PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional

Alternativa Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Experiência com Professores e Alunos

Raimundo Martins Reis Neto

BELO HORIZONTE

2009

Raimundo Martins Reis Neto

Alternativa Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Experiência com Professores e Alunos

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda

BELO HORIZONTE

2009

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Reis Neto, Raimundo Martins
R375a Alternativa metodológica para ensino e aprendizagem de números complexos: uma experiência com professores e alunos / Raimundo Martins Reis Neto. Belo Horizonte, 2009.
142f.: il.

Orientador: Dimas Felipe de Miranda
Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Números complexos. 2. Geometria analítica. 3. Ensino - Metodologia. I. Miranda, Dimas Felipe de. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 511.6

Raimundo Martins Reis Neto

Alternativa Metodológica Para o Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Experiência Com Professores e Alunos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

Dr. Dimas Felipe de Miranda (Orientador) – PUC Minas

Dr. Luiz Carlos Picoreli de Araújo – CEFET/MG

Dr. João Bosco Laudares – PUC Minas

Belo Horizonte, 03 de setembro de 2009.

A

Deus, pela presença em todos os instantes da minha vida, aos **meus pais** pelo carinho e por sempre me incentivarem a estudar e à **minha esposa,** que sempre apoiou as minhas escolhas e me fez lutar pelas coisas em que acredito.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela presença em todos os instantes de minha vida, por ter me dado mais esta oportunidade de realização profissional;

Aos meus pais, que tornaram possível a minha educação;

À minha esposa, que sempre esteve presente, compreendendo a importância deste desafio, com amor, apoio e incentivo, sempre demonstrando o seu amor e acreditando em mim, às vezes, mais do que eu mesmo;

Ao Professor Dr. Dimas Felipe de Miranda, meu orientador, pela paciência, amizade, dedicação, apoio e compreensão com que sempre pude contar;

Aos professores membros da banca examinadora, pela atenção que dispensaram ao trabalho e por suas contribuições;

Aos professores do Programa de Mestrado em Ensino da Pontifícia Católica de Minas Gerais, pelas experiências e conhecimento compartilhado durante o curso;

À professora Drª. Eliane Scheid Gazire, pelas valiosas contribuições e pelo enriquecimento proporcionado;

Ao professor Dr. Othon de Carvalho Bastos, amigo e companheiro que muito contribuiu nesta jornada acadêmica;

À minha família, que me deu força e compreensão nos momentos em que precisei;

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para realização deste trabalho.

“Um bom ensino da matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência”.

Irene de Albuquerque

RESUMO

Este trabalho consistiu em realizar e analisar uma experiência metodológica alternativa para o ensino dos números complexos. O objetivo principal foi contribuir para uma melhor compreensão do conceito e do significado geométrico da unidade imaginária ***i*** dos complexos. Visou-se operar com esse número e interpretar os resultados dessas operações, estabelecendo-se conexões entre a álgebra e a geometria, numa tentativa de se obter uma melhoraria no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo dos números complexos. Estabelecemos este objetivo ao levantarmos as principais dificuldades enfrentadas por alunos e professores ao lidar com este tema em uma escola de São Luís do Maranhão. Analisamos o livro texto adotado pela escola e mais dois livros usados pelos professores desta escola ao ministrar aulas sobre o assunto em outras escolas da cidade. De acordo com esta análise e com os resultados do levantamento realizado, detectando obstáculos metodológicos que afetam professores, ao ensinar, e alunos, ao aprender, decidimos organizar uma proposta metodológica alternativa para a introdução do ensino de números complexos. Optamos por preceder a tradicional abordagem inicial algébrica por uma geométrica, em que se introduz a unidade imaginária por representação vetorial. Isto foi operacionalizado através de sequências de atividades didáticas, que permitiram ao aprendiz manipular e perceber equivalências entre representações geométricas e algébricas de um mesmo conteúdo, tornando-o mais significativo, além de assimilar melhor a expansão do corpo dos reais para o corpo dos complexos.

Palavras-chave: números complexos, experiência metodológica, representação vetorial, atividades didáticas.

ABSTRACT

This paper consisted in achieving and analysing an alternative methodological experiment for the teaching of complex numbers. The main objective was to contribute for a better comprehension of the concept and the geometrical meaning of the imaginary unit i of the complex. We aimed to operate with this number and interpret the results of these operations, establishing connections between algebra and geometry, in an attempt to get an improvement in the process of teaching and learning of complex numbers. This objective was established by raising the main difficulties faced by students and teachers when dealing with this subject in a school in São Luís, Maranhão. We reviewed the textbook adopted by the school and two more books used by teachers of this school that teach this subject in other schools of the city. According to this analysis and the results of the survey, detecting methodological barriers that affect teachers at teaching and students at learning, we decided to organize an alternative methodological proposal for introducing the teaching of complex numbers. We decided to precede the traditional algebraic approach by a geometrical one in which it is introduced the imaginary unit for vector representation. This was operationalized through the sequence of teaching activities, which allowed the apprentice to manipulate and understand equivalence between geometric and algebraic representations of the same content, making it more meaningful, besides better assimilating the expansion of the body of real numbers to the body of the complex ones.

KEY WORDS: complex numbers, methodological experiment, vector representation, teaching activities

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

a.C.: Antes de Cristo

d.C.: Depois de Cristo

ed.: Edição

Fig.: Figura

p.: Página

v.: Volume

séc.: Século

LISTA DE SIGLAS

CAEM – Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática

Cesgranrio – RJ – Centro de Seleção de Candidatos do Ensino Superior do Grande Rio

E.M. – Ensino Médio

IME – Instituto de Matemática e Estatística

ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MEC – Ministério da Educação e Cultura

NTCM – Conselho Nacional de Professores de Matemática

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio

PEA – Processo de Ensino e Aprendizagem

PEC – Psicologia Educação e Cultura

PNLD – Plano Nacional do Livro Didático

PNLEM – Plano Nacional do Livro Didático Para o Ensino Médio

PUC – SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

RPM – Revista do Professor de Matemática

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SBHM – Sociedade Brasileira de História da Matemática

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

SEMT – Secretaria de Educação Média e Tecnológica

UEMA – Universidade Estadual do Maranhão

UFMA – Universidade Federal do Maranhão

UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais

UnB – DF – Universidade de Brasília

UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

USP – Universidade de São Paulo

Vunesp – SP – Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante oito anos ministrando aulas de números complexos na 3ª série do ensino médio de escolas particulares e públicas e em pré-vestibulares de São Luís do Maranhão, percebi que os professores, inclusive eu, e os alunos sentíamos dificuldades quando o objeto de estudo era o conjunto dos números complexos.

Visando minimizar tais dificuldades, propusemo-nos a investigar, refletir e buscar formas alternativas para o ensino e aprendizagem desses números. Para tal, direcionamos nossas atenções e observações para uma das escolas particulares de São Luís do Maranhão e constatamos, através de uma pesquisa inicial com alunos e professores, que na referida escola, o ensino de números complexos era introduzido de forma tradicional, via álgebra, não levando em conta a abordagem geométrica e a aplicação desses números.

Nós, professores, afirmamos com freqüência que a falta de pré-requisitos é a principal causa do desempenho insatisfatório do aluno. Entretanto, por vezes, apresentamos o conteúdo sem dar o menor significado aos algoritmos, fórmulas e expressões algébricas. Usamos uma metodologia baseada em técnicas operatórias, resolução de exercícios e memorização de regras e propriedades. O aprendizado dos alunos é considerado satisfatório quando eles são capazes de resolver problemas, mesmo sem saber o que estão realmente fazendo.

Esta metodologia faz com que os alunos apresentem muita dificuldade ao trabalhar com números complexos e até mesmo se neguem a aceitar sua existência. Ensinar algoritmos sem que os alunos tenham desenvolvido o significado das operações leva a uma mecanização sem compreensão, que se traduz não só em resultados indesejáveis como também numa atitude de rejeição ao estudo desses números.

Para melhor compreender essa visão, tomemos o que escrevem João P. Carneiro e Augusto Wanderley (2007) no artigo: *Os Números Complexos e Geometria Dinâmica.*

> Permanece como maneira mais comum de introduzir os números complexos a abordagem puramente algébrica e formal: “Um número complexo é um objeto da forma a + bi, onde a e b são reais, $i^2 = -1$, e permanecem válidas as leis operatórias básicas da álgebra”.
> Esta definição (correta) permite começar logo a operar com números complexos sem dificuldade, mas este enfoque perde a magnífica oportunidade de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, e a experiência de aula nos mostra que muitas vezes esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece a “forma trigonométrica”. O iniciante permanece com uma visão excessivamente formal e algebrizante, e não lhe ocorre aplicar conhecimentos de números complexos a problemas de Geometria, como se faz desde Gauss.

Dentro desse contexto, fez-se necessária uma reflexão sobre a metodologia tradicional e a apresentação de uma metodologia alternativa para o ensino dos números complexos. Pelo que verificamos em nossa pesquisa inicial, registrada no capítulo 4 deste trabalho, a unidade imaginária é sem dúvida o principal obstáculo para o entendimento dos alunos (expansão do corpo dos reais para o corpo dos complexos), pois além da dificuldade no processo de abstração, muitos trazem, de forma muito categórica, o conceito de que não existe um número que elevado ao quadrado seja igual a um número negativo. Assim, propusemos como questão de pesquisa deste trabalho: *Em que medida uma iniciação via abordagem geométrica contribui para uma redução dos obstáculos metodológicos que os professores e alunos enfrentam ao fazer a expansão do conjunto dos números reais para o conjunto dos números complexos*?

Para tentar responder a essa questão central de nossa pesquisa, organizamos uma apresentação do conteúdo e um conjunto de atividades didáticas que enfatizam os números complexos como vetores, através da unidade imaginária, que faz a expansão do corpo dos reais para o corpo dos complexos. Este material, produto desse trabalho, serviu de orientação para as aulas ministradas na mesma escola anteriormente citada, durante o segundo semestre de 2008, em duas salas de aula da 3ª série do ensino médio. Nessa etapa da pesquisa, os alunos de cada sala foram divididos em grupos, procurando mesclar alunos com maior conhecimento do conteúdo e alunos com menor conhecimento. Vale salientar que nenhum dos alunos tinha contato anterior com o conjunto dos números complexos. Contudo, possuíam noções introdutórias de vetores, usadas especialmente nas aulas de Física.

Assim, como texto dissertativo desta pesquisa, apresentamos, após o presente capítulo introdutório, um capítulo 2, tratando de ”Matemática, Números Complexos e Seu Ensino”. Nele é realizado um estudo sobre a história e evolução dos números complexos, resgatando a maneira como eles surgiram na história e as recomendações para o ensino em alguns autores e nos PCNs .

No capítulo 3, “Análise de Livros Didáticos”, relatamos nossa pesquisa quantitativa e qualitativa de três livros didáticos do ensino médio sobre a forma como seus autores exploraram os conteúdos relacionados com os números complexos.

No capítulo 4, “As Atividades, As Observações e Análises”, são apresentadas as Atividades Didáticas e as observações e análises dos dados colhidos com suas aplicações em sala de aula, levantando-se as contribuições, ou seja, buscando-se respostas para a nossa questão principal de pesquisa dentro dos objetivos traçados.

Apresentamos, no capítulo 5, as considerações finais, a partir das informações obtidas durante a realização deste trabalho.

É importante ressaltar que o Apêndice, com o título: “Números Complexos: Uma Abordagem Algébrica e Geométrica”, é um texto didático, que é parte integrante e importante deste trabalho. A sua leitura, no entanto, se torna opcional. Isto facilita direcionar a atenção para os objetivos maiores de nossa pesquisa. Realizei a elaboração deste texto de forma sistematizada, no início de nossa pesquisa, como um estudo inicial básico, o qual foi por mim apresentado em aulas de Tópicos de Álgebra do nosso mestrado. Neste texto, enfatizamos os números complexos como vetores, fazendo-se uma abordagem ampla e interdisciplinar. Essa ênfase vetorial é que assumimos como proposta metodológica e utilizamos para redigir as atividades didáticas deste trabalho. Ressaltamos a importância deste nosso texto, porque ele também serviu de inspiração para um outro trabalho dissertativo realizado em nosso mestrado, com objetivos distintos dos nossos.

2 MATEMÁTICA, NÚMEROS COMPLEXOS E SEU ENSINO

2.1 HISTÓRIA E EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo apresentamos a evolução dos números complexos através dos principais aspectos históricos que deram origem e possibilitaram melhor compreensão e aceitação do conceito desse tipo de número.

De acordo com Thomas (2002), o conceito de número é um dos principais fundamentos da matemática e o primeiro conjunto numérico, oficialmente registrado, que surgiu pela necessidade de contar objetos, foi o conjunto dos números contáveis 1, 2, 3,... , que hoje denominamos números naturais ou inteiros positivos. Thomas (2002) afirma ainda que, após o sistema dos números naturais, surgiram outros sistemas numéricos, agora, pela necessidade da criação de novos números.

Ao observarmos o conjunto N, dos números naturais, notamos que sempre será possível somar e multiplicar, mas nem sempre se pode subtrair. Se tentarmos efetuar subtrações, tais como $2-10$, percebemos a necessidade de novos números. O conjunto dos números inteiros resolveu este problema quando ao conjunto dos números naturais foram acrescentados, além do zero, os números inteiros negativos, formando o conjunto Z, onde podemos somar, multiplicar e subtrair. Entretanto, nesse conjunto nem sempre é possível dividir. A necessidade de dividir o inteiro em partes iguais fez surgir o conjunto dos números fracionários com a inserção dos números da forma $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** inteiros e q ≠ 0, ao conjunto dos números inteiros. Nesse novo sistema numérico, chamado de conjunto dos números racionais e representado pela letra Q, podemos somar, multiplicar, subtrair e dividir (exceto somente dividir por zero). Porém, ao tentarmos fazer uma correspondência biunívoca dos números racionais com os pontos da reta observamos que o conjunto Q é insuficiente para representação de todos os pontos.

Amorim, Seimetz e Schmitt (2006), como exemplo desta situação, citam a geometria do quadrado unitário (lado de medida igual a uma unidade de comprimento).

Por meio de construção geométrica[1], com régua e compasso, pode-se construir um quadrado de lado **1** e diagonal $\sqrt{2}$. Esse segmento, cuja medida é $\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado de lado **1**), representa uma grandeza incomensurável com a unidade. Lima et al (1977, p.54), referindo-se à incomensurabilidade, afirma que "a existência de segmentos incomensuráveis significa que os números naturais mais as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta" e, assim, quando o lado do quadrado mede **1**, a medida da diagonal é o número não racional $\sqrt{2}$. Esse fato levou ao surgimento dos números irracionais, que não podem ser obtidos da divisão de dois inteiros. Desta forma, todos os pontos da reta que deixaram de fazer uma correspondência com os números racionais podem fazê-la com os números irracionais, de modo a utilizar todos eles. Este é o postulado de Dedekind[2].

A reunião dos racionais com os irracionais deu origem ao conjunto $\Re$ dos números reais, que pode corresponder-se biunivocamente com o conjunto dos pontos da reta. Dizemos que os reais completam a reta.

Lima et al (1997, p.57) afirma, através de uma inter-relação entre geometria e aritmética, que "o conjunto dos reais pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\Re$".

O conjunto dos reais não é suficiente para efetuarmos a radiciação, pois em $\Re$ não existem raízes de índice par e radicando negativo.

Esse fato cria a impressão de que os números complexos nasceram da necessidade de resolvermos equações de segundo grau com discriminante negativo. Garbi (1997) expõe isto de forma clara, pois para ele:

> Há um equívoco frequentemente cometido por alguns professores e livros-texto relativamente à origem dos números complexos: foram as equações do 3º grau e não as do 2º grau que desencadearam todo o desenvolvimento teórico

[1] O fato de que esta construção não depende do tamanho do quadrado que se considera, deve-se que dois quadrados quaisquer são figuras semelhantes
[2] Richard Dedekind (1831-1916)

> havido naquela área, trabalho que durou mais de dois séculos a partir da idéia pioneira de Bombelli (GARBI, 1997, p.52).

De acordo com Eves (1997), até o século XVI, na resolução de equações do segundo grau com discriminante negativo, os matemáticos interpretavam o resultado dizendo: *essa equação não tem solução*. Para Lima (1991) as equações de segundo grau apareceram na matemática aproximadamente 1700 anos antes de Cristo e, ocasionalmente, com discriminante negativo, porém, não motivaram o aparecimento dos números complexos.

Alguns autores matemáticos, como Eves (1997), Lima (1997), Garbi (1997) e Pitombeira em Carmo et al (2005), defendem que os números complexos começaram a aparecer sistematicamente no século XVI com a descoberta da solução algébrica das equações cúbica e quártica. Para Pitombeira, quando isso aconteceu, os matemáticos não tinham nem ainda esclarecido os conceitos de números negativos e irracionais.

Segundo Eves (1997) e Lima (1997), por volta de 1515, Scipione del Ferro[3] resolveu algebricamente equações do tipo $x^3 + ax = b$. Ele não publicou o resultado, mas antes de morrer ensinou o método de resolução para seus discípulos, Antonio Maria Fior e Annibale Della Nave, seu genro e sucessor na cadeira de matemática em Bolonha. Naquela época era comum o desafio entre sábios, e Fior, conhecendo o método de Scipione, desafia, em 1535, Niccolò Fontona[4], que devido a um defeito de fala, provocado por lesões físicas sofridas quando criança, foi apelidado de Tartaglia, que quer dizer gago em italiano. O desafio consistia na solução de uma série de problemas que um deveria propor ao outro. Fior apresentou 30 questões de equações do 3º grau, da qual somente ele detinha a solução, pois dependiam do método de Scipione para resolução. Tartaglia, ao aceitar o desafio, mobilizou-se em deduzir a fórmula de Del Ferro, conforme relato do próprio Tartaglia, “mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535.” (GARBI, 1997, p.33).

[3] Scipione Del Ferro (1465-1526)
[4] Niccolò Fontona de Brescia (Tartaglia-tartamudo) (1500-1557)

Naquela época, Hieronimo Cardano[5] conseguiu que lhe fosse revelado o segredo da resolução das equações do terceiro grau. Conhecendo a descoberta de Nicolo (Tartaglia) que além de resolver as equações do tipo $x^3 + ax = b$, também achou a fórmula geral para as do tipo $x^3 + ax^2 = b$, Cardano incentivou seu discípulo Ludovico Ferrari[6] a trabalhar com a resolução, e devida demonstração, da equação de quarto grau. Eves (1997).

Cardano, após demonstrar a fórmula de Tartaglia, em 1545, publica-a como se fosse sua em obra intitulada *Ars Magna* (a Grande Arte). Para Garbi:

> [...] a posteridade foi injusta com o sofrido Tartaglia: a fórmula que ele deduzira e que ensinara ao desleal inimigo, ao invés de receber seu nome, é hoje generalizadamente conhecida como Fórmula de Cardano. (GARBI, 1997, p.34)

Esta fórmula conhecida e usada até hoje, diz que a solução de uma equação do terceiro grau do tipo $x^3 + ax = b$, é: $x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{E}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{E}}$ onde $E = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

Mas o que esse fato tem a ver com os números complexos?

Guimarães (2008) e Garbi (1997) respondem que, até então, uma equação era a representação matemática de um problema concreto; assim, se na resolução de um problema aparecia uma raiz de índice par de número negativo, isso era interpretado, pelos matemáticos, como uma indicação de que o problema originalmente proposto não tinha solução prática. Para os autores, foi através da análise da solução de Cardano-Tartaglia para equações do 3º grau, da forma $x^3 + ax = b$, que impuseram a necessidade de se trabalhar com esses números (complexos).

Cardano foi o primeiro matemático a operar com números complexos ao considerar, no capítulo 37 da *Ars Magna* – “Sobre a regra para postular um negativo”, três sub-casos: “aquele em que se assume um número negativo, ou procurar uma raiz quadrada de um número negativo, ou procurar o que não existe”. Para exemplificar o

---

[5] O nome aparece também na literatura como Hieronymus Cardanus, Hieronimo Cardano, Geronimo Cardano e Jerome Cardan (1501-1576)

[6] O nome aparece também como Ludovino (Luigi) Ferrari (1522-1565)

segundo caso, ele propôs o seguinte problema prático: "dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40." Este problema consiste em resolver a equação do segundo grau $x^2 - 10x + 40 = 0$.

.

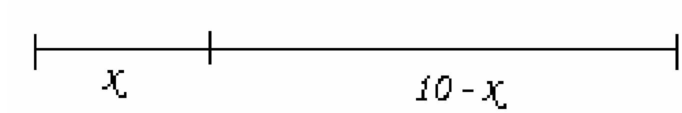


Figura 1: interpretação geométrica da divisão de um segmento de comprimento 10 em duas partes.

Ao resolver o problema, operando como se os radicandos negativos fossem números reais e considerando $(\sqrt{-15})^2 = -15$, Cardano mostrou (multiplicando) que $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, raízes da equação $x^2 - 10x + 40 = 0$, constituem a solução do problema, mesmo sem saber o significado desse tipo de número. Iezzi (2005)

O passo seguinte foi dado, conforme Amorim, Seimetz, Schmitt (2006) e Milies[7] (1993) pelo matemático italiano Rafael Bombelli[8], que em seu livro *" **L' Álgebra parte Maggiore dell' Arithmetica**[9] ",* capítulo II, fez um estudo da resolução de equações de grau inferior a quatro. Na página 294, Bombelli apresentou a seguinte equação $x^3 - 15x = 4$, que ele sabia, constatado por simples observação, ter x = 4 como uma das raízes e que, se resolvida pela fórmula de Cardano dava como resultado:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Um impasse foi criado, pois, sabendo que x = 4 é uma das raízes da equação $x^3 - 15x = 4$, qual o número cujo quadrado é -121?

É fácil perceber que $\sqrt{-121}$ não é real, pois, como já foi dito, não se define, nos reais, raiz quadrada de um radicando negativo.

Em relação a este exemplo, Amorim (2006) comenta que a equação $x^3 - 15x = 4$ resulta do problema de encontrar algebricamente as interseções da parábola de

[7] Professor titular do IME - USP
[8] O nome aparece também como Raffaele Bombelli (1526-1573) - italiano
[9] Também citado com o título de L' Algebra

equação $y = x^2 - 15$ com a hipérbole de equação $y = \frac{4}{x}$. Geometricamente, podemos verificar na figura 2 que existem três soluções reais, portanto o número produzido pela fórmula de Cardano-Tartaglia é real.

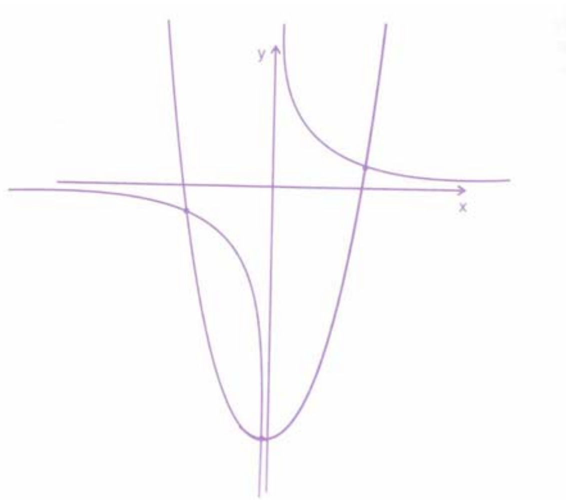


Figura 2: representação geométrica das interseções da parábola $y = x^2 - 15$ com a hipérbole $xy = 4$.
Fonte: Amorim, Seimetz, Schmitt, 2006, p.68

Segundo Garbi (1997), foi preciso mais de 25 anos, para Bombelli, em 1572, resolver o impasse. Ele considerou $-m = (-1).m$, com *m* $>$ *0 , e aplicou a regra operatória da radiciação do produto.* Introduziu a quantidade “piu de meno”, que corresponde a $\sqrt{-1}$ e nós denotamos por $+i$, como representativa dos números de uma nova espécie e admitiu, pela primeira vez, a possibilidade de existir uma expressão da forma n+m.$\sqrt{-1}$, n,m $\in \Re$. Portanto, da mesma forma que $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$, a solução x = 4 poderia ter origem na soma de dois números do tipo: 2 + m $\sqrt{-1}$ e 2 - m $\sqrt{-1}$.

A partir daí, fez $(2 + m\sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$, obtendo m = 1 e $(2 + m\sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$, obtendo m = -1. Logo, concluiu que x = (2 + $\sqrt{-1}$) + (2 - $\sqrt{-1}$) = 4.

Ao encontrar uma raiz para a equação $x^3 - 15x = 4$, Bombelli percebe a importância desse achado e diz:

> [...] A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova [...]. Isto pode parecer muito sofisticado, mas na realidade eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.é. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos. (Apud Milies, 1993, p. 5-15)

Como podemos observar, os números reais eram insuficientes para a resolução de equações algébricas. A exemplo da insuficiência dos racionais na construção de $\sqrt{2}$ (irracional), o campo numérico foi ampliado, surgindo o conjunto dos números complexos[10] .

Em Garbi (1997), observa-se que Bombeli, ao realizar seus cálculos, criou as seguintes regras para se operar com $\sqrt{-1}$:

$$(\sqrt{-1})\ (\sqrt{-1}) = -1$$

$$(-\sqrt{-1})\ (\sqrt{-1}) = 1$$

$$(-\sqrt{-1})\ (-\sqrt{-1}) = -1$$

$$(\pm 1)\ (\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}$$

$$(\pm 1)\ (-\sqrt{-1}) = \mp\sqrt{-1}$$

Criou também a regra para a soma de dois números do tipo $n+m.\sqrt{-1}$, n, m $\in \Re$:

$$(a+b\sqrt{-1}) + (c+d\sqrt{-1}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{-1}$$

Para Pitombeira em Carmo et al (2005), Bombelli também considerava as raízes quadradas de números negativos de "grandezas sofísticas", porém operou livremente com elas, mostrando que números reais poderiam ser obtidos através de operações

[10] O termo "números complexos" foi inventado por Gauss em 1831

com expressões contendo números imaginários, fazendo, a partir deste momento, esse tipo de número perder parte de sua característica mística, ainda que sua plena aceitação no universo dos números seja obtida no século XIX com os trabalhos de Caspar Wessel[11], Jean Robert Argand[12], e sobretudo Carl Friedrich Gauss[13].

Segundo o professor Hygino Domingues, em texto que figura no livro da coleção Fundamentos de Matemática Elementar (Iezzi, 2005, p. 51), Bombelli em seu livro *L' Álgebra* apresenta pela primeira vez uma teoria dos números complexos razoavelmente bem estruturada, inclusive com uma notação específica: o número $3.\sqrt{-1}$, por exemplo, era representado por R[0 m. 9] (R de "raiz" , m de "menos"), ou seja, R[0 m. 9] = $\sqrt{0-9}$.

Assim, podemos dizer que as idéias de Bombelli serviram como bases para o desenvolvimento dos números complexos, sendo importante ressaltar que, ao contrário da sugestão encontrada nas orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais de 2002 (PCN+) e do que aparece em boa parte dos livros didáticos, foram as equações do 3º grau e não as do 2º que levaram à criação desses números.

Os demais matemáticos também consideravam os números complexos como "inúteis" e "sofísticos", embora também manipulassem com eles, aplicando-lhes as regras usuais do cálculo. No século XVIII, o princípio de aplicar a novos objetos algébricos as regras usuais do cálculo foi utilizado frequentemente em álgebra, às vezes com resultados bons, às vezes com maus, como observa o professor Pitombeira em Carmo et al (2005, p.110).

> "A crença de que poderia aplicar aos números complexos as mesmas regras do cálculo com números reais levou por vezes a enganos. Euler (1707, 1783), já no século XVIII, afirmou por exemplo que $\sqrt{-2}.\sqrt{-2} = \sqrt{4} = 2$, por analogia com a regra $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, válida para os números reais". (PITOMBEIRA in CARMO et al, 2005, p. 110).

[11] Caspar Wessel (1745-1818)
[12] Jean Robert Argand (1786-1822)
[13] Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Albert Girard[14], em 1629, introduz o símbolo $\sqrt{-1}$ e anuncia no livro *L' Invention Nouvelle em Algèbre,* as relações entre raízes e coeficientes de uma equação, antecipando alguns pensamentos sobre o teorema fundamental da álgebra, ao escrever que, para $n > 0$, uma equação algébrica completa de grau n (isto é, em que não há coeficientes nulos) possui n raízes. Pitombeira em Carmo et al, (2005).

De acordo com Eves (1997), pouco mais tarde, em 1637, René Descartes[15] escreve um tratado filosófico sobre a ciência universal sob o título de *Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências,* que era formado por três apêndices: La Dioptrique, Les Météores e La Géométrie. Em seu *La Géométrie,* relata que se aceitarmos as raízes "imaginárias" como raízes, podemos afirmar que uma equação algébrica admite tantas raízes quanto é o seu grau.

Os termos real e imaginário foram introduzidos, também em 1637, numa passagem do *Discurso do Método,* onde, segundo Pitombeira em Carmo et al (2005), Descartes escreveu a seguinte frase: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou as falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias".

Em 1777, Euler[16] usou pela primeira vez o símbolo i para representar a unidade imaginária $\sqrt{-1}$ e operou com ele como se $i^2 = -1$. Essa notação, i, apareceu impressa pela primeira vez em 1794, tornando-se amplamente aceita após 1801, quando Friederich Gauss (1787-1855) começou a utilizá-la sistematicamente. Euler também chegou à fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ da qual obteve para $\theta = \pi$ a identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$, relacionando, segundo Davis e Hersh (1995), as cinco constantes mais importantes de toda a análise matemática.

John Wallis[17] fez a primeira tentativa para legitimar os números complexos, por meio de uma interpretação geométrica em seu tratado intitulado *Álgebra* de 1673, como explica Eves:

---

[14] Albert Girard (1590-1633)
[15] René Descartes (1596-1650) – francês
[16] Leonhard Euler (1707-1783) - austríaco
[17] John Wallis (1616-1703)

> [...] Nesse trabalho encontra-se o primeiro esforço registrado de dar às raízes complexas de uma equação quadrática real uma interpretação gráfica. (EVES, 1997, p. 433)

A idéia de Wallis sobre interpretação geométrica dos números complexos sugerindo que os números imaginários puros eram suscetíveis de ser representados numa reta perpendicular ao eixo real, passou desapercebida, sendo retomada na virada do século XVIII para o século XIX, quando Caspar Wessel[18], Gauss e Argand encontraram, independentemente, uma representação geométrica para os números complexos, como coloca Baumgart:

> [...] Os números imaginários obtiveram aceitação mais ampla após se chegar à representação geométrica, primeiro com Caspar Wessel (1797), depois com Jean Robert Argand (1806) e a seguir com Carl Friedrich Gauss, que, num tratado de 1831, publicou a representação geométrica que já tinha obtido em 1811, descrita numa carta a F.W.Bessel. (BAUMGART, 1992, p. 5)

Caspar Wessel foi o primeiro a formular uma representação geométrica sistemática aos números complexos. Em 1797, no artigo intitulado *Sobre a representação analítica da direção: uma tentativa*, ele escreveu:

> Designemos por $+1$ a unidade positiva retilínea e $+\varepsilon$ uma certa unidade perpendicular à unidade positiva e tendo a mesma origem; então o ângulo de direção de $+1$ será igual a 0°, o de -1 a 180°, o de $+\varepsilon$ a 90° e o de - ε a $-90°$ ou $270°$. (MILIES,1993, p.13)

[18] Gaspar Wessel (1745-1818) –norueguês. Não era matemático, era agrimensor e autodidata. Usou o símbolo ε para representar $\sqrt{-1}$.

Wessel, conforme Baumgart (1992), dá sua contribuição para o entendimento dos números complexos através de representações gráficas quando publica: “Pela regra de que o ângulo de direção do produto é igual à soma dos ângulos dos fatores, temos:” (BAUMGART,1992, p. 63)

$$(+ 1) . (+ 1) = (+ 1)$$

$$(+ 1) . (- 1) = (- 1)$$

$$(- 1) . (- 1) = (+ 1)$$

$$(+ 1) . (+ \varepsilon) = (+ \varepsilon)$$

$$(+ 1) . (- \varepsilon) = (- \varepsilon)$$

$$(+ \varepsilon) . (+ \varepsilon) = (- 1)$$

$$(- 1) . (- \varepsilon) = (+ \varepsilon)$$

$$(+ \varepsilon) . (- \varepsilon) = (+ 1)$$

$$(- \varepsilon) . (- \varepsilon) = (- 1)$$

A partir disso vê-se que[19] $\varepsilon = \sqrt{-1}$.

Para Iezzi (2005) e Milies (1993), Wessel (em 1797) e Argand (em 1806) representaram geometricamente os complexos, usando segmentos de reta orientados ou vetores coplanares, enquanto Gauss imaginava essa representação por meio de pontos de um plano. Argand, em 1806, publicou um livro intitulado *Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas.* Nesse livro, da mesma forma que Wessel, ele observa que se multiplicamos $+1$ por i obtemos i e se multiplicamos esse resultado novamente por i obtemos -1. Argand pensa, então, em representar i por uma operação que aja de modo análogo. Assim, podemos representar i por uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

[19] Hoje representamos $\varepsilon = \sqrt{-1}$ por $i = \sqrt{-1}$.

De acordo com Oliveira (2006), o artigo de Wessel, publicado em 1797, originalmente em dinamarquês, também, como o tratado de Wallis[20], permaneceu ignorado até que apareceu, noventa e oito anos depois, uma tradução em francês. A idéia, contudo, acabou sendo atribuída a J. R. Argand, por este ter escrito sobre o assunto, em 1806, no livro *Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas*. Talvez esse atraso, de quase um século, na tradução do trabalho de Wessel, explica por que o plano complexo veio a ser chamado plano de Argand em vez de plano de Wessel.

Quem realmente tornou a interpretação geométrica dos números complexos amplamente aceita foi Gauss, dada a sua importância no meio científico. Em sua obra (artigo) de 1831, introduziu a expressão "número complexo" e deixou claro conhecer as idéias subjacentes ao assunto, como explica Eves.

> Gauss assinalou que a idéia básica da representação pode ser encontrada em sua tese de doutorado de 1799. A afirmação parece procedente e explica por que o plano complexo é frequentemente conhecido como plano de Gauss. (EVES, 1997, p. 522)

Modernamente o plano complexo costuma ser chamado plano de Argand-Gauss. Gauss teve a ideia de substituir as partes real e imaginária do complexo $a + bi$ por um par ordenado (a,b), possibilitando a visualização no sentido de que cada número complexo corresponde a um único ponto do plano e vice-versa. Eves deixa esse aspecto bem claro ao informar que:

> A simples idéia de considerar as partes real e imaginária de um complexo ***a + bi*** como as coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido e que cada número complexo corresponde a um único ponto do plano e vice-versa. Ver é crer, e idéias anteriores sobre a não-existência e o

[20] Segundo Eves (1997, p.433), nesse tratado encontra-se o primeiro esforço de dar às raízes complexas de uma equação quadrática real uma interpretação gráfica.

> caráter fictício dos números imaginários foram geralmente abandonadas. (EVES, 1997, p. 524)

É provável que Gauss já tivesse conhecimento da representação geométrica dos números complexos desde 1815, a julgar pelas suas demonstrações do teorema fundamental da álgebra, mas só publicou seus resultados em 1831. Foi Gauss quem deu aos números complexos o “direito de cidadania”, explorando a identificação dos números complexos com o plano e usando os complexos para obter diversos resultados sobre a geometria e sobre os números reais, e até sobre os inteiros. Carneiro (2004).

> Foi com a ajuda dos números complexos que Gauss decidiu quais eram os polígonos regulares construtíveis com régua e compasso, ou que números inteiros podiam ser escritos como soma de dois quadrados. Foi utilizando o plano complexo que Gauss deu sua demonstração geométrica de que todo polinômio de coeficientes reais pode ser decomposto em fatores de grau máximo dois, o que equivale ao Teorema Fundamental da Álgebra. (CARNEIRO, 2004, p. 5)

A representação geométrica dos complexos atraiu as atenções sobre os vetores e, segundo Oliveira (2006), Hamilton[21] num artigo de 1833, apresentado à Academia Irlandesa, desenvolveu a formalização completa dos números complexos como pares ordenados de números reais e reescreveu as definições geométricas na forma algébrica, identificando o par *(a,0)* com o real *a* e *(0,1)* com i, chamado unidade imaginária, e estabeleceu as regras:

$$(1) \Rightarrow (a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

$$(2) \Rightarrow (a,b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

[21] William Rowan Hamilton (1805-1865)

Nesse contexto que acabamos de estudar, percebemos a evolução dos números complexos e sua relação com os vetores e pontos do plano. A história dos números complexos incentiva a descoberta das possíveis conexões deste assunto com outro, dentro da matemática, bem como de outras áreas do conhecimento, além de contribuir para os alunos perceberem que os números complexos surgiram de uma evolução de pensamento. No entanto, muitos professores não percebem a importância da história da matemática em sala de aula, por não conhecerem a história dos conteúdos que ensinam.

2.2 HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA

D'Ambrosio destaca a importância da história da matemática para os professores de matemática dizendo que:

> Ninguém contestará que o professor de matemática deve ter conhecimento de sua disciplina. Mas a transmissão desse conhecimento através do ensino depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou, de quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões de sua presença nos currículos escolares. Destacar esses fatos é um dos principais objetivos da História da Matemática, (D'AMBROSIO, 2000, p. 241)

Nessa mesma linha Lorenzato assim se manifesta:

> "Outro modo de melhorar as aulas de matemática tornando-as mais compreensíveis aos alunos é utilizar a própria história da matemática: esta mostra que a matemática surgiu aos poucos, com aproximações, ensaios e erros, não de forma adivinhatória, nem completa ou inteira. Quase todo o desenvolvimento do pensamentos matemático se deu por necessidade do

> homem, diante do contexto da época. Tal desenvolvimento ocorreu em diversas culturas e, portanto, através de diferentes pontos de vista." (LORENZATO, 2006, p. 107)

Em relação à história da matemática em sala de aula, os PCNs apontam que:

> "A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos." (BRASIL, 2006, p.86)

Os PCNs, também, sinalizam para a importância de não deixarmos que a história da matemática fique limitada à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografia de matemáticos famosos. Em relação aos aspectos históricos dos números complexos os PCNs destacam que:

> "Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$." (BRASIL, 2006, p. 71)

É preciso considerar que essa orientação didática aos professores, encontrada nos PCNs, leva à crença de que os números complexos surgiram da necessidade, puramente algébrica, de se obter uma solução para equações do tipo $x^2+1=0$, causando um obstáculo metodológico encontrado em grande parte dos textos didáticos.

Nesse sentido, a história dos números complexos contribui de forma significativa para quebra desse obstáculo metodológico, além de explicar o aparecimento de termos como $\sqrt{-1}$ e **i**. Outra contribuição é fazer com que o aluno entre em contato com a ideia relacionada ao conceito de unidade imaginária, sem que essa ideia fique destituída de significado geométrico.

3 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

O livro didático aparece como um instrumento regulador com o objetivo de normalizar o que vai ser ensinado na escola, o saber ensinar, caracterizando uma das etapas da transposição didática, que Pais (2002) define, segundo Chevallard[22], como sendo:

> A transposição didática é analisada como a passagem do saber científico, produzido na dimensão acadêmica, para o saber ensinado pelo professor em sala de aula. Nessa trajetória, o conteúdo escolar ainda passa pelo estatuto de um saber a ser ensinado. (PAIS, 2002, p. 122)

O livro didático serve de referência tanto para alunos quanto para professores, com conteúdos que compõem a grade curricular, sendo fator relevante na construção do conhecimento de alunos e professores pois, de acordo com Lima (2001):

> [...] o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe. Assim, é necessário que esse livro seja não apenas acessível e atraente para o aluno, como também que ele constitua uma base amiga e confiável para o professor, induzindo-o a praticar os bons hábitos de clareza, objetividade e precisão, além de ilustrar, sempre que possível, as relações entre a Matemática e a sociedade atual. (LIMA et al, 2001, p. 1)

Nesse sentido, dentre vários livros didáticos da matemática adotados pelas escolas de ensino médio (E.M.), selecionamos os três mais indicados pelos professores de cinco escolas particulares e um pré-vestibular de São Luís do Maranhão. Dessa

[22] CHEVALLARD, Y**.** ***La Transposition Didactique.*** Paris: La Pensée Sauvage, 1991

forma, foram selecionados para análise os livros didáticos dos seguintes autores: Dante (2007), Iezzi (2005) e Bonjorno (2005).

3.1 Análise quantitativa

Esta parte da nossa análise teve como foco a estrutura organizacional quantitativa do(s) capítulo(s) dedicados, pelos autores (três escolhidos), aos conteúdos relacionados com os números complexos em cada livro didático.

Foram o objeto de observação:

- número de páginas do livro destinadas aos números complexos;
- quantidade de exercícios referentes aos números complexos.

Assim, de acordo com a análise dos aspectos quantitativos estabelecidos, para os livros selecionados, apresentamos os seguintes resultados:

3.1.1 Livro: Matemática contexto & aplicações

- Volume: 3 (Ensino Médio);
- Autor: Luis Roberto Dante;
- Editora: Ática;
- Ano de publicação: 2007;
- Número de páginas: 352. Números de páginas sobre números complexos: 38 (10,79%);
- Número de exercícios resolvidos: 229. Números de exercícios resolvidos sobre números complexos: 35 (15,28%);
- Número de exercícios propostos: 754. Números de exercícios propostos sobre números complexos: 115 (15,25%);

- Questões de vestibulares: 300. Questões de vestibulares sobre números complexos: 26 (8,66%).

3.1.2 Livro: Matemática: uma nova abordagem

- Volume: 3 (Ensino Médio);
- Autores: José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno;
- Editora: FTD;
- Ano de publicação: 2005;
- Número de páginas: 415. Números de páginas sobre números complexos: 31 (7,46%);
- Número de exercícios resolvidos: 258. Números de exercícios resolvidos sobre números complexos: 22 (8,52%);
- Número de exercícios propostos: 971. Números de exercícios propostos sobre números complexos: 140 (14,41%);
- Questões de vestibulares: 865. Questões de vestibulares sobre números complexos: 33 (3,81%).

3.1.3 Livro: Fundamentos de Matemática Elementar

- Volume: 6 (complexos, polinômios e equações);
- Autor: Gelson Iezzi;
- Editora: Atual;
- Ano de publicação: 2005;
- Número de páginas: 250. Números de páginas sobre números complexos: 53 (20,8%);
- Número de exercícios resolvidos: 89. Números de exercícios resolvidos sobre números complexos: 21 (23,59%);

- Número de exercícios propostos: 422. Números de exercícios propostos sobre números complexos: 84 (19,9%);
- Questões de vestibulares: 273. Questões de vestibulares sobre números complexos: 81 (29,67%).

3.2 Análise qualitativa

Em relação aos aspectos qualitativos, o foco estabelecido para análise dos três livros didáticos escolhidos foi a forma de apresentação do conteúdo.

3.*2.1 Livro: Matemática contexto & aplicações*

Autor: Luís Roberto Dante, editora Ática, volume 3, ano 2007

Este livro motiva a introdução dos números complexos com o equívoco histórico de que esses números surgiram pela necessidade da ampliação do conjunto dos números reais para permitir que todas as equações do segundo grau tivessem solução. Na página 116, na introdução dos números complexos, o autor faz a seguinte colocação:

> Sabemos que, se $x \in \Re$, então $x^2 \geq 0$. Assim a equação $x^2+1=0$ não tem solução em $\Re$, pois:
>
> $$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x= \pm\sqrt{-1}$$
>
> e não existe número x que elevado ao quadrado resulte -1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado conjunto dos *números complexos.* (DANTE, 2007, p. 116)

É estranho o autor não usar a história e mostrar que os números complexos surgem para que se possa usar a fórmula de Cardano, no caso de equações do 3º grau com três raízes reais, pois no final do capítulo existe, para leitura complementar, um texto[23] do professor Eloy referente à história dos números complexos, afirmando que não foram as equações do 2º grau com discriminante negativo que sugeriram o uso dos números complexos e sim as do 3º grau. Também é estranho que, após tal afirmação, o professor Eloy deixa de lado as equações do 3º grau, usando para exemplificar o aparecimento dos números complexos o problema da divisão do número 10 em duas partes cujo produto seja 40. Encontrar dois números, conhecendo a soma e o produto deles, é um problema de aplicação da equação do 2º grau conhecido há 4000 anos e, até o aparecimento dos números complexos, no séc. XVI, foi considerado sem solução quando no discriminante resultava um número negativo.

Por falta de uma interpretação vetorial e um significado geométrico desse novo número não real, a unidade imaginária dos números complexos, o livro apresenta definições que poderiam ser mais bem justificadas se estivessem acompanhadas de uma interpretação geométrica.

A definição formal dos números complexos como pares ordenados de números reais, que para o aluno representa as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, é apresentada logo no início, bem como suas propriedades operatórias, caracterizando o conjunto C como um corpo. Entretanto, exceto a comutatividade da adição, as propriedades operatórias são listadas, mas não é dita a razão pela qual elas são válidas.

O autor utiliza (p. 118) uma linguagem inadequada quando define o número ***i***, escrevendo "*Criamos um nome e um símbolo para o complexo (0,1). Ele será chamado de unidade imaginária e indicado por **i**".* Mais ainda: coloca o verbo observar em lugar do verbo demonstrar ao mencionar que $i^2=-1$. A seguir é apresentada a forma algébrica e, embora o conceito seja correto, não é feito comentário sobre a igualdade e a multiplicação de números complexos na forma algébrica, além da definição dada de imaginário puro, que segundo Lima et al (2001), excluir erradamente o zero do conjunto dos imaginários puros.

---

[23] Segundo Dante, foi elaborado pelo professor Eloy Ferraz Machado Neto.

Na página 123 aparece, segundo Lima et al (2001), um dos erros mais comuns nos livros didáticos sobre números complexos: dizer que o ponto (*a,b*) é o afixo do número complexo *a + bi* . Afixo de um ponto é o complexo cuja imagem é o ponto.

Entre os pontos positivos, destacamos as interpretações geométricas da soma (diagonal do paralelogramo) e da conjugação (simetria em relação ao eixo x) de números complexos, bem como a demonstração das propriedades do conjugado de um número complexo que foram apresentadas. Porém, não são apresentadas algumas propriedades operatórias essenciais para o manuseio dos números complexos, como $z+\overline{z}=2.\mathrm{Re}(z)$, $z-\overline{z}=2.\mathrm{Im}(z)i$, $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|}$ e $z^{-1}=\overline{z} \Leftrightarrow |\overline{z}|=1$.

A divisão de números complexos, na forma algébrica, é apresentada (p. 128) como uma regra: “o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ entre dois números complexos, com $z_2 \neq 0$, é dado por $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1 . \overline{z_2}}{z_2 . \overline{z_2}}$ ” . Não há menção de que o número $\frac{z_1}{z_2}$ é tal que multiplicado por z_2 é igual a z_1. A divisão na forma trigonométrica é colocada sem demonstração, necessitando de mais explicação para justificá-la.

Em relação ao módulo de um número complexo é feita de forma positiva a observação sobre o significado de $|z-w|$ como distância dos pontos *z* e *w* no plano. Entretanto, a interpretação geométrica do módulo de um complexo é explorada apenas de maneira obvia. Não há nenhum exercício que ilustre, por exemplo, que os complexos que são solução da equação $|z-p|=r$, $p \in \Re$ e $r \in \Re$, estão em uma circunferência de centro $(p,0)$ e raio r .Também não é estabelecida a relação entre o módulo de um complexo e a operação $||z|-|w|| \leq |z+w| \leq |z|+|w|$ (desigualdade triangular para números complexos).

A representação gráfica da multiplicação de complexos aparece como um dos pontos positivos do livro, porém, o objetivo do autor não é explorá-la suficientemente, pois só no final da unidade, e através de um exercício resolvido, é feito comentário do fato de que multiplicar um complexo ***z*** por (***cos*** $\boldsymbol{\theta}$ ***+ i.sen*** $\boldsymbol{\theta}$ ***)*** consiste em submetê-lo a uma rotação de um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ em torno da origem. Não há razão para restringir o argumento de um complexo ao intervalo $[0,2\pi[$. Pelo contrário, isto invalida a propriedade de que o argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores.

O livro termina a apresentação dos números complexos com o estudo das fórmulas de De Moivre. Aqui o autor enfatiza a interpretação geométrica das raízes enésimas de números complexos e, finalmente, através de dois exercícios resolvidos, mostra duas aplicações: uma à geometria e outra à engenharia elétrica.

3.2.2. Livro: Matemática: uma nova abordagem

Autores: José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, editora FTD, volume 3, ano 2005.

É oportuno comentar a introdução dos números complexos, neste livro. Logo na primeira página (p. 146), intitulada: *O número i*, o texto coloca, corretamente, que esses números não teriam sido criados se o motivo fosse fazer com que todas as equações do segundo grau tivessem solução e sim da necessidade de resolver, pela fórmula de Cardano, equações do terceiro grau com raízes reais. Entretanto, em nenhum lugar aparece essa fórmula, fazendo com que a explicação ainda assim permaneça obscura para o aluno. Continuando nesta página, os autores apresentam o número $i=\sqrt{-1}$ de forma abrupta e não são felizes ao colocarem que:

> "Para simplificar a notação, criou-se o número *i*, de modo que o quadrado desse número fosse igual a *-1* , isto é: $i^2=-1$". (BONJORNO e GIOVANNI, 2005, p. 146).

Sabemos que a existência do número *i* não é uma questão de notação e, além disso, essa forma de apresentar a unidade imaginária substituindo a raiz quadrada de *-1* por *i* , $i=\sqrt{-1}$, destituindo de qualquer significado, passa a idéia de que na matemática os conceitos são inventados de acordo com as dificuldades, parecendo que alguém decidiu que era o momento de inventar os números complexos e simplesmente decretou que $i^2 = -1$.

O plano complexo é apenas apresentado, mas não é empregado. Não é feita a interpretação bidimensional através de operações com pares ordenados, prejudicando a visão geométrica e o entendimento desses números.

É estranha a opção dos autores não considerarem o zero como imaginário puro, pois ao se referirem a imaginário puro, escrevem:

> "Observe que se um número complexo estiver representado no eixo das abscissas, então ele é real; se estiver no eixo das ordenadas é imaginário puro." (BONJORNO, 2005, p. 149)

Ainda na página 149, o texto confunde afixo com imagem. Segundo Lima (2001), afixo e imagem não são sinônimos. A imagem de um complexo é o ponto que o representa, e o afixo de um ponto é o complexo por ele representado.

Não existem figuras ilustrando as operações de soma e subtração de números complexos, embora na página 164, em um texto "Os números complexos e a Física", seja feito um comentário com a devida ilustração informando que *multiplicar por i corresponde a girar 90°, no sentido positivo ao redor da origem, a imagem do complexo pelo qual se multiplica por i, e que a força resultante da soma de duas forças pode ser representada mediante a regra do paralelogramo.*

A divisão na forma algébrica é apresentada através de uma regra que, para ser justificada, usa uma propriedade do conjugado que não foi citada no livro, pois a definição do conjugado de um número complexo foi apresentada, mas suas propriedades não.

Também não é objetivo do livro apresentar as propriedades do módulo de um número complexo e explorar a sua representação gráfica. Por exemplo, o exercício 3, da página 160, pede para representar, no plano complexo, o conjunto $\{ z \in C \; ; \; |z| = 3 \}$. O exercício é resolvido, corretamente, de forma algébrica, sem levar em consideração a interpretação geométrica. Faz-se $z = a + bi$ e, usando a condição dada, chega-se á equação $a^2 + b^2 = 9$, que é uma circunferência de centro na origem e raio 3. Isto está correto, mas pode-se chegar a esta conclusão escrevendo a condição $|z|=3$ e reconhecendo que ela identifica $|z|$ como a distância da imagem de *z* à origem. Na verdade, o texto não menciona que $|z-w|$ representa a distância entre as representações dos complexos *z* e *w* no plano.

Quanto à multiplicação na forma trigonométrica, não é feita uma figura nem é destacado o importante significado geométrico desta fórmula.

Em relação à fórmula de De Moivre para radiciação (p. 169), o símbolo $\sqrt[n]{z}$ é usado de forma ambígua, aparecendo duas vezes na mesma fórmula e com significados diferentes.

Enfim, na análise desse livro, foi observado que o objetivo dos autores é apresentar o conteúdo dos números complexos a partir da representação do símbolo *i,* conduzindo o aluno a definir e operar com esses números na forma algébrica, sem levar em consideração a representação geométrica. O texto é baseado na concepção tradicional de ensino, com ênfase no modelo de exercícios em que o aluno é levado a repetir estratégias. Não há nenhuma aplicação dos números complexos.

3.2.3 Livro: Fundamentos de Matemática Elementar

Autor: Gelson Iezzi, editora Atual, volume 6 (complexos, polinômios e equações), ano 2005.

O autor desse livro não usa a história para introduzir o conjunto dos números complexos, embora no final do capítulo apresente como leitura complementar um artigo do professor Hygino H. Domingues sobre a história dos números complexos, intitulado *Números complexos: de Cardano a Hamilton.*

A primeira unidade do capítulo de números complexos inicia com o estudo das definições, operações e propriedades de pares ordenados de números reais.

No item seguinte define o conjunto dos números complexos como sendo o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade e as operações de adição e a multiplicação, apresentando suas propriedades, constituindo, assim, o corpo dos complexos. Além disso, é feita a passagem da forma cartesiana (*a,b*) para a forma binomial (algébrica) *a + bi,* mostrando o isomorfismo entre $\Re$ (reais) e $\Re' = \{(a,b) \in C, b = 0\}$.

O conjugado de um número complexo e suas propriedades são apresentados, algebricamente, de forma correta, porém o fato de que o conjugado de um número complexo é o seu simétrico em relação ao eixo real não é mencionado.

A exemplo de grande parte dos textos didáticos, ao definir imaginário puro, também exclui o zero do conjunto dos imaginários puros. Não entendemos a razão disso, pois o autor afirma (p. 21) que "... marcaremos sobre os eixos *0x* e *0y,* respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z." Ainda na página 21, segundo Lima et al (2001), é feita uma confusão entre afixo e imagem.

Na página 30, em um exercício resolvido, é feita a interpretação gráfica da soma de dois números complexos. Aqui se faz novamente confusão entre afixo e imagem de um complexo, chamando a imagem de afixo. Além disso, sem explicação, enuncia para o cálculo do módulo do complexo $z = z_1 + z_2$, a fórmula: $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$.

O exercício 64, resolvido na página 31, pede para que sejam representados no plano complexo os seguintes subconjuntos de C: $|z| = 2$, $|z| \leq 3$ e $|z - i| = 1$. Esses exercícios são resolvidos algebricamente, sem apelo à interpretação geométrica. Por não ter como objetivo a exploração do aspecto geométrico, nestes exemplos, o livro perdeu a oportunidade de mostrar que $|z - w|$ representa a distância entre as representações dos complexos *z* e *w* no plano. Por envolver conceitos importantes, exercícios como estes mereciam melhor explicação e mais ilustrações. Por exemplo, o exercício 3, que pede para representar o subconjunto $|z - i| = 1$, o autor poderia chegar mais facilmente ao resultado, reconhecendo que a equação $|z - i| = 1$ estabelece que a distância do complexo *z* ao complexo *i* é igual a 1, caracterizando uma circunferência de centro (*0,1*) e raio 1. Ainda neste exemplo, não há diferença entre a ilustração gráfica de círculo e circunferência, pois na representação gráfica do círculo, não é dado destaque aos pontos interiores à circunferência que o limita.

A interpretação geométrica da multiplicação na forma trigonométrica, de dois complexos, também não é objetivo do autor, o que impede a aplicação desses números à geometria. Em razão disso, o livro não mostra que a multiplicação por um número complexo de módulo 1 significa uma rotação no plano em torno da origem. Por exemplo, multiplicar por *i* é efetuar rotação de 90° no sentido anti-horário.

Ao encerrar o estudo dos números complexos, apresenta as fórmulas de De Moivre para potenciação e radiciação. Esta é a melhor parte do livro, pois ao calcular as raízes de um número complexo, enfatiza, adequadamente, a interpretação geométrica, apontando que as imagens das raízes de ordem n de um complexo são vértices de um polígono regular de n lados inscritos em uma circunferência de centro na origem e raio $r = \sqrt[n]{|z|}$, com $|z| \neq 0$.

Nesse livro o aspecto algébrico é tratado com o rigor necessário, porém o geométrico só é explorado na última unidade, sendo esse aspecto desejado. O resultado disso é uma apresentação fortemente algébrica e, portanto, sem aplicações relevantes.

Nos três livros escolhidos para análise foi observado que a geometria dos complexos é pouco explorada tanto sob o ponto de vista teórico como nas aplicações. Os exercícios são resolvidos através da verificação de fórmulas e voltados para o treinamento de cálculos que deixam o aluno apenas com uma visão formal e algébrica. Não há questões que estimulem a visão geométrica ou a criatividade e não há preocupação em fazer a conexão entre o conteúdo já conhecido e o conteúdo dos números complexos e assim buscar uma apresentação significativa para motivar o aluno.

No ensino dos números complexos, os vetores contribuem para uma exposição mais clara e convincente e os livros didáticos analisados não deram importância à representação vetorial desses números. Em conseqüência disso, não foi dado o destaque necessário ao significado geométrico dos números complexos e das operações entre eles.

Problemas envolvendo rotações e semelhança de figuras são razões suficientes para mostrar aplicações e dar significado a esses números. Mas não existem.

É importante ressaltar que, dos livros analisados, apenas o livro do Dante apresenta uma aplicação de números complexos através de dois exercícios: um na engenharia e outro na geometria, porém isto pode ser considerado tímido para um livro cujo título é: Matemática, Contexto & Aplicações.

4 AS ATIVIDADES, AS OBSERVAÇÕES E ANÁLISES

Retomamos a questão de pesquisa deste trabalho que é: *Em que medida uma iniciação via abordagem geométrica contribui para uma redução dos obstáculos metodológicos que os professores e alunos enfrentam ao fazer a expansão do conjunto dos números reais para o conjunto dos números complexos*?

Para Pires (2000), não podemos deixar de considerar que compreender é aprender o significado. Mais que isso, devemos levar em conta que aprender o significado de um objeto é vê-lo em suas relações com outros objetos.

Sendo assim, o objetivo principal foi contribuir para uma melhor compreensão do conceito e do significado geométrico da unidade imaginária ***i*** dos complexos. Visou-se operar com esse número e interpretar os resultados dessas operações, estabelecendo-se conexões entre a álgebra e a geometria, numa tentativa de se obter uma melhoria no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo dos números complexos. Estabelecemos este objetivo ao levantarmos as principais dificuldades enfrentadas por alunos e professores ao lidar com este tema.

O levantamento das dificuldades e todas as demais etapas da pesquisa foram realizadas em uma escola particular de São Luís do Maranhão, em 2008. Levantamos as dificuldades de ensino junto a 5 professores da cidade, que ministraram em anos anteriores o conteúdo relativo aos números complexos. Dois eram professores da 3ª série do E.M. (ensino médio) e três do pré-vestibular. As dificuldades de aprendizagem foram colhidas entre 50 alunos, sendo vinte e cinco do pré-vestibular e vinte e cinco da 3ª série do ensino médio.

A pesquisa com os 50 alunos detectou obstáculos de aprendizagem neste conteúdo, mostrou a falta de base dos alunos, a complexidade do conteúdo e a metodologia empregada pelos professores como principais causas da dificuldade de aprendizagem, conforme tabela 1:

Dificuldades de aprendizagem dos números complexos			
CAUSAS APONTADAS PELOS ALUNOS	3ª Série (%)	Pré-vestibular (%)	Total (%)
1. Falta base para os alunos (pré-requisitos)	24	20	22
2. Complexidade do conteúdo	32	24	28
3. Metodologia do professor	20	28	24
4. Falta de atenção dos alunos (desinteresse)	12	8	10
5. Indisciplina em sala	8	4	6
6. Turmas muito grandes (numerosas)	4	16	10

Tabela 1 - Causas apontadas pelos alunos

Ao analisar os dados da tabela 1, verificamos que 74% dos alunos que participaram da pesquisa (76 % dos alunos da 3º série do ensino médio e 72 % dos alunos do pré-vestibular) apontaram os três primeiros itens como sendo as principais causas que dificultam a aprendizagem dos números complexos.

Acreditando que as dificuldades dos itens 1 e 2 da tabela-1 poderiam ser minimizadas se melhorássemos o problema apontado no item 3 (metodologia do professor), perguntamos aos professores: qual é a sua maior dificuldade ao ensinar números complexos? De acordo com as respostas, criamos a tabela-2, onde seus dados resumem as principais dificuldades dos professores ao ensinar números complexos.

Dificuldades ao ensinar números complexos			
DIFICULDADES APONTADAS PELOS PROFESSORES	3ª Série (%)	Pré-vestibular (%)	Total (%)
1.Mostrar que $i^2 = -1$	50	0	20
2.Dar significado à unidade imaginária dos números complexos	50	66,67	60
3.Encontrar problemas com significado contextualizado	0	33,33	20

Tabela 2 – Causas apontadas pelos professores

Ao analisarmos os dados da tabela-2, verificamos que dos cinco professores entrevistados, dois da 3ª série do ensino médio e três do pré-vestibular, 80% apontaram a unidade imaginária (valor e significado) como sendo o maior obstáculo metodológico e epistemológico para o ensino dos números complexos, pois para eles, o aluno aprende erradamente em séries anteriores, que todo número elevado ao quadrado tem como resultado um número positivo

Essa dificuldade colocada pelos colegas professores, também era minha, pois ministrávamos aulas seguindo rigorosamente o livro didático, preocupados em dar o conteúdo em detrimento da compreensão, ensinando os números complexos de forma puramente algébrica, sem levar em consideração a abordagem geométrica. Nossa maior preocupação era manipular fórmulas e algoritmos com foco na resolução de problemas para o vestibular. Pensando em melhorar cada vez mais o desempenho dos alunos no vestibular, usávamos uma metodologia firmada num acúmulo de ações desprovidas de sentido, onde os alunos resolviam inúmeras questões (problemas de vestibulares) embora não soubessem o que estavam fazendo. Nós não percebíamos como os alunos estavam aprendendo, pois não observávamos a lógica usada na resolução desses problemas.

Dentro desse contexto e sabendo que a definição de um número complexo como sendo: "*um número complexo é um objeto da forma a+bi , onde a e b são números reais,* $i^2 = -1$ *e permanecem as leis da álgebra*[24]" é a que aparece nos livros textos do ensino médio, faz-se necessária uma reflexão sobre a metodologia tradicional e a apresentação de metodologia alternativa para o ensino dos números complexos. A unidade imaginária é sem dúvida o principal obstáculo para o entendimento dos alunos (expansão do corpo dos reais para o corpo dos complexos), pois além da dificuldade no processo de abstração, muitos convivem com o obstáculo epistemológico e metodológico citado.

Norteados por esse pressuposto e com base nos dados das tabelas 1 e 2, relativos aos anos anteriores, propusemo-nos, em 2008, a buscar uma metodologia alternativa: introduzir o ensino de números complexos como pontos ou vetores do plano (abordagem geométrica). Essa nova metodologia trata, através de manipulações geométricas e algébricas, já conhecidas pelos alunos, de mostrar, antes de nomear e definir número complexo, que *existe um número (não real) que elevado ao quadrado é igual a* (- 1), *ou seja,* $i^2 = -1$ *com* $i \notin \Re$.

[24] Comutativa (da adição e da multiplicação), associativa (da adição e da multiplicação) e distributiva.

Analisadas as dificuldades, definidas as linhas de ação, as duas primeiras Atividades Didáticas desta pesquisa foram elaboradas, fundamentadas nas teorias de Zabala (1988) e Ponte (2005). Elas constituem-se em Atividades Chaves e cada uma delas foi realizada em duas aulas. Uma para investigação, manipulação e registro das conclusões pelos alunos, organizados em grupos. A outra para socialização, exposição das observações feitas e reflexão sobre o formato desse novo tipo de aula e da sua condução pelo professor.

4.1 AS ATIVIDADES CHAVES PARA A PESQUISA

Atividades 1 e 2, consideradas chaves, cruciais para os objetivos da pesquisa, foram feitas sob um acompanhamento atento do professor pesquisador, provocando e devolvendo questionamentos para as reflexões e investigações dos grupos.

O objetivo nestas duas atividades foi dar ênfase às manipulações geométricas, as quais deverão conduzir à manipulação de um operador algébrico, que aqui será chamado (apelidado) de *i* e que Courant e Robbins (2000) chamaram de objeto, com a finalidade de se encontrar ou descobrir um número (não real) cujo quadrado vale -1, dentro de um contexto significativo.

Apresentaremos as questões destas duas atividades e, ao final, analisaremos sua realização pelos grupos de alunos. Mas, após cada questão já estaremos mencionando para aonde tendeu a resposta de consenso dos grupos, bem como de suas conclusões.

ATIVIDADE – 1

Considere o ***cm*** como unidade de comprimento e responda:

01. Qual a distância do ponto **A** ao ponto **O**? E do ponto **O** ao ponto **B**?

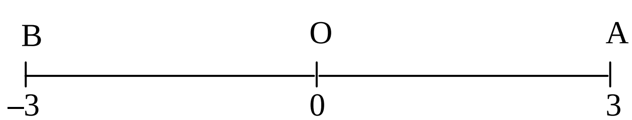


Figura 3: Distância entre pontos
Fonte: Reis Neto, IX ENEM, pôster PO - 25488074368

Consenso das respostas: 3cm e 3cm.

02. Considere na fig. **4** o vetor **OA** igual a **+d** e o vetor **OB** igual a **–d**.

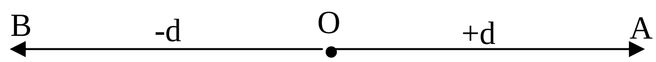


Figura 4: Vetores simétricos (opostos)
Fonte: Reis Neto, IX ENEM, pôster PO - 25488074368

a) Como passar algebricamente da quantidade +d, representada por OA, para quantidade –d, representada por OB?
Consenso das respostas: multiplicando-se +d *por* -1.

b) Como passar geometricamente da quantidade +d, representada por OA, para quantidade –d, representada por OB?
Consenso das respostas: fazendo-se girar o vetor OA *de 180º (uma semi-volta).*

c) Como passar algebricamente da quantidade –d, representada por OB, para quantidade +d, representada por OA?
Consenso das respostas: multiplicando-se -d *por* -1.

d) Como passar geometricamente da quantidade –d, representada por OB, para quantidade +d, representada por AO?
Consenso das respostas: fazendo-se girar o vetor OB *de 180º (uma semi-volta).*

CONSENSO DAS CONCLUSÕES:

Multiplicar uma quantidade por **-1** equivale a provocar um giro de **180º** no vetor representativo dessa quantidade.

Pode-se dizer que **-1** é um operador algébrico que faz girar um vetor de 180º.

ATIVIDADE – 2

01. Considere na fig. 5 os vetores OA, OC, OB e OD, todos de mesmo módulo.

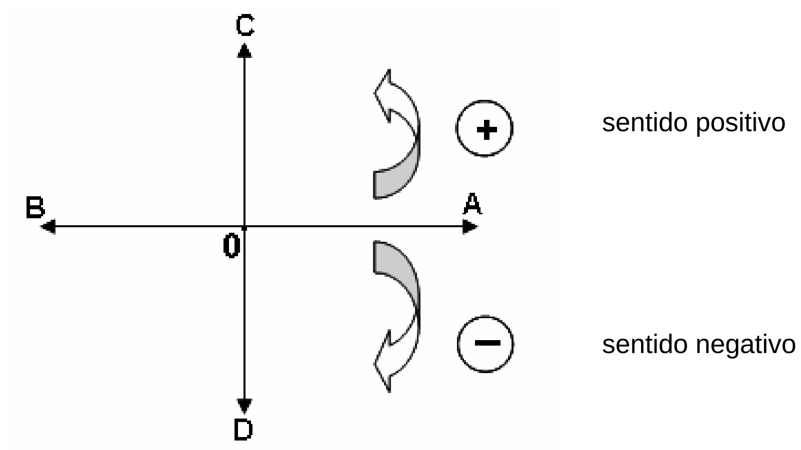


Figura 5: Representação geométrica de vetores de mesmo módulo localizados no plano complexo.
Fonte: Reis Neto, IX ENEM, pôster PO - 25488074368

Vamos considerar um fator ***i*** como um operador algébrico que faz um vetor girar 90º no sentido positivo (sentido anti-horário) e responder:

a) Como fazer o vetor OA girar 90º, levando-o a OC, efetuando a rotação no sentido positivo?

Consenso das respostas: devemos multiplicar o vetor AO *pelo operador algébrico* **i.**

b) Como fazer o vetor OC girar 90º, levando-o a OB, efetuando uma rotação no sentido positivo?

Consenso das respostas: devemos multiplicar o vetor OC *pelo operador algébrico* **i.**

c) Como fazer o vetor OA girar de 90°, levando-o a OC, e logo depois OC, girar de 90°, levando-o a OB?

Consenso das respostas: devemos multiplicar o vetor AO por $\mathbf{i}^2$ *ou por (-1).*

d) Qual o fator que devemos considerar como operador algébrico para fazer um vetor girar -90º, efetuando uma rotação no <u>sentido negativo</u>?

Consenso das respostas: **-i.**

e) Considere na fig.5 o vetor OA igual a 3. Então:

- fazendo OA girar 90º, encontramos OC igual a:
  Consenso das respostas: **3i;**
- fazendo OA girar -90º, encontramos OD igual a:
  Consenso das respostas: **-3i;**
- fazendo OA girar 90º, encontramos OC e fazendo OC girar 90º, encontramos OB igual a;
  Consenso das respostas: **3.i.i = 3.i^2**
- fazendo OA girar 180º, encontramos OB igual a:
  Consenso das respostas: **(-1) . 3 = -3;**
- fazendo OA girar -90º, encontramos OD e fazendo OD girar -90º, encontramos OB igual a:
  Consenso das respostas: **(-i) . (-i) . 3 = i^2 . 3 = -3.**

02. O fator **<u>i</u>**, cujo valor é ainda desconhecido, indica que temos um vetor vertical e o sinal de **<u>i</u>** indica a orientação do mesmo.

a) Qual é então o valor de **<u>i</u>**?

Consenso das respostas: $i^2 = -1 \quad ou \quad i = \sqrt{-1}$.

b) Representem num mesmo sistema, de eixos perpendiculares, os vetores:

Z_1 = OA, vetor com origem em (0,0) e extremidade em (3,0);

Z_2 = OB, vetor com origem em (0,0) e extremidade em (-3,0);

Z_3 = OC, vetor com origem em (0,0) e extremidade em (0,3);

Z_4 = OD, vetor com origem em (0,0) e extremidade em (0,-3).

Consenso das respostas: vetores com origem em (0,0), módulo 3 e extremidade sobre os eixos coordenados.

c) Os vetores Z_1 , Z_2 , Z_3 e Z_4 do item (b) possuem módulo (distância da extremidade à origem) igual a 3. Represente num mesmo sistema, de eixos perpendiculares, todos os vetores com origem em (0,0) e módulo 3.

Consenso das respostas: circunferência de centro na origem e raio 3.

CONSENSO DAS CONCLUSÕES:

O fator **i**, cujo valor é $\sqrt{-1}$, indica um vetor vertical Fig.: 6, e o sinal de **i** indica a orientação desse vetor.

Assim, 3**i** representa um vetor de módulo 3 orientado para cima e -3**i** representa um vetor de módulo 3 orientado para baixo. O fator **i** é considerado o operador algébrico que faz um vetor girar de 90º.

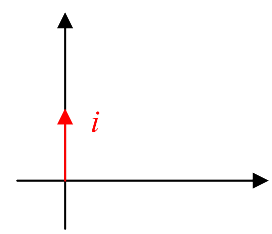


Figura 6: Vetor vertical ***i***: *unidade imaginária*

Esse método de iniciarmos o estudo dos números complexos com essa atividade investigativa sobre a unidade imaginária é pedagogicamente adequado à abordagem desse conteúdo, pois após a atividade verificamos que os alunos compreenderam o significado geométrico e conseguiram visualizar a unidade imaginária como sendo um número não real cujo valor é $i=\sqrt{-1}$, onde $i^2=-1$, o que facilitou o entendimento e a compreensão das operações com esse tipo de número.

Um ponto extremamente positivo nesse processo de ensino-aprendizagem foi a motivação e a entrega dos alunos durante as atividades propostas, pois, além de resolverem ou encaminharem as soluções das questões, no momento da socialização se tornaram professores, explicitando o que aprenderam e confirmando a premissa de que, se ensino, aprendo.

Até então, iniciar o estudo dos números complexos no ensino médio era feito de forma puramente algébrica, com objetivos relevantes, mas as atividades eram inadequadas e desmotivadoras. Não eram levados em conta os aspectos históricos, a abordagem geométrica e a aplicação desses números. Pelo que verificamos, a metodologia de transmissão do conhecimento supra mencionado vinha se dando através de aula expositiva, onde o professor ocupa o centro da cena e despeja conceitos sobre um aluno passivo, na qual a sua grande contribuição é a aplicação de tarefas rotineiras e repetitivas, que caracterizam o modelo denominado de “aula tradicional”, método este que Paulo Freire denominou de “concepção bancária de educação”. A conseqüência desastrosa dessa forma de condução do processo ensino-aprendizagem dos números complexos é a de que os envolvidos no processo (alunos e professores) começam a acreditar que a matemática representa um critério de avaliação da inteligência dos alunos e, por isso, não pode ser aprendida por qualquer pessoa.

Essa forma de mostrarmos que $i^2 = -1$, por meio dessa atividade investigativa, minimizou tais problemas e começou a mudar a ideia, entre alunos e professores, de que só algumas pessoas possuem inteligência suficiente para compreender matemática.

Além de essa atividade iniciar utilizando o conhecimento que o aluno já possui, procura aplicar isso de forma consequente, pois um conceito nunca vem sozinho, estando sempre relacionado a outros formando um campo conceitual.[25] Deve-se destacar também que toda vez que propomos uma situação com sentido e significado, cai por terra a máxima de que temos que colocar tudo relacionado com o dia a dia.

Começamos a atividade investigando como e de quantas maneiras é possível passar da quantidade (+d), representada pelo vetor OA, para quantidade (-d) representada pelo vetor OB.

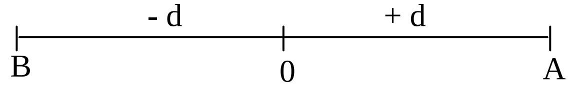


Figura 7: Vetores simétricos (opostos)
Fonte: Reis Neto, IX ENEM, pôster PO - 25488074368

[25] Uma situação que envolve vários conceitos (por mais simples que eles sejam). A teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnoud, afirma que a aquisição do conhecimento se dá por meio de situações e problemas já conhecidos. Assim, a teoria dos campos conceituais permite perceber a complexidade pertinente à cadeia de formação de conceitos. Pais (2001)

Foi interessante observar que todos chegaram à conclusão de que, para sair do vetor OA e chegar ao vetor OB, deveríamos fazer o vetor OA girar 180º em qualquer sentido ou multiplicar a quantidade (+d), representada por OA, por -1 obtendo a quantidade (-d), representada por OB.

Todos os grupos conseguiram *generalizar* que para darmos uma rotação de 180º em um vetor localizado sobre a reta real, com origem no ponto de abscissa O, basta multiplicá-lo por -1. Porém, no momento da socialização (apresentação dos resultados), perguntou-se como poderíamos dar uma rotação de 180º em um vetor do plano, com extremidade fora do eixo das abscissas e origem no ponto (0,0). Os alunos responderam e justificaram suas respostas, *generalizando* que para fazer uma rotação de 180º em um vetor do plano, pertencente ou não a um dos eixos coordenados e com origem no ponto (0, 0), precisamos apenas de multiplicar suas coordenadas por -1. Nessa atividade exploramos conceitos como rotação, reflexão e simetria.

A segunda parte de nossa investigação foi em relação à figura.

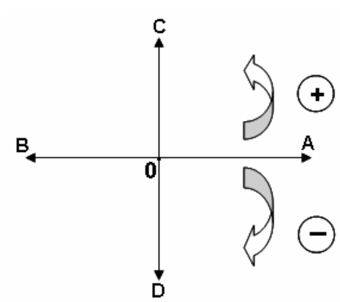


Figura 8: Representação geométrica de vetores de mesmo módulo localizados no plano complexo.
Fonte: Reis Neto, IX ENEM, pôster PO - 25488074368

Consideramos OA, OB, OC e OD, de mesmo módulo (mesmo comprimento), e as mesmas condições da questão anterior para os vetores OA e OB. Concluído, na etapa anterior, que (-1) é o operador algébrico que faz um vetor, com origem no ponto (0, 0), girar de 180º, considerou-se ***i*** (valor desconhecido) o operador algébrico que faz um vetor girar no sentido positivo, de 90º e perguntamos:

(1) Como fazer o vetor OA girar 90º, levando-o a OC, efetuando a rotação no <u>sentido positivo</u>?

(2) Como fazer o vetor OC girar 90º, levando-o a OB, efetuando a rotação no <u>sentido positivo</u>?

(3) Como fazer o vetor OA girar de 90º, levando-o a OC e, logo depois, OC girar 90º levando-o a OD, efetuando uma rotação no sentido positivo?

(4) Como fazer o vetor AO girar 180°, levando-o a OD, efetuando uma rotação no sentido positivo?

(5) Qual o valor do operador *i*?

Com relação às indagações (1), (2) e (3) não tivemos problemas, pois em nenhum momento precisamos do valor de *i*,

Em relação á questão (5), onde indagamos o valor de *i*, alguns alunos usaram a intuição e concluíram erradamente que *i* poderia assumir o valor de $-\frac{1}{2}$, justificando que 90º é a metade de 180º e $-\frac{1}{2}$ é a metade de -1. Esses alunos foram facilmente convencidos, pelos colegas, de que estavam errados, pois de acordo com as conclusões da primeira parte, quando multiplicamos um vetor por um número negativo diferente de -1, temos uma expansão ou contração, com rotação ou reflexão.

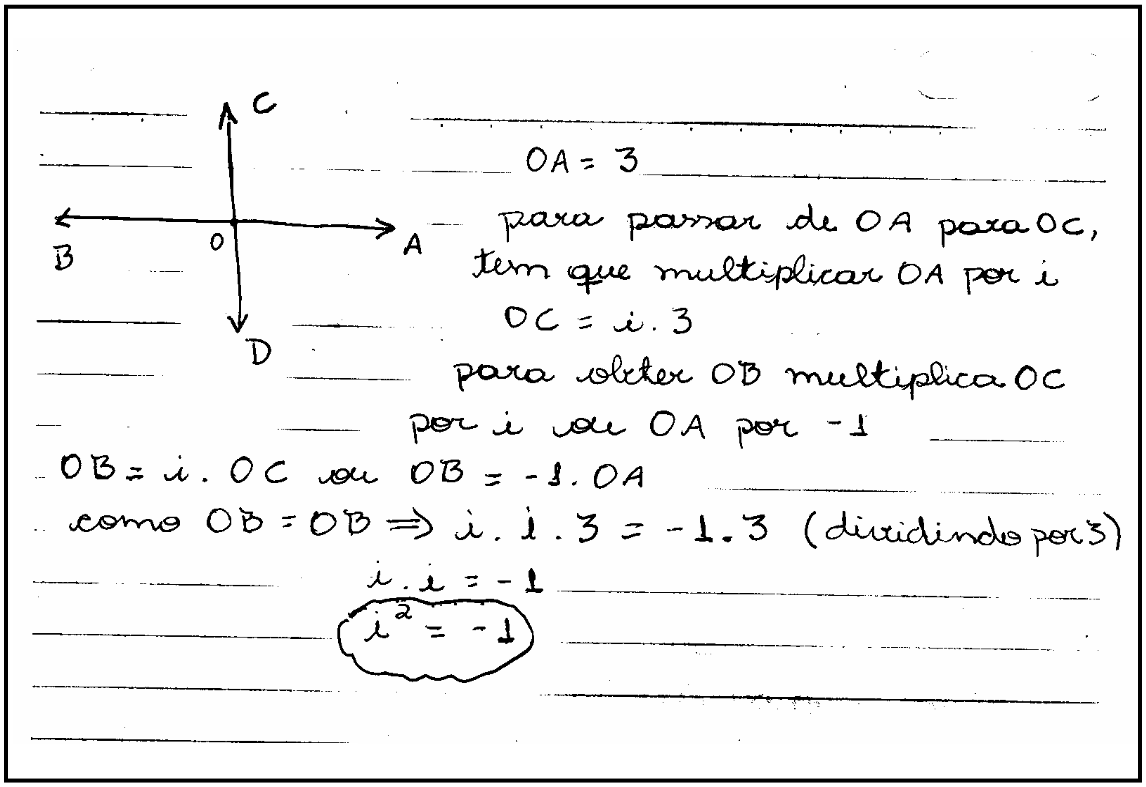
Para achar o valor de *i,* os alunos que acertaram a resposta levaram em conta os resultados obtidos nos itens (1), (2) , (3) e (4).

Dentre os procedimentos para encontrar o valor de ***i***, usados pelos alunos, destacamos dois:

(1º) Resposta dada por um dos grupos (grupo 2)

(2º) Resposta dada por outro grupo (grupo 5)

(1º) Resposta dada por um dos grupos (grupo 2)



$OA = 3$

para passar de OA para OC, tem que multiplicar OA por i

$OC = i.3$

para obter OB multiplica OC por i ou OA por -1

$OB = i.OC$ ou $OB = -1.OA$

como $OB = OB \Rightarrow i.i.3 = -1.3$ (dividindo por 3)

$i.i = -1$

$i^2 = -1$

Figura 9: Parte da atividade 2 feita por um dos grupos

(2º) Resposta dada por outro grupo (grupo 5)

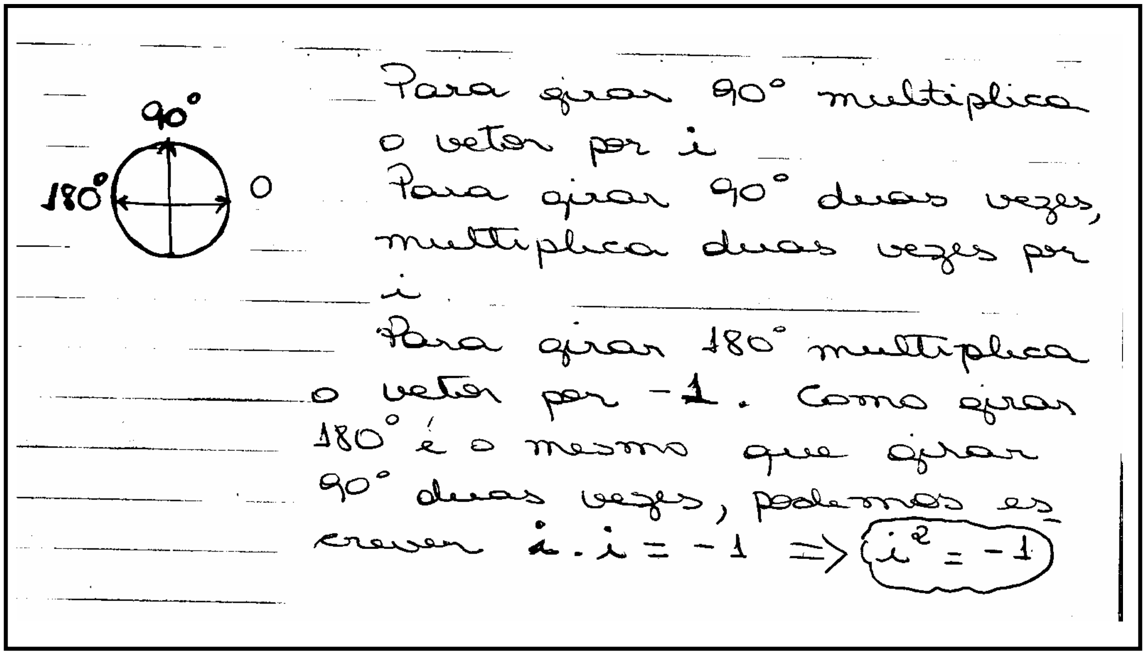


Figura 10: Parte da atividade 2 feita por um dos grupos

Essa forma de encontrar o resultado por caminhos diferentes, o que é salutar na metodologia de resolução de problemas, levou os alunos à conclusão de que a solução de um problema pode ser encontrada de diferentes formas, dependendo de como cada aluno está pensando naquele momento.

Chegar à conclusão de que $i^2 = -1$ não foi problema, pois até então os alunos só estavam se preocupando com a manipulação algébrica usada para realizar as operações.

Quando os grupos apresentaram seus resultados, afirmaram que o valor de i^2 era -1 e, em seguida, concluíram que *i* não existe em $\Re$, pois não existe número real que elevado ao quadrado seja igual a -1.

Até quase ao final da socialização da Atividade 2, o professor ainda não havia dado nome a este fator ***i***. No entanto, os alunos vinham discutindo e conjecturando sobre a que categoria deveria pertencer este tipo de número. Então, nesta altura da socialização o professor aproveitou para sistematizar o estudo, informando aos alunos que a esse número, $i = \sqrt{-1}$, a matemática atribui o nome de unidade imaginária dos números complexos. Ali estávamos dando o primeiro passo para organizar o aprendido e sistematizar uma introdução à teoria dos números complexos. Veja, por exemplo, que os próprios alunos já tinham, de certa forma, generalizado as potências de *i*, pois quando perguntamos como fazer para sair do vetor OA e chegar ao vetor OD, na Atividade 2, tivemos, entre as respostas, as seguintes:

(1ª) Resposta dada pelo grupo 2

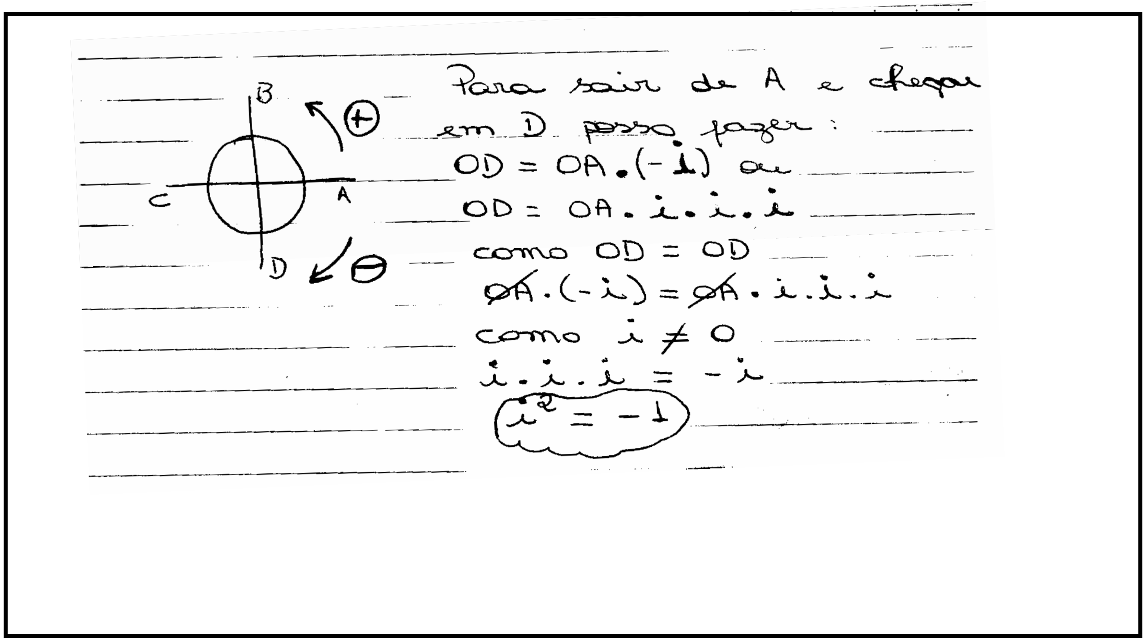


Figura 11: Parte da atividade 2 feita por um dos grupos

(2ª) Resposta dada pelo grupo 3

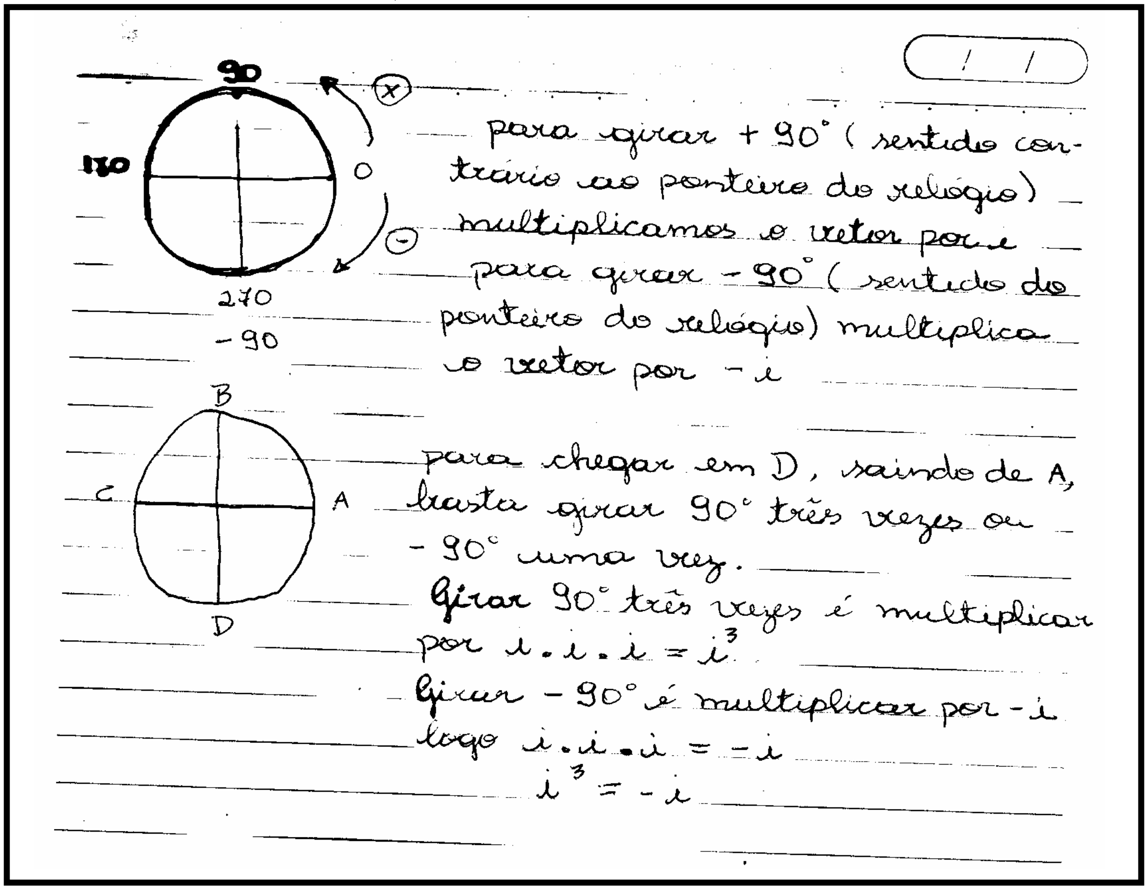


Figura 12: Parte da atividade 2 feita por um dos grupos

Nesse momento, aproveitamos para, além de comentar sobre sentido horário e anti-horário, mostrar que $i^3 = -i$ e generalizar que $i^n = i^r$, onde n é um número natural e r é o resto da divisão de n por 4.

Quando a socialização das atividades estava chegando ao fim, pois já tinha sido explorada uma série de conteúdos como: rotação, reflexão, módulo (distância à origem), direção e sentido de um vetor, apresenta-se um aluno de uma das turmas com a seguinte questão: professor, como pode i^2 ser igual a -1, se $i = \sqrt{-1}$? De imediato, foi-lhe lançada uma nova pergunta: você acha que i^2 vale quanto? Ele me respondeu:

pelo processo que acabamos de ver, i^2 vale -1, mas se considerarmos $i = \sqrt{-1}$,temos $i^2 = i.i = \sqrt{-1}.\ \sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1$ (*)

Quando ele fez essa colocação, eu escrevi, no quadro, a expressão (*) e perguntamos para a turma: qual a solução desse problema?

Nenhum dos alunos foi capaz de responder que a expressão (*) não estava correta, pois $\sqrt{x}.\sqrt{y}$ só é igual a $\sqrt{x.y}$ se x e y são reais não negativos, portanto $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)}$. Isso mostra que uma deficiência em conteúdos anteriores dificulta a aprendizagem de novos conteúdos. Quando o aluno encontra a expressão $i^2 = -1$, tem dificuldade de entender, em razão de ter sido falado, por professores de séries anteriores, que não existe número que elevado ao quadrado seja igual a – 1 (obstáculo metodológico).

Terminada a etapa de apresentação dos resultados, pedimos aos alunos que fizessem um comentário sobre esse tipo de aula, onde o professor é um orientador e coordenador da atividade, deixando por conta dos alunos a realização da mesma.

Sintetizando o que os alunos responderam, podemos citar o relato de:

Pedro (nome fictício)

> *"Eu não gosto muito de matemática, mas hoje a aula foi legal. Nem vi o tempo passar. Todas as aulas deviam ser assim dessa forma, de aula investigativa".* (Anexo A)

Maria (nome fictício)

> *"Nesse tipo de aula a gente aprende mais porque, quando não sabemos, pedimos ajuda para nossos colegas e, quando sabemos,procuramos ajudar o colega que não sabe"* (Anexo B)

O que é notado no depoimento dos alunos é que os professores não fazem experiências significativas e, quando tentam fazê-la, acabam transformando-a numa aula de exploração de exercícios. Para o aluno, introduzir os números complexos através de uma aula investigativa sobre o significado geométrico e o valor da unidade imaginária, onde ele teve a oportunidade de explicitar o que aprendeu sobre esse objeto de estudo foi mais produtivo, pois, mesmo sem perceber, ele construiu conceitos, formulou conjecturas, fez análise de dados (comparação), criou modelos e aprendeu a conhecê-los e fazê-los. Esse aspecto fica bem claro quando Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) afirmam que

> O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor. (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2005, P. 152)

Opinião dos professores, que também participaram da aplicação dessa nova metodologia, foi assim manifestada:

1.) Para vocês, qual a importância do conceito (significado) geométrico da unidade imaginária para o estudo de números complexos?

O conceito geométrico torna mais fácil o entendimento dos alunos, bem como a sua manipulação pelos mesmos. Passar dos reais para os complexos através do significado e valor da unidade imaginária permite ao aluno uma maior compreensão desses números.

2.) Vocês já ministraram aulas sobre números complexos sem conhecer essa metodologia de iniciar o estudo desses números com o significado geométrico da unidade imaginária? Hoje, conhecendo essa nova metodologia, como vocês procederiam? Por quê?

Sim, algumas vezes. Pena só conhecer agora tal metodologia, pois TODAS as vezes que ministrei tal conteúdo de forma algébrica e formal, sempre houve rejeição por parte dos alunos. Começar com o conceito geométrico fez com que os alunos entendessem a unidade imaginária, bem como aceitassem que existe um número, não real, que elevado ao quadrado é igual a **-1 .** Portanto, apresentar, logo no início, números complexos como vetores do plano (abordagem geométrica), facilita o entendimento dos alunos quanto à abstração e ao seu significado.

3.) *Os livros didáticos que vocês conhecem,* abordam de que forma a interpretação geométrica das operações com números complexos?

A totalidade dos livros que conheço faz menção geométrica ao número complexo somente usando o plano de Argand-Gauss, isso se dá na hora de usar a forma trigonométrica do número complexo.

4) Na maioria dos livros didáticos e apostilas (adotados pela maioria das escolas de São Luís - MA), o ensino de números complexos é feito de forma algébrica e formal, não levando em conta a abordagem geométrica e a aplicação desses números. Na opinião de vocês, essa forma de apresentar o conteúdo de números complexos facilita ou dificulta o trabalho do professor? E a aprendizagem dos alunos? Por quê?

Pode até ser mais fácil para o professor trabalhar, pois ao definir número complexo como sendo todo número da forma $a + bi$, com $a \in \Re$, $b \in \Re$ e $i^2 = -1$, basta a partir daí aplicar as leis da álgebra. Entretanto, para o aluno dificulta imensamente, pois desta forma o aluno decora e não consegue entender/aceitar o que é um número complexo.

5) Na opinião de vocês, geometria facilita a aprendizagem de números complexos? Por quê?

Sim, pois com a geometria o aluno consegue relacionar o conhecimento novo, no caso números complexos, com os seus conhecimentos geométricos, promovendo uma aprendizagem mais significativa.

6) Caso eu não tenha perguntado algo que vocês gostariam de relatar para contribuir, façam em suas considerações finais.

Considerações finais: achamos que muitos professores não sabem de fato o significado dos números complexos, pois eles reproduzem esse conteúdo através de fórmulas e algoritmos que devem ser memorizados e repetidos, chegando rapidamente à formalização sem muita reflexão, e, com isso, não conseguem entusiasmar seus alunos, virando uma “bola de neve”. Com certeza essa nova metodologia coloca mais ênfase na compreensão e não na memorização. Espero que a divulgação desta ideia contribua para a melhoria do ensino-aprendizagem dos números complexos.

Realizamos essa produtiva experiência para professores e alunos, mas percebemos e temos consciência de que nem todas as aulas podem ser dessa forma. Devemos, no entanto, fazer o possível para que nossas aulas despertem, cada vez mais, o espírito investigativo dos alunos. Nesta linha, e aproveitando a motivação dos alunos, uma série de 10 outras atividades foram preparadas e desenvolvidas em sala e/ou fora dela pelos alunos, no decorrer do semestre, dando seqüência aos demais tópicos do estudo de números complexos. Elas serão apresentadas a seguir.

4.2 ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO DE ESTUDO

Sequência didática, segundo Zabala, é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas, visando realizar determinados objetivos educacionais que têm princípio e fim conhecidos por professores e alunos.

Limitamo-nos a apresentar as atividades a seguir, fundamentadas nas teorias de Zabala (1988) e Ponte (2005), com os objetivos que pretendíamos alcançar com cada uma delas.

Essas atividades foram aplicadas em sala no decorrer da pesquisa com o objetivo de aprofundar e dar sequência ao estudo de números complexos.

Objetivos da Atividade 1:

- Mostrar que foram as equações do 3° grau e não as do 2°grau que motivaram o surgimento dos números complexos;
- Definir o número complexo e suas partes na forma binomial;
- Chamar a atenção que a propriedade $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ só é válida quando $\sqrt{ab}, \sqrt{a}\ e \sqrt{b}$ são números positivos ou zero e definir, se a é um número positivo, então $\sqrt{-a} = i\sqrt{-1}$.

Atividade 1

1) Considere a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$:

a) Mostre que 4 é solução da equação;

b) Divida $x^3 - 15x - 4 = 0$ por $x - 4$;

c) Encontre as outras duas soluções da equação e verifique que são números reais;

d) Aplique a fórmula $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ de Cardano-Tartaglia, usada para resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, e verifique que a solução fornecida pela fórmula é $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$;

e) Reflita sobre as soluções encontradas.

2) Responda:

a) O número $\sqrt{-4}$ pertence ao universo dos reais? Qual o valor de $\sqrt{-4}$,utilizando a definição de unidade imaginária?

b) O que são números complexos?

c) Todo número real é um número complexo?

d) Existe a raiz quadrada de um número negativo?Justifique.

e) O valor de (-**i**)^2 é o mesmo de **–i^2** ?

3) Observe o paradoxo publicado pela revista britânica “Mathematical Spectrum” (Vol. 14, 1981 / 82, pág.33)

$$\mathbf{-1} = \mathbf{i \cdot i} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = \mathbf{1}$$

Na sequência de igualdades acima, 4 são corretas, mas uma é falsa. Quais são as corretas e qual é a falsa? Justifique sua resposta.

Objetivos da Atividade 2:

- Trabalhar com potências de i e verificar que $i^n \in \{-1, 1, -i, i\}$, para ;$i \in N$
- Representar complexos no plano de Argand-Gauss;
- Definir módulo de um complexo;
- Destacar que existe uma relação biunívoca entre os números complexos e os pontos do plano;
- Mostrar o significado de $|z - w|$ como distância entre os pontos z e w no plano.

Atividade 2

1) Para responder às questões propostas, considere **i^2 = -1** e os seguintes quadrados:

i	$\mathbf{i^2}$	$\mathbf{i^3}$	$\mathbf{i^4}$
$\mathbf{i^5}$	$\mathbf{i^6}$	$\mathbf{i^7}$	$\mathbf{i^8}$
$\mathbf{i^9}$	$\mathbf{i^{10}}$	$\mathbf{i^{11}}$	$\mathbf{i^{12}}$
$\mathbf{i^{13}}$	$\mathbf{i^{14}}$	$\mathbf{i^{15}}$	$\mathbf{i^{16}}$

Quadrado1 – potências de **i**

i	**-1**	**-i**	**1**
i	**-1**	**-i**	**1**
i	**-1**	**-i**	**1**
i	**-1**	**-i**	**1**

Quadrado 2 – valores das potências **i** do quadrado 1

a) Calcule a soma de todos os números do quadrado 1;

b) Calcule a soma de todos os números do quadrado 2;

c) Calcule $\mathbf{i^{200}}$ **,** $\mathbf{i^{31}}$ **,** $\mathbf{i^{1001}}$ e $\mathbf{i^{502}}$;

d) Quais os possíveis valores de $\mathbf{i}^n$, com $n \in N$?

e) Calcule algumas potências de $(i+1)\ e\ (i-1)$. Quanto é $(1+i)^n\ e\ (1-i)^n$, $n \in N$?

2) No plano de Argand-Gauss, cada número complexo corresponde a um único ponto no plano e reciprocamente. Assim, o número complexo na forma ***a+bi*** também tem a forma ***(a,b)***, isto é, podemos interpretar geometricamente o número *z=a+bi* como um par ordenado *(a,b)* num sistema ortogonal.

a) Represente graficamente (plano de Argand-Gauss), no mesmo sistema de eixos, os seguintes pontos (números complexos). Encontre, para esses pontos, o comprimento do segmento de reta que une o ponto dado ao ponto (0,0). Esse comprimento é chamado ***módulo*** do número complexo z, $|z|$.

A (1,0)
B (0,1)
C (2,3)

b) Escreva na forma algébrica os números complexos do item anterior e calcule o módulo de cada um deles, usando a fórmula $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) Qual é, no plano complexo, o lugar geométrico dos números reais? E o lugar geométrico dos imaginários puros?

d) Qual é o lugar geométrico dos pontos do plano complexo tais que $|z-1+i| \leq 2$?

Objetivos da Atividade 3:

- Definir número complexo na forma de pares ordenados;
- Operar com complexos na forma algébrica (binomial) e na forma de pares ordenados;
- Mostrar que as operações na forma binomial obedecem às regras do cálculo algébrico, com as devidas transformações das potências de i;
- Mostrar que o conjunto dos números complexos tem a estrutura de um corpo.

Atividade 3

1) Considere os complexos *z=a+bi* ou *z=(a,b)* e *w=c+di* ou *w=(c,d):*

a) Defina igualdade e as operações de soma e multiplicação para os números complexos na forma algébrica e na forma de pares ordenados;

b) Defina números complexos na forma de pares ordenados;

c) Verifique que para este números valem as seguintes propriedades: associativa da adição e associativa da multiplicação, comutativa da adição e comutativa da multiplicação, existência de um elemento neutro para adição e outro elemento neutro para multiplicação, existência, para cada número de um elemento oposto;

d) Verifique também a existência, para cada elemento não nulo,de seu inverso, isto é, mostre que se *z=a+bi,* $z \neq 0$, existe um número complexo *w* (que você pode calcular) tal que *z.w=1.*

Objetivos da Atividade 4:

- Definir complexo unitário;
- Definir conjugado de um número complexo, mostrando a simetria em relação ao eixo real;
- Verificar que os complexos z e kz , para $k \in R$ e $z \neq 0$,estão sempre na mesma reta;

- Mostrar que a soma de números complexos se faz geometricamente com a lei do paralelogramo.

Atividade 4

1) Quando o módulo de um complexo é 1, este é chamado de ***complexo unitário***. Calcule o módulo dos seguintes números complexos e em seguida represente-os graficamente no mesmo sistema de eixos. Repare que eles ficam sobre o círculo de raio 1.

$$z_1 = i\ ,\ z_2 = 1,\ z_3 = -1,\ z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ z_5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Represente no plano de Argand-Gauss, usando o mesmo sistema de eixos, os seguintes números complexos:

$$z_1 = 2 + 5i\ ,\ z_2 = \overline{z_1}\ ,\ z_3 = -z_1\ ,\ z_4 = -z_2$$

3) Considere ***z = 2 +2i*** e represente no mesmo plano de Argand-Gauss os seguintes números complexos:

$$z_1 = 2z\ ,\ z_2 = 3z\ ,\quad z_3 = \frac{1}{2}z\ ,\quad z_4 = -2z\ ,\quad z_5 = -3z \quad \text{e} \quad z_6 = -\frac{1}{2}z$$

4) Sejam $z_1 = 2 + 5i$ e $z_2 = -1 + 3i$. Efetue as operações indicadas. Em seguida, represente cada um dos números envolvidos na operação, bem como seu resultado num mesmo sistema de eixos cartesianos ortogonais, contudo desenhando uma flecha com origem em (0,0) e extremidade no ponto em questão. O que pode ser dito a respeito de OA_1 , OA_2 , OA_3 em que A_1 e A_2 são as extremidades de z_1 e z_2 , e A_3 é a extremidade do resultado da operação efetuada?

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $-z_1 + z_2$

d) $-z_1 - z_2$

Objetivos da Atividade 5:

- Apresentar o significado geométrico da multiplicação e divisão de números complexos;
- Chamar a atenção para o fato de que a multiplicação por um complexo unitário corresponde a efetuar uma rotação no plano em torno da origem;
- Mostrar que o complexo iz se obtém de z por uma rotação positiva de 90°.

Atividade 5

1) Sejam $z_1 = 2+5i$ e $z_2 = -1+3i$, $z_3 = z_1.z_2$, $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$. Represente esses números num mesmo sistema de eixos cartesianos ortogonais, contudo desenhando uma flecha com origem em (0,0) e extremidade no ponto em questão. Meça com um transferidor o ângulo das flechas que representam z_1 e z_2. Em seguida, faça o mesmo com as flechas que representam z_3 e z_4. O que você observa?

2) Sejam $z_1 = 2+5i$ e $z_2 = -1+3i$. Calcule $|z_1|$ e $|z_2|$. Meça o comprimento das flechas associadas a z_1, z_2, z_3, z_4 que você desenhou no exercício anterior. O que você observa?

3) Refaça as questões 1) e 2) para $z_2 = i$.

Objetivos da Atividade 6:

- Escrever um complexo na forma polar (trigonométrica);
- Operar com complexos na forma polar;
- Perceber que a representação polar não é única uma vez que cosseno e seno são periódicos;
- Observar que os números $r_1(\cos\theta + i\,sen\theta)$ e $r_2(\cos\theta + i\,sen\theta)$ estão sobre uma mesma reta que passa pela origem e é definida pelo ângulo θ, se $r \neq 0$.

Atividade 6

1) Como a cada número complexo está associado um ponto do plano, podemos definir o número complexo ***a+bi*** pelo ângulo θ, formado pelo eixo das abscissas e o segmento que liga o ponto *(a,b)* à origem, e pela distância r do ponto à origem. Assim, $a+bi = r(\cos\theta + i sen\theta)$ em que $r = |z|$.

a) Escreva na forma polar ou trigonométrica os seguintes números complexos:
$z_1 = 2+2i$ $z_2 = -i$ $z_3 = 1+i\sqrt{3}$ $z_4 = 1 - i$ $z_5 = -3$

b) Represente no plano os números da atividade anterior indicando *r* e θ.

c) Passe para forma algébrica os seguintes números complexos:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{2} + i\,sen\frac{5\pi}{2}$$

$$z_3 = \cos\frac{-3\pi}{2} + i\,sen\frac{-3\pi}{2}$$

d) Represente graficamente os complexos num mesmo sistema de eixos.

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4})$$

$$z_3 = -1(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4})$$

2) Escreva na forma polar os números complexos:

a) $(\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}).(\cos\pi + i\,sen\pi)$

b) $3(\cos\frac{\pi}{5} + i\,sen\frac{\pi}{5}).2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,sen\frac{5\pi}{4})$

c) $r_1(\cos\theta_1 + i\,sen\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\,sen\theta_2)$

Objetivos da Atividade 7:

- Apresentar a Fórmula de De Moivre;
- Aplicar a Fórmula de De Moivre na dedução das fórmulas para o cálculo de $\cos(n\theta)$ e $sen(n\theta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ e $sen(\alpha+\beta)$.

Atividade 7

1) Efetue:

a) $(\cos\theta + i\,sen\theta)^2$

b) $(\cos\theta + i\,sen\theta)^3$

c) $(\cos\theta + i\,sen\theta)^4$

d) $(\cos\theta + i\,sen\theta)^n$

e) $[r\ (\cos\theta + i\,sen\theta)]^2$

f) $[r\ (\cos\theta + i\,sen\theta)]^n$

2) Usando binômio de Newton, desenvolva $(\cos x + i\,senx)^3$, iguale a $\cos 3x + i\,sen 3x$ e encontre as fórmula para $\cos 3x$ e $sen 3x$.

3) Sabendo que $(\cos\alpha + i\,sen\alpha).(\cos\beta + i\,sen\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\,sen(\alpha+\beta)$, demonstre as fórmulas do cosseno da soma e do seno da soma de dois ângulos.

Objetivos das Atividade 8 e 9:

- Determinar as raízes de números complexos usando a fórmula da potência;
- Fazer a interpretação geométrica, apontando que as raízes de ordem n de um complexo dividem a circunferência em n partes iguais;
- Destacar que as raízes z_k e z_{k+n} são sempre iguais;
- Mostrar que para equação $z^n = w$, as raízes são, normalmente, representadas por $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$

Atividade 8

1) Se $w = r(\cos\theta + i\,sen\theta)$, as soluções da equação $z^n = w$ são números complexos da forma $z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$ para todo $k \in Z$. Aparentemente encontramos infinitas soluções já que há infinitos valores para *k*. Mas isto não é verdade: há soluções repetidas. Vamos verificar isto considerando $w = 16$ e respondendo:

a) Escreva $w = 16$ na forma trigonométrica;

b) Encontre usando a fórmula dada, todas as soluções da equação $z^3 = w$;

c) Represente geometricamente as soluções $z_0, z_1, z_2, z_3, z_{-1}, z_{-2}, z_{-4}$, $z_5\, e\, z_{-5}$;

d) Quantas z_k distintas existem?

Atividade 9

1) Trace um círculo de raio 1 com origem na origem de um sistema de eixos cartesianos ortogonais. Calcule as raízes quartas de 1 e represente-as graficamente nesse sistema. Considerando que tais pontos são vértices de um polígono, que tipo de polígono você obteve?

2) Trace um círculo de raio 1 com origem na origem de um sistema de eixos cartesianos ortogonais. Calcule as raízes cúbicas de 1 e represente-as graficamente nesse sistema. Considerando que tais pontos são vértices de um triângulo, que tipo de triângulo você obteve?

3) É possível generalizar o que você observou nos dois exercícios anteriores para as raízes n-ésimas da unidade e um polígono regular de n lados?
Justifique.

Objetivo da Atividade 10:

- Mostrar a aplicação dos números complexos em problemas reais.

Atividade 10

1) Determinar o vértice C do triângulo equilátero ABC onde são dados os vértices A=(0,0) e B=(4,3) (duas soluções).

2) ABCD é um quadrado. Dados A=(1,2) e B=(3,5) determine C e D (duas soluções).

3) (UNB) - Um velho manuscrito descrevia a localização de um tesouro enterrado: "Há somente duas árvores, A e B em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira e B uma jabuticabeira. A partir do centro k do canteiro, ande em linha reta até a mangueira medindo os seus passos. Vire 90 graus à esquerda e percorra a mesma distância medida até o ponto C. Volte ao canteiro. Ande medindo a distância em linha reta até a jabuticabeira. Vire 90 graus a direita e percorra a mesma distância medida até o ponto D. O tesouro está no ponto médio do segmento CD."
Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de A=(5,3) e B=(8,2).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Beatriz D'Ambrosio (1993, p.35), ao discutir as características desejadas para um professor de matemática no século XXI, mostra a "necessidade de os novos professores compreenderem a Matemática como uma disciplina de investigação".

Devemos mudar a visão de que matemática é só algoritmos, regras e fórmulas acompanhadas de memorização e procedimentos repetitivos. Fica evidente que isto está ocorrendo em razão do professor considerar a matemática como uma área do conhecimento pronta e acabada, onde os alunos envolvidos nesse processo podem até adquirir um determinado tipo de conhecimento, mas não desenvolvem a capacidade de pensar. Mais ainda: os problemas são formulados com uma linguagem específica do assunto abordado, sem mostrar conexões com outras partes da matemática, dando a impressão de que a matemática é um fim em si mesma. No aluno mais questionador é natural que esta forma de apresentar o conteúdo desperte as indagações: para que serve isso? Por que tenho que estudar esse conteúdo?

Para ficar livre desses questionamentos e mudar a ideia de que a matemática é um fim em si mesma, o professor deve preparar bem suas aulas. Com uma aula bem preparada e um bom planejamento, pode-se incluir os alunos com mais dificuldades de evoluírem suas habilidades cognitivas, tendo como consequência uma aprendizagem significativa, evitando resultados indesejáveis.

> Na aprendizagem significativa o aluno precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitraria e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. A aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma estratégia correspondente para assim proceder. (AUSUBEL apud MOREIRA, 2006,p.14.)

Essa metodologia, aliada à metodologia de resolução de problemas, oferece ao aluno confiança, levando-o a raciocinar. De acordo com Polya (1995), se o aluno conseguir resolver o problema que lhe é apresentado, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas.

É notório que educar pela pesquisa leva o aluno a progredir no saber pensar. À medida que melhora sua argumentação, é estimulado à busca de fundamentação mais consciente, logo aprende a elaborar questionamentos com mais propriedade e a sedimentar sua formação em bases de conhecimento mais sólidas.

O aparecimento dos números complexos resolveu uma série de problemas que, apenas com os números reais, não podiam ser resolvidos. Essa forma de introduzir os números complexos através de um problema que não pode ser resolvido no universo dos reais é apresentada em alguns livros didáticos de forma errada, usando a resolução de uma equação do 2º grau, com discriminante negativo, para mostrar o aparecimento da unidade imaginária dos números complexos, dando a impressão de que o número $i=\sqrt{-1}$ surgiu da inspiração de alguns matemáticos da época. Na proposta deste trabalho, usamos uma atividade investigativa, com um problema auxiliar[26], para encontrar o valor da unidade imaginária, contribuindo, como já vimos, para que o conceito desse novo número não fique destituída de significado como acontece quando são ensinados de forma tradicional (abordagem puramente algébrica), pois o conceito de números complexos só pode ser compreendido se o conceito da unidade imaginária tiver sido entendido. Seguindo a orientação dos PCNs que na área da matemática mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como um dos pontos de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula, é que apresentamos a unidade imaginária sem começar com algoritmos, para só depois formalizar e mostrar as propriedades e aplicações dos números complexos. Essa nova proposta de ensinar esses números permite que os alunos possam encarar os números complexos não apenas como símbolos matemáticos, mas como números mesmo, com os quais se

[26] Problema auxiliar, segundo Polya, é aquele que tratamos, não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro – o nosso problema original.

chega a respostas de problemas reais como achar os dois vértices restantes de um quadrado quando conhecemos dois vértices consecutivos do mesmo.

Embora seja um assunto de grandes aplicações para o desenvolvimento de várias áreas do conhecimento e principalmente da matemática, a maioria dos livros didáticos faz uma abordagem puramente algébrica, deixando o aluno pensar que esses números não possuem aplicação alguma.

Assim, devemos questionar a prioridade que os livros dão para essa abordagem. Acreditamos que para uma aprendizagem significativa é necessário apresentarmos, inicialmente, os números complexos como pontos ou vetores do plano (abordagem geométrica), fazendo a conexão com problemas envolvendo rotações, homotetia e reflexão. Só assim, podemos mostrar a utilidade do ensino dos números complexos, principalmente no ensino médio.

Para os professores envolvidos nesse processo, essa abordagem produz modificações na aprendizagem e, portanto, facilita o ensino dos números complexos, bem como seu significado e compreensão.

REFERÊNCIAS

AMORIM, J. G.; SEIMETZ, R.; SCHMITT, T. **Trigonometria e números complexos**. Brasília: Universidade de Brasília, 2006.

ANTAR NETO, Aref et al. **Noções de matemática**: números complexos, polinômios e equações algébricas. v7. São Paulo: Moderna, 1982.

APOSTOL, Tom M. **Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à álgebra linear.** Tradução Antônio Ribeiro Gomes. Barcelona: Reverté, 1994.

BAUMGART, John K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**, tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy. **Matemática uma nova abordagem**, v.3. E.M. São Paulo: FTD, 2005

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PNCEM)**. Orientações complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEMT. 2006

BRASIL.**Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino médio) - Orientações educacionais complementares (PCN+). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC/SEMT, 2002.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 2ª ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria números complexos.** Notas históricas: CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CARNEIRO, J. P.; WANDERLEY, A. **Os números complexos e a geometria dinâmica.** Disponível em <http:/www.ensino.univates.br/~chart/Materiais/complexo cabri pdf> Acesso em: 03/mar/2007.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos números complexos. **Revista do professor de matemática**. São Paulo, n. 55, p. 15-25, jul. 2004.

CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. **História dos Números Complexos.** USP, 2001

CHURCHILL, Ruel Vance. **Variáveis complexas e suas aplicações**. São Paulo: McGraww – Hill do Brasil, 1975.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio.** Pro-Posições, Campinas, v.4, p. 35-41, mar. 1993.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Facetas do diamante: ensaios sobre a educação matemática e história da matemática**. Rio Claro: SBHM, 2000, p. 241-271.

DANTE, L. R. **Matemática contexto & aplicações**, v.3.E.M. São Paulo: Ática, 2007

DANTE, L. R. **Matemática**, PNLEM-2009, 2010, 2011. São Paulo: Ática, 2005.

DAVIS, Philip J; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**, Lisboa: Gradiva, 1995.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**, tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Unicamp, 1997.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

GUIMARÃES, Caio dos Santos. **Matemática em nível ime/ita.** Números complexos e polinômios. São José dos Campos: Vestseller, 2008.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**, v6. São Paulo: Atual, 2005.

JÚDICE, Edson Durão; ANDRADE, J. L. Mazoni. **Números complexos e cônicas**. Minas Gerais: Ouro Preto, 1983.

LAUDARES, João Bosco. **Matemática Para Escolas Técnicas Industriais e Centros de Educação Tecnológica: números complexos**. Belo Horizonte: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 1993.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** Tradução Cyro de Carvalho Patarra. Harbra, 2000.

LIMA, Elon Lages, et al. **A matemática do Ensino Médio**, v1. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

LIMA, Elon Lages, et al. **A matemática do Ensino Médio**, v3. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LIMA, Elon Lages, et al. **Exame de textos: Análise de livros de matemática para o ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MILIES, César Polcino. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo IME-USP, n. 24, p. 5-15, jul. 1993.

MOREIRA, Marco Antônio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Universidade de Brasília, 2006.

OLIVEIRA, Edmundo Capelas; RODRIGUES Jr, Waldir Alves. **Funções analíticas com aplicações**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática, v.3.** São Paulo: Moderna, 1995.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede.** São Paulo: FTD, 2000.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P., Brocado J., Oliveira, H. **Investigações na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

POOLE, David. **Álgebra linear**. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2004.

REIS NETO, Raimundo Martins. Repensando o ensino-aprendizagem dos números complexos através de uma aula investigativa: Valor e sentido geométrico da unidade imagimária. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais IX ENEM**.

ROBINSON, Marília Nascimento, et al. **Temas para o ensino médio**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2004, 1 CD.

STEWART, James. **Cálculo, v.1.** São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2006.

THOMAS, George B. **Cálculo**, v1. São Paulo: Pearson, 2002.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1988.

APÊNDICE

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA E GEOMÉTRICA

A passagem de um sistema numérico ao seguinte se faz mediante a introdução de novos números, de maneira que no novo sistema se tornem resolúveis problemas que não tinham solução no antigo sistema. Assim, cada um dos conjuntos numéricos N, Z, Q e R pode ser considerado subconjunto próprio do seguinte. Neste capítulo definiremos um campo numérico mais amplo, o dos *números complexos*, que designaremos por C e veremos que o conjunto R dos reais poderá ser considerado um subconjunto do conjunto C.

O quadrado $a^2 = a.a$ de um número real a nunca é negativo. Em outras palavras, no conjunto dos números reais não é possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. Dante (2005) afirma que os números reais precisam ser elementos desse conjunto C, e as operações de adição e multiplicação feitas sobre os números reais no conjunto C devem ser as mesmas já conhecidas. Note que, se isto não fosse observado, o conjunto R não seria um subconjunto de C.

Uma maneira de definir esse conjunto foi proposta por Gauss em 1837 e reforçada por Hamilton em 1833, segundo a qual o conjunto dos números complexos é o conjunto de pares ordenados de números reais, em que são definidos: a igualdade, e as operações de adição e multiplicação.

1 OPERAÇÕES COM PARES ORDENADOS

Sendo $\Re$ o conjunto dos números reais, que constitui a reta numérica. O produto cartesiano $\Re$ x $\Re$ = $\Re^2$ = {(a,b)| a $\in$ $\Re$ e b $\in$ $\Re$} é conjunto de todos os pares ordenados (a,b) em que *a* e *b* são números reais.

Vamos admitir a noção de par ordenado como um conceito intuitivo. A cada elemento *a* e a cada elemento *b* está associado um terceiro elemento, indicado por (a,b), denominado par ordenado e de tal modo que:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Quando *somamos* dois pares ordenados, dados, obtemos um novo par ordenado cujos primeiro e segundo elementos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos elementos dos pares dados. (Iezzi.2005)

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

Chamamos produto de dois pares ordenados, dados, a um novo par ordenado cujo primeiro elemento é a diferença entre o produto dos primeiros elementos e o produto dos segundos elementos dos pares dados e cujo segundo elemento é a soma dos produtos do primeiro elemento de cada par dado pelo segundo elemento do outro. (Iezzi, 2005)

$$(a,b) \,.\, (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Exemplos: $(1,2)\ .\ (3,4) = (1.3 - 2.4\,, 1.4 + 2.3) = (-5, 10)$

$$(2,0)\ .\ (3,0) = (2.3 - 0.0\,, 2.0 + 0.3) = (6, 0)$$

2 O CONJUNTO C DOS NÚMEROS COMPLEXOS

É o conjunto C = {(a,b) | a $\in \Re$ e b $\in \Re$} formado por todos os pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade e as operações de adição e multiplicação. Representaremos pela letra z, o elemento genérico (a,b) desse conjunto.

$$z \in C \Leftrightarrow z = (a,b), \text{ sendo } a, b \in \Re$$

Os números reais *a* e *b* são chamados, respectivamente, de parte real e parte imaginária de (a,b) sendo indicados por $\Re e(z) = a$ e $Im(z) = b$. O par (a,0) é identificado como o número real *a*, (a,0) = a, permitindo configurar os números reais como um subconjunto do conjunto dos números complexos. O par (0,1) será chamado unidade imaginária e indicado por *i*, (0,1) = *i*. A criação dessa unidade *i* deu origem a esse novo campo numérico, chamado complexo, que generaliza o campo real. Em particular, temos (0,0) = 0. (Apostol, 1994).

$$z = (a,b) = 0 \text{ se, e somente se, } a = 0 \text{ e } b = 0.$$

De acordo com as operações de adição e multiplicação, dois números complexos z = (a,b) e w = (c,d) têm a soma e o produto definidos como:

$$z + w = (a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

$$z \cdot w = (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

De acordo com essa definição, se z = (0, 1), tem-se:

$i = (0, 1)$ e $i^2 = (0, 1). (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$

Como (-1, 0) se identifica com o número real -1, temos $i^2 = -1$.

De acordo com a definição, tem-se:

$(0;1)^2 = (0;1).(0;1)$

$i^2 = (0 – 1; 0 + 0)$

$i^2 = (– 1; 0)$

$i^2 = – 1$

É evidente que *i* não é número real, pois sabemos que não existe número real que elevado ao quadrado seja igual a -1(número negativo). Se existisse tal número, não seria necessária a criação do campo numérico dos complexos.

Uma vez que $i^2 = – 1$, podemos pensar *i* como a raiz quadrada de -1. Note, porém, que também temos $(-i)^2 = i^2 = -1$ e, portanto, -*i* é uma raiz quadrada de -1. Dizemos e *i* é a *raiz quadrada de principal* de -1 e escrevemos $\sqrt{-1} = i$. Em geral, se *c* for um número positivo, escrevemos $\sqrt{-c} = i\sqrt{c}$. Stewart (2006).

Exemplo: resolva a equação $z^2 - 2z + 2 = 0$

Solução:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

3 FORMA BINOMIAL OU ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Sabemos que os complexos da forma (a, 0) e (0, b), a, b $\in \Re$, representam, respectivamente, os eixos real e imaginário, sendo (1,0) = 1 a unidade real e (0,1) = i a unidade imaginária. Como então, representar um complexo fora desses dois eixos? Para responder a esta questão vamos considerar um complexo genérico $z = (a,b)$, onde a, b $\in \Re$ e escrevê-lo como uma soma de dois complexos, um situado no eixo real e outro sobre o eixo imaginário.

z= (a, b) = (a, 0) + (0, b)

z= a. (1, 0) + b.(0, 1)

z= a . 1 + b . i

z = a + bi

Essa expressão z = a + bi, $\{a, b\} \subset \Re$ é denominada *forma algébrica* ou *forma binomial* do número complexo (a, b).

O número complexo (a, b) = *a* + b*i*, $\{a, b\} \subset \Re$ aparece como a soma de *a* unidades reais e *b* unidades imaginárias, em que *a* e *b* são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do complexo. Lima et al. (1997) e Caraça (1998), afirmam que quando *b* = 0, o complexo *a* + *bi* se reduz ao número real a; quando *a* = 0, o complexo se reduz a *bi* e é chamado *imaginário puro*.

Todo complexo da forma (0,b) está no eixo imaginário (eixo y). O número (0, b) sempre pode ser escrito da forma (0, b) = b(0, 1) = bi. Se a e b são ambos diferentes de zero, o complexo, que não é real, é escrito como a soma de um número real e um número imaginário puro. Para Laudares (1993), com a definição do conjunto dos números complexos, o conjunto dos reais fica contido em C, isto é:

$\Re$ = conjunto dos números reais

I = Imaginário puro

C = conjunto dos números complexos

$\Re \cap I = \{0 + 0i\} = \{0\}$

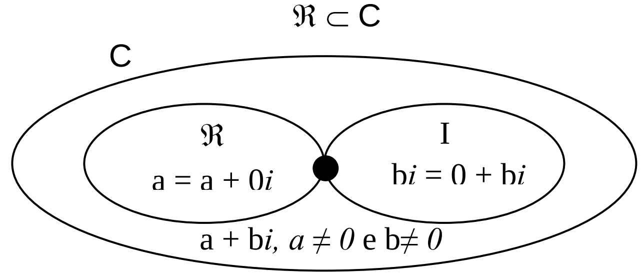


Figura 13: imersão de $\Re$ em C.
Fonte: Laudares, 1993, p.10.

4 REPRESENTAÇÃO DE UM COMPLEXO NO PLANO

4.1 Plano de Argand – Gauss

Representaremos os elementos de C num sistema ortogonal de eixos semelhante ao plano cartesiano chamado plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Essa representação é feita associando os números complexos a pontos do plano cartesiano.

Consideremos o conjunto C dos números complexos e o conjunto R^2, isto é, o produto cartesiano $\Re \times \Re$.

Seja a função $f : C \rightarrow \Re^2$ definida por $f(a + bi) = (a, b)$.

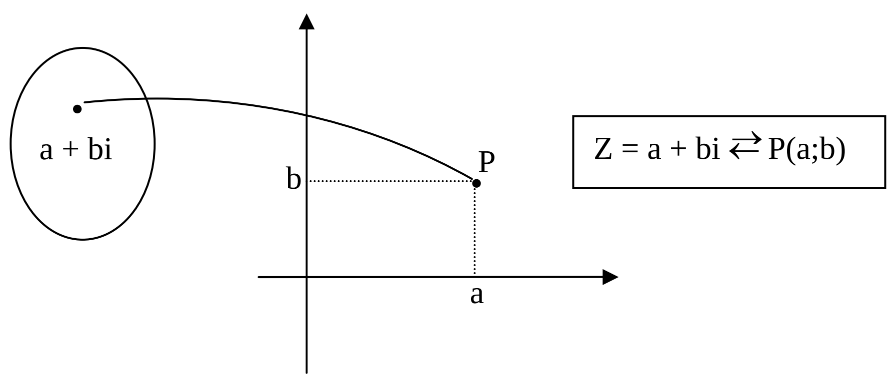


Figura 14: Representação geométrica $f : C \rightarrow \Re^2$, definida por $f(a + bi) = (a, b)$.

Fonte: Paiva, 1995, p. 285.

A função f é injetora, pois dados $a + bi \neq c + di$ temos:

$a + bi \neq c + di \Leftrightarrow a \neq c$ ou $b \neq d \therefore a + bi \neq c + di \Leftrightarrow (a,b) \neq (c, d)$

A função f também é sobrejetora, pois para todo (a, b) $\in \Re^2$ existe o número complexo a + bi tal que f(a + bi) = (a, b).

Ao número complexo Z = a + bi associamos o ponto P(a,b).

A *imagem* de um número complexo Z = a + bi é o ponto P(a,b) que o representa, e o *afixo* de um ponto P(a,b) é o complexo por ele representado. Lima et al (1998).

Essa função é bijetora (sobrejetora e injetora), isto é, a cada número complexo está associado um único ponto do plano R^2 e cada ponto do plano R^2 está associado um único complexo. Tal associação entre número complexo e ponto do plano generaliza a correspondência biunívoca entre número real e ponto da reta.

Sendo assim, o plano complexo e o plano cartesiano da geometria analítica são iguais? Sob o ponto de vista da álgebra existem algumas diferenças. Na geometria analítica fazemos uso da soma de vetores e da multiplicação destes por um número real (escalar). Enquanto, nas operações com complexos, podemos fazer soma e multiplicação de complexos (vetores), sendo, esta última operação, uma rotação seguida de homotetia, portanto, não é o produto interno (escalar) nem produto vetorial do cálculo vetorial. O ponto (a, b) é chamado imagem do número complexo z = a + bi. As imagens de z e seu *conjugado* $\bar{z}$, definido por $\bar{z} = a - bi$,são *simétricas* em relação ao eixo x e as imagens de z e seu oposto –z apresentam simetria em relação à origem.

Quando um número complexo é real, tem sua imagem no eixo *x*; quando é imaginário puro, tem sua imagem no eixo *y*. Por essa razão esses eixos, no estudo dos números complexos, são chamados, respectivamente, *eixo real e eixo imaginário*.

4.2 Módulo de um número complexo

Decorre da definição que podemos pensar no número complexo z = a+bi como o ponto (a,b), do plano cujas coordenadas são a e b, ou ainda como vetor (segmento orientado) de origem na origem O do sistema de coordenadas e extremidade (a,b), isto é, o complexo z é representado pelo vetor $\overrightarrow{OZ}$, conforme esclarecem Carmo, Morgado e Wagner (2005) .

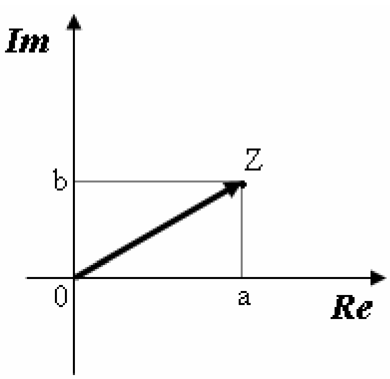


Figura 15: Representação vetorial do complexo Z

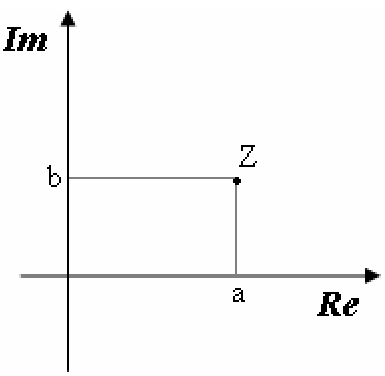


Figura 16: Representação cartesiana do complexo Z

Como cada complexo z pode ser visto como um vetor posição, podemos calcular o seu *módulo*. Geometricamente chamaremos de módulo de z e representamos por |z| ou ρ (rô) a distância da imagem de z=a+bi à origem O. Com isso, podemos afirmar que $|z| \geq 0$ qualquer que seja z ∈ C e que |z| = 0 ⇔ z = 0.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, de hipotenusa ρ, temos: $\rho^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore \quad \rho = \sqrt{a^b + b^2}$ ou $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observe que a definição de módulo de um número complexo é coerente com a definição de módulo de números reais.

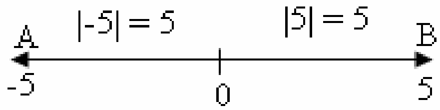


Figura 17: Interpretação geométrica da definição de módulo na reta numérica

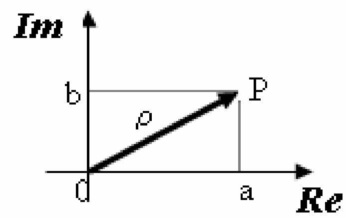


Figura 18: Representação geométrica do módulo de um vetor

$|5| = d_{A,0} = 5$ e $|5| = d_{B,0} = 5$ são, respectivamente, as distâncias dos pontos A=(5,0) e B=(-5,0) à origem O(0,0).

As imagens de números complexos de mesmo módulo ρ ($\rho \neq 0$) formam uma circunferência de centro na origem e raio ρ.

$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ A equação da circunferência é $x^2 + y^2 = \rho^2$.

De um modo geral, um número complexo qualquer terá seu módulo maior, menor ou igual a um, caso seu afixo esteja, respectivamente, no exterior, no interior ou sobre a circunferência de centro na origem e raio unitário. Os números complexos que possuem módulo igual a 1 (um) são chamados complexos unitários.

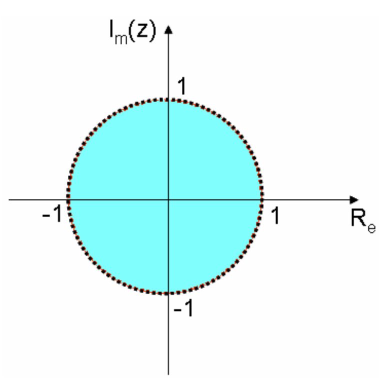


Figura 19: Representação geométrica de todos os complexos que possuem módulo menor que 1
$\{z \in C \,/\, |z| < 1\}$

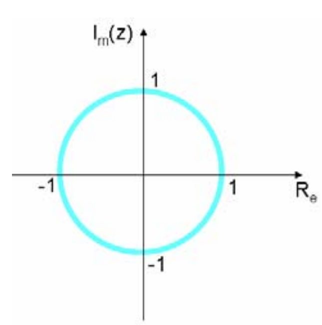


Figura 20: Representação geométrica de todos os complexos que possuem módulo igual a 1
$\{z \in C \,/\, |z| = 1\}$

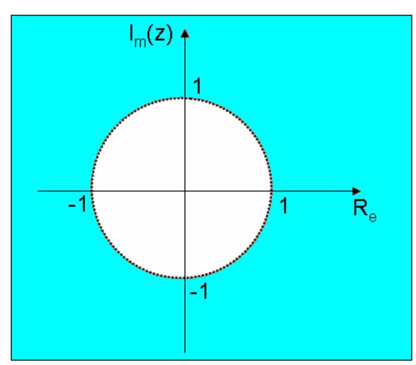


Figura 21: Representação geométrica de todos os complexos que possuem módulo maior que 1
$\{z \in C \,/\, |z| > 1\}$

4.3 Propriedades do módulo de um número complexo

Teorema

Se z = a + bi é um número complexo qualquer, então:

(I) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, pois:

Seja z = a + bi. Então $\bar{z}$ = a – bi.

Mas $z.\bar{z} = (a + bi) . (a - bi) = a^2 + b^2$ e $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Portanto, $|z|^2 = z.\bar{z}$

(II) Se $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, pois:

Pela propriedade (I), $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Portanto, $z = \dfrac{|z|^2}{\bar{z}}$ e daí $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

(III) $|z| = |\bar{z}|$, pois:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|$$

(IV) $R_e(z) \leq | R_e(z) | \leq |z|$, pois:

$$\left.\begin{array}{l} a \geq 0 \Rightarrow a = |a| \\ a < 0 \Rightarrow a < |a| \end{array}\right\} \quad a \leq |a| \qquad (*)$$

Por outro lado:

$$a^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |a| \leq |z| \qquad (**)$$

De (*) e (* *), temos:

$$a \leq |a| \leq |z| \quad \Rightarrow \quad R_e(z) \leq | R_e(z) | \leq |z|$$

(V) $Im(z) \leq | Im(z) | \leq |z|$

Para mostrarmos que b $\leq$ |b| $\leq$ |z|, basta procedermos de forma análoga ao item (IV).

4.4 Módulos do produto, do quociente e da soma de números complexos

Teorema

Sejam z e w dois números complexos, então:

(I) |z . w| = |z| . |w|, pois:

$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot (\overline{zw})$, propriedade (I) do item 5.3

$|z \cdot w|^2 = zw\bar{z}\,\bar{w} = z\,\bar{z}\,w\bar{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 \quad \therefore$

$|z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$, extraindo a raiz quadrada e lembrando que o módulo não pode ser negativo, temos:

$|z\,w| = |z| \cdot |w|$

(II) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, com w = x + yi e w $\neq$ 0, pois:

Inicialmente temos:

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{x+iy}\right| = \left|\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}\right| = \left|\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right| = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{|w|}$$

Portanto,

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z.\frac{1}{w}\right| = |z|.\left|\frac{1}{w}\right| = |z|.\frac{1}{|w|} = \frac{|z|}{|w|}$$

(III) $|z|^n = |z^n|$, para todo n e se $z \neq 0$, ou para $n > 0$ se $z = 0$, pois:

$$|z^n|^2 = z^n \cdot \overline{z^n} = z^n\,(\bar{z})^n = (z^n \cdot \bar{z})^n = (|z|^2)^n \therefore |z|^n = |z^n|$$

(IV) Desigualdade triangular: $|z + w| \leq |z| + |w|$

Sejam z e w dois números complexos quaisquer. Então a origem e os pontos z e z+w são vértices de um triângulo[27].

Para provar a desigualdade triangular,

vamos mostrar que $\left| z + w \right|^2 = (|z| + |w|)^2$

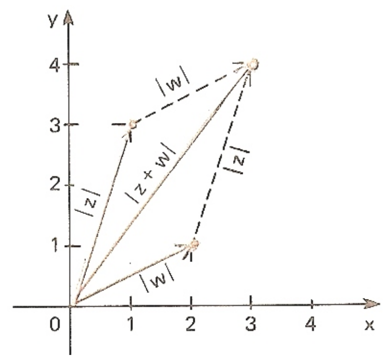


Figura 22: Desigualdade do triângulo
Fonte: Antar Neto, et al. 1992, p. 45

(1) $|z + w|^2 = (z + w) \cdot (\overline{z + w})$

$= (z + w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$

$= z\,(\bar{z} + \bar{w}) \cdot w(\bar{z} + \bar{w})$

$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$

$= |z|^2 + 2\,R_e\,(zw) + |w|^2$

(2) $(|z + w|)^2 = |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w| + |w|^2$

Comparando as igualdades (1) e (2) podemos ver que

$|z + w|^2 - (|z| + |w|)^2 = 2\,R_e\,(zw) - 2|z| \cdot |w|$

$= 2\,[R_e\,(zw) - |z \cdot w|]$

Como $R_e\,(zw) - |zw| \leq 0$ (propriedade IV do item - 3.4.3)

Temos $2[R_e\,(zw) - |zw|] \leq 0$

[27] Que pode degenerar, se z e w se encontrarem na mesma reta que passa pela origem.

Portanto,

$|z + w|^2 - (|z| + |w|)^2 \leq 0$

$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, extraindo a raiz quadrada e lembrando que o módulo não pode ser negativo, concluímos que: $|z + w| \leq |z| + |w|$.

5 ADIÇÃO DE COMPLEXOS: COMPONDO TRANSLAÇÕES...

Já definimos a *adição* de dois complexos z = (a,b) e w = (c,d) como z + w = (a;b) + (c; d) = (a + c; b + d). Esta adição, definida dessa forma, representa a composição de duas *translações* no plano: uma na direção horizontal e outra na vertical. Adicionar um número complexo a outro é compor as translações que um define sobre o outro.

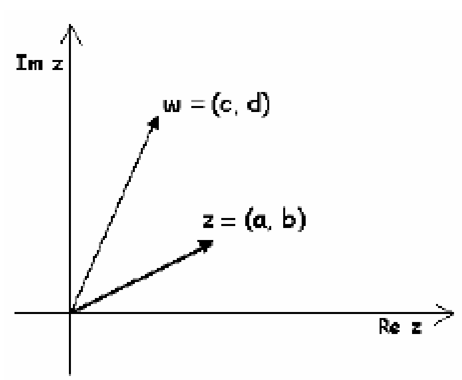


Figura 23: Representação gráfica de dois complexos

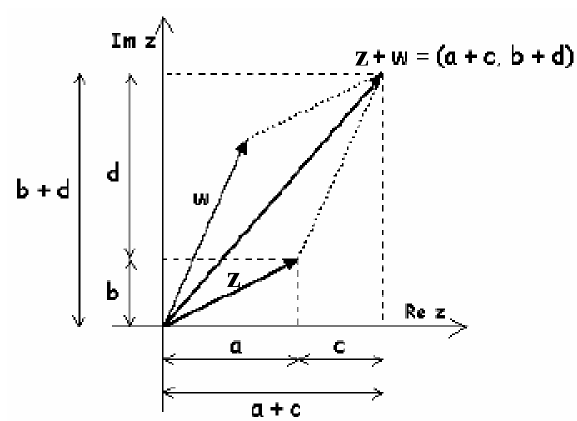


Figura 24: Interpretação gráfica da soma de dois complexos.
Fonte: Iezzi, 2005, p. 30

Ao somarmos z + w, transladamos o afixo de z, c unidade (s) na direção horizontal para direita (+c) e d unidade (s) na direção vertical para cima (+d), formando o paralelogramo, de vértices, O = (0,0), z = (a,b), z + w = (a + c, b + d) e w (c,d).

A soma é representada, geometricamente, pelo vetor diagonal de imagem no ponto (a + c, b + d).

A operação de adição em complexos verifica as seguintes *propriedades*: *associativa*, *comutativa*, *existência do elemento neutro* e *existência do elemento simétrico*.

Faremos, agora, a demonstração de cada uma dessas propriedades.

1ª *associativa*: $(z + w) + v = z + (w + v), \forall \{z, w, v\} \subset C$

Vamos considerar z = (a, b), w = (c , d), v = (e,f) e usar a associativa da adição de números reais.

$$\begin{aligned}(z + w) + v &= [(a,b) + (c,d)] + (e,f)\\ &= (a + c; b + d) + (e, f)\\ &= [(a + c) + e, (b + d) + f]\\ &= [a + (c + e), b + (d + f)]\\ &= (a, b) + (c + e; d + f)]\\ &= (a, b) + [(c,d) + (e,f)]\\ &= z+ (w + v)\end{aligned}$$

2ª *comutativa*: $z + w = w + z, \forall \{z, w\} \subset C$

Vamos considerar z = (a,b), w = (c, d) e fazer a demonstração com base na comutatividade da adição de números reais.

$$\begin{aligned}z + w &= (a, b) + (c, d)\\ &= (a + c, b + d)\\ &= (c + a, d + b)\end{aligned}$$

$= (c, d) + (a, b) = w + z$

3ª *elemento neutro*: $\exists\, e_a \in C \mid z + e_a = z,\ \forall\, z \in C$

Vamos considerar $z = (a, b)$ e $e_a = (x,y)$ tal que

$z + e_a = z$

$(a, b) + (x, y) = (a,b)$

$$(a + x;\ b + y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto, existe $e_a = (0,0)$ que chamaremos elemento neutro para adição (zero complexo), que somado a qualquer z dá como resultado o próprio z.

4ª *elemento simétrico*: $\forall\, z \in C, \exists\, S \in C \mid z + S = e_a$

Vamos considerar $z = (a,b)$ e provaremos que existe $s=(x,y)$ tal que $z + S = e_a$

$z + S = e_a$

$$(a, b) + (x, y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$$

Portanto, para cada $z = (a,b)$ existe um complexo $S = (-a, -b) = -(a, b) = -z$, chamado simétrico ou inverso aditivo de z, que somado ao complexo $z= (a, b)$ dá como resultado $e_a = (0, 0)$, elemento neutro.

Com isso, podemos definir a *subtração* ou *diferença* entre dois complexos, $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, como sendo a soma de z com o simétrico aditivo de w (ou oposto).

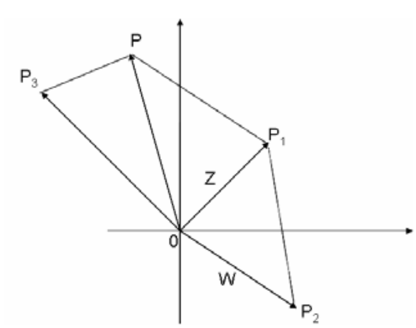


Figura 25: Representação geométrica da diferença de dois vetores

$$z - w = z + (-w)$$
$$= (a,b) + (-c; -d)$$
$$= (a + (-c) ; b + (-d))$$
$$= (a - c; b - d)$$

Os complexos z e w são representados pelos vetores OP_1 e OP_2, respectivamente. O número complexo z – w = z + (-w) será representado pelo vetor OP, diferença de OP_1 e OP_2.

Convém notar que o polígono POP_2P_1 é um paralelogramo e que a distância OP = distância P_1 P_2, ou seja, $|z - w|$ = distância P_1 P_2.

O módulo da diferença de dois números complexos representa a distância entre suas imagens.

6. MULTIPLICAÇÃO DE UM COMPLEXO POR UM ESCALAR: DILATANDO OU CONTRAINDO?

Sendo $k \in \Re$ um escalar e z = (a, b) um complexo qualquer, definimos *k*z como sendo: $k \cdot z = k\,(a; b) = (ka; kb)$.

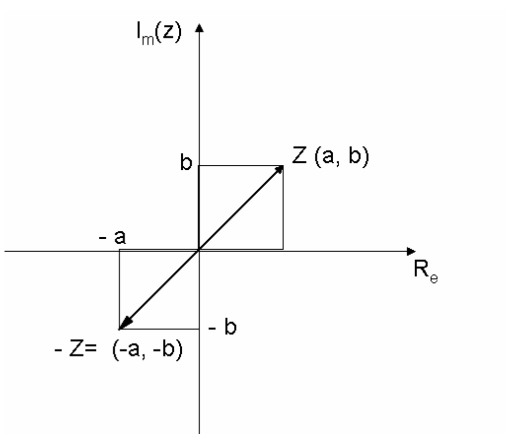


Figura 26: Representação geométrica de dois complexos simétricos

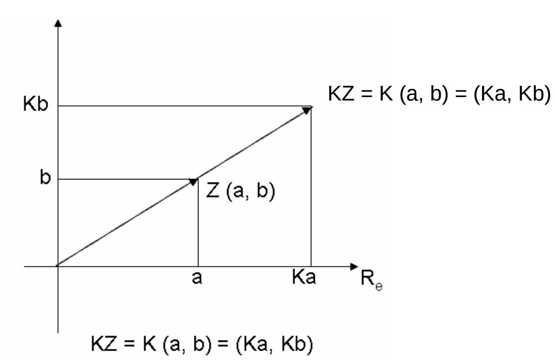


Figura 27: Representação geométrica do produto de um escalar por um complexo

Notemos que, quando multiplicamos um real (escalar) por um complexo, o novo complexo obtido é uma dilatação ou contração do anterior. Ou seja, essa multiplicação representa uma operação linear de expansão ou uma contração uniforme no plano, bem como composição de expansão ou contração com rotação ou reflexão.

De um modo geral temos $|z| \geq 1 \Rightarrow |kz| \geq |z|$ e $|k| \leq 1 \Rightarrow |kz| \leq z$, isto é:

- ❖ $k > 1$ $\rightarrow$ *k . z* mantém a mesma direção e sentido, tem módulo maior (expansão no plano);
- ❖ $0 < k < 1 \rightarrow$ *k . z* mantém a mesma direção e sentido, tem módulo menor (contração no plano);
- ❖ $-1 < k < 0 \rightarrow$ *k . z* mantém a direção, inverte o sentido e tem módulo menor (contração com reflexão em torno da origem ou rotação de 180º);
- ❖ $k < -1$ $\rightarrow$ *k z* mantém a direção, inverte o sentido e tem módulo maior (expansão com reflexão em torno da origem ou rotação de 180°);
- ❖ $k = 1$ $\rightarrow$ *k z* = z mantém a mesma direção, sentido e módulo;
- ❖ $k = -1$ $\rightarrow$ *k z* = - z é simétrico de Z, mantém a direção e o módulo, invertendo o sentido (reflexão em torno da origem ou rotação de 180º).

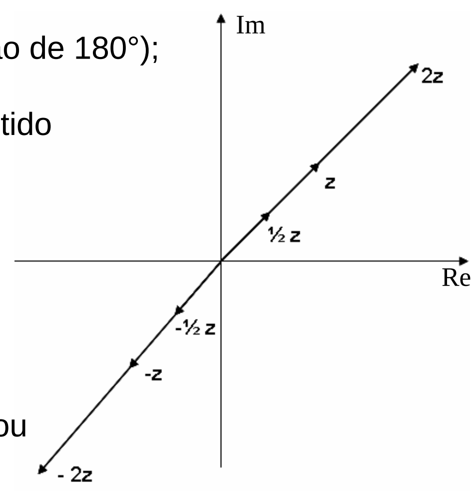


Figura 28: Representação geométrica do produto de um escalar por um complexo

7 MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS

A *multiplicação* de dois complexos $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ foi definida $z \cdot w = (a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$. Essa operação verifica as seguintes propriedades: *associativa*, *comutativa*, *existência do elemento neutro*, *existência do elemento inverso e* distributiva.

Vamos, agora, demonstrar cada uma dessas propriedades.

1ª *associativa*: $(z \cdot w)\, v = z\, (w\, v)$, $\forall\ \{z, w, v\} \subset C$

Considerando $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ e $V = (e,f)$, temos:

$$
\begin{aligned}
(z\ \ w)\, v &= [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) \\
&= (ac - bd\ ;\ ad + bc) \cdot (e, f) \\
&= [(ac - bd)\, e - (ad + bc) \cdot f;\ (ac - bd)\, f + (ad + bc)\, e] \\
&= [ace - bde - adf - bef;\ acf - bdf + ade + bce] \\
&= [a\, (ce - df) - b\, (de + cf)\ ;\ a(de + cf) + b\, (ce - df)] \\
&= (a, b) \cdot (ce - df\ ;\ cf + de) \\
&= (a, b)\, [(c, d) \cdot (e, f)] \\
&= z \cdot (w.\ v)
\end{aligned}
$$

2ª *comutatividade: $z \cdot w = w \cdot z$,* $\forall\ \{z, w\} \subset C$

Vamos considerar $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$

$$
\begin{aligned}
z \cdot w &= (a, b) \cdot (c, d) \\
&= (ac - bd;\ ad + bc) \\
&= (ca - db;\ cb + da) \\
&= (c, d) \cdot (a, b) \\
&= w \cdot z
\end{aligned}
$$

3ª *existência do elemento neutro*: $\exists\, e_m \in C \mid z \,.\, e_m = z\ \forall\, z \in C$.

Fazendo z = (a, b), provaremos que existe e_m = (x, y) tal que z . e_m = z

$$z \,.\, e_m = z \Leftrightarrow (a, b) \,.\, (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow (ax - by;\ ay + bx) = (a, b) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto, existe e_m = (1,0), chamado *elemento neutro* para multiplicação, que multiplicado por qualquer complexo z dá como resultado o próprio z.

4ª *existência do elemento inverso*: Para cada complexo z, z ≠ 0, existe um único complexo u = z^{-1} ,chamado inverso multiplicativo de z, que multiplicado por z dá como resultado I_m = (1,0).

Para demonstrar a propriedade vamos fazer z = (a, b), com a ≠ 0 ou b ≠ 0 e u = (x, y). Vamos mostrar que z . u = e_m.

$$z \,.\, u = e_m$$

$$(a, b) \,.\, (x, y) = (1,0) \Leftrightarrow (ax - by;\ ay + bx) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema encontramos:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

portanto, u = z^{-1} = $\dfrac{a}{a^2 + b^2} \quad , \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$

5ª *distributiva do produto em relação à soma*:

$z\,(w + v) = zw + zv\ ,\ \forall\, \{z, w, v\} \subset C$

Em C, a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição. Vamos demonstrar essa propriedade fazendo z = (a, b), w = (c, d) e v=(e, f).

z (w + v) = (a, b) . [(c,d) + (e,f)]

= (a, b) . (c + e, d +f)

= [(a(c + e) – b(d + f); a(d + f) + b (c + e)]

= [ac + ae – bd – bf ; ad + af + bc + be]

= [(ac – bd) + (ae – bf) ; (ad + bc) + (af + be)]

= (ac – bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be)

= (a,b) . (c,d) + (a,b) . (e,f)

= z . w + zv

De forma análoga podemos mostrar que (w + v) z = wz + vz.

Como consequência das propriedades de adição e multiplicação de números complexos, temos as *leis de cancelamento* para adição e multiplicação.

z + w = z + v, então W = V lei do cancelamento para a adição.

z . w = z . v e z $\neq$ (0,0), então w = v lei do cancelamento para a multiplicação.

Se z = (0,0), o produto z . w = w . z = (0,0) para qualquer w $\in$ C, isto é, para que o produto de dois complexos seja nulo, é necessário e suficiente que um dos fatores seja nulo.

Decorre da propriedade da existência do elemento inverso da multiplicação que, dados os complexos z = (a, b) $\neq$ (0,0) e w = (c, d), o *quociente* de w por z é único e igual ao produto de w pelo inverso de z, pois:

$$\frac{w}{z} = w.z^{-1}$$

$$\frac{w}{z} = \frac{(c,d)}{(a,b)} = w.z^{-1} = (c,d).\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$$\frac{w}{z} = w.z^{-1} = \left(\frac{ca}{a^2+b^2} + \frac{db}{a^2+b^2}; \frac{da}{a^2+b^2} - \frac{cb}{a^2+b^2} \right)$$

$$\frac{w}{z} = w.z^{-1} = \left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2}; \frac{ad-bc}{a^2+b^2} \right)$$

8 FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR DE UM NÚMERO COMPLEXO

8.1 Forma trigonométrica

Definiremos a forma *trigonométrica* ou *polar* de um número complexo por meio de seu módulo e do ângulo medido a partir do semi-eixo real positivo, no sentido anti-horário até $\overrightarrow{OZ}$. A esse ângulo chamaremos *argumento* do número complexo z e designaremos por **arg(z)**.

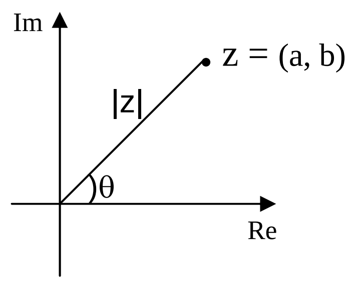


Figura 29: Forma polar de um número complexo

Analisando as projeções de z, concluímos que

$a = |z|\cos\theta$ e $b = |z| sen\theta$, com $|z| = \rho =$ raio do círculo e $\theta = \arg(z)$.

Logo, $z=(a,b)=\left(|z|\cos\theta\ ,\ |z|sen\theta\right)\Rightarrow z=|z|(\cos\theta, sen\theta)$, que é a forma trigonométrica de z. Podemos introduzir o número *i* e escrever $z=\left(|z|\cos\theta\ ,\ |z|\ sen\theta\right)\Rightarrow z=|z|\cos\theta+i\ |z|sen\theta\Rightarrow z=|z|(\cos\theta+i\,sen\theta)$. Então, além das formas cartesiana (a,b) e algébrica ou binomial ($z=a+bi$), um número complexo pode ser escrito sob a forma polar $z=|z|.(\cos\theta+i.sen\theta)$. Essa forma polar pode ser apresentada de modo simplificado na notação cis, isto é, |z| (cos θ + *i* sen θ) = |z| cis θ. Repare que escrevendo cis θ, mas lemos "cis de θ" como "cosseno θ mais *i* seno θ".

Se |z| = 1, z é unitário e consequentemente (a,b) = (cos θ, sen θ). Se z≠0 é um número complexo qualquer, $\frac{z}{|z|}$ define um *número complexo unitário na direção do complexo z*. Ou seja, $\frac{z}{|z|}$ tem sua imagem numa circunferência de centro na origem e raio unitário.

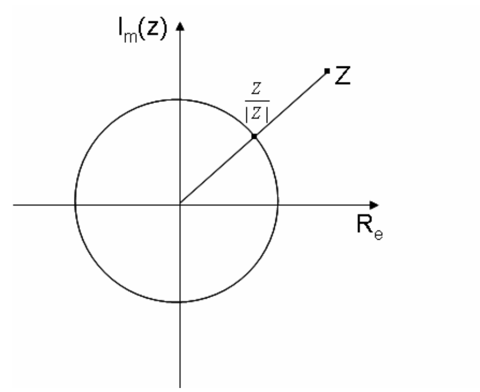


Figura 30: Representação geométrica de um complexo unitário na direção do complexo Z

z = |z| (cos θ, sen θ) ⇒ $\frac{z}{|z|}$ = (cos θ, sen θ).

Para mostrarmos que $\frac{z}{|z|}$, como z ≠ (0,0), é um unitário, basta mostrarmos que $\left|\frac{z}{|z|}\right|=1$

Seja z = (a, b) com a ≠ 0 ou b ≠ 0

|z| = $\sqrt{a^2+b^2}$ (número real)

$\frac{z}{|z|}$ = $\frac{1}{|z|}$. (a,b) = $\left(\frac{a}{|z|},\frac{b}{|z|}\right)$

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}} = 1$$

Observe que o complexo (cos θ; sen θ) tem módulo 1, (ρ = 1) e portanto é unitário.

(a,b) = (cos θ, sen θ) $\rightarrow$ ρ= $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\cos^2\theta + sen^2\theta} = \sqrt{1} \Rightarrow$ ρ = 1

8.2 Argumento de um número complexo

O número complexo não nulo z = a + bi, no sistema polar, pode ser escrito da forma z = ρcosθ + ρ.i.senθ = ρ(cosθ + i senθ), onde ρ é o comprimento (distância) de z = (a, b) até a origem O(0, 0).

Ao escrever o complexo z na forma algébrica estamos nos referindo ao ponto P dado pelas suas coordenadas cartesianas, enquanto ao escrever o complexo z na forma trigonométrica estamos nos referindo ao ponto P dado pelas suas coordenadas polares, ou seja:

z = a + bi $\Leftrightarrow$ P = (a, b)

z = ρ(cosθ + isenθ) $\Leftrightarrow$ P = (ρ,θ)

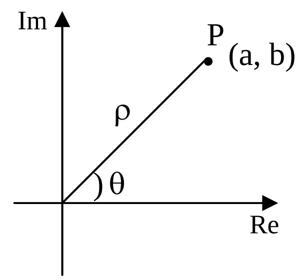


Figura 31: Representação geométrica da forma trigonométrica (polar) dos números complexos

O número real ρ = $\sqrt{a^2+b^2}$ é chamado módulo do número complexo z e o ângulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, argumento de z.

Esse ângulo θ ,chamado argumento de z, é denotado por arg(z). Quando $z \neq 0$, os valores de θ são determinados a partir das equações a = ρ cos θ e b= ρ.sen θ ou pela relação $tg\theta = \frac{b}{a}$ e do quadrante em que o ponto z se encontra. Portanto, se $z \neq 0$, existe um único valor de θ, em radianos, no intervalo $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, onde θ_0 é um número qualquer. Quando $z = 0$, $|z| = 0$, e θ é arbitrário. Churchill (1975).

Para Apostol (1994), devemos dizer um argumento em vez de o argumento, porque para um dado ponto (a,b) o ângulo θ é determinado a menos de múltiplos de 2π. Por vezes é conveniente atribuirmos um único argumento a um número complexo. Para conseguirmos isto devemos restringir θ a tomar valores num intervalo semiaberto de medida 2π. Os intervalos $[0,2\pi)$ e $(-\pi,\pi]$ são frequentemente utilizados com esta finalidade. Nós utilizaremos o intervalo $[0,2\pi)$ e iremos nos referir a θ como sendo o *argumento principal* do complexo z = a+bi.

Quando $0 \leq \theta < 2\pi$, denotamos o ângulo θ por Arg(z). O argumento de um número complexo z é arg(z) = Arg(z) + 2kπ, sendo k um número inteiro. Por essa razão, o argumento não é único. Geralmente usamos o símbolo A $\equiv$ B(mod 2π) para expressar que A = B + 2kπ para um certo inteiro k. Com essa notação podemos escrever que arg(z) $\equiv$ θ(mod 2π), ou arg (z)= Arg(z) (mod 2π).

Assim, o argumento de um complexo tem infinitas representações (ângulos congruentes). O ângulo que pertence à primeira volta positiva é o argumento principal de z (0º $\leq \theta <$ 360º ou $0 \leq \theta < 2\pi$). Note que o número complexo z não se altera se na forma trigonométrica, z = ρ(cosθ + isenθ), substituirmos θ por θ + 2kπ, sendo k um número inteiro positivo, negativo ou nulo.

Podemos escrever: z = ρ[cos(θ + 2kπ) + isen(θ + 2kπ)] e dizer que θ + 2kπ são argumentos de z.

8.3 Determinando um lugar geométrico

Graças às noções de imagem, módulo e argumento, os números complexos podem ser tratados geometricamente, o que facilita a compreensão.

Dado um complexo w = a + bi e r uma constante positiva, como obter, no plano complexo, o lugar geométrico dos complexos z tais que | z – w | = r ?.

Geometricamente, $|z|$ é comprimento do vetor z; é a distância entre z e a origem. Consequentemente, $|z-w|$ é a distância entre os pontos z e w, isto é, $|z-w|$ é a distância das imagens dos números complexos z e w. Suponhamos que z = (x, y) seja a imagem do número complexo genérico z = a + bi, que satisfaça a condição do lugar geométrico. Temos, portanto,

$$
\begin{aligned}
|z - w| = r &\Rightarrow |x + yi - (a + bi)| = r \\
&\Rightarrow |x + yi - a + bi| = r \\
&\Rightarrow |(x - a) + i(y - b)| = r \\
&\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \\
&\Rightarrow (x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2
\end{aligned}
$$

Logo, o lugar geométrico procurado é a circunferência de centro em (a,b), imagem de w, e raio r. Dessa forma, podemos responder as seguintes interrogações: Qual é o lugar geométrico dos complexos z tais que $|z - w| < r$? E lugar geométrico dos complexos tais que $|z - w| > r$?

Assim, as condições $|z-i| = 3$, $|z-i| < 3$ e $|z-i| > 3$, por exemplo, implicam:

(I) $|z-i|=3 \Rightarrow$ z está sobre a circunferência de raio 3 e centro (0,1);

(II) $|z-i|<3 \Rightarrow$ z está no interior da circunferência de raio 3 e centro (0,1);

(III) $|z-i|>3 \Rightarrow$ z está no exterior da circunferência de raio 3 e centro (0,1).

A expressão $|z|>|w|$ significa que o ponto z está à maior distância da origem do que o ponto w. A noção elementar de ordem, “maior do que” ou “menor do que”, se aplica a valores absolutos, uma vez que eles são números reais. Entretanto, tal noção não se aplica, em geral, a números complexos, isto é, *uma afirmação do tipo* $z_1>z_2$ *ou* $z_1<z_2$ *não tem significado a menos que* z_1 *e* z_2 *sejam ambos reais.* Churchill (1975).

Embora se possa dizer que o subconjunto dos complexos do tipo $C_r=\{(a,b)\in C\,;\, b=0\}$ seja ordenado, pois são identificados aos números reais, nada se pode dizer sobre a ordem de C $(C = conjunto\,dos\,números\,complexos)$, isto é, não é definida em C a relação de ordem.

9 MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

9.1 Multiplicação de complexos unitários: compondo rotações

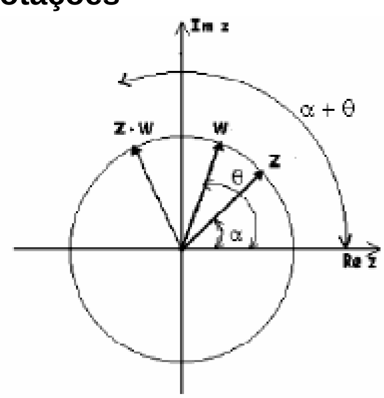


Figura 32: Multiplicação de dois complexos unitários na forma polar

Sejam z = (cos α, sen α) e w = (cos θ, sen θ) dois complexos unitários quaisquer.

A multiplicação de z por w é definida por:

z . w =((cos (α + θ), sen (α + θ))

$z \,.\, w = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \,.\, (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$z. \,.\, w = (\cos\alpha \cos\theta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta;\ \cos\alpha \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\alpha \cos\theta)$

$z \,.w = (\cos(\alpha + \theta)\ ;\ \operatorname{sen}(\alpha + \theta))$

Que transformação a multiplicação de complexos define? Quando multiplicamos z e w no plano, estamos fazendo uma composição de duas rotações, isto é, se os complexos z e w definem rotações α e θ, respectivamente, então o produto de z por w define uma rotação ($\alpha + \theta$) de modo que a partir de α giramos mais θ ou a partir de θ giramos mais α.

Vemos, assim, que o produto de dois complexos unitários é ainda um complexo de módulo 1 e argumento igual à soma dos argumentos dos fatores:

$|z \,.\, w| = |z| \,.\, |w| = 1$ e $\arg(z \,.\, w) = \arg(z) + \arg(w)$

9.2. Multiplicação de complexos: compondo rotações e dilatações

Quando multiplicamos um complexo z por um vetor unitário $(\cos\theta + i\,sen\theta)$, o vetor que representa z sofre uma rotação de um ângulo θ em torno da origem.

Consideremos, agora, dois complexos quaisquer $z = |z| (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $w= |w| (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Como fazer a multiplicação?

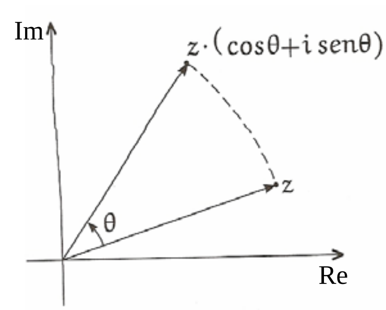


Figura 33: representação geométrica da multiplicação de um complexo Z por um complexo unitário

Se um dos complexos for nulo, o produto $z \,.\, w = (0,0)$. Observe que não se define argumento para o número complexo $z = (0,0)$.

Se os complexos z . w não são nulos, então,

$\frac{z}{|z|} e \frac{w}{|w|}$ são complexos unitários, na direção de z e w, respectivamente.

Como z = |z| (cos α; sen α) e w = |w| (cos θ; sen θ), temos $\frac{z}{|z|}$ = (cos α; sen α) e $\frac{w}{|w|} =$ (cos θ; sen θ).

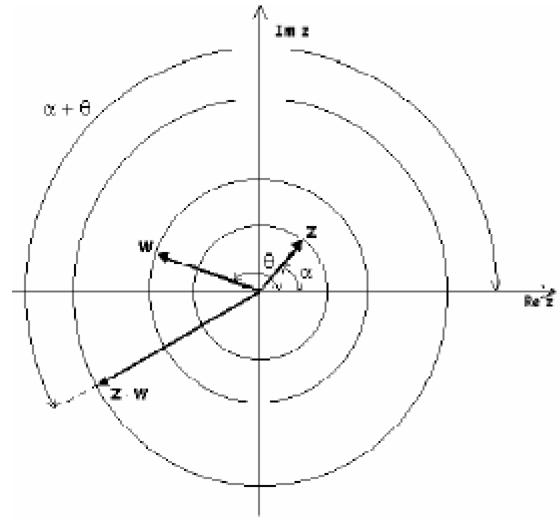


Figura 34: Interpretação geométrica da multiplicação de dois complexos na forma polar

Da definição da multiplicação de complexos unitários, podemos escrever:

$\frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} =$ (cos ($\alpha + \theta$); sen ($\alpha + \theta$))

Logo, z . w= |z| . |w| . (cos($\alpha + \theta$); sen ($\alpha + \theta$)).

Geometricamente, o comprimento do vetor $z.w$ é igual ao produto dos comprimentos de z e w. O ângulo de inclinação do vetor $z.w$ é a soma dos ângulos α e θ. Em particular, quando um número complexo z é multiplicado por i, o vetor resultante iz é aquele que se obtém girando o vetor z, no sentido anti-horário, de um ângulo reto e sem alterar o comprimento do vetor, visto que

$$iz = (\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}).\left|z\right|(\cos\theta + i\,sen\theta) = \left|z\right|.\left[\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i\,sen(\theta + \frac{\pi}{2})\right]$$

Aplicando a propriedade associativa da multiplicação, podemos *generalizar* a fórmula do produto para mais de dois fatores. Assim, se tivermos n complexos

$z_i = |z_i|$. cos α_i ; sen α_i) , i = 1, 2, 3, … , n podemos escrever:

$z_1 . z_2 ... z_n = |z_1|. |z_2| ... |z_n|$. [cos ($\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$) ; sen($\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$)]

10 CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO: REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO REAL.

10.1 Conjugado: reflexão sobre o eixo real

O *conjugado* de um úmero complexo z = |z| (cos θ, sen θ) é o número complexo $\bar{z}$ (lê-se “conjugado de z”) tal que $\bar{z}$ = |z| (cos (-θ), sen (-θ)). O ponto $\bar{z}$ é representado pela reflexão de z em relação ao eixo real como em um espelho. Sendo z = (a, b), a forma cartesiana de seu conjugado é = (a; -b).

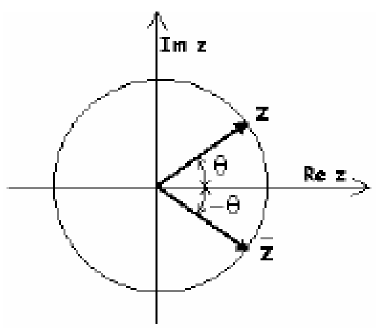


Figura 35: Representação geométrica de complexos conjugados na forma polar

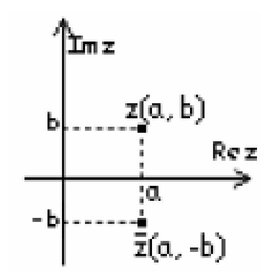


Figura 36: Representação geométrica de complexos conjugados na forma cartesiana

É imediato notar que:

- Para z = a + bi (forma algébrica) o conjugado de z é $\bar{z}$ = a – bi;
- z e $\bar{z}$ são números complexos conjugados (um é conjugado do outro);
- $\bar{z}$ é simétrico de z em relação ao eixo real;
- $\bar{z}$ = |z| (cos θ; -sen θ);
- $|\bar{z}|$ = |z|;
- z é real ⇔ $\bar{z}$ = z;

- $\bar{z}$ possui argumento igual ao oposto do argumento de z;
- z + $\bar{z}$ = 2 R_e (z);
- z - $\bar{z}$ = 2 . Im (z) . i;
- z . $\bar{z}$ = $|z|^2$;
- Conjugado da soma de dois complexos é a soma dos seus conjugados $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.

10.2 – Uso do conjugado na divisão

Já vimos no item (3.7) como calcular o quociente entre dois números complexos na forma cartesiana em decorrência da propriedade da existência do elemento inverso da multiplicação. Agora, veremos como realizar essa divisão, usando as formas trigonométrica e algébrica.

Vamos considerar n = |n| (cos θ; sen θ) o elemento neutro da multiplicação. Como a multiplicação representa uma composição de rotação com dilatação, podemos concluir que θ = 0 e |n| =1, pois o elemento neutro não altera o resultado da multiplicação (não define nenhuma rotação), nem o módulo do complexo que ele está multiplicando.

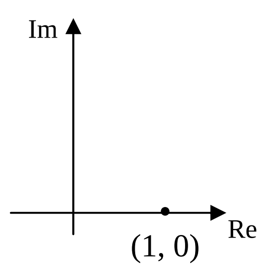


Figura 37: Representação geométrica da unidade real

Logo, n = 1 . (cos 0^0; sen 0^0) $\Rightarrow$ n = (1, 0) = (cos 0^0; sen 0^0).

Para calcularmos o inverso multiplicativo (w^{-1}), de um número complexo w, podemos usar a relação w . w^{-1} = 1.

Sendo w = |w| (cos θ, sen θ) e w^{-1}= $|w^{-1}|$ (cos α, sen α), temos:

w . w^{-1} = 1

|w| (cos θ, sen θ) . $|w^{-1}|$ (cos α, sen α) = 1 (cos 0^0, sen 0^0)

|w| . $|w^{-1}|$. (cos ($\theta + \alpha$) , sen ($\theta + \alpha$)) = 1 (cos 0^0, sen 0^0)

|w| . $|w^{-1}|$ = 1 $\Rightarrow$ $|w^{-1}| = \dfrac{1}{|w|}$ e $\theta + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\theta$

Portanto, o inverso multiplicativo de w é $w^{-1} = \dfrac{1}{|w|}$ [cos (-θ), sen (-θ)], sendo

w = |w| (cos θ, senθ). Para $w = \left| w \right| (\cos\theta + i\,sen\theta)$, podemos dizer que $\dfrac{1}{w}$ é:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{\left| w \right|}\left[\cos(-\theta) + i\,sen(-\theta)\right] = \frac{1}{\left| w \right|}(\cos\theta - i\,sen\theta)$$

Com este resultado podemos considerar dois complexos z = |z| (cos α, sen α) e w = |w| (cos θ; sen θ), com w $\neq$ (0, 0), e calcularmos a divisão de z por w fazendo a multiplicação de z pelo inverso multiplicativo de w.

Ou seja,

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$$

como $w^{-1} = \dfrac{1}{|w|}$(cos(-θ), sen(-θ)) , temos

$$\frac{z}{w} = |z| (\cos\alpha, sen\,\alpha) \cdot \frac{1}{|w|}(\cos(-\theta), sen(-\theta)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\,[\cos(\alpha+(-\theta);\ \text{sen}(\alpha+(-\theta)]$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{|Z|}{|W|}\ [\cos(\alpha - \theta),\ \text{sen}(\alpha - \theta)]$$

Podemos ainda, calcular a divisão de dois complexos, multiplicando o numerador e o denominador pelo *conjugado* do denominador baseado em que $z\,.\,\bar{z} = |z|^2$.

Dados z = |z| (cosα; sen α) e w = |w| (cosθ, senθ), |w| $\neq$ 0.

Se os complexos estiverem na forma algébrica, procedemos do mesmo modo, ou seja:

Dados z = a + bi e w = c + di com z $\neq$ 0, temos:

$\bar{z}$ = a – bi $\therefore$

$$\frac{w}{z} = \frac{w}{z}.\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$

11 EIXO REAL: IMERSÃO DE R EM C

Consideremos o subconjunto C_r de C formado pelos pares ordenados da forma (x,0): $C_r = \{(x, y) \in C \mid y = 0\}$.

É fácil verificar que esse conjunto, formado pelos pares de números reais da forma (x, 0), é fechado em relação às operações de adição e multiplicação em C.

(a, 0) + (b, 0) = (a + b; 0)

(a, 0) . (b, 0) = (ab – 0; 0 + 0) = (ab; 0)

Consideremos a aplicação *f* de *R* em C_r , que associa a cada $x \in R$ o par $(x,0) \in C_r$

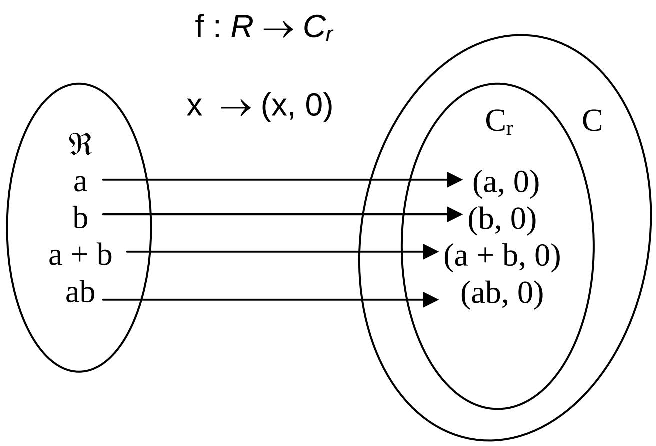


Figura 38: Imersão de $\Re$ em C.
Fonte: Iezzi, 2005, p. 7.

Podemos observar que:

- Todo par (x, 0) $\in C_r$ *é imagem de x* $\in \Re$, isto é, f é sobrejetora;
- Dados x_1, $x_2 \in \Re$, com $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = (x_1,0) \neq f(x_2) = (x_2,0)$, isto é, f é injetora;
- Como a aplicação f é injetora e sobrejetora, obviamente é bijetora;
- A aplicação f preserva as operações de adição e multiplicação, pois:

  f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)

  f(ab, 0) = (ab – 0.0, a.0 + 0b) = (a, 0) . (b, 0) = f(a) . f(b)

Apostol (1994) e Iezzi (2005) colocam que em razão do fato de f: $\Re \to C_r$ ser uma aplicação bijetora que preserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que a função f é um isomorfismo do corpo C, isto é, R e C_r são isomorfos.

Devido ao isomorfismo, operar com (x,0) leva a resultados análogos aos obtidos operando com x. Portanto x = (x, 0) , $\forall$ x $\in \Re$.

Exemplos:

(2, 0) + (8, 0) = (10, 0) é equivalente a 2 + 8 = 10

(2, 0) + (-2, 0) = (0, 0) é equivalente a 2 + (-2) = 0

($\frac{1}{2}$, 0) + ($\frac{1}{3}$, 0) = ($\frac{5}{6}$, 0) é equivalente a $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

(5, 0) . (3, 0) = (15, 0) é equivalente a 5 . 3 = 15

(-1, 0) . (-1, 0) = (1, 0) é equivalente a (-1) . (-1) = 1

(8, 0) . ($\frac{1}{4}$, 0) = (2, 0) é equivalente a 8. $\frac{1}{4}$ = 2

Desse modo podemos chamar os números da forma (x, 0) simplesmente de x, pois qualquer operação que se faça com eles a parte imaginária será sempre igual a zero. Logo, podemos cometer um abuso de linguagem e dizer que R $\subset$ C.

Observe que os elemento neutros da adição (0, 0) e da multiplicação (1,0), bem como os inversos aditivo (-a, 0) e multiplicativo $\left(\frac{1}{a},0\right)$, para a $\neq$ 0, também pertencem ao eixo real.

Júdice e Andrade (1983) referindo-se ao subconjunto C_r de C, formado pelos pares de números reais da forma (a,0), afirmam que C_r é fechado em relação às operações de adição e de multiplicação definidas em C, porém advertem para o fato de que o subconjunto de C formado pelos pares de números reais da forma (0,b) é fechado em relação à adição definida em C, mas não é fechado em relação à multiplicação.

12 EIXO IMAGINÁRIO: UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Já sabemos que todo número de forma (0, b) pode ser escrito como b.(0, 1) onde $(0,1)$ é unitário que define uma rotação de 90º, pois, (0,1) = $\left(\cos\frac{\pi}{2}, sen\frac{\pi}{2}\right)$. Esse número é designado de *i* e se diz unidade imaginária.

Vamos considerar o vetor AO igual a (+d) e o vetor oposto OB igual a (-d).

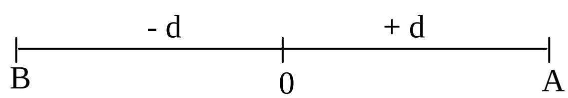


Figura 39: Representação geométrica de vetores simétricos.
Fonte: Reis Neto, IX ENEM, pôster PO - 25488074368

Como passar da quantidade (+d), representada por AO, para a quantidade (-d), representada por OB? Há duas formas: algebricamente, multiplicando-se (+d) por (-1) e, geometricamente, fazendo-se girar o vetor AO de uma semi-volta, em qualquer sentido.

Assim, podemos generalizar que multiplicar uma quantidade por (-1) equivale a provocar um giro de 180º no vetor representativo dessa quantidade. Pode-se dizer que (-1) é um operador algébrico que faz girar um vetor de 180º.

Como, entretanto, fazer um vetor girar de 90º?

Usaremos a orientação da trigonometria para precisar em que sentido será efetuada a rotação.

Para fazer AO girar de (+π/2), levando-o a OC vamos multiplicá-lo por um coeficiente que representamos por λ, de maneira que, fazendo-o girar novamente de (+π/2), isto é, multiplicando-o novamente por λ, se encontre o vetor OB.

O fator λ é, portanto, um operador algébrico que faz um vetor girar de 90º. Esse fator, cujo valor ainda é desconhecido, indica que temos um vetor vertical e o sinal de λ indica a orientação do mesmo.

Qual então o valor de λ?

Se fizermos AO girar duas vezes $\frac{\pi}{2}$ deve-se encontrar OB.

Portanto, multiplicando-se $+\lambda d$ (que é OC) por $+\lambda$ deve-se encontrar (-d)

$+\lambda\, d \,.\, \lambda = -d$

$\lambda^2 . d = -d$

$\lambda^2 = -1$ ou $\lambda = \sqrt{-1}$

Como i = (0, 1) e $i^2 = (0, 1) . (0, 1)$

$i^2 = (-1, 0) = -1$

Temos $\lambda^2 = i^2 \Rightarrow i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$

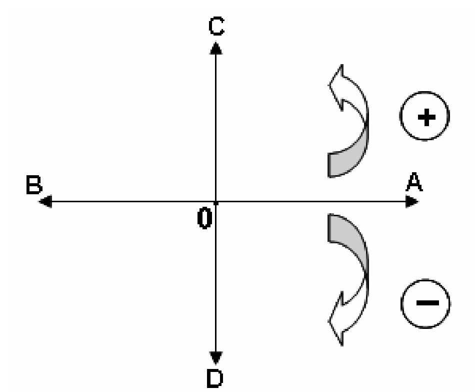


Figura 40: Representação geométrica de vetores de mesmo módulo localizados no plano complexo.
Fonte: Reis Neto, IX ENEM, pôster PO - 25488074368

O número $i = \sqrt{-1}$ não pode ser calculado como número real, sendo, por isso, chamado imaginário.

Geometricamente, multiplicar um complexo z, não nulo, por i, i^2, i^3 e i^4, equivale, respectivamente, a fazê-lo girar de +90º, +270°, +180°e +360°. Paiva (1995).

13 OPERAÇÕES NA FORMA ALGÉBRICA

É comum usarmos a forma binomial, a + bi, de números complexos para realizarmos as operações de adição, subtração e multiplicação, porque elas se processam como se fossem “expressões de 1º grau na variável i”, obedecendo às propriedades das operações com números reais, com a condição que $i^2 = -1$.

Já vimos as definições de igualdade, adição e multiplicação de números complexos representados na forma de pares ordenados. Vejamos como ficam essas definições, usando a forma algébrica:

Igualdade: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$, isto é, dois números complexos, na forma algébrica, são iguais se, e somente se, a parte real do primeiro for igual à parte real do segundo e a parte imaginária do primeiro for, também, igual à parte imaginária do segundo.

$$a + bi = c + di$$

$$a - c = di - bi$$

$$a - c = (d - b)\, i$$

Como $(a - c) \in \Re$, deve ocorrer o mesmo com $(d - b)i$, ou seja, $(d - b)i \in \Re$; isto só é possível se $d - b = 0$ e, portanto, $d = b$. Além disso, temos:

$$d - b = 0 \;\Rightarrow\; a - b = 0 \;\Rightarrow a = b.$$

Adição: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, isto é, a soma de dois números complexos, na forma algébrica, é um número complexo cuja parte real é igual à soma das partes reais das parcelas e cuja parte imaginária é a soma das partes imaginárias das parcelas.

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di$$

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicação: $(a + bi) . (c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i$, isto é, o produto de dois números complexos na forma algébrica é o resultado do desenvolvimento, $(a + bi) . (c + di)$, aplicando a propriedade distributiva e levando em conta $i^2 = -1$.

$$(a + bi) . (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$(a + bi) . (c + di) = ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$

$$(a + bi) . (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Como foi visto no item (3.8.3), ao contrário do conjunto dos números reais, no *corpo dos números complexos não existe relação de ordem*, isto é, um número complexo pode ser igual ou diferente em relação a outro, mas não menor ou maior que outro; podemos apenas comparar seus módulos, pois são números reais. Assim o corpo dos reais é ordenado e o corpo dos complexos não é, pois

$\{x; y\} \subset \Re \Rightarrow x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$

$\{z; w\} \subset C \Rightarrow z = w$ ou $z \neq w$.

Entretanto, o conjunto C dos números complexos munido das operações soma (+), definida por $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ e multiplicação $z . w = (a + bi) + (c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i$ é um corpo, o que significa que podemos operar com números complexos como operamos com números reais.

Embora C seja um corpo, não é ordenado, pois:

(*) Num corpo ordenado, o quadrado de todo elemento não nulo é positivo.

(**) Em todo corpo ordenado, 1 é positivo, logo -1 é negativo.

De (*) e (**) podemos afirmar que nenhuma relação de ordem torna o corpo C dos números complexos um corpo ordenado, haja visto que $-1 = i^2$. Se C fosse corpo ordenado, o número -1 seria negativo por (**) e positivo por (*), uma contradição.

14 POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

14.1 – Potências de *i*

Conforme vimos, a unidade imaginária *i* tem a propriedade $i^2 = -1$ onde $i^2 = i.i$. As potências de um complexo z com expoente inteiro n são definidas do mesmo modo como definimos para potências de base real.

$z^0 = 1$

$z^1 = z$

$z^n = z.\ z.\ z...z$ (n fatores) ; $n \in N$ e $n \geq 2$

$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$; $n \in N^*$ e $z \neq 0$

Particularmente para z = *i*, temos que:

$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$

$i^4 = 1 \quad i^{-5} = I \quad i^6 = -1 \quad i^7 = -i$

$i^8 = 1 \quad i^9 = I \quad i^{10} = -1 \quad i^{11} = -i$ etc.

Podemos notar que só existem quatro resultados possíveis para as potências de i (1, i, -1, -i), isto é, as potências de *i* repetem seus resultados de quatro em quatro.

Como $i^4 = 1$, podemos calcular qualquer outra potência inteira de *i*.

Assim, para calcular uma potência i^n, n inteiro maior ou igual a 4, vamos dividir n por 4. Podemos obter o resto 0, ou 1, ou 2, ou 3. Notemos que se $n = 4q + r$, onde $q \in N$, temos:

$I^n = i^{4q+r} = i^{4q} . i^r = (i^4)^q . i^r = 1^q . i^r = i^r$.

Generalizando, a potência de i^n é igual a i^r, onde r é o resto da divisão de n por 4.

$$I^n \in \{1, i, -1, -i\}$$

Exemplos:

$i^{100} = i^0 = 1$

$i^{-23} = (i^{23})^{-1} = (i^3)^{-1} = (-i)^{-1} = -\frac{1}{i}$

14.2 Potenciação em forma trigonométrica

A forma algébrica facilita as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos, porém não é muito prática no cálculo de potências. Se tivermos que calcular $(a + bi)^n$, n inteiro e $n \geq 2$, podemos multiplicar (a + bi) por ele mesmo n vezes, ou recorrer à fórmula do desenvolvimento do binômio de Newton.

$$(a + bi)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (a)^{n-p} . (bi)^p$$

Ambos os procedimentos, geralmente, são muito trabalhosos, ao passo que o desenvolvimento trigonométrico, além de simplificar a operação de potenciação, será útil para a radiação.

Como a multiplicação de números complexos é uma composição de rotações e dilatações, a potência z^n é uma composição de repetidas rotações e dilatações.

Se $z = \rho(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta) \neq 0$ então z^n é o produto de n fatores iguais a z e portanto:

$z^2 = \rho.\ \rho[\cos(\theta + \theta) + i\mathrm{sen}(\theta + \theta)] = \rho^2\ [\cos(2\theta) + i\mathrm{sen}(2\theta)]$

$z^3 = \rho\rho\rho\ [\cos(\theta + \theta+ \theta) + i\mathrm{sen}(\theta + \theta+ \theta)] = \rho^3\ [\cos(3\theta) + i\mathrm{sen}(3\theta)]$

Generalizando para n complexos de módulos ρ e argumentos θ, temos:

$$z^n = \underbrace{\rho.\ \rho\ldots\rho}_{\text{n fatores}}\ [\cos\underbrace{(\theta + \theta+\ldots+ \theta)}_{\text{n parcelas}} + i\mathrm{sen}\underbrace{(\theta + \theta+\ldots+ \theta)}_{\text{n parcelas}}] =$$

$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta)]$

Essa igualdade, conhecida como *primeira fórmula de Moivre,* permite que calculemos as potências de base complexa e expoente inteiro n, $n \geq 2$, em função do módulo (ρ) e do argumento (θ) de z.

O módulo da potência z^n é igual a ρ^n e o argumento é congruente a ($n\theta$):

$|z^n| = |z|^n = \rho^n$ e $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) = n\theta$

Vamos generalizar a primeira fórmula de Moivre[28] para qualquer n inteiro positivo, negativo ou nulo.

Inicialmente, provaremos que é válida para $n \in N$, usando o princípio de indução finita.

---

[28] Abraham De Moivre (1667-1754) tem seu nome ligado também ao desenvolvimento da teoria das probabilidades

1) Se n = 0, então

$z^0 = 1$

ρ^0 (cos 0 + isen0) = 1

2) Admitamos a validade da fórmula para n = k e provaremos a validade para n = k + 1.

$z^{k+1} = z^k \cdot z = \rho^k (\cos k\theta + i\,\text{sen}\, k\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$

$= (\rho^k \cdot \rho) \cdot [\cos(k\theta + \theta) + i\,\text{sen}(k\theta + \theta)]$

$= \rho^{k+1} \cdot [\cos(k + 1)\theta + i\,\text{sen}(k + 1)\theta]$

Agora vamos provar para n $\in$ Z

Se n $<$ 0, então n = -m com m $\in$ N; portanto, a m se aplica a fórmula:

$$z^k = z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\rho^m.(\cos m\theta + isenm\theta)}$$

$$= \frac{1}{\rho^m}.\frac{\cos m\theta - isenm\theta}{(\cos m\theta + isenm\theta).(\cos m\theta - isenm\theta)}$$

$$= \frac{1}{\rho^m}.\frac{\cos m\theta - isenm\theta}{(\cos^2 m\theta + sen^2 m\theta)} = \rho^{-m}[\cos(-m\theta) + isen(-m\theta)]$$

$$= \rho^n (\cos n\theta + i\,\text{sen}\theta)$$

Logo: se z = ρ(cosθ + isen nθ) $\neq$ 0 e n é inteiro, então módulo de argumento de z^n é a primeiro determinação positiva ou nula de (nθ). Ou seja, se z = ρ(cosθ + isenθ), então $z^n = \rho^n$ (cosnθ + isen nθ).

Considerando o número complexo, não-nulo, z =1(cosθ + isenθ) e um número inteiro positivo n, temos:

$z^n = \cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)$, isto é, $(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)$.

Esse resultado é útil na trigonometria para determinar valores de $\cos(n\theta)$ e $\text{sen}(n\theta)$.

15 RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

15.1- Raiz aritmética

Qual o número positivo que elevado ao quadrado dá 9?

Resposta: 3. O número 3 é então chamado raiz quadrada de 9, e essa operação, chamada de radiciação, é representada assim: $\sqrt{9} = 3$.

No entanto, embora $(-3)^2 = 9$, apenas o número real positivo é a *raiz quadrada aritmética* de 9 e é indicado por $\sqrt{9}$. Em vista disso, o número real negativo -3, por ser simétrico de 3, é representado pelo símbolo $-\sqrt{9}$.

Portanto:

$\sqrt{9} = 3$; $-\sqrt{9} = -3$; $\pm\sqrt{9} = \pm 3$; a raiz quadrada de 9 é 3.

Leithold (2000) afirma que o símbolo $\sqrt{a}$, onde $a \geq 0$ é definido como um único número não-negativo x, tal que $x^2 = a$. Lemos $\sqrt{a}$ como “a raiz quadrada principal de a”.

De um modo geral, se $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, dizemos que o número positivo $\sqrt[n]{a}$ existe, é único e chamado *raiz enésima aritmética* de a.

15.2 Radiciação em C – Extração de raízes

Considere o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ não nulo. Sendo n um número inteiro positivo, chamamos de *raiz enésima* de z a qualquer complexo $w = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ tal que:

$$w^n = z$$

Assim, de acordo com a definição e utilizando a fórmula de Moivre, temos:

$$[r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)]^n = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow r^n(\cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha) = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Portanto, é necessário:

(1) $r^n = \rho \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$ $(r \in R_+)$

$$\left.\begin{array}{l}(2)\ \cos n\alpha = \cos\theta \\ (3)\ \operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen}\theta\end{array}\right\} \Rightarrow n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}$$

As equações (2) e (3) implicam que $n\alpha$ e θ diferem por um múltiplo de 2π (período das funções seno e cosseno).

Supondo $0 \le \theta < 2\pi$, vamos determinar valores de $k \in Z$ para os quais resultam valores de α compreendidos entre 0 e 2π:

$$k = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n}$$

$$k = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + 2.\frac{2\pi}{n}$$

$$k = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + 3.\frac{2\pi}{n}$$

$k = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + 4.\frac{2\pi}{n}$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$k = n - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + (n-1)\,.\frac{2\pi}{n}$

Estes n valores de α não são congruentes por estarem todos no intervalo [0 , 2π[; portanto, dão origem a n valores distintos para w.

Para $k = n \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + n\,.\frac{2\pi}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + 2\pi$

Esse valor é indispensável por ser maior ou igual a 2π e congruente ao valor obtido para k = 0.

Portanto, para k = 0, 1, 2, ..., n -1, os valores de w são todos diferentes, pois os arcos $\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ não são congruentes.

Daí em diante, isto é, k = n, n + 1, n + 2, ... os arcos passam a ser obtidos pela segunda vez e os valores de w se repetem.

Então para obtermos as n raízes de um número complexo é suficiente fazer k = 0, 1, 2, ..., n -1.

Logo, todo número complexo z diferente de zero admite n raízes enésimas distintas, todas com mesmo módulo ($\sqrt[n]{\rho}$) e cujos argumentos principais são os n primeiros termos de uma progressão aritmética com primeiro termo geral igual a $\frac{\theta}{n}$ e razão igual a $\frac{2\pi}{n}$. Simbolicamente:

Sendo $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta) \neq 0$ e w_k uma de suas raízes enésimas temos:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+isen\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right], \text{ com } k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

Essa igualdade é chamada segunda fórmula de Moivre.

15.3 Interpretação geométrica de radiciação

Dado um número complexo não nulo, as imagens de suas raízes enésimas são pontos do plano Argand-Gauss que pertencem a uma circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$, dividido-a em n partes iguais.

Geometricamente, o comprimento de cada um dos n vetores $z^{\frac{1}{n}}$ é o número positivo $\sqrt[n]{\rho}$. O argumento de um desses vetores é o ângulo obtido dividindo-se θ por n, e os demais argumentos são obtidos por adição de múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$ a $\frac{\theta}{n}$.

Os argumentos, como vimos, formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$, isto é:

- se n = 2 $\Rightarrow$ as raízes serão pontos diametralmente opostos;
- se n $\geq$ 3 $\Rightarrow$ as raízes serão os vértices de um polígono regular inscrito na circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

Quando $z = 0$, a equação $w^n = z$ tem uma e uma só solução $z_o = 0$.

<u>Exemplos</u>:

(1) Seja z = 100 i

as raízes quadradas de z são:

$z_1 = 5\sqrt{2} + i5\sqrt{2} = (5\sqrt{2} ; 5\sqrt{2})$

$z_2 = - 5\sqrt{2} - i5\sqrt{2} = (-5\sqrt{2} ; 5\sqrt{2})$

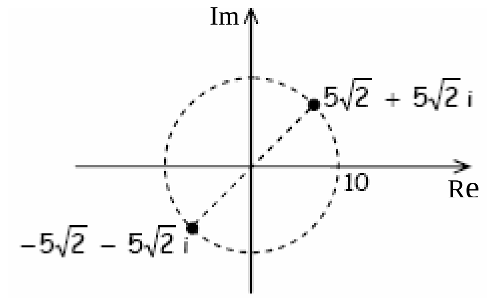


Figura 41: Representação geométrica das raízes quadradas de Z = 100i

(2) Seja z = -8

as raízes cúbicas de z são:

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = - 2$

$z_3 = 1 - i\sqrt{3}$

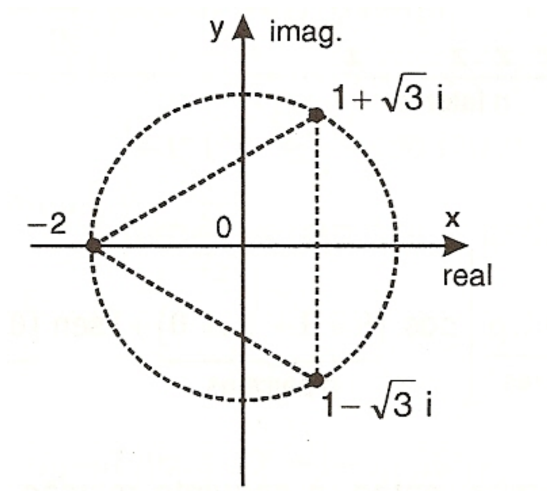


Figura 42: Representação geométrica das raízes cúbicas de Z = -8

15.4 Raízes da unidade real

Vamos calcular as raízes n-ésimas da unidade

$z = 1 \Rightarrow z = 1 + 0.i \quad \Rightarrow \quad |z| = 1$ e $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1(\cos 0 + i\,sen 0)$

$$\sqrt[n]{1} = 1(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\,sen\frac{2k\pi}{n}), \quad k = 0,1,2,\cdots,(n-1).$$

Conclui-se que as raízes da unidade são todas de módulo 1 e, portanto, estão sobre uma circunferência de raio unitário e centro na origem do plano de Argand-Gauss;

os argumentos são: $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \cdots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$, o que permite concluir que são múltiplos pares de $\frac{\pi}{n}$; dessa forma , as raízes n-ésimas da unidade são precisamente os vértices de um *polígono regular de* n *lados* inscrito na circunferência $\{z \in C \,;\, |z| = 1\}$,tendo como um dos vértices o número um.

A determinação das raízes n-ésimas da unidade corresponde à divisão da circunferência em n partes.

Por exemplo:

As raízes quartas de 1 são os números complexos (1,0), (cos90°, sen90°), (cos180°, sen180°) e (cos270°, sen270°), ou seja, 1,i, -1,-i.

As raízes cúbicas de 1 são os complexos (1,0) , (cos120°, sen120°) e (cos240°, sen240°), ou seja, (1,0), $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Conhecendo-se uma raiz n-ésima w de um complexo z as outras raízes são obtidas multiplicando-a pelas raízes da unidade.

Exemplos:

(1) Mostre que se $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ são raízes n-ésimas da unidade, e se w é uma qualquer das raízes n-ésimas do complexo z não nulo, então $wu_0, wu_1, wu_2, \cdots, wu_{n-1}$ são as n raízes do complexo z .

Seja w tal que $w^n = z$

Sejam $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ *as raízes n-ésimas da unidade*

$wu_0, wu_1, wu_2, \cdots, wu_{n-1}$ *são complexos distintos, pois w≠0 e as raízes n-ésimas da unidade,* u_k *com* $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$*, são distintas.*

$(w.u_k)^n = w^n.(u_k)^n$*, como* $(u_k)^n = 1$*, tem-se:*

$(w.u_k)^n = w^n.1 = w^n = z$*, ou seja,* $wu_0, wu_1, wu_2, \cdots, wu_{n-1}$ *são as n raízes n-ésimas de* z*.*

(2) Determine as raízes quartas de 81, usando as raízes quartas da unidade.

As raízes quartas da unidade são: 1, i, -1 e –i

Uma das raízes quartas de 81 é 3

Portanto, as raízes quartas de 81 são: 3, 3i, -3 e -3.i

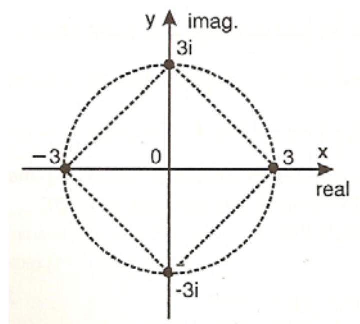


Figura 43: Representação geométrica das raízes quartas de Z = 81

Além disso, se w é uma das raízes n-ésimas da unidade, diferente de 1, então: $1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} = 0$,

pois $1, w, w^2, w^3, \cdots$ são as raízes da unidade e a soma delas é a soma das raízes da equação[29] $z^n - 1 = 0$.

[29] As relações de Girard garantem que a soma das raízes dessa equação é nula.

16 OUTRAS FORMAS DE REPRESENTAR UM NÚMERO

16.1 Exponencial complexa

Já sabemos representar um número complexo nas formas cartesiana, algébrica e trigonométrica (polar). Agora vamos ver outra forma de representar um número complexo.

Conforme Carmo, Morgado e Wagner (2005), quando consideramos o círculo S^1 como um subconjunto $S^1 = \{ z \in C \; ; \left| z \right| = 1\}$ do plano complexo, a aplicação $E : R \to S_1 \subset C$, toma a forma $E(x) = \cos x + i\,senx$. Usando as fórmulas de adição verifica-se que :

$$E(x+y) = \cos(x+y) + i\,sen(x+y)$$

$$E(x+y) = \cos x \cos y - senx\; sen\,y + i\,senx \cos y + i\,seny \cos x$$

$$E(x+y) = \cos x \cos y + i^2\, senx\; seny + i\,senx \cos y + i\,seny \cos x$$

$$E(x+y) = \cos x\; (\cos y + i\,seny) + i\,senx\; (i\,sen\,y + \cos y)$$

$$E(x+y) = (\cos x + i\,sen\,x) + (\cos y + i\,seny)$$

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

Portanto, E é uma função complexa que se comporta como uma exponencial. Isto levou Euler a propor a seguinte definição $e^{ix} = \cos x + i\,sen\,x$.

Em um estudo mais aprofundado, podemos chegar a este resultado analisando as séries:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ e } \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Portanto:

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$

(2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$

(3) $\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$

Usando (1), (2) e (3), podemos desenvolver

e^{yi}, sendo i a unidade imaginária.

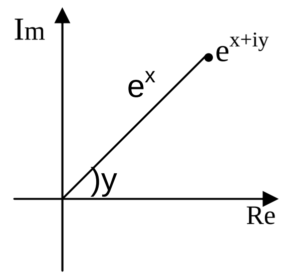


Figura 44: Representação geométrica de um número complexo na forma exponencial

$$e^{yi} = 1 + yi - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!}...$$

$$e^{yi} = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + ... + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + ...\right)$$

$e^{yi} = \cos y + i\text{sen } y$, $y \in \Re$

Essa identidade é chamada de *fórmula de Euler*.

Dela resulta que para $z = x + yi$ arbitrário, tem-se $e^z = e^{x + iy} = e^x \cdot e^{yi}$

$$e^z = e^x (\cos y + i \text{ sen} y) \begin{cases} \text{módulo} = e^x \\ \text{argumento} = y \end{cases}$$

e^z é um número complexo de módulo e^x e argumento y, isto é, e^z é o ponto do plano cuja distância à origem é e^x e o segmento que o liga à origem forma um ângulo de y radianos com o eixo das abscissas.

A função *exponencial complexa* é uma generalização da função exponencial e^x, com $x \in \Re$. Podemos verificar que a função exponencial complexa satisfaz todas as propriedades de uma função exponencial real, mas também novas propriedades que são exclusivas para função exponencial complexa.

Podemos, também, chegar à fórmula de Euler usando integrais.

Vejamos:

Seja $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

$dz = (-\text{sen}\,\theta + i\cos\theta)\,d\theta$

$dz = i\,z\,d\theta$

$$\int \frac{dz}{z} = \int i d\theta$$

$l\text{n}z = i\theta + k,\ k = \text{cte}$

Fazendo $k = 0$, $l\text{n}z = i\theta \Rightarrow z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

Usando a fórmula de Euler, a forma polar de um número complexo pode ser escrita de maneira mais resumida como $z = \rho(\cos\theta + i\,sen\theta) = \rho\, e^{i\theta}$ .Poole (2005).

Exemplo:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\,.$$

Também podemos ir na direção contraria e converter uma exponencial complexa na forma polar ou na forma algébrica.

Exemplo: escreva $z = e^{i\pi}$ na forma *z=a+bi (forma algébrica).*

$$z = e^{i\pi} = \cos\pi + i\,sen\pi = -1 + i.0 = -1 \;\therefore\; e^{i\pi} = -1$$

Escrevendo essa equação na forma $e^{i\pi} + 1 = 0$, Poole (2005) a define como uma das mais notáveis da matemática, pois ela tem as operações fundamentais de adição, multiplicação e exponenciação, além do elemento neutro 0 da adição e do elemento neutro 1 da multiplicação; os dois números transcendentes mais importantes, π e e; e a unidade complexa i – tudo em uma única equação.

16. 2 Número complexo como matriz

Existe mais uma maneira de representarmos um número complexo chamada forma matricial, que associa a cada número complexo z = x + yi uma matriz 2 x 2 da forma $z = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$

17 ATIVIDADES DE APLICAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS.

Nesta seção apresentaremos algumas questões usadas em seminário, provas, testes e simulados.

1) a) Supondo x real, é possível a igualdade (x – 2) + (3x – 2).i = 0?
   b) Pode ser *a+bi* = *b+ai* ? Em caso afirmativo, sob que condições?

2) (MACK – adaptação). Determine $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2009}$.
3) (UEMA). Calcular : $\sum_{n=25}^{63} i^n$.
4) (UFMA). Para n inteiro, quantos valores diferentes podem ter a expressão $i^n + i^{-n}$?
5) (MACK – adaptação). Determine os valores inteiros de n para os quais $(1+i)^n = (1-i)^n$.
6) (ITA). Identifique geometricamente o conjunto dos complexos da forma $z = t + it^2$, quando o número real t varia de 0 a 1.

7) Desenhe o vetor correspondente à soma z+w, ao produto z.w e ao conjugado de z, w e z.w, dados $z = 1+i$ e $w = -1+i$.

8) Dado o número complexo $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})$:

a) Escreva z na forma trigonométrica;

b) Calcular z^n para n = 5;

c) Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, tal que z^n seja real.

9) Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo Imaginário?

a) $z + \bar{z} = 0$ b) Im(z) = 1 c) $|z| = 0$ d) $z - \bar{z} = 0$ e) Re(z) $\neq$ 0.

10) Determine a área do triângulo cujos vértices são as imagens das raízes da equação $z^3 + z^2 + z = 0$.

11) (Cesgranrio – RJ). A figura mostra , no plano complexo, o círculo de centro na origem e raio 1, e as imagens de cinco números complexos.

O complexo $\frac{1}{z}$ é igual a:

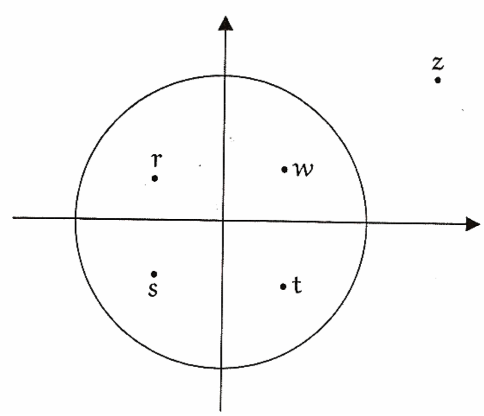
a) z

b) w

c) r

d) s

e) t



12) Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que:

a) $z.\bar{z} = 1$

b) z^2 é imaginário puro

c) $\text{Re}(z) > 1$

d) $z = \bar{z}$

e) $\text{Re}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$

f) $|z| = 5$

g) $|z+i| \leq 1$

h) $|1-z| = |3+z|$

i) $|1+z| = |1-z| = 4$.

j) $1 \leq |z| \leq 2$

13) Mostre que, para todo complexo z, $z.\bar{z} = |z|^2$.

14) Qual é a relação entre os argumentos de um complexo e de seu simétrico? E entre os argumentos de um complexo e de seu conjugado ?

15) Sendo $|z| = 3$ e $|w| = 4$, o que se pode afirmar sobre os argumentos de z e de w se:

a) $|z+w| = 5$?

b) $|z+w| = 7$?

c) $|z+w| = 1$?

d) $|z+w| = \sqrt{37}$?

16) Os complexos z e w têm como imagens os pontos A e B, respectivamente. Se $z = 2w + 5wi$ e $w \neq 0$, quanto vale o cosseno do ângulo AOB?

17) Para rotacionar um ponto (a,b), em relação à origem, em θ graus no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo *a*+*bi* pelo complexo $1.(\cos\theta + i\,sen\theta)$. De acordo com o texto acima:

a) Encontre as novas coordenadas do ponto A(3,4) após uma rotação de 90° no sentido anti-horário em relação à origem;

b) Encontre as novas coordenadas do segmento AB, com A(1,1) e B(3,4) após uma rotação de 90° no sentido anti-horário em relação ao ponto A.

18) Encontre as novas coordenadas do segmento AB, com A(-1,0) e B(5,- 4), após uma rotação de 60° no sentido anti-horário em relação ao ponto A.

19) Dados dois vértices (0,0) e (4,3), quais são as coordenadas dos outros dois vértices que fazem desse polígono um quadrado cujos vértices dados são de um mesmo lado?

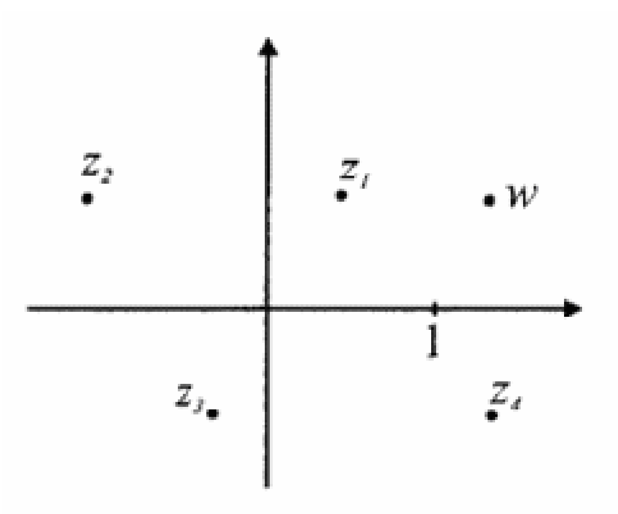
20) Dados dois vértices (0,0) e (4,3), qual é a coordenada do terceiro vértice que faz desse polígono triângulo equilátero?

21) ABCD é um quadrado. Se A(1,2) e B(2,5), determine as coordenadas de C e D.

22) Dado AB, lado de um triângulo equilátero ABC, com A(2,1) e B(6,3), obtenha o vértice C, sabendo que ele pertence ao 1° quadrante

23) Na figura estão representadas, no plano complexo, imagens geométricas de cinco números complexos: **w**, $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, $\mathbf{z_3}$ e $\mathbf{z_4}$.

Qual é o número complexo que pode ser igual a 1 – w ?



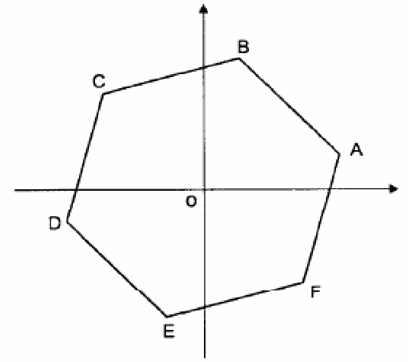
24) Em circuitos de corrente alternada, como, por exemplo, as instalações elétricas residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos. A relação U=Ri, estudada na física do ensino médio e que se utiliza dos números reais, torna-se U=ZI, em que U é a tensão, Z é a impedância e i é a corrente elétrica, sendo que essas grandezas passam a ser representadas através de números complexos. Para que não haja confusão entre i, símbolo da corrente elétrica, e i, unidade imaginária, os engenheiros usam j como unidade imaginária na representação algébrica *a+bj* . Além disso, usam a notação $|w|\angle\theta$ para forma trigonométrica $|w|\,(\cos\theta + i\,sen\theta)$ do número complexo w. Baseado nesse texto resolva o seguinte problema: Uma fonte de tensão, de valor eficaz $220\angle 0°$, alimenta uma carga de impedância Z = (10+10j) ohm. Obtenha a corrente fornecida pela fonte.

25) Uma fonte de tensão, de valor eficaz $110\angle 0°$, fornece uma corrente $i = 11\angle 60°$ para alimentar uma carga. Qual é a impedância Z dessa carga?

26) (UEMA). Determine o valor da potência $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right]^{93}$.

27) Na figura está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo número complexo. O vértice C é a imagem geométrica do número complexo $\sqrt{2}\ cis\ \dfrac{3}{4}\pi$.

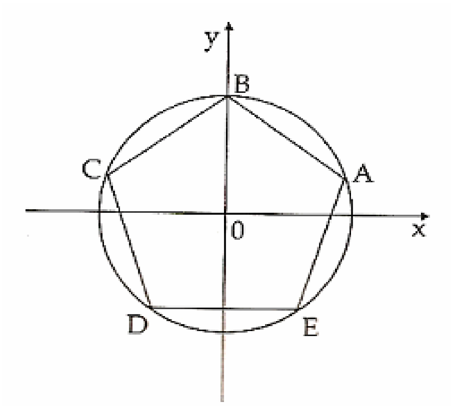
Determine o número complexo que tem por imagem geométrica o vértice D.



28) Qual é a relação que liga os argumentos de $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = -3 + 2i$?

29) Os números complexos podem ser utilizados para representar figuras geométricas. Por exemplo, sendo **Z_1 = x + iy e n ≥ 3**, o conjunto A ={Z ∈ C; $Z^n = Z_1$} representa os vértices de um polígono regular de **n** lados. Qual a área do polígono representado por A, quando **n = 6** e **x = y = 4**$\sqrt{2}$?

30) O polígono ABCDE da figura é um pentágono regular inscrito no círculo unitário de centro na origem. Determine as coordenadas polares ρ e θ do vértice A.



31) Seja ***L*** a imagem do número complexo $Z = \sqrt{8} + i$ em um sistema de coordenadas cartesianas *xOy*. Determine o número complexo **w**, de módulo igual a 1, cuja imagem ***M*** pertence ao quarto quadrante e é tal que o ângulo *LÔM* é reto.

32) Seja B o conjunto dos números complexos, solução da equação:

$$|z| = |z + 1|$$

a) Determine na forma algébrica, os elementos de B;

b) Mostre que as raízes quadradas de $-\frac{1}{2}i$ pertencem a B.

33) Em C, considere os números complexos: $z_1 = 1 + \mathbf{i}$ e $z_2 = \sqrt{2}\, cis\, \frac{3}{4}\pi$.

a) Verifique que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo.

Determine esse número, apresentando-o na forma algébrica;

b) Considere, no plano complexo, os pontos A, B e O em que:

- **A** é a imagem geométrica de z_1;
- **B** é a imagem geométrica de z_2;
- **O** é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo $[AOB]$.

34) Determine o valor de θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, para o qual $z = \sqrt{3} + i + 2(\cos\theta + i\, sen\theta)$ tem módulo máximo.

35) Considere o quadrado definido por $0 \le \Re e(z) \le 1$ e $0 \le Im(z) \le 1$. Determine a imagem desse quadrado pelas funções abaixo:

a) f(z) = 2.z

b) f(z) = $\bar{z}$

c) f(z) = i.z

d) f(z) =i.$\bar{z}$

e) f(z) = -z

f) f(z) = (i+1).z

g) f(z) = z+1-i

h) f(z) = 2.z + i.

i) f(z) = (1-i)z +2+i

36) Geometricamente, o módulo de um número complexo z é dado pela distância da origem O do plano complexo ao ponto imagem de z. Assim, dado o complexo z = 3+2i, considere o triângulo ABO, cujos vértices A e B são os respectivos pontos imagens de z e z.i. É verdade que esse triângulo é:

a) equilátero

b) escaleno

c) retângulo e isósceles

d) retângulo e não isósceles

e) isósceles não retângulo.

37) Se z = a + bi, z $\neq$ 0, prove que w = i.z é obtido girando-se z de 90° no sentido anti-horário, em torno de origem.

38) Resolva o sistema $\begin{cases} |z-2| = |z+4| \\ |z-3| + |z+3| = 10 \end{cases}$

39) Que números complexos representam dois vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro na origem, onde o terceiro vértice do triângulo é V = – 2*i* ?

40) Mostre que se as imagens dos complexos z, w e s são vértices de um triângulo equilátero então $z^2 + w^2 + s^2 = zw + ws + sz$.

41) Sabe-se que uma das raízes quintas de um complexo **Z** é **W = 2(cos 10º + i sen 10º)**. Determinar as outras quatro raízes quinta de **Z**.

42) (ITA). Dentre os números complexos z = a + bi, não nulos, têm argumento igual a $\frac{\pi}{4}$, determine aquele cuja representação geométrica está sobre a parábola $y = x^2$.

43) (ITA). Determine os valores máximo e mínimo de $|z+i|$ quando $|z-2| = 1$.

44) Determine o complexo z, sabendo que as imagens de z, i e i.z são vértices de um triângulo equilátero.

45) Representar na forma trigonométrica

a) $\cos\theta - i\,sen\theta$

b) $-\cos\theta - i\,sen\theta$

c) $sen\theta - i\cos\theta$

d) $1 + \cos\theta + i\,sen\theta\ (0 < \theta < \pi)$.

46) Sendo $z = \cos\theta + i\,sen\theta$, obtenha as fórmulas de $sen(2\theta)$ e $\cos(2\theta)$ utilizando a fórmula de Moivre.

47) (UnB). Um antigo pergaminho continha as seguintes instruções para se encontrar um tesouro enterrado em uma ilha deserta:

Ao chegar à ilha, encontre um abacateiro, uma bananeira e uma forca. Conte os passos da forca até o abacateiro; ao chegar ao abacateiro, gire 90° para a direita e caminhe para frente o mesmo número de passos; neste ponto, crave uma estaca no solo. Volte novamente para forca, conte o número de passos até a bananeira; ao chegar à bananeira, gire 90° para a esquerda e caminhe para frente o mesmo número de passos que acabou de contar; neste ponto, crave no solo uma segunda estaca. O tesouro será encontrado no ponto médio entre as duas estacas.

Um jovem aventureiro resolveu seguir as instruções para localizar o tesouro e, sendo um bom conhecedor de números complexos, reproduziu o mapa no plano complexo, identificando a forca com a origem, o abacateiro com o número A = 7 + i e a bananeira com o número B = 1 + 3i. Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem:

a) O menor ângulo entre os números complexos A e Ai é igual a 90°;

b) O ponto médio entre os números complexos A e B é dado por $\frac{A - B}{2}$;

c) A primeira estaca foi cravada no ponto A – Ai;

d) Seguindo as instruções do mapa, o aventureiro encontraria o tesouro no ponto da ilha que corresponde ao número complexo 3 – i.

48) Um número complexo $z = x + yi$ pode ser representado por uma matriz 2x2, da forma, $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$. Determine o produto dos números complexos $u = a + bi$ e $w = c + di$, usando a notação matricial.

49) sendo *a* e *b* números reais e $a + bi = (sen\theta + i\cos\theta)(\cos\theta - i\,sen\theta)$, mostre que $a^2 + b^2 = 1$, $\forall\theta \in R$.

50) (UFMG). Mostre que os números complexos $z, z \neq 0$, tais que $z^2 = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de z, representam os vértices de um triângulo equilátero.

ANEXOS

Anexo A

EU NÃO GOSTO MUITO DE MATEMÁTICA, MAS HOJE A AULA FOI LEGAL. NEM VI O TEMPO PASSAR. ENTENDI TUDO. TODAS AS AULAS DEVIAM SER ASSIM.

Anexo B

Nesse tipo de aula a gente aprende mais, porque quando não sabemos pedimos ajuda para nossos colegas e quando sabemos procuramos ajudar o colega que não sabe.