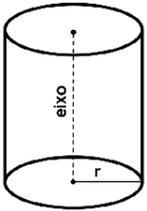
Vale ressaltar que ao final do encontro, os alunos se mostravam encantados, perplexos e curiosos pelos próximos encontros e pelas próximas tarefas.

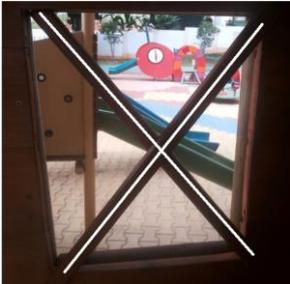
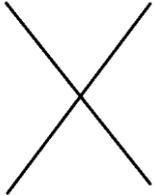
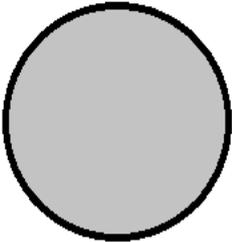
Já de posse da seleção realizada pelos alunos e embasados pela categorização apresentada por Gazire (2000) em sua tese de doutorado, organizamos o quadro 8 exposto a seguir. É perceptível que as manifestações propositais, como as

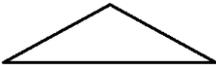
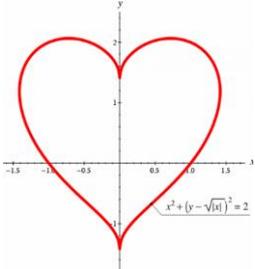
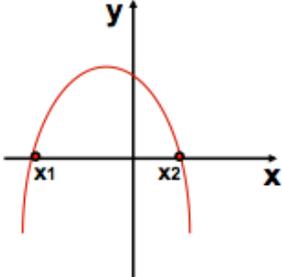
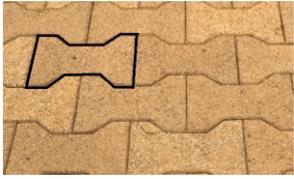
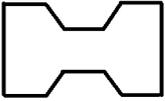
encontradas nas construções e nas artes, foram as que mais se evidenciaram. Já, as manifestações espontâneas, como, por exemplo, as naturais, demoraram um pouco mais para serem percebidas e registradas pelos alunos.

Durante a exposição do quadro 8, aproveitamos o momento para explorarmos o máximo das imagens, observando, analisando, ressaltando e informando aos alunos sobre a categorização utilizada acerca das manifestações naturais, acidentais e artesanais da geometria proposta por Gazire (2000). Vale ressaltar o encantamento dos alunos com as informações repassadas e como eles se surpreenderam com o produto final.

**Quadro 8 - Um mundo de formas**

FORMAS AO NOSSO REDOR	IDEIAS SUGERIDAS	MATEMATIZAÇÃO
<p>CATA VENTO DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE POLÍGONO</p> 	<p>TRIÂNGULO</p> 
<p>BRINQUEDO DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE CORPO REDONDO</p> 	<p>CILINDRO</p> 
<p>MURO DA LATERAL DA CANTINA</p> 	<p>IDEIA DE CURVAS</p> 	<p>ELIPSE</p> 

FORMAS AO NOSSO REDOR	IDEIAS SUGERIDAS	MATEMATIZAÇÃO
<p>PAINEL DA CANTINA</p> 	<p>IDEIA DE POLÍGONO</p> 	<p>HEXÁGONO</p> 
<p>JANELA DA CASINHA DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE RETAS QUE SE CRUZAM</p> 	<p>RETAS CONCORRENTES</p> 
<p>CASINHA DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE POLÍGONO</p> 	<p>PENTÁGONO</p> 
<p>RELÓGIO DA PAREDE</p> 	<p>IDEIA DE FIGURA PLANA</p> 	<p>CÍRCULO</p> 

FORMAS AO NOSSO REDOR	IDEIAS SUGERIDAS	MATEMATIZAÇÃO
<p>FACHADA DO COLÉGIO</p> 	<p>IDEIA DE POLÍGONO</p> 	<p>TRIÂNGULO</p> 
<p>TRONCO DA MANGUEIRA DO COLÉGIO</p> 	<p>IDEIA DE CURVAS</p> 	<p>CARDÍOIDE</p> 
<p>CASINHA DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE CURVAS</p> 	<p>PARÁBOLA</p> 
<p>CHÃO DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE POLÍGONO</p> 	<p>DODECÁGONO</p> 

FORMAS AO NOSSO REDOR	IDEIAS SUGERIDAS	MATEMATIZAÇÃO
BRINQUEDO DO PARQUINHO 	IDEIA DE CORPOS REDONDOS 	CONE E CILINDRO 

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse encontro, percebemos que os alunos ainda não dominavam a nomenclatura de algumas formas geométricas, o que já era esperado. Acreditamos que esse retorno vem reforçar a importância de se entender e de se aprimorar uma linguagem matemática única e universal com o objetivo de facilitar a comunicação entre as pessoas.

Os comentários dos alunos ao trabalho realizado refletiram o gosto que tiveram em explorar e realizar essa tarefa e, muitos deles, verbalizaram esse contentamento. A seguir, apresentamos alguns desses comentários: “Nossa professora, tudo é geometria!”; “Nunca tinha parado pra pensar assim.”; “Brincamos várias vezes dentro da geometria.” (quando se referiam ao parquinho); “Até na natureza tem geometria!”.

Perceber que vivemos inseridos num mundo de formas e imagens foi o principal objetivo desse encontro. Acreditamos que ao proporcionarmos aos alunos novas experiências, só teremos a contribuir e a enriquecer o processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, os autores Rêgo, Rêgo e Vieira (2012, p.6), salientam que:

Há fortes indicações de que insistir no ensino de Geometria por meio da aula expositiva, utilizando a linguagem formal, sem envolver o aluno em atividades práticas, não permite que a maioria destes desenvolva conhecimentos que respondam às demandas de saberes matemáticos atuais – sejam formativas ou funcionais.

Desse modo, a atividade desenvolvida permitiu que a professora atingisse seu objetivo preestabelecido e está em consonância não só com a proposta dos autores citados, mas, em consonância com a proposta da pesquisa.

#### **4.1.4 4º encontro: Um pouco da história do antigo Egito**

Dando continuidade à nossa pesquisa, e embasados pela citação de D'Ambrósio (1996, p. 29) que nos sugere que *uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino*, começamos o nosso terceiro encontro “contando” um pouco da história do antigo Egito.

Embasados em nossas leituras e estudos, acreditamos que ao trabalharmos com a História da Matemática, iremos possibilitar aos alunos, a perceberem que a matemática é uma construção humana, e que o seu desenvolvimento se faz a partir das necessidades práticas construídas para atender a determinadas demandas da sociedade. Nesse sentido, procuramos levar os alunos a observarem os aspectos humanos de seu desenvolvimento bem como conhecerem as ideias e as circunstâncias dos homens que a criaram. Esperamos com tal atitude estreitar os laços entre os alunos e matemática.

Nessa perspectiva, informamos aos alunos das cheias do rio Nilo, de como a sociedade egípcia se organizava em torno desse recurso, da necessidade de se redefinir e estabelecer as marcações originais da terra quando o rio Nilo alagava as terras e mencionar que esse trabalho passou a ser chamado de Geometria (**Geo** – terra; **metria** – medida). Desse modo, a Geometria deu origem ao estudo da ordem espacial mediante a medição das relações entre as formas.

Alguns alunos já conheciam parte dessa história. Incentivamos a participação de todos e observamos os conhecimentos que já dominavam sobre o assunto tratado, prática que acreditamos ser crucial ao trabalho do professor/pesquisador. Previamente, elencamos um texto do livro didático Matemática da editora Moderna do ano de 2002 escrito por Edwaldo Bianchini para embasar o referido assunto. Abaixo, na figura 7 o texto apresentado aos alunos:

Figura 7 – Texto apresentado aos alunos

## *A Matemática na História*

Afirmar com precisão sobre a origem das medidas de comprimento e áreas é difícil, pois os primórdios desse assunto são mais antigos do que a escrita. O homem neolítico, que viveu na era da pedra polida, pode ter medido terras, uma vez que os desenhos e figuras dessa época sugerem preocupação com relações espaciais. Supomos que essa preocupação tenha aberto caminho para a Geometria. Somente nos últimos 6.000 anos é que o homem foi capaz de expressar descobertas e pensamentos de forma escrita, tornando-se possível precisar melhor alguns fatos históricos.

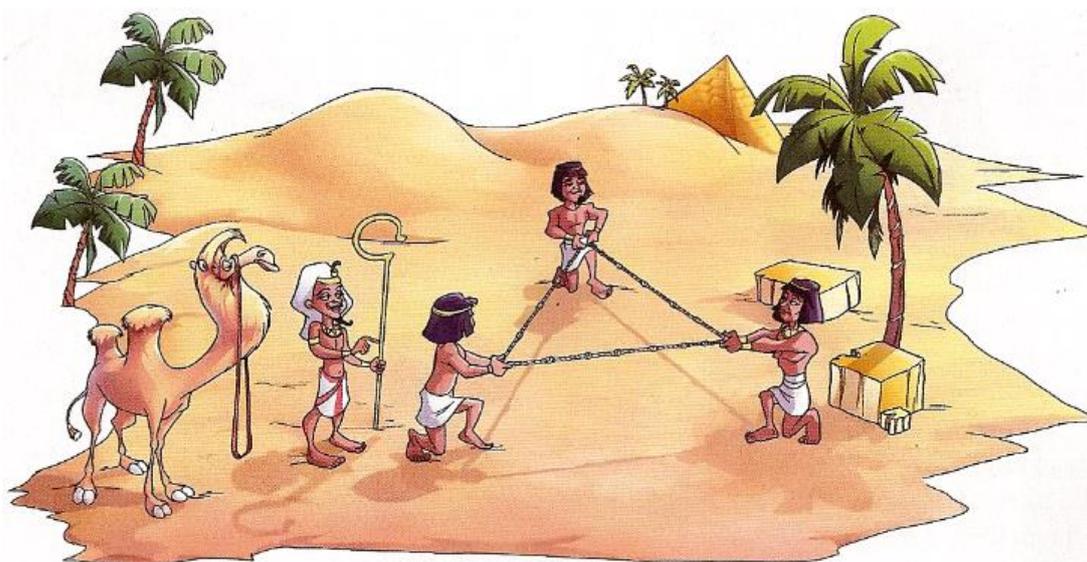
As origens do uso de medidas de comprimento e áreas ocorreram, provavelmente, no Egito ou na Babilônia. Nessas culturas, faziam-se edificações, como as famosas pirâmides egípcias, construídas próximas ao rio Nilo. Havia também oficiais ou inspetores para medir as terras, já que o estabelecimento de fronteiras era uma preocupação constante.

No Egito, em particular, acreditava-se que a arte de medir tinha surgido, ainda, da necessidade prática de fazer novas medidas de terra – agrimensura – após cada inundação anual do vale do rio Nilo. A agrimensura é, portanto, uma das artes mais antigas praticadas pelo homem.

Além de reestabelecer os antigos limites das áreas inundadas dos diversos proprietários, os agrimensores tinham muitas outras funções relacionadas à medida de terras. Assim, esses inspetores deviam aprender Matemática de natureza prática, envolvendo técnicas de medida de modo a permiti-los medir distâncias e áreas, não apenas para orientar as vistorias que faziam, como também para fazer qualquer cálculo requerido pelo governo ou por autoridades locais com o intuito de estabelecer taxações ou com outras finalidades.

Por exemplo, na prática, os agrimensores já sabiam que um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 tinha um ângulo interno de  $90^\circ$ . Desse modo, os agrimensores faziam 12 nós ( $3 + 4 + 5$ ) numa corda a distâncias iguais. Amarravam as pontas e esticavam a corda, dobrando-a convenientemente em

três dos nós. Isso lhes permitia traçar perpendiculares e paralelas, necessárias às tarefas de agrimensura.



O fato de os agrimensores serem chamados de “estiradores de corda” deve-se ao uso dessas cordas com unidade de medida assinalada tanto para traçar as bases dos templos, como para realinhar demarcações apagadas de terras. Essas cordas eram esticadas para que se verificasse quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno ou no comprimento que se desejava medir.

Os agrimensores ainda acompanhavam os proprietários de terra na época de colheita de trigo e cevada para medir os campos. A partir dessas medidas, era possível determinar a parte do cereal que o camponês deveria entregar às autoridades.

A tradição de agrimensores perdurou por muito tempo, sendo transmitida para outras culturas, como, por exemplo, a civilização romana, na qual os agrimensores eram inspetores de terras da Roma Antiga.

**Fonte: BIANCHINI, 2002, p. 231.**

O objetivo de se apresentar o texto acima era de fazer com que os alunos entendessem que a construção da matemática está intimamente relacionada à resolução de problemas do dia a dia.

Depois de apresentado e discutido junto aos alunos, ressaltamos não só o objetivo citado, mas também a importância de se conhecer a história da matemática e entender que a mesma faz parte da nossa própria história.

#### **4.1.5 5º encontro: A ideia de reta, suas partes e suas posições relativas no plano.**

Continuando a investigação acerca dos conceitos prévios que os alunos dominavam, retomamos a ideia (ou o conceito) de reta e de suas partes: a semirreta e o segmento de reta. Concordamos com os autores Rêgo, Rêgo e Vieira (2012, p. 7), quando dizem que:

Os conceitos são ideias a serem construídas pelo aluno. Esta construção exige trabalho de mediadores (professores, colegas, materiais instrucionais, entre outros) que contribuam para a atribuição de significado aos fenômenos estudados, no caso associados às formas, ao espaço, ou suas representações. [...] No processo de construção do conceito, trabalha-se a definição, que corresponde à explicitação do conceito por meio de uma linguagem na forma oral ou escrita.

Partimos de um diálogo informal acerca dos conceitos mencionados e obtivemos as seguintes informações:

Professora: Gente, quais são as partes da reta?

Felipe: Os pontos?!

André: Não Felipe. É a semirreta que é a parte da reta que tem começo e não tem fim.

Professora: Você está certo André.

Amanda: Mas tem também o segmento de reta, né, professora? Ele tem começo e fim.

Professora: Sim, Amanda. Mas por que não podemos dizer que o Felipe também está certo?

André: Sei lá!

Professora: Porque como já falamos, a reta é formada por vários pontos. Portanto, se tomarmos um ponto, esse irá separar em 2 partes. Cada uma dessas partes é o que chamamos de semirreta. O ponto que dividiu a reta é chamado de origem da semirreta. Agora de tomarmos 2 pontos distintos, a parte compreendida entre eles, será o segmento de reta. A palavra segmento vem do latim "segmentum", que significa "corte".

Depois de esclarecidas as dúvidas, propomos aos alunos que lessem e resolvessem os exercícios do livro texto que contemplavam os assuntos mencionados. Tais atividades salientam:

- a escrita simbólica da reta e de suas partes;

- a relação entre a geometria plana com a geometria espacial ao trabalhar com os elementos dos poliedros;
- abordam a ideia de que infinitas retas passam por um ponto e de que dois pontos distintos determinam uma única reta;
- relacionam pontos pertencentes ou não a uma reta dada;
- salientam a interseção entre duas retas oblíquas como um ponto comum entre elas;
- abrem espaço para a discussão em equipe com a discussão acerca da diferença entre segmento de reta e reta.

Aproveitamos esse encontro para verificar e explicitar também, as posições relativas de duas retas distintas contidas em um mesmo plano (retas paralelas, retas concorrentes perpendiculares e retas concorrentes oblíquas). As atividades do livro referentes a esse assunto também foram trabalhadas nesse encontro. A fim de elucidar o leitor acerca de algumas atividades propostas no livro texto, optamos em apresentar abaixo na figura 8 a introdução do autor Dante (2015) em relação às atividades que abordam essas posições:

**Figura 8 - Introdução ao assunto**

## 5 Retas paralelas e retas concorrentes

Veja o desenho das ruas ao lado.

As ruas 8 e 9 são **paralelas**. Elas recebem esse nome porque mantêm sempre a mesma distância uma da outra.

A rua Samambaia e a rua 8 se cruzam. Por isso, dizemos que são **concorrentes**. No cruzamento formam-se quatro ângulos: dois são agudos e dois são obtusos. Nesse caso, as ruas são **concorrentes oblíquas**.

A rua 9 e a avenida 20 também são concorrentes, mas, nesse caso, os quatro ângulos formados são retos. Por esse motivo, a rua 9 e a avenida 20 são **concorrentes perpendiculares**. Comente com os alunos que, em algumas cidades brasileiras, as ruas e as avenidas são numeradas. A cidade de Rio Claro, no estado de São Paulo, por exemplo, é uma delas. Aproveite e pergunte a eles se conhecem outras.



Desenho representando algumas ruas.

Fonte: DANTE, 2015, p. 89.

Como sugerido por Dante (2015), aproveitamos para explorar as ruas próximas da escola que apresentam tais posições, atividade esta que foi realizada através de informações que os alunos tinham sobre o redor da escola, já que a maioria mora próximo ao colégio. Com o objetivo de ampliar e fixar ainda mais os conceitos apresentados, procuramos relacionar o conteúdo com outras áreas do conhecimento

e propomos a atividade criada pelo já mencionado autor e intitulada *Outros contextos* que contemplava a ideia das posições relativas entre retas no plano, tal como se pode visualizar na figura 9 a seguir. Dante (2015, p.16) esclarece que: “O objetivo é reforçar, ampliar e fixar conceitos e procedimentos. Resolver problemas é fundamental para ensinar o aluno a enfrentar situações novas.”

**Figura 9 - Atividade aplicada na pesquisa**

Leo mora em uma cidade na qual as avenidas estão dispostas na direção norte-sul e as ruas na direção leste-oeste. A casa dele está localizada em uma das esquinas dessa cidade. A escola em que ele estuda fica localizada em outra esquina, duas quadras ao sul e três quadras a leste.

Veja exemplos de resposta para os itens b e c deste exercício no Manual do Professor.

o) Localize a escola de Leo. *Está localizada na rua 4, na esquina com a avenida 19.*

b) Descreva um possível caminho para Leo ir de sua casa até a escola.

c) Quantos caminhos possíveis Leo pode seguir para ir de sua casa até a escola percorrendo sempre a mesma distância de cinco quadras?

d) Qual é a posição relativa de quaisquer duas avenidas? *São sempre paralelas.*

e) Qual é a posição relativa de uma rua e uma avenida? *São sempre perpendiculares.*

Fonte: DANTE, 2015, p. 108.

#### 4.1.6 6º encontro: Investigando os ângulos

Tendo sempre em mente o objetivo primordial dessa etapa em identificar os conceitos trazidos pelos alunos, nesse encontro, procuramos investigar sobre a ideia e os conhecimentos referentes a ângulos que os alunos dominavam numa conversa informal. Conversamos sobre a ideia de ângulo e sobre os elementos que o compõe.

Professora: No começo das aulas de geometria, vocês me disseram que também já estudaram sobre os ângulos. O que vocês têm a me dizer sobre essa figura?

Pedro: uai que tem a forma assim: (Abriu dois dedos da mão e nos mostrou a ideia que tinha de ângulo).

Professora: Tudo bem Pedro. Você acabou de nos mostrar um exemplo de ângulo. Porém, volto a perguntar: o que mais vocês sabem?

Beatriz: Que ele aparece no canto do quadro, no canto da porta, e em outros tantos lugares.

Mariana: Se eu abrir a tesoura assim, também tenho um ângulo. (Como Pedro, abriu a tesoura e nos mostrou a figura.).

Professora: Mas se quisermos relacionar essa figura com as partes da reta, iremos conseguir?

Mariana: Sim, professora. O ângulo são duas retas.

Professora: Duas retas?

Pedro: Não Mariana, temos duas semirretas. Certo, professora?

Professora: Certo Pedro. Olha vamos fazer a figura na lousa e verificar o que estamos falando.

Desenhamos na lousa a figura do ângulo e, registramos de maneira formal o conceito de ângulo, suas representações e seus elementos. A seguir, algumas atividades foram propostas com o intuito de reforçar as informações apresentadas, como traçar um ângulo dados três pontos não alinhados, ou a partir de um ângulo desenhado, identificar vértice, lados e representação.

Com os objetivos de observar os conhecimentos que traziam e de deixar que os alunos experimentem algumas situações novas, propomos a tarefa do livro didático adotado e intitulada pelo autor de *Oficina de matemática*. Nessa perspectiva o autor Dante (2015, p. 15) explicita que:

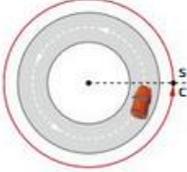
Aprender fazendo é um dos objetivos dessa coleção. Assim, ao acompanhar os alunos agindo (fazendo verificações, testando proposições, recortando, medindo, comparando, etc), você terá oportunidade de observar os conhecimentos, as aptidões e as dificuldades da turma. Com base nessa observação, sua ação pedagógica se tornará mais eficaz.

Segue abaixo (FIGURA 10), as orientações da atividade realizada:

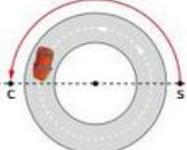
**Figura 10 - Atividade aplicada na pesquisa**

### Giros e ângulos

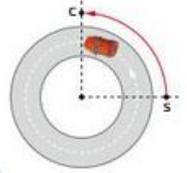
Vitor gosta de dar voltas com seu carrinho em uma pista circular. Observe os giros que Vitor fez. Você vai perceber que para cada giro há um ângulo correspondente.



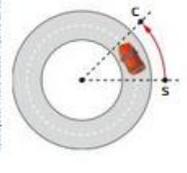
Giro de uma volta e **ângulo de uma volta**.  
Os pontos de saída (S) e de chegada (C) coincidem.



Giro de meia volta e **ângulo de meia volta ou ângulo raso**.



Giro de  $\frac{1}{4}$  de volta e **ângulo de  $\frac{1}{4}$  de volta ou ângulo reto**.

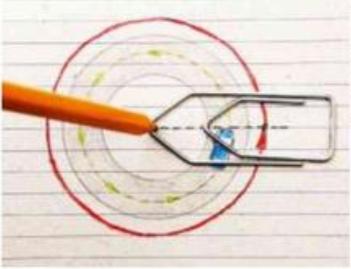


Giro de  $\frac{1}{8}$  de volta e **ângulo de  $\frac{1}{8}$  de volta**. Observe que  $\frac{1}{8}$  é metade de  $\frac{1}{4}$ .

Se os alunos sentirem dificuldade com relação às frações, retome rapidamente esse assunto com eles.

### Oficina de Matemática

1. Pegue um clipe e fixe-o com a ponta do lápis em seu caderno, como na fotografia ao lado. Depois, gire-o e dê a volta do "carrinho" de acordo com cada figura representada acima.
2. Agora, vamos dar outros giros! Movimente o clipe sempre em sentido anti-horário. Depois registre em forma de desenho a posição obtida.
  - a) Dê um giro maior que  $\frac{1}{4}$  de volta e menor que meia volta.
  - b) Dê um giro menor que  $\frac{1}{8}$  de volta.



Fonte: DANTE, 2015, p. 85.

Vale ressaltar que a intervenção da professora acerca das ideias sobre fração foi de grande importância, pois vários alunos apresentavam dúvidas sobre o tema, confirmando desse modo, a sugestão trazida pelo autor Dante.

#### **4.1.7 7º encontro: Identificação e medição de ângulos retos**

Começamos esse encontro fazendo a seguinte pergunta:

Professora: Aqui dentro da sala de aula, qual ângulo aparece com mais frequência?

Os alunos (em coro): O ângulo reto.

Professora: Muito bem! Mas como ter certeza disso?

Pedro: Dá pra ver.

Professora: Mas será que nossos olhos não podem nos enganar?

Pedro: Acho que não.

Professora: Para termos certeza do que estamos falando, precisamos medir esses ângulos, não?!

Propomos aos alunos formarem grupos de quatro ou cinco integrantes e realizarem as atividades propostas pelo livro didático adotado. Procuramos executar a medição e a identificação de ângulos retos usando dobradura de papel A4, como descrita e apresentada na figura 11 abaixo.

**Figura 11 - Atividade aplicada na pesquisa**

 **Oficina de Matemática**

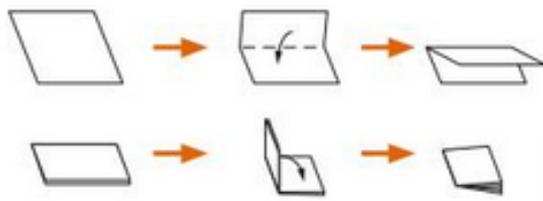
**Dobradura e ângulo reto**

Dobre pela metade uma folha de papel sulfite e, em seguida, dobre-a novamente. Desdobre a folha e indique os quatro ângulos retos formados. Depois, faça um pontilhado indicando cada dobra. Assinale com o sinal  os ângulos retos formados.

Explore a sua sala de aula usando a dobradura para identificar ângulos retos.

a) Registre pelo menos dois objetos que apresentam ângulo reto. *Resposta pessoal.*

b) Responda: quantos ângulos retos aparecem em um canto superior (encontro de duas paredes com o teto) da sala de aula? *3 ângulos retos*

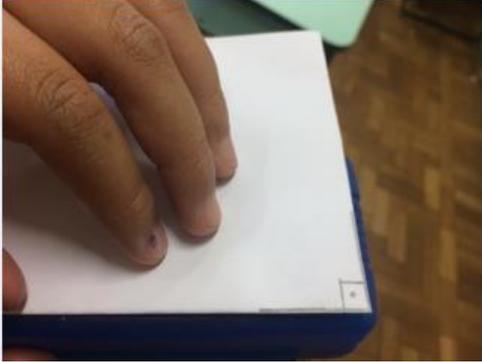


Fonte: DANTE, 2015, p. 87.

Foram medidos os ângulos da porta, do quadro, da mesa do professor e dos alunos, entre outros como apresentado no quadro 9.

**Quadro 9 – Atividade aplicada na pesquisa**

<p><b>Registro 1 – Medindo o ângulo reto do piso</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 1</b></p> <p>Aluna Sabrina: <i>“Nossa professora no chão temos vários ângulos retos!”</i></p>
<p><b>Registro 2 – Medindo o ângulo reto da janela</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 2</b></p> <p>Aluna Sabrina: <i>“No canto da janela, encontramos o ângulo de 90° também.”</i></p>
<p><b>Registro 3 – Medindo o ângulo reto da mesa do professor</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 3</b></p> <p>Aluna Tamyres: <i>“Achei ângulo reto na mesa da professora gente!”</i></p>

<p><b>Registro 4 – Medindo ângulo reto no apagador</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 4</b></p> <p>Aluno Vinícius: <i>“Aqui no apagador também temos ângulos retos!”</i></p>
<p><b>Registro 5 – Medindo ângulo reto no canto da lixeira</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 5</b></p> <p>Aluna Izabel: <i>“Na lixeira temos em cada canto um ângulo reto.”</i></p>
<p><b>Registro 6 – Medindo ângulo reto no canto da porta</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 6</b></p> <p>Aluna Helena: <i>“No canto da porta também temos ângulo reto, ou seja, de <math>90^\circ</math>.”</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa.

#### 4.2 2ª Etapa: Proposta para os alunos de construção de Mandalas Geométricas

Ao propormos a 2ª etapa do projeto, estávamos preocupados em produzir não só significados acadêmicos, mas também significados para a vida. Dizer apenas: “Vamos construir Mandalas Geométricas!” com a única intenção de falarmos de segmentos de reta, ângulos, polígonos, perímetros e de áreas, sem dizer da beleza, da ordem, de arranjo e do equilíbrio que tais figuras sugerem, não tornará a experiência e por consequência, a aprendizagem significativa. Assim, nos perguntamos: por que não incrementar essa tarefa e desafiar os alunos a criarem, planejarem, experimentarem situações desafiadoras e novas que farão diferença no processo ensino/aprendizagem? Diante tal circunstância, levantamos duas situações a considerar: (i) o que torna as Mandalas figuras tão belas e interessantes? e (ii) o que essa figuras têm a ver haver com a Matemática? Nesse processo, afirmações sobre a “geometria” das Mandalas e outras tantas precisam ser feitas e, com certeza, gerarão outras, abrindo-se possibilidades de se pensar, de se propor, de se fazer e de investigar intervenções importantes, e assim inesquecíveis, significativas.

Acreditando, então, que a combinação da exploração dos itens acima citados com a intervenção legítima do professor poderá se tornar o elemento básico para que juntos, se constituam um conjunto de instrumentos que irão participar da organização da atividade de produzir novas Mandalas Geométricas, bem como promover um aprendizado realmente significativo, demos continuidade ao projeto.

Em se tratando de significados, Lins e Gimenez (1997, p.28) diz que:

Essa concepção deve fazer parte de uma proposta para a educação matemática: álgebra, aritmética e geometria vistas não como conteúdos justificados por sua própria existência, mas como instrumentos que participam da organização da atividade humana. Dessa perspectiva, o estudo da matemática desprendido temporariamente de quaisquer problemas fora da matemática passa a ter um sentido diferente, o de estudar e aprimorar as ferramentas de que se dispõe, e nesse processo a matemática torna-se objeto e não mais ferramenta.

Dentro dessa proposta, elaboramos a 2ª etapa do projeto, subdividida em seis encontros delineados da seguinte maneira (Quadro 10):

**Quadro 10 – Proposta para a 2ª etapa da pesquisa:**

<b>Encontros/Duração</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Materiais</b>	<b>Atividades</b>
<b>2ª Etapa: Proposta para os alunos de construção de Mandalas Geométricas</b>			
1º: Apresentação das Mandalas Geométricas. Duração: 1 aula	Ilustrar e apresentar algumas Mandalas Geométricas.	Mandalas geométricas construídas por outros alunos.	Conversa informal sobre as Mandalas Geométricas.
2º: Atividade corporal. Duração: 1 aula.	Executar atividades corporais relacionadas a ângulos.	Livro didático adotado.	Atividade do livro: Brincando também se aprende.
3º: Apresentação e manuseio dos instrumentos do desenho geométrico. Duração: 3 aulas.	Apresentar e manusear os instrumentos do desenho geométrico.	Compasso, régua, transferidor, par de esquadros e caderno de desenho.	Conhecer e manipular os instrumentos do desenho geométrico.
4º: Construção das Mandalas Geométricas com o recurso do desenho geométrico. Duração: 15 aulas.	Construir ângulos com o auxílio do compasso e do transferidor;  Aprimorar e ampliar conteúdos já estudados;	Compasso, régua, transferidor, esquadro e caderno de desenho.	Construções geométricas.

Encontros/Duração	Objetivos	Materiais	Atividades
	Construir novos conhecimentos (bissetriz, ponto médio, alinhamento de pontos.).		
5º: Construção das Mandalas Humanas.  Duração: 10 aulas.	Construir Mandalas Geométricas usando o corpo como referência.	Fotos selecionadas na <i>internet</i> e câmera fotográfica.	Pesquisar sobre formas de Mandalas Humanas na <i>internet</i> ;  Atividade em grupo para elaboração e execução das Mandalas Humanas;  Registro pela professora das Mandalas Humanas.
6º: Construção das Mandalas Geométricas com o <i>software</i> GeoGebra.  Duração: 10 aulas.	Utilizar o computador como ferramenta na construção de Mandalas Geométricas.	Computador, <i>software</i> GeoGebra.	Atividade em grupos para a construção das Mandalas Geométricas e montagem do livro para colorir.

Fonte: Elaboração da autora.

#### 4.2.1 1º encontro: Apresentação das Mandalas

Sherard (1993) enumera que as contribuições de se ensinar geometria são: na resolução de problemas da vida real; na conexão com álgebra, aritmética e estatística;

no desenvolvimento da percepção espacial, da criatividade, da abstração e da imaginação; e como meio de ensino de valores estéticos.

Assim, como já havíamos trabalhado em outra escola explorando a ideia de construções de Mandalas Geométricas durante as aulas de geometria, tínhamos arquivados alguns desenhos construídos por aqueles alunos que na época da realização do trabalho comungavam da mesma faixa etária dos alunos/sujeitos da pesquisa, como mostra a figura 12 a seguir. Desse modo, apresentamos algumas Mandalas Geométricas e aproveitamos tanto o momento quanto as figuras para encantar, seduzir e motivar os alunos a se enveredarem no projeto. Essa abordagem foi amplamente aceita pelos mesmos que logo se entusiasmaram pela construção das Mandalas Geométricas.

**Figura 12 - Mandalas Geométricas apresentadas aos alunos**



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Vale ressaltar alguns comentários:

Professora: Bom dia turma! Hoje trouxe para mostrar a vocês algumas Mandalas Geométricas construídas por outros alunos da mesma idade de vocês e utilizando os instrumentos do desenho geométrico.

Ana: Nossa professora, esses desenhos são lindos! Nós já colorimos figuras assim.

Pedro: Foi mesmo. A professora nos deu esses desenhos xerocados pra gente colorir.

Professora: Ana, eu concordo com você. São bonitos mesmos! Mas quem disse que, elas são cópias, Pedro?

Pedro: Não são?! Então quem fez?

Professora: Como já disse, esse trabalho foi feito durante as aulas de matemática, por alunos também do sexto ano e que têm a mesma idade de vocês.

Beatriz: Ah duvido! Só se foi feito no computador.

Professora: Não! Podemos usar o computador para construí-las, porém essas figuras foram feitas com os instrumentos do desenho geométrico: régua e compasso.

Ana: Nós vamos desenhá-las também?! Quando?

Beatriz: Parece com as figuras de colorir do livro da minha avó!  
 Professora: Vamos construí-las sim! Mas primeiro precisamos “mexer” com esses instrumentos para criarmos habilidades com eles.  
 Beatriz: Oba! O meu compasso e minhas régua já estão aqui!

Assegurado o primeiro objetivo proposto dessa etapa de ilustrar e apresentar algumas Mandalas Geométricas, demos continuidade à nossa pesquisa.

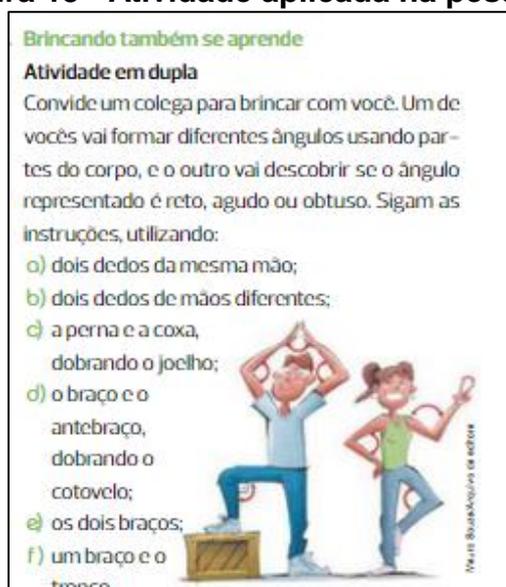
#### 4.2.2 2º encontro: Atividade corporal

No segundo encontro, executamos a atividade proposta por Dante (2015, p. 88) intitulada no seu livro por “*Brincando também se aprende*”, a qual possuía, como foco central, reforçar a ideia de ângulos e apresentar de maneira descontraída a classificação dos ângulos em agudo, reto e obtuso. De acordo com Dante (2015, p. 16):

Os alunos dessa faixa etária ainda aprendem muito brincando, interagindo com os colegas e se desenvolvendo integralmente. O professor deve reuni-los e incentivá-los a jogar de acordo com os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos no jogo. [...] No jogo, a interação entre os participantes produz aprendizagem – muitas vezes, o que não se aprendeu em uma aula ou em uma lição do livro é assimilado no momento lúdico. Ao acompanhar as duplas ou equipes durante o jogo, o professor poderá perceber as dificuldades que cada aluno tem e, posteriormente, buscar saná-las.

Abaixo na figura 13, segue a atividade executada:

**Figura 13 - Atividade aplicada na pesquisa**



Fonte: DANTE, 2015, p. 88.

Outras experimentações também foram propostas pela professora/pesquisadora e pelos próprios alunos. Depois de realizadas em duplas, socializamos as experiências. A seguir, no quadro 11 o registro de algumas dessas propostas:

### Quadro 11 - Atividade aplicada na pesquisa

<p><b>Registro 1 – Construindo ângulos retos</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 1</b></p> <p>Nesse registro, os alunos construíram ângulos retos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• com a perna e a coxa, dobrando o joelho;</li> <li>• com os dois pés;</li> <li>• com as duas pernas.</li> </ul>
<p><b>Registro 2 – Construindo ângulos retos</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 2</b></p> <p>Nesse registro, os alunos constroem ângulos retos com partes do corpo diferentes das já realizadas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• com os dedos da mesma mão;</li> <li>• com os dois braços;</li> <li>• com o braço e o antebraço, dobrando o cotovelo.</li> </ul>
<p><b>Registro 3 – Construindo ângulos agudos</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 3</b></p> <p>Os alunos apresentam nesse registro dos ângulos agudos construídos com o braço e o antebraço, dobrando o cotovelo.</p>

<p><b>Registro 4 – Construindo ângulos agudos</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 4</b></p> <p>Usando as duas pernas, os alunos constroem ângulos agudos.</p>
<p><b>Registro 5 – Construindo ângulo raso</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 5</b></p> <p>Usando as duas pernas a aluna constrói um ângulo raso.</p>
<p><b>Registro 6 – Construindo ângulo raso</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 6</b></p> <p>Usando os dois braços o aluno constrói um ângulo raso.</p>
<p><b>Registro 7 – Construindo ângulos obtusos</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 6</b></p> <p>Usando os dedos das mãos, o grupo exemplifica ângulos obtusos.</p>

Fonte: Dados da pesquisa. Fotos da pesquisadora.

A interação e a euforia dos alunos eram perceptíveis. O objetivo de executar atividades corporais relacionadas aos ângulos foi alcançado e a motivação para as próximas tarefas e encontros estava assegurada.

### **4.2.3 3º encontro: Construção das Mandalas Geométricas com o recurso do desenho geométrico**

É fato, que o desenho surge como atividade precoce humana, e se constitui como sendo a primeira forma de representação gráfica e na vida escolar, está presente desde a educação infantil e como ferramenta de várias, senão de todas as disciplinas escolares.

Aprender geometria e poder desenhar formas criadas pelo homem torna-se ferramenta imprescindível nesse contexto, dando àquele que a detém, facilidades na comunicação e na interpretação de vários códigos.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (1998) relata que o trabalho pedagógico no que tange ao:

[...] espaço e forma pressupõem que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação das propriedades das figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p.51).

Norteados nesse documento e em nossas leituras, propomos, então, a confecção de Mandalas Geométricas usando os instrumentos do desenho geométrico: compasso, régua, transferidor e esquadro. Combinamos que tal projeto seria executado usando caderno de desenho e os instrumentos já citados.

Nas primeiras aulas, apresentamos e manipulamos os instrumentos do desenho geométrico para que os alunos criassem relativa destreza com eles. A euforia era contagiante e assegurava o interesse pela aula e pelos procedimentos seguintes.

Para Rêgo, Rêgo e Vieira (2012, p. 7):

Os procedimentos estão relacionados com o saber fazer. Eles envolvem raciocínios do tipo passo a passo, semelhante aos algoritmos. Para serem entendidos e utilizados em situações-problema, exigem que o aluno domine os conceitos a ele associados. A aprendizagem de Geometria demanda o domínio de uma série de procedimentos, principalmente os associados à representação de figuras e de sólidos, que envolvem, por exemplo, o uso dos instrumentos de desenho, o conhecimento dos processos de medição e de resolução de problemas por meio de construções geométricas.

Embasados em nossos estudos e em conformidade com os autores acima, nas aulas que se seguiam, construímos com o uso dos instrumentos do desenho geométrico: segmentos de reta, ângulos e bissetrizes.

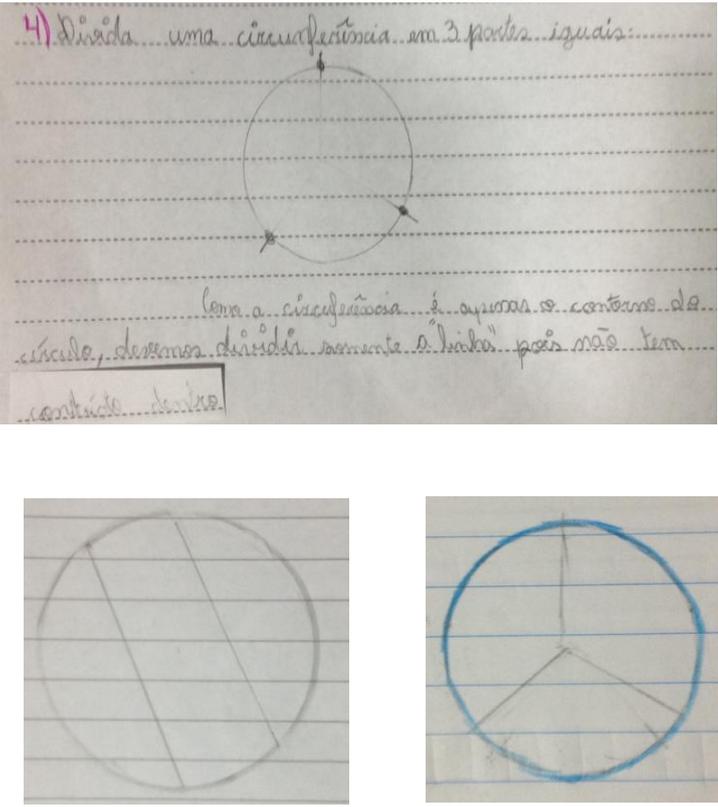
Com o intuito de avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre determinados termos geométricos necessários às construções das Mandalas Geométricas, elaboramos e aplicamos um pequeno questionário que nos orientasse acerca de quais intervenções precisariam ser feitas. As questões aplicadas foram:

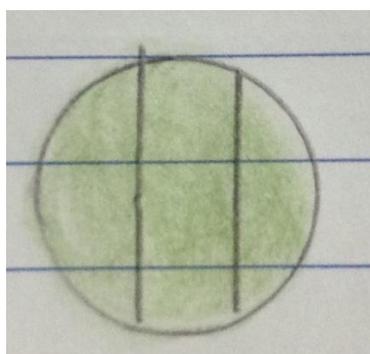
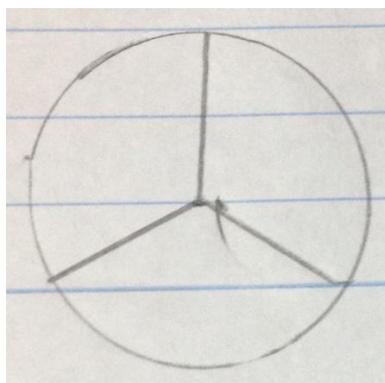
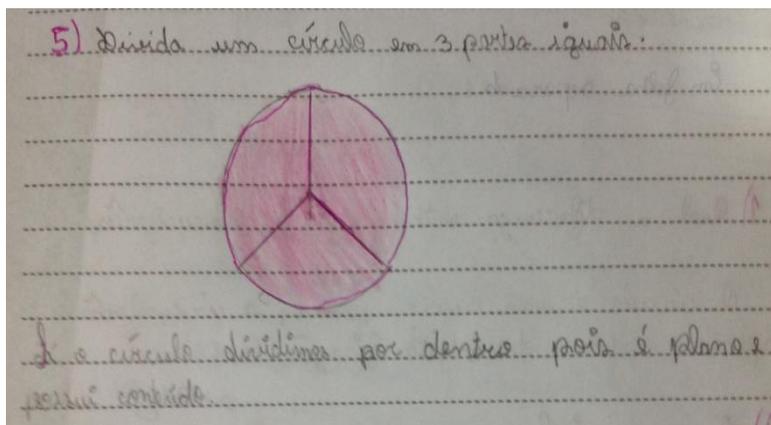
- 1) Qual a diferença entre círculo e circunferência?
- 2) O que é raio?
- 3) O que é diâmetro?
- 4) Divida uma circunferência em 3 partes iguais.
- 5) Divida um círculo em 3 partes iguais.

Abaixo no quadro 12, apresentamos algumas respostas e análises referentes ao citado questionário.

#### **Quadro 12 – Questionário aplicado na pesquisa**

<p><b>1) Qual a diferença entre círculo e circunferência?</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>O círculo é uma região plana, a circunferência é apenas o contorno dessa planificação.</i></li> <li>• <i>O círculo é uma forma geométrica, ou seja, uma planície, já a circunferência é apenas o contorno do círculo.</i></li> <li>• <i>A diferença entre círculo e circunferência é que o círculo é preenchido por dentro. Já a circunferência é só a borda de um círculo.</i></li> <li>• <i>Circunferência é o contorno, perímetro e círculo é a área.</i></li> <li>• <i>A diferença entre círculo e circunferência é que o círculo é uma região plana e a circunferência é uma esfera.</i></li> </ul>	<p><b>Comentário da questão 1:</b></p> <p>Percebemos que os alunos de maneira geral, possuem uma refinada ideia entre a diferença entre círculo e circunferência. Vale ressaltar, que como o estudo da geometria inicia-se pelo estudo da geometria sólida, alguns alunos ainda se confundem em suas abordagens.</p> <p>Acreditamos ser prudente, que no início as crianças sejam estimuladas a expressar o que entendem de geometria com termos próprios, como “borda” para a ideia de circunferência.</p>
--	---

<p><b>2) O que é raio?</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• É um fenômeno natural que cai do céu.</li> <li>• O raio é a metade da circunferência.</li> <li>• Raio é uma medida de distância, de tamanho.</li> <li>• Raio é a metade do diâmetro da circunferência.</li> <li>• Raio é um traço que vai até a metade de um círculo.</li> <li>• Raio é a distância do centro da circunferência até a borda.</li> <li>• Raio é a metade do diâmetro da circunferência.</li> </ul>	<p><b>Comentário da questão 2:</b></p> <p>Poucos alunos mostraram o conceito correto do termo. Assim, percebemos que tal conceito precisa ser retomado e aprimorado.</p>
<p><b>3) O que é diâmetro?</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Linha que passa na circunferência dividindo-a ao meio.</li> <li>• Diâmetro é a linha que corta o círculo em <math>180^\circ</math>.</li> <li>• É a distância entre um ponto e outro.</li> <li>• Diâmetro é um traço que atravessa um círculo, passando por ele todo.</li> <li>• Diâmetro é duas vezes o raio.</li> <li>• Diâmetro é um tipo de medida, inferior ao metro.</li> </ul>	<p><b>Comentário da questão 3:</b></p> <p>A maioria dos alunos não apresentou um bom entendimento acerca do conceito. Porém, alguns registros, demonstram ideias bem elaboradas. Apenas 1 dupla conseguiu relatar a relação entre diâmetro e raio.</p>
<p><b>4) Divida uma circunferência em três partes iguais.</b></p> 	<p><b>Comentário da questão 4:</b></p> <p>A metade dos alunos dividiu a circunferência de modo correto. A outra metade dos alunos dividiu a circunferência de maneira errônea como apresentado no segundo e terceiro registro ao lado.</p>

**5) Divida um círculo em três partes iguais.****Comentário da questão 5:**

A maioria dos alunos dividiu o círculo em três partes iguais de forma correta. Vale ressaltar, que mesmo os alunos que não fizeram a divisão de maneira correta, a preocupação em mostrar a superfície da figura, colorindo-a, era perceptível.

**Fonte: Dados da Pesquisa.**

De posse desses relatórios, das análises realizadas, elaboramos e estruturamos as intervenções que acreditamos pertinentes ao contexto da pesquisa, de modo a atender critérios que nos subsidiasse nos próximos passos a serem seguidos.

Assim, após adaptarmos o quadro 8, o apresentamos e esclarecemos, com o auxílio dos registros, o conceito de circunferência, de círculo, de raio, de diâmetro e

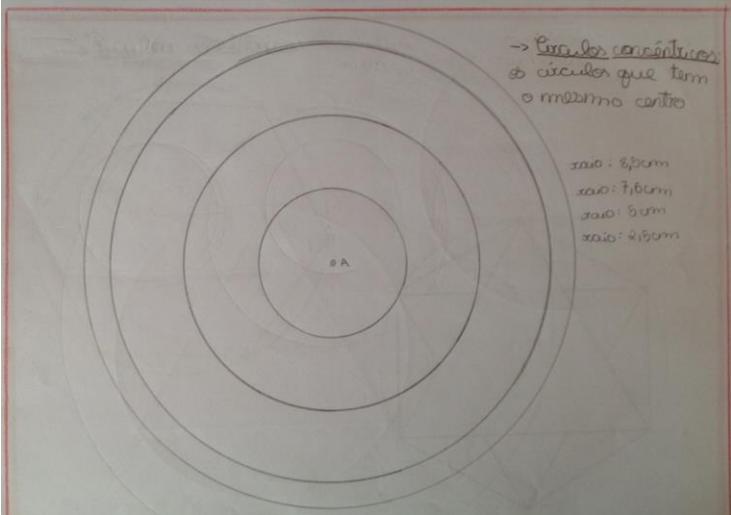
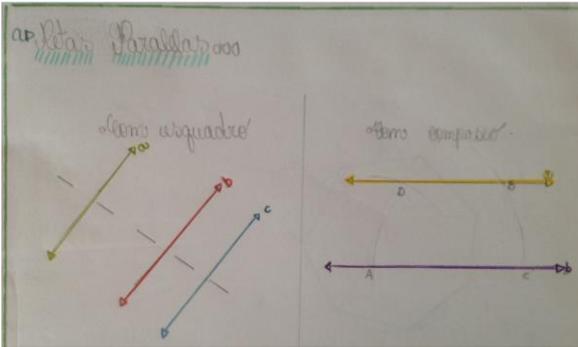
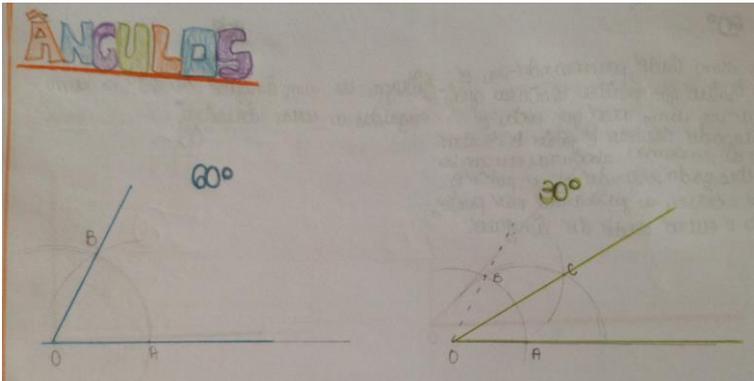
em como dividir a circunferência e o círculo em 3 partes iguais, inicialmente com a utilização do transferidor e depois, com o manuseio do compasso e dos ângulos já traçados em outros encontros.

Vale ressaltar que optamos em explorarmos inicialmente, as construções dos polígonos regulares inscritos na circunferência e, só depois confeccionamos as Mandalas Geométricas. Durante as construções, aproveitávamos para retomar e aprimorar alguns conteúdos já estudados (estudo das figuras planas e dos sólidos geométricos) e, agregar novos conhecimentos. Essa dinâmica de procedimentos nos possibilitava avaliar não só os alunos, mas nossa prática docente. Termos, ideias e conceitos matemáticos importantes como o conceito de bissetriz, de ponto médio, de alinhamento de pontos foram construídos, trabalhados e explorados de um modo bem descontraído, porém com devido respeito ao rigor matemático.

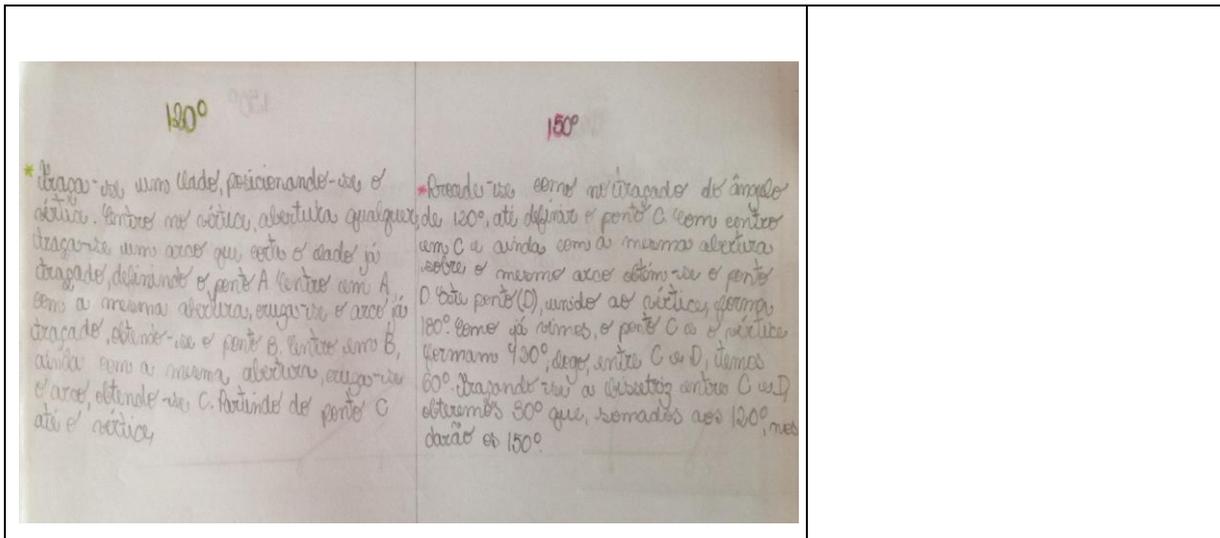
A primeira figura construída pelos alunos foi a de circunferências concêntricas, pois nesse momento ainda estávamos aperfeiçoando os traçados com o compasso. A seguir, construímos retas paralelas utilizando os esquadros e também o compasso. A terceira construção foi a do ângulo de  $60^\circ$ , e em seguida, o ângulo de  $30^\circ$ . Nessa aula, esclarecemos aos alunos que ao construirmos o ângulo de  $30^\circ$ , estávamos a traçar a bissetriz de  $60^\circ$ . Assim, definimos bissetriz como sendo a semirreta que divide o ângulo em duas partes iguais, ou seja, em duas partes congruentes. Os procedimentos executados foram sempre registrados no verso da folha do caderno de desenho, enquanto que a construção com a figura destacada era apresentada na página de rosto.

Abaixo no quadro 13, apresentamos alguns registros desses procedimentos.

**Quadro 13 – Registros acerca das construções geométricas com utilização dos instrumentos do desenho geométrico**

<p><b>Registro 1 – Construindo circunferências concêntricas</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 1</b></p> <p>Nesse registro, a aluna construiu com auxílio da régua e do compasso, circunferências concêntricas com raios 8,5cm, 7,6 cm, 5,0 cm e 2,5 cm. Observamos que a destreza em manipular o compasso já está bem refinada.</p>
<p><b>Registro 2 – Construindo retas paralelas com esquadro e com compasso</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 2</b></p> <p>Nessa atividade optamos em explorar a construção de retas paralelas tanto pela utilização do compasso como pela utilização do esquadro.</p>
<p><b>Registro 3 – Construindo ângulos de 60° e 30°</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 3</b></p> <p>Nesse registro, apresentamos o início das construções referentes aos ângulos. Optamos em começar com a construção do ângulo de 60°, por sua facilidade e pelas possibilidades de exploração de seus pares. Traçamos o ângulo de 30° e apresentamos o conceito de bissetriz.</p>

<p><b>Registro 4 – Construindo ângulos de 90° e 45°.</b></p>	<p><b>Comentário do registro 4</b></p> <p>Ainda com o intuito de refinar os traçados e enfatizar o conceito e a construção da bissetriz, propomos a construção dos ângulos de 90° e de 45°. Apresentamos o passo a passo repassado aos alunos para a construção do desenho.</p>
<p><b>Registro 5 – Construindo ângulos de 120° e 150°</b></p>	<p><b>Comentário do registro 5</b></p> <p>Nessa atividade trabalhamos com a associação dos ângulos de 60° e de 30°. Os traçados já se apresentam bem mais definidos. Apresentamos o passo a passo repassado aos alunos para a construção do desenho.</p>



Fonte: Dados da pesquisa. Fotos da pesquisadora.

Nos encontros seguintes, exploramos outras construções geométricas como, por exemplo, a construção de alguns polígonos regulares inscritos na circunferência. A construção combinada entre circunferências concêntricas, hexágono regular e rosácea de seis pontas foi a primeira construção feita pelos alunos.

O passo a passo para tal construção foi o seguinte:

1º - Com o auxílio do compasso, construa duas circunferências concêntricas, sendo seus raios de medidas 8,0 cm e 4,0 cm;

2º - Na circunferência maior, escolha um ponto qualquer pertencente à circunferência (ponto A). Com uma abertura de 8,0 cm, centre o compasso no ponto escolhido e marque sobre a circunferência outro ponto (ponto B). Com o mesmo raio e o auxílio do compasso, centre no ponto B e marque o ponto C. Repita a instrução até chegar ao ponto de origem. Com o auxílio da régua, ligue todos os seis pontos determinados;

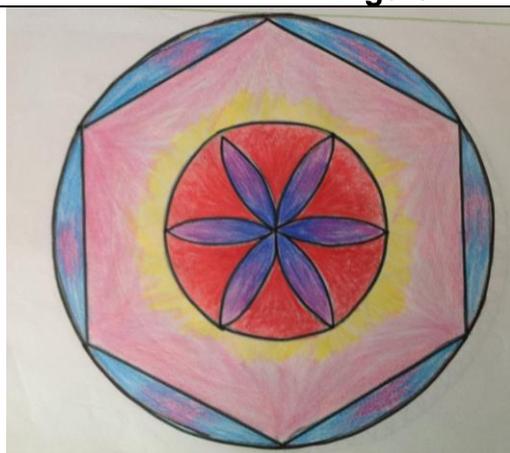
3º - Na circunferência menor, repita o mesmo procedimento, porém, ao invés de ligarmos os pontos com o auxílio da régua, iremos traçar arcos cujas extremidades pertençam à circunferência. Lembre-se que, nesse caso, a abertura do compasso deve ser de 4,0 cm, pois é a medida do raio dessa circunferência;

4º - Use sua imaginação para colorir sua Mandala Geométrica.

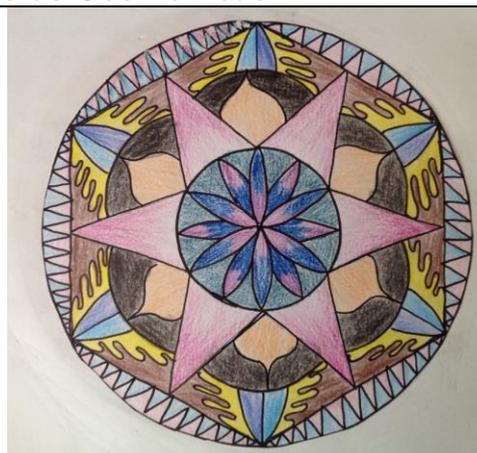
Vale ressaltar que alguns alunos foram além das instruções citadas e construíram a rosácea de 12 pontas.

Na figura 14, apresentamos algumas dessas composições.

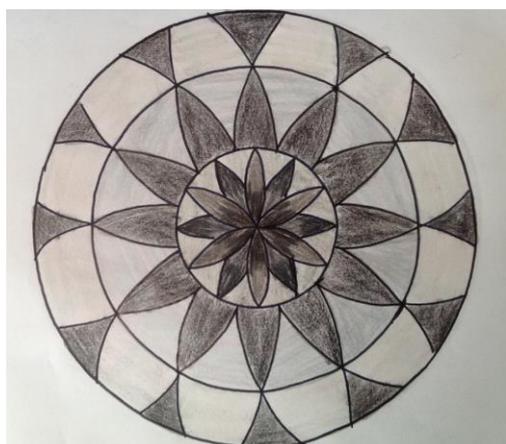
**Figura 14 – Mandalas Geométricas**



Duas circunferências concêntricas contendo um hexágono regular inscrito na circunferência maior e uma rosácea de seis pontas traçada na circunferência menor.



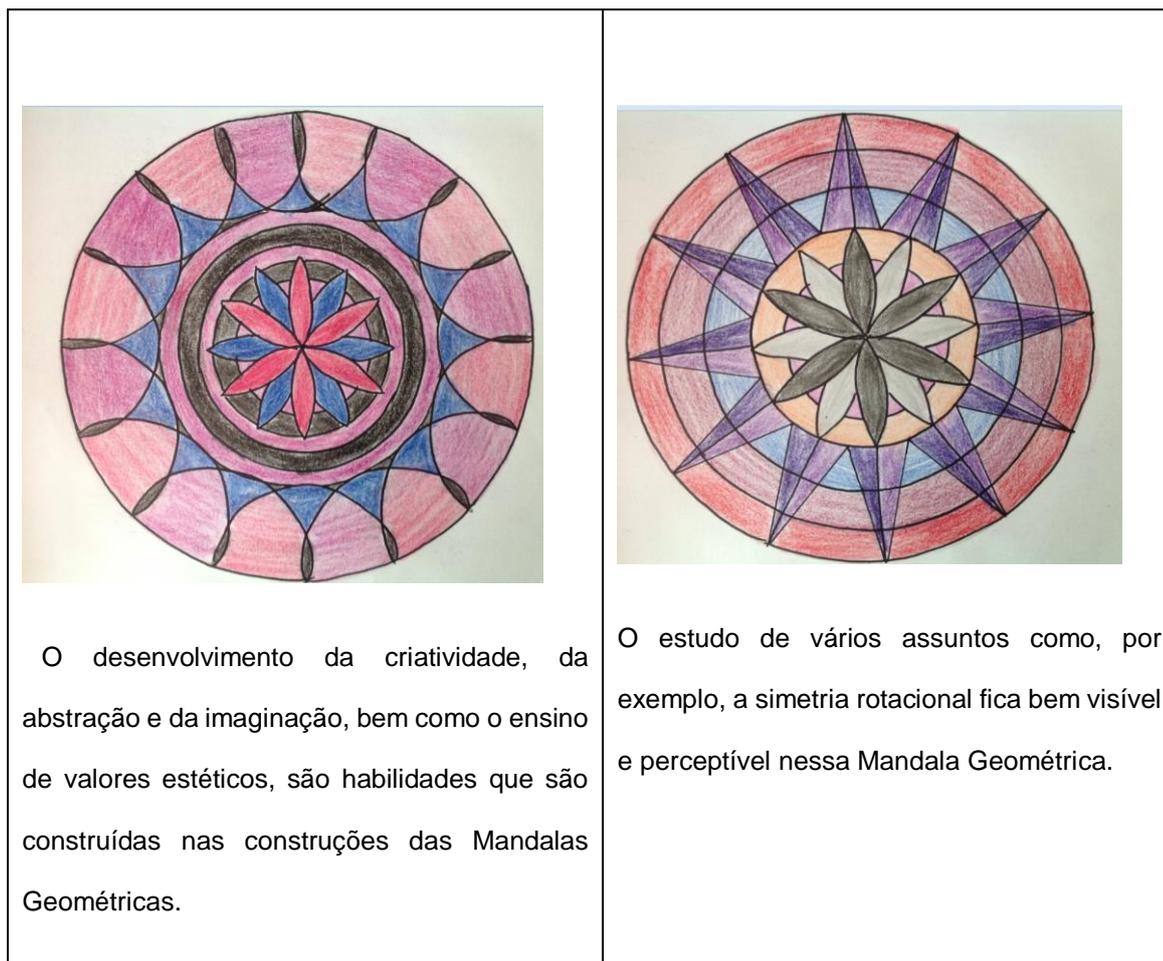
Duas circunferências concêntricas contendo um hexágono regular inscrito na circunferência maior, uma estrela de seis pontas e uma rosácea de doze pontas traçada na circunferência menor. Nessa Mandala, a aluna resolveu estilizá-la, trabalhando bem a estética da construção.



Nessa construção geométrica, percebemos três circunferências concêntricas e duas rosáceas de 12 pontas.



O colorido vibrante aliado às formas geométricas motivava os alunos, tornando o estudo da geometria mais prazeroso.



**Fonte: Dados da pesquisa. Fotos da pesquisadora.**

Na figura 15, mostramos um dos alunos manipulando os instrumentos do desenho geométrico durante as aulas em outras construções geométricas.

**Figura 15 – Manipulando os instrumentos do desenho geométrico**



**Fonte: Foto da pesquisadora.**

Os alunos se mostraram tão interessados e empolgados com as formas que se revelavam a cada traço, que rapidamente enveredaram na construção de suas próprias Mandalas Geométricas. O colorido vibrante realçava os contornos e os

traçados geométricos como mostrado na figura 16. O espírito investigativo estava a todo vapor. O concreto e o abstrato completavam-se.

**Figura 16 - Colorindo as Mandalas Geométricas**



Fonte: Foto da pesquisadora.

Durante a socialização das produções (FIGURA 17), os alunos validavam ou negavam propriedades relevantes, tornando-se centro da aprendizagem. Nesse momento, são levados a produzir, refletir e registrar conclusões ou dúvidas acerca das ideias e conceitos abordados na sala de aula.

**Figura 17 - Socialização durante o trabalho**



Fonte: Foto da pesquisadora.

A partir das intervenções realizadas pela professora em esclarecer sobre a linguagem da matemática utilizada, mais precisamente, sobre a linguagem geométrica, os alunos em equipe discutiam e evidenciavam sobre a necessidade de uma linguagem única que, expressasse de forma clara e eficaz, os procedimentos realizados.

#### **4.2.4 4º encontro: Construção das Mandalas Humanas**

O processo de simbolização do corpo, primeiro instrumento de pensamento da criança no seu diálogo com o mundo, é fator crucial para a construção do conhecimento.

De acordo com Dantas, La Taille e Oliveira (1992), Wallon concebe o homem como sendo genética e organicamente social e sua existência se realiza entre as exigências da sociedade e as do organismo, ou seja, o homem nasce para viver em sociedade, para agir e interagir no seu meio social e cultural, e a partir dessas interações inicia a construção e o desenvolvimento da própria personalidade, do caráter, dos valores e dos preconceitos. Desse modo, o ato mental se desenvolve a partir do ato motor. A criança empresta seu corpo ao mundo e o transforma em pensamento.

Nessa perspectiva, sugerimos a construção de Mandalas Humanas pelos alunos. Para elucidar tal tarefa, apresentamos aos alunos algumas fotos de Mandalas Humanas previamente selecionadas na *internet*. Nesse momento, aproveitamos para rever a nomenclatura dos polígonos, o significado de diagonais e retomar a classificação dos ângulos.

Foi solicitado aos alunos que pesquisassem e selecionassem outras Mandalas que poderiam ser reproduzidas usando como ferramenta o próprio corpo. De posse das pesquisas realizadas, os alunos foram divididos em grupos para a elaboração e execução das Mandalas Humanas. No quadro 14, apresentamos as Mandalas Humanas realizadas pelos alunos e alguns comentários relacionados às Mandalas Humanas.

### Quadro 14 - Mandalas Humanas formadas pelos alunos

#### • Formando um quadrado



#### Comentários dos alunos:

- *Eu percebo que há um quadrado formado pelos braços dos meninos e das meninas e com suas pernas formam quadrilátero;*
- *Ao ver a figura 1, pode-se perceber que ela é composta por 1 quadrado e 4 losangos;*
- *Possui 4 ângulos retos internos. É formado por 2 quadriláteros.*

#### • Quadrados virados



#### Comentários dos alunos:

- *Com os braços eles formam dois quadrados e com as pernas eles ligam as oito pontas ao meio;*
- *Há um quadrado e um losango formado pelos braços e um octógono com todos os braços;*
- *Eu vi um círculo formado pelos pés e na mão eu vi um quadrado em cima do outro;*
- *Há dois quadrados em posições diferentes, e no meio há um círculo.*

- **Formando um quadrado**



**Comentários dos alunos:**

- *Forma 4 ângulos retos e 8 quadriláteros;*
- *Eu percebi, que se virarmos a figura veremos um quadrado;*
- *O centro formado por 4 quadrados, formam um quadrado maior;*
- *Estou vendo um losango no centro da figura, são vários losangos na figura.*

- **Quadrados virados**



**Comentários dos alunos:**

- *A figura mostra um octaedro com triângulos no meio. E um quadrado também;*
- *O centro forma uma esfera e contornando essa esfera temos um quadrado. Se ligarmos os vértices do contorno da figura por inteiro também achamos um quadrado;*
- *Por fora é formado um octaedro por dentro tem um quadrado e tem um losango nas pernas.*

- **Formando uma estrela de doze pontas com os dedos**



### **Comentários dos alunos:**

- Há 24 dedos abertos formando um polígono de 24 lados;
- 12 ângulos agudos, formando uma estrela de 12 pontas, ou, se ligarmos as pontas dos dedos, formamos um dodecágono;
- Vemos uma estrela de 12 pontas, e cada dedo que está “sozinho” vemos um triângulo.

- **Formando uma estrela de seis pontas com os dedos**



### **Comentários dos alunos:**

- Estrela de 6 pontas;
- Há uma estrela de Davi formada por 12 dedos;
- Forma 6 ângulos agudos, formando uma estrela de Davi ou um hexágono.

- **Formando um hexágono com os braços**

**Comentários dos alunos:**

- *Na figura há um hexágono com ligações das cabeças, e um hexágono com os braços;*
- *É possível achar o hexágono, o centro e o raio;*
- *Por fora um hexágono com 6 ângulos obtusos. Forma também o centro do hexágono e o raio.*

- **Formando uma estrela de 14 pontas**

**Comentários dos alunos:**

- *Na figura há 14 pessoas formando uma estrela de quatorze pontas;*
- *Eu percebo na figura relacionado a geometria um tetradecágono, um círculo e triângulos;*
- *Uma estrela de 14 pontas com 14 ângulos agudos e formando um círculo com as cabeças. Essa forma é denominada tetradecágono.*

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Formando um octógono com as mãos</b></li> </ul> 	<p><b>Comentários dos alunos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Forma 8 ângulos agudos e com as pontas dos dedos um octógono;</i></li> <li>• <i>Vejo um octógono e um círculo formado pelos dedos;</i></li> <li>• <i>Dá a ideia de octógono.</i></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Formando uma estrela de dez pontas</b></li> </ul> 	<p><b>Comentários dos alunos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Um decágono com uma estrela de 10 pontas e um círculo em volta, formado pelas pernas;</i></li> <li>• <i>Eu vejo um decágono formado por 10 pontas e também percebo uma região circular;</i></li> <li>• <i>Um círculo com as cabeças e uma estrela de 10 pontas com os braços.</i></li> </ul>

Fonte: Dados da pesquisa. Fotos da pesquisadora.

Após a aplicação da tarefa e análise dos registros, percebemos que alguns conceitos ainda precisam ser retomados (nomenclatura dos polígonos, círculo, circunferência e esfera), mas notamos um avanço considerado em suas percepções e linguagem matemática.

#### **4.2.5 5º encontro – Construção das Mandalas com o software GeoGebra**

É fato que estamos inseridos numa sociedade de informação e que o desempenho profissional exige cada vez mais conhecimentos matemáticos, de ciência e de tecnologia, em amplo leque de situações cotidianas. Para Búrigo et al (2012, p.35), há um consenso entre vários autores e educadores, no que se refere à alfabetização matemática para tal sociedade, e que três aspectos devem ser considerados: habilidades, atitudes e contextos.

Nas habilidades, destaca-se a habilidade intelectual para lidar com situações complexas, que exijam múltiplas estratégias, múltiplas soluções, avaliação e interpretação; o saber ler e escrever em linguagem matemática; a aptidão para a resolução de problemas novos e não rotineiros que dependam de raciocínio e conhecimentos matemáticos. Quanto às atitudes, referem: a valorização da matemática como ferramenta para resolução de problemas; a confiança em dispor de tal conhecimento quando necessário; práticas cooperativas de enriquecimento intelectual, advindo da confrontação de diferentes perspectivas. No que tange ao contexto, o mesmo diz respeito aos recursos tecnológicos que concorrem para a abordagem e tratamento de problemas matemáticos; diz respeito à constante exigência de adaptação a novas situações-problema.

Embasados em vários autores acerca do uso das tecnologias de informação e da computação na sala de aula (PENTEADO, 1999; BORBA, 2003; ARAÚJO, 2002, MALTEMPI, 2004), planejamos e executamos o último encontro da 2ª etapa.

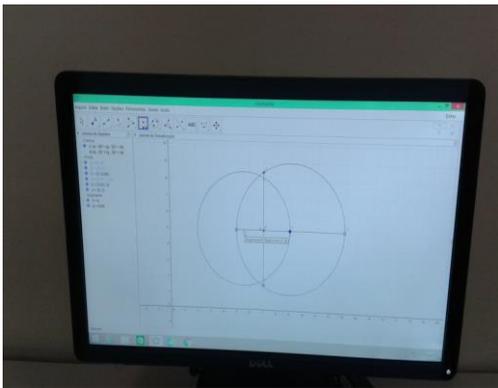
As primeiras aulas destinadas à esse encontro foram de apresentação e exploração do *software* GeoGebra. A escolha por esse *software* se deve pela facilidade de manipulação das ferramentas do programa e pela facilidade de aquisição, já que o mesmo pode ser adquirido gratuitamente.

Segundo Silva (2005, p.23),

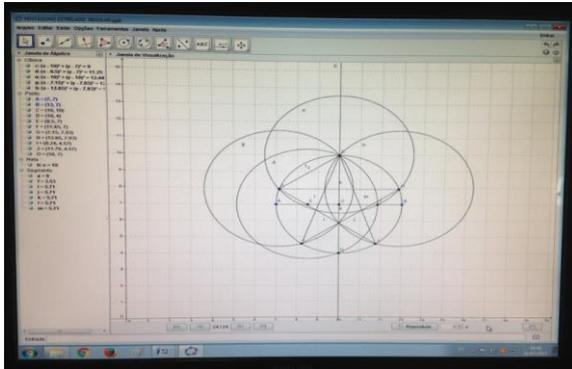
A característica principal do GeoGebra, o qual trouxe grande inovação na geometria dinâmica, é a combinação de geometria, álgebra e cálculo em um único ambiente. A visualização de um objeto possui um correspondente geométrico e um algébrico. Por exemplo, uma circunferência pode ser modificada arrastando um de seus pontos pela tela do computador ou então modificando sua equação algébrica.

No quadro 15 abaixo, apresentamos alguns desses encontros dessa etapa da pesquisa.

### Quadro 15 - Construindo com o GeoGebra no laboratório de informática

<p>Pesquisadora explicando como proceder na construção do pentagrama</p>	<p>Comando da atividade</p>
<p>Tela do GeoGebra mostrando alguns passos para a construção do pentagrama</p>	<p><b>Solução:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Trace o diâmetro AB e sua mediatriz, determinando o ponto O;</li> <li>2. Centro em O, raio AO, faça a circunferência que determina C e D;</li> <li>3. Determine E, ponto médio de AO;</li> <li>4. Centro em E e raio EC, trace o arco CF;</li> <li>5. Centro em C, raio CF, faça o arco que corta a circunferência e determina os pontos G e H;</li> <li>6. A distância CG (ou CH) equivale à quinta parte da circunferência. Marque com este raio os pontos I e J;</li> <li>7. Ligue os pontos determinados como o modelo e terá o pentagrama ou polígono estrelado regular.</li> </ol>
	
	

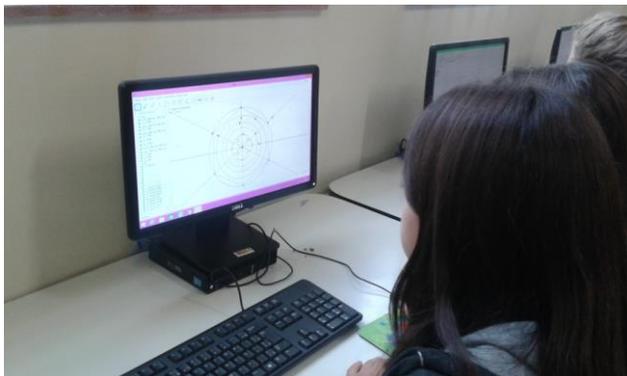
**Tela do GeoGebra apresentando a construção final do pentagrama**



**Alunos construindo com o GeoGebra o pentagrama**



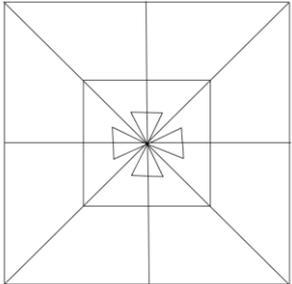
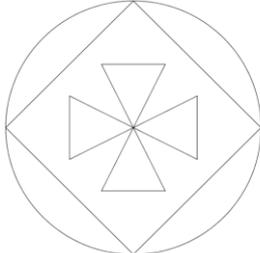
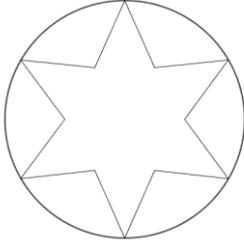
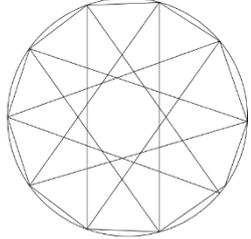
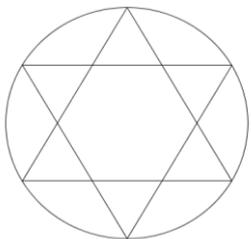
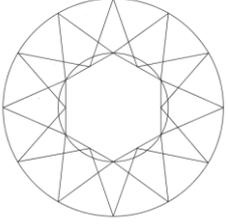
**Alunos construindo Mandala com o GeoGebra**



**Fonte: Fotos da pesquisadora.**

Depois de trabalhadas algumas habilidades com o *software* GeoGebra, propomos aos alunos construírem as Mandalas Humanas utilizando o programa. Assim, o grupo era incumbido de retomarem as formas geométricas envolvidas na elaboração e construção das Mandalas Humanas e de construí-las no laboratório de informática utilizando o *software* GeoGebra. A figura 18 a seguir, apresenta o produto final de alguns grupos.

**Figura 18 - Mandalas Geométricas construídas com o *software* GeoGebra**

<p><b>Número de integrantes do grupo: 11</b></p> 	<p><b>Número de integrantes do grupo: 4</b></p> 	<p><b>Número de integrantes do grupo: 6</b></p> 
<p><b>Número de integrantes do grupo: 10</b></p> 	<p><b>Número de integrantes do grupo: 6</b></p> 	<p><b>Número de integrantes do grupo: 6</b></p> 

**Fonte: Dados da pesquisa.**

Todo esse acervo de construções geométricas construído no laboratório de informática foi organizado em um livro para colorir e distribuído na mostra cultural aos visitantes do espaço.

### 4.3 3ª Etapa: Exposição do projeto Mandalas na Mostra Cultural

Ao propormos a 3ª etapa do projeto, tínhamos em mente apresentar a comunidade escolar o projeto Mandalas Geométricas em uma Mostra Cultural com a seguinte programação (QUADRO 16):

**Quadro 16 – Encontros da Mostra Cultural**

**3ª Etapa: Exposição do Projeto Mandalas na mostra cultural**

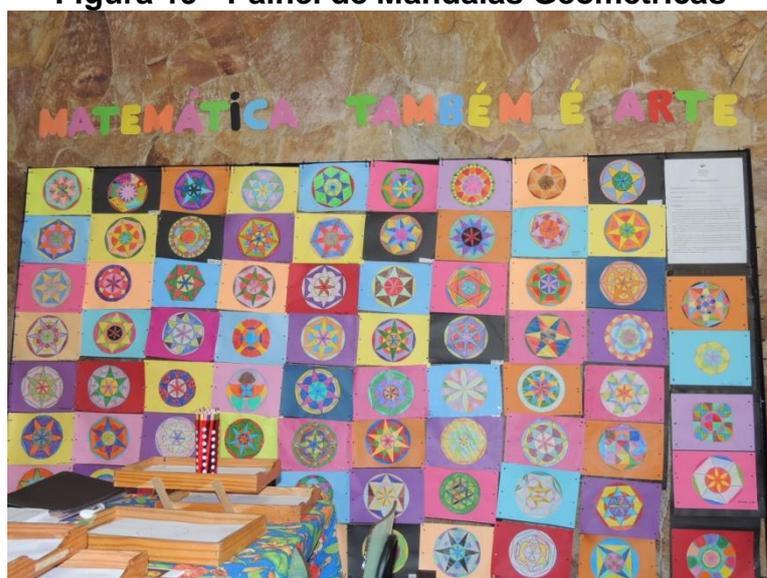
<b>Encontros/Duração</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Materiais</b>	<b>Atividades</b>
1º: Montagem e apresentação aos visitantes do projeto Mandalas Geométricas. Duração: 4 aulas	Apresentar e relatar aos visitantes a elaboração e execução das etapas do projeto;  Organizar os visitantes para a construção de Mandalas Humanas.	Lápis de cor, livro para colorir, registro fotográfico, painel com as Mandalas Geométricas e instalação de fotos.	Atividade em grupo de exposição do trabalho e elaboração de Mandalas Humanas com os visitantes.
2º: Avaliando o projeto. Duração: 1 aula	Avaliar o projeto e propor novas estratégias.	Questionário em papel A4.	Atividade em grupo: Avaliando o projeto Mandalas Geométricas.

Fonte: Elaborado pela autora.

A mostra cultural é um dos momentos em que o colégio apresenta para a comunidade os projetos realizados ao longo do ano. Os alunos são divididos em grupo para as etapas de montagem e desmontagem dos estandes e apresentação dos trabalhos.

A montagem do estande foi realizada em duas etapas: uma durante as aulas, envolvendo todas as três turmas, e outra, às vésperas com alguns alunos. As Mandalas Geométricas construídas com os instrumentos do desenho geométrico foram dispostas lado a lado, a fim de se construir uma colcha de retalhos. A intenção nesse modo de apresentação era o de representar a ideia de uma tecelagem de conhecimentos e experiências, como apresentada na figura 19.

**Figura 19 - Painel de Mandalas Geométricas**



**Fonte: Foto da pesquisadora.**

As Mandalas Humanas foram reproduzidas em tamanhos especiais e fizeram parte de uma instalação presa ao teto, mostrando as linguagens, corporal, textual e matemática abordadas. Essas imagens foram trabalhadas nas aulas de redação e cada grupo criou um pequeno texto sobre a imagem. Assim, o trabalho final tinha duas apresentações: de um lado a foto com o texto criado pelo grupo e do outro lado, a foto com a linguagem matemática. No quadro 17, apresentamos alguns desses trabalhos finais.

Quadro 17 – Material apresentado na mostra cultural

A linguagem corporal e linguagem textual



A linguagem corporal e a linguagem matemática

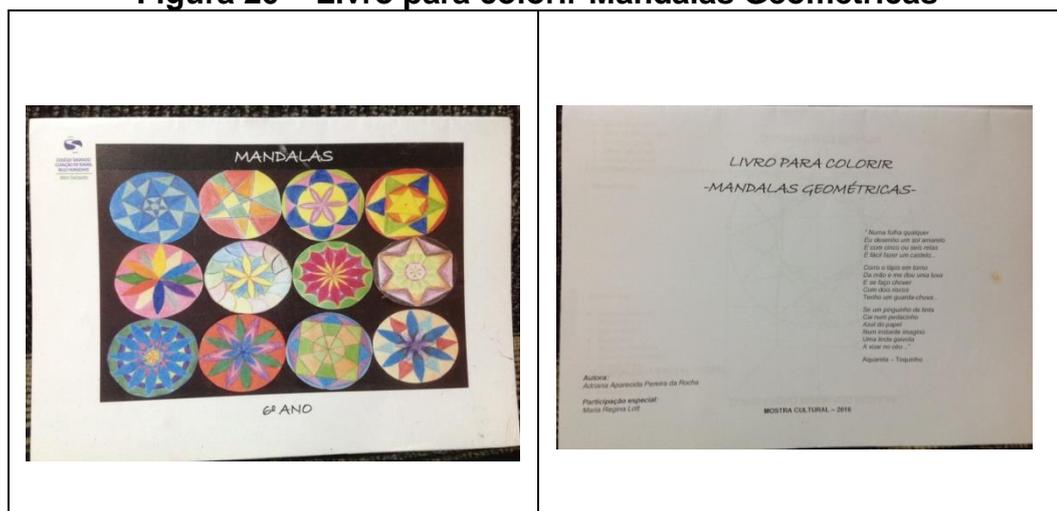




Fonte: Dados da pesquisa. Fotos da pesquisadora.

As Mandalas construídas no laboratório de informática foram apresentadas em formato de livro de colorir e disponibilizadas para os visitantes durante a mostra cultural (FIGURA 20).

**Figura 20 – Livro para colorir Mandalas Geométricas**



Fonte: Fotos da pesquisadora.

Nessa etapa, para executarmos o proposto e elaborado pela pesquisa, os alunos foram divididos em grupo, pois os mesmos eram participantes de outros trabalhos. Vale ressaltar a desenvoltura e prazer na fala dos alunos ao apresentar o projeto e o encantamento dos visitantes tanto com o trabalho realizado quanto com a apresentação da turma (FIGURA 21).

**Figura 21 - Interação dos visitantes com o trabalho**

Fonte: Fotos da pesquisadora.

Retomando as características, como já citadas, primordiais em uma pesquisa de cunho qualitativa e que nortearam o presente trabalho, procuramos sempre que possível, investigar e estimular de que maneira a aplicação das atividades se manifestavam na prática e no ambiente da sala de aula bem como fora dela. Nosso interesse maior era sugerir uma aprendizagem significativa, valorizando e aprimorando todo o conhecimento adquirido. Nesse contexto, acreditamos que propiciar, com essa postura e dinâmica, um espaço aberto a diálogos, questionamentos, intervenções e sugestões de execução de novas tarefas exploratórias, é fator crucial para o desenvolvimento não apenas da pesquisa, mas para o desenvolvimento do indivíduo.

Envolvidos com tudo o que foi apresentado até o momento, os alunos se prontificaram em estender o projeto das Mandalas Geométricas além dos muros da escola e sugeriram levar ao lar de idosos os trabalhos executados no laboratório de informática para ser apresentado e compartilhado.

Planejaram, com muito cuidado, como seria a apresentação das Mandalas Geométricas para os idosos, se preocuparam em reproduzi-las em tamanho maior para facilitar a visualização, se organizaram para levar os lápis de colorir usados durante a mostra cultural e se mostravam orgulhosos com o trabalho a ser apresentado. Na figura 22, apresentamos alguns registros desse encontro.

**Figura 22 – As Mandalas Geométricas tomam novos espaços**

 <p>Ao chegarem, uns dos primeiros passos foi apresentar o trabalho aos idosos.</p>	 <p>A organização do espaço e o convite para participarem das oficinas foram bem similar ao ocorrido durante a mostra cultural.</p>
 <p>Dar atenção individualizada foi uma preocupação constante.</p>	 <p>As cópias das Mandalas Geométricas e os lápis de colorir foram disponibilizados durante as atividades e doados pelos alunos.</p>

**Fonte: Dados da pesquisa. Fotos da pesquisadora.**

Ao encerrar a visita ao lar de idosos, todos os alunos se mostravam muito alegres e orgulhosos com a oportunidade de *levar um carinho e uma diversão àquelas pessoas*. Essa foi uma fala geral dos alunos.

Assim, acreditamos que a aprendizagem foi realmente relevante e significativa.

Para finalizarmos nossa pesquisa, procuramos nos informar sobre as opiniões dos alunos acerca do trabalho realizado e os pedimos para elaborarem um texto sobre a experiência de se construir Mandalas Geométricas para aprender geometria:

“Para mim, quando fizemos as mandalas eu não achei só divertido, eu comecei a perceber que fui aprendendo muitas coisas, como nomes de formas, aprendi a usar o compasso ...”

“No trabalho com os materiais geométricos é muito legal mas, precisa de atenção e muita concentração para sair perfeito. Fizemos, mandalas, ângulos, polígonos e formas geométricas. no começo das construções estava achando difícil, pois, não sabia como fazia para fazer as imagens, colocar o compasso no lugar certo e os conceitos. Mas agora com as explicações mais que perfeitas, nós podemos construir tudo o que for pedido.”

“O trabalho com as Mandalas é muito interessante, pois enquanto aprendemos geometria de forma descontraída e legal, também aprendemos uma forma de arte. Acho uma ideia muito bacana para entendermos melhor e com mais facilidade a matéria.”

“Inicialmente achei a coisa mais chata do mundo! Não conseguia fazer tudo aquilo. Aquelas ferramentas eram difíceis, tínhamos que fazer várias coisas. Prestei mais atenção e vi que não era tão difícil ... Achei mandalas uma coisa tão bonita e legal! Minha experiência com a geometria foi ótima! “

“[...] O que eu mais gostei foi ver o trabalho em grupo na sala de aulas, entre todos um ajudando o outro, uma coisa quase impossível de acontecer [...]”

“[...] Além do mais, meu pensamento matemático mudou: antes achava que a Matemática era só aquelas coisas chatas, como expressões numéricas, divisões, multiplicações. Agora vejo um lado bem mais legal e essas coisas, também, se tornaram legais a partir da minha nova visão.”

Ao final da pesquisa, percebemos que os alunos melhoraram consideravelmente em vários quesitos, como, por exemplo, na linguagem matemática, na percepção espacial e visual, aguçaram e desenvolveram de maneira eficaz a criatividade, a capacidade de abstração e de imaginação, aprimoraram a coordenação motora, a concentração e principalmente, construíram uma relação bem prazerosa e dinâmica com a geometria.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chegamos ao século XXI com o anseio de nós, pesquisadores e docentes, repensarmos, não só as várias práticas educacionais, mas de se repensar o ensino da Geometria, no que tange o ensino/aprendizagem da Matemática. Diante às novas tendências exigidas pelo dia a dia corrido e pela preocupação com os novos tempos, somos levados a cada dia de nossa jornada, a reformular, a reinventar o ensino da Geometria, não apenas por uma questão didático-pedagógica, mas também por uma questão epistemológica e social.

Constatou-se, com esse trabalho, que, apesar de se fazer necessária a utilização de materiais didáticos durante as aulas de Geometria, a eficiência de qualquer material didático depende da concepção que o professor tem sobre ele e como conduzirá não só a sua utilização, mas como entende e conduz o processo ensino aprendizagem.

Percebeu-se, ainda, a latente necessidade em promover um trabalho que busque o desenvolvimento do pensamento geométrico, ou simplesmente de investigar os conhecimentos prévios trazidos pelos alunos, para que, a partir desses, atividades inovadoras e desafiadoras sejam formuladas e aplicadas. Observamos que, para o aluno, mais importante que conhecer as supostas “verdades matemáticas”, é obter a alegria e o prazer da descoberta, é perceber sua competência, sua melhoria da autoimagem, a certeza de que é possível e vale a pena procurar soluções e fazer constatações, é se satisfazer com o sucesso de entender e compreender que a Matemática não é aquele bicho-papão que dizem, e sim, um campo de saber onde ele, aluno, pode navegar.

Após essas constatações e diante da pesquisa teórica realizada, essas considerações mostram que cabe ao professor interessado no desenvolvimento cognitivo de seus alunos, buscar e elaborar estratégias de ensino que sejam eficazes e inovadoras, com o intuito de favorecer o interesse e a motivação dos estudantes.

Nessa perspectiva, este trabalho apresenta um Caderno de Atividades (APÊNDICE A) como proposta de intervenção pedagógica, com o objetivo de auxiliar o docente no exercício de seu ofício, a desenvolver habilidades geométricas baseando-se nas construções de Mandalas Geométricas.

Vale ressaltar acerca da dificuldade que nos deparamos em obtermos embasamento teórico suficiente, pertinente e diversificado no que tange à escolha do nosso objeto de estudo: a construção de Mandalas Geométricas e o ensino da geometria. Referindo à abordagem psíquica e religiosa, nos debruçamos sobre os trabalhos de Jung (2000), Fioravanti (2003). Porém, ao que se refere a uma abordagem de ensino voltada especificamente à geometria, encontramos os trabalhos de Yamada (2013), Ramos (2016). Assim, esperamos, também, que a pesquisa desenvolvida respalde futuros projetos e estudos que comunguem do nosso objetivo norteador.

Outro ponto a se considerar, é o fato de que nossa pesquisa foi desenvolvida com alunos do sexto ano e que esperamos um retorno mais contundente do trabalho desenvolvido no oitavo ano, quando os assuntos sobre polígonos e circunferências serão retomados com mais profundidade.

Para finalizar, acreditamos que este trabalho não se encerra aqui, já que nenhum saber torna-se pronto e acabado. Na verdade, esperamos inspirar e seduzir outros colegas a buscarem novos horizontes, a fim de ampliar os conhecimentos apresentados e discutidos nessa pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- ABRANTES, P.; SERRAZINA, L. & OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica**. Brasília (DF): Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, 1999.
- ALBURQUERQUE, Irene de. **Metodologia da matemática**. Rio de Janeiro, Conquista, 1951.
- ALMEIDA, Max Linder. **Manual de Desenho Geométrico**. 2 ed. Rio de Janeiro: Zelio Valverde, 1945.
- ARAÚJO, Jussara. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: As Discussões dos Alunos**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.
- BERNAL, J.D. **Ciência na história**. Trad. Antônio N. Pedro. Lisboa, Livros Horizontes, 1975/1978.
- BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação Matemática pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 264-282.
- BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo. 1974.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília (DF): MEC, 1998.
- BÚRIGO, E. Z.; GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V.; GARCIA, V. C. (Org.). **A matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens**. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2012. v.1. 304 p.
- CARVALHO, Benjamin de A. **Programa de Desenho para a quarta série ginásial**. 4.ed. São Paulo: Nacional, 1953.
- CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.) **Aprendendo e ensinando Geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da teoria à prática**. Campinas, São Paulo: Papyrus, 1997.
- DANTAS, H.; LA TAILLE, Y.; OLIVEIRA, M. K. **Piaget, Vygotsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão**. São Paulo: Summus, 1992.
- DANTE, L. R. Projeto Teláris: **Matemática: Ensino fundamental 2**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DEGUIRE, L. J. Geometria: um caminho para o ensino da resolução de problemas

do jardim de infância à nona série. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.) **Aprendendo e ensinando Geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: UNICAMP, 2004.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as in Educational Task**. Dordrecht-Holland: Reidel Publishing Company, 1973.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. 2000. 217 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

GRANDE, John J. Del. Percepção espacial e geometria primária. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo, Atual, p. 156, 1994.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica. Uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. Instituto de Matemática da UFRGS. SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7. **Anais...**, Belo Horizonte – MG: UFMG, p.1-13, nov. 1996.

GROSSNICKLE, F. E. & BRUECKNER, Leo J. **O ensino da aritmética pela compreensão**. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1965.

HOFFER, A. Geometry is more than proof. **Mathematics Teacher**. Reston, v. 71, n.1, p.11-21, Jan.1981.

JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A.: Una propuesta de fundamentación para La enseñanza de la geometria: El modelo de van Hiele. In: LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M.V. (Ed). **Teoría y práctica en educación matemática**. Sevilla: Alfar, 1990. p. 295 – 384 (fragmentos)

KALEFF, Ana Maria; REI, Dulce Monteiro; HENRIQUES, Almir de Souza; FIGUEIREDO, Luiz Guilherme. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. **Bolema**, ano 10, n. 10, p. 21-30, 1994.

KOPKE, R. C. M. Ensino de geometria descritiva: inovando na metodologia. **Revista Escola de Minas**, v. 54, n. 1, Ouro Preto, jan-mar 2001. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0370-44672001000100008>>. Acesso em: 01 jun. 2013.

KOPLE, R. C. M. Imagens e reflexões: A Linguagem da geometria nas escolas. Caligrama. **Revista de Estudos e Pesquisas em Linguagem e Mídia**, v. 2, n. 1, 2006.

LEA, Vanessa. O corpo como suporte para a geometria. FERREIRA, Mariana Kawall Leal (org.) **Ideias Matemáticas de Povos Culturalmente Distintos**. São Paulo. Global, 2002.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: \_\_\_\_\_. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de**

**professores.** Campinas – SP: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista** – Geometria, Blumenau, SC: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano III, n.4, p.3-13, 1º semestre 1995.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: São Paulo. EPU, 1986.

MALTEMPI, M. V. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à educação matemática In: BICUDO, M. A. V.; M. C. BORBA (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, p. 264-282, 2004.

MATEMÁTICA mais que desafio, minha paixão! **Narrativa sobre Pitágoras.** 2013. Disponível em:

<<http://matematicamaisqueumdesafioumapaixao.blogspot.com.br/2013/06/narrativa-sobre-pitagoras.html>>. Acesso em 5 abr. 2016.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática.** Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 9, n. 9-10, p.1-6, 2004-2005.

NASCIMENTO, R. A. do; BENUTTI, M. A.; NEVES, A. F. Mandalas e rosáceas: em busca de novas abordagens para antigos conteúdos. In: GRAPHICA 2007 / INTERNATIONAL CONGRESS ON ENGINEERING GRAPHICS FOR ARTS AND DESIGN, 7, & SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 18., 2007, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 1 CD.

PAIS, Luís Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. In: **Zetetiké.** v. 4, n. 6, julho/dezembro, pp. 65-74, Campinas: CEMPEM /FE/ UNICAMP, 1996.

PAVANELLO, R. M. **Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas.** 219f. 1995. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

PAVANELLO, M. R. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké.** v. 7. Ano I. n. 1, 1993.

PAVANELO, M. R. **O abandono do ensino de Geometria: Uma visão histórica.** 201 p. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia do Ensino) Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas/SP, 1989.

PENTEADO, Miriam Godoy. Novos Atores, Novos Cenários: Discutindo a Inserção dos Computadores na Profissão Docente. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999. p. 297-313.

RAMOS, A. P. de O. **Mandalas e a construção de saberes em arte e matemática.** 28 f. 2016. Monografia (Graduação em Matemática) – Unipampa - RS, 2016.

RÊGO, R.M.; RÊGO, R.G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p.39-56.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Trad. Paulo H. Colonese. 6 ed., Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN HIELE, Pierre Marie. **Structure and insight**: a theory of mathematics education. Orlando: Academic Press, 1986. 246 p.

WIRSZUP, Izaak. **Breakthroughs in the Psychology of learning and Teaching Geometry**. Columbus: ERIC/SMEAC, 1976.

YAMADA, T. R. U. **A abordagem com Mandalas na formação do professor de Matemática**. Disponível em:

<<http://wright.ava.ufsc.br/~grupohipermidia/graphica2013/trabalhos/A%20ABORDAGEM%20COM%20MANDALAS%20NA%20FORMACAO%20DO%20PROFESSOR%20DE%20MATEMATICA%20-%20C%C3%B3pia.pdf>>. Acesso em: 11 set. 2017.

*A CONSTRUÇÃO DE MANDALAS  
GEOMÉTRICAS COMO RECURSO DIDÁTICO*

**Organização:** Adriana Aparecida Pereira Rocha  
**Orientadora:** Profa. Dra. Eliane Scheid Gazire



# **A CONSTRUÇÃO DE MANDALAS GEOMÉTRICAS COMO RECURSO DIDÁTICO**

Organização: Adriana Aparecida Pereira Rocha

Orientadora: Profa. Dra. Eliane Scheid Gazire

Belo Horizonte

2017

- ## Apresentação

Vivemos num mundo de formas e imagens. Elas estão presentes na natureza, nas construções, nas artes. O estudo das formas se configura como um dos mais importantes ramos da Matemática, a Geometria.

Pensando nessa perspectiva surge o presente trabalho, fruto de um processo de pesquisa realizado no Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática da PUC- MG. Tem por objetivo apresentar ao leitor interessado, e em especial, ao educador uma possibilidade complementar de intervenção pedagógica no que tange ao ensino da Matemática, mais especificamente, ao ensino de Geometria.

Apresentamos nesse caderno, sugestões de atividades que se destinam a melhorar a compreensão, a apropriação e o aprimoramento de alguns saberes matemáticos tão importantes não só na jornada acadêmica e profissional, mas de grande valor para uma leitura interpretativa do mundo que nos cerca. Ao final de cada atividade, expomos algumas orientações aos professores a fim de norteá-los quanto aos procedimentos, atitudes, que acreditamos serem pertinentes à proposta do trabalho. Vale ressaltar que, a elaboração das atividades propostas nesse caderno foi desenvolvida numa perspectiva evolutiva, ou seja, o nosso intuito era de buscar, de maneira progressiva, ampliar as habilidades, os raciocínios, os procedimentos e o próprio conhecimento acerca da Geometria. Após a apresentação das atividades e suas respectivas orientações ao professor, segue-se sugestões de leituras a fim de ampliar os conhecimentos do professor acerca dos temas aqui desenvolvidos e

sequenciados bem como as referências bibliográficas utilizadas no decorrer desse produto.

Reverendo a bibliografia selecionada, buscamos conhecer e nos apropriar das ideias de vários estudiosos no que tange à aprendizagem da Geometria e como se dá a construção e o desenvolvimento do pensamento geométrico. Durante esses estudos, percebemos que várias pesquisas enfatizam a utilização de recursos didáticos variados para o trabalho com figuras geométricas. Indo ao encontro das ideias e atitudes de estudiosos como Pais (1996), Nacarato (2004-2005), Lorenzato (2006), Pavanello (1995), Lorenzato (1995), Dante (2015) e embasados em nossa prática docente de também utilizar diversificados recursos didáticos, que acreditamos serem fundamentais para o processo de ensino e aprendizagem, optamos em elaborar atividades exploratórias e investigativas que possibilitem a construção bem como a ressignificação de alguns conceitos geométricos básicos. A manipulação de materiais concretos e as construções geométricas tanto com os instrumentos do desenho geométrico tanto com *softwares* de Geometria dinâmica, se configuraram em uma prática bem comum durante todo o processo de pesquisa. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999, p.60), ressalta a importância de se trabalhar com essa diversidade de recursos durante as aulas de matemática: *“O desenho, a manipulação e a construção no computador de objetos geométricos permitem a exploração de conjecturas e a investigação de relações”*.

Nesse mesmo sentido, Lorenzato (2006), reforça que a ausência de materiais didáticos pode atrasar o desenvolvimento intelectual do aluno. Assim, segundo o mesmo autor, cabe ao professor se planejar e sempre se questionar sobre a verdadeira intenção da utilização deste ou daquele material a ser utilizado. Porém,

seguindo suas orientações, caso o material a ser utilizado seja novo para o aluno, é pertinente que se dê um tempo a ele, para que possa explorá-lo livremente num primeiro contato. Vale ressaltar que a troca de ideias, de raciocínios, de ações e de conclusões num momento posterior pelo grupo envolvido, é de grande importância na elaboração e construção do processo. Decorrentes das atividades concretas e abstratas realizada pelos alunos, o registro e a verbalização se configurará em outra etapa de real valor na apropriação e aprimoramento de novos e importantes saberes.

Em virtude do exposto, e inspiradas nas leituras e estudos realizados, procuramos elaborar atividades exploratórias e investigativas utilizando recursos variados, com o objetivo de promover não só a construção de conceitos geométricos básicos, mas também de ressignificá-los.

- ## Introdução

A fim de elucidar os interessados pela pesquisa, acreditamos que antes de iniciarmos este trabalho, faz-se necessário refletir sobre a seguinte questão:

- Por que ensinar e aprender geometria?

Ensinar e aprender sempre foram tarefas difíceis, porém, quando alcançadas, conferem extremo prazer às partes envolvidas.

Ensinar é uma palavra que vem do latim e quer dizer marcar, distinguir, assinalar. Essa é a mesma origem de signo, de significado. O ato de ensinar nos desafia, motiva, rejuvenesce, pois somos instigados a inventar e reinventar, a inovar, a criar e a encantar.

Além de se caracterizar por uma atividade colaborativa entre educadores e alunos, acreditamos que o ato de ensinar deve promover uma colaboração entre os próprios alunos, estimulando o trabalho em equipe e propiciando um espaço de solidariedade, em que as habilidades e competências de cada um são respeitadas e valorizadas.

Aprender implica na capacidade que temos de construir significados, reconstruindo, refazendo e reescrevendo o passado, para planejarmos e projetarmos o futuro.

No que tange à Geometria, Lorenzato (1995, p. 5) nos assegura que,

*Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de*

*vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.*

O mesmo autor também nos relata que as pesquisas psicológicas indicam que a aprendizagem geométrica se faz necessária ao desenvolvimento da criança, já que várias situações escolares requerem percepção espacial, tanto em Matemática como na Leitura e Escrita.

Assim, a Geometria se configura como um facilitador de processos mentais, pois ao prestigiar o processo de construção do conhecimento, valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar. Torna-se desse modo, um excelente apoio às outras disciplinas, desempenhando importante papel na aprendizagem.

Lorenzato (1995, p.6) também discorre que,

*A Geometria é a mais eficiente conexão didático pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz.*

Em consonância com o autor, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000, p.55), destacam que:

*Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo que vive. A Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de*

*números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.*

*Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.*

Nessa perspectiva, acreditamos ser inquestionável o quão importante e necessário se faz o ensino da Geometria na formação de um indivíduo crítico e transformador do mundo em que vive.

É fato, que o desenho surge como atividade precoce humana, e se constitui como sendo a primeira forma de representação gráfica e na vida escolar, está presente desde a educação infantil e como ferramenta de várias, senão de todas as disciplinas escolares.

Assim, aprender geometria e poder desenhar formas criadas pelo homem torna-se ferramenta imprescindível nesse contexto, dando àquele que a detém, facilidades na comunicação e na interpretação de vários códigos.

Nesse contexto, propomos um caderno de atividades baseados na construção de Mandalas Geométricas fazendo uso do corpo, dos instrumentos do desenho geométrico: compasso, régua, transferidor e esquadro e do *software* GeoGebra de geometria dinâmica, como um recurso didático nas aulas de Geometria. Acreditamos que a produção de tais formas poderá possibilitar um exercício ao desenvolvimento da criatividade, da percepção espacial e visual, da capacidade de abstração e imaginação, da coordenação motora e da concentração, aspectos primordiais na condução, elaboração e efetivação desse presente trabalho. Nosso objetivo principal é procurar contribuir para a aquisição, apropriação e aprimoramento de

conhecimentos e habilidades geométricas, que promulguem a autonomia e a formação da cidadania, e a ressignificação de conceitos geométricos.

Desse modo, baseados em nossa prática docente, propomos algumas atividades que se fundamentam na experimentação, na investigação, no trabalho em grupo, na reflexão da prática docente e na busca de metodologias e estratégias inovadoras para o ensino e aprendizagem da Geometria. Tais atividades estão organizadas da seguinte maneira:

### *Sequência das atividades*

<b>ENCONTROS/ DURAÇÃO</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>MATERIAIS</b>	<b>ATIVIDADES</b>
<b>1º: Explorando o conhecimento prévio dos alunos: O que você sabe?</b>  <b>Duração: 2 aulas</b>	Selecionar quais as ideias e conceitos geométricos os alunos apresentavam. Conceituar os entes primitivos.	Objetos existentes na sala de aula (prego na parede, buraco da fechadura, rodapé da sala, margem do quadro, piso e teto da sala e outros.).  Registro dos alunos.	Na sala: Explorando o nosso ambiente. Em casa: Escrever com as próprias palavras qual o significado de ponto, de reta e de plano.  Tabulação dos registros dos alunos.
<b>2º: Formas no cotidiano: O que temos a nossa volta?</b>  <b>Duração: 1 aula</b>	Perceber e registrar as formas geométricas em	Câmeras digitais e/ou celulares.	Elaboração do quadro: A geometria e suas manifestações.

ENCONTROS/ DURAÇÃO	OBJETIVOS	MATERIAIS	ATIVIDADES
	suas várias manifestações.		
<b>3º: Brincando a gente aprende: construindo ângulos</b>	Executar atividades corporais relacionadas a ângulos.	Imagens de figuras que contenham ângulos, os mais variados.	Construções de ângulos utilizando o corpo como recurso
<b>4º: Brincando a gente aprende: construindo Mandalas Humanas</b> Duração: 10 aulas	Construir Mandalas Geométricas usando o corpo como referência.	Fotos selecionadas na <i>internet</i> e câmera fotográfica.	Pesquisar sobre formas de Mandalas Humanas na <i>internet</i> ; Atividade em grupo para elaboração e execução das Mandalas Humanas; Registro pela professora das Mandalas Humanas.
<b>5º: Construções primárias: apresentando e manuseando os instrumentos do</b>	Apresentar e manusear os instrumentos do desenho geométrico.	Compasso, régua, transferidor, esquadro e caderno de desenho.	Conhecer e manipular os instrumentos do desenho geométrico.

<b>ENCONTROS/ DURAÇÃO</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>MATERIAIS</b>	<b>ATIVIDADES</b>
<b>desenho geométrico Duração: 3 aulas</b>			
<b>6º: Apresentação das Mandalas Geométricas. Duração: 1 aula</b>	Ilustrar e apresentar algumas Mandalas Geométricas.	Mandalas geométricas construídas por outros alunos.	Conversa informal sobre as Mandalas Geométricas.
<b>7º: Construção de polígonos regulares inscritos na circunferência. Duração: 10 aulas.</b>	Construir polígonos regulares inscritos na circunferência com o auxílio da régua e do compasso; Aprimorar e ampliar conteúdos já estudados; Construir novos conhecimentos	Compasso, régua, transferidor, esquadro e caderno de desenho.	Construções geométricas
<b>8º: Construção de polígonos estrelados Duração: 5 aulas</b>	Construir polígonos estrelados na circunferência com o auxílio da	Compasso, régua e caderno de desenho.	Construções geométricas

ENCONTROS/ DURAÇÃO	OBJETIVOS	MATERIAIS	ATIVIDADES
	régua e do compasso.		
<b>9º: Construção das Mandalas Geométricas com o recurso do desenho geométrico: combinando formas geométricas. Duração: 15 aulas.</b>	Construir Mandalas Geométricas através da composição de figuras planas. Aprimorar e ampliar conteúdos já estudados; Construir novos conhecimentos (bissetriz, ponto médio, alinhamento de pontos.).	Compasso, régua, transferidor, esquadro e caderno de desenho.	Construções geométricas
<b>10º: Construção das Mandalas Geométricas com o software GeoGebra: Crie, invente e faça diferente! Duração: 15 aulas</b>	Utilizar o computador como ferramenta na construção de Mandalas Geométricas.	Computador, <i>software</i> GeoGebra.	Atividade em dupla para a construção das Mandalas Geométricas e montagem do livro para colorir.

ENCONTROS/ DURAÇÃO	OBJETIVOS	MATERIAIS	ATIVIDADES
<b>11º: Avaliando o projeto.</b> <b>Duração: 1 aula</b>	Avaliar o projeto e propor novas estratégias.	Questionário em papel A4.	Atividade em grupo: Avaliando o projeto Mandalas Geométricas.

Fonte: Elaboração da autora.

É importante elucidar que o quadro acima apresentado foi remodelado do original da pesquisa, pois acreditamos que esse novo modelo irá atender melhor tanto aos interessados por ele como à finalidade do produto final exigido pelo mestrado a que já nos referimos.

Desse modo, esperamos contribuir com professores, estudantes e profissionais da educação matemática, numa perspectiva de questionar, avaliar, recriar e repensar os métodos de ensino da Geometria, a despeito das dificuldades latentes e das condições adversas do meio escolar.

# ATIVIDADE 1

- Explorando os conhecimentos prévios dos alunos: O que você sabe?

Caro professor, comece esse encontro com uma conversa informal. Procure observar como os alunos expressam-se, como pensam, quais dificuldades apresentam, quais ideias dominam, pois assim você terá subsídios suficientes para nortear e fomentar seus próximos passos. Busque sempre que possível, incentivar os alunos à troca de ideias, de percepções e de experiências, pois tais opiniões se tornaram extremamente enriquecedoras ao processo ensino/aprendizagem.

Explore objetos existentes na sala de aula como pregos na parede, buraco de fechadura, rodapé da sala, piso e teto da sala e outros objetos.

## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

Buscar identificar os conceitos geométricos trazidos pelos alunos se configura como fator crucial para o desenvolvimento e realização desse trabalho. Nessa direção, procuramos criar algumas estratégias que possibilitem estimular o desenvolvimento e a realização individual e coletiva dos estudantes.

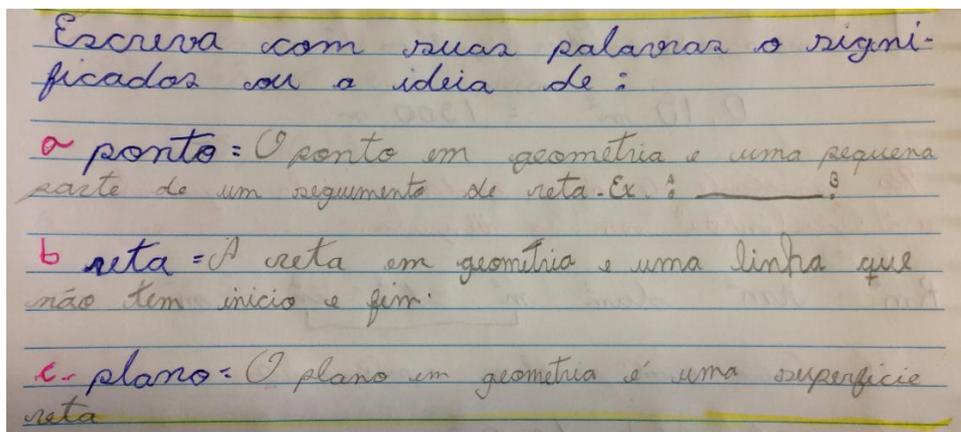
Embasados em nossa prática como docente, percebemos que identificar o “conhecimento prévio” dos alunos ainda se configura como uma prática, infelizmente, pouco adotada e considerada em nossas escolas. Notamos, também, que, de maneira corriqueira, os conceitos desenvolvidos no decorrer das atividades práticas das crianças e suas interações sociais imediatas são subestimadas e que os conteúdos são, geralmente, tratados de maneira única e esquematizada, impossibilitando aos alunos desfrutar da riqueza de suas experiências pessoais. Nesse sentido, acreditamos que precisamos ser prudentes para que excessos e distorções na definição do que seja a “realidade do aluno” não promovam o efeito contrário ao que se propõe.

Nessa perspectiva, sugerimos que no primeiro encontro, haja uma conversa informal com o objetivo de selecionar quais as ideias e conceitos geométricos os alunos apresentam. Pergunte-os sobre se já estudaram sobre Geometria e o que já estudaram; o que é necessário para fazer um desenho. Procure explorar objetos na sala de aula como pregos na parede, buraco de fechadura, rodapé da sala, piso e teto da sala e outros objetos para ilustrar as ideias sobre os entes primitivos e, finalmente, peça-os que escrevam com as próprias palavras qual a ideia ou o significado de ponto, de reta e de plano.

A partir dos relatos dos alunos, selecione os que apresentam algumas ideias e possibilidades que instiguem a investigação, a curiosidade, a pesquisa, a motivação. Monte, com esses relatos, um quadro de exposição e discuta-o com os alunos, fazendo as intervenções, buscando mostrar sempre aos alunos sobre a importância de perceberem seus conhecimentos prévios como suporte para as tomadas de decisão no que se refere à direção a trilhar. Para tanto, procure explorar e sistematizar a ideia dos entes primitivos e das partes da reta.

A seguir, a fim de exemplificar o quadro sugerido, apresentamos um modelo para elucidar o professor nessa atividade.

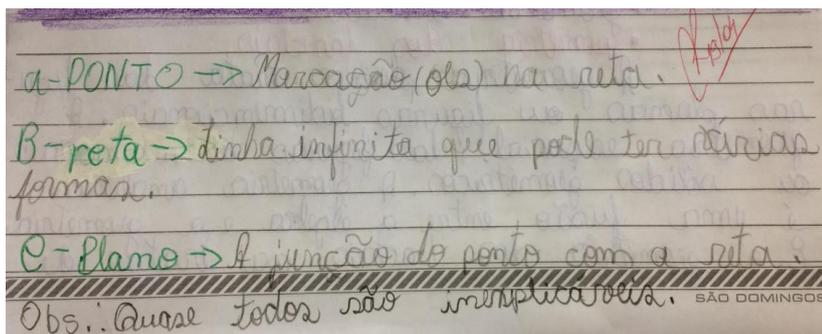
### Registro 1



### Comentário do registro 1

Nesse registro, percebemos que a aluna demonstra um bom domínio das ideias sugeridas pelos entes primitivos geométricos.

### Registro 2



### Comentário do registro 2

Nesse registro, a aluna coloca uma observação interessante em que mostra claramente, a “impossibilidade” da explicação dos entes primitivos. Esse registro será retomado durante as aulas subsequentes.

### Registro 3

• Ponto: O que determina uma posição, não apresenta dimensão alguma.

• Reta: É a menor distância de um local ao outro, possui uma dimensão e é ilimitada, sem fim.

• Plano: Uma superfície bidimensional.

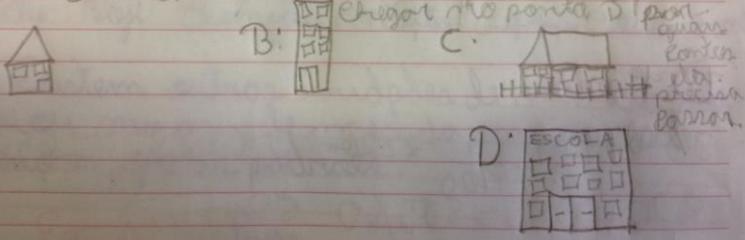
### Comentário do registro 3

O aluno apresenta nesse registro, alguns termos, como posição, dimensão, distância, ilimitado, superfície e bidimensional, que serão retomados para o aprimoramento do vocabulário da sala nas aulas subsequentes.

### Registro 4

Eu acho que o ponto serve para indicar um local na atividade.

Ex: Se vou da minha casa na ponto A e preciso chegar no ponto B, ponto C, ponto D.



### Comentário do registro 4

O fato de como o desenho se faz presente no cotidiano dos alunos, é claramente percebido nesse registro. A ideia de ponto aqui representada está interligada à ideia de localização.

### Registro 5

Ponto é um elemento não especificamente um círculo, mas deve ser o menor desenho da imagem, no caso, ele pode demarcar algo em desenhos, textos, retas...

Reta é um traço/linha sem curvas, podem ser paralelas, nas diagonais, na vertical e horizontal, que normalmente não tem um fim demarcado.

A palavra plano refere-se a uma imagem/elemento que não possui realmente nem textura e é fixada no papel, (reto).

### Comentário do registro 5

Nesse registro, o aluno mostra claramente a ideia de ser o ponto uma figura adimensional. Apresenta também ideias que serão retomadas e aprofundadas como curvas, paralelas, diagonais, verticais, horizontais durante aulas subsequentes.

Fonte: Dados da pesquisa.

# ATIVIDADE 2

- Formas no cotidiano: O que temos a nossa volta?

Separe os alunos para essa atividade em grupos de 4 ou 5 integrantes. Peça, com antecedência, que tragam máquinas fotográficas digitais e/ou celulares que tenham câmeras e proponha as seguintes orientações:

- 1) Você e seu grupo irão pesquisar e registrar através das máquinas fotográficas digitais e/ou através de seus celulares, tudo que lhe parecerem figuras geométricas. Explore o máximo de ambientes da escola!
  
- 2) Vocês irão selecionar as melhores fotos e enviar via e-mail ou trazê-las salvas em *pen drive* na próxima aula.

## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

Segundo Lorenzato (1995, p.8),

*Em termos de prática pedagógica, as crianças devem realizar inúmeras experiências ora com o próprio corpo, ora com objetos e ora com imagens; para favorecer o desenvolvimento do senso espacial das crianças é preciso oferecer situações onde elas visualizem, comparem e desenhem formas: é o momento do dobrar, recortar, moldar, deformar, montar, fazer sombras, decompor, esticar ... para, em seguida, relatar e desenhar; é uma etapa que pode parecer mero passatempo, porém é de fundamental importância.*

Nessa perspectiva, pode-se dizer que a criança começa a adquirir o senso espacial a partir do momento em que consegue exercer algum domínio das relações dinâmicas que estão estabelecidas entre as partes do seu próprio corpo e/ou entre seu corpo e os demais níveis do pensamento consciente. Torna-se então, possível a aprendizagem de noções espaciais posicionais como as de direção, sentido, atrás, perto, em cima de, em baixo de e outras.

Aprender essas noções espaciais, juntamente com a de algumas noções lógicas elementares, são de suma importância para a identificação, distinção e representação de formas geométricas muito frequentes na Geometria elementar. Esta identificação só se torna significativa quando a criança demonstra ter consciência dos atributos específicos necessários que diferenciam determinada forma de todas as demais formas espaciais possíveis.

Para alcançar tal patamar, a criança necessita superar, mesmo que localmente, algumas ilusões que se manifestam no domínio do espaço perceptivo, como por exemplo, a de que a forma de uma figura ou objeto varia em função da posição que este ocupa no espaço.

Nesse percurso, o domínio do espaço inicial da criança é topológico (onde as linhas desenhadas ressaltam o dentro/fora e o aberto/fechado), depois projetivo (onde as propriedades espaciais invariantes são valorizadas) e finalmente euclidiano (onde surge a métrica).

Ainda segundo Lorenzato (1995, p.10), as tendências recentes para o 2º ciclo (6º / 9º anos) são:

- Apresentar a Geometria como meio de descrever o mundo físico;
- Explorar as transformações de figuras geométricas através de rotação, translação, simetria e deformação, ressaltando a semelhança e a congruência;
- Utilizar a Geometria como auxiliar para resolver problemas;
- Aplicar propriedades geométricas;
- Favorecer a emissão e a verificação de hipóteses;
- Integrar a Geometria com a Aritmética e Álgebra.

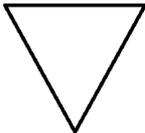
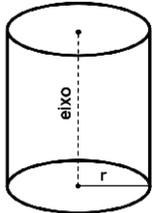
Nessa fase, os estudos da Geometria devem favorecer oportunizar os alunos a realizarem suas primeiras explorações de modo sistemático. As primeiras deduções lógicas são construídas, os resultados e os processos são discutidos, embora sem se preocupar com a formalização.

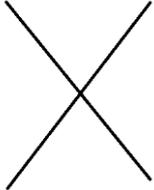
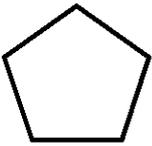
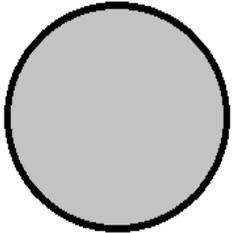
O vocabulário utilizado deve ser empregado de forma correta, com vistas ao domínio das definições e das propriedades. Longe de valorizar a memorização ou a evocação de definições, enunciados, demonstrações ou fórmulas, o objetivo é o processo pelo qual se chega ao resultado visando à compreensão e ao significado. Nessa perspectiva, a exploração informal da Geometria é bem apropriada e necessária para que os estudantes dessa faixa, 6º/9º anos, sejam oportunizados à comparação, classificação, medição, representação, construção, transformação, etc.

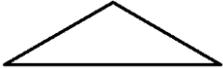
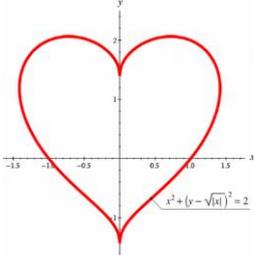
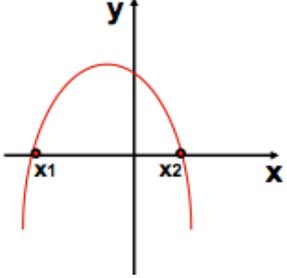
O apoio do material didático, visual ou manipulável, ainda é fundamental. Aliás, para o autor, o material didático sempre será necessário porque ele simplesmente provoca a imaginação em qualquer idade.

Assim, de posse das fotos realizadas pelos alunos, confeccione um quadro, que contemple: formas ao nosso redor, ideias sugeridas e matematização. A seguir apresentamos uma adaptação do modelo de categorização sugerido por Gazire (2000), em sua tese de doutorado, e que poderá ser utilizada por você.

*Um mundo de formas.*

FORMAS AO NOSSO REDOR	IDEIAS SUGERIDAS	MATEMATIZAÇÃO
<p>CATA VENTO DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE POLÍGONO</p> 	<p>TRIÂNGULO</p> 
<p>BRINQUEDO DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE CORPO REDONDO</p> 	<p>CILINDRO</p> 
<p>MURO DA LATERAL DA CANTINA</p> 	<p>IDEIA DE CURVAS</p> 	<p>ELIPSE</p> 

FORMAS AO NOSSO REDOR	IDEIAS SUGERIDAS	MATEMATIZAÇÃO
<p>PAINEL DA CANTINA</p> 	<p>IDEIA DE POLÍGONO</p> 	<p>HEXÁGONO</p> 
<p>JANELA DA CASINHA DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE RETAS QUE SE CRUZAM</p> 	<p>RETAS CONCORRENTES</p> 
<p>CASINHA DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE POLÍGONO</p> 	<p>PENTÁGONO</p> 
<p>RELÓGIO DA PAREDE</p> 	<p>IDEIA DE FIGURA PLANA</p> 	<p>CÍRCULO</p> 

FORMAS AO NOSSO REDOR	IDEIAS SUGERIDAS	MATEMATIZAÇÃO
<p>FACHADA DO COLÉGIO</p> 	<p>IDEIA DE POLÍGONO</p> 	<p>TRIÂNGULO</p> 
<p>TRONCO DA MANGUEIRA DO COLÉGIO</p> 	<p>IDEIA DE CURVAS</p> 	<p>CARDÍOIDE</p> 
<p>CASINHA DO PARQUINHO</p> 	<p>IDEIA DE CURVAS</p> 	<p>PARÁBOLA</p> 

Fonte: Dados da pesquisa.

# ATIVIDADE 3

- Brincando a gente aprende: Construindo ângulos

Sugerimos agrupar os alunos em 4 ou 5 integrantes para a execução dessa atividade.

Respondam ao questionário a seguir:

- 1) No começo dos nossos estudos sobre Geometria, vocês relataram sobre vários assuntos já tratados como, por exemplo, ângulos. Utilizando o nosso espaço da sala de aula, identifiquem alguns ângulos?
- 2) Podemos relacionar a figura do ângulo a qual ou quais partes da reta?
- 3) Utilizando o corpo como recurso, construam ângulos agudos, ângulos retos, ângulos obtusos e ângulos rasos. Abusem da criatividade!

## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

Essa atividade foi adaptada de uma proposta realizada por Dante (2015, p. 88) e apresentava, como foco central, reforçar a ideia de ângulos e apresentar de maneira informal a classificação dos ângulos em agudo, reto e obtuso. De acordo com o autor (2015, p. 16):

*Os alunos dessa faixa etária ainda aprendem muito brincando, interagindo com os colegas e se desenvolvendo integralmente. O professor deve reuni-los e incentivá-los a jogar de acordo com os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos no jogo. No jogo, a interação entre os participantes produz aprendizagem – muitas vezes, o que não se aprendeu em uma aula ou em uma lição do livro é assimilado no momento lúdico. Ao acompanhar as duplas ou equipes durante o jogo, o professor poderá perceber as dificuldades que cada aluno tem e, posteriormente, buscar saná-las.*

Sugerimos que o professor promova outras experimentações como desafio da atividade com o intuito de garantir e assegurar a motivação da turma pelo estudo da Geometria.

Com o intuito de auxiliar o professor, apresentamos abaixo algumas instruções de execução da atividade proposta:

## Construindo ângulos

### Registro 1 – Construindo ângulos retos



### Comentário do registro 1

Nesse registro, os alunos construíram ângulos retos:

- com a perna e a coxa, dobrando o joelho;
- com os dois pés;
- com as duas pernas.

### Registro 2 – Construindo ângulos retos



### Comentário do registro 2

Nesse registro, os alunos constroem ângulos retos com partes do corpo diferentes das já realizadas:

- com os dedos da mesma mão;
- com os dois braços;
- com o braço e o antebraço, dobrando o cotovelo.

### Registro 3 – Construindo ângulos agudos



### Comentário do registro 3

Os alunos apresentam nesse registro dos ângulos agudos construídos com o braço e o antebraço, dobrando o cotovelo.

<p><b>Registro 4 – Construindo ângulos agudos</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 4</b></p> <p>Usando as duas pernas, os alunos constroem ângulos agudos.</p>
<p><b>Registro 5 – Construindo ângulo raso</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 5</b></p> <p>Usando as duas pernas a aluna constrói um ângulo raso.</p>
<p><b>Registro 6 – Construindo ângulo raso</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 6</b></p> <p>Usando os dois braços o aluno constrói um ângulo raso.</p>
<p><b>Registro 7 – Construindo ângulos obtusos</b></p> 	<p><b>Comentário do registro 6</b></p> <p>Usando os dedos das mãos, o grupo exemplifica ângulos obtusos.</p>

Fonte: Dados da pesquisa.

# ATIVIDADE 4

- **Brincando a gente aprende: Construindo Mandalas Humanas**

Selecione com antecedência algumas fotos de Mandalas Humanas e as apresente como norteador dessa atividade. Procure retomar, aprimorar e agregar novas ideias e conceitos. Separe a turma em grupos de no máximo 6 alunos.

- 1) Quais são os polígonos presentes em cada Mandala Humana apresentada?
- 2) Quais os tipos de ângulos que compõe as figuras?
- 3) Tente reproduzir ou criar uma Mandala Humana no grupo que você está e anote qual o polígono vocês construíram e quais os tipos de ângulos apareceram.

## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

O processo de simbolização do corpo, primeiro instrumento de pensamento da criança no seu diálogo com o mundo, é fator crucial para a construção do conhecimento.

De acordo com Dantas, La Taille e Oliveira (1992), Wallon concebe o homem como sendo genética e organicamente social e sua existência se realiza entre as exigências da sociedade e as do organismo, ou seja, o homem nasce para viver em sociedade, para agir e interagir no seu meio social e cultural, e a partir dessas interações inicia a construção e o desenvolvimento da própria personalidade, do caráter, dos valores e dos preconceitos. Desse modo, o ato mental se desenvolve a partir do ato motor. A criança empresta seu corpo ao mundo e o transforma em pensamento.

Nessa perspectiva, sugerimos a construção de Mandalas Humanas. Para tal trabalho, apresente algumas fotos de Mandalas Humanas previamente selecionadas na *internet* como forma de motivar e elucidar a tarefa a ser realizada. Aproveite o momento para retomar alguns termos, conceitos e ideias da geometria.

A seguir, estimule os alunos a pesquisarem outras Mandalas que poderão ser reproduzidas usando como ferramenta o próprio corpo. Apresentamos abaixo, algumas sugestões de Mandalas Humanas desenvolvidas durante a pesquisa e que poderão ser utilizadas para a motivação e exemplificação da atividade proposta.

## *Mandalas Humanas*

- Formando um quadrado



- Formando uma estrela de dez pontas



- Quadrados virados



- Formando um quadrado



- Quadrados virados



- Formando uma estrela de doze pontas com os dedos



- Formando uma estrela de seis pontas com os dedos



- Formando um hexágono com os braços



- Formando uma estrela de 14 pontas



- Formando um octógono com as mãos



**Fonte: Dados da pesquisa.**

Após a atividade, sugerimos ao professor retomar algumas ideias e conceitos que ainda se apresentarem com alguma necessidade de esclarecimento e de adequação.

# ATIVIDADE 5

- **Construções primárias: Apresentando e manuseando os instrumentos do desenho geométrico**

Apresentamos abaixo, os instrumentos do desenho geométrico:

## A régua

Instrumento muito utilizado durante as aulas de desenho geométrico bem como nas construções geométricas para medir e traçar retas. Sugerimos dar preferência à de plástico transparente, graduada em milímetros e centímetros.

Lembre-se que começamos a medir sempre a partir do zero (0) da graduação.

## O compasso

É um instrumento que utilizamos para traçar circunferência e arcos de circunferência, além de ser utilizado para transportar medidas.

É constituído por uma ponta seca e outra de grafite. Essas, devem estar sempre no mesmo nível.

Para apontar a ponta de grafite, recomenda-se o uso de um apontador apropriado ou de uma lixa de unha. Procure deixar o grafite do compasso em uma posição oblíqua com a parte lixada para fora.

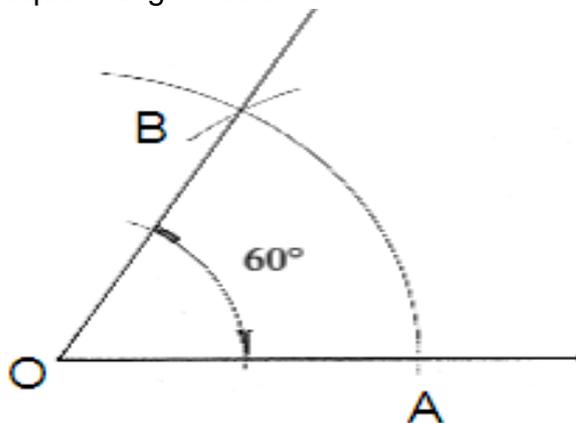
## O transferidor

É o instrumento usado para construir, medir e transportar ângulos. É constituído por três partes: limbo, linha de fé e centro do transferidor. Os transferidores podem ser encontrados com uma volta ou com meia volta.

## O par de esquadros

Instrumentos de variadas utilidades: construções de linhas paralelas e perpendiculares e a demarcação de ângulos ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  e suas combinações). Geralmente, são vendidos aos pares.

- 1) Com o auxílio da régua e do compasso, construa um ângulo de  $60^\circ$ , de  $120^\circ$  e de  $240^\circ$ . Siga as orientações abaixo para a construção do ângulo de  $60^\circ$ :
  - I) Com o auxílio da régua, construa um dos lados do ângulo e posicione o vértice O;
  - II) Com centro no vértice e uma abertura qualquer, trace um arco que intercepte o lado já traçado, definindo o ponto A;
  - III) Com a mesma abertura e centro no ponto A, trace um arco que intercepte o arco já traçado, determinando o Ponto B;
  - IV) Partindo o vértice O, trace a semirreta  $\overline{OB}$ ;
  - V) Destaque o ângulo de  $60^\circ$ .

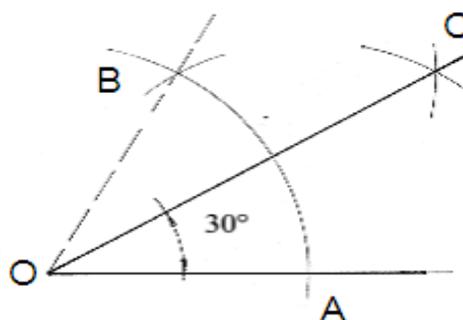


2) Em grupo, responda:

- a) Como podemos proceder para a construção dos ângulos de  $120^\circ$  e  $240^\circ$ ? Teste sua estratégia.
- b) Quais ângulos são possíveis de serem construídos usando a estratégia desenvolvida?
- c) Em graus, quanto mede uma circunferência?

3) Com o auxílio da régua e do compasso, construa um ângulo de  $30^\circ$ , ou seja, a bissetriz de  $60^\circ$ . Siga as instruções abaixo:

- I) Construa um ângulo de  $60^\circ$ ;
- II) Com uma abertura qualquer maior que a metade do arco  $\widehat{AB}$ , centre em A e em B traçando um par de arcos que se interceptam, determinando o ponto C.
- III) Trace a semirreta  $\overrightarrow{OC}$ ;
- IV) A medida do ângulo  $A\hat{O}C$  é igual a  $30^\circ$  e a semirreta  $\overrightarrow{OC}$  é chamada bissetriz do ângulo de  $60^\circ$ .



4) Responda:

- a) Qual a medida do ângulo  $B\hat{O}C$ ?
- b) Com o auxílio do transferidor, verifique sua dedução.

- c) Crie e teste uma estratégia para construir um ângulo de  $90^\circ$ .
- 5) Com o auxílio do compasso, trace a bissetriz de  $90^\circ$ . Qual a medida de cada ângulo determinado pela bissetriz traçada?
- 6) Verifique com o transferidor os ângulos construídos. Anote os valores obtidos para a socialização com a turma.

## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

É fato, que o desenho surge como atividade precoce humana, e se constitui como sendo a primeira forma de representação gráfica e na vida escolar, está presente desde a educação infantil e como ferramenta de várias, senão de todas as disciplinas escolares.

Aprender geometria e poder desenhar formas criadas pelo homem torna-se ferramenta imprescindível nesse contexto, dando àquele que a detém, facilidades na comunicação e na interpretação de vários códigos.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (1998) relata que o trabalho pedagógico no que tange ao:

*[...] espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação das propriedades das figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p.51).*

Nessa perspectiva, sugerimos que nesses encontros, os professores apresentem e orientem aos alunos como manipularem cada um dos instrumentos do desenho geométrico para que os alunos possam criar alguma destreza e familiarizarem-se com tais materiais.

# ATIVIDADE 6

- Apresentação das Mandalas Geométricas

- 1) Elenque algumas Mandalas Geométricas para apresentar aos alunos.
- 2) Esclareça sobre o fascínio que essas composições exercessem sobre as pessoas ao longo dos tempos. Caso haja prudente, apresente um breve histórico acerca das Mandalas no que tange a classificação e a utilização.
- 3) Retome e explore o estudo da circunferência e de seus elementos, o estudo dos polígonos, os tipos de simetrias, o estudo dos ângulos, a manipulação dos instrumentos do desenho geométrico etc.

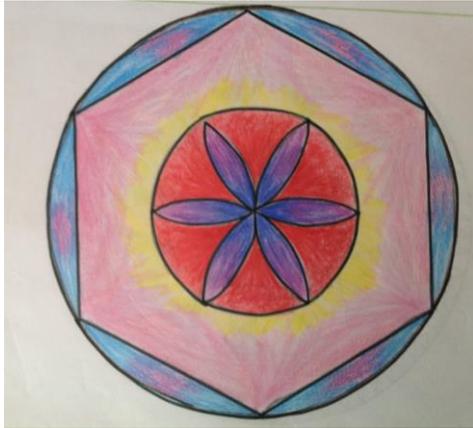
## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

Em encontros, palestras, seminários e cursos que participamos, é comum observarmos entre os docentes, a frequente opinião acerca do pouco ou nenhum conhecimento geométrico adquirido pelos alunos durante a educação básica, assim bem como a pouca ou nenhuma familiaridade e habilidade com a utilização dos instrumentos do desenho geométrico. Percebemos também, que os mesmos apresentam ainda uma limitada percepção visual e “traumas” relacionados ao desenho. Esse cenário caótico vem reforçar uma situação de adiamento ou até mesmo de exclusão do ensino da Geometria nas salas de aulas.

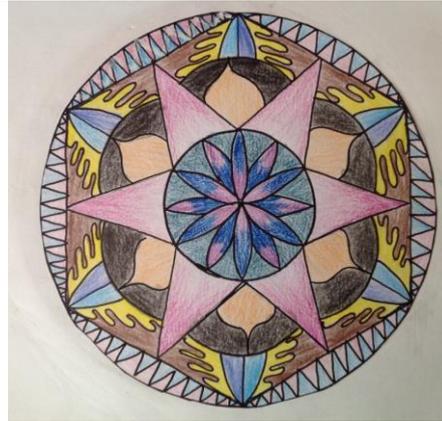
Segundo Yamada (2013), para que a aprendizagem em geometria aconteça de maneira efetiva, se faz necessário que os docentes, elaborarem metodologias e utilizem abordagens diferentes das convencionais, a fim de estimular e incentivar o estudo e a compreensão da representação gráfica.

Desse modo, sugerimos num primeiro momento, apresentar as Mandalas Geométricas como motivação para a inicialização do projeto, proporcionando às partes envolvidas uma rica experiência estética, bem como uma oportunidade de discutir, retomar, agregar e ressignificar uma série de conceitos geométricos de maneira mais lúdica, sem desmerecer o devido rigor exigido pela ciência.

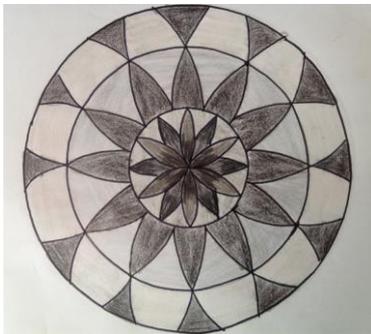
A seguir, apresentamos algumas Mandalas Geométricas com os respectivos comentários, que poderão ser utilizadas como motivação nessa etapa do projeto.



Duas circunferências concêntricas contendo um hexágono regular inscrito na circunferência maior e uma rosácea de seis pontas traçada na circunferência menor.



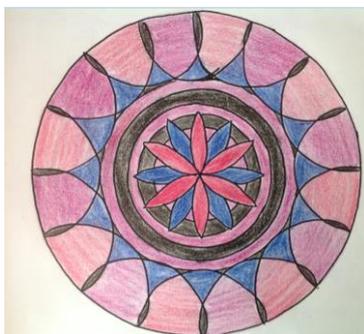
Duas circunferências concêntricas contendo um hexágono regular inscrito na circunferência maior, uma estrela de seis pontas e uma rosácea de doze pontas traçada na circunferência menor. Nessa Mandala, a aluna resolveu estilizá-la, trabalhando bem a estética da construção.



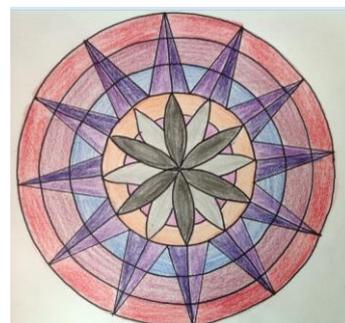
Nessa construção geométrica, percebemos três circunferências concêntricas e duas rosáceas de 12 pontas.



O colorido vibrante aliado às formas geométricas motivavam os alunos, tornando o estudo da geometria mais prazeroso.



O desenvolvimento da criatividade, da abstração e da imaginação, bem como o ensino de valores estéticos, são habilidades que são construídas nas construções das Mandalas Geométricas.



O estudo de vários assuntos como, por exemplo, a simetria rotacional fica bem visível e perceptível nessa Mandala Geométrica.

Fonte: Dados da pesquisa.

# ATIVIDADE 7

- **Construção de polígonos regulares inscritos na circunferência**

- 1) Com o auxílio da régua e do compasso, construa um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 5,0 cm. Siga as orientações abaixo:
  - I) Trace a circunferência com o raio indicado;
  - II) Escolha um ponto A qualquer pertencente à circunferência;
  - III) Com centro em A e mesma abertura do raio, centre em A e faça um arco interceptando a circunferência, determinando o ponto B;
  - IV) Com centro em B, repita o procedimento anterior, determinando o ponto C;
  - V) Repita o procedimento anterior até que você intercepte o ponto A;
  - VI) Com o auxílio da régua, ligue os pontos ABCDEF determinando o hexágono regular inscrito na circunferência.
  
- 2) Como poderíamos proceder para construirmos um triângulo equilátero inscrito na circunferência? Teste sua estratégia.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- 3) Com o auxílio da régua e do compasso, construa a Estrela de Davi, numa circunferência de raio 6,5 cm.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- 4) Com conhecimentos adquiridos, construa um quadrado inscrito numa circunferência de raio 4,5 cm.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- 5) Como podemos construir um octógono regular inscrito numa circunferência a partir de um quadrado?

6) Verifique a estratégia deduzida e construa, com o auxílio dos instrumentos do desenho geométrico, um octógono regular inscrito numa circunferência de raio 4,5 cm.

7) Construa, com o auxílio da régua e do compasso, um pentágono regular.

## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

A escolha pela construção de polígonos regulares inscritos na circunferência se deve pelo fato das múltiplas possibilidades de combinações para a construção das Mandalas Geométricas. Além disso, sabemos, por nossa experiência como docente, que o estudo dos polígonos regulares será de ampla utilização, exploração e investigação no estudo da Geometria. Assuntos, ideias e conceitos serão retomados a partir do estudo dessas figuras planas.

Durante a socialização das produções, estimule os alunos a validarem ou negarem propriedades relevantes ao estudo da Geometria, instigue-os a produzirem, refletirem e registrarem conclusões ou dúvidas acerca das ideias e conceitos abordados durante a atividade. Faça-os perceberem que representam o centro da aprendizagem.

Intervenha, sempre que possível sobre a linguagem da matemática utilizada, mais precisamente, sobre a linguagem geométrica abordada e ressalte a importância e necessidade de uma linguagem única que, expresse de forma clara, objetiva e eficaz, os procedimentos realizados.

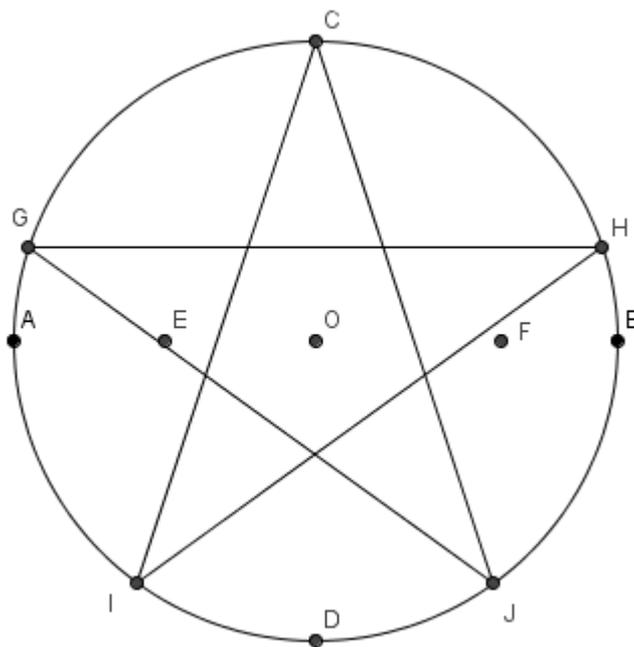
# ATIVIDADE 8

- Construção de polígonos estrelados

1) Com o auxílio da régua e do compasso e dos conhecimentos adquiridos, construa uma estrela de seis pontas.

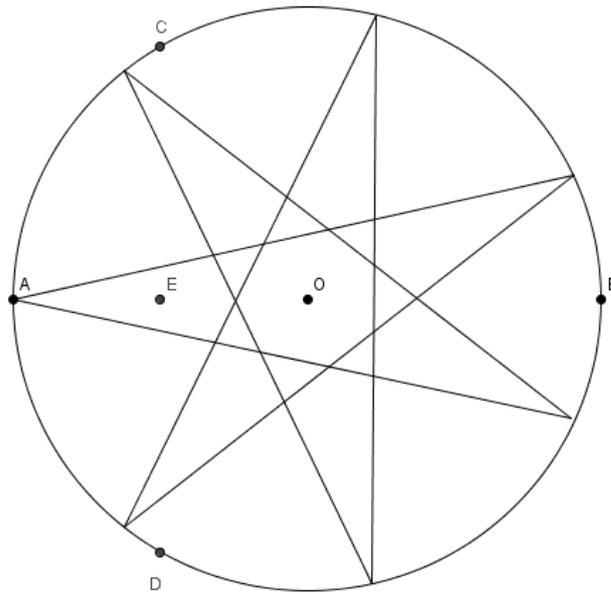
2) Com o auxílio da régua e do compasso, construa um pentagrama regular. Siga as orientações abaixo:

- I) Trace a circunferência de centro O;
- II) Trace o diâmetro AB e sua mediatriz, passando pelo ponto O;
- III) Centro em O, raio AO, faça a circunferência que determina C e D;
- IV) Determine E, ponto médio de AO;
- V) Centro em E e raio EC, trace o arco CF;
- VI) Centro em C, raio CF, faça o arco que corta a circunferência e determina os pontos G e H;
- VII) A distância CG (ou CH) equivale à quinta parte da circunferência. Marque com este raio os pontos I e J;
- VIII) Ligue os pontos determinados como o modelo e terá o pentagrama ou polígono estrelado regular.



3) Com o auxílio da régua e do compasso, construa uma estrela de sete pontas. Siga o passo a passo a seguir:

- I) Trace a circunferência com o raio que desejar;
- II) Trace o diâmetro AB;
- III) Centro em A e mesmo raio, trace o arco COD;
- IV) Com o auxílio da régua, trace o segmento CD, determinando o ponto E;
- V) O segmento CE corresponde à sétima parte da circunferência;
- VI) Centro em A, raio CE, determine sucessivamente os pontos que dividem a circunferência em sete partes iguais;
- VII) Ligue os pontos, obtendo a estrela de sete pontas.



- 4) Construa uma estrela de 8 pontas. Lembre-se que o polígono que servirá de base para a divisão da circunferência em 8 partes iguais será o quadrado.
  
- 5) Construa uma estrela de 12 pontas e, em grupo, anote algumas considerações acerca de sua construção.
  
- 6) Em grupo, levantem algumas “suposições” acerca da construção da estrela de 10 pontas.

## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

A atração exercida pelas formas simétricas nas pessoas é algo que aparece desde os tempos mais remotos. Figuras como o pentagrama, o eneagrama, os quadrados mágicos e tantos outros foram utilizados como símbolos para representar ideias ligadas à divindade, ao esoterismo e às previsões do futuro.

A maioria dos estudiosos sugere que o pentagrama foi inicialmente, conhecido e estudado pelos babilônios, e a partir daí, foi tomada pelos pitagóricos da Grécia antiga, devido a uma coincidente associação entre o pentágono regular com os cosmos e a ordem divina. Assim, ainda é muito comum o encontramos em filmes ou em livros que abordam temas de profecias e seitas. Porém, na ciência propriamente dita, a estrela pentagrama se configura como um interessante diagrama que descreve vários padrões matemáticos presentes, por exemplo, na sequência de Fibonacci, nos logaritmos, na espiral logarítmica, nos fractais e em outros.

Mas como construir polígonos estrelados?

É fato que o ponto inicial é dividirmos a circunferência em tantas partes quanto forem as pontas desejadas. Ou seja, se pretendemos construir uma estrela de 8 pontas, precisamos dividir a circunferência em oito partes iguais. Porém, se há 8 pontos para ligarmos e fizermos de 2 em 2, após 4 ligações, chegaremos ao ponto de partida. Como os polígonos estrelados são construídos com segmentos em sequência, concluímos que não formaremos a figura desejada.

O motivo de isso acontecer é que os números 8 (números de pontas da estrela) e 2 (ligações de 2 em 2) podem ser divididos ao mesmo tempo por 2 (divisor comum

entre 8 e 2). Assim, toda vez que esse fato ocorrer, não será possível construir o polígono estrelado desejado.

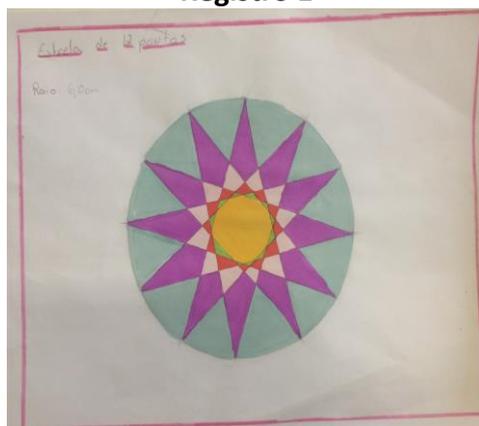
Do mesmo modo, se ligarmos de 4 em 4, também não conseguiremos construir o polígono estrelado. Concluimos então, que se ligarmos de 3 em 3, a construção será concluída pois, 8 e 3 não possuem divisor em comum (exceto o 1). Incentive os alunos a verificarem que contar de 5 em 5, é o mesmo que contar de 3 em 3 no sentido contrário, já que  $3 + 5 = 8$ .

Peça-os para ligar os pontos de 6 em 6 e verificarem quais polígonos serão combinados para formar a figura. A seguir, peça-os para ligar de 7 em 7 e concluir que figura é formada. Explore o fato, de ao construir o polígono estrelado, o polígono formado no centro da figura terá o mesmo número de lados que o número de pontas da estrela.

Procure explorar assuntos de outros ramos da Matemática, como, por exemplo, a aritmética e a álgebra sempre que possível. Oportunize os alunos a interligarem os ramos da Matemática e verem a aplicabilidade de alguns assuntos dentro da própria ciência.

A fim de orientar o trabalho do professor, apresentamos abaixo um quadro para exemplificar a sugestão apresentada.

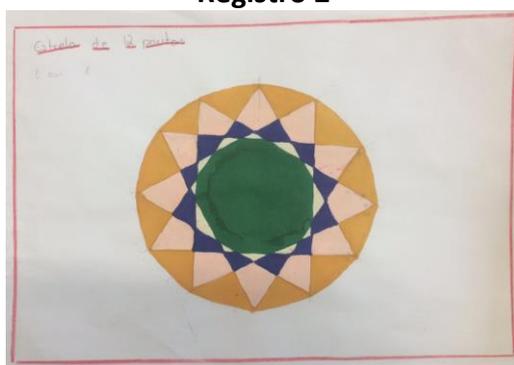
### Registro 1



### Comentário do registro 1

Nesse registro, percebemos a primeira situação, em que o traçado percorre todos os pontos de divisão, sem que haja interrupção. Notamos que as ligações feitas de 5 em 5 ou de 7 em 7 resultarão na mesma figura, já que  $7 + 5 = 12$ , e que 7 e 5 são primos entre si, ou seja, apresentam apenas o número 1 como divisor comum.

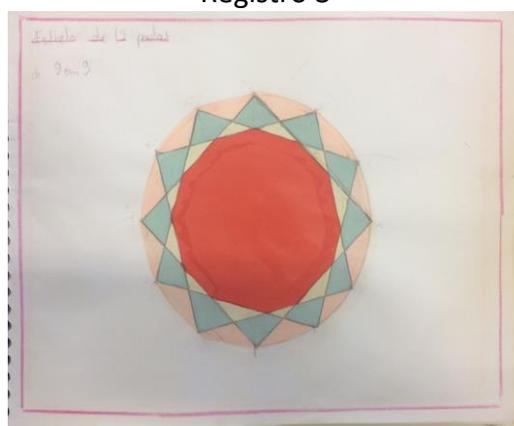
### Registro 2



### Comentário do registro 2

Nesse registro, percebemos a segunda situação, na qual a figura precisa ser desenhada em mais de uma etapa. Notamos que as ligações foram feitas de 8 em 8 e que a figura final resulta na composição de 4 triângulos equiláteros sobrepostos.

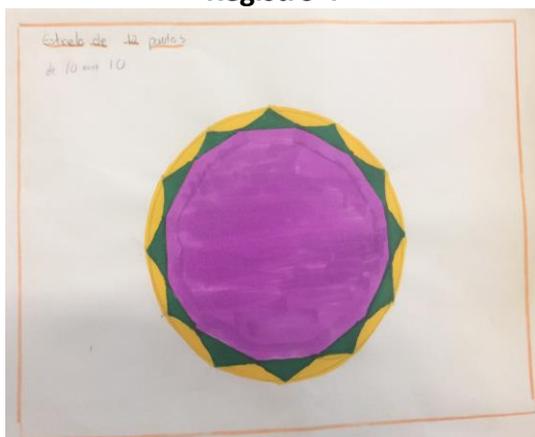
### Registro 3



### Comentário do registro 3

Nesse registro, percebemos também a segunda situação. Notamos que as ligações foram feitas de 9 em 9 e que a figura final resulta na composição de 3 quadrados sobrepostos.

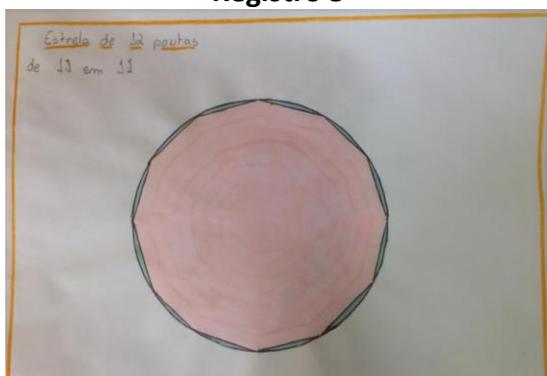
#### Registro 4



#### Comentário do registro 4

A segunda situação se repete nesse registro. Notamos que as ligações foram feitas de 10 em 10 e que a figura final resulta na composição de 2 hexágonos regulares sobrepostos.

#### Registro 5



#### Comentário do registro 5

Repetindo a situação 2, notamos que as ligações foram feitas de 11 em 11 e que a figura final resulta no polígono de 12 lados, ou seja, no dodecágono regular.

Fonte: Dados da pesquisa.

# ATIVIDADE 9

- Construção de Mandalas Geométricas com o recurso do desenho geométrico: Combinando formas geométricas
  - 1) Com o auxílio da régua e do compasso, construa, numa mesma circunferência de raio 6,0 cm, um hexágono regular e uma estrela de Davi. Use sua criatividade e lápis de cor para colorir a Mandala Geométrica.
  - 2) Com o auxílio da régua e do compasso, construa, numa mesma circunferência de raio 6,5 cm, uma rosácea de 6 pontas e um hexágono regular. Use lápis de cor para reforçar as figuras e encantar.
  - 3) Utilizando régua, compasso e os conhecimentos adquiridos, construa a Mandala sugerida a seguir:



## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

Considerar como os alunos percebem e utilizam o conhecimento matemático em outros contextos, construindo e comparando relações, fazendo, assim, que o aprendizado se torne mais excitante e eficaz à medida que é observado e utilizado no cotidiano, é o desejo de todo educador matemático.

No que tange à Geometria, Kopke (2001) nos assegura que, a visualização espacial é uma habilidade mental que precisa da estimulação do lado direito do cérebro e que, por isso, a aprendizagem da geometria pode ser feita de forma lúdica, sendo mais rapidamente apreendida e assimilada. Para Grande (1994, p.156),

*A percepção espacial é a faculdade de reconhecer e discriminar estímulos no espaço, e a partir do espaço, e interpretar esses estímulos associando-os a experiências anteriores. Oitenta e cinco por cento das informações que chegam ao corpo vindas do meio ambiente penetram em nós através do sistema visual, e a visão se desenvolve como resultado de muitas experiências acumuladas.*

Desse modo, propomos realizar atividades que acreditamos favorecer as partes envolvidas ao processo de ensino e aprendizagem, uma rica experiência estética, bem como uma oportunidade de discutir, trabalhar, aprofundar e aprimorar uma série de conceitos e procedimentos matemáticos.

Como nos sugere Ramos (2016. p.2),

*A construção de Mandalas apresenta grande potencial para explorar conceitos e relações geométricas a partir da construção da sua estrutura, assim como a melhora da percepção visual de figuras e linhas.*

Assim, no que tange a uma organização regular de elementos geométricos em função da circunferência e de seu centro, um conceito básico que poderá ser apontado

é o da simetria de rotação. Tal simetria é caracterizada por uma transformação geométrica na qual uma figura se desloca em torno de um ponto, segundo um ângulo definido. A repetição continuada da transformada, segundo o mesmo ângulo, vai estabelecendo uma organização espacial do tipo radial e que, inevitavelmente, conduz ao conceito de ângulo central. Ao dividirmos a circunferência em partes iguais, os conceitos de polígonos regulares convexos e não convexos (os polígonos estrelados) bem como suas construções são resgatados.

Ao desenharmos polígonos estrelados, deparamos com duas situações: a primeira, em que o traçado percorre todos os pontos de divisão sem que haja interrupção; e a segunda, na qual a figura final precisa ser desenhada em mais de uma etapa (CARVALHO, 1953). A figura derivada da primeira situação apresentada é que rotineiramente chamamos de “polígono estrelado”, a qual remete a outro conceito: o de número primo. “Os polígonos regulares estrelados de  $n$  lados são tantos quantos os números primos com  $n$  e, menores que a metade de  $n$ .” (ALMEIDA, 1945, p.136)

Os conceitos mencionados anteriormente podem ser entendidos como componentes estruturais básicos quando buscamos explorar o traçado dessas formas. Entretanto, no processo de criação outros princípios geométricos são inseridos na sua elaboração, como nos afirma Nascimento, Benutti e Neves (2007). É o caso, por exemplo, das concordâncias e também das simetrias da reflexão e da dilatação.

Nesse contexto, acreditamos que a produção de tais formas possibilitará um exercício ao desenvolvimento da criatividade, da percepção visual, da capacidade de abstração e imaginação, da coordenação motora e da concentração, aspectos

essenciais na condução, elaboração e efetivação desse presente trabalho. Vale ressaltar a ressignificação e o aprendizado de conteúdos matemáticos e estéticos.

# ATIVIDADE 10

- Construção das Mandalas Geométricas com o *software* GeoGebra: crie, invente e faça diferente!

- 1) Apresente o *software* GeoGebra para os alunos, informando e explorando ao máximo a barra de ferramentas. Chame a atenção para a janela de Álgebra e retome algumas nomenclaturas, ideias e conceitos que aparecerão durante a atividade.
- 2) Com as ferramentas disponíveis no GeoGebra, construa uma circunferência de raio 5,0 cm e inscreva um hexágono regular. Reforce junto aos alunos que o procedimento usado para a construção com os instrumentos do desenho geométrico, será a mesma utilizada nessa atividade. A única diferença, é que o compasso, não irá construir arcos e sim circunferências. Assim a atenção precisará ser reforçada.
- 3) Crie, invente e faça diferente alguma Mandala Geométrica já trabalhada durante as aulas de construções geométricas.
- 4) Organize as Mandalas Geométricas construídas no GeoGebra e confeccione um livreto para colorir.

## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

É fato que estamos inseridos numa sociedade de informação e que o desempenho profissional exige cada vez mais conhecimentos matemáticos, de ciência e de tecnologia, em amplo leque de situações cotidianas. Para Búrigo et al (2012, p.17), há um consenso entre vários autores e educadores, no que se refere à alfabetização matemática para tal sociedade, e que três aspectos devem ser considerados: habilidades, atitudes e contextos.

*Nas habilidades, destaca-se a habilidade intelectual para lidar com situações complexas, que exijam múltiplas estratégias, múltiplas soluções, avaliação e interpretação; o saber ler e escrever em linguagem matemática; a aptidão para a resolução de problemas novos e não rotineiros que dependam de raciocínio e conhecimentos matemáticos. Quanto às atitudes, referem: a valorização da matemática como ferramenta para resolução de problemas; a confiança em dispor de tal conhecimento quando necessário; práticas cooperativas de enriquecimento intelectual, advindo da confrontação de diferentes perspectivas. No que tange ao contexto, o mesmo diz respeito aos recursos tecnológicos que concorrem para a abordagem e tratamento de problemas matemáticos; diz respeito à constante exigência de adaptação a novas situações-problema.*

Nesse contexto e embasados em vários autores acerca do uso das tecnologias de informação e da computação em sala de aula (PENTEADO,1999; BORBA, 2004; ARAÚJO, 2002; MALTEMPI, 2004), propomos, nessa atividade, que os alunos construam Mandalas Geométricas usando o recurso do computador. Porém, como já dito, acreditamos ser de suma importância que antes das construções propriamente ditas, haja um tempo para que os alunos possam se familiarizar com o *software*.

Dentro das atuais tecnologias de ensino, o *software* de Geometria Dinâmica, também designado por Ambiente de Geometria Dinâmica, se configura como uma das ferramentas mais difundidas entre os defensores pela utilização das novas

Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ensino e aprendizagem da Matemática. Alguns *softwares* como o *Cabri-Géomètre*, o *Geometricricks*, o *Geometer's Sketchpad*, o *GeoGebra*, e tantos outros, vem fazendo parte do dia a dia das aulas de matemática.

Na atividade em questão, optamos em trabalhar com o *software* GeoGebra por vários motivos que acreditamos viabilizar o processo e assegurar os objetivos pré-estabelecidos. Elencamos, a seguir, alguns desses motivos que acreditamos serem mais contundentes:

- O GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica, gratuito e desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo (Austrália). Trata-se de um programa interativo que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos. Por possuir interface amigável, permite construir, de maneira precisa e com pouco esforço, modelos que exigiriam grande perícia caso utilizássemos os instrumentos convencionais do desenho geométrico. Além da precisão e da beleza, as construções no GeoGebra, embora visuais, obedecem às relações matemáticas que as disciplinam, possibilitando a transformação do visual da página. Dessa forma, apresenta um dinamismo que muitas vezes convence mais do que qualquer demonstração de resultados.
- As normas que gerenciam o *software* são simples, e suas ferramentas básicas estão à disposição do usuário na tela de trabalho: basta escolher a ferramenta clicando sobre o ícone desejado.
- Para os que dispõem de internet, existem diversas páginas que podem ser acessadas para maiores esclarecimentos e sugestões diversificadas de

atividades didáticas. O *download* do GeoGebra está disponível em:  
[www.geogebra.org/](http://www.geogebra.org/).

# ATIVIDADE 11

- Avaliando o projeto Mandalas Geométricas

1) Planeje e promulgue um momento de socialização a fim de avaliar o projeto Mandalas Geométricas no que tange às opiniões dos alunos, aos anseios, às novas perspectivas e às novas experiências.

2) Peça-os para escrever um texto, relatando tais sentimentos, desejos, frustrações, e, se possível, sugerindo outros caminhos e experiências a serem exploradas. Valorize as ideias dos alunos e faça com que os mesmos percebam a importância desse momento.

## ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

Acreditamos serem atitudes primordiais ao processo de ensino aprendizagem, sempre que possível, investigar e estimular de que maneira a aplicação das atividades se manifestam na prática e no ambiente da sala de aula bem como fora dela.

Desse modo, indo ao encontro do nosso interesse maior de promover uma aprendizagem significativa, valorizando e aprimorando o conhecimento adquirido, esperamos propiciar, através de um ambiente e de uma postura dinâmica, um espaço aberto a diálogos, questionamentos, intervenções e sugestões de execução de novas tarefas exploratórias primando pelo desenvolvimento do aluno enquanto indivíduo e parte integrante e atuante de uma sociedade.

# SUGESTÕES DE LEITURAS

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica. Uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. Instituto de Matemática da UFRGS. SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7. **Anais...**, Belo Horizonte – MG: UFMG, p.1-13, nov. 1996.

KOPLE, R. C. M. Imagens e reflexões: A Linguagem da geometria nas escolas. Caligrama. **Revista de Estudos e Pesquisas em Linguagem e Mídia**, v. 2, n. 1, 2006.

PAVANELO, M. R. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**. v. 7. Ano I. n. 1, 1993.

PAVANELO, M. R. **O abandono do ensino de Geometria**: Uma visão histórica. 201 p. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia do Ensino) Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas/SP, 1989.

ZUIN, E. de S. L. **Da régua e do compasso**: As construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 115 f. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – São Paulo: USP, 2001.

# REFERÊNCIAS

- ABRANTES, P.; SERRAZINA, L. & OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica**. Brasília (DF): Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, 1999.
- ALMEIDA, Max Linder. **Manual de Desenho Geométrico**. 2 ed. Rio de Janeiro: Zelio Valverde, 1945.
- ARAÚJO, Jussara. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: As Discussões dos Alunos**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.
- BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação Matemática pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 264-282.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília (DF): MEC, 1998.
- BÚRIGO, E. Z.; GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V.; GARCIA, V. C. (Org.). **A matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens**. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2012. v. 1. 304 p.
- CARVALHO, Benjamin de A. **Programa de Desenho para a quarta série ginásial**. 4.ed. São Paulo: Nacional, 1953.
- DANTAS, H.; LA TAILLE, Y.; OLIVEIRA, M. K. **Piaget, Vygotsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão**. São Paulo: Summus, 1992.
- DANTE, L. R. Projeto Teláris: **Matemática: Ensino fundamental 2**. 2. Ed. São Paulo: Ática, 2015.
- GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. 2000. 217 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.
- GRANDE, John J. Del. Percepção espacial e geometria primária. Em: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo, Atual, p. 156, 1994.
- KOPKE, R. C. M. Ensino de geometria descritiva: inovando na metodologia. **Revista Escola de Minas**, v. 54, n. 1, Ouro Preto, jan-mar 2001. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0370-44672001000100008>>. Acesso em: 01 jun. 2013.
- LORENZATO, S. Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: \_\_\_\_\_. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas – SP: Autores Associados, 2006.
- LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista – Geometria**, Blumenau, SC: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano III, n.4, p.3-13, 1º semestre 1995.

MALTEMPI, M. V. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à educação matemática In: BICUDO, M. A. V.; M. C. BORBA (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 264-282, 2004.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 9, n. 9-10, p.1-6, 2004-2005.

NASCIMENTO, R. A. do; BENUTTI, M. A.; NEVES, A. F. Mandalas e rosáceas: em busca de novas abordagens para antigos conteúdos. In: GRAPHICA 2007 / INTERNATIONAL CONGRESS ON ENGINEERING GRAPHICS FOR ARTS AND DESIGN, 7., & SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 18., 2007, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 1 CD.

PAIS, Luís Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. In: **Zetetiké**. v. 4, n. 6, julho/dezembro, pp. 65-74, Campinas: CEMPEM /FE/ UNICAMP, 1996.

PAVANELLO, R. M. **Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas**. 219f. 1995. Tese (Doutorado)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

PENTEADO, Miriam Godoy. Novos Atores, Novos Cenários: Discutindo a Inserção dos Computadores na Profissão Docente. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 297-313.

RAMOS, A. P. de O. **Mandalas e a construção de saberes em arte e matemática**. 28 f. 2016. Monografia (Graduação em Matemática) – Unipampa RS, 2016.

YAMADA, T. R. U. **A abordagem com Mandalas na formação do professor de Matemática**. Disponível em: <[http://wright.ava.ufsc.br/~grupohipermedia/graphica2013/trabalhos/A%20ABORDAGE M%20COM%20MANDALAS%20NA%20FORMACAO%20DO%20PROFESSOR%20DE%20MATEMATICA%20-%20C%C3%B3pia.pdf](http://wright.ava.ufsc.br/~grupohipermedia/graphica2013/trabalhos/A%20ABORDAGE%20COM%20MANDALAS%20NA%20FORMACAO%20DO%20PROFESSOR%20DE%20MATEMATICA%20-%20C%C3%B3pia.pdf)>. Acesso em: 11 set. 2017.