PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

UMA EXPLORAÇÃO DIDÁTICA DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE DUAS E TRÊS INCÓGNITAS COM ESTUDANTES DE CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SÉRGIO DE ASSIS OLIVEIRA

Belo Horizonte

2010

Sérgio de Assis Oliveira

UMA EXPLORAÇÃO DIDÁTICA DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE DUAS E TRÊS INCÓGNITAS COM ESTUDANTES DE CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda

Belo Horizonte
2010

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Oliveira, Sérgio de Assis
O48u Uma exploração didática das equações diofantinas lineares de duas e três incógnitas com estudantes de cursos de licenciatura em matemática / Sérgio de Assis Oliveira. Belo Horizonte, 2010.
115f. : Il.

Orientador: Dimas Felipe de Miranda
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Equações lineares. 2. Análise indeterminada. 3. Solução de problemas. 4. Matemática – Estudo e ensino. I. Miranda, Dimas Felipe de. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 517.941

PUC Minas

Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

SÉRGIO DE ASSIS OLIVEIRA

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda – Orientador – (PUC Minas)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial – (PUC Minas)

Luiz Carlos Picoreli de Araujo

Prof. Dr. Luiz Carlos Picoreli de Araújo – (CEFET/MG)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial – (PUC Minas)

Prof. Dr. João Bosco Laudares – (PUC Minas)
Doutorado em Educação: História, Política, Sociedade – (PUC-SP)

Belo Horizonte, 10 de dezembro de 2010.

Dedico este trabalho, primeiramente a Deus e, posteriormente, à minha esposa Ivone e a meu filho Sérgio Henrique que foram fonte de inspiração nessa minha viagem pela Matemática através das Equações Diofantinas Lineares.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela inspiração e transpiração suficientes para a realização desse trabalho.

A minha família pelo acolhimento e ao meu orientador Dimas Felipe pelo profissionalismo.

Aos professores e colegas da turma IV de Mestrandos de Matemática da PUC-MG pela amizade e solidariedade.

À FUNDAÇÃO EDUCACIONAL NORDESTE MINEIRO pela oportunidade profissional dada por dez anos no Ensino Superior.

À Secretaria Estadual de Educação pela liberação dos trabalhos para que pudesse fazer minha pesquisa.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal auxiliar os alunos na resolução e compreensão de problemas que recaem em Equações Diofantinas Lineares com duas ou três incógnitas através da elaboração e aplicação de Atividades Didáticas destinadas a contribuir para o estudo desse tipo de equações. Os sujeitos da pesquisa foram estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática. O conteúdo foi abordado através de Sequências de Atividades, constituídas de textos auxiliares, questões de manipulação e, principalmente, exploração de resolução de problemas. Procurou-se nas tarefas fazer a integração da Aritmética com a Álgebra e a Geometria, utilizando-se de alguns programas computacionais que serviram de suporte para as visualizações gráficas das soluções inteiras. Os resultados mostraram as dificuldades que, em geral, os alunos têm ao lidar com o método formal para se obter as respostas satisfatórias, juntamente com a condição de existência e na discussão do número de soluções inteiras. A conclusão desse trabalho ressalta a importância da interpretação geométrica das Equações Diofantinas Lineares, aliada ao contexto algébrico, e que o contato com problemas desta área contribui para que o aluno desenvolva, de forma criativa e discutida, suas habilidades de raciocínio. É importante enfatizar que esse tema pode ser abordado desde o Ensino Fundamental, de forma gradativa, passando pelo Ensino Médio, no estudo dos sistemas lineares, até atingir uma forma mais rigorosa na Educação Superior, em especial nos cursos de licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Lineares, Resolução de Problemas, Soluções Inteiras.

ABSTRACT

The present work has as main objective to help the students in the resolution and understanding of problems related to Linear Diophantine Equations with two or three incognits through the elaboration and application of Didactic Activities in order to contribute to the study of this type of equations. The subjects of the research were math licenciature course students. The content was boarded through Sequences of Activities, consisting of auxiliary texts, manipulation questions and, mainly, exploration of problems resolution. It was aimed in the tasks to make the integration of the Arithmetic with Algebra and Geometry with the use of some computational programs that worked as support to the graphical visualizations of the entire solutions. The results showed the difficulties that, in general, the students have when dealing with the formal method to get the desired answers, together with the condition that existence and in the discussion of the number of entire solutions. The Conclusion of this study highlight the importance of geometric interpretation of Linear Diophantine Equations, allied to algebraic context, and that the contact with problems of this area contributes so that the student develops, in a creative and discussed way his abilities of reasoning. It is important to emphasize that this issue can be boarded from elementary school, way crossing high school in the study of the linear systems until it reaches more rigorous shape in college, especially in math licenciature courses.

Words-key: Linear Diophantine Equations, Problems resolution, Entire solutions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

- EDL: Equações Diofantinas Lineares
- Ed.: Edição
- E: Etapa
- Ex: Exemplo
- FENORD: Fundação Educacional Nordeste Mineiro
- GPEA: Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica
- PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais
- PCN+: Parâmetros Curriculares Nacionais Complementares
- PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais no Ensino Médio
- PUC- MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
- UFVJM: Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Entre as orientações educacionais dos PCN, algumas incentivam explorar, no ensino de matemática, situações cotidianas e formas de se desenvolver habilidades de pensamento do estudante. Problemas do tipo, por exemplo: "*Deseja-se comprar produtos de duas marcas A e B, respectivamente por R$3,00 e R$4,00 cada unidade, desembolsando-se exatamente um total de R$20,00. Quantos produtos de cada tipo podem ser comprados?*", colocam o estudante, em geral, diante de uma situação de desafio do dia-a-dia. Esses problemas permitem ao estudante tomar a iniciativa de elaborar uma estratégia pessoal, um raciocínio próprio de solução, bem como a possibilidade de apreciar, avaliar e comparar sua solução com as diferentes soluções dos demais colegas, enriquecendo suas habilidades mentais.

Uma pessoa poderia obter uma solução deste problema por raciocínio meramente aritmético; outra, por meio geométrico e, uma terceira, via álgebra. Ao professor, em sala de aula, também se abre a grande oportunidade de explorar as relações entre estas diversas formas de registros para problemas deste tipo.

O problema, acima explicitado, poderia ser modelado, via álgebra, pela equação linear: $3x + 4y = 20$, onde x representaria a quantidade de produtos do tipo A e y, a de produtos do tipo B. Este tipo de equação, sozinha, causa certa estranheza e questionamentos. É possível resolver uma equação com duas incógnitas? Há solução única? Como saber se há solução? Se houver várias soluções, aceitam-se todas? Há teoria matemática para o problema? Equações como esta (duas incógnitas e uma única equação), estudadas nas licenciaturas de matemática, são chamadas de Equações Diofantinas Lineares (EDL), em homenagem ao sábio Diofanto de Alexandria, e fazem parte do objeto de pesquisa deste trabalho.

O autor dessa pesquisa trabalha, há algum tempo, com o ensino de Equações Diofantinas e constatou que as dificuldades no processo ensino-aprendizagem deste assunto são evidentes. Essas equações são atreladas frequentemente nos livros didáticos a apenas exercícios algébricos repetitivos.

Diante destas reflexões, formulou-se, assim, a questão principal de pesquisa deste trabalho: "*De que forma um conjunto de atividades direcionadas para problemas em situações do cotidiano, com soluções visualizadas e interpretadas graficamente, poderia contribuir para o ensino e aprendizagem de EDL, junto a um grupo de estudantes de cursos de Licenciatura em matemática*?"

Então, este trabalho de pesquisa teve como objetivo auxiliar o aprendizado do aluno, através de uma sequência de atividades, na resolução e compreensão de problemas que recaem nas EDL, com duas ou três incógnitas, bem como no entendimento da teoria de suporte. A metodologia da investigação consistiu na aplicação de uma Sequência de Atividades, constituída de textos auxiliares, questões de manipulação e, principalmente, exploração de resolução de problemas. As Atividades foram implementadas e aplicadas, conforme objetivos e concepções previamente assumidas (ZABALA, 2007; PONTE, 2003, POLYA, 1995) para alunos dos cursos de licenciatura em Matemática da UFVJM e PUC Minas Betim.

Os resultados evidenciaram a dificuldade dos alunos na compreensão e resolução de problemas. Todavia, com a inserção da interpretação geométrica das soluções inteiras de uma EDL, constatou-se uma melhor aprendizagem dos mesmos quanto à existência e ao número de soluções positivas no campo dos números inteiros.

Também deve ser ressaltado que esse tema pode ser trabalhado no Ensino Fundamental de uma forma introdutória, através do método de tentativas, com melhor exploração no ensino médio com a utilização das progressões aritméticas e sistemas lineares. Enfim, ser trabalhado de uma maneira mais rigorosa e formal na educação superior.

Nesta dissertação, o capítulo 1, denominado de Introdução, coloca a situação de pesquisa com a justificativa e a questão formulada.

O capítulo 2 aborda a origem das EDL, resgata os conteúdos matemáticos básicos de suporte e apresenta as teorias das EDL de duas e três incógnitas. Em seguida expõe as experiências de alguns autores com as EDL na área da Educação Matemática.

O capítulo 3 discorre sobre as orientações didático-metodológicas, descreve, comenta e analisa os dados da pesquisa.

O capítulo 4 relata as Considerações finais e no Apêndice encontram-se os registros e comentários analíticos das etapas das soluções das atividades didáticas realizadas pelos alunos participantes durante a pesquisa.

2 EQUAÇÕES DIOFANTINAS: ORIGEM, TEORIAS E LITERATURA

2.1 Origem e Teorias Matemáticas

Diofanto de Alexandria viveu no século III d.C e pouco se sabe da sua vida, sendo que o único dado pessoal sobre ele encontra–se sob forma de problema, na chamada Antologia grega do 5º ou 6º século:

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso, cobriu - lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança; depois de viver a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida. (BOYER, 1996, p.121).

Resolvendo, matematicamente esse enigma, a equação que representa o problema será: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$. Concluímos que ele viveu 84 anos, se caso esse enigma for historicamente exato.

Diofanto escreveu duas obras sobre Números Poligonais e Arithmetica. Esta última obra consiste em treze livros, dos quais só os seis primeiros foram preservados. Numa coletânea de problemas, na maioria das vezes indeterminados, em resoluções, eram utilizados métodos algébricos, distinguindo-se da Matemática grega clássica.

A Arithmetica é uma coleção de 150 problemas, todos formatados em termos de exemplos numéricos específicos. Embora pretendessem a obtenção da generalidade do método, os problemas determinados e indeterminados eram resolvidos de forma semelhante. Ainda que esses últimos tenham infinitas soluções, buscava–se uma só resposta para eles.

Muitos séculos após os trabalhos de Diofanto, não se registrou um avanço qualitativo no ponto de vista teórico. Houve, nesse intervalo de tempo, a criação do sistema de numeração decimal posicional e a introdução do zero pelos hindus, a sua adoção pelos árabes e o seu uso na Europa mais tarde. Também nesse longo período, foram aperfeiçoados os algoritmos para se efetuar as operações, as frações e a Aritmética Financeira.

Segundo Hefez (1997), o despertar da Aritmética Teórica se houve no século XVII pelos trabalhos do jurista e matemático francês Pierre de Fermat (1601–1665). Nas suas obras foram enunciados vários teoremas, dos quais raramente eram demonstrados. Muitas demonstrações desses teoremas foram feitas por outros matemáticos, sendo um deles, o matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783), considerado o mais produtivo de todos os tempos, cujos trabalhos realizados nos seus 55 anos de atividades não caberiam em 80 grossos volumes.

Grandes matemáticos como Legendre, Gauss, Dirichlet, Dedekind, Riemann e Hilbert, contribuíram para o desenvolvimento posterior da Teoria dos Números considerada por muitos a área mais nobre da Matemática.

Segundo Hygino, devido à utilização desses métodos algébricos por Diofanto, define–se Equações Diofantinas como:

> Todas as equações polinomiais (com qualquer número de incógnitas) com coeficientes inteiros, buscando sempre que se tratam procurar, suas possíveis soluções também entre os inteiros. Isso embora Diofanto só tenha estudado algumas dessas equações, em casos particulares e também embora o universo que tenha usado para resolução dos seus problemas fosse o conjunto dos números racionais positivos. (HYGINO, 1991, p. 119).

Hefez (1997) define Equações Diofantinas como equações polinomiais, com coeficientes inteiros (para as quais só se está interessado em soluções inteiras ou racionais).

Muitas outras Equações Diofantinas foram estudadas, algumas resolvidas por métodos elementares, outras requeriam métodos mais sofisticados. Uma equação estudada desde a antiguidade é a equação pitagórica: $x^2 + y^2 = z^2$ que possui infinitas soluções e com fórmulas que permitem gerar todas elas. Pierre de Fermat afirmou, sem demonstrar, que a equação $x^n + y^n = z^n$ para n > 2, não permitia soluções inteiras positivas. Após suas leituras de uma tradução da Aritmética de Diofanto, no seu comentário relativo ao oitavo problema do segundo livro que se refere à equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$. Fermat escreveu:

> Ao contrário, é impossível separar um cubo em dois cubos, uma potência quarta em duas potências quartas, ou em geral, qualquer potência acima da segunda em duas potências do mesmo grau. Eu descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa que esta margem é muito estreita para conter. (HEFEZ, 1997, p. 106).

Este teorema citado, mas conhecido como o Último Teorema de Fermat, até início da década de 90, não havia sido provado. Finalmente, em 1993, Andrew Wiles, exibindo um manuscrito de cerca de 200 páginas, anunciou que havia demonstrado este teorema, sendo necessários dois anos para que os especialistas analisassem esse trabalho e que o próprio Wiles esclarecesse vários pontos, para que a prova fosse reconhecida como completa e correta. Venceu–se uma dos maiores desafios da Matemática, não se acreditando que Fermat realmente tivesse a demonstração desse teorema.

Vale ressaltar que, apesar deste tipo de equações que visa soluções inteiras receber o nome de Diofantinas, graças a Diofanto de Alexandria, o primeiro matemático a encontrar uma solução geral de uma EDL foi o hindu Bramagupta (598 – 670), cuja resolução foi embasada no algoritmo de Euclides. Segundo Fernandes (2005), certamente muitas dessas equações podem ser resolvidas por tentativas, método muito utilizado na idade média. Todavia, há muitos problemas cujas possibilidades são limitadas, requerendo muitas delas. Um dos textos mais antigos contendo esse tipo de problema foi encontrado na Europa, sendo um manuscrito do século X, acreditando ser uma cópia de uma coleção de quebra–cabeças preparada por Alcuin De York (735 – 804) para o rei Carlos Magno (742 – 814), que era o seguinte:

> Quando 100 alqueires (medida antiga para cereais) de grão são distribuídos entre 100 pessoas, de modo que cada homem receba 3 alqueires, cada mulher 2 e cada criança $\frac{1}{2}$ alqueire, qual é o número de homens, mulheres e crianças que participou da distribuição? (FERNANDES, 2005, p.101).

O problema é descrito pelo sistema de equações lineares $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 100 \end{cases}$

Multiplicando a equação II por 2, teremos o sistema equivalente $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 6x + 4y + z = 200 \end{cases}$

Fazendo equação II – equação I, obteremos a equação 5x + 3y = 100. Conclui – se que: x = $\frac{100 - 3y}{5}$.

Observa–se que o problema se restringe a soluções inteiras e positivas, e que para x ser inteiro, o numerador 100 – 3y divide 5, e para ser positivo, 0 $\leq y \leq \frac{100}{3}$. Sabendo–se que y pertence ao conjunto dos inteiros, verificamos que seus possíveis valores são 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, e são possíveis soluções inteiras e positivas: (20, 0, 80), (17, 5, 78), (14, 10, 76), (11, 15, 74), (8, 20, 72), (5, 25, 70), (2, 30, 68). Se observarmos o conjunto das possíveis soluções do problema, podemos generalizar essas soluções para o campo dos números naturais, utilizando o conhecimento das progressões aritméticas, concluindo que x = -1 + 3 t, y = 35 – 5 t, z = 66 + 2 t, com t $\in$ N e 1 $\leq$ t $\leq$ 7. Alcuin apresentou apenas a solução inteira

(11, 15, 74). Com a introdução das Equações Diofantinas, veremos que é possível encontrar a solução geral para as variáveis do problema, discretizando o parâmetro t para o campo dos números inteiros.

Se for considerado como domínio o conjunto dos números reais, a interpretação gráfica do conjunto-solução deste tipo de sistema linear, no R^3, será uma reta, definida pela interseção de dois planos, conforme o GRÁFICO 1.

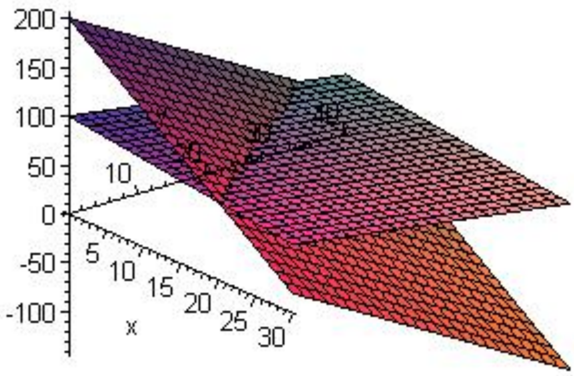


GRÁFICO 1: Visualização geométrica do conjunto-solução de um sistema linear possível e indeterminado no R^3
Fonte: Plotado no software MAPLE

Se for considerado como domínio o conjunto dos números inteiros, a interpretação geométrica do conjunto-solução deste tipo de sistema linear é uma coleção de pontos colineares, em conformidade com o GRÁFICO 2.

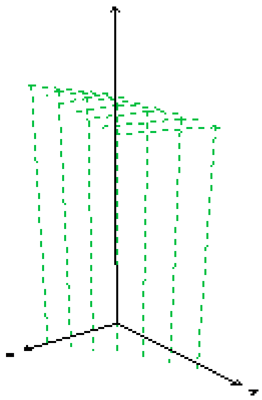


GRÁFICO 2: Visualização geométrica do conjunto-solução de um sistema linear possível e indeterminado no Z^3
Fonte: Plotado no software WINPLOT

A utilização da tecnologia na sala de aula é de suma importância no processo ensino-aprendizagem atrelada ao papel do professor como elemento mediador entre os estudantes. Corre-se um risco eminente no âmbito pedagógico tecnicista, de se ter uma supremacia dos recursos tecnológicos em relação a quem o conduz. Laudares (2001) fez uma colocação muito interessante sobre a dicotomia computador/sujeito:

> A ferramenta - computador - não tem inteligência, sensibilidade, emoção e nem intuição, características próprias dos sujeitos; somente quando usada por um sujeito é que a ferramenta se torna instrumento que pode explicitar as muitas qualidades de quem a manuseia. (LAUDARES, 2001, p. 69)

Neste trabalho, serão abordadas as EDL com duas e três incógnitas, cuja fundamentação teórica tem como base o livro (Fundamentos da Aritmética, do Hygino H. Domingues, 1991), onde serão enfatizados alguns tópicos básicos da Teoria Elementar dos Números, tais como: Múltiplos e Divisores, Algoritmo da Divisão, Máximo divisor Comum, Processo das Divisões Sucessivas, Teorema de Bézout, que serão pilares para o estudo das EDL.

2.1.1 Múltiplos e Divisores

Afirmamos que um número inteiro “a”, não nulo, divide um número inteiro “b” quando existe um inteiro k tal que b = ka. Quando isso acontece, dizemos que “a” é divisível por “b” ou “b” é múltiplo de “a”. Usamos a notação $a|b$ (“a divide b”).

Exemplo: $5|30 \rightarrow 30 = 6.5$

O conjunto dos múltiplos de um número inteiro “a” é definido por M_a = {ak / k $\in$ Z}.

EX: M_5 = {5k / k $\in$ Z}.

PROPOSIÇÃO 1: Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$, com a,b, c, x, y $\in$ Z, onde a é não nulo.

Prova: Se $a|b$, então b = ka, com k $\in$ Z. Multiplicando ambos os membros pelo número inteiro x, teremos a equação I: bx = kax e se $a|c \rightarrow c = k'a$, com $k' \in$ Z. Multiplicando ambos os membros por y inteiro, teremos a equação II: cy = k'ay. Somando as equações I e II, obteremos: bx + cy = (kx + k'y).a. Fazendo k'' = kx + k'y, teremos bx + cy =k''a, com $k'' \in$ Z, mostrando que $a|(bx + cy)$.

2.1.2 Algoritmo da Divisão: (Algoritmo de Euclides)

Para quaisquer a e b inteiros, com b > 0, existe um par único de inteiros q e r, de maneira que a = bq + r, onde $0 \leq r < b$.

Prova da existência: Seja b um número inteiro positivo não nulo. Se a $\in$ Z, então a é múltiplo de b ou está compreendido entre dois múltiplos consecutivos de b, isto é, $bq \leq a < b.(q + 1)$. Se $bq \leq a$, então a = bq + r, onde r $\in$ Z e $r \geq 0$. Se a < b.(q + 1), temos que bq + r < bq + b $\rightarrow$ r < b. Logo, podemos afirmar que a = bq + r, com $0 \leq r < b$.

Prova da unicidade: Suponhamos que existam inteiros q_1, q_2, r_1, r_2, onde $q_1 \neq q_2$ e $r_1 \neq r_2$ e que satisfaçam ás igualdades: a = bq_1 + r_1, com $0 \leq r_1 < b$ e a = bq_2 + r_2, com $0 \leq r_2 < b$. Se b > r_1 e b > r_2, então b > r_1 - r_2 e se a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 $\rightarrow$ b.(q_2 - q_1) = r_1 - r_2. Fazendo k = $(q_2 - q_1)$, temos que r_1 - r_2 = bk, com k $\in$ Z, mostrando que $b|(r_1 - r_2)$. Portanto b $\leq$ (r_1 - r_2) que é absurdo, pois contradiz a hipótese. Logo, $r_1 = r_2$. Concluímos que b.($q_2 - q_1$) = 0. Se b $\neq$ 0, temos que $(q_2 - q_1)$ = 0, mostrando que $q_2 = q_1$.

Exemplos:

Para a = 47 e b = 6, temos que 47 = 6. 7 + 5 → 6. 7 < 47 < 6. 8.

Para a = - 38 e b = 8, temos que – 38 = 8. (-5) + 2 → 8. (-5) < - 38 < 8. (– 4).

2.1.3 Máximo Divisor Comum

Sejam a e b números inteiros quaisquer, entendemos por máximo divisor comum de a e b, o número inteiro e positivo definido por d = mdc(a, b) que satisfaz as seguintes condições:

i) $d \geq 0$ ii) $d|a$ e $d|b$ iii) se $c|a$ e $c|b \rightarrow c|d$

PROPOSIÇÃO 2: Se a = bq + r, com $0 \leq r < b$, então mdc (a, b) = mdc (b, r).

Prova: Se d = mdc(a, b), então $d|a$ e $d|b$. Temos que a = kd, com $k \in Z$ e b = k'd, com $k' \in Z$. k Se a = bq + r → r = kd - k'dq → r = (k - k'q). d. Fazendo k'' = k - k'q, temos que r = k''d, $k'' \in Z$. Então $d|r$. Se $d|b$ e $d|r$, então d é um divisor comum de b e r. Seja um número inteiro c, onde $c|a$ e $c|b$. Então r = a – bq = mc – nc = (m – n). c, com m e n inteiros, mostrando que $c|r$. Se $c|b$ e $c|r$, concluímos que o conjunto de divisores comuns de a e b é igual ao conjunto de divisores comuns de b e r. Se d = mdc(a, b), então $c|d$, mostrando que d também é o mdc (b, r).

2.1.4 Processo das Divisões Sucessivas

Sejam os números inteiros a e b. A partir deles, sejam as divisões sucessivas:

a = b $q_1 + r_1$ com $0 \leq r_1 < b$

b = $r_1 q_2 + r_2$ com $0 \leq r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$, com $0 \leq r_3 < r_2$

$r_2 = r_3 q_4 + r_4$, com $0 \leq r_4 < r_3$

Generalizando: $r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$, com $0 \leq r_n < r_{n-1}$

De qualquer forma, a sequência b > $r_1 > r_2 > r_3$ >...>... > r_n será, para algum índice n,

$r_{n+1} = 0$.

Então $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$, onde r_n = mdc (r_{n-1}, r_n) = mdc (r_{n-2}, r_{n-1}) = mdc (r_{n-3}, r_{n-2}) = ...= mdc (r_2, r_1) = mdc (b, r_1) = (mdc (a, b).

Ex: Encontrar o mdc (41,12)

*	3	2	2	2
41	12	5	2	1
5	2	1	0	

41 = 12. 3 + 5 12 = 5. 2 + 2 5 = 2. 2 + 1 2 = 2. 1 + 0

Logo o MDC(41, 12) = 1

2.1.5 Teorema de Bézout (Etienne Bézout – 1730 – 1783)

Se d = mdc (a, b), então existem x_0, y_0 ∈ Z, de maneira que ax_0 + b y_0, = d.

Prova: Se d = mdc (a, b), temos que d$|a$. e $d|b$. Seja c inteiro, onde $c|a$ e $c|b$. Pela proposição 1, podemos afirmar que se $c|a$ e $c|b$, então $c|(ax_0 + by_0)$ com x_0, y_0 ∈ Z. Então ax_0 + by_0 = kc, com k inteiro. Se d = mdc (a, b) → $c|d$, então d = kc, logo, verificamos que ax_0 + by_0 = kc = d

Para encontrarmos os inteiros x_0, y_0 usamos o processo das divisões sucessivas, isolando os restos, fazendo combinações até encontrar a combinação linear desejada: ax_0 + by_0 = d

Exemplo: Aplicar o teorema de Bézout para os inteiros a = 41 e b = 12.

41 = 12. 3 + **5** → **5 =** 41 – 12. 3

12 = 5. 2 + **2** → **2 =** 12 – 5. 2

5 = 2. 2 + **1**→ **1 =** 5 – 2. 2

5 – 2. **2** = 1→ 5 – 2. (12 - 5. 2**)** **=** 1 5 . **5** + 12. (- 2) = 1 → 5. (41 – 12 . 3) + 12. (- 2) = 1

41. (5) + 12. (-17) = 1. Então x_0 = 5 e y_0 = - 17

5 = 2. 2 + **1**→ **1 =** 5 – 2. 2

5 – 2. **2** = 1→ 5 – 2. (12 - 5. 2**)** **=** 1 5 . **5** + 12. (- 2) = 1 → 5. (41 – 12 . 3) + 12. (- 2) = 1

41.(5) + 12. (-17) = 1. Então x_0 = 5 e y_0 = - 17

2.1.6 Equações Diofantinas Lineares Com Duas Incógnitas

São equações do tipo ax + by = c, onde a, b e c são números inteiros dados e as soluções **x** e **y** procuradas, também pertencem ao conjunto Z.

PROPOSIÇÃO 3: Uma Equação Diofantina Linear: ax + by = c tem solução se, e somente se, d divide c, onde d = mdc(a, b).

Prova: Se d = mdc(a, b), então, pelo Teorema de Bézout pode–se afirmar que existem r e s inteiros, tais que ar + bs = d. Multiplicando a equação pelo número inteiro t, teremos uma nova equação a(rt) + b(st) = dt. Fazendo c = dt, mostra que d$|c$. Então x_0 = rt e y_0 = st é uma solução particular da equação ax + by = c.

PROPOSIÇÃO 4: Se a EDL: ax + by = c tem uma solução (x_0, y_0), então tem infinitas soluções cujo conjunto das mesmas é expresso por S = $\{(x_0 + \frac{b}{d}$ t, $y_0 - \frac{a}{d}$ t), t $\in Z\}$.

Prova: Se o par ordenado (x_0, y_0) é uma solução particular da Equação Diofantina acima, então ax_0 + by_0 = c. Tomando o par (x, y) como uma solução genérica da equação, temos que ax + by = c. Então a. (x - x_0) = b. (y_0 - y). Se d = mdc (a, b), então $d|a$ e $d|b$. Logo, a = dr e b = ds, onde r e s são inteiros e primos entre si, isto é, mdc (r, s) = 1. Substituindo os valores de a e de b, teremos dr. (x - x_0) = ds. (y_0 – y) $\rightarrow r.$ (x $-$ x_0) = s. (y_0 - y). Se r não divide s, então r$|(y_0 - y) \rightarrow y_0$ - y = rt, com t inteiro.. Então y = y_0 - rt. Sabendo que r = $\frac{a}{d}$, concluímos que y = y_0 $-$ $\frac{a}{d}$t / t $\in$ Z. Analogamente se s não divide r, então concluímos que $s|(x - x_0)$ $\rightarrow$ x = x_0 + st. Se s = $\frac{b}{d}$ então x = x_0 + $\frac{b}{d}$ t/ t $\in$ Z. Então verificamos que o par ordenado (x_0 + $\frac{b}{d}$ t, y_0 $-$ $\frac{a}{d}$ t), com t $\in$ Z é a solução geral da EDL: ax + by = c.

Vamos aplicar esse conhecimento com o seguinte problema:

> O valor da entrada de um cinema é R$8,00 e da meia entrada é R$5,00. Qual é o menor número de pessoas que pode assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R$500, 00? (Em tempo; a capacidade desse cinema é suficiente para esse número de pessoas.) (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 52, exercício 36).

RESOLUÇÃO: Inicialmente identificaremos quais as variáveis do problema, onde x é o número de pessoas que pagarão o valor integral da entrada, e y corresponde ao número de pessoas que pagarão o valor da meia entrada. Posteriormente, vamos escrever a lei matemática que representa o problema que recai na EDL: $8x + 5y = 500$ e visa soluções inteiras e positivas. Aplicando o teorema de Bezout , temos:

*	1	1	1	2
8	5	3	2	1
3	2	1	0	

$8 = 5.1 + 3 \rightarrow 3 = 8 - 5.1 \quad 5 = 3.1 + 2 \rightarrow 2 = 5 - 3.1$

$3 = 2.1 + 1 \rightarrow 1 = 3 - 2.1 \rightarrow 3 - \underline{2}.1 = 1 \rightarrow 3 - (5 - 3.1).\ 1 = 1$

$3 - 5.1 + 3.1 = 1 \rightarrow \underline{3}.2 - 5.1 = 1 \rightarrow (8 - 5.1)\ .2 - 5.1 = 1 \rightarrow 8.2 - 5.2 - 5.1 = 1$

$8.2 + 5.(-3) = 1$. Multiplicando a equação por 500, temos: $8.(1000) + 5.(-1500) = 500$. Então o par ordenado (1000, - 1500) é uma solução particular da equação acima. Verificamos que a solução geral é dada por $x = 1000 + 5t$ e $y = -1500 - 8t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

O problema requer soluções inteiras e positivas. Faremos $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Concluímos que o parâmetro t assume valores $-200 \leq t \leq -187{,}5$. Se t é inteiro, então os possíveis valores admitidos por t são $\{-200 \leq t \leq -188\}$. Para que encontremos o menor número de pessoas, usaremos o maior valor encontrado para $t = -188$. Daí encontramos $x = 60$ e $y = 4$. Sendo assim, o menor número de pessoas será 64.

OBS: Podemos encontrar o conjunto de soluções inteiras de uma equação linear no software MAPLE através do comando "isolve'. EX: `isolve(5*x+8*y=500,t).`

Podemos fazer a interpretação geométrica desse problema que será um conjunto de pontos alinhados que pertencerão à reta de equação $8x + 5y = 500$, conforme o GRÁFICO 3, que foi plotado no software matemático GRAPHMATICA. A partir da solução geral, podemos atribuir os valores inteiros para t encontrados acima e usando a tabela DataPlot, inserimos alguns pontos no gráfico que satisfazem a equação.

X	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Y	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100

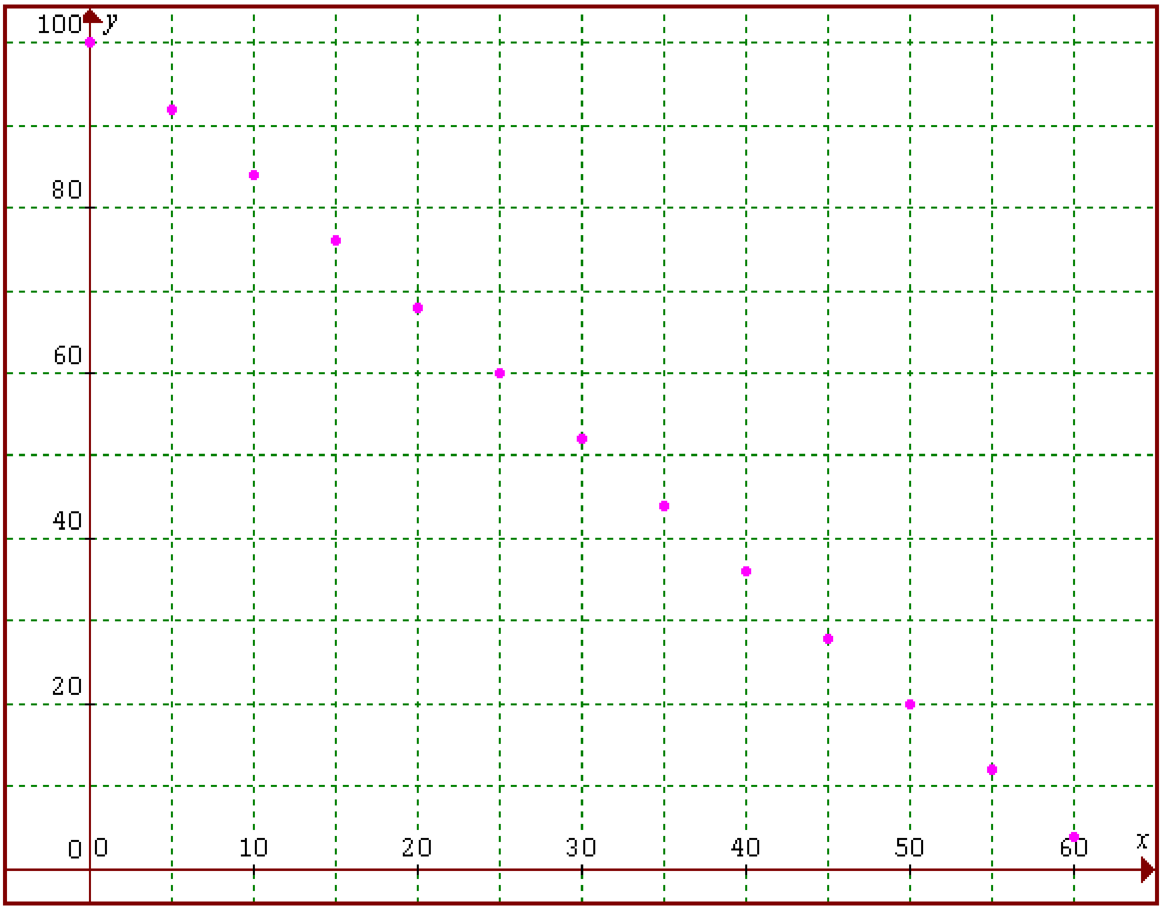


GRÁFICO 3: Visualização geométrica do conjunto-solução da equação linear 8x + 5y = 500, no domínio discreto positivo.
Fonte: Plotado no software GRAPHMATICA.

Caso a EDL tenha solução, observamos que quando o coeficiente angular da reta-suporte ax + by = c for negativo, teremos um número finito de soluções inteiras e positivas. Analogamente, se ele for positivo, a EDL terá infinitas soluções inteiras e positivas.

2.1.7 Equações Diofantinas Lineares com Três Incógnitas

A pouca exploração das EDL com três incógnitas nos livros didáticos e artigos científicos despertou a minha curiosidade na resolução de problemas que recaem nas equações do tipo ax + by + cz = m, cuja solução pertence ao conjunto dos números inteiros. O livro: "Fundamentos da Aritmética" do Hygino H. Domingues, (1991, p. 121) mostra apenas a solução particular da EDL com três incógnitas, entretanto, no livro "Introdução à Teoria dos números: Um breve curso." do João Carlos Vieira Sampaio foi encontrado um exemplo da solução geral da EDL: 2x - 6y + 5z = 3 (SAMPAIO, 2008, p.63), que muito contribuiu para esta pesquisa.

Concluímos que, a partir da solução geral da EDL: ax + by = c, sendo o par ordenado $(x_0 + \frac{b}{d}$ t, $y_0 - \frac{a}{d}$ t), t $\in Z$ seria possível encontrar o conjunto de soluções inteiras de equações com mais de duas incógnitas.

PROPOSIÇÃO 5: A EDL: ax + by + cz = m, com a, b, c, inteiros não nulos e m inteiro tem solução se, e somente se, d = mdc (a, b, c) divide m.

Prova: Seja d_1 = mdc(a, b), com $d_1 \in Z,$ então existem r e s inteiros para os quais ar + bs = d_1 e seja d = mdc (d_1, c), então existem os números inteiros k e z_0 tais que $d_1 k$ + cz_0 = d. Sendo assim, (ar + bs)k + cz_0 = d. Temos que a(rk) + b(sk) + cz_0 = d. Fazendo x_0 = rk e y_0 = sk, então ax_0 + by_0 + cz_0 = d. Se a equação ax + by + cz = m admite solução, afirmamos que d $|m,$ logo, m = q.d, com q inteiro.

Assim, a$x_0 q$ + b$y_0 q$ + cz_0q = dq = m, mostrando que a terna ordenada ($x_0 q$, $y_0 q$, $z_0 q$) é uma solução particular de ax + by + cz = m.

Vejamos o exemplo de uma solução particular da EDL 3x + 5y + 6z = 4 (Fundamentos da Aritmética, 1991, p.124).

O mdc (3,5) = 1. Temos que 5 = 3.1 + $\underline{2}$ → $\underline{2}$ = 5 – 3.1 → 3 = 2.1 + $\underline{1}$→ $\underline{1}$ = 3 – 2.1

3 – $\underline{2}$.1 = 1→ 3 – (5 – 3.1). 1 = 1→ 3. (2) + 5. (- 1) = 1

O mdc(1, 6) = 1. Então $\underline{1}$.(7) + 6. (-1) = 1 → (3.2 + 5. (- 1) . 7 + 6.(-1) = 1

3. (14) + 5. (-7) + 6 . (- 1) = 1 Se m = 4, então q = 4. Multiplicando a combinação linear por 4, teremos: 3.(56) + 5. (-28) + 6.(-4) = 4, mostrando que a terna ordenada (56, -28, - 4) é uma de suas soluções particulares.

SOLUÇÃO GERAL: Seja a EDL ax + by + cz = m, com a, b, c, inteiros não nulos e m inteiro. Inicialmente procuraremos a solução geral da EDL: ax + by = p, onde p ∈ Z e p = kd_1, com k inteiro e d_1 = mdc(a, b), Podemos afirmar que existem inteiros x_0 e y_0 tais que ax_0 + by_0 = d_1. Multiplicando a equação por k, teremos: a$(x_0 k)$ + b$(y_0$k)= $d_1 k$ = p. Concluímos que a solução geral dessa equação é x = $x_0 k$ + $\frac{b}{d_1}$ t e y = $y_0 k$ - $\frac{a}{d_1}$ t, com t ∈ z. Tomamos a equação P + cz = $d_1 k$ + cz = m. Seja mdc(d_1, k) = d, concluímos que o par ordenado (k_0 + $\frac{c}{d}$ w, z_0 - $\frac{d_1}{d}$ w), com w ∈ Z é a solução geral dessa equação. Substituindo k na solução geral encontrada na equação ax + by = p, verificamos que a solução geral da equação ax + by +cz = m é expressa por:

S = { $x_0 \cdot (k_0 + \frac{c}{d}$ w) + $\frac{b}{d_1}$ t, $y_0 \cdot (k_0 + \frac{c}{d}$ w) - $\frac{a}{d_1}$ t, $z_0 - \frac{d_1}{d}$ w}, com t,w ∈ Z}

Como aplicação, vejamos o seguinte problema:

> "Combinando moedas de 1, 10 e 25 centavos como podemos totalizar 99 centavos?" (SAMPAIO, 2008, p 64).

O problema citado é representado pela equação linear 0,01x + 0,10y+ 0,25z = 0,99 que equivale à equação x + 10y + 25z = 99, onde x é o numero de moedas de 1 centavo, y corresponde ao de 10 centavos e z ao número de moedas de 25 centavos. Fazendo a igualdade 10y + 25z = 5k, com k ∈ Z, onde mdc (25,10) = 5 teremos a equação x + 5k = 99. Efetuando a combinação linear de Bézout, obtemos: 1. (6) + 5. (-1) = 1. Multiplicando ambos os membros por 99, teremos 1. (594) + 5. (-99) = 99. Concluímos então que a equação diofantina: x + 5k = 99 terá solução geral x = 594 + 5w e k = - 99 – w, com w ∈ z. Retornamos à equação 10y + 25z = 5k que é equivalente à 2x + 5y = k e aplicando o teorema de Bézout, teremos que 2. (-2) + 5. (1) = 1. Multiplicando a equação por k, verificamos que
2. (- 2k) + 5. (k) = k, concluindo que y = - 2k + 5t e z = k – 2t, com t inteiro. Substituindo o valor de k nessas equações, concluímos que a solução geral da equação x + 10y + 25z = 99 é S = {594 + 5w, 198 + 2w +5 t, - 99 – w – 2t; com t, w ∈ Z}. Observamos que o problema requer soluções inteiras e positivas. Fazendo x ≥ 0, y ≥ 0, z ≥ 0, teremos que os possíveis valores de w estão compreendidos entre $\frac{-594}{5}$ e – 99. Como w ∈ Z, então -118 ≤ w ≤ - 99.

Para w = - 118, temos que t = 8 ou 9, logo x = 4, y = 2 e z = 3 ou x = 4, y = 7 e z = 1

Para w = - 117, temos que t = 8 ou 9, logo x = 9, y = 4 e z = 2 ou x = 9, y = 9 e z = 0

Para w = - 116, temos que t = 7 ou 8, logo x = 14, y = 1 e z = 3 ou x = 14, y = 6 e z = 1

Para w = - 115, temos que t = 7 ou 8, logo x = 19, y = 3 e z = 2 ou x = 19, y = 8 e z = 0

Para w = - 114, temos que t = 6 ou 7, logo x = 24, y = 0 e z = 3 ou x = 24, y = 5 e z = 1

Para w = - 113, temos que t = 6 ou 7, logo x = 29, y = 2 e z = 2 ou x = 29, y = 7 e z = 0

Para w = - 112, temos que t = 6, logo x = 34, y = 6 e z = 0

Para w = - 111, temos que t = 5 o u 6, logo x = 39, y = 1 e z = 2 ou x = 39, y = 6, z = 0

Para w = - 110, temos que t = 5, logo x = 44, y = 3 e z = 1

Para w = - 109, temos que t = 4 ou t =5, logo x = 49, y = 0 e z = 2 ou x = 49, y = 5, z = 0

Para w = - 108, temos que t = 4, logo x = 54, y = 2, z = 1

Para w = - 107, temos que t = 4, logo x = 59, y = 4, z = 0

Para w = - 106, temos que t = 3, logo x = 64, y = 1, z = 1

Para w = - 105, temos que t = 3, logo x = 69, y = 3, z = 0

Para w = - 104, temos que t = 2, logo x = 74, y = 0, z = 1

Para w = - 103, temos que t = 2, logo x = 79, y = 2, z = 0

Para w = - 102, temos que t não é inteiro.

Portanto, o problema possui 24 combinações possíveis.

A interpretação geométrica das soluções inteiras da EDL com três incógnitas é um conjunto de pontos que pertencem ao plano ax + by + cz = m. Para uma visualização geométrica, discreta, de algumas soluções inteiras e positivas da equação x + 10y + 25z = 99 utilizou-se o software matemático WINPLOT, conforme registrado no GRÁFICO 4.

X	4	4	9	9	14	14	19	19	24	24
Y	2	7	4	9	1	6	3	8	0	5
Z	3	1	2	0	3	1	2	0	3	1

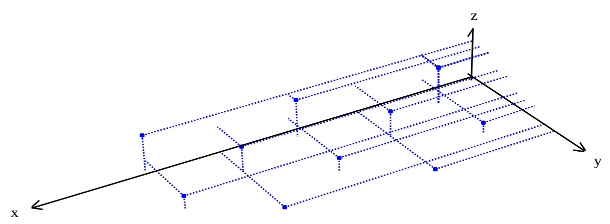


GRÁFICO 4: Visualização geométrica parcial do conjunto-solução da equação linear x + 10y + 25z = 99, no domínio discreto.
Fonte: Plotado no software WINPLOT

2.1.8 Congruências Lineares

Sejam a, b e m números inteiros, com m > 0; diz–se que a é congruente a b módulo m se, somente se, m é um divisor de a – b. Usa- se a notação: a ≡ b (mod m)

Exemplo: 32 ≡ 5 (mod 9) → 9 $|(32 - 5)$ → 9 $|27$

Vejamos agora o seguinte problema:

> Dados dois números inteiros a e b e um número inteiro não nulo m, determinar todos os números inteiros x tais que ax $\equiv$ b (mod m). (MONTEIRO, 1971, p. 149).

Esse problema é conhecido pelo nome de "Congruência do 1° grau módulo m ou Congruência linear módulo m".

PROPOSIÇÃO 6: Diz-se que um número inteiro x_0 é uma solução de ax ≡ b (mod m) se, e somente se, ax_0 ≡ b (mod m). O conjunto de todos os números inteiros que satisfazem essa condição é chamado de conjunto-solução da congruência linear ax ≡ b (mod m).

Demonstração: Se x_0 é uma solução de ax ≡ b (mod m), então m$|(ax_0 - b) \rightarrow$ ax_0 - b = mq, com q $\in$ Z. Então, a(x_0) - m(q) = b. Daí a equação diofantina ax – my = b admite o par ordenado (x_0, q) como uma solução particular. Portanto, se esta equação tem solução, isto é, d$|b$, onde d = mdc(a, m), pode–se afirmar que a congruência linear ax ≡ b (mod m) também terá solução.

Vejamos o exemplo: 5x ≡ 2 (mod 26)

5x – 2 = 26y, y $\in$ Z $\rightarrow$ 5x – 26y = 2. Resolvendo a equação diofantina, teremos;

5. (-5) – 26. (- 1) = 1$\rightarrow$ 5. (- 10) - 26. (- 2) = 2 $\rightarrow$ x = -10 - 26t, t Z.

x ≡ -10 (mod 26) $\rightarrow$ x ≡ 16 (mod 26), logo x_0 = 16. S = {16 }

Consideremos agora o seguinte problema:

> Um bando de 17 piratas, ao tentar dividir entre si, igualmente, as moedas de ouro de uma arca, verifica que 3 moedas sobrariam. Na discussão que se seguiu um dos piratas foi morto: na nova tentativa de divisão, já com um pirata a menos, desta feita 10 moedas sobrariam. Novo quiproquó e mais um pirata é morto. Mas agora, por fim, é possível dividir a fortuna entre eles. Qual o menor número de moedas que a arca poderia conter? (DOMINGUES, 1991 p. 142, exercício 299).

Inicialmente, ao dividir x moedas para 17 piratas, cada um receberá y moedas de ouro. Portanto, teremos a equação x = 17y + 3. Morrendo um pirata, teremos x = 16 z + 10 e, finalmente morrendo outro, teremos x = 15 w, com x, y, z, w inteiros positivos. Temos que resolver o sistema de congruências lineares $\begin{cases} x \equiv 3 \ (mod\ 17) \\ x \equiv 10 \ (mod\ 16) \\ x \equiv 0 \ (mod\ 15) \end{cases}$

Na primeira congruência linear verificamos que x = 17y + 3. Substituindo na equação 2 teremos:

$(17y + 31 \equiv 0 \pmod{16}) \rightarrow 17y + 3 - 10 = 16z,\ z \in \mathbb{Z}. \rightarrow 17y - 16z = 7\ \ 1 \rightarrow 7.\ (1) - 16.(1) = 1$

$17.\ (7) - 16.\ (7) = 7 \rightarrow y = 7 - 16t,\ t \in \mathbb{Z}$.Temos que $x = 17(\ 7 - 16t\ ) + 3 \rightarrow x = 119 - 272t + 3$

$x = 122 - 272t$. Substituindo o valor de x na equação 3, teremos $(\ 122 - 272t) \equiv 0(\ \mathrm{mod}\ 15)$

$122 - 272t = 15w,\ w \in \mathbb{Z}$. Resolvendo a equação diofantina: $272\ t + 15w = 122$. Concluímos que o valor de $t = -854 + 15k,\ k \in \mathbb{Z}$. Substituindo o valor de t na equação $x = 122 - 272\ t$, teremos: $X = 122 - 272.\ (\ -854 + 15k)\ \ x = 122 + 232.288 - 4080k,\ k \in \mathbb{Z}$.

$x \equiv 232.410 \pmod{4080}$, logo $x \equiv 3960 \pmod{4080}$. Portanto, a solução do problema é

S = {3960}

2.2 Experiências com o Ensino de Equações Diofantinas

Atividades exploratórias com EDL, na perspectiva dos PCN e da Educação Matemática, isto é, destinadas a contribuir para o desenvolvimento de habilidades do pensamento do estudante a partir de situações que lhe exija interpretação, reflexão, investigação e análise ainda não são muitas. Mas algumas experiências de professores pesquisadores sobre EDL foram encontradas na revisão bibliográfica deste trabalho.

2.2.1 As experiências de Patrícia Sadovsky

As suas experiências estão relatadas em um livro com o título: **"O espaço social da sala de aula: condição propícia para a produção de conhecimento"**

A autora parte do princípio de que a elaboração de conhecimento em equipe propicia um aprofundamento de ideias sobre uma questão num determinado momento, motivando o aluno a trabalhar em grupos, gerando novas indagações entre eles, criando novas possibilidades para o ensino da matemática.

O universo de incerteza mostra que "melhor não é o mesmo que o indiscutível". Há momentos em que as questões novas enfrentadas pelos alunos propiciam tantas dúvidas que o intercâmbio entre eles geram novas perguntas, aumentando as possibilidades para o matemático. O professor é um elemento importante nesse processo, pois, além de complementar a elaboração de uma ideia, cabe a ele nortear o aluno nas suas diferentes decisões, tornando a qualidade do aprendizado efetiva.

O tema EDL foi explorado pela autora numa sala de aula para uma turma de sétima série, onde foi proposto um problema que abordava novas questões alusivas à transição aritmética–álgebra, onde o aluno tinha que experimentar e explorar, individualmente, sendo enfatizada a necessidade de reflexão sobre as formas de articulação da classe, as dimensões privada e pública, o trabalho pessoal e o espaço coletivo. Foi lançado o seguinte problema:

> Marisa tem 20 reais em moedas de 10 e 50 centavos. Quantas moedas de cada tipo pode ser que ela tenha? (SADOWAKY, 2007, p. 59).

A proposta desse problema compreendia as seguintes tarefas para os alunos: Produzir soluções, definir o número de soluções do problema, argumentar sobre a diversidade das variáveis e criar um procedimento que permita a generalização da produção de todas as soluções. Ao mesmo tempo em que esse problema possibilita a utilização de estratégias básicas da aritmética, ele impõe certa dificuldade para o aluno nessa transição para a álgebra, devido à noção de variável e dependência, à busca de um procedimento padrão que obtenha todos os pares de soluções do problema, gerando, inicialmente, um mundo de incertezas, provocando perguntas que conduzam aos conhecimentos necessários para a introdução às práticas algébricas.

O problema das moedas foi trabalhado em duas aulas e dividido em quatro etapas na sala de aula. A primeira etapa foi feita individualmente com cada aluno, procurando as soluções, a quantidade delas e criando um procedimento para a obtenção das mesmas. A etapa II foi realizada em grupos, optando por um único procedimento ou gerando outro. A etapa III foi feita pelo professor, colocando os procedimentos de cada grupo na lousa e feita a análise dos procedimentos expostos, em pequenos grupos. Finalmente, houve a culminância na etapa IV através de um debate coletivo sobre os procedimentos.

O confronto entre as diversas produções da classe teve um caráter retroativo do ponto de vista de cada aluno, incentivando a busca de critérios para estabelecer o número de soluções do problema, onde as dúvidas e incertezas são elementos importantes no processo.

A autora analisa cinco procedimentos interessantes criados pelos grupos, verificando as diferentes argumentações de cada grupo:

P.1) Somando 1,2,3,...,n moedas de 50 centavos e subtraindo de 20 e dividindo o resultado por 0,1 encontraremos a quantidade de moedas de 10 centavos. (Mário e Mariano)

Esse procedimento propicia o encontro de soluções particulares do problema e dificulta a obtenção de um algoritmo que generalize o conjunto-solução do mesmo.

P.2) Escolhe–se um número de 0 a 200. Multiplica-o por 10, obtendo a quantidade de moedas de 10 centavos. Diminui o resultado de 2000 e divide por 50, encontrando o número de moedas de 50 centavos. (Guilherme, Alessandro, Manoel e João)

Exemplo: $34 \times 10 = 340$ $2000 – 340 = 1660$ $1.660 \div 50 = 33,2$

Resposta: 33 moedas de 50 centavos e 35 de 10 centavos

Esse procedimento particulariza a solução do problema, pois o grupo parte de um exemplo, escolhendo um número de 0 a 200 (universo da quantidade de moedas de 10 centavos: 20×10) e não percebeu o truncamento na conversão de números decimais em inteiros, gerando uma boa discussão na hora do debate, pois o resultado 0,2 ignorado por eles, mostra que $0,2 \times 0,50 = 0,1$, evidenciando que a quantidade de moedas de 10 centavos “vai de 5 em 5”.

P.(3) Número de moedas de 10 centavos: (50C $\times$ n menor que 40 – 2000C) $\div$10 =A

Número de moedas de 50 centavos: (20 – A $\times$ 0,10) = B (Gabriel, Alex, Martim e Xavier)

Esse grupo criou dois algoritmos. Cometeu um erro no primeiro, pois o correto seria 2000 – 50n, e mostrou um uso aritmético com letras, um algoritmo para cada variável.

P.(4) $20 \div 0,5 = 40$ $20 \div 0,1 = 200 \rightarrow 200 \div 40 = 5$ $200 \times 0,10$

$195 \times 0,10 + 0,5 \times 1$ $190 \times 0,10 + 0,5 \times 2$ $5 \times 0,10 + 39 \times 0,5 \rightarrow 40 \times 0,5$.

Nota-se que todos os resultados dão 20 (Julieta, Luísa, Ester e Rosana).

Esse grupo encontrou 41 soluções utilizando uma estratégia de compensação da quantidade de moedas de um tipo com moedas do outro tipo.

P.(5)

Quantidade de moedas de 10 C	Quantidade de moedas de 50 C
0	40
5 = 50	39 = 19,5
10 = 100	38
15	37
20	36
200	Zero

(Sílvia, Paula e Sebastião)

Os alunos desse grupo partiram de zero moeda de 10 centavos e 40 moedas de 50 centavos. Somavam cinco moedas de 10 centavos e subtraiam uma de 50, até chegar a 200 moedas de 10 centavos e zero de 50 centavos, usando também uma estratégia de compensação.

O debate desses procedimentos foi efetuado entre os grupos e a professora, onde um grupo discutia o procedimento do outro grupo, gerando dúvidas, novos questionamentos, e a docente apenas norteava as discussões, deixando que os alunos construíssem o próprio conhecimento. Bloch (1999) considera que a atividade matemática do professor na sala de aula é um indicador da atividade dos alunos.

Após longo debate sobre cada procedimento, compreendemos que a quantidade de soluções está atrelada ao problema e não ao procedimento particular utilizado.

A proposta desse livro consiste pela luta dos trabalhos coletivos, considerando os alunos seres pensantes, criativos, críticos, capazes de produzir novas ideias, pensar individualmente e no coletivo.

A título de contribuição, esta dissertação expande as soluções encontradas pelos alunos da autora em questão, apresentando abaixo duas abordagens com referenciais matemáticos de níveis mais elevados.

Percebe-se que esse tipo de situação–problema mostra que podemos aplicar as Equações Diofantinas nos três níveis de ensino. Se ele fosse aplicado, por exemplo, no ensino médio, o aluno, por conhecer sistemas lineares e progressão aritmética, teria mais facilidade ao resolver, pois, fatalmente montaria a lei matemática 0,10x + 0,50y = 20. Multiplicaria a equação por 10, obtendo x + 5y = 200. Isolando x, teria: x = 200 – 5y. Se x e y são inteiros e positivos, concluiriam que $0 \leq y \leq 40$ e x é um múltilpo de 5.

X	0	5	10	15	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Y	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22

X	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155
Y	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7

X	160	165	170	175	180	185	190	195
Y	6	5	4	3	3	2	1	0

Observando a primeira linha, verificamos que constitui uma progressão aritmética de razão cinco. Então, x = 5n – 5, com $n \in N^*$, e a segunda linha é uma progressão aritmética de razão um. Sendo assim, y = 41 - n e n = 41 que corresponde ao número de soluções do problema.

Aplicando esse mesmo problema num curso de licenciatura, o aluno pode usar todos os conhecimentos adquiridos na teoria dos números e aplicar a resolução de uma Equação Diofantina.

X + 5y = 200   1. (6) + 5. (-1) = 1   (1200) + 5(-200) = 200

X = 1200 + 5 t e y = - 200 – t, com t $\in$ Z. Fazendo x $\geq$ 0 e y $\geq$ 0, teríamos - 240 $\leq$ t $\leq$ - 200, com t inteiro; acharíamos 41 soluções. Ainda se pode ter a interpretação geométrica dessa equação, usando o GRAPHMATICA, o que se vê no GRÁFICO 5.

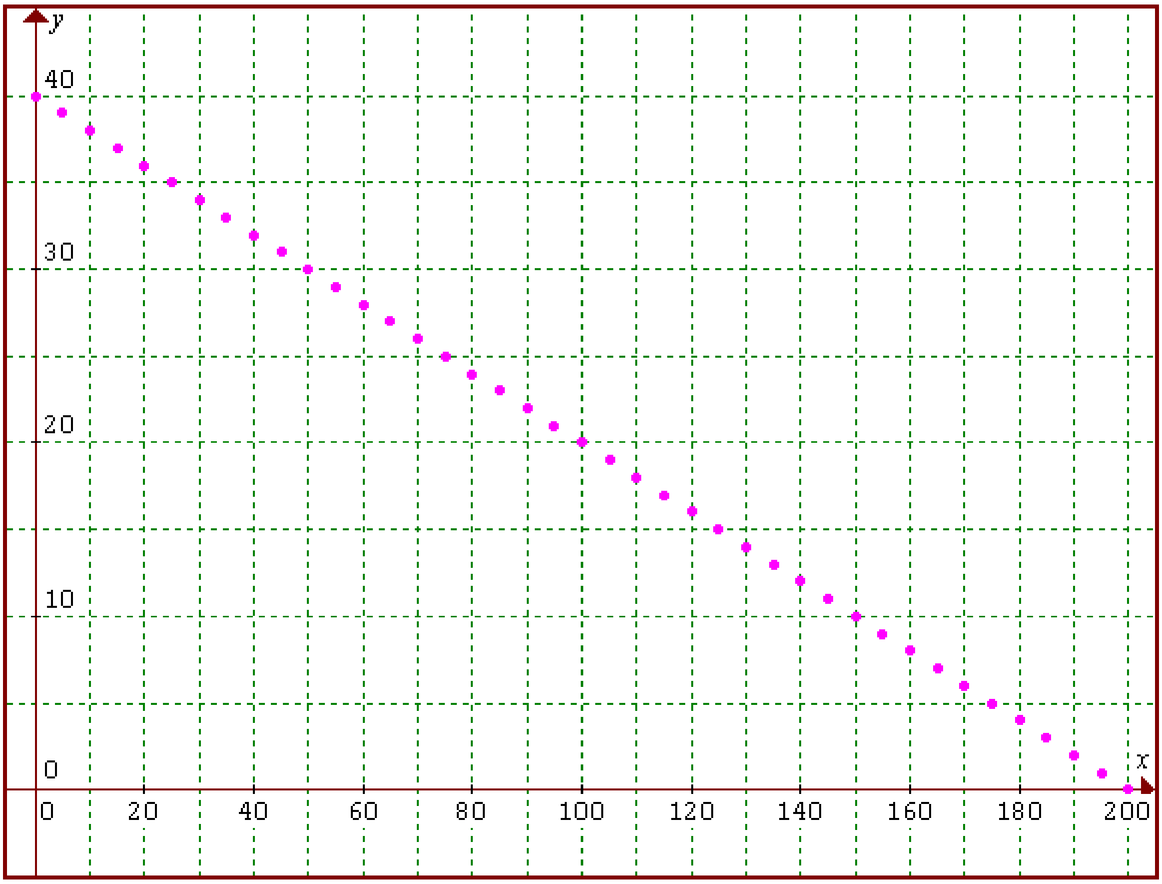


GRÁFICO 5: Visualização geométrica do conjunto-solução da equação linear 0,10x + 0,50y = 20, no domínio discreto positivo.
Fonte: Plotado no software GRAPHMATICA.

2.2.2 As experiências de Sílvio Barbosa de Oliveira

A experiência do autor foi relatada em sua dissertação de mestrado: **"As Equações Diofantinas Lineares e o Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio"**

Esse trabalho é baseado em duas indagações: Se o objeto do saber “Equações Diofantinas lineares” é considerado um objeto de ensino nos PCNEM e PCN+ , e se os livros didáticos abordam esse tema ou situações-problema envolvendo o conhecimento da teoria dos números, mais especificamente as EDL.

A justificativa do trabalho, relatada pelo autor, baseia-se no interesse pela álgebra, a partir da mudança da metodologia aplicada pelos professores na graduação que consiste na compreensão de conceitos e na interpretação dos resultados dos problemas, contrastando-se com a metodologia do ensino tradicional, que se limitava à aplicação correta das regras em exercícios padronizados, em algoritmos sem significado, comuns no ensino médio, propiciando ao aluno a ilusão de que isso era o “fazer matemática”.

Na sua pesquisa, Sílvio destaca alguns livros importantes da educação matemática tais como “Aproaches to Algebra: Perspectives for Research and Reaching”, “Learning and Teaching Number Theory – Research in Cognition and Instruction”, onde são citados pesquisadores famosos como John Mason, Lesley Lee, Carolyn Kieran, Alan Bell, Teresa Rojano. O primeiro livro retrata a dificuldade do aluno na aprendizagem da álgebra no âmbito mundial, e o segundo, enfatiza os temas da Teoria dos números, considerando a Aritmética como parte da Álgebra, isto é, a Aritmética origina a álgebra quando são abordadas as ideias implícitas da Aritmética.

São citados também na sua pesquisa alguns pesquisadores da Educação Matemática, tais como Campbell e Zazkis (2002), onde enfatizam o estudo da Teoria dos Números como ideias fundamentais da matemática que consistem em conjecturar, argumentar e demonstrar.

Estudiosos tais como Machado et al. (2005) mostram que a Teoria dos Números auxilia os alunos a reconhecer e reparar as limitações no seu entendimento conceitual da Aritmética dos números inteiros. Também são destacados autores como Ferrari (2002), artigos sobre a Teoria dos Números de membros do grupo de pesquisa Educação Algébrica e de Guzmán (1992), artigos sobre Equações Diofantinas Lineares de Rama (2005), Barros (1998), La Roque e Pitombeira (1991) e Silva (2002).

No trabalho do autor, são objetos de análise alguns interessantes problemas envolvendo esse tema e enunciados em textos de educadores matemáticos:

PROBEMA 1:

> Um cachecol custa, na Rússia, 19 rublos, mas o caso é que o comprador só tem notas de 3, e o caixa, só de 5.. Nessas condições será possível pagar a importância da compra e de que modo? (BARROS, 1998, p. 141).

PROBLEMA 2:

> Propõe-se a uma pessoa que multiplique a data do dia do seu nascimento por 12, e o número que indica o mês correspondente por 31. Com a soma desses produtos é possível calcular a data de aniversário da dita pessoa? (BARROS, 1998, p. 143).

PROBLEMA 3:

> Por R$ 5 000,00 compraram-se 100 unidades de eletrodomésticos. Os preços deles eram os seguintes;
>
> | | |
> |---|---|
> | TELEVISOR 14 POLEGADAS | R$ 500, 00 cada |
> | BATEDEIRA | R$ 100, 00 cada |
> | RÁDIO DE PILHA | R$ 10, 00 cada |
>
> Quantos eletrodomésticos de cada espécie puderam ser comprados? (BARROS, 1998, p. 45).

PROBLEMA 4:

> Quantas quadras de basquete e quantas de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente? E se forem 77 alunos? (LA ROQUE; PITOMBEIRA, 1991, p.39).

PROBLEMA 5:

> Para agrupar 13 aviões em filas de 3 ou de 5, quantas filas serão formadas de cada tipo? (LA ROQUE; PITOMBEIRA, 1991, p.39).

Na sua dissertação, o autor destaca ainda que Edméia Silva (2002) publicou um artigo na Revista do professor de matemática, lembrando que o estudo das Equações Diofantinas pode ser tratado em outras áreas de conhecimento, assim como na Física, Química e Biologia. Por exemplo, na Química, ao balancearmos uma equação. Cita também um problema envolvendo a divisão euclidiana na prova de Olimpíada de matemática em Goiás. Enfatizam a ideia da importância de se trabalhar com problemas que envolvam números inteiros e ver suas aplicações em outras áreas de conhecimento.

Para responder a sua primeira indagação, foram analisados dois documentos norteadores da educação no Brasil: Os PCNEM e os PCN+. Constatou-se nos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio e nos PCN+ que não há referência explícita ao tema EDL, pois na abordagem dos eixos temáticos Álgebra, Números e Funções, verificou-se que seus autores dão ênfase aos conjuntos infinitos e contínuos, tendo como objeto de estudo, os números reais, os números complexos, as funções e as equações de varáveis reais. Todavia, alguns pesquisadores da Educação matemática, como Resende (2004), destacam que tratar o conjunto dos números inteiros apenas como um subconjunto dos números reais, deixa passar despercebido aspectos fundamentais tais como a divisibilidade.

Respondendo a segunda indagação, foram analisadas duas coleções de livros didáticos do ensino médio: A C1 “Ciências e Aplicações” (2004), dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo

Dolce, David Degenszajn e Roberto Perigo, e a C2 “Matemática” (2005), do autor Luiz Roberto Dante, cada coleção distribuídas em três volumes. “Verificou-se que em ambas as coleções não constam o conteúdo “Equações Diofantinas Lineares”.

As conclusões do autor são de que é benéfico para o aluno e para o ensino de matemática que o estudo das EDL seja abordado adequadamente ao longo do ensino básico.

2.2.3 As experiências de Eduardo Sad da Costa

Este autor discute sua experiência na dissertação de mestrado: **“As Equações Diofantinas Lineares e o Professor de Matemática do Ensino Médio”.**

A proposta desse trabalho visa investigar se e como os professores de matemática do ensino médio trabalham, com seus alunos, situações-problema que recaem em Equações Diofantinas Lineares. A pesquisa é feita com uma mostra de professores voluntários.

O autor se graduou em Licenciatura Plena em Física e Administração de Empresas e não conhecia a Teoria dos Números. Após ingressar no Mestrado em Educação Matemática na PUC-SP e após participar do GPEA (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática) e fazer várias leituras sobre esse tema, ele percebeu a relevância dessa teoria nas suas aulas de matemática. Além da sua aplicabilidade no cotidiano, havia questões de pesquisas interessantes de serem exploradas.

O autor, durante as suas pesquisas, recorreu a algumas revistas científicas e revistas destinadas a professores do ensino básico, em busca desse tema, encontrando um artigo interessante: “Uma Equação Diofantina e suas Resoluções” (1991), de Gilda de La Roque e João Bosco de Pitombeira, que enfatiza a resolução de EDL, sugerindo aos leitores seu ensino na educação básica. Esse artigo provocou as seguintes indagações: Será que os outros professorem da Educação Básica estão trabalhando com esse assunto? Caso afirmativo, como está sendo abordado esse tema?

Em uma amostra de professores entrevistados pelo autor e colocados diante de alguns problemas de EDL, verificou-se que o assunto não é trabalhado no ensino médio e que o próprio professor não está habituado a resolver problemas nesta linha de abordagem.

O autor exorta a comunidade acadêmica a incorporar ideias expostas nos trabalhos de pesquisadores da Educação Matemática que têm dado ênfase às questões relacionadas ao ensino da Teoria Elementar dos Números nos três níveis de ensino de Educação Básica. Refere-se, por exemplo, a resultados de pesquisas publicados em 2002 em “Learning and

Teaching Number Theory – Research in Cognition and Instruction", editada por Stephen R. Campbell e Rina Zazkis.

Comenta que nos trabalhos são tratados temas importantes da Teoria Elementar dos Números, fornecendo a indicação da sua potencialidade e enfatizando a sua compreensão mais aprofundada na Matemática Fundamental, e considera a necessidade de um esforço mais conciso por parte da comunidade dos educadores matemáticos e pesquisadores para a investigação desse potencial, levando-se em conta a pouca exploração e desconexão das pesquisas na área

A Teoria dos Números propicia uma variedade de situações–problema, permitindo que sejam formuladas questões fáceis de compreensão pelos alunos do ensino básico. Coelho, Machado e Maranhão (2003) consideram esse tema um campo vasto para o desenvolvimento da "rede de significados" mencionada nos PCN, pois a Teoria dos Números permite a formulação de questões cuja solução completa requer incorporação e manejo de conceitos de forma integrada. Todavia, esses mesmos autores consideram a pouca exploração e relevância dadas pelos professores na educação básica, embora a Teoria dos Números esteja presente nos currículos de alguns cursos de Licenciatura de Matemática. A exploração das potencialidades desse tema é escassa.

O autor refere-se aos trabalhos de Maranhão, Machado e Coelho (2004) que destacam uma característica importante da Teoria Elementar dos Números, que é a sua facilidade no contexto na introdução do formalismo matemático, pois os objetos (números) são familiares aos alunos do ensino Médio desde as primeiras séries do Ensino Fundamental.

O autor atenta para a necessidade de se repensar o processo de ensino-aprendizagem dos assuntos inerentes à Teoria Elementar dos números no Ensino Médio, de maneira que apontem novas direções e significações para o desenvolvimento desse tema.

2.2.4 As experiências de Wagner Marcelo Pommer

Em: **"EQUAÇOES DIOFANTINAS LINEARES: Um desafio Motivador para alunos do Ensino Médio**", um trabalho de mestrado, o autor relata a sua experiência com EDL.

É uma pesquisa direcionada a alunos do Ensino Médio cujo objetivo principal é verificar se, como, e em que medida os alunos do Ensino Médio explicitam conhecimentos que envolvam as EDL.

Ele analisa um dos problemas encontrados na Educação Básica, ressaltado pelo pesquisador Nilson José Machado, que é o desequilíbrio existente entre a Matemática Discreta e a Matemática Contínua. Ele revela a existência de questões simples e interessantes envolvendo números inteiros, não abordados no Ensino Básico, sendo que, geralmente são resolvidas no campo do conjunto dos números reais, podendo ser ajustadas com soluções particulares para os números inteiros, evidenciando a importância da inserção do estudo das EDL na Escola Básica.

Brolezzi (1996) define a dicotomia discreto/contínuo da seguinte maneira:

> De modo geral, discreto é aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte. Vem do latim discretus, particípio passado do verbo discernere (discernir), que significa discriminar, separar, distinguir, ver claro [...]. Já contínuo vem de com – tenere (ter juntado, manter unido, segurar). Contínuo é o que está imediatamente unido á outra coisa (BROLEZZI, 1996, p.1).

A Matemática Discreta ou finita é uma ferramenta muito utilizada nas áreas científicas tais como as Ciências da Computação e Economia, e também na própria Matemática relacionada com os temas da Teoria dos Números, propiciando o desenvolvimento das habilidades de contagem, estimação e previsibilidade. Atualmente são enfatizados tópicos como Máximo Divisor Comum, Números Primos, Aritmética Modular, e Criptografia.

Pommer também destaca a importância dos trabalhos de Resende (2007) e Veloso (2005), que abordam temas voltados aos números inteiros, inseridos no contexto da Matemática Discreta. Os trabalhos de Oliveira (2006) e Costa (2007) referentes ao estudo das EDL no Ensino Médio também foram importantes na sua pesquisa.

A metodologia utilizada pelo pesquisador consistiu na elaboração e aplicação de uma sequência didática, embasada na Engenharia didática, procedimento metodológico descrito em Artigue (1996), cujos sujeitos da pesquisa foram alunos do Ensino Médio com prévios conhecimentos básicos necessários para o desenvolvimento do tema escolhido.

A estratégia usada nessa investigação foi a de tentativa e erro, permitindo ao aluno determinar algumas ou todas as soluções inteiras de uma EDL, mas não possibilitando verificar a inexistência da solução.

O autor também enfatiza a importância da necessidade do repensar e da valorização de propostas articuladas em sala de aula que envolva situações no âmbito da Matemática Discreta, conforme relatado em Moura (2005).

2.2.5 As experiências de Cláudia L. O. Groenwald e Rosvita F. Franke

No artigo **"Equações Diofantinas na Formação de Professores de Matemática"** as autoras sintetizam suas experiências com EDL.

Comentam que o estudo mais aprofundado da Teoria dos Números apresenta muitas barreiras, tanto para os professores quanto para os alunos, gerando pouca ênfase nos currículos de matemática na atualidade. Essas dificuldades estão retratadas na transposição didática dos conceitos aritméticos pelos professores, devido á falta de modelos, ao número reduzido de atividades metodológicas existentes nos livros didáticos, minimizando a capacidade do aluno do pensamento aritmético, limitando-se à realização de exercícios repetitivos. Visando auxiliar o professor de matemática na solução dessas dificuldades, as autoras citadas fizeram uma investigação de problemas modelados ao estudo das EDL, cujos sujeitos da pesquisa foram alunos do curso de licenciatura em matemática da Universidade Luterana do Brasil, um grupo de onze alunos, cujo tópico não estava contemplado no curso e também não é encontrado no currículo do ensino básico.

As EDL foram trabalhadas com o uso da metodologia "Resolução de problemas" cuja complexidade envolve diferentes processos tais como compreensão, inferências, dedução, restauração do conhecimento prévio, interpretação de premissas e raciocínio (SANCHEZ; ESCUDERO; MASSA, 2001). Esse procedimento metodológica objetiva o desenvolvimento das habilidades da argumentação, observação, dedução e o espírito crítico do aluno, através da aprendizagem sob forma de desafios e nas propostas de problemas interessantes.

A investigação foi realizada em duas etapas: a primeira consistiu num estudo exploratório dos conceitos básicos da Teoria dos Números tais quais múltiplos, divisores, MDC, algoritmo da divisão, EDL e implementação de um experimento de ensino. Na segunda etapa foi aplicado um experimento de ensino com atividades pesquisadas na primeira etapa, onde foi criado um espaço de discussões em que os alunos se dividiram em pequenos grupos na busca de soluções para os problemas propostos, sendo auxiliados pelo professor nas análises e conjecturas levantadas pelos alunos, obtendo êxito no trabalho realizado.

Observou-se uma participação efetiva dos alunos, demonstrando interesse, disposição e concentração no desenvolvimento das atividades, mas eles apresentaram muitas dificuldades na correlação dos conceitos matemáticos com a resolução dos problemas, na interpretação dos textos. Todavia, essas adversidades desencadearam neles uma maior motivação na realização das atividades, levando-os ao sentimento do desafio de superar essas barreiras. Alguns discentes atribuíram suas dificuldades à forma de aprendizagem na educação básica, cujos conceitos fundamentais eram ensinados, desconectados das situações práticas, impossibilitando a compreensão desses conceitos matemáticos utilizados ao longo desse experimento. Muitos deles se propuseram a participar de outras oficinas relativas a esse tema, para uma melhor transposição didática desses conceitos. Quando o sujeito passa a ter um relativo domínio sobre um determinado saber, torna–se possível desencadear uma práxis transformadora e também geradora de novos saberes (PAIS, 2002).

Foi notório que os alunos que já lecionavam e aqueles com o maior número de disciplinas concluídas tiveram um melhor desempenho em relação aos outros, havendo uma colaboração dos mesmos nas dúvidas de outros colegas, promovendo uma intensa troca de experiências, corroborando com o crescimento de todos os participantes.

Verificou-se que a estratégia cognitiva usada nesse experimento foi a de tentativa e erro, não havendo o levantamento das hipóteses nem a realização do enfrentamento das mesmas. O trabalho grupal ocasionou um ambiente de reflexão e discussão, conduzindo, na maioria das vezes, os alunos a encontrarem a resolução correta de um problema que anteriormente não fora encontrada.

Ficou evidenciado que os cursos de licenciatura de matemática devem primar pelo desenvolvimento de um espaço propício para a reflexão, discussão e estudo dos conceitos aritméticos para que promovam um maior leque de estratégias metodológicas que satisfaçam a realização da transposição didática adequada para o ensino básico. Lins e Gimenez (1997) afirmam que um bom trabalho aritmético para a prática do professor é reconhecer a necessidade de uma mudança curricular que sirva para desenvolver um sentido numérico; integrar diversos tipos de raciocínios na produção de conjecturas; assumir o papel dos distintos cálculos, que não se reduzam à obtenção de resultados, e contribuam para aprimorar processos como planificar, desenvolver estratégias diferentes, selecionar as mais adequadas; fomentar uma avaliação que a regulação e o controle constante do processo de ensino proposto.

3 A PESQUISA REALIZADA

O objetivo da pesquisa relatada nesta dissertação é buscar formas de auxiliar o aluno na resolução e compreensão de problemas do cotidiano envolvendo o estudo das Equações Diofantinas Lineares. Para que ele seja atingido, foi feita, inicialmente, uma fundamentação teórica da Teoria Elementar dos Números, que é pré-requisito para o estudo das Equações Diofantinas e, posteriormente, foi aplicado um conjunto de atividades preparadas conforme objetivos e concepções previamente assumidas.

3.1 Orientações Didático-Metodológicas

Desde o início desta pesquisa, foi dada atenção aos suportes teóricos, procurando orientações educacionais e didático-metodológicas, de cujos princípios foram feitas aproximações ao longo do seu desenvolvimento.

O conjunto de Atividades foi organizado, aplicado e observado pelo professor/pesquisador à luz das teorias de Zabala (1998), Ponte (2003) e Polya (1995).

Zaballa, (1998) define Sequências Didáticas como séries ordenadas e articuladas de atividades que formam as unidades didáticas. Primeiramente devemos escolher qual o tipo de tarefa, podendo ser a exposição de um tema, a observação, o debate, as provas, os exercícios, as aplicações, etc., sendo assim o elemento diferenciador das diversas metodologias ou maneiras de ensinar.

A sequência didática apresenta um alto grau de complexidade diante daquele modelo de aula tradicional que geralmente é expositivo, pois propicia uma diversidade de propostas, cuja dificuldade não se encontra nas fases da realização das tarefas e sim na elaboração das atividades. A sequência do modelo tradicional tem a seguinte formatação:

a) composição da lição;
b) estudo individual sobre o livro didático;
c) repetição do conteúdo aprendido(numa espécie de ficção de ter se apropriado dele e o ter compartilhado, embora não se esteja de acordo com ele), sem discussão ou ajuda recíproca;

d) O julgamento ou sanção administrativa (nota) do professor ou professora.

Esse modelo não é tão simples quanto parece e configura-se como um ponto de partida com variações significativas das diversas maneiras de ensinar.

A proposta de Zaballa é de colocar sobre a mesa instrumentos que permitam ao professor introduzir, nas variadas formas de intervenção, atividades que proporcionem uma melhora substancial de sua atuação na sala de aula, como resultado de um conhecimento com profundidade das variáveis e do papel que cada uma delas tem no processo de aprendizagem dos alunos. Um dos modelos de sequência didática proposto por ele é do "estudo do meio" que se formata nas seguintes fases:

a) atividade motivadora relacionada com uma situação conflitante da realidade experiencial dos alunos;
b) explicação das perguntas ou problemas que esta situação coloca;
c) respostas indutivas ou hipóteses;
d) seleção e esboço das fontes de informação e planejamento da investigação;
e) coleta, seleção e classificação dos dados;
f) generalização das conclusões tiradas;
g) expressão e comunicação.

O pesquisador procurou orientar-se por estes princípios ao propor e estabelecer as atividades didáticas destinadas à experiência com o processo ensino-aprendizagem das EDL.

Às vezes, pretendemos inicialmente com determinada atividade, que os alunos trabalhem certos conteúdos numa esfera mais conceitual. Mas, durante a aplicação da atividade, além das observações do pesquisador nesta direção, observamos que os alunos também usam algumas técnicas, algoritmos, diálogos, debates, fazem propostas, participam, respeitam a vez de o outro falar, etc... que são classificados como elementos que se distribuem pelas áreas de formação procedimental e/ou atitudinal, segundo Zabala (2007).

Ele define a aprendizagem de uma forma sintética:

> A aprendizagem é uma construção pessoal que cada menino ou menina realiza graças à ajuda que recebem de outras pessoas. Esta construção através da qual podem atribuir significado a um objeto de ensino, implica a contribuição por parte da pessoa que aprende, de seu interesse e disponibilidade, de seus conhecimentos prévios e de sua experiência. (ZABALLA, 2007, p. 63).

Para visualizar as três categorias referidas acima pelo autor, o quadro abaixo apresenta alguns tópicos de um possível caderno de campo em que a apresentação da situação problemática visava o aspecto conceitual, mas, a troca ou comparação de pontos de vistas entre os alunos permitiu observações de aspectos procedimentais e atitudinais, além do conceitual. (C = Conceitual; P = Procedimental; A = atitudinal.)

1 – Apresentação situação problemática	C		
2 – Diálogo professores/ alunos	C	P	A
3 – Comparações pontos de vista	C	P	A
4 – Conclusões	C		
5 – Generalização	C		
6 – Exercícios de memorização	C	P	
7 – Avaliação	C		

Nas aplicações das atividades de pesquisa da presente dissertação, foi possível observar que o apego a uma destas categorias dificultava, em algumas ocasiões, que o aluno tirasse conclusões ou alcançasse generalizações maiores. A intervenção do professor/pesquisador se fez na tentativa de auxiliar o aluno a raciocinar de forma abrangente e mais completa.

A leitura de Ponte (2003) permitiu ajudar a conduzir, de forma especial, o processo de aplicação das atividades desta pesquisa para uma linha investigativa.

Pela orientação deste autor, é importante que o professor esteja atento para promover a investigação nas aulas de matemática e valorizar o papel dela no ensino e na aprendizagem dessa disciplina. Cabe ao docente criar condições necessárias para que elas aconteçam. O processo de investigação não consiste na exploração de problemas sofisticados e difíceis, mas implica na formulação de questões interessantes, sem respostas prontas, cuja procura das mesmas depende de uma fundamentação teórica e rigorosa. Ponte (2003) reflete da seguinte forma:

> Desse modo, investigar não representa trabalhar em problemas mais difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam, no início, de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado. (PONTE, 2003, p. 9).

Nesse tipo de investigação são envolvidos, de forma natural, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, onde se deve enfatizar as características da conjectura teste-demonstração.

Uma atividade investigativa constitui-se numa poderosa forma de construção de conhecimentos, mas o professor deve ficar atento neste tipo de tarefa em não promover uma simples aplicação de procedimentos repetitivos, não só em construir tabelas e obter regularidades, mas sim, dar condições ao aluno de desenvolver o seu lado cognitivo, criando um ambiente harmônico e propício para a aprendizagem desse aluno.

Investigar significa procurar conhecer o que não se sabe. Consiste em "pesquisar e inquirir", é realizar atividades que envolvam uma busca de informação. "Investigar é descobrir relações entre os objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades." (PONTE, 2003, p. 13).

Todo trabalho investigativo é pautado pela imprevisibilidade. Neste contexto, durante a pesquisa, o professor/pesquisador, ao explorar a tarefa a ser executada, estava sempre consciente de novas situações no decorrer da mesma, e quando isto ocorria, ele procurava imbuir-se de maior sensibilidade para enfrentar os acontecimentos inesperados e despertar o espírito investigativo do aluno.

Segundo Ponte (2003), durante a investigação, o professor deve adotar uma postura interrogativa, cujas questões colocadas por ele devem visar a clarificação de ideias, promovendo a compreensão do assunto. Quando um aluno apresentar uma indagação, gerando um impasse no decorrer da tarefa, o professor deve saná-la com questionamentos abertos, inicialmente. Em seguida, levar esse aluno a uma melhor reflexão do problema. Posteriormente, as questões levantadas pelo professor devem ser transformadas em sugestões orientadoras das atividades dos alunos.

A leitura de Polya (1995) orienta o professor a exercer o seu verdadeiro papel, ou seja, o de auxiliar do aluno na compreensão de um problema, e não de se colocar como alguém com o absoluto poder de validar ou não a resolução ou resposta. Ele faz a seguinte colocação sobre a compreensão de um problema:

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Essas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. (POLYA, 1995, p.4).

Polya (1995) considera que o aluno deve compreender o problema e ter algum interesse na sua resolução. Não se pode culpá-lo, caso isto não aconteça, pois a escolha do problema proposto deve ter um grau médio de dificuldade, de forma natural e interessante, com certa disponibilidade de tempo para a sua apresentação. O aluno deve ser condicionado a identificar as partes principais do problema que são: a incógnita, os dados e a condicionante que devem ser encarados pelos alunos sob vários pontos de vista, como por exemplo, traçar uma figura relacionada ao problema e nela indicar os dados e a incógnita. A compreensão do problema se faz, muitas vezes, em dois estágios: da familiarização e do aperfeiçoamento da compreensão.

No decorrer da pesquisa, atentamos sempre para a observação de Polya (1995), quando afirma que na resolução de um problema, a maior dificuldade está na sua compreensão e no estabelecimento de um plano. Para vencer essas duas etapas, são necessários conhecimentos anteriores, bons hábitos mentais, concentração nos objetivos e, além disso, boa sorte. A execução do plano é menos tortuosa, requer maior paciência, pois os detalhes inseridos no roteiro geral gerado pelo plano devem ser examinados, calmamente, para que não dêem margem à ocultação de um erro.

Assim, nesta pesquisa, o professor/pesquisador enfatizava para que o aluno verificasse cada passo, que não perdesse a sua ideia final concebida, analisando as possíveis restrições de cada problema.

Para Polya, (1995), reexaminar a trajetória de resolução é muito importante. Depois de consignada a solução do problema ou a sua demonstração, é necessário que o aluno faça uma retrospectiva da resolução completa, fazendo reconsiderações, reexaminando o resultado final e o caminho percorrido para atingir esse feito, consolidando o seu conhecimento e aprimorando sua capacidade de resolver problemas.

Os sujeitos da presente pesquisa foram alunos de licenciatura em Matemática de duas universidades mineiras: a PUC-Minas - Betim e a UFVJM, onde foram realizados seis encontros, sendo aplicados três blocos de atividades sequenciadas. O primeiro bloco de atividades foi aplicado em setembro de 2009, o segundo em novembro do mesmo ano e último em março de 2010.

Nos dois primeiros encontros, realizados na sala de aula, os alunos ainda não tinham iniciado qualquer estudo sobre o tema EDL. Então, primeiramente, leram um texto redigido para esta pesquisa, definindo e exemplificando os tópicos principais da Teoria Elementar dos Números tais quais Múltiplos e Divisores, Algoritmo da Divisão, Máximo Divisor Comum, Teorema de Bézout. No segundo encontro, o texto propunha lidar com a definição de EDL com duas e três incógnitas, identificando a sua aplicação no estudo das Congruências Lineares, concluindo com uma lista de atividades propostas. O terceiro e quarto encontros foram ministrados na sala de laboratório de informática, com análise das interpretações geométricas dessas equações, enfatizando a matemática discreta e contínua, usando o Winplot, Geogebra e o Graphmatica. Os dois últimos momentos abrangeram os anteriores, começando pela aplicação do teorema de Bézout, passando pela condição de existência das soluções inteiras, sua representação gráfica, até a sua aplicação nas situações-problema do cotidiano.

As atividades foram elaboradas conforme os objetivos pré-estabelecidos:

a) aplicar o estudo das Equações Diofantinas Lineares em problemas do cotidiano, auxiliando o aluno na resolução e compreensão dos mesmos;
b) interpretar geometricamente uma Equação Diofantina Linear com duas e com três incógnitas;
c) discutir o número de soluções inteiras de uma equação linear;
d) modelar situações e problemas que envolvam as Equações Diofantinas lineares associadas ao Algoritmo da Divisão e Máximo Divisor Comum.

Nas fases de aplicação e avaliação, a opção do pesquisador foi colher dados pelo método da Observação Participante (FIORENTINI; LORENZATO, 2007). Ela é uma estratégia que envolve a observação direta, com grande participação do pesquisador, não no sentido de fazer frequentes intervenções, mas porque dele se exige participação efetiva no registro de tudo aquilo que pode ser considerado observação pertinente durante o processo da pesquisa.

3.2 Os Três Blocos de Atividades

Optamos por realizar uma sequência de atividades com algumas envolvendo resolução de problemas que conduziam ao estudo das Equações Diofantinas Lineares. No primeiro bloco foi elaborada uma sequência de seis atividades, sendo que a primeira teve um caráter investigativo na busca da solução geral e positiva de uma EDL e as demais se pautaram na resolução de problemas. O segundo bloco de atividades foi composto de cinco questões e visou investigar a existência de soluções inteiras de uma EDL com duas e três incógnitas, através da interpretação geométrica, culminando com a resolução de um problema. O último bloco teve seis atividades, buscando uma culminância dos blocos anteriores, fazendo um elo entre a Aritmética, Álgebra e a Geometria.

3.2.1 Primeiro Bloco de Atividades

O primeiro bloco de atividades foi realizado para alunos que, previamente, não conheciam o tema proposto. Os seus professores tinham apenas ensinado o conceito de MDC. Então, primeiramente o professor/pesquisador redigiu um texto (inserido no capítulo 2), definindo e exemplificando os tópicos principais da Teoria Elementar dos Números, tais quais Múltiplos e Divisores, Algoritmo da Divisão, Máximo Divisor Comum, Teorema de Bézout, para, posteriormente, definir as EDL com duas e três incógnitas, identificando a sua aplicação no estudo das Congruências Lineares, concluindo o texto com uma lista de atividades propostas. A seguir, têm-se as atividades:

ATIVIDADE I

Um aluno, ao realizar um exame de vestibulinho, ganha três pontos por questão certa e perde dois por cada questão errada.

a) Sabendo que ele obteve vinte e três pontos, expresse uma lei matemática que verifique o problema proposto.
b) Encontre cinco possíveis soluções inteiras e positivas para essa equação e interprete geometricamente esse resultado.
c) Baseando – se no resultado anterior, encontre uma solução geral para essa equação no domínio do conjunto N.
d) Expanda essa solução para o campo dos inteiros.
e) Qual o menor número de questões dessa prova?

ATIVIDADE II

Exprimir o número 100 como soma de dois números inteiros de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo por 11. (MONTEIRO, 1971, p. 138, exercício 55).

ATIVIDADE III

Determinar o menor número inteiro positivo que tem, para restos 16 e 27 quando dividido, respectivamente, por 39 e 56. (MONTEIRO, 1969, p. 138, exercício 57).

ATIVIDADE IV

É possível encontrar dois inteiros múltiplos de 6 e 9, respectivamente, tais que o resto da divisão euclidiana de um pelo outro seja 13? Justifique sua resposta

ATIVIDADE V

De quantos modos podemos combinar 60 moedas, misturando moedas de 1, de 10 e de 25 centavos, de modo a totalizar 3 reais?

ATIVIDADE VI

Sejam as equações lineares: $100x + 72y + 90z = 11$ e $120x + 84y + 144z = 60$.

a) Encontre, se existir, uma solução particular para cada equação.

b) Encontre a solução geral de números inteiros para cada equação, se existir.

Na sequência, serão apresentados padrões esperados de solução para as atividades, com o objetivo de verificar e analisar as aproximações que as soluções dos alunos fizeram em relação a estes padrões.

PADRÕES ESPERADOS DE SOLUÇÕES PARA O PRIMEIRO BLOCO

ATIVIDADE I: É uma questão composta de cinco itens e tem como objetivo a busca de soluções inteiras e positivas de uma Equação Diofantina a partir de tentativas e erros e representação geométrica da mesma, até que se encontre uma resposta satisfatória.

Para resolver cada atividade, espera–se que o aluno o faça por etapas, desenvolvendo o seu raciocínio, atingindo assim o objetivo que é a compreensão na resolução de problemas do cotidiano que envolva o tema mencionado. As etapas da solução do aluno serão cruzadas com as etapas dos padrões de soluções apresentadas a seguir:

E.I – Identificar as variáveis x e y, onde x é o número de questões certas e y corresponde ao número de questões erradas.

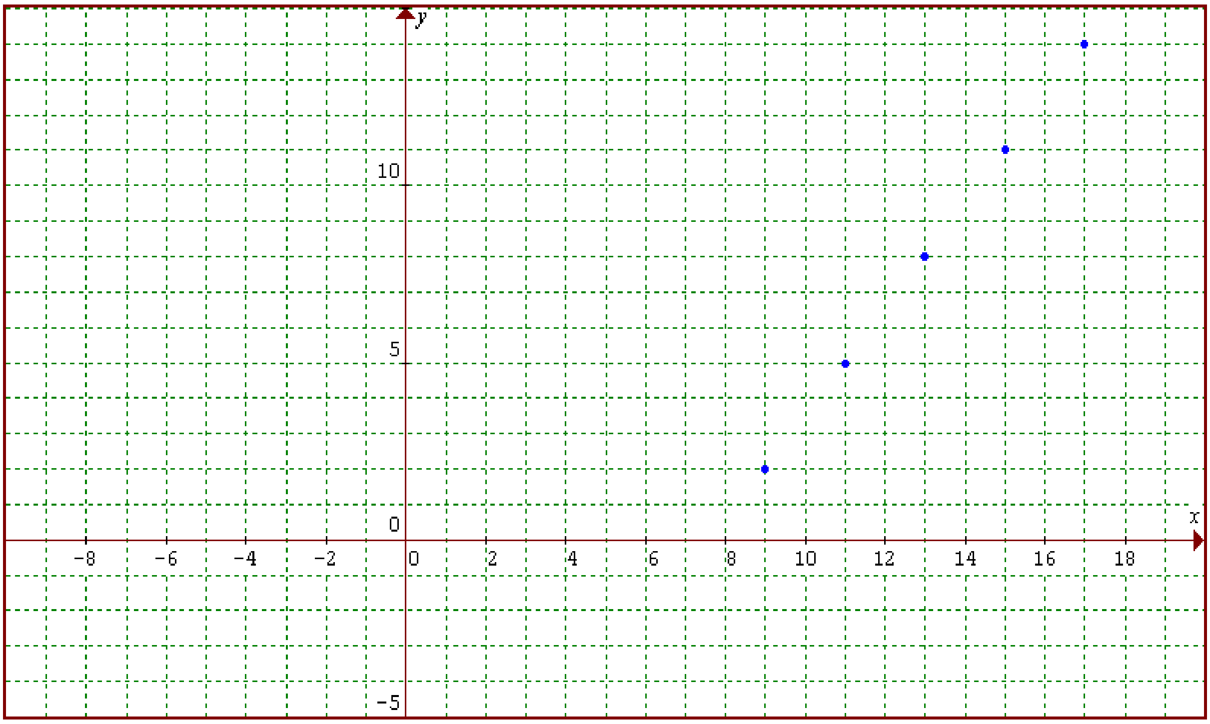
E. II – Escrever a lei matemática $3x - 2y = 23$ que representa a equação do problema proposto.

E. III – Isolar a variável y e, por tentativa, encontrar 5 pares ordenados (x, y) cujos valores sejam números inteiros e positivos.

Isolando a variável y em função de x, temos que $y = \frac{3x - 23}{2}$ e fazendo $y \geq 0$ e $y \in Z$, verificamos que $x \geq 7{,}6$ e que $2 | (3x - 23)$. Portanto, x assume valores ímpares. Logo, seu menor valor é x = 9. Substituindo na equação, teremos a tabela:

x	9	11	13	15	17
y	2	5	8	11	14

E. IV – Representar, graficamente, a equação dada, usando softwares matemáticos que plotam gráficos, tais como: Maple, Geogebra, Graphmatica, Winplot e outros ou fazer manualmente, mostrando que a representação geométrica é um conjunto de pontos alinhados e não uma reta.



GRÀFICO 6: Visualização gráfica da equação 3x – 2y = 23, plotado no Z^2
Fonte: Software GRAPHMATICA

E.V – Identificar na tabela que as sequência de valores de x e y constituem duas progressões aritméticas de razão 2 e 3, respectivamente.

Usando o termo geral da progressão aritmética: a_n = a_1 + (n – 1). r, encontrar a solução geral da equação 3x – 2y = 23, no campo dos naturais.

Os valores de x constituem uma progressão aritmética de razão 2, logo x = 7 + 2n, com n $\in N^*$, e os valores de y formam uma progressão aritmética de razão 3, logo y = -1 + 3n, com n $\in N^*$.

E. VI – Encontrar o mdc(3, 2) = 1 e aplicar o teorema de Bézout.

3. 1 – 2. 1 = 1> Então r = 1 e s = 1

E.VII – Multiplicar a expressão do exercício anterior por 23, encontrando uma solução particular para 3x – 2y = 23.

3. (23) – 2. (23) = 23, logo x_0 = 23 e y_0 = 23

E. VIII – Encontrar a solução geral da equação, no campo dos inteiros que é dada por S = $\{(x_0 + \frac{b}{d}$ t, $y_0 - \frac{a}{d}$ t), t $\in Z\}$. Logo x = 23 – 2t e y = 23 – 3t, com t ∈ Z.

E. IX – Verificar que a solução do problema recai em soluções inteiras e positivas, isto é, devemos encontrar valores inteiros para o parâmetro t para x $\geq$ 0 e y $\geq$ 0. Temos que 23 – 2t $\geq$ 0 e 23 – 3t $\geq$ 0. Logo t $\leq 7{,}7$. O maior valor inteiro que t assume vale 7. Então, encontraremos os menores valores para x e y que serão $x = 23 – 2.7 = 9$ e $y = 23 - 3.\ 7 = 2$. Portanto, o menor número de questões da prova é 11.

Os quadros 1 e 2 mostram as etapas atingidas pelos alunos na ATIVIDADE I, numa comparação com as etapas dos padrões de soluções apresentados anteriormente. Os nomes dos alunos foram substituídos por duplas de letras.

ALUNO	**E.I**	**E. II**	**E. III**	**E. IV**	**E. V**	**E. VI**	**E. VII**	**E. VIII**	**E. IX**
AP	X	X	X	X	X	X	X	X	-
AC	X	X	X	X	X	X	X	X	X
CM	X	X	X	X	X	X	X	X	-
DG	-	X	X	X	-	X	X	X	X
EF	X	X	X	X	X	X	X	X	-
GA	X	X	X	X	-	X	X	X	-
KS	X	X	X	X	X	X	X	X	-
LS	X	X	X	X	-	X	X	X	X
MR	X	X	X	X	X	X	X	X	X
MB	X	X	X	X	X	X	X	X	X
MA	X	X	X	X	-	X	X	X	-
NB	X	X	X	X	-	X	X	X	X
PG	X	X	-	-	X	X	X	X	X

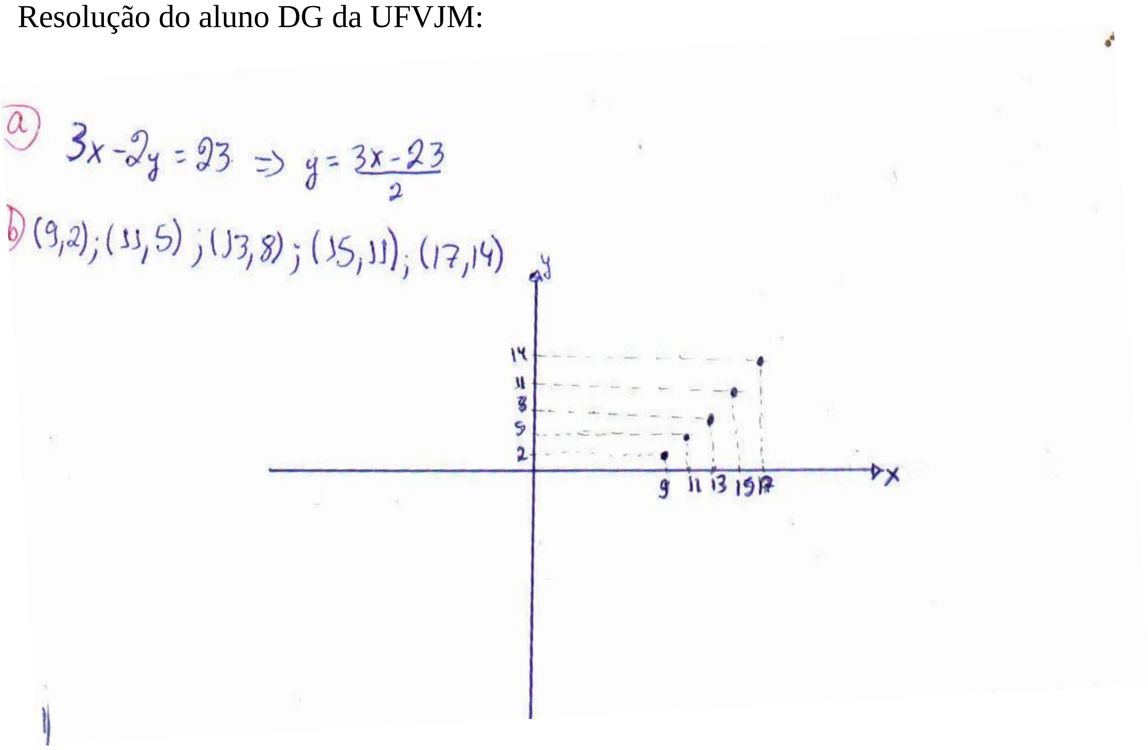
Quadro 1: Grupo da UFVJM – Referente à atividade I

ALUNO	E.I	E. II	E. III	E. IV	E. V	E. VI	E. VII	E. VIII	E. IX
AC	-	-	-	-	-	X	X	X	-
DV	X	X	-	-	-	-	-	-	-
GL	X	X	X	X	-	X	X	X	-
IR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
LM	X	X	-	-	-	-	-	-	-
RM	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RC	X	X	X	X	-	-	-	-	-
RR	-	-	-	-	-	X	X	X	-
RS	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RA	-	-	-	-	-		-	-	-
VA	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Quadro 2: Grupo da PUC Minas Betim - Referente à atividade I

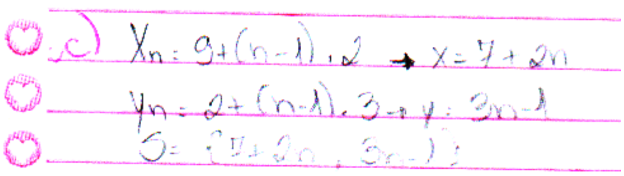
Observou–se que 17 dos 26 alunos pesquisados escreveram corretamente a lei matemática que representa o problema. O restante errou o sinal do coeficiente b ou não encontrou a lei. Quatorze alunos usaram o método da tentativa para a construção da tabela de valores e respectiva interpretação geométrica.

Resolução do aluno DG da UFVJM:



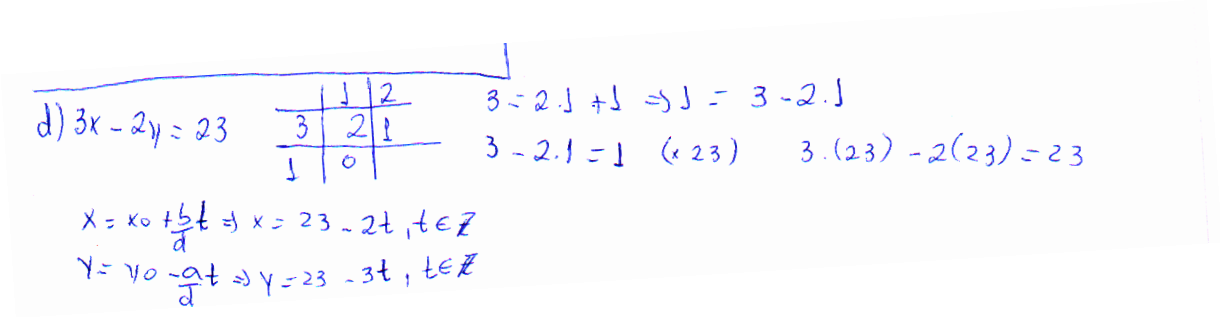
Oito alunos, ao observar a tabela do exercício b usaram o conhecimento da progressão aritmética para encontrar a solução geral da equação 3x - 2 y = 23 no campo dos naturais. Outros usaram a fórmula correta do termo geral da P. A, mas erraram nos cálculos.

Resolução do aluno CM da UFVJM:



Dezesseis alunos encontraram a solução geral da equação no campo dos inteiros, outros erraram a lei no exercício anterior e alguns não conseguiram assimilar o método formal da construção da solução geral de uma Equação Diofantina.

Resolução do aluno RR da PUC Minas Betim:


d) $3x - 2y = 23$

		1	2
	3	2	1
1	0		

$3 = 2.1 + 1 \Rightarrow 1 = 3 - 2.1$

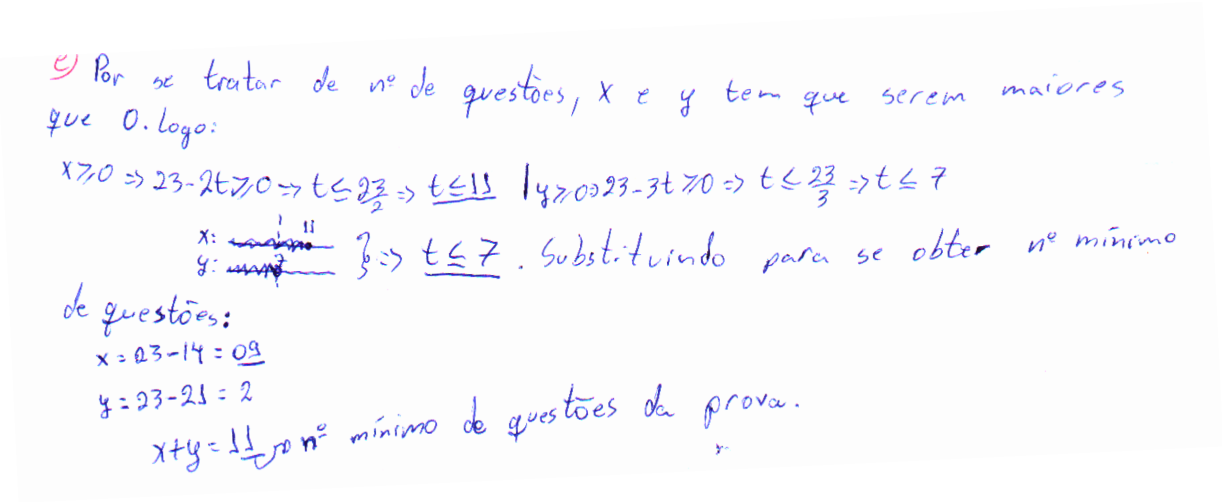
$3 - 2.1 = 1 \quad (\times 23) \qquad 3.(23) - 2(23) = 23$

$x = x_0 + \frac{b}{d}t \Rightarrow x = 23 - 2t, \; t \in \mathbb{Z}$

$y = y_0 - \frac{a}{d}t \Rightarrow y = 23 - 3t, \; t \in \mathbb{Z}$

Notou-se a maior dificuldade dos alunos na restrição do parâmetro t, pois o problema visa soluções inteiras e positivas, sendo que apenas 7 alunos atingiram essa etapa

Resolução do aluno PG da UFVJM


c) Por se tratar de nº de questões, x e y tem que serem maiores que 0. Logo:

$x \geq 0 \Rightarrow 23 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq \frac{23}{2} \Rightarrow \underline{t \leq 11} \;\; | \;\; y \geq 0 \Rightarrow 23 - 3t \geq 0 \Rightarrow t \leq \frac{23}{3} \Rightarrow t \leq 7$

x: ~~...~~
y: ~~...~~ $\Big\} \Rightarrow \underline{t \leq 7}$. Substituindo para se obter nº mínimo de questões:

$x = 23 - 14 = \underline{09}$

$y = 23 - 21 = 2$

$x + y = \underline{11} \rightarrow$ nº mínimo de questões da prova.

A estrutura do texto, com tabelas e protocolos das soluções dos alunos, que se usou acima para a exposição da ATIVIDADE I, foi elaborada para todas as demais Atividades dos três Blocos e permitiu que ao final de cada Bloco se fizesse um “Comentário/Análise” do seu momento de aplicação.

Mas, apresentar todas as demais Atividades dos três Blocos com esta estrutura torna a leitura repetitiva e cansativa para o leitor. Então, para as demais Atividades, as “Tabelas das etapas de soluções dos alunos” foram disponibilizadas no APÊNDICE desta dissertação. Os itens “Comentários/Análise”, após cada Bloco, sintetizam os elementos destas tabelas.

ATIVIDADE II: É uma questão que envolve o conhecimento do estudo dos múltiplos e divisores e almeja o encontro de soluções inteiras e positivas da equação 7x + 11y = 100. Ao resolver a questão, espera-se que o aluno seja capaz de:

E. 1 – Identificar as variáveis x e y, onde x corresponde aos inteiros múltiplos de 7, e y corresponde aos números inteiros divisíveis por 11.

E. II – Escrever a lei matemática 7x + 11y = 100.

E.III – Aplicar o teorema de Bézout.

	1	1	1	1
11	7	4	3	1
4	3	1	0	

11 = 7.1 + 4⟶ 4 = 11 – 7.1 7 = 4. 1 + 3⟶3 = 7 - 4.1 4 = 3. 1 + 1

1 = 4 – 3.1 → 4 -3. 1 = 1→ 4 – (7 – 4. 1).1 = 1⟶ 4 -7.1 + 4. 1 = 1⟶ 4. 2 – 7.1 = 1

(11 -7. 1) .2 – 7 . 1 = 1→ 7. (- 3) + 11. (2) = 1

E.IV – Multiplicar a expressão por 100, encontrando uma solução particular para a equação.

7. (- 300) + 1 . (200) = 100. Então x_0= - 300 e y_0= 200

E.V – Encontrar a solução geral da equação 7x + 11y = 100.

X = - 300 + 11 t e y = 200 – 7 t, t ∈ Z.

E.VI – Verificar que a solução do problema requer números inteiros e positivos, portanto deve-se fazer x ≥ 0 e y ≥ 0. Então, – 300 +11 t ≥ 0, sendo t ≥ 27, 3 e 200 – 7t ≥ 0, com t ≤ 28,6. Se t é inteiro, então seu valor é 28. Portanto x = -300 +11. 28 = 8 e y = 200 – 7. 28 = 4.

E.VII – Encontrar a solução do problema, identificando as partes que são múltiplas de 7 e de 11, respectivamente.

1ª parte: 7.8 = 56 2ª parte: 11. 4 = 44

ATIVIDADE III

Esse problema pode ser resolvido utilizando os conhecimentos do algoritmo da divisão ou sistema de congruências lineares. As etapas esperadas de solução são:

E.I – Montar um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, usando o algoritmo da divisão: $\begin{cases} x = 19y + 16 \\ x = 56z + 27 \end{cases}$

E.II – Substituir o valor de x na segunda equação, montando a EDL: 19y – 56 z = 11 e encontrar sua solução geral.

*	1	2	3	2	2
56	39	17	5	2	1
17	5	2	1	0	

56 =39. 1 +$\underline{17}$ →17 = 56 - 39. 1 39 = 17. 2 + $\underline{5}$ → 5 = 39 – 17. 2

17 = 5. 3 +$\underline{2}$ →2 = 17 - 5. 3 5 = 2. 2 + $\underline{1}$ →1 = 5 – 2. 2

5 – 2. $\underline{2}$ = 1→ $5 - 2\,.(17 - 5\,.3)$ →5 – 17. 2 + 5. 6 = 1→ $5\,.7 - 17\,.2$ = 1

(39 -17. 2) . 7 -17. 2 =1 39. 7 - 17. 14 -17. 2 = 1→39.7 – $\underline{17}$. 16 = 1

39. 7 – (56 - 39. 1) . 16 = 1→39. 7 – 56. 16 + 39. 16 = 1 39. (23) – 56. (16) = 1

Então, 39. (253) – 56. (176) = 11. Logo x_0 = 253 e y_0 = 176

Logo, y = 253 – 56 t e z = 176 – 39 t, com t ∈ Z.

E. III – Encontrar o valor de x, substituindo o valor de y na equação x = 39y + 16.

X = 39. (253 – 56 t) + 16 → x = 9867 – 2184 t + 16 = 9883 - 2184 t → x ≡ 1147 mod (2184).

Logo, a resposta encontrada é 1147.

ATIVIDADE IV

É um problema que requer o conhecimento de múltiplos e divisores, algoritmo da divisão, e visa a discussão da existência das soluções inteiras de uma EDL. As etapas esperadas de solução são:

E. I – Escrever a lei matemática: 6x + 9y = 13.

E. II – Encontrar o mdc (6, 9) = 3 e verificar que o mdc (6, 9) = 3 não divide c = 13. Logo, a EDL 6x + 9y = 13 não tem solução.

ATIVIDADE V

É um problema que requer o conhecimento da resolução de um sistema linear com 2 equações e três incógnitas e recai numa EDL com duas incógnitas, visando a busca de soluções inteiras e positivas. As etapas esperadas de solução são:

E. I – Monte o sistema linear, identificando as incógnitas. $\begin{cases} x * y + z = 60 \\ 0{,}01x + 0,1y + 0,25\,z = 3{,}00 \end{cases}$

E.II – Multiplique a segunda equação por 100 e escolha uma variável a ser eliminada. Some as duas equações, reduzindo-se à EDL 9y + 24 z = 240.

E. III – Divida ambos os membros da equação por 3, tornando a nova equação 3y + 8z = 80, e encontre sua solução geral.

	2	1	2
8	3	2	1
2	1	0	

8 = 3.2 + 2 → 2 = 8 – 3. 2   3 = 2.1 + 1 → 3 – 2. 1 = 1   3 – (8 – 3. 2) . 1 = 1

3. (3) + 8. (- 1) = 1

Então, 3. (240) + 8. (- 80) = 80, logo x_0 = 240 e y_0 = - 80.

Sendo assim, y = 240 + 8 t e z = - 80 – 3t, com t inteiro.

E. IV – Verifique que o problema requer soluções inteiras e positivas, isto é, y ≥ 0 e z ≥ 0, e encontre as soluções desejadas.

Então, 240 + 8t ≥ 0 → t ≥ - 30 e - 80 + 3t ≥ 0 → t ≤ - 26, 7. Se t é inteiro, seus possíveis valores são – 30, - 29, 28 e – 27.

Para t = - 30, temos x = 50, y = 0 e z = 10;

Para t = - 29, temos x = 45, y = 8 e z = 7;

Para t = - 28, temos x = 40, y = 16 e z = 4;

Para t = - 27, temos x = 35, y = 24 e z = 1.

ATIVIDADE VI

É uma atividade que visa a procura de soluções inteiras da EDL ax + by + cz = m. Ao resolver esse exercício, espera-se que o aluno desenvolva as seguintes etapas:

E. 1 – Encontrar o mdc (a, b, c) de cada equação e verificar se d divide ou não m.

Na equação 100x + 72y + 90z = 11, verifica-se que o mdc (100, 72, 90) = 2 e não divide 11. Logo, esta EDL não tem solução. Na EDL: 120x + 84 y + 144z = 60, o mdc(120, 84, 144) = 12 divide 60. Logo, esta última tem solução.

E. II – Dividir ambos os membros da equação 120x + 84y + 144z = 60 por 12, obtendo a nova equação 10x + 7y + 12z = 5

E. III – Fazer 10x + 7 y = 1. k, onde 1 = mdc(10, 7) e encontrar sua solução geral em função de k.

	1	2	3
10	7	3	1
3	1	0	

110 = 7. 1 + 3 → 3 = 10 – 7. 1   7 = 3. 2 + 1 → 7 – 3. 2 = 1

7 – (10 – 7. 1). 2 = 1→ 10. (- 2) + 7. 3 = 1

Então, 10. (- 2k) + 7. (3k) = k, logo x_0 = - 2k e y_0 = 3k. Logo, teremos: x = - 2k + 7 t e y = 3k – 10 t, com t ∈ Z.

E.IV – Encontrar a solução geral da equação a equação k + 12z = 5.

Então, 1.(13) + 12. (- 1).

1. (65) + 12. (- 5) = 5. Temos que k_0 = 65 e z_0 = - 5.

Então, k = 65 + 12 w e z = - 5 – w, com w ∈ Z.

E. V – Substituir o valor de k na solução geral da equação 10x + 7y = k, encontrando a solução geral da equação 10x + 7y + 12z = 5.

X = - 2. (65 + 12w) + 7t = - 130 + 7t - 24w, com t, w ∈ Z

Y = 3. (65 + 12 w) – 10 t = 195 – 10t + 36w, com t, w ∈ Z

Então, a terna (-130, 195, -5) é uma solução particular da equação 10x + 7y + 12z = 5, e sua solução geral será expressa por S = {(-310 + 7t – 24 w, 195 – 10t + 36w, - 5 – w); t,w ∈ Z}.

COMENTÁRIOS/ANÁLISE DO PRIMEIRO MOMENTO: Grupos de alunos de Teófilo Otoni e PUC Minas Betim

O primeiro bloco de atividades foi ministrado para dois grupos de 13 alunos, sendo o primeiro do 4º período do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, na disciplina Álgebra I, e o segundo formado por alunos do 7º período do curso de Licenciatura em Matemática da PUC Minas Betim, na disciplina Álgebra III, realizado em setembro de 2009, com duração de 10 horas/aula, onde teve uma participação efetiva dos alunos, mesmo que ainda não conheciam o tema Equações Diofantinas Lineares.

No nosso primeiro encontro, realizado num período de 4 horas/aula, após ser apresentado pelo professor titular da disciplina, iniciou-se a fala do pesquisador, explanando a relevância do tema que seria tratado, passando a fazer algumas indagações sobre os tópicos básicos da Teoria Elementar dos Números tais como Múltiplos e divisores, algoritmo da divisão, números primos, regras de divisibilidade, máximo divisor comum, teorema de Bézout, verificando que eles só conheciam até a definição de máximo divisor comum. Então, foi entregue para cada aluno, um texto contendo definições e exemplificações dos tópicos essenciais ao estudo das Equações Diofantinas Lineares, sendo que a última folha continha uma lista de 6 atividades propostas que visavam uma melhor compreensão na resolução de problemas no cotidiano que recaíam em equações lineares com duas ou três incógnitas, cujas soluções eram números inteiros. Posteriormente, orientamos que fizessem uma leitura do texto e depois que levantassem algumas questões inerentes ao conteúdo.

Após a leitura, surgiram as primeiras indagações. Como saber se o número de soluções inteiras e positivas de uma Equação Diofantina Linear é finito ou infinito, sem resolver a equação? Por que é mais fácil simplificar a equação primeiramente para que o mdc (a, b) seja 1? Por que a interpretação geométrica é um conjunto de pontos alinhados e não uma reta? Como aplicar esses conhecimentos nos problemas do dia-a-dia? Pode-se encontrar mais de uma solução inteira para o problema referente a Equações Diofantinas? Qual a importância da Teoria dos números para esse modelo de atividade?

Para atenuar essas dúvidas iniciais, lançamos uma situação-problema:

Dois produtos A e B custam, respectivamente, R$3,00 e R$4,00. Quantos produtos de cada espécie poderiam ser comprados com R$20,00? De quantas maneiras poderia ser efetuada essa compra?

Inicialmente, pedimos que a atividade fosse feita individualmente e observou-se que a maioria dos alunos apresentou dificuldade na aplicação do teorema de Bézout e não entendeu a restrição do parâmetro t porque não observou que o problema propunha soluções inteiras e positivas. Dos 26 alunos, 16 encontraram a solução geral da equação $3x + 4y = 20$ e não souberam concluir o problema, 6 alunos encontram uma única solução, $x = 4$ e $y = 2$, três alunos não conseguiram aplicar o teorema e somente uma aluna que estava repetindo a disciplina encontrou duas respostas: $x = 0$ e $y = 5$ ou $x = 4$ e $y = 2$. Posteriormente, eles se agruparam e discutiram as respostas encontradas.

Durante a resolução do problema, certo aluno criticou a postura do pesquisador, alegando a sua impaciência em deixá-lo raciocinar, fazendo tudo para ele, levando o professor aplicador a repensar a sua metodologia. Essa reflexão o fez recuar e dar mais tempo para que eles pensassem e chegassem às próprias conclusões. Tentamos responder a primeira indagação deles com outras perguntas: Existe alguma relação entre a inclinação da reta da equação $ax + by = c$ com o número de soluções inteiras e positivas da EDL mencionada acima? Será que a representação gráfica da EDL $3x + 4y = 20$ facilita essa visualização? Por que, simplificando a equação anteriormente, tornando os coeficientes a e b primo entre si, nos dá uma garantia maior da existência ou não da solução da EDL? Após esses questionamentos, foi dada a eles a orientação da reflexão sobre essas questões e que também estariam aptos para resolver a lista de exercícios da última folha do texto.

O nosso segundo encontro teve duração de 4horas/aula onde procuramos desempenhar o real papel do professor numa atividade investigativa que é de um elemento norteador das tarefas e não apenas uma máquina de Xerox, acostumada com a velha tática “siga o modelo”. Fizemos a disposição dos alunos em subgrupos de 3 ou 4 componentes e o professor funcionou como uma bússola em todo o momento, com a preocupação da não indução do aluno à resposta desejada. Geralmente respondia algumas perguntas com outras, gerando mais discussões.

Voltando aos questionamentos da aula anterior, começou-se a obter algumas respostas:

> Aluno A: Se o coeficiente angular da reta $ax + by = c$ for positivo, essa equação terá infinitas soluções inteiras e positivas. Analogamente, se ele for negativo, teremos um número finito de soluções inteiras.
> Professor: Mas essa relação vale para qualquer situação? Se d não dividir c, o que acontece com o gráfico?
>
> Aluno B: Não. Só para os casos onde $d \mid c$. Por isso que, ao dividir as equações diofantinas por um mesmo número, tornando mdc (a, b) = 1, podemos concluir que a mesma sempre terá soluções inteiras, pois o número 1 sempre dividirá c. Quando d não dividir c, não se pode fazer a interpretação geométrica.

> Aluno C: Qual a melhor forma para construir a tabela de valores para se esboçar o gráfico de uma Equação Diofantina? Por tentativa ou atribuindo valores para o parâmetro t?
>
> Professor: Depende de cada aluno. Prometo, no segundo momento previsto para o mês de novembro, direcionar atividades no laboratório que permitam sanar essas dúvidas.

Terminadas as discussões, os grupos começaram a resolver os exercícios propostos até o término da aula. Quando surgia alguma indagação, procuramos orientá-los da melhor forma possível, permitindo que cada aluno resolvesse individualmente os problemas propostos na aula anterior e, posteriormente, poderiam formar grupos e discutir as dúvidas. Caso não fossem sanadas, recorreriam ao aplicador das atividades. Durante a resolução, observamos que a maioria usava o método das tentativas para resolver grande parte dos problemas. Principalmente na construção da tabela para plotar gráficos, os alunos demonstravam grande dificuldade na compreensão e abstração dos problemas propostos, na aplicação do teorema de Bézout, na restrição do parâmetro t, gerando muitas indagações. Enfatizou-se para eles a importância das restrições sobre o parâmetro t para saber o número de soluções dessa equação, ressaltando também que em outro momento, trabalharíamos no laboratório com softwares matemáticos como o geogebra, winplot, graphmatica e maple para discutirmos a existência, infinidade e a discretização das soluções dessas equações

O terceiro encontro teve duração de 2 horas/aula, sendo destinado para os debates, avaliação e conclusões do trabalho, onde reclamaram do pouco espaço de tempo para uma grande gama de informações e da impaciência do professor aplicador em deixá–los pensar em certas ocasiões no primeiro encontro. Todavia, revelaram o interesse pela beleza e praticidade das Equações Diofantinas no cotidiano.

Avaliação de alguns alunos:

> Durante a construção do conhecimento, o ambiente foi harmônico, o que é importante para o a estudo. A dinâmica do professor foi importante para tornar o conhecimento inteligível. Apesar de o conteúdo ser novo e o tempo pequeno, foram bastante opulentos e positivos na construção da vida acadêmica do aluno (Aluno WS da PUC Minas Betim).
>
> A atividade que o professor fez em a sala de aula foi muito dinâmica. Aprendemos novas formas de achar o valor das incógnitas das equações e acredito que levando essa forma prazerosa em sala de aula para os alunos vamos prender sua atenção. A atividade foi bem divertida, e com a mesma, criando um objeto pedagógico, auxiliando o entendimento da matéria inserida, os alunos iriam assimilar melhor o conteúdo (Aluno AA da PUC Minas Betim).
>
> Achei muito interessante e de grande importância a resolução dessas atividades, apesar de não ter estudado antes esse conteúdo. Acredito que ele apresenta algumas oportunidades didáticas e criativas para a minha formação (Aluna AC – UFVJM).

> Achei esse conteúdo muito interessante e, apesar de nunca ter visto antes e de ser complicado, não deixa de ser importante a sua aplicabilidade na sala de aula. Inicialmente o professor parecia estar ansioso em respostas rápidas, não dando tempo suficiente para que o aluno construísse seu conhecimento, mas, gradativamente, as coisas se normalizaram e o ambiente se tornou propício e harmonioso para a aprendizagem (Aluno LS da UFVJM).

Achamos satisfatórios os resultados, levando em conta a novidade do tema para o aluno e a complexidade do formalismo para a obtenção das soluções inteiras de uma EDL. Foi possível perceber a dificuldade encontrada por eles na compreensão de cada problema. Ficou notório que a maioria não entendeu aritmética e algebricamente a condição de existência das soluções, levando o pesquisador a introduzir um contexto geométrico para o bloco de atividades seguinte, enfatizando também a transição da matemática contínua para a matemática discreta.

Observou-se que o aluno apresenta uma grande barreira na discussão de mais de uma solução inteira de uma equação linear, pois, encontrando uma solução para o problema proposto, ele não se preocupa em procurar outras, apesar de que Diofanto tinha a mesma postura.

3.2.2 Segundo Bloco de Atividades

O segundo bloco de atividades foi aplicado para os mesmos grupos de alunos, incluindo outros numa sala de laboratório, onde os mesmos já conheciam o tema, isto é, seus professores de álgebra já lhes haviam ensinado, embora também pudessem usar o texto dado anteriormente, cujo objetivo principal era fazer a transição da matemática contínua para a matemática discreta, investigando e discutindo o número de soluções inteiras e positivas de uma Equação Diofantina e a sua existência, finalmente aplicando o seu estudo nos problemas do dia-a-dia.

Os alunos receberam a seguinte lista de exercícios:

1) Resolva graficamente os seguintes sistemas lineares e interprete as soluções:

a) $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-3y=-1 \\ 10x-6y=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 6x+3y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 3x-4y+z=5 \end{cases}$

2) Represente, no R^2, as seguintes equações lineares:

   a) 3x + 4y = 20   b) 7x – 1 1y = 15   c) 6x - 9y = 104

3) Encontre algumas soluções inteiras, isto é, soluções em Z^2, das EDL do exercício anterior. Faça a interpretação geométrica e analise o número de soluções inteiras positivas de cada equação.

4) Seja a equação linear 8x + 12y – 20z = 42.

   a) Represente graficamente essa equação no R^3, usando o Maple ou Winplot;

   b) Ela possui soluções inteiras? Em caso afirmativo, encontre uma.

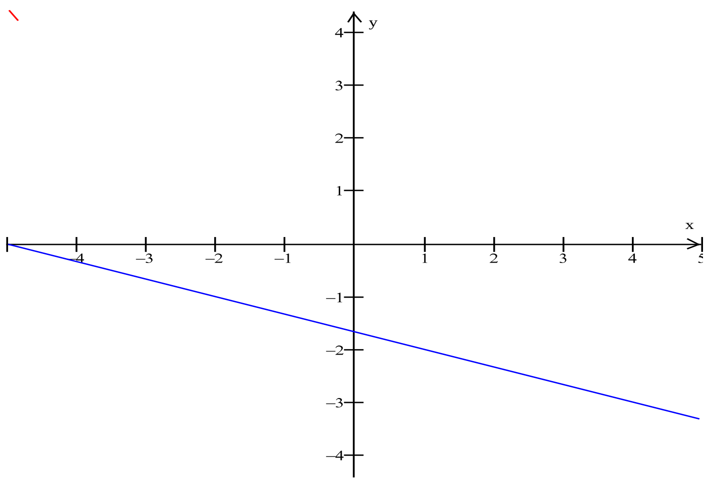
5) Lourival dispõe de US$ 16000 para comprar bois, vacas e bezerros, num total de 100 cabeças de gado. Se os preços de cada boi, cada vaca e cada bezerro são, respectivamente, US$ 800, US$ 400 e US$ 80, de quantas formas ele pode efetuar essa compra? Quantos bois, quantas vacas e quantos bezerros serão comprados?

PADRÕES ESPERADOS DE SOLUÇÕES PARA O SEGUNDO BLOCO

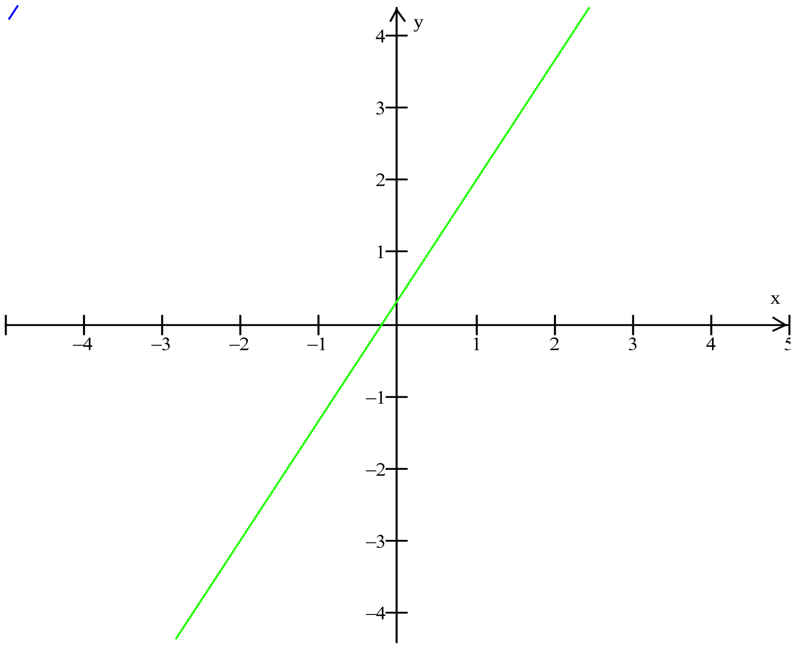
ATIVIDADE I

Ela é composta de quatro itens e objetiva discutir o número de soluções de um sistema linear, explorando a matemática contínua com o uso de softwares matemáticos que facilitam a interpretação geométrica das equações lineares.

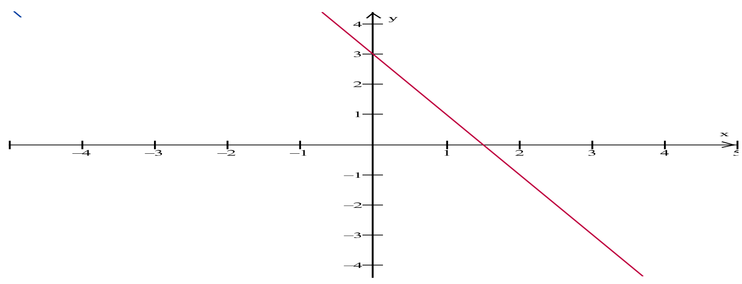
a) $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$ Sistema possível e determinado



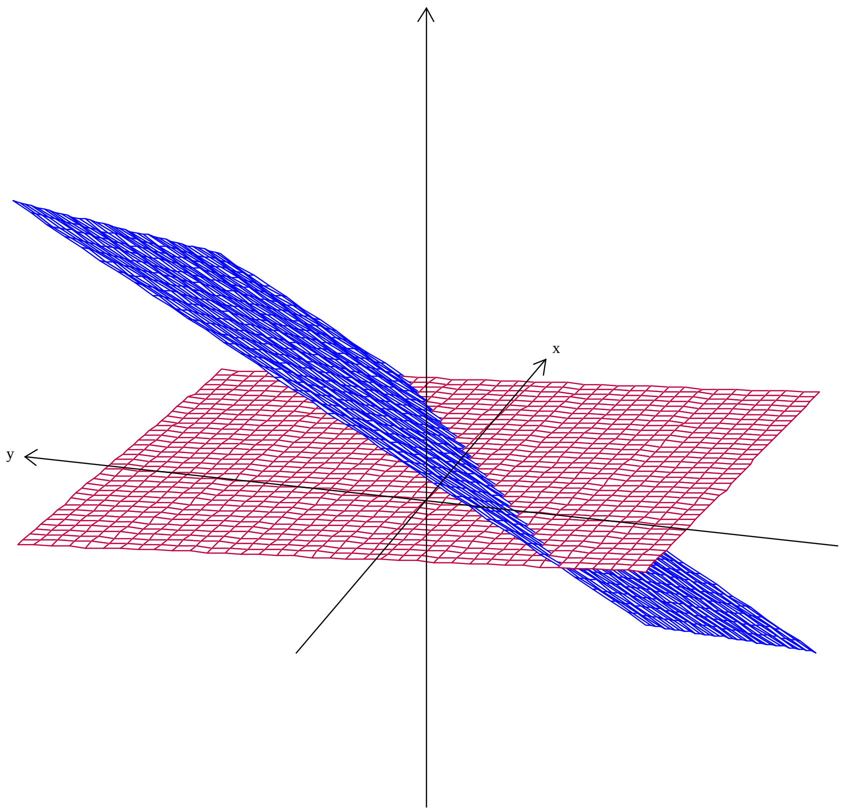
b) $\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 10x - 6y = -2 \end{cases}$ Sistema possível e indeterminado



c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 2 \end{cases}$ Sistema impossível



d) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 3x-4y+z=5 \end{cases}$ Sistema possível e indeterminado



ETAPAS QUE O ALUNO DEVE ATINGIR:

E. I - – Interpretar geometricamente um sistema linear no R^2.

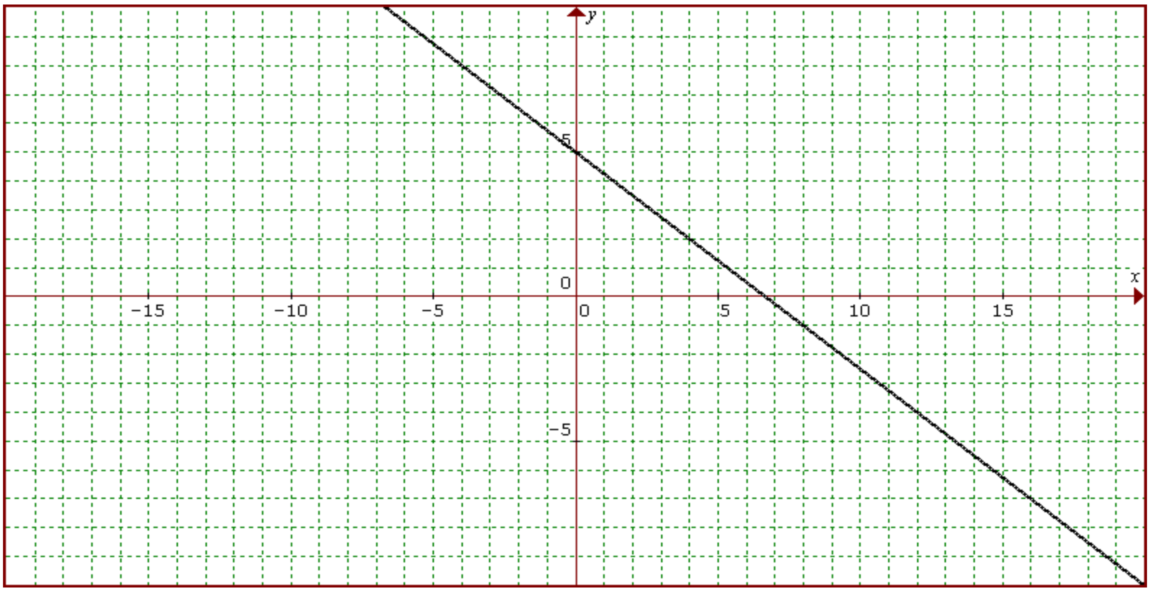
E. I - – Interpretar geometricamente um sistema linear no R^3.

E. III – Discutir o número de soluções reais de cada sistema linear, graficamente.

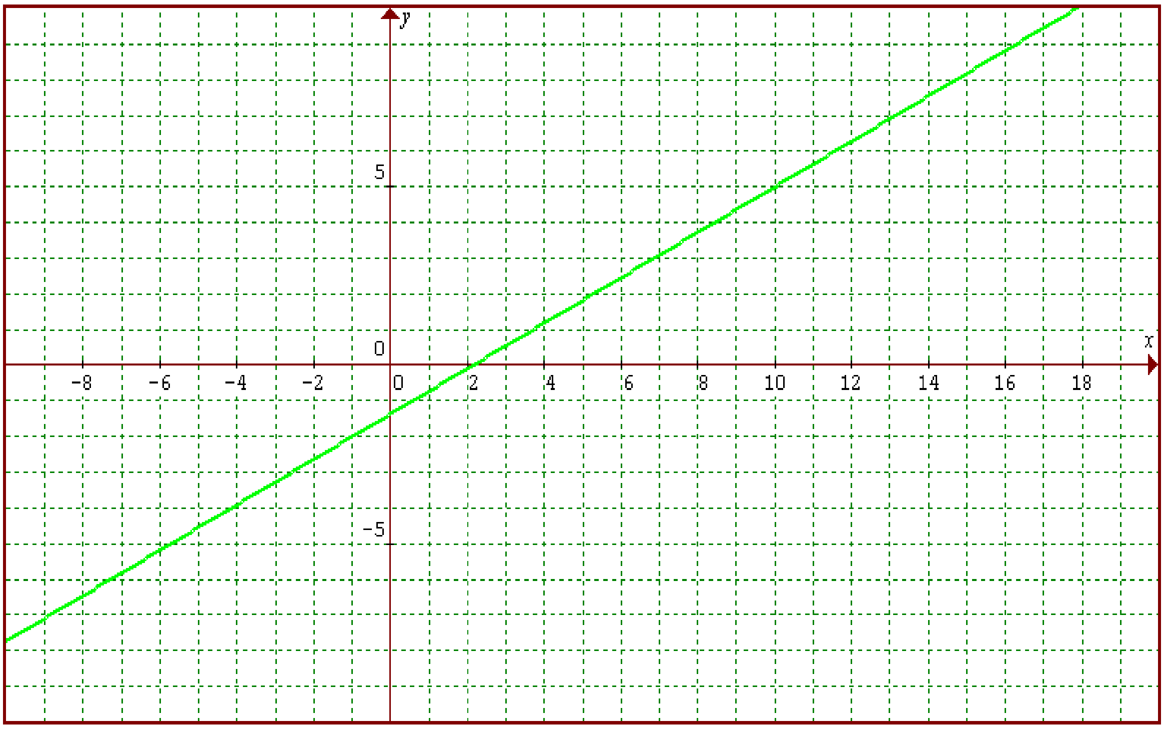
ATIVIDADE II

Ela é composta de 3 itens e objetiva a visualização de uma reta no R^2, observando sua inclinação e suas soluções reais, explorando a matemática contínua.

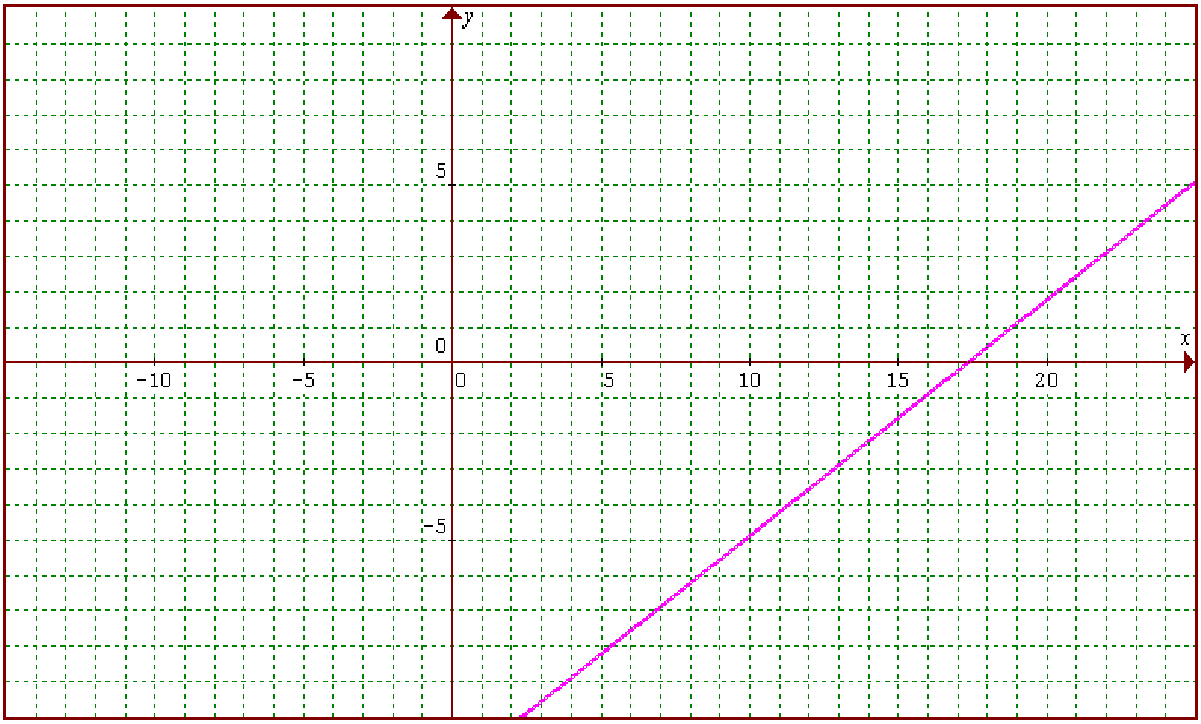
a) $3x + 4y = 20$



b) $7x – 11y = 15$



c) 6 x + 9y =104

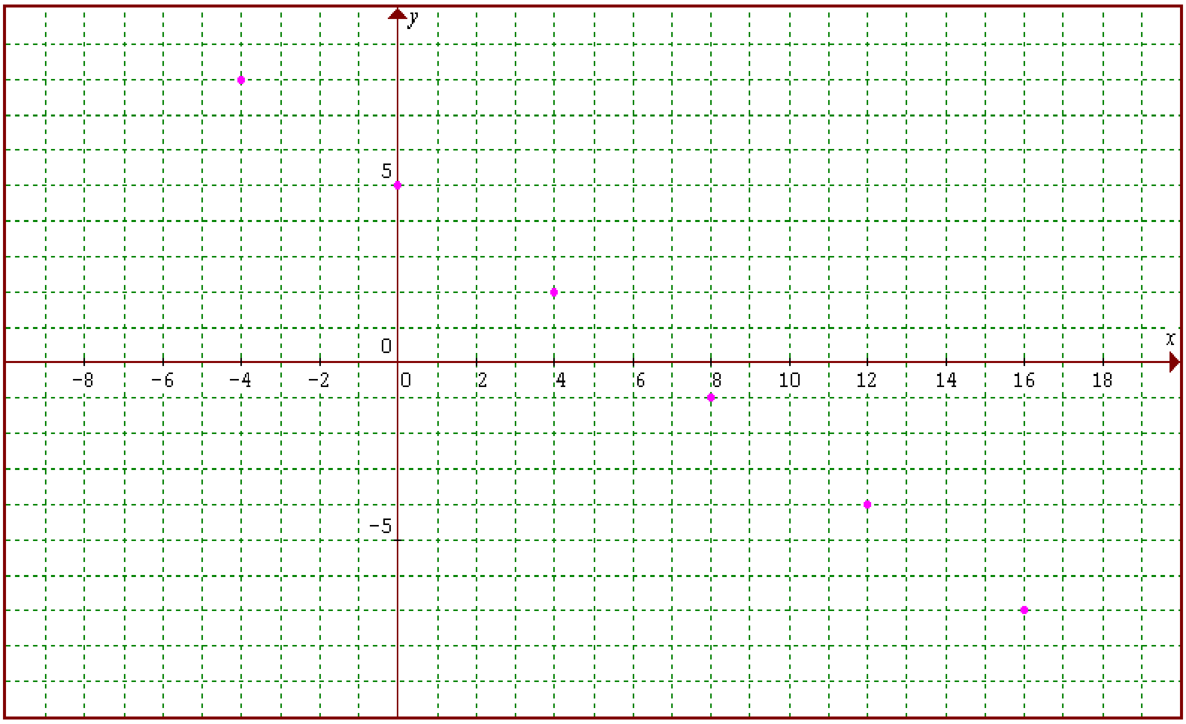


ATIVIDADE III

Esse exercício procura explorar a matemática discreta, onde busca a plotagem de pontos alinhados no Z^2 e visa a análise do número de soluções inteiras e positivas através da inclinação da reta que contém esses pontos.

a) 3x + 4y = 20

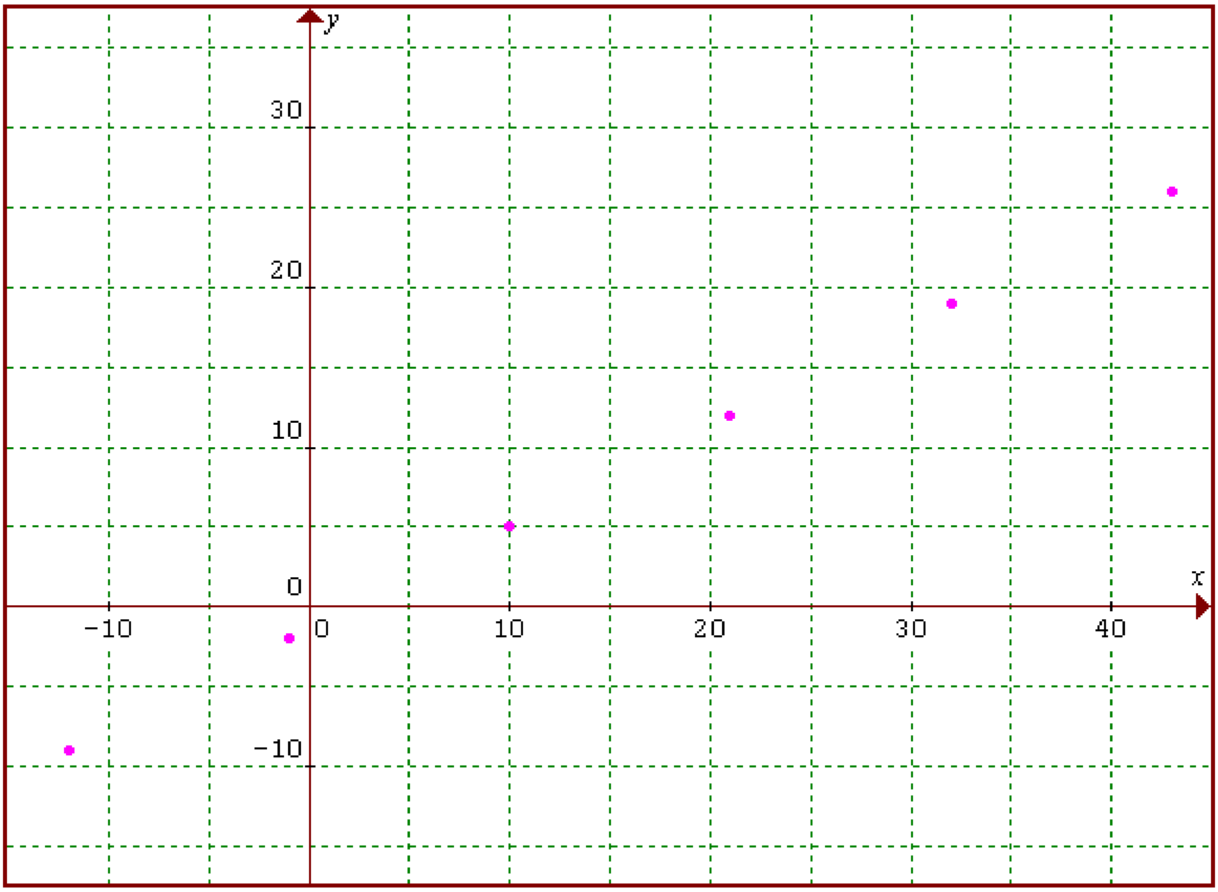
x	-4	0	4	8	12	16
y	8	5	2	-1	-4	-7



Observa-se que ele possui duas soluções inteiras e positivas, pois a reta que contém esses pontos alinhados tem inclinação negativa.

b) 7x – 11y = 15

x	-23	-12	-1	10	21	32
y	-16	-9	-2	5	12	19



a) A equação tem infinitas soluções, pois a inclinação da reta é positiva.

b) Não possui soluções inteiras, pois o mdc (6, 9) = 3 não divide 104.

ETAPAS A SEREM ATINGIDAS PELOS ALUNOS:

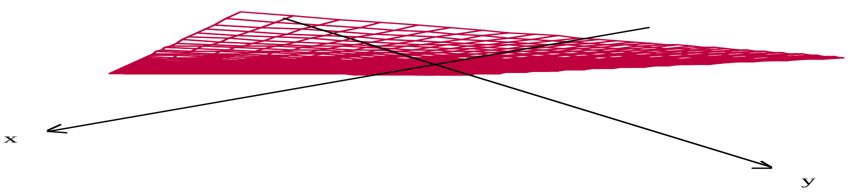
E. I – Analisar a inclinação da reta que contém as soluções inteiras das equações;

E. II – Discutir o número de soluções inteiras da equação linear ax + by = c.

ATIVIDADE IV

Explora-se a matemática contínua no R^3, juntamente com a condição de existência de soluções inteiras de uma equação linear com três incógnitas, enfatizando a matemática discreta.

8x + 12y – 20z = 42.



A equação não tem soluções inteiras, pois o MDC (8, 12, 20) = 4 não divide m = 42.

Os alunos devem atingir as seguintes etapas:

E. I – Interpretar geometricamente uma equação linear com três incógnitas no R^3;

E. II – Discutir a existência de soluções inteiras da equação linear ax + by + cz = m.

ATIVIDADE V

Esse exercício explora o conhecimento de um sistema linear possível e indeterminado que se reduz numa EDL com duas incógnitas e possui 4 soluções inteiras e positivas. Esse tipo de atividade foi executado no primeiro bloco, retratando certa dificuldade dos alunos na sua compreensão.

Resolução: O problema proposto é representado pelo sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 800x \ast 400y + 80z = 16000 \end{cases}$ onde x é o número de bois, y é o número de vacas, e z corresponde ao número de bezerros.

O sistema reduzir-se-á a equação EDL 9x + 4y = 100, cuja solução geral é dada por

$x = 100 + 4t$ e $y = - 200 - 9t$, com $t \in Z$. Como o problema requer soluções inteiras e positivas, temos que $- 25 \leq t \leq - 22$. Portanto, teremos as seguintes soluções: {(0, 25, 75), (4, 16, 80), (8,7, 85), (12, 2, 86)}.

O aluno será capaz de atingir as seguintes etapas:

E. II – Escrever matematicamente o sistema linear que representa o problema, identificando as incógnitas do problema proposto;

E. II – Reduzir o sistema linear numa equação linear com duas incógnitas e encontrar sua solução geral;

E. III – Encontrar os valores do parâmetro t para x e y positivos e achar as soluções do problema.

COMENTÁRIOS/ANÁLISE DO SEGUNDO MOMENTO: Grupos de alunos da UFVJM e PUC Minas Betim

Esse encontro foi ministrado no mês de novembro de 2009 com duração de 4 hora/aula para um grupo de 18 alunos do sétimo período de Curso de Matemática, na disciplina Cálculo Numérico, composta de 21 alunos matriculados, num laboratório de informática, e outro grupo de dez alunos da UFVJM do curso de Matemática, na disciplina Álgebra I, com 18 alunos matriculados, onde os mesmos tiveram a oportunidade de relacionar a Matemática contínua e a discreta, analisando a existência de soluções inteiras de uma EDL com duas e três incógnitas, finalizando com a aplicação num problema do cotidiano. A maioria dos componentes desse grupo já havia participado das atividades do primeiro bloco, mas todos eles já tinham estudado o tema proposto em Álgebra I e Álgebra III, respectivamente, no ano corrente.

O pesquisador indicou alguns softwares matemáticos tais como o geogebra, graphmatica, winplot e maple e deu liberdade de escolha de acordo com a habilidade de cada aluno. Eles foram organizados em duplas e foi entregue para cada subgrupo uma lista de atividades composta de cinco exercícios, ordenadas e articuladas conforme objetivos, conduzindo cada estudante à construção do conhecimento formal das EDL aliado à Aritmética, Álgebra e Geometria.

Ao plotarem os gráficos no R^2 e R^3 e, posteriormente, fazendo sua interpretação geométrica no Z^2, surgiram alguns questionamentos: Por que algumas equações lineares não tinham soluções inteiras? No Z^2 traçam-se retas ou pontos alinhados? Existe alguma relação entre o MDC (a, b) de uma EDL ax + by = c com o número de soluções inteiras positivas da mesma?E a sua existência? Qual o melhor software matemático para esse tipo de atividade?

Quando o professor aplicador era solicitado para responder a essas indagações, ele procurava respondê-las, criando novas perguntas tais como: Por que algumas EDL têm finitas ou infinitas soluções inteiras positivas? Será que depende do coeficiente angular da reta que contém esses pontos colineares? O que podemos concluir quando o mdc (a, b) dividir ou não o termo independente c? O que é matemática contínua e matemática discreta? O que difere um gráfico no R^n de um no Z^n?

Ao relacionarem os gráficos no R^2 e Z^2 das equações lineares ax + by = c, os alunos observaram que, em algumas delas, as retas não passavam por números inteiros na grade do gráfico plotado. Então, começaram a entender que isso ocorria quando o mdc (a, b) não dividia o termo c. Ao construir as tabela de números inteiros para a construção dos gráficos, a maioria encontrava a solução geral da EDL e atribuía valores para t, enquanto outros encontravam valores para x e y por tentativas. Os alunos que não participaram do primeiro bloco de atividades usavam o recurso do método por tentativas, enriquecendo ainda mais o trabalho aplicado.

No final da aula, foi feita uma avaliação e os trabalhos foram armazenados no pen drive do pesquisador para as observações importantes.

Ambos os grupos demonstravam muito empenho e observou-se o crescimento deles na parte atitudinal em relação ao momento anterior.

Avaliação de alguns alunos:

> Achei o trabalho muito interessante. Ajudou-nos muito na compreensão de sistemas lineares e equações lineares. Só achei que o tempo foi muito curto. Poderíamos ter tido mais aulas para melhor compreendermos a matéria, pois tive dificuldades em algumas questões e não tive como ter orientação do professor. (Aluno FH da PUC Minas Betim).

> A matéria dada foi um pouco difícil, mas as explicações do mestrando foram claras e fáceis para a nossa compreensão. Tenho certeza de que foram de muita valia para nós alunos do curso de Álgebra I, pois, relacionando a geometria com a álgebra, propicia ao estudante uma melhor aprendizagem. (Aluna MB da UFVJM)

Foi observado um avanço dos alunos na compreensão da existência de soluções inteiras de uma EDL quando eles tiveram uma visão geométrica dessas soluções. As indagações e sugestões dadas pelo pesquisador conduziram o aluno ao entendimento da relação entre o MDC (a, b) e o termo independente c da equação ax + by = c. Todavia, notamos que os estudantes continuaram com a mesma dificuldade na compreensão de problemas, sendo que alguns só conseguem encontrar as soluções inteiras através de tentativas, denotando esse obstáculo no método formal para se resolver problemas envolvendo o tema proposto.

3.2.3 Terceiro Bloco de Atividades

Esse bloco de atividades é constituído de seis questões, cujo objetivo principal é a aplicação do estudo das Equações Diofantinas Lineares nos dias de hoje, cuja sequência auxilia o aluno na compreensão e resolução de problemas, partindo do cálculo do MDC, da discussão das soluções inteiras de uma equação linear, atingindo a sua aplicabilidade nos exercícios propostos. Para cada questão foi feita a previsão das etapas que o aluno deve alcançar modelos usados nas dissertações de Oliveira (2006) e Costa (2007).

Vejamos o terceiro bloco de atividades:

1) Escreva o MDC dos números abaixo como uma combinação linear de números inteiros

a) 28 e 21 b) 15, 12 e 30

2) Encontre, se existir, uma solução inteira para as equações abaixo:

a) $28x + 21y = 14$ b) $28x + 21y = 10$ c) $15x + 12y + 30z = 24$ d) $15x + 12y + 30z = 16$

3) Faça uma interpretação geométrica das equações do exercício anterior.

4) Um laboratório dispõe de 2 máquinas para examinar amostras de sangue, uma delas examina 15 amostras de cada vez enquanto a outra examina 25. Quantas vezes essas máquinas devem ser acionadas para examinar exatamente 2 mil amostras? (LA ROCQUE E PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

5)Por R$ 5 000,00 compraram-se 100 unidades de eletrodomésticos. Os preços deles eram os seguintes:

TELEVISOR 14 POLEGADAS	R$ 500, 00 cada
BATEDEIRA	R$ 100, 00 cada

RÁDIO DE PILHA R$ 10, 00 cada

Quantos eletrodomésticos de cada espécie puderam ser comprados? (BARROS, 1998, p. 45).

6) Disponho de 3 tipos de caminhões com capacidades para transportar 40, 50 e 70 unidades.Tenho 310 unidades a serem distribuídas da melhor maneira entre esses caminhões. Quantos caminhões de cada tipo estão disponíveis? (YAHOO RESPOSTAS, 2010).

PADRÕES ESPERADOS DE SOLUÇÕES PARA O TERCEIRO BLOCO

ATIVIDADE 1:

Visa o cálculo simples do MDC e a aplicação do teorema de Bézout, onde cada aluno deve atingir as seguintes etapas.

E.1 – Calcular o MDC de dois ou três números inteiros.

a) MDC (28, 21) = 7 b) MDC (15, 12 , 30) = 3

E. II – Escrever o MDC como uma combinação linear de números inteiros:

a) 28 = 21. 1 + 7

28. (1) + 21. (- 1) = 7

b) 15 = 12. 1 + 3 → 15. (1) + 12. (- 1) = 3

3. (- 9) + 30 . (1) = 3 → (15. 1 – 12 . 1). (- 9) + 30 .(1) = 3

15 . (- 9) + 12. (9) + 30 . (1) = 3

ATIVIDADE II:

Objetiva encontrar uma solução inteira particular, se existir, para cada equação, observando a condição de existência das soluções de uma equação diofantina. O aluno será capaz de:

E. I – Observar as combinações lineares do exercício anterior, verificando se o mdc (a, b) divide c.

E .II – Multiplicar cada equação por t de forma que c = dt, encontrando uma solução particular para cada equação.

a) 28. (1) + 21. (- 1) = 7

28. (2) + 21. (- 2) = 14

28. (2) + 21. (- 2) = 14

Então x_0 = 2

y_0 = - 2

b) Não tem solução, pois 7 não divide 10

c) 15. (- 9) + 12. (9) + 30. (1) = 3

d) Não tem solução, pois 3 não divide 16.

15. (- 72) + 12. (72) + 30. (8) = 24

Então x_0 = - 72, y_0 = 72, z_0 = 8

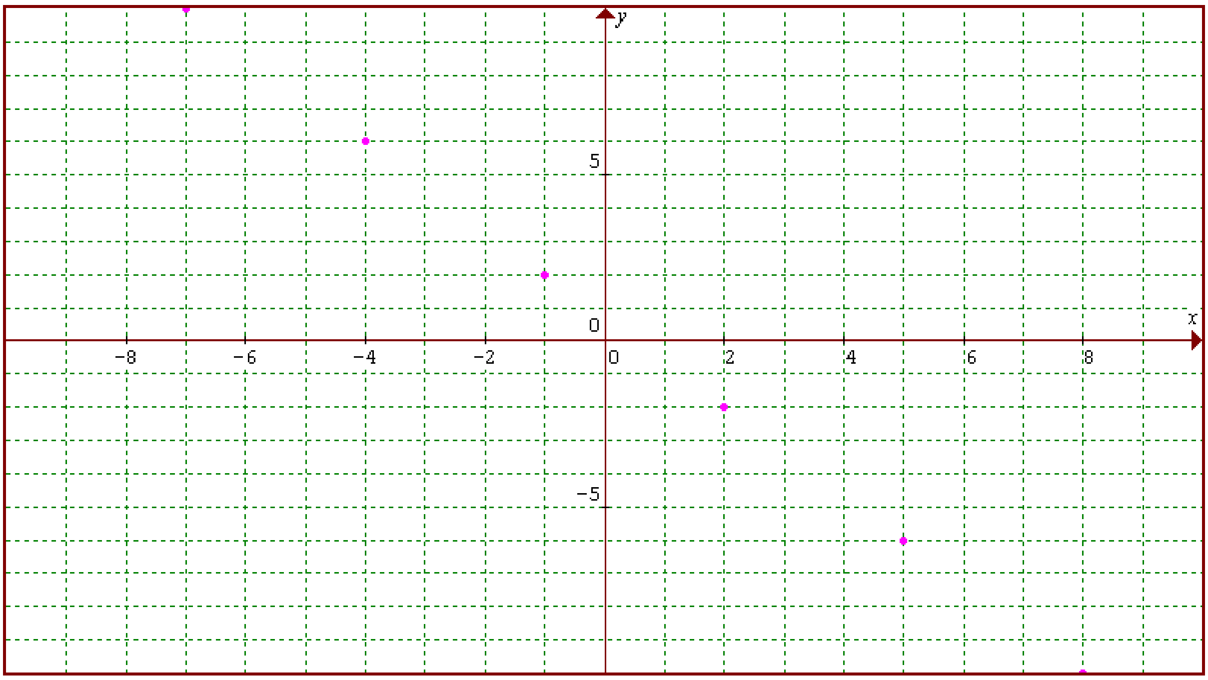
ATIVIDADE III

A representação geométrica dessas equações facilita a visualização da existência das soluções inteiras desse tipo de equação, relacionando a matemática discreta e contínua, possibilitando a análise do número de soluções inteiras positivas dessas equações, observando o coeficiente angular da reta ax + by = c que contém os pontos que satisfazem as mesmas e os mesmos pertencentes ao plano ax + by + cz = m. Espera-se a capacidade do aluno em:

E.1 - Criar uma tabela de pontos, encontrando a solução geral de cada equação e estabelecer valores para os parâmetros t e w ou por tentativas, isolando uma variável.

X	- 7	- 4	-1	2	5	8
Y	10	6	2	- 2	- 6	-10

a) A solução geral da equação 28x + 21 y = 14 x = 2 + 3t e y = - 2 – 4t, com t inteiro.



b) Não tem interpretação geométrica.

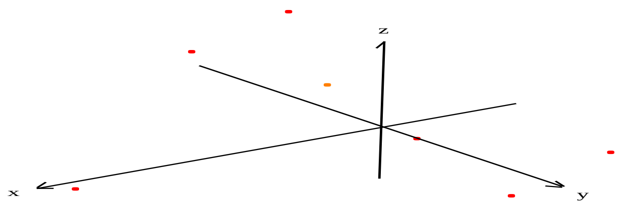
c) Devemos simplificar a equação acima, obtendo 5x + 4y + 10z = 8 e seguir os seguintes passos:

Fazendo 5x + 4y = k, k ∈ Z → 5 . (1) + 4. (- 1) = 1 → 5 . (k) + 4. (- k) = k. Portanto,

x = k + 4t e y = - k – 5t, com t ∈ Z. Então k + 10z = 8→ 1 .(11) + 10. (- 1) = 1

1 . (88) + 10. (- 8) = 8. Logo K = 88 + 10w e z = - 8 – w, com w ∈ Z. Substituindo o valor de k, teremos x = 88 + 10w + 4t, y = - 88 – 10w – 5t e z = - 8 – w. Atribuindo valores para t e w , obtemos:

x	10	0	0	- 4	2	0	- 2
y	- 3	2	7	7	- 8	- 3	- 8
z	- 3	0	- 2	0	3	2	5



d) Não tem interpretação geométrica.

E. II – Verificar que o lugar geométrico das soluções dessas equações é um conjunto de pontos alinhados e não uma reta ou um conjunto de pontos de um plano ou o plano em si.

E . III – Discutir a existência das soluções dessas equações.

ATIVIDADE IV

Ela visa soluções inteiras e positivas, possibilitando a análise da existência de mais de uma solução. Prevejo as seguintes etapas que o aluno deve alcançar:

E. I – Escrever a lei matemática 15x + 25y = 2000 que representa a situação-problema, identificando as variáveis x e y.

E. II – Simplificar a equação por 5, obtendo 3x + 5y = 400 e encontrar sua solução geral.

Então, 3. (2) + 5. (- 1) =1. Portanto 3. (800) + 5. (- 400) = 400. Então x_0 = 800 e

y_0 = - 400. Logo x = 800 + 5t e y = - 400 – 3t, com t ∈ Z.

E. III – Encontrar os valores inteiros do parâmetro t para x $\geq$ 0 e y $\geq$ 0, obtendo assim as soluções do problema. Logo 800 + 5t $\geq$ 0 $\rightarrow$ t $\geq$ - 160 e – 400 – 3t $\geq$ 0 $\rightarrow$ t $\leq$ - 133, 1. Como t é inteiro, podemos afirmar que o problema tem 27 soluções, sendo – 160 $\leq$t ≤ 134, temos as seguintes respostas:

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
y	80	77	74	71	68	65	62	59	56	53	50	47	44	41	38	35	32	29	26

x	95	100	105	110	115	120	125	130
y	23	20	17	14	11	8	5	2

ATIVIDADE V:

É uma situação-problema trivial no dia-a-dia. Ela apresenta a existência de mais de uma solução inteira positiva e requer o conhecimento do estudo dos sistemas lineares, permitindo ao aluno a capacidade de:

E. I – Montar o sistema linear que representa o problema proposto, identificando as variáveis x, y e z. $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 500x + 100y + 10z = 5000 \end{cases}$

E. II – Simplificar a segunda equação e somar as mesmas, obtendo a EDL: 49x + 9y = 400 e encontrar sua solução geral.

	5	2	4
49	9	4	1
4	1	0	

49 = 9. 5 + 4 $\rightarrow$ 4 = 49 – 9. 5

9 = 4. 2 + 1 $\rightarrow$ 9 – 4. 2 = 1 $\rightarrow$9 – (49 – 9. 5). 2 $\rightarrow$ 9 – 49. 2 + 9. 10 = 1

49. (- 2) + 9. (11) = 1. Então, 49. (- 800) + 9. (4400) = 400. Logo, x_0 = - 800 e y_0 = 4 400. Portanto, x = - 800 + 9 t e y = 4400 – 49 t, com t inteiro.

E. III – Encontrar os valores do parâmetro t para x $\geq$ 0 e y $\geq$ 0, obtendo assim os valores de x, y e z.

Então, – 800 + 9 t $\geq$ 0 $\rightarrow$ t $\geq \frac{800}{9}$ e 4400 – 49t $\geq$ 0 $\rightarrow$ t $\leq \frac{4400}{49}$. Se t $\in$ Z, então o único valor assumido por ele é 89. Logo, x = 1, y = 39 e z = 60.

ATIVIDADE VI:

É uma atividade que busca soluções inteiras e positivas de uma EDL com três incógnitas, discutindo a possibilidade de mais de uma solução do problema proposto. Espera-se que o aluno seja capaz de:

E. I – Escrever a lei matemática 40x + 50y + 70 z = 310, reduzindo se à equação diofantina 4x + 5y + 7z = 31 e identificando as variáveis x, y e z;

E.II – Escrever a equação 4x + 5y =1. k, com K inteiro e encontrar sua solução geral em função de k. Então, 4. (– 1) + 5. (1) = 1→ 4.(- k) + 5. (k) = k. Logo, x = - k + 5t e y = k – 4t, com t ∈ Z;

E. III – Encontrar a solução geral da equação k + 7z = 31.

Então, 1. (8) + 7. (- 1) = 1→ 1. (248) + 7.(-31) = 31, logo k = 248 + 7w e z = - 31 – w, com w ∈ Z;

E.IV – Substituir o valor de k na solução da equação anterior. Obtendo a equação geral de 4x + 5y + 7z.

X = - (248 + 7w) + 5t = - 248 – 7w + 5t, y = 248 + 7w – 4t e z – 31 – w;

E.V- Encontrar os valores dos parâmetros t e w para x ≥ 0, y ≥ 0 e z ≥ 0 e, posteriormente, as soluções procuradas.

$$\begin{cases} -7w + 5t - 248 > 0 \\ 7w - 4t + 248 > 0 \\ \quad - w - 31 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -28t + 20w - 992 > 0 \\ 35t - 20w + 1240 > 0 \end{cases}$$

Então, 7t > -248 → t > $\frac{-248}{7}$. Assim $\frac{-248}{7}$ < t < -31, se t é inteiro, então seus possíveis valores são - 32, - 33, -34, - 35.

Para t = - 32, temos que $\begin{cases} 224 + 5w > 248 \\ -224 - 4w > -248 \end{cases}$ w = 5, temos x = 1, y = 4, z = 1

Para t = - 33, temos que $\begin{cases} 231 + 5w > 248 \\ -231 - 4w > -248 \end{cases}$ w = 4, temos x = 3, y = 1, z = 2

Para t = - 34, temos que $\begin{cases} 238 + 5w > 248 \\ -238 - 4w > -248 \end{cases}$ w não é inteiro

Para t = - 35, temos que $\begin{cases} 245 + 5w > 248 \\ -245 - 4w > -248 \end{cases}$ w não é inteiro

COMENTÁRIOS/ANÁLISE DO TERCEIRO MOMENTO: Grupos de alunos da UFVJM e PUC Minas Betim

Esse trabalho corresponde ao terceiro encontro com alunos da UFVJM e PUC Minas Betim, com um grupo de 9 alunos, sendo seis estudantes do quinto período do curso de licenciatura em matemática da UFVJM de Teófilo Otoni e três alunos do oitavo período do curso de matemática da PUC Minas Betim realizado em março de 2010. Os alunos já conheciam o tema, pois, além de o terem estudado em álgebra no período anterior, participaram dos blocos anteriores de atividades aplicados pelo pesquisador, sendo muito proveitoso para sua pesquisa.

Foi entregue para cada aluno a lista de atividades acima descrita e durante cinco horas/aula foi desenvolvido o trabalho. Durante a resolução, surgiram algumas indagações; É possível resolver qualquer equação Diofantinas por tentativas? Por que a matemática discreta parece ser mais complexa do que a matemática contínua? Por que os livros didáticos dão pouca ênfase a EDL, principalmente com três incógnitas? Por que a maioria dos alunos apresenta dificuldade na restrição das soluções inteiras? Será que os problemas solúveis podem apresentar mais de uma resposta? De que forma se pode inserir esse objeto de estudo no ensino básico?

Após findar as atividades, foi feita uma avaliação geral das três oficinas realizadas com esses alunos. Acharam interessantes a problematização, apesar das dificuldades do formalismo e compreensão de cada problema proposto. Alunos da UFVJM fizeram as seguintes colocações:

> No estudo das equações diofantinas, inicialmente, achei estranho o professor pedir uma única solução, pois, até então, um sistema de equações lineares com mais incógnitas do que equações, teria infinitas soluções. Depois entendi que essa única solução que ele queria era dentro do contexto do problema dado. Assim percebi que pode haver uma ou algumas soluções dentro daquele intervalo permitido. (Aluna ZH da UFVJM).

> No terceiro bloco de atividades, tive mais facilidade em resolver as questões, pois além de ter participado das atividades anteriores com o mestrando, também minhas dúvidas foram sanadas na sala de informática no segundo momento. É muito interessante que mestrandos apliquem trabalhos como este conosco, pois isso enriquece muito a visão acadêmica do aluno. (Aluna MB da UFVJM).

Ficou evidenciada a evolução dos alunos na compreensão da existência e a infinidade de soluções inteiras de uma EDL, após a visão geométrica conseguida pelos alunos no segundo bloco de atividades, com a utilização de softwares matemáticos tais como o geogebra, graphmatica, maple, winplot e outros.

Houve uma evolução na construção formal da solução geral de uma EDL com três incógnitas, mas a barreira na interpretação geométrica dessas soluções não foi atenuada.

O pesquisador concluiu que, assim como a maioria dos problemas resolvidos por Diofanto, quando o aluno encontra uma solução para o problema proposto ele não se preocupa em discutir a existência de outras possíveis soluções.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos pesquisadores da Educação Matemática têm enfatizado a importância do estudo das Equações Diofantinas Lineares e suas aplicações no cotidiano, oportunidade para se explorar os vários registros matemáticos. Com esta pesquisa, constatou-se que uma das dificuldades dos alunos se situa na falta de hábito em se lidar com esses modelos diofantinos e na pouca abordagem dada pelos livros didáticos, carentes de atividades planejadas, que poderiam ser inicialmente intuitivas, e, posteriormente, formalizadas, com intenções metodológicas explícitas. Este trabalho, então, teve o objetivo de auxiliar o aluno, através de uma sequência didática, na resolução e compreensão de problemas que recaiam nas EDL com duas ou três incógnitas.

A metodologia da investigação permitiu o levantamento de vários elementos, questionamentos e demandas, para as reflexões docentes e a busca de caminhos alternativos de se conduzir melhor o estudo do assunto em pauta. Os resultados obtidos junto aos alunos mostraram que alguns só conseguem resolver algumas situações problemáticas através de tentativas e têm muita dificuldade em generalizar e assimilar um método formal. A maioria se contenta com a primeira solução encontrada para o problema, não se importando em analisar outros resultados pertinentes, nem as situações de impossibilidades e indeterminações, quando existem. Segundo Boyer (1996) é injusto, de certa forma, criticar Diofanto pela satisfação na obtenção de uma única resposta para os problemas, pois ele estava resolvendo problemas, não equações; de certa forma, a Arithmetica era uma coleção de problemas de aplicação de álgebra, e não textos algébricos. Quando isso acontece com o nosso aluno, cabe ao professor criar mecanismos que possibilitem a discussão de mais de uma solução do problema através de atividades didáticas e investigativas, aliado às técnicas de resolução dos mesmos, permitindo a sua compreensão, resolução e discussão.

A conclusão desse trabalho ressalta a importância da interpretação geométrica das EDL, aliada ao contexto algébrico e aritmético, à investigação de mais de uma solução inteira de um problema proposto e, ainda, a necessidade da inserção desse tema, de forma gradativa desde o ensino fundamental, passando pelo ensino médio, atribuindo-lhe foco maior na graduação, momento que deveria ser dedicado ao aprofundamento e sistematização de seu estudo.

Inicialmente, o autor encontrou muitas barreiras na aplicação das atividades, devido à sua postura tradicionalista, semelhante à maioria dos professores de matemática que se intitulam os condutores do pensamento, violando assim o direito do aluno de construir suas próprias ideias, reduzindo o espaço de tempo necessário para sua aprendizagem, respondendo a todas as dúvidas do aluno, inibindo o interesse dos mesmos pelas investigações e descobertas.

Esse procedimento inicial foi repensado após algumas leituras de textos didáticos e a flexibilidade do pesquisador em relação às críticas construtivas dos alunos durante a aplicação do primeiro bloco de atividades. No momento em que o autor adotou uma postura interrogativa, provocando questionamentos, contemporizando para que o aluno pudesse raciocinar, as dificuldades encontradas foram atenuadas e as tarefas transcorreram com maior eficiência. Whitehead (1969) fez o seguinte comentário sobre o raciocínio:

> A arte de raciocinar consiste em agarrar o assunto na ponta certa, apoderar-se de poucas ideias gerais que iluminam o todo e arregimentar persistentemente todos os fatos subsidiários ao redor... Creio que para esta espécie de treinamento, a Geometria seja melhor que a Álgebra. (WHITEHEAD, 1969, p.94).

Aliado à fundamentação didática de Zabala, Ponte e Polya, observou-se a necessidade da inserção da interpretação geométrica das soluções inteiras de uma equação linear, verificando mais avanços do que recuos na construção do formalismo do tema proposto, ratificando a importância da tricotomia Aritmética/Álgebra/Geometria no processo de ensino-aprendizagem no estudo e aplicações das EDL com duas ou três incógnitas.

O pesquisador espera que o seu trabalho contribua para estudos futuros em relação aos processos de aprendizagem desse tema nos três níveis de ensino, dando ênfase às EDL com três incógnitas, assunto pouco explorado na Educação Matemática, juntamente com a criação de softwares matemáticos que façam a plotagem automática das soluções inteiras de uma EDL, sem a prévia construção de tabelas de pares ou ternas ordenadas de números inteiros, permitindo uma melhor visualização dessas soluções, principalmente na interpretação geométrica de equações lineares em três dimensões.

REFERÊNCIAS

ARTIQUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das matemáticas**. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4, p.193-217.

BARROS, A. F. S. **Equações diofantinas e suas aplicações**. 1998. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Estadual do Sudeste da Bahia, Vitória da Conquista.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEE, 2000. 58p

BROLEZZI, M. C. A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino da matemática. 1996. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. **Learning and teaching number theory**: research and cognition. London: Ablex Publishing, 2002. (Monograph series of the Journal of Mathematical Behavior, v. 2).

COELHO, S. P., MACHADO, S. D. A., MARANHÃO, M. C. S. A. Projeto: qual é a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática? In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2003, Santos. **Anais do II SBEM**. São Paulo: SBEM, 2003. v. 1, p. 1-19.

COSTA, E. S. **Equações diofantinas lineares e o professor do ensino médio**. 2007. 119 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

COURANT, R. **O que é matemática?** Tradução Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro. Ciência Moderna, 2000.

DANTE, L R. **Matemática.** São Paulo, Ática, 2005.

DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**: volume único. São Paulo: Atual, 2003.

DOMINGUES. Hygino H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

FERNANDES, A. M. V. et al. **Fundamentos de álgebra**. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Autores Associados, 2007.

GROENWALD, C. L. O.; FRANKE, R. F. Equações diofantinas lineares na formação de professores de matemática. 2007. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. **IX ENEM**. Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

HEFEZ, Abramo. **Curso de álgebra**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. v.1.

IEZZI, G. et sl. **Matemática**: ciência e aplicações. São Paulo: Saraiva, 2005. 3v.

LA ROCHE, G.; PITOMBEIRA, J. B. Uma equação diofantina e suas resoluções. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 19, p. 39-47, 1991.

LAUDARES, J. B. O uso do computador no ensino de matemática na graduação. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J. B. **Educação Matemática sob o olhar dos professores de cálculo.** Belo Hotizonte: FUMARC, 2001. p. 68-88.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** São Paulo: Papirus, 1997.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. **Números:** uma introdução à matemática. 3. ed. São Paulo: EDUSP, 2003.

MONTEIRO, L. H. Jacy. **Elementos da álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.

MOURA, L. O. G. **O contínuo e o discreto no ensino da matemática**: conceitos dicotômicos ou complementares? 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

OLIVEIRA, S. B. As **equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio**. 2006. 102f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PAIS, Luis Carlos. Transposição didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo: PUC-SP, 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POMMER, W. M. **Equações diofantinas lineares**: um desafio motivador para alunos do ensino médio. 2008. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo

PONTE, João Pedro da. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RESENDE, M. R. **Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura**. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RESENDE, M. R. Teoria dos números: presente ou ausente na formação do professor de matemática de educação básica**.** In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 2004, Curitiba. **Conhecimento local e conhecimento universal.** Curitiba: ENDIPE, 2004.

SADOWSKY, P. O espaço social da sala de aula: condição propícia para a produção de conhecimento. In: SADOWSKY, P. **O ensino da matemática hoje**: enfoque, sentidos e desafios. São Paulo: Ática, 2007. p. 57-87

SAMPAIO, J. C. V., CAETANO, P. A. S. **Introdução à teoria dos números**: um breve curso. São Paulo: EDUFSCAR, 2008.

SANCHEZ, Norma, ESCUDERO, Consuelo; MASSA, Marta. Modelos de situaciones problemáticas propuestos en los textos escolares de Biologia. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências,** v. 1, n.1, p. 31-40, jan./abr. 2001.

SILVA, E. F. Equações diofantinas lineares. **Revista da Olimpíada,** n. 3, p.110-118, 2002.

VELOSO, E. **A matemática na formação inicial de professores**. Lisboa: APM/SPM, 2005. Disponível em: <http://www.eduardoveloso.com/pdfs/matprof.pdf>.

WHITEHEAD, A. N. **Os fins da educação**. São Paulo: EDUSP, 1969.

YAHOORESPOSTAS. **Equações de 1º grau com 3 incognitas?** Disponível em: <http://br.answers.yahoo.com/question/index?qid=20090910061544AAspWEu>

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. São Paulo: Artmed, 2007.

APÊNDICE

REGISTRO DAS ETAPAS DAS SOLUÇÕES DOS ALUNOS

1. REGISTRO DAS ETAPAS DE SOLUÇÕES DOS ALUNOS

Nesse Apêndice, o pesquisador apresenta as análises, observações e resultados obtidos na realização de todos os três blocos de atividades. As análises das questões foram baseadas na fundamentação teórica da dissertação. Os sujeitos da pesquisa foram cognominados por siglas dos seus respectivos nome e sobrenome.

1.1. REGISTRO DAS ETAPAS DO PRIMEIRO BLOCO

Esse bloco de atividades foi aplicado no mês de setembro de 2009 para dois grupos de 13 alunos de duas universidades mineiras: a UFVJM e a PUC – BETIM, sendo que os mesmos não conheciam o tema Equações Diofantinas Lineares, mas demonstraram grande interesse durante as oficinas. Esse bloco era composto de seis atividades ordenadas conforme procedimentos metodológicos.

ATIVIDADE 01

Vejamos os quadros com as respectivas etapas:

ALUNO	E.I	E. II	E. III	E. IV	E. V	E. VI	E. VII	E. VIII	E. IX
AP	X	X	X	X	X	X	X	X	-
AC	X	X	X	X	X	X	X	X	X
CM	X	X	X	X	X	X	X	X	-
DG	-	X	X	X	-	X	X	X	X
EF	X	X	X	X	X	X	X	X	-
GA	X	X	X	X	-	X	X	X	-
KS	X	X	X	X	X	X	X	X	-
LS	X	X	X	X	-	X	X	X	X
MR	X	X	X	X	X	X	X	X	X
MB	X	X	X	X	X	X	X	X	X
MA	X	X	X	X	-	X	X	X	-
NB	X	X	X	X	-	X	X	X	X
PG	X	X	-	-	X	X	X	X	X

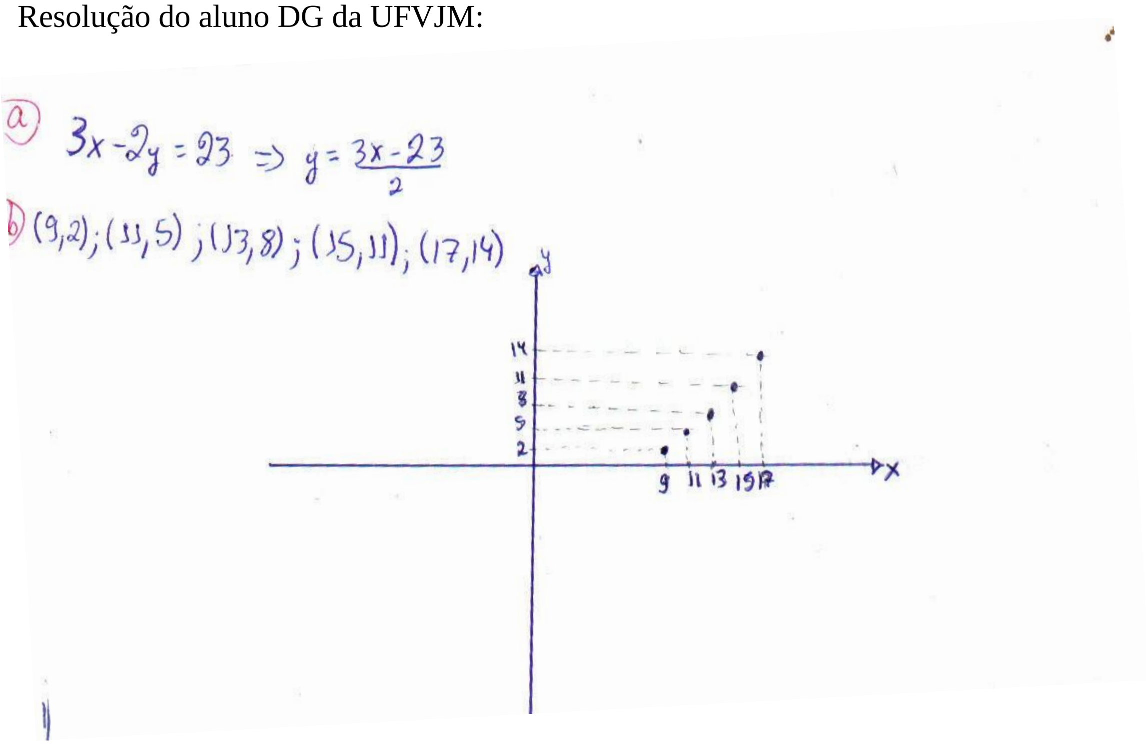
Quadro 1: Grupo da UFVJM

ALUNO	E.I	E. II	E. III	E. IV	E. V	E. VI	E. VII	E. VIII	E. IX
AC	-	-	-	-	-	X	X	X	-
DV	X	X	-	-	-	-	-	-	-
GL	X	X	X	X	-	X	X	X	-
IR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
LM	X	X	-	-	-	-	-	-	-
RM	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RC	X	X	X	X	-	-	-	-	-
RR	-	-	-	-	-	X	X	X	-
RS	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RA	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VA	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Quadro 2: Grupo da PUC - BETIM

Observou-se que 17 dos 26 alunos pesquisados escreveram corretamente a lei matemática que representa o problema. O restante errou o sinal do coeficiente b ou não encontrou a lei. Quatorze alunos usaram o método da tentativa para a construção dos quadros de valores e a respectiva interpretação geométrica.

Resolução do aluno DG da UFVJM:



Oito alunos, ao observar a tabela do exercício b, usaram o conhecimento da progressão aritmética para encontrar a solução geral da equação 3x - 2 y = 23 no campo dos naturais. Outros usaram a fórmula correta do termo geral da P. A , mas erraram nos cálculos.

Resolução do aluno CM da UFVJM:

c) $X_n = 9+(n-1).2 \to x = 7+2n$

$Y_n = 2+(n-1).3 \to y = 3n-1$

$S = \{7+2n,\ 3n-1\}$

Dezesseis alunos encontraram a solução geral da equação no campo dos inteiros. Outros erraram a lei no exercício anterior e alguns não conseguiram assimilar o método formal da construção da solução geral de uma Equação Diofantina.

Resolução do aluno RR da PUC Minas Betim:

d) $3x - 2y = 23$

		1	2
	3	2	1
	1	0	

$3 = 2.1 + 1 \Rightarrow 1 = 3 - 2.1$

$3 - 2.1 = 1 \quad (\times 23) \qquad 3.(23) - 2(23) = 23$

$x = x_0 + \frac{b}{d}t \Rightarrow x = 23 - 2t,\ t \in \mathbb{Z}$

$y = y_0 - \frac{a}{d}t \Rightarrow y = 23 - 3t,\ t \in \mathbb{Z}$

Notou-se a maior dificuldade dos alunos na restrição do parâmetro t, pois o problema visa soluções inteiras e positivas, sendo que apenas 7 alunos atingiram essa etapa.

Resolução do aluno PG da UFVJM:

e) Por se tratar de nº de questões, x e y tem que serem maiores que 0. Logo:

$x \geq 0 \Rightarrow 23-2t \geq 0 \Rightarrow t \leq \frac{23}{2} \Rightarrow \underline{t \leq 11}$ | $y \geq 0 \Rightarrow 23-3t \geq 0 \Rightarrow t \leq \frac{23}{3} \Rightarrow t \leq 7$

$\left.\begin{matrix} x: 11 \\ y: 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{t \leq 7}$. Substituindo para se obter nº mínimo de questões:

$x = 23-14 = \underline{09}$

$y = 23-21 = 2$

$x+y = \underline{11} \to$ nº mínimo de questões da prova.

ATIVIDADE II

Vejamos os quadros referentes às etapas atingidas pelos alunos:

ALUNO	E.I	E. II	E. III	E. IV	E.V	E. VI	E. VII
AP	X	X	X	X	X	-	-
AC	X	X	X	X	X	X	-
CM	X	X	X	X	X	X	-
DG	X	X	X	X	X	-	-
EF	X	X	X	X	X	X	-
GA	X	X	X	X	X	X	-
KS	X	X	X	X	X	X	-
LS	X	X	X	X	X	-	-
MR	X	X	X	X	X	-	-
MB	X	X	X	X	X	-	-
MA	X	X	X	X	X	-	-
NB	X	X	X	X	X	-	-
PG	X	X	X	X	X	-	-

Quadro 3: Grupo da UFVJM

ALUNO	E.I	E. II	E. III	E. IV	E.V	E. VI	E. VII
AC	X	X	X	X	X	X	X
DV	X	X	-	-	-	-	-
GL	X	X	X	X	-	-	-
IR	X	X	X	X	X	-	-
LM	X	X	-	-	-	-	X
RM	X	X	X	X	X	-	-
KC	X	X	X	X	-	-	-
RR	X	X	X	X	X	X	X
RS	X	X	X	X	X	-	-
RA	X	X	X	X	X	-	-
VA	X	X	X	X	X	-	-
VB	-	-	-	-	-	-	-
WS	X	X	X	X	-	-	-

Quadro 4: Grupo da PUC Minas Betim

Essa atividade evidenciou a dificuldade do aluno na interpretação do problema, sendo que a maioria atingiu a solução geral da equação, mas não soube discretizar o parâmetro t. Outros encontraram $x = 8$ e $y = 4$, mas não responderam ao problema proposto. Uma aluna da PUC Minas Betim resolveu por tentativa e apenas três alunos atingiram todas as etapas.

Resolução da aluna LM por tentativa:

$7x + 11y = 100$

$x = \dfrac{100 - 11y}{7}$

$7.8 + 11.4 = 100$

$56 + 44 = 100$

$\downarrow$ divisível por 7 — $\downarrow$ divisível por 11

Então 7 divide $100 - 11y$

P/ $y = 4 \rightarrow x = 8$

Resolução do aluno AC da PUC Minas Betim pelo método formal:

Questão 2

$100 \,\underline{|7}$? ? — $100 \,\underline{|11}$? ?

$7x + 11y = 100$

MDC $(7, 11) = 1$

$7x + 11y = 1$

	1	1	1	3
11	7	4	3	1
4	3	1	0	

$11 = 1(7) + 4$

$7 = 1(4) + 3$

$4 = 1(3) + 1$

$3 = 3(1) + 0$

$1 = 4 - 1(3)$

$1 = 11 - 1(7) - 1(3)$

$1 = 11 - 1(7) - 1(7 - (1(4)))$

$1 = 11 - 1(7) - 1(7) - (1(11 - 1(7))$

$\boxed{1 = 2(11) - 3(7)} \cdot 100$

$100 = 200(11) - 300(7)$

$\boxed{100 = -300(7) + 200(11)}$

$(-300, 200)$ é solução particular

$7x + 11y = 100$ — $ax + by = c$

$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \dfrac{bt}{d} \\ y = y_0 - \dfrac{at}{d} \end{array}\right\} t \in \mathbb{Z}$ — $a = 7$, $b = 11$, $d = 1$

$x = -300 + \dfrac{11t}{1}$, $y = 200 - \dfrac{7t}{1}$

$(-300 + 11t, \; 200 - 7t)$

- $-300 + 11t \geq 0$ e $200 - 7t \geq 0$

$11t \geq 300$ — $-7t \geq -200$

$t \geq 27,27$ — $t \leq 28,57$

P/ $t = 28 \Rightarrow -300 + 11(28) = 8$; $+200 - 7(28) = 4$

$7(8) + 11(4) = 100$

$56 + 44 = 100$

$100 = 100$ ✓

$7.8 = 56$ é divisível por 7

$11.4 = 44$ é divisível por 11

ATIVIDADE III

Analisemos os quadros abaixo:

ALUNO	E.I	E.II	E.III
AP	X	-	-
AC	X	X	-
CM	X	-	-
DG	X	X	X
EF	X	-	-
GA	X	-	-
KS	X	-	-
LS	X	X	X
MR	X	X	-
MB	X	X	X
MA	X	X	X
NB	X	X	X
PG	X	X	X

Quadro 5: Grupo da UFVJM

ALUNO	**E.I**	**E.II**	**E.III**
AC	X	-	-
DV	X	-	-
GL	X	-	-
IR	X	X	-
LM	X	-	-
RM	X	-	-
RC	X	-	-
RR	X	-	
RS	X	X	-
RA	X	-	-
VA	X	X	-
VB	X	X	-
WS	X	X	-

Quadro 6: Grupo da PUC Minas Betim

A maioria dos alunos demonstrou dificuldade na interpretação do problema, sendo que 50% dos mesmos encontraram a solução geral da equação diofantina $39x - 56y = 11$, mas se perderam na restrição das soluções inteiras e positivas. Outros aplicaram corretamente o teorema de Bézout, mas se confundiram ao encontrar uma solução particular da equação. Alguns sequer tentaram resolver o problema. Apenas seis alunos resolveram com êxito a atividade proposta.

Resolução do Aluno MB da UFVJM:

(3) $A = 39x + 16$; $A = 56y + 27$ $\Big\}$ $39x + 16 = 56y + 27$; $39x - 56y = 11$

	1	2	3	2	2
56	39	17	5	2	1
17	5	2	1	0	

$56 = 39 \cdot 1 + 17 \Rightarrow 17 = 56 - 39 \cdot 1$

$39 = 17 \cdot 2 + 5 \Rightarrow 5 = 39 - 17 \cdot 2$

$17 = 5 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 2 = 17 - 5 \cdot 3$

$5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2$

$5 - 2 \cdot 2 = 1$

$(39 - 17 \cdot 2) - 2 \cdot 2 = 1$

$39 - 17 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 1$

$39 - 17 \cdot 2 - (17 - 5 \cdot 3)(2) = 1$

$39 - 17(2) - 17(2) + 5 \cdot (6) = 1$

$39 - 17(4) + (39 - 17 \cdot 2)(6) = 1$

$39 - 17(4) + 39(6) - 17(12) = 1$

$39(7) - 17(16) = 1$

$39(7) - (56 - 39 \cdot 1)(16) = 1$

$39(7) - 56(16) + 39(16) = 1$

$39(23) - 56(16) = 1 \cdot (11)$

$39(253) - 56(176) = 11$

$x_0 = 253$ $\quad y_0 = 176$

$x \geq 0$ $\quad y \geq 0$

$x = 253 - 56t$ $\quad y = 176 - 39t$

$-56t \geq -253$ $\quad -39t \geq 176$

$t \leq \frac{253}{56}$ $\quad t \leq \frac{176}{39}$

4,5178

4,5128

$t = 4$ $\quad x = 29$, $y = 20$

$A = 1147$

ATIVIDADE IV

Essa atividade mostrou que apenas 23,15% dos alunos entenderam a condição de existência de soluções de uma equação diofantina linear, pois 73,1% dos mesmos forçaram a solução geral da equação 6x + 9y = 13 e 23,1% sequer encontraram a lei matemática mencionada. Vejamos os quadros:

ALUNO	E.I	E.III
AC	X	-
DV	X	X
GL	X	-
IR	-	-
LM	-	-
RM	X	X
RC	-	-
RR	X	X
RS	-	-
RA	-	-
VA	X	-
VB	X	-
WS	X	-

Quadro 7: Grupo da PUC Minas Betim

ALUNO	E.I	E.III
AP	X	-
AC	X	-
CM	X	-
DG	-	-
EF	X	-
GA	X	X
KS	X	-
LS	X	-
MR	-	-
MB	X	X
MA	X	-
NB	X	-
PG	X	X

Quadro 8: Grupo da UFVJm

Resolução do aluno NB da UFVJM:

$m = 6x \mid y9 = n$

$6x \,\underline{|\,9y}$; $13 \quad 2$ $\Rightarrow 6x \equiv 13 \pmod{9y} \Rightarrow 9y \mid 6x - 13 \Rightarrow \underline{6x - 9y = 13}$

		1	2
9	6	3	
3	0		

$9 = 6.1 + 3 \Rightarrow 3 = 9 - 6.1$

$6(-1) - 9(-1) = 3 \quad \cdot\left(\frac{13}{3}\right)$

$6\underbrace{\left(-\frac{13}{3}\right)}_{x_0} - 9\underbrace{\left(-\frac{13}{3}\right)}_{y_0} = 13$

$x = x_0 - \frac{m}{d}t \Rightarrow x = -\frac{13}{3} - \frac{13}{3}t \Rightarrow x = -\frac{13}{3}(1+t);\ t \in \mathbb{Z} \mid 6x = -26(1+t)$

$9y = 6x - 13 \mid 9y = -26(1+t) - 13 \Rightarrow y = \frac{6\left(\frac{-13}{3}\right)(1+t) - 13}{9} \Rightarrow y = \frac{-26(1+t) - 13}{9}$

$6x > 9y$; para satisfazer isso, $-26(1+t) > 13 \Rightarrow -26 - 26t > 13 \Rightarrow t < -\frac{39}{26} \Rightarrow t \leq -2$

$* \; r < n \Rightarrow 13 < n \Rightarrow 13 < 9y \Rightarrow 13 < -26 - 26t - 13 \Rightarrow 26t < -52 \Rightarrow t < -2$

$S = \{t < -2;\ t \in \mathbb{Z}\}$

Meus dois números são: $m = 6x = -26 - 26t$ e $n = 9y = -26 - 26t - 13$ respectivamente aplicados no conjunto solução acima, $t < -2;\ t \in \mathbb{Z}$.

Resolução do aluno DV da PUC Minas Betim:

$6x$	$9y$
13	2

$6x = 9y \cdot 2 + 13$

$6x - 9y2 = 13$

$\mathrm{mdc}\,(6,9) = 3$

Logo, para essa equação não é possível encontrar uma solução pois não temos que $d|c$.

ATIVIDADE V

ALUNO	E.I	E.II	E.III	E.IV
AP	X	X	X	X
AC	X	X	X	-
CM	X	X	X	X
DG	X	X	X	-
EF	X	X	X	X
GA	X	X	X	X
KS	X	X	X	X
LS	X	X	X	X
MR	-	-	-	-
MB	-	-	-	-
MA	X	X	X	-
NB	X	X	X	-
PG	-	-	-	-

Quadro 9: Alunos da UFVJM

ALUNO	E.I	E. III	E. III	E.IV
AC	-	-	X	-
DV	X	-	-	-
GL	X	X	X	-
IR	-	-	-	-
LM	X	-	-	-
RM	-	-	-	-
RC	X	X	-	-
RR	-	-	X	-
RS	-	-	-	-
RA	-	-	-	-
VA	-	-	-	-

Quadro 10: Grupo da PUC Minas Betim

Constatamos a grande dificuldade do aluno na compreensão do problema, juntamente com a existência de mais de uma solução inteira para uma equação diofantina. Dos seis alunos que obtiveram solução para o problema, apenas 2 encontraram as quatro soluções possíveis. A metade deles encontrou a solução geral da equação $3y + 8z = 80$, mas não soube discretizar o parâmetro t para as soluções inteiras e positivas.

Resolução do aluno LS da UFVJM:

X = moedas de 1 centavo   R$ 3,00 = 300 centavos

y = moedas de 10 centavos

z = moedas de 25 centavos

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \text{ moedas} \Rightarrow x = 60 - y - z \\ x + 10y + 25z = 300 \end{cases}$$

$x + 10y + \cancel{25z} = 300 \quad (60 - y - z) + 10y + 25z = 300$

$9y + 24z = 300 - 60 \quad 9y + 24z = 240$

	2	1	2
24	9	6	3
6	3	0	

$24 = 9.2 + 6 \Rightarrow 6 = 24 - 9.2$

$9 = 6.1 + 3 \Rightarrow 3 = 9 - 6.1$

$9 - 6.1 = 3 \Rightarrow 9 - (24 - 9.2) = 3 \Rightarrow 9 - 24 + 9.2 = 3$

$9(3) + 24(-1) = 3 \quad (\times \frac{240}{3})$

$9(240) + 24(-80) = 240$

$y^0 \quad z_0$

$y = y_0 + \frac{b}{d}t \Rightarrow y = 240 + 8t \qquad z = z_0 - \frac{a}{d}t \Rightarrow z = -80 - 3t$

$y \geq 0 \Rightarrow 240 \geq -8t \;(-1) \qquad \cancel{t \leq \frac{-240}{8}}$

$-240 \leq 8t$

$t \geq \frac{-240}{8} \quad t \geq -30$

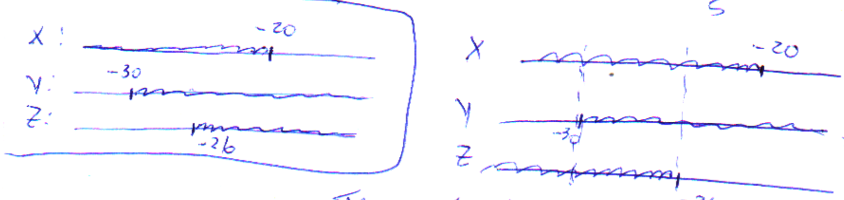
$z \geq 0 \Rightarrow -80 - 3t \geq 0$

$-80 \geq 3t \quad t \leq \frac{-80}{3} \quad t \leq -26,6$

$x = 60 - y - z \Rightarrow x = 60 - (240 + 8t) - (-80 - 3t).$

$x = 60 - 240 - 8t + 80 + 3t \quad x = -100 - 5t$

$x \geq 0 \Rightarrow -100 - 5t \geq 0 \; . -100 \geq +5t \Rightarrow t \leq \frac{-100}{5} \quad t \leq -20$



$x \wedge y \wedge z = \cancel{\ldots}$

$t = x \wedge y \wedge z = [-30, -26]$

Temos 5 valores para t: t = -30, t = -29, t = -28, t = -27 e t = -26

Para t = -30	Para t = -30	Para t = -30	Total	
x = -100 - 5t = -100 + 150 = 50	y = 240 + 8(-30) = 0	z = -80 - 3(-30) = 10	60	3,00
t = -29	t = -29	t = -29		
x = -100 - 5(-29) = 45	y = 240 + 8(-29) = 8	z = -80 - 3(-29) = 7	60	3,00
t = -28				
x = -100 - 5(-28) = 40	y = 240 + 8(-28) = 16	z = -80 - 3(-28) = 4	60	3,00
t = -27				
x = 35	y = 24	z = 1	60	3,00

Assim temos 4 maneiras de combinar 60 moedas para formar 3,00, já que para t = -26, z = -2 [illegible]

ATIVIDADE VI

ALUNO	E.I	E.II	E.III	E.IV	E.V
AP	X	-	-	-	-
AC	-	-	-	-	-
CM	--	-		-	-
DG	-	-	-	-	-
EF	X	-	-	-	-
GA	X	-	-	-	-
KS	X	-	-	-	-
LS	-	-	-	-	-
MR	-	-	-	-	-
MB	X	X	X	X	X
MA	-	-	-	-	-
NB	-	-	-	-	-
PG	X	X	X	X	X

Quadro 11 – Alunos da UFVJM

ALUNO	E.I	E.II	E.III	E.IV	E.V
AC	-	-	-	-	-
DV	-	-	-	-	-
GL	--	-	-	-	-
IR	-	-	-	-	-
LM	-	-	-	-	-
RM	X	-	-	-	-
RC	-	-	-	-	-
RR	-	-	-	-	-
RS	-	-	-	-	-
RA				-	-
VA	-	-	-	-	-
VB	-	-	-	-	-
WS	-	-	-	-	-

Quadro 12 – Alunos da PUC Minas Betim

Verificamos que 27% dos alunos entenderam a condição de existência de soluções inteiras da equação linear ax + by + cz = m, e apenas 7, 7% dos mesmos assimilaram o formalismo para a obtenção da solução geral de uma EDL com três incógnitas.

Resolução da Aluna RM da PUC Minas Betim:

<u>Questão VI</u>

I-100x + 72y + 90z = 11

Tomemos 72y + 90z = m = d_1.k

	1	4
90	72	18
18	0	

d_1= mdc(72,90) = 18

então,

72y + 90z = 18k, daí temos: 18k + 100x = 11

	5	1	1	4
100	18	10	8	2
10	8	2	0	

Mdc(18,100) = 2.

Como 2 não divide 11, logo não há solução inteira para esta equação diofantina.

Resolução do aluno PG da UFVJM:

6 a) $120x + 84y + 144z = 60 \quad \div 12$

$$\underbrace{10x + 7y}_{d_1 k} + 12z = 5$$

$10x + 7y = m = d_1 k$

	1	2	3
10	7	3	1
3	1	0	

$10x + 7y = k$

$10 = 7 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 3 = 10 - 7 \cdot 1$

$7 = 3 \cdot 2 + 1$

$7 - 3 \cdot 2 = 1$

$7 - (10 - 7 \cdot 1)2 = 1$

$7 - 10(2) + 7(2) = 1$

$10(-2) + 7(3) = 1 \quad (k)$

$10(-2k) + 7(3k) = k$

$x_0 = -2k \Rightarrow x = -2k + 7t$

$y_0 = 3k \Rightarrow y = 3k - 10t$

$k + 12z = 5$

$k(13) + 12(-1) = 1 \quad (5)$

$k(65) + 12(-5) = 5$

$k_0 = 65 \Rightarrow k = 65 + 12w$

$z_0 = -5 \Rightarrow \boxed{z = -5 - w}$

$x = -2k + 7t$ $\qquad$ $y = 3k - 10t$

$x = -2(65 + 12w) + 7t$ $\qquad$ $y = 3(65 + 12w) - 10t$

$\boxed{x = -130 - 24w + 7t}$ $\qquad$ $\boxed{y = 195 + 36w - 10t}$

$S = \{-130 - 24w + 7t \,;\, 195 + 36w - 10t \,;\, -5 - w\}.$

Avaliação de alguns alunos:

> "Durante a construção do conhecimento, o ambiente foi harmônico, o que é importante para o a estudo. A dinâmica do professor foi importante para tornar o conhecimento inteligível. Apesar de o conteúdo ser novo e o tempo pequeno, foram bastante opulentos e positivos na construção da vida acadêmica do aluno." (Aluno WS da PUC Minas Betim).
> "A atividade que o professor fez em a sala de aula foi muito dinâmica. Aprendemos novas formas de achar o valor das incógnitas das equações e acredito que levando essa forma prazerosa em sala de aula para os alunos vamos prender sua atenção. A atividade foi bem divertida, e com a mesma, criando um objeto pedagógico, auxiliando o entendimento da matéria inserida, os alunos iriam assimilar melhor o conteúdo." (Aluno AA da PUC Minas Betim).
>
> "Achei muito interessante e de grande importância a resolução dessas atividades, apesar de não ter estudado antes esse conteúdo. Acredito que ele apresenta algumas oportunidades didáticas e criativas para a minha formação." (Aluna AC – UFVJM).
>
> "Achei esse conteúdo muito interessante. Apesar de nunca ter visto antes e ser complicado, não deixa de ser importante a sua aplicabilidade na sala de aula. Inicialmente o professor parecia estar ansioso em respostas rápidas, não dando tempo suficiente para que o aluno construísse seu conhecimento, mas, gradativamente, as coisas se normalizaram e o ambiente se tornou propício e harmonioso para a aprendizagem." (Aluno LS da UFVJM).

RESULTADOS E CONCLUSÕES:

O pesquisador achou satisfatórios os resultados, levando em conta a novidade do tema para o aluno e a complexidade do formalismo para a obtenção das soluções inteiras de uma Equação Diofantina Linear. Foi possível perceber a dificuldade encontrada por eles na compreensão de cada problema. Ficou notório que a maioria não entendeu aritmética e algebricamente a condição de existência das soluções, levando o pesquisador a introduzir um contexto geométrico para o bloco de atividades seguinte, enfatizando também a transição da matemática contínua para a matemática discreta.

Observamos que o aluno enfrenta uma grande barreira na discussão de mais de uma solução inteira de uma equação linear, pois, encontrando uma solução para o problema proposto, ele não se preocupa em procurar outras, apesar de que Diofanto tinha a mesma postura.

1.2. REGISTRO DAS ETAPAS DO SEGUNDO BLOCO

Esse bloco de atividades foi aplicado no mês de novembro de 2009 para dois grupos de alunos de duas universidades mineiras: a UFVJM e a PUC Minas Betim, sendo que a grande maioria deles já conhecia o tema proposto, cujas atividades foram realizadas no laboratório de informática, onde foi possível fazer um elo entre a Aritmética, Geometria e a Álgebra.

ATIVIDADE 01

Duplas de aluno	E, I	E.II	E.III
GS – DO	X	X	-
GL –VA	X	X	X
CG – DV	X	X	X
FH – WS	X	X	X
RA- RM	X	X	X
MC – RR	X	X	-
ZH – VF	X	X	X
JP – LM	X	X	X
AR – FR	X	X	X

Quadro 13: Alunos da PUC Minas Betim

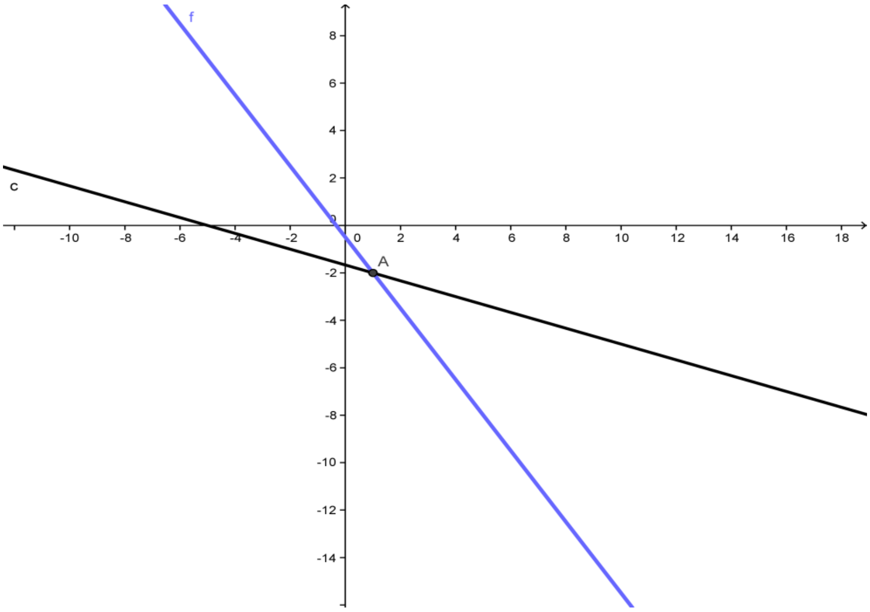
Duplas de Alunos	E. I	E.II	E.III
PG - MA	X	-	X
MB - GA	X	-	X
EF - KS	X	X	X
DG - MR	X	X	X
LS - CM	X	-	X

Quadro 14 – Alunos da UFVJM

A maioria das duplas resolveu com êxito essa atividade, conseguindo explorar a matemática contínua e discutindo geometricamente o número de soluções reais dos sistemas lineares no R^2 e R^3. Notou-se uma maior familiarização com os softwares Geogebra e Winplot. Observou-se que 21,4% dos alunos pesquisados têm dificuldade em plotar gráficos no R^3 e 14,3% dos mesmos não discutiram o número de soluções reais do sistema. O pesquisador deu a liberdade para o aluno escolher o software que tivesse mais habilidade.

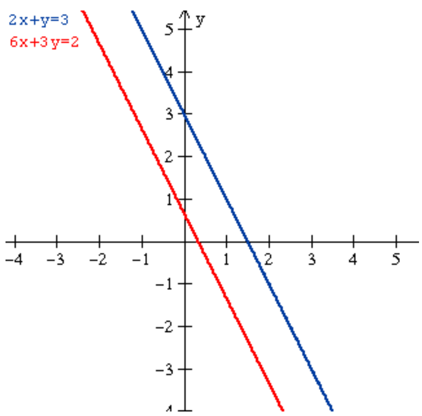
RESOLUÇÃO DA DUPLA PG - MA da UFVJM:

$$\begin{cases} x+3y=-5 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$$



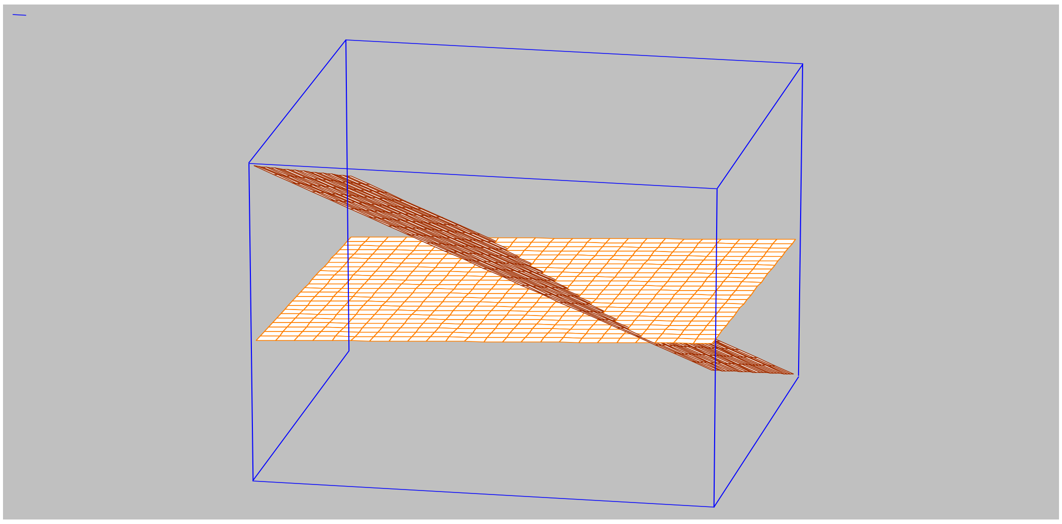
A é o ponto de intersecção das equações Diofantinas.

Resolução da dupla DG e MR da UFVJM:



Neste sistema não possuímos soluções, pois as equações das retas possuem o mesmo coeficiente angular. Portanto, são paralelas.

RESOLUÇÃO DA DUPLA GL E VA DA PUC Minas Betim:



Dois planos cortando-se segundo uma reta. O sistema tem infinitas soluções, ou seja, é possível e indeterminado.

ATIVIDADE II:

Todos os alunos resolveram a atividade proposta com êxito, analisando a inclinação da reta, enfatizando a matemática contínua.

ATIVIDADE III:

Essa atividade gerou mais discussões, pois houve uma discretização da matemática, havendo uma plotagem de pontos alinhados no Z^2 e situações que não se encontravam números inteiros como soluções. A postura interrogativa do professor foi importante, pois as indagações e sugestões dele clarificaram muitas dúvidas dos alunos. Vejamos as tabelas:

Duplas	E, I	E. I
GS – DO	-	-
GL –VA	X	X
CG – DV	X	X
FH – WS	X	X
RA- RM	X	X
MC – RR	-	-
ZH – VF	X	X
JP – LM	X	X
AR – FR	X	X

Quadro 15: Alunos da PUC Minas Betim

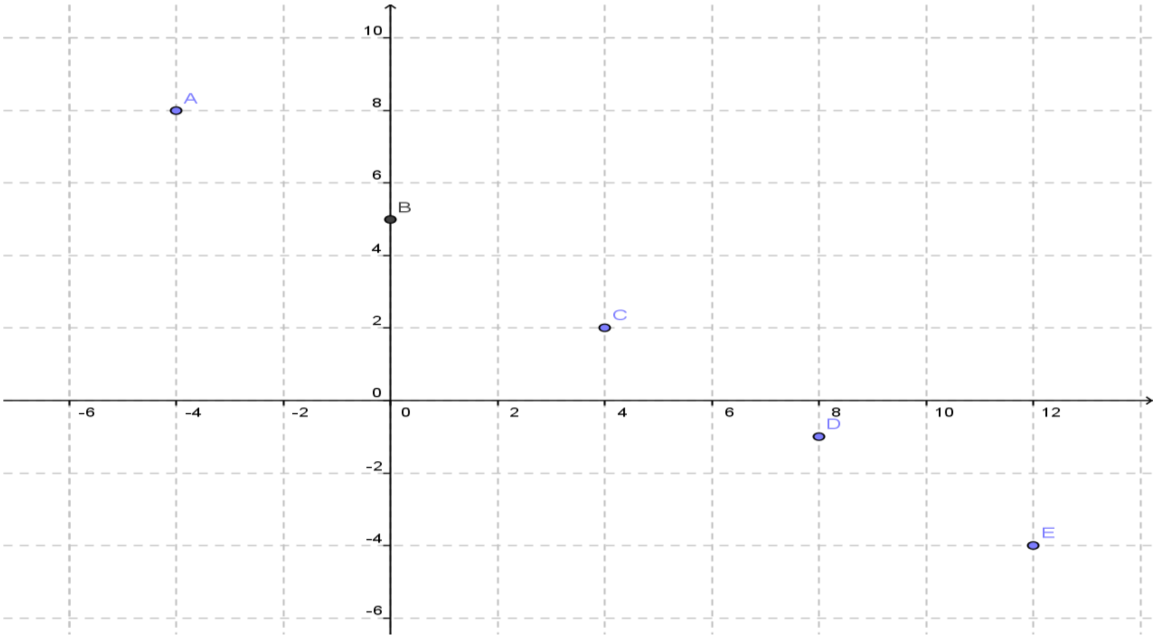
Duplas	E, I	E. II
PG - MA	X	X
MB - GA	X	X
EF - KS	X	X
DG - MR	X	X
LS - CM	-	-

Quadro 16: Alunos da UFVJM

Observou-se que 21, 4% dos alunos não compreenderam a transição da matemática contínua para a matemática discreta, 14,3% deles não fizeram a interpretação geométrica das soluções inteiras da EDL ax + by = c, mas encontraram algebricamente algumas soluções inteiras e o número delas pela análise do exercício 02.

Resolução da dupla EF – KS da UFVJM:

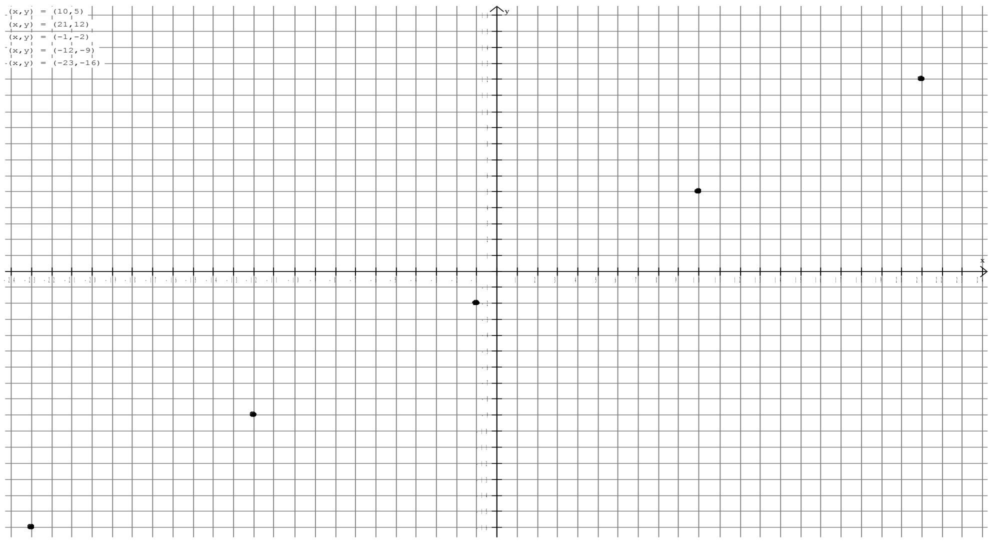
Equação: 3x + 4y = 20



Apenas duas soluções inteiras e positivas

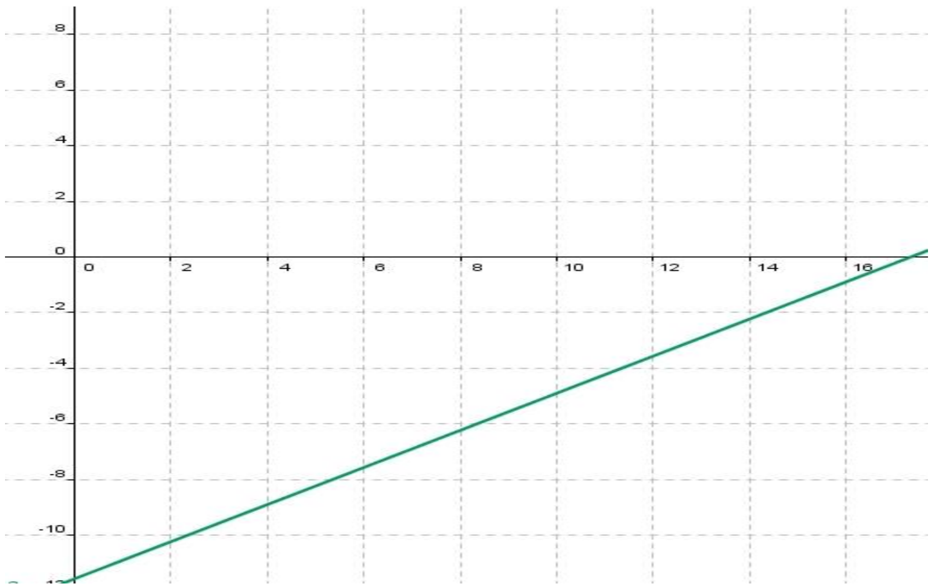
Resolução da dupla FH e WS da PUC Minas Betim:

Equação: $7x - 11y = 15$



A equação tem infinitas soluções inteiras e positivas, pois o coeficiente angular da reta é positivo.

Resolução da dupla ZH e VF da PUC Minas Betim:



Não tem soluções inteiras, pois o termo independente não é múltiplo do M.D.C. dos coeficientes das variáveis.

ATIVIDADE IV

Analisemos os quadros:

Duplas de alunos	E, I	E.II
GS – DO	-	-
GL-VA	X	-
CG – DV	X	-
FH – WS	X	-
RA- RM	X	-
MC – RR	-	-
ZH – VF	X	-
JP – LM	-	-

Quadro 17: Alunos da PUC-BETIM

Duplas de Alunos	E. I	E.II
PG - MA	-	-
MB - GA	-	-
EF - KS	X	-
DG - MR	X	X
LS - CM	-	-

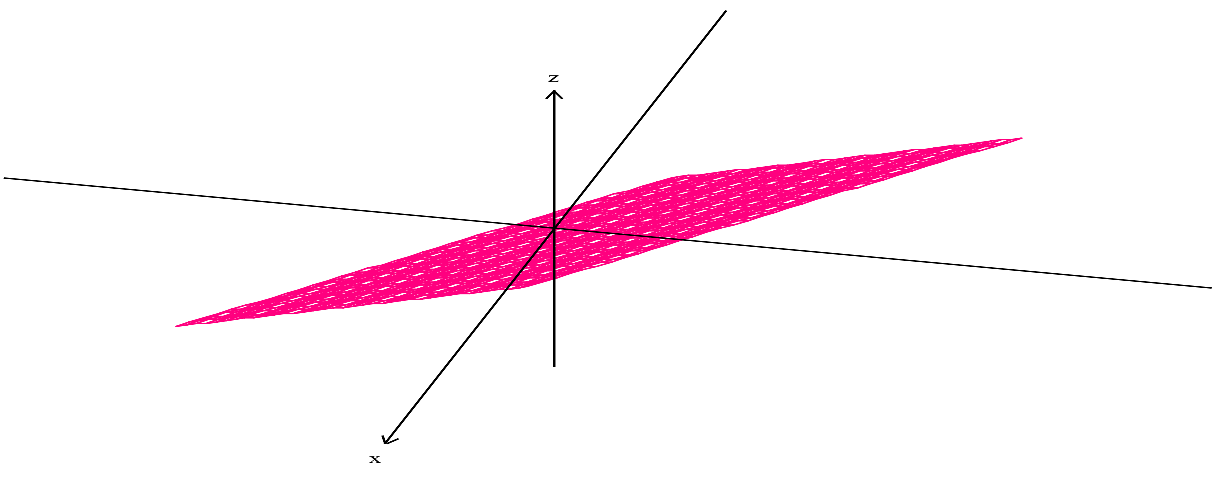
Quadro 18: turma da UFVJM

Observamos que a metade dos alunos apresentou dificuldade em lidar com interpretações geométricas no R^3 e apenas 7,15% compreenderam a condição de existência de soluções inteiras da equação linear ax + by + cz = m.

Resolução da dupla EF e KS da UFVJM:

Equação: 8x +12y – 20z = 42

plano([8,12,-20];(0,2.1,0))



Resolução da dupla DG e MR da UFVJM:

b) Não possui solução inteira, pois o mdc(8, 12, 20) não divide 42. Em outras palavras, a equação pode ser escrita como 4(2x + 3y – 5z) = 42 $\Rightarrow$2(2x + 3y – 5z) = 21. Portanto, o primeiro membro da equação é um número par e nos números inteiros nunca será igual a 21.

ATIVIDADE V

Essa atividade evidenciou a dificuldade apresentada pelos alunos na compreensão e resolução de um problema. Vejamos os quadros:

Duplas	E, I	E.II	E.III
GS – DO	-	-	-
GL –VA	X	X	X
CG – DV	-	-	-
FH – WS	X	-	
RA- RM	X	-	X
MC – RR	-	-	-
ZH – VF	X	-	X
JP – LM	X	-	X
AR – FR	-	-	-

Quadro 19 – Alunos da PUC Minas Betim

Duplas	E. I	E. III	E.IV
PG - MA	X	X	-
MB - GA	X	X	-
EF - KS	X	-	-
DG - MR	X	-	X
LS - CM	-	-	-

Quadre 20 – Alunos da UFVJM

Observou-se que 35,7% dos alunos sequer iniciaram o problema, 35,7% obtiveram as soluções do problema por tentativa, 14,3% encontraram a solução geral e erraram na restrição do parâmetro t, 28,3% montaram o sistema linear que representa o problema, mas não souberam resolver o sistema indeterminado.

Resolução da dupla ZH – VF da PUC Minas Betim:

$X + y + z = 100$

$800x + 400y + 80z = 16000$ ou

$x + y + z = 100$

$10x + 5y + z = 200$

Escalonando esse sistema fica:

$x + y + z = 100$

$5y + 9z = 800$

O sistema é indeterminado, e sua solução geral é S = $\{ [(4a – 300)/5; (800 – 9a) / 5; a]\}$.

Fazendo uma tabelinha de alguns possíveis valores positivos para cada variável fica:

4 a – 300 > 0 e 800 – 9 a < 0, então 75 < a < 89:

A	**x**	**y**	**z**
76	0,8	23,2	76
77	1,6	21,4	77
78	2,4	19,6	78
79	3,2	17,8	79
80	4	16	80
81	4,8	14,2	81
82	5,6	12,4	82
83	6,4	10,6	83
84	7,2	8,8	84
85	8	7	85
86	8,8	5,2	86
87	9,6	3,4	87
88	10,4	1,6	88

De acordo com a tabela, concluímos que os valores vermelhos são as soluções para esse problema, ou seja, podemos comprar 4 bois, 16 vacas e 80 bezerros, ou 8 bois, 7 vacas **e** 85 bezerros**.** Então temos duas formas diferentes para fazermos essa compra.

Avaliação de alguns alunos:

> "Achei o trabalho muito interessante, nos ajudou muito na compreensão de sistemas lineares e equações lineares. Só achei que o tempo foi muito curto. Poderíamos ter tido mais aulas para melhor compreendermos a matéria, pois tive dificuldades em algumas questões e não tive como ter orientação do professor." (Aluno FH da PUC Minas Betim).
>
> "A matéria dada foi um pouco difícil, mas as explicações do mestrando foram claras e fáceis para a nossa compreensão. Tenho certeza de que foram de muita valia para nós alunos do curso de Álgebra I, pois, relacionando a geometria com a álgebra, propicia ao estudante uma melhor aprendizagem." (Aluna MB da UFVJM).

RESULTADOS E CONCLUSÕES:

Foi observado um avanço dos alunos na compreensão da existência de soluções inteiras de uma equação Diofantina linear quando eles tiveram uma visão geométrica dessas soluções. As indagações e sugestões dadas pelo pesquisador conduziram o aluno ao entendimento da relação entre o MDC (a, b) e o termo independente c da equação ax + by = c.

Todavia, notou-se que os estudantes continuaram com a mesma dificuldade na compreensão de problemas, notando que alguns só conseguem encontrar as soluções inteiras através de tentativas, denotando esse obstáculo no método formal para se resolver problemas envolvendo o tema proposto.

1.3 REGISTROS DAS ETAPAS DO TERCEIRO BLOCO

Esse bloco de atividades foi aplicado em março de 2010 um total de nove alunos divididos em dois grupos. O primeiro, composto por seis alunos da UFVJM, e o outro com três integrantes da PUC Minas Betim. Os resultados foram os seguintes:

Aluno	E.I	E.II
DV	X	X
EF	X	X
KS	X	X
MB	X	-
MR	X	X
PG	X	-

Quadro 21: Alunos da UFVJM

Aluno	E. I	E. II
SP	X	X
VA	X	X
ZH	X	X

Quadro 22: Alunos da PUC Minas Betim

Dois alunos encontraram o MDC dos coeficientes, mas esqueceram de fazer a combinação linear de Bézout. Todavia, realizaram essa etapa na atividade seguinte. O restante resolveu com êxito a atividade proposta.

Resolução do aluno VA da PUC Minas Betim:

a) 28 e 21 28x + 21y = 7 28 (**-5**) + 21 (**7**) = 7 28 (**-2**) + 21 (**3**) = 7 28 (**1**) + 21 (**-1**) = 7	b) 15, 12 e 30 15x + 12y + 30z = 3 15 (**1**) + 12 (**-1**) + 30 (**0**) = 3 15 (**31**) + 12 (**-41**) + 30 (**1**) = 3 15 (**-29**) + 12(**39**) + 30(**1**) = 3

ATIVIDADE II

Os alunos não apresentaram dificuldade para realizá-la, pois a maioria entendeu que ela era uma consequência da atividade anterior. Porém, alguns repetiram o caminho percorrido por não atentarem ao da sequência didática para encontrar uma solução particular de uma EDL.

Aluno	E.I	E.II
DV	X	X
EF	X	X
KS	X	X
MB	X	-
MR	X	X
PG	X	-

Quadro 23: Alunos da UFVJM

Aluno	E. I	E. II
SP	X	X
VA	X	X
ZH	X	X

Quadro 24: Alunos da PUC Minas Betim

Resolução do aluno ZH da PUC Minas Betim:

a) 28x + 21y = 14
(-4,6) ; (-1,2) ; (2,-2) ; (5,- 6)
Esta equação tem infinitas soluções inteiras, pois o termo independente é múltiplo de 7, ou seja, do MDC (28,21).

b) 28x + 21y = 10
Esta tem infinitas soluções, mas nenhuma inteira, pois o termo independente não é múltiplo de 7, ou seja, do MDC (21,28).

c) 15x + 12y + 30z = 24
(-20, 27,0) (10, -13,1) (40,-53,2)
Esta também tem infinitas soluções inteiras pelo mesmo motivo da letra "a" desta questão.

d) 15x +12y + 30z = 16
Esta tem infinitas soluções, mas nenhuma inteira, pelo mesmo motivo da letra "b", ou seja, 16 não é múltiplo de 3.

Resolução do aluno DG da UFVJM:

2- a) $28x+21y=14$

	1	3
28	21	7
7	0	

onde $\{28,21\} = 7 \mid 14$

$28(1)+21(-1) = 7 \quad x(2)$

$28\underbrace{(2)}_{x_0} + 21\underbrace{(-2)}_{y_0} = 14$

$x_0 = 2$

$y_0 = -2$

$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2-4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

Uma das soluções é $(2,-2)$.

b) $28x+21y=10$

onde $\{28,21\} = 7 \nmid 10$; Logo a equação não possui solução em $\mathbb{Z}$.

c) $15x+\overset{3k}{12y}+30z=24$

	1	4
15	12	3
3	0	

	10
30	3
0	

onde $\{15,12,30\} = 3 \mid 24$

$x = x_0 + \frac{b}{d}t$

$y = y_0 - \frac{a}{d}t$

$15(1)+12(-1)=3 \quad x(k)$

$15(k)+12(-k)=3k$

$\begin{cases} x = k+4t, & t \in \mathbb{Z} \\ y = -k-5t, & t \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$3k+30z=24$ onde $\{3,30\} = 3 \mid 24$

$3\underbrace{(-2)}_{k_0}+30\underbrace{(1)}_{z} = 24$

$\begin{cases} k = -2+10w, & w \in \mathbb{Z} \\ z = 1-w, & w \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2+10w+4t \\ y = 2-10w-5t \\ z = 1-w \end{cases} \quad w,t \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Uma solução é } (-2,2,1)}$

d) $15x+12y+30z=16$

	1	4
15	12	3
3	0	

	10
30	3
0	

onde $\{15,12,30\} = 3 \nmid 16$, Logo a equação não admite solução em $\mathbb{Z}$

ATIVIDADE III

Os alunos assimilaram a transição do R^2 para o Z^2 ao trocar uma reta contínua por um conjunto de pontos colineares. Todavia, enfrentaram barreiras na passagem do R^3 para o Z^3 ao substituir um plano por um conjunto de pontos pertencentes a um mesmo plano. Uma das razões das dificuldades foi o surgimento de dois parâmetros e eles estavam acostumados com um único na equação ax + by = c. Então, alguns fizeram a interpretação gráfica manualmente em 3 D.

ATIVIDADE III

Alunos	E. I	E.II	E. III
DG	X	X	X
EF	X	X	X
KS	-	-	-
MB	X	X	X
MR	X	X	X
PG	-	-	-

Quadro 25: Alunos da UFVJM

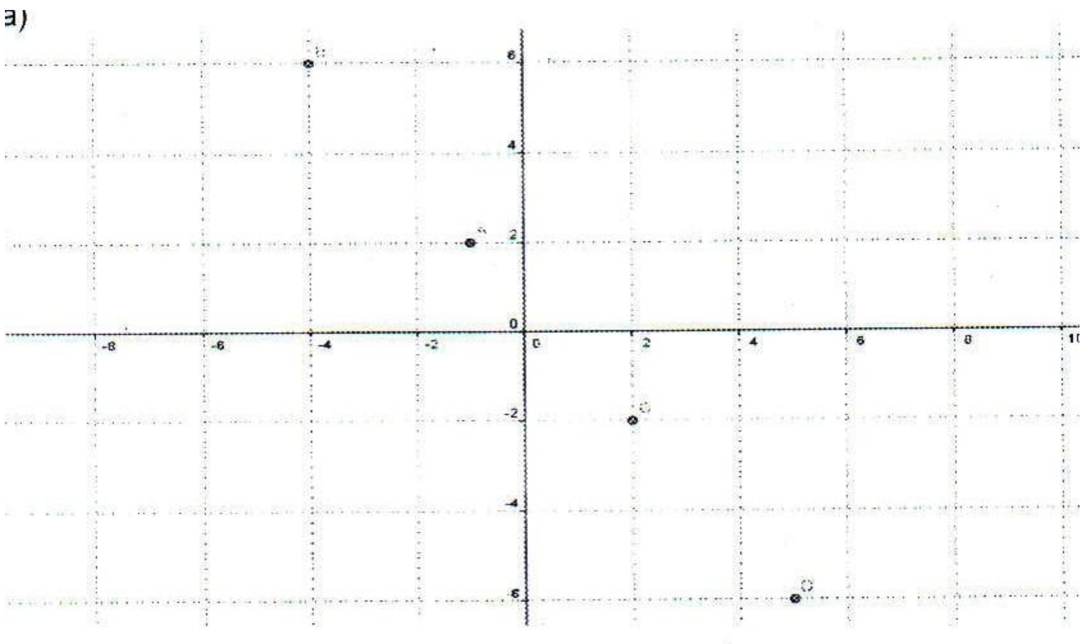
Alunos	E. I	E.II	E. III
SP	X	-	-
VA	X	X	X
ZH	X	X	X

Quadro 26: Alunos da PUC Minas Betim

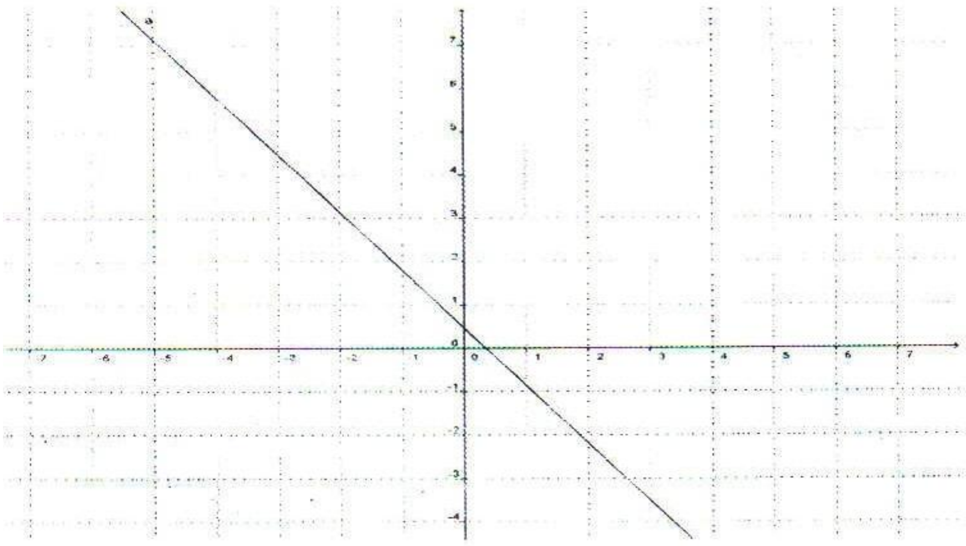
A aluna ZH da PUC Minas Betim fez um comentário:

> "Não consegui desenhar o gráfico por serem 3 incógnitas, mas representa em um sistema 3 dimensões alguns pontos que tenham seus x, y e z inteiros."

Resolução da aluna EF da UFVJM:



b) Não há solução com números inteiros:



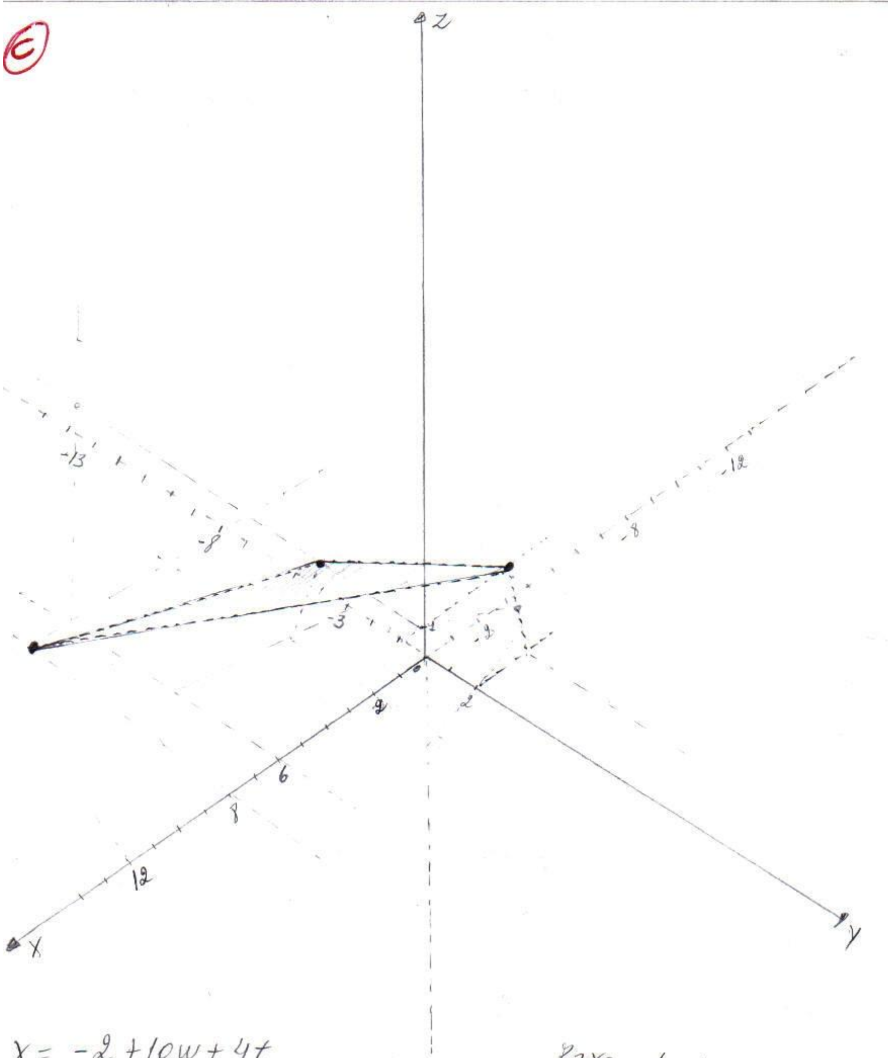
c) Não consegui um programa para fazer o gráfico 3D

d) Não há solução com números inteiros

O Aluno MR da UFVJM encontrou a solução geral da equação e atribuiu valores para t e w.

c

Marcos



$X = -2 + 10w + 4t$
$Y = 2 - 10w - 5t$ $\quad t, w \in \mathbb{Z}$
$Z = 1 - w$

Para $t = 1$ e $w = 0$

$\boxed{X = 2 \quad Y = -3 \quad Z = 1}$

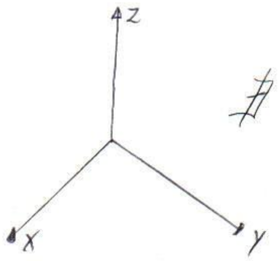
Para $t = 0$ e $w = 1$

$\boxed{X = 8 \quad Y = -8 \quad Z = 0}$

Para $t = 0$ e $w = 0$

$X = -2 \quad Y = 2 \quad Z = 1$

d



$\nexists$ solução em $\mathbb{Z}$ pois $mdc(15, 12, 30) \nmid 16$

ATIVIDADE IV:

Ela evidenciou a dificuldade do aluno na compreensão e resolução de um problema e na possibilidade da existência de mais de uma solução inteira de uma EDL.

ATIVIDADE IV

Alunos	E. I	E.II	E. III
DG	X	X	X
EF	X	X	-
KS	X	-	-
MB	X	X	X
MR	X	X	X
PG	X	X111	X

Quadro 27 – Alunos da UFVJM

Alunos	E. I	E.II	E. III
SP	X	-	-
VA	X	-	-
ZH	X	-	-

Quadro 28 – Alunos da PUC Minas Betim

O aluno VA da PUC Minas Betim resolveu por tentativa:

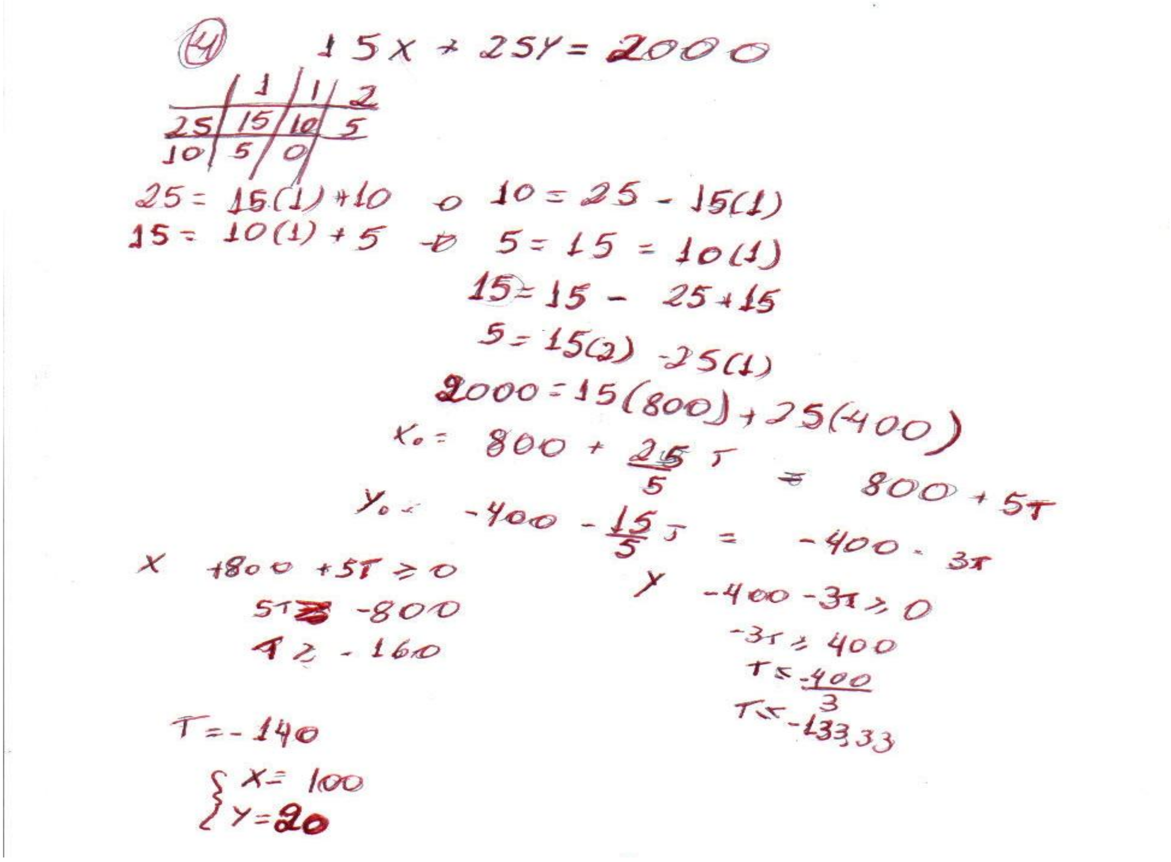
$15x + 25y = 2000$ ou $3x + 5y = 500$ soluções: (10,74); (30,62); (40,56); **(50,50)**

> "Encontrei essas e outras infinitas soluções e considerei as positivas, tendo em vista que no problema dado, o número de vezes que as máquinas precisam ser acionadas tem que ser natural."

A aluna ZH comentou:

> "Para encontrar algumas soluções para as equações de duas variáveis isolei o y e atribuí valores a x para calcular o y. Feito isso, tomei alguns pares, apenas inteiros como exemplo.
> Nessa tabelinha, observei que a sequência de x e de y inteiros que formavam uma PA, e seguindo essa idéia, consegui mais algumas soluções sem utilizar a tabela."

O aluno PG da UFVJM resolveu algebricamente:


(4) $15x + 25y = 2000$

	1	1	2
25	15	10	5
10	5	0	

$25 = 15(1) + 10 \rightarrow 10 = 25 - 15(1)$

$15 = 10(1) + 5 \rightarrow 5 = 15 = 10(1)$

$15 = 15 - 25 + 15$

$5 = 15(2) - 25(1)$

$2000 = 15(800) + 25(-400)$

$x_0 = 800 + \frac{25}{5}t = 800 + 5t$

$y_0 = -400 - \frac{15}{5}t = -400 - 3t$

$x \quad 800 + 5t \geq 0$; $5t \geq -800$; $t \geq -160$

$y \quad -400 - 3t \geq 0$; $-3t \geq 400$; $t \leq \frac{-400}{3}$; $t \leq -133,33$

$T = -140$

$\begin{cases} x = 100 \\ y = 20 \end{cases}$

ATIVIDADE V

Alunos	E. I	E.II	E. III
DG	X	X	X
EF	X	X	-
KS	X	-	-
MB	X	X	X
MR	X	X	X
PG	X	X112	X

Quadro 29: Alunos da UFVJM

Alunos	E. I	E.II	E. III
SP	X	-	-
VA	X	-	-
ZH	X	-	-

Quadro 30: Alunos da PUC Minas Betim

Observou-se que apenas 4 alunos atingiram as etapas, os outros se perderam no método formal ou nas tentativas, evidenciando a dificuldade na compreensão e resolução de um problema que envolve um sistema linear e se reduz numa equação Diofantina linear.

Vejamos a resolução do aluno MR da UFVJM:

5- $\begin{cases} x+y+z=100 & (I) \\ 50x+10y+z=500 & (II) \end{cases}$

$(II)-(I) \Rightarrow 49x+9y=400$

$49(10)+9(-10)=400$ $\quad mdc\{49,9\}=1$

$\begin{cases} x=10+9t; & t\in \mathbb{Z} \\ y=-10-49t; & t\in \mathbb{Z} \end{cases}$

$x\geq 0 \Rightarrow 10+9t\geq 0 \Rightarrow t\geq -1$

$y\geq 0 \Rightarrow -10-49t\geq 0 \Rightarrow t\leq -1$

$\Rightarrow \boxed{t=-1}$

$\begin{cases} x=1 \\ y=39 \\ z=60 \end{cases}$

O método das tentativas pode conduzir o aluno a cometer alguns erros. A aluna ZH da PUC Minas Betim teve a seguinte conclusão:

500x + 100 y + 10z = 5000 ou 50x + 10 y + z = 500
(2,33,70) ; (3,28,70) ; (8,1,90)

> “Montei uma tabela com algumas possíveis combinações positivas, mas não encontrei nenhuma que a soma dos coeficientes fosse igual a 100, que representa a quantidade de eletrodomésticos comprados. Então, para mim, nesse caso o problema não tem solução.”

ATIVIDADE VI

Alunos	E. I	E.II	E. III	E.IV	E. V
DG	X	X	X	X	X
EF	X	X	X	-	-
KS	X	-	-	-	-
MB	X	X	X	X	X
MR	X	X	X	X	X
PG	X	X	XX	X	X

Quaro 31 – Alunos da UFVJM

Alunos	E. I	E. II	E. III	E. IV	E. V
SP	X	-	-	-	-
VA	X	-	-	-	X
ZH	X	-	-	-	X

Quadro 32 – Alunos da PUC Minas Betim

Essa atividade denotou a dificuldade apresentada pelo aluno na construção formal das soluções inteiras da equação ax + by + cz = m, apenas 4 alunos encontraram uma única solução, não se preocupando em encontrar a outra, dois fizeram por tentativa usando o Excel. Vejamos o comentário da aluna ZH da PUC Minas Betim:

> "Nas equações de 3 variáveis deixei duas letras livres, ou seja, atribuí valores a duas para calcular a terceira. Fiz também algumas tabelas no Excel colocando fórmulas para ajudar nos cálculos."

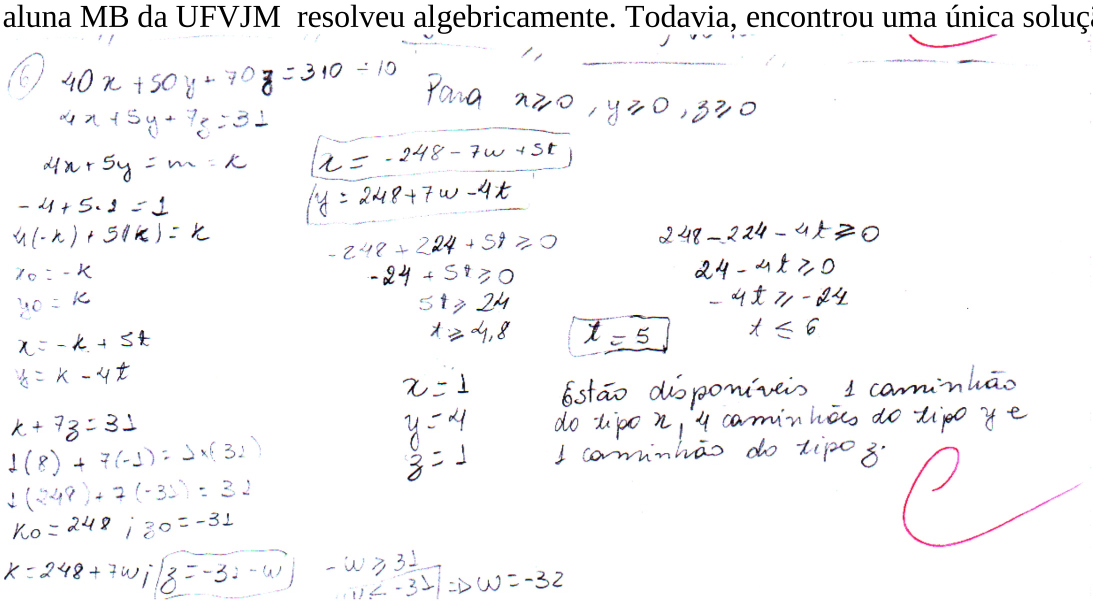
RESOLUÇÃO da Aluna ZH:

40x + 50y + 70z = 310 ou 4x + 5y + 7z = 31

(1,4,1) (2,6,-1) (3,8,-3)

Mas, para o problema dado, somente a primeira opção vai servir, pois é a única que contém todas as soluções positivas. Então, seriam 1 caminhão para transportar 40 unidades, 4 caminhões para 50 unidades e 1 caminhão para 70 unidades.

A aluna MB da UFVJM resolveu algebricamente. Todavia, encontrou uma única solução:


(6) $40x + 50y + 70z = 310 \div 10$
$4x + 5y + 7z = 31$
$4x + 5y = m = k$
$-4 + 5 \cdot 1 = 1$
$4(-k) + 5(k) = k$
$x_0 = -k$
$y_0 = k$
$x = -k + 5t$
$y = k - 4t$
$k + 7z = 31$
$1(8) + 7(-1) = 1 \times (31)$
$1(248) + 7(-31) = 31$
$k_0 = 248 ; z_0 = -31$
$k = 248 + 7w ; \boxed{z = -31 - w}$
$-w \geq 31$
$w \leq -31 \Rightarrow w = -32$
Para $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
$\boxed{x = -248 - 7w + 5t}$
$\boxed{y = 248 + 7w - 4t}$
$-248 + 224 + 5t \geq 0$
$-24 + 5t \geq 0$
$5t \geq 24$
$t \geq 4,8$
$248 - 224 - 4t \geq 0$
$24 - 4t \geq 0$
$-4t \geq -24$
$t \leq 6$
$\boxed{t = 5}$
$x = 1$
$y = 4$
$z = 1$
Estão disponíveis 1 caminhão do tipo x, 4 caminhões do tipo y e 1 caminhão do tipo z.
C

RESULTADOS E CONCLUSÕES:

Ficou evidenciada a evolução dos alunos na compreensão da existência e a infinidade de soluções inteiras de uma EDL após a visão geométrica conseguida pelos alunos no segundo bloco de atividades, com a utilização de softwares matemáticos tais como o geogebra, graphmatica, maple, winplot e outros.

Houve uma evolução na construção formal da solução geral de uma EDL com três incógnitas, mas a barreira na interpretação geométrica dessas soluções não foi atenuada.

O pesquisador concluiu que, assim como a maioria dos problemas resolvidos por Diofanto, quando o aluno encontra uma solução para o problema proposto, ele não se preocupa em discutir a existência de outras possíveis soluções.