

**PONTÍFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS**  
**Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática**

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE**  
**LIMITE DE FUNÇÃO REAL**

Gisele Teixeira Dias Costa Pinto

**Belo Horizonte**  
**2010**

Gisele Teixeira Dias Costa Pinto

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE  
LIMITE DE FUNÇÃO REAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Clara Rezende Frota

Belo Horizonte

2010

FICHA CATALOGRÁFICA  
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

P659p      Pinto, Gisele Teixeira Dias Costa  
              Uma proposta para o ensino e aprendizagem de limite de função real. / Gisele  
              Teixeira Dias Costa Pinto. Belo Horizonte, 2010.  
              249f.: il.

              Orientadora: Maria Clara Rezende Frota  
              Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.  
              Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

              1. Funções (Matemática). 2. Ensino Médio. 3. Ensino auxiliado por  
              computador. I. Frota, Maria Clara Rezende. II. Pontifícia Universidade Católica  
              de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e  
              Matemática. III. Título.

CDU: 51:373.5

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS**  
**Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**GISELE TEIXEIRA DIAS COSTA PINTO**

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:



Profª Drª Maria Clara Rezende Frota – Orientadora – (PUC Minas)  
Doutorado em Educação – (UFMG)



Prof. Dr. Wandemey Moura Rezende – (UFF)  
Doutorado em Educação – (USP)



Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda – (PUC Minas)  
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial – (PUC Minas)

Belo Horizonte, 27 de outubro de 2010.

É impossível imaginar qualquer jornada sem o apoio da minha família. É por isso que dedico esse trabalho aos meus queridos irmãos, cunhadas e sobrinhos; meus pais, minha sogra (*in memoriam*) e meu marido. Em especial, aos três anjos que apareceram em minha vida: Gabriel, Flávio e Rafaela.

## AGRADECIMENTOS

*Eu agradeço...*

*... a todos que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento desse trabalho!*

*... aos meus queridos alunos do 2º ano do Curso de Informática pela amizade e confiança!*

*... ao pequeno contingente que se revezou para tomar conta da Rafaela, quando a mãe escrevia a dissertação: vovó Giselda, a prima Cláudia, papai Oswaldo, irmãozão Gabriel, irmãozinho Flávio e principalmente o vovô Washington!*

*... aos professores Wanderley Moura Rezende e Dimas Felipe de Miranda, membros da banca, pelas observações e sugestões, imprescindíveis para o desenvolvimento desse trabalho!*

*... à professora Maria Clara, pela orientação e dedicação no desenvolvimento da nossa pesquisa. Obrigada pelos conselhos pelo telefone, pelas longas conversas na PUC e por me receber na sua casa!*

*... ao professor José Geraldo, colega de mestrado e de escola, pelo seu apoio e ajuda nessa caminhada!*

*... aos professores do Curso de Mestrado, pela acolhida carinhosa e pelos ensinamentos!*

*... aos professores do CEFET-MG, pelo apoio e amizade!*

*... e, especialmente, à minha mãe e ao meu marido, cada um a seu modo, pelo incentivo ao desenvolvimento desse trabalho! Ao meu pai, pelo carinho comigo e por me mostrar o caminho para o magistério!*

*A todos vocês, muito obrigada!*

#### **SALMO DE ASCENSÃO**

Há algo que sobe em nós, Senhor,  
algo que grita,  
que borbulha,  
que pugna por vencer e respirar.

Há algo em nós que luta contra  
o tempo,  
que sobe rio acima,  
que braceja,  
que quer abrir mil portas,  
que deseja dissipar todas as névoas.  
A águia encontra o sol.

Senhor,  
a seiva que sobe encontra a nuvem,  
o incenso encontra a nuvem,  
a águia encontra o sol.  
Não encontrará nossa alma  
a flor do seu desejo,  
a nuvem da sua serenidade,  
o cume da sua perfeição?  
(Diego Fuertes Alvarez)

## RESUMO

Este trabalho se propôs a investigar abordagens metodológicas que podem contribuir para o entendimento de limite de funções reais, no contexto da sala de aula, no Ensino Médio. Esta pesquisa foi desenvolvida em uma escola técnica federal de Minas Gerais, em que os alunos aprendem o conteúdo introdutório de Cálculo - limites, derivadas e integral - no 2º ano do Ensino Médio. Orientamo-nos pelo desenho da engenharia didática, organizando a pesquisa em quatro etapas: análises prévias ou preliminares; análises a priori, execução e análise a posteriori. Dois referenciais teóricos foram estudados na fase de análise prévia da engenharia didática, objetivando tanto responder à questão principal desse trabalho, quanto estruturar as atividades aplicadas em sala de aula: a dialética ferramenta-objeto de Douady e a teoria “escrever para aprender Matemática”. Essas duas teorias se relacionam no traçado das atividades, que privilegiaram a escrita matemática e o jogo de quadros, principalmente o uso do quadro gráfico. As atividades apresentadas foram desenvolvidas em duplas pelos alunos para fomentar a comunicação matemática. As últimas atividades foram executadas com apoio do software Winplot, para auxiliar no esboço gráfico das funções. As respostas apresentadas pelos estudantes, ao longo do desenvolvimento das atividades, evidenciaram uma maior utilização do quadro gráfico e o uso da linguagem natural como suporte para a resolução das questões propostas. Todas as atividades apresentadas nessa pesquisa foram reunidas em uma proposta didática “Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real”, que poderá servir de instrumento para o ensino e a aprendizagem desse conteúdo.

Palavras-chave: Limite de uma função real. Ensino Médio. Engenharia didática. Dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros. Escrever para aprender Matemática.



## ABSTRACT

This work has aimed at investigating the methodological approaches which may contribute the understanding of limit of real functions, in the classroom context, in the Secondary School (High School). This research was developed in a Federal Technical School of Minas Gerais, where the students have learnt the introducing content of Calculus - limits, derivatives and integrals - in the 2<sup>nd</sup> year of Secondary School (High School). We were guided by the didactic engineering designing, organizing the research into four stages: previous or preliminary analyses, *a priori* analyses, accomplishment and *a posteriori* analyses. Two theoretical frameworks were studied during the preliminary analyses of didactic engineering, aiming not only at answering the main question of this work, as well as structuring the activities applied in the classroom: the Douady's tool-object dialectics and the theory of "Writing to learn Mathematics." These two theories are related in tracing the activities, which have privileged the written Mathematics and the *jeux des cadres*, especially the use of the graphic frame. The activities presented were developed by students, in pairs, in order to promote mathematical communication. The latter activities were carried out with support from Winplot software to assist in the graphic framework of the functions. The answers given by students, during the development of activities, showed a greater use of the graphic frame and the use of natural language as support for the solving of the questions posed. All activities presented in this research were gathered in a didactic proposal "Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real" (*An Introduction to the Study of Limits of Real Function*), which shall be able to serve as a tool for teaching and learning that content.

Keywords: Limit of real function. Secondary School (High School). Didactic Engineering. Tool-object Dialectics and *jeux des cadres*. Writing to learn Mathematics

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 1 Mapa da Engenharia Didática para o ensino de limite .....               | 28 |
| FIGURA 2 Limite da soma .....                                                    | 68 |
| FIGURA 3 Discussão sobre a continuidade de funções.....                          | 69 |
| FIGURA 4 Limites infinitos e com $x$ tendendo para infinito.....                 | 70 |
| FIGURA 5 Resumo sobre o cálculo de limites .....                                 | 71 |
| FIGURA 6 Discussão sobre convergência e divergência de sequências .....          | 72 |
| FIGURA 7 Utilização dos quadros gráfico e numérico para o cálculo do limite..... | 73 |
| FIGURA 8 Noção de limite de uma função .....                                     | 73 |
| FIGURA 9 Exemplos sobre continuidade e descontinuidade de funções .....          | 75 |
| FIGURA 10 Noção de limite.....                                                   | 77 |
| FIGURA 11 Definição de função contínua .....                                     | 77 |
| FIGURA 12 Discussão sobre continuidade e descontinuidade de função .....         | 78 |
| FIGURA 13 Definição de função contínua e descontínua .....                       | 79 |
| FIGURA 14 Exemplo sobre continuidade de funções .....                            | 80 |
| FIGURA 15 Quadros-resumo sobre soma e produto de limites) .....                  | 81 |
| FIGURA 16 Cálculo de limites laterais.....                                       | 83 |
| FIGURA 17 Definição sobre continuidade de funções .....                          | 83 |
| FIGURA 18 Ficha da Atividade 1 .....                                             | 89 |
| FIGURA 19 Folha de resposta do aluno Mauro.....                                  | 91 |
| FIGURA 20 Folha de resposta da aluna Marcela.....                                | 92 |
| FIGURA 21 Folha de resposta do aluno Gustavo .....                               | 92 |
| FIGURA 22 Folha de resposta da aluna Kelly .....                                 | 93 |
| FIGURA 23 Folha de resposta da aluna Cleusa .....                                | 93 |
| FIGURA 24 Ficha da Atividade 2.....                                              | 95 |

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 25 Folha de resposta dos alunos Davi e Fábio.....                     | 98  |
| FIGURA 26 Folha de resposta dos alunos Carmem e Leandro .....                | 99  |
| FIGURA 27 Ficha da Atividade 3 .....                                         | 101 |
| FIGURA 28 Folha de resposta dos alunos Adriano e Mauro.....                  | 104 |
| FIGURA 29 Folha de resposta dos alunos Flávio e Gabriel, questão 1.c .....   | 104 |
| FIGURA 30 Ficha da atividade 4 .....                                         | 106 |
| FIGURA 31 Folha de resposta das alunas Tamires e Tânia.....                  | 108 |
| FIGURA 32 Ficha da atividade 5 .....                                         | 109 |
| FIGURA 33 Folha de resposta dos alunos Gecy e Leandro.....                   | 111 |
| FIGURA 34 Ficha da Atividade 6.....                                          | 113 |
| FIGURA 35 Ficha da atividade 6 (continuação).....                            | 114 |
| FIGURA 36 Folha de resposta dos alunos Faber e Renato.....                   | 117 |
| FIGURA 37 Ficha da atividade 7 .....                                         | 119 |
| FIGURA 38 Ficha da atividade 8 .....                                         | 122 |
| FIGURA 39 Ficha da atividade 9 .....                                         | 126 |
| FIGURA 40 Folha de resposta dos alunos Renato e Faber .....                  | 128 |
| FIGURA 41 Folha de resposta dos alunos Marcelo e Marcos .....                | 129 |
| FIGURA 42 Folha de resposta do aluno Vagner.....                             | 129 |
| FIGURA 43 Folha de resposta dos alunos Marcelo e Marcos .....                | 130 |
| FIGURA 44 Folha de resposta dos alunos Ronaldo e Saulo .....                 | 131 |
| FIGURA 45 Questões da avaliação semestral do 2º ano.....                     | 132 |
| FIGURA 46 Ficha da atividade 10 .....                                        | 135 |
| FIGURA 47 Folha de resposta dos alunos Gustavo e Hebert .....                | 137 |
| FIGURA 48 Folha de resposta dos alunos Marcela e Leonardo, questão 5.a ..... | 137 |
| FIGURA 49 Ficha da atividade 11 .....                                        | 139 |

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 50 Folha de resposta dos alunos Carmem e Leandro .....                           | 140 |
| FIGURA 51 Ficha da atividade 12 .....                                                   | 142 |
| FIGURA 52 Gráfico enviado pelos alunos Leandro e Nádia do exercício 4 .....             | 145 |
| FIGURA 53 Gráficos das funções do exercício 4 enviados pelos alunos Renato e Faber..... | 146 |
| FIGURA 54 Ficha da atividade 13 .....                                                   | 147 |
| FIGURA 55 Gráficos enviados por Renato e Faber.....                                     | 149 |
| FIGURA 56 Folha de resposta dos alunos Kelly e Vagner.....                              | 150 |
| FIGURA 57 Folha de resposta dos alunos Gecy e Leandro.....                              | 151 |
| FIGURA 58 Folha de resposta dos alunos Marcela e Leonardo .....                         | 151 |
| FIGURA 59 Ficha da atividade 14 .....                                                   | 153 |
| FIGURA 60 Folha de resposta dos alunos Gustavo e Hebert .....                           | 156 |
| FIGURA 61 Funções enviadas por Cecília e Ronaldo, com $0 < a \leq 1$ .....              | 157 |
| FIGURA 62 Ficha da atividade 15 .....                                                   | 159 |
| FIGURA 63 Gráfico enviado por Nádia e Leandro .....                                     | 162 |
| FIGURA 64 Gráficos enviados pelos alunos Gustavo e Hebert .....                         | 163 |
| FIGURA 65 Folha de avaliação sobre o conteúdo limites .....                             | 165 |
| FIGURA 66 Folha de resposta dos alunos Hebert e Kátia, 2ª questão.....                  | 166 |
| FIGURA 67 Folha de resposta dos alunos Davi e Fábio.....                                | 167 |
| FIGURA 68 Folha de resposta dos alunos Ronaldo/Valter.....                              | 168 |
| FIGURA 69 Folha de resposta dos alunos Ângelo e Saulo.....                              | 169 |
| FIGURA 70 Folha de resposta do aluno Vagner.....                                        | 169 |
| FIGURA 71 Ficha da atividade 16 .....                                                   | 170 |
| FIGURA 72 Folha de resposta da aluna Kelly .....                                        | 172 |
| FIGURA 73 Folha de resposta da aluna Cleusa .....                                       | 173 |

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 74 Folha de resposta da aluna Marcela.....   | 174 |
| FIGURA 75 Folha de resposta do aluno Leonardo ..... | 174 |
| FIGURA 76 Folha de resposta da aluna Kátia .....    | 174 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| QUADRO 1 Objetivos das atividades sobre limites .....                                           | 26 |
| QUADRO 2 Cronograma das atividades.....                                                         | 31 |
| QUADRO 3 Programa de Matemática Moderna para o Curso Colegial .....                             | 36 |
| QUADRO 4 Obstáculos epistemológicos sobre o ensino de limite segundo Sierpinska (1987)<br>..... | 48 |
| QUADRO 5 Livros didáticos voltados para o Ensino médio que foram analisados.....                | 67 |
| QUADRO 6 Análises dos livros segundo os critérios de avaliação.....                             | 85 |

## **LISTA DE TABELAS**

|          |                                                            |     |
|----------|------------------------------------------------------------|-----|
| TABELA 1 | Respostas dos alunos nas questões da prova semestral ..... | 133 |
| TABELA 2 | Resultados da Avaliação sobre limite .....                 | 166 |
| TABELA 3 | Tópicos envolvendo limites citados pelos alunos.....       | 171 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CEFET-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

CPMP- *Core-Plus Mathematics Project*

CTL- Center for Teaching and Learning

DGO- Divisão de Gerência e Operação – Laboratório de Informática

GEEM- Grupo de Estudos do Ensino de Matemática

LDBE- Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MEC- Ministério de Educação e Cultura

NSF- *National Science Foundation*

PCNs- Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLEM- Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio

NCTM- *National Council of Teachers of Mathematics*

WTLM- Writing to learn mathematics



## SUMÁRIO

|                                                                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO .....</b>                                                                                           | <b>18</b> |
| <b>2 O PERCURSO DA PESQUISA .....</b>                                                                               | <b>23</b> |
| 2.1 A Concepção metodológica da Pesquisa.....                                                                       | 23        |
| 2.2 Contexto da pesquisa.....                                                                                       | 29        |
| <b>3 O CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO.....</b>                                                                             | <b>33</b> |
| 3.1 Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o Cálculo era ensinado na escola secundária? .....        | 33        |
| 3.2 E nos outros países, como é a situação?.....                                                                    | 37        |
| 3.3 Por que não ensinamos Cálculo na escola de 2º grau? .....                                                       | 40        |
| 3.4 Será que Cálculo é um assunto muito difícil? .....                                                              | 41        |
| <b>4 MARCO TEÓRICO DA INVESTIGAÇÃO.....</b>                                                                         | <b>54</b> |
| 4.1 Possibilidades da escrita matemática para o ensino de limites .....                                             | 55        |
| 4.2 Possibilidades da dialética ferramenta-objeto e jogo-de-quadros para o ensino de limites .....                  | 60        |
| <b>5 O TÓPICO LIMITE NOS TEXTOS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO.....</b>                                                  | <b>64</b> |
| 5.1 Análise do livro Matemática completa .....                                                                      | 67        |
| 5.2 Análise do livro Matemática Ensino Médio .....                                                                  | 72        |
| 5.3 Análise do livro Matemática aula por aula .....                                                                 | 74        |
| 5.4 Análise do livro Matemática: contexto e aplicações .....                                                        | 76        |
| 5.5 Análise do livro introdução à análise matemática .....                                                          | 79        |
| 5.6 Análise do livro Limites e derivadas: para escolas técnicas industriais e centros de educação tecnológica ..... | 82        |
| 5.7 Uma breve síntese dos textos didáticos analisados .....                                                         | 84        |
| <b>6 A PROPOSTA EM ANDAMENTO: DA ANÁLISE A PRIORI À ANÁLISE A POSTERIORI.....</b>                                   | <b>88</b> |
| <b>6.1 Atividade 1 .....</b>                                                                                        | <b>89</b> |
| 6.1.1 Análise a priori .....                                                                                        | 89        |
| 6.1.2 Execução.....                                                                                                 | 90        |
| 6.1.3 Análise a posteriori .....                                                                                    | 91        |
| <b>6.2 Atividade 2 .....</b>                                                                                        | <b>94</b> |
| 6.2.1 Análise a priori .....                                                                                        | 94        |
| 6.2.2 Execução.....                                                                                                 | 96        |
| 6.2.3 Análise a posteriori .....                                                                                    | 97        |
| <b>6.3 Atividade 3 .....</b>                                                                                        | <b>99</b> |
| 6.3.1 Análise a priori .....                                                                                        | 99        |
| 6.3.2 Execução.....                                                                                                 | 103       |
| 6.3.3 Análise a posteriori .....                                                                                    | 103       |

|                                   |            |
|-----------------------------------|------------|
| <b>6.4 Atividade 4 .....</b>      | <b>105</b> |
| 6.4.1 Análise a priori .....      | 105        |
| 6.4.2 Execução.....               | 107        |
| 6.4.3 Análise a posteriori .....  | 108        |
| <b>6.5 Atividade 5 .....</b>      | <b>109</b> |
| 6.5.1 Análise a priori .....      | 109        |
| 6.5.2 Execução.....               | 110        |
| 6.5.3 Análise a posteriori .....  | 111        |
| <b>6.6 Atividade 6.....</b>       | <b>112</b> |
| 6.6.1 Análise a priori .....      | 112        |
| 6.6.2 Execução.....               | 116        |
| 6.6.3 Análise a posteriori .....  | 116        |
| <b>6.7 Atividade 7 .....</b>      | <b>118</b> |
| 6.7.1 Análise a priori .....      | 118        |
| 6.7.2 Execução.....               | 119        |
| 6.7.3 Análise a posteriori .....  | 120        |
| <b>6.8 Atividade 8 .....</b>      | <b>121</b> |
| 6.8.1 Análise a priori .....      | 121        |
| 6.8.2 Execução.....               | 123        |
| 6.8.3 Análise a posteriori .....  | 124        |
| <b>6.9 Atividade 9 .....</b>      | <b>125</b> |
| 6.9.1 Análise a priori .....      | 125        |
| 6.9.2 Execução.....               | 127        |
| 6.9.3 Análise a posteriori .....  | 128        |
| 6.9.4 Primeira avaliação .....    | 131        |
| Fonte: Elaborado pela autora..... | 132        |
| <b>6.10 Atividade 10 .....</b>    | <b>134</b> |
| 6.10.1 Análise a priori .....     | 134        |
| 6.10.2 Execução.....              | 136        |
| 6.10.3 Análise a posteriori ..... | 136        |
| <b>6.11 Atividade 11 .....</b>    | <b>138</b> |
| 6.11.1 Análise a priori .....     | 138        |
| 6.11.2 Execução.....              | 140        |
| 6.11.3 Análise a posteriori ..... | 140        |
| <b>6.12 Atividade 12 .....</b>    | <b>141</b> |
| 6.12.1 Análise a priori .....     | 141        |
| 6.12.2 Execução.....              | 143        |
| 6.12.3 Análise a posteriori ..... | 144        |
| <b>6.13 Atividade 13 .....</b>    | <b>146</b> |
| 6.13.1 Análise a priori .....     | 146        |
| 6.13.2 Execução.....              | 148        |
| 6.13.3 Análise a posteriori ..... | 149        |
| <b>6.14 Atividade 14 .....</b>    | <b>152</b> |
| 6.14.1 Análise a priori .....     | 152        |
| 6.14.2 Execução.....              | 154        |
| 6.14.3 Análise a posteriori ..... | 155        |
| <b>6.15 Atividade 15 .....</b>    | <b>158</b> |
| 6.15.1 Análise a priori .....     | 158        |
| 6.15.2 Execução.....              | 160        |
| 6.15.3 Análise a posteriori ..... | 161        |

|                                                        |            |
|--------------------------------------------------------|------------|
| 6.15.4 Segunda Avaliação .....                         | 164        |
| <b>6.16 Atividade 16 .....</b>                         | <b>169</b> |
| 6.16.1 Análise a priori .....                          | 169        |
| 6.16.2 Execução.....                                   | 170        |
| 6.16.3 Análise a posteriori.....                       | 171        |
| <br><b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>                 | <b>176</b> |
| <br><b>REFERÊNCIAS .....</b>                           | <b>181</b> |
| <br><b>APÊNDICE .....</b>                              | <b>191</b> |
| <b>APÊNDICE A - PRODUTO.....</b>                       | <b>192</b> |
| <br><b>ANEXO.....</b>                                  | <b>244</b> |
| <b>ANEXO A – GRÁFICOS COM O PROGRAMA WINPLOT .....</b> | <b>245</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Essa pesquisa abordou o tema limites de funções de variáveis reais, um dos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, que integra o currículo do ensino médio de uma escola técnica federal.

Muito se tem discutido sobre a questão do ensino e aprendizagem de Cálculo no Ensino Superior. Pesquisas têm sido conduzidas investigando sobre a incorporação de novas tecnologias para o ensino de Cálculo, dificuldades na sua aprendizagem, uso de diferentes abordagens metodológicas, etc. Entretanto, o debate sobre esse tema, na esfera do ensino médio, é ainda limitado. Através de uma consulta ao endereço eletrônico da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações sobre o assunto “Cálculo diferencial” foram listadas 30 teses e dissertações, todas com foco no Ensino Superior. Quando consultamos a Matemática no Ensino Médio encontramos 80 trabalhos, entre teses e dissertações, apresentando diversos conteúdos dessa disciplina, de radiciação a equações diofantinas e tópicos de estatística, mas nenhum trabalho apresentado sobre o tema Cálculo, ou seus tópicos básicos, no Ensino Médio. Uma justificativa provável para essa “escassez” de pesquisas e debates sobre esse assunto é que, o ensino de Cálculo, no Brasil, ficou praticamente restrito aos cursos superiores, da chamada área das ciências exatas.

“Ensinar Cálculo no 2º grau?” - esta é a pergunta que abre o artigo assinado pelo professor Geraldo Ávila, na Revista do Professor de Matemática, em 1991. Defensor do ensino de Cálculo no que hoje denominamos de ensino médio, Ávila realça a importância e a utilidade do Cálculo Diferencial e Integral para outras disciplinas do currículo, tal como a Física; tendo a derivada como ferramenta seria mais fácil a “introdução de conceitos como pressão, densidade de massa, densidade de carga elétrica, etc.” (ÁVILA, 1991, p. 5). Um outro ponto defendido por esse autor é que os tópicos de limites, derivadas e integral não devam ser vistos com muito rigor, justificando seu ensino:

Não se visa, com o ensino da Matemática de 2º grau, formar especialistas no assunto. Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento. (ÁVILA, 1991, p. 4)

Nosso contato inicial com limites e derivadas, no final da década de 80, ocorreu no ensino secundarista. Naquela época, a metodologia de ensino baseava-se exclusivamente na

aula expositiva. De modo geral, qualquer tópico de Matemática era abordado de forma totalmente desvinculada de contextos, de outros conteúdos, exigindo-se somente o entendimento (ou repetição) do algoritmo apresentado pelo professor.

Já no curso de engenharia, sentimos as mesmas dificuldades apresentadas por vários colegas: não bastava a aplicação e repetição dos mecanismos apresentados em sala de aula. Muitas vezes, precisávamos analisar e compreender os problemas enunciados para então aplicarmos os conceitos e procedimentos aprendidos. Esses obstáculos com relação ao estudo de Cálculo estariam relacionados com a necessidade de uma visualização gráfica das funções? Ou era a integração da matemática com outras disciplinas, a sua contextualização, que nos causava estranheza?

Foi a dedicação ao estudo das disciplinas de Cálculo que nos levou a trocar a carreira de Engenharia Química pela de professora de Matemática. Com o tempo, o prazer de entrarmos em uma sala de aula, de perceber o desenvolvimento gradual de nossos alunos, foram alguns fatores, entre outros, que nos fizeram permanecer na vida acadêmica.

Em nossa experiência como professora de uma escola técnica, onde o estudo de tópicos fundamentais de Cálculo se justifica por sua utilização nas disciplinas específicas das áreas de eletrônica e eletrotécnica, observamos em nossos alunos uma preocupação em memorizar procedimentos, não sendo capazes de fazer associações de conteúdos dentro da própria disciplina ou de temas desta com outras disciplinas. Muitas vezes, são capazes de recitar conceitos ou definições sem, entretanto, compreendê-los. Falando especificamente sobre os tópicos fundamentais de Cálculo, verificamos que muitos alunos querem decorar e trabalhar limites sem que esses tenham qualquer relação com os gráficos das funções envolvidas nos exercícios. Porque os alunos, ao estudar o comportamento de funções, não conseguem associá-las aos seus gráficos? Seria uma dificuldade de visualização dos gráficos das funções envolvidas nos exercícios? O uso de recursos computacionais diminuiria esse obstáculo?

Paulo Boulos (1999), autor de vários livros de Matemática, no prefácio ao professor, no seu livro de Pré-Cálculo, afirma que o ensino de Cálculo fica prejudicado pela falta de conhecimento básico por parte do aluno, acrescido das dificuldades da própria disciplina. Sabemos que o Cálculo é uma disciplina com alto índice de reprovação, mas quais são essas dificuldades citadas pelo autor? Nesse livro, a preocupação de Boulos (1999) recai sobre o ensino de números reais. Além disto, há uma preferência pela linguagem direta e coloquial e pelas poucas demonstrações, justificando essas escolhas pela falta de tempo na abordagem do assunto. Mas, a falta de base do aluno restringe-se somente ao conhecimento dos números

reais? E o que podemos dizer acerca do conhecimento das funções, por parte dos estudantes?

Analisando os conteúdos de Cálculo, podemos observar que o conceito de limite serve de alicerce ao entendimento de outros tópicos como derivadas e integrais. A importância desse conceito é citada por Zuchi (2005) ao afirmar que “limite é o que distingue, no nível mais básico, o Cálculo da Álgebra, Geometria e o resto da Matemática” (ZUCHI, 2005, p. 37).

Assim, refletindo sobre nossa experiência, não só como professora, mas também como aluna, percebemos que não necessariamente a abordagem dada ao limite, no Ensino Médio, leva em conta o contexto, principalmente, referindo-se a uma escola técnica. Que tipo de abordagem do conceito de limite poderia ser mais significativa para esses estudantes? Uma abordagem mais intuitiva? Como lidar com as questões conceituais? Que dificuldades estudantes de Ensino Médio podem apresentar no processo de ensino e aprendizagem de limites? Qual o significado de se ensinar esse tópico no Ensino Médio?

Essas questões convergiram para uma indagação principal:

### **Que abordagens metodológicas podem contribuir para o entendimento de limite de funções reais no Ensino Médio?**

Desta forma, o objetivo geral da pesquisa proposta foi investigar e propor abordagens metodológicas que possam contribuir para o estudo e aprendizagem, no Ensino Médio, de um conteúdo fundamental do Cálculo – limites de funções de uma variável real.

“Como fazer isso?” é outra das perguntas do professor Geraldo Ávila (1991, p. 1). A pergunta refere-se a como introduzir o conteúdo de Cálculo em um programa de Matemática, no Ensino Médio. Esse, entretanto, não é o nosso foco – a escola escolhida para o desenvolvimento dessa pesquisa leciona, há muito tempo, os tópicos de Cálculo nos cursos técnicos. Assim, interpretamos a pergunta anterior no sentido de “qual a melhor abordagem para ensinar limites para estudantes do ensino médio”. Pensamos, inicialmente, em algumas estratégias de ensino que poderiam contribuir para o entendimento de limites no Ensino Médio, ou em um curso introdutório de Cálculo no Ensino Superior, tais como a modelagem matemática, a abordagem histórica, resolução de problemas, investigação matemática e o uso de tecnologias de informação e comunicação.

As abordagens metodológicas listadas anteriormente constituem algumas das principais tendências atuais da Educação Matemática. Cada uma pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e para a construção do conhecimento por parte

do aluno. Entretanto, preferimos utilizar uma abordagem apoiada no conceito “Writing to learn Mathematics”, isto é, escrever para aprender Matemática, teoria que é recomendada pelo National Council of Teachers of Mathematics e utilizada por diversos pesquisadores e professores de Matemática nos Estados Unidos, que advogam que a escrita é uma forma fundamental de aprendizagem (PORTER; MASINGILA, 2000). Herrick (2005) afirma que muitas pesquisas têm sido desenvolvidas sobre esse assunto, nos diversos níveis de escolaridade americana. Entendemos, tal qual muitos outros professores/pesquisadores, que o fato de escrever um raciocínio, um desenvolvimento de um procedimento matemático, poderia favorecer uma maior compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos envolvidos no processo matemático.

Da mesma forma, os estudos de Douady (1986) acerca da dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros deram sustentação teórica à pesquisa na medida em que afirmam que a manipulação de um tópico matemático seja na forma algébrica, verbal ou gráfica, pode beneficiar o processo de construção do conhecimento desse tópico. A discussão teórica foi importante no desenho da proposta *Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real*, que foi elaborada com o objetivo de introduzir os conceitos desse tópico de Matemática em uma escola técnica.

A trajetória dessa pesquisa, que teve como primeiro capítulo a introdução, é relatada a seguir.

O segundo capítulo dessa dissertação descreve a metodologia utilizada nesse trabalho - a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1989). Esse capítulo também apresenta o contexto da escola e dos alunos que participaram da pesquisa.

No terceiro capítulo buscamos justificar o tema escolhido, retornando as perguntas levantadas por Ávila (1991), acerca do ensino do Cálculo, situando a pesquisa no contexto do ensino no Brasil e em outros países. Também nesse capítulo apresentamos as dificuldades e os obstáculos relativos ao ensino de limite, na visão de Artigue (1990; 1989; 1995; 1998), Cornu (1991), Sierpiska (1994) e outros pesquisadores. Esse capítulo teve por objetivo levantar uma discussão sobre a dimensão cognitiva acerca do tema de limite, integrando a análise prévia da engenharia didática.

A teoria desenvolvida por Douady (1986), dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros, é discutida no quarto capítulo. Nesse capítulo, a escrita em Matemática é abordada de uma forma mais detalhada. Essas duas teorias orientaram o desenho do texto *Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real*.

No quinto capítulo observamos como o ensino de limite é abordado no Ensino Médio, através da análise de alguns livros didáticos para o Ensino Médio.

As atividades que integram o produto final dessa dissertação, *Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real*, são apresentadas no sexto capítulo, procedendo-se às análises a priori para concepção das atividades, a execução e as análises a posteriori, evidenciando as descobertas dos alunos.

Nesse sétimo capítulo, discutimos a validação da engenharia didática dessa pesquisa e de sua reprodutibilidade. As limitações da pesquisa são apontadas nesse capítulo, assim como novas questões para investigações futuras.



## 2 O PERCURSO DA PESQUISA

A concepção metodológica da pesquisa fundamenta-se na engenharia didática, que tem por característica “uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em Didática da Matemática.” (PAIS, 2008, p. 99).

A engenharia didática insere-se na tendência francesa da Didática da Matemática, que de acordo com Almouloud, tem a característica de conduzir pesquisas tais que submetem o “o fenômeno à experimentação e a uma intervenção a partir da organização sistemática dos fenômenos observados.” (ALMOULOUD, 2008, p. 63).

A Didática da Matemática tem por objeto de estudo a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com o saber escolar matemático, buscando manter, tanto no nível experimental da sala de aula quanto no teórico da pesquisa acadêmica, fortes vínculos com a formação de conceitos Matemáticos (PAIS, 2008). “Desta forma, todos os conceitos didáticos se destinam a favorecer à compreensão das múltiplas conexões entre a teoria e a prática e esta condição é um dos princípios dessa área de estudo.” (PAIS, 2008, p. 11).

### 2.1 A Concepção metodológica da Pesquisa

Utilizamos nessa pesquisa uma abordagem qualitativa, inspirada no traçado da Engenharia Didática. Essa metodologia de pesquisa surgiu no princípio da década de 80 e nela se destaca a pesquisadora francesa Michèle Artigue (1989). De acordo com Machado (1999), a engenharia didática caracteriza-se por uma organização particular dos procedimentos metodológicos de pesquisa em educação matemática.

O termo Engenharia Didática é uma analogia entre o trabalho didático e o trabalho do engenheiro, que se apóia na teoria para executar um projeto, mas ao mesmo tempo se vê “obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos apurados pela ciência e, portanto a enfrentar, praticamente, com todos os meios de que dispõe, os problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.” (ARTIGUE, 1989, p. 283, tradução nossa)<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> [...] se trouve obligé de travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science et donc de s'attaquer pratiquement, avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes que la science ne veut ou ne peut encore prendre en charge (ARTIGUE, 1989, p. 283).

Segundo Machado (1999), a engenharia didática interliga o plano teórico com o experimental da sala de aula, estabelecendo uma articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica.

De acordo com Carneiro (2005), a “Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa.” (CARNEIRO, 2005, p. 90). Optamos por utilizar a Engenharia Didática porque, segundo Pais (2008), ela “possibilita uma sistematização metodológica para a realização prática da pesquisa” (PAIS, 2008, p. 99). Além disso, a Engenharia Didática permite “a percepção de que professor pesquisador é aquele que consegue articular ação didática com produção de conhecimento.” (CARNEIRO, 2005, p. 90).

As pesquisas em Engenharia Didática podem ocorrer em dois níveis: o de microengenharia, que se encarrega de um determinado assunto, sendo localizadas e se preocupando, principalmente, com a complexidade dos fenômenos em sala de aula; e o de macroengenharia, que permite “compor a complexidade das pesquisas de microengenharia com a dos fenômenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem” (MACHADO, 1999, p. 199). Nesse trabalho, em particular, nos preocuparemos com a microengenharia para trabalhar com limite de função real.

As quatro fases propostas por essa metodologia são a análise preliminar; a concepção e análise *a priori*; a experimentação; a análise *a posteriori* e validação.

A primeira etapa da Engenharia Didática, denominada de análise preliminar ou prévia, tem por objetivo realizar um estudo sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos já adquiridos, sendo necessárias análises, tais como:

- a análise epistemológica de conteúdos abordados no ensino;
- a análise de pesquisas atuais e de seus resultados;
- a análise dos conceitos dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam seu desenvolvimento;
- a análise dos obstáculos sobre os quais se situará a realização didática efetiva;
- e, sobretudo, buscando os objetivos específicos da pesquisa. (ARTIGUE, 1989, p. 287-288, tradução nossa)<sup>2</sup>

Para a análise preliminar dessa pesquisa em questão, objetivamos focalizar três dimensões:

---

<sup>2</sup> - l’analyse épistémologique des contenus visés par l’enseignement,  
 -l’analyse de l’enseignement usuel et de ses effets,  
 - l’analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution,  
 -l’analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective,  
 - et bien sûr en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche (ARTIGUE, 1989, p. 287-288).

- a. epistemológica: através da análise histórica da disciplina Matemática no Brasil e como o conteúdo de Cálculo aparece nos currículos do Brasil e de outros países. Essa análise do ensino de limite é estabelecida no capítulo “O Cálculo no Ensino Médio”, nos subcapítulos 3.1. e 3.2.;
- b. cognitiva: observando os obstáculos relacionados ao ensino e aprendizagem de limites, comentados no subcapítulo 3.4, e as características dos alunos que participaram dessa pesquisa. Uma descrição dos sujeitos participantes da pesquisa é apresentada a seguir, no item 2.2. Além disso, procuramos saber o que o aluno sabe a respeito de limites, através da aplicação de um questionário sobre o tema. Esse questionário constituiu a primeira atividade planejada;
- c. didática: através da análise da maneira como o assunto é abordado em alguns livros didáticos disponíveis para o Ensino Médio. Essa análise é feita no capítulo 4.

O quinto capítulo, sobre as teorias dialética ferramenta-objeto e escrever para aprender Matemática, compreendeu o estudo das teorias que procuram sustentar a indagação principal dessa pesquisa e, por esse motivo, integrou, também, a análise prévia da engenharia didática.

A análise preliminar, embora constitua a primeira fase da engenharia didática, deve ser retomada e examinada durante todo o processo do trabalho.

Na segunda fase, da concepção e análise *a priori*, o professor escolhe alguns parâmetros pertinentes ao sistema, denominados de variáveis de comando. Essas variáveis de comando podem ser macro-didáticas ou globais quando focalizarem a organização global da Engenharia Didática ou micro-didáticas ou locais, quando se referirem à organização de uma sessão. Essas variáveis são decisões que devem ser tomadas para a concepção das atividades. Para nossa pesquisa, consideramos variáveis macro-didáticas, que coordenaram as atividades no patamar global, de forma a:

- a. limitar a complexidade das definições e demonstrações: para que o aluno tome parte da construção de seu conhecimento, as atividades não devem apresentar um excesso de demonstrações. As demonstrações, teoremas e definições necessários para o desenvolvimento do assunto serão explicitados pela professora após a execução da atividade, na fase de

institucionalização;<sup>3</sup>

- b. empregar o conhecimento prévio dos alunos sobre funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas como ferramenta para construção do conceito de limite;
- c. utilizar ferramentas informatizadas, em particular o software Winplot, para a construção do esboço gráfico de algumas funções, favorecendo o uso do quadro gráfico.

As variáveis micro-didáticas de cada seção foram definidas separadamente, indicando o tempo de execução de cada atividade, seu objetivo, se o trabalho seria executado em dupla ou não, em sala, extraclasse ou no laboratório de informática. As variáveis micro-didáticas são descritas mais detalhadamente no início da análise *a priori* de cada atividade. No Quadro 1, abaixo, descrevemos os objetivos estabelecidos para as atividades:

| Atividade | Objetivo                                                                                                |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|           | Levantar o conhecimento prévio dos alunos sobre limite.                                                 |
|           | Introduzir o conceito de vizinhança de um ponto.                                                        |
|           | Reforçar o conceito de vizinhança colocado na atividade 2.                                              |
|           | Introduzir a definição informal de limite de uma função real de uma variável real.                      |
|           | Apresentar o conceito de limites laterais.                                                              |
|           | Reforçar o conceito de limites laterais e introduzir a idéia de continuidade de funções.                |
|           | Introduzir as propriedades de limites.                                                                  |
|           | Trabalhar as propriedades de limites para o cálculo de limites de funções.                              |
|           | Reforçar os conceitos vistos até a atividade 8.                                                         |
|           | Introduzir o limite de função racional, com indeterminação do tipo 0/0.                                 |
|           | Reforçar o tipo de limite visto na atividade 10.                                                        |
|           | Apresentar o limite tendendo para infinito, de funções racionais, com o denominador tendendo para zero. |
|           | Introduzir o limite com $x$ tendendo ao infinito, de funções polinomiais e racionais.                   |
|           | Apresentar o limite trigonométrico fundamental.                                                         |
|           | Apresentar o limite exponencial fundamental.                                                            |
|           | Verificar o conhecimento do aluno sobre limites, após a aplicação das atividades.                       |

Quadro 1: Objetivos das atividades sobre limites

Fonte: Elaborado pela autora

<sup>3</sup> A institucionalização é uma fase da dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1986) em que o professor, através de demonstrações, teoremas e exemplos, atribui o status de objeto ao tópico estudado.

O texto *Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real* foi planejado objetivando um entendimento por parte do aluno sobre limites, visando que ele domine o conceito. Quando pretendemos que o estudante domina o conceito de limite estamos nos referindo a que ele seja capaz de explicar o conceito de limite, de propor exemplos, analisar os exercícios propostos a ele, compreender alguns teoremas e propriedades de limite. A expressão “definição informal de limite”, que aparece nessa pesquisa, refere-se a conceitualização de limite, utilizando a noção dinâmica do conceito (CORNU, 1991).

De acordo com Machado (1999), “a análise *a priori* objetiva a consideração do aluno sob dois aspectos: o descritivo e o previsivo.” (MACHADO, 1999, p. 206). Assim, para as análises *a priori* das atividades, procuramos descrever as respostas possíveis que os alunos poderiam fornecer para cada questão.

A experimentação é o momento da realização da Engenharia Didática com os alunos da investigação. Nessa etapa, os instrumentos de pesquisa são aplicados e é feito o registro das observações da sessão. Na execução das atividades, o aluno tem participação na construção do seu conhecimento. Aqui, o foco da pesquisa recai sobre o aluno e o papel do professor é retomado posteriormente, quando ocorre a condução da socialização dos resultados das atividades aplicadas.

A quarta fase da engenharia didática, a análise *a posteriori*, é aquela em que se faz a apreciação de todo o material produzido pelo aluno, em sala ou fora dela, bem como o exame de todos os dados colhidos durante a fase de experimentação. É através “da confrontação entre as análises *a priori* e a *a posteriori* que se validam ou refutam as hipóteses levantadas no início da engenharia.” (MACHADO, 1999, p. 208).

A validação da engenharia didática é um processo interno, resultado do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Para facilitar a leitura e o entendimento desse processo, preferimos apresentar essas análises juntamente com suas atividades. No capítulo 7, discutimos a validação do processo global da Engenharia Didática e de sua reprodutibilidade<sup>4</sup>.

Inspirando-nos no mapa da Engenharia Didática apresentado por Carneiro (2005), podemos esquematizar a nossa pesquisa através do fluxograma apresentado na Figura 1:

---

<sup>4</sup> Esse termo refere-se à reprodução da engenharia didática em outra situação. Outro termo semelhante utilizado é a palavra replicabilidade.

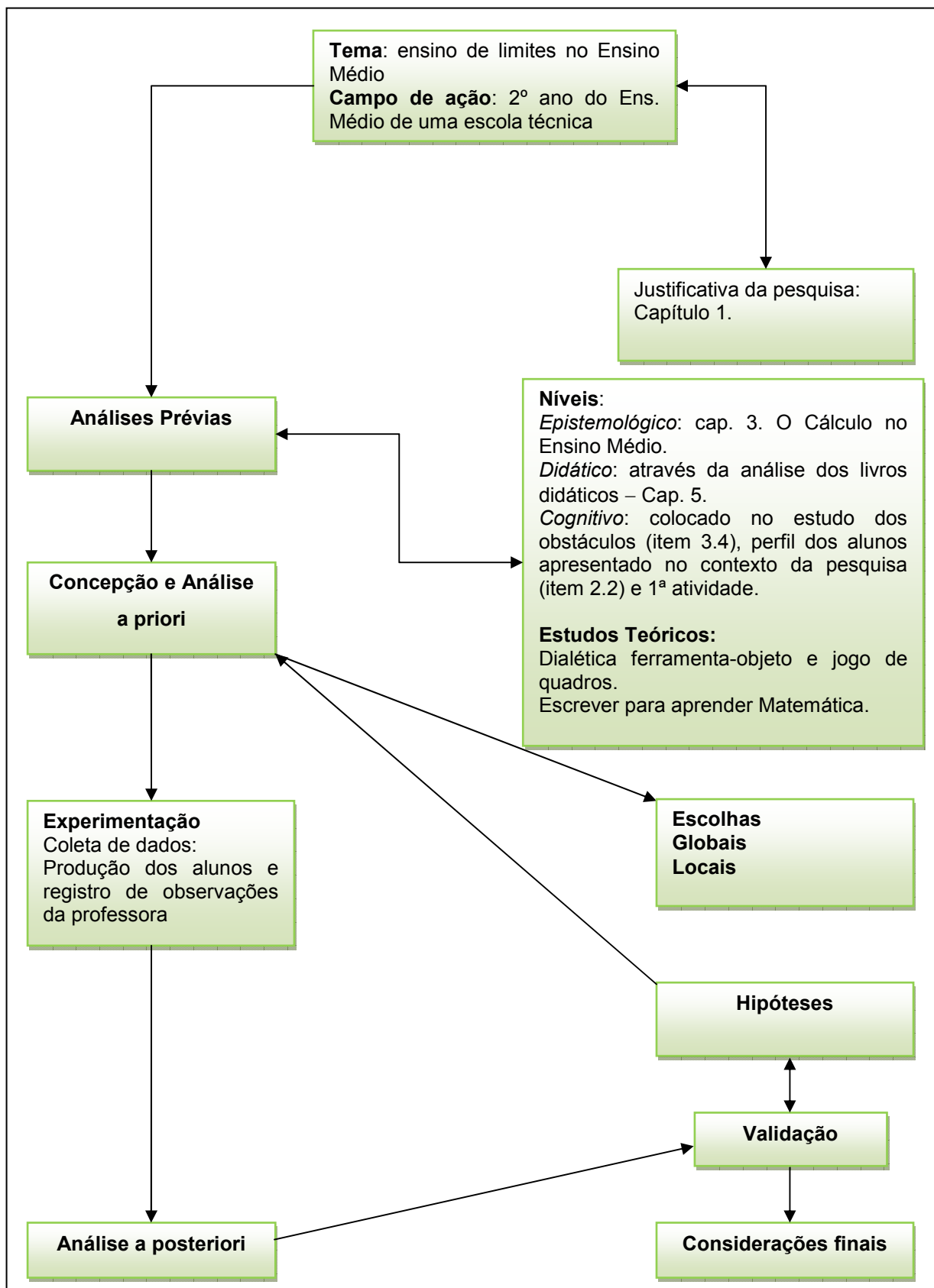


Figura 1: Mapa da Engenharia Didática para o ensino de limite  
Fonte: Adaptado de Carneiro, 2005

## 2.2 Contexto da pesquisa

A pesquisa aqui relatada foi desenvolvida em uma escola de educação tecnológica de Minas Gerais, uma instituição federal de ensino onde são ofertados, além de cursos de graduação e de pós-graduação, cursos profissionais técnicos.

De acordo com a Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República, Ministério da Educação (BRASIL, 2008), o termo integrado que aparece em ensino médio integrado tem por significado:

- a. filosófico: como uma visão omnilateral para a formação humana, associando trabalho, conhecimento e cultura;
- b. epistemológico: onde “o currículo integra a unidade entre conhecimentos gerais e específicos, bem como a relação entre parte e totalidade na seleção e organização dos conhecimentos”;
- c. político: “o qual se manifesta na possibilidade de oferecer um Ensino Médio que abranja a educação profissional técnica”.

Assim, o documento Reestruturação e expansão do ensino médio no Brasil (BRASIL, 2008a), categoriza o curso médio como: integrado, sem a formação profissional, que prevê a integração da ciência, cultura e trabalho; ou integrado profissional, resultante da integração do ensino com a educação profissional técnica de nível médio.

Os cursos profissionais técnicos da escola pesquisada podem ser de nível médio na forma integrada, para alunos que concluíram o ensino fundamental e desejam, ao término do ensino médio, um diploma de um curso técnico; concomitância externa, quando os alunos já concluíram a primeira série do ensino médio e que só cursarão, na instituição, as disciplinas técnicas; ou de nível médio subsequente, objetivando os alunos que já concluíram o Ensino Médio, mas que desejam fazer o curso técnico.

A forma de entrada em qualquer modalidade de ensino é através de um exame seleção envolvendo conhecimentos em português, matemática, física, química, biologia, geografia e história. Os cursos de nível médio oferecidos são de eletrônica, eletrotécnica, mecânica, turismo, estrada, informática industrial e outros, perfazendo um total de dezessete cursos. A grade curricular é independente por curso, sendo composta por matérias próprias, que garantem a competência do profissional técnico em cada área específica. Entretanto, as

disciplinas do núcleo básico, como matemática, física, biologia, história, etc, são obrigatórias para todos os alunos, isto é, as ementas curriculares são unificadas para todos os cursos técnicos situados nos campus de Belo Horizonte.

Participaram dessa pesquisa trinta e oito alunos, com idades entre 15, 16 e 17 anos, regularmente matriculados no Segundo Ano do Curso Técnico em Informática Industrial, sendo que destes, cinco estavam repetindo o ano. As atividades foram aplicadas em treze aulas, divididas entre o final do segundo bimestre e início do terceiro bimestre. As aulas, de cinquenta minutos cada, são agrupadas semanalmente em duas aulas geminadas em um dia e a terceira aula em outro dia da semana.

Todos os alunos já haviam cursado o Primeiro Ano do curso técnico em Informática Industrial, quando estudaram as funções polinomiais de primeiro grau e de segundo grau, funções modular, exponencial e logarítmica, além das funções trigonométricas, progressões aritmética e geométrica. Assim, espera-se que o aluno, no segundo ano do ensino médio, possa reconhecer/esboçar os gráficos das funções citadas, identificando zeros e intervalos de crescimento e decrescimento das mesmas.

Algumas sessões foram planejadas para que os alunos utilizassem um programa livre, Winplot, para a visualização do esboço gráfico de algumas funções. Por este motivo, os alunos tiveram um contato prévio com o programa, durante duas aulas de 50 minutos, em dias diferentes. Na primeira aula aprenderam a utilizar os menus de equações, de arquivos e de ajuda e esboçaram funções polinomiais de primeiro e segundo grau. Na segunda aula aprenderam a esboçar outras funções polinomiais, logarítmicas, exponenciais e trigonométricas, além de trabalharem com famílias de funções e animação dessas, entre outras opções do menu do programa. Pelo fato dos comandos estarem em português e do programa ter uma interface amigável, os alunos não demonstraram dificuldade em seu manuseio. No Anexo A são mostrados os esboços gráficos das funções estudadas no primeiro contato dos alunos com o programa Winplot, realizados pela aluna Tamires. A escolha dos gráficos dessa aluna foi aleatória, sendo sorteada entre os alunos que enviaram os gráficos por e-mail para a professora. Todos os alunos manusearam o programa individualmente nessa aula introdutória, orientados pela professora, para que aprendessem as funções básicas do mesmo. No final da aula, os estudantes tiveram um tempo para criarem seus próprios gráficos e para que explorassem livremente o programa.

Esse estudo foi idealizado de forma tal que pudesse ser realizado dentro do planejamento curricular da escola técnica escolhida. Desta forma, a execução das atividades iniciou-se no final do segundo bimestre de 2009, sendo as atividades planejadas para serem



trabalhadas em duplas ou trios, de forma a favorecer o debate das questões propostas. O cronograma da aplicação das atividades e avaliações encontra-se no Quadro 2.

| Data       | Atividade             | Local                      |
|------------|-----------------------|----------------------------|
| 30/6/2009  | 1, 2 e 3 <sup>5</sup> | Em classe                  |
| 3/7/2009   | 4                     | Em classe                  |
| 3/7/2009   | 5 e 6                 | Em classe                  |
| 7/7/2009   | 6 e 7                 | Extraclasse                |
| 10/7/2009  | 7 e 8                 | Em classe                  |
| 10/7/2009  | 9 <sup>6</sup>        | Extraclasse                |
| 14/7/2009  | Avaliação             | Em classe                  |
| 11/8/2009  | 10                    | Em classe                  |
| 11/8/2009  | 11                    | Extraclasse                |
| 14/8/2009  | 12                    | Laboratório de Informática |
| 14/8/2009  | 13                    | Laboratório de Informática |
| 18/8/2009  | 14                    | Laboratório de Informática |
| 21/8/2009  | 15                    | Laboratório de Informática |
| 28/8/2009  | Avaliação             | Em classe                  |
| 02/10/2009 | 16                    | Em classe                  |

Quadro 2: Cronograma das atividades

Fonte: Elaborado pela autora

O planejamento e a execução das atividades foram inspirados na metodologia de engenharia didática de Artigue (1989), sendo que para cada atividade foram estabelecidas a análise a priori, a execução e a análise posteriori. A primeira atividade serviu para contribuir com a fase de análises preliminares, dentro da dimensão cognitiva da engenharia didática.

Em todas as atividades, excetuando a primeira e a última, os alunos tiveram oportunidade de trabalhar em duplas, estimulando o diálogo matemático. Cada aluno recebeu uma folha de atividades, sendo que cada dupla devolvia uma folha com as respostas e mantinha outra para as devidas correções, após a socialização das atividades. Além disso, as

<sup>5</sup> A atividade 3 foi iniciada em sala de aula mas concluída extraclasse.

<sup>6</sup> A atividade 9 foi distribuída dia 10/07 mas a institucionalização ocorreu no dia 14/07

atividades foram planejadas de tal forma que os alunos pudessem trabalhar com representações de suas idéias nos quadros algébrico, numérico, gráfico ou através da língua materna, seguindo uma linha influenciada por Douady (1986).

Planejando a coleta de dados, cogitou-se, inicialmente, utilizar o recurso de vídeo para a gravação da fase de execução e socialização de cada atividade. Entretanto, em uma experiência anterior a este trabalho, muitos alunos mostraram-se pouco confortáveis com esse recurso. Com receio de que esse recurso pudesse interferir no processo de investigação dessa pesquisa, a utilização do vídeo foi desconsiderada.

O emprego de um instrumento de gravação de áudio foi utilizado nas primeiras seções. Contudo, devido à grande quantidade de ruídos da sala, a transcrição do áudio ficou prejudicada e, por esse motivo, esse recurso também não foi utilizado.

Consideramos, então, como instrumentos de coleta de dados o registro da observação da professora nos momentos de execução e socialização das atividades, questionários com perguntas de caráter aberto ou misto para a primeira e para a última atividade e os registros escritos produzidos pelos alunos, contendo as resoluções das questões propostas em cada atividade.

Para preservar a identidade dos alunos foram adotados, nesta pesquisa, nomes fictícios. As respostas consideradas mais relevantes para a validação da engenharia didática foram reproduzidas e interpretadas nas análises *a posteriori* de cada atividade.

### 3 O CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Atualmente a abordagem de conceitos de cálculo no Ensino Médio, no Brasil, limita-se, de modo geral a um estudo das funções reais de uma variável. Poucas instituições abordam os conteúdos de limites (objeto de estudo dessa pesquisa), derivadas e integrais.

Fundamentamo-nos no artigo do professor Geraldo Ávila (1991) para, através das perguntas por ele levantadas, estruturarmos a interlocução teórica que justifica a escolha do tema da pesquisa desenvolvida: “Por que não ensinamos Cálculo na escola de 2º grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o Cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação?” (ÁVILA, 1991, p. 1). Iniciamos com um breve retrospecto acerca da presença do Cálculo na escola secundária, no Brasil, analisando o que ocorre nos currículos da escola secundária em outros países, para então discutirmos as questões ligadas à ausência do estudo do Cálculo nessa etapa da escolaridade.

#### 3.1 Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o Cálculo era ensinado na escola secundária?

Para responder a essa questão, analisaremos três períodos diferentes na história do ensino no Brasil, que marcaram profundamente a disciplina de Matemática - a Reforma Francisco Campos, a Reforma Gustavo Capanema e o Movimento da Matemática Moderna.

Entre as mudanças importantes que ocorreram na educação do Brasil, podemos citar a Reforma Francisco Campos, no princípio da década de 30, que foi criada a partir de uma série de decretos e “tinha como principal objetivo organizar o sistema de ensino secundário, comercial e superior no país.” (ALVAREZ, 2004). Nessa reforma, criou-se a disciplina Matemática, resultado da fusão das disciplinas de Álgebra, Aritmética e Geometria. O ensino secundário em duas etapas: uma fundamental de cinco anos, comum a todos os estudantes e outra, denominada complementar, de dois anos, dividido em três áreas de conhecimento “Jurídico; Medicina, Farmácia e Odontologia; Engenharia e Arquitetura” (ALVAREZ, 2004).

De acordo com Alvarez (2004), observa-se, na Reforma Campos, a introdução de uma “nova didática”, baseada no Método Heurístico, que em muitos aspectos nos lembra as

preocupações atuais no ensino de Matemática ~ questionamento sobre o papel do aluno como descobridor do próprio conhecimento; crítica a valorização da memorização; favorecimento da integração dos três ramos da Matemática (Geometria, Álgebra e Aritmética).

Nessa reforma, estudo de funções foi escolhido como elemento integrador dos ramos da Matemática: “A função era tida como o tema integrador de toda a matemática elementar, seu estudo levaria a compreensão das primeiras noções do Cálculo infinitesimal.” (ALVAREZ, 2004). O ensino secundário era de caráter elitista, não obrigatório, e tinha por finalidade permitir o ingresso do aluno nos cursos superiores. Além disso, o ensino secundário tinha duração de sete anos dividido em um curso comum ou fundamental, de cinco anos, e dois anos de curso preparatório para o ingresso no curso superior, denominado de curso complementar.

A introdução das noções de Cálculo, limites, derivadas e primitivas ~ abrangendo o cálculo de áreas, no programa do ensino secundário, era justificada por sua aplicação prática e o sendo recomendada para o quinto ano do ensino secundário. Bicudo, citado por Alvarez (2004), apresenta o programa do 5º ano do curso comum do ensino secundário:

[...]

Derivada de um polinômio inteiro em  $x$ .

Noção de limite. Derivada de  $x$ . Derivada de seno de  $x$ , co-seno de  $x$ , tangente de  $x$  e cotangente de  $x$ .

Interpretação geométrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples.

Processos elementares de desenvolvimento em série; convergência de uma série.

Desenvolvimento em série do seno, co-seno e tangente.

Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas. Aplicação ao cálculo de certas áreas. [...] (BICUDO apud ALVAREZ, 2004)

A próxima reforma ocorrida no ensino brasileiro no início da década de 40 foi a Reforma Gustavo Capanema, cujo objetivo era

conceder ao ensino secundário brasileiro um caráter eminentemente educativo, e não mais um instrumento pelo qual o jovem adquirisse os conceitos essenciais aos exames aos cursos superiores, fazendo destes mesmos exames, a finalidade em si do Ensino Secundário. (RIBEIRO, 2006, p. 29)

Na Reforma Capanema, o curso fundamental ou comum do ensino secundário, de duração de cinco anos, passou a se denominar ginásio, constituído por quatro anos, e os cursos complementares, anteriormente de dois anos e três opções, passaram a ser ofertado em três anos e apresentando duas áreas: o Científico, onde o foco era o estudo de ciências, e o Clássico, em que predominava o estudo de línguas antigas. Os cursos Científico e Clássico

integravam o Curso Colegial.

Ribeiro (2006) observa que a divisão dos conteúdos programáticos compreendia seis blocos distintos e isolados: aritmética teórica, álgebra, álgebra vetorial, geometria, geometria analítica e trigonometria. O estudo de limites, derivada e integral ainda aparece nos programas de Matemática durante a Reforma Capanema:

Álgebra: Cálculo numérico das raízes de equações algébricas ou transcendentais, métodos clássicos de aproximação, máximos e mínimos; estudo da variação de uma função, representação cartesiana; funções de uma variável real, [...]; funções contínuas, noções de continuidade uniforme, propriedades fundamentais, operações sobre funções contínuas; diferença finita, derivada diferencial, definições, notações e interpretação geométrica; Cálculo das derivadas e das diferenciais, aplicação às funções elementares; equações diferenciais ordinárias e de derivadas parciais, sua formação; equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes; diferenças, derivadas e diferenciais sucessivos, aplicação às funções elementares; [...] funções primitivas, aplicações elementares; limites máximos e mínimos, extremos superior e inferior; limites; número e limite de  $U$ , tipo  $1 \times \infty$ ; formas indeterminadas, regra de l'Hopital, comparação das funções exponenciais e logarítmicas com os polinômios; [...] integrais definidas e indefinidas, integrais imediatas, integração por partes e por substituição; principais tipos integráveis, por quadraturas, de equações diferenciais ordinárias de 1.ª ordem; [...] (RIBEIRO, 2006, p. 71-72)

Na década de 50, muitos países sentiram a necessidade de uma reforma em seu ensino. Era o início da corrida espacial, com o lançamento do foguete Sputnik, e notava-se uma necessidade por uma estrutura de ensino que privilegiasse o estudo das Ciências e da Matemática. O principal representante, no Brasil, desse movimento mundial, conhecido como Movimento da Matemática Moderna, foi Osvaldo Sangiorgi, que depois veio a ser o coordenador do Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), criado em outubro de 1961. Segundo Valente (2008), as atividades do GEEM foram intensificadas, tanto para a realização de atividades com professores para divulgar a Matemática Moderna, quanto para elaborar um programa de Matemática Moderna para o ensino secundário. Os assuntos mínimos deste programa envolviam vinte e quatro conteúdos de ensino para as quatro séries do ginásio e dezoito itens para os três anos do Curso Colegial, que constituíam, na época, o ensino secundário. No Quadro 3 listamos os conteúdos relativos ao ensino de Cálculo.

| ASSUNTOS MÍNIMOS                                                                                                        | SUGESTÕES                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1- Função de 2º Grau. Estudo completo do trinômio do 2º Grau e aplicações.                                              | No estudo do trinômio, ressaltar o aspecto gráfico e nas aplicações, as inequações do 2º Grau.                                                                                          |
| [...]                                                                                                                   | [...]                                                                                                                                                                                   |
| 8- Transformações pontuais: translação, rotação, simetria e homotetia.                                                  | Ressaltar as estruturas definidas através desses tipos de transformação.                                                                                                                |
| [...]                                                                                                                   | [...]                                                                                                                                                                                   |
| 14- Sistema de equações lineares. Noção de matrizes: aplicações.                                                        | O estudo pode ser feito através da teoria dos determinantes ou preferivelmente, pelas matrizes. Ressaltar as estruturas algébricas das operações com matrizes (anel e espaço vetorial). |
| [...]                                                                                                                   | [...]                                                                                                                                                                                   |
| 18- Noção de limite, continuidade e derivadas. Elementos de Cálculo integral; aplicações ao cálculo de áreas e volumes. | Dar noções intuitivas, que permitam deduzir as principais propriedades, que serão utilizadas nas aplicações a outras ciências.                                                          |

Quadro 3: Programa de Matemática Moderna para o Curso Colegial

Fonte: VALENTE, 2008, p. 602

Novamente, podemos observar a inclusão de tópicos de Cálculo, com sugestões para uma abordagem mais conceitual, no programa de Matemática do ensino secundário proposto pelos professores do Movimento da Matemática Moderna. Entretanto, observando as mudanças no ensino acarretadas por esse movimento, Ávila (1991) afirma que “a tônica dessa modernização foi uma ênfase excessiva no rigor e no formalismo das apresentações, à custa, inclusive, de retirar dos antigos programas tópicos importantes no ensino, como a Geometria e o Cálculo” (ÁVILA, 1991, p. 1).

Atualmente, no Brasil, os conteúdos programáticos da Educação Básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio) norteiam-se pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), criados pelo Ministério da Educação, partindo de princípios definidos nas Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Tendo como pano de fundo a *Revolução Informática*, devido aos avanços da micro-eletrônica, objetiva-se que:

A formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação.

Propõe-se, no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização. (BRASIL, 2000).

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) deve-se priorizar a qualidade em relação à quantidade de conteúdos. Desta forma, quatro blocos organizam os temas estudados na Matemática: números e operações, funções, geometria, análise de dados e probabilidade. Há uma única menção ao ensino de Cálculo:

A maior parte dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio está vinculada a modelos matemáticos de natureza contínua: os números reais e os espaços geométricos (reta, plano e espaço tridimensional). O estudo da geometria e das funções de variável real insere-se nesse contexto, refletindo o papel fundamental do Cálculo (*esse assunto é objeto de estudo na universidade*) no desenvolvimento das aplicações da Matemática nas Ciências. (Grifo nosso). (BRASIL, 2006, p. 94).

De acordo com as orientações curriculares os conteúdos de limites, derivadas e integrais seriam objetos de estudo do Ensino Superior. Assim sendo, dos oito livros didáticos listados no Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM)<sup>7</sup> de 2009, três compreendem um volume único e não apresentam estes conceitos; dos outros cinco, três ainda trazem conceitos de limites e derivadas. (BRASIL, 2009a).

### 3.2 E nos outros países, como é a situação?

Em Portugal, o ensino secundário constitui a escolaridade pós-obrigatória, sendo um ciclo único com duração de três anos. De acordo com o Ministério da Educação de Portugal (PORTUGAL, 2011), o ensino secundário tem por objetivos proporcionar a formação e aprendizagens diversificadas, dividindo-se em áreas específicas de conhecimentos. Assim, são ofertados os seguintes cursos:

- a. científico-humanísticos, voltados para o estudante que tem intenção de prosseguir os estudos de nível superior;
- b. tecnológicos, orientados tanto para o mercado do trabalho quanto para o prosseguimento de estudos de nível superior;
- c. artísticos, especializados, de natureza técnica, na área artística;
- d. profissionais, orientados de acordo com a qualificação inicial dos alunos,

---

<sup>7</sup> O PNLEM foi implantado em 2004, pela Resolução nº 38 do Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação. Esse programa prevê a universalização de livros didáticos para os alunos do ensino médio público de todo o país. (BRASIL, 2009b).

objetivando a inserção do aluno no mercado de trabalho.

Por essa divisão em áreas específicas, o currículo de Matemática em Portugal se ramifica em grupos, denominados: *A*, para Cursos Científico-Humanísticos, Ciências Socioeconômicas, Ciências e Tecnologias; *B*, para os Cursos Tecnológicos e o Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais; e Matemática Aplicada às Ciências Sociais - 10º, 11º e 12º anos. Seja no currículo do grupo *A* ou do grupo *B*, conceitos de limites e continuidade e derivadas, aparecem, do 10º ao 12º ano, para o estudo do comportamento de funções. (PORTUGAL, 2001a-2002a-d).

Na Espanha, o estudo secundário o *bachillerato* compreende dois cursos acadêmicos e faz parte da educação secundária pós-obrigatória. Tem por finalidade

proporcionar aos estudantes formação, maturidade intelectual e humana, conhecimentos e habilidades que lhes permitam desenvolver funções sociais e se incorporarem à vida ativa com responsabilidade e competência. Além disso, capacitará o aluno para ascender à educação superior. (ESPANHA, 2008, tradução nossa)<sup>8</sup>.

O *Bachillerato* se divide em três modalidades: Artes; Humanas e Ciências Sociais; Ciência e Tecnologia, sendo que nesse último, Ciência e Tecnologia, estuda-se continuidade de funções, limites, derivadas, de uma forma intuitiva na disciplina Matemática I, chegando até as primitivas e integrais, com um caráter mais formal desses conceitos, em Matemática II.

Nos Estados Unidos, os *Standards* estabelecidos pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) não citam diretamente o ensino de Cálculo nas últimas séries do Ensino Médio, os chamados 9-K a 12-K (*high school*). Os *Standards* apresentam recomendações básicas e não trazem explicitamente o conteúdo do programa das disciplinas. No caso específico do estudo de Cálculo, fala-se em variação da função e assíntotas para a análise do comportamento destas. Entretanto, o *Core-Plus Mathematics Project* (CPMP), planejado pela *National Science Foundation* (NSF), órgão do governo americano traz, para os alunos da *high school* que estejam interessados em cursar as instituições de Matemática e Estatística, conceitos de Cálculo Fundamental, “incluindo taxas de variação instantânea, aproximação linear, área sobre uma curva e aplicações em problemas de Física, Comércio e

---

<sup>8</sup> El bachillerato tiene como finalidad proporcionar a los estudiantes formación, madurez intelectual y humana, conocimientos y habilidades que les permitan desarrollar funciones sociales e incorporarse a la vida activa con responsabilidad y competencia. Asimismo, capacitará al alumnado para acceder a la educación superior. (ESPANHA, 2008).



outras disciplinas.” (HIRSCH, 2009, tradução nossa)<sup>9</sup>. Esses estudantes podem se submeter a um exame *Advanced Placement Calculus* em que são avaliados em relação aos conteúdos de limites, continuidade, derivação e integração. Dependendo do resultado do exame, os alunos são dispensados da disciplina de Cálculo na universidade.

Após concluir o Collège, o estudante francês secundarista tem três opções a seguir no Lycée: Geral, Tecnológica e Profissional. O curso Geral, com duração de três anos, prepara o aluno para prosseguir seus estudos nas universidades, que eles classificam de estudos superiores longos ou nos institutos universitários de tecnologias. A opção Tecnológica, cursada em três anos, conduz o aluno aos cursos superiores tecnológicos ou às universidades, após os estudantes passarem por um curso preparatório. Os cursos, Geral e Tecnológico seguem um único currículo de Matemática. Já os cursos profissionais têm por objetivo a formação do técnico, a inserção do indivíduo para o mercado de trabalho. Também na França, no último ano do Lycée, na chamada classe *Terminale* seja no Ensino Geral e Tecnológico ou no *Lycée Professionnel* - o programa de matemática contempla a análise das funções, o estudo de limites, a função derivada, suas aplicações direcionadas a cada curso técnico especificamente. A integração indefinida e definida é estudada no Ensino Geral e no Tecnológico (FRANÇA, 2001).

Seja no Brasil, em Portugal, Espanha, França ou Estados Unidos, podemos observar, através das orientações curriculares do ensino secundário, uma preocupação no desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas, bem como o interesse na contextualização e integração da Matemática com outras disciplinas e com situações do cotidiano do aluno.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBE) (Lei no 9.394/96) o Ensino Médio tem por objetivos “o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.” (BRASIL, 1996). Desta forma, o Ministério da Educação elegeu uma série de competências e habilidades matemáticas que favoreçam os objetivos citados anteriormente. Os conteúdos da disciplina de Cálculo poderiam ser trabalhados de forma a desenvolver essas capacidades, tais como:

- a. reconhecimento e utilização correta de símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica;
- b. identificação de um fenômeno ou de uma situação, estabelecendo relações

---

<sup>9</sup> Topics include instantaneous rates of change, linear approximation, area under a curve, and applications to problems in physics, business, and other disciplines. (HIRSCH, 2009).

- e identificando regularidades;
- c. elaboração de hipótese, estimativas e interpretação de resultados;
- d. reconhecimento, utilização, interpretação e modelagem de situações-problema;
- e. articulação, integração e sistematização de fenômenos e teoria dentro da própria Matemática e desta com outras ciências e
- f. compreensão da ciência e da tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea.

### 3.3 Por que não ensinamos Cálculo na escola de 2º grau?

Podemos elencar algumas possíveis razões porque não ensinamos Cálculo no Ensino Médio. Para Ávila (1991), uma razão é a estrutura dos currículos de matemática apresentar-se de tal forma que não consigamos lecionar os tópicos introdutórios dessa disciplina ao longo dos três anos do Ensino Médio. Outro motivo, também apontado por Ávila, é o fato que alguns poucos dos nossos livros didáticos apresentam esse conteúdo e o fazem somente na terceira série, desvinculado do ensino de funções ou de outras disciplinas, como por exemplo, a Física. Esse segundo motivo foi destacado anteriormente: observamos que, dos oito livros citados no PNLEM-2009, somente três apresentam o assunto de Cálculo.<sup>10</sup>

Em uma pesquisa realizada por Guedes e Assis (2009), um questionário foi aplicado a um grupo de 30 professores da rede pública e privada de Ensino Médio, na cidade de Natal, procurando estabelecer o porquê de não lecionarmos Cálculo nesse nível de ensino. Nesse questionário, 59% dos professores pesquisados afirmaram que o material didático (livro didático) não era adequado para o ensino de cálculo para o Ensino Médio.

Outro motivo para não lecionarmos Cálculo, apontado por Guedes e Assis (2009), seria a falta de qualificação dos professores para ensinar esse assunto - 22 % dos professores participantes da pesquisa identificaram como péssimo o seu preparo e capacidade para ensinar Cálculo, 26% classificaram como ruim e 41% marcaram como tendo um bom preparo para lecionar esse assunto.

---

<sup>10</sup> A lista completa dos livros indicados pelo PNLEM encontra-se no capítulo 5.

O baixo nível de conhecimento Matemático de que dispõe o aluno quando chega ao Ensino Médio é outra razão apontada por Guedes e Assis (2009) para que os professores resistam ao ensino de Cálculo nesse nível de ensino. Embora sejam constatados esses problemas, a maioria dos professores relatou ser importante para o aluno no Ensino Médio aprender os elementos de Cálculo (67 % dos participantes).

Ávila (2006), apesar de recomendar o ensino das ideias básicas de Cálculo no Ensino Médio, apresenta ressalvas sobre o ensino de Cálculo, como é visto nos livros didáticos, e sobre o tópico de limites:

Os blocos de limites e derivadas, como ainda aparecem em vários livros da terceira série, devem ser reduzidos substancialmente. Como já dissemos e ilustramos atrás, um tratamento separado e prévio de limites é totalmente desnecessário. As apresentações em alguns livros ainda são feitas num estilo que está mais para o ensino universitário que ensino médio. Portanto, além da redução da matéria tratada, é necessário fazer uma devida adequação dessa matéria ao ensino médio. (ÁVILA, 2006, p. 38)

Ávila afirma que a derivada “costuma ser considerada difícil e imprópria para o ensino médio, devendo ficar restrita à Universidade. Isso acontece também porque criou-se o hábito de preceder o ensino de derivadas de um pesado capítulo sobre limites [...]”. (Ávila, 2006, p. 37). Talvez um dos motivos recomendados por Ávila para suprimir o estudo de limites sejam as dificuldades e obstáculos relacionados com o seu ensino.

### **3.4 Será que Cálculo é um assunto muito difícil?**

O assunto de Cálculo mostra-se difícil, tanto para alunos do Ensino Médio quanto do Ensino Superior, sendo relevante o baixo índice de aprovação na disciplina de Cálculo I (BARUFI 1999; REZENDE, 2003ab).

Muitos pesquisadores procuram identificar as causas das dificuldades que se relacionam com o ensino de conteúdos básicos de Cálculo. Esse é uma questão complexa para a qual os pesquisadores apresentam respostas variadas. Alguns esperam que as dificuldades têm origem na psicologia cognitiva. Nessa perspectiva, os alunos não aprendem porque não possuem estruturas cognitivas apropriadas. Outros pesquisadores afirmam que o problema do ensino de Cálculo decorre do processo didático. Alguns pesquisadores apontam que as dificuldades são de natureza epistemológica e procuram identificar os obstáculos relacionados

com o próprio desenvolvimento histórico do Cálculo.

Luiz Carlos Pais (2008) observa que “o interesse em estudar a noção de obstáculo decorre do fato da mesma permitir identificar as fontes de diversos fatores que levam a aprendizagem a uma situação de inércia e de obstrução.” (PAIS, 2008, p. 45).

De acordo com Iglori (1999), a noção de obstáculo epistemológico foi proposta inicialmente pelo filósofo francês Bachelard, em 1938, no livro *A Formação do Espírito Científico*. Bachelard afirmou que é através do ato de conhecer que aparecem “as perturbações e lentidões, nas quais mostram as causas de estagnação e de inércia do pensamento, as quais ele denomina obstáculos epistemológicos” (IGLIORI, 1999, p. 98). Os obstáculos, para esse filósofo, não são a falta de conhecimento, mas são os conhecimentos antigos, cristalizados, que resistem à instalação de novas concepções que poderão modificar a estabilidade do pensamento de quem detém o saber.

Em 1976 Guy Brousseau introduziu a ideia de obstáculo epistemológico relacionada à Didática da Matemática. Brousseau considerou a noção de obstáculo epistemológico como sendo um obstáculo relacionado à resistência de um saber mal-adaptado e como um meio de interpretar alguns erros recorrentes e não aleatórios dos estudantes quando lhes são ensinados alguns tópicos de matemática (BROUSSEAU apud IGLIORI, 1999).

Brousseau citado por Iglori (1999), classifica os obstáculos em três tipos:

- a. ontogênicos: oriundos das dificuldades de ordem neurofisiológica, da maturidade do aluno. Artigue (1998) afirma que a definição formal do conceito de limite é carregada de uma complexidade lógica e que o conceito formal de limite rompe com as concepções prévias desta noção. Devido à complexidade do conceito formal de limite, esperamos que os alunos do Ensino Médio podem apresentar obstáculos ontogênicos quando estudam o conceito formal de limite.
- b. didáticos: que dependem das escolhas do professor, de um projeto de um sistema educativo. Segundo Pais, “obstáculos didáticos são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar.” (PAIS, 2008, p. 44). Para esse autor, o termo obstáculo didático é mais pertinente ao plano pedagógico que o termo obstáculo epistemológico. Um exemplo sobre continuidade de funções que pode gerar um obstáculo didático é

quando o professor ou o livro didático apresentam que uma função contínua é aquela que se pode representar graficamente sem retirar o lápis do papel.

- c. epistemológicos: relacionados com o desenvolvimento histórico do conhecimento, sendo característicos do saber. Artigue (1990) assinala, para o professor, a importância da análise epistemológica: a identificação dos obstáculos epistemológicos fornecerá a possibilidade de escolher as dificuldades que são inevitáveis, em meio às outras dificuldades do ensino de um conceito, pois constituem o processo de desenvolvimento do conhecimento.

Segundo Grenier (2010), existe um quarto tipo de obstáculo definido por Brousseau - o cultural: o conhecimento carrega a herança cultural e, embora seja controlado cientificamente, essa barreira está sempre presente. Costa (2009), afirma que esse obstáculo tem como origem concepções errôneas, que não correspondem a conhecimentos científicos. Essa pesquisadora aponta como exemplo, no conceito de probabilidade, a ideia de sorte para ganhar ou perder um jogo.

Frota (2002) organiza as dificuldades do Cálculo em duas categorias principais - cognitiva, gerada pelos conceitos matemáticos ou pela linguagem matemática e a didático-metodológica. Essa última tem origem em diversos processos, tais como o uso de algoritmização algébrica precoce; pouco tempo dedicado ao estudo extraclasse; abordagem do curso, que muitas vezes separa a teoria e a prática; orientação dada ao curso de Cálculo, supervalorizando os aspectos procedimentais da matéria; o descompromisso, tanto da parte dos alunos quanto dos professores, com o processo de aprendizagem. Frota (2002) assinala ainda que, decorrente de questões socioeconômico-estruturais que podem levar uma pessoa ter que trabalhar enquanto estuda, pode ocorrer um agravamento dos problemas de ensino e aprendizagem no Brasil.

De acordo com Couy (2008), um dos entraves no ensino do Cálculo é a sua especificidade em relação à terminologia, à notação e à sua forma de raciocínio. Outra dificuldade no processo de ensino/aprendizagem dessa matéria é a resistência em utilizar os processos visuais para resolver problemas matemáticos.

Rezende (2003ab) elabora um mapeamento das dificuldades do ensino de Cálculo, identificando cinco macro-espacos de natureza epistemológica a partir de cinco dualidades fundamentais do Cálculo e de seu ensino:

- a. discreto/contínuo: uma das dificuldades desse macro-espço está no desconhecimento, por parte dos alunos, dos números reais.
- b. variabilidade/permanência: observa-se uma predominância da abordagem estática sobre a abordagem dinâmica das idéias básicas do Cálculo. Interpreta-se, por exemplo, o conceito da derivada como o coeficiente angular da reta tangente, mas não é citada a noção dinâmica da derivada como no conceito de taxa de variação instantânea. Outro exemplo colocado por Rezende é a realização do esboço da função, que é traçado a partir dos pares  $(x, f(x))$ . “Note que, neste caso, a função (a expressão analítica) é dada e sua representação é construída através de um procedimento estático, estético e induzido por propriedades algébricas da função” (REZENDE, 2003ab, p.6).
- c. finito/infinito: os problemas desse macro-espço ficam evidenciados quando os alunos tratam o infinito como um sendo uma grandeza finita, concebendo uma álgebra do infinito, tal como citado por Sierpínska (1985), no *Horror infiniti*.
- d. local/global: de acordo com Rezende, essa dualidade é mais recente que as outras citadas, aparecendo em meados do século XIX. Por esse motivo, “pode-se concluir que essa dualidade não participou efetivamente da ‘invenção’ do Cálculo.” (REZENDE, 2003ab, p. 8). Um dos motivos para que os matemáticos não enxergassem os conceitos locais e as propriedades globais das funções, no início da história do Cálculo, era a ausência da noção de limite e do conceito de função. O conceito de função foi introduzido mais tarde, por Euler e Lagrange. A noção de limite e o conceito de função foram fundamentais para a estrutura do Cálculo, como é visto hoje em dia. A partir desse ponto, o Cálculo apresentou conceitos e resultados que estabelecem correlações entre os pólos dessa dualidade. Segundo Rezende, essas correlações, próprias da dualidade local/global, podem gerar algumas das maiores dificuldades de aprendizagem dos alunos de Cálculo.
- e. sistematização/construção: Para Rezende (2003ab), existe uma preocupação com a sistematização sugerida por Cauchy e Weierstrass, que organiza as idéias e resultados do Cálculo. Essa sistematização, feita de

forma acentuada, pode acarretar um dos grandes obstáculos epistemológicos do Cálculo - a descontextualização dos seus resultados e conceitos básicos.

Rezende (2003ab) observou, a partir do mapeamento realizado, um lugar-matriz das dificuldades epistemológicas do ensino de Cálculo. Esse lugar-matriz é constituído pela omissão das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo, aparecendo tanto no nível básico de ensino quanto no ensino superior.

- a. O lugar-matriz no ensino básico: a ausência das idéias dos problemas construtores de Cálculo no ensino Básico, segundo Rezende, constitui o maior obstáculo epistemológico do ensino de Cálculo e da própria Matemática. Para esse pesquisador, “o Cálculo é, metaforicamente falando, *a espinha dorsal* do conhecimento matemático” (REZENDE, 2003ab, p. 13, grifo do autor), apresentando um papel importante para a construção e evolução do conhecimento matemático.
- b. O lugar-matriz no ensino superior: a estrutura da disciplina de Cálculo, nos dias atuais, assemelha-se mais à disciplina de Análise que de Cálculo. Para Rezende (2003ab) é preciso considerar o processo de construção os resultados e conceitos de Cálculo para depois efetuar a sistematização do conhecimento.

No artigo “Um mapeamento do ensino de funções reais no ensino básico”, Rezende (2006) torna a reafirmar que as ideias do Cálculo deveriam ser apresentadas aos alunos no ensino médio. Além disso, o autor identifica três linhas diretrizes para o mapeamento dos problemas construtores do Cálculo: o problema da variabilidade, geométrico da medida e o aritmético da medida. Esses problemas, segundo o pesquisador, têm origem no ensino básico de Matemática. Através da análise dos livros didáticos, Rezende observou como o ensino das funções reais, áreas e volumes de corpos redondos e do número real se relacionam com as ideias e conceitos do Cálculo.

Rezende (2006) afirma que o conceito de funções, encontrado nos livros didáticos, apresenta um caráter algébrico, como evidenciado nos mapeamentos elaborados por Botelho e Souza Sá. Poucas obras incluem a noção de taxa de variação. “Nota-se uma ausência quase total de tópicos que analisem o comportamento dessas funções sobre o ponto de vista da

variabilidade.” (REZENDE, 2006, p. 12).

Em relação ao problema geométrico, Rezende (2006) observa que algumas ideias do Cálculo são utilizadas em alguns livros didáticos para o cálculo de áreas e volumes, tais como a noção de infinitésimos e do uso da derivada do volume da esfera para calcular a sua área.

Nas pesquisas sobre o ensino de o ensino de Cálculo e Análise destacam-se os trabalhos de Michele Artigue. Ao investigar os problemas que aparecem no ensino de Cálculo, Artigue (1995) identifica três tipos principais de dificuldades:

- a. aquelas associadas aos objetos de Cálculo, como números reais, sucessões e funções;
- b. as relacionadas à conceituação de limite e à formação de sua noção;
- c. as vinculadas com as rupturas do pensamento algébrico e as especificidades do trabalho mecânico na disciplina<sup>11</sup>.

Para Artigue (1995), os obstáculos epistemológicos ligados ao conceito de limite são o sentido comum que o termo limite sugere, como uma barreira intransponível e não alcançável; as concepções que dependem de uma “geometria da forma”, resultando em dificuldades na percepção do jogo de quadros geométrico e numérico e ao tratar o processo de limite como um processo algébrico.

Artigue (1995) assinala ainda que existem dificuldades relacionadas à formalização padrão da noção de limite, uma vez que os alunos tendem a considerar a formalização como dois processos distintos - um sobre a variável e outro sobre os valores da função. Outra questão importante, identificada por Artigue (1995), é o salto entre a manipulação relativamente intuitiva da noção de limite e a sua noção formal, que tem lugar na história do conceito.

Trata-se de um problema cuja transposição no ensino não pode dar-se por si mesma, ainda que esta última busque visivelmente acercar-se ao sentido da evolução histórica. Apesar da introdução de um enfoque intuitivo ao Cálculo e do desejo de que quando se introduz a formalização, esta responda às necessidades sentidas na realidade pelos estudantes, um ensino não conseguirá construir esse sentido facilmente. (ARTIGUE, 1995, p. 114, tradução nossa)<sup>12</sup>

---

<sup>11</sup> O próprio termo “Cálculo” lembra aos estudantes um sentido aritmético (ALVARADO; GARCIA, 2005).

<sup>12</sup> Se trata de un problema cuya transposición en la enseñanza no puede darse por si misma, aun si esta última busca visiblemente acercarse al “sentido” de la evolución histórica. A pesar de la introducción de un enfoque intuitivo al cálculo y del deseo de que cuando se introduzca la formalización, esta responda a las necesidades en



Outra pesquisadora que estudou os obstáculos epistemológicos relacionados ao ensino de limites foi Sierpinska (1985, 1987). No artigo *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, essa autora identifica como obstáculos epistemológicos relativos a noção de limite:

- a. *Horror Infiniti*: barreira que impede que o aluno visualize o infinito real, impedindo-o de aceitar os conjuntos infinitos. Esse tipo de obstáculo faz, com que, por vezes, ocorra uma transferência dos métodos algébricos de manipulação de grandezas finitas para as grandezas infinitas. Outro obstáculo algébrico é a transferência das propriedades de uma série convergente para o estudo de limites. Sierpinska ainda ressalta que o uso de expressões como “aproximar de” ou “tender a” conferem à noção de limite uma ideia de movimento enquanto a sua definição formal é de natureza estática.
- b. obstáculos relativos à noção de função: encontramos aqui a preocupação com o relacional da função, isto é, como os valores de uma função são determinados de acordo com os valores que são atribuídos à variável independente. Pode ocorrer, também, que os alunos associem a convergência com a monotonicidade e movimento. Esse obstáculo é visto, pela autora, como uma redução às funções monótonas. Outro obstáculo relativo à função é a não distinção entre a noção de limite e a de cota do conjunto imagem.
- c. obstáculos geométricos: decorrentes do fato da intuição geométrica se transformar em uma barreira na formulação da definição formal de limite ou de quando se estabelece uma ideia geométrica da diferença entre uma grandeza constante ( $L$ , valor do limite) e uma grandeza variável ( $f(x)$ ).
- d. obstáculos lógicos: caracterizados pelos quantificadores ( $\varepsilon$  e  $\delta$ ) ou de sua ordem. A ordem dos quantificadores é importante na definição de limite; a função leva de do eixo  $x$  ao eixo  $y$ , enquanto ao estudar o limite em um ponto da função o sentido inverso é percorrido.
- e. obstáculos simbólicos: ligados à resistência ao introduzir um símbolo

específico para a operação limite. A passagem ao limite não era inicialmente considerada como uma operação matemática distinta, e o símbolo dessa operação só foi proposto por Cauchy.

No artigo *Humanities students and epistemological obstacles related to limits*, de 1987, Sierpinska relata a experiência desenvolvida com um grupo de estudantes de 15 a 17 anos de idade, em que investigou as possibilidades de situações didáticas que possam contribuir para a superação dos obstáculos epistemológicos relativos ao ensino de limite. Antes de iniciar a pesquisa, Sierpinska elencou quatro noções como sendo possivelmente as principais fontes dos obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de limite: o conhecimento científico, os números reais, as funções e o infinito. Segundo a autora, os obstáculos apresentam uma dualidade, podendo ser de natureza Heurística ou Rigorística<sup>13</sup>. Dessa forma, Sierpinska (1987) relaciona os obstáculos de acordo com as características dessa dualidade:

| <b>Obstáculo</b>               | <b>Heurística<br/>(sem rigor matemático)</b>                                                                | <b>Rigorística<br/>(rigor excessivo ou falso)</b>                                              |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Conhecimento científico</b> | a Matemática é uma ciência empírica.                                                                        | a Matemática assume um aspecto de jogo formal, cujo objetivo principal é estabelecer teoremas. |
| <b>Infinito</b>                | o infinito não existe ou existe apenas potencialmente.                                                      | o aspecto metafísico do infinito é eliminado.                                                  |
| <b>Funções</b>                 | o tempo é uma variável universal independente. Além disso, a função é limitada ao conjunto de seus valores. | a função é reduzida a sua expressão analítica.                                                 |
| <b>Números reais</b>           | ausência de um conceito uniforme do número real.                                                            |                                                                                                |

Quadro 4: Obstáculos epistemológicos sobre o ensino de limite segundo Sierpinska (1987)

Fonte: Elaborado pela autora

<sup>13</sup> Tradução do termo “rigouristic” citado por Sierpinska (1987) em contraposição ao termo “heuristic”, relacionado ao rigor excessivo ou ao falso rigor.

Nesse trabalho, Sierpinska (1987) conclui que nenhum obstáculo listado foi superado completamente, mas os conflitos mentais que surgiram no processo de aprendizagem foram um passo inicial nessa direção.

De acordo com Cornu (1991), o estudo de limite apresenta uma série de dificuldades, relacionando-se com o pensamento avançado, envolvendo os processos de abstração, análise e dedução.

Para Cornu, um dos problemas em ensinar e aprender o conceito de limite está relacionado ao fato de que “os aspectos cognitivos não podem ser gerados simplesmente a partir da sua definição matemática” (CORNU, 1991, p. 153, tradução nossa)<sup>14</sup>. Esse pesquisador lembra a diferença entre conceito e definição citando que, algumas vezes, o estudante utiliza o conceito dinâmico de limite, a ideia de aproximação, para resolver problemas que estão relacionados com a noção intuitiva e não com a definição formal. Os exercícios que necessitam da definição formal de limite, segundo Cornu, “são mais relacionados à Álgebra e às rotinas da diferenciação e integração formal do que com a Análise.” (CORNU, 1991, p. 153, tradução nossa)<sup>15</sup>

Para Cornu, uma dificuldade no ensino de limites está relacionada às concepções espontâneas, isto é, as idéias e conceitos pré-estabelecidos pelos alunos bem antes do início dos estudos formais sobre o assunto. Assim, no caso em questão, a expressão “tender a”, como citada por Cornu (1991), apresenta diferentes significados, tais como: aproximar, sem alcançar um valor ou até alcançá-lo; aproximar, mas permanecendo longe do valor ou, ainda, “parecer com”. Esse mesmo autor lista uma série de conotações que o termo “limite” pode apresentar para os estudantes - um valor máximo ou mínimo; um ponto do qual aproximamos sem alcançá-lo; um intervalo; um limite superior ou inferior; o fim; entre outros sentidos. Essas concepções espontâneas são, muitas vezes, contraditórias ao conceito estabelecido pelo conhecimento formal, gerando fatores de conflitos cognitivos para os estudantes.

Outra definição que apresenta dificuldades cognitivas semelhantes à de limite é a ideia de continuidade. Expressões cotidianas como “choveu continuamente o dia todo” [...] ou “a linha do trem é soldada de forma contínua” (CORNU, 1991, p. 156, tradução nossa)<sup>16</sup> podem

---

<sup>14</sup> One of the greatest difficulties in teaching and learning the limit concept lies not only in its richness and complexity, but also in the extent to which the cognitive aspects cannot be generated purely from the mathematical definition. (CORNU, 1991, p. 153).

<sup>15</sup> These exercises are far more related to algebra and the routines of formal differentiation and integration than to analysis. (CORNU, 1991, p. 153).

<sup>16</sup> “it rained continuously all day” [...] or “the railway line is continuously welded” (CORNU, 1991, p. 156).

dificultar a compreensão do conceito. O entendimento do conceito de continuidade é dificultado quando o professor, ao tentar simplificar a noção de uma função contínua em um intervalo, afirma que “uma função contínua é aquela cujo gráfico é feito sem se tirar o lápis do papel”, confundindo, dessa forma, os conceitos de continuidade e conectividade.

Comentando sobre o desenvolvimento histórico do conceito de limite, Cornu (1991) afirmou que a noção de limite foi necessária para resolver três questões principais: os problemas geométricos, como cálculos de áreas e o método da exaustão, o problema da soma e da taxa de convergência de uma série e os problemas de diferenciação, que envolviam um quociente em que tanto o numerador quanto o denominador tendiam a zero. Cornu (1991) destacou quatro principais obstáculos epistemológicos na história do conceito de limite:

- a. o erro ao relacionar geometria com números: apesar dos gregos utilizarem o método da exaustão para calcular área do círculo, que lembra o conceito de limite, não se pode afirmar que eles conheceram o conceito moderno de limite. O método da exaustão é aplicado em magnitudes geométricas, não para números nem com o problema do infinito. Para Cornu, não existe a transferência das figuras geométricas para os números e, por este motivo, não utiliza o conceito de limite numérico. Assim, a interpretação geométrica pode causar um obstáculo que impede a passagem para a noção de um limite numérico.
- b. a noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno: o problema de definir e trabalhar quantidades tão pequenas, próximas a zero, despertou a atenção de matemáticos como Newton, Euler, D’Alembert e Cauchy. Para Newton citado por Cornu (1991), os infinitésimos eram denominados de “almas de quantidades passadas”. D’Alembert opôs-se ao uso das quantidades infinitamente pequenas no Cálculo Diferencial. Euler citado por Cornu (1991) utilizava a noção de infinitamente pequeno como uma quantidade que, no momento apropriado, poderia ser considerada igual a zero. Já para Cauchy citado por Cornu (1991), um infinitesimal é simplesmente uma variável que tende para zero. Segundo Cornu, essa ideia de um “estado intermediário” entre quase nada e zero não está presente nos estudantes modernos, que empregam o símbolo  $\varepsilon$  para representar um número não nulo menor que qualquer número real positivo. Cornu afirma que, semelhante à questão das quantidades infinitamente pequenas, existe a

noção de um número infinitamente grande, mas que não é o infinito.

- c. o aspecto metafísico da noção de limite: a introdução da noção do limite na Matemática foi difícil, uma vez que esse assunto, segundo Cornu, se relaciona mais com a filosofia ou a metafísica. Cornu afirma que “o aspecto metafísico da noção de limite é um dos principais obstáculos para o estudante hoje. [...] Estes obstáculos tornam a compreensão do conceito de limite extremamente difícil” (CORNU, 1991, p. 161, tradução nossa)<sup>17</sup>. Um dos motivos para que isso ocorra é o fato de que o limite não pode ser calculado diretamente pelos métodos algébricos ou aritméticos.
- d. se o limite é alcançável ou não: Cornu (1991) afirma que o debate em torno dessa questão começou no final do século XVII e persiste até os dias de hoje.

Com relação aos obstáculos epistemológicos da Matemática Moderna, esse autor aponta que apesar de formularmos a definição de limite em termos de épsilons e deltas, haverá ocasiões em que ainda utilizaremos a expressão - “variáveis tendendo a zero”, remetendo a uma imagem mental de “arbitrariamente pequeno”. Assim, apesar da intenção de banir os infinitesimais da Análise Moderna, eles parecem continuar presentes.

Algumas vezes, ao transmitir algum conceito ou idéia, um professor pode gerar, inadvertidamente, obstáculos epistemológicos. Essa situação, que Cornu (1991) denomina de transmissão didática de obstáculos epistemológicos, pode ter como causa as interações entre as pessoas, que são sensíveis ao tom de voz e aos significados implícitos de quando uma pessoa expõe um conceito.

Vrancken et al. (2006), através da análise de erros, procuraram identificar as dificuldades de alunos universitários na conceitualização de limite. Essas pesquisadoras detectaram como dificuldades associadas ao conceito de limite as seguintes questões:

- a. Dificuldades relacionadas com o conceito de função: nesse grupo se encontram os problemas em representar gráficos que sejam funções, as dificuldades relacionadas com o conceito de domínio de uma função e para distinguir as variáveis independentes e dependentes.
- b. Dificuldades relacionadas com o conceito de limite: são dificuldades para

---

<sup>17</sup> The metaphysical aspect of the notion of limit is one of the principal obstacles for today's students. This obstacle makes the comprehension of the limit concept extremely difficult. (CORNU, 1991, p. 161).

compreender que o limite da função ocorre nas proximidades do ponto e não no ponto, para reconhecer e interpretar limites laterais, para manipular algebricamente as propriedades das funções cujo limite queremos determinar e para compreender que o cálculo do limite nem sempre se faz pelo processo de substituição.

- c. Dificuldades para passar de um sistema de representação para outro: as autoras observaram que os alunos sentem dificuldade para relacionar a expressão algébrica de limite com a sua representação gráfica ou o contrário.

Vrancken et al. assinalam ainda “as dificuldades encontradas para a construção de gráficos a partir de condições dadas na forma verbal.” (VRANCKEN et al., 2006, p. 18). Em um trabalho anterior, as pesquisadoras verificaram que os alunos não conseguiam trabalhar com uma quantidade de informação e, ao mesmo tempo, integrar essas informações e fornecer respostas corretas para os comandos fornecidos pelas professoras.

Celestino (2008) procurou investigar as concepções de alunos do Ensino Superior sobre limite e possíveis imbricações entre obstáculos epistemológicos relacionados a essas concepções. Para isso, esse pesquisador desenvolveu uma atividade com seqüências numéricas. Celestino observou que os alunos entenderam o limite como um conceito dinâmico, em que os termos da seqüência ‘caminham’ em direção ao limite. Outro obstáculo identificado pelo autor refere-se ao uso do símbolo  $\lim$ , uma vez que os alunos têm dificuldade em perceber que o “limite é” e a “função se aproxima”, interpretando esse símbolo como “o limite se aproxima”.

Através da análise de algumas pesquisas e trabalhos sobre as dificuldades e obstáculos relativos ao ensino de Cálculo e, mais especificamente, relacionados ao ensino de limites, foi possível nortear o desenvolvimento da engenharia didática, quanto à elaboração da seqüência didática:

- a. sobre o rigor na abordagem da definição de limite nas atividades: devido às dificuldades relacionadas a definição formal de limite (ARTIGUE (1995); CORNU (1991), preferimos utilizar o conceito dinâmico do limite (CORNU, 1991). Para essa decisão, apoiamo-nos também no trabalho de Reis (2001), que discute sobre o rigor das demonstrações e definições do Cálculo nos livros didáticos e na visão dos autores de livros-didáticos e de

professores de Matemática. Nessa pesquisa, Reis afirma que o rigor apresentado nos trabalhos, artigos científicos deve ser transposto para sala de aula de forma a proporcionar uma exploração múltipla e flexível dos conceitos. Esses deverão ser significativos e compreensíveis, recebendo validação e demonstração compatíveis com o contexto do ensino.

- b. as dificuldades relativas às representações gráficas das funções: para que os alunos possam analisar o comportamento de diferentes tipos de funções, verificando limites e a continuidade de funções, cogitamos do uso de uma ferramenta que pudesse facilitar o esboço dessas funções.

Além disso, o estudo sobre os obstáculos no ensino-aprendizagem de limites foi importante para a análise e identificação das dificuldades apresentadas pelos alunos no desenvolvimento das atividades propostas.

#### 4 MARCO TEÓRICO DA INVESTIGAÇÃO

As teorias aqui discutidas pretendem apresentar possibilidades de abordagens metodológicas que propiciem o entendimento matemático dos alunos acerca do tópico limites. Mas, o que vem a ser o entendimento matemático?

De acordo com Sierpinska (1994), o entendimento é um ato cognitivo complexo, que demanda tempo, sendo denominado processo de entendimento. Para essa pesquisadora, esse processo se dá através da superação de obstáculos epistemológicos, sendo que um novo conhecimento só poderá ser construído a partir de um antigo.

Richard Skemp (1976, 1982) define três níveis de entendimento matemático: o instrumental, o relacional e o simbólico. O entendimento instrumental seria o que Skemp (1976) define como o entendimento em que se conhecem as regras, mas não se sabe o porquê. Como professores e pesquisadores, preocupa-nos a compreensão em Matemática, o entendimento matemático dos alunos. Muitas vezes, os alunos conseguem resolver exercícios através da memorização de procedimentos e fórmulas, mas não entendem o processo de resolução de um problema. Podemos exemplificar tal situação, quando um aluno calcula o limite de uma função racional através da simplificação da fração algébrica, uma vez que lhe foi ensinado o procedimento para tal. Entretanto, ele não necessariamente compreende o fundamento matemático da simplificação feita.

Já o entendimento relacional necessita de uma estrutura conceitual, denominada por Skemp (1976) de esquema. Nesse tipo de entendimento o aluno sabe tanto a regra quanto o motivo de usá-la. Relacionada ao entendimento instrumental e relacional, Skemp (1976) define a Matemática Instrumental e a Matemática Relacional.

Skemp (1982) afirma que o entendimento simbólico é a assimilação mútua entre um sistema simbólico e uma estrutura conceitual apropriada, sendo essa relação dominada pela estrutura conceitual. Segundo esse pesquisador, o simbolismo utilizado em Matemática é um caso especial da linguagem e, por esse motivo, envolve muitas habilidades cognitivas tais como relembrar um conhecimento antigo, fazer rotinas mecanicamente, recuperar informações, explanar e comunicar, entre outras.

De acordo com esse pesquisador, “desde que a comunicação é um arranjo de símbolos, toda comunicação, seja verbal ou escrita, inicia-se em um sistema simbólico.” (SKEMP,



1982, p. 61, tradução nossa)<sup>18</sup>. Para o desenvolvimento desse entendimento, Skemp recomenda o uso da linguagem matemática, tanto verbal quanto escrita.

#### 4.1 Possibilidades da escrita matemática para o ensino de limites

Um dos objetivos do ensino de Matemática assinalado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, para o Ensino Médio, é levar o aluno a “expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática” (BRASIL, 2000). Schneider (2006) corrobora essa idéia, afirmando que é “necessário que nosso aluno compreenda o significado do que está sendo estudado. É preciso saber falar e escrever sobre o assunto, utilizando a linguagem usual. Somente depois dessa construção de significados é que há condições de usar a linguagem matemática.” (SCHNEIDER, 2006, p. 75).

De acordo com Smole (2003), os alunos devem ser incentivados a se comunicar matematicamente para que tenham “oportunidade para explorar, organizar e conectar seus pensamentos, novos conhecimentos e diferentes pontos de vista sobre um mesmo assunto” (SMOLE, 2003, p. 2). Assim, não só o ato de escrever Matemática, mas também os atos de falar e ler são ações que possibilitam aos alunos organizar e elucidar seus pensamentos, sendo que o grau de compreensão de um conceito esta intimamente relacionado à comunicação bem sucedida deste conceito ou idéia. “A oralidade é o recurso de comunicação mais acessível” (SMOLE, 2003, p. 3). Ao estabelecer o diálogo, os alunos conhecem outras experiências, novas idéias, outros pontos de vista.

O ato de escrever é um processo complexo que “compele-nos a analisar, organizar e articular para pensar de forma clara e lógica e chegar a uma melhor compreensão de nosso objeto de estudo, através da tentativa de explicá-lo ou apresentá-lo.” (CENTER FOR TEACHING AND LEARNING, 1989, tradução nossa)<sup>19</sup>. Segundo Center for Teaching and Learning (1989), ao escrever, um aluno pode, com suas próprias palavras, definir um conceito

---

<sup>18</sup> Since communication is by the utterance of symbols, all communication, whether verbal or written, first goes into a symbol system. (SKEMP, 1982, p. 61).

<sup>19</sup> The complex process of writing compels us to analyze, to organize, and to articulate, to think logically and clearly and to come to a better understanding of our subject through an attempt to explain or present it. (CENTER FOR TEACHING AND LEARNING (CTL), 1989).

que esteja vindo em sala de aula ou transcrever para a língua materna uma fórmula matemática, ou símbolos matemáticos. Além disso, ao ler o texto produzido pelos estudantes ao escreverem o processo de resolução de um problema, um professor pode identificar os tipos de dificuldades que os alunos estejam apresentando no conteúdo apresentado.

A escrita apresenta grande importância como ferramenta de aprendizagem, apresentando implicações nos processos de aquisição e estruturação do conhecimento (CARVALHO; PIMENTA, 2005; FREITAG, 1997; SANTOS, 2005). A metodologia *escrever para aprender Matemática* pode se referir a qualquer tipo de escrita utilizada para ajudar os estudantes a aprender Matemática. Entretanto, o conceito descrito por Porter e Masingila (2000) estabelece que escrever para aprender Matemática é uma “escrita que envolve articulação e explicação das idéias matemáticas com o propósito de entendê-las de forma mais aprofundada” (PORTER; MASINGILA, 2000, p. 166, tradução nossa)<sup>20</sup>.

Podemos afirmar que essa metodologia melhora a compreensão dos conceitos por parte dos alunos? A escrita para aprender Matemática pode afetar a capacidade dos alunos para realizar os procedimentos de rotina? São essas as perguntas que norteiam o artigo “Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus” de Porter e Masingila (2000). As autoras trabalharam com dois grupos em um curso de Introdução ao Cálculo - um que utilizou a metodologia WTLM (do inglês Writing to learn mathematics), discutindo e escrevendo o raciocínio, os conceitos, os passos na resolução de um problema; e um segundo grupo, de controle, que discutiu as questões apresentadas em sala de aula, mas não utilizou a escrita para registrar suas idéias e argumentações. Nas seções observadas, todos estudantes fizeram atividades que envolviam conceitos, procedimentos e linguagem - oral para o grupo de controle e, escrita e oral, para o grupo de WTLM. A análise estatística dos resultados dos dois grupos, entretanto, revelou não haver diferença significativa entre os mesmos. Embora não esperado pelas pesquisadoras, esse resultado sugere que

o real benefício do uso da escrita para aprender Matemática pode ser devido não à atividade de escrever em si, mas ao fato que esta requer do estudante dedicar tempo pensando sobre as atividades matemáticas e então comunicando suas idéias aos outros (PORTER; MASINGILA, 2000). p. 174, tradução nossa)<sup>21</sup>.

---

<sup>20</sup> WTLM as writing that involves articulating and explaining mathematical ideas for the purpose of deepening one's understanding. (PORTER; MASINGILA, 2000, p. 166).

<sup>21</sup> Thus, these results suggest that the real benefits of using writing to learn mathematics may be due, not to the actual activity of writing, but rather to the fact that it requires students to spend time thinking about mathematical ideas and then communicating these ideas to others. (PORTER; MASINGILA, 2000, p. 174).

Dessa forma, atividades que demandam dos alunos descrever e justificar ideias matemáticas são fundamentais, independentemente do que eles escrevam ou falem.

Uma pesquisa conduzida por Idris (2009), entretanto, afirma que a metodologia *escrever para aprender Matemática* melhorou significativamente a compreensão e a habilidade dos alunos para resolver de exercícios de Cálculo. O estudo foi conduzido em duas escolas secundárias na Malásia, onde os alunos estudam Cálculo Diferencial e Integral. Diferentemente do trabalho de Porter e Masingila (2000), em que todos os grupos discutiam os exercícios (seja oralmente ou escrevendo), os grupos controles tiveram somente aulas tradicionais, expositivas, em que o professor apresentava as idéias e conceitos aos alunos. Foi observado ainda que as atividades escritas, quando utilizadas para resolver problemas, permitem que os estudantes reflitam sobre o que aprenderam, pesquisem sobre métodos alternativos para solucionar os problemas, encontrem evidências e tomem decisões e, também, explorem e construam explicações. Segundo Idris, “as atividades de escrita são capazes de motivar a aprendizagem, identificando o que é para ser aprendido e proporcionando uma participação ativa” (IDRIS, 2009, p. 53, tradução nossa)<sup>22</sup>. Os resultados interpretados com base no trabalho de Porter e Masingila (2000) indicam os efeitos de atividades escritas cujo benefício real não é o ato de escrever, mas de descrever e justificar.

É importante que o aluno expresse o seu raciocínio, a maneira como ele chegou à conclusão de seus resultados. A forma escrita apresenta a vantagem de ser um registro da idéia do aluno, dos passos que ele percorreu para a resolução de um determinado problema. Segundo Smole (2003), a escrita em Matemática apresenta três principais papéis:

- a. Oferecer a oportunidade, aos estudantes, de repensar sobre o que descobriram sobre um determinado conceito, de repensar e refletir sobre o que fizeram;
- b. Estimular os alunos a se tornarem melhores leitores de Matemática uma vez que, ao escrever, os alunos poderão perceber, com mais clareza, como articular noções e conceitos matemáticos;
- c. Facilitar a observação do que os alunos aprenderam em sala de aula, além da mostrar como os estudantes expressam suas idéias e quais são suas dificuldades no desenvolvimento do trabalho.

---

<sup>22</sup> The writing activities were able to motivate the learner, identifying what is to be learned, and providing active involvement. (IDRIS, 2009, p. 53).

De acordo com Santos (2005),

a linguagem escrita pode ser vista tanto como um instrumento para atribuir significados e permitir a apropriação de conceitos quanto como uma ferramenta de diálogo, na qual o processo de avaliação e reflexão sobre a aprendizagem é continuamente mobilizado. (SANTOS, 2005, p. 128).

A autora afirma, que a escrita, nas aulas de Matemática, assume um papel de mediadora, uma vez que integra as experiências individuais e coletivas no processo de construção e apropriação do conhecimento. Essa pesquisadora utilizou a escrita em Matemática em aulas de Cálculo, Álgebra Linear, Complementos de Matemática e Geometria, além de cursos de aperfeiçoamento para professores de Matemática, trabalhando a produção de pequenos textos, cartas, mapas conceituais, glossários e diários.

Powell e Bairral (2006) também discutem diversas atividades escritas, com foco na aprendizagem matemática, que podem ser utilizadas em sala de aula ou na educação a distância: a escrita livre, as crônicas, diferentes tipos de diários, relatórios de entrada múltipla e as escritas virtuais, podendo ser assíncronas, como o correio eletrônico e fóruns de discussão, ou síncronas, como salas de bate-papos e outros tipos de mensagens instantâneas.

Powell e Bairral (2006) classificam a escrita matemática como produto, quando a escrita é um instrumento para demonstrar conhecimento, em uma abordagem mais centrada na Matemática; ou como processo-produto, quando o foco são os próprios alunos, sendo considerada então como um meio de conhecimento. Em relação às funções que possa exercer, a escrita se divide em transacional e expressiva. A escrita transacional é mais informativa, para instruir alguém, “usada sempre que uma ‘referência exata e específica ao que se sabe sobre a realidade’ é necessária.” (BRITTON *et al.* apud POWELL; BAIRRAL, 2006, p. 51), mais utilizada na abordagem produto, onde é empregada para avaliação e diagnóstico. A escrita expressiva tem a função de verbalizar a consciência do aluno, constituindo um fluir de ideias e sentimentos.

Freitag (1997) afirma que os estudantes, ao escreverem Matemática, podem encontrar problemas similares aos da leitura do assunto, apresentando dificuldades com a notação, o vocabulário, a representação gráfica ou a disposição de dados em tabelas. Apesar das barreiras encontradas na leitura e escrita serem semelhantes, a escrita da Matemática é uma tarefa mais complexa, pois exige que o aluno, além de compreender a mensagem que está escrevendo, deverá fazer com que uma outra pessoa entenda seu texto. “Assim, a escrita pode exigir que o estudante tenha uma maior compreensão do conteúdo e uma melhor capacidade de se

comunicar do que quando ele lê.” (FREITAG, 1997, p. 19, tradução nossa)<sup>23</sup>.

Notare (2009) observou que o uso de escrita favoreceu um melhor desenvolvimento no conhecimento matemático, uma vez que através das atividades escritas os alunos puderam identificar seus erros e refletir sobre suas concepções sobre a matéria lecionada, evidenciando, assim, “a importância da socialização das idéias, que pode levar à construção do conhecimento.” (NOTARE, 2009, p. 175). Por ter conduzido sua pesquisa em um ambiente virtual, Notare (2009) necessitou utilizar o editor científico ROODA Exata para que pudessem empregar os símbolos e fórmulas matemáticas corretamente. “Sem o editor científico, muitas das discussões teriam se tornado inviáveis, pela complexidade das expressões matemáticas utilizadas, difíceis de serem descritas em linguagem natural, apenas com a utilização do teclado.” (NOTARE, 2009, p. 175).

Pelo fato da escrita matemática ser uma combinação de sinais, letras, gráficos e palavras, muitas vezes a leitura matemática envolve um conhecimento de uma estrutura que nem sempre é análoga à língua materna (SMOLE, 2003; FREITAG, 1997). Outros motivos que dificultam a leitura são o uso de um vocabulário próprio da disciplina e a estrutura de um texto matemático, onde o fluxo do texto é muitas vezes interrompido, uma vez que as frases geralmente incluem fórmulas e equações. Além disso, a leitura matemática é um processo não-linear, já que o leitor deverá buscar definições, teoremas e/ou notações pertinentes ao novo conceito que está lendo. E deverá reler muitas vezes o texto para uma melhor compreensão do assunto, exigindo paciência, determinação e concentração do aluno (FREITAG, 1997).

Freitag (1997) considera a leitura como um processo que consiste em duas etapas: a primeira seria a transferência da informação escrita, codificada para o leitor e a segunda aquela em que ocorre a compreensão da informação pelo leitor. Noonan, citado por Freitag, avalia que a leitura da Matemática “significa tomar um conhecimento global da página, não apenas a capacidade de ler umas poucas sentenças. Significa apreciar a estrutura de uma pergunta e como os vários gráficos, diagramas e figuras se relacionam com esta.” (FREITAG, 1997, p. 16, tradução nossa)<sup>24</sup>.

No desenvolvimento de nossa pesquisa, de forma a favorecer a comunicação em Matemática, optamos por:

---

<sup>23</sup> writing may require the student to have a greater understanding of the content and a better ability to communicate than does reading. (FREITAG, 1997, p. 19)

<sup>24</sup> To read a mathematics text means to take the global meaning from the page, not just to be able to read a few sentences. It means to appreciate the structure of a question and how the various graphs, diagrams and pictures relate to it. (FREITAG, 1997, p. 16).

- a. dispor os alunos em pequenos grupos (2 ou 3 estudantes) para estimular a discussão das questões, trabalhando, assim, a oralidade;
- b. apresentar tabelas, gráficos, pequenos textos envolvendo conceitos matemáticos, onde os estudantes deveriam ser capazes de decodificar a Matemática envolvida, estimulando a leitura;
- c. solicitar a produção de esboços gráficos de funções, de tabelas e a construção de definições e conceitos matemáticos, formando e exercitando a escrita matemática. Além disso, foi a escrita da Matemática que serviu de instrumento de avaliação dos alunos, sendo observados o uso adequado da linguagem e da notação matemática, a exposição coerente de idéias e a representação gráfica de funções.

O tipo de escrita matemática que procuramos que os alunos produzissem foi a abordagem produto, para demonstrar o conhecimento do aluno sobre os tópicos abordados do assunto limites e do tipo transacional, de caráter informativo, como classificada por Powell e Bairral (2006). Assim, por exemplo, na primeira atividade, pedimos ao aluno que relatasse quando e como o termo limite havia sido utilizado nas aulas de Matemática. O aluno deveria fornecer uma resposta informativa, que revelasse que o estudante já havia tido algum contato com o assunto anteriormente. Em outras atividades, pedimos que o aluno apresentasse justificativas para suas respostas. O aluno pode utilizar a linguagem natural como ferramenta para resolver um problema, analisando a questão de pontos de vista diferentes. Assim, a linguagem natural foi um dos quadros utilizados pelos alunos, além do jogo de quadros gráfico e algébrico da dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1986). Essa teoria é discutida no próximo item.

#### **4.2 Possibilidades da dialética ferramenta-objeto e jogo-de-quadros para o ensino de limites**

Muitas pesquisas, no Brasil, têm se fundamentado nos princípios didáticos criados por Douady (1986), seja no ensino fundamental (CARDIA, 2007; FACCO, 2003; GOMES, 2000; MARTINELLI, 2004; MARTINS, 2006); médio (CLARA, 2007; COSTA, 2005; MARTINS, 2003; SALDANHA, 2007; ou superior (ANACLETO, 2007; PARANHOS, (2009).

A teoria desenvolvida por Douady (1986), traduzida por Maranhão (1999) como dialética-ferramenta-objeto e interação-entre-domínios<sup>25</sup>, apresenta elementos que “são instrumentos utilizados para concepção, realização e análise de engenharias didáticas.” (MARANHÃO, 1999, p. 115). Uma vez que nos inspiramos na metodologia da engenharia didática, consideramos que a teoria seria adequada na condução de nosso trabalho.

Antes de discorrer sobre a dialética ferramenta-objeto, faz-se necessária uma explanação sobre as definições de objeto e ferramenta traçadas por Douady (1986). Um conceito matemático pode apresentar um caráter de objeto, quando é descontextualizado e formulado da forma mais geral possível, ou de ferramenta, quando estamos interessados na sua utilização para resolver um problema. Uma mesma ferramenta pode ser adaptada a diversos problemas e, objetivando resolver um único problema, várias ferramentas podem ser empregadas. Segundo Maranhão (1999), a definição de ferramenta apresenta duas características - para um professor, a ferramenta apresenta um funcionamento científico e, para um aluno, a ferramenta possui um emprego prático.

“Durante uma atividade matemática, um aluno pode utilizar uma ferramenta implícita ou explicitamente.” (DOUADY, 1986, p. 9, tradução nossa)<sup>26</sup>. A utilização implícita de uma ferramenta ocorre quando um aluno, ao tentar resolver um problema, emprega conceitos tais que nem sempre conhece suas condições de uso e limitações. Entretanto, se o aluno pode justificar o uso desses conceitos, então ele está empregando a ferramenta de forma explícita.

Douady (1986) afirma que, ao tentar resolver um problema, um matemático interpreta a questão de diferentes pontos de vista, passando-o de um quadro para outro, sugerindo ferramentas que não foram inicialmente utilizadas. Essa autora define como quadros os diversos tipos domínios matemáticos como, por exemplo, aritmético, algébrico, geométrico e gráfico. Essa pesquisadora define quadro como sendo “constituído dos objetos de um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, das suas formulações possivelmente diversas e as imagens mentais associadas com estes objetos e estas relações.” (DOUADY, 1986, p. 11, tradução nossa)<sup>27</sup>. A mudança de quadros permite obter formulações diferentes, não necessariamente equivalentes, de um mesmo problema, permitindo o uso de ferramentas e

---

<sup>25</sup> Dialectique outil-objet et jeux des cadres, respectivamente. A tradução mais utilizada é a dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros.

<sup>26</sup> Un élève, en activité mathématique, peut recourir à un outil de manière implicite ou explicite. (DOUADY, 1986, p. 9).

<sup>27</sup> Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. (DOUADY, 1986, p. 11).

técnicas que não se impunham na primeira resolução.

Para Douady (1986) um aluno possui conhecimento matemático se é capaz de utilizar ferramentas explícitas, de adaptar essas ferramentas na resolução de um problema. Entretanto, várias dificuldades aparecem, em sala de aula, para que o aluno possa vivenciar uma simulação de pesquisa e investigação, decorrentes de uma metodologia inadequada, da pouca responsabilidade dada os alunos, do uso de problemas que não discutem o caráter essencial dos conceitos e da prática da separação dos quadros.

Douady (1986) afirma que, para construir um ensino diferente, atribuindo sentido às ferramentas, que assegure uma apresentação institucional dos objetos correspondentes, devemos-nos fundamentar em três pontos - dialética ferramenta-objeto, dialética antigo-novo e o jogo de quadros.

As fases da dialética ferramenta-objeto são:

- a. O antigo: os conceitos matemáticos que os alunos já têm são utilizados como ferramentas para resolver, ao menos em parte, um dado problema.
- b. A pesquisa do novo implícito: ocorre quando os alunos não conseguem resolver completamente as questões propostas com os antigos conceitos. Muitas vezes, faz-se necessária uma mudança de quadros, elucidando as dúvidas dos alunos.
- c. A explicitação e institucionalização local: os elementos que tiveram papel importante na fase anterior podem, agora, serem apropriados pelos alunos. Nessa fase ocorre um momento de discussão coletiva, mas com reações individuais – a institucionalização local.
- d. A institucionalização - estatuto de objeto: nesse momento, o professor expõe o novo, apresentando o conteúdo de forma organizada, com definições, teoremas e demonstrações.
- e. A familiarização - reinvestimento: o professor apresenta aos alunos novos problemas que precisam dos conceitos recentemente institucionalizados. Apesar desses exercícios exigirem somente saberes conhecidos, os alunos os abordam com concepções mais evoluídas e que permitem a visualização de um grupo mais amplo de problemas.
- f. Complexificação da tarefa ou novo problema: um problema mais complexo é proposto aos alunos, exigindo por parte desses testar ou desenvolver seus domínios das novas aquisições.



Douady (1986) define jogos de quadros como mudanças de quadros (algébrico, geométrico, aritmético, gráfico) provocadas pelo professor, permitindo que o aluno evolua nas fases de pesquisa. Esse procedimento se divide em três etapas: transferência e interpretação; correspondências imperfeitas; melhora das correspondências e progresso do conhecimento.

Na etapa de transferência e interpretação, os alunos transferem, total ou parcialmente, para um novo quadro um problema formulado, estabelecendo correspondências entre quadros diferentes. Podem ocorrer correspondências imperfeitas, por razões matemáticas ou por falta de conhecimento dos alunos. Essa situação gera um desequilíbrio nas convicções dos alunos. Um fator que possa re-equilibrar os saberes dos alunos é a comunicação entre os quadros e, às vezes, a utilização de um quadro auxiliar de representação. Ocorre, nessa etapa, uma melhoria das correspondências entre os quadros e o progresso do seu conhecimento.

Utilizamos nas atividades planejadas nessa pesquisa, além dos quadros algébrico e gráfico, também os quadros numérico e de linguagem natural. A interpretação do quadro numérico contribuiu para que os alunos compreendessem o conceito de vizinhança, importante para o desenvolvimento da noção de limite. O uso da linguagem natural, como apoio aos quadros gráficos e algébricos, foi incentivado em muitas das atividades, solicitando aos alunos que justificassem suas respostas.

## 5 O TÓPICO LIMITE NOS TEXTOS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Como o assunto de limites é lecionado hoje, nas escolas brasileiras? Como uma forma para tentar responder a esta questão procedemos à análise dos livros didáticos voltados para o ensino médio. A análise das obras didáticas justifica-se pelo fato dos livros serem “um instrumento normalmente presente e que desempenha um importante papel nos diversos cursos” (BARUFI, 1999).

Os livros didáticos são ferramentas pedagógicas que servem de suporte para um curso, constituindo um referencial para a pesquisa do professor e do aluno. A análise dos livros didáticos permite identificar como se estruturam os conteúdos de uma disciplina, segundo seus autores, bem como conhecer a proposta metodológica dos autores para a abordagem desses conteúdos.

Nesse trabalho, foram analisadas as obras indicadas pelo Catálogo do PNLEM que abordam o tema limite, além do oitavo volume da coleção Noções de Matemática dos professores Aref Antar Neto et al. (1985) que está sendo reeditada no momento.

Os livros do Catálogo do PNLEM foram escolhidos para análise por serem adotados em escolas tanto públicas quanto privadas em todo Brasil, além de já terem sido submetidos a rigorosos critérios de avaliação estabelecidos pelo Ministério de Educação e Cultura. Os livros do Catálogo do PNLEM<sup>28</sup>, ano de 2009, são:

- a. Matemática ensino médio: Kátia Stocco Smole; Maria Ignez Diniz (2005);
- b. Matemática aula por aula: Benigno Barreto Filho; Cláudio Xavier da Silva (2005);
- c. Matemática completa: José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno (2005);
- d. Matemática e suas tecnologias: Angel Pandés Rubió e Luciana Maria Ternuta de Freitas (2005);
- e. Matemática no ensino médio: Marcio Cintra Goulart (2005);
- f. Matemática: Luiz Roberto Dante (2004);
- g. Matemática: Antônio Nicolau Yossef, Elizabeth Soares e Vicente Paz Fernandez (2005);
- h. Matemática: Manoel Paiva (2003).

---

<sup>28</sup> A referência completa dos livros encontra-se nas Referências.

Podemos observar inicialmente que o tema Cálculo Diferencial e Integral pouco aparece nas coleções do Ensino Médio; dentre as oito coleções apresentadas no PNLEM somente três abordam o assunto e o fazem ao final do terceiro volume. Três obras são volumes únicos e não exploram o assunto de Cálculo. Um dos motivos para a exclusão do assunto poderia ser o fato de que o volume único apresentasse uma exposição mais resumida do conteúdo. Por esse motivo, resolvemos investigar outras coleções, de três volumes: de Luiz Roberto Dante; dos autores Antônio Nicolau Yossef, Elizabeth Soares e Vicente Paz Fernandez; e de Manoel Paiva.

Os autores Antônio Nicolau Yossef, Elizabeth Soares e Vicente Paz Fernandes não escreveram nenhuma outra obra, a não ser o volume único indicado no PNLEM.

O professor Manoel Paiva possui outra coleção, de três volumes. Entretanto, também nesses livros não se faz menção ao assunto de limites e derivadas, sendo que o terceiro volume apresenta uma revisão dos conteúdos vistos nos anteriores. A edição anterior dessa coleção, datada de 1995, abordava o tópico limites e derivadas, no terceiro livro - das 608 páginas de teoria e exercícios propostos, 145 são sobre limites e 84 sobre derivadas. Nessa edição, o autor apresentava o limite de uma função e suas propriedades, a continuidade de funções, limites laterais, limites infinitos e no infinito, limites trigonométricos e exponenciais. Na edição de 2003 do livro do prof. Manoel Paiva, o tema de limites e derivadas é substituído por uma unidade de revisão geral dos conteúdos dos três volumes. Essa unidade ocupa 144 das 290 páginas de teoria e exercícios. Também na edição de 2010, a coleção não apresenta mais questões de introdução ao Cálculo Diferencial.

O livro do professor Luiz Roberto Dante, volume único, é adotado na escola onde foi desenvolvida essa pesquisa. Pelo fato da coleção “Matemática: contexto e aplicações”, do professor Dante, trazer o assunto limites, o volume correspondente também será analisado.

O livro Introdução à Análise Matemática (ANTAR NETO et al., 1985) foi escolhido para ser analisado por ser uma obra destinada a alunos de Ensino Médio, que evidencia um cuidado especial em relação à linguagem e definições dos conceitos de Cálculo.

O livro Limites e derivadas, de Ferreira et al., foi adotado na escola pesquisada nos anos 90 e, apesar de não ser mais a bibliografia principal, até hoje é utilizado por alguns professores como referência em sala de aula. Justifica-se, por esse motivo, sua análise nesse trabalho.

Os critérios definidos para análise dos livros foram:

- a. a linguagem utilizada: foi observado se o livro apresentava uma linguagem

acessível aos alunos e se a linguagem natural era utilizada para explicar conceitos, definições, para expor as ideias envolvidas no processo de resolução dos exercícios resolvidos e/ou exemplos. Esse critério foi escolhido uma vez que a teoria “escrever para aprender Matemática” foi utilizada para o desenho da *Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real*.

- b. a utilização de gráficos para visualização de noções e conceitos: o emprego de gráficos como ferramenta para conceitualização e exemplificação das propriedades, definições e ideias relacionadas com limite. As mudanças do quadro algébrico para o quadro gráfico ou do gráfico para o algébrico correspondem à dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1986), que será discutida no item 0.
- c. o uso de recursos de informática: alguns livros de Cálculo, direcionados para o Ensino Superior, já utilizam recursos de informática como softwares didáticos, gráficos, linguagem de programação ou até a Internet como suporte didático. A decisão de observarmos o emprego de recursos de informática baseou-se no papel que o computador pode ter como ferramenta de apoio ao ensino. “[...] o computador pode muito bem exercer um papel significativo na criação de um ambiente onde os estudantes podem adquirir experiências apropriadas para construir o conceito de limite.” (CORNU, 1991, p. 166, tradução nossa).<sup>29</sup>

---

<sup>29</sup> the computer may very well play a significant role in providing an environment where the student may gain appropriate experiences to construct the limit concept. (CORNU, 1991, p. 166).

Além desses critérios, foi objeto de análise a ordem de apresentação do conteúdo.

O Quadro 5 apresenta a lista dos livros analisados.

| <b>Título</b>                            | <b>Autores</b>                                 | <b>Editora</b> | <b>Ano</b> |
|------------------------------------------|------------------------------------------------|----------------|------------|
| <b>Matemática completa</b>               | GIOVANNI, José Ruy; BONJORNIO, José Roberto    | FTD            | 2005       |
| <b>Matemática ensino médio</b>           | SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez        | Saraiva        | 2005       |
| <b>Matemática aula por aula</b>          | BARRETO FILHO, Benigno e SILVA, Cláudio Xavier | FTD            | 2005       |
| <b>Introdução à análise matemática</b>   | ANTAR NETO, Aref et al.                        | Moderna        | 1985       |
| <b>Limites e derivadas</b>               | FERREIRA, Silvimar Fábio; et al.               | CEFET-PR       | 1991       |
| <b>Matemática: contexto e aplicações</b> | DANTE, Luiz Roberto                            | Ática          | 2004       |

Quadro 5: Livros didáticos voltados para o Ensino médio que foram analisados

Fonte: Elaborado pela autora

### 5.1 Análise do livro Matemática completa

A obra introduz o capítulo sobre limites com uma situação problema envolvendo uma função exponencial, questionando sobre o comportamento dessa quando o tempo tende ao infinito.

A seguir é apresentada ao aluno uma ideia “intuitiva” de limite, segundo os autores utilizando, como exemplos, um problema geométrico que recai em um limite da soma convergente de uma progressão geométrica e o limite de uma função polinomial de primeiro grau. Logo nesse início aparecem a noção de limite lateral e a sua notação.

Os autores introduzem o conceito de limite classificado como sendo “o limite da função  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $a$ , é o número real  $L$ , se, e somente se, os números reais da imagem  $f(x)$  permanecerem próximos de  $L$ , para os infinitos valores de  $x$  próximos de  $a$ .” (GIOVANNI; BONJORNIO, 2005, p. 220).

No parágrafo seguinte, os autores discutem a existência do limite a partir dos limites laterais: “Podemos ainda calcular o limite quando existir  $f(x)$  em todos os pontos de um intervalo aberto que contenha  $a$ , e os limites laterais, tanto da direita como da esquerda,

tiverem o mesmo valor  $L$ ” (GIOVANNI; BONJORN, 2005, p. 220). Embora os autores empreguem a linguagem natural, de uma forma acessível aos alunos, essa definição pode gerar obstáculos epistemológicos, uma vez que não necessariamente a função precisa estar definida em um ponto  $x = a$  para que exista  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

São enunciadas as propriedades dos limites (constante, soma, diferença, produto, quociente, potência, raiz, logaritmo e função polinomial), com aplicação das propriedades no cálculo de alguns limites, utilizando-se tanto o quadro<sup>30</sup> algébrico quanto o da linguagem natural:

### Limite da soma

O limite da soma de duas funções é igual à soma dos limites dessas funções, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a + b$$

Figura 2: Limite da soma

Fonte: GIOVANNI; BONJORN, 2005, p. 223

Esses autores definem a continuidade de uma função da seguinte forma “uma função  $f(x)$  definida em um intervalo  $I$  com  $a \in I$ , é dita contínua em  $x = a$ , se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ”

(GIOVANNI; BONJORN, 2005, p. 227) e afirmam que uma função contínua é aquela em que “o gráfico pode ser desenhado de uma só vez, sem levantar a ponta do lápis do papel.” (GIOVANNI; BONJORN, 2005, p. 227). Um problema observado nessa afirmação está na dualidade global/local apontada por Rezende (2003ab) - a função “pode ser desenhada de uma só vez” apresenta o aspecto global, já a afirmativa contínua para  $x = a$  é local.

Para exemplificar a continuidade ou a descontinuidade em um ponto de funções os autores utilizam o quadro gráfico:

<sup>30</sup> O termo “quadro”, utilizado nas análises dos livros, refere-se à teoria de Douady (1986) - dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros.

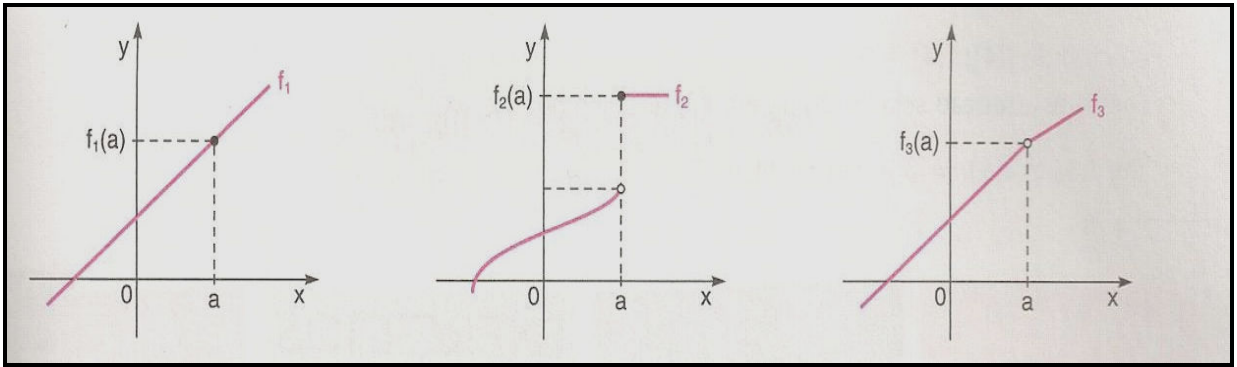


Figura 3: Discussão sobre a continuidade de funções  
 Fonte: GIOVANNI; BONJORN, 2005, p. 227

Os autores afirmam que a função “ $f_1$  é contínua para  $x = a$ ” (GIOVANNI e BONJORN, 2005, p. 227) e que as funções  $f_2$  e  $f_3$  são descontínuas para o ponto analisado.

De acordo com a definição de continuidade em um ponto adotada pelos autores, como  $x = a$  é ponto do domínio de  $f$ , seria possível afirmar que “ $f$  é descontínua em  $x = a$  se for falso que ela é contínua em  $a$ ” (PEREIRA e ROSA, 2010, p.41). Isso justificaria afirmar que  $f_2$  é descontínua em  $x = a$ . Para a função  $f_3$ , apresentada na Figura 3, como  $x = a$  não é ponto do domínio de  $f$ , caberia, talvez, a mesma observação feita pelos autores ao apresentarem, também na página 227, um outro exemplo da função  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ . Nesse exemplo, ao analisarem a continuidade da função para  $x = 2$ , os autores afirmam que “A função  $f(x)$  não está definida para  $x = 2$ . Logo, não podemos falar em continuidade da função neste ponto” (GIOVANNI e BONJORN, 2005, p. 227).

Os limites infinitos e limites para  $x$  tendendo ao infinito são apresentados juntamente e com o auxílio do quadro gráfico, para o cálculo dos limites:

Ampliaremos agora o conceito de limite, introduzindo o elemento *infinito*, que representamos por  $\infty$ .

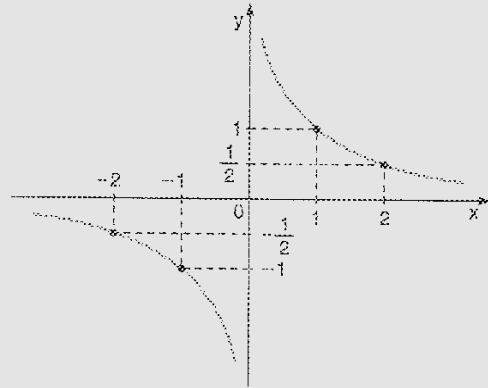
O símbolo  $\infty$  não representa um número; portanto, não se efetuam com ele as operações que realizamos com os números reais.

Vejamos algumas situações:

1. Observe, ao lado, o gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ :

- Quando  $x$  se aproxima de zero, pela direita,  $y$  cresce indefinidamente superando qualquer valor arbitrário que fixemos, isto é,  $y$  tende a mais infinito e indicamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



- Quando  $x$  se aproxima de zero, pela esquerda,  $y$  decresce indefinidamente, isto é,  $y$  tende a menos infinito e indicamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Observe que não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  porque os limites laterais são diferentes.

- Quando  $x$  cresce indefinidamente, o gráfico quase encosta no eixo  $x$ , isto é,  $y$  tende a zero:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- Quando  $x$  decresce indefinidamente, o gráfico quase encosta no eixo  $x$ , isto é,  $y$  tende a zero:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Figura 4: Limites infinitos e com  $x$  tendendo para infinito  
Fonte: GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 230

Para o cálculo de limites de funções racionais, quando a substituição direta leva à indeterminação zero sobre zero, os autores sugerem a fatoração e a simplificação da função antes do cálculo do limite. Não há, aqui, nenhum gráfico descrevendo o comportamento das funções racionais.

Os autores encerram o capítulo com os limites da função exponencial e da função logarítmica, sem mencionar as funções trigonométricas. Contudo, para a determinação da derivada da função  $f(x) = \sin(x)$ , os autores citam e empregam o limite trigonométrico fundamental.

Pode-se observar uma preocupação dos autores em relação a um “algebrismo” no cálculo dos limites, ao apresentarem um quadro com técnicas de resolução para os casos



apresentados no capítulo:

| Resumo                                                                                                       |                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Veja algumas das abordagens mais usadas para o cálculo de limites, revendo o que foi estudado até o momento. |                                                                                                                                                                        |
| Caso                                                                                                         | Técnica de resolução                                                                                                                                                   |
| 1ª A função existe, isto é, está definida no ponto considerado.                                              | Calcular o valor numérico da função no ponto considerado, ou seja, substituir o valor de $x$ .                                                                         |
| 2ª O numerador se aproxima de um número real não-nulo e o denominador tende a zero.                          | Se o denominador tende a zero, a fração cresce ou decresce indefinidamente e o limite será $+\infty$ ou $-\infty$ .                                                    |
| 3ª Na função polinomial $x$ tende a $+\infty$ ou $-\infty$ .                                                 | Colocar em evidência a maior potência de $x$ .                                                                                                                         |
| 4ª O numerador tende a um número real e o denominador se aproxima de $+\infty$ ou $-\infty$ .                | Neste caso, o limite é sempre igual a zero.                                                                                                                            |
| 5ª O numerador e o denominador tendem a $+\infty$ ou $-\infty$ .                                             | Divida o numerador e o denominador pela maior potência de $x$ e faça a substituição.                                                                                   |
| 6ª O numerador e o denominador tendem a zero.                                                                | Fatorar, se possível, o numerador e o denominador da fração e simplificá-la. Ou ainda, multiplicar e dividir a fração pelo "conjugado" do numerador ou do denominador. |

Figura 5: Resumo sobre o cálculo de limites

Fonte: GIOVANNI; BONJORNIO, 2005, p. 236

No quadro-resumo apresentado pelos autores verificamos o uso da linguagem natural. Essa característica é encontrada em todo o capítulo sobre limites.

Apesar dos autores listarem, no final do livro, sites relacionados à educação e à matemática, não há menção ao uso de recursos de informática para o cálculo de limites.

A estrutura temática do texto obedece à ordem:

- a. Definição de limite;
- b. Propriedades dos limites;
- c. Continuidade de função;
- d. Limites infinitos e limites para  $x$  tendendo ao infinito;
- e. Limite quando o numerador e o denominador tendem a zero;
- f. Limite da função exponencial;
- g. Limite da função logarítmica.

## 5.2 Análise do livro Matemática Ensino Médio

As autoras afirmam que “Embora haja controvérsia sobre a introdução ao estudo do Cálculo diferencial no Ensino Médio, nós apresentamos nessa obra uma unidade inteira dedicada ao que chamamos de **taxa de variação**” (SMOLE; DINIZ, 2005, p. 32). Para explicar e utilizar a taxa de variação, as autoras apresentam o limite somente como uma ferramenta para o desenvolvimento do conceito de derivada. Assim, as autoras escreveram pouco mais que duas páginas sobre esse tema, com o título de “*Noção intuitiva de limite de função.*”

Embora o título seja sobre limite de função, as autoras iniciam o assunto com uma discussão sobre a convergência de sequências, introduzindo a notação de limite:

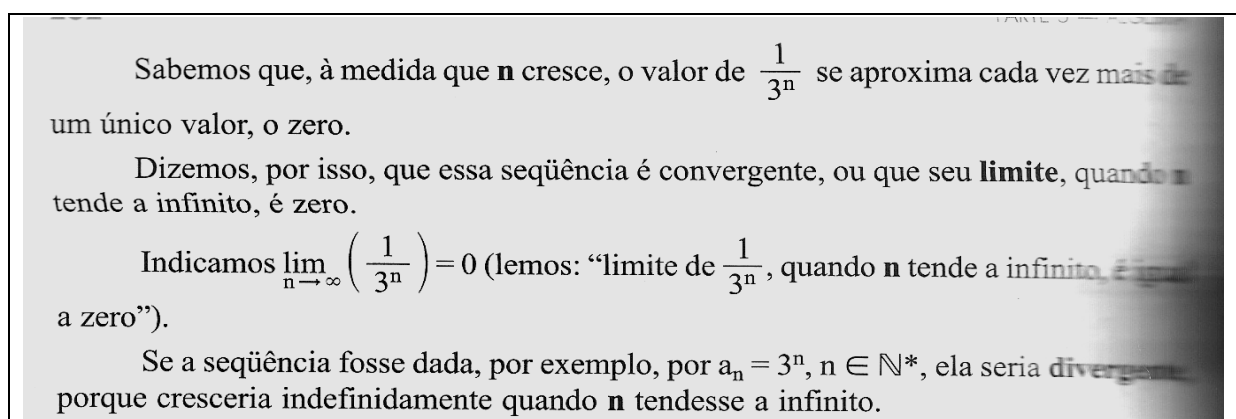


Figura 6: Discussão sobre convergência e divergência de sequências  
Fonte: SMOLE; DINIZ, 2007, p. 282

Uma função racional é utilizada para exemplificar o limite de uma função, quando  $x$  tende a  $a$ , sendo empregados os quadros gráfico e numérico para a construção do conceito de limite:

Podemos também usar funções para compreender o conceito de limite.

Por exemplo, vamos analisar o que ocorre com os valores de  $f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$ , de domínio  $\mathbb{R} - \{3\}$ , quando  $x$  se aproxima de 3.

Como  $x \neq 3$ , dividindo o numerador e o denominador por  $x - 3$ , obtemos:

$$f(x) = 2x,$$

cujo gráfico aparece na figura ao lado.

Atribuindo a  $x$  valores próximos de 3, alguns menores e outros maiores que 3, temos:

|                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| $f(2,99) = 5,98$       | $f(3,01) = 6,02$       |
| $f(2,999) = 5,998$     | $f(3,001) = 6,002$     |
| $f(2,9999) = 5,9998$   | $f(3,0001) = 6,0002$   |
| $f(2,99999) = 5,99998$ | $f(3,00001) = 6,00002$ |

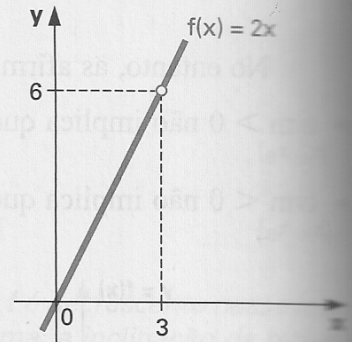


Figura 7: Utilização dos quadros gráfico e numérico para o cálculo do limite  
Fonte: SMOLE; DINIZ, 2007, p. 282

As autoras apresentam a noção de limite de uma função utilizando o termo “sequência de valores”:

Sejam  $f$  uma função real de variável real e  $a \in \mathbb{R}$ .

Dizemos que o **limite de  $f(x)$** , para  $x$  tendendo a  $a$ , é  $b \in \mathbb{R}$ , e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

se a toda possível sequência de valores de  $x$ , pertencentes ao domínio da função, tendendo para  $a$  (mas diferentes de  $a$ ), corresponde uma sequência de valores de  $f(x)$  tendendo para  $b$ .

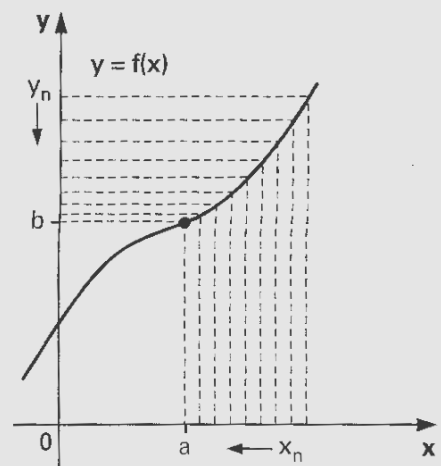


Figura 8: Noção de limite de uma função  
Fonte: SMOLE; DINIZ, 2007, p. 283

Percebe-se a tentativa no sentido de uma ligação entre os quadros da linguagem natural, gráfico e numérico para explicar o conceito de limite, o que não necessariamente pode melhorar a compreensão do conceito, podendo, até por vezes, configurar-se como uma transmissão didática de obstáculos epistemológicos (CORNU, 1991). Talvez fosse importante apresentar alguns exercícios sobre o assunto, objetivando a fixação dessas ideias.

### 5.3 Análise do livro *Matemática aula por aula*

Embora os autores afirmem haver divergentes opiniões sobre o estudo de limites no Ensino Médio, os professores Barreto Filho e Silva abordam o assunto de limites, devido “a sua utilização para aprimorar o estudo sobre funções” (BARRETO FILHO; SILVA, 2005, p. 56).

O capítulo sobre limites inicia-se com uma proposta de trabalho envolvendo a produção de textos e apresentando um pouco da história matemática, mais especificamente, sobre o tema limites. É interessante observar que os autores introduzem a noção de limite utilizando um exemplo físico para depois fazer a correspondência para um quadro numérico e um quadro gráfico. Verifica-se a introdução do termo “limite lateral” antes da definição de limite.

Com relação à própria definição de limite, os autores preferem colocar a definição formal, como podemos verificar:

Considerando uma função  $f(x)$ , definida num intervalo  $I$ , temos que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $a$ , é o número  $b$ , se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir, em correspondência, um número  $\delta > 0$ , de modo que  $x \neq a$  e  $a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ . (BARRETO FILHO; SILVA, 2005, p. 235)

Além do uso do quadro algébrico a definição é apresentada também num quadro gráfico, sendo, logo em seguida, exemplificada para o caso da função quadrática.

As propriedades de limites listadas pelos autores se restringem a soma, produto e quociente. Em seguida, é colocado um texto sobre como o uso de limites pode servir para analisar e compreender fenômenos físicos.

Sobre a continuidade, os autores definem que “uma função  $f(x)$  é contínua no ponto  $x = a$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ” (BARRETO FILHO; SILVA, 2005, p. 242). Os autores afirmam ainda que “o gráfico de uma função contínua em um intervalo rel é

representada por uma curva que não apresenta ponto de descontinuidade, isto é, não possui saltos e nem furos" (BARRETO FILHO; SILVA, 2005, p. 242). Para exemplificar a continuidade de funções utilizam o quadro gráfico:

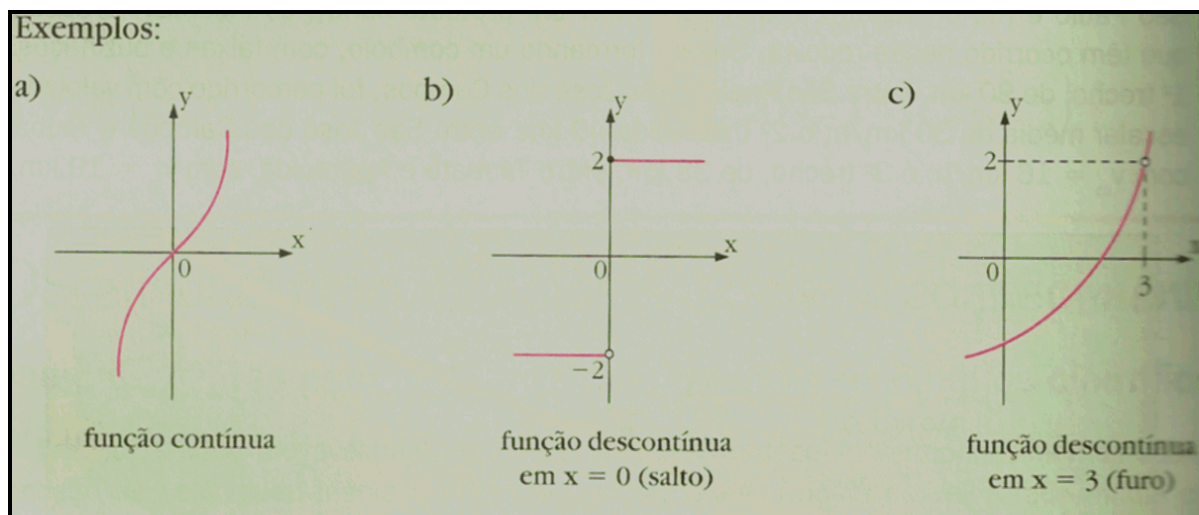


Figura 9: Exemplos sobre continuidade e descontinuidade de funções

Fonte: BARRETO FILHO; SILVA, 2005, p. 242

Destacamos a complexidade do conceito e o fato que a forma simplificada de expressá-lo, pode segundo Cornu(1991), trazer obstáculos didáticos, dificultando o entendimento do conceito.

O limite trigonométrico fundamental é primeiramente analisado numericamente, sendo demonstrado, depois, algebricamente, acompanhado de um quadro gráfico para melhor interpretação da demonstração.

O tópico sobre limites relacionados ao infinito é seguido pelo limite exponencial fundamental. O capítulo é encerrado com um texto matemático e um convite para que os alunos avaliem o seu conhecimento, produzindo pequenos textos para revisar a matéria.

A estrutura temática do livro é apresentada abaixo:

- a. Noção de limite;
- b. Definição;
- c. Propriedades;
- d. Continuidade de funções;
- e. Limite trigonométrico fundamental;

- f. Limites envolvendo os símbolos  $+\infty$  e  $-\infty$ ;
- g. Limite exponencial fundamental.

A linguagem que os autores utilizam na obra mostra-se tão direta que causa-nos a impressão de um diálogo com os alunos. Desta forma, a lista de exercícios resolvidos é chamada de “participe das resoluções” e a lista dos exercícios de fixação é colocada como “elabore as resoluções”. O quadro da linguagem natural é utilizado para explicar conceitos, assim como os quadros gráfico e numérico. Observamos, também, que os autores incentivam o uso da escrita matemática, recomendando que o aluno faça “anotações que sejam significativas para o seu aprendizado e que possam ajudá-lo na ampliação e sistematização dos seus conhecimentos.” (BARRETO FILHO; SILVA, 2005, p. 252).

#### **5.4 Análise do livro Matemática: contexto e aplicações**

O capítulo do livro intitulado “Introdução aos limites” apresenta o que o autor chama de “ideia intuitiva de limite” através do exemplo da soma de infinitos termos de uma sequência, para então citar o limite de uma função exponencial, empregando a expressão de “tender a”. Pode-se observar uma importância dada ao limite de sequências, usado, por exemplo para definir o número real  $e$ .

A conceituação de limite de uma função, que o autor denomina de intuitiva, é estudada para uma função de primeiro grau, juntamente com a ideia de aproximação lateral. O segundo exemplo utilizado para introduzir a noção de limite traz uma função mais complexa, que através de simplificação, pode ser substituída por outra mais simples. São utilizados os quadros gráficos, algébricos, numéricos e de linguagem natural para isso:

Ex) Consideremos a função  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x - 1}.$$

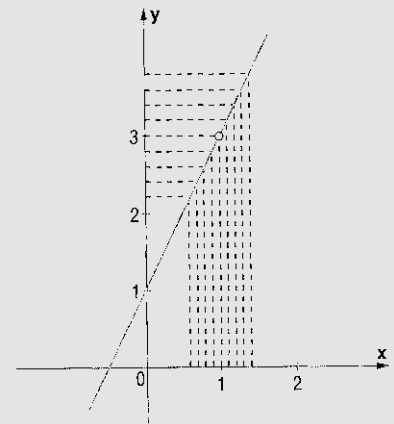
Vamos estudar o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a 1, ou seja,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

Observemos que, neste caso, a função nem está definida no ponto  $x = 1$ , ou seja, não existe  $f(1)$ .

Como  $x \neq 1$ , então  $x - 1 \neq 0$  e podemos dividir numerador e denominador por  $(x - 1)$  obtendo:

$$f(x) = 2x + 1 \quad (x \neq 1)$$

cujo gráfico está ao lado (a reta dá “um salto” para  $x = 1$ , pois a função não está definida nesse ponto). Observe na tabela abaixo valores de  $x$  e  $f(x)$  próximos de 1 e 3, respectivamente:



|                 |     |      |       |        |     |        |       |      |     |
|-----------------|-----|------|-------|--------|-----|--------|-------|------|-----|
| $x$             | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 0,9999 | ... | 1,0001 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
| $f(x) = 2x + 1$ | 2,8 | 2,98 | 2,998 | 2,9998 | ... | 3,0002 | 3,002 | 3,02 | 3,2 |

Figura 10: Noção de limite

Fonte: DANTE, 2004, p. 235

São apresentadas somente três propriedades sobre limites – soma, multiplicação e divisão.

Sobre a continuidade de funções, o autor afirma que:

Uma função  $f$  é contínua num ponto  $x = a$  se, e somente se, as seguintes condições estiverem satisfeitas:

- 1ª) existe  $f(a)$ ;
- 2ª) existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ;
- 3ª)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Para Refletir**

A primeira condição equivale a dizer que  $a$  pertence ao domínio de  $f$ .

Quando uma (ou mais) dessas condições não é satisfeita para  $x = a$ , dizemos que a função é descontínua em  $a$ .

Dizemos também que uma função é *contínua num conjunto* se for contínua em todos os elementos desse conjunto. Dizemos simplesmente que uma função é contínua quando o for em todos os pontos do seu domínio.

Figura 11: Definição de função contínua

Fonte: DANTE, 2004, p. 241

O autor afirma que uma função será contínua se as condições apresentadas forem satisfeitas e será descontínua quando pelo menos uma das dessas não forem cumpridas. Assim para o autor, a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  é contínua em todos os pontos de seu domínio, assim como a

função. E  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  em  $x = 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  é classificada como descontínua.

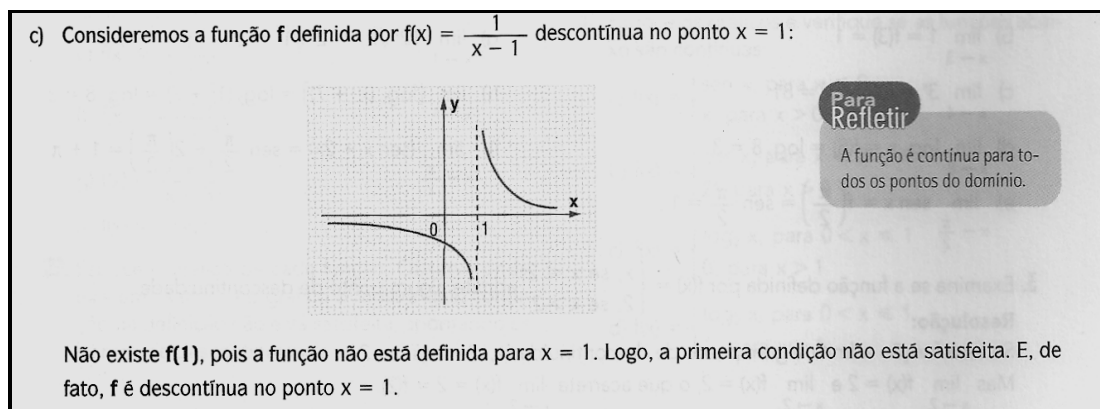


Figura 12. Discussão sobre continuidade e descontinuidade de função

Fonte: DANTE, 2004, p. 243

Ressaltamos, novamente a complexidade dos conceitos de continuidade. Na conceituação adotada por Dante (2004), não há restrição quanto ao ponto  $x = a$  pertencer ao domínio de  $f$ . Assim, a função  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  definida em  $\mathbb{R} - \{1\}$  é contínua, porém é descontínua em  $x=1$ , que está fora do seu domínio. Conforme destacam Pereira e Rosa (2010) “alguns autores preferem, na definição de continuidade, considerar inicialmente pontos em  $\mathbb{R}$  e colocar a pertinência ao domínio como uma das condições exigidas” (PEREIRA; ROSA, 2010, p.42).

O limite trigonométrico fundamental é apresentado nos quadros algébrico e numérico, com a demonstração através do teorema do confronto. Seguem-se os limites infinitos e de  $x$  tendendo ao infinito. Nessa última seção, o autor solicita o esboço do gráfico de algumas funções para o cálculo dos limites.

O último assunto citado no livro, nesse capítulo, é o limite exponencial fundamental, agora visto como limite de função de variável real.

Para encerrar, o autor coloca uma lista de exercícios, resolvidos e propostos, sobre aplicações de limites em problemas de geometria, física e biologia.

Embora não apresente nenhum exercício que envolva recursos de informática, o autor cita dois endereços eletrônicos ao final no capítulo, que apresentam a teoria de fractais, indicando haver uma relação entre fractais e limites.



## 5.5 Análise do livro introdução à análise matemática

Este livro, o oitavo da Coleção Noções de Matemática, é dividido em quatro partes: conceito básico sobre as funções, limites e continuidade, derivadas e integração (noções básicas). Desta forma, Antar Neto et al. (1985) apresentam os pré-requisitos ao estudo sobre limites - relembrando os conceitos de módulo, intervalos, vizinhanças e alguns tópicos sobre funções.

A noção de limite envolve a questão de vizinhança, de proximidade, sendo utilizadas diversas funções para exemplificar o conceito informal de limite, bem como a sua existência. Em seguida os autores apresentam o que seja limite lateral. Todos os exemplos são acompanhados de gráficos muito bem detalhados.

A definição formal de limite é trabalhada em dois exemplos com gráficos, seguindo-se uma lista de doze exercícios resolvidos, em que os autores colocam algumas questões como a unicidade do limite e o teorema da conservação do sinal.

Os autores definem a continuidade de uma função no seu domínio, bem como a descontinuidade da função em um ponto de seu domínio:

Seja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e seja  $x_0$  um ponto de seu domínio ( $x_0 \in A$ ).

A função  $f$  é **contínua** em  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Note que esta definição abrange *as três condições* seguintes:

- 1.<sup>a</sup>) existe  $f(x_0)$  (isto é,  $x_0 \in A$ );
- 2.<sup>a</sup>) existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ;
- 3.<sup>a</sup>)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Se  $f$  não é contínua em  $x_0$ , dizemos que  $f$  é **descontínua** em  $x_0$ . Note, também, que só se pode falar que uma função  $f$  é contínua ou descontínua em  $x_0$ , se  $x_0$  pertence ao domínio de  $f$ , isto é, se está definido o valor  $f(x_0)$ . Assim, para que  $f$  seja *descontínua* em  $x_0$ , deve-se ter que

- 1.<sup>o</sup>) existe  $f(x_0)$ ;
- 2.<sup>o</sup>) ou não existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,

ou então  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ .

Figura 13: Definição de função contínua e descontínua  
 Fonte: ANTAR NETO et al., 1985, p. 86

Além dessas definições, os autores apresentam a definição formal de função contínua: “ $f$  é contínua em  $x_0$  também equivale dizer que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x - x_0| < \delta$ , então  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ” (ANTAR NETO et al., 1985, p. 86). Para ilustrar esses conceitos, são utilizados alguns exemplos evidenciando o emprego do quadro gráfico:

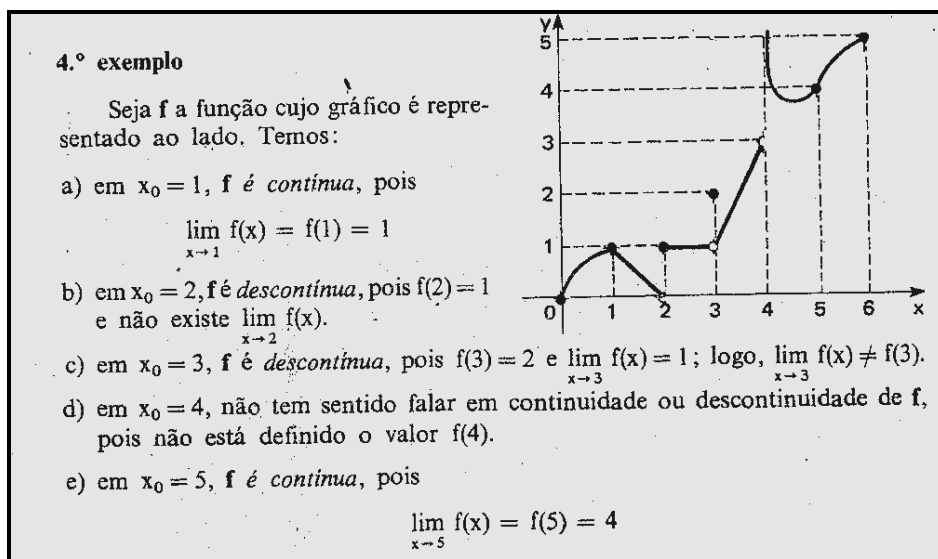


Figura 14: Exemplo sobre continuidade de funções  
Fonte: ANTAR NETO et al., 1985, p. 87

O capítulo é encerrado com a definição de continuidade de função em um conjunto: “uma função  $f$  é contínua em um conjunto  $D$  se é contínua em todo o ponto de  $D$ ” (ANTAR NETO et al., 1985, p. 88). Muitos exemplos e exercícios resolvidos são discutidos antes da introdução da lista de exercícios propostos.

A continuidade é utilizada como ferramenta para o cálculo de limites, no capítulo seguinte, onde os autores apresentam o Teorema da Troca (substituição da função dada por uma função contínua). Também são mostradas as propriedades de limites, sendo colocada uma extensa lista de exercícios sobre a teoria.

Há um capítulo (capítulo 7) em que se estudam os limites laterais e continuidade lateral. Apesar dos limites laterais terem sido mencionados no capítulo 4, os autores discutem esse item com uma profundidade maior, apresentando a definição formal de limite lateral. A continuidade lateral é utilizada como ferramenta para a determinação da continuidade da função em um intervalo fechado.

O oitavo capítulo, de título “Infinito”, discute as questões de limites infinitos e limites quando  $x$  tende para o infinito. Existem quadros para resumir as teorias desse capítulo, apresentando todas as situações possíveis desses limites. Poucos exemplos gráficos são utilizados para explicar a teoria.

| TABELA 1 – Limite da soma |                   |                  |                             |
|---------------------------|-------------------|------------------|-----------------------------|
|                           | Se $f(x)$ tende a | e $g(x)$ tende a | então $f(x) + g(x)$ tende a |
| 1                         | $L$               | $+\infty$        | $+\infty$                   |
| 2                         | $L$               | $-\infty$        | $-\infty$                   |
| 3                         | $+\infty$         | $+\infty$        | $+\infty$                   |
| 4                         | $-\infty$         | $-\infty$        | $-\infty$                   |
| 5                         | $+\infty$         | $-\infty$        | ?                           |
| 6                         | $-\infty$         | $+\infty$        | ?                           |

Os dois últimos casos são *formas indeterminadas* do tipo  $\infty - \infty$ . Para estas situações não há lei geral.

| TABELA 2 – Limite do produto |                   |                  |                                 |
|------------------------------|-------------------|------------------|---------------------------------|
|                              | Se $f(x)$ tende a | e $g(x)$ tende a | então $f(x) \cdot g(x)$ tende a |
| 1                            | $L > 0$           | $+\infty$        | $+\infty$                       |
| 2                            | $L > 0$           | $-\infty$        | $-\infty$                       |
| 3                            | $L < 0$           | $+\infty$        | $-\infty$                       |
| 4                            | $L < 0$           | $-\infty$        | $+\infty$                       |
| 5                            | $+\infty$         | $+\infty$        | $+\infty$                       |
| 6                            | $+\infty$         | $-\infty$        | $-\infty$                       |
| 7                            | $-\infty$         | $+\infty$        | $-\infty$                       |
| 8                            | $-\infty$         | $-\infty$        | $+\infty$                       |
| 9                            | $L = 0$           | $+\infty$        | ?                               |
| 10                           | $L = 0$           | $-\infty$        | ?                               |

Os dois últimos casos são *formas indeterminadas* do tipo  $0 \cdot \infty$ , para as quais não há lei geral.

Figura 15. Quadros-resumo sobre soma e produto de limites)

Fonte: ANTAR NETO et al., 1985, p. 128

O nono capítulo encerra a teoria de limites, discutindo sobre os limites trigonométricos, logarítmicos e exponenciais e abordando também o Teorema do Confronto.

Apesar de muitas vezes os autores usarem a linguagem natural para expressar conceitos e noções, a importância dada à demonstração e ao rigor da linguagem de Matemática é observada em todo o livro.

A estrutura temática do texto compreende:

- a. Definição de limite de uma função;
- b. O conceito de função contínua;
- c. Cálculo de limites;
- d. Limites e continuidade laterais;
- e. Infinito;
- f. Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

### **5.6 Análise do livro Limites e derivadas: para escolas técnicas industriais e centros de educação tecnológica**

Este livro foi utilizado nas escolas técnicas federais para o ensino do Cálculo Diferencial, nos cursos técnicos de Ensino Secundário. Escrito por professores de escolas técnicas foi empregado por muito tempo no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) como bibliografia básica. Ainda hoje serve de referência para os professores dessa instituição.

No primeiro capítulo, após breve alusão histórica, os autores apresentam a noção de limite através do termo “aproximação”. Aqui também é abordada a questão dos limites laterais: “Convém observar que o valor de  $x$  pode se aproximar do valor de  $a$  pela esquerda (através de valores menores que  $a$ ) ou pela direita (através de valores maiores que  $a$ ).” (FERREIRA et al, 1991, p. 9). Embora não apresente gráficos prontos nos exercícios, os autores solicitam a resolução dos limites através construção do esboço das funções. As propriedades de limites são enunciadas para que os alunos possam utilizá-las no cálculo dos limites. O capítulo termina com dois problemas de limites aplicados ao campo da Física.

O capítulo 2 é dedicado somente ao cálculo dos limites laterais, aparecendo tanto a noção dos limites laterais quanto a sua definição formal. Observa-se a notação “muito pequeno”, utilizada para caracterizar o acréscimo  $h$ :

Isto é;

Limite à esquerda:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ,  $x < a \Rightarrow x = a - h$ , onde  $h > 0$  é muito pequeno.

Limite à direita:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ,  $x > a \Rightarrow x = a + h$ , onde  $h > 0$  é muito pequeno.

Objetivamente, para se calcular os limites laterais, basta fazer a mudança de variável ( $x = a + h$  ou  $x = a - h$ ) e efetuar os cálculos.

**EXEMPLO:**

1) Calcule: a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + 1)$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 1)$

Solução:

a)  $x = 2 - h \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + 1) = \lim_{h \rightarrow 0} [3(2 - h) + 1] = \lim_{h \rightarrow 0} (6 - 3h + 1) = 7$

b)  $x = 2 + h \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 1) = \lim_{h \rightarrow 0} [3(2 + h) + 1] = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + 3h + 1) = 7$

Figura 16: Cálculo de limites laterais

Fonte: FERREIRA, 1991, p.23

Os autores separam os limites no infinito, quando  $x$  tende para infinito positivo ou negativo, dos limites infinitos. Para os dois casos, verifica-se a utilização dos quadros gráfico e numérico para exemplificar a teoria. São colocadas, também, as propriedades dos limites infinitos. A teoria desse capítulo serve de ferramenta para o cálculo de assíntotas horizontais e verticais, introduzido no capítulo 5. São propostos problemas envolvendo conceitos de ótica, termodinâmica, eletricidade e mecânica, empregando os tópicos vistos.

Os últimos capítulos são reservados para os limites trigonométrico fundamental e exponencial fundamental e para a questão da continuidade de funções. Sobre continuidade de funções, os autores empregam a seguinte definição:

Seja  $y = f(x)$  uma função definida em um intervalo  $I$  e seja  $a \in I$ . Diz-se que  $f$  é contínua em  $x = a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Decorre da definição que  $f(x)$  é contínua em  $x = a$  se, e somente se, forem verificadas as seguintes condições:

- a) existe  $f(a)$
- b) existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Quando pelo menos uma dessas condições não for verificada, dizemos que  $f$  é descontínua em  $x = a$ .

Figura 17. Definição sobre continuidade de funções

Fonte: FERREIRA, 1991, p. 50

A estrutura temática do livro obedece à ordem:

- a. Limite de uma função;
- b. Cálculo dos limites laterais;
- c. Limites no infinito;
- d. Limites infinitos;
- e. Assíntotas horizontais e verticais;
- f. Limites notáveis;
- g. Funções contínuas.

Os autores utilizam a linguagem natural para explicar alguns conceitos e procuram exemplificar a teoria, com o uso de limite na resolução de exercícios de física e química.

### **5.7 Uma breve síntese dos textos didáticos analisados**

Retomando os critérios estabelecidos anteriormente (a utilização da linguagem natural, de quadros gráficos e de recursos de informática), podemos resumir as observações sobre os livros analisados em um quadro-resumo:

| <b>Obra</b>                              | <b>Linguagem natural /<br/>Escrita matemática</b>                                                                                                                                                                                                         | <b>Quadro gráfico</b>                                                                                                | <b>Recursos de<br/>Informática</b>                                                                                  |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Matemática completa</b>               | Uso de quadro de linguagem natural. A escrita matemática é simples e direta.                                                                                                                                                                              | Aparece mais no início do capítulo, tanto em exemplos quanto em exercícios.                                          | Ao final do volume, os autores apresentam uma lista de endereços de sites de Matemática.                            |
| <b>Matemática Ensino Médio</b>           | O quadro da linguagem natural é utilizado na explicação do conceito de limites.                                                                                                                                                                           | Utilizado somente nos exemplos.                                                                                      | Nas orientações aos professores, as autoras listam uma série de programas matemáticos, bem como uma lista de sites. |
| <b>Matemática aula por aula</b>          | O quadro da linguagem natural aparece nos exemplos e conceitualizações. Os autores empregam uma linguagem direta, estabelecendo um diálogo com os alunos. Os autores sugerem a utilização da escrita matemática através da produção de textos matemáticos | Aparece nos exercícios resolvidos e exemplos.                                                                        | Não há indicação da utilização de recursos de informática.                                                          |
| <b>Matemática: Contexto e aplicações</b> | Utilização do quadro de linguagem natural nas definições, conceitos e exemplos. Uso de linguagem cotidiana, com quadros “Para Refletir”, que convidam o aluno a uma reflexão sobre o conteúdo.                                                            | Utilização de esboços de gráficos de funções tanto nos exemplos quanto nos exercícios propostos.                     | Indicação de um endereço eletrônico para um texto sobre um determinado fractal.                                     |
| <b>Introdução à Análise Matemática</b>   | Utilização de muitas demonstrações, apresentando um maior rigor na linguagem matemática.                                                                                                                                                                  | Aparecem gráficos somente nos exemplos e nos exercícios resolvidos.                                                  | Não há indicação da utilização de recursos de informática.                                                          |
| <b>Limites e Derivadas</b>               | Uso de linguagem natural para explicar alguns conceitos.                                                                                                                                                                                                  | Os gráficos aparecem prontos nos exemplos. Nos exercícios são utilizados como ferramentas para o cálculo de limites. | Não há indicação da utilização de recursos de informática.                                                          |

Quadro 6: Análises dos livros segundo os critérios de avaliação  
Fonte: Elaborado pela autora

Com relação à linguagem, verificamos que o livro *Introdução à Análise Matemática* utiliza mais o quadro algébrico do que as outras obras. Esse maior rigor matemático, e o pouco uso da linguagem natural, pode ser representativo da época em que foi escrito<sup>31</sup>, resquícios, provavelmente, do Movimento da Matemática Moderna.

<sup>31</sup> A obra analisada foi uma reedição de 1985. Existem exemplares desse livro datando de 1979.

O livro *Limites e Derivadas* foi desenvolvido para uso em escolas técnicas e, talvez por isto, apresente uma visão mais contextualizada do assunto limite. Os outros livros, mais recentes, utilizam o quadro da linguagem natural apoiando os quadros algébrico, gráfico e numérico, aparecendo principalmente nos exemplos e conceitualizações.

A utilização do quadro gráfico ainda é limitada, aparecendo quase que somente nos exercícios resolvidos e nos exemplos. Foram utilizados, além de nos exercícios resolvidos e nos exemplos, em alguns poucos exercícios propostos somente nos livros *Limites e Derivadas* (FERREIRA et al., 1991) e *Matemática: Contexto e aplicações* (DANTE, 2004).

Podemos observar que a utilização dos recursos de informática ainda é limitada, restringindo-se à consulta de sites sobre o conteúdo de Matemática. Os dois últimos livros analisados são mais antigos, de 1985 e 1991 e, por este motivo, não apresentam exercícios que necessitam de tal recurso. Entretanto, a utilização de uma ferramenta mais simples e acessível, mesmo naquela época, como uma calculadora, também não é mencionada em nenhuma obra.

Embora os autores dos livros analisados utilizem o quadro numérico para introduzir o conceito de função, esse quadro aparentemente não é usado pelos professores para o cálculo de limites.

Com relação aos tópicos de limites abordados nos livros, o conceito de continuidade de função necessita de uma discussão maior, devido à sua complexidade e às dificuldades relacionadas ao seu entendimento. Uma primeira observação seria com relação à afirmativa que “uma função contínua é aquela em que o seu esboço gráfico pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel”<sup>32</sup>. Como destacado por Cornu (1991), essa simplificação torna-se um obstáculo didático à compreensão do conceito de continuidade. A utilização do quadro gráfico para a determinação de pontos de continuidade ou de descontinuidade, segundo Rosa (2010), pode constituir um obstáculo – “O caso é que não se deve olhar o gráfico. A continuidade não está no gráfico, mas na relação entre abscissas e ordenadas: Para um ponto  $a$ , do domínio, pontos próximos de  $a$  devem ter imagens próximas de  $f(a)$ ” (ROSA, 2010).

A sutileza desse conceito pode ser verificada no artigo dos professores Rosa e Pereira (2010), em que os autores debatem sobre questão da continuidade/descontinuidade como observada nos livros didáticos:

---

<sup>32</sup> Essa afirmativa apareceu em todas as obras analisadas, com exceção do livro de SMOLE e DINIZ, que não aborda o assunto.



A maioria dos autores prefere não falar em descontinuidade nesses pontos e  $f$  não será então contínua nem descontínua em pontos fora de seu domínio. Nesse caso, a função  $f(x) = 1/x$  definida em  $\mathbb{R}^*$  será contínua (pois é contínua em todos os pontos de seu domínio) e não será contínua nem descontínua no ponto  $x = 0$ .

Em alguns textos, a noção de continuidade é definida somente para pontos do domínio (como fizemos), mas ainda se quer falar em descontinuidade para pontos fora dele. Nesse caso, é preciso dar uma definição que não seja simplesmente a negação da continuidade.

[...]

Como já mencionamos, alguns autores preferem, na definição de continuidade, considerar inicialmente pontos em  $\mathbb{R}$  e colocar a pertinência ao domínio como uma das condições exigidas. Nesse caso, a frase " $f$  é descontínua em  $a$ " será falsa sempre que  $a$  estiver fora do domínio de  $f$ . É natural então, embora não obrigatório, definir a descontinuidade em qualquer ponto em  $\mathbb{R}$  como a negação da continuidade. Em particular, uma função será sempre descontínua nos pontos fora de seu domínio. Adotada essa definição, a função  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $y = 1/x$ , será novamente uma função contínua que é descontínua no ponto  $x = 0$ . (PEREIRA; ROSA, 2010, p. 41-42)

Ávila (2010) afirma que a definição de continuidade é sofisticada e difícil. Esse autor coloca ainda que a definição de continuidade “só foi possível depois que os matemáticos haviam lidado com vários tipos de funções definidas por séries infinitas e que, surpreendentemente, exibiam vários tipos de descontinuidade.” (ÁVILA, 2010, p. 5). Ávila ressalta que, pelo fato desses exemplos não serem acessíveis aos estudantes do Ensino Médio, falta o preparo para entender a definição de continuidade.

Observamos, além do exposto, que, de modo geral, o tópico de limites é abordado de forma aligeirada em textos didáticos de edições mais recentes, fato que ilustra a tendência de suprimir esse conteúdo do texto didático do Ensino Médio.

## 6 A PROPOSTA EM ANDAMENTO: DA ANÁLISE A PRIORI À ANÁLISE A POSTERIORI

O objetivo dessa pesquisa era investigar e propor abordagens metodológicas que poderiam contribuir para o estudo e aprendizagem, no Ensino Médio, do conteúdo de limites de funções reais. Nesse processo de investigação, duas abordagens foram escolhidas procurando atingir esse objetivo: a dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1986) e a teoria “escrever para aprender Matemática” (PORTER; MASINGILA, 2000; IDRIS, 2009). Essas abordagens foram utilizadas para o traçado das atividades que integraram a proposta *Uma Introdução ao Estudo de Limite de Função Real*.

Orientando-nos pelo desenho da engenharia didática, desenvolvemos para cada atividade suas análises *a priori* e *posteriori*. Na fase de análise *a priori* de cada atividade explicitamos as variáveis micro-didáticas de cada seção: objetivo da atividade; tempo estimado para o seu desenvolvimento; tipo de trabalho (individual ou em dupla); demanda dos recursos de informática. Também discutimos os possíveis erros que os alunos poderiam cometer na resolução dos exercícios.

O item *Execução* consiste no registro das observações da professora durante a institucionalização das atividades.

Na análise *a posteriori* apresentamos e discutimos as respostas mais relevantes ao processo de validação da engenharia didática. Além disso, foram analisados os erros que poderiam estar relacionados com as dificuldades e os obstáculos relativos ao ensino e aprendizagem de limites, segundo o ponto de vista de Cornu (1991), Sierpinska (1994), Artigue (1995), Celestino (2008) e Rezende (2003ab), entre outros pesquisadores debatidos no seção 3.4 do Capítulo 3 dessa dissertação.

A proposta é composta de 16 atividades sobre o tema limites, abordando o conteúdo didático da escola estudada, compreendendo o conceito de limites, limites laterais, continuidade de funções, limites indefinidos do tipo  $0/0$ , limites infinitos e no infinito, limite trigonométrico fundamental e o limite exponencial fundamental.

Para facilitar a leitura, apresentamos as etapas de análise *a priori*, da execução e da análise *a posteriori* para cada atividade separadamente.

## 6.1 Atividade 1

### 6.1.1 Análise a priori

Por ser um questionário individual com perguntas objetivas e diretas, planejou-se, para essa atividade, um tempo de cinco minutos.

O objetivo dessa atividade era verificar se os alunos tinham algum conhecimento sobre o termo limite dentro da disciplina de Matemática ou um contato anterior com o tema, contribuindo, dessa forma, com a dimensão cognitiva da Engenharia Didática dessa pesquisa. As perguntas direcionavam os estudantes a escrever informalmente sobre o tópico limites, favorecendo, desta forma, um primeiro contato destes com a escrita Matemática.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. Nas aulas de Matemática que você frequentou, o termo “limite” foi usado alguma vez?<br/> <input type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não</p> <p>2. Em caso afirmativo, relate quando e como o termo “limite” foi usado.</p> <p>3. Em caso afirmativo, em quais tópicos de Matemática você se lembra do termo “limite” ter sido usado?<br/> <input type="checkbox"/> Progressões<br/> <input type="checkbox"/> Trigonometria<br/> <input type="checkbox"/> Definição do número <math>\pi</math><br/> <input type="checkbox"/> Definição do número <math>e</math><br/> <input type="checkbox"/> Função<br/> <input type="checkbox"/> Área e volume de corpos redondos<br/> <input type="checkbox"/> Outro conteúdo matemático. Qual? _____</p> <p>4. Nas aulas de disciplinas técnicas que você frequentou, o termo “limite” foi usado alguma vez?<br/> <input type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não</p> <p>5. Em caso afirmativo, relate quando e como o termo matemático “limite” foi usado?</p> <p>6. De acordo com seu conhecimento, o que significa, em Matemática, o termo “limite”? Explique com suas palavras.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Figura 18: Ficha da Atividade 1

Fonte: Elaborado pela autora

Como os alunos já haviam estudado no primeiro ano do ensino médio progressões geométricas, esperava-se que os estudantes relacionassem o termo limite com o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica, quando o número de termos tende para infinito. O tópico trigonometria foi incluído uma vez que algumas funções trigonométricas poderiam ter empregado o assunto limite, pelo uso de assíntotas verticais e horizontais no esboço de seus gráficos. Também os números irracionais  $\pi$  e  $e$  podem ter sido apresentados

aos alunos como séries infinitas, onde, novamente, o conceito de limite, de sequência apareceria. Da mesma forma, a noção de limite pode ter sido introduzida no estudo das funções vistas no primeiro ano, pelo menos informalmente.

Além disso, pelo fato de os alunos estarem matriculados em disciplinas técnicas, envolvendo por vezes a linguagem de programação, talvez o conceito de limite tivesse sido mencionado em algumas dessas disciplinas.

### *6.1.2 Execução*

No final da aula anterior à aplicação da primeira atividade, a professora explicou aos alunos que eles iriam participar de uma série de atividades envolvendo os conceitos de limites, derivadas e integrais, tópicos normalmente estudados por alunos do CEFET. As aulas dessas atividades teriam um desenrolar diferente das aulas tradicionais, expositivas. Foi ressaltado que a participação dos estudantes seria muito importante.

No início da primeira sessão, os avisos sobre a importância da participação foram novamente citados. Estavam presentes 33 dos 38 alunos regularmente matriculados no 2º ano do curso de Informática Industrial. Dos 38, cinco estavam repetindo o 2º ano por não conseguirem aprovação em outras disciplinas e, dos repetentes, somente um não participou da primeira atividade.

Embora sabendo que não seria cobrada uma resposta correta para as atividades, os alunos mostraram-se incomodados em responder ao questionário. Muitos procuraram no livro didático um significado ou conceito para limite. Entretanto, o livro adotado<sup>33</sup> não apresentava o tópico de limite ou qualquer outro tópico de introdução ao Cálculo. Quando questionados sobre o porquê da procura no livro, disseram que já haviam escutado sobre o termo limite, mas não conseguiam se lembrar exatamente em qual matéria a palavra havia aparecido e, por isso, eles estavam procurando no livro.

Transcorrido o tempo previsto, a atividade foi recolhida. Para essa seção não houve nenhuma institucionalização local (DOUADY, 1986) das respostas apresentadas na folha da 1ª atividade e, assim que todos os alunos entregaram a folha respondida, a professora pediu que os alunos se reunissem em duplas para a execução da 2ª atividade.

---

<sup>33</sup> Livro Matemática do prof. Dante, volume único.

### 6.1.3 Analise a posteriori

Foram entregues 33 folhas de resposta, sendo uma totalmente em branco, contendo somente a assinatura do aluno. Uma grande parte dos estudantes não se lembrava de ter visto ou escutado anteriormente a palavra limite, seja dentro da Matemática ou em outras disciplinas. Na questão 3, na qual os alunos deveriam assinalar os conteúdos em que o termo limite teria sido utilizado anteriormente, dezesseis alunos não marcaram nada. A opção *progressões* foi marcada quatorze vezes; a *trigonometria*, cinco; a definição do número  $\pi$ , quatro; função, quatro e o número  $e$ , três. A opção *outros* não foi selecionada por nenhum estudante, sendo que os mesmos puderam escolher um ou mais tópicos em que a palavra limite havia sido mencionada.

Dos quatorze alunos que conseguiram se lembrar que o termo havia aparecido anteriormente nas progressões geométricas, dez relacionaram a ideia de limite com um valor a ser alcançado, como podemos ver nas respostas dos alunos Mauro e Marcela:

) Nas aulas de Matemática que você frequentou, o termo “limite” foi usado alguma vez?  
 (X) Sim ( ) Não

) Em caso afirmativo, relate quando e como o termo “limite” foi usado.  
 Vi limite na soma de uma Progressão infinita  
 ( $\lim S_n$ ).

[...]

6) De acordo com seu conhecimento, o que significa, em Matemática, o termo “limite”? Explique com suas palavras.  
 Acho que limite é o número máximo conhecido para alguma operação.

Figura 19: Folha de resposta do aluno Mauro  
 Fonte: Dados da pesquisa

Mauro relacionou o limite à soma de infinitos termos de uma progressão geométrica e, provavelmente por este motivo, o limite é visto como um valor máximo, obtido pela soma dos termos da série. Marcela recordou também o uso do termo limite em progressão geométrica,

citando “valor máximo”, que entendemos como a soma da série, e “valor mínimo”, como o termo da série que tende a zero.

1) Nas aulas de Matemática que você frequentou, o termo “limite” foi usado alguma vez?  
☒ Sim ☐ Não

2) Em caso afirmativo, relate quando e como o termo “limite” foi usado.  
*Foi usado para designar o valor máximo ou o valor mínimo de termo de uma progressão geométrica infinita.*

[...]

6) De acordo com seu conhecimento, o que significa, em Matemática, o termo “limite”? Explique com suas palavras.  
*É o valor máximo ou mínimo que alguma coisa pode ter*

Figura 20: Folha de resposta da aluna Marcela

Fonte: Dados da pesquisa

As noções apresentadas pelos estudantes, como valor máximo (ou mínimo), foram citadas por Cornu (1991) como um conhecimento pré-estabelecido que pode ser um obstáculo epistemológico ao entendimento da definição formal de limite.

É interessante observar que nove alunos relataram a importância do tópico em disciplinas técnicas como em Eletrônica Digital, referindo-se ao funcionamento de um capacitor ou de um diodo, como citado por Gustavo:

4) Nas aulas de disciplinas técnicas que você frequentou, o termo “limite” foi usado alguma vez?  
☒ Sim ☐ Não

5) Em caso afirmativo, relate quando e como o termo matemático “limite” foi usado?  
*Em uma aula de eletrônica analógica, para explicar o funcionamento de um diodo real*

Figura 21: Folha de resposta do aluno Gustavo

Fonte: Dados da pesquisa

Em uma entrevista com um professor de Matemática e ex-aluno do curso de eletrônica dessa escola, foi esclarecido que “o diodo real apresenta um limite, de potência, a partir do qual o diodo passa a se comportar como uma chave”. O uso do termo limite, assim, representa um valor alcançado, tendo uma concepção de aproximação até alcançar o valor estabelecido (CORNU, 1991).

Esse professor explicou que “a cada intervalo constante de tempo o capacitor carrega 50% do que falta para sua carga total, nunca atingindo o seu valor total”. Aqui, o limite é visto como um valor máximo que nunca é alcançado. (CORNU, 1991; ARTIGUE, 1985)

Na resposta da aluna Kelly observamos que a aluna já havia estudado esse tópico anteriormente, mas não conseguia conceituar limite:

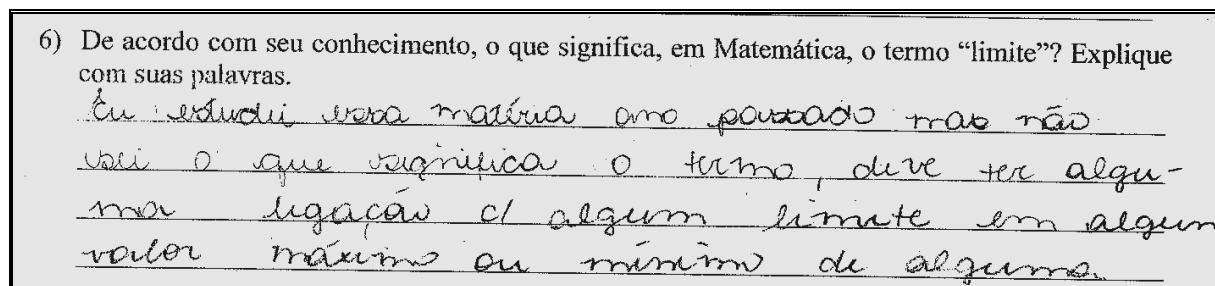


Figura 22: Folha de resposta da aluna Kelly

Fonte: Dados da pesquisa

Outra aluna repetente, Cleusa, afirmou “saber muito” bem a matéria, referindo-se, talvez, aos procedimentos mecânicos para o cálculo de limite:

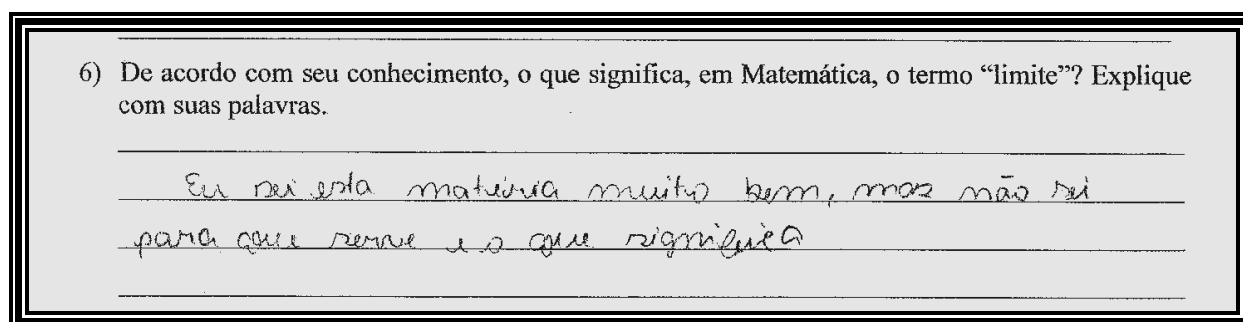


Figura 23: Folha de resposta da aluna Cleusa

Fonte: Dados da pesquisa

Essa última resposta nos leva para um outro questionamento – o que é, para um estudante, saber matemático? Seria apenas uma compreensão mecânica, um entendimento instrumental, tal como definido por Skemp (1976), onde o aluno sabe aplicar uma regra, mas não tem conhecimento sobre os conceitos envolvido no processo?

Observando as respostas dos alunos, podemos verificar que, mesmo aqueles que já estudaram, anteriormente, limite de uma função real não sabiam defini-lo matematicamente. Além disso, as respostas escritas, quando apareciam, eram curtas e vagas, indicando, provavelmente, que os alunos não estão acostumados a escrever nas atividades de Matemática.

## **6.2 Atividade 2**

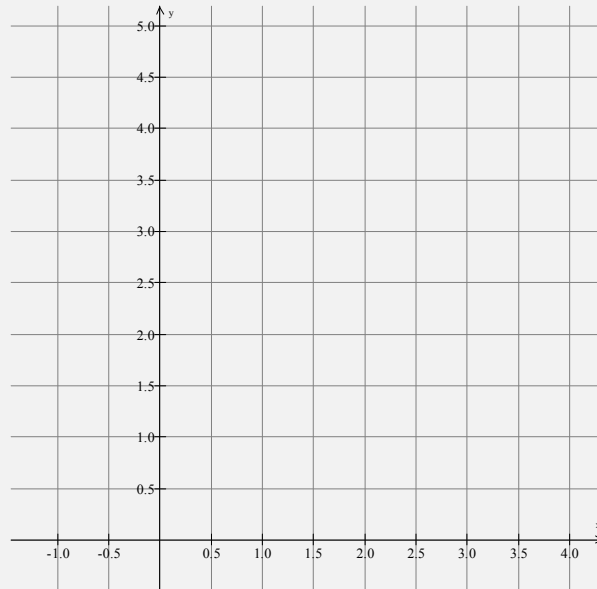
### *6.2.1 Análise a priori*

A segunda atividade foi planejada para ser desenvolvida em dupla, para que os estudantes pudessem discutir as questões entre si. Para essa sessão, estimou-se um tempo de 20 minutos. Considerando a teoria de Douady (1986), essa atividade se enquadraria na fase (a) da teoria da dialética ferramenta-objeto, em que os conceitos matemáticos sobre a função polinomial de 1º grau serviriam de ferramenta para introduzir o conceito de vizinhança de um ponto. Para isso foram explorados os quadros gráficos, no exercício de número 1 e o algébrico, no exercício número 2. Através da leitura e interpretação dos dados obtidos no exercício 2, os alunos teriam um primeiro contato com a idéia intuitiva de limite de uma função, trabalhada no exercício 3, onde procuramos enfatizar a questão de proximidade de um ponto. Um exercício de escrita matemática aparece na conclusão dessa última questão, onde o aluno deve completar um texto.



1. A função  $f(x) = 2x + 1$  é um exemplo de função afim, tipo de função que já foi estudada anteriormente.

- Calcule o valor de  $f$  para valores de  $x = 0$  e para  $x = 2$ . Marque os pontos no plano cartesiano abaixo.
- Esses dois pontos definem a reta que é a representação gráfica da função  $f(x) = 2x + 1$ . Trace essa reta no plano cartesiano:



2. Agora, complete a tabela:

| $X$             |     |     |     |      |      |     |     |     |
|-----------------|-----|-----|-----|------|------|-----|-----|-----|
| $f(x) = 2x + 1$ | 2,5 | 2,8 | 2,9 | 2,95 | 3,05 | 3,1 | 3,2 | 3,5 |

3. A partir da tabela da questão 2. podemos dizer que:

- $2,5 < f(x) < 3,5$  sempre que  $\underline{\hspace{1cm}} < x < \underline{\hspace{1cm}}$
- $2,8 < f(x) < 3,2$  sempre que  $\underline{\hspace{1cm}} < x < \underline{\hspace{1cm}}$
- $2,9 < f(x) < 3,1$  sempre que  $\underline{\hspace{1cm}} < x < \underline{\hspace{1cm}}$
- $2,95 < f(x) < 3,05$  sempre que  $\underline{\hspace{1cm}} < x < \underline{\hspace{1cm}}$

Assim, dizemos que:

$f(x) = 2x + 1$  pode ficar tão próximo do valor  $\underline{\hspace{1cm}}$  quanto se queira, desde que  $x$  fique suficientemente próximo de  $x = \underline{\hspace{1cm}}$

Figura 24: Ficha da Atividade 2

Fonte: Elaborado pela autora

Consideramos como correto no primeiro exercício o cálculo da imagem da função para valores da variável independente 0 e 2, bem como sua marcação correta no gráfico. Equívocos como calcular valores de  $x$  tais que  $f(x) = 0$  ou  $f(x) = 2$  são esperados, talvez como erro de interpretação da questão ou desconhecimento do assunto função polinomial de primeiro grau. A marcação errada dos pontos, por distração dos estudantes ou erro no cálculo das imagens

para os valores citados para  $x$ , poderiam levar a um esboço errado do gráfico da questão seguinte.

Na segunda questão, no preenchimento da tabela, foi demandado um raciocínio distinto daquele pretendido na primeira letra da primeira questão - agora, a partir da imagem da função, o aluno deveria calcular o valor de  $x$ . Erros no cálculo desses valores poderiam ser corrigidos pela observação do esboço gráfico do exercício 1 ou pela análise do comportamento dos valores da própria tabela.

A terceira questão pretendia que os alunos fizessem a leitura e interpretação dos valores calculados na tabela da questão anterior. Assim, erros nos cálculos da 2ª questão ou erros de leitura da tabela poderiam induzir a erros na terceira questão. Esperava-se que os alunos conseguissem determinar o valor do limite da função quando  $x$  tende ao valor 1, através da observação dos valores calculados nas questões de 3.a) a 3.d).

### 6.2.2 Execução

Antes de distribuir as folhas da atividade 2, a professora pediu aos alunos que se sentassem em duplas, para que um colega ajudasse ao outro. As discussões deveriam ser entre os alunos de cada dupla, não devendo haver comunicação entre duplas diferentes. Foram formadas dezesseis duplas e, como os alunos estavam em número ímpar, um aluno preferiu realizar a atividade sozinho, alegando que o colega que trabalharia com ele estava por chegar. Para cada dupla foram entregues duas folhas de atividades, sendo que uma deveria ser devolvida após o término da atividade.

Os alunos, apesar de já conhecerem a função afim, mostraram-se agitados e inseguros ao trabalhar com a atividade. Muitas vezes chamavam a professora à mesa para perguntar se era correto o que estavam fazendo. Por esse motivo, foi esclarecido que após o recolhimento da atividade seria conduzida uma discussão sobre as respostas e dúvidas surgidas nos exercícios. À medida que os alunos desenvolviam a atividade sua confiança foi aumentando. A professora passava por entre as duplas observando as respostas, as discussões e registrando as principais dúvidas para, mais tarde, expô-las para toda a turma.

A principal dúvida surgiu na segunda questão, ao completar a tabela. Algumas duplas chamaram a professora à carteira para saber se era para calcular  $x$  a partir do valor de  $f$  fornecido. A partir da resposta positiva da professora, eles entenderam que a terceira questão

também seguia o mesmo princípio.

Após a devolução da folha de atividades preenchida, foi aberta uma institucionalização local (DOUADY, 1986) sobre as questões apresentadas. A dupla de alunos Hebert e Kelly foi convidada a esboçar o gráfico da questão 1.b. no quadro e, a partir desse esboço, outros alunos foram chamados para marcar no gráfico os pontos listados na tabela da questão 2. A professora discutiu com a turma a última questão, tomando como referência o gráfico apresentado por Hebert e Kelly.

### 6.2.3 *Análise a posteriori*

As folhas de 16 duplas e um trabalho individual foram entregues em 15 minutos, ou seja, 5 minutos antes do previsto. Das 17 atividades entregues, uma apresentou o cálculo das imagens da função para  $x$  igual a 0 e 2 corretamente, mas errou ao traçar o esboço gráfico da função (dupla Davi e Fábio). Outra marcou os pontos corretamente, mas não traçou a reta representativa da função (dupla Zander e Marcela). As outras 15 representações gráficas apresentadas na questão 1.b. foram consideradas corretas, embora em 4 das atividades os alunos se limitaram a traçar um segmento de reta entre os pontos de coordenadas (0,1) e (2,5).

O fato ocorrido pode ser devido ao enunciado da própria questão, que em 1.a. solicitava o cálculo e a marcação dos pontos de coordenadas (0, 1) e (2, 5). Pode ter ocorrido, nessa situação, uma transmissão didática de um obstáculo epistemológico (CORNU, 1991) ou uma dificuldade relacionada com o conceito de função, em que os alunos encontram problemas ao representar graficamente uma função (VRANCKEN et al., 2006; REZENDE, 2003ab).

Para a questão 2, quatro duplas apresentaram erros nos cálculos dos valores de  $x$ , sendo que somente 1 havia errado o esboço gráfico (dupla Davi e Fábio). Os valores encontrados pelos alunos no preenchimento da tabela foram utilizados para responder a terceira questão e, por este motivo, as quatro duplas apresentaram respostas erradas para as perguntas 3.a. a 3.d. Dessas 4 duplas, 2 apresentaram valores incorretos para  $x$ , mas esses valores poderiam ter sido obtidos a partir da interpretação do esboço do gráfico da função. Entretanto, os valores registrados na tabela, para Davi e Fábio, não conferem com o registro gráfico da questão 1.b. feito pelos mesmos alunos, como podemos observar:

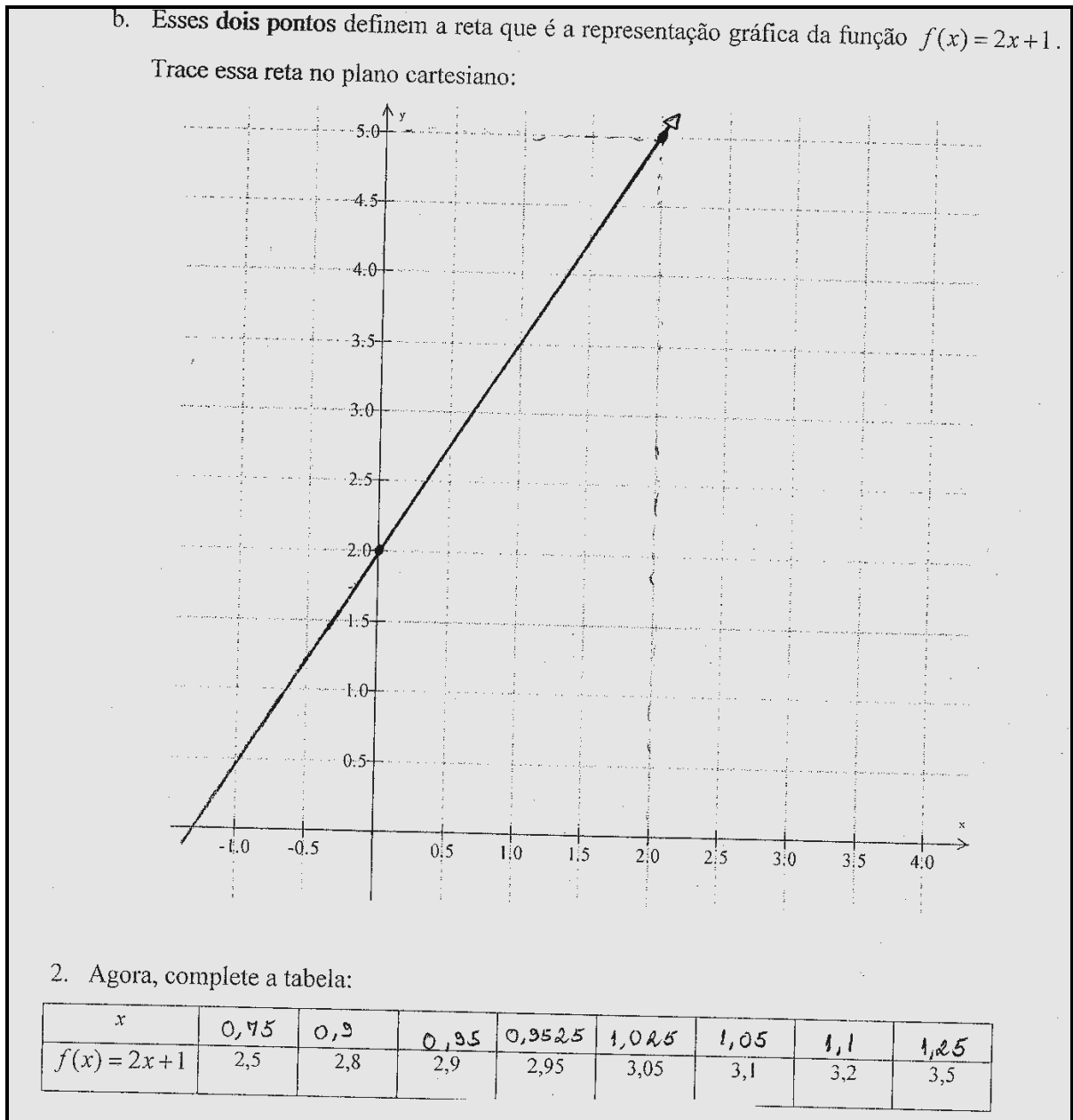


Figura 25: Folha de resposta dos alunos Davi e Fábio  
Fonte: Dados da pesquisa

Entendemos que, nesse caso, ocorreu uma correspondência imperfeita entre os quadros gráfico e numérico utilizados.

Embora as 4 duplas apresentassem respostas incorretas para as questões 3.a. a 3.d., uma vez que erraram a 2ª questão, todas as atividades entregues apresentavam uma conclusão correta para a terceira questão:  $f(x) = 2x + 1$  pode ficar tão próximo do valor 3 quanto se queira, desde que  $x$  fique suficientemente próximo de  $x = 1$ .

Podemos observar, nos valores apresentados por Davi e Fábio mostrados acima, que o erro no valor de  $x$  como 0,9525 (ao contrário do correto  $x = 0,9725$ ) pode ser devido a um erro de álgebra, não influenciando a conclusão da terceira questão. Os valores tabelados por algumas duplas (Cleusa/Kelly e Vagner/Jânio) podem ter sido provenientes de uma leitura do esboço gráfico da função, não interferindo, também, na resposta final da terceira questão. A resposta fornecida pelos alunos Carmem e Leandro não poderia ter sido analisada dos valores assinalados por eles nos itens 3.a. a 3.d.:

3. A partir da tabela da questão 2, podemos dizer que:
- a.  $2,5 < f(x) < 3,5$  sempre que  $0,75 < x < 1,75$
  - b.  $2,8 < f(x) < 3,2$  sempre que  $0,9 < x < 1,25$
  - c.  $2,9 < f(x) < 3,1$  sempre que  $1 < x < 1,2$
  - d.  $2,95 < f(x) < 3,05$  sempre que  $1,1 < x < 1,15$
- Assim, dizemos que:
- $f(x) = 2x + 1$  pode ficar tão próximo do valor 3 quanto se queira, desde que  $x$  fique suficientemente próximo de  $x =$  1.

Figura 26: Folha de resposta dos alunos Carmem e Leandro

Fonte: Dados da pesquisa

Os valores apresentados na conclusão da 3ª questão pela dupla Carmem e Leandro podem ser resultado da interpretação correta do quadro gráfico.

O fato de todos os alunos terem respondido corretamente a conclusão da terceira questão, pode evidenciar que eles conseguiram construir o conceito de vizinhança de um ponto, importante na conceitualização de limite, que é iniciada na próxima atividade.

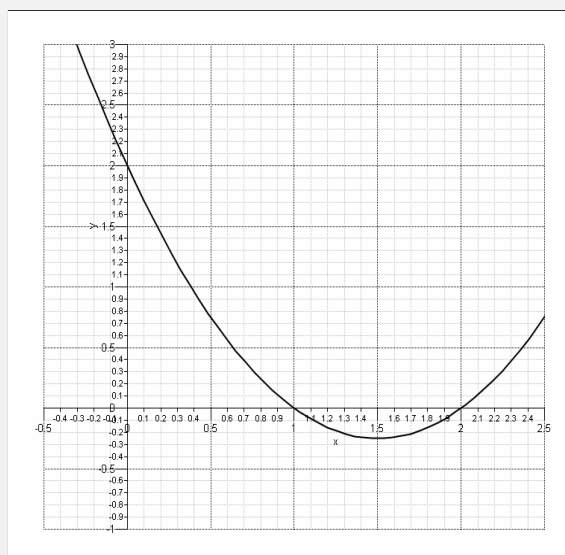
### 6.3 Atividade 3

#### 6.3.1 Análise a priori

A atividade de número 3 foi planejada para ser executada em dupla e entregue após a

execução da atividade 2. Inicialmente, a atividade poderia ser desenvolvida em sala mas, se o tempo não fosse suficiente para a sua conclusão, os alunos poderiam levá-la para a casa, sendo devolvida na aula seguinte. Semelhante à atividade 2, a terceira atividade tem por objetivo explorar uma função polinomial de segundo grau, recordando conceitos como interceptos com os eixos, formato da função e de como determinar uma função quadrática sabendo-se as coordenadas de três pontos, empregando esses conceitos para reforçar o conceito de vizinhança, introduzindo a representação matemática da ideia de limite de uma função, quando  $x$  tende para um valor determinado.

1. Vamos relemburar, agora, a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . O gráfico de uma função quadrática está esboçado abaixo:



- a. Qual é o valor do intercepto da função com o eixo  $Oy$ ?  
 b. Existem raízes reais? Em caso afirmativo, quais seus valores?  
 c. Com os valores obtidos em a) e em b) é possível determinar a função quadrática. Determine algebricamente a função esboçada anteriormente.
2. Para a função da letra c. da questão anterior, temos a seguinte tabela:

| $X$    | 1,1    | 1,2    | 1,4    | 1,45     | 1,55     | 1,6    | 1,8    | 1,9    |
|--------|--------|--------|--------|----------|----------|--------|--------|--------|
| $f(x)$ | - 0,09 | - 0,16 | - 0,24 | - 0,2475 | - 0,2475 | - 0,24 | - 0,16 | - 0,09 |

3. Complete:  
 Podemos, então, dizer que:

$f(x) \xrightarrow{\text{(tende)}} \underline{\hspace{2cm}}$  quando  $x \xrightarrow{\text{(tende)}} 1,5$

Essa ideia pode ser escrita matematicamente como

$$\lim_{x \rightarrow 1,5} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Analisando o gráfico, complete:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Figura 27: Ficha da Atividade 3

Fonte: Dados da pesquisa

Considerando a segunda e a terceira atividade podemos observar as seguintes fases da dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1986) tais como:

- a. Fase a) o antigo: os conhecimentos das funções polinomiais de 1º e de 2º graus;
- b. Fase b) a procura do novo implícito: a noção de limite de função;
- c. Fase c) a institucionalização local: a discussão coletiva dos alunos ao final de cada atividade.

Analisando as questões, podemos observar que a 1ª questão mostra um esboço do gráfico de uma função quadrática, em que o aluno pode verificar a existência dos zeros da função e a intersecção com o eixo das ordenadas. Preferimos, ao contrário da 1ª questão da atividade 2, fornecer o esboço da função e pedir a determinação da mesma. Essa decisão foi fundamentada na dificuldade apresentada pelos estudantes em delinear curvas. Os erros cometidos nas questões 1.a) e 1.b), se ocorridos, derivariam, somente, de erros conceituais sobre as intersecções da função com os eixos e, por isso, esperamos que essas questões não apresentassem problemas aos estudantes. Já a questão 1.c) poderia apresentar erros de cálculo para a determinação dos coeficientes da função, o que poderia ser verificado facilmente pela retomada das coordenadas estabelecidas nas questões anteriores, ou pelo esboço do gráfico, estabelecendo, assim, uma correspondência entre os quadros gráfico e algébrico.

Para a 2ª questão, preferimos fornecer a tabela de pontos da função, uma vez que os cálculos desses valores, para uma função quadrática, poderiam gerar erros na interpretação e na estimativa do limite da função para  $x$  tendendo a 1,5. O valor de  $x$  igual a 1,5 foi escolhido por ser a abscissa do vértice da função quadrática, facilitando o cálculo da ordenada do vértice ( $y_V = -0,25$ ) e, portanto, o cálculo do limite pelo quadro algébrico, pela visualização do esboço gráfico (quadro gráfico) ou pela análise da tabela (quadro numérico). Um valor incorreto dessa questão, mas esperado, é o valor de  $-0,2475$  que aparece em duplicata na tabela por causa da simetria da função em torno da reta vertical que passa pelo coordenadas do vértice da função quadrática.

A 3ª questão reforçava o conceito de limite introduzido na questão 2. Os alunos poderiam calcular os valores dos limites tanto algebricamente quando pela observação do esboço do gráfico da função. Pelo fato de, no caso de funções polinomiais,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , os estudantes poderiam, mesmo ainda sem entenderem completamente o conceito de limite de uma função contínua, fornecer respostas corretas a essa questão, empregando a propriedade de funções contínuas como uma ferramenta implícita.



### 6.3.2 Execução

As duplas receberam a terceira atividade após a discussão da 2ª atividade, já no final da aula. Por esse motivo, eles começaram a atividade em sala de aula e concluíram em casa, entregando, cada dupla, uma única folha de resposta na aula seguinte.

A primeira questão não apresentou grandes discussões, quando expostas na fase de institucionalização das atividades. Todos os estudantes responderam corretamente as questões 1.a e 1.b. Os alunos Adriano e Mauro foram convidados a ir ao quadro para resolver a questão 1.c:

- Olha gente,  $c$  é o intercepto com o eixo  $y$ . Então,  $c$  é igual a 2. – iniciou Adriano – Como  $b$  é menos a soma das raízes, então  $b$  vale  $-3$ .
- Como é que é? – entrevistou a professora - não é bem assim...
- Não, professora, deixa eu explicar - interrompeu Mauro - como  $c$  sobre  $a$  é o produto das raízes então a gente viu que  $a$  é 1 e  $b$  é  $-3$ . Depois a gente verificou, achando as raízes.
- Mas vocês utilizaram as raízes para calcular os valores dos coeficientes, então por que não usaram outro ponto da função para verificar se estavam certos?
- A gente não pensou nisso...

As outras questões foram respondidas corretamente, não apresentando dificuldades.

### 6.3.3 Análise a posteriori

17 folhas foram entregues. Todos os alunos conseguiram responder corretamente as questões 1.a. e 1.b.. Na questão 1.c., que pedia a determinação da função quadrática, embora os alunos tenham conseguido determinar os coeficientes da função, 9 duplas representaram de forma errada a função, fornecendo a resposta como equação de 2º grau ou como uma expressão matemática inacabada, tal como podemos ver na resposta da dupla Adriano/Mauro

e Flávio/Gabriel, respectivamente:

c. Com os valores obtidos em a) e em b) é possível determinar a função quadrática. Determine algebricamente a função esboçada anteriormente.

$$c = 2$$

$$b = -3$$

$$b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$$

$$\frac{3 \pm 1}{2} \quad x' = 1$$

$$x'' = 2$$

$$x^2 - 3x + 2$$

Figura 28: Folha de resposta dos alunos Adriano e Mauro  
Fonte: Dados da pesquisa

$$c = 2;$$

$$a + b + 2 = 0$$

$$a + b = -2$$

$$4a + 2b = -2$$

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

$$-a = -1$$

$$a = 1$$

$$1 + b = -2$$

$$b = -3$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Figura 29: Folha de resposta dos alunos Flávio e Gabriel, questão 1.c  
Fonte: Dados da pesquisa

A dupla Adriano e Mauro, quando questionada, conseguiu explicar verbalmente sua ideia na resolução da questão 1.c, mas não escreveu nada que indicasse o raciocínio utilizado. Talvez esses alunos tenham dificuldade na escrita matemática, não empregando corretamente a simbologia matemática ou a linguagem natural ou apresentem uma dificuldade em utilizar o quadro algébrico (DOUADY, 1986).

Quatro duplas responderam a 2ª questão como  $\lim_{x \rightarrow 1,5} f(x) = -0,2475$  talvez pela observação do quadro numérico, não fazendo a correspondência com os quadros algébrico ou gráfico das questões anteriores. Duas responderam que  $\lim_{x \rightarrow 1,5} f(x) = -0,24$  e uma que  $\lim_{x \rightarrow 1,5} f(x) = -0,2$ .

Todos os alunos responderam corretamente a última questão, indicando que talvez os alunos tenham utilizado a propriedade  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  como novo conhecimento implícito (DOUADY, 1986). Apesar dos alunos terem respondido corretamente a última questão e do conceito de vizinhança ter sido reforçado, os alunos mostraram falhas em relação ao conhecimento antigo utilizado.

## 6.4 Atividade 4

### 6.4.1 Análise a priori

A atividade 4 teve por objetivo introduzir a definição informal de limite, apresentando um texto para leitura e interpretação desse conceito. Em seguida, foram apresentadas duas figuras ilustrando o conceito de limite explicitado no texto, sendo que em uma delas a função não está definida para o valor de  $x$  igual a  $a$ .

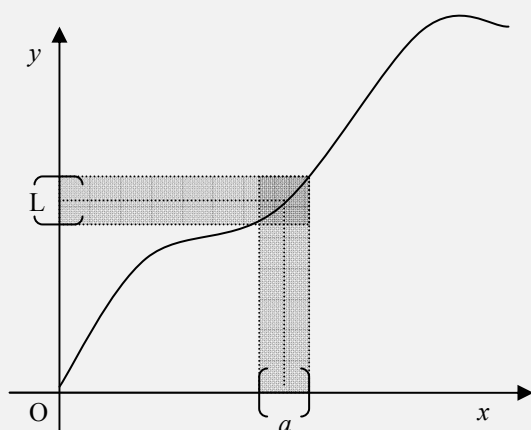
Definição de limite

Seja uma função  $f$  definida em um intervalo aberto em torno de um valor  $a$ . Não necessariamente a função  $f$  está definida para  $a$ . Se o valor da função  $f$  fica arbitrariamente próximo de um valor  $L$ , tomando valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$  (valores de  $x$  ligeiramente menores que  $a$  e valores de  $x$  ligeiramente maiores que  $a$ ), então dizemos que a função  $f$  tem limite  $L$  quando  $x$  tende a  $a$ . Matematicamente, podemos escrever

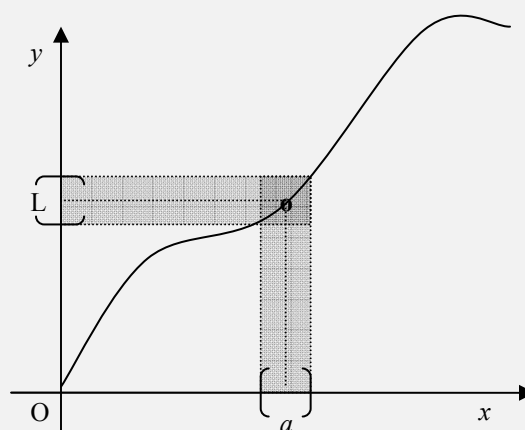
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Podemos ler a expressão matemática  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  como “o limite da função  $f$  quando  $x$  tende para  $a$  é  $L$ .”

Agora, vamos analisar os gráficos das funções  $f$  e  $g$  representadas abaixo, respectivamente:



Limite de  $f$  quando  $x$  tende a  $a$



Limite de  $g$  quando  $x$  tende a  $a$

1. Qual a diferença entre as duas funções representadas graficamente acima?
2. Pode-se dizer, a partir das duas figuras, que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ? Explique com suas palavras.

Figura 30: Ficha da atividade 4

Fonte: Elaborado pela autora

Esperava-se, para a primeira questão, que o aluno observasse a diferença entre os domínios das duas funções, explicitando seu raciocínio em uma linguagem natural ou pela representação matemática do domínio.

A diferença entre as figuras pode levar o aluno a questionar a existência do limite para a função  $g$  quando  $x$  tende a  $a$ , uma vez que as atividades anteriores abordavam funções definidas e contínuas para todo o intervalo real e, portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Para responder

corretamente a 2ª questão, o aluno deveria ler e, principalmente, compreender que, para a existência de limite de uma função em um ponto, não necessariamente a função  $f$  precisa estar

definida neste ponto.

Considerando a teoria de Douady, essa atividade representa a etapa (b), a pesquisa do novo implícito, nesse caso, a definição informal de limite. Foi necessária uma mudança de quadros - utilizou-se a linguagem escrita e esboços de duas funções (quadro gráfico). Após o recolhimento da ficha de resposta de cada dupla, a professora faria uma institucionalização - estatuto objeto, nesse caso, o conceito informal de limite - compreendendo a fase (d) da dialética ferramenta-objeto. Com relação à metodologia escrever para aprender Matemática, procuramos enfatizar o processo de escrita, uma vez que os alunos deveriam responder com suas palavras as duas perguntas apresentadas.

Para essa atividade, também desenvolvida em dupla e em sala de aula, estimou-se um tempo de 15 minutos.

#### *6.4.2 Execução*

Foi possível observar que, ao trabalharem a quarta atividade, os alunos estavam mais confiantes e se dirigiam menos à professora, que passava entre as fileiras para observar o desenvolvimento da atividade. O tempo de duração da atividade foi menor que o esperado e, imediatamente após o recolhimento das fichas de resposta, começou-se a institucionalização.

Após desenhar no quadro os gráficos, a professora perguntou qual a diferença entre as duas funções. A maioria dos alunos respondeu que em  $f$  o valor de  $a$  estava definido e em  $g$  não.

– Alguém falou do domínio? Como seriam os conjuntos domínio dessas funções? Alguém gostaria de vir ao quadro para representar isso?

Diante do silêncio geral, a própria professora conduziu uma discussão sobre o domínio das duas funções. Em seguida, uma dupla foi chamada para responder a segunda questão.

A professora conduziu, então, a institucionalização (fase (d) da dialética ferramenta-objeto, (DOUADY, 1986), conceituando limite e empregando alguns exemplos gráficos.

### 6.4.3 Análise a posteriori

Nenhuma ficha, das 15 entregues, registrou a resposta da primeira questão em termos de domínio, seja escrita em linguagem natural ou simbólica. A resposta presente em 11 dos questionários mostrava o termo definido, indicando que, no segundo gráfico, a função não estava definida para o valor de  $x = a$ . Duas duplas apresentaram a palavra assumir, indicando que na primeira função  $x$  “assumirá” o valor de  $a$ , fato que não ocorrerá na segunda função. Uma dupla respondeu que “a segunda função possui um ponto onde ela não existe” (Flávio e Mauro). Uma dupla utilizou o termo “pertencer” como diferença entre as duas funções. A resposta das alunas Tamires e Tânia está registrada abaixo:

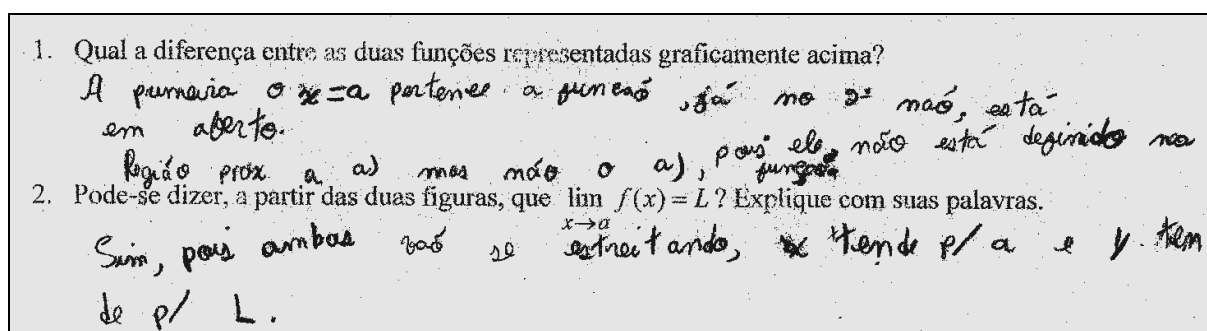


Figura 31: Folha de resposta das alunas Tamires e Tânia

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar da dificuldade em se expressar, podemos observar que os alunos preferiram utilizar a linguagem natural à do simbolismo matemático.

A segunda questão foi respondida corretamente por todos os alunos, sendo empregados os termos de “próximo de” e “tender a”. Acreditamos, por esse motivo, que os alunos conseguiram construir a noção dinâmica de limite de uma função.

Outro ponto observado foi a dificuldade apresentada pelos alunos no registro do Conjunto Domínio. Essa dificuldade pode estar associada às relacionadas com a noção de função, citada por Vrancken et al. (2006).

6.5 Atividade 5

6.5.1 Análise a priori

O objetivo da 5ª atividade foi apresentar o conceito de limites laterais de uma função de variável real. Para isso, o aluno deveria ser capaz de entender o conceito de limite lateral esquerdo, que é apresentado ao estudante e estabelecer por analogia o conceito de limite lateral direito.

Vocês já sabem o que significa dizer  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Aprenderemos, agora, o que são limites laterais de uma função  $f$  de variável real  $x$ .

Para a notação  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ , dizemos que o **limite lateral esquerdo** da função  $f$  é  $L$  quando  $x$  tende para  $a$  por valores de  $x$  menores que  $a$ , isto é, valores de  $x$  à esquerda de  $a$  na reta real. De forma análoga, complete:

Para a notação  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ , dizemos que \_\_\_\_\_.

Esboce os gráficos das funções e faça o que se pede:

|                                                                                                |                                                                                        |                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ -x + 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ | $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ |                                                                                           |
|                                                                                                |                                                                                        |                                                                                           |
| Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$                                                      | $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$                                                      | O que podemos dizer sobre os limites laterais de $g(x)$ quando $x$ tende a 1? Justifique. |

Figura 32: Ficha da atividade 5  
Fonte: Dados da pesquisa

Duas funções definidas por mais de uma sentença foram apresentadas aos estudantes, para que os mesmos esboçassem seus gráficos. A tarefa demandava conhecimentos anteriores dos alunos (o antigo, de acordo com Douady) sobre funções polinomiais de primeiro grau, de segundo grau e de função constante e ainda sobre funções definidas por mais de uma sentença. Erros no traçado do esboço dos gráficos poderiam levar a respostas incorretas para os valores dos limites laterais em seguida. Outro fator que poderia ocasionar respostas incorretas é a correspondência incorreta entre os quadros algébrico e gráfico.

Outro detalhe importante, nessa atividade, foi o fato de que a função  $g$  apresentava limites laterais diferentes com  $x$  tendendo a 1. Para os alunos, fornecer uma justificativa para isso pode ser um problema, uma vez que os estudantes não estão acostumados, pelo menos em disciplinas da área de exatas, a externar suas ideias ainda mais utilizando-se da linguagem escrita.

Empregando a dialética ferramenta-objeto utilizamos os quadros gráficos e algébrico. Fundamentamo-nos na metodologia escrever para aprender Matemática, focalizando a escrita tanto na definição informal de limite lateral esquerdo quanto nas justificativas das respostas dadas às últimas questões. Esperamos que mesmo que o aluno não compreenda a definição de limite lateral esquerdo ele ainda pode escrever corretamente a definição de limite lateral direito, simplesmente por analogia ao texto apresentado. Mesmo que isso ocorra, essa questão poderá levar o estudante a se acostumar com o exercício da escrita Matemática.

Essa sessão foi planejada para que os alunos trabalhem em duplas e estimou-se um tempo de 20 minutos na execução da atividade. Esperamos que a maior parte do tempo será empregado no esboço dos gráficos das funções.

### 6.5.2 Execução

Durante a atividade 5, alguns alunos se queixaram à professora de que gostariam que fosse distribuída mais uma folha de atividade para as duplas, para que todos os alunos guardassem as folhas de respostas e entregassem uma por dupla.

Os alunos mostraram dificuldades no traçado dos gráficos. Mesmo com as dificuldades, foram gastos somente 15 minutos para que todos os alunos concluíssem as questões.



Na institucionalização os alunos Kátia e Vagner foram convidados para esboçar no quadro os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , para que a turma pudesse discutir os limites laterais solicitados. A partir desse exercício a professora sistematizou as definições de limites laterais, destacando a não existência do limite em um ponto caso os limites laterais fossem diferentes.

### 6.5.3 Análise a posteriori

Dos 15 registros recolhidos, em apenas um o conceito de limite lateral direito estava incorreto. Os alunos copiaram exatamente a definição do limite lateral esquerdo ao invés de realizar a analogia.

Em relação aos gráficos, os alunos tiveram maior dificuldade no traçado da parábola; duas duplas não conseguiram esboçar corretamente a parábola, principalmente por não identificarem o seu vértice. Seis duplas desenharam o gráfico como se as funções estivessem restritas a um dado conjunto de pontos:

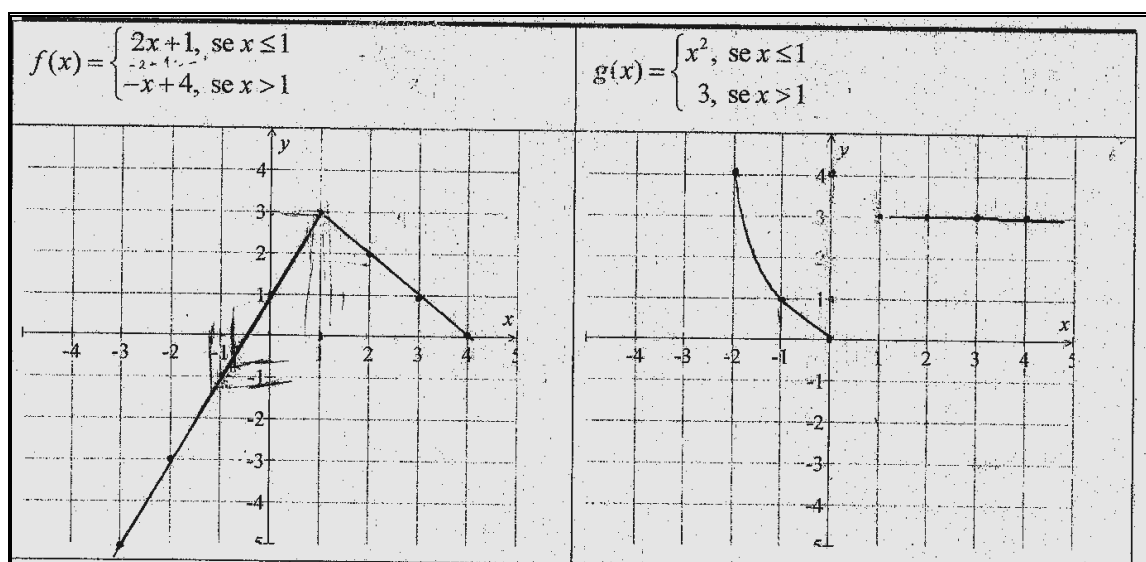


Figura 33: Folha de resposta dos alunos Gecy e Leandro  
Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que os alunos Gecy e Leandro não esboçaram corretamente o gráfico da função, para valores de  $x$  de 0 até 1. O fato da função ser limitada a um conjunto de valores é

classificado por Sierpinski (1987) como sendo um obstáculo de natureza Heurística.

Todos os alunos calcularam corretamente os limites laterais da função  $f$ , com  $x$  tendendo a 1 pela direita e pela esquerda. Para a função  $g$ , uma dupla afirmou que os limites laterais são iguais e duas duplas calcularam os limites laterais de  $g$  como sendo iguais a 3. Os outros alunos conseguiram visualizar que os limites laterais eram diferentes. Assim, podemos concluir que os alunos, mesmo com as dificuldades no traçado dos gráficos, entenderam, na sua maioria, as noções de limite lateral esquerdo e direito. Verificou-se a necessidade de uma familiarização dos conceitos vistos até o momento.

## **6.6 Atividade 6**

### **6.6.1 Análise a priori**

Planejou-se um tempo de 30 minutos para a execução dessa atividade, desenvolvida em duplas, em sala de aula. O objetivo dessa sessão foi fixar o conceito de limites laterais e introduzir a questão da continuidade de funções, através da análise de esboços de gráficos de diferentes funções.

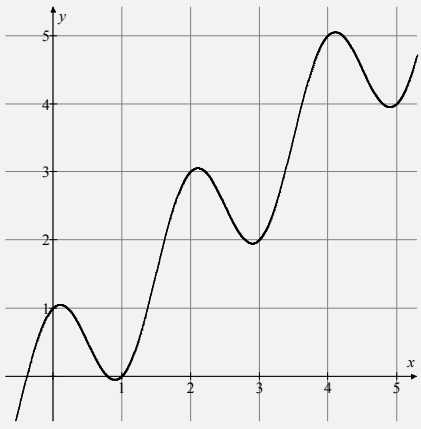
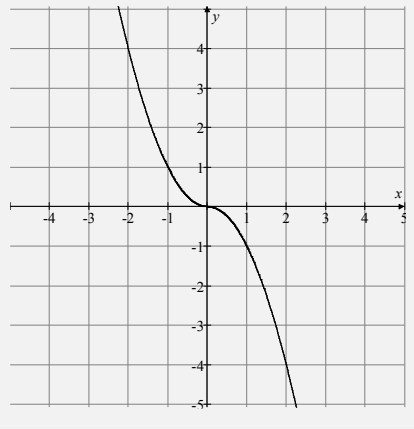
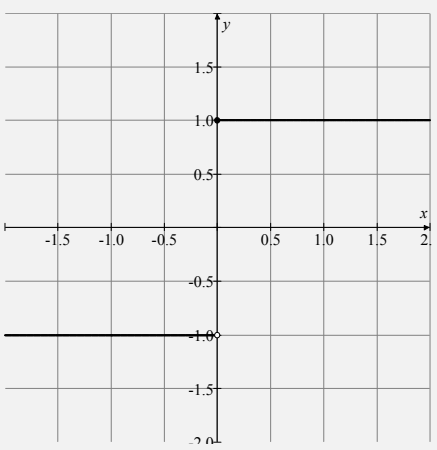
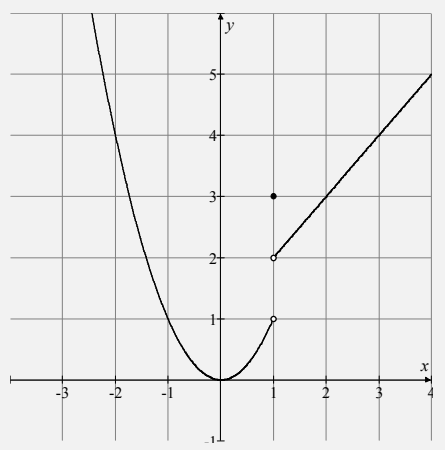
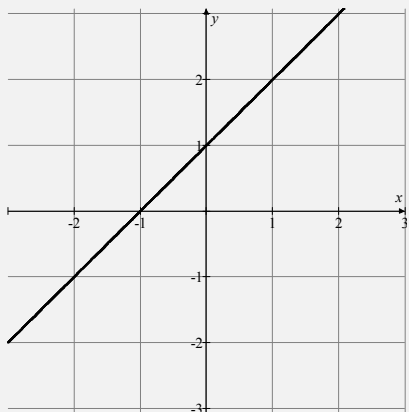
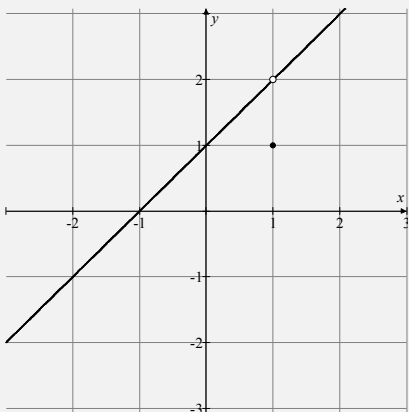
|                                                                                                                                                 |                                   |                                                                                                        |                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| Observe os gráficos e faça o que se pede                                                                                                        |                                   |                                                                                                        |                                                                                            |
| <p>1.</p>                                                      |                                   | <p>2.</p>            |                                                                                            |
| $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$                                                                                                               | $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) =$ | $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) =$                                                                        | Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ? Justifique.<br>Calcule $f(2)$ . O que você observa? |
| <p>3.</p>                                                     |                                   | <p>4.</p>           |                                                                                            |
| Determinar os limites laterais de $f(x)$ quando $x$ tende a 0 e verificar se existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .<br>Qual o valor de $f(0)$ ? |                                   | Verifique se existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .<br>Justifique.<br>Qual o valor de $f$ em $x = 1$ ? |                                                                                            |

Figura 34: Ficha da Atividade 6  
Fonte: Elaborado pela autora

|                                                                                                                                    |                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                   |                                                  |
| <p>5.</p> <p>Complete:</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =</math></p> <p><math>f(1) =</math></p> <p>O que você observa?</p> | <p>6.</p> <p>Complete:</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =</math></p> <p><math>f(1) =</math></p> <p>O que você observa?</p> |

7. A função do exercício 5 é **contínua** em  $x = 1$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ .

A função do exercício 6 é **descontínua** em  $x = 1$ . Explique porquê.

Seja  $f: A \rightarrow B$ , dizemos que a função  $f$  é **contínua** se para todo  $a \in A$  temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

8. Represente graficamente uma função  $f$  que atenda a todas as condições pedidas abaixo:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
- Não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  e  $f(0) = 2$
- $f(-1) = 0$  e a função é contínua neste ponto
- $f(x)$  se torna arbitrariamente grande quando  $x$  aumenta indefinidamente.

Figura 35: Ficha da atividade 6 (continuação)

Fonte: Elaborado pela autora

Os exercícios apresentados nessa atividade serviram para realizar a fase de familiarização da dialética ferramenta-objeto. O uso de expressões como “justifique” e “o que você observa” tinham por objetivo exercitar a escrita Matemática.

As duas primeiras questões apresentavam funções contínuas nos intervalos mostrados e pediam-se os limites laterais das funções, bem como os limites das funções nos pontos indicados. Nos dois casos, tem-se que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Uma interpretação incorreta dos esboços poderia levar a respostas erradas para os limites.

A função apresentada no exercício 3 apresentava uma descontinuidade em salto, em que se pode observar que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ . Um erro esperado para essa questão é que o aluno, por ter trabalhado anteriormente com funções polinomiais, conclua que, para qualquer função,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

O gráfico do exercício 4 apresentava uma função em que os valores dos limites laterais eram diferentes entre si e diferentes do valor da função no ponto  $x = 1$ . Uma interpretação incorreta do conceito de limite poderia levar a respostas erradas, tais como a afirmação da existência do limite com  $x$  tendendo a 1, sendo esse valor o de  $f(1)$ .

As funções dos exercícios 5 e 6 diferiam quanto a continuidade, sendo a primeira função contínua e a outra com uma descontinuidade removível. O objetivo dessas questões era levar o aluno a verificar que, mesmo que exista o limite da função com  $x$  tendendo a  $a$ , nem sempre ele é igual a  $f(a)$ . Apresenta-se, aqui, a ideia de continuidade de funções.

O exercício 7 afirmou que a função esboçada no exercício 5 é contínua, uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  e, ressaltando que a função do exercício 6 não era contínua, pediu uma justificativa desse fato aos alunos. Seriam aceitas como corretas respostas que indicassem que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ , utilizando o quadro algébrico ou de linguagem natural. O conceito de continuidade apresenta muitas dificuldades, envolvendo ideias pré-estabelecidas pelos alunos (CORNU, 1991). Esse exercício foi planejado para ser uma introdução a esse conceito.

A 8ª questão solicitou aos alunos que representassem uma função qualquer, seguindo as regras dadas. Essa questão envolveu a representação gráfica dos conceitos de limites laterais e da não existência de limite em um ponto, bem como a ideia de continuidade de função. Outro ponto colocado seria a introdução da noção de tender ao infinito.

### 6.6.2 Execução

Das duplas observadas pela professora durante a execução da atividade, uma chamou a atenção da professora em relação ao traçado gráfico da última questão, porque além dos alunos representarem corretamente o gráfico eles tiveram um cuidado na organização do esboço e, por isso, foram convidados a mostrar a 8ª questão no quadro.

Foi a única questão que a professora discutiu na aula. Devido à restrição de tempo, as outras questões foram discutidas e corrigidas na aula seguinte.

Na institucionalização que aconteceu na aula imediata a professora debateu sobre a continuidade de funções, discutindo sobre a descontinuidade de salto, como nas funções dos exercícios 3 e 4, ou removível, como na função do exercício 6 e outros gráficos, semelhantes a esses, foram mostrados para discussão sobre continuidade. Gráficos que apresentavam pontos em que a função não era definida geraram dificuldades na interpretação da continuidade. Para os alunos, a ideia de continuidade de uma função é a do gráfico esboçado em uma linha contínua.

### 6.6.3 Análise a posteriori

No total foram entregues 15 folhas de respostas. Somente uma dupla não respondeu corretamente os valores dos limites, demonstrando não haver compreendido o conceito de limite lateral, apresentando como respostas “ $y = 4^+$ ,  $y = 5^+$  e  $y = 5$ ”, para indicar o limite lateral esquerdo, limite lateral direito e o limite da função. Apesar de calcularem corretamente o limite da função, não conseguiram compreender o conceito de limite lateral. Esse tipo de dificuldade já havia sido apontada no trabalho de Vrancken et al. (2006), visto nas dificuldades relacionadas com o conceito de limite.

Em relação à pergunta da 2ª questão, que indagava sobre a existência do limite, todos encontraram o valor solicitado, mas apenas 6 duplas justificaram a resposta. Para a segunda pergunta somente 5 duplas registraram a resposta corretamente, indicando que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$$

Todos os alunos acertaram as respostas da 3ª questão e a primeira pergunta da 4ª questão, mostrando que é mais fácil justificar casos em que o limite não existe porque os limites laterais são diferentes. Cinco duplas não apresentaram a justificativa para essa resposta ou responderam incorretamente. Uma única dupla, formada pelos alunos Renato e Faber, não conseguiu determinar  $f(1) = 3$ , respondendo não existir valor de  $f(1)$ . Essa mesma dupla não conseguiu identificar o valor da função na questão 6, respondendo, novamente que  $f(1)$  não existia. Entretanto, foi capaz de calcular o valor do limite da função. Esses alunos erraram a justificativa da 7ª questão, escrevendo que a função é descontínua “pois a bolinha aberta representa que aquele valor não está incluso”. Contudo, foi a dupla que apresentou o melhor esboço gráfico da questão 8 (ver fig. 26), demonstrando, talvez, uma dificuldade na interpretação do quadro gráfico ou na correspondência entre esse e o quadro algébrico (DOUADY, 1986), expresso nas condições solicitadas para esboço do gráfico.

Além da dupla Renato e Faber, outras quatro não responderam corretamente o porquê da função 6 ser descontínua (questão 7), recorrendo à expressões “o ponto não pertence à função”, “difere do padrão”, “fora do gráfico” ou “fora da reta”.

Sete duplas não traçaram o esboço da função  $f$  da 8ª questão e 4 não o fizeram corretamente, indicando confusão entre os conceitos de não existência de limite e de função contínua. A dupla Faber e Renato foi a que apresentou o melhor esboço para essa questão:

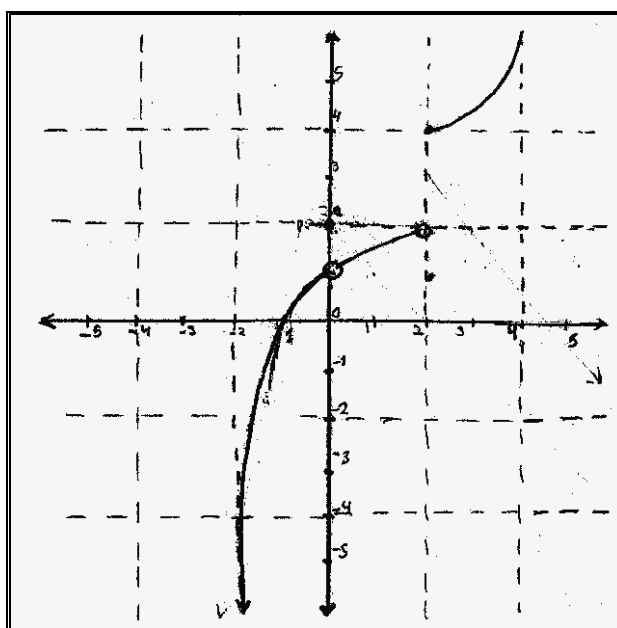


Figura 36: Folha de resposta dos alunos Faber e Renato.  
Fonte: Dados da pesquisa

A observação da dificuldade dos alunos em construir gráficos a partir de condições dadas corroborou as pesquisas de Vrancken et al. (2006).

Decidimos que esses conceitos deveriam ser revistos em outra aula. Outro problema que poderia estar ocorrendo para os erros dessa questão poderia ser relacionado à transposição do quadro algébrico para o gráfico.

## **6.7 Atividade 7**

### *6.7.1 Análise a priori*

O objetivo da 7ª atividade foi introduzir algumas propriedades de limites de funções de variável real. A atividade foi desenvolvida em casa e os alunos podiam trabalhar em duplas.



|                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Estudaremos, nessa atividade, algumas propriedades de limites de funções de variável real. Para isto, considere $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ , $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ e $k \in \mathbb{R}$ . Observe e complete os espaços em branco: |                                                                                                                                                                  |
| 1.                                                                                                                                                                                                                                                        | $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$                                                   |
|                                                                                                                                                                                                                                                           | <i>O limite da soma é a soma dos limites.</i>                                                                                                                    |
| 2.                                                                                                                                                                                                                                                        | $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$                                                   |
|                                                                                                                                                                                                                                                           | <i>O limite da diferença é ...</i>                                                                                                                               |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                  |
|                                                                                                                                                                                                                                                           | <i>O limite do produto é o produto dos limites.</i>                                                                                                              |
| 4.                                                                                                                                                                                                                                                        | $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kL_1$                                                                                          |
|                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                  |
| 5.                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                  |
|                                                                                                                                                                                                                                                           | <i>O limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero.</i>                                                |
| 6.                                                                                                                                                                                                                                                        | $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L_1^n$ , onde $n \in \mathbb{N}$                                               |
|                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                  |
| 7.                                                                                                                                                                                                                                                        | $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ , onde $n \in \mathbb{N}$ (Se $n$ for par, então $L_1 \geq 0$ ). |
|                                                                                                                                                                                                                                                           | <i>O limite da raiz enésima é raiz enésima do limite. Se <math>n</math> for par, então <math>L_1 \geq 0</math>.</i>                                              |

Figura 37: Ficha da atividade 7

Fonte: Elaborado pela autora

Nessa atividade, algumas propriedades dos limites foram apresentadas, ou na linguagem algébrica para que os alunos transcrevessem para a linguagem natural, ou nesta para serem reescritas utilizando símbolos matemáticos. Erros nessas transcrições podem ser devido ao próprio processo de interpretação/decodificação da linguagem simbólica empregada, evidenciando uma correspondência incorreta entre os quadros de linguagem simbólica e de linguagem natural.

A escrita matemática é o foco da atividade, incentivando-se o uso da simbologia matemática em conexão com a linguagem natural.

### 6.7.2 Execução

A institucionalização<sup>34</sup> teve início com a discussão e exemplificação das propriedades listadas na atividade. Utilizando o computador, o software Winplot e um data-show, a professora apresentou alguns esboços gráficos de funções solicitando que os alunos calculassem alguns limites utilizando o quadro gráfico. Esse software possui um recurso que permite que se trabalhe com funções em operações como a soma, subtração e multiplicação. Essa ferramenta foi utilizada para exemplificar e aplicar as propriedades vistas pelos alunos. .

Os alunos, durante as discussões, não apresentaram dúvidas relevantes.

### 6.7.3 *Análise a posteriori*

Quatorze folhas de respostas foram entregues. A propriedade que apresentou maior dificuldade para os alunos foi a propriedade d)  $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kL_1$  que deveria ser interpretada como “o limite do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pelo limite da função”. Sete duplas escreveram corretamente a propriedade d, enquanto 7 apresentaram erros na construção da frase tais como “o limite do produto de um número k é o produto do número k pelo limite” (Gustavo e Hebert) e “o limite do produto é o produto dos limites pela constante” (Flávio e Gabriel). Esses alunos também foram os únicos que não conseguiram escrever as propriedades c) e e) em linguagem simbólica.

Observamos, através dessa atividade, que os alunos parecem sentir uma dificuldade maior em transpor do quadro da linguagem natural para o simbólico, do que no sentido contrário.

---

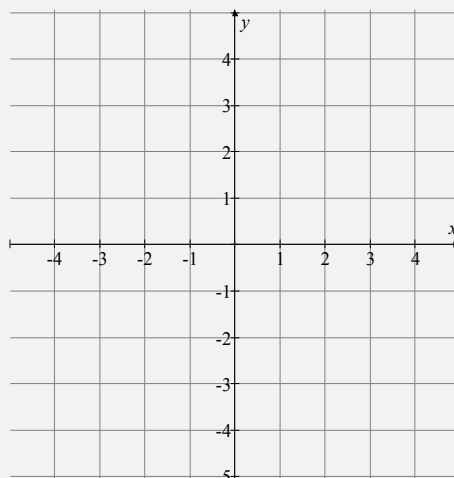
<sup>34</sup> Fase (d) da teoria dialética ferramenta-objeto de Douady (1986).

## 6.8 Atividade 8

### *6.8.1 Análise a priori*

A 8ª atividade, tendo como apoio a atividade 7, tinha por objetivo fixar as propriedades de limites, consistindo na etapa de familiarização da dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1986). Essa atividade foi planejada para um tempo de 30 minutos, para ser executada em duplas.

1. Esboce o gráfico da função  $f(x) = x$  no plano cartesiano abaixo.



Essa função é contínua para qualquer valor real de  $x$ ? O que podemos dizer, então, sobre o  $\lim_{x \rightarrow a} x$ ? Justifique.

2. Determine os valores dos limites abaixo, indicando quais propriedades vistas na atividade 7 foram utilizadas na resolução.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 =$     b)  $\lim_{x \rightarrow 25} \sqrt{x} =$     c)  $\lim_{x \rightarrow 3} x^{-1} =$     d)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 2) =$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-2)(x^2 + 2x + 4) =$     f)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x-1)^2 =$     g)  $\lim_{x \rightarrow 3} [(x-1)(x-2)] =$

3. Os resultados obtidos dos exercícios 2.d) e 2.g) são iguais. Você poderia saber que esses limites são iguais, sem efetuar os cálculos? Justifique.

4. Seja  $f(x) = x - 1$  e  $g(x) = x^2 - 1$ . Calcule

a.  $\lim_{x \rightarrow -2} [f(x)]^2 =$

b.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)} =$

c. Existe  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$ ? Justifique.

d. O que acontece quando calculamos  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ ?

Figura 38: Ficha da atividade 8

Fonte: Elaborado pela autora

O 1º exercício retomou a função polinomial de primeiro grau, mais especificamente, a função identidade, levando o aluno a questionar a sua continuidade e o valor de  $\lim_{x \rightarrow a} x$ , trabalhando o quadro gráfico e o algébrico. O exercício pedia uma justificativa da resposta do aluno, incentivando-o à escrita matemática. Esperava-se que o estudante observasse que, para

essa função,  $\lim_{x \rightarrow a} x = a, \forall a \in \mathbb{R}$ . Essa resposta e as propriedades de limites discutidas na

Atividade 7 constituíram as ferramentas para o cálculo dos limites pedidos nos outros exercícios.

Descuidos nas operações algébricas poderiam alterar os valores finais dos limites da questão 2, bem como o emprego incorreto das propriedades dos limites. Além de operacionalizar as propriedades, o exercício 2 também foi delineado para que o aluno identifique que propriedade(s) foi(ram) utilizada(s) para o cálculo dos valores dos limites listados. Desta forma, a identificação errada de propriedades para determinação dos limites dessa questão, mas com o resultado correto do valor do limite, poderia evidenciar a supervalorização do processo mecânico de cálculo por parte dos alunos.

O exercício 3 informou que os valores dos limites das questões 2.d e 2.g eram iguais e pedia aos alunos uma justificativa, novamente objetivando o desenvolvimento da escrita matemática. Uma resposta esperada seria que o produto dos fatores apresentados na questão 2.d é o resultado da questão 2.g.

A 4ª tarefa introduziu dois questionamentos importantes - o limite de uma função racional quando o denominador tende a zero e limites em que o cálculo por substituição levariam à indeterminação 0/0. Esperava-se que a maioria dos alunos respondesse que esse limites não existiriam ou que seriam indeterminados, mas a introdução desses tópicos poderia despertar os estudantes para os próximos limites a serem estudados. Para calcular o limite solicitado o aluno deveria perceber que a função  $f$  era um fator da função  $g$  e, através da simplificação conseguiria chegar ao resultado correto da 4.d. Esse último exercício se encaixa na fase de complexificação da dialética ferramenta-objeto, em que um problema mais complexo é apresentado ao aluno, para que esse possa testar seus domínios das novas aquisições (DOUADY, 1986).

### 6.8.2 Execução

Após o recolhimento da folha de resposta, várias duplas foram chamadas a responder no quadro as questões da atividade.

No primeiro exercício os alunos pediram à professora que explicasse novamente o conceito de função contínua. Na segunda questão, os alunos que foram ao quadro mostraram

que conseguiram calcular os limites, mas não mostravam quais as propriedades que estavam trabalhando. A professora solicitou que os alunos identificassem as propriedades utilizadas e alguns alunos se prontificaram a realização dessa tarefa.

A turma respondeu prontamente que os limites 2.g) e 2.d) apresentavam o mesmo valor uma vez que uma função era a forma fatorada da outra.

As questões 4.c) e 4.d) apresentaram uma dificuldade maior para os alunos, apresentando como respostas “não existe” e “indefinido”, respectivamente. A professora, então, discutiu a resolução dessas questões, utilizando os quadros algébrico, gráfico e numérico.

### 6.8.3 *Análise a posteriori*

Foram entregues 16 folhas de resposta, correspondendo a 15 duplas e uma folha individual.

Uma única dupla não esboçou o gráfico da função  $f(x) = x$ . Essa dupla afirmou que a função não era contínua para qualquer valor real de  $x$ , mas respondeu que  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ , mostrando desconhecer o conceito de continuidade de funções. Outra dupla também respondeu de forma semelhante à primeira questão, embora tenha esboçado o gráfico. O aluno Gustavo, que fez a atividade sozinho, deixou em branco essa questão, somente traçando o gráfico da função. Todos os outros alunos responderam que a função era contínua e que  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ , mas nenhum justificou o cálculo do limite utilizando a ideia de continuidade da função.

Com relação à segunda questão temos:

- a. Duas duplas e um aluno (Gustavo) somente escreveram a resposta das questões 2.a) a 2.c) sem indicar o uso das propriedades. Esses estudantes demonstraram a utilização das propriedades para o cálculo dos limites nas outras questões;
- b. Quatro duplas indicaram o uso das propriedades, mas não citaram quais foram utilizadas;
- c. Nove, além de indicarem, citaram as propriedades utilizadas.

Todos os alunos identificaram que os limites 2.d) e 2.g) são iguais e que uma função está na forma fatorada, respondendo corretamente a terceira questão.

A maioria dos alunos acertou a resposta dos exercícios 4.a) e 4.b), sendo que 3 duplas erraram a resposta 4.a) pelo desenvolvimento incorreto do trinômio quadrado perfeito. Para a questão 4.c), 14 registros apontaram não existir o limite uma vez que o denominador tende para zero. Essa resposta vai de encontro com a propriedade c) da atividade 7, em que “o limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero.”. Uma dupla classificou o limite como indeterminado e Gustavo calculou o limite como zero. Nenhum aluno conseguiu calcular o limite solicitado em 4.d).

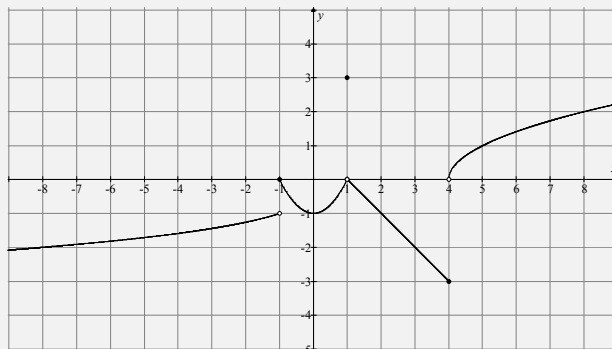
Concluimos, pelos resultados apresentados, que as propriedades foram compreendidas pelos estudantes. Isso, talvez, pelo uso do quadro algébrico que elas apresentam e os procedimentos algorítmicos demandados.

## 6.9 Atividade 9

### 6.9.1 *Análise a priori*

A atividade de número 9 teve por objetivo retomar os conceitos de limite, a continuidade, limites laterais, existência de limite e propriedades de limites estudados anteriormente. A atividade foi planejada como uma lista de exercícios complementares, resolvida em dupla e em casa, para discussão posterior em sala de aula. A atividade se enquadra na etapa de familiarização dos conceitos, de acordo com a dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1986).

1. Observe o esboço da função  $f$  abaixo e determine o que se pede:



- a.  $\lim_{x \rightarrow -8} f(x)$    c.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$    e.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$    g.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$    i.  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$   
 b.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$    d.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$    f.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$    h.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$
2. Para a função esboçada anteriormente, identifique pontos onde existe descontinuidade. Justifique sua resposta.
3. Determine o valor de  $m$  para que exista o limite da função  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ mx - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$  quando  $x$  tende para 1.
4. Determine o valor de  $m$  para que a função  $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & \text{se } x \neq -2 \\ m, & \text{se } x = -2 \end{cases}$  seja contínua em  $x$  igual a  $-2$ .
5. Calcule os limites abaixo, indicando as propriedades utilizadas:
- a.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + x - 1) =$    b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x+3} =$    c.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-3)^3 =$   
 d.  $\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt[4]{x^2 - 9} =$    e.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-3} =$    f.  $\lim_{x \rightarrow -10} 2 =$
6. Calcule os limites de  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$  e de  $g(x) = x - 2$  quando  $x$  tende a 2. O que você observa? Justifique.

Figura 39: Ficha da atividade 9

Fonte: Elaborado pela autora

A primeira questão envolvia a análise gráfica de uma função para que se pudesse calcular os valores dos limites nos pontos indicados. Dois tipos de erros poderiam ocorrer – uma interpretação incorreta do esboço do gráfico da função ou interpretação errada do conceito de limite.

A segunda questão propunha aos alunos discutirem sobre a continuidade da função esboçada no exercício anterior, exercitando a escrita matemática. Para essa função, especificamente, foram apresentados dois tipos de descontinuidade: de salto e removível. Para os alunos, não era proposta a discussão dessas nomenclaturas, mas a discussão sobre as descontinuidades da função dada no intervalo real apresentado. Assim, esperava-se que os alunos identificassem os três valores de  $x$  onde a função era descontínua, ou porque não existe



limite da função no ponto ou porque, apesar da existência do limite, o valor deste difere do valor da função no ponto.

O 3º exercício apresentou um raciocínio diferente dos exercícios das atividades anteriores. Solicitava-se, aqui, que se calculasse um valor para a incógnita  $m$  tal que existisse o limite para função com  $x$  igual a 2. Para esse exercício, exigiu-se uma compreensão mais profunda do conceito de limite. Assim, podemos categorizar essa questão como complexificação, segundo a dialética ferramenta-objeto. Respostas incompletas ou com valores diferentes para  $m$  eram esperados.

O exercício 4 solicitou ao estudante um valor para a incógnita  $m$  tal que a função apresentada fosse contínua para  $x = -2$ .

O exercício de número 5 tinha por objetivo reforçar o uso das propriedades dos limites. Entretanto, a substituição simples dos valores de  $x$  para os cálculos dos limites também levaria a resultados corretos. Solicitou-se, no entanto, que os alunos indicassem todas as propriedades utilizadas no cálculo de cada limite.

A última questão conduzia a uma indeterminação do tipo  $0/0$ . Esperava-se que os alunos buscassem estratégias de solução e que, talvez, através da simplificação do limite da função  $f$  pela fatoração chegassem ao limite da função  $g$ .

### 6.9.2 Execução

A professora começou a 9ª atividade recolhendo as folhas de resposta e observando que muitos alunos estavam ausentes. Somente 23 alunos compareceram à aula.

Um aluno avisou que o restante da turma não compareceria, pois estavam em um laboratório de informática, preparando o trabalho de outra disciplina.

A professora iniciou a institucionalização, notando pouco interesse da turma. Grande parte dos alunos presentes estava preocupada com as disciplinas técnicas e aparentava cansaço. Mesmo assim, um pequeno grupo participou ativamente das discussões.

As questões que geraram mais dúvidas quanto à resolução foram a 3ª e a 4ª, que envolviam a ideia de continuidade de funções. Apesar de acertarem as respostas dessas questões, os alunos mostravam-se inseguros em relação à resolução do problema. Eles estavam familiarizados com o quadro gráfico para a discussão de descontinuidade e essas questões não apresentavam o esboço dos gráficos das funções. Após os alunos resolverem no

quadro-negro essas questões, a professora discutiu com os alunos como eles poderiam utilizar o quadro gráfico.

### 6.9.3 Análise a posteriori

Foram entregues 12 folhas de resposta, sendo que o aluno Vagner decidiu fazer a atividade sozinho. Dessas, 3 duplas não conseguiram determinar corretamente os limites solicitados em 1.d) a 1.f). Das 3 duplas que erraram esses limites, duas apresentaram como resposta o valor do limite como sendo 1. Esse erro pode ser devido a uma interpretação incorreta do quadro gráfico, uma vez que o gráfico da função encostava no eixo das abscissas, os alunos poderiam ler na reta  $Ox$  o número 1 e terem estabelecido que esse era o valor do limite.

Todos os alunos conseguiram identificar os pontos onde a função era descontínua, entretanto 4 duplas escreveram a resposta na forma de par ordenado, como podemos ver abaixo:

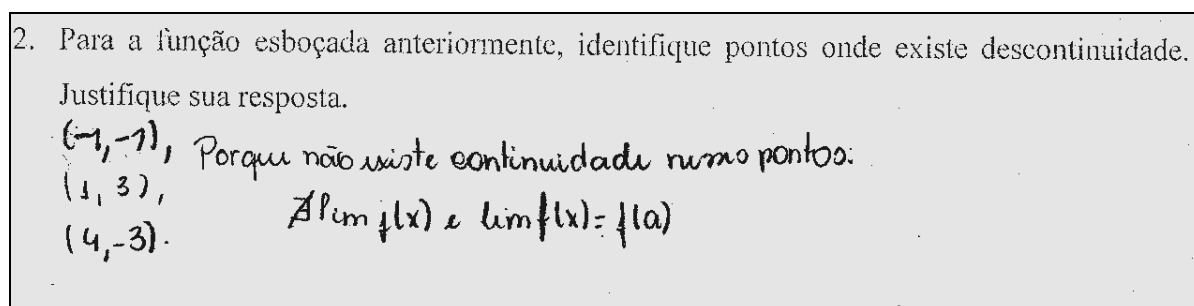


Figura 40: Folha de resposta dos alunos Renato e Faber

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar dois erros na resposta dos alunos da figura 36: em primeiro lugar, o ponto  $(-1, -1)$  não pertence à função; em segundo lugar, não é a notação correta empregada na descontinuidade da função – os alunos deveriam responder para quais valores de  $x$  a função é descontínua. Isso pode ter ocorrido devido ao enunciado da questão, que pede que o aluno identifique os **pontos** onde existe descontinuidade. O termo “pontos” pode ter levado os alunos ao entendimento de ponto, no sentido de plano cartesiano, em que deveriam

representar como o par ordenado  $(x, y)$ .

Uma dupla não apresentou justificativa para a questão 2 e em outra folha de resposta a noção de função contínua apareceu relacionada a ideia de linha ininterrupta (CORNU, 1991):

ponto  $(-3, -3)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(4, 0)$ , pois a linha do gráfico está cortada

Figura 41: Folha de resposta dos alunos Marcelo e Marcos

Fonte: Dados da pesquisa

No exercício 3, somente 2 duplas não conseguiram calcular o valor de  $m$ , sendo que 1 delas tentou resolver o problema utilizando uma mudança do quadro algébrico para o gráfico, mas de forma incorreta.

Os alunos Jânio e Valter tentaram esboçar a função quadrática do exercício 3, tentando transferir o problema para o quadro gráfico. Observamos que os mesmos não conseguiram traçar corretamente o esboço da parábola, e nem conseguiram resolver o problema no quadro algébrico.

O aluno Vagner também utilizou o quadro gráfico e o algébrico para resolver a 3ª questão, obtendo o valor correto, embora não esboçando o gráfico da 2ª sentença e não explicando o raciocínio feito:

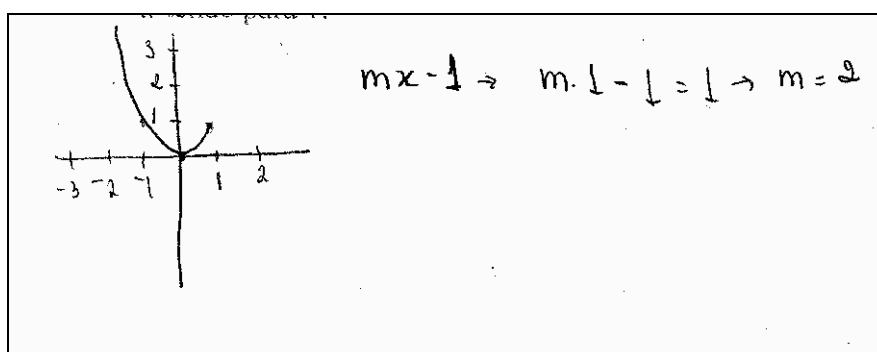


Figura 42: Folha de resposta do aluno Vagner

Fonte: Dados da pesquisa

Duas duplas mostraram um erro ao realizarem o cálculo de  $m$  na quarta questão, achando o valor de 1 ao invés da resposta correta 9. Os alunos Jânio/Valter e Marcelo/Marcos utilizaram uma mudança de quadros – do algébrico para o gráfico – para solucionar o problema.

Todos os alunos calcularam corretamente os limites da 5ª questão, exceto 1 única dupla que apresentou erros de aritmética. Entretanto, 2 duplas mostraram uma notação incorreta de limite, como se pode verificar observando a Figura 39:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + x - 1) = \lim x^3 - \lim 2x^2 + \lim x - \lim 1$   
 $(\lim x)^3 - 2(\lim x)^2 + 1 = 1$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{\lim x - \lim 1}{2 \lim x + \lim 3} = \frac{-1}{3}$

Figura 43: Folha de resposta dos alunos Marcelo e Marcos  
 Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que os alunos utilizam uma linguagem sem rigor para o cálculo dos limites, não indicando para qual valor que  $x$  estava tendendo. Essa dificuldade foi observada por Sierpiska (1985), sendo denominada de obstáculo simbólico.

Cinco duplas não conseguiram calcular o limite solicitado no 6º exercício, classificando-o como indeterminado. Os outros alunos afirmaram que os dois limites são iguais, conseguindo identificar o produto notável. Os alunos Ronaldo e Saulo foram os que melhor justificaram essa questão e, apesar de não terem calculado o limite, a resposta da dupla foi considerada correta.

Handwritten text in a box:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-2)} = x-2$$

que os limites serão iguais,  
pois as funções são idênticas  
exceto em  $x=2$ , pois aí  $f(x) \neq$

Figura 44: Folha de resposta dos alunos Ronaldo e Saulo  
Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos, através dessa atividade, que os alunos sedimentaram o conceito de continuidade de funções. Também observamos que utilizaram corretamente as propriedades de limite para efetuar os cálculos, apesar das dificuldades apresentadas com relação à notação do limite.

#### 6.9.4 Primeira avaliação

A aplicação das atividades foi interrompida por causa do fim do semestre, sendo retomada três semanas depois, logo na primeira aula do segundo semestre. Na última semana do primeiro semestre todos os alunos da escola, de todos os cursos, passaram por uma avaliação de conteúdos dos dois primeiros bimestres, sendo essa avaliação unificada para cada ano do Ensino Médio.

A avaliação semestral consistiu de 20 questões fechadas, sendo as quatro últimas reproduzidas na Figura 45, uma vez que abordavam o assunto limites.

**Questão 17**

Sobre a função  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & \text{se } x > 3 \end{cases}$ , pode-se afirmar que

- a. É definida e contínua  $\forall x \in \mathbb{R}$
- b. É definida e contínua somente para  $x > 3$
- c. É definida  $\forall x \in \mathbb{R}$  e descontínua somente para  $x = 3$
- d. É definida e contínua somente para  $x \leq 3$

**Questão 18**

O valor de  $m \in \mathbb{R}$  para que exista o  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  onde  $f(x) = \begin{cases} -3x + 2m, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3m, & \text{se } x > 1 \end{cases}$  é

- a. -1
- b. 0
- c. 1
- d. 2

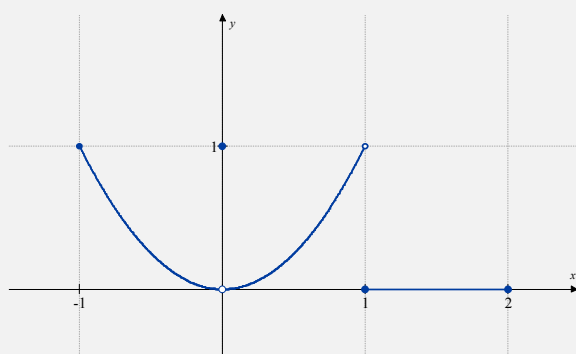
**Questão 19**

Sabe-se que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$ . Então,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3f(x) - [g(x)]^2}{f(x) + g(x)}$  vale

- a. -1
- b. 0
- c. 2
- d. 5

**Questão 20**

Observe o esboço da função  $f(x)$  abaixo:



Podemos afirmar que

- a.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
- b.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$
- c.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$
- d.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

Figura 45: Questões da avaliação semestral do 2º ano

Fonte: Elaborado pela autora

Apresentamos, na Tabela 1 abaixo, as respostas assinaladas pelos alunos da turma em que a pesquisa foi desenvolvida que fizeram a avaliação, destacando em negrito a quantidade de alunos que marcaram a alternativa correta:

TABELA 1  
Respostas dos alunos nas questões da prova semestral

| Alternativas | Questões  |           |           |           |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|              | 17        | 18        | 19        | 20        |
| <b>A</b>     | 6         | 10        | 0         | 9         |
| <b>B</b>     | 9         | 2         | 0         | <b>11</b> |
| <b>C</b>     | <b>16</b> | <b>20</b> | 0         | 8         |
| <b>D</b>     | 6         | 5         | <b>37</b> | 7         |

Fonte: Dados da pesquisa

Como podemos observar, todos os alunos acertaram a questão 19. Isso pode ser devido ao entendimento das propriedades de limites ou, simplesmente, ao algebrismo envolvido na resolução da questão.

O número de alternativas marcadas incorretamente na 17ª questão, justifica-se, talvez, pelo fato da questão envolver uma função irracional, cujo esboço não é muito utilizado pelos os estudantes, dificultando o uso do quadro gráfico para ajudar a resolver o problema.

Erros na questão 18 podem ser oriundos de erros de álgebra, ao marcarem a alternativa (a) como correta, ou mesmo do não entendimento do problema.

Já a 20ª questão foi a que apresentou menos acertos indicando, talvez, uma dificuldade na interpretação do gráfico da função ou no entendimento do conceito de limite lateral.

## 6.10 Atividade 10

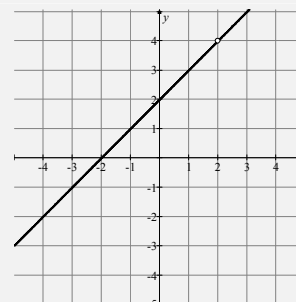
### 6.10.1 *Análise a priori*

O objetivo dessa atividade foi introduzir limites cujo cálculo por substituição conduziria à indeterminação do tipo  $0/0$ . Para essa seção, estimava-se um tempo de 30 minutos, em que os alunos trabalhariam em duplas. Considerando a dialética ferramenta-objeto, pretendemos trazer o antigo - conhecimento sobre fatoração e produtos notáveis – para trabalhar o novo implícito - o cálculo de limites de funções racionais, em que o numerador e o denominador tendem para zero.



1. Considere a função  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ , cujo esboço é fornecido abaixo e faça o que se pede:

- Especifique o seu domínio.
- Observando o gráfico, determine  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right)$ .
- Existem diferenças entre o gráfico da função  $f$  e da função  $g(x) = x + 2$ ? Justifique.
- Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ . Compare com o limite obtido na questão b). O que você observa? Justifique.



2. Seja a função  $f(x) = 2x^2 + x - 1$ .

- Determine os seus zeros.
- Lembrando que se  $g(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são os zeros da função, escreva  $f(x)$  na forma fatorada.
- Calcule  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$ .

3. Seja a função  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ .

- Especifique o seu domínio.
- Como você poderia calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ ?

4. Seja  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 3x}$ . Como proceder para calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 - 3x}$ ?

5. Para a função  $f(x) = x^2$ , determine o que se pede:

- Seja  $g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . Calcule o valor de  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x)$ .

O limite calculado na questão anterior é um limite especial que recebe o nome de derivada da função  $f$  no ponto  $x$ .

Figura 46: Ficha da atividade 10

Fonte: Elaborado pela autora

Para o 1º exercício, esboçamos o gráfico da função  $f$ , esperando que os alunos observassem como o formato do esboço da função se parece com uma função polinomial de 1º grau exceto é claro, pelo seu domínio. Nessa questão, também, pediu-se, através da interpretação do quadro gráfico, o limite da função quando  $x$  tende a 2. Qualquer valor do limite determinado na questão 1.b, diferente de 4, mostraria que os alunos ainda não teriam compreendido o conceito de limite. A questão 1.c revelou a função polinomial de 1º grau  $g$ , de representação gráfica similar à da função  $f$ , perguntando aos estudantes a diferença entre as duas funções. Com a pergunta 1.d entendemos que os estudantes começariam a relacionar que

o limite da função  $f$  poderia ser calculado pelo limite da função  $g$ , com  $x$  tendendo a 2. Nas questões 1.c) e 1.d) solicitamos que o aluno justificasse suas respostas, enfatizando, desta forma, a escrita matemática.

Na 2ª questão foi lembrada a forma fatorada da função quadrática, que deveria ser empregada em 2.c para a simplificação do limite. A determinação incorreta dos zeros da função  $f$  poderia levar a resultados incorretos do valor do limite, bem como respostas negando a existência do limite (divisão por zero).

O exercício 3 solicitou aos alunos que explicitassem o domínio da função, envolvendo um trinômio quadrado perfeito no numerador. Esperava-se que os alunos conseguissem simplificar a função racional para, então, calcular o limite.

A simplificação envolvida na questão 4 foi considerada a mais simples apresentada aos alunos, uma vez que o fator comum, no denominador, era a variável  $x$ . A expectativa para o acerto dessa questão, por esse motivo, era alta.

Na 5ª questão, foi introduzido um limite especial que representa a derivada de uma função. Uma dificuldade que poderia surgir, nessa questão, seria a interpretação da linguagem matemática para calcular  $g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , considerando o nível de abstração exigido. Pretendia-se preparar os alunos para a posterior introdução do tópico de derivadas.

### 6.10.2 Execução

A professora percorria as carteiras observando o desenvolvimento da atividade e era chamada às vezes para elucidar as dúvidas de alguns alunos.

A questão que apresentou maior dificuldade na interpretação e na resolução foi a última, sobre derivada. Apesar de conseguirem calcular a derivada através do cálculo do limite da função  $g$ , muitos fizeram somente o processo mecânico do limite, sem entender o porquê. Transcorrido o tempo planejado para essa seção, a professora recolheu as folhas de resposta e iniciou a institucionalização.

Após as discussões dos alunos dos exercícios resolvidos, a professora propôs novos exercícios que abordavam esse tipo de limite.

### 6.10.3 Análise a posteriori

Foram entregues 17 folhas de resposta, sendo que 1 delas foi respondida por um trio composto pelos alunos Mauro, Adriano e Josué. Todas as folhas apresentaram respostas corretas para a 1ª questão, inclusive com justificativas das respostas, indicando uma maior facilidade na escrita de textos matemáticos:

c) Existem diferenças entre o gráfico da função  $f$  e da função  $g(x) = x + 2$ ? Justifique.

Sim, o domínio da função  $f$  é  $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$  e o da função  $g$  é  $\{x \in \mathbb{R}\}$

d) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ . Compare com o limite obtido na questão b). O que você observa?

Justifique.

Eu observo que os limites são iguais, mesmo que haja diferença no ponto  $x=2$  no valor das funções porque o restante do gráfico é igual e análise afinal se refere a  $x$  tendendo a 2.

Figura 47: Folha de resposta dos alunos Gustavo e Hebert

Fonte: Dados da pesquisa

Os erros das questões 2, 3 e 4 não foram significativos. Já a 5ª questão apresentou maior dificuldade para os alunos, sendo que somente 7 duplas apresentaram o exercício 5.a) resolvido de forma correta; 4 duplas conseguiram determinar a derivada da função como  $2x$ , mas não souberam escrever corretamente o procedimento de cálculo:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

$g(x) = 2x$

Figura 48: Folha de resposta dos alunos Marcela e Leonardo, questão 5.a

Fonte: Dados da pesquisa

Na resolução da dupla Marcela e Leonardo, observamos que os alunos preocuparam-se mais com a resolução algébrica, o desenvolvimento do produto notável e a simplificação da expressão, do que com o conceito da derivada como um limite especial. Ficou apenas

subentendido que a passagem do limite quando  $h \rightarrow 0$  foi feita.

3 duplas não calcularam a derivada e 3 outras classificaram o limite da função como indeterminado.

Podemos verificar, com essa atividade, que:

- a. Os alunos apresentaram uma maior facilidade na escrita matemática;
- b. O antigo (conhecimento sobre fatoração e produtos notáveis) serviu de ferramenta para o novo implícito (cálculo do limite em questão);
- c. Entretanto, a complexificação da atividade, através da definição da derivada, é um ponto que necessita de mais trabalho.

## 6.11 Atividade 11

### 6.11.1 *Análise a priori*

A 11ª atividade foi planejada para ser executada fora da sala de aula, em duplas. O objetivo foi fixar as ideias relativas ao cálculo de limites que recaem em uma indeterminação do tipo  $0/0$ . Como os alunos já haviam trabalhado com esse tipo de limites, na atividade anterior, essa seção se encaixa na fase de familiarização da dialética ferramenta-objeto.

## Atividades complementares

As fórmulas de fatoração apresentadas a seguir podem ser utilizadas para o cálculo dos limites de funções racionais.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

1. Empregue essas fórmulas para calcular os limites abaixo:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 2)^2 - 4}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

2. Para a função  $f(x) = mx + n$ , onde  $m$  e  $n \in \mathbb{R}$ , pede-se calcular  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Figura 49: Ficha da atividade 11

Fonte: Elaborado pela autora

Com o intuito de ajudar os alunos a se lembrarem de algumas fatoraões, foi colocado, no início da atividade, um formulário simplificado envolvendo os resultados básicos de fatoraões que apareceriam nos exercícios, de modo a facilitar que o conhecimento antigo fosse retomado e utilizado para resolver os exercícios.

A questão 1 apresentou limites que poderiam utilizar as fórmulas de fatoraão apresentadas inicialmente. Somente o exercício 1.a) envolveu uma fatoraão que não estava listada no formulário. Entretanto, esperou-se que essa fatoraão, por ser mais simples que as outras, seria mais facilmente identificada pelos estudantes. Respostas erradas para essa questão poderiam indicar equívocos em relação ao uso dos procedimentos de fatoraão ou à interpretação incorreta do conceito de limite.

O exercício 2 solicitou o cálculo da derivada da função polinomial de 1º grau no ponto  $x = a$  sem exigir, entretanto, que os alunos tivessem um conhecimento de que se tratava do cálculo da derivada em um ponto. Os objetivos dessa questão eram saber se os estudantes conseguiriam fazer a leitura com entendimento da simbologia matemática envolvida no processo e determinar o limite pedido.

### 6.11.2 Execução

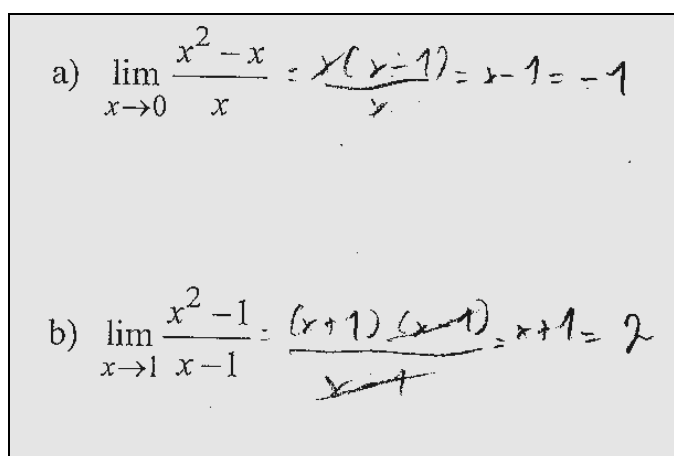
A professora recolheu as folhas de resposta antes de iniciar a institucionalização (DOUDAY, 1986) da atividade. Os alunos não demonstraram dúvidas sobre a primeira questão, mas a professora insistiu em passar para o quadro gráfico os limites propostos.

Foi chamada ao quadro uma dupla para resolver a segunda questão. A professora discutiu, então, os gráficos de uma função polinomial de 1º grau e da sua derivada.

### 6.11.3 Análise a posteriori

Foram entregues 18 folhas de resposta, sendo uma de um trio formado pelos alunos Josué, Adriano e Mauro.

Poucos erros nos resultados finais foram encontrados na primeira parte da atividade, sendo que 5 duplas desenvolveram incorretamente o binômio de Newton na questão 1.d), alterando o valor final do limite e 2 duplas não conseguiram fatorar o limite solicitado no exercício 1.f). Podemos observar, contudo, que os alunos estavam mais envolvidos com os procedimentos e deixaram de usar corretamente a notação de limite. Apenas 5 duplas registraram corretamente o desenvolvimento do limite.



The image shows a photograph of a piece of paper with handwritten mathematical solutions. The first problem, labeled 'a)', is the limit of (x^2 - x) over x as x approaches 0. The student has written the solution as x(x-1) over x, which simplifies to x-1, resulting in -1. The second problem, labeled 'b)', is the limit of (x^2 - 1) over (x - 1) as x approaches 1. The student has written the solution as (x+1)(x-1) over (x-1), which simplifies to x+1, resulting in 2. There is a small correction mark under the denominator of the second fraction.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x(x-1)}{x} = x-1 = -1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1 = 2$$

Figura 50: Folha de resposta dos alunos Carmem e Leandro  
Fonte: Dados da pesquisa

As resoluções dos alunos Carmem e Leandro, mostradas na figura 46, evidenciam que os alunos conseguem realizar os procedimentos algébricos, demonstrando dificuldades em romper com o pensamento algébrico (ARTIGUE, 1995).

O segundo exercício também registrou poucos erros em relação ao resultado do cálculo da derivada da função  $f$  – somente 2 duplas não chegaram ao resultado final esperado e 2 consideraram o limite indeterminado. Entretanto, os erros de notação matemática foram constantes, sendo que apenas uma dupla foi capaz de escrever, registrando com o rigor da linguagem matemática o desenvolvimento do limite.

## 6.12 Atividade 12

### 6.12.1 *Análise a priori*

A 12ª atividade foi planejada para ser executada no laboratório de informática e com os alunos trabalhando em duplas, estimando-se um tempo de 20 minutos. O objetivo dessa atividade foi estudar limites tendendo para o infinito, quando o denominador tende para zero. O uso do quadro gráfico foi pensado como instrumento para a determinação dos limites solicitados. O computador foi utilizado como ferramenta para esboço dos gráficos das funções, sendo usado um software livre, o Winplot, com comandos em português. Os alunos haviam tido contato anterior com esse software, tendo demonstrado desenvoltura ao trabalhar com o mesmo. A escrita matemática seria trabalhada na medida em que eram solicitadas justificativas das respostas dos alunos.

Para esta atividade, utilizaremos o *software Winplot* com o objetivo de analisar o comportamento das funções abaixo.

1. Esboce o gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Responda
  - a) O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ ?
  - b) E sobre  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ ?
  - c) Existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ? Justifique.
2. Esboce o gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Responda
  - a) O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$ ?
  - b) E sobre  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$ ?
  - c) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ .
3. Esboce o gráfico das funções  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  e  $g(x) = \frac{1}{x^4}$ . Você observa algum padrão? Descreva-o.
4. Analisando as questões acima, o que podemos afirmar sobre  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ ? E sobre  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2}$ ? E  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^3}$ ? Justifique.

Figura 51: Ficha da atividade 12

Fonte: Elaborado pela autora

Na 1ª questão, os alunos, após traçarem o gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , deveriam analisar o comportamento da função quando  $x$  se aproximava de zero, pela esquerda e pela direita. Esperava-se que os alunos concluíssem que, para esse caso, não existe o limite quando  $x$  tende a zero, uma vez que os limites laterais não existem.

A 2ª questão apresentou a função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , cujo limite, quando  $x$  tende a zero, tende para infinito. Os alunos já conheciam o símbolo utilizado para representar o infinito, apresentado em tópicos de matemática estudados anteriormente, como trigonometria e progressões e, por esse motivo, estimava-se que eles responderiam corretamente a essa questão. Entretanto, ao utilizar o software, os alunos deveriam escrever a função com um certo cuidado, pois o programa poderia interpretar uma função diferente da especificada.



Assim, a digitação correta, por parte dos estudantes, da função como  $f(x) = 1/x^2$  ou ainda,  $f(x) = x^{-2}$ , levaria ao esboço gráfico esperado.

A 3ª questão pretendia conduzir os alunos a uma pequena generalização de  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^n} \right), n \in \mathbb{N}^*$ , através da observação dos quadros gráficos das funções apresentadas neste exercício e nos dois anteriores. Respostas incorretas nessas questões, devido a erros de interpretação dos quadros ou esboços incorretos dos gráficos, poderiam fazer com que os alunos não fizessem a conjectura esperada sobre o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^n} \right), n \in \mathbb{N}^*$ .

Para a 4ª questão não foi pedido, explicitamente, o esboço dos gráficos das funções. Entretanto, esperamos que os alunos utilizariam o programa para a análise dos comportamentos das funções, empregando o quadro gráfico para a determinação dos limites. Esse último exercício corresponderia à etapa de complexificação do caso  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^n} \right), n \in \mathbb{N}^*$ , de acordo com a fase f. da dialética ferramenta-objeto de Douady (1986).

### 6.12.2 Execução

No laboratório de informática, os alunos dividiram-se em pares para trabalhar a atividade. Devido à interface amigável do programa e do contato anterior dos alunos com o mesmo, não surgiram dúvidas quanto a digitação das funções. Foi avisado aos alunos que estes deveriam enviar seus gráficos para a professora por e-mail.

O tempo gasto nessa atividade foi menor que o previsto, cerca de 10 a 15 minutos. O professor<sup>35</sup> iniciou a institucionalização utilizando os gráficos esboçados pelos próprios alunos, utilizando um computador e um data-show.

Os alunos tiveram dificuldade em identificar os gráficos das funções da 4ª questão como translações horizontais dos gráficos das funções dos exercícios anteriores. Contudo, com a ajuda do quadro gráfico, conseguiram generalizar os limites da forma

$$\lim_{x \rightarrow a} (x - a)^{-n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

---

<sup>35</sup> As atividades 12 a 15 não foram aplicadas pela professora pesquisadora, sendo conduzidas por outro professor, mas os registros escritos e os e-mail foram encaminhados para análise para a professora pesquisadora.

### 6.12.3 *Análise a posteriori*

18 folhas de resposta foram entregues. Entretanto, somente 8 duplas enviaram os gráficos à professora. Embora conhecessem o símbolo de infinito 6 duplas preferiram apresentar toda as respostas em linguagem natural. Com o auxílio do quadro gráfico, todos os alunos responderam corretamente os exercícios 1.a) e 1.b). Na questão 1.c), uma dupla afirmou não existir o limite por não existir divisão por zero; uma dupla lembrou da atividade 10 escrevendo não haver nenhum artifício para criar uma outra função para calcular o limite; uma dupla respondeu positivamente para a existência do limite uma vez que “em limites qualquer número diferente de zero dividido por zero tende ao infinito” (Hebert e Gustavo). Esses dois alunos já haviam estudado limite no ano anterior e traziam uma generalização incorreta para essa questão, evidenciando, possivelmente, um obstáculo epistemológico em relação a esse limite ou a noção de infinito. Outra possibilidade é que esses alunos, apesar de terem enviado o esboço da função, não fizeram a interpretação correta do quadro gráfico.

De forma análoga à primeira, na segunda questão 6 duplas preferiram escrever em linguagem natural a dar a resposta em linguagem simbólica, sendo que 1 dupla justificou a não existência do limite por se tratar de divisão por zero.

Das folhas entregues, 15 generalizaram corretamente o caso  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Os alunos Hebert e Gustavo não conseguiram observar nenhum padrão (ver fig. 43), talvez por já generalizarem uma regra para o cálculo desse limite ou porque responderam incorretamente o exercício 2.a. Essa resposta incorreta pode ser devido a uma dificuldade em relação à noção de limite lateral (VRANCKEN et al., 2006) ou em relação à interpretação do quadro gráfico.

As duplas Marcelo/Marcos e Carmem/Leandro afirmaram que “os gráficos das funções com expoente ímpar se assemelham, o mesmo acontece quando o expoente é par”. Fábio e Davi afirmaram ter visto um padrão, mas a explicação da dupla foi confusa: “quando se divide 1 por números positivos,  $\frac{1}{0}$  tende a  $+\infty$  e quando se divide por negativos,  $\frac{1}{0}$  tende a  $-\infty$ .” A redação dessa resposta pode indicar a dificuldade encontrada para expressar o raciocínio matemático utilizando a linguagem natural.

Os alunos Yagho/Zander e Hebert/Gustavo afirmaram que todos os limites da última questão tendiam para  $\infty$ , justificando “que todos estão sendo divididos por zero” (resposta de Yagho/Zander). A dupla Carmem/Leandro respondeu que não existia o limite, “pois sempre

são resultado de  $\frac{1}{0}$ ". O restante da turma respondeu corretamente à questão 4, apresentando justificativas semelhantes à da 3ª questão. Alguns alunos empregaram o quadro gráfico para estudar os limites do 4º exercício: das 8 duplas que enviaram os gráficos, 6 haviam esboçado as funções desse exercício. Por esse motivo esperamos que mais alunos tenham utilizado esse artifício.

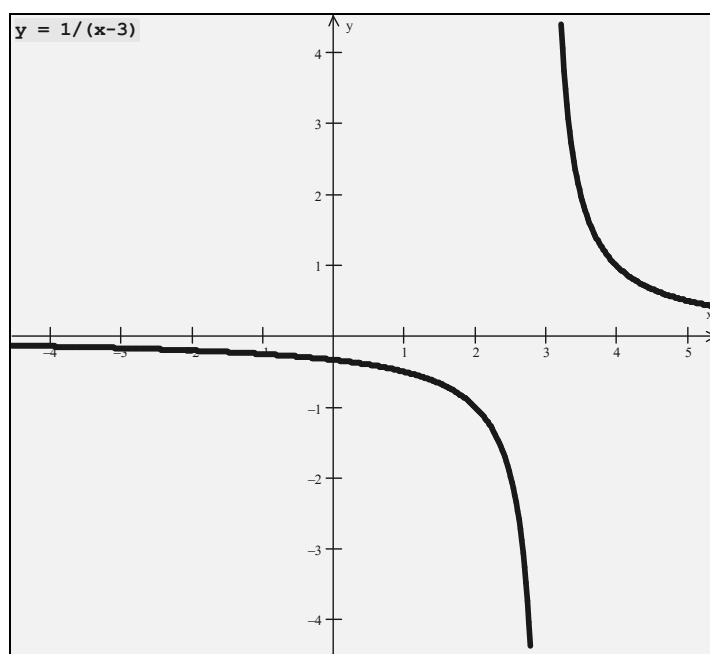


Figura 52: Gráfico enviado pelos alunos Leandro e Nádía do exercício 4  
Fonte: Dados da pesquisa

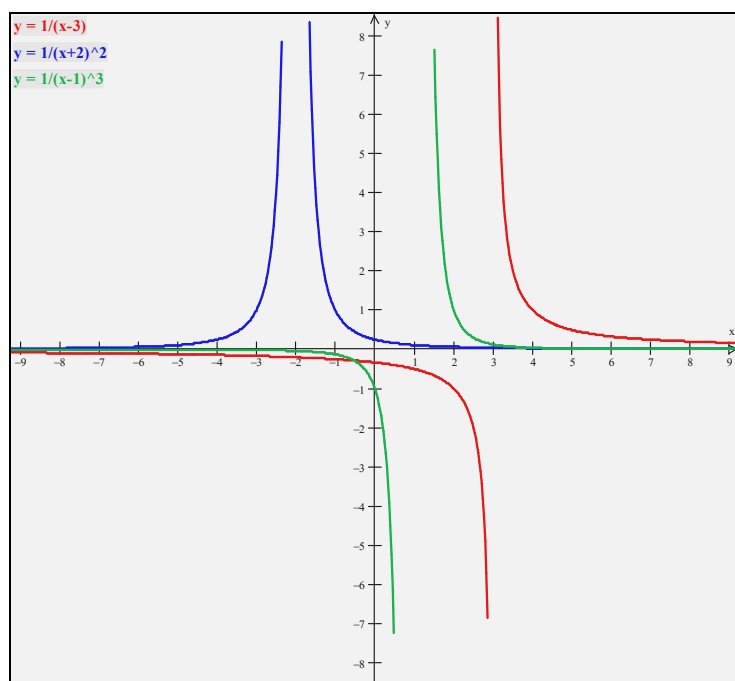


Figura 53: Gráficos das funções do exercício 4 enviados pelos alunos Renato e Faber  
Fonte: Dados da pesquisa

Concluimos, após essa atividade, que os alunos conseguiram sistematizar suas ideias intuitivas sobre limites do tipo  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n}, n \in \mathbb{N}^*$ . Também verificamos que o quadro gráfico auxiliou na elaboração das conjecturas. Ainda que tais resultados não sejam demonstrados, entendemos a importância de orientar os alunos no sentido de sistematizá-los.

### 6.13 Atividade 13

#### 6.13.1 Análise a priori

A 13ª atividade teve por objetivo introduzir o conceito de limite com  $x$  tendendo a infinito, por vezes chamados limites no infinito. Foi novamente empregado o software livre *Winplot* e os alunos trabalharam em duplas de forma que os alunos pudessem especular graficamente. Estimou-se, para essa sessão, um tempo de 20 minutos.

Para esta atividade, utilizaremos o *software Winplot* com o objetivo de analisar o comportamento das funções abaixo.

1. Esboce os gráficos das funções  $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = -x + 1$  e  $h(x) = x^2 - 2x + 3$ . Observe o comportamento das funções e determine
  - a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
  - b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
  - c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$
  - d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$
  - e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)}$
  - f) Utilizando o limite obtido na letra e), calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)}$ . Justifique.
2. O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$  /  $a_n b_m \in \mathbb{R}^*$  e  $b_m \in \mathbb{R}^*$  se
  - a)  $n > m$ ?
  - b)  $n = m$ ?
  - c)  $n < m$ ?
3. Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  duas funções polinomiais de variáveis e coeficientes reais. Crie funções tais que
  - a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$
  - b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -3$
  - c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$

Figura 54: Ficha da atividade 13

Fonte: Elaborado pela autora

A 1ª questão envolveu a análise dos esboços gráficos de funções polinomiais de primeiro e de segundo graus. Os alunos já haviam estudado o traçado de funções polinomiais no *Winplot* anteriormente e, por esse motivo, esperou-se que não haveria problemas para digitalização das funções. Para o traçado dos gráficos das funções das questões 1.d) e 1.e), os alunos poderiam proceder de duas formas distintas - pela digitalização explícita das funções racionais  $f/g$  e  $h/g$  ou pelo recurso do programa “combinações” que, com duas ou mais funções, esboça uma nova função decorrente da soma de outras, divisão, produto, etc. Dessa forma, considerando que os esboços gráficos das funções estivessem corretos, os erros nos valores dos limites deveriam ser relacionados à interpretação errada dos esboços ou ao não entendimento do conceito de limite com  $x$  tendendo para infinito. O exercício 1.f) solicitava aos alunos que calculassem o limite a partir de 1.e). Incentivando a escrita para aprender Matemática os alunos deveriam justificar sua resposta. Uma resposta possível para o cálculo desse limite estaria nas propriedades de limites vistas anteriormente.

A questão 2 tentou levar os alunos a uma complexificação do limite de funções racionais com  $x$  tendendo a infinito. Os alunos poderiam chegar às conclusões corretas pela observação do exercício 1, ou esboçando os gráficos de diversas funções usando o *Winplot*. Uma dificuldade nessa questão poderia ser o entendimento da linguagem matemática empregada.

O 3º exercício solicitava aos alunos que criassem funções racionais, a partir de funções polinomiais tais que o valor do limite, com  $x$  tendendo a infinito, fosse conhecido. Esse exercício corresponderia à fase de “familiarização da teoria dialética ferramenta-objeto” (DOUADY, 1986). Os estudantes deveriam ter conhecimento sobre o que é uma função polinomial e ter respondido corretamente a 2ª questão para criar as funções racionais. A utilização do quadro gráfico poderia ajudar os alunos a responderem esse exercício. Nesse caso, um ponto importante seria o jogo de quadros algébrico e gráfico.

### 6.13.2 Execução

Os alunos demoraram cerca de 15 minutos para a execução dessa atividade, tempo menor que o previsto na análise a priori. Não apresentaram dúvidas ao esboçarem os gráficos da primeira questão, entretanto muitos tiveram dificuldades em determinar os limites a partir da análise dos gráficos. O professor sugeriu, então, que os estudantes abrissem a janela “tabela”<sup>36</sup> do programa, transferindo o problema para o quadro numérico.

Muitos alunos chamaram o professor para que ele explicasse o limite do 2º exercício. O professor resolveu então ir ao quadro e utilizou o valor de  $n = 3$  e  $m = 2$  para que os alunos entendessem o primeiro problema, em que  $n > m$ . Depois disso, questionou a turma o que aconteceria para outros valores de  $n$  e  $m$ .

Após o recolhimento das folhas de resposta, o professor chamou ao quadro alguns alunos para resolverem a primeira questão. A 2ª questão, depois de respondida pelos alunos, foi enfatizada pelo professor, que apresentou vários exemplos para que os alunos determinassem o limite. A 3ª questão foi discutida pelos alunos, sendo apresentadas algumas funções que correspondiam ao limites solicitados. Muitos alunos escolheram  $g(x) = 1$ , para facilitar a resolução do exercício. O professor afirmou que esse exemplo estava correto, mas sugeriu que seria interessante indicar uma outra função  $g$  para o exercício 3.

---

<sup>36</sup> Esse comando mostra uma tabela de pontos  $(x, y)$ , para um intervalo de valores de  $x$  pré-definidos, da função esboçada.

### 6.13.3 Análise a posteriori

Apesar de 18 duplas entregarem as folhas de resposta, apenas 14 enviaram os gráficos por e-mail para a professora.

Todos alunos responderam corretamente as questões 1.a), 1.c) e 1.e), sendo que uma dupla utilizou a palavra “infinito” ao invés do símbolo  $\infty$ . Isso mostra uma maior assimilação da simbologia matemática, uma vez que na atividade anterior o termo “infinito” foi utilizado por 6 duplas.

Analisando a questão 1.b), verificamos que 11 alunos responderam corretamente que o limite tende a  $+\infty$ . A resposta  $-\infty$  apresentada por 7 duplas pode ter sido resultante de uma interpretação errada do quadro gráfico ou do quadro numérico representado na tabela. Outro erro poderia ser a digitação incorreta das funções no software.

Entretanto, através dos gráficos encaminhados pudemos identificar que os erros não foram de digitação de função (em cinza na Figura 55).

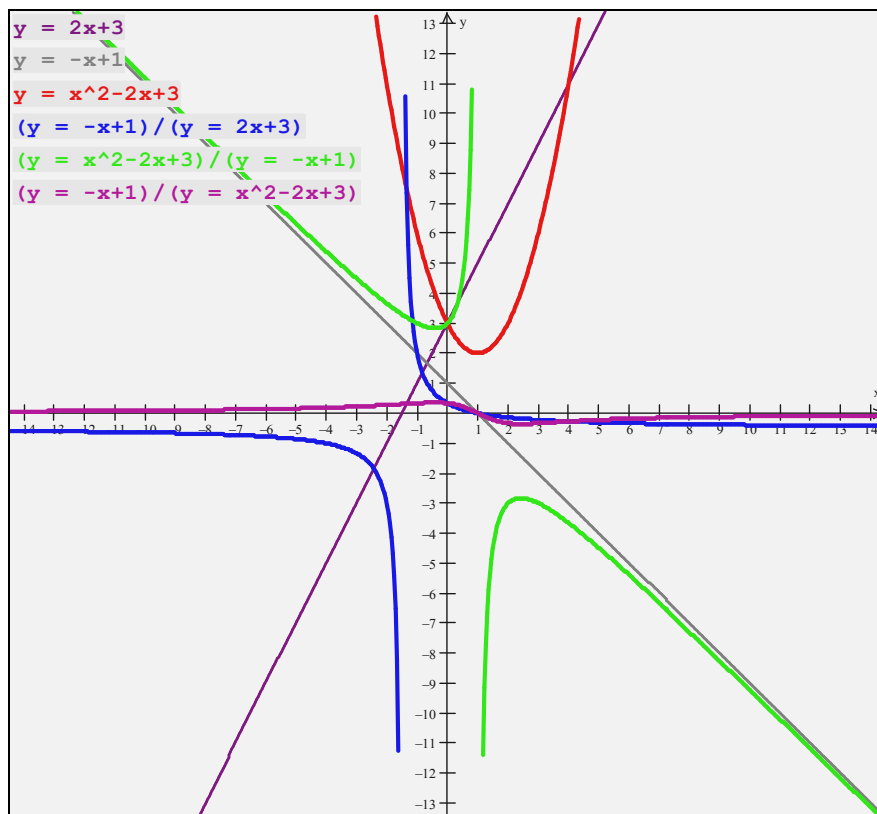


Figura 55: Gráficos enviados por Renato e Faber

Fonte: Dados da pesquisa

Um motivo provável para que os alunos tenham errado o valor do limite solicitado seja a dificuldade de visualização do esboço de várias funções em um mesmo plano.

Para o exercício 1.d), observamos que Ronaldo/Saulo e Gecy/Leandro obtiveram como resposta o valor  $-1$ ; cinco duplas responderam  $0$  e a dupla Hebert/Gustavo classificou o limite como indeterminado. O restante da turma determinou corretamente o limite como sendo igual a  $-\frac{1}{2}$ . Somente uma dupla mostrou utilizar o limite obtido na questão 1.e) para resolver o exercício.

Toda a turma respondeu corretamente que o valor do limite era zero, na questão 1.f), exceto pela dupla Hebert/Gustavo que não conseguiu determinar o limite.

f. Utilizando o limite obtido na letra e), calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)}$ . Justifique.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} \right)^{-1} = -\infty^{-1} = 0$$

Figura 56: Folha de resposta dos alunos Kelly e Vagner  
Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que os alunos Kelly e Vagner, apesar de terem determinado corretamente o valor do limite, ainda apresentavam incorreções quanto à sua notação simbólica.

Sete duplas justificaram o valor do limite como “porque a linha tende a 0”, seis como “a medida que  $x$  aumenta o valor de  $y$  aproxima-se de 0” e 5 justificaram através da análise do gráfico, afirmando que “a linha se aproxima do eixo  $x$ ”.

Dez duplas acertaram os limites propostos no exercício 2. Três duplas afirmaram que o limite, se  $n = m$ , será 1. Isso pode ser devido a uma interpretação da expressão, no caso específico quando  $a_n = b_m$ . Os alunos Hebert e Gustavo concluíram que os limites do exercício 2 são indeterminados, sendo um caso de “infinito sobre infinito”. Uma dupla escreveu que todos os limites tendem ao infinito e duas duplas evidenciaram ter usado um valor específico para  $m$  e  $n$ , para então concluir sobre o valor dos limites:



2. O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$  se  $\left. \begin{array}{l} \text{polinômios} \end{array} \right\}$

a.  $n > m$ ?  $\frac{a_n x^n}{b_1 x^1} = \frac{a_n x}{b_1} \xrightarrow{b_1 \neq 0} \infty$

b.  $n = m$ ?  $\frac{a_n x^n}{b_1 x^1} = \frac{a_n}{b_1}$

c.  $n < m$ ?  $\frac{a_1 x^1}{b_2 x^2} = \frac{a_1}{b_2 x} \xrightarrow{b_2 \neq 0} 0$

Figura 57: Folha de resposta dos alunos Gecy e Leandro

Fonte: Dados da pesquisa

Seis duplas preferiram trabalhar com funções conhecidas, como função constante e a função identidade ou a função quadrática, para o exercício 3.a) e 3.c), sendo que nesses dois limites, esses alunos limitaram-se a inverter o limite de 3.a) para calcular o de 3.c). Os alunos Hebert e Gustavo forneceram para a letra c) desse exercício as funções  $f(x) = 0$  e  $g(x) = 1$ , mostrando uma dificuldade em relação ao conceito de funções polinomiais. Onze duplas demonstraram identificar outras funções polinomiais, como podemos ver nas respostas abaixo:

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$   $\left( \begin{array}{l} g(x) = 1 \\ f(x) = x \end{array} \right)$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -3$   $\left( \begin{array}{l} g(x) = -3x^3 + x \\ f(x) = x^3 + 1 \end{array} \right)$

c.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$   $\left( \begin{array}{l} g(x) = 2x^4 - 4 \\ f(x) = x^2 + x \end{array} \right)$

*polinômio de grau par*

Figura 58: Folha de resposta dos alunos Marcela e Leonardo

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar da simplificação incorreta da função racional do exercício 3.b., os alunos Marcela e Leonardo forneceram funções polinomiais de maior grau. Podemos observar que essa dupla identificou um caso específico para o exercício 3.c, em que a função polinomial deveria ser de grau par. Apesar de não explicitar essa observação, a dupla Clóvis e Laura também utilizou funções polinomiais de grau par.

Os estudantes conseguiram, com essa atividade, resolver exercícios envolvendo os limites no infinito. Observamos que os alunos utilizam por vezes o quadro gráfico para resolver um problema, mas quando já conhecem os procedimentos para a sua resolução, a ferramenta gráfica é colocada de lado e trabalham no quadro algébrico.

## **6.14 Atividade 14**

### *6.14.1 Análise a priori*

A 14ª atividade foi realizada no laboratório de informática, com duração de 20 minutos, sendo que os alunos trabalharam em duplas. A atividade teve como objetivo o estudo do limite trigonométrico fundamental e os alunos puderam utilizar o software *Winplot*.

Para esta atividade, utilizaremos o *software Winplot* com o objetivo de analisar o comportamento das funções abaixo.

1. Recordaremos, agora, a função trigonométrica  $f(x) = \text{sen}(x)$ .
  - a) Qual o período da função  $f(x) = \text{sen}(x)$ ? E qual o período da função  $f(x) = \text{sen}(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ?
  - b) Qual a imagem da função  $f(x) = b \text{sen}(x)$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ?
2. Para que valores de  $x$  tem sentido definir a função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ ? Esboce o gráfico da função.  
  
Observando o gráfico de  $f(x)$ , o que podemos afirmar sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ ?
3. A partir de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$ .
4. Através da observação do esboço da família de funções  $f(x) = \frac{\text{sen}(ax)}{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ , o que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{x}$ ?
5. Analise, agora, a família  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{ax}$ ? E sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{bx}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b \in \mathbb{R}^*$ ?

Figura 59: Ficha da atividade 14

Fonte: Elaborado pela autora

A 1ª questão lembrou aos estudantes o período e a imagem da função senóide. Como antigo os alunos já haviam trabalhado com as funções trigonométricas, conhecendo seus domínios e conjuntos-imagem. Os alunos poderiam empregar o programa para traçar o esboço do gráfico da função, fazendo um jogo dos quadros algébrico e gráfico. Respostas diferentes de  $\frac{2\pi}{a}$ , para o período da função  $f(x) = \text{sen}(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ , e  $[-b, b]$  para a imagem da função  $f(x) = b \text{sen}(x)$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$  podem decorrer da digitação incorreta da função, ou de dificuldades

em identificar o período da função ou, ainda, de visualização do conjunto imagem.

A pergunta introdutória da questão 2 referia-se ao domínio da função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ .

Entendia-se que os alunos indicassem respostas semelhantes à  $x \in \mathbb{R}^*$ . Através da representação da função  $f$  no quadro gráfico, esperava-se que os alunos conseguissem determinar o valor  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ .

Apesar de solicitar aos alunos que utilizassem a resposta da questão 2 para calcular o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$ , na 3ª questão, entendemos que os alunos poderiam utilizar o programa

*Winplot* para traçar o gráfico da função  $g(x) = \frac{\tan(x)}{x}$  para, então, analisarem o limite pedido, procedendo da mesma maneira empregada na resolução do exercício 2. Essa questão poderia ser vista como uma complexificação (DOUADY, 1986) do limite calculado na questão 2.

No exercício 4 os alunos se depararam com uma família de funções, sendo convidados a conjecturar acerca da generalização do valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{x}$ . A digitalização incorreta da função, tal como  $y = \sin ax/x$  no lugar de  $y = \sin(ax)/x$ , levaria a um resultado incorreto do limite. As perguntas “o que podemos dizer sobre...” nos exercícios foram colocadas para incentivar a escrita matemática, embora muitos alunos pudessem apenas informar os valores dos limites, ao invés de justificar o cálculo.

O 5º exercício, também envolvendo o conceito de família de funções, pediu aos estudantes duas generalizações – os valores de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{ax}$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{bx}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b \in \mathbb{R}^*$ , através da observação dos esboços das famílias das funções. Outra vez, problemas na digitalização das funções poderiam acarretar erros nas observações das funções e, por conseguinte, trariam valores incorretos para os limites solicitados.

#### 6.14.2 Execução

Os alunos não demonstraram dúvidas na digitação das funções e a atividade durou o tempo inicialmente previsto. Após o recolhimento das folhas de resposta, o professor iniciou a

institucionalização, conduzindo uma discussão sobre os exercícios. Ao final da resolução algébrica de cada exercício, o esboço gráfico da função era projetado, usando-se o data-show.

O professor enfatizou o limite trigonométrico fundamental e mostrou que, no ponto  $x = 0$ , a função não era definida. Explorou os quadros gráfico e numérico, através da função “tabela” do programa *Winplot*. Demonstrou, ainda, o valor do limite através do Teorema de Confronto, conferindo o status de objeto ao limite trigonométrico fundamental.

Após um aluno, a partir da relação trigonométrica  $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ , ter desenvolvido algebricamente o limite da  $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$  no quadro, o professor situou o problema nos quadros algébrico e numérico. Os alunos declararam que preferiram a análise do gráfico para a determinação do valor do limite dessa função.

Depois que o esboço das famílias das funções do 4º e do 5º exercícios foram projetados, alguns alunos disseram que preferiam utilizar o recurso de animação do programa do que esboçar a família da função. De qualquer forma, eles afirmaram que conseguiram determinar os limites solicitados através da visualização dos gráficos das funções.

#### 6.14.3 *Análise a posteriori*

Foram recebidas 17 folhas de resposta, mas somente 14 gráficos foram enviados. Como os alunos estavam em número ímpar, foi formado um trio composto pelos alunos Mauro, Adriano e Josué. Treze grupos apresentaram a resposta correta para o período das funções da questão 1.a); três indicaram não haver período para a função  $f(x) = \sin(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . A dupla Cecília e Ronaldo apontou o período de  $f(x) = \sin(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  como  $a.2\pi$ . Os alunos sentiram maior dificuldade para expressar o conjunto imagem; somente sete duplas escreveram corretamente a resposta de  $-b$  a  $b$ , nenhuma destas fornecendo a resposta na forma de intervalo; cinco duplas escreveram o conjunto como  $[-b \sin x, b \sin x]$ ; três duplas responderam que a imagem era o conjunto real; duas duplas não responderam. Essa dificuldade em reconhecer o período, o domínio e o conjunto imagem pode evidenciar que as funções trigonométricas ainda não são, para o aluno, um objeto estável (ARTIGUE, 1998).

A pergunta do exercício 2, “para que valores de  $x$  tem sentido definir a função...”, não foi compreendida por muitos alunos como solicitando a explicitação do domínio da função. Assim, oito grupos responderam  $x \neq 0$ , quatro duplas responderam  $x \neq 0 + k\pi$ , em referência a algum período, talvez. Observa-se, nessa última resposta, que esses alunos não efetuaram a soma  $0 + k\pi$ , apresentando, talvez, uma dificuldade no entendimento dos símbolos, não reconhecendo  $k\pi$  como um número. O restante respondeu que a função deveria ser definida para valores diferentes de 0 e entre  $-1$  e  $1$  (imagem da função). Os alunos Cecília e Ronaldo responderam que  $x$  deveria ser maior que 0.

Dezesseis duplas conseguiram observar que o limite trigonométrico fundamental vale 1, sendo que os alunos Hebert e Gustavo afirmaram que o limite tendia ao infinito. Embora tenham esboçado a função corretamente, eles não conseguiram interpretar o quadro gráfico, visualizando o comportamento da função, próximo a zero.

A resposta encontrada na questão 2, por Hebert e Gustavo, acarretou uma série de respostas erradas, nos exercícios 4 e 5. Essa dupla também afirmou que  $\tan(0) = \infty$  e, por isso, apresentou resultados incorretos na 3ª questão do limite.

Observando o gráfico de  $f(x)$ , o que podemos afirmar sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ ?  
 é igual a infinito

---

3. A partir de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(0)}{0} = \frac{\infty}{0} = \infty$

4. Através da observação do esboço da família de funções  $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ , o que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$ ?  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \infty$

5. Analise, agora, a família  $f(x) = \frac{\sin(x)}{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{ax}$ ? E sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b \in \mathbb{R}^*$ ?  
 que todos os dois tendem ao infinito

Figura 60: Folha de resposta dos alunos Gustavo e Hebert  
 Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos Gustavo e Hebert enviaram alguns gráficos de funções  $f(x) = b \operatorname{sen}(ax)$ , estabelecendo certos valores para os parâmetros  $a$  e  $b$ . Pelo fato de não terem enviado outros gráficos e terem respondido incorretamente os exercícios 4 e 5, entendemos que os alunos não utilizaram o quadro gráfico.

Exceto a dupla de Gustavo e Hebert, todos os alunos conseguiram determinar corretamente o valor do limite no 4º exercício. Dos gráficos enviados, oito haviam esboçado a família de funções para análise do limite, e seis preferiram observar a animação da função. Entendemos que, por envolver uma movimentação do esboço do gráfico da função, o recurso de animação desperta um maior interesse do que a representação da família de funções. Essas duas ferramentas do software *Winplot* ajudaram a visualização dos limites dos exercícios 4 e 5.

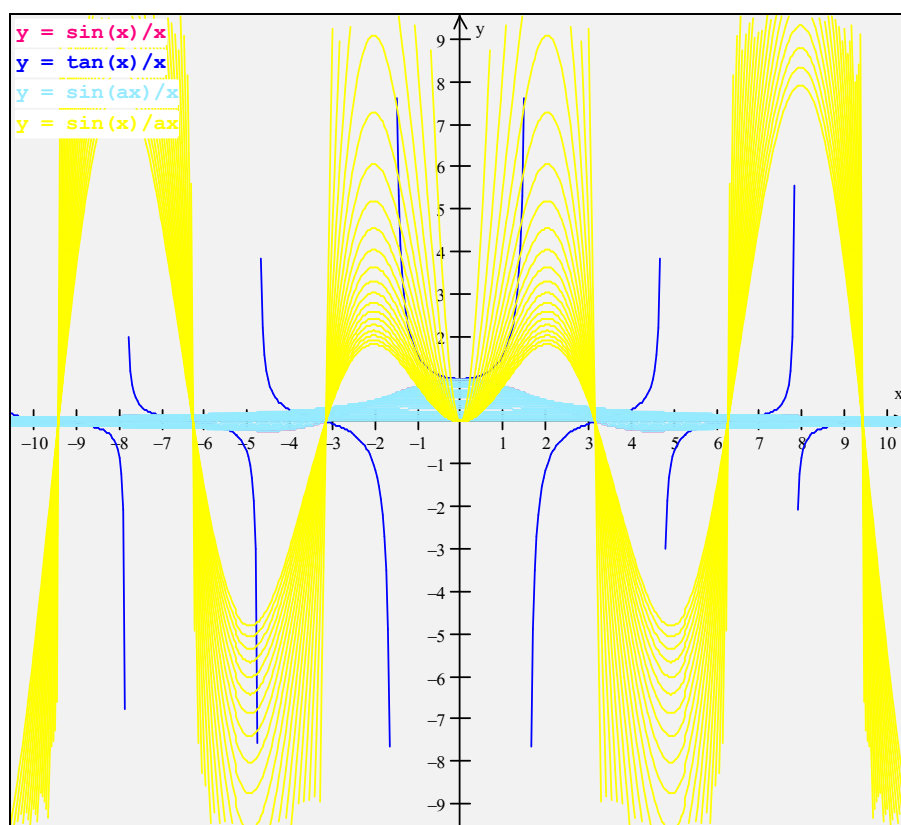


Figura 61: Funções enviadas por Cecília e Ronaldo, com  $0 < a \leq 1$   
Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos Cecília e Ronaldo preferiram utilizar o quadro gráfico para analisar e responder as questões 3, 4 e 5, esboçando os gráficos das funções em um mesmo sistema de

coordenadas. Embora seja difícil a análise devido a sobreposição dos esboços gráficos, essa dupla apresentou respostas corretas para essas questões.

Quatorze duplas calcularam corretamente os limites da 5ª questão e quatro não apresentaram uma resposta lógica para o valor encontrado. Os dados evidenciam que o conceito do limite trigonométrico fundamental foi assimilado pela maioria dos estudantes, tratando-o como uma ferramenta implícita para a determinação dos limites das questões 3, 4 e 5.

## **6.15 Atividade 15**

### *6.15.1 Análise a priori*

O objetivo da 15ª atividade foi estudar o limite exponencial fundamental. Para isso, foi utilizado o software *Winplot*, sendo que os alunos trabalharam em duplas. Para essa seção, foi estipulado um tempo de 20 minutos.



Para esta atividade, utilizaremos o *software Winplot* com o objetivo de analisar o comportamento das funções exponenciais.

1. Qual o valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ? Qual o valor que você espera encontrar para  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ?

Esboce o gráfico de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  e verifique o valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

2. A partir do limite observado na questão anterior, como calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ?

3. Utilize as propriedades estudadas sobre limites para calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$ , sabendo que

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2$ . Você consegue calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{a \cdot x}$ , onde  $a$  é um número real não nulo?

4. Escolha alguns valores para  $b$  (diferente de zero) para esboçar a função  $f(x) = \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x$ .

Você consegue identificar algum padrão para  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x$ ? Justifique.

Figura 62: Ficha da atividade 15

Fonte: Elaborado pela autora

A questão 1 considerou o “conhecimento antigo” (DOUADY, 1986) dos estudantes, ao perguntar o valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$  e qual o valor que eles esperariam encontrar para o

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . O primeiro limite poderia ser facilmente determinado pelas propriedades já

estudadas e o limite trabalhado na atividade 13. Já para o cálculo do  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  deveriam

procurar pelo novo implícito. Não caberia uma análise do que é certo ou errado ao perguntar “o que você espera encontrar...”. O antigo não é suficiente para resolver esse problema e será necessária uma transferência do quadro algébrico para o quadro gráfico ou numérico para determinar o limite. O uso incorreto de parênteses para digitalizar a função no software poderia levar a um traçado incorreto do gráfico da função analisada e, portanto, a respostas

diferentes para o valor do limite em questão. Uma dificuldade na determinação desse limite poderia decorrer do desconhecimento ou esquecimento do número  $e$ . Os alunos já haviam trabalhado com esse número quando estudaram logaritmos, mas talvez não se lembrassem do seu valor.

A questão 2 pedia o cálculo de  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  sendo conhecido o  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , determinado na questão 1. Esperava-se que os alunos conseguissem observar que uma mudança simples de variável ( $y = 1/x$ ) poderia levar ao resultado desejado. Entretanto, apesar de não ter sido solicitado, os alunos poderiam traçar o esboço do gráfico da função utilizando o software. Uma digitalização errada da função como, por exemplo,  $y = (1+x)^{1/x}$  ou  $y = 1 + x^{1/x}$  ao invés de  $y = (1 + x)^{(1/x)}$ , levaria a um esboço incorreto e, portanto, a um valor do limite diferente do esperado.

A 3ª questão procurou relembrar, mais uma vez, as propriedades sobre limites para justificar o valor do limite solicitado. Um outro objetivo dessa questão era levar os alunos a generalizarem o valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{a \cdot x}$ . Esperávamos que se os alunos compreendessem o limite do 1º exercício, não encontrariam problemas para resolver a tarefa proposta.

O 4º exercício pediu aos estudantes o esboço do gráfico da função  $f(x) = \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x$ . A análise do comportamento dessa função poderia ser feita tanto utilizando o recurso “família”, que traça a família das funções a partir de um parâmetro, ou através do recurso “animação”, que gera uma animação do gráfico da função estudada. Esperava-se que observando os gráficos os alunos conseguissem levantar uma conjectura e generalizar, obtendo o valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x$ . Novamente, pretendia-se enfatizar a escrita matemática, solicitando a justificativa dos resultados obtidos.

### 6.15.2 Execução

A atividade demorou cerca de 15 minutos para ser concluída pelos alunos. Alguns

alunos chamaram o professor à mesa, pois conseguiram identificar o limite, mas tiveram dificuldades em reconhecer a constante  $e$ . Também apresentaram problemas para resolver algebricamente a 2ª questão e preferiram empregar os quadro gráfico e numérico. Depois que as folhas de respostas foram recolhidas, o professor prosseguiu com a institucionalização, projetando os gráficos das funções para que os alunos pudessem discuti-los, expressando suas opiniões. Com o professor utilizando o quadro gráfico e numérico os alunos concluíram que o limite se aproximava do número  $e$ .

O professor lembrou o número irracional  $e$  e citou várias aplicações dessa constante, principalmente na estatística e na engenharia. Depois, passou a apresentar alguns outros exemplos de limites que envolviam o limite exponencial fundamental.

### 6.15.3 *Análise a posteriori*

Doze gráficos foram enviados à professora e 17 folhas de resposta foram entregues. Uma análise das folhas de resposta permitiu verificar que:

- a. Duas duplas afirmaram que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$ , resultado talvez de uma incorreta interpretação do quadro gráfico.
- b. Outra dupla afirmou que todos os limites da primeira questão eram iguais a zero.
- c. Três duplas afirmaram que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ .
- d. Duas duplas afirmaram que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1,2$  e esperavam que

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \infty$ . Esses alunos encontraram  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,5$ . Apesar

de incorreta, essa resposta está de acordo com o valor encontrado pelos alunos na tabela gerada pelo programa, indicando que os alunos utilizaram o quadro numérico para resolver a questão. Essa tabela é gerada a partir de um determinado valor de  $x$ , padrão do programa ou definida pelo aluno. No caso em questão, o maior valor apresentado na tabela para o valor de  $x = 5$ ,

resultando  $y = 2,5$ , aproximadamente. Esse problema pode ter gerado um obstáculo epistemológico, fazendo com que os alunos não enxergassem o valor correto desse limite.

Três duplas obtiveram  $\infty$  como resposta do 2º exercício, quatro não responderam, nove responderam “ $e$ ” mas não apresentaram um desenvolvimento satisfatório do limite. Os alunos Fábio e Davi escreveram que, em relação ao limite do primeiro exercício, o limite deve ser “calculado da mesma forma, pois tem um número tendendo a zero somado com 1, elevado a um número tendendo a infinito” e concluíram que o valor do limite é  $e$ . Alguns alunos utilizaram o quadro gráfico para a determinação do limite, conforme ilustrado na Figura 67.



Figura 63: Gráfico enviado por Nádia e Leandro  
Fonte: Dados da pesquisa

Cinco duplas não responderam a questão 3, uma respondeu que o limite era indefinido, outra que o limite valia 1. Uma dupla alegou que era o número  $e$ , 2 duplas afirmaram que o limite tendia ao infinito. O restante conseguiu identificar o limite, mas somente 3 duplas justificaram a resposta.

Ao resolverem a última questão, 3 duplas responderam que o limite tende para infinito, indicando uma interpretação incorreta do quadro gráfico; quatro obtiveram 1 como

resposta e o restante respondeu corretamente, sendo que somente 3 justificaram o resultado através da análise do gráfico. Entretanto, somente uma dupla apresentou o gráfico para essa questão.

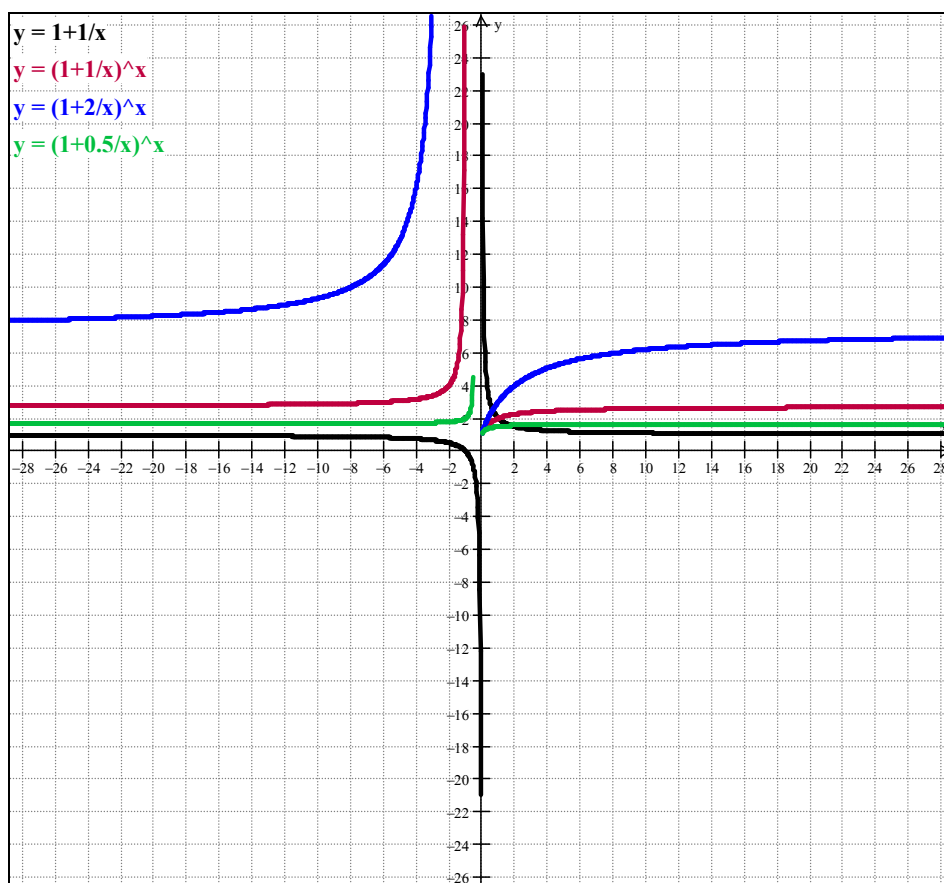


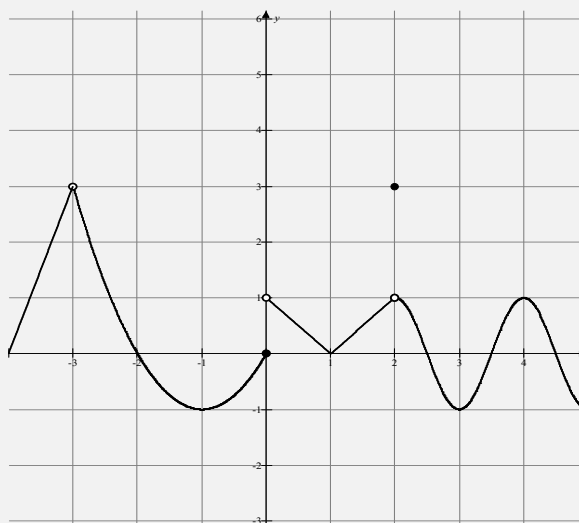
Figura 64: Gráficos enviados pelos alunos Gustavo e Hebert  
Fonte: Dados da pesquisa

Pela análise dessa atividade, verificamos que a observação do limite pelo gráfico da função  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  pode apresentar dificuldades para os alunos, uma vez que oito das dezessete duplas não conseguiram identificar o número  $e$  como valor do limite. Talvez o gráfico da função  $g(x) = (1+x)^{1/x}$  possa oferecer uma visualização melhor para o entendimento desse limite, pois para essa função os alunos calcularão o limite de  $g$  quando  $x$  tende a zero. Nesse caso, não trabalharíamos com o infinito, um conceito complexo para a grande parte dos estudantes.

#### *6.15.4 Segunda Avaliação*

Os exercícios aqui descritos foram aplicados em sala de aula e fizeram parte do sistema de avaliação do 3º bimestre. Os conteúdos avaliados foram aqueles trabalhados nas atividades anteriores. Os alunos dividiram-se em duplas e tiveram um horário de 50 minutos para realização da avaliação.

1. Para a função  $f$  aqui representada, encontre os seguintes limites ou explique por que eles não existem.



- a)  $\lim_{x \rightarrow -3} f$       b)  $\lim_{x \rightarrow -2} f$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f$       d)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
2. Para a função  $f$  do exercício anterior, indique, se houver, os pontos onde a função é descontínua, justificando sua resposta.
3. Explique por que não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$ .
4. Se  $f(1) = 5$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  deve existir? Em caso positivo,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  deve ser igual a 5? Podemos concluir alguma coisa sobre  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? Explique.
5. Usando fatoração, calcule os limites abaixo:
- a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$
6. Para a função racional  $f(x) = \frac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$ , calcule
- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
7. Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828\dots$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ , justificando o limite.
8. A partir de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

9. Figura 65: Folha de avaliação sobre o conteúdo limites

Fonte: Dados da pesquisa

A Tabela 2 apresenta a análise das questões, que foram classificadas como: corretas; insatisfatórias, quando apresentavam justificativas incompletas e/ou erros no desenvolvimento do limite; ou incorretas, quando não eram respondidas ou traziam a resposta errada sem justificativa ou desenvolvimento da questão.

TABELA 2  
Resultados da Avaliação sobre limite

| Questão | Incorreta | Insatisfatória | Correta |
|---------|-----------|----------------|---------|
| 1.a)    | 2         | 0              | 16      |
| 1.b)    | 0         | 0              | 18      |
| 1.c)    | 3         | 0              | 15      |
| 1.d)    | 4         | 0              | 14      |
| 2       | 0         | 8              | 10      |
| 3       | 0         | 13             | 5       |
| 4       | 0         | 10             | 8       |
| 5.a)    | 0         | 4              | 14      |
| 5.b)    | 0         | 5              | 13      |
| 6.a)    | 4         | 1              | 13      |
| 6.b)    | 0         | 2              | 16      |
| 6.c)    | 4         | 1              | 10      |
| 7       | 0         | 2              | 16      |
| 8       | 0         | 14             | 4       |

Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 1.b) o número total de acertos foi total. Isso pode ser devido ao fato de que a função era contínua e definida no ponto  $x = -2$ . Por outro lado, nas questões 1.c) e 1.d), alguns alunos confundiram o **valor do limite** com o **valor da função** no ponto solicitado.

A segunda questão apresentou dois tipos de erros: um, em que a função foi considerada descontínua para  $x = -3$  e outro, em que as justificativas eram incorretas ou insuficientes para explicar as discontinuidades.

*A função é descontínua em  $x=0$ , pois os valores seguintes, pela direita, não dão continuidade no gráfico, em outras palavras, há 2 limites diferentes para o ponto.*

Figura 66: Folha de resposta dos alunos Hebert e Kátia, 2ª questão

Fonte: Dados da pesquisa



Os alunos que erraram a 3ª questão afirmaram que o limite não existia porque a função não era definida no ponto. Somente 5 alunos justificaram corretamente a não existência do limite, sendo que a dupla Davi e Fábio esboçou uma representação gráfica da situação, ainda que sem indicar os eixos e os pontos da função:

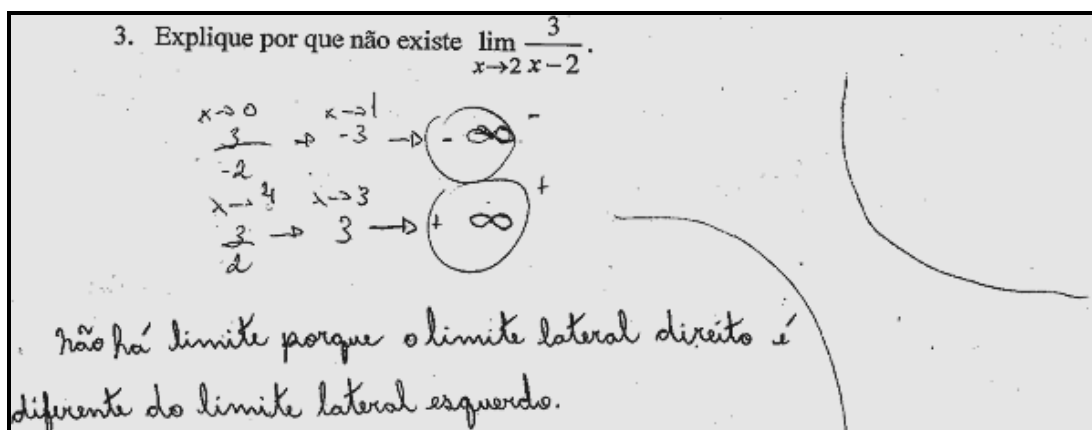


Figura 67: Folha de resposta dos alunos Davi e Fábio

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que os alunos não ainda não utilizam corretamente os símbolos matemáticos, evidências, talvez, um obstáculo do tipo simbólico (SIERPINSKA, 1987)

A 4ª questão apresentou um grau maior de dificuldade, sendo que os alunos deveriam imaginar as situações possíveis de existência ou não do limite. A resposta dos alunos Ronaldo e Valter mostra que os mesmos utilizaram os quadro gráfico (DOUADY, 1986) e da linguagem natural para resolver o problema:

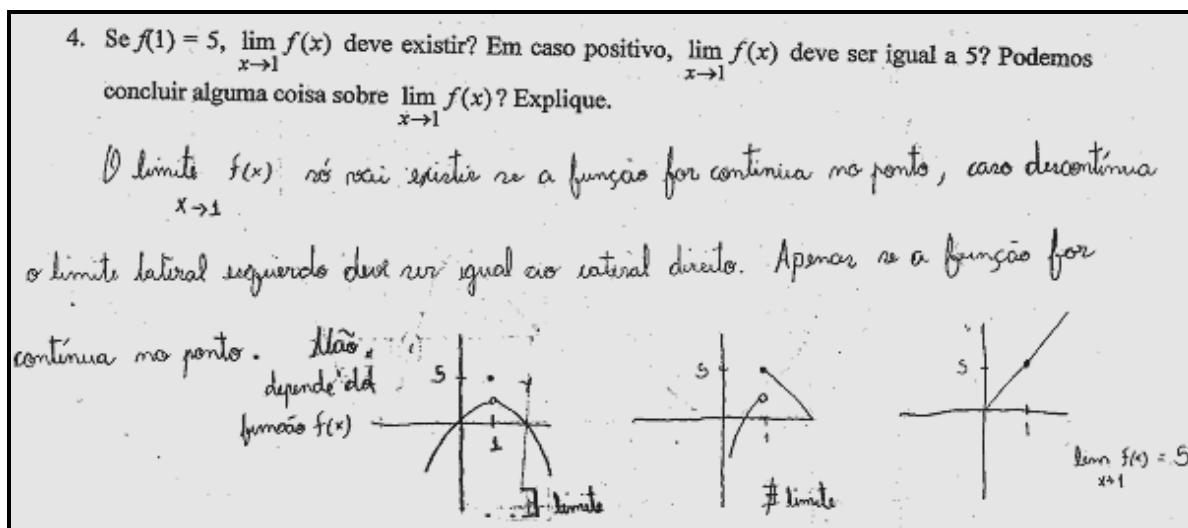


Figura 68: Folha de resposta dos alunos Ronaldo/Valter  
Fonte: Dados da pesquisa

A 5ª questão foi a que exigiu maior algebrismo por parte dos alunos, já que envolvia a fatoração das funções para o cálculo do limite. Dessa forma, erros em 5.a) e 5.b) foram devidos à fatoração errada das funções e pouco domínio em trabalhar no quadro algébrico.

As questões 6.a) e 6.c) tratavam de limites de uma função com  $x$  tendendo para infinito e a maior parte dos alunos acertou a resposta. A questão 6.b) era semelhante à do exercício anterior, não apresentando grandes dúvidas. Erros apontados nessa questão e na 5ª indicavam que os alunos haviam respondido que o limite era indeterminado.

A 7ª questão foi calculada com êxito por quase todos alunos, embora tenham mostrado uma maior dificuldade no entendimento do limite exponencial fundamental, ao resolverem a atividade 15. Os alunos Ângelo e Saulo, embora não tivessem identificado que o valor calculado era  $e^3$ , utilizaram o quadro numérico para resolver o problema. A resolução desses estudantes é mostrada na Figura 69, sendo que o quadro numérico foi colocado em evidência no retângulo pela professora:

7. Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828\dots$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ , justificando o limite.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = 20,1$

Vê-se na conta  $\rightarrow$

$1 + \frac{1}{2} = 1,5$   $1,5^2 = 2,25$   $1,5^3 = 3,375$   $1,5^4 = 5,0625$   $1,5^5 = 7,59375$

$1,5^6 = 11,390625$   $1,5^7 = 17,0859375$   $1,5^8 = 25,62890625$   $1,5^9 = 38,443359375$   $1,5^{10} = 57,6650390625$

$1,5^{11} = 86,49755859375$   $1,5^{12} = 129,746337890625$   $1,5^{13} = 194,6195068359375$   $1,5^{14} = 291,92926025390625$   $1,5^{15} = 437,893890380859375$

$1,5^{16} = 656,8408355712890625$   $1,5^{17} = 985,26125335693359375$   $1,5^{18} = 1477,891880035400390625$   $1,5^{19} = 2216,8378200531005859375$   $1,5^{20} = 3325,25673007965087890625$

$1,5^{21} = 5000,885095119476318359375$   $1,5^{22} = 7501,3276426792144775390625$   $1,5^{23} = 11251,99146401882171630859375$   $1,5^{24} = 16877,9871960282325744630859375$   $1,5^{25} = 25316,980794042348861794630859375$

$1,5^{26} = 37975,47119106352329269194630859375$   $1,5^{27} = 56963,2067865952849389379194630859375$   $1,5^{28} = 85444,810179892927408406879194630859375$   $1,5^{29} = 128167,21526983939111261031879194630859375$   $1,5^{30} = 192250,8229047590866689154781879194630859375$

$1,5^{31} = 288376,234357138629453373217281879194630859375$   $1,5^{32} = 432564,35153570794418005982592281879194630859375$   $1,5^{33} = 648846,5273035619162700897388842281879194630859375$   $1,5^{34} = 973269,790955342874405134608326342281879194630859375$   $1,5^{35} = 1459904,68643301431160770191248951342281879194630859375$

$1,5^{36} = 2189857,0296495214674115528687342701342281879194630859375$   $1,5^{37} = 3284785,544474282191117279298101405201342281879194630859375$   $1,5^{38} = 4927178,31671142328667591894715210780201342281879194630859375$   $1,5^{39} = 7390767,4750671349295138784207281617030201342281879194630859375$   $1,5^{40} = 11086151,212601002394270817631092242554530201342281879194630859375$

$1,5^{41} = 16629226,81890150359140622644663836383179530201342281879194630859375$   $1,5^{42} = 24943840,2283522553871093396699575457476929530201342281879194630859375$   $1,5^{43} = 37415760,342528383080664009504936318621539429530201342281879194630859375$   $1,5^{44} = 56123640,51379257462099601425740447793230914429530201342281879194630859375$   $1,5^{45} = 84185460,7706888619314940213861067168984637164429530201342281879194630859375$

$1,5^{46} = 126278191,156033292897241032079155075347695574664429530201342281879194630859375$   $1,5^{47} = 189417286,73404993934586154811873261302154336199664429530201342281879194630859375$   $1,5^{48} = 284125929,1010749090187923221781089195323150429949664429530201342281879194630859375$   $1,5^{49} = 426188893,651612363528188483267163379303472564492449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{50} = 639283340,47741854529228272490074506895520884673867449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{51} = 958925010,7161278179384240873511176034328132696075117449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{52} = 1438387516,074191726907636131026676405149219904411267617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{53} = 2157581274,11128759036145419654001460772382985661685142617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{54} = 3236371911,1669313855421812948100219115857447849252771392617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{55} = 4854557866,750397078313271942215032867378617177387915708892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{56} = 7281836799,12559561746990741332254930106792576608187356334892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{57} = 10922755198,6883937262048611098882239516018886491228103450233892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{58} = 16384132798,032590589307291664832335927402832973684215517535083892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{59} = 24576199197,04888588396093749724850389110424946052632327630262583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{60} = 36864298795,5733288259414062458727558366563741907894849144539387583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{61} = 55296448193,360043238912109368809133754984561286184227371680908137583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{62} = 82944672290,04006485836816405321370063247784192927634105752136220637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{63} = 124416908435,0600972875522460798200509487167628939145115862820433095637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{64} = 186625362652,590145931328369119730076423075144340871767379423064964345637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{65} = 279938043978,88521889699255367939511463461271651130765106913459744651845637583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{66} = 419907065968,3278283454888305190926719519190747669614766037018961697776845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{67} = 629860598952,491742518233245778639007927878612150442214905552844254666526845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{68} = 944790898428,73761377735086866795851189181791822566332235832926638199979026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{69} = 1417186347643,1064206660262529013628678677268773384949835374938990729996854026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{70} = 2125779521464,659630999039384355250121791590316007742475306240848609499528104026845637583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{71} = 3188669282196,98944649855907653287518268738547401161371295936127291424929215604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{72} = 4782903923294,4841697478886148090127740310782110174205694390419093713739382340604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{73} = 7174355884941,726254621833221701358611046617316526130854158562864057060907351090604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{74} = 10761533827412,58938188299988275526516656992597478919628123784429608559136102663590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{75} = 16142300741118,8840728244998241338977493548889621837944218567664441283870415409538590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{76} = 24213451111678,326109236749736200846624032333443275691632785149666192580562311430788590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{77} = 36320176667517,48916385512460430126993694850016491353744917772449928887084346714618288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{78} = 54480265001276,2337457826869064519049054227502473703061737665867489333062651907192743288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{79} = 81720397501914,350618674030359677857358134125371055459260649879122900009397785578911493288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{80} = 122580596252871,52592791104553951678603670118805658318889097481868435001409667836836723993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{81} = 183870894379306,7888918665683092751790550517820848747833364622280265250211450175525508598993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{82} = 275806341568960,183337799852463912768582577673127312175004693342039787531717526328826289848993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{83} = 413709512353440,27500669977869586915287386650969096826250704001305968129757628949323943477348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{84} = 620564268530160,4125099496680437937293107997645364523937605600195895219463594342398591521602348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{85} = 930846402795240,618764924512065690593966199646804678590640840029384282919539151359788728240352348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{86} = 1396269604192860,92814738676809853589094929946920701788596126004407642437930872703968309236052852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{87} = 2094404406289290,392221079152147803836423949203810526828941890066114636568963090559524638540792852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{88} = 3141606609433935,5883316187282217057546359238057157902434128350991719548534446358392869578111892852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{89} = 4712409914150903,38249742804233255863195388570857368536511925264875793228016695375892943671678392852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{90} = 7068614871226355,073746142063493387497930828562860528047678878973136898420250430638394155075175892852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{91} = 10602922306839532,5606192130952400812468962428442907920715183184597053476303756459575912326127638392852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{92} = 15904383460259300,84092881964286012367034436426643618810727747768955802144556346893638684891914575892852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{93} = 23856575190388951,281393229464290185505516546399654282160916216534337032168345193404580273378718638392852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{94} = 35784862785583426,9219903441964352782582748195994814232413743248015055482525177901068704100680779575892852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{95} = 53677294178375140,38298551629465291738741222939922213486206148720225832237877668516030561510206693638392852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{96} = 80515941267562710,574478274441979376081118344098833202293092230803387483568165027740458422653050404575892852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{97} = 120773911901344065,8617174116629690641216775161482498034396383462050812253522475416106876339795756068592852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{98} = 181160867852016098,792576117494453596182516274222374705159457519307621838028371312416031450969363410288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{99} = 271741291778024148,18886417624168039427377441133356205773918627896143275704255696862404717645404511543288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{100} = 407611937667036222,2832962643625205914106616170003430866087794184421491355638354529360707646810676731493288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{101} = 611417906500554333,4249443965437808871159924255005146299131691276632237033457531794041061470216015097239288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{102} = 917126859750831500,13741659481567133067398863825077194486975369149483555501862976910615922053240226458590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{103} = 1375690289626247250,2061248922235069955109829573761579172946305372422533325279446536592388307986033968788590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{104} = 2063535434439370875,309187338335260493266474436064236875941945805863380008791916980488858246197905095318392852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{105} = 3095303151659056312,9637810775289007398997116540963553139129187087950700131878754707332873692968576429775892852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$

$1,5^{106} = 4642954727488584469,44567161629335110984956748114453297086937806319260501978181320609993105394528646446638392852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{107} = 6964432091232876704,168507424439026666424351221716804456294067094788907529672719809149896580917929696699575892852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{108} = 10446648136849815056,252761136658539999436526832575206684441050642183361294509079713724844871376904545049375892852348993288590604026845637583892617449664429530201342281879194630859375$   $1,5^{109} = 15669972205274722584,379141704987749999104789248862809026661575963275041941763619570587267307065356817574063839285234899328$

minutos. O primeiro objetivo dessa atividade era fazer um levantamento do que os alunos se lembravam dos conceitos e noções sobre o tema limite de uma função real, abordados em sala de aula. Essa atividade foi aplicada após o encerramento da unidade de “Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral” e, assim, os alunos já haviam estudado as aplicações de limite para calcular as derivadas e integração definida de uma função real de uma variável.

|                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. Nesse ano, nós estudamos o tópico limite. Enumere a(s) coisa(s) que você recorda sobre esse assunto:</p> <hr/> <hr/> |
| <p>2. Explique, com suas palavras, o que você entende por <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L</math>:</p> <hr/> <hr/>    |
| <p>3. O que você achou sobre a forma que a matéria de limites foi abordada em sala de aula?</p> <hr/> <hr/>                |
| <p>4. Espaço livre para comentários e sugestões:</p> <hr/> <hr/>                                                           |

Figura 71: Ficha da atividade 16

Fonte: Dados da pesquisa

Não existiam respostas certas ou erradas para a primeira questão, mas esperava-se que os alunos conseguissem enumerar alguns tópicos sobre o assunto de limites.

A segunda questão incentivava o “escrever para aprender matemática”, solicitando ao aluno que escrevesse em linguagem natural o que entendia sobre a expressão matemática simbólica apresentada.

A terceira e a quarta questões pretendiam uma avaliação dos alunos sobre o tipo de trabalho desenvolvido no estudo de limites.

#### 6.16.2 Execução

Alguns alunos se queixaram que não estudavam limites já havia muito tempo (cerca de dois meses) e que seria melhor que a atividade tivesse sido aplicada ao término do assunto. A professora pediu para que eles escrevessem o que se lembravam e em pouco tempo as folhas foram entregues.

### 6.16.3 Análise a posteriori

Foram entregues 33 folhas de resposta individuais. Os itens citados pelos alunos ao responderem sobre os conteúdos sobre limites estudados foram sintetizados na tabela 3.

TABELA 3  
Tópicos envolvendo limites citados pelos alunos

| Assunto                                          | Quantidade de vezes que foi citado |
|--------------------------------------------------|------------------------------------|
| Conceito/definição de limite                     | 18                                 |
| Limites laterais                                 | 14                                 |
| Determinação de limites através de gráficos      | 12                                 |
| Cálculo de limites                               | 9                                  |
| Continuidade/descontinuidade                     | 9                                  |
| Limites finitos e infinitos                      | 6                                  |
| A existência (ou não) de limite em um ponto      | 5                                  |
| Aplicação de limites para o cálculo de integrais | 3                                  |
| Tipos de limites                                 | 3                                  |
| Aplicação de limites para o cálculo de derivadas | 2                                  |
| Propriedades                                     | 1                                  |
| Limite trigonométrico                            | 1                                  |

Fonte: Dados da pesquisa

A Tabela 3 acima foi elaborada a partir das anotações dos próprios alunos retiradas das folhas de resposta. Assim, quando lemos “tipos de limites” significa que esta expressão foi utilizada por 3 alunos diferentes. Nenhum aluno citou o limite exponencial fundamental. As respostas das alunas Kelly e Cleusa<sup>37</sup>, que na primeira atividade afirmaram não saber o que é limite, mas sabiam muito os procedimentos para o seu cálculo, podem evidenciar que aprenderam um pouco mais sobre esse tema, ainda que a forma de se expressarem matematicamente apresente problemas:

<sup>37</sup> Ver Figura 22 e Figura 23, respectivamente.

1) Nesse ano, nós estudamos sobre o tópico limite. Enumere a(s) coisa(s) que você aprendeu sobre esse assunto:

- serve para descobrir um provável valor de um ponto  $x=a$  numa função que não tem valor definido no ponto
- Limites laterais
- limites no cálculo de integrais

2) Explique, com suas palavras, o que você entende por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ :

O limite da função  $f(x)$  quando tende a  $a$  é  $L$

Figura 72: Folha de resposta da aluna Kelly  
Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar, pela resposta de Kelly, que noção de limite é ainda um objeto não estável, como citado por Artigue (1998), pois essa aluna apresenta uma ideia de “previsão” relacionada ao conceito de limite, quando ela afirma que o limite “serve para descobrir um provável valor [...]”. (Figura 72). Da mesma forma a aluna não consegue explicar a sentença matemática na 2ª questão e apenas repete o que está escrito como se estivesse lendo oralmente o texto apresentado.

1) Nesse ano, nós estudamos sobre o tópico limite. Enumere a(s) coisa(s) que você aprendeu sobre esse assunto:

- o que é limite
- ver o limite de funções em gráficos
- limite de limites e indeterminados
- calcular limite de funções simples

2) Explique, com suas palavras, o que você entende por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ :

Quando  $x$  tende a " $a$ ", o valor da função tende a " $L$ ", ou seja,  $L$  é o máximo que uma função pode chegar, quando  $x$  se aproxima de " $a$ ".

Figura 73: Folha de resposta da aluna Cleusa  
Fonte: Dados da pesquisa

Na resposta de Cleusa, podemos observar que a aluna não considera que o “limite é”, afirmando que o “limite tende”, retomando a discussão apresentada por Cornu (1991) se o limite é alcançável ou não. Outra dificuldade, apontada por Celestino (2008) com relação ao entendimento do símbolo  $\lim$ , é verificada na resposta de Cleusa, que afirma que o limite se aproxima, e não que o limite é.

Todos foram capazes de escrever em linguagem natural o que entendiam por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , sendo a expressão “quando  $x$  tender a” utilizada por 26 estudantes. “ $x$  aproxima-se de” ou “está próximo a” foram empregadas por 7 alunos. A aluna Cleusa usou o termo “máximo” para responder a 2ª questão, indicando uma ideia pré-concebida sobre limite, como relatado por Cornu (1991).

As respostas encontradas na 3ª questão ilustram que a maioria dos alunos gostou da forma como a matéria foi abordada, valorizando principalmente o trabalho em dupla e a análise das funções através de gráficos:

3) O que você achou sobre a forma que a matéria de limites foi vista em sala de aula?

O método de passar exercícios simples e explicar por eles é muito interessante, pois nos possibilita tirar mais dúvidas, trabalhar em equipe e aprender muito mais fácil e claramente.

4) Espaço livre para comentários e sugestões:

O trabalho em equipe entre os alunos facilita muito o aprendizado, pois as dúvidas são tiradas entre os colegas e a professora rapidamente.

Figura 74: Folha de resposta da aluna Marcela

Fonte: Dados da pesquisa

3) O que você achou sobre a forma que a matéria de limites foi vista em sala de aula?

Muito boa, foi explicada de maneira clara e através de aulas diversificadas como os gráficos montados no DGO, que facilitou mais a visão de limites, e outras funções.

4) Espaço livre para comentários e sugestões:

Acho que não é necessária nenhuma modificação, já que as aulas não ficaram num ambiente tedioso e foram bem diversificadas.

Figura 75: Folha de resposta do aluno Leonardo

Fonte: Dados da pesquisa

Hebert afirmou que “foi chato fazer exercícios toda aula” e Kátia achou a dinâmica das aulas cansativa:

Um pouco cansativa mas ficou mais fácil compreender limite com as montagens dos gráficos realizada no laboratório de computação

Figura 76: Folha de resposta da aluna Kátia

Fonte: Dados da pesquisa



Embora a produção escrita matemática ainda seja pequena e com incorreções na linguagem natural e simbólica, percebemos que os alunos escreveram mais nessa atividade do que na primeira atividade proposta. Além disso, quase todos os alunos lembraram da utilização dos esboços gráficos para o cálculo de limite, evidenciando a importância do quadro gráfico como apoio a resolução dos exercícios propostos. Esse fato aponta também para a importância de utilizar diferentes quadros algébrico, numérico e gráfico no estudo de limites e de intensificar o uso do “escrever para aprender Matemática”.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa aponta contribuições ao processo de aprendizagem do conceito de limite no Ensino Médio. O objetivo desse trabalho era investigar abordagens metodológicas que poderiam contribuir para o entendimento do conceito de limite.

Para definir o percurso dessa pesquisa, inspiramo-nos na teoria da engenharia didática (ARTIGUE, 1989), que tem por característica uma organização particular dos procedimentos metodológicos, compreendendo quatro fases: análises preliminares, análises a priori, execução e análises a posteriori.

Na fase de análise preliminar da engenharia didática investigamos como o assunto limite era abordado nos livros didáticos direcionados ao Ensino Médio. Através da análise de alguns livros didáticos, pudemos verificar que o assunto limite pouco aparece nesse nível de ensino e, quando isso acontece, é abordado no final do terceiro volume da coleção, desvinculado da teoria sobre funções. Observamos também que, embora o recurso de informática seja utilizado por alguns livros voltados para o Ensino Superior, o uso dessa tecnologia pouco aparece nos de Ensino Médio, geralmente como indicação de sites sobre Matemática.

Nessa primeira etapa, verificamos, através de um estudo epistemológico conduzido a partir das perguntas levantadas por Ávila (1991), que o Cálculo, anteriormente, era incluído no conteúdo programático da Matemática do Ensino Médio no Brasil, aparecendo, inclusive, nos programas do Movimento da Matemática Moderna. E, embora muitos pesquisadores afirmem que o estudo dos tópicos de Cálculo seja útil para o ensino de outros conteúdos matemáticos, tal como funções, e uma ferramenta importante para a Física, os atuais Parâmetros Curriculares Nacionais recomendam que o Cálculo seja abordado no Ensino Superior. Observamos, também, que o ensino dos tópicos básicos dessa disciplina, em países como Portugal, Espanha, França e Estados Unidos, integra o currículo de matemática do nível de escolaridade equivalente ao nosso Ensino Médio.

Ávila (1991), que incentiva o estudo de Cálculo no Ensino Médio, afirma que o estudo de limite deveria ser suprimido dessa etapa do ensino, devido às dificuldades relacionadas a esse assunto. O ponto de vista desse pesquisador e a realidade de uma escola em que o conteúdo de limites é abordado nos cursos técnicos do Ensino Médio, nos conduziu a uma investigação sobre quais abordagens seriam importantes para o entendimento do conteúdo de limites no Ensino Médio.

Dos estudos teóricos, realizados nas análises preliminares, três pontos foram importantes para o traçado das atividades da proposta *Uma Introdução ao Estudo de Limites*:

- As dificuldades e obstáculos relativos ao ensino de limite: a discussão das dificuldades cognitivas que se relacionam ao processo de ensino de Cálculo, apresentados nos trabalhos dos pesquisadores Rezende (2003ab, 2006), Frota (2002) e Couy (2008), e de limite, sob a ótica de Cornu (1991), Sierpinska (1985, 1987), Artigue (1995), Vrancken et al (2008) e Celestino (2008). O estudo dessas dificuldades contribuiu para definir as variáveis globais da engenharia didática dessa pesquisa e para auxiliar a análise das respostas fornecidas pelos alunos no desenvolvimento das atividades.

- A teoria dialética ferramenta-objeto e jogo-de-quadros de Douady (1986), foi escolhida como uma possibilidade para responder a indagação principal dessa pesquisa. Para essa pesquisadora, um ensino que atribuía sentido às ferramentas apóia-se no tripé – dialética ferramenta-objeto, dialética antigo-novo e jogo de quadros. Nesse trabalho, tentamos trazer o conhecimento antigo, que os estudantes tinham sobre funções, para construir o conhecimento novo, sobre limites. O jogo de quadros (numérico, algébrico, gráfico, de língua natural) foi empregado pelos alunos e pela professora na resolução dos exercícios apresentados nas atividades. Para auxiliar no esboço gráfico das funções, utilizamos o software Winplot. A professora, durante a fase de institucionalização global, discutia algumas demonstrações, teoremas e exemplos de cada tópico trabalhado nas atividades, objetivando conferir o status de objeto às noções construídas pelos estudantes.

- A teoria escrever para aprender matemática: A importância da escrita como ferramenta de aprendizagem reside no fato de ser um processo que permite a organização do pensamento e a perspectiva da reflexão sobre o que foi registrado. Como forma de incentivar os estudantes na escrita matemática, solicitamos que justificassem suas respostas, definissem algumas idéias relativas aos tópicos de limites que integravam o conteúdo a ser abordado utilizando a linguagem matemática formal e transcrevessem idéias expressas através de símbolos matemáticos para a linguagem natural. Em conjunto com a teoria de Douady (1986), foi esse um outro foco teórico escolhido para o traçado da proposta *Uma Introdução ao Estudo de Limites*.

O material *Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real* foi planejado para servir de introdução ao assunto de limites, podendo ser utilizada tanto no Ensino Médio quanto em cursos introdutórios ao Cálculo Diferencial e Integral. As dezesseis atividades que integram a Unidade Temática foram apresentadas no capítulo 6, juntamente com suas análises a priori, a posteriori e os relatos sobre a etapa de execução de cada atividade.

Através da confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori das atividades, analisamos a validação da engenharia didática dessa pesquisa, que é apresentada a seguir.

Identificamos, na primeira atividade, que os alunos não sabiam definir, matematicamente, o limite de uma função real. Objetivando que os alunos construíssem esse conceito, os alunos adquiriram a noção de vizinhança de um ponto, na segunda atividade, utilizando o conhecimento prévio de função polinomial de primeiro grau. Essa noção foi sedimentada na terceira atividade, em que os alunos lembrariam a função quadrática. Os alunos, na quarta atividade, conseguiram, através da idéia de vizinhança, conceitualizar limite de uma função real.

Verificamos, na quinta atividade, que os alunos conseguiram definir o limite lateral direito a partir da definição apresentada para o limite lateral esquerdo. Entretanto, observamos que os estudantes demonstraram dificuldades para traçar esboços gráficos de funções. Na sexta atividade, alguns esboços gráficos de funções foram apresentados aos alunos, para que os mesmos pudessem, através do quadro gráfico, fixar a ideia de limite lateral e construíssem a noção de continuidade de funções reais.

Algumas propriedades de limites foram apresentadas na sétima atividade, em que os alunos trabalharam a linguagem natural e a simbólica. Essas propriedades foram aplicadas no cálculo de limites, nos exercícios da oitava atividade, que continha, também, exercícios sobre a continuidade de funções. Foi evidenciado, através da análise das respostas a essa atividade, que os alunos, talvez pelo caráter algébrico do cálculo de limites através das propriedades, compreenderam as propriedades de limites listadas na sétima atividade.

A nona atividade, objetivando retomar os conceitos de limite estudados nas atividades anteriores, enquadrava-se na etapa de familiarização da teoria de Douady (1986). Nessa atividade, observamos que os alunos, apesar de demonstrarem dificuldades relacionadas à notação simbólica de limite, empregam corretamente as propriedades para o cálculo de limites. Além disso, o conceito de continuidade de funções foi sedimentado nessa atividade.

O conhecimento dos alunos sobre fatoração e produtos notáveis foi utilizado como ferramenta, na décima atividade, para a introdução de limites cujo cálculo por substituição levaria a indeterminações do tipo  $0/0$ . A noção de derivada, que emprega limites desse tipo finalizava essa atividade. Verificamos nessa atividade que os alunos apresentaram uma maior facilidade na escrita matemática. Entretanto, a noção de derivada apresentou grande dificuldade aos alunos, devendo seu conceito ser retomado posteriormente. A décima primeira atividade objetivou fixar as ideias trabalhadas na atividade anterior. As respostas a essa atividade evidenciaram que os alunos ainda encontram grande dificuldade com relação à

notação simbólica para o limite.

Da décima segunda à décima quinta atividade, os alunos trabalharam no laboratório de informática, utilizando o software Winplot para esboçar os gráficos das funções necessárias aos limites solicitados nessas atividades, auxiliando assim, a utilização do quadro gráfico. Na décima segunda atividade foi introduzido o conceito de limites tendendo para o infinito, quando o denominador tendia para zero. Verificamos que os alunos conseguiram sistematizar suas ideias sobre esse tipo de limite e que o quadro gráfico auxiliou na elaboração de conjecturas.

O tópico limites no infinito foi abordado na décima terceira atividade. Nessa atividade, foi evidenciado que quando os alunos conhecem os procedimentos para o cálculo do limite, o quadro gráfico não é utilizado e os alunos preferem trabalhar no quadro algébrico.

A décima quarta atividade lembrou aos alunos o assunto trigonometria, tendo o quadro gráfico como ferramenta para introdução do limite trigonométrico fundamental. Esse limite foi compreendido pelos estudantes, sendo empregado como ferramenta para o cálculo de outros limites de funções solicitados nessa atividade.

O limite exponencial fundamental foi abordado na décima quinta atividade, sendo que os alunos puderam explorar tanto o quadro numérico quanto o gráfico para sua determinação. Ficou evidenciado que a determinação do limite exponencial fundamental pelo esboço gráfico da função  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  pode apresentar dificuldades para os alunos. Uma alternativa para contornar esse problema talvez seja a análise do esboço do gráfico da função  $g(x) = (1+x)^{1/x}$ , com  $x$  tendendo a zero.

A décima sexta atividade encerra a proposta *Introdução ao Estudo de Limites de Função Real*. Assim como a primeira atividade tratava-se de um questionário com perguntas no sentido que os alunos explicitassem os conceitos estudados. Nessa atividade, o aluno deveria ser capaz de responder com suas próprias palavras o que ele entendia por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Todos os alunos conseguiram conceitualizar o limite de uma função real, embora alguns apresentassem, ainda, algumas incorreções teóricas.

Apesar de persistirem algumas dificuldades, entendemos que o texto *Uma introdução ao estudo de limites*, na forma proposta, atendeu aos objetivos com que foi desenhada e, por esse motivo, o objetivo dessa pesquisa foi atingido.

Refletindo sobre a reprodutibilidade da engenharia didática dessa pesquisa, devemos esclarecer que o que denominamos de definição de limite de uma função real apresentada nas

atividades compreende o conceito dinâmico de limite, como denominado por Cornu (1991). De acordo com Barroso et al. (2009), é somente através da definição formal de limite, utilizando épsilons e deltas, é que o limite assume o status de objeto do saber matemático. Para esses pesquisadores, a utilização da linguagem natural para abordar esse conceito objetiva, talvez, “torná-lo mais próximo das ideias que lhe deram origem” (BARROSO et al., 2009, p. 102). No contexto do estudo de limites no Ensino Médio não cabe a abordagem formal de limite; um incentivo à escrita matemática e ao uso da linguagem natural objetivou contribuir para o entendimento do conceito.

Outra questão sobre a reprodutibilidade a ser considerada é o uso de uma ferramenta computacional para esboço dos gráficos das funções, uma vez que o quadro gráfico assume um papel importante na determinação dos limites solicitados na décima segunda à décima quinta atividade. Além da escola possuir um local adequado à realização dessas atividades, o professor deverá ser capaz de solucionar as dúvidas que surgirem à medida que os alunos trabalham com o software.

Reconhecendo as limitações do presente trabalho e refletindo sobre as questões aqui discutidas, outras perguntas foram levantadas:

- os alunos que estudaram o tópico de limites no Ensino Médio terão uma maior compreensão dos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo no Ensino Superior?
- a abordagem baseada na linguagem natural poderá acarretar algum obstáculo relacionado ao ensino da definição formal de limites?

Ao concluir essa pesquisa, gostaríamos de ressaltar que o trabalho de um pesquisador nunca é encerrado. A sua pesquisa é de grande importância para a construção de novos caminhos e de novos pontos de vista, devendo um professor/pesquisador sempre estar disposto a adquirir novos conhecimentos.

## REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPed. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Ufsc, v. 6, n. 3, p.62-77, 2008.

ALVARADO, Martha; GARCÍA, Carlos. Preconceptos en el aprendizaje del Cálculo. In: LEZAMA, Javier; SÁNCHEZ, Mario; MOLINA, Juan Gabriel (Org.). **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. 18. ed. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 2005. p. 11-18. Disponível em: <<http://www.clame.org.mx/alme.htm>>. Acesso em: 20 maio 2010.

ALVAREZ, Tana Giannasi. **A Matemática da Reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar**. 270f. Dissertação (Mestrado)- PUC-SP, São Paulo, 2004. Disponível em: <[http://www.sapientia.pucsp.br//tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=4630](http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4630)>. Acesso em: 10 abr. 2009.

ANACLETO, Grácia Maria Catelli. **Uma investigação sobre o teorema fundamental do Cálculo**. 2007. 136f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC-SP.

ANTAR NETO, Aref et al. **Introdução à análise matemática**. São Paulo: Moderna, 1985. 399 p.

ANTAR NETO, Aref; LAPA, Nilton; SAMPAIO, José Luiz Pereira Sampaio e CAVALLANTTE, Sidney Luiz.

ARTIGUE, Michèle. Ingénierie didactique. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, Paris, v. 9, n. 3, p.281-308, 1989.

ARTIGUE, Michèle. Epistémologie et didactique. **Reserches en didactique des mathématiques**. Tradução: Maria Fernanda Espitia Olaya, v.10, n. 23. 1990.

ARTIGUE, Michèle. Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. **Revista Latinoamericana de Investigation En Matemática Educativa**, México, v. 1, n. 1, p.40-55, mar. 1998.

ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, Michèle et al. (Ed.). **Ingenieria didáctica en educacion matemática**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. Cap. 6, p. 97-117.

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 18, p.1-9, 1º semestre de 1991.

ÁVILA, Geraldo. Limites e derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 60, p.30-38, 2006.

ÁVILA, Geraldo. Sobre continuidade de funções. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 73, p.5-10, set. 2010. Sem.

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática aula por aula: Ensino Médio**. 2 ed. São Paulo: FTD, 2005. 3 v.

BARROSO, Natália Maria Cordeiro et al. Limite: definição intuitiva versus definição formal. In: FROTA, Maria Clara Rezende; Nasser, Lilian. **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**. Recife: Sbem, 2009. p. 99-109.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo diferencial e integral**. 195 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-06022004-105356>>/. Acesso em: 10 abr. 2009.

BOULOS, Paulo. **Pré-cálculo**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1999. x, 101p.

BRASIL, Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República. **Reestruturação e expansão do ensino médio no Brasil**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República, 2008a. 30 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/2008/interministerialresumo2.pdf>[http://www.sae.gov.br/site/images/ensino m%E9dio - resultado.pdf](http://www.sae.gov.br/site/images/ensino_m%E9dio_resultado.pdf)>. Acesso em: 16 set. 2009.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2009**. Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008b. 88 p.: il. color. Disponível em: <[http://www.fnde.gov.br/home/index.jsp?arquivo=livro\\_didatico.html#guia](http://www.fnde.gov.br/home/index.jsp?arquivo=livro_didatico.html#guia)> Acesso em: 11 abr. 2009.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p.



BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000. 109 p. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859)>. Acesso em: 11 abr. 2009.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. 141p Disponível em : <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 20 abr. 2009.

BRASIL. **Lei 9.394 de 20 de novembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. 1996. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/Leis/L9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm)>. Acesso em: 20 abril 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio - PNLEM**. 2009a. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/index.php?id=13608&option=com\\_content&view=article](http://portal.mec.gov.br/index.php?id=13608&option=com_content&view=article). Acesso em: 14 jan. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. 2009b. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/index.php/pnld-pnld-e-pnlem>. Acesso em: 14 jan. 2010.

CARDIA, Luciana Simoneti Ferreira. **Integrando a geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas**. 2007. 375f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, Campinas, Sp, v. 13, n. 23, p.87-120, jan-jun. 2005.

CARVALHO, José António Brandão; PIMENTA, Jorge Manuel Rocha - “Escrever para aprender, escrever para exprimir o aprendido”. In SILVA, Bento D. ; ALMEIDA, Leandro S., (coord). **Actas do Congresso Galaico-Português de Psicopedagogia**. [CD-ROM]. Braga: Centro de Investigação em Educação do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho, p. 1877-1885, 2005. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/5495/1/Escrever%20para%20aprender%20e%20escrever%20para%20exprimir%20o%20aprendido.pdf>>. Acesso em: 20 maio 2010.

CELESTINO, Marcos Roberto. **Concepções sobre limite:** imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior. 2008. 208 f. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CENTER FOR TEACHING AND LEARNING: Professor Erika Lindemann on “Writing to Learn”. **For Your Consideration:** suggestions and reflections on teaching and learning, Chapel Hill - NC USA, n. , p.1-4, abr. 1989. Disponível em: <http://cfe.unc.edu/pdfs/FYC4.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2010.

CLARA, Margarete da Silva Hungria Castro. **Resolução de inequações logarítmicas: um olhar sobre a produção dos alunos.** 2007. 121f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CORNU, Bernard. LIMITS. In: TALL, David Orme (Ed.). **Advanced mathematical thinking.** Boston: Kluwer Academic, 1991. Cap. 10, p. 153-166.

COSTA, David Antonio da. **O estudo dos frisos no ambiente informatizado Cabri-Géomètre.** 2005. 235 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2005.

COSTA, Leticia Vieira Oliveira. **Números reais no Ensino Fundamental:** alguns obstáculos epistemológicos. 2009. 368 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.

COUY, Lais. **Pensamento visual no estudo da variação de funções.** 2008. 162 f. Dissertação (Mestre)- Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. v. 3. São Paulo: Ática, 2004. 383 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** volume único. São Paulo: Ática, 2009. 504 p.

DOUADY, R. Jeux des cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 5-31. La Pensée Sauvage, 1986.

DOUADY, R. Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos. **Cuaderno de didáctica de la matemática.** n. 3, [19-].

ESPAÑA. **Diario Oficial Boletín Oficial Del Estado**: BOE. Madrid, Espanha, 18 jun. 2008. 117 p. Disponível em: <<http://www.boe.es/boe/dias/2008/06/18/pdfs/A27492-27608.pdf>> Acesso em: 15 abr. 2009.

FACCO, Sonia Regina. **Conceito de área**: uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

FERREIRA, Silvimar Fábio et al. **Limites e derivadas**: para escolas técnicas industriais e centros de educação tecnológica. Paraná: CEFET-PR, 1991. 149 p.

FRANÇA. Ministère de l'Éducation. **Programme de l'enseignement des Mathématiques en classe Terminale de la série scientifique**. Ministère de l'Éducation. Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale. Paris, 20 de julho de 2001. Disponível em: <<http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs4/default.htm>>. Acesso em: 19 abr. 2009.

FREITAG, Mark. Reading and writing in the mathematics classroom. **The Mathematics Educator**, Georgia, v. 8, n. 1, p.16-21, 1997. Disponível em: <<http://math.coe.uga.edu/TME/Issues/v08n1/3freitag.pdf>>. Acesso em: 20 maio 2010.

FROTA, Maria Clara Rezende. **O pensar matemático no ensino superior**: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos. 2002. 287f. Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Minas Gerais - Departamento de Faculdade de Educação.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. 3 v.

GOMES, Gisela Hernandes. **Um estudo de áreas com alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2000. 158f. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 1 CD-ROM.

GOULART, Marcio Cintra. **Matemática no Ensino Médio**. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2005. 3 v.

GRENIER, Denise. **Connaissance, conception et obstacle**: Exemples en mathématiques. Disponível em: <<http://prevert.upmf-grenoble.fr/SpecialiteDEMS/Cours%202007/UE1/bachelardGrenier%20master%20ICA.DS.pdf>> . Acesso em: 28 abr. 2010.

GUEDES, A. G. ; ASSIS, M. M. A. . Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: uma análise nas escolas de ensino médio da cidade do Natal/RN. In: II ENCONTRO REGIONAL

DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-II EREM, 2009, Natal. **Anais-II EREM**, 2009.  
Disponível em: <<http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica3.pdf>>.  
Acesso em: 29 agos. 2010.

HERRICK, Cynthia J. **Writing in the secondary mathematics classroom: research and resources**. 2005. 120 f. Thesis (Master) - State University Of New York College At Cortland, New York, 2005. Disponível em:  
<<http://dspace.sunyconnect.suny.edu/bitstream/1951/4111/C%20Herrick%20Masters%20Project.pdf>>. Acesso em: 10 jul. 2010.

HIRSCH, Christian R. et al. (Org.). **Core-Plus Mathematics Project: Contemporary Mathematics in Context Scope and Sequence**. Usa: Mcgraw-hill, 2009. 26 p. Disponível em:  
<<http://www.wmich.edu/cmp/pdfs/scopeandsequence2ndEd.pdf>>. Acesso em: 16 abr. 2009.

IDRIS, N. Enhancing Students' Understanding in Calculus Trough Writing. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 4, n.1. 2009. Disponível em:  
<<http://www.iejme.com/012009/d3.pdf>>. Acesso em: 10 mar 2010.

IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo. A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: Educ, 1999. p. 89-114.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *et al.* **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo, SP: Educ, 1999. p. 197-208.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A.. Dialética ferramenta-objeto. In: ALCÂNTARA, Sílvia Dias. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: Educ, 1999. p. 115-134.

MARTINELLI, Luciane. **Significado atribuído às relações "chegar antes de" e "não chegar depois de" por alunos do Ensino Médio**. 2004. 108f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MARTINS, Lourival Pereira. **Análise da dialética ferramenta-objeto na construção do conceito de função**. 2006. 184f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MARTINS, Vera Lúcia de Oliveira Ferreira. **Atribuindo significado ao seno e cosseno utilizando o software Cabri-Géomètre**. 2003. 151f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 1 CD-ROM.

MENEZES, L. (2000). Matemática, Linguagem e Comunicação. In Actas do ProfMat 1999. Portimão: APM. Disponível em: <[http://www.ipv.pt/millenium/20\\_ect3.htm](http://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm)>. Acesso em: 10 de março de 2010.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (Usa). **Principles & Standards for School Mathematics**. Disponível em: <<http://www.nctm.org/standards/default.aspx?id=58>>. Acesso em: 16 abr. 2009.

NOTARE, Márcia Rodrigues. **Comunicação e aprendizagem matemática on-line: um estudo com o editor científico ROODA Exata**. 2009. 201f. Tese (Doutorado)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da MATEMÁTICA: uma análise da influência francesa**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 125 p.

PAIVA, Manoel. **Matemática**: volume único. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003. 418 p.

PARANHOS, Marcos de Miranda. **Geometria dinâmica e o cálculo diferencial e integral**. 2009. 112 f Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PEREIRA, Antônio Luiz; ROSA, Ernesto. A função  $1/x$  é descontínua no zero? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 72, p.39-42, maio 2010. Semestral.

PORTER, Mary K.; MASINGILA, Joanna O. Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. **Educational Studies In Mathematics**, Netherlands, v. 42, n. 2, p.165-177, mar. 2000.

PORTUGAL. **MATEMÁTICA A: 10º ANO**. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconômicas. Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário, Portugal, 2001a. 40 p. Disponível em: <[http://sitio.dgide.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/257/matematica\\_A\\_10.pdf](http://sitio.dgide.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/257/matematica_A_10.pdf)>. Acesso em: 15 abr. 2009.

PORTUGAL. **MATEMÁTICA A: 11º ANO**. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconômicas. Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário, Portugal, 2002a. 10 p. Disponível em: <[http://sitio.dgide.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica\\_A\\_11.pdf](http://sitio.dgide.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica_A_11.pdf)>. Acesso em: 15 abr. 2009.

PORTUGAL. **MATEMÁTICA A: 12º ANO**. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e

Tecnologias e de Ciências Socioeconômicas. Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário, Portugal, 2002b. 10 p. Disponível em: <[http://sitio.dgidec.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica\\_A\\_12.pdf](http://sitio.dgidec.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica_A_12.pdf)>. Acesso em: 15 abr. 2009.

PORTUGAL. **MATEMÁTICA B**: 10º ANO. Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Electrotecnia e Electrónica, de Informática, de Administração, de Marketing e de Desporto. Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário, Portugal, 2001b. 33 p. Disponível em: <[http://sitio.dgidec.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/260/matematica\\_B\\_10.pdf](http://sitio.dgidec.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/260/matematica_B_10.pdf)>. Acesso em: 15 abr. 2009.

PORTUGAL. **MATEMÁTICA B**: 11º ANO. Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Electrotecnia e Electrónica, de Informática, de Administração, de Marketing e de Desporto. Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário, Portugal, 2002c. 6 p. Disponível em: <[http://sitio.dgidec.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/261/matematica\\_B\\_11.pdf](http://sitio.dgidec.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/261/matematica_B_11.pdf)>. Acesso em: 15 abr. 2009.

PORTUGAL. **MATEMÁTICA B**: 12º ANO. Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Electrotecnia e Electrónica, de Informática, de Administração, de Marketing e de Desporto. Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário, Portugal, 2002d. 8 p. Disponível em: <[http://sitio.dgidec.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/262/matematica\\_B\\_12.pdf](http://sitio.dgidec.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/262/matematica_B_12.pdf)>. Acesso em: 15 abr. 2009.

PORTUGAL. Ministério da Educação. 2011. Disponível em: <<http://sitio.dgidec.min-edu.pt/pt/>>. Acesso em: 15 jan. 2010.

POWELL, Ângelo Edward; BAIRRAL, Marcelo. **A escrita e o pensamento matemático**: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006. 111p.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutor) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001. Disponível em: <<http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000220294&fd=y>>. Acesso em: 15 maio 2009.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003a. Tese (Doutorado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 29 a 1º de nov. 2003b. Santos, SP. **Anais...**(CD-ROM)

REZENDE, Wanderley de Moura. Um mapeamento do ensino de funções reais no ensino básico. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006, Águas de Lindoia. **Anais...** p. 1 - 17.

RIBEIRO, Denise Franco Capello. **Dos cursos complementares aos cursos clássico e científico: a mudança da organização do ensino de Matemática.** 2006. 254 f. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ROSA, Ernesto. **Funções contínuas.** Disponível em: <<http://www.matinterativa.com.br/Artigos/Continuidade.pdf>>. Acesso em: 13 nov. 2010.

RUBIÓ, Angel Panadés; FREITAS, Luciana Maria Ternuta de. **Matemática e suas tecnologias.** São Paulo: IBEP, 2005. 3 v.

SALDANHA, Maria Sueli Gomes. **Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no ensino médio.** 2007. 111f. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SANTOS, Sandra Augusta. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espasandin. **Escritas e leituras na educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p. 127-141.

SCHNEIDER, Marizoli Regueira. **Produção escrita: caminho para aprendizagens significativas a partir da construção e reconstrução do conhecimento matemático.** 2006. 241 f. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de do Rio Grande do Sul.

SIERPINSKA, Anna. Good Understanding. In: SIERPINSKA, Anna. **Understanding in Mathematics: Studies in mathematics education.** Montreal: Concordia University, 1994. p. 125-137.

SIERPINSKA, Anna. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. **Educational Studies In Mathematics**, Netherlands, v. 18, n. 4, p.371-397, nov, 1987.

SIERPINSKA, Anna. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, França, v. 6, n. 1, p.5-68, 1985.

SKEMP, Richard R. Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, v. 77, p. 20–26. UK: 1976. Disponível em: <<http://www.science.oregonstate.edu/~burgerl/Skemp%20paper.pdf>>. Acesso em: 20 abr. 2010.

SKEMP, Richard R.. Symbolic Understanding. **Mathematics Teaching**, Derby, n. 99, p.59-61, jun. 1982.

SKEMP, Richard R.. Symbols. In: SKEMP, Richard R.. **The psychology of learning Mathematics**. Londres: Penguin Books, 1986. p. 64-87.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. **Educação em Foco**, São Paulo, v. 8, n. 1, p.1-12, mar-ago. 2003. Disponível em: <[http://www.moderna.com.br/servicos/evento\\_utopia/Artigo\\_matematica.doc](http://www.moderna.com.br/servicos/evento_utopia/Artigo_matematica.doc)> Acesso em: 20 abr. 2010.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. 5. ed. v. 3. São Paulo: Saraiva, 2005. 349 p.

SOUZA, Roberta Nara Sodré; CORDEIRO, Maria Helena. Os registros de representação como ferramenta do pensamento na resolução de problemas matemáticos que envolvem o conceito de função linear. **Contrapontos**. ano 2 - n. 6 - p. 423-437 - Itajaí, set./dez. 2002.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Oswaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil**. Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 8, n. 25, p.583-613, set./dez. 2008. Disponível em: <<http://www2.pucpr.br/reol/index.php/DIALOGO?ddl=2435&ddl99=view>>. Acesso em: 10 abr. 2009.

VRANCKEN, Silvia et al. Dificultades relacionadas con la ense anza y el aprendizaje del concepto de límite. **Premisa**, Buenos Aires - Argentina, n. 29, p.9-19, maio 2006. Disponível em: <<http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf>>. Acesso em: 19 abr. 2010.

YOSSEF, Ant nio Nicolau; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente Paz. **Matemática: ensino médio**, volume  nico. São Paulo: Scipione, [2005]. 488 p.

ZUCHI, Ivanete. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional**. 2005. 254 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção)- Universidade Federal de Santa Catarina - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.



**APÊNDICE**

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE  
LIMITES DE FUNÇÃO REAL

Gisele Teixeira Dias Costa Pinto  
Maria Clara Rezende Frota

PUC-MG  
Belo Horizonte - 2010

## **PREFÁCIO**

Este trabalho é um extrato da dissertação de mestrado intitulada “Uma proposta para o ensino e aprendizagem de limite de função real”, de Gisele Teixeira Dias Costa Pinto, sob a orientação da prof<sup>a</sup>. Dra. Maria Clara Rezende Frota e defendida no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

O texto, intitulado “Uma introdução ao estudo de limites de função real”, foi organizado de forma a assumir um caráter independente em relação à dissertação, objetivando facilitar consultas e leituras. As atividades envolveram o tópico limite de função real e foram desenvolvidas com alunos do 2º ano do Ensino Médio de um dos cursos de uma escola técnica federal de Minas Gerais.

A intenção é que este trabalho possa contribuir com alunos e professores nos estudos iniciais sobre limites de função real. Todas as atividades foram desenhadas visando ao desenvolvimento das habilidades de argumentar, justificar e verificar conjecturas matemáticas, além de efetuar cálculos e expressar-se matematicamente, utilizando os quadros algébrico, gráfico e numérico, entre outros, na resolução das várias atividades.

## SUMÁRIO

|                                                                                                    |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1 INTRODUÇÃO .....</b>                                                                          | <b>196</b> |
| <b>2 AS TEORIAS POR TRÁS DA PROPOSTA .....</b>                                                     | <b>198</b> |
| 2.1 Possibilidades da escrita matemática para o ensino de limites .....                            | 198        |
| 2.2 Possibilidades da dialética ferramenta-objeto e jogo-de-quadros para o ensino de limites ..... | 201        |
| <b>3 AS ATIVIDADES PROPOSTAS .....</b>                                                             | <b>204</b> |
| 3.1 Atividade 1 .....                                                                              | 205        |
| 3.1.1 Orientações para a atividade 1 .....                                                         | 206        |
| 3.2 Atividade 2 .....                                                                              | 207        |
| 3.1.2 Orientações para a atividade 2 .....                                                         | 207        |
| 3.3 Atividade 3 .....                                                                              | 209        |
| 3.3.1 Orientações para a atividade 3 .....                                                         | 210        |
| 3.4 Atividade 4 .....                                                                              | 210        |
| 3.4.1 Orientações para a atividade 4 .....                                                         | 212        |
| 3.5 Atividade 5 .....                                                                              | 213        |
| 3.5.1 Orientações para a atividade 5 .....                                                         | 214        |
| 3.6 Atividade 6 .....                                                                              | 215        |
| 3.6.1 Orientações para a atividade 6 .....                                                         | 217        |
| 3.7 Atividade 7 .....                                                                              | 218        |
| 3.7.1 Orientações para a atividade 7 .....                                                         | 219        |
| 3.8 Atividade 8 .....                                                                              | 220        |
| 3.8.1 Orientações para a atividade 8 .....                                                         | 222        |
| 3.9 Atividade 9 .....                                                                              | 223        |
| 3.9.1 Orientações para a atividade 9 .....                                                         | 225        |
| 3.10 Atividade 10 .....                                                                            | 226        |
| 3.10.1 Orientações para a atividade 10 .....                                                       | 228        |
| 3.11 Atividade 11 .....                                                                            | 229        |
| 3.11.1 Orientações para a atividade 11 .....                                                       | 230        |
| 3.12 Atividade 12 .....                                                                            | 231        |
| 3.12.1 Orientações para a atividade 12 .....                                                       | 232        |
| 3.13 Atividade 13 .....                                                                            | 233        |
| 3.13.1 Orientações para a atividade 13 .....                                                       | 234        |
| 3.14 Atividade 14 .....                                                                            | 235        |
| 3.14.1 Orientações para a atividade 14 .....                                                       | 236        |
| 3.15 Atividade 15 .....                                                                            | 237        |
| 3.15.1 Orientações para a atividade 15 .....                                                       | 238        |
| 3.16 Atividade 16 .....                                                                            | 239        |
| 3.16.1 Considerações para a atividade 16 .....                                                     | 240        |
| <b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>                                                                | <b>241</b> |

|                          |            |
|--------------------------|------------|
| <b>REFERÊNCIAS .....</b> | <b>242</b> |
|--------------------------|------------|

|                   |            |
|-------------------|------------|
| <b>ANEXO.....</b> | <b>244</b> |
|-------------------|------------|

|                                         |            |
|-----------------------------------------|------------|
| <b>ANEXO A - PROGRAMA WINPLOT .....</b> | <b>245</b> |
|-----------------------------------------|------------|

## 1 INTRODUÇÃO

Este material destina-se ao estudo introdutório sobre o tópico limites de funções reais, apresentando uma série de atividades que foram aplicadas em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de um curso técnico de Informática Industrial em uma escola técnica federal de Minas Gerais.

As atividades propostas foram desenvolvidas objetivando favorecer o desenvolvimento de habilidades matemáticas e a construção do conhecimento por parte do aluno. Duas abordagens teóricas deram sustentação ao planejamento das atividades: a teoria *dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros* (DOUADY, 1986) e a teoria *escrever para aprender Matemática* (PORTER; MASINGILA, 2000). Essas teorias são apresentadas brevemente no segundo capítulo desse trabalho.

As atividades são abordadas no terceiro capítulo, além de algumas orientações aos professores sobre os objetivos pretendidos, o tempo estimado para o desenvolvimento da atividade e considerações sobre possíveis erros e dificuldades que possam ser encontrados na resolução das tarefas. A estrutura da apresentação das fichas foi pensada para que os professores possam manusear e imprimir cada atividade separadamente.

Foram ao todo dezesseis atividades propostas, desenvolvidas para aplicação em sala de aula, em casa e no laboratório de informática. Excetuando a primeira e a última atividade, que são questionários individuais, recomendamos que todas as demais sejam realizadas em dupla ou trios, para que os alunos possam discutir as resoluções com os colegas. Esse tipo de procedimento pode favorecer o diálogo matemático que, segundo Smole (2003), é uma oportunidade dos alunos conhecerem novas ideias, outros pontos de vista.

A estrutura temática dessas atividades compreende:

- a. Conceituação de limite de uma função real;
- b. Limites laterais;
- c. Conceituação de função contínua;
- d. Propriedades e cálculo de limites;
- e. Limites do tipo  $0/0$ ;
- f. Limites Infinitos e limites no infinito;
- g. Limite trigonométrico Fundamental;

#### h. Limite Exponencial Fundamental.

Por se tratar de uma introdução ao assunto, não pretendemos abordar a definição formal de limite, apresentando somente o conceito dinâmico de limite, utilizando as expressões “tender a” ou aproximar-se de”.

Observando as dificuldades e obstáculos relacionados ao ensino e aprendizagem do conceito de limite, verificamos que Vrancken et al., (2006) apontam que uma das dificuldades para o entendimento de limite está relacionada ao conceito de função, sendo a representação gráfica um dos problemas encontrados pelos estudantes. Para facilitar a realização do esboço gráfico da função e incentivar a utilização do quadro gráfico para o entendimento dos limites abordados nas atividades 12 a 15, sugerimos a utilização de um software gráfico. Indicamos o software livre Winplot, desenvolvido pelo professor de Matemática Rick Parris, da Phillips Exeter Academy, disponível no endereço eletrônico <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>, traduzido para o português pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus. Um tutorial em português, de Eduardo Silva Vasconcelos, também se encontra no endereço <http://math.exeter.edu/rparris/wpsupp.html>.

Esperamos que esse material possa contribuir de modo significativo com o ensino introdutório do tópico de limites e que o professor sinta-se motivado, não apenas em utilizar as atividades aqui apresentadas, mas que também possa conduzir sua própria investigação nessa área.

## 2 AS TEORIAS POR TRÁS DA PROPOSTA

Duas abordagens foram escolhidas para o traçado dessa proposta: a teoria escrever para aprender Matemática (POTTER; MASINGILA, 2000) e a teoria dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros (DOUADY, 1986). Esperamos que essas duas teorias possam contribuir para o entendimento matemático dos alunos sobre o tópico limite de função real.

A teoria escrever para aprender Matemática, do inglês “Writing to learn Mathematics” é recomendada pelo National Council of Teachers of Mathematics e utilizada por diversos pesquisadores e professores de Matemática nos Estados Unidos, que advogam que a escrita é uma forma fundamental de aprendizagem (PORTER; MASINGILA, 2000). Pensamos que o fato de escrever um raciocínio, o desenvolvimento de um procedimento matemático, poderia favorecer um maior compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos envolvidos no processo matemático.

Da mesma forma, os estudos de Douady (1986) acerca da dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros deram sustentação teórica ao desenvolvimento das atividades, na medida em que afirmam que a manipulação de quadros algébrico, numérico, verbal ou gráfico, pode beneficiar o processo de construção do conhecimento de um objeto matemático.

### 2.1 Possibilidades da escrita matemática para o ensino de limites

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam como um dos objetivos da Matemática, para o Ensino Médio, levar o aluno a “expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática” (BRASIL, 2000).

A metodologia “escrever para aprender Matemática” refere-se a qualquer tipo de escrita usada para ajudar os estudantes a aprender Matemática. Entretanto, Porter e Masingila (2000) consideram que a metodologia “escrever para aprender Matemática” refere-se à escrita empregada para articular e explicar as ideias matemáticas, tendo por objetivo o entendimento mais aprofundado dessas.



Muitos pesquisadores (PORTER, MASINGILA, 2000; SMOLE, 2003; CARVALHO, PIMENTA, 2005; FREITAG, 1997; SANTOS, 2005) apontam que a escrita tem grande importância como ferramenta de aprendizagem, apresentando implicações nos processos de estruturação e aquisição do conhecimento, uma vez que o ato de escrever é um processo complexo que envolve a análise e organização do raciocínio, através do ato de explicá-lo ou apresentá-lo. Além disso, o texto produzido pelos estudantes pode ser uma ferramenta para o professor identificar os tipos de dificuldades que os alunos estejam apresentando no conteúdo apresentado.

A escrita apresenta a vantagem de ser um registro da idéia do aluno, do trajeto que ele percorreu para a resolução de um determinado problema. De acordo com Smole (2003), a escrita em Matemática apresenta três principais papéis:

- a. Oferecer a oportunidade, aos estudantes, de repensar sobre o que descobriram sobre um determinado conceito, de repensar e refletir sobre o que fizeram;
- b. Estimular os alunos a se tornarem melhores leitores de Matemática uma vez que, ao escrever, os alunos poderão perceber, com mais clareza, como articular noções e conceitos matemáticos;
- c. Facilitar a observação do que os alunos aprenderam em sala de aula, além de mostrar como os estudantes expressam suas idéias e quais são suas dificuldades no desenvolvimento do trabalho.

De acordo com Santos (2005),

a linguagem escrita pode ser vista tanto como um instrumento para atribuir significados e permitir a apropriação de conceitos quanto como uma ferramenta de diálogo, na qual o processo de avaliação e reflexão sobre a aprendizagem é continuamente mobilizado. (SANTOS, 2005, p. 128).

A autora, afirma que a escrita, nas aulas de Matemática, assume um papel de mediadora, uma vez que integra as experiências individuais e coletivas no processo de construção e apropriação do conhecimento. Essa pesquisadora utilizou a escrita em Matemática em aulas de Cálculo, Álgebra Linear, Complementos de Matemática e Geometria, além de cursos de aperfeiçoamento para professores de Matemática, trabalhando a produção de pequenos textos, cartas, mapas conceituais, glossários e diários.

Powell e Bairral (2006) também discutem diversas atividades escritas que podem ser utilizadas em sala de aula ou na educação à distância: a escrita livre, as crônicas, diferentes tipos de diários, relatórios de entrada múltipla e as escritas virtuais, podendo ser assíncronas, como o correio eletrônico e fóruns de discussão, ou síncronas, como salas de bate-papos e outros tipos de mensagens instantâneas.

Powell e Bairral (2006) classificam a escrita matemática como produto, quando a escrita é um instrumento para demonstrar conhecimento, em uma abordagem mais centrada na Matemática; ou como processo-produto, quando o foco são os próprios alunos, sendo considerada, então, como um meio de conhecimento. A escrita se classifica como transacional ou expressiva, em relação às funções que possa exercer. A escrita transacional é mais informativa, para instruir alguém, mais utilizada na abordagem produto, onde é empregada para avaliação e diagnóstico. A escrita expressiva tem a função de verbalizar a consciência do aluno, constituindo um fluir de ideias e sentimentos.

Freitag (1997) afirma que os estudantes, ao escreverem Matemática, podem apresentar dificuldades com a notação, o vocabulário, a representação gráfica ou a disposição de dados em tabelas. Esse pesquisador aponta que a escrita da Matemática é uma tarefa complexa, pois exige que o aluno, além de compreender a mensagem que está escrevendo, faça com que uma outra pessoa entenda seu texto.

Pelo fato da escrita matemática ser uma combinação de sinais, letras, gráficos e palavras, muitas vezes a leitura matemática envolve um conhecimento de uma estrutura que nem sempre é análoga à língua materna (SMOLE, 2003; FREITAG, 1997).

No planejamento das atividades aqui apresentadas, de forma a favorecer a escrita matemática, decidimos:

- a. apresentar tabelas, gráficos, pequenos textos envolvendo conceitos matemáticos, em que os estudantes deveriam ser capazes de decodificar a Matemática envolvida, estimulando a leitura;
- b. solicitar a produção de esboços gráficos de funções, de tabelas e a construção de definições e conceitos matemáticos, formando e exercitando a escrita matemática.

Além disso, a escrita da Matemática pode servir como um instrumento de avaliação dos alunos, cuidando-se em observar o uso adequado da linguagem e da notação matemática,

a exposição coerente de idéias e a representação gráfica de funções.

O tipo de escrita matemática solicitado nas atividades é a abordagem produto, para demonstrar o conhecimento do aluno sobre os tópicos abordados sobre limite e do tipo transacional, de caráter informativo, como classificada por Powell e Bairral (2006). Assim, por exemplo, na primeira atividade, pedimos ao aluno que relate quando e como o termo limite havia sido utilizado nas aulas de Matemática. Esperamos que o aluno forneça uma resposta informativa, que revele que o estudante já teve algum contato com o assunto. Em outras atividades, pedimos que o aluno escreva justificativas para suas respostas.

## **2.2 Possibilidades da dialética ferramenta-objeto e jogo-de-quadros para o ensino de limites**

Antes de discorrer sobre a dialética ferramenta-objeto, faz-se necessária uma explanação sobre as definições de objeto e ferramenta traçadas por Douady (1986). Um conceito matemático pode apresentar um caráter de objeto, quando é descontextualizado e formulado da forma mais geral possível, ou de ferramenta, quando estamos interessados na sua utilização para resolver um problema. Uma mesma ferramenta pode ser adaptada a diversos problemas e, objetivando resolver um único problema, várias ferramentas podem ser empregadas. Segundo Maranhão (1999), a definição de ferramenta apresenta duas características – para um professor, a ferramenta apresenta um funcionamento científico e, para um aluno, a ferramenta possui um emprego prático.

“Durante uma atividade matemática, um aluno pode utilizar uma ferramenta implícita ou explicitamente.” (DOUADY, 1986, p. 9, tradução nossa)<sup>38</sup>. A utilização implícita de uma ferramenta ocorre quando um aluno, ao tentar resolver um problema, emprega conceitos tais que nem sempre conhece suas condições de uso e limitações. Entretanto, se o aluno pode justificar o uso desses conceitos, então ele está empregando a ferramenta de forma explícita.

Douady (1986) afirma que, ao tentar resolver um problema, um matemático interpreta a questão de diferentes pontos de vista, passando-o de um quadro para outro, sugerindo ferramentas que não foram inicialmente utilizadas. Essa autora define como quadros os

---

<sup>38</sup> un élève, en activité mathématique, peut recourir à un outil de manière implicite ou explicite. (DOUADY, 1986, p. 9).

diversos tipos de domínios matemáticos como, por exemplo, aritmético, algébrico, geométrico e gráfico. Essa pesquisadora define quadro como sendo “constituído dos objetos de um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, das suas formulações possivelmente diversas e as imagens mentais associadas com estes objetos e estas relações.” (DOUADY, 1986, p. 11, tradução nossa)<sup>39</sup>. A mudança de quadros permite obter formulações diferentes, não necessariamente equivalentes, de um mesmo problema, permitindo o uso de ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira resolução.

Para Douady (1986) um aluno possui conhecimento matemático se é capaz de utilizar ferramentas explícitas, de adaptar essas ferramentas na resolução de um problema. Entretanto, várias dificuldades aparecem, em sala de aula, para que o aluno possa vivenciar uma simulação de pesquisa e investigação, decorrentes de uma metodologia inadequada, da pouca responsabilidade dada os alunos, do uso de problemas que não discutem o caráter essencial dos conceitos e da prática da separação dos quadros.

Douady (1986) afirma que, para construir um ensino diferente, atribuindo sentido às ferramentas, que assegure uma apresentação institucional dos objetos correspondentes, devemos-nos fundamentar em três pontos - dialética ferramenta-objeto, dialética antigo-novo e o jogo de quadros.

As fases da dialética ferramenta-objeto são:

- a. O antigo: os conceitos matemáticos que os alunos já têm são utilizados como ferramentas para resolver, ao menos em parte, um dado problema.
- b. A pesquisa do novo implícito: ocorre quando os alunos não conseguem resolver completamente as questões propostas com os antigos conceitos. Muitas vezes, faz-se necessária uma mudança de quadros, elucidando as dúvidas dos alunos.
- c. A explicitação e institucionalização local: os elementos que tiveram papel importante na fase anterior podem, agora, serem apropriados pelos alunos. Nessa fase ocorre um momento de discussão coletiva, mas com reações individuais – a institucionalização local.
- d. A institucionalização – estatuto de objeto: nesse momento, o professor expõe o novo, apresentando o conteúdo de forma organizada, com definições, teoremas e

---

<sup>39</sup> Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. (DOUADY, 1986, p. 11)

demonstrações.

- e. A familiarização - reinvestimento: o professor apresenta aos alunos novos problemas que precisam dos conceitos recentemente institucionalizadas. Apesar desses exercícios exigirem somente saberes conhecidos, os alunos os abordam com concepções mais evoluídas e que permitem a visualização de um grupo mais amplo de problemas.
- f. Complexificação da tarefa ou novo problema: um problema mais complexo é proposto aos alunos, exigindo por parte desses testar ou desenvolver seus domínios das novas aquisições.

Douady (1986) define jogos de quadros como mudanças de quadros (algébrico, geométrico, aritmético, gráfico) provocadas pelo professor, permitindo que o aluno evolua nas fases de pesquisa. Esse procedimento se divide em três etapas: transferência e interpretação; correspondências imperfeitas; melhora das correspondências e progresso do conhecimento.

Na etapa de transferência e interpretação, os alunos transferem, total ou parcialmente, para um novo quadro um problema formulado, estabelecendo correspondências entre quadros diferentes. Podem ocorrer correspondências imperfeitas, por razões matemáticas ou por falta de conhecimento dos alunos. Essa situação gera um desequilíbrio nas convicções dos alunos. Um fator que possa re-equilibrar os saberes dos alunos é a comunicação entre os quadros e, às vezes, a utilização de um quadro auxiliar de representação. Ocorre, nessa etapa, uma melhoria das correspondências entre os quadros e o progresso do seu conhecimento.

Utilizamos nas atividades propostas, além dos quadros algébrico e gráfico, também os quadros numérico e de linguagem natural. A interpretação do quadro numérico poderá contribuir para que os alunos compreendam o conceito de vizinhança, importante para o desenvolvimento da noção de limite. O uso da linguagem natural, como apoio aos quadros gráficos e algébricos, é incentivado em muitas das atividades, quando solicitado aos alunos que justifiquem suas respostas.

### 3 AS ATIVIDADES PROPOSTAS

Ao aplicar essas atividades, sugerimos aos professores que procurem orientar inicialmente seus alunos sobre os exercícios propostos, sem lhes fornecer as respostas.

Excetuando a primeira e a décima sexta, recomendamos que as atividades devam passar pela fase de institucionalização, da dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1986), depois que os alunos terminem as atividades. Esse procedimento tem por objetivos discutir as questões apresentadas, sanar as dúvidas que surgiram e conferir o status de objeto para os tópicos desenvolvidos nas atividades.

As orientações para o desenvolvimento das atividades são apresentadas após a ficha de cada atividade. Essas recomendações metodológicas têm o propósito de contribuir com o trabalho do professor.

### 3.1 Atividade 1

#### Atividade 1

1. Nas aulas de Matemática que você frequentou, o termo “limite” foi usado alguma vez?

( ) Sim

( ) Não

2. Em caso afirmativo, relate quando e como o termo “limite” foi usado.

---

---

---

3. Em caso afirmativo, em quais tópicos de Matemática você se lembra do termo “limite” ter sido usado?

( ) Progressões

( ) Trigonometria

( ) Definição do número  $\pi$

( ) Definição do número  $e$

( ) Função

( ) Área e volume de corpos redondos

( ) Outro conteúdo matemático. Qual?

---

4. Nas aulas de disciplinas técnicas que você frequentou, o termo “limite” foi usado alguma vez?

( ) Sim

( ) Não

Em caso afirmativo, relate quando e como o termo matemático “limite” foi usado?

---

---

5. De acordo com seu conhecimento, o que significa, em Matemática, o termo “limite”? Explique com suas palavras.

---

---

---

---

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.1.1 Orientações para a atividade 1

| <b>Orientações para a atividade 1</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>                 | 10 a 15 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Objetivo</b>                       | Verificar se os alunos têm algum conhecimento sobre o termo limite relacionado à disciplina de Matemática ou um contato anterior com o tema, ainda que no estudo de outros conteúdos.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Tipo de trabalho</b>               | Individual.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Recurso de Informática</b>         | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Outras observações</b>             | <p>As perguntas direcionam os estudantes a escrever informalmente sobre o tópico limites, favorecendo, desta forma, um primeiro contato destes com a escrita Matemática.</p> <p>Se os alunos já estudaram progressões geométricas, espera-se que os estudantes relacionem o termo limite com o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica, quando o número de termos tende para infinito. O tópico trigonometria foi incluído, uma vez que algumas funções trigonométricas podem ter empregado o assunto limite, pelo uso de assíntotas verticais e horizontais no esboço de seus gráficos. Também os números irracionais <math>\pi</math> e <math>e</math> podem ter sido apresentados aos alunos através do conceito de limite. Da mesma forma, a noção de limite pode ter sido introduzida no estudo das funções ou da área e volume dos corpos redondos, pelo menos informalmente.</p> |

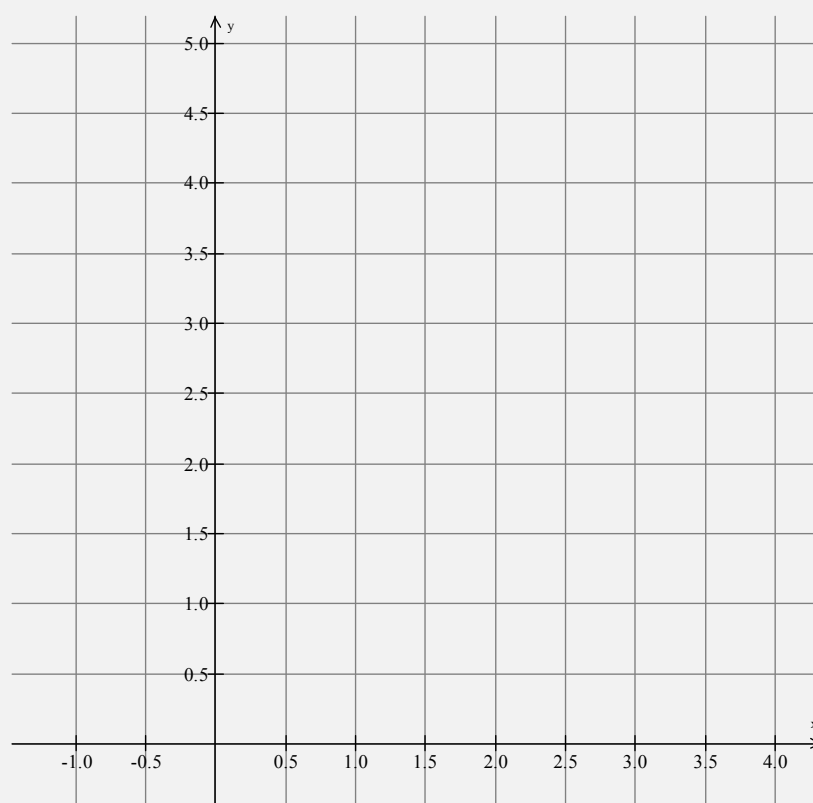
Fonte: Elaborado pela autora



## 3.2 Atividade 2

### Atividade 2

1. A função  $f(x) = 2x + 1$  é um exemplo de função afim, tipo de função que já foi estudada anteriormente. Calcule o valor de  $f(x)$  para valores de  $x = 0$  e para  $x = 2$ . Marque os pontos no plano cartesiano abaixo. Esses dois pontos definem a reta que é a representação gráfica da função  $f(x) = 2x + 1$ . Trace essa reta no plano cartesiano:



2. Agora, complete a tabela:

| $X$             |     |     |     |      |      |     |     |     |
|-----------------|-----|-----|-----|------|------|-----|-----|-----|
| $f(x) = 2x + 1$ | 2,5 | 2,8 | 2,9 | 2,95 | 3,05 | 3,1 | 3,2 | 3,5 |

3. A partir da tabela da questão 2. podemos dizer que:

- $2,5 < f(x) < 3,5$  sempre que  $\underline{\hspace{1cm}} < x < \underline{\hspace{1cm}}$
- $2,8 < f(x) < 3,2$  sempre que  $\underline{\hspace{1cm}} < x < \underline{\hspace{1cm}}$
- $2,9 < f(x) < 3,1$  sempre que  $\underline{\hspace{1cm}} < x < \underline{\hspace{1cm}}$
- $2,95 < f(x) < 3,05$  sempre que  $\underline{\hspace{1cm}} < x < \underline{\hspace{1cm}}$

Assim, dizemos que:

$f(x) = 2x + 1$  pode ficar tão próximo do valor  $\underline{\hspace{1cm}}$  quanto se queira, desde que  $x$  fique suficientemente próximo de  $x = \underline{\hspace{1cm}}$ .

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.1.2 Orientações para a atividade 2

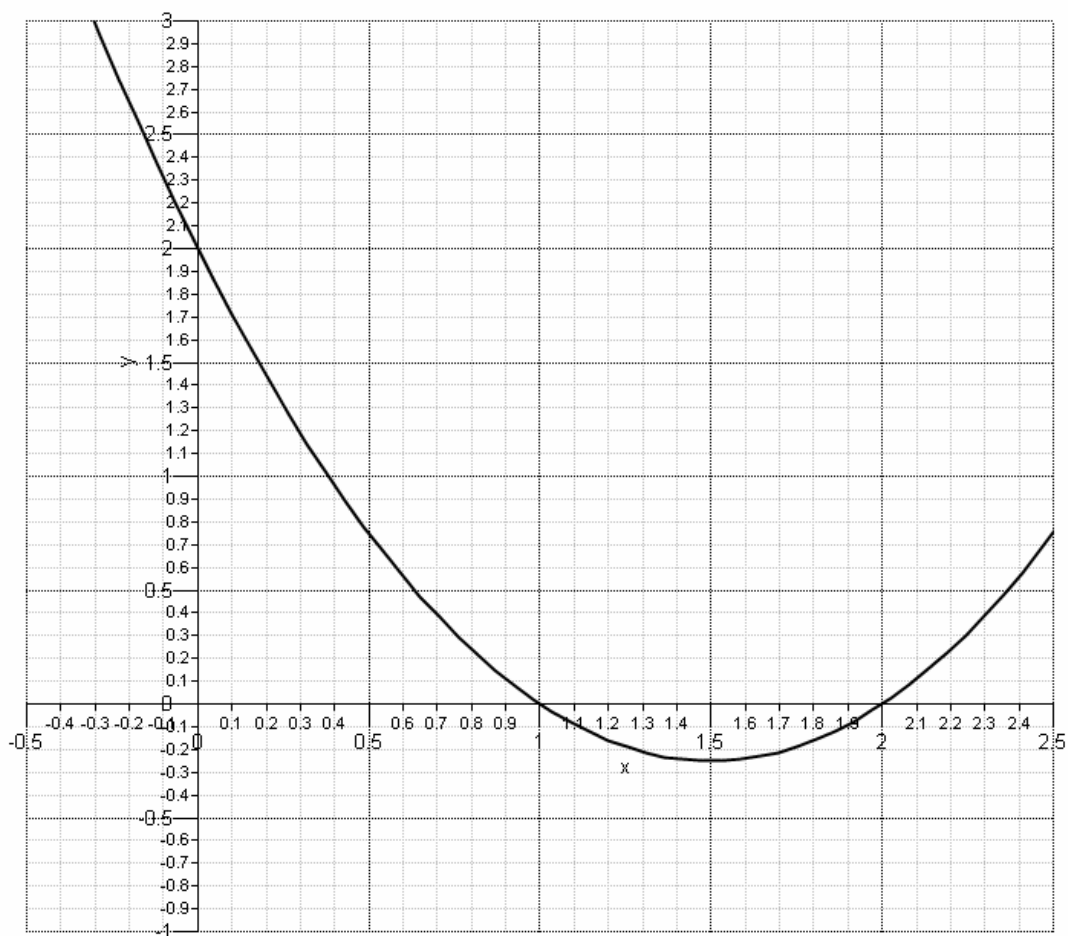
| <b>Orientações para a atividade 2</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>                 | 20 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Objetivo</b>                       | Introduzir a ideia informal de limite.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Tipo de trabalho</b>               | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Recurso de Informática</b>         | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Outras observações</b>             | <p>Considerando a teoria de Douady (1986), essa atividade se enquadra na fase (a) da teoria da dialética ferramenta-objeto, em que os conceitos matemáticos sobre a função polinomial de 1º grau serviriam de ferramenta para introduzir o conceito de vizinhança de um ponto. Utilizam-se os quadros gráfico e o algébrico para isso.</p> <p>Equívocos como calcular valores de <math>x</math> tais que <math>f(x) = 0</math> ou <math>f(x) = 2</math> são esperados, talvez como erro de interpretação da questão ou desconhecimento do assunto função polinomial de primeiro grau. A marcação errada dos pontos, por distração dos estudantes ou erro no cálculo das imagens para os valores citados para <math>x</math>, podem levar a um esboço errado do gráfico da questão seguinte.</p> <p>Na segunda questão o aluno, a partir da imagem da função, deve calcular o valor de <math>x</math>. Erros no cálculo desses valores podem ser corrigidos pela observação do esboço gráfico do exercício 1 ou pela análise do comportamento dos valores da própria tabela.</p> <p>A terceira questão pretende que os alunos façam a leitura e interpretação dos valores calculados na tabela da questão anterior. Assim, erros nos cálculos da 2ª questão ou erros de leitura da tabela podem induzir a erros na terceira questão. Espera-se que os alunos consigam determinar o valor do limite da função quando <math>x</math> tende ao valor 1, através da observação dos valores calculados nas questões de 3.a) a 3.d).</p> |

Fonte: Elaborado pela autora.

### 3.3 Atividade 3

#### Atividade 3

1. Vamos relembrar, agora, a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . O gráfico de uma função quadrática esta esboçado abaixo:



- Qual é o valor do intercepto da função com o eixo  $Oy$ ?
- Existem raízes reais? Em caso afirmativo, quais seus valores?
- Com os valores obtidos em a) e em b) é possível determinar a função quadrática. Determine algebricamente a função esboçada anteriormente.

2. Para a função da letra c. da questão anterior, temos a seguinte tabela:

| $X$    | 1,1    | 1,2    | 1,4    | 1,45     | 1,55     | 1,6    | 1,8    | 1,9    |
|--------|--------|--------|--------|----------|----------|--------|--------|--------|
| $F(x)$ | - 0,09 | - 0,16 | - 0,24 | - 0,2475 | - 0,2475 | - 0,24 | - 0,16 | - 0,09 |

Complete:

$f(x)$  —(tende)—> \_\_\_\_\_ quando  $x$  —(tende)—> 1,5

Essa ideia pode ser escrita matematicamente como

$\lim_{x \rightarrow 1,5} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Analisando o gráfico, complete:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.3.1 Orientações para a atividade 3

| Orientações para a atividade 3 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>          | 20 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Objetivo</b>                | Explorar uma função polinomial de segundo grau, seus conceitos para reforçar o conceito de vizinhança, introduzindo a representação matemática da ideia de limite de uma função, quando $x$ tende para um valor determinado.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Tipo de trabalho</b>        | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Recurso de Informática</b>  | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Outras observações</b>      | <p>Os erros cometidos nas questões 1.a) e 1.b), se ocorridos, derivam, somente, de erros conceituais sobre as intersecções da função com os eixos e, por isso, espera-se que essas questões não apresentem problemas aos estudantes. Já a questão 1.c) pode apresentar erros de cálculo para a determinação dos coeficientes da função, o que poderia ser verificado facilmente pela retomada das coordenadas estabelecidas nas questões anteriores, ou pelo esboço do gráfico, estabelecendo, assim, uma correspondência entre os quadros gráfico e algébrico.</p> <p>Para a 2ª questão, um valor incorreto dessa questão, mas esperado, é o valor de <math>-0,2475</math> que aparece em duplicata na tabela por causa da simetria da função em torno da reta vertical que passa pelo coordenadas do vértice da função quadrática.</p> <p>A 3ª questão reforça o conceito de limite introduzido na questão 2. Os alunos podem calcular os valores dos limites tanto algebricamente quando pela observação do esboço do gráfico da função. Pelo fato de, no caso de funções polinomiais, <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)</math>, os estudantes podem, mesmo ainda sem entenderem completamente o conceito de limite de uma função contínua, fornecer respostas corretas a essa questão, empregando a propriedade de funções contínuas como uma ferramenta implícita.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.4 Atividade 4

#### Atividade 4

##### Definição de limite

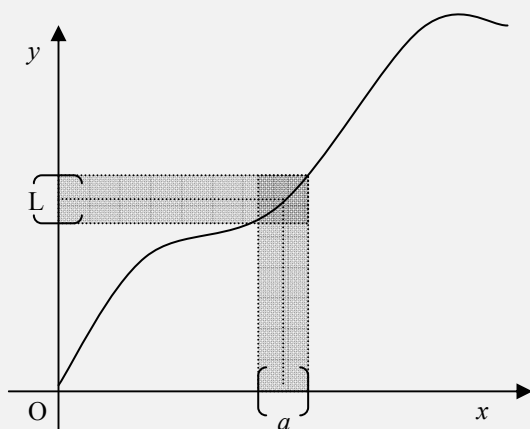
Seja uma função  $f$  definida em um intervalo aberto em torno de um valor  $a$ . Não necessariamente a função  $f$  está definida para  $a$ . Se o valor da função  $f$  fica arbitrariamente próximo de um valor  $L$ , tomando valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$  (valores de  $x$  ligeiramente menores que  $a$  e valores de  $x$  ligeiramente maiores que  $a$ ), então dizemos que a função  $f$  tem limite  $L$  quando  $x$  tende a  $a$ . Matematicamente, podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

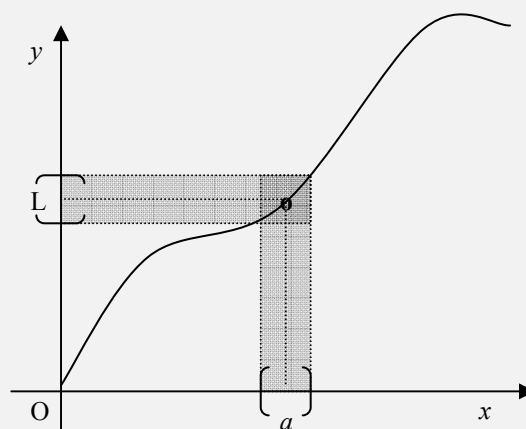
Podemos ler a expressão matemática  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  como “**o limite da função  $f$  quando  $x$**

**tende para  $a$  é  $L$ .**”

Agora, vamos analisar os gráficos das funções  $f$  e  $g$  representadas abaixo:



Limite de  $f$  quando  $x$  tende a  $a$



Limite de  $g$  quando  $x$  tende a  $a$

1. Qual a diferença entre as duas funções representadas graficamente acima?
2. Pode-se dizer, a partir das duas figuras, que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ? Explique com suas palavras.

### 3.4.1 Orientações para a atividade 4

| <b>Orientações para a atividade 4</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>                 | 15 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Objetivo</b>                       | Introduzir a definição informal de limite, apresentando um texto para leitura e interpretação desse conceito.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Tipo de trabalho</b>               | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Recurso de Informática</b>         | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Outras observações</b>             | <p>Espera-se, para a primeira questão, que o aluno observe a diferença entre os domínios das duas funções, explicitando seu raciocínio em uma linguagem natural ou pela representação matemática do domínio.</p> <p>A diferença entre as figuras pode levar o aluno a questionar a existência do limite para a função <math>g</math> quando <math>x</math> tende a <math>a</math>, uma vez que as atividades anteriores abordavam funções definidas e contínuas para todo o intervalo real <math>e</math>, portanto, <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)</math>. Para responder corretamente a 2ª questão, o aluno deva ler e, principalmente, compreender que, para a existência de limite de uma função em um ponto, não necessariamente a função <math>f</math> precisa estar definida neste ponto.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

## 3.5 Atividade 5

## Atividade 5

Vocês já sabem o que significa dizer  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Aprenderemos, agora, o que são limites laterais de uma função  $f$  de variável real  $x$ .

Para a notação  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ , dizemos que o **limite lateral esquerdo** da função  $f(x)$  é  $L$  quando  $x$  tende para  $a$  por valores de  $x$  menores que  $a$ , isto é, valores de  $x$  à esquerda de  $a$  na reta real.

De forma análoga, complete:

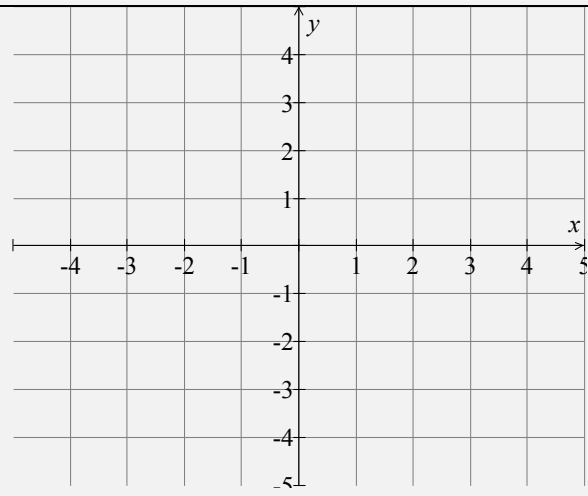
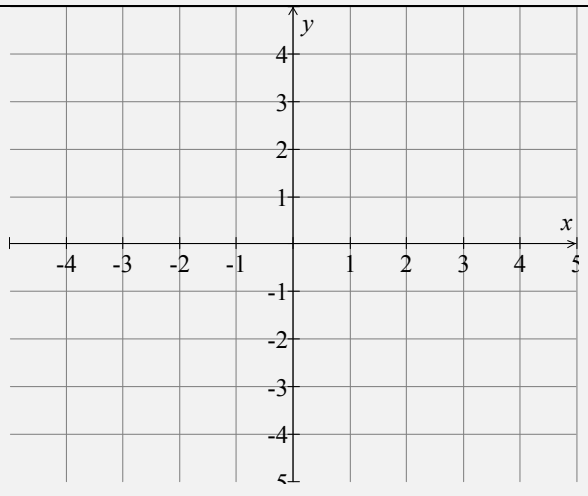
Para a notação  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ , dizemos que \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Esboce os gráficos das funções e faça o que se pede:

|                                                                                            |                                   |                                                                                           |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \leq 1 \\ -x+4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ |                                   | $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$    |  |
|         |                                   |       |  |
| Calcule<br>$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$                                               | $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$ | O que podemos dizer sobre os limites laterais de $g(x)$ quando $x$ tende a 1? Justifique. |  |

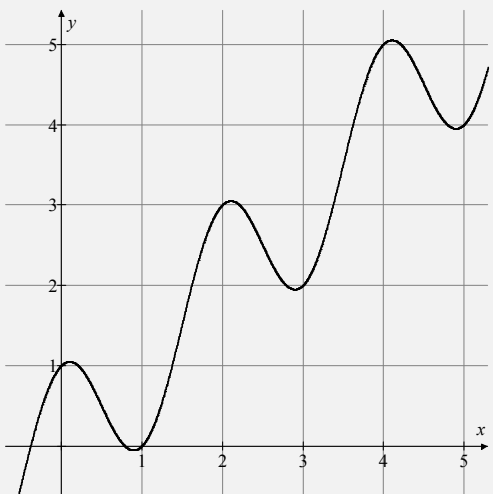
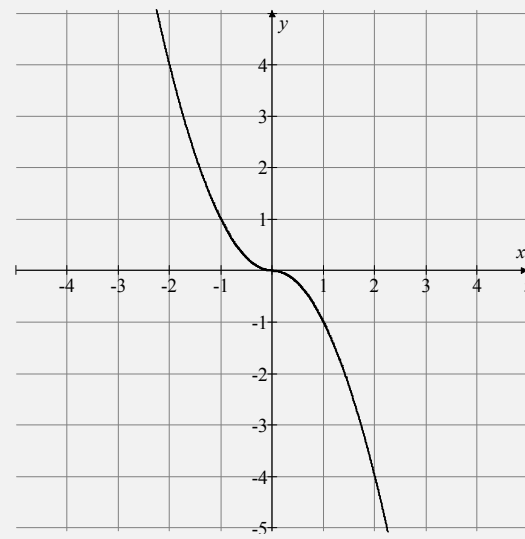
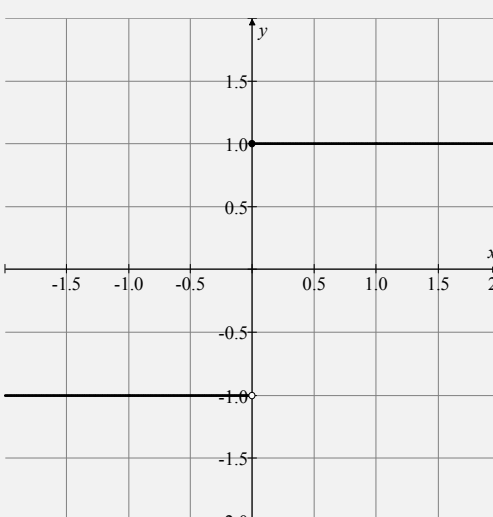
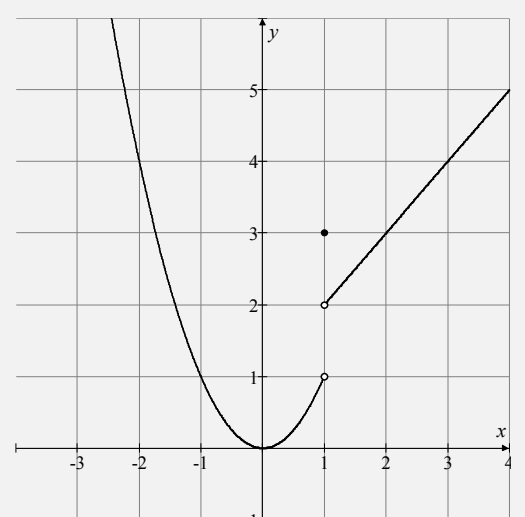
### 3.5.1 Orientações para a atividade 5

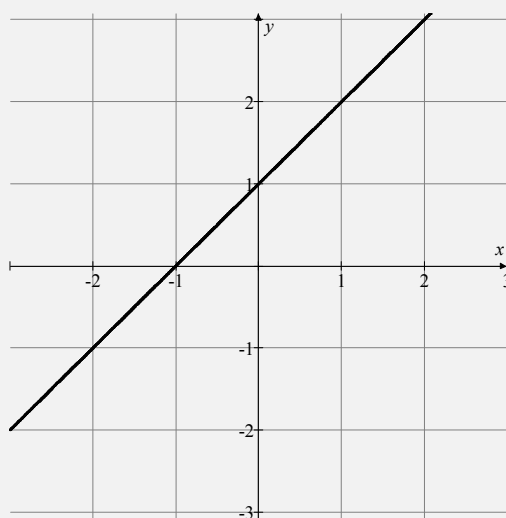
| <b>Orientações para a atividade 5</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>                 | 20 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Objetivo</b>                       | Apresentar o conceito de limites laterais de uma função de variável real.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Tipo de trabalho</b>               | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Recurso de Informática</b>         | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Outras observações</b>             | <p>A tarefa demanda conhecimentos anteriores dos alunos sobre funções polinomiais de primeiro grau, de segundo grau e de função constante e ainda sobre funções definidas por mais de uma sentença. Erros no traçado do esboço dos gráficos podem levar a respostas incorretas para os valores dos limites laterais. Outro fator que pode ocasionar respostas incorretas é a correspondência incorreta entre os quadros algébrico e gráfico.</p> <p>Outro detalhe importante, nessa atividade, é o fato de que a função <math>g</math> apresenta limites laterais diferentes com <math>x</math> tendendo a 1. Para os alunos, fornecer uma justificativa para isso pode ser um problema, uma vez que os estudantes não estão acostumados, pelo menos em disciplinas da área de exatas, a externar suas ideias ainda mais utilizando-se da linguagem escrita.</p> <p>Esperamos que mesmo que o aluno não compreenda a definição de limite lateral esquerdo ele ainda possa escrever corretamente a definição de limite lateral direito, simplesmente por analogia ao texto apresentado. Mesmo que isso ocorra, essa questão pode levar o estudante a se acostumar com o exercício da escrita Matemática.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora



3.6 Atividade 6

| Atividade 6                                                                                                                                                                                                  |                                   |                                                                                                                                                       |                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Observe os gráficos e faça o que se pede                                                                                                                                                                     |                                   |                                                                                                                                                       |                                                                                                                                   |
| <div>1. </div>                                                                                                             |                                   | <div>2. </div>                                                     |                                                                                                                                   |
| $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$                                                                                                                                                                            | $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) =$ | $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) =$                                                                                                                       | <div>Existe <math>\lim_{x \rightarrow 2} f(x)</math>? Justifique.</div> <div>Calcule <math>f(2)</math>. O que você observa?</div> |
| <div>3. </div>                                                                                                            |                                   | <div>4. </div>                                                    |                                                                                                                                   |
| <div>Determinar os limites laterais de <math>f(x)</math> quando <math>x</math> tende a 0 e verificar se existe <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x)</math>.</div> <div>Qual o valor de <math>f(0)</math>?</div> |                                   | <div>Verifique se existe <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x)</math>. Justifique.</div> <div>Qual o valor de <math>f</math> em <math>x = 1</math>?</div> |                                                                                                                                   |



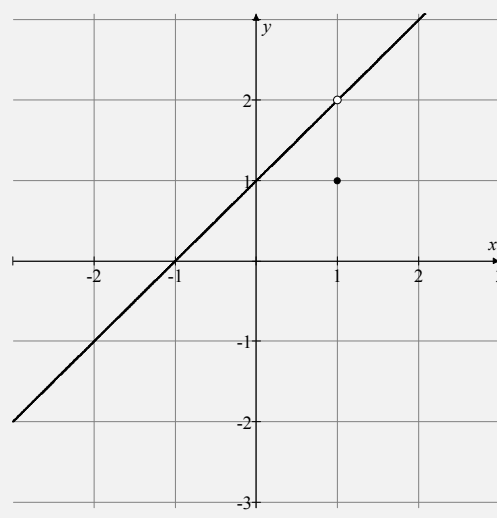
5.

Complete:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

$$f(1) =$$

O que você observa?



6.

Complete:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

$$f(1) =$$

O que você observa?

7. A função da figura do exercício 5 é **contínua** em  $x = 1$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ .

A função da figura do exercício 6 é **descontínua** em  $x = 1$ . Explique porquê.

Seja  $f: A \rightarrow B$ , dizemos que a função  $f$  é **contínua** se para todo  $a \in A$  temos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

8. Represente graficamente uma função  $f$  que atenda a todas as condições pedidas abaixo:

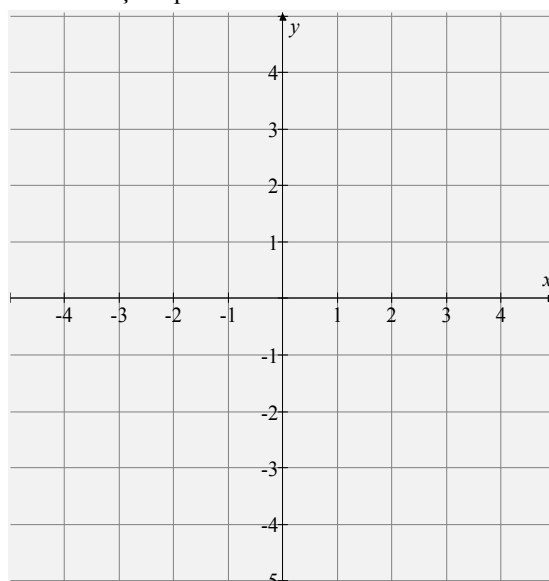
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\text{Não existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ e } f(0) = 2$$

$f(-1) = 0$  e a função é contínua neste ponto  $f(x)$  se torna arbitrariamente grande quando  $x$  aumenta indefinidamente



## 3.6.1 Orientações para a atividade 6

| Orientações para a atividade 6 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>          | 25 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Objetivo</b>                | Fixar o conceito de limites laterais e introduzir a questão da continuidade de funções, através da análise de esboços de gráficos de diferentes funções.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Tipo de trabalho</b>        | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Recurso de Informática</b>  | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Outras observações</b>      | <p>Nas duas primeiras questões, tem-se que <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)</math>. Uma interpretação incorreta dos esboços pode levar a respostas erradas para os limites.</p> <p>A função apresentada no exercício 3 apresenta uma descontinuidade em salto, em que <math>\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)</math>. Um erro esperado para essa questão é que o aluno, por ter trabalhado anteriormente com funções polinomiais, conclua que, para qualquer função, <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)</math>.</p> <p>O gráfico do exercício 4 apresenta uma função em que os valores dos limites laterais são diferentes entre si e diferentes do valor da função no ponto <math>x = 1</math>. Uma interpretação incorreta do conceito de limite pode levar a respostas erradas, tais como a afirmação da existência do limite com <math>x</math> tendendo a 1, sendo esse valor o de <math>f(1)</math>.</p> <p>O exercício 7 afirma que a função esboçada no exercício 5 é contínua, uma vez que <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)</math>, ressaltando que a função do exercício 6 não é contínua, e pede uma justificativa desse fato. São aceitas como corretas as respostas que indiquem que <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)</math>, utilizando o quadro algébrico ou de linguagem natural.</p> <p>A 8ª questão solicita aos alunos que representem uma função qualquer, seguindo as regras ditadas. Essa questão envolve a representação gráfica dos conceitos de limites laterais e da não existência de limite em um ponto, bem como a ideia de continuidade de função. Outro ponto colocado é a introdução da noção de tender ao infinito.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

## 3.7 Atividade 7

**Atividade 7**

Estudaremos, nessa atividade, algumas propriedades de limites de funções de variável real. Para isto,

considere  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$  e  $k \in \mathbb{R}$ . Observe e complete os espaços em branco:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

*O limite da soma é a soma dos limites.*

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

*O limite da diferença é*

3.

*O limite do produto é o produto dos limites.*

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kL_1$$

5.

*O limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero.*

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L_1^n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}, \text{ onde } n \in \mathbb{N} \text{ (Se } n \text{ for par, então } L_1 \geq 0).$$

*O limite da raiz enésima é raiz enésima do limite. Se n for par, então  $L_1 \geq 0$ .*

### 3.7.1 Orientações para a atividade 7

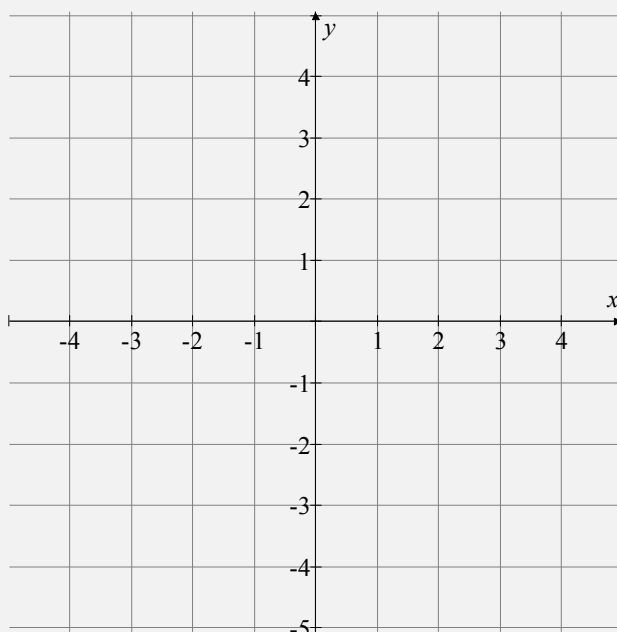
| <b>Orientações para a atividade 7</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>                 | 15 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Objetivo</b>                       | Introduzir algumas propriedades de limites de funções de variável real.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Tipo de trabalho</b>               | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Recurso de Informática</b>         | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Outras observações</b>             | <p>Nessa atividade, algumas propriedades dos limites são apresentadas, ou na linguagem algébrica para que os alunos transcrevam para a linguagem natural, ou nesta última para serem reescritas utilizando símbolos matemáticos. Erros nessas transcrições podem ser devido ao próprio processo de interpretação/decodificação da linguagem simbólica empregada, evidenciando uma correspondência incorreta entre os quadros de linguagem simbólica e de linguagem natural.</p> <p>A escrita matemática é o foco da atividade, incentivando-se o uso da simbologia matemática em conexão com a linguagem natural.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

## 3.8 Atividade 8

## Atividade 8

1. Esboce o gráfico da função  $f(x) = x$  no plano cartesiano abaixo.



Essa função é contínua para qualquer valor real de  $x$ ? O que podemos dizer, então, sobre o  $\lim_{x \rightarrow a} x$ ?

Justifique.

2. Determine os valores dos limites abaixo, indicando quais propriedades vistas na atividade 7 foram utilizadas na resolução.

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 =$

b.  $\lim_{x \rightarrow 25} \sqrt{x} =$

c.  $\lim_{x \rightarrow 3} x^{-1} =$

d.  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 2) =$

e.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2)(x^2 + 2x + 4) =$

f.  $\lim_{x \rightarrow -2} (x - 1)^2 =$

g.  $\lim_{x \rightarrow 3} [(x - 1)(x - 2)] =$

3. Os resultados obtidos dos exercícios 2.d) e 2.g) são iguais. Você poderia saber que esses limites são iguais, sem efetuar os cálculos? Justifique.
4. Seja  $f(x) = x - 1$  e  $g(x) = x^2 - 1$ . Calcule
- $\lim_{x \rightarrow -2} [f(x)]^2 =$
  - $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)} =$
  - Existe  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$ ? Justifique.
  - O que acontece quando calculamos  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ ?

Fonte: Elaborado pela autora

## 3.8.1 Orientações para a atividade 8

| Orientações para a atividade 8 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>          | 30 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Objetivo</b>                | Fixar as propriedades de limites.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Tipo de trabalho</b>        | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Recurso de Informática</b>  | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Outras observações</b>      | <p>O 1º exercício leva o aluno a questionar a continuidade da função identidade e o valor de <math>\lim_{x \rightarrow a} x</math>, trabalhando o quadro gráfico e o algébrico.</p> <p>O exercício pede uma justificativa da resposta do aluno, incentivando-o à escrita matemática. Espera-se que o estudante observe que, para essa função, <math>\lim_{x \rightarrow a} x = a, \forall a \in \mathbb{R}</math>. Essa resposta e as propriedades de limites discutidas na Atividade 7 constituem as ferramentas para o cálculo dos limites pedidos nos outros exercícios.</p> <p>Descuidos nas operações algébricas podem alterar os valores finais dos limites da questão 2, bem como o emprego incorreto das propriedades dos limites.</p> <p>O exercício 3 informa que os valores dos limites das questões 2.d e 2.g são iguais e pede aos alunos uma justificativa, novamente objetivando o desenvolvimento da escrita matemática. Uma resposta esperada é que o produto dos fatores apresentados na questão 2.d é a função da questão 2.g.</p> <p>A 4ª tarefa introduz dois questionamentos importantes – o limite de uma função racional quando o denominador tende a zero e limites em que o cálculo por substituição levaria à indeterminação 0/0. Espera-se que a maioria dos alunos responda que esse limites não existem ou que são indeterminados, mas a introdução desses tópicos pode despertar os estudantes para os próximos limites a serem estudados.</p> |

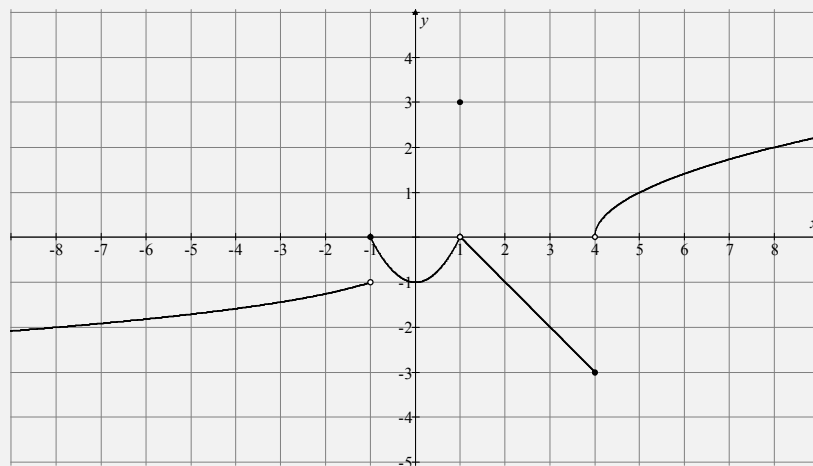
Fonte: Elaborado pela autora



## 3.9 Atividade 9

## Atividade 9

1. Observe o esboço da função  $f(x)$  abaixo e determine o que se pede:



- $\lim_{x \rightarrow -8} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
2. Para a função esboçada anteriormente, identifique pontos onde existe descontinuidade. Justifique sua resposta.

3. Determine o valor de  $m$  para que exista o limite da função  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ mx - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$  quando  $x$  tende para 1.
4. Determine o valor de  $m$  para que a função  $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & \text{se } x \neq -2 \\ m, & \text{se } x = -2 \end{cases}$  seja contínua em  $x$  igual a  $-2$ .
5. Calcule os limites abaixo, indicando as propriedades utilizadas:
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + x - 1) =$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x+3} =$
  - $\lim_{x \rightarrow 1} (x-3)^3 =$
  - $\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt[4]{x^2 - 9} =$
  - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-3} =$
  - $\lim_{x \rightarrow -10} 2 =$
6. Calcule os limites de  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$  e de  $g(x) = x - 2$  quando  $x$  tende a 2. O que você observa? Justifique.

### 3.9.1 Orientações para a atividade 9

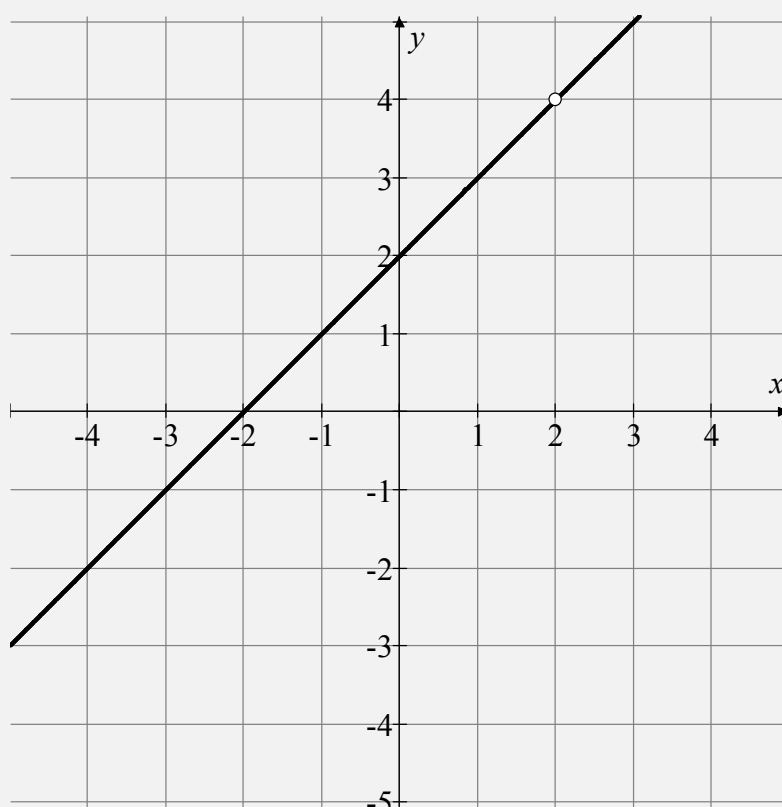
| <b>Orientações para a atividade 9</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>                 | 30 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Objetivo</b>                       | Retomar os conceitos de limite, a continuidade, limites laterais, existência de limite e propriedades de limites estudados anteriormente.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Tipo de trabalho</b>               | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Recurso de Informática</b>         | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Outras observações</b>             | <p>A primeira questão envolve a análise gráfica de uma função sendo que dois tipos de erros podem ocorrer – uma interpretação incorreta do esboço do gráfico da função ou interpretação errada do conceito de limite.</p> <p>A segunda questão propõe que os alunos discutam sobre a continuidade da função esboçada no exercício anterior, exercitando a escrita matemática. Espera-se que os alunos identifiquem os três valores de <math>x</math> onde a função é descontínua, ou porque não existe limite da função no ponto ou porque, apesar da existência do limite, o valor deste difere do valor da função no ponto.</p> <p>A terceira questão pede o cálculo de <math>m</math> tal que exista o limite da função para um determinado valor de <math>x</math>, sendo necessário o conhecimento sobre os critérios da existência do limite da função,.</p> <p>A questão 4 solicita ao estudante um valor para <math>m</math> tal que a função apresentada fosse contínua para <math>x = -2</math>.</p> <p>A 5ª questão tem por objetivo reforçar o uso das propriedades dos limites. A substituição simples dos valores de <math>x</math> para os cálculos dos limites também leva a resultados corretos. Solicita-se, no entanto, que os alunos indiquem todas as propriedades utilizadas no cálculo de cada limite.</p> <p>A última questão conduz a uma indeterminação do tipo <math>0/0</math>. Espera-se que os alunos busquem estratégias de solução e que, talvez, através da simplificação do limite da função <math>f</math> pela fatoração cheguem ao mesmo limite da função <math>g</math>, quando <math>x</math> tende a 2.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

## 3.10 Atividade 10

## Atividade 10

1. Considere a função  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ , cujo esboço é fornecido abaixo e faça o que se pede:



- a) Especifique o seu domínio.
- b) Observando o gráfico, determine  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right)$ .
- c) Existem diferenças entre o gráfico da função  $f$  e da função  $g(x) = x + 2$ ? Justifique.
- d) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ . Compare com o limite obtido na questão b). O que você observa? Justifique.

2. Seja a função  $f(x) = 2x^2 + x - 1$ .

a) Determine os seus zeros.

b) Lembrando que é possível escrever  $g(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são os zeros da função, escreva  $f(x)$  na forma fatorada.

c) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$ .

3. Seja a função  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ .

a) Especifique o seu domínio.

b) Como você poderia calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ ?

4. Seja  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 3x}$ . Como proceder para calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 - 3x}$ ?

5. Para a função  $f(x) = x^2$ , determine o que se pede:

Seja  $g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . Calcule o valor de  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x)$ .

O limite calculado na questão anterior é um limite especial que recebe o nome de derivada da função no ponto  $x$ , denotada por  $f'(x)$ . Podemos, então, matematicamente, definir  $f'(x)$ , então, como  $f'(x) =$

### 3.10.1 Orientações para a atividade 10

| Orientações para a atividade 10 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tempo estimado                  | 30 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Objetivo                        | Introduzir limites cujo cálculo por substituição conduziria à indeterminação do tipo 0/0.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Tipo de trabalho                | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Recurso de Informática          | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Outras observações              | <p>Qualquer valor do limite determinado na questão 1.b, diferente de 4, pode evidenciar que os alunos ainda não compreenderam o conceito de limite. Com a pergunta 1.d espera-se que os estudantes comecem a relacionar que o limite da função <math>f</math> pode ser calculado pelo limite da função <math>g</math>, com <math>x</math> tendendo a 2.</p> <p>Na 2ª questão, a determinação incorreta dos zeros da função <math>f</math> pode levar a resultados incorretos do valor do limite, bem como respostas negando a existência do limite (divisão por zero).</p> <p>Espera-se, na 3ª e na 4ª questão, que os alunos consigam simplificar as funções racionais para, então, calcularem os limites.</p> <p>Na 5ª questão, uma dificuldade que pode surgir é a interpretação da linguagem matemática para calcular <math>g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}</math>, considerando o nível de abstração exigido. Outro ponto importante é a interpretação que os alunos podem fornecer para o novo conceito que está sendo apresentado – a derivada no ponto <math>x</math>. Espera-se que os alunos encontrem a derivada da função <math>f</math> empregando corretamente a simbologia matemática.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

## 3.11 Atividade 11

**Atividade 11**

As fórmulas de fatoração apresentadas a seguir podem ser utilizadas para o cálculo dos limites de funções racionais.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$ab + ac = a(b + c)$$

1. Empregue essas fórmulas para calcular os limites abaixo:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 2)^2 - 4}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

2. Para a função  $f(x) = mx + n$ , onde  $m$  e  $n \in \mathbb{R}$ , calcular  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

### 3.11.1 Orientações para a atividade 11

| <b>Orientações para a atividade 11</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>                  | 35 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Objetivo</b>                        | Fixar as ideias relativas ao cálculo de limites que recaem em uma indeterminação do tipo $0/0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Tipo de trabalho</b>                | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Recurso de Informática</b>          | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Outras observações</b>              | <p>Respostas erradas para a 1ª questão podem indicar equívocos em relação ao uso dos procedimentos de fatoração ou à interpretação incorreta do conceito de limite.</p> <p>O exercício 2 solicita o cálculo da derivada da função polinomial de 1º grau no ponto <math>x = a</math> sem exigir, entretanto, que os alunos tenham um conhecimento de que se trata do cálculo da derivada em um ponto. Os objetivos dessa questão são saber se os estudantes conseguem fazer a leitura com entendimento da simbologia matemática envolvida no processo e determinar o limite pedido.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora



### 3.12 Atividade 12

#### Atividade 12

Para esta atividade, utilizaremos o *software Winplot* com o objetivo de analisar o comportamento das funções abaixo.

1. Esboce o gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Responda
  - a) O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ ?
  - b) E sobre  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ ?
  - c) Existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ? Justifique.
2. Esboce o gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Responda
  - a) O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$ ?
  - b) E sobre  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$ ?
  - c) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ .
3. Esboce o gráfico das funções  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  e  $g(x) = \frac{1}{x^4}$ . Você observa algum padrão? Descreva-o.
4. Analisando as questões acima, o que podemos afirmar sobre  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ ? E sobre  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2}$ ? E  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^3}$ ? Justifique.

## 3.12.1 Orientações para a atividade 12

| Orientações para a atividade 12 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>           | 20 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Objetivo</b>                 | Estudar limites tendendo para o infinito, quando o denominador tende para zero.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Tipo de trabalho</b>         | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Recurso de Informática</b>   | Utilização de um software para esboço gráfico das funções (Winplot).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Outras observações</b>       | <p>Na 1ª questão, espera-se que os alunos conclua que não existe o limite quando <math>x</math> tende a zero, uma vez que os limites laterais são diferentes.</p> <p>A 2ª questão apresenta a função <math>f(x) = \frac{1}{x^2}</math>, cujo limite, quando <math>x</math> tende a zero, tende para infinito. Ao utilizar o software, os alunos devem escrever a função com um certo cuidado, pois o programa pode interpretar uma função diferente da especificada. Assim, a digitação correta, por parte dos estudantes, da função como <math>f(x) = 1/x^2</math> ou ainda, <math>f(x) = x^{(-2)}</math>, leva ao esboço gráfico esperado.</p> <p>A 3ª questão pretende conduzir os alunos a uma pequena generalização de <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^n} \right), n \in \mathbb{N}^*</math>, através da observação dos quadros gráficos das funções apresentadas neste exercício e nos dois anteriores. Respostas incorretas nessas questões, devido a erros de interpretação dos quadros ou esboços incorretos dos gráficos, podem fazer com que os alunos não façam a conjectura esperada sobre o valor de <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^n} \right), n \in \mathbb{N}^*</math>.</p> <p>Para a 4ª questão, embora não tenha sido solicitado o uso do software, esperamos que os alunos utilizem o programa para a análise dos comportamentos das funções, empregando o quadro gráfico para a determinação dos limites.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.13 Atividade 13

#### Atividade 13

Para esta atividade, utilizaremos o *software Winplot* com o objetivo de analisar o comportamento das funções abaixo.

1. Esboce os gráficos das funções  $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = -x + 1$  e  $h(x) = x^2 - 2x + 3$ . Observe o comportamento das funções e determine
  - a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
  - b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
  - c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$
  - d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$
  - e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)}$
  - f) Utilizando o limite calculado na letra e), calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)}$ . Justifique.
2. O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$  se
  - a)  $n > m$ ?
  - b)  $n = m$ ?
  - c)  $n < m$ ?
3. Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  duas funções polinomiais de variáveis e coeficientes reais. Crie funções tais que
  - a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$
  - b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -3$
  - c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$

### 3.13.1 Orientações para a atividade 13

| <b>Orientações para a atividade 13</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>                  | 20 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Objetivo</b>                        | Introduzir o conceito de limite com $x$ tendendo a infinito, por vezes chamados limites no infinito.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Tipo de trabalho</b>                | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Recurso de Informática</b>          | Utilização de um software para esboço gráfico das funções (Winplot).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Outras observações</b>              | <p>Para o traçado dos gráficos das funções das questões 1.d) e 1.e), os alunos podem proceder de duas formas distintas – pela digitalização explícita das funções racionais <math>f/g</math> e <math>h/g</math> ou pelo recurso do programa “combinações” que, com duas ou mais funções, esboça uma nova função decorrente da soma de outras, divisão, produto, etc. Dessa forma, considerando que os esboços gráficos das funções estejam corretos, os erros nos valores dos limites devem ser relacionados à interpretação errada dos esboços ou ao não entendimento do conceito de limite com <math>x</math> tendendo para infinito. O exercício 1.f) solicita aos alunos que calculem o limite a partir de 1.e). Uma resposta possível para o cálculo desse limite está nas propriedades de limites vistas anteriormente.</p> <p>A questão 2 tenta levar os alunos a uma complexificação do limite de funções racionais com <math>x</math> tendendo a infinito. Os alunos podem chegar às conclusões corretas pela observação do exercício 1, ou esboçando os gráficos de diversas funções usando o Winplot. Uma dificuldade nessa questão pode ser o entendimento da linguagem matemática empregada.</p> <p>O 3º exercício solicita aos alunos que criem funções racionais, a partir de funções polinomiais tais que o valor do limite, com <math>x</math> tendendo a infinito, seja conhecido. Esse exercício corresponde à fase de “familiarização da teoria dialética ferramenta-objeto” (DOUADY, 1986). Os estudantes devem ter conhecimento sobre o que é uma função polinomial e ter respondido corretamente a 2ª questão para criar as funções racionais. A utilização do quadro gráfico pode ajudar os alunos a responderem esse exercício. Nesse caso, um ponto importante é o jogo de quadros algébrico e gráfico.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.14 Atividade 14

#### Atividade 14

Para esta atividade, utilizaremos o *software Winplot* com o objetivo de analisar o comportamento das funções abaixo.

- Recordaremos, agora, a função trigonométrica  $f(x) = \text{sen}(x)$ .
  - Qual o período da função  $f(x) = \text{sen}(x)$ ? E qual o período da função  $f(x) = \text{sen}(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ?
  - Qual a imagem da função  $f(x) = b \text{sen}(x)$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ?
- Para que valores de  $x$  tem sentido definir a função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ ? Esboce o gráfico da função.  
  
Observando o gráfico de  $f(x)$ , o que podemos afirmar sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ ?
- A partir de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$ .
- Através da observação do esboço da família de funções  $f(x) = \frac{\text{sen}(ax)}{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ , o que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{x}$ ?
- Analise, agora, a família  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ . O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{ax}$ ? E sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{bx}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b \in \mathbb{R}^*$ ?

Fonte: Elaborado pela autora

## 3.14.1 Orientações para a atividade 14

| Orientações para a atividade 14 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>           | 25 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Objetivo</b>                 | Estudar o limite trigonométrico fundamental                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Tipo de trabalho</b>         | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Recurso de Informática</b>   | Utilização de um software para esboço gráfico das funções (Winplot).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Outras observações</b>       | <p>Respostas diferentes de <math>\frac{2\pi}{a}</math>, para o período da função <math>f(x) = \text{sen}(ax)</math>, <math>a \in \mathbb{R}^*</math>, e <math>[-b, b]</math> para a imagem da função <math>f(x) = b \text{sen}(x)</math>, <math>b \in \mathbb{R}^*</math> podem decorrer da digitação incorreta da função, ou de dificuldades em identificar o período da função ou, ainda, de visualização do conjunto imagem.</p> <p>Espera-se que os alunos indiquem respostas semelhantes à <math>x \in \mathbb{R}^*</math> para a 2ª questão. Através da representação da função <math>f</math> no quadro gráfico, espera-se que os alunos consigam determinar o valor <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}</math>.</p> <p>Apesar de solicitar aos alunos que utilizem a resposta da questão 2 para calcular o limite da 3ª questão, entendemos que os alunos podem utilizar o programa Winplot para traçar o gráfico da função <math>g(x) = \frac{\tan(x)}{x}</math> para, então, analisarem o limite pedido.</p> <p>No exercício 4, a digitalização incorreta da função, tal como <math>y = \sin ax/x</math> no lugar de <math>y = \sin(ax)/x</math>, pode levar a um resultado incorreto do limite. As perguntas “o que podemos dizer sobre...” nos exercícios são colocadas para incentivar a escrita matemática, embora muitos alunos possam apenas informar os valores dos limites, ao invés de justificar o cálculo.</p> <p>Problemas na digitalização das funções do 5º exercício podem acarretar erros nas observações das funções e, por conseguinte, trazer valores incorretos para os limites solicitados.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.15 Atividade 15

#### Atividade 15

Para esta atividade, utilizaremos o *software Winplot* com o objetivo de analisar o comportamento das funções exponenciais e logarítmicas.

1. Qual o valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ? Qual o valor que você espera encontrar para  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ?

Esboce o gráfico de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  e verifique o valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

2. A partir do limite observado na questão anterior, como calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}$ ?

3. Utilize as propriedades estudadas sobre limites para calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$ , sabendo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^2. \text{ Você consegue calcular } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{a \cdot x}, \text{ onde } a \text{ é um}$$

número real não nulo?

4. Escolha alguns valores para  $b$  (diferente de zero) para esboçar a função  $f(x) = \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x$ . Você

consegue identificar algum padrão para  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x$ ? Justifique.

## 3.15.1 Orientações para a atividade 15

| Orientações para a atividade 15 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>           | 20 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Objetivo</b>                 | Estudar o limite exponencial fundamental.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Tipo de trabalho</b>         | Em dupla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Recurso de Informática</b>   | Utilização de um software para esboço gráfico das funções (Winplot).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Outras observações</b>       | <p>Na questão 1 não cabe uma análise do que é certo ou errado ao perguntar “o que você espera encontrar...”. O uso incorreto de parênteses para digitalizar a função no software pode levar a um traçado incorreto do gráfico da função analisada e, portanto, a respostas diferentes para o valor do limite em questão. Uma dificuldade na determinação desse limite pode decorrer do desconhecimento ou esquecimento do número <math>e</math>.</p> <p>Espera-se, para a 2ª questão, que os alunos consigam observar que uma mudança simples de variável (<math>y = 1/x</math>) pode levar ao resultado desejado. Entretanto, apesar de não ter sido solicitado, os alunos podem traçar o esboço do gráfico da função utilizando o software. Uma digitalização errada da função como, por exemplo, <math>y = (1+x)^{1/x}</math> ou <math>y = 1 + x^{1/x}</math> ao invés de <math>y = (1 + x)^{(1/x)}</math>, leva a um esboço incorreto e, portanto, a um valor do limite diferente do esperado.</p> <p>Espera-se que através da observação dos gráficos os alunos consigam levantar uma conjectura e generalizar, obtendo o valor de <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x</math>.</p> <p>Novamente, pretende-se enfatizar a escrita matemática, solicitando a justificativa dos resultados obtidos.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora



**3.16 Atividade 16****Atividade 16**

1. Nesse ano, nós estudamos o tópico limite. Enumere a(s) coisa(s) que você recorda sobre esse assunto:

---

---

---

---

---

---

2. Explique, com suas palavras, o que você entende por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  :

---

---

---

---

---

3. O que você achou sobre a forma que a matéria de limites foi vista em sala de aula?

---

---

---

---

---

4. Espaço livre para comentários e sugestões:

---

---

---

---

---

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.16.1 Considerações para a atividade 16

| <b>Considerações para a atividade 16</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tempo estimado</b>                    | 10 minutos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Objetivo</b>                          | Fazer um levantamento do que os alunos se lembram dos conceitos e noções sobre o tema limite de uma função real, abordados em sala de aula.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Tipo de trabalho</b>                  | Individual.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Recurso de Informática</b>            | Não necessita.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Outras observações</b>                | <p>Não existem respostas certas ou erradas para a primeira questão, mas espera-se que os alunos consigam enumerar alguns tópicos sobre o assunto de limites.</p> <p>A segunda questão incentiva o “escrever para aprender matemática”, solicitando ao aluno que escreva em linguagem natural o que entende sobre a expressão matemática simbólica apresentada.</p> <p>A terceira e a quarta questões pretendem uma avaliação dos alunos sobre o tipo de trabalho desenvolvido no estudo de limites.</p> |

Fonte: Elaborado pela autora

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades apresentadas bem como as orientações sobre seu desenvolvimento foram extraídas de Pinto (2010). As atividades foram aplicadas em sala de aula por essa pesquisadora.

Três pontos foram importantes para o traçado das atividades:

- a. As dificuldades e obstáculos relativos ao ensino de limite;
- b. A teoria dialética ferramenta-objeto e jogo-de-quadros de Douady (1986), Nessas atividades, os estudantes deverão utilizar o conhecimento antigo sobre funções para construir o conhecimento novo, sobre limites. O jogo de quadros (numérico, algébrico, gráfico, de língua natural) deve ser empregado pelos alunos e pelo professor na resolução dos exercícios apresentados nas atividades. Para auxiliar no esboço gráfico das funções, recomenda-se o software Winplot. O professor, durante a fase de institucionalização global, pode discutir algumas demonstrações, teoremas e exemplos de cada tópico trabalhado nas atividades, objetivando conferir o status de objeto às noções construídas pelos estudantes.
- c. A teoria escrever para aprender matemática: A importância da escrita como ferramenta de aprendizagem reside no fato de ser um processo que permite a organização do pensamento e a perspectiva da reflexão sobre o que foi registrado.

É preciso ressaltar que mais importante que uma resposta certa ou errada é o desenvolvimento do exercício, o seu processo de resolução. Esperamos que o professor, através da teoria escrever para aprender Matemática, tenha oportunidade para observar essa questão, podendo identificar as dificuldades apresentadas pelo aluno no processo de aprendizagem dos tópicos de Matemática.

O material *Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real* foi planejado para servir de introdução ao assunto de limites, podendo ser utilizado tanto no Ensino Médio quanto em cursos introdutórios ao Cálculo Diferencial e Integral.

Esperamos que o professor ao utilizar as fichas propostas nesse trabalho, fique incentivado a criar as suas próprias atividades e que as fichas possam ser um instrumento para o estudante que estiver interessado em iniciar seus estudos nessa área.

## REFERÊNCIAS

- BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000. 109 p. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859)>. Acesso em: 11 abr. 2009.
- CARVALHO, José António Brandão; PIMENTA, Jorge Manuel Rocha - “Escrever para aprender, escrever para exprimir o aprendido”. In SILVA, Bento D. ; ALMEIDA, Leandro S., (coord). **Actas do Congresso Galaico-Português de Psicopedagogia**. [CD-ROM]. Braga: Centro de Investigação em Educação do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho, p. 1877-1885, 2005. Disponível em: <<http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/5495/1/Escrever%20para%20aprender%2c%20escrever%20para%20exprimir%20o%20aprendido.pdf>>. Acesso em: 20 maio 2010.
- DOUADY, R. Jeux des cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 5-31. La Pensée Sauvage, 1986.
- FREITAG, Mark. Reading and writing in the mathematics classroom. **The Mathematics Educator**, Georgia, v. 8, n. 1, p.16-21, 1997. Disponível em: <<http://math.coe.uga.edu/TME/Issues/v08n1/3freitag.pdf>>. Acesso em: 20 maio 2010.
- MARANHÃO, Maria Cristina S. de A.. Dialética ferramenta-objeto. In: ALCÂNTARA, Sílvia Dias. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: Educ, 1999. p. 115-134.
- PORTER, Mary K.; MASINGILA, Joanna O. Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. **Educational Studies In Mathematics**, Netherlands, v. 42, n. 2, p.165-177, mar. 2000.
- PINTO, Gisele Teixeira Dias Costa. **Uma proposta para o ensino e aprendizagem de limite de função real**. 2010. 172 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.
- POWELL, Ângelo Edward; BAIRRAL, Marcelo. **A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades**. Campinas: Papirus, 2006. 111p.
- SANTOS, Sandra Augusta. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espasandin. **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p. 127-141.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. **Educação em Foco**, São Paulo, v. 8, n. 1, p.1-12, mar-ago. 2003.

Disponível em:

<[http://www.moderna.com.br/servicos/evento\\_utopia/Artigo\\_matematica.doc](http://www.moderna.com.br/servicos/evento_utopia/Artigo_matematica.doc)> Acesso em: 20 abr. 2010.

VRANCKEN, Silvia et al. Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. **Premisa**, Buenos Aires - Argentina, n. 29, p.9-19, maio 2006. Disponível em: <<http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf>>. Acesso em: 19 abr. 2010.

**ANEXO**

## ANEXO A – GRÁFICOS COM O PROGRAMA WINPLOT

O programa Winplot é livre e foi projetado pelo professor de Matemática Rick Parris, podendo ser encontrado no endereço <http://math.exeter.edu/rparris/>. A versão utilizada pelos alunos foi traduzida para o português pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus.

Inicialmente, os alunos aprenderam a trabalhar com o programa Winplot, em duas aulas de 50 minutos cada. Nessas aulas os alunos estudaram as funções mais básicas da opção 2-D do programa, tais como alterar as escalas dos eixos coordenados e introduzir algumas funções explícitas, como representar pontos de a partir de coordenadas estabelecidas, famílias de curvas e animação de funções.

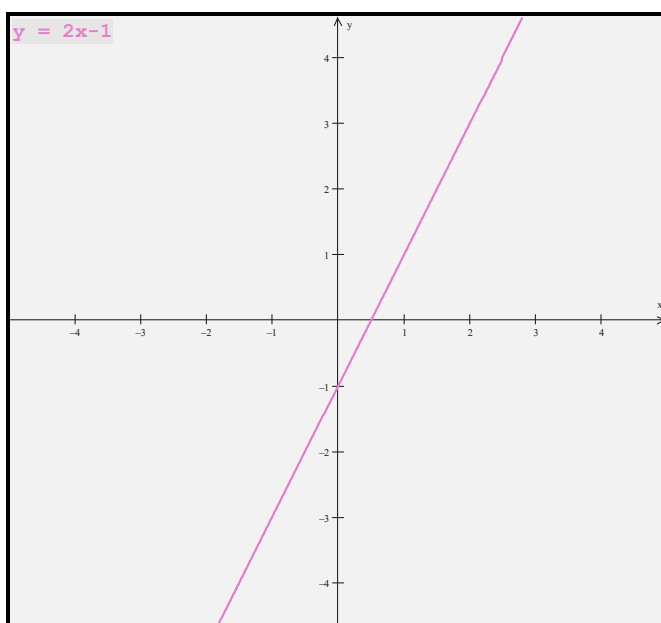


Figura 1: Gráfico de função polinomial de 1º grau da aluna Tamires  
Fonte: Dados da pesquisa

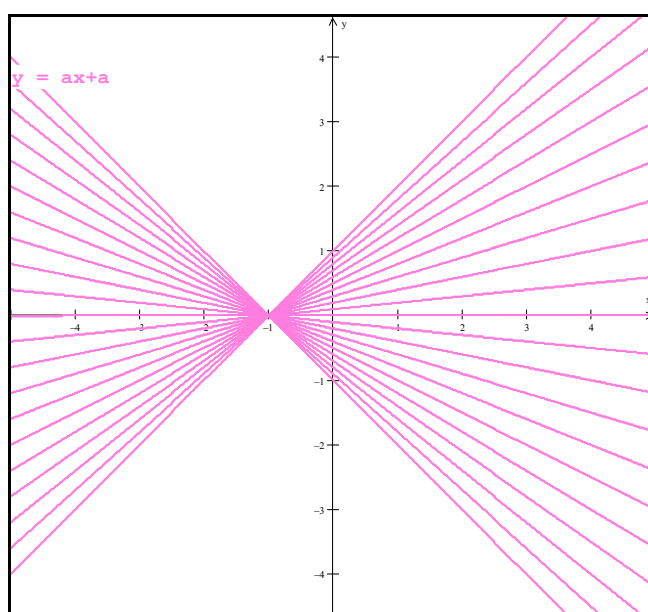


Figura 2: Gráfico de família de função enviado pela aluna Tamires  
Fonte: Dados da pesquisa



Figura 3: Função definida por mais de uma sentença, enviada por Tamires  
Fonte: Dados da pesquisa



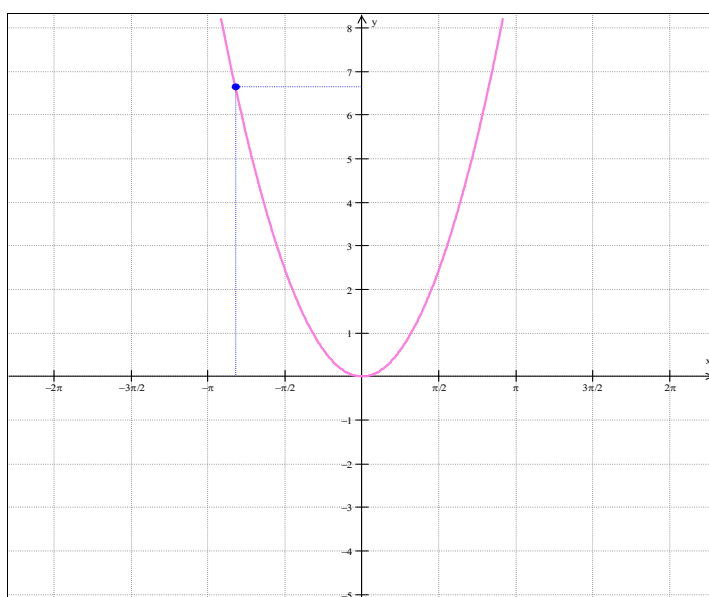


Figura 4: Função quadrática e animação do ponto  $(a, a^2)$  da aluna Tamires  
 Fonte: Dados da pesquisa

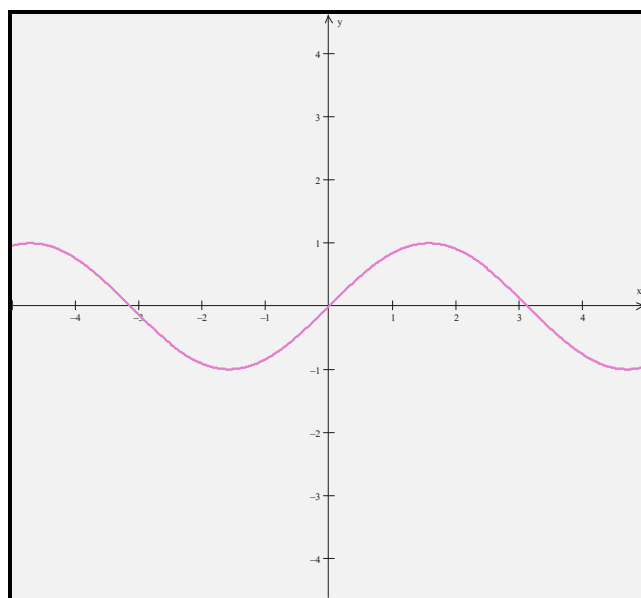


Figura 77: Senóide enviada por Tamires  
 Fonte: Dados da pesquisa

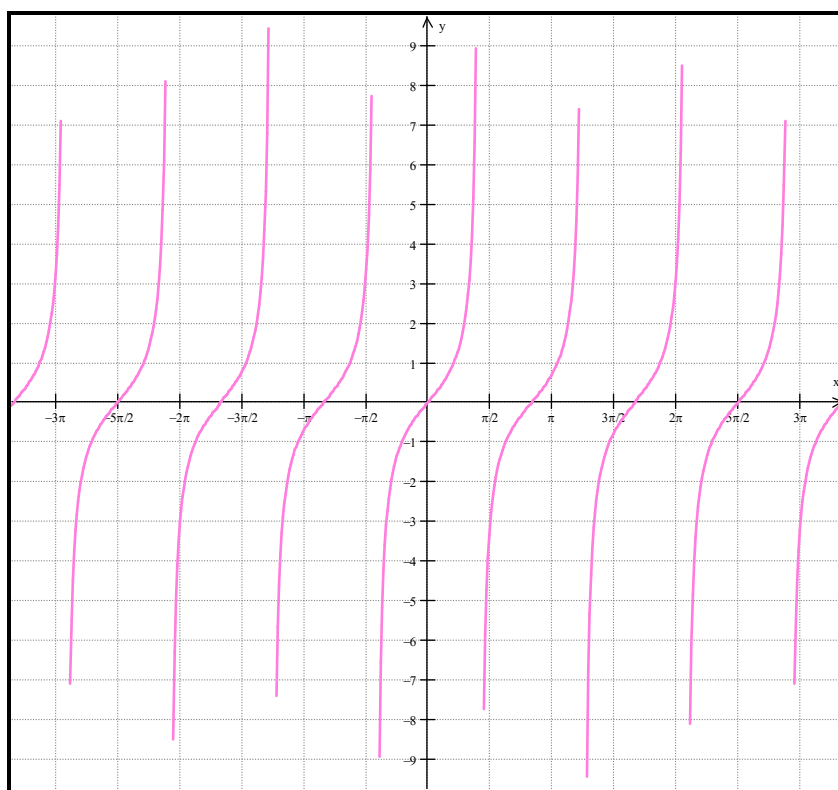


Figura 6: Animação da função  $y = \tan(ax)$  de Tamires  
 Fonte: Dados da pesquisa

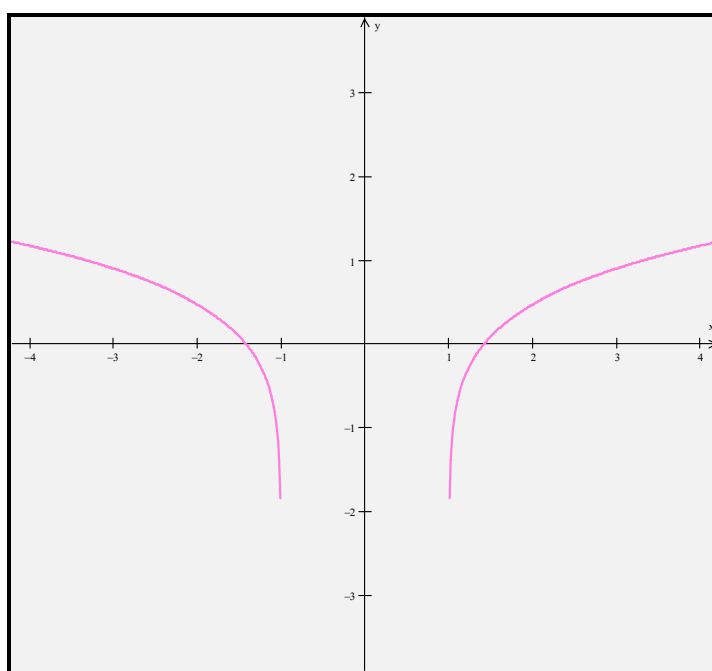


Figura 7: Esboço da função  $f(x) = \log(x^2 - 1)$ , enviado pela aluna Tamires  
 Fonte: Dados da pesquisa

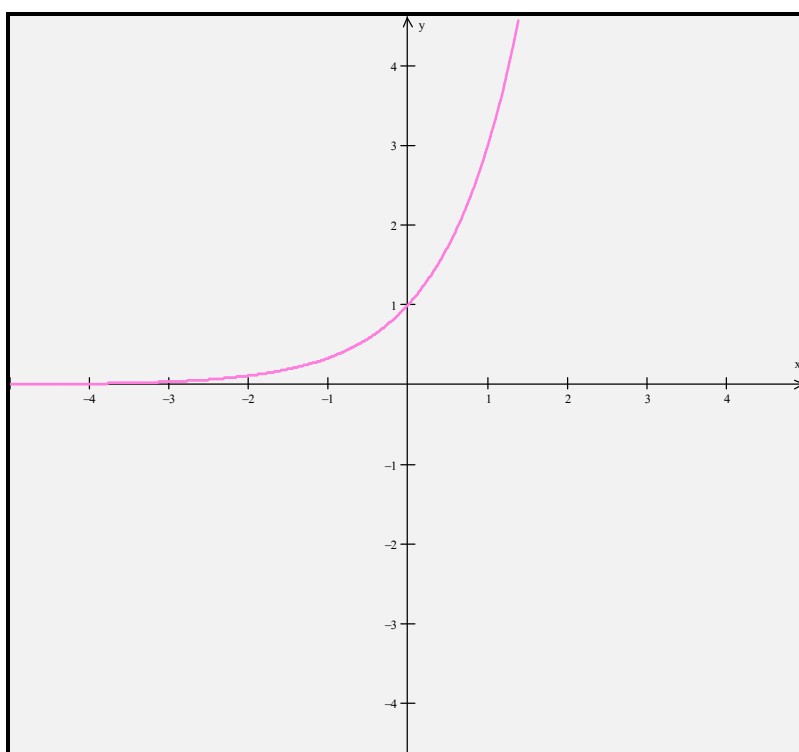


Figura 8: Função  $y = 3^x$  da aluna Tamires  
Fonte: Dados da pesquisa