

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Mariângela de Castro e Oliveira

**RESSIGNIFICANDO CONCEITOS DE GEOMETRIA PLANA A PARTIR DO
ESTUDO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

Belo Horizonte
2012

Mariângela de Castro e Oliveira

**RESSIGNIFICANDO CONCEITOS DE GEOMETRIA PLANA A PARTIR DO
ESTUDO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Dra Eliane Scheid Gazire

Belo Horizonte
2012

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

O48r Oliveira, Mariângela de Castro e
Ressignificando conceitos de geometria plana a partir do estudo de sólidos
geométricos / Mariângela de Castro e Oliveira. Belo Horizonte, 2012.
279f.: il.

Orientadora: Eliane Scheid Gazire
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Ensino-aprendizagem. 3. Geometria
sólida.. I. Gazire, Eliane Scheid. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas
Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III.
Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 513:373

Mariângela de Castro e Oliveira

**RESSIGNIFICANDO CONCEITOS DE GEOMETRIA PLANA A PARTIR DO
ESTUDO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Profa. Dra. Eliane Scheid Gazire (Orientadora) - PUC Minas

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda - PUC Minas

Profa. Dra. Lílian Nasser - UFRJ

Belo Horizonte, 23 de julho de 2012

A Deus, pelo dom da vida e pelas graças que recebo a cada dia.

Aos meus pais, por sempre confiarem na minha capacidade.

Ao Wagner, por ser o lugar onde sempre quero estar.

Ao Otávio e à Iara, por serem os meus maiores feitos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, de alguma forma, ajudaram-me no desenvolvimento deste trabalho, especialmente:

Aos meus pais e irmãos, por compreenderem a minha ausência nesses últimos anos em que me dediquei ao estudo e à pesquisa quase que em tempo integral.

Ao meu marido e filhos, pelo apoio incondicional, particularmente ao Otávio, pelo comprometimento e competência na diagramação da cartilha e à Iara pela presteza e eficiência na elaboração do “abstract”.

À Dra Eliane pela paciência, dedicação e incentivo nos nossos encontros de orientação, também por ter me inspirado o gosto pelo ensino de Geometria.

Aos professores do Mestrado: Dr. Dimas, Dra. Maria Clara e Dr. João Bosco por, juntamente com a Dra. Eliane, representarem a crença na possibilidade de se fazer uma educação de qualidade para todos.

Aos colegas do Mestrado, por me fazerem sentir novamente o prazer de sentar num “banco de escola”. Pela fé na profissão que abraçamos, pela seriedade, pela alegria e pela oportunidade de construir novas amizades.

Aos colegas e amigos do CAOB e da Fasar, pelo incentivo e apoio nas horas de sufoco.

Ao Adriano e ao Wallace, pelo carinho com que sempre me receberam nas reuniões de orientação.

Aos PhD J. Michael Shaughnessy e Zalman Usiskin pela colaboração imensurável e presteza no atendimento às minhas solicitações.

Aos meus queridos alunos do 2º MC, 2º ML/2010, 3º JB e 3º JS/2011 do Colégio Arquidiocesano de Ouro Branco, por terem sido os meus “sujeitos de pesquisa”, pela maturidade e respeito ao meu trabalho e, principalmente, pela amizade.

Se eu ouço, eu esqueço . . .
Se eu vejo, eu me lembro . . .
Se eu faço, eu compreendo . . .
(Confúcio, sec. VI AC)

RESUMO

Esta pesquisa, elaborada numa perspectiva qualitativa, buscou elucidar as razões pelas quais a relação ensino-aprendizagem dos sólidos geométricos, na 2ª série do Ensino Médio, quase sempre se dá de maneira pouco produtiva. Tendo em vista o fato de o Ensino Fundamental, a despeito das indicações dos PCN, não estar cumprindo, satisfatoriamente, o papel de promover nos alunos a construção dos conceitos básicos da geometria plana, propõe o desenvolvimento de práticas pedagógicas a serem conduzidas no Ensino Médio, visando ressignificar tais conceitos e criar oportunidades reais para uma aprendizagem com compreensão. Foi investigado, como sujeitos desta pesquisa quanto ao conhecimento prévio em geometria que possuía, um grupo de alunos das 2ª e 3ª séries do Ensino Médio de uma escola da rede particular de ensino e, a partir daí, foram definidos os conceitos geométricos a serem contemplados. Tendo a teoria de van Hiele como suporte, buscou-se avaliar o nível de raciocínio dos sujeitos e desenvolver uma proposta de ressignificação de conceitos básicos da Geometria Plana tendo o estudo dos sólidos geométricos como ponto de partida. O produto gerado por esta pesquisa dirigiu-se ao professor e se constituiu na formulação de uma cartilha, composta de cinco módulos instrucionais, cada um com várias atividades elaboradas especialmente para tratar conceitos geométricos definidos, com indicação dos níveis de van Hiele a que se adéquam e em conformidade com as fases sugeridas pelo modelo. A aplicação de atividades selecionadas de dois módulos dessa cartilha, seguida de uma nova avaliação dos sujeitos, permitiu a validação desta proposta pedagógica como ferramenta de produção de conhecimentos geométricos na sala de aula e para a sala de aula. Reforçou, ainda, a crença nas potencialidades da Teoria de van Hiele como um caminho teórico e metodológico promissor capaz sustentar um projeto consistente de ensino de geometria, integrando todos os segmentos da Educação Básica, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino de geometria. Teoria de van Hiele. Sólidos geométricos.

ABSTRACT

This research, conducted in a qualitative perspective, aimed to elucidate the reasons why the teaching-learning relationship of geometric solids, conducted on the second year of secondary education, is often poorly productive. Given the fact that the elementary education, despite the PCN indications, has not accomplished in a satisfactory manner its role on promoting on students the construction of the basic concepts of Plane Geometry, the development of new pedagogical practices to be conducted on secondary education is proposed, with the purpose of resignifying those concepts and creating real opportunities for a learning experience with true comprehension. A group of students from the second and third years of secondary education of a private school were investigated as this research' subjects, in terms of their previous knowledge on geometry and, from that, the geometric concepts to be contemplated were defined. Having the van Hiele Theory as a support, the level of reasoning of the subjects was evaluated and a proposal of a resignification of the basic concepts of Plane Geometry was developed, having the study of geometric solids as a starting point. The product of this research was addressed to the teacher and it consists on the formulation of a Primer, composed by five instructional modules, each of them containing activities specially elaborated to deal with the defined geometric concepts, presenting the van Hiele indication levels in which they are suited, according to the phases suggested by the model. The application of the selected activities of two modules of this Primer, followed by a new assessment of the subjects, allowed the validation of the pedagogical proposal as a tool for the production of geometry knowledge in the classroom and for the classroom. It reinforced, also, the belief on the van Hiele Theory potential as a promising theoretical and methodological way of learning, capable of sustaining a consistent project of geometry teaching, integrating all the segments of basic school, from pre-primary education to secondary education.

Key-words: Geometry teaching. Van Hiele Theory. Geometric solids.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 — A continuidade dos níveis de van Hiele	57
FIGURA 2 — Exemplo de questão testando o nível 1	73
FIGURA 3 — Exemplo de questão testando o nível 2	73
FIGURA 4 — Exemplo de questão testando o nível 3	74
FIGURA 5 — Exemplo de questão testando o nível 4	74
FIGURA 6 — Exemplo de questão testando o nível 5	75
FIGURA 7 — Módulo 3/Atividade 3: material preparado pela professora.....	98
FIGURA 8 — Módulo 3/Atividade 3: grupo de alunos do 3º JB	99
FIGURA 9 — Fragmento da ficha de registro de observações da atividade “Nome & Figura” para o quadrado.....	100
FIGURA 10 — Fragmento da ficha de registro de observações da atividade “Nome & Figura” para o retângulo.....	100
FIGURA 11 — Fragmento da ficha de registro de observações da atividade “Nome & Figura” para o losango.....	101
FIGURA 12 — Módulo 3/Atividade 5 : material preparado pela professora	103
FIGURA 13 — Ficha de registro de observações da atividade “Quem é e por quê?”	103
FIGURA 14 — Módulo 3/Atividade 5: “Discussão dos porquês”	104
FIGURA 15 — Módulo 3/Atividade 5: ficha de registro de observações (3º JS).....	106
FIGURA 16 — Módulo 4/Atividade 2: grupo de alunos do 3º JB.....	108
FIGURA 17 — Cartaz e tiras de propriedades confeccionadas pela professora.....	111
FIGURA 18 — Módulo 4/Atividade 3: grupo de alunos do 3º JS	112
FIGURA 19 — Módulo 4/Atividade 3: socialização de experiências (aluno do 3º JS).....	113
FIGURA 20 — Módulo 4/Atividade 3: quadro-síntese: propriedades dos quadriláteros (aluno do 3º JB).....	115
FIGURA 21 — Módulo 4/Atividade 4: classificação inicial dos quadriláteros	117
FIGURA 22 — Módulo 4/Atividade 4: quadrados, retângulos e losangos juntando-se aos paralelogramos	118
FIGURA 23 — Módulo 4/Atividade 4: quadrados juntando-se aos retângulos.....	119
FIGURA 24 — Módulo 4/Atividade 4: a inclusão de classes do 3º JS.....	120
FIGURA 25 — Módulo 4/Atividade 4: a inclusão de classes do 3º JB.....	121

(continuação)

FIGURA 26 — Módulo 4/Atividade 5: cartaz com as figuras totalmente cobertas e totalmente descobertas	123
FIGURA 27 — Módulo 4/Atividade 5: ficha de registro de possibilidades (reprodução parcial).....	123
FIGURA 28 — Atividade 5 / Módulo 4 - ficha de registro de possibilidades	125
FIGURA 29 — Desenhos do aluno E	134

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Conceitos geométricos abordados nas questões do TS-CBGP.....	63
QUADRO 2 – Conceitos geométricos que se mostraram deficientes para pelo menos 40% dos alunos	71
QUADRO 3 – Sumário da cartilha	86
QUADRO 4 – Ícones, nomes e significados	88
QUADRO 5 – Descrição da atividade 3/módulo 3	97
QUADRO 6 – Descrição da atividade 5/módulo 3	102
QUADRO 7 – Descrição da atividade 2/módulo 4	107
QUADRO 8 – Descrição da atividade 3/módulo 4	110
QUADRO 9 – Descrição da atividade 4/módulo 4.....	116
QUADRO 10 – Descrição da atividade 5/módulo	122

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – TS-CBGP / rendimento por aluno - 2º MC	64
GRÁFICO 2 – TS-CBGP / rendimento por aluno - 2º ML	65
GRÁFICO 3 – TS-CBGP / rendimento por questão - 2º MC e 2º ML	65
GRÁFICO 4 – Enquadramento nos níveis de van Hiele - 2º MC e 2º ML.....	79
GRÁFICO 5 – Enquadramento nos níveis de van Hiele por turma.....	80
GRÁFICO 6 – Percentual de acertos no TVH, por questão (2ºMC e 2ºML)	82
GRÁFICO 7 – Percentual de acertos no TVH, por questão (3ºJB e 3ºJS)	127
GRÁFICO 8 – Níveis de van Hiele - 1º TVH.....	129
GRÁFICO 9 – Níveis de van Hiele - 2º TVH.....	129
GRÁFICO 10 – Níveis de van Hiele após reenquadramento.....	139

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Relação entre conceito avaliado e % de acertos - TS-CBGP.....	66
TABELA 2 – Correspondência entre os níveis de van Hiele e a Soma Ponderada	77
TABELA 3 – Classificação dos sujeitos de acordo com os níveis de van Hiele	78
TABELA 4 – Piores e melhores desempenhos no TS-CBGP X Níveis de van Hiele	83
TABELA 5 – Percentual de acertos médios por nível de van Hiele nos TVH aplicados.....	128
TABELA 6 – Percentual de enquadramento nos dois TVH aplicados	130
TABELA 7 – Composição da soma ponderada dos alunos de nível “indefinido” - tipo I..	131
TABELA 8 – Composição da soma ponderada dos alunos de nível “indefinido” - tipo II..	131
TABELA 9 – Níveis de van Hiele - após reenquadramento.....	138

LISTA DE SIGLAS

CDASSG - Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry

EG - Entering Geometry Test

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

FAE - Formulário de Análise de Entrevista

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

MEC - Ministério da Educação

MMM - Movimento da Matemática Moderna

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

PNLD - Programa Nacional do Livro Didático

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

TS-CBGP - Teste de Sondagem - Conceitos Básicos de Geometria Plana

TVH - Teste de van Hiele

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	31
2. O PERCURSO DA PESQUISA	36
2.1 O Caminho Trilhado	40
2.1.1 <i>A concepção metodológica da pesquisa</i>	40
2.1.2 <i>A seleção do referencial teórico</i>	41
2.1.3 <i>A definição dos conceitos básicos de geometria plana a serem ressignificados</i>	43
2.1.4 <i>Uma avaliação quantitativa do conhecimento prévio e do nível de pensamento em geometria dos sujeitos de pesquisa</i>	44
2.1.5 <i>A elaboração das atividades e a formatação da cartilha</i>	44
2.1.6 <i>A aplicação das atividades e sua análise</i>	45
3. A TEORIA DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE	47
3.1 Propriedades do modelo	48
3.2 Os níveis de van Hiele	51
3.2.1 <i>Nível 1: Reconhecimento (ou Visualização)</i>	51
3.2.2 <i>Nível 2: Análise</i>	51
3.2.3 <i>Nível 3: Dedução informal</i>	52
3.2.4 <i>Nível 4: Dedução formal</i>	53
3.2.5 <i>Nível 5: Rigor</i>	53
3.3 As fases de aprendizagem	53
3.4 As características da teoria de van Hiele	55
3.5 Críticas à teoria de van Hiele	56
4. A AVALIAÇÃO DO CONHECIMENTO PRÉVIO E DO NÍVEL DE PENSAMENTO EM GEOMETRIA DOS SUJEITOS DE PESQUISA	59
4.1 O contexto	59
4.2 Os sujeitos	61
4.3 Os instrumentos	61
4.3.1 <i>Teste de Sondagem - Conceitos Básicos de Geometria Plana (TS-CBGP)</i>	61
4.3.2 <i>Teste de van Hiele (TVH)</i>	71
4.4 Considerações sobre possíveis relações entre os dois testes	82
5. A CARTILHA	85
5.1 Os módulos instrucionais	87
5.1.1 <i>Módulo 1 - Conhecendo o universo tridimensional</i>	89
5.1.2 <i>Módulo 2 - A coexistência dos dois universos: o bi e o tridimensional</i>	90
5.1.3 <i>Módulo 3 - Formas bidimensionais - identificação e definição</i>	91
5.1.4 <i>Módulo 4 - Formas bidimensionais - classificação</i>	92
5.1.5 <i>Módulo 5 - Formas bidimensionais - outros conceitos</i>	93
5.2 As atividades complementares	94
6. A APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E SUA ANÁLISE	96
6.1 Relatos das atividades e análise das aplicações	97
6.2 Avaliando os níveis de van Hiele dos sujeitos de pesquisa após a aplicação das atividades	126

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	140
REFERÊNCIAS.....	145
APÊNDICES.....	151
<i>Apêndice A – Cartilha: Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de van Hiele.....</i>	<i>153</i>
<i>Apêndice B – Relação entre as questões propostas no TS-CBGP e o(s) conceito(s) geométrico(s) que devem ser ressignificados antes (ou durante) do estudo dos sólidos geométricos.....</i>	<i>209</i>
<i>Apêndice C – Descrição dos conceitos envolvidos nas questões do teste de sondagem e análise das respostas assinaladas</i>	<i>210</i>
<i>Apêndice D – Descrição dos conceitos envolvidos nas questões do teste de van Hiele e análise das respostas assinaladas.....</i>	<i>214</i>
ANEXOS.....	221
<i>Anexo A – Descritores de níveis de van Hiele e exemplos de respostas dos alunos.....</i>	<i>223</i>
<i>Anexo B – TS-CBGP - Teste de Sondagem - Conceitos Básicos de Geometria Plana</i>	<i>237</i>
<i>Anexo C – TVH - Teste de van Hiele</i>	<i>243</i>
<i>Anexo D – E-mails de solicitação e permissão para a utilização do TS-CBGP e do TVH.....</i>	<i>251</i>
<i>Anexo E – Roteiro das entrevistas clínicas para a avaliação do nível de van Hiele dos sujeitos de pesquisa</i>	<i>253</i>
<i>Anexo F – Formulários de análise das entrevistas clínicas (FAE)</i>	<i>264</i>
<i>Anexo G – E-mails de solicitação e permissão para a utilização dos roteiros das entrevistas clínicas.....</i>	<i>278</i>

1. INTRODUÇÃO

Confesso que a relação ensino-aprendizagem de geometria nem sempre me inquietou. Ao iniciar minha carreira como professora de matemática, no final da década de 90, ministrei aulas nas séries do Ensino Fundamental por apenas dois anos. A escola em que trabalhei era referência em qualidade na comunidade e o material didático utilizado era produzido pela própria rede de ensino a qual ela era afiliada. Não só o material pedagógico utilizado, mas todo o projeto pedagógico era, segundo a minha restrita e ingênua perspectiva de educadora em início de carreira, inquestionável.

Logo a seguir, passei a ministrar aulas para as turmas do Ensino Médio daquela mesma escola e, para o meu espanto, quando, nas turmas de 2º Ano o conteúdo “Geometria dos Sólidos” era introduzido, sentíamos (todos os meus colegas de área e eu) que o conhecimento geométrico adquirido no Ensino Fundamental deixava muito a desejar. A partir daí, dispus-me a estudar a relação ensino-aprendizagem de geometria, sendo este, inclusive, o tema das pesquisas que realizei em cursos de pós-graduação.¹

Esse primeiro contato com a pesquisa sobre a geometria e o seu ensino passou a nortear a minha prática pedagógica, sendo que a busca de alternativas didáticas capazes de auxiliar na introdução ao estudo dos “Sólidos Geométricos”, (in)conscientemente se sobrepunha. Se os conceitos de geometria plana que deveriam ter sido construídos no ensino fundamental não ficaram sedimentados da forma como se esperava e se esses conceitos são essenciais para o estudo dos sólidos geométricos, o que fazer para resgatá-los?

Há alguns anos venho “experimentando” práticas pedagógicas de caráter investigativo nas minhas aulas de introdução à geometria dos sólidos, usando materiais manipulativos construídos por mim e pelos próprios alunos – modelos de sólidos feitos em madeira, isopor ou papel. Tenho, também, tentado explorar esse tipo de prática nas aulas reservadas à revisão de geometria plana, desenvolvendo atividades que envolvam planificações e a reconstrução de sólidos geométricos. Essa tentativa de não desvincular a geometria plana da geometria dos sólidos desperta um pouco mais o interesse dos alunos pelo fato de a segunda ser uma novidade para eles e, apesar de essas práticas não serem aplicadas de maneira sistematizada, os resultados sempre são muito positivos.

¹ “A Geometria através de Projetos: a Pedagogia de Projetos construindo o conhecimento lógico-geométrico”, desenvolvida no Programa de Especialização em Matemática - Unigranrio/RJ, em 2000 e “A Geometria no Ensino Fundamental”, desenvolvida no Programa de Especialização em Educação Matemática - Uni-BH/MG, em 2001.

Comecei, então, a aproveitar todas as oportunidades que surgiam e a participar de encontros, seminários, congressos etc de educação matemática, pois acreditava que o contato com especialistas da área me conduziria a trabalhos prontos e a práticas de ensino testadas e eficazes. Encontrei pouca coisa pronta, mas aprendi algo que mudou completamente a concepção que eu tinha de educação e justificava, em princípio, a minha inquietude diante das insistentes tentativas de trabalhar uma geometria com produção de significado: “sem fundamentação teórica, não há prática pedagógica que se sustente”.

A consciência da necessidade e a busca de uma fundamentação teórica que embasasse as minhas práticas aumentaram o meu interesse pela leitura. Pesquisas relacionadas à maneira como o processo ensino-aprendizagem de geometria é influenciado pelo contexto social, filosófico, psicológico e pedagógico que intervém no sistema educativo passaram a fazer parte do meu universo enquanto docente. A psicologia da educação matemática, discutindo as interações entre a matemática e o pensamento humano, tornou-se um importante objeto de estudo.

Tudo o que se relacionava aos processos pelos quais os alunos elaboram os seus conhecimentos, bem como a identificação de mecanismos do pensamento num contexto educacional, com o objetivo de compreender como se dá a apreensão de conceitos matemáticos, passou a ter uma relevância maior nos meus estudos.

Em 2008, ao iniciar o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, já trazia comigo a certeza de que a relação ensino-aprendizagem de geometria seria o tema da pesquisa que iria desenvolver. O reencontro com a Profa. Dra. Eliane Scheid Gazire, que havia orientado a minha pesquisa “A geometria no ensino fundamental”, já citada, veio a reforçar todas as minhas crenças na possibilidade de realização de um trabalho de pesquisa consistente e bem fundamentado teoricamente.

No decorrer do curso, a ideia de trabalhar com sólidos geométricos foi se firmando, pois eu trabalhava com turmas do 2º ano do Ensino Médio e, apesar de estar sempre à procura de metodologias eficazes que promovessem uma aprendizagem significativa, o sentimento era de que as coisas podiam ser melhores, pois muitos desses alunos chegavam ao 3º ano do Ensino Médio com uma bagagem de conceitos geométricos muito aquém do desejado. Assim, era natural que eu me questionasse: por que aquelas aulas, supostamente bem elaboradas, nas quais eu usava uma considerável diversidade de metodologias, não atingia os seus objetivos? Onde estava a raiz ou, pelo menos, o foco do problema?

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) a construção do pensamento geométrico deve ocorrer ao longo da Educação Básica e a geometria não deve ser

considerada um conteúdo estanque, independente, separado da matemática. A geometria seria, na verdade, um elemento que ajuda a estruturar o pensamento matemático e o raciocínio dedutivo, permitindo ao estudante examinar, estabelecer relações e compreender o espaço onde vive. Tem-se, nesse conteúdo, um campo fértil para se trabalhar com situações-problemas, despertando naturalmente o interesse dos alunos e conduzindo-os a uma aprendizagem reflexiva e significativa. (GAZIRE, 1988).

Apesar de todo o potencial da Geometria, as pesquisas de Gazire (2000), Pavanello (1989) e Perez (1991) sobre o abandono do seu ensino no Ensino Fundamental e Médio, no Brasil, apontam para a fragilidade e ineficiência desse ensino nos dois segmentos. A importância dada a esta disciplina pelos órgãos oficiais, no Ensino Fundamental, não corresponde ao que se vê nas salas de aula onde, infelizmente, a álgebra é claramente priorizada. Os trabalhos geométricos são desenvolvidos de maneira desvinculada das outras áreas, além de ser, via de regra, o último conteúdo a ser desenvolvido, correndo até mesmo o risco de não ser abordado, por falta de tempo. Segundo Pavanello:

Esse costume de programar a geometria para o final do ano letivo é, de certo modo, reforçado pelos livros didáticos que, pelo que pude observar, abordam esse tema quase sempre por último, dando a impressão de que esta é a programação mais conveniente. (PAVANELLO, 1989, p.6)

Neste cenário em que se coloca o ensino de geometria, o que se observa é um aprendizado falho, fragmentado, pontual e descontextualizado. A constatação de que o Ensino Fundamental não tem atendido aos pressupostos e objetivos traçados para o ensino desse conteúdo justifica, em parte, a falta de conhecimento dos conceitos geométricos elementares apresentada pelos alunos do Ensino Médio. Atualmente, várias propostas de reversão desse quadro constituem o objeto de estudo de diversos pesquisadores. Bertonha (1989), Lujan (1997), Facco (2003) e Lauro (2007) discutem propostas direcionadas ao Ensino Fundamental que buscam amenizar os reflexos negativos que esse processo de ensino tem deixado no Ensino Médio.

Reconhecemos que este é um primeiro passo para sanar as deficiências constatadas, mas não resolve, no entanto, o problema de quem já cursou o Ensino Fundamental e está sofrendo, agora, as consequências daquele ensino “sofrível”.

Com base nesses aspectos ocorreram-me as seguintes questões de pesquisa:

- a) *Como (res)significar, nas aulas de geometria dos sólidos, conceitos básicos de geometria plana, que deveriam ter sido construídos no Ensino Fundamental?*

- b) *Que aporte teórico poderia sustentar uma proposta de (res)significação desses conceitos?;*
- c) *Como desenvolver práticas pedagógicas que favoreçam a construção do conhecimento geométrico e resgatem a crença nas potencialidades da Geometria como instrumento de desenvolvimento de indivíduos criativos, capazes de selecionar, assimilar, processar, interpretar e conferir significações aos estímulos que o mundo lhe oferece?*

A partir desses questionamentos, surgiu a proposta de uma pesquisa qualitativo-empírica, a ser realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio, buscando avaliar que conhecimento geométrico esses alunos trazem em sua bagagem acadêmica, como e em que nível ele foi adquirido. Esta pesquisa estaria fundamentada nos pressupostos de van Hiele (1986) que deram origem à “Teoria do desenvolvimento do pensamento em geometria” e nas pesquisas atuais sobre os processos de ensino-aprendizagem de geometria que se apoiam, também, na referida teoria.

A ideia inicial era que, com base na análise dos dados obtidos por meio de testes que avaliassem o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos sujeitos de pesquisa, pudéssemos elaborar uma sequência didática com atividades capazes de estimulá-lo e elevá-lo. Durante a análise do material bibliográfico disponível sobre a elaboração de atividades exploratórias capazes de promover esse desenvolvimento, deparamo-nos com um sério problema para o professor que pretende abraçar essa causa: a carência desse material. Sentimo-nos sem apoio diante da quase que inexistência de referências que atendessem aos nossos propósitos e percebemos que o professor, sujeito responsável pela elaboração, avaliação e adequação de todo o material a ser usado, precisava mais da nossa atenção do que o próprio aluno.

Desta forma, o produto dessa pesquisa, que seria uma sequência didática elaborada tendo como foco a adequação, a receptividade e a promoção dos mecanismos de compreensão do aluno, passou a ser visto sob uma nova perspectiva: a do professor.

Após muita discussão e reflexão sobre a mudança no enfoque da construção da sequência didática, optamos por ela e decidimos criar uma **cartilha** com diversas “sequências didáticas” que servisse de apoio ao professor no momento da elaboração e aplicação das mesmas. Este material seria desenvolvido com o propósito de servir de suporte ao professor interessado em trabalhar com a teoria de van Hiele e seria composto de atividades direcionadas aos três primeiros níveis, com sugestões de questionamentos capazes de

enriquecê-las e propostas diferenciadas de abordagem, além de possíveis adequações na condução dessas atividades.

A cartilha deveria trazer, ainda, uma breve descrição do Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele a fim de elucidar os princípios que o sustentam. Isso daria ao professor os subsídios necessários para fazer uso das atividades sugeridas com liberdade e autonomia, uma vez que todas elas poderiam ser modificadas e/ou adaptadas para atender às particularidades de cada turma. Acreditamos que este suporte teórico, seguido das atividades sugeridas, trará ao professor uma maior segurança didática e a confiança de que seu trabalho tem o respaldo de uma teoria de ensino-aprendizagem confiável e reconhecida internacionalmente.

Desta forma, no primeiro semestre de 2010, após vários meses de pesquisa, preponderantemente bibliográfica, que nos conduziu a um valioso contato direto com dois dos mais renomados pesquisadores da teoria de van Hiele, J. Michael Shaughnessy e Zalman Usiskin, demos início a este trabalho que foi organizado em sete capítulos e, resumidamente, podem ser descritos como segue:

No primeiro capítulo, é feita uma apresentação sucinta do tema, das questões de pesquisa levantadas e do produto final pretendido neste trabalho, além de uma breve descrição de cada capítulo.

No segundo capítulo, o percurso da pesquisa é apresentado, destacando a metodologia utilizada e todo o caminho trilhado.

No terceiro capítulo, destacamos a base teórica do nosso trabalho, apresentando a Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele, suas características e propriedades, além de algumas críticas consideradas relevantes.

O quarto capítulo trata da análise quantitativa do conhecimento prévio dos sujeitos de pesquisa e do seu nível de pensamento em geometria. Discorre sobre os instrumentos usados para a coleta de dados, desde a sua concepção e aplicação até a análise dos resultados obtidos.

No quinto capítulo apresentamos o processo de elaboração do produto final da nossa pesquisa — a cartilha “**Ressignificando a geometria plana no ensino médio, com o auxílio de Van Hiele**”.

O sexto capítulo narra a nossa experiência didática de aplicação de algumas atividades da cartilha aos sujeitos de pesquisa, seguida de sua avaliação e análise de resultados.

No sétimo capítulo, apresentamos, a partir de análises feitas durante todo o trabalho realizado, as nossas considerações finais, observações e sugestões.

Por fim, apresentamos a cartilha produzida, no apêndice A.

2. O PERCURSO DA PESQUISA

As pesquisas em Educação Matemática envolvendo o ensino de geometria nas escolas brasileiras, conduzidas nas duas últimas décadas, destacam, de maneira quase que unânime, o descaso com que essa disciplina tem sido tratada nos nossos currículos escolares. Pereira (2001), traz um amplo material sobre esse assunto e teve como objeto de estudo o levantamento das pesquisas brasileiras sobre o ensino de geometria. Constata-se, nesta dissertação, que a maioria dos trabalhos analisados tinha como interesse de pesquisa investigar as causas do abandono do ensino de geometria, fenômeno esse registrado não só no Brasil, mas em outros países. Com este enfoque, destacamos as pesquisas de Pavanello (1989), Perez (1991) e Gazire (2000).

Uma análise desse abandono, numa perspectiva histórica, mostra que a Educação Matemática viveu, nos anos 60, uma situação altamente conflitante. Sob a influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM), a geometria trabalhada no Ensino Fundamental e Médio era, essencialmente, dedutiva. Osvaldo Sangiorgi, um dos mais renomados autores de livros didáticos de Matemática da época, destacava:

O nosso primeiro contato consciente com a Geometria – denominada *intuitiva* ou *experimental* – foi no Curso primário. A observação e a experiência foram, nesse tempo, os meios empregados para realçar as propriedades relativas à forma e à extensão dos corpos. Agora, numa fase mais avançada, em que a Geometria passa a estudar estas mesmas propriedades dos corpos, fazendo uso somente da razão, recebe o nome de *dedutiva* ou *racional* e o objetivo da Geometria dedutiva fica sendo, precisamente, o de *estudar as propriedades geométricas dos corpos por meio de um encadeamento lógico de raciocínios*. (SANGIORGI, 1964, p.89).

As práticas educativas adotadas na época se restringiam a cumprir os objetivos estabelecidos: iniciavam-se com a apresentação dos axiomas e, a partir daí, propriedades e teoremas eram enunciados e demonstrados. Ao final de cada tópico, uma lista de exercícios de fixação era proposta, sem espaço para explorações e investigações.

Segundo Pavanello (1989), com o MMM, as propostas modernizadoras para o ensino de matemática apresentadas nos livros didáticos publicados no Brasil a partir da década de 1960 centraram-se na utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Essa tendência, embora pudesse facilmente se adequar à álgebra e à aritmética, não se prestou de forma positiva ao ensino da geometria.

A proposta de um trabalho sob o enfoque das estruturas fez com a geometria fosse desenvolvida por planos vetoriais ou por transformações, esta segunda a partir da antiga 7ª série do 1º grau, tarefa para a qual os nossos professores não estavam preparados.

A orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela maioria dos professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra – mesmo porque, como a Matemática Moderna fora introduzida através desse conteúdo, enfatizara sua importância. A Lei 5692/71, por sua vez, facilita este procedimento ao permitir que cada professor adote seu próprio programa de acordo com as necessidades da clientela. (PAVANELLO, 1989, p. 164-165)

Assim, pelo fato de o professor limitar-se a trabalhar apenas com a aritmética e as noções de conjuntos, o aluno deixou de aprender geometria no 1º grau. Somente no 2º grau a geometria era abordada, mas ainda de forma preponderantemente axiomatizada e formal, sem o menor sentido para o aluno. O desenho geométrico foi substituído pela educação artística e as figuras geométricas e suas representações deixaram de ser relevantes. Com a qualidade do ensino comprometida, as escolas, principalmente as públicas, passam a viver um lamentável processo de deterioração. (PAVANELLO, 1989).

Segundo Silva (2007), muitos atribuem ao MMM a responsabilidade pelo abandono da geometria nas salas de aula após a década de 60, culpando-o pelos problemas decorrentes do ensino de geometria nas últimas décadas do século XX. Como não é do nosso interesse levar adiante essa discussão, vamos nos ater às propostas de reversão desse quadro, como convêm mais aos nossos objetivos.

Neste sentido, sob a influência dos impactos causados pelo MMM, vão se enriquecendo as discussões sobre novas abordagens didáticas do ensino de geometria. Os Congressos Nacionais de Ensino de Matemática passam a destacar o problema e buscar possíveis soluções. As propostas visavam, de maneira geral, “simplificar o estudo da geometria dedutiva, reduzindo o número de teoremas a serem demonstrados e à inclusão da geometria experimental ou da demonstração intuitiva”. (SILVA, 2008, p.74).

A partir dos anos 70, as pesquisas de cunho metodológico buscam explorar o caráter dinâmico da geometria, contrariando o seu status de disciplina de conteúdo fixo e sem espaço para a criatividade. Segundo Andrade e Nacarato (2005), nesta época, o ideário empírico-ativista ganha força nas produções da época, com metodologias de ensino que se pautavam em atividades visando à ação, manipulação e experimentação. Grupos de estudos sobre essa

temática se consolidaram e propostas interessantes começaram a aparecer. (SILVA, 2007, 2008); (BURIGO, 1989).

Já nas décadas de 80 e 90, a resolução de problemas é assumida como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática, sendo o problema o desencadeador ou gerador de um processo de construção do conhecimento. Por se tratar de uma metodologia que se adéqua tanto à geometria tanto quanto à álgebra, teve grande repercussão no meio acadêmico. Segundo Gazire (1988), a resolução de problemas e suas potencialidades poderia ser considerada sob a seguinte perspectiva: “Se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido”. (GAZIRE, 1988, p.124)

Nesse contexto, as práticas de caráter investigativo ganham espaço e a aprendizagem com compreensão passa a ser o objetivo dos novos pesquisadores. Discussões sobre a promoção dessa compreensão e os fatores que podem afetá-la tornam-se o objeto de estudo de diversos especialistas da área. Nasser (1992), por exemplo, critica a ausência de práticas pedagógicas que privilegiem a manipulação de materiais e de dispositivos que ressaltem o aspecto dinâmico da geometria, alertando para os prejuízos da eliminação dos trabalhos de desenho geométrico com construções que exijam o manuseio de régua e compasso. Para a pesquisadora, esse tipo de trabalho é essencial para a compreensão dos atributos definidores das propriedades das figuras geométricas e promove a construção de muitos conceitos considerados essenciais para o desenvolvimento do raciocínio geométrico do aluno. Seus trabalhos, como integrante da equipe de pesquisa do Projeto Fundação IM/UFRJ, baseados na teoria de van Hiele, buscam explorar o potencial das práticas manipulativas. (NASSER, 1997).

O fato de o ensino da geometria na educação escolar ter sido, durante anos, relegado a um plano secundário, sendo notoriamente preterido em favor do ensino da aritmética e da álgebra deixou marcas significativas. O baixo desempenho dos alunos da escola básica em tarefas envolvendo conceitos e resolução de problemas no campo da geometria é destacado como fator de preocupação, principalmente se considerarmos que o trabalho com as figuras geométricas planas deveria ser desenvolvido desde a Educação Infantil. Pirola (1995, 2000) destaca o lamentável fato de os alunos terminarem o Ensino Fundamental sem o conhecimento conceitual de figuras geométricas básicas, como triângulo, quadrado, paralelogramo e losango.

Assim, com uma bagagem geométrica precária, adquirida de forma mecanizada, através da memorização de alguns poucos conceitos e muitas fórmulas, o aluno chega ao

Ensino Médio e se vê diante do desafio de estudar os sólidos geométricos. Desafio para ele e para o seu professor que sabe o quanto a falta dos conceitos básicos da geometria plana, a consolidação de conceitos mal formados ou formados de forma equivocada, pode interferir na aquisição de novos conceitos e, conseqüentemente, na sua aprendizagem.

Diante desse quadro, a formação significativa dos conceitos básicos de geometria plana, capaz de dar ao aluno do Ensino Médio o suporte necessário para um bom desenvolvimento dos estudos relativos à geometria dos sólidos tornou-se, também, uma preocupação dos autores de livros didáticos. Segundo Nasser & Tinoco (2004), especialmente na última década, há uma forte tendência em relação às atividades que envolvem processos de inferência, análise, argumentação, tomada de decisões, críticas e validação de resultados. Para a pesquisadora, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) exerce uma ação positiva sobre essa tendência e, hoje, muita coisa interessante tem sido produzida.

Percebe-se, no entanto, que muitos desses livros², alguns deles usados por milhares de alunos nas mais diversas instituições de ensino, tenta suprir essa lacuna com um capítulo dedicado a uma “Revisão de Geometria Plana” que, normalmente, antecede o(s) capítulo(s) relacionado(s) à geometria dos sólidos. Muitas vezes, somente uma lista de definições e fórmulas é colocada à disposição do aluno como se a compreensão daqueles conceitos fosse um fato consumado.

Sempre observei certa resistência por parte de alguns dos meus alunos quando lhes era proposta uma revisão dos conceitos geométricos elementares considerados indispensáveis e necessários à compreensão de alguns elementos presentes na geometria dos sólidos. Alguns, em princípio, não se motivavam nem com a introdução de práticas manipulativas, pelo simples fato de estarmos fazendo uma “revisão de conteúdo”, sob a alegação de que “se é revisão é porque já sabemos e ver de novo algo que já julgamos dominar não é nada interessante”.

Numa perspectiva mais realista, alguns autores buscam abolir o enfoque revisional dessa empreitada e tomam essa atividade como um resgate de significados de conteúdos, num momento propício e oportuno. Dante (2008) afirma que essa retomada é imprescindível, pois os alunos encontram-se, nesse momento, mais amadurecidos pessoal e matematicamente.

² • *Matemática: Ciência e Aplicações*. v.2, de Gelson Iezzi e outros. São Paulo: Atual, 2006. — *O capítulo Áreas de Figuras Planas antecede o capítulo Geometria Espacial de Posição*.

• *Matemática Aula por Aula*, v.2, de Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva. São Paulo, 2005. — *O capítulo Geometria Espacial se inicia com o item Tópicos de Geometria Plana*.

• *Matemática: uma nova abordagem*, v.2, de J. R. Giovanni, J.R. Bonjorno. São Paulo: FTD, 2001. — *Uma breve “Revisão de Geometria Plana” é feita na introdução ao capítulo Geometria dos Sólidos*.

Na sua nova coleção para o Ensino Médio, “*Matemática – contexto e aplicações*”, Dante aborda, no capítulo 12 (geometria plana) do livro da 1ª série do Ensino Médio, alguns conceitos básicos já estudados no Ensino Fundamental, porém agora aprofundados, preparando os alunos para etapas posteriores. Consideramos positiva esta proposta, primeiro por abordar o tema em livros de séries distintas, deixando para a 2ª série/EM a motivação inerente ao novo conteúdo (geometria dos sólidos) e, segundo, porque os diversos tópicos da geometria plana são abordados de maneira integrada e contextualizada, visando uma formação significativa de conceitos e não uma simples revisão de conteúdo.

Mesmo assim, para muitos alunos, essa abordagem ainda é insuficiente para garantir uma aprendizagem com compreensão e esta deficiência é transferida, quase que automaticamente, ao estudo dos sólidos geométricos, que acaba por seguir o mesmo padrão de ensino aplicado à geometria plana, de memorização e aplicação imediata de fórmulas.

Acreditando nas potencialidades da Teoria de Desenvolvimento do Pensamento em Geometria, de van Hiele, que, além de nos permitir avaliar o nível de raciocínio do aluno, faz indicações de procedimentos a serem aplicados no desenvolvimento de atividades capazes de promover a evolução desse aluno, optamos por produzir uma **cartilha**, para uso do professor. Esta cartilha seria composta de módulos de atividades especialmente elaboradas com o objetivo de levar o aluno a ressignificar alguns conceitos básicos da geometria plana a partir do estudo dos sólidos geométricos.

A título de esclarecimento, o relato anterior foi feito na primeira pessoa do plural, em respeito à parceria entre esta autora e sua professora orientadora. Nos parágrafos que seguem, quando o trabalho for em conjunto, será mantida a mesma postura.

2.1 O Caminho Trilhado

Até que o produto final dessa pesquisa se configurasse, passamos por diversas etapas de trabalho, algumas previamente planejadas e outras decorrentes de questionamentos que foram surgindo. Não nos afastamos do nosso objetivo inicialmente traçado, apenas mudamos o enfoque dado ao produto final, conforme será descrito a seguir.

2.1.1 A concepção metodológica da pesquisa.

Trata-se de uma pesquisa empírica que, segundo Gil (1991), pode ser classificada, em princípio, como qualitativa no que diz respeito à forma de abordagem, considerando que,

durante grande parte do nosso trabalho, procuramos estabelecer uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, ou seja, procuramos analisar o vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que, muitas vezes, não pode ser traduzido em números. Muitos dados foram analisados intuitivamente, embora embasados em descritores formalmente estabelecidos e amplamente utilizados.

Embora o foco da pesquisa fosse de cunho qualitativo, em alguns momentos, mesclamos o uso de práticas qualitativas com práticas quantitativas, a fim de nos posicionarmos com mais precisão frente aos caminhos a serem seguidos na busca do nosso objetivo.

Dessa forma, metodologicamente, podemos dizer que esta pesquisa constituiu-se de quatro grandes etapas: revisão bibliográfica; avaliação dos níveis de raciocínio dos sujeitos de pesquisa; elaboração das atividades que constituiriam a **cartilha** a ser produzida e, finalmente, aplicação e avaliação de dois módulos instrucionais propostos nesta última. Estas etapas serão descritas sumariamente a seguir e algumas delas, pela relevância no contexto da pesquisa, constituirão capítulos próprios desta dissertação.

2.1.2 A seleção do referencial teórico.

Ao darmos início a este trabalho, buscamos nos aproximar das pesquisas mais recentes envolvendo a relação ensino-aprendizagem de geometria no Brasil e em alguns países nos quais a Teoria de van Hiele estivesse sendo aplicada com certa regularidade.

No Brasil, muitas delas têm como tema o abandono do ensino de geometria nas nossas escolas, seja numa perspectiva histórico-política ou metodológica. Destacam-se as dissertações de mestrado de Pavanello (1989) e Pereira (2001) e a tese de doutorado de Gazire (2000).

Focadas mais no desenvolvimento de práticas pedagógicas que resgatem o potencial da geometria como agente emancipador, capaz de desenvolver no aluno uma capacidade de raciocínio aplicável além dos muros escolares, temos as dissertações de Chiummo (1998), Vianna (2000), Arbach (2002), Facco (2003), Tojo (2006), Silva Filho (2007), Secco (2007), Lauro (2007) e Luna (2009).

A leitura de todas essas pesquisas nos encaminhou para um referencial teórico mais específico sobre o nosso tema e nos conduziu aos trabalhos que utilizavam a teoria de van Hiele como aporte teórico. Destacamos desta feita, as dissertações de mestrado de Lujan

(1997), Rezi (2001), Moraco (2006) e Chiele (2007) e a tese de doutorado de Nasser (1992), que muito nos ajudaram na elaboração das nossas atividades.

Ressaltamos a relevância, para o nosso estudo, das outras obras consultadas da Profa. Lílian Nasser, referência brasileira em estudos sobre a geometria e a teoria de van Hiele, dentre elas, Nasser (1995), Nasser (1997) e Nasser (2004).

Algumas pesquisas conduzidas fora do Brasil também nos foram muito úteis, não só pela abordagem privilegiando a adoção da Teoria de van Hiele, mas também por nos servir de referência durante a análise do comportamento dos nossos alunos. Destacamos as dissertações de mestrado de Pusey (2003) e Genz (2006) desenvolvidas nos Estados Unidos e a tese de doutorado de Atebe (2008), da África do Sul.

Após esse período de leitura e análise de teses e dissertações, já tínhamos indicações suficientes do nosso referencial teórico. Além da tese de doutorado do mentor da teoria pesquisada, van Hiele (1957), e do livro que a apresenta para estudiosos americanos, van Hiele (1986), os trabalhos de dois outros grandes pesquisadores americanos embasaram nosso trabalho: Prof. Zalman Usiskin, da Universidade de Chicago e J. Michael Shaughnessy, presidente do NCTM (*Nacional Council of Teachers of Mathematics*) na gestão 2010-12.

Buscamos em Usiskin (1982) os testes de múltipla escolha utilizados na avaliação do conhecimento prévio e do nível de raciocínio dos alunos, em geometria. O primeiro teste foi parcialmente adaptado para atender aos nossos objetivos e o segundo aplicado na íntegra.³

De artigos de Burger & Shaughnessy (1985, 1986), publicados em revistas especializadas americanas, conseguimos listas de descritores dos diversos níveis de van Hiele e sugestões de atividades dirigidas a níveis específicos. Após a troca de alguns e-mails discorrendo sobre a nossa pesquisa e seus objetivos, o Prof. J. Michael Shaughnessy, gentilmente, enviou-nos, via Correios, os roteiros das entrevistas realizadas durante a realização da pesquisa *Characterizing the van Hiele levels of development in Geometry*, Burger & Shaughnessy (1986), que deram origem aos já citados descritores, com sugestões de aplicação e recomendações de uso.

Destacamos, ainda, em nosso referencial teórico Crowley (1994), Hoffer (1981), Jaime e Gutiérrez (1990) e Fuys e outros (1988). Esses dois últimos grupos de autores foram especialmente importantes para a elaboração das atividades que compõem a nossa **cartilha**.

³ Ambos foram reproduzidos mediante a autorização do autor, com o qual mantivemos contatos diretos via e-mail (ver anexo D).

2.1.3 A definição dos conceitos básicos de Geometria Plana a serem ressignificados.

Como os sujeitos de pesquisa eram alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular onde a coleção *Matemática – Contexto e Aplicações*, de Luis Roberto Dante, é utilizada, fizemos uma breve análise dos livros da 1ª e 2ª séries daquele segmento para definir que conceitos básicos de geometria plana seriam exigidos no estudo dos sólidos geométricos.

Ao contrário de muitos outros livros didáticos, não existe no livro da 2ª série do Ensino Médio a tradicional “Revisão de Geometria Plana” que sempre aparece no capítulo que antecede aquele que introduz os sólidos geométricos. A abolição do caráter revisional da geometria plana parece ser uma estratégia pedagógica e a opção de dedicar dois últimos capítulos do livro da 1ª série do Ensino Médio a esse conteúdo tem o objetivo de preparar os alunos para a trigonometria no círculo e para a geometria dos sólidos que virá no ano seguinte. Segundo o autor, a retomada desses conteúdos, nesse momento, em que os alunos estão mais amadurecidos é essencial para o bom desempenho dos mesmos.

Infelizmente, alguns professores da 1ª série/EM não julgam ser necessária essa retomada da geometria no final daquela série, por serem tratados conceitos vistos no ano anterior, quando eles estavam no 9º ano/EF. No nosso caso, os referidos capítulos não são abordados na 1ª série/EM e os alunos vão para a próxima série com um nível de conhecimento dos conceitos básicos da geometria plana muito baixo.

Após analisar os livros das duas séries, elegemos como possíveis itens a serem tratados na nossa pesquisa os seguintes conceitos:

- a) Ângulos (*definição; tipos; ângulos formados por duas paralelas e uma transversal; etc.*);
- b) Polígonos (*tipos; elementos; nomenclatura; soma de ângulos internos e externos; polígonos regulares; etc.*);
 - Triângulos (*classificação; propriedades; soma dos ângulos internos; semelhança e congruência; segmentos e pontos notáveis; etc.*);
 - Quadriláteros (*paralelogramos e suas propriedades - retângulo, losango e quadrado; trapézio e suas propriedades; etc.*);
- c) Semelhança de figuras planas;
- d) Teorema de Pitágoras e suas aplicações;
- e) Posição relativa de duas retas;
- f) Circunferência / círculo (*definição; partes; ângulos; etc.*);

g) Perímetros/ áreas (*razão de semelhança entre áreas; etc.*).

A escolha definitiva dos itens a serem contemplados nas atividades de ressignificação de conceitos foi feita posteriormente, após a análise de um teste de sondagem aplicado aos alunos para avaliar que conhecimento eles traziam do Ensino Fundamental.

2.1.4 Uma avaliação quantitativa do conhecimento prévio e do nível de pensamento em geometria dos sujeitos de pesquisa

Após fazermos uma pré-eleição dos conceitos geométricos básicos a serem ressignificados, sentimos a necessidade de checar essa escolha. Optamos pela aplicação de um teste de sondagem, abordando todos os conceitos sob pesquisa, através do qual pudéssemos avaliar o conhecimento prévio do nosso aluno nesta área. As etapas de construção, aplicação e análise deste teste, ao qual nos referiremos como **Teste de Sondagem - Conceitos Básicos de Geometria Plana (TS-CBGP)** no decorrer deste trabalho, serão descritas no capítulo 4.

Aplicamos, também, outro teste, denominado **Teste de van Hiele - (TVH)**, agora com o propósito de enquadrar os nossos sujeitos de pesquisa num dos níveis de van Hiele, para posterior tomada de decisões quanto às atividades a serem desenvolvidas. Nos mesmos moldes do TS-CBGP, o TVH será descrito, juntamente com o primeiro, no capítulo 4.

2.1.5 A elaboração das atividades e a formatação da Cartilha.

A ideia de organizar, ao final deste trabalho, uma cartilha que servisse de apoio ao professor da 2ª série do Ensino Médio ao abordar o tema “geometria dos sólidos” surgiu no curso desta pesquisa. Como já foi dito na introdução deste trabalho, a ideia inicial era construir uma sequência didática a ser trabalhada pelo aluno que, apesar de estar sob a orientação do seu professor, seria o protagonista daquele processo/metodologia. Durante o desenvolvimento dos trabalhos, porém, quanto mais nos aprofundávamos na teoria de van Hiele, mais percebíamos a importância do papel do professor no processo de ensino-aprendizagem de geometria.

A teoria de van Hiele consegue explicar, com argumentos bem justificados, a razão pela qual muitos alunos não conseguem alcançar uma aprendizagem com compreensão. Propõe, ainda, uma metodologia de ensino capaz de promover a evolução do pensamento desses aprendizes baseada num sistema de instruções e/ou experiências elaboradas pelo

professor, especificamente para aquele fim. Por que, então, não produzirmos um material que sirva ao aluno, mas que contemple, oriente e seja especialmente direcionado ao professor?

As atividades, algumas já rascunhadas, buscavam contemplar os conceitos básicos de geometria plana eleitos em nossa pesquisa para serem ressignificados, mas eram direcionadas ao aluno, com pouco espaço para uma possível intervenção do professor. Essas atividades foram, então, reestruturadas de modo que a sua formatação facilitasse a sua utilização imediata pelo professor e permitisse, quando necessário, possíveis adaptações de forma a se adequarem aos níveis de pensamento trabalhados.

Ao final da etapa de elaboração das atividades, decidimos organizá-las em cinco “módulos instrucionais”, apresentados de forma sequencial, de modo a promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos de forma natural.

Tanto a sequência dos módulos, quanto das atividades dentro de cada módulo, obedece aos princípios da teoria de van Hiele. Iniciam-se com atividades que buscam fornecer ao professor subsídios para classificar seus alunos segundo os cinco níveis de pensamento de van Hiele e, a seguir, propõem atividades capazes de favorecer o desenvolvimento de determinadas habilidades e competências que levam os alunos a transitarem de um nível para o nível seguinte, sempre em consonância com as fases de aprendizagem propostas por van Hiele.

Este material, organizado como exposto, constituiu-se na proposta do nosso produto final: uma *cartilha* para uso do professor intitulada: “*Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de van Hiele*”, apresentada no apêndice A.

2.1.6 A aplicação das atividades e sua análise.

Com a proposta da cartilha em mãos, tornou-se fundamental a aplicação de alguns de seus módulos instrucionais, a fim de podermos avaliar a sua funcionalidade como proposta metodológica, a sua praticidade enquanto instrumento facilitador do trabalho do professor e, finalmente, o seu impacto sobre a progressão do nível de pensamento dos alunos que trabalharam segundo a sua orientação.

Os sujeitos de pesquisa, por razões óbvias, foram os mesmos avaliados no início do nosso trabalho com os testes TS-CBGP e TVH. A análise desses testes determinou a escolha dos módulos a serem aplicados.

Pela análise feita inicialmente, existe uma grande concentração de alunos naquelas duas turmas operando no nível 2 de van Hiele. Optamos, então, por aplicar os módulos 3 e 4

que propõem um número maior de atividades condizentes com o nível de pensamento daqueles alunos, além de estimulá-los a evoluir para o nível 3.

Logo após a aplicação dos dois módulos de atividades selecionados, passamos à avaliação daquele instrumento através de observações feitas durante a execução de cada atividade e de uma nova avaliação do nível de pensamento de cada aluno.

Utilizamos o mesmo TVH, descrito e usado anteriormente, por ser um teste confiável e de fácil controle. Além do mais, o tempo decorrido entre a aplicação dos dois testes e o fato de não termos permitido aos alunos que permanecessem com o caderno de questões, nos deixou numa posição confortável quanto à confiabilidade do seu resultado.

Desta vez, para os casos em que não houve enquadramento do aluno em nenhum dos níveis existentes, lançamos mão de outro instrumento — entrevistas clínicas — elaborado e utilizado por Burger e Shaughnessy (1986)⁴. Autorizadas pelos autores, utilizamos o roteiro de tais entrevistas que consistiam, basicamente, na aplicação de tarefas experimentais sobre triângulos e quadriláteros e na avaliação de todo o processo de resolução das mesmas. As entrevistas foram realizadas por esta pesquisadora, individualmente, e gravadas (apenas áudio). Os alunos tinham à sua disposição papel, lápis, régua e compasso para justificar suas respostas e os dados para análise consistiu das fitas de áudio, dos desenhos dos alunos e das minhas anotações. A lista de descritores dos níveis de van Hiele que acompanha o roteiro seguido facilitou a análise do processo de pensamento e da estrutura da linguagem dos alunos, permitindo-nos enquadrá-los devidamente.

O reenquadramento de, praticamente, todos os nossos sujeitos de pesquisa e a análise das observações e registros efetuados durante a aplicação das atividades da cartilha encerra esta etapa do nosso trabalho. Algumas mudanças/adaptações que se mostraram necessárias foram feitas na estrutura das atividades e na organização dos módulos instrucionais, bem como sugestões relativas à aplicação e acompanhamento das mesmas.

⁴ Entrevistas clínicas utilizadas na pesquisa “Characterizing the van Hiele levels of development in geometry” para a investigação dos níveis de van Hiele de alunos do 1º ao 12º grau, em escolas de três estados americanos, durante cerca de três anos.

3. A TEORIA DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE

A teoria de van Hiele consiste num modelo de aprendizagem que descreve o pensamento geométrico dos alunos ao evoluírem de uma simples percepção holística de formas geométricas até uma refinada compreensão de provas e demonstrações geométricas. Fundamenta-se na existência de uma estreita relação entre o desenvolvimento mental, as mudanças cognitivas dos alunos e as experiências educacionais vivenciadas por eles.

Os holandeses Pierre M. van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof desenvolveram esta teoria a partir das frustrações tanto deles como de seus alunos vivenciadas na relação ensino-aprendizagem de geometria. P.M. van Hiele explica que a dificuldade dos seus alunos em aprender geometria era tão grave que ele se sentia como se estivesse falando uma língua diferente. Afirma ainda que, apesar de sua insistente procura por formas diferentes de explicar os conteúdos geométricos, a dificuldade persistia:

Quando eu comecei minha carreira como professor de Matemática, logo me dei conta de como era difícil essa profissão. Havia partes do conteúdo que eu podia explicar e explicar e, ainda assim os alunos não entendiam. Eu podia ver que eles realmente tentavam, mas não obtinham sucesso. Especialmente, no começo da Geometria, quando coisas simples tinham que ser provadas, eu podia ver que eles se esforçavam ao máximo, mas o assunto parecia ser muito difícil. (VAN HIELE, 1986, p.39).

Seguiram-se, então, as pesquisas sobre a aprendizagem matemática, o papel da compreensão em geometria e a busca por metodologias capazes de garantir um ensino com compreensão de significados. Os trabalhos de pesquisa do casal iniciaram-se no final dos anos 50 e a dificuldade apresentada por seus alunos em atividades que envolviam o desenvolvimento e a utilização de habilidades geométricas foi tema de todos eles, inclusive dos trabalhos de doutoramento de ambos, concluídos na Universidade de Utrecht em 1957.

Estudos sobre a aquisição da compreensão à luz de diversas psicologias de aprendizagem e de pensamento levaram os van Hiele a considerar a existência de diferentes níveis de pensamento sobre conceitos geométricos, sugerindo que os estudantes passam por vários níveis de pensamento no seu progresso, desde o mero reconhecimento de formas geométricas até serem capazes de construir provas geométricas formais.

Segundo Nasser (1992), embora os trabalhos de Dina van Hiele-Geldof tenham tido uma indiscutível relevância na obra do casal, seu falecimento precoce, pouco tempo após a publicação dos mesmos, fez com que seu esposo, Pierre Marie van Hiele, conduzisse todo o

processo de desenvolvimento e reformulação da chamada “**Teoria de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele**” que, neste trabalho, será exposta tendo como base a sua obra *Structure and insight*, escrita em 1986, e os textos de Crowley (1994), Fuys e outros (1988), Usiskin (1982) e Jaime e Gutierrez (1990).

Lujan (1997) descreve como van Hiele fundamentou a sua teoria na psicologia da Gestalt e em uma base estruturalista, considerando, no seu desenvolvimento, aspectos da didática da Matemática. Ao contrário da teoria de Piaget, que define faixas de idade aproximada para níveis de desenvolvimento cognitivo, os níveis de van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico não dependem da idade ou maturidade biológica do indivíduo, mas sim da instrução ou estímulo recebido. Dessa forma, as práticas pedagógicas, os materiais utilizados e os conteúdos propostos tornam-se elementos essenciais no processo ensino-aprendizagem de geometria e devem ser cuidadosamente selecionados, elaborados e/ou adaptados de forma a respeitar os níveis de raciocínio dos alunos.

De acordo com Hoffer (1981), na década de 60, a teoria de van Hiele atraiu muito a atenção dos soviéticos que reformularam o currículo de geometria de suas escolas com base nos seus pressupostos, mas, por outro lado, ficou praticamente desconhecida na maioria dos países ocidentais por quase vinte anos. O idioma em que foi escrito — holandês — pode ter dificultado a sua divulgação.

Nos anos 70, dois grandes nomes da Educação Matemática, reconhecidos internacionalmente, chamaram a atenção para o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele: o Prof. Isaak Wirszup, da Universidade de Chicago e Hans Freudenthal, professor dos van Hiele na Universidade de Utrecht. A partir daí, o interesse pela pesquisa dos van Hiele tornou-se cada vez maior, com autores americanos traduzindo e divulgando os seus principais trabalhos.

Atualmente, como destaca van de Walle (2009), a teoria de van Hiele se tornou o elemento mais influente no currículo norte-americano de geometria e de diversos outros países, estando presente em inúmeras pesquisas relacionadas ao ensino-aprendizagem de geometria.

3.1 Propriedades do modelo

A teoria que dividiu o desenvolvimento do pensamento em geometria em níveis originou-se em sala de aula, aliando diversos aspectos do ensino e de acordo com Jaime e Gutiérrez (1990), o modelo de van Hiele se apoiava nos pressupostos expostos a seguir:

- a) Podemos encontrar diferentes níveis de pensamento nos estudantes de Matemática;
- b) Um aluno só poderá compreender um conteúdo matemático se este lhe for apresentado de maneira adequada ao seu nível de pensamento;
- c) Se uma relação matemática não pode ser expressa no nível atual de pensamento dos alunos, então é conveniente esperar que eles atinjam o nível superior desejado para apresentá-la;
- d) Não se pode ensinar uma pessoa a raciocinar de uma determinada forma, mas é possível ajudá-la, mediante uma didática adequada, a atingir tal forma de raciocínio. (JAIME; GUTIÉRREZ, 1990, p.305, tradução nossa).

Segundo o modelo original de van Hiele, as pessoas desenvolveriam o pensamento geométrico, de acordo com cinco níveis, enumerados de 0 a 4. Atendendo às críticas dos pesquisadores americanos sobre a relevância do nível zero, no qual se enquadram a maioria dos alunos que iniciam o Ensino Médio⁵, P.M. van Hiele escreveu, em 1986, o livro “Structure e Insight”, propondo uma simplificação do modelo original, com os níveis enumerados de 1 a 5 e descritos por nomes:

- a) Nível 1 – reconhecimento ou visualização;
- b) Nível 2 – análise;
- c) Nível 3 – dedução informal;
- d) Nível 4 – dedução formal;
- e) Nível 5 – rigor.

Muito embora o objetivo de van Hiele fosse o estudo da geometria, o seu modelo pode ser aplicado a outros tópicos de ensino. Basicamente e, focando o ensino de conteúdos geométricos, pode-se afirmar que quatro características especiais definem tal modelo:

- a) os níveis de pensamento geométrico de van Hiele são sequenciais: os alunos devem passar por todos os níveis precedentes até chegar a um nível específico;
- b) estes níveis independem da idade do aluno, diferentemente do que propõe a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget;
- c) experiências geométricas diversificadas, dentro ou fora da sala de aula, têm uma grande influência no avanço de um nível para outro;
- d) instruções e linguagem em um nível mais alto do que o do aluno podem inibir a aprendizagem.

⁵ Nos Estados Unidos corresponde aos iniciantes da High School (9th grade).

Van Hiele (1986) destaca esta última característica como sendo uma das principais causas de fracasso no ensino. Quando a comunicação entre professor e aluno, sobre um determinado assunto, processa-se em níveis diferentes, cria-se um ambiente propício a induzir os alunos a imitarem as estruturas de ação do professor. Conseqüentemente, acredita-se num sucesso que é momentâneo, mas que não traduz a compreensão do conteúdo. A partir daí, toda a continuidade do processo de aprendizagem fica comprometida.

Uma das maiores dificuldades em se aplicar o modelo de van Hiele está no enquadramento dos alunos dentro dos cinco níveis especificados. É claro que este deve ser o ponto de partida de qualquer experiência no sentido de se ensinar geometria à luz das ideias de van Hiele. Uma vez definido o nível do aluno, passa-se ao desenvolvimento das atividades que lhe serão apresentadas que, estando em perfeita sintonia com tal nível, poderão promover o desenvolvimento do raciocínio geométrico daquele aluno.

Assim, torna-se essencial uma busca por descritores⁶ dos níveis de van Hiele que sejam sucintos, claros e que, principalmente, forneçam ao pesquisador/avaliador, os meios necessários para enquadramento dos alunos de forma segura e confiável.

Fuys e outros (1988) expõem em seu trabalho, uma grande preocupação em desenvolver descritores comportamentais específicos para cada nível. Uma revisão de diversos trabalhos do casal van Hiele, particularmente a dissertação de Dina van Hiele-Geldof, permitiu-lhes localizar passagens específicas relacionadas a cada nível, dando-lhes subsídios para a criação de uma lista de descritores próprios. Com isso, os autores criaram uma versão operacional do modelo, avaliada e aprovada pelo próprio P. M. van Hiele e, posteriormente, por Alan Hoffer e William Burger, dois outros pesquisadores dos níveis de van Hiele. Essa nova versão contém, em cada nível, além dos descritores gerais, alguns exemplos de atividades específicas ou respostas dos alunos a algumas atividades e, dentre todas as descrições dos cinco níveis de pensamento de van Hiele, expostas nas diversas pesquisas a que tivemos acesso, essa pareceu-nos a mais esclarecedora.

No anexo A apresentamos os descritores comportamentais para os níveis de van Hiele, segundo Fuys e outros (1988). Para cada nível, um descritor geral precede uma lista de descritores específicos e são acompanhados de alguns exemplos de respostas de alunos durante entrevistas clínicas idealizadas por Burger e Shaughnessy (1986) – ver anexo E.

⁶ Neste caso, um descritor é o detalhamento de uma habilidade cognitiva que está sempre associada a um conteúdo que o aluno deve dominar, de acordo com o seu nível de raciocínio. Os descritores devem ser expressos da forma mais detalhada possível, de forma a permitir a mensuração do nível do aluno por meio de aspectos comportamentais observáveis.

3.2 Os níveis de van Hiele

Com o objetivo de sedimentar o conceito de “nível de pensamento geométrico” tal como idealizado por van Hiele e, buscando sempre associar cada um deles ao comportamento apresentado pelo aluno durante a execução das atividades propostas, apresentamos, a seguir, uma breve descrição de cada um deles, seguida de sugestões de atividades compatíveis ao nível de raciocínio do aluno que opera naquele nível considerado.

3.2.1 *Nível 1: Reconhecimento (ou Visualização)*

Os alunos são capazes de reconhecer e nomear as figuras geométricas, mas o fazem apenas pela sua “aparência”, mostrando-se incapazes de identificar alguma propriedade das mesmas. Apesar de serem capazes de reconhecer algumas características das figuras, não conseguem se valer delas para reconhecer ou classificar as figuras sob análise.

Sugestões para atividades usando o *reconhecimento* ou *visualização*:

- a) separar, identificar e descrever figuras geométricas;
- b) manipular modelos físicos;
- c) observar diferentes tamanhos e posições de uma mesma figura geométrica de modo a distinguir as características da mesma e os aspectos que não são relevantes;
- d) construir, desenhar, fazer, juntar e separar figuras.

3.2.2 *Nível 2: Análise*

Os alunos começam a identificar as propriedades das figuras geométricas e aprendem a utilizar um vocabulário apropriado, relacionado com essas propriedades. No entanto, são incapazes de fazer correlações entre propriedades, não veem inter-relações entre figuras e não entendem definições. (CROWLEY, 1994). Neste nível, características irrelevantes, como o tamanho ou a orientação, tornam-se menos importantes e os alunos são até capazes de configurar uma classe figuras. Eles conseguem pensar sobre as propriedades apresentadas por um retângulo, mas não conseguem vê-lo como um paralelogramo, por exemplo.

Sugestões para atividades usando a *análise*:

- a) ir além da simples identificação de objetos para as propriedades que eles apresentam, através do uso de modelos concretos ou virtuais para definir, medir, observar e alterar propriedades;
- b) usar modelos e/ou tecnologias com foco na definição de propriedades, elaboração de listas de propriedades e discussão das condições suficientes para se definir uma figura;
- c) trabalhar com a resolução de problemas, incluindo tarefas nas quais as propriedades das figuras são componentes importantes;
- d) classificar usando as propriedades das figuras.

3.2.3 *Nível 3: Dedução Informal*

Os alunos são capazes de estabelecer relações entre propriedades de uma figura ou classe de figuras, indicando que a inclusão de classes já é compreendida neste nível. São, também, capazes de acompanhar argumentos informais numa demonstração, mas não conseguem criar uma nova prova partindo de premissas diferentes.

Sugestões para atividades usando a *dedução informal*:

- a) trabalhar com a resolução de problemas, incluindo tarefas nas quais as propriedades das figuras são componentes importantes;
- b) usar modelos e listas de propriedades; discutir que grupo de propriedades constitui uma condição necessária e suficiente para se definir uma figura;
- c) usar uma linguagem dedutiva informal: “todo”, “alguns”, “nenhum”, “se – então”, “e se”, etc.;
- d) investigar certas relações entre polígonos para estabelecer se a recíproca é também verdadeira (por exemplo: “se um quadrilátero é um retângulo, ele deve ter quatro ângulos retos; se um quadrilátero tem quatro ângulos retos, ele deve ser também um retângulo?”);
- e) utilizar modelos e desenhos (incluindo softwares de geometria dinâmica) como ferramentas para procurar generalizações e contraexemplos;
- f) levantar e testar hipóteses;

- g) usar propriedades para definir uma figura ou determinar se uma dada figura está incluída numa dada classe.

Embora os alunos normalmente não atinjam os níveis 4 e 5 até o ensino médio ou superior, apresentaremos uma breve descrição dos mesmos. Todo professor deve estar, pelo menos, ciente da sua existência.

3.2.4 *Nível 4: Dedução Formal*

Os alunos vão além de identificar as características das figuras geométricas e são capazes de construir provas usando postulados ou axiomas e definições. Um curso de geometria de nível superior deveria ser ministrado nesse nível.

3.2.5 *Nível 5: Rigor*

Este é o nível de pensamento mais elevado na hierarquia de van Hiele. Alunos, neste nível, podem trabalhar em diferentes sistemas geométricos ou axiomáticos e, provavelmente, estariam matriculados num curso de nível superior em geometria

3.3 As fases de aprendizagem

O modelo de van Hiele é composto de duas partes: a primeira, totalmente descritiva, apresentada no item anterior, procura explicar como se processa a evolução do raciocínio geométrico dos alunos através da descrição dos *níveis de pensamento* identificados; a segunda, prescritiva, dá indicações de como um professor pode ajudar o seu aluno a alcançar um nível superior de raciocínio.

Segundo Jaime e Gutierrez (1990), a segunda parte do modelo considera os aspectos pedagógicos do ensino e compõe-se de cinco “fases de aprendizagem” que podem ser vistas como passos a serem seguidos pelo professor para auxiliar seus alunos no trânsito entre os níveis. Os dois pesquisadores destacam, ainda, o papel do professor como elemento fundamental na preparação, orientação e execução de práticas que promovam a ascensão de um nível inferior para um mais elevado, mediante instruções adequadas.

As fases de aprendizagem propostas por van Hiele são cinco:

- a) **informação:** os alunos experimentam um primeiro contato com o conteúdo a ser trabalhado. O professor apresenta materiais e informações sobre eles, dando ao aluno a oportunidade de adquirir conhecimentos básicos indispensáveis ao trabalho matemático propriamente dito. Por outro lado, o professor aproveita a oportunidade para se informar sobre o conhecimento prévio dos alunos no que se refere ao assunto tratado;
- b) **orientação dirigida:** os alunos, devidamente orientados pelo professor, executam tarefas simples que lhes permitem explorar as relações implícitas dos elementos trabalhados. As tarefas devem ser cuidadosamente preparadas de modo que os novos conceitos e estruturas possam ser assimilados de forma progressiva e efetiva, já que servirão de base para o nível superior;
- c) **explicação:** o professor deve estimular seus alunos a expressarem suas descobertas e a participar de diálogos em que a defesa ou contestação de ideias próprias ou de outros impulse novas descobertas. Iniciam-se, assim, os trabalhos de desenvolvimento de uma linguagem técnica específica. A utilização de termos técnicos e de uma simbologia própria deve promover uma boa comunicação entre o grupo e uma consolidação dos conceitos adquiridos na fase anterior;
- d) **orientação livre:** nesta fase, propõem-se aos alunos tarefas mais complexas, onde todo o conhecimento já adquirido deverá ser posto em prática. Tais tarefas devem fugir aos padrões e modelos tradicionais, podendo ter mais de uma forma de resolução, o que exigirá do aluno um bom domínio da rede de relações já estabelecida, capacidade de raciocinar, investigar e deliberar sobre as melhores estratégias de solução;
- e) **integração:** tudo o que foi trabalhado nas fases anteriores, o conhecimento adquirido, as habilidades e competências desenvolvidas deve, nessa fase, passar por processo de “sedimentação”. O professor deve estimular o aluno a ter uma visão global de tudo o que aprendeu, estabelecendo uma nova rede de relações mentais, mais ampla, mais abrangente e capaz de lhe servir de base para o novo nível a que pretende ascender. A redação de um resumo de tudo o que foi aprendido pode ser uma boa forma de reflexão e integração de conceitos. “No final da quinta fase os alunos alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizagem no nível seguinte” (CROWLEY, 1994, p.8).

Vemos que, segundo a teoria de van Hiele, os estudantes progredem de um nível para o próximo, como resultado da instrução proposital, planejada e organizada nessas cinco fases, por meio de atividades seqüenciadas que enfatizam a exploração, a discussão e a integração dos saberes adquiridos.

3.4 As características da Teoria de van Hiele

Se buscarmos entender o que há de especial na teoria de van Hiele, encontraremos quem a defenda simplesmente pelo seu carácter único de ser tanto uma teoria de aprendizagem como uma teoria de instrução. Bruner (1974) distingue duas categorias educacionais:

a) a teoria de aprendizagem (ou de desenvolvimento intelectual) que é de natureza descritiva e se atém ao que aconteceu ou o que pode se esperar que aconteça. Descreve as atividades mentais das crianças em determinadas idades ou fases de seu desenvolvimento intelectual, mas não prescreve procedimentos para o ensino dessas atividades;

b) a teoria instrucional que, por outro lado, tem carácter prescritivo e deve abordar os princípios para o procedimento mais eficaz no que diz respeito ao ensino/aprendizagem de fatos, habilidades, conceitos e princípios. Assim, dentro dessa teoria estão prescritos processos e estratégias para a consecução dos objetivos da instrução.

A teoria de van Hiele, considerando a descrição dos níveis de pensamento geométrico, é uma teoria de aprendizagem (descritiva), enquanto que, considerando o desenvolvimento das fases instrucionais que buscam auxiliar o trabalho do professor, é uma teoria instrucional (prescritiva). Se uma boa teoria da educação é aquela que consegue tratar tanto da aprendizagem quanto do ensino, então a teoria de van Hiele tem o seu espaço garantido dentre elas.

Usiskin (1982) afirma que a capacidade da teoria de van Hiele para descrever e prever o comportamento dos alunos e, também, para prescrever os procedimentos para a obtenção dos níveis de pensamento são atributos importantes para qualquer teoria que pretende se estabelecer como científica, ao contrário de teorias que são meramente especulativas. Para Usiskin (1982), a teoria de van Hiele possui três características marcantes, as quais ele denominou e descreveu como:

a) elegância: atributo relacionado à estrutura bastante simples da teoria. O movimento de um nível para o outro segue os mesmos princípios básicos, exibindo a elegância das formas. De acordo com Usiskin:

A simplicidade de estrutura é evidente quando se observa que as figuras do nível 1 são os pilares para o estudo das propriedades no nível 2, que por sua vez serão ordenadas no nível 3, sendo essa ordenação um prerequisite essencial para o endimento dos sistemas matemáticos no nível 4 que, por sua vez serão comparados no nível 5. (USISKIN, 1982, p.6);

b) abrangência: Usiskin (1982) refere-se aos atributos descritivos e prescritivos da teoria van Hiele. Em suas palavras:

qualquer teoria que abrange o conjunto da aprendizagem da geometria e que procura explicar não só porque os alunos têm dificuldade em aprender, mas também o que poderia ser feito para remover esses obstáculos, deve ser chamada de abrangente" (USISKIN, 1982, p.7).

Mesmo que a aplicabilidade da teoria de van Hiele não tenha sido suficientemente testada em outros campos da matemática e que a maioria dos estudos em geometria se relacione aos triângulos e quadriláteros, seria injusto, segundo Usiskin (1982) negar-lhe o caráter global;

c) ampla aplicabilidade: Tendo influenciado reformas importantes no desenvolvimento de programas curriculares de geometria em países tão diversos como a Holanda, a União Soviética e os Estados Unidos, Usiskin (1982), considera que a teoria de van Hiele deve ser, obviamente, vista como ampla e facilmente aplicável.

Infelizmente, apesar de todas essas características positivas, ainda são poucos os estudos realizados no Brasil utilizando o modelo de van Hiele.

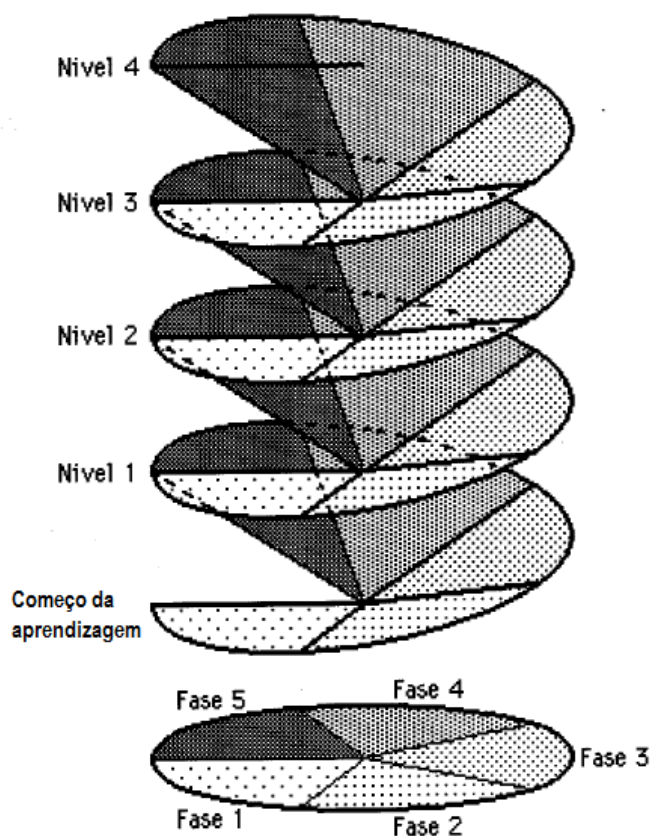
3.5 Críticas à Teoria de van Hiele

A teoria de van Hiele tem atraído, ao longo dos anos, comentários e críticas de pesquisadores em todo o mundo, alguns deles superficiais, outros objetivos e profundos. De qualquer forma, vale a pena considerar algumas das críticas mais fundamentadas feitas sobre essa teoria:

a) a (des)continuidade dos níveis: segundo Usiskin (1982) e Fuys e outros (1988), apesar de evidências de pesquisas atestarem o caráter hierárquico dos níveis de van Hiele, há dúvidas quanto à discretização (descontinuidade) dos mesmos, conforme a proposta de van Hiele. Burger e Shaughnessy (1986), por exemplo, observaram que, embora os van Hiele tenham apresentado os níveis como estruturas discretas,

o seu estudo não detectou essa característica. Alguns alunos chegaram, inclusive, a oscilar de um nível para outro na mesma tarefa. Jaime e Gutiérrez (1990) também contestam essa proposição e destacam o processo contínuo vivenciado por eles em suas pesquisas usando o modelo citado, no qual as fases 4 e 5 de um nível se confundem com as fases 1 e 2 do nível seguinte.

Figura 1 — A continuidade dos níveis de van Hiele



Fonte: JAIME; GUTIÉRREZ, 1990, p.339

- b) os critérios de enquadramento:** os níveis de van Hiele dependem do critério adotado para o enquadramento. Usiskin (1982), por exemplo, ao usar dois critérios diferentes de enquadramento, demonstrou que um estudante pode ser enquadrado em níveis diferentes, executando as mesmas tarefas, dependendo do critério usado. Para Usiskin, este é um ponto de fragilidade da teoria de van Hiele, porque "se a teoria é assumida, um estudante deveria ter apenas um nível." (USISKIN, 1982, p.32). No entanto, o autor oferece algumas sugestões que podem ajudar a diminuir essa fragilidade. Primeiro, o número de questões para cada nível poderia ser aumentado, a fim de diminuir o impacto dos acertos "por acaso" (adivinhações) e o peso de uma resposta para uma dada questão. Em segundo lugar, nos níveis mais

altos de van Hiele, os critérios para o enquadramento poderiam ser facilitados. Por exemplo, "um critério de 80% de acertos poderia ser usado para as respostas dos níveis 1 e 2 e um critério de 60% de acertos para as respostas dos níveis 3, 4 e 5" (USISKIN, 1982, p.33).

- c) a (não) existência do nível 5:** parece haver controvérsia na literatura quanto à existência ou não do nível 5 de van Hiele. Na grande maioria dos estudos já realizados, constatou-se que há muito pouca chance de encontrar alunos que tenham atingido o nível 5, indicando que há pouca evidência para sustentar a sua existência. Usiskin expressa uma opinião semelhante ao afirmar que "o nível 5 é de testabilidade questionável" (USISKIN, 1982, p.13) e que o próprio van Hiele já desmentiu a crença neste quinto nível. De fato, em um dos seus escritos, van Hiele questiona a existência, ou pelo menos a utilidade, do nível 5:

Algumas pessoas estão agora testando os alunos para ver se eles atingiram o quinto nível ou outro superior. Acho que este é apenas um valor teórico ... Eu me sinto infeliz, uma vez que, fundamentadas nos meus níveis de pensamento, investigações são feitas para provar a existência do quinto nível ou outros mais elevados. (VAN HIELE, 1986, p.47)

- d) a (in)adequação do calendário escolar:** devemos considerar que, em geral, o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico não ocorre de forma a nos atender no que diz respeito ao cumprimento do calendário escolar. Jaime e Gutiérrez acreditam que:

A aquisição dos níveis superiores, em particular dos níveis 3 e 4, normalmente é um processo de vários anos e não é de se estranhar que, ao final de um período letivo, existam alunos que estejam no mesmo nível em que estavam no início, mas com uma possibilidade bem maior de alcançar o nível superior. (JAIME; GUTIÉRREZ, 1990, p.337).

Nos níveis inferiores, um trabalho bem orientado pode conduzir à melhores resultados. Dina van Hiele-Geldof (1957, 1984), por exemplo, relata em sua tese de doutorado que foi capaz de elevar o nível de seus alunos (com idade média de doze anos) de 0 para 1 em 20 aulas e de 1 para 2 em 50 aulas.

De qualquer forma, ainda que se considerem as críticas apresentadas, a literatura continua otimista quanto às potencialidades da utilização do **Modelo van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento em Geometria** como ferramenta eficaz na construção de um conhecimento geométrico significativo. (USISKIN, 1982).

4. A AVALIAÇÃO DO CONHECIMENTO PRÉVIO E DO NÍVEL DE PENSAMENTO EM GEOMETRIA DOS SUJEITOS DE PESQUISA

Como um dos propósitos desse trabalho é testar a aplicabilidade da teoria de van Hiele na descrição e prescrição do comportamento dos alunos do Ensino Médio, passaremos, inicialmente, por uma análise quantitativa de suas potencialidades.

4.1 O Contexto

As estatísticas nunca foram muito otimistas em relação ao desempenho dos alunos brasileiros egressos do Ensino Médio no que diz respeito à matemática. Tão logo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) divulga os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), já recebemos, através dos mais diversos meios de comunicação, notícias criticando o nosso sistema educacional. Destaque especial é dado ao baixo desempenho dos nossos alunos em matemática que, na rede pública de ensino, chega a ser sofrível.⁷

Neste cenário, é comum ouvir questionamentos sobre o baixo índice de acertos nas questões de geometria dessas provas, bem como nos vestibulares tradicionais ainda existentes. Para alguns alunos do Ensino Médio, a simples menção da palavra geometria é causa de total desconforto. Eles dizem que é como caminhar em terreno desconhecido e a maioria diz não saber, ou melhor, não entender a geometria. A nossa experiência com alunos do 2º ano desse segmento, ao introduzirmos o conteúdo “sólidos geométricos”, confirma essa tendência.

As atuais disposições do Ministério da Educação (MEC), em relação à reformulação do ENEM “[...] e a sua utilização como forma de seleção unificada nos processos seletivos das universidades públicas federais” (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2009), fez com que toda a comunidade escolar passasse a se questionar acerca do desempenho dos alunos concluintes da 3ª série/EM nessa prova. A obtenção de bons resultados tornou-se meta prioritária da direção, dos professores, dos alunos e de seus pais/responsáveis.

⁷ - 57,7% dos alunos não atingiram nota média em matemática no Enem, diz Inep. (*gl.globo.com* - 20/01/2010)
- A matemática é a grande vilã nos resultados do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) 2009, em Belo Horizonte. (*Estado de Minas* - 21/07/2010)
- Ideb: Resultado é bom, mas matemática precisa de intervenção, diz Maria Helena Guimarães de Castro - (*UOL educação* - 01/07/2010)

Com isso, os professores de matemática, quase sempre responsabilizados pelo resultado dos seus alunos, passaram a buscar metodologias didáticas capazes de desenvolver as habilidades e competências exigidas na nova Matriz de Referência para o ENEM⁸, válida desde 2009. No que se refere à geometria, destacamos a competência de área 2: “utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela”, a qual sugere que as novas práticas pedagógicas devem dar ênfase à contextualização das questões. A memorização deve ceder lugar ao raciocínio e às articulações possíveis entre conceitos e sua aplicabilidade, mesmo porque, segundo o MEC (2009), a Educação Básica deve ter como objetivo a formação de cidadãos autônomos e conscientes, capazes de interferir positivamente na sociedade em que vivem.

Hoje, temos consciência de que o ensino de Geometria, focado na compreensão de conceitos geométricos, tem grande poder de interferência na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. Pavanello (1989) e Gazire (2000), destacam em seus trabalhos, o resgate da Geometria como elemento emancipador, capaz de levar o indivíduo a fazer uso do conhecimento adquirido em seu benefício e da sociedade em que está inserido.

Ainda nesta mesma linha, destacamos Viana (2000), para a qual dominar o conhecimento geométrico é saber estabelecer relações:

Também fazem parte do conhecimento geométrico **as maneiras como os conceitos e relações são utilizadas**, ou seja, os procedimentos aprendidos, entre eles as destrezas em geometria, como desenhar, planificar, usar nomes corretos, visualizar transformações em figuras, generalizar os conceitos para outros tópicos da matemática e para situações do dia-a-dia. (VIANA, 2000, p.6, grifo nosso).

Não tendo o nosso trabalho a pretensão de discutir os aspectos políticos dessa questão e atendo-nos apenas às consequências desse fato sobre o ensino de geometria que os atuais alunos do 2º ano do Ensino Médio tiveram na Educação Básica, resta-nos reconhecer o quanto este foi fragmentado, falho e incapaz produzir conhecimento com compreensão. Buscar corrigir essas falhas para esses alunos tornou-se questão prioritária e é neste contexto que apresentamos nossa proposta de ressignificação de alguns conceitos fundamentais da Geometria Plana.

⁸ A Matriz de Referência para o ENEM 2009 pode ser encontrada, integralmente, no site do MEC.

4.2 Os Sujeitos

A presente pesquisa tem como cenário uma escola da rede particular, localizada em Ouro Branco, Minas Gerais. Os sujeitos são os alunos das duas turmas de 2ª série do Ensino Médio desta escola, regidas por esta professora/pesquisadora.

Ambas as turmas têm 4 aulas semanais, ministradas no turno da manhã, possuem 30 e 29 alunos, respectivamente, e são designadas 2ºMC e 2ºML. São formadas quase que totalmente por alunos que fizeram a 1ª série do Ensino Médio naquela mesma escola, sendo que apenas uma aluna cursa novamente esta mesma série.

Com relação à idade, temos uma faixa relativamente estreita, variando de 16 a 18 anos. Quanto ao sexo, em ambas o número de alunas supera o de alunos. No 2ºMC temos 19 alunas e 11 alunos e no 2ºML temos 18 alunas e 11 alunos.

A aplicação dos dois instrumentos utilizados para avaliar/analisar o conhecimento prévio dos sujeitos (TS-CBGP) e para classificá-los quanto aos níveis de van Hiele (TVH) foi realizada durante o período normal de aula, durante duas aulas de 50 minutos, demandando uma aula para cada teste.

Todos os alunos foram devidamente esclarecidos, com antecedência, sobre a aplicação dos testes, sua data, horários, objetivos e metodologia. Apenas um aluno do 2ºML esteve ausente durante a aplicação do TS-CBGP, enquanto que um aluno do 2ºMC e dois do 2ºML se ausentaram no dia do TVH.

4.3 Os Instrumentos

Foram usados, nesta fase do nosso trabalho, dois testes com propósitos distintos: um deles, que denominamos *TS-CBGP*, foi aplicado para nos indicar qual o conhecimento prévio do nosso sujeito de pesquisa e o outro, o *TVH*, aplicado para enquadrar tais sujeitos nos níveis de van Hiele.

4.3.1. *Teste de Sondagem - Conceitos Básicos de Geometria Plana (TS-CBGP)*

Trata-se de um teste de múltipla escolha, adaptado do *Entering Geometry Test (EG)*, retirado de “*van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*”, Usiskin (1982), (©1982 by The University of Chicago — adaptação e reprodução autorizada, via e-mail pelo autor, Zalman Usiskin). O anexo D traz o referido e-mail.

O *Entering Geometry Test (EG)* foi desenvolvido pelo Departamento de Educação da Universidade de Chicago através do projeto CDASSG (*Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry*) a partir de outro teste já usado anteriormente. Este instrumento foi concebido para avaliar o conhecimento geométrico apresentado pelos alunos ao iniciar um curso de geometria na *High School*, que corresponde ao nosso Ensino Médio. O objetivo era, primeiro, a obtenção de um teste que cobrisse todo o conteúdo abordado no Ensino Fundamental (*Elementary and Middle School*) e que um aluno no início do Ensino Médio (*High School*), supostamente, deveria dominar. Segundo, que fosse relativamente independente das ideias de níveis de van Hiele e sobre o qual houvesse pouca interferência da equipe do projeto, com o intuito de não torná-lo tendencioso.

Assim, um teste preparado e aplicado por um aluno da Universidade Estadual de Ohio, 10 anos antes, tornou-se a base do *EG*. O teste original era composto de 50 questões de múltipla escolha e dentre elas foram escolhidas as 20 consideradas mais fáceis e para as quais o nível de acerto tenha sido superior a 45%. Poucas alterações foram feitas e apenas no sentido de melhorar a redação de algumas questões. Um teste piloto realizado em três escolas indicou que 35 minutos eram suficientes para a sua realização e que as questões não eram tão difíceis a ponto de desencorajar os alunos com menos conhecimento dos conteúdos tratados.

Em nosso estudo, acrescentamos ao *EG* outras cinco questões, criadas pela própria pesquisadora, com o objetivo de investigar o conhecimento dos alunos sobre os conceitos geométricos do nosso interesse que não eram devidamente contemplados no *EG* original. Dessa forma, o nosso Teste de Sondagem - Conceitos Básicos de Geometria Plana (TS-CBGP) ficou composto de 25 questões, sendo as 20 primeiras reproduzidas do *EG* e as cinco últimas acrescentadas para atender às nossas necessidades.

No anexo B, apresentamos o TS-CBGP que foi reproduzido na forma de um pequeno caderno (tamanho A5), contendo em sua capa todos os procedimentos a serem seguidos antes, durante e ao término do teste. Tais procedimentos foram cuidadosamente lidos antes do início das atividades e qualquer dúvida dos alunos levada ao professor aplicador, uma vez que a comunicação entre eles era expressamente proibida. Uma folha de respostas acompanhava cada caderno e nela deveria ser marcada apenas a resposta correta, sem rasuras.

Com o objetivo de avaliar o nível, a redação e o tempo gasto na resolução das 25 questões, aplicamos um teste piloto a seis alunas das 3^a séries do Ensino Médio. A nossa preocupação maior era com a redação das questões, uma vez que as 20 questões iniciais foram traduzidas do inglês. Por sugestão das alunas que realizaram o teste, fizemos apenas uma pequena modificação no texto da alternativa (a) da questão 12 e no enunciado da questão 5, a

fim de evitar uma possível má interpretação. Quanto ao tempo, após breve discussão, decidimos que 35 minutos eram suficientes, mesmo com as cinco questões adicionais.

Ressaltamos que a escolha do *EG* como referência para a construção do TS-CBGP deveu-se, principalmente, ao fato de os conteúdos nele abordados atenderem aos nossos pressupostos quanto ao que se pretendia avaliar em termos de conhecimento geométrico prévio, para alunos da 2ª série do Ensino Médio prestes a iniciarem um curso de geometria dos sólidos.

O quadro 1, a seguir, mostra os conceitos geométricos abordados em cada questão.

Quadro 1 – Conceitos Geométricos abordados nas questões do TS-CBGP

CONTEÚDO	QUESTÕES
ÂNGULOS	4 - 5 - 8 - 9 - 10 - 14 - 19 - 20 - 21 - 22
POLÍGONOS / POL. REGULARES	2 - 5 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 18 - 20 - 21 - 22 - 23 - 24 - 25
TRIÂNGULOS	5 - 11 - 12 - 13 - 16 - 20 - 21 - 22
QUADRILÁTEROS	2 - 12 - 14 - 15 - 18 - 22 - 24 - 25
SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS	3 - 12 - 16 - 25
TEOREMA DE PITÁGORAS	20 - 24
POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETAS	1 - 6 - 8 - 10 - 24
CIRCUNFERÊNCIA / CÍRCULO	7 - 17
PERÍMETRO / ÁREA	2 - 13 - 15 - 18 - 24 - 25

Fonte: Dados de pesquisa

Mais detalhes sobre a configuração do TS-CBGP e os conceitos geométricos avaliados em cada questão podem ser encontrados nos apêndices B e C.

Conforme planejado, as duas turmas realizaram o teste no dia 29 de junho de 2010, em horário normal de aula, numa aula de matemática (50 min.), sob a orientação e supervisão desta pesquisadora. Nenhuma ocorrência relevante foi registrada, exceto a ausência de uma aluna do 2º ML.

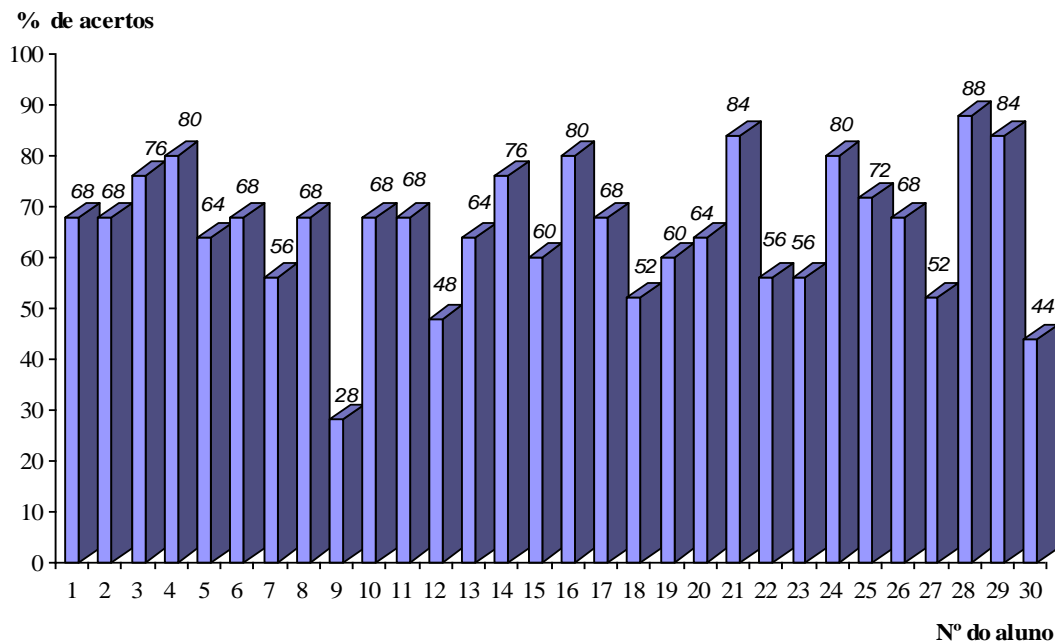
Decorrido o tempo estipulado, recolhemos os cadernos de questões e as respectivas folhas de respostas. Optamos por recolher também os cadernos para o caso de precisarmos avaliar algum caso extremo de resultado adverso, uma vez que cálculos e desenhos foram permitidos durante a realização do teste.

Iniciando a nossa análise quantitativa dos dados obtidos, avaliamos os acertos de cada aluno e calculamos os percentuais individuais, de cada turma e do grupo em estudo. Era nossa

intenção avaliar, analisar e tecer nossas considerações apenas sobre o comportamento do grupo formado pelas duas turmas, porém, na medida em que fomos analisando os dados concluímos que o desempenho de cada aluno, neste teste, poderia vir a nos servir de parâmetro para validar o Teste de van Hiele (TVH), que será descrito posteriormente.

Os gráficos 1, 2 e 3, a seguir, mostram o percentual de acertos por turma e do grupo.

Gráfico 1 – TS-CBGP / Rendimento por aluno - 2º MC

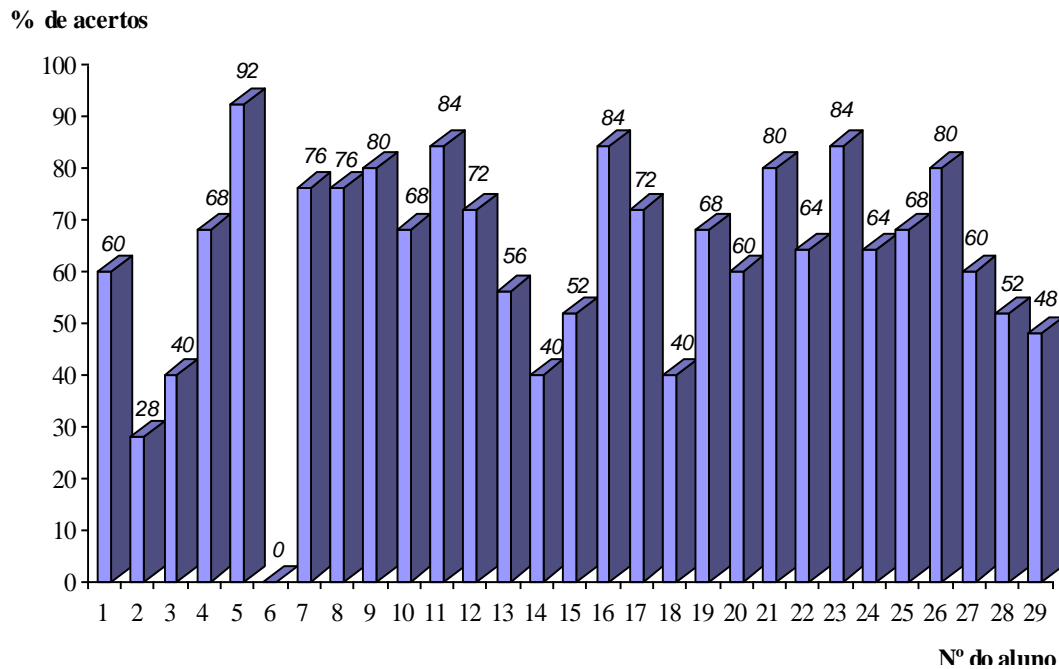


Fonte: Dados da pesquisa.

Como podemos observar no gráfico 1, o percentual de acertos por aluno, no 2º MC, de maneira geral, foi muito bom, exceto pelo caso de um aluno que obteve apenas 28%. As medidas de tendência central, como a média = 66%; mediana = 68% e moda = 68%, mostraram-se superior aos encontrados na literatura. (USISKIN, 1982). Para esta turma o desvio padrão foi igual a 12,9 % e esse desempenho, sem dúvida, superou nossas expectativas.

Os resultados do 2º ML, mostrados no gráfico 2, também foram muito bons, com poucos casos de rendimentos aquém da média. Estatisticamente, as medidas de tendência central obtidas foram muito próximas às da outra turma (média = 65%; mediana = 68% e moda = 68%) e o desvio padrão, neste caso, igual a 15,7%. O aluno ausente, que aparece com 0% de rendimento no gráfico citado, não foi considerado no cálculo das medidas mencionadas.

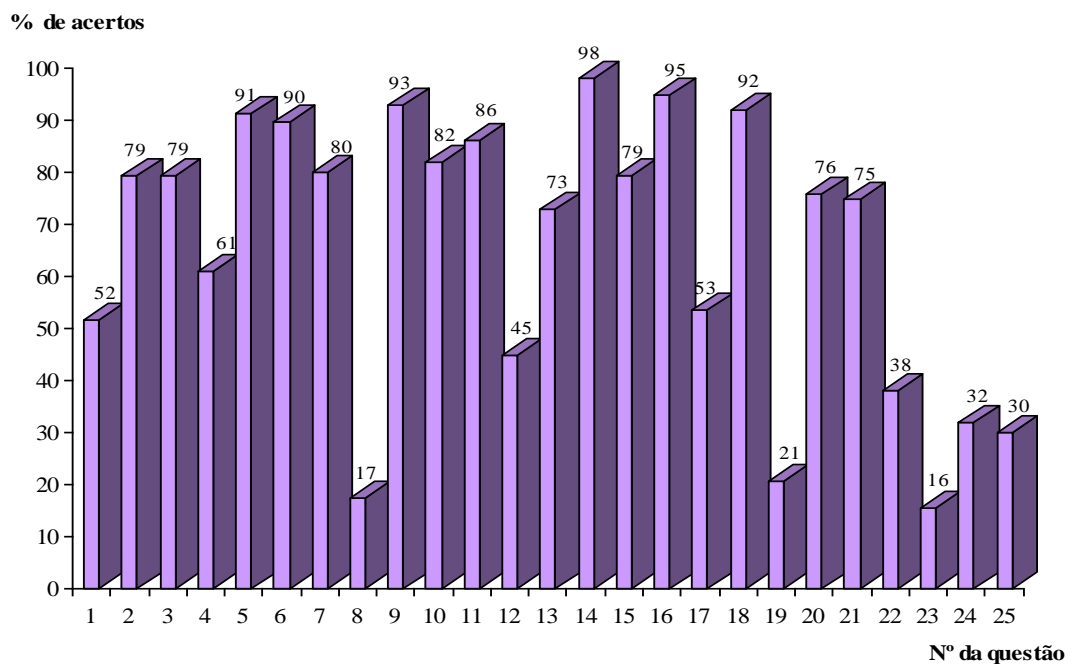
Gráfico 2 – TS-CBGP / Rendimento por aluno - 2º ML



Fonte: Dados da pesquisa

Tomando, agora, o grupo formado pelas duas turmas, cujo rendimento médio foi de 65%, vamos avaliá-lo conforme o número de acertos por questão. O gráfico 3, abaixo, apresenta o desempenho do grupo (2º MC e 2º ML):

Gráfico 3 – TS-CBGP / Rendimento por questão - 2º MC e 2º ML



Fonte: Dados da pesquisa

Para este mesmo grupo, apresentamos no apêndice C, além do(s) conceito(s) geométrico(s) abordado(s) em cada questão do TS-CBGP, o percentual de marcações por alternativa, destacando a alternativa correta e as questões para as quais o percentual de acertos tenha sido inferior a 60%.

Com os resultados quantitativos em mãos, pudemos aproveitá-los para avançar um pouco mais na direção de uma análise qualitativa. A tabela 1 fornece a porcentagem de acertos por questão, destacando o conceito geométrico avaliado.

Tabela 1 – Relação entre conceito avaliado e % de acertos - TS-CBGP (*)

<i>QUESTÃO</i>	<i>CONCEITO PRINCIPAL</i>	<i>% DE ACERTOS</i>
1	Retas perpendiculares	52
2	Área do retângulo	79
3	Figuras semelhantes	79
4	Ângulo obtuso	61
5	Pontos colineares - notação de ângulo	91
6	Retas paralelas	90
7	Círculo - terminologia	80
8	Retas paralelas e transversais - terminologia	17
9	Ângulo reto	93
10	Retas paralelas e transversais - medidas	82
11	Triângulo equilátero	86
12	Propriedades dos paralelogramos	45
13	Área do triângulo	73
14	Propriedades dos paralelogramos	98
15	Perímetro do paralelogramo	79
16	Triângulos semelhantes	95
17	Definição de círculo	53
18	Área do quadrado	92
19	Definição de ângulos suplementares	21
20	Triângulo retângulo	76
21	Triângulo isósceles	75
22	Polígonos regulares	38
23	Propriedades dos hexágonos regulares	16
24	Área do trapézio	32
25	Relação de semelhança	30

(*) As questões cujos percentuais de acertos foram inferiores a 60% estão destacadas nas faixas amarelas e iguais ou superiores a 80% estão em negrito.

Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se que os alunos lidam precariamente com questões sobre ângulos e posição relativa entre retas, principalmente no que diz respeito à linguagem (terminologia) utilizada. As propriedades das figuras planas que evocam a inclusão de classes, bem como as relações entre grandezas em figuras semelhantes, parecem também não fazer parte do universo desses alunos. Já nas questões sobre triângulos, os alunos demonstram uma maior familiaridade com o tema.

Numa escala absoluta, podemos considerar a performance dos sujeitos satisfatória. Nove questões foram respondidas corretamente por 80% ou mais dos alunos; algumas questões de aplicação direta de fórmulas para cálculo de área e perímetro ou que exigiam apenas conhecimento da terminologia adequada, tiveram um percentual de acerto superior a 90%. Não podemos, no entanto, deixar-nos iludir por esses números, pois tais questões referem-se aos conceitos mais simples e fundamentais da geometria: um aluno de Ensino Médio deveria ir mais além. Os resultados obtidos nas questões de 21 a 25, inseridas neste teste com o propósito de avaliar conceitos mais elaborados, como a relação entre conceitos e sua aplicabilidade em situações propostas de maneira indireta, foram desastrosos (quase todos inferiores a 40%).

Tendo em vista nosso objetivo de avaliar, com o TS-CBGP, não só o conhecimento prévio dos alunos, mas que conceitos de geometria plana deveriam ser ressignificados durante o curso de geometria dos sólidos na 2ª série do Ensino Médio, passaremos a uma avaliação detalhada de cada conceito tratado, discutindo os erros cometidos. Tais erros, acreditamos, podem ser creditados à falta de conhecimento sobre o conceito geométrico envolvido ou, ainda, à má formação desse conceito. Seja qual for a causa do erro, essa análise é essencial para que possamos definir que conceitos geométricos buscaremos ressignificar:

a) *ângulos* (conceito abordado nas questões 4, 5, 8, 9, 10, 14, 19, 20, 21, 22): as questões 4 e 9, que se referem à nomenclatura dos ângulos de acordo com a sua medida (reto, agudo e obtuso) tiveram um índice de acerto muito bom, embora seja muito comum os alunos se referirem a eles como “mais fechado” ou “mais aberto”, no caso dos dois últimos. Existe a compreensão intuitiva do conceito, porém, sem o formalismo da linguagem matemática.

As questões que envolvem o cálculo da medida de ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal ou medida de ângulos no interior de um polígono, como as questões 5, 10, 14 e 21 mostraram que a maioria detém esse conceito, mas aquelas em que é cobrada a nomenclatura correspondente (ângulos alternos

externos, ângulos suplementares, etc.), como é o caso das questões 8 e 19, os resultados deixam a desejar. Os alunos alegam que já ouviram esses termos, mas não conseguem associá-los ao conceito.

A questão 22 apresenta uma figura ilustrativa do problema que, infelizmente, não ajudou a maioria dos alunos. A medida do ângulo poderia ter sido obtida por uma simples observação da figura, mas os resultados mostram que a visualização como habilidade geométrica, foi pouco desenvolvida nesse grupo;

b) triângulos (conceito abordado nas questões 5, 11, 12, 13, 16, 20, 21 e 22): os resultados indicam que o triângulo é uma das figuras planas com as quais os alunos têm ou tiveram mais contacto. Medidas de ângulos, propriedades dos triângulos isósceles e equiláteros, utilização do teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos, semelhança de triângulos e cálculo de área de superfícies triangulares foram os assuntos cobrados nessas questões e o índice de acerto na maioria delas foi superior a 70%;

c) quadriláteros (conceito abordado nas questões 2, 12, 14, 15, 18, 22, 24 e 25): os paralelogramos quaisquer, os retângulos, os quadrados e os trapézios foram os quadriláteros trabalhados nas questões citadas. Medidas de ângulos, propriedades e cálculo de área de figuras planas foram bem explorados e apresentaram um bom índice de acertos.

As questões 22 e 24, por sua vez, que exploram as propriedades dos quadrados e dos trapézios através da análise da figura (capacidade de visualização) tiveram um índice de acerto reduzido;

d) polígonos regulares (conceito abordado nas questões 11, 18 e 23): as respostas mostram que os quadrados e os triângulos equiláteros não constituem problemas para os alunos. Já o hexágono regular, explorado na questão 23, parece ser uma figura bem distante do universo dos mesmos, sendo a congruência dos lados a única propriedade ao alcance da maioria;

e) semelhança de figuras planas (conceito abordado nas questões 3, 12, 16 e 25): podemos perceber, pelas respostas dadas a estas questões, que o conceito de semelhança de figuras planas é familiar à maioria dos alunos quando tratamos de triângulos, das medidas dos seus lados e quando esses triângulos estão posicionados de forma a facilitar a correspondência entre os lados e os ângulos das duas figuras. No caso de figuras diferentes do triângulo e ao serem questionados quanto à razão

entre as áreas dessas figuras, como na questão 25, a fragilização do conceito se sobressai;

f) teorema de Pitágoras (conceito abordado nas questões 20 e 24): quando o problema cobra a aplicação direta do teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo (questão 20), o percentual de acertos é alto. Se o problema é proposto de forma a exigir um raciocínio mais elevado, onde a aplicação do teorema de Pitágoras não é tão evidente e deve ser uma decisão do aluno (questão 24), então o índice de acertos é baixo.

Infelizmente, os resultados confirmaram uma antiga suspeita: a aplicação de conceitos geométricos na resolução de problemas é uma grave deficiência apresentada pelos nossos alunos;

g) posição relativa entre duas retas (conceito abordado nas questões 1, 6, 8, 10 e 24): as questões 1 e 6 tratam, basicamente, do conceito de posições relativas entre retas. Os números nos mostram que o conceito de paralelismo (90% de acertos) está muito mais solidificado nos alunos do que o de perpendicularismo (52% de acertos). Uma discussão com a turma sobre esse tema mostrou que eles apenas sabem da existência de diversos tipos de retas (paralelas, concorrentes, perpendiculares, etc.), mas não sabem conceituar, com precisão e clareza, a maioria delas.

As questões 8 e 10 tratam de duas retas paralelas cortadas por uma transversal e os ângulos formados por elas. Só reforçando o que já foi dito com relação a ângulos, o problema maior está na nomenclatura e não na medição desses ângulos;

h) circunferência/círculo (conceito abordado nas questões 7 e 17): a questão 7, que trabalha os elementos da circunferência, teve um índice de acertos muito alto. Alguns alunos confessaram que foi fácil porque o elemento cobrado foi o “raio”. Se fosse corda, segmento circular ou setor circular (as outras opções) eles teriam dificuldade em resolver a questão.

A definição de circunferência também não faz parte dos conceitos bem formados e solidificados da maioria. Na questão 17, quase 30% dos alunos aplicaram a definição de circunferência a um quadrado cujo lado corresponderia ao raio da primeira;

i) perímetro/área (conceito abordado nas questões 2, 13, 15, 18, 24 e 25): as áreas de figuras planas simples como retângulos, triângulos e quadrados foram calculadas nas questões 2, 13 e 18, com facilidade, pela maioria. Mesmo assim, preocupa-nos

o baixo índice de acertos apresentado pelas questões 24, que trata de um trapézio em que a altura não foi explicitada e da questão 25, que trata do cálculo de área de figuras semelhantes. Alguns alunos consideraram a medida dos lados não paralelos do trapézio como sendo a sua altura; outros são incapazes de calcular a medida de um elemento não explícito e alegam a falta de dados.

Enfim, área e perímetro são conceitos que exigem mais atenção.

Esta análise confirmou nossas expectativas quanto à sugestão inicial de tópicos da geometria plana a serem ressignificados, expostos detalhadamente no capítulo 2, na seção 2.1.3. No entanto, julgamos prudente fazer algumas considerações que extrapolam o caráter quantitativo da análise, mas que são extremamente pertinentes. Quando uma questão apresenta a resposta correta como sendo a mais marcada, mas esse percentual não se sobressai significativamente sobre o percentual das respostas erradas, julgamos estar aí, um problema que merece, também, a nossa consideração. Mesmo que a maioria dos alunos mostre ter domínio sobre um conceito e sua aplicação, não é aconselhável que se desconsidere a deficiência dos demais, principalmente porque, por serem em grande número, provavelmente não terão um atendimento individualizado. Esses alunos, de uma forma ou de outra, não só terão a continuidade do seu processo de aprendizagem comprometida, como também prejudicarão o andamento e a evolução dos colegas. Dessa forma e, também, para nos mantermos coerentes ao percentual de acertos mínimo exigido para o enquadramento dos alunos nos níveis de van Hiele, ou seja, 60% de acertos, trataremos especialmente dos Conceitos Básicos da Geometria Plana envolvidos nas questões que apresentaram um percentual de acerto inferior a este. Buscamos avaliar, também nas respostas incorretas assinaladas, que tipo de concepção traz o aluno sobre aquele tema, se ele opera com percepções e noções incompletas ou se o problema é de má formação de conceitos.

Uma análise das questões do TS-TSGP, nas quais o percentual de acertos foi inferior a 60% (apêndice C), mostrou que quase todos os conceitos geométricos pesquisados necessitam de atenção, seja em maior ou menor grau. Para alguns deles a dificuldade se relaciona à sua compreensão e para outros, à sua aplicação, principalmente quando se trata de relacionar dois ou mais conceitos. Consideramos prudente considerar ambas as deficiências citadas, pois sabemos o quanto podem comprometer a eficácia da aprendizagem dos tópicos de geometria dos sólidos.

A seguir, apresentamos um quadro resumo das questões nas quais o percentual de acertos foi inferior a 40%, associadas aos conceitos geométricos trabalhados em cada uma delas.

Quadro 2 – Conceitos geométricos que se mostraram deficientes para pelo menos 40% dos alunos

		CONCEITOS GEOMÉTRICOS								
		Ângulos	Polígonos	Triângulos	Quadriláteros	Semelhança	T. de Pitágoras	Posição relativa (retas)	Circunferência / Círculo	Perímetro/Área
QUESTÕES	1							X		
	8	X						X		
	12		X	X	X					
	17								X	
	19									
	22	X	X	X	X					
	23		X							
	24		X		X		X	X		X
25		X		X	X				X	

Fonte: Dados da pesquisa.

Baseado nesta constatação, reiteramos nossa proposta de “Ressignificação” dos Conceitos Básicos de Geometria Plana destacados no quadro 2 e nos dispomos a fazê-lo através de uma articulação conveniente das componentes cognitivas do pensamento geométrico — percepção, construção, representação e concepção (Machado, 2002) — à luz da teoria de van Hiele de construção do pensamento geométrico.

4.3.2. Teste de van Hiele - (TVH)

O TVH foi aplicado no dia seguinte ao da aplicação do TS-CBGP e, assim como este, também foi retirado de “*van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*”, Usiskin (1982), produzido pelo CDASSG. Neste caso, porém, o teste original foi literalmente traduzido, sem que nenhuma alteração ou adaptação fosse efetuada.

Sendo assim, o TVH foi desenvolvido para determinar, caso essa determinação fosse possível, o nível de desenvolvimento do pensamento em geometria dos sujeitos pesquisados, segundo a teoria de van Hiele. A partir de citações do próprio casal van Hiele sobre o comportamento esperado dos estudantes, em cada nível, as questões do teste começaram a ser escritas com o intuito de testar se o aluno estava mesmo naquele nível. Alguns membros da equipe de pesquisa entrevistaram, individualmente, vários estudantes de três estados

americanos e, a partir das respostas obtidas, um teste de múltipla escolha, com 25 questões, sendo 5 delas correspondentes a cada nível, foi montado. Basicamente, o teste ficou estruturado de forma que as questões de 1 a 5, 6 a 10, 11 a 15, 16 a 20 e 21 a 25 tratariam, especificamente, dos níveis 1, 2, 3, 4, e 5, respectivamente.

Este primeiro “teste piloto” foi aplicado em quatro escolas para que pudesse ser avaliado e para que o tempo ideal para a sua realização fosse definido. O grau de dificuldade da questão não foi considerado para a sua rejeição ou modificação, embora um dos objetivos fosse ter questões fáceis em cada nível. Apenas quando uma resposta parecia não refletir o nível de van Hiele apropriado, a questão era rejeitada ou modificada e essas mudanças deram origem a um segundo “teste piloto” e, posteriormente, ao TVH atual.

Embora nos Estados Unidos existam diversos testes padronizados para a avaliação do desempenho geométrico, os pesquisadores do projeto CDASSG preferiram criar o seu próprio teste. Eles afirmam que as questões do TVH são, de maneira geral, mais conceituais do que aquelas dos testes padronizados e mesmo aquelas referentes aos níveis mais baixos exigem algum tipo de análise. Por exemplo, no nível 1, questiona-se se um desenho se encaixa na concepção que o aluno tem de uma classe de figuras; no nível 2, questiona-se se uma propriedade é sempre verdadeira ou se só se aplica a um caso particular; no nível 3, questiona-se a ordenação de propriedades, para se saber se uma afirmação vem sempre a partir de outra; no nível 4, questionam-se as implicações lógicas e os processos dedutivos das demonstrações e/ou provas e no nível 5, questiona-se se habilidade de se trabalhar com diferentes sistemas matemáticos.


Não temos dúvida de que um teste como o TVH, feito com um objetivo específico, após muita pesquisa, tenha muito mais chance de ser bem sucedido. De acordo com Usiskin (1982), pode acontecer de, em testes padronizados, uma pessoa obter uma nota alta, mesmo estando num nível de van Hiele baixo (por memorização, ponderaria van Hiele) e vice-versa (se a pessoa estiver bem conceitualmente, mas pobre em detalhes).

Decididas a aplicar o TVH, fizemos a tradução das questões, da folha de resposta e das instruções de aplicação. As mesmas seis alunas do 3º EM que testaram o TS-CBGP o fizeram para o TVH e, por sugestão delas, modificamos a representação de ângulos da questão 12 e o texto da alternativa (d) da questão 19. O teste de van Hiele (caderno de questões e folha de respostas), tal como foi usado nesta pesquisa encontra-se no anexo C.

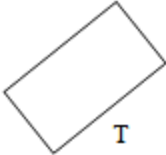
As figuras de 2 a 6, a seguir, são exemplos de questões referentes a cada um dos níveis analisados no TVH.

Figura 2 — Exemplo de Questão Testando o Nível 1


Questão 3 - Qual (ou quais) das figuras abaixo é (são) retângulo(s)?



S



T



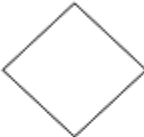

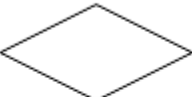
U

(a) Somente S.
 (b) Somente T.
 (c) Somente S e T.
 (d) Somente S e U.
 (e) Todas são retângulos.

Fonte: TVH, 1982

Figura 3— Exemplo de Questão Testando o Nível 2

Questão 8 - Um losango é uma figura de quatro lados, os quais são todos de mesmo comprimento. Veja os exemplos:

Qual, de (a) a (d), não é verdadeira em todo losango?

(a) As duas diagonais têm o mesmo comprimento.
 (b) Cada diagonal é a bissetriz de dois ângulos do losango.
 (c) As diagonais são perpendiculares.
 (d) Os ângulos opostos têm a mesma medida.
 (e) Todas, de (a) à (d), são verdadeiras em todo losango.

Fonte: TVH, 1982

Figura 4 – Exemplo de Questão Testando o Nível 3

Questão 14 – Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

- (a) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos quadrados.
- (b) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos retângulos.
- (c) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos paralelogramos.
- (d) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos paralelogramos.
- (e) Nenhuma, de (a) a (d) é verdadeira.

Fonte: TVH, 1982

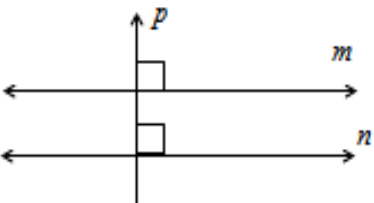
Figura 5 – Exemplo de Questão Testando o Nível 4

Questão 20 – Analise as três sentenças:

- (1) Duas retas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.
- (2) Uma reta que é perpendicular a uma de duas linhas paralelas é perpendicular também à outra.
- (3) Se duas retas são equidistantes, então elas são paralelas.

Na figura abaixo, as retas n e p são perpendiculares e as retas m e p também o são. Qual das sentenças acima pode justificar o fato de as retas m e n serem paralelas?

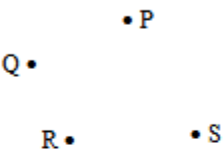
- (a) Somente (1).
- (b) Somente (2).
- (c) Somente (3).
- (d) (1) ou (2).
- (e) (2) ou (3).



Fonte: TVH, 1982

Figura 6 — Exemplo de Questão Testando o Nível 5

Questão 21 – Na Geometria F, a qual é diferente da que você costuma usar, existem exatamente quatro pontos e seis retas. Cada reta contém exatamente dois pontos. Se os pontos são P, Q, R e S, as retas são $\{P,Q\}$, $\{P,R\}$, $\{P,S\}$, $\{Q,R\}$, $\{Q,S\}$ e $\{R,S\}$



Veja como as palavras “intersectam” e “paralelas” são usadas na Geometria F: “As retas $\{P,Q\}$ e $\{P,R\}$ se intersectam em P porque $\{P,Q\}$ e $\{P,R\}$ têm o ponto P em comum”. “As retas $\{P,Q\}$ e $\{R,S\}$ são paralelas porque não têm nenhum ponto em comum”.

A partir desta informação, qual está correta?

(a) $\{P,R\}$ e $\{Q,S\}$ se intersectam.
 (b) $\{P,R\}$ e $\{Q,S\}$ são paralelas.
 (c) $\{Q,R\}$ e $\{R,S\}$ são paralelas.
 (d) $\{P,S\}$ e $\{Q,R\}$ se intersectam.
 (e) Nenhuma de (a) a (d) está correta.

Fonte: TVH, 1982

Em vários outros estudos versando sobre o mesmo tema, nos quais o TVH foi usado, procedeu-se uma fragmentação do mesmo. Rezi (2001), por exemplo, optou por não utilizar as questões de 16 a 25, uma vez que se referem aos níveis 4 e 5 que, supostamente, serão dificilmente alcançados pela maioria dos alunos do Ensino Médio. Limitou, então, os seus estudos à análise dos três primeiros níveis; nós optamos por utilizar o TVH na íntegra, com as 25 questões. Como uma das hipóteses consideradas no nosso trabalho era a de que, realmente, poucos dos nossos sujeitos atingiriam os níveis 4 ou 5, decidimos, a despeito do trabalho adicional que isso pudesse representar, aplicar as questões referentes a eles, mesmo que fosse apenas para a constatação desse fato.

No apêndice D, apresentamos as questões do TVH, seguidas dos conceitos matemáticos abordados e das habilidades exigidas na sua resolução, as quais se configuram, ainda que, resumidamente, em alguns dos descritores de cada nível sob análise. Destacamos também as respostas mais marcadas e as questões para as quais o percentual de acertos foi inferior a 60%.

Quanto à aplicação do teste, temos a fazer algumas considerações:

- a) o padrão de apresentação do TVH foi o mesmo do TS-CBGP: caderno (tamanho A5); capa contendo todas as instruções necessárias à realização do teste; folha de respostas separada do caderno de questões etc.;
- b) As duas turmas realizaram o teste no dia seguinte ao da aplicação do TS-CBGP, ou seja, no dia 30 de junho de 2010, também em horário normal de aula, numa aula de matemática (50 min.), sob a minha orientação e supervisão. Como no dia anterior, nenhuma ocorrência relevante foi registrada, exceto a ausência de um aluno do 2º MC e de dois alunos do 2º ML.

De posse das folhas de respostas dos alunos, passamos a avaliação do nível de raciocínio, em Geometria, de cada um, baseando-nos na proposta original do projeto CDASSG para a avaliação dos resultados obtidos e o possível enquadramento dos sujeitos nos níveis de van Hiele.

O critério adotado para se estabelecer que um sujeito raciocina segundo um determinado nível de van Hiele corresponde a um acerto de pelo menos três questões dentre as cinco propostas para cada nível (subgrupo). O CDASSG trabalhou com dois critérios diferentes: a) 3 acertos em cinco e b) 4 acertos em 5. Optamos por usar apenas o primeiro que, embora menos rigoroso do que o segundo, permite o enquadramento de um percentual maior de alunos nos níveis mais elevados.

A cada aluno atribuiu-se uma nota que corresponde a uma soma ponderada obtida da seguinte maneira:

- a) 1 ponto por cumprir o critério estabelecido para os itens de 1 a 5 (nível 1);
- b) 2 pontos por cumprir o critério estabelecido para os itens de 6 a 10 (nível 2);
- c) 4 pontos por cumprir o critério estabelecido para os itens de 11 a 15 (nível 3);
- d) 8 pontos por cumprir o critério estabelecido para os itens de 16 a 20 (nível 4);
- e) 16 pontos por cumprir o critério estabelecido para os itens de 21 a 25 (nível 5).

Os pesos atribuídos a cada nível (do 1 ao 5) correspondem a potências de 2 e procuram ressaltar a ideia de que o grau de dificuldade das questões, na medida em que transitamos pelos 5 níveis, cresce exponencialmente.

Devemos considerar, também, a probabilidade de ocorrência de alguns erros, como o não enquadramento de um sujeito, mesmo que ele seja capaz de operar com cerca de 90% de eficiência dentro daquele nível e o enquadramento indevido de outros que acertaram 3 ou mais questões “por acaso”. Estatisticamente, o critério “3 acertos em 5” reduz o primeiro tipo de erro, mas aumenta a probabilidade de ocorrência do segundo.

No entanto, segundo Usiskin (1982), a probabilidade de termos 3 acertos em 5 questões, por acaso ou “adivinhação”, é de aproximadamente 6%; esse percentual, relativamente baixo, tranquiliza-nos quanto ao critério escolhido, reafirmando a ideia de não estarmos comprometendo a confiabilidade do nosso trabalho.

Dessa forma, após verificar em quais subgrupos o aluno acertou três ou mais questões, atribuem-se os pontos, conforme já descrito, e adicionam-se os mesmos, de forma a se obter a *soma ponderada* por aluno. Esse valor permitirá ou não o enquadramento dos sujeitos, como podemos ver na tabela 2, abaixo:

Tabela 2 – Correspondência entre os Níveis de van Hiele e a Soma Ponderada

<i>NÍVEIS</i>	<i>Pontos atribuídos</i>	SOMA PONDERADA
< 1	0	<i>0</i>
1	1	<i>1</i>
2	2	<i>3</i>
3	4	<i>7</i>
4	8	<i>15</i>
5	16	<i>31</i>

Fonte: Dados da pesquisa.

Segundo Usiskin (1982), este método facilita o processo de enquadramento, pois nos permite determinar em quais níveis o critério foi alcançado, a partir, somente, da soma ponderada. Assim, um simples número de 0 a 31 é suficiente para que tenhamos 5 decisões independentes, tipo sim / não para os 5 níveis. Uma soma 7, por exemplo, indica que o aluno atingiu o critério estabelecido para os níveis 1, 2 e 3; uma soma 11 indica que o aluno atingiu o critério estabelecido para os níveis 1, 2 e 4; etc.

Reiteramos, porém, que uma das características do Modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento em geometria é o fato de ele ser sequencial. Para que um aluno seja enquadrado no nível *n* é preciso que ele satisfaça o critério estabelecido não apenas naquele nível, mas em todos os outros precedentes. Assim, se um aluno obteve uma soma 7, como exemplificado anteriormente, ele satisfaz o critério para os níveis 1 (*1 ponto*), 2 (*2 pontos*) e 3 (*4 pontos*) e será enquadrado no nível 3. Por outro lado, se a soma obtida foi 11, ele satisfaz o critério para os níveis 1 (*1 ponto*), 2 (*2 pontos*) e 4 (*8 pontos*), o que não o habilita a ser enquadrado em nenhum dos níveis existentes, pois o critério para o nível 3 não foi alcançado.

Notemos que isso equivale a dizer que somas ponderadas diferentes das mostradas na tabela 2 referem-se a alunos que não podem ser enquadrados em nenhum nível (*no fit students*); em nosso trabalho usaremos a terminologia “nível indefinido”.

Outra ocorrência atípica é a dos sujeitos que não satisfizeram o critério em nenhum dos níveis, nem mesmo no nível 1. Embora alguns pesquisadores os enquadrem no nível 0, consideramos pedagogicamente conveniente adotarmos a categoria “< 1” (inferior ao nível 1) para esses alunos.

Desta forma, seguindo a metodologia descrita, fizemos o enquadramento dos nossos sujeitos. Algumas considerações, no entanto, são pertinentes:

a) alguns pesquisadores consideram o TVH um instrumento um tanto quanto grosseiro para se classificar os alunos de acordo com os níveis de pensamento geométrico de van Hiele, principalmente por se tratar de um teste de múltipla escolha. Segundo Burger e Shaughnessy (1986), neste tipo de teste muitos outros elementos importantes na avaliação do comportamento dos sujeitos não podem ser observados, principalmente a linguagem;

b) a utilização de outros instrumentos mais elaborados como testes com questões dissertativas e entrevistas clínicas demandariam muito tempo e onerariam o processo;

c) consideramos, pois, a nossa experiência com o TVH muito positiva. Conseguimos enquadrar 86% dos nossos sujeitos com um teste simples, de fácil aplicabilidade e reconhecido internacionalmente.

Na tabela 3, a seguir, podemos observar a distribuição, segundo níveis de van Hiele, de todos os alunos que fizeram o TVH.

Tabela 3 – Classificação dos sujeitos de acordo com os níveis de van Hiele (*)

NÍVEL	2º MC	%	2º ML	%	GERAL	%
< 1	0	0	4	15	4	7
1	6	21	4	15	10	18
2	12	41	9	33	21	37
3	5	17	6	22	11	20
4	2	7	0	0	2	4
5	0	0	0	0	0	0
Sub-Total	25	86	23	85	48	86
Indefinido	4	14	4	15	8	14
TOTAL	29	100	27	100	56	100

(*) 1ª aplicação do TVH

Fonte: Dados da pesquisa

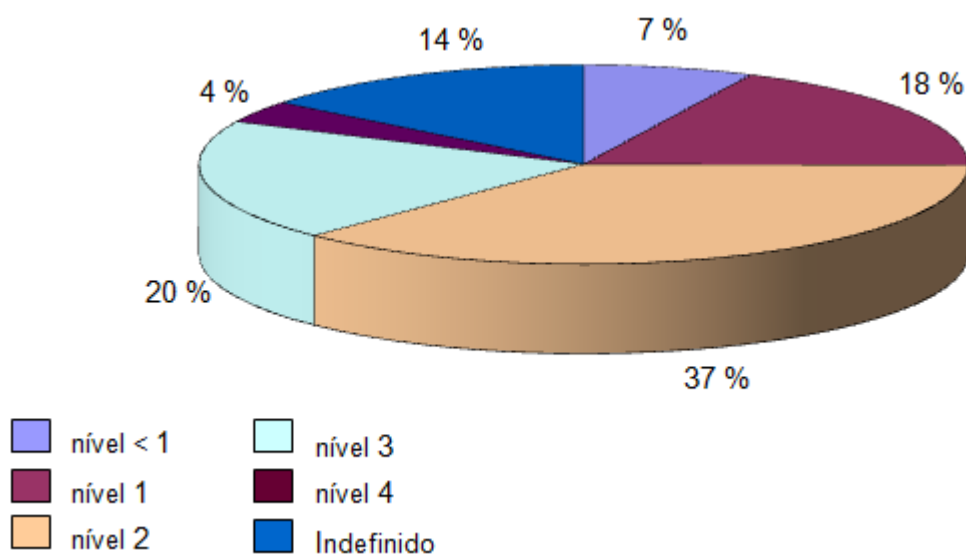
Esclarecemos que os três alunos ausentes, no dia da aplicação deste teste, foram excluídos da análise por considerarmos que esta medida não acarretaria nenhum prejuízo estatístico relevante ao nosso estudo, tendo em vista o número de elementos da amostra.

Os dados da tabela 3 confirmam algumas de nossas hipóteses de trabalho. Dos “alunos enquadrados” nos níveis de van Hiele, cerca de 96% raciocinam segundo um nível igual ou inferior ao 3 e 73% raciocinam segundo um nível igual ou inferior ao 2, confirmando o que a literatura diz a esse respeito.

Pusey (2003) discute diversas pesquisas relevantes sobre a teoria de van Hiele e aponta como fato comum a constatação de que a maioria dos alunos americanos chega à universidade raciocinando, em geometria, segundo os níveis 1 e 2, enquanto que os cursos oferecidos demandam um nível 4 de raciocínio. Rezi (2001) trabalhou com alunos brasileiros concluintes do Ensino Médio e obteve resultados semelhantes.

Para a nossa surpresa, o percentual de alunos que raciocinam segundo o nível 3 foi superior ao esperado (20%) e esses, juntamente com aqueles que se encontram no nível 2, representam quase 60% da nossa população sob análise (ver gráfico 4). Isso indica que, apesar de os nossos alunos estarem aquém do exigido em termos de conhecimento geométrico nos cursos de nível superior, eles raciocinam, de acordo com o modelo de van Hiele, num nível um pouco acima do que nos indica a literatura para alunos da mesma faixa etária e escolaridade equivalente, como podemos constatar em Atebe (2008); Rezi (2001); Usiskin (1982); Burger e Shaughnessy (1985).

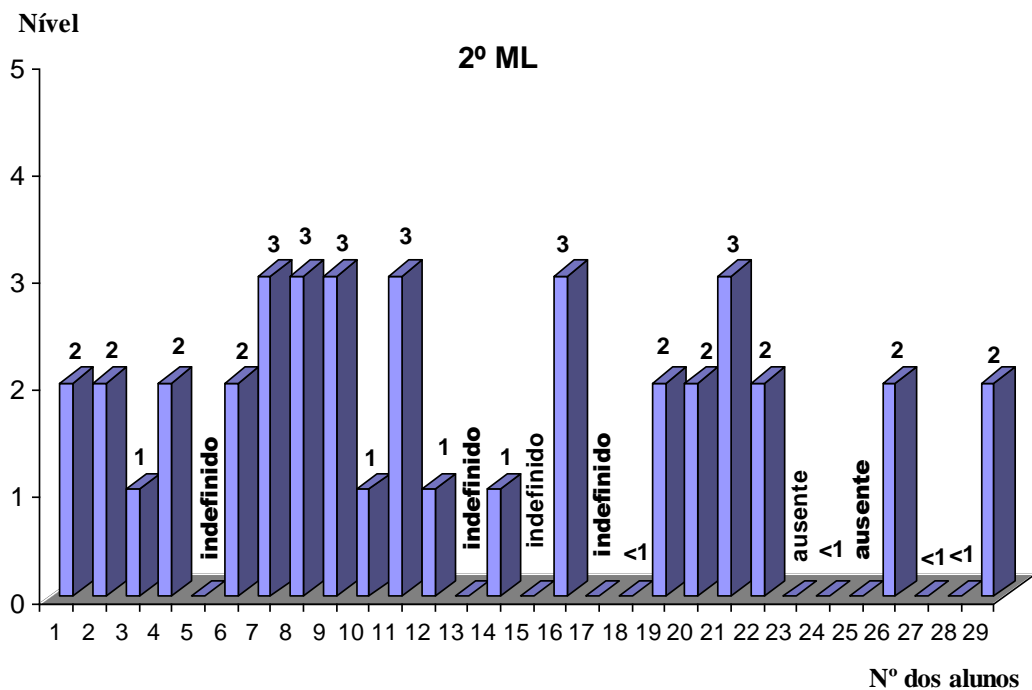
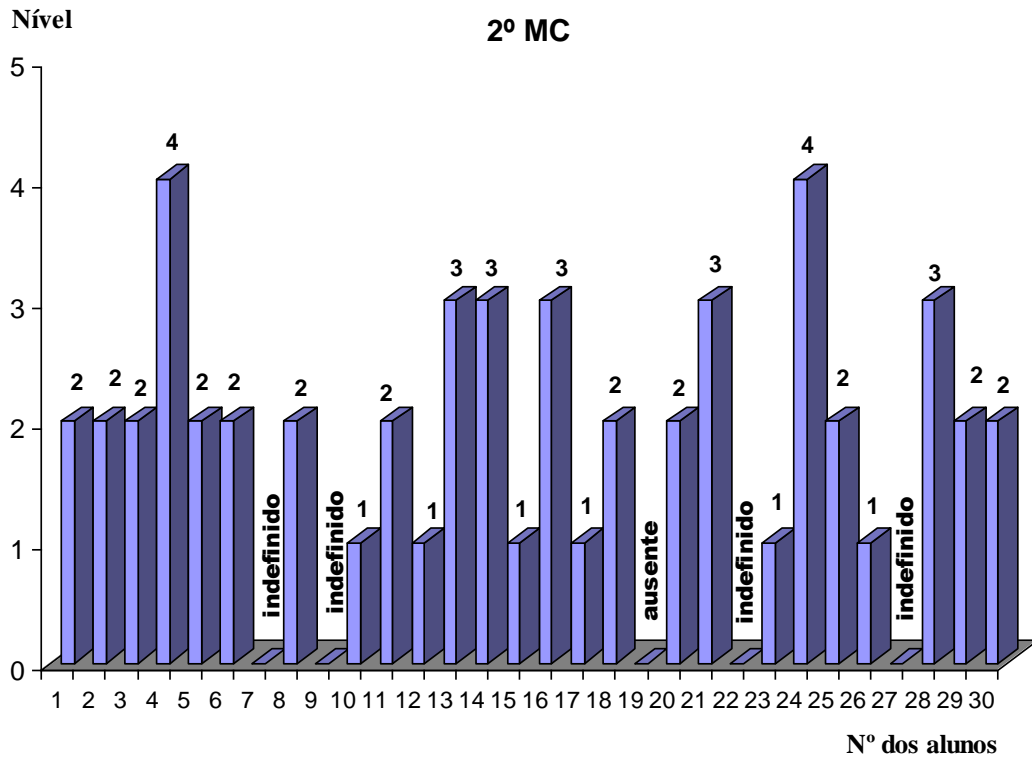
Gráfico 4 – Enquadramento nos níveis de van Hiele - 2º MC e 2º ML



Fonte: Dados da pesquisa

Como no caso do TS-CBGP, não discutiremos os resultados das turmas como grupos isolados; a apresentação dos resultados por aluno (gráfico 5) pretende apenas ilustrar, com mais detalhes, a composição mostrada no gráfico 4.

Gráfico 5 – Enquadramento dos alunos nos níveis de van Hiele



Fonte: Dados da pesquisa.

Paralelamente à preocupação em enquadrar os sujeitos num determinado nível de van Hiele, percebemos que seria interessante buscar, na análise qualitativa de algumas questões, respostas capazes de esclarecer detalhes do comportamento dos alunos de acordo com o nível no qual se enquadraram.

Analizamos, para o grupo formado pelas duas turmas, as respostas erradas, buscando associar erro cometido às deficiências conceituais que sabemos existir e que buscaremos contemplar na etapa prescritiva do nosso trabalho. Uma análise do apêndice D pode nos dar uma boa indicação de como e em que nível os conceitos tratados fazem parte do universo dos nossos sujeitos de pesquisa.

Sobre os quadriláteros, por exemplo, nota-se que 23% dos sujeitos pensam que um retângulo é um quadrado (questão 1), 13% pensam que qualquer quadrilátero é um quadrado (questão 4) e 64% não admitem que o quadrado seja um retângulo (questão 13). Tendo aprendido que um retângulo tem dois lados longos congruentes e dois lados curtos, também congruentes, alguns alunos não conseguem aceitar a relação de subclasse e que um quadrado é um tipo especial de retângulo.

Quanto aos triângulos, conceito tido como “familiar” aos alunos, temos que 11% deles não consideram um triângulo “alongado” como tal (questão 2) e 13% não sabem que os triângulos isósceles têm dois ângulos internos congruentes (questão 9).

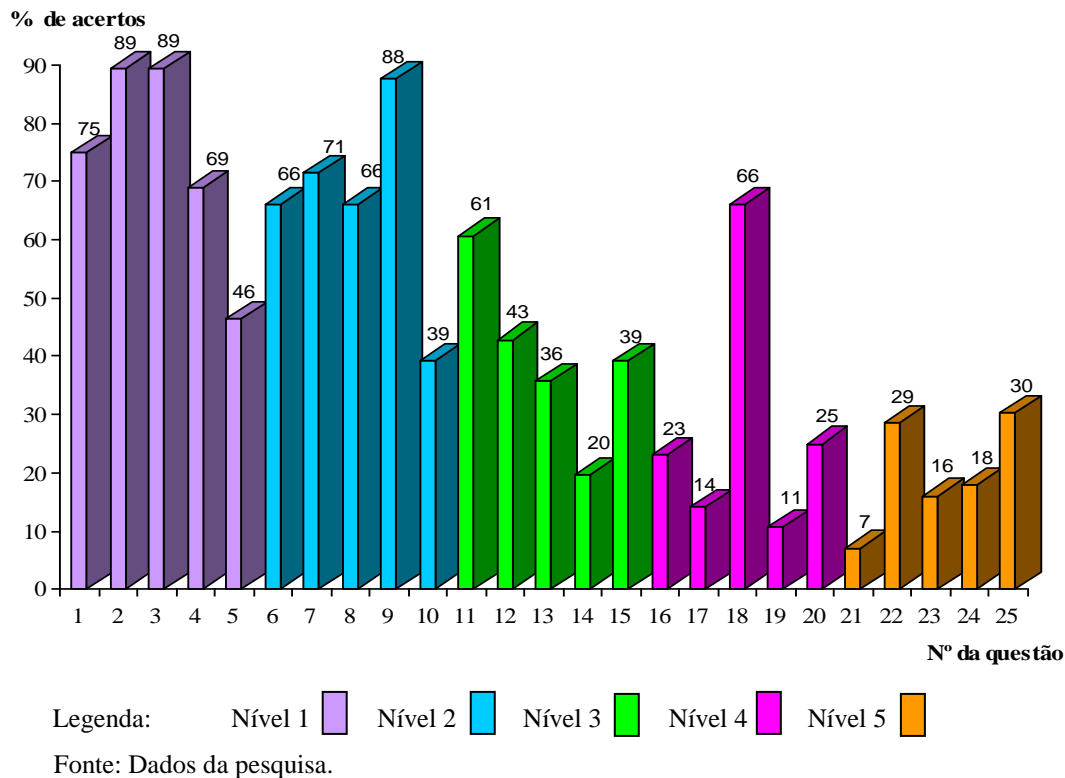
Quase todas as questões que exigiam certa compreensão da inclusão de classes e das implicações lógicas na construção de provas e demonstrações apresentaram um baixo percentual de acerto. 39% dos alunos não sabem que uma figura não pode ser ao mesmo tempo um retângulo e um triângulo (questão 11); apenas 20% compreendem que uma figura pode ser um quadrado, um retângulo e um paralelogramo (questão 14); a ordenação de proposições simples também só é compreendida por 14% dos alunos (questão 17); 34% acreditam que a recíproca de toda afirmação verdadeira é também verdadeira (questão 18).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) não fazem referência ao ensino de demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental e na 1ª série de Ensino Médio e um baixo desempenho nas questões de 16 a 20 já era esperado.

O apêndice D mostra, também, as questões para as quais o percentual de acerto foi inferior a 60%. Nos níveis 1 e 2 apenas uma questão atingiu esta marca. Nos níveis 3 e 4, quatro delas e, no nível 5, todas atingiram este percentual de acerto inferior a 60%. Esses dados confirmam as nossas proposições iniciais e foram essenciais para o planejamento e elaboração das atividades que iriam compor o produto final desse nosso trabalho

Pelo gráfico 6, podemos observar como as subclasses que caracterizam cada nível dentro do THV tornam-se perfeitamente distinguíveis apenas pelo número de acertos que, evidentemente, decresce na medida em que transitamos dos níveis mais baixos para os mais elevados.

Gráfico 6 – Percentual de acertos no TVH, por questão (2ºMC e 2ºML)



O desempenho dos sujeitos nas dez últimas questões (níveis 4 e 5) deixa claro que os mesmos não compreendem as implicações dos sistemas de dedução formal e que, muito menos, conseguem raciocinar em outros sistemas matemáticos. A geometria euclidiana, em nível de dedução informal, no máximo, é a sua única referência.

4.4 Considerações sobre possíveis relações entre os dois testes.

O TS-CBGP foi aplicado no dia anterior à aplicação do TVH. A análise dos dados obtidos no primeiro teste foi, de certa forma, surpreendente, pois uma média de 66% de acertos, para o grupo formado pelas duas turmas, superou nossa expectativa. Apesar de ser um teste cujas questões apresentam um baixo grau de dificuldade, com características de cobrança

envolvendo, basicamente, habilidades relacionadas aos níveis 1 e 2 de van Hiele, não esperávamos um resultado como o obtido. Usiskin (1982) obteve um percentual de acerto médio de 54%.

Até aplicarmos o TVH, não tínhamos como argumentar em favor de um desempenho dos alunos superior a 50% no TS-CBGP. A geometria trabalhada no ensino fundamental, pela experiência que temos e pelo que nos indica outras pesquisas, não tem atendido aos pressupostos e objetivos estabelecidos para o mesmo e isso tem levado os alunos a não desenvolverem satisfatoriamente noções elementares nessa área de conhecimento e, conseqüentemente, a apresentarem índices de desempenho medíocres em teste que buscam avaliá-las.

Acreditamos que a razão do desempenho médio, relativamente alto, obtido no TS-CBGP pelos nossos alunos possa ser creditada ao fato de cerca de 60% deles raciocinarem em um nível superior ao 1 (ver tabela 3). O alto índice de acertos nas questões relativas aos níveis 1 e 2, ilustrado pelo gráfico 6, reitera nossas ponderações.

Na tabela abaixo, apresentamos os piores ($\leq 40\%$) e os melhores ($>80\%$) desempenhos apresentados pelo grupo, seguido do nível de van Hiele dos alunos que obtiveram essas marcas.

Tabela 4 – Piores e Melhores Desempenhos no TS-CBGP X Níveis de van Hiele

<i>Aluno</i>	<i>TS-CBGP (% de acertos)</i>	<i>Nível de van Hiele</i>
A	28	<i>indefinido</i>
B	28	2
C	40	1
D	40	1
E	40	< 1

<i>Aluno</i>	<i>TS-CBGP (% de acertos)</i>	<i>Nível de van Hiele</i>
F	92	<i>indefinido</i>
G	88	3
H	84	3
I	84	3
J	84	<i>(ausente)</i>
K	84	3
L	84	2

Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno A, com 28% de acertos no TS-CBGP não pode ser enquadrado em nenhum nível de van Hiele, pois cumpriu o critério apenas para o nível 2; o fato de ele não ter cumprido o critério para o nível 1 justifica o resultado do teste de sondagem. Pode ser, até, que o cumprimento do critério para o nível 2 tenha sido “por acaso”.

Para o aluno B esperava-se um rendimento maior no TS-CBGP, considerando o nível de van Hiele em que foi enquadrado; podemos, neste caso, considerar a possibilidade de um enquadramento inadequado. Quanto aos demais alunos com rendimento igual ou inferior a 40%, os níveis em que se enquadraram justificam os resultados.

Analisando, agora, os melhores desempenhos, percebemos a coerência dos resultados: quase todos operam no nível 3. O aluno F, que apresentou o melhor resultado do grupo, não pode ser enquadrado, pois cumpriu o critério exigido para todos os níveis, exceto para o nível 4. É quase certo que o cumprimento do critério para o nível 5 se deva ao acaso e se desconsiderássemos este nível, ele seria enquadrado no nível 3. O aluno J esteve ausente no dia da aplicação do TVH o que não nos permitiu avaliação alguma.

Uma ocorrência surpreendente, que também merece a nossa atenção, diz respeito aos três alunos que não atingiram o critério nem mesmo no nível 1. Mesmo estando abaixo do nível 1 (reconhecimento ou visualização), o percentual de acertos dos mesmos foi além do esperado, variando de 52 a 64% no TS-CBGP. Acredita-se que, além da possibilidade de se acertar uma questão de múltipla escolha “por acaso”, é muito comum alunos efetuarem cálculos mecanicamente, recorrendo à memorização de fórmulas e serem felizes nos resultados obtidos. Isso, no entanto, não garante que tenha havido compreensão daquele conteúdo, fato que pode ser mais bem evidenciado no TVH do que no TS-CBGP.

Embora casos isolados contrariem a regra, não podemos negar a estreita relação entre os resultados dos dois testes.

5. A CARTILHA

Os estudos conduzidos durante esta pesquisa reiteram nossa crença de que os conceitos básicos de geometria plana trazidos do Ensino Fundamental nos chegam de forma fragmentada, descontextualizada e com traços pouco evidentes de compreensão. Concluímos que a ressignificação dos mesmos, levada a termo quando os alunos já estão na 2ª série do Ensino Médio, numa perspectiva construtivista e não revisional, pode vir a amenizar o problema enfrentado por esses alunos ao se depararem com as exigências conceituais do estudo dos sólidos geométricos. Acreditamos que esta retomada da geometria, à luz da teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, é oportuna tanto sob o ponto de vista de “resgate de conteúdo” como de implementação de práticas pedagógicas capazes de promover o desenvolvimento do raciocínio do aluno, a construção de um conhecimento com compreensão e o gosto pela matemática.

Após definirmos que conceitos básicos da geometria plana seriam contemplados neste estudo, passamos à elaboração da nossa proposta de produção de um material de consulta para o professor de matemática da 2ª série do Ensino Médio. Este material deveria lhe servir de apoio ao introduzir o conteúdo geometria tridimensional (ou sólidos geométricos, como aparece na grade curricular de algumas escolas), criando oportunidades de resgate de conceitos importantes da geometria plana sem se afastar do seu tema principal.

Tomamos, então, como desafio, a produção de um caderno de atividades, no formato de uma cartilha, cujo título seria “**Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de Van Hiele**”, com instruções para o professor e atividades elaboradas especialmente para esse fim, respeitando os níveis de pensamento dos alunos e explorando cada fase de aprendizagem sugerida pelo modelo de van Hiele.

A etapa de elaboração das atividades demandou mais tempo do que supúnhamos. Consultamos diversos autores que desenvolveram trabalhos nesta mesma perspectiva e o que nos parecia mais condizente com os objetivos da nossa pesquisa era selecionado para testes, possíveis adaptações ou simplesmente como fonte de inspiração para a criação de novas atividades. Destacamos os trabalhos de Jaime e Gutiérrez (1990), Fuys e outros (1988) e van de Walle (2009) como norteadores dessa etapa.

Uma atividade era rascunhada e sofria as alterações necessárias até que se adequasse ao modelo, tanto no que dizia respeito à forma de apresentação, aos objetivos a que se propunha e ao seu próprio processo de aplicação. Foram produzidas, então, diversas atividades e a formatação das mesmas na composição da Cartilha passou a ser o nosso

próximo desafio. Queríamos um material didaticamente coerente que atendesse aos nossos pressupostos teóricos, mas que fosse interessante, de fácil leitura, compreensão e manuseio, além de apresentar outros elementos motivadores.

Decidimos, então, organizar as atividades que potencialmente nos atendia em cinco “módulos instrucionais”, apresentados de forma sequencial, com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos de forma natural. Desta maneira, estaríamos nos adaptando às exigências do modelo de van Hiele, sem promover a sobreposição ou ultrapassagem de níveis e respeitando as fases de aprendizagem que dão corpo à execução das atividades.

Tivemos a preocupação de fazer com que tanto a sequência dos módulos, quanto das atividades dentro de cada módulo, obedecesse aos princípios da teoria de van Hiele. Iniciamos com atividades que buscam fornecer ao professor subsídios para classificar seus alunos segundo os cinco níveis de pensamento de van Hiele e, a seguir, propõem atividades capazes de promover o desenvolvimento de habilidades e competências que permitam aos alunos transitar de um nível para o nível seguinte, sempre em consonância com as fases de aprendizagem propostas por van Hiele.

O sumário da cartilha, apresentado no quadro abaixo, nos dá uma boa visão da sua organização.

Quadro 3 – Sumário da Cartilha

SUMÁRIO	
	APRESENTAÇÃO
1.	O MODELO VAN HIELE DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO EM GEOMETRIA
2.	MÓDULOS INSTRUCIONAIS
	• MÓDULO 1 - CONHECENDO O UNIVERSO TRIDIMENSIONAL
	• MÓDULO 2 - A COEXISTÊNCIA DOS DOIS UNIVERSOS: O BI E O TRIDIMENSIONAL
	• MÓDULO 3 - FORMAS BIDIMENSIONAIS - Identificação e definição
	• MÓDULO 4 - FORMAS BIDIMENSIONAIS - Classificação
	• MÓDULO 5 - FORMAS BIDIMENSIONAIS - Outros conceitos
3.	ATIVIDADES COMPLEMENTARES
4.	SUGESTÕES DE LEITURA
5.	SUGESTÕES DE APPLETS E SITES
	ANEXOS

Fonte: Elaborado pela autora.

Como nos mostra o quadro 3, apresentamos, inicialmente, uma breve descrição do “Modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele”. Esta descrição tem como objetivo elucidar os princípios que sustentam esta teoria e dar ao professor os subsídios necessários para fazer uso das atividades sugeridas com liberdade e autonomia, uma vez que todas elas podem ser modificadas e/ou adaptadas para atender às particularidades de cada turma.

A seguir, são apresentados cinco módulos de atividades que têm como referência o trabalho de importantes pesquisadores da teoria de van Hiele, como Lílian Nasser (1995, 1997), David Fuys e outros (1984, 1988), William F. Burger e J. Michael Shaughnessy (1986) e van de Walle (2009).

Por fim, algumas atividades complementares, privilegiando o caráter educativo do jogo, além de sugestões de softwares e links afins, são propostas com o intuito de enriquecer o programa de trabalho.

O nosso produto final, conforme destacamos, a cartilha: **“Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de van Hiele”**, constitui o apêndice A desta dissertação.

5.1 Os Módulos Instrucionais

A construção dos cinco módulos que compõem a Cartilha segue, basicamente, o mesmo padrão. Todos se iniciam com uma “visão geral” que busca esclarecer em que nível de raciocínio as atividades se desenvolverão. Segue, uma lista de “descritores” relativos à caracterização dos níveis envolvidos, uma apresentação resumida do “contexto/objetivo” daquele módulo e as atividades propostas que, por sua vez, obedecem ao caráter desenvolvimentista da teoria de van Hiele.

A fim de manter a coerência entre objetivos no que diz respeito à atuação do professor e ao que se pretende conseguir em termos de aprendizagem por parte dos alunos, estabelecemos que todas as atividades deveriam ser fiéis a três premissas.

A primeira delas faz referência à abolição da característica revisional. A tradicional “Revisão de tópicos importantes da geometria plana” que precede, na maioria dos livros didáticos de que dispomos, os capítulos referentes à geometria dos sólidos, tem se mostrado incapaz de resgatar este conteúdo e de motivar a produção de significados. “Rever” pressupõe ver algo que já foi visto, não importando quão superficialmente o objeto do conhecimento tenha sido abordado. Assim, para o aluno, a simples menção de uma “revisão”




já o leva a crer que o que virá será repetitivo, desgastante e irá acrescentar muito pouco a “tudo” o que ele sabe, ou pensa que sabe.

A segunda reza que o estudo dos sólidos geométricos deve estar sempre vinculado às atividades desenvolvidas, reforçando, de certa forma, a primeira; é importante mantermos acesa a chama da curiosidade sobre o novo e tirarmos dela a motivação para a construção de novos significados ou para ressignificar os conceitos geométricos básicos que desejamos resgatar. Assim, todas as atividades planejadas devem ter como núcleo motivador um sólido geométrico a ser trabalhado posteriormente.

A terceira impõe que as atividades propostas tenham como suporte a teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, apostando nas inúmeras evidências de que esta teoria pode nos auxiliar a promover a construção da compreensão em geometria. (VAN DE WALLE, 2009). Assim, a formatação de cada módulo buscou a adequação das atividades propostas ao nível do aluno e a sua aplicação baseou-se nas fases de aprendizagem indicadas no modelo de van Hiele, que enfatizam a exploração, a discussão e a integração dos saberes adquiridos.

Alguns ícones também foram utilizados para destacar o que deve ser executado e/ou produzido pelo aluno, além de sugestões exclusivas para o professor, visando ampliar as possibilidades exploração de cada atividade. O quadro 4 traz o significado de cada um e a intencionalidade da ação proposta.

Quadro 4 – Ícones, nomes e significados

Ícone	Nome	Significado
	“Vamos trabalhar?”	<i>Apresenta todas as propostas de trabalho dirigidas aos alunos.</i>
	“Produzindo”	<i>Indica que algum material concreto (ficha de registro, cartaz, gráfico, tabela, etc.) deve ser produzido pelo aluno ou por um grupo de alunos, conforme instrução.</i>
	“Conversando com o educador”	<i>Fornece, ao professor, indicações didáticas para uma exploração mais efetiva da atividade, além de apresentar sugestões para possíveis adaptações.</i>

Fonte: Elaborado pela autora.

5.1.1. Módulo 1 - Conhecendo o Universo Tridimensional

As atividades selecionadas para compor o primeiro módulo exploram as potencialidades do universo tridimensional no resgate de conceitos básicos da geometria plana. Segundo a estruturação proposta para todos os módulos da cartilha, este módulo configura-se como descrito a seguir:

- a) **visão geral** — Este módulo tem como objetivo fazer com que o primeiro contato de um aluno do 2º ano do Ensino Médio com a Geometria dos Sólidos seja motivador e prazeroso. As atividades propostas procuram levar o aluno a investigar, compartilhar ideias e materiais, conjecturar, discutir, aceitar ou refutar, mediante argumentação, ideias diferentes das suas. Buscam, também, permitir ao professor uma primeira avaliação do conhecimento prévio dos alunos sobre este assunto;
- b) **descritores** — Identificar, agrupar e classificar sólidos geométricos;
- c) **contexto/objetivo** — As atividades foram elaboradas considerando-se a dificuldade de muitos alunos em “visualizar” as formas geométricas tridimensionais que lhes são descritas. O contato com a forma física e a sua manipulação representa, neste momento, uma forma de aproximação da matemática com o mundo real, tridimensional. Busca, ainda, desenvolver (ou valorizar) o raciocínio espacial de cada aluno que, ao contrário do que muitos pensam, não tem um caráter inatista, podendo ser estimulado e desenvolvido por meio de experiências ricas com formas e relações espaciais;
- d) **atividades propostas:**
 - Atividade 1: “Sólidos Geométricos? Muito prazer.”
 - Atividade 2: “Descobrimo formas”
 - Atividade 3: “Agrupando formas”
 - Atividade 4: “Identificando os grupos de formas”
 - Atividade 5: “Dissecando formas”
 - Atividade 6: “Integrando saberes”.

Neste módulo procuramos colocar as atividades que se adequavam aos níveis iniciais 1 e 2, com ênfase no nível 1. Como numa sala de aula os alunos dificilmente apresentam o mesmo nível de raciocínio, reservamos para esse módulo, atividades que atendessem às

necessidades dos alunos que se encontram no nível 1 ou abaixo dele, os quais, no nosso caso, apesar de não serem muitos, necessitam de cuidados especiais. Caberá ao professor a difícil tarefa de lidar com as diferenças e explorar o conhecimento dos mais avançados em favor dos outros.

As seis atividades apresentam-se ordenadas segundo as fases de aprendizagem que buscamos explorar e esperamos que ao fim deste módulo, os alunos que operavam em um nível inferior ao 1 o tenham alcançado e os que operavam no nível 1 tenham atingido, ou pelo menos, se aproximado, do nível 2.

As atividades 5 e 6 vão além das potencialidades de promoção aos dois primeiros níveis. Foram inseridas por tratarem, especificamente, de sólidos geométricos, constituindo um bom material para a finalização do módulo e, também, porque os alunos que operam no nível 2 e 3 precisavam de uma motivação maior.

5.1.2. Módulo 2 - A Coexistência dos Dois Universos: o Bi e o Tridimensional

Apesar de contar com apenas uma atividade, este módulo cumpre o papel de destacar a importância da relação entre os universos bi e tridimensionais. Constitui-se no elo entre o conteúdo em estudo (geometria dos sólidos) e o objeto do nosso trabalho (conceitos básicos da geometria plana):

- a) **visão geral** — Este módulo levará o aluno a refletir um pouco mais sobre a atividade “dissecando as formas” onde ele, brevemente, pôde constatar que as figuras geométricas tridimensionais são formadas por elementos já conhecidos do universo bidimensional. Após vivenciar experiências com o “todo” no módulo I, o aluno será conduzido ao estudo das “partes” para que, através da compreensão das suas propriedades e das relações entre as mesmas, possa entender como se dá a composição das figuras planas na formação dos sólidos geométricos;
- b) **descritores** — Identificar, agrupar e classificar figuras geométricas planas;
- c) **contexto/objetivo** — Respeitando a noção do “todo” que representa o sólido geométrico, faz-se necessário a compreensão dos conceitos de Geometria Plana que permeiam o universo tridimensional. Enxergar as partes que compõe esse organismo, o dinamismo de sua estrutura, bem como as relações entre as propriedades das figuras planas que os compõem e os seus próprios elementos, é fundamental nesta hora;

d) atividade proposta :

- Atividade 1: “Diagnosticando”

Apesar de contar com apenas uma atividade, criamos aqui uma oportunidade para que o aluno vivencie o fato de os sólidos geométricos serem constituídos de diversos elementos da geometria plana. Trata-se de uma atividade que permitirá ao professor avaliar o progresso dos seus alunos após a execução do módulo 1 e, provavelmente irá confirmar a necessidade de ressignificação de alguns conceitos básicos da geometria plana. Alguns alunos conhecem as figuras planas, mas têm certa familiaridade apenas com a sua “aparência” (nível 1); outros conhecem algumas propriedades, mas não conseguem relacioná-las (nível 2); poucos fazem emergir algum conceito a partir de relações entre propriedades (nível 3 ou superior).

5.1.3. Módulo 3 - Formas bidimensionais - identificação e definição

Consolidada a relação entre os dois universos pesquisados, passamos a tratar do que consideramos ser o foco do nosso trabalho: as figuras bidimensionais e os conceitos geométricos inerentes à sua manipulação:

- a) visão geral** — Este módulo trata particularmente das formas bidimensionais. Compõe-se de atividades que permitem ao professor avaliar o conhecimento prévio e o nível de raciocínio apresentado pelo aluno em relação às formas geométricas bidimensionais e suas propriedades. Baseado nessa avaliação, que acontece continuamente durante todo o processo, propõe medidas e instruções a serem seguidas a fim de que processo de construção de conceitos atenda aos pressupostos deste trabalho;
- b) descritores** — Identificar, agrupar, classificar e relacionar figuras geométricas planas;
- c) contexto/objetivo** — Conscientes da importância de uma base conceitual sólida de Geometria Plana para a consolidação dos novos conceitos da Geometria Tridimensional que estão começando a se formar, professores e alunos se veem diante da possibilidade de uma efetiva ressignificação dos conceitos básicos da primeira. Desta forma, este módulo tem como objetivo identificar e corrigir falhas de compreensão e formação de conceitos relacionados às figuras planas e suas

propriedades, além de fornecer instruções para o acompanhamento da evolução do aluno dentro de um nível ou entre níveis de van Hiele;

d) atividades propostas:

- Atividade 1: “Jogando com as semelhanças e as diferenças”
- Atividade 2: “Figuras em fotos”
- Atividade 3: “Nome & Figura”
- Atividade 4: “Ao telefone! ! !”
- Atividade 5: “Quem é e por quê?”

Nos moldes do módulo 1, as atividades propostas buscam contemplar os pensadores dos níveis abaixo de 1, 1 e 2. O objeto de estudo, agora, são as figuras bidimensionais as quais nos permitirão um direcionamento maior quanto aos conceitos que pretendemos ressignificar. Todas as atividades incentivam a discussão como meio de promover, através da linguagem, seja oral ou escrita, a ordenação do raciocínio. Quem opera nos níveis 1 e 2 normalmente usa uma linguagem informal própria, mas as atividades levam, gradualmente, à introdução de um vocabulário técnico capaz de ajudar na identificação de figuras e na definição de algumas propriedades. Espera-se, com isso, uma evolução nesses níveis de raciocínio.

5.1.4. Módulo 4 - Formas bidimensionais - classificação

A nossa expectativa, após a aplicação dos três primeiros módulos, é de que algum progresso significativo no nível de raciocínio dos nossos alunos já possa ser observado, independente do tempo demandado. Este módulo busca contemplar os sujeitos com um nível igual ou superior a 2 e as atividades são tais que, mesmo sendo mais elaboradas, não desencorajam os que ainda não conseguiram a evolução esperada:

- a) visão geral** — Neste módulo, o enfoque está na percepção que os alunos têm das figuras geométricas planas e das suas propriedades. Compõe-se de atividades que se valem da orientação guiada para avaliar que tipo de raciocínio os alunos apresentam ao tentarem agrupar figuras, permitindo ao professor distinguir se os alunos raciocinam sobre os grupos de figuras em termos de suas propriedades ou se o aspecto relevante é apenas a sua aparência. Trataremos, especialmente, dos quadriláteros, principalmente por questões didáticas, devido à possibilidade de

uma maior diversificação no estudo das suas propriedades, criando espaço para que o conceito de inclusão de classes possa ser abordado;

- b) descritores** — Agrupar, classificar e relacionar figuras geométricas planas;
- c) contexto/objetivo** — Após todo o trabalho realizado nos módulos precedentes abordando aspectos relacionados ao reconhecimento, identificação e definição de figuras planas, contemplando, principalmente, alunos que operam nos níveis 1 e 2 de van Hiele, faz-se necessário avaliar, não apenas até que ponto as atividades propostas conseguiram favorecer o seu progresso em termos de raciocínio geométrico, mas, também, dar sequência ao processo instrucional visando atingir o nível 3, no qual a classificação de figuras e a inclusão de classes já são compreendidas;
- d) atividades propostas:**
- Atividade 1: “Adivinhando a regra”
 - Atividade 2: “Identificando e definindo - quadriláteros”
 - Atividade 3: “Quadriláteros - características & propriedades”
 - Atividade 4: “Estabelecendo relações de inclusão de classes”
 - Atividade 5: “Descobrimo ou adivinhando”
 - Atividade 6: “Quem sou eu?”
 - Atividade 7: “Lista Mínima de Propriedades - LMP”

Neste módulo, por razões puramente didáticas, os quadriláteros receberam um tratamento especial. Através deles pudemos trabalhar vários conceitos da Geometria Plana do nosso interesse, inclusive a compreensão da inclusão de classes, característica do nível 3.

Concentram-se, aqui, as atividades que contemplam os níveis de pensamento os níveis 2 e 3. Embora as atividades iniciais (1 e 2) sejam mais indicadas aos pensadores do nível 2, as demais, com exceção da atividade 7, são direcionadas aos pensadores do nível 3, ainda que, dependendo do enfoque dado pelo professor e da necessidade, elas possam vir a servir para elevar os pensadores do nível 2 para o 3. A atividade 7, particularmente, procura consolidar o enquadramento de alunos no nível 3, além de ajudar na ascensão ao nível 4.

5.1.5. Módulo 5 - Formas bidimensionais - outros conceitos

Embora tenhamos explorado mais intensamente alguns polígonos, fizemo-lo com o único objetivo de cobrir da maneira mais simples possível todos os conceitos de geometria

plana que buscávamos ressignificar; os conceitos não abordados nos módulos precedentes são objeto de estudo deste módulo:

- a) **visão geral** — Este último módulo trabalhará os conceitos de geometria plana identificados em nossa pesquisa como objeto de ressignificação neste estudo, mas que não foram abordados nos módulos anteriores: circunferência, círculo e suas partes. Atividades abordando o conceito de perímetro e área também serão introduzidas;
- b) **descritores** — Reconhecer os elementos e as partes do círculo. Medir comprimentos e superfícies de figuras geométricas planas. Diferenciar perímetro de área;
- c) **contexto/objetivo** — O fato de os círculos serem partes constituintes dos sólidos redondos nos leva a considerar o seu estudo e a compreensão da sua dimensão, fatores essenciais para o entendimento das propriedades desses sólidos. Sabemos que, neste caso, medidas envolvendo números irracionais, em especial o número π , resultam sempre numa dificuldade para o aluno. Portanto, este módulo tem como objetivo trabalhar o significado do número π , além de ressignificar os conceitos de perímetro e área com atividades que imprimam sentido às fórmulas já conhecidas e decoradas para o seu cálculo;
- d) **atividades propostas:**
 - Atividade 1: “Festa de aniversário sem chapéu? Não é festa!”
 - Atividade 2: “Feito sob medida”

Embora a introdução deste módulo tenha tido como principal propósito o tratamento de conceitos geométricos não abordados anteriormente e que são essenciais para o estudo dos sólidos redondos, acreditamos que a sua formatação consiga trazer outros benefícios como a ascensão dos pensadores do nível 2 para o 3. A obtenção de fórmulas para o cálculo de áreas a partir de experiências investigativas e construções de modelos mostra-se adequada a este fim.

5.2 As Atividades Complementares

Apostando na diversificação de experiências como fator motivador e acreditando que a produção de um conhecimento com compreensão é sempre possível, acrescentamos aos módulos instrucionais algumas atividades complementares com o objetivo de proporcionar outras opções ao professor e enriquecer o nosso trabalho. Algumas atividades são jogos que,

além do caráter lúdico, justificam-se por apresentarem organização e objetivos bem definidos, podendo ser adaptados para o nível de pensamento que se deseja trabalhar. As demais se apresentam como sugestões de trabalho, de acordo com os possíveis níveis a que podem atender:

a) atividades propostas:

- Atividade 1: “Batalha Naval Geométrica”
- Atividade 2: “Investigando Triângulos e Quadriláteros”
- Atividade 3: “Triângulos”
- Atividade 4: “Quadriláteros”
- Atividade 4: “Investigando Áreas e Perímetros”
- Atividade 4: “Jogo: Eu tenho, quem tem?”

Encerrando o bloco de atividades, apresentamos uma sugestão de leitura que, de certa forma, se resume no nosso referencial teórico; o contato direto com a literatura certamente proporcionará ao professor elementos capazes de enriquecer suas aulas, aumentando a sua segurança, confiança e disposição em promover um conhecimento com compreensão.

Aparecem, também, sugestões de sites e *applets* relacionados ao desenvolvimento de atividades correlatas. Por fim, encerram a cartilha, como anexos, diversos modelos de fichas de observação, tabelas, cartazes, etc. sugeridos nas atividades propostas.

6. A APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E SUA ANÁLISE

Com todas as atividades desenvolvidas e a cartilha estruturada, a etapa de confecção do produto final dessa pesquisa foi temporariamente interrompida. Como o seu principal objetivo era colocar à disposição do professor do Ensino Médio uma ferramenta metodológica que o auxiliasse na condução de um processo de ressignificação de conceitos básicos da geometria plana, sustentado pela teoria de van Hiele, tornou-se imprescindível a verificação das potencialidades da sua proposta.

Após analisarmos os resultados dos dois testes aplicados (TS-CBGP e TVH) que nos permitiram definir os conceitos geométricos básicos a serem ressignificados e em que nível de raciocínio esse processo deveria ser conduzido, julgamos não ser necessária a aplicação, na íntegra, de todos os módulos da cartilha. Como queríamos justamente avaliar de que forma o material apresentado poderia promover uma evolução nos níveis de raciocínio dos nossos alunos, levando-os à ressignificação pretendida, decidimos selecionar, para aplicação e avaliação, apenas algumas atividades dos módulos considerados mais significativos e adequados aos níveis apresentados pelos nossos sujeitos.

O fato de termos 37% dos nossos sujeitos raciocinando no nível 2 e 20% no nível 3 (ver Tabela 3) nos levou a escolher, dentre as todas as atividades propostas nos cinco módulos produzidos, apenas algumas dos Módulos 3 e 4, indicados especialmente para pensadores do nível 2 com aspiração ao nível seguinte e, também, para pensadores do nível 3. Assim, decidimos pela aplicação das atividades 3 e 5 do Módulo 3 e das atividades 2, 3, 4 e 5 do Módulo 4.

A aplicação das atividades selecionadas deu-se em outubro de 2011 com os mesmos alunos avaliados no ano anterior, agora constituindo as turmas de 3ª série do Ensino Médio designadas por 3º JB e 3º JS, num total de 53 alunos. No grupo atual, quatro alunos são novatos.

Esclarecemos que o longo tempo decorrido entre o primeiro teste e a aplicação das atividades desenvolvidas não foi devido apenas ao tempo demandado na sua elaboração. De fato, o esboço da cartilha ficou pronto no início de 2011, mas por razões de cunho administrativo-pedagógico não pudemos aplicar, imediatamente, as atividades selecionadas. A Coordenação Pedagógica do colégio entendeu que seria mais conveniente aplicá-las obedecendo a sua programação curricular, que previa para o final de setembro de 2011 o estudo dos tópicos “geometria sólida e geometria plana/revisão”. Desta forma os outros conteúdos não teriam sua programação alterada.

Esta espera até que se tornou um fator positivo, pois pudemos testar novamente os níveis de van Hiele dos alunos, após a aplicação das atividades, utilizando o mesmo instrumento (TVH), certos de que poucos o reconheceriam, como de fato ocorreu. Enquanto esperávamos, fomos “lapidando” as atividades elaboradas e a diagramação da cartilha.

6.1 Relatos das atividades e análise das aplicações

A aplicação de todas as atividades selecionadas deu-se na segunda semana de outubro de 2011, entre os dias 03 e 07, em aulas regulares, algumas geminadas, sob a minha orientação e supervisão.

Iniciaremos o relato da aplicação de cada atividade com uma breve descrição dos seus objetivos, seguida da apresentação de um quadro com indicações sobre o papel do professor na organização dos alunos e sobre as propostas de trabalho. A seguir, passaremos a descrever todo o processo de preparação do material de apoio a ser utilizado e o desenvolvimento das propostas executadas. Observações sobre o comportamento dos alunos, expostas na forma de transcrições de alguns diálogos estabelecidos entre os alunos ou entre esses e a professora, darão suporte à análise das potencialidades da atividade que fechará cada relato.

As primeiras atividades aplicadas foram as duas do Módulo 3, por nos permitirem explorar os pressupostos da teoria de van Hiele com um nível de motivação mais elevado.

A atividade 3, intitulada “ **Nome & Figura**”, buscava identificar as possíveis falhas de compreensão e formação de conceitos envolvendo as figuras planas e suas propriedades, além de permitir, ao professor, avaliar os níveis de raciocínio dos seus alunos.

Quadro 5 – Descrição da Atividade 3 - Módulo 3

ORGANIZAÇÃO (professor)	PROPOSTAS DE TRABALHO (aluno)
a) Organizar os alunos em duplas. Eles podem ficar lado a lado no semicírculo já formado e cada um trabalhará com o seu colega (da direita ou da esquerda, conforme combinarem)	Proposta 1: Analisar cada ficha e discutir com o seu parceiro, que características distinguem uma classe de figuras da outra.
b) Distribuir entre os alunos fichas NOME & FIGURA com diversos exemplos associando estes dois elementos para triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, paralelogramos, etc. Deixar que as fichas circulem pela sala e que todos tenham acesso a elas.	Proposta 2: Colar todas as fichas no quadro e estender a discussão para toda a sala.

Fonte: Elaborado pela autora.

Para esta atividade foram confeccionadas fichas com grupos definidos de figuras. Trabalhamos, nesta atividade, com diversos grupos de polígonos e as fichas sugeridas eram, na realidade, pequenos cartazes (meia cartolina) com o desenho de polígonos de nosso interesse; pequenas tiras com nomes desses polígonos também foram confeccionadas, como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Módulo 3/Atividade 3: Material preparado pela professora



Fonte: Foto da autora.

Como a linguagem utilizada pelo aluno é um elemento chave na definição do seu nível de raciocínio e como não iríamos gravar as discussões, resolvemos lançar mão de uma ficha de registro de observações não prevista originalmente.

Por se tratar da primeira atividade aplicada, apesar da sugestão de organização da turma em duplas, optamos por explorar o caráter motivador do trabalho coletivo dividindo os alunos em dois grandes grupos, dispostos de forma a permitir uma subdivisão dos mesmos, em pequenos grupos, quando se fizesse necessário.

As fichas (cartazes) foram distribuídas entre os alunos e após circularem por um breve período pedimos que eles, em grupos de 4 alunos, tentassem listar que características distinguem aquela classe de figuras das outras. Caso soubessem nomear o grupo de polígonos, deveriam usar a tira correspondente como título.

Na figura 8, vemos um grupo de alunos durante a execução da atividade.

Figura 8 – Módulo 3/Atividade 3: Grupo de alunos do 3º JB



Fonte: Foto da autora.

De acordo com os dados do teste (TVH) aplicado anteriormente, deveríamos ter a maioria dos alunos operando no nível 2, fato facilmente confirmado durante a atividade. Muitos deles conseguiam se referir aos grupos de figuras destacando as suas propriedades, mas não eram capazes de relacioná-las, conforme podemos observar pelo diálogo abaixo.

Aluno 1: *Estamos com a ficha dos retângulos. Já colocamos o título.*

Professora: *O que essas figuras têm em comum para serem, todas, do grupo dos retângulos?*

Aluno 2: *Ângulos retos, lados paralelos, lados de mesmo tamanho, porém, dois maiores e dois menores.*

A linguagem é típica dos pensadores de nível 2. Para eles, o paralelismo entre os lados opostos não tem relação alguma com a congruência desses mesmos lados e isso pode ser observado no fragmento de uma das fichas de registro de observações, da figura 9.

Figura 9 – Fragmento da ficha de registro de observações da atividade “Nome & Figura” para o Quadrado.

FICHA DE REGISTRO DE OBSERVAÇÕES		
Módulo: 3	Atividade: 3	Proposta: 1
Forma (figura ou grupo): <u>QUADRADO</u>		
CARACTERÍSTICAS OBSERVADAS:		
<ul style="list-style-type: none"> • 4 LADOS • LADOS IGUAIS • 4 ÂNGULOS DE 90° • LADOS PARALELOS (TODOS) • A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS = 360° 		

Fonte: Dados da Pesquisa.

Apenas um grupo, do 3ºJS, que trabalhou com o retângulo, relacionou essas duas propriedades, como se pode observar na figura 10. A propósito, todos os componentes daquele grupo eram alunos que foram enquadrados no nível 3 pelo TVH.

Figura 10 – Fragmento da ficha de registro de observações da atividade “Nome & Figura” para o Retângulo.

FICHA DE REGISTRO DE OBSERVAÇÕES		
Módulo: 3	Atividade: 3	Proposta: 1
Forma (figura ou grupo): <u>Retângulo</u>		
CARACTERÍSTICAS OBSERVADAS:		
<ul style="list-style-type: none"> • Todos têm 4 lados • Todos têm 4 vértices • Todos têm 2 pares de lados paralelos/iguais • A soma dos ângulos internos é 360°. 		

Fonte: Dados da Pesquisa.

O grupo que ficou com a ficha dos losangos era composto por alunos de níveis diferentes. Um dos alunos apresentava argumentos compatíveis com o nível 2, mas os demais estavam, visivelmente, operando no nível 1 ou abaixo dele. O termo “aresta” foi empregado para designar o lado da figura, usaram uma régua para verificar a congruência dos lados,

constatarem que as diagonais eram perpendiculares usando o ângulo reto formado pelas bordas da régua e consideraram a orientação das figuras um elemento relevante para nomeá-las.

A fala de uma das componentes desse grupo, transcrita a seguir, atesta um comportamento típico do nível 1.

Aluna 3: “Nossa ficha tem muitos losangos, mas tem também um paralelogramo e um quadrado. Vamos colocar a tira “losango” porque é maioria.”

A figura 11, abaixo, reproduz um fragmento da ficha de registro de observações do losango, reiterando a nossa convicção sobre o nível desta aluna e seu grupo.

Figura 11— Fragmento da ficha de registro de observações da atividade “Nome & Figura” para o Losango

FICHA DE REGISTRO DE OBSERVAÇÕES		
Módulo: 3	Atividade: 3	Proposta: 1
Forma (figura ou grupo): <u>Losango</u>		
CARACTERÍSTICAS OBSERVADAS:		
<ul style="list-style-type: none"> • Cada figura possui suas arestas de mesmo comprimento. • Soma dos ângulos internos iguais. • Arestas opostas paralelas. • Os ângulos opostos possuem o mesmo valor. • Uma é quadrado. 		

Fonte: Dados da Pesquisa.

Os demais grupos também registraram diversas características irrelevantes ou que se equivaliam, mas como não queríamos inibir as descrições deixamos para esclarecer algumas delas ao final da atividade, no momento de o grupo se juntar para socializar suas descobertas.

No decorrer dos trabalhos, pudemos identificar, com muita clareza, diversas características de pensadores do nível 2. Confirmando Crowley (1994), eles conseguem identificar algumas propriedades das figuras geométricas, mas não conseguem fazer correlações entre elas e nem entendem definições. A linguagem informal utilizada também é um forte descritor do nível 2 e não foi contestada para não inibi-los.

Durante a execução da segunda proposta, quando todos os cartazes foram colados no quadro e cada grupo pontuou suas observações, é que pudemos esclarecer muitas dúvidas, redefinir conceitos mal formados, introduzir o termo “propriedades” e discutir como elas podem caracterizar um grupo de figuras. Nesta etapa final, de socialização de conhecimentos, os alunos foram estimulados a se posicionarem diante dos seus questionamentos criando oportunidades para que dúvidas individuais fossem sanadas e conceitos pudessem ser revistos e consolidados.

O trabalho realizado em grupos de quatro alunos foi muito produtivo em termos de troca e produção de conhecimento, mas não permitiu uma avaliação precisa de cada indivíduo. Como consequência, a etapa de socialização demandou mais tempo e exigiu uma atenção quase que individualizada aos sujeitos.

A atividade 5 do Módulo 3 — “**Quem é e por quê?**” — foi aplicada nas duas aulas seguintes. Nesta atividade, além de reconhecer uma figura plana qualquer, o aluno era levado a discutir as suas propriedades. Com isso, os pensadores do nível 2 receberam diversos estímulos para progredirem para o próximo nível.

Quadro 6 — Descrição da Atividade 5 - Módulo 3

ORGANIZAÇÃO (professor)	PROPOSTAS DE TRABALHO (aluno)
a) Apresentar aos alunos um cartaz contendo diversas figuras geométricas planas e com um cabeçalho a ser preenchido com tiras de papel contendo o nome de diversos quadriláteros ou outras figuras que se pretenda trabalhar, como retas paralelas e perpendiculares; ângulos retos, obtusos ou agudos, etc.	<p>Proposta 1: Iniciar a tarefa com um dos componentes do grupo, preenchendo, inicialmente, o espaço em branco da questão que se encontra no cabeçalho da ficha:</p> <p>“Qual dessas figuras é um (<u>retângulo; quadrado; etc.</u>)? Por quê?”</p>

Fonte: Elaborado pela autora.

Foi confeccionado, para esta atividade, um grande cartaz em cartolina, com diversas figuras (polígonos diversos). Na parte superior dele vinha a pergunta: *Qual dessas figuras é um: ?* O espaço pontilhado seria preenchido com uma tira, removível, com o nome da classe de figuras a ser explorada, tal qual mostra a figura 12. Uma ficha de registro de observações única também foi montada conforme o modelo apresentado na figura 13.

Figura 12 — Módulo 3/Atividade 5: Cartaz preparado pela professora



Fonte: Foto da autora.

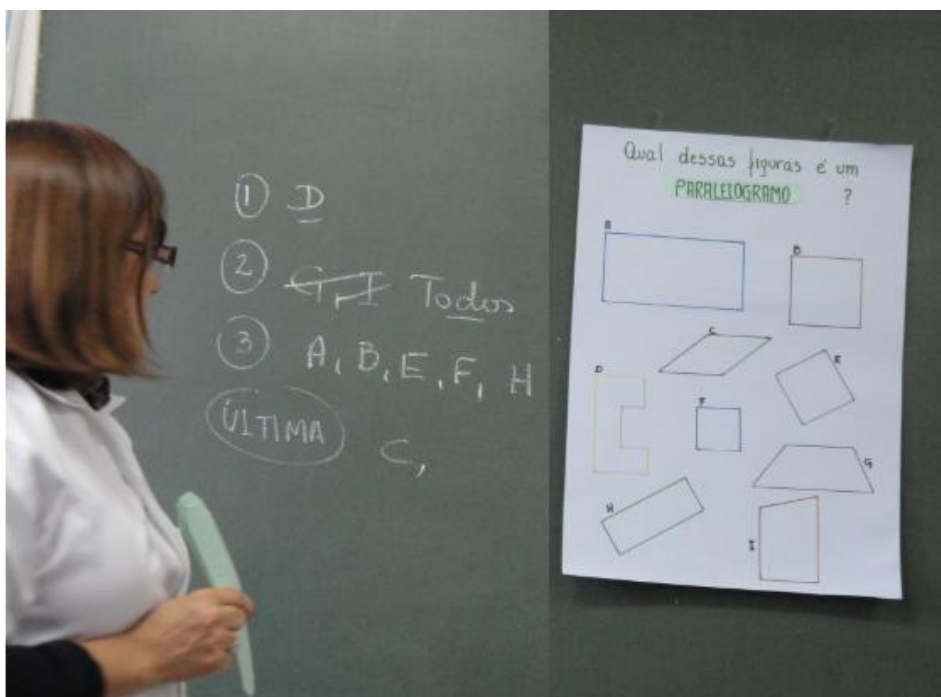
Figura 13 — Ficha de Registro de Observações da atividade “Quem é e Por quê?”

<u>FICHA DE REGISTRO DE OBSERVAÇÕES</u>		
Módulo: 3	Atividade: 5	Proposta: 1
Quais dessas figuras é um POLÍGONO CONVEXO ?		
Por quê?		
•		
•		
•		
•		

Fonte: Elaborada pela autora.

O cartaz foi colado no quadro e o professor iniciou os questionamentos, anotando, ao lado, “todas” as respostas dos alunos quanto ao nome das figuras. Depois, para cada figura apontada, discutiram-se os “porquês” (FIG.14).

Figura 14 – Módulo 3/Atividade 5: Discussão dos “Porquês”



Fonte: Foto da autora.

Como se pode observar, mantivemos o foco nos polígonos. Nosso propósito era verificar se esta sequência poderia complementar a atividade anterior no estabelecimento das fases de aprendizagem de van Hiele, pois contempla prioritariamente as fases de orientação dirigida e explicação.

Esta também é uma atividade indicada aos pensadores de nível 2, porém com a pretensão de desenvolver neles os elementos necessários para uma possível ascensão, pois não apenas discute as propriedades das figuras, mas leva os alunos a relacioná-las. No diálogo abaixo, a professora instiga o aluno a produzir essas relações.

Professora: Por que esta figura é um quadrado?

Aluno 4: Porque tem lados iguais.

Professora: Então basta ter lados iguais para a figura ser considerada um quadrado?

Aluno 4: Acho que sim.

Professora: Acho? E como fica o losango? Podemos considerá-lo um quadrado?

Aluno 4: Mas o losango tem lados iguais? Espere que eu vou medir. . . . Os lados são iguais, sim. Mas losango não é quadrado. Ou é?

Diálogos dessa natureza foram travados entre professor e aluno e entre os próprios colegas. Após algum tempo e muita discussão, muitos já conseguiam relacionar propriedades e procuravam ajudar os seus colegas na compreensão dessas relações.

Foi um momento muito proveitoso, inclusive para os alunos que raciocinam no nível 1 ou abaixo; uma atenção especial foi dada a eles, com questionamentos direcionados, reforçando conceitos e procurando valorizar o que se aplica ao nível deles, como a observação direta das figuras, as medições, a orientação das figuras, etc. As perguntas transcritas a seguir ilustram como esses alunos precisam de um atendimento apropriado ao seu nível:

Aluno 5: *Todo losango tem lados iguais? Pode medir?*

Aluno 6: *Mesmo estando virado é losango?*

Embora parecesse simples, esta atividade exigiu uma grande atenção da professora para manter o nível de compreensão dos alunos sobre os conceitos apresentados. Os questionamentos buscaram estimular a clareza de idéias e muitas respostas foram, convenientemente, reformuladas para garantir uma ressignificação dos conceitos tratados sem inibir o aluno. Aquele momento nos pareceu apropriado para a introdução de uma linguagem mais formal e durante a discussão de algum ponto duvidoso, com muito cuidado para não intimidar o aluno e prender-lhe a língua e o raciocínio, fomos introduzindo termos próprios da geometria.

O diálogo transcrito a seguir é um bom exemplo:

Aluno 7: *O losango tem sempre um “canto” mais aberto, não tem?*

Professora: *Não necessariamente. O que discutimos sobre as condições necessárias para que um quadrilátero seja um losango?*

Aluno 7: *Vimos que ele deve ter lados “iguais” e paralelos.*

Professora: *Exatamente. Se os lados são “congruentes” ou “iguais”, como você disse, então os lados serão necessariamente paralelos. Concorda? Vamos checar?*

Aluno 7: *É verdade. Se a gente diminuir um lado, não fica paralelo mais.*

Professora: *O que você quis dizer com “canto”? “Ângulo”? Veja bem, os ângulos não precisam ser abertos ou **obtusos**, para que os lados continuem de mesmo tamanho ou **congruentes**. A figura continuará sendo um losango.*

Aluno 7: *Pronto. Agora baguncei geral. O “E” é quadrado ou losango?*

Tratava-se de um aluno que opera no nível 1, dando seus primeiros passos em direção ao nível 2 e ao final da discussão sentimos ainda que faltava algo para que ele pudesse reconhecer a correlação entre as propriedades que fazem com que um quadrado seja também um losango.

A ficha de registro observações, única, deveria traduzir a discussão mantida entre os alunos e entre os mesmos a professora e foi preenchida por um aluno que se prontificou a fazê-lo. No entanto, não foi tão positiva quanto se esperava; o redator também estava interessado em participar da discussão e não conseguiu ser muito preciso nas suas anotações que pareciam ter sido filtradas, retratando as apenas as observações julgadas corretas por ele. A figura 15 mostra a ficha de registro de observações do 3º JS.

Figura 15 – Módulo 3/Atividade 5: Ficha de Registro de Observações (3º JS)

<u>FICHA DE REGISTRO DE OBSERVAÇÕES</u>		
Módulo: III	Atividade: 5	Proposta: 1
Quais dessas figuras é um <u>POLÍGONO CONVEXO</u> ? <u>A, B, C, E, F, G, H, I</u>		
Por quê?		
•		
•		
Quais dessas figuras é um <u>RETÂNGULO</u> ? <u>A, B, H, E, F</u>		
Por quê?		
• hem o E, nem o F		
• todo quadrado é um retângulo		
• ângulos retos		
•		
•		
•		
Quais dessas figuras é um <u>QUADRADO</u> ? <u>B, E, F</u>		
Por quê?		
• lados paralelos		
• ângulos retos		
• lados iguais		
• é um retângulo especial		
•		

Fonte: Dados da Pesquisa.

Como se pode observar, os registros escritos, desta vez, não foram muito úteis. As considerações feitas sobre esta atividade estão baseadas muito mais nas observações dos diálogos travados do que nesses registros. Esta dificuldade, relacionada mais ao processo de documentação da pesquisa, não nos impede de destacar o potencial desta atividade; a discussão travada sobre as propriedades das figuras e suas relações mostrou-se muito produtiva.

Do Módulo 4, selecionamos, para aplicação e avaliação, as atividades 2, 3, 4 e 5. Após a aplicação das atividades do Módulo 3, sentimo-nos mais seguras ao avançar um pouco mais no sentido de fazer com que os alunos atingissem o nível 3.

A atividade 2 — “*Identificando e definindo - Quadriláteros*” — contemplou apenas essa classe de figuras. Trata-se de uma atividade mais aberta (os alunos ficam mais livres para definir os rumos do trabalho), visando preparar o aluno para migrar do nível 2 para o 3.

Por se tratar de uma das atividades iniciais do Módulo 4, ressaltamos aqui o seu caráter recursivo; as atividades iniciais de cada módulo cumprem a função, de acordo com a teoria de van Hiele, de consolidar o conhecimento adquirido no módulo anterior e sanar, quando possível, algumas falhas observadas.

Quadro 7 — Descrição da Atividade 2 - Módulo 4

ORGANIZAÇÃO (professor)	PROPOSTAS DE TRABALHO (aluno)
a) Apresentar aos alunos uma coleção de quadriláteros recortados em papel cartão e algumas folhas de papel A3 em branco que servirão de suporte.	<p>Proposta 1: Separar os grupos de figuras que apresentam características comuns. Explicar o critério usado na formação dos grupos (classes) e escrevê-lo no cabeçalho da folha em branco. Se aquele grupo de figuras possuir um nome específico e este for do conhecimento de vocês, podem usá-lo como “título”.</p> <p>Proposta 2: Elaborar pequenos cartazes com os grupos de figuras formados, destacando a regra estabelecida e as propriedades diretamente observadas e, depois, colá-los no quadro.</p>

Fonte: Elaborado pela autora.

Para esta atividade recortamos, em papel cartão de cores diferentes, muitos quadriláteros (paralelogramos, trapézios, retângulos, quadrados e losangos) que foram colocados num grande envelope.

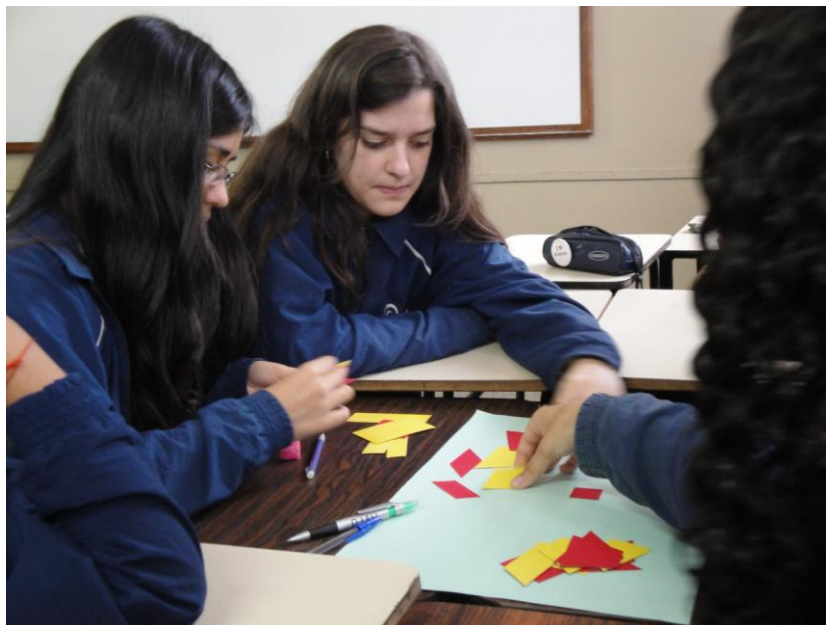
Também usamos aulas geminadas para esta atividade e os alunos foram organizados como nas atividades anteriormente aplicadas. Refizemos os dois grandes grupos com espaço para que pudéssemos restabelecer, quando necessário, os pequenos grupos de quatro alunos e

demos início aos trabalhos. A professora esclareceu que a atividade seria relacionada apenas a um grupo de figuras, os quadriláteros, e distribuiu entre eles as inúmeras figuras recortadas. Pediu, então, que eles observassem bem as figuras e tentassem separá-las em grupos menores de acordo com alguma característica ou propriedade que apresentassem.

As atividades do dia anterior parece ter tornado esta atividade muito simples, pois a separação foi feita quase que imediatamente, apesar da contestação de alguns alunos que não operam, ainda, no nível 2.

A figura 16, a seguir, mostra um grupo de alunos do 3º JB, trabalhando durante a atividade.

Figura 16 — Módulo 4/Atividade 2: Grupo de alunos do 3º JB



Fonte: Foto da autora

Passamos, rapidamente, para a segunda proposta pedindo que cada grupo de 4 se responsabilizasse por uma classe de figuras, podendo buscar junto aos outros colegas, as figuras que lhes cabiam. O papel A3 foi substituído por cartolina para dar mais firmeza à base de trabalho.

As discussões sobre os critérios de agrupamento definidos pelos grupos foram os detonadores de debates muito interessantes; a professora assumiu a função de mediadora, apoiando ideias promissoras e exigindo argumentações justificadas, bem como refutações coerentes. As trocas de figuras foram “negociadas”, de maneira geral, consensualmente,

embora tenham ocorridos alguns desentendimentos conceituais os quais demandaram a intervenção da professora.

O diálogo que se segue mostra como alguns acordos precisaram ser efetivados para que um grupo não se sentisse em desvantagem em relação a outro:

Aluno 8: *“Quem tiver quadrado aí, me passa.”*

Aluno 9: *“Professora, o “aluno 8” está pegando todos os quadrados e ele está com o cartaz de paralelogramo. Assim nós vamos ficar sem nada”*

Professora: *“Como assim? Sem nada? ”*

Aluno 9: *“Ele está considerando que todo quadrado é um paralelogramo. Tudo bem que seja, mas assim, só o grupo deles vai ficar com tudo: quadrado, retângulo, . . .”*

Professora: *“O podemos fazer para contornar este problema? Quem tem alguma sugestão?”*

Aluno 10: *“Por que a gente não coloca no grupo dos paralelogramos aqueles que forem só paralelogramos? Não pode ter mais nada especial. A gente sabe que muitos aí são paralelogramos, mas vai valer o que combinarmos.”*

Professora: *“Está bom assim prá todos?”*

Os alunos que participaram do diálogo acima operam no nível 3 e para eles a inclusão de classes já era clara; felizmente, alguns deles tinham muita facilidade para se expressarem e serviram também como mediadores, esclarecendo dúvidas dos colegas, introduzindo elementos novos às discussões e consolidando o próprio conhecimento.

Após a confecção dos cartazes, que foram afixados no quadro, fizemos uma breve discussão das características de cada grupo de figuras e das propriedades definidoras de cada classe de figura identificada; procuramos destacar, principalmente, as relações entre essas propriedades.

Notamos que alguns alunos se mostraram desmotivados com a simplicidade da tarefa, mas mesmo assim consideramos válida e positiva a sua aplicação. Atividades que trabalham a separação, identificação e descrição de figuras são indicadas aos pensadores do nível 1 ou abaixo e era nossa intenção dar uma atenção especial a este grupo de alunos, fazendo-os observar figuras de tamanhos e em posições diferentes até que conseguissem compreender a relevância ou não desses aspectos.

Os alunos que operam em níveis mais elevados, por sua vez, tiveram a oportunidade de apurar o seu conhecimento; percebemos, inclusive, uma certa satisfação nesses alunos ao exporem suas ideias e partilharem o seu conhecimento com os colegas.

Apesar de a atividade não pretender explorar a inclusão de classes, deixando que os critérios de classificação fossem ditados pelo nível dos alunos, percebemos que a maioria deles reportava a uma classe definida de figuras. Este fato é perfeitamente compreensível, pois além de termos muitos alunos operando no nível 3, a atividade 5, do módulo 3, aplicada anteriormente, estimulava esta inclusão.

A atividade 3 — “*Quadriláteros - Características e Propriedades*” — foi aplicada com o propósito de avaliar a habilidade do aluno na caracterização dos grupos de formas em termos de propriedades e, também, através de uma orientação guiada, levar o aluno a progredir neste campo conceitual.

Quadro 8 — Descrição da Atividade 3 - Módulo 4

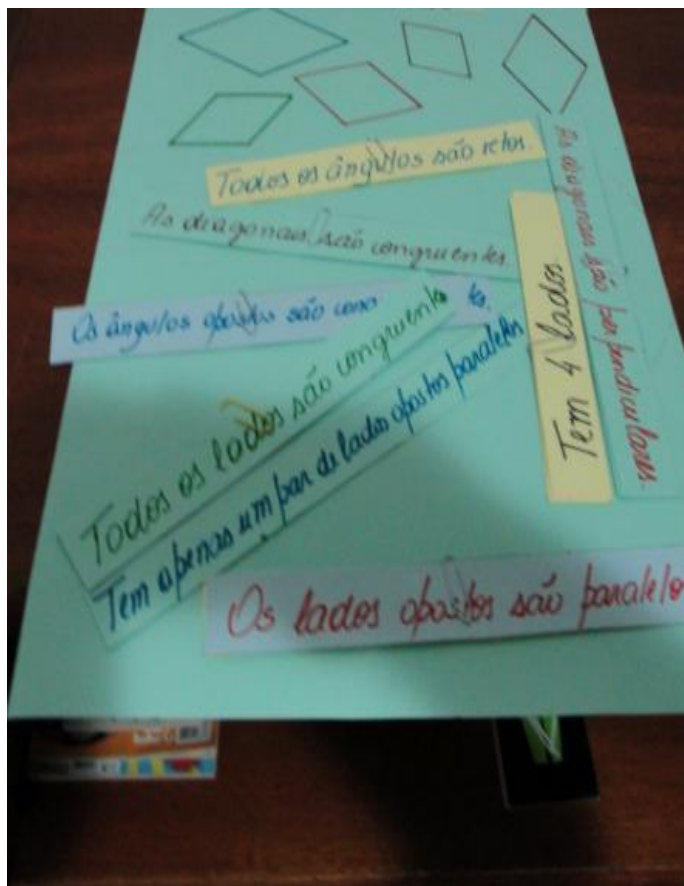
ORGANIZAÇÃO (<i>professor</i>)	PROPOSTAS DE TRABALHO (<i>aluno</i>)
<p>a) Preparar cinco cartazes, um para cada tipo de quadrilátero (quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios). Cada cartaz deve conter, na sua parte superior, desenhos dos quadriláteros correspondentes em diversas posições e tamanhos. A parte inferior da cartolina ficará reservada para que os alunos afixem tiras de papel com o nome do quadrilátero e suas respectivas propriedades. O número de tiras com as propriedades deve ser suficiente para todos os cartazes, lembrando que uma mesma propriedade será usada em vários quadriláteros.</p> <p>b) Dividir os alunos em 5 grupos. Cada grupo de alunos ficará responsável por um tipo de quadrilátero. (Fazer sorteio ou designar o quadrilátero a ser tratado).</p>	<p>Proposta 1: Montar um cartaz sobre o quadrilátero que lhe foi destinado. Escolher dentre as diversas tiras, o nome do quadrilátero e, a seguir, as propriedades que eles apresentam.</p> <p>Proposta 2: Colar o seu cartaz no quadro e fazer uma breve exposição do seu trabalho para toda a turma. Discutir exemplos e contra-exemplos, a ir(relevância) da orientação da figura, etc.</p> <p>Proposta 3: Reproduzir, no caderno, os cartazes apresentados.</p> <p>Proposta 4: Preparar um quadro-síntese com as propriedades dos quadriláteros contemplados.</p>

Fonte: Elaborado pela autora.

Confeccionamos, para esta atividade, 5 cartazes utilizando meia folha de cartolina para cada um deles. Na parte superior, foram desenhados quadriláteros de uma mesma classe, de tamanhos diferentes e em posições diferentes, com espaço suficiente para que fosse colada, logo acima deles, a tira com o nome daquelas figuras. A parte inferior ficou em branco para que os alunos pudessem afixar ali todas as tiras com propriedades daquela classe de figuras que fossem capazes de identificar.

As tiras com o nome das figuras e as possíveis propriedades também foram previamente confeccionadas. A figura 17 mostra todo o material a ser utilizado.

Figura 17 – Cartaz e Tiras de Propriedades Confeccionadas pela Professora



Fonte: Foto da autora.

Preparamos, também, um quadro-síntese com os nomes das classes de figura e as propriedades listadas, tipo uma tabela de dupla entrada para ser preenchida na etapa de integração/socialização dos conhecimentos adquiridos.

Mantivemos os dois grandes grupos, mas os subdividimos em 5 subgrupos; distribuímos os cartazes, aleatoriamente, entre eles e pedimos aos alunos que, após observação das figuras e sua identificação, colassem a tira com nome daquela classe.

A seguir, todos foram buscar, dentre as tiras de propriedades, aquelas que serviam para a classe que estavam lidando e estas tiras foram presas na parte inferior do cartaz com cliques.

A escolha das tiras com as propriedades transcorreu dentro da normalidade, exceto pelo fato de alguns grupos não conseguirem identificar como suas algumas tiras. O grupo do 3º JS que ficou com o losango, por exemplo, não identificou a propriedade: “as diagonais são perpendiculares” como sendo sua. O mesmo aconteceu com o grupo dos retângulos no 3º JB; a tira com “as diagonais são congruentes” não foi utilizada.

Outros se mostraram preocupados com a quantidade reduzida de tiras afixadas, dando a entender que quanto mais propriedades conseguissem associar à sua classe de figuras, mais

corretos eles estariam, retratando um comportamento típico de pensadores do nível 1; o diálogo abaixo testemunha esse comportamento:

Aluno 11: *Nossa, o nosso (trapézio) tá muito pobre. A gente não tá achando mais nada. Tá errado?*

Professora: *Já pensaram se essas propriedades bastam para identificar a classe de vocês?*

Deixamos para esclarecer essas dúvidas no momento da socialização das experiências dos grupos (fase integração) que veio logo a seguir.

A figura 18 mostra um grupo de alunos trabalhando com o losango.

Figura 18 – Módulo 4/Atividade 3: Grupo de alunos do 3º JS



Fonte: Foto da autora.

Todos os cartazes foram afixados no quadro e um representante de cada grupo foi apresentar e justificar as propriedades escolhidas. Quando alguém não conseguia justificar, outro colega do grupo era chamado para ajudá-lo e, se não bastasse, qualquer outro aluno poderia fazê-lo.

Figura 19 – Módulo 4/Atividade 3: Socialização de Experiências (aluno do 3º JS)



Fonte: Foto da autora.

Os cartazes foram colados no quadro, propositadamente, na seguinte ordem, estabelecida pela professora: trapézio; paralelogramo; retângulo; losango e quadrado.

O uso dos cliques facilitou a troca de posição das propriedades de forma que pudemos checar, por exemplo, quais classes apresentavam tal propriedade. Foi um momento de discussão muito rico, pois a visualização das propriedades ajudou muito na sua interpretação. A fala do aluno 12 expõe uma “reflexão” sobre as propriedades comuns apresentadas pelos grupos:

Aluno 12: Todos têm quatro lados. Lados opostos paralelos também, menos o trapézio.

O fato de o número de propriedades ir aumentando à medida que passávamos de uma classe para outra, segundo a ordenação estabelecida, chamou a atenção de alguns alunos. Tivemos, então, a oportunidade de reintroduzir o conceito de inclusão de classes como mostra o diálogo a seguir:

Aluno 13: *O retângulo tem tudo que o paralelogramo tem e mais “Todos os ângulos são retos” e “As diagonais são congruentes”*

Aluno 14: *O losango também. Mas acrescenta “Todos os lados são congruentes” e “As diagonais são perpendiculares”*

Professora: *E o quadrado?*

Aluno 15: *É o que mais tem. Tem todas as tirinhas possíveis.*

Pelo diálogo abaixo, percebemos que a professora aproveitou esse momento para mostrar que algumas figuras têm propriedades em comum e que isso pode classificá-las dentro de uma mesma classe:

Professora: *Todas as figuras que têm quatro lados são quadriláteros. Os paralelogramos e os trapézios são quadriláteros. Os quadriláteros que apresentam lados paralelos são paralelogramos. Os paralelogramos que apresentam todos os ângulos retos são retângulos e os que apresentam lados congruentes são losangos. Estão acompanhando a sequência pelos cartazes?*

Aluno 16 : *Mas e o quadrado? Em que grupo ele entra?*

Professora: *Ele tem lados opostos paralelos?*

Aluno 16: *Tem. Por isso ele é, também, um paralelogramo?*

A discussão buscou reforçar a inclusão de classes e quando reforçamos a ideia de que todo quadrado é um retângulo, um losango, um paralelogramo, um quadrilátero e um polígono, uma aluna fez um analogia muito interessante:

Aluna 17: *Não é porque eu sou ourobranquense que eu vou deixar de ser mineira. E brasileira. Sou tudo isso.*

Para finalizar a atividade, o quadro-síntese previamente preparado foi colado no quadro, ao lado dos demais cartazes e preenchido por um aluno que, voluntariamente, se ofereceu para fazê-lo, sob a supervisão/indicação dos colegas e da professora.

Figura 20 — Módulo 4/Atividade 3: Quadro-síntese: Propriedades dos quadriláteros (Aluno do 3º JB)

Propriedades	Nomes das figuras					
	Quadrilátero	Trapezo	Losango	Paralelogramo	Retângulo	Quadrado
Tem quatro lados.	X	X	X	X	X	X
Tem quatro lados iguais.			X	X	X	X
Tem quatro ângulos internos.	X	X	X	X	X	X
Apenas um par de lados opostos paralelos.	X	X				
Lados opostos paralelos.		X	X	X	X	X
Lados opostos congruentes.			X	X	X	X
Ângulos opostos congruentes.			X	X	X	X
Quatro ângulos retos.					X	X

Fonte: Foto da autora.

Também esta atividade prestou-se, especialmente, aos pensadores do nível 2, buscando levá-los ao nível 3; a classificação das figuras através das suas propriedades é um primeiro passo em direção à abstração do nível 3.

Muitos dos nossos alunos mostraram-se bem à vontade e seguros ao manusear e empregar as tiras com as propriedades das figuras e atribuímos esta reação aos resultados positivos das atividades anteriores.

Para os pensadores do nível 1 foi muito importante o apelo visual dos cartazes montados; fazer um estudo das propriedades das figuras valendo-se de elementos compatíveis ao seu raciocínio, segundo a teoria de van Hiele, foi extremamente positivo. Os trabalhos foram conduzidos na forma de orientação guiada, buscando apoiar este aluno que, por conviver com colegas de nível mais elevado, muitas vezes, é atropelado por eles, mesmo que de forma não intencional.

A atividade 4 — *“Estabelecendo Relações de Inclusão de Classes”* — pretendia, além de avaliar se os alunos eram capazes de identificar e explicar as relações de inclusão de classes possíveis, promover esse entendimento.

Quadro 9 – Descrição da Atividade 4 - Módulo 4

ORGANIZAÇÃO (professor)	PROPOSTAS DE TRABALHO (aluno)
<p>a) Preparar uma coleção de quadrados, uma de retângulos, uma de losangos e uma de paralelogramos, de tamanho, orientação e cores diferentes.</p> <p>b) Questionar os alunos sobre o grande grupo a que pertencem todas aquelas figuras.</p> <p>c) Incentivar a discussão até que a resposta correta seja dada. Em seguida, mostrar, aos alunos os quatro grupos de figuras preparados e questioná-los: Posso mover um desses quadrados para o grupo dos quadriláteros? Por quê? E para o grupo dos retângulos? Por quê? (ou por que não?) Posso mover um desses retângulos para o grupo dos paralelogramos? Por quê? (ou por que não?)</p> <p>d) Coloque os quatro conjuntos de figuras sobre a mesa e proponha movimentos entre os elementos desses grupos: Separe o grupo dos quadrados questione sobre as suas propriedades e pergunte se algum elemento dos outros grupos pode ser transferido para ele. Por quê? Depois faça o mesmo com os outros grupos (losangos, retângulos e paralelogramos), até que se perceba uma compreensão efetiva da inclusão de classes.</p>	<p>Proposta 1: Construir algum material que ilustre a inclusão de classes dentro dos quadriláteros.</p>

Fonte: Elaborado pela autora.

Utilizamos, para esta atividade, as mesmas figuras, recortadas em papel cartão, utilizadas na atividade 2 deste módulo, além das tiras com os nomes dos quadriláteros. Como apoio ou base usamos, desta vez, uma folha de papel apergaminhado no 3º JS e folhas de cartolina no 3º JB.

Como os procedimentos nas duas salas foram diferentes, vamos expô-los separadamente. No 3º JS, primeira sala em que a atividade foi aplicada, trabalhamos com um único e grande grupo. Arrumamos algumas mesas no centro da sala onde o papel apergaminhado foi colocado e, sobre ele, vários quadriláteros recortados em papel cartão e as tiras com os nomes dos mesmos.

A atividade foi conduzida pela professora que comandou os questionamentos feitos aos alunos, conforme a fala abaixo:

Professora: *A que grande grupo de polígonos pertence todas essas figuras? Podemos subdividi-las em grupos menores? Como ficaria?*

Os alunos arrumavam as figuras sobre a base, colocavam o nome das classes a que pertenciam e apresentavam à professora, o arranjo feito no cartaz. Uma das configurações efetuadas aparece na figura 21.

Figura 21 – Módulo 4/Atividade 4: Classificação Inicial dos Quadriláteros



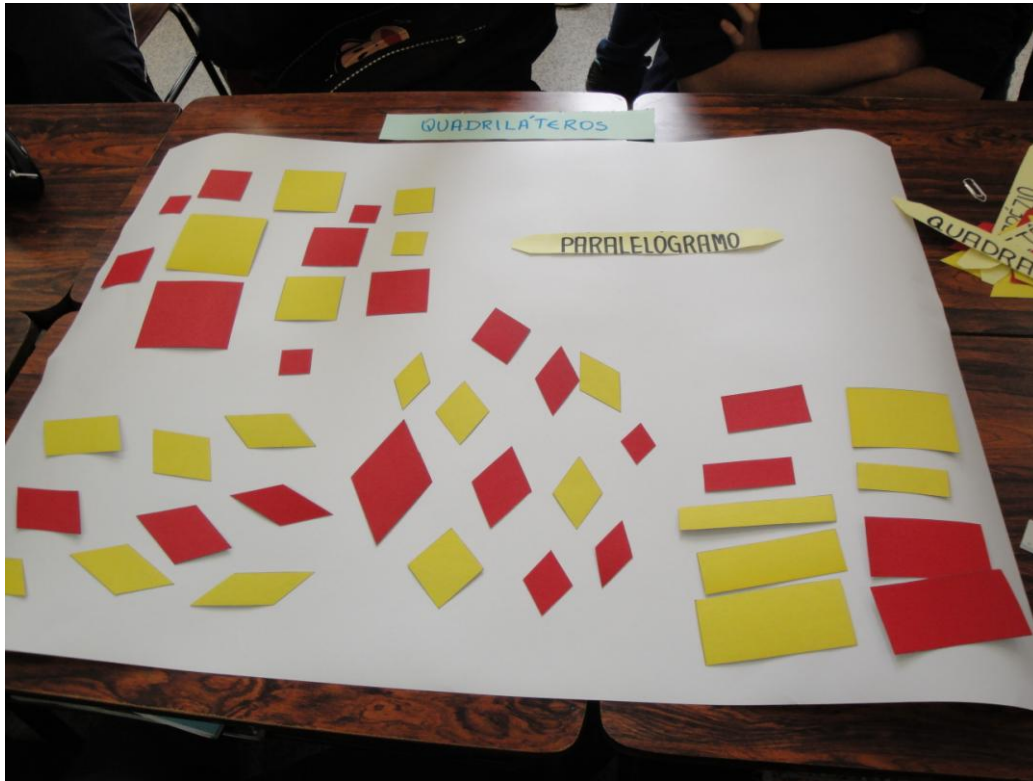
Fonte: Foto da autora.

A partir daí, usando a base elaborada pelos alunos, a professora começou a sugerir mudanças na localização de algumas figuras:

Professora: *Posso mover um desses quadrados para o grupo dos losangos? Por quê? E para o grupo dos retângulos? Por quê? (ou por que não?) Posso mover um desses retângulos para o grupo dos paralelogramos? Por quê? (ou por que não?)*

As respostas eram dadas verbalmente e as figuras rearranjadas de forma a atender aos questionamentos. Quando questionados sobre quais figuras poderiam ser transferidas para o grupo dos paralelogramos, um aluno sugeriu que apenas os trapézios fossem retirados, sem misturar as demais figuras, indicando uma perfeita distinção entre os quadriláteros que são paralelogramos e os que são trapézios. O cartaz da figura 22 mostra como foi a apresentação referente a esse questionamento.

Figura 22 – Módulo 4/Atividade 4: Quadrados, Retângulos e Losangos juntando-se aos Paralelogramos



Fonte: Foto da autora.

Muitos outros questionamentos desta natureza foram feitos, sugerindo possíveis transferências de figuras de um grupo para outro, baseadas nas propriedades apresentadas por cada um. O diálogo abaixo, entre a professora e dois alunos, mostra como conceitos importantes eram colocados e construídos.

Professora: “Vamos separar os retângulos. Que propriedades caracterizam um retângulo?”

Aluno 18: “Lados opostos paralelos, ângulos retos, diagonais iguais.”

Professora: “Existe alguma figura de outro grupo que possa ser transferida para este grupo porque apresenta essas propriedades?”

Aluno 19: “Todos os quadrados, então.”

Na figura 23 temos a configuração obtida com a transferência dos quadrados para o grupo dos retângulos.

Figura 23 — Módulo 4/Atividade 4: Quadrados juntando-se aos Retângulos



Fonte: Foto da autora.

Após explorarmos bem o fato de uma figura pertencer a mais de uma “classe”, reforçamos a ideia de subclasse e o conceito de inclusão de classes.

Transportar os retângulos e os losangos para o grupo dos paralelogramos, os quadrados para o grupo dos retângulos, losangos e paralelogramos, ajudou muito os alunos de nível de raciocínio menos elevado. Para eles a abstração é quase inexistente e a possibilidade de visualização do trânsito das figuras nas diferentes classes foi de grande valia na compreensão desse conceito.

Observamos em alguns alunos que raciocinam num nível mais elevado (3 ou próximo de 3) uma tendência a monopolizar a atividade, com trocas de posições de figuras muito rápidas, não dando oportunidade aos colegas que raciocinam num nível mais baixo de acompanharem os seus movimentos. Nossa intervenção fez-se necessária diversas vezes no sentido de garantir uma participação mais efetiva desses últimos e promover a sua evolução.

Por fim, foi proposto ao grupo (todos os alunos da sala) que confeccionassem um cartaz, usando aquele material à sua disposição para ilustrar a inclusão de classes (FIG.24).

Figura 24 – Módulo 4/Atividade 4: “A inclusão de Classes” do 3º JS.

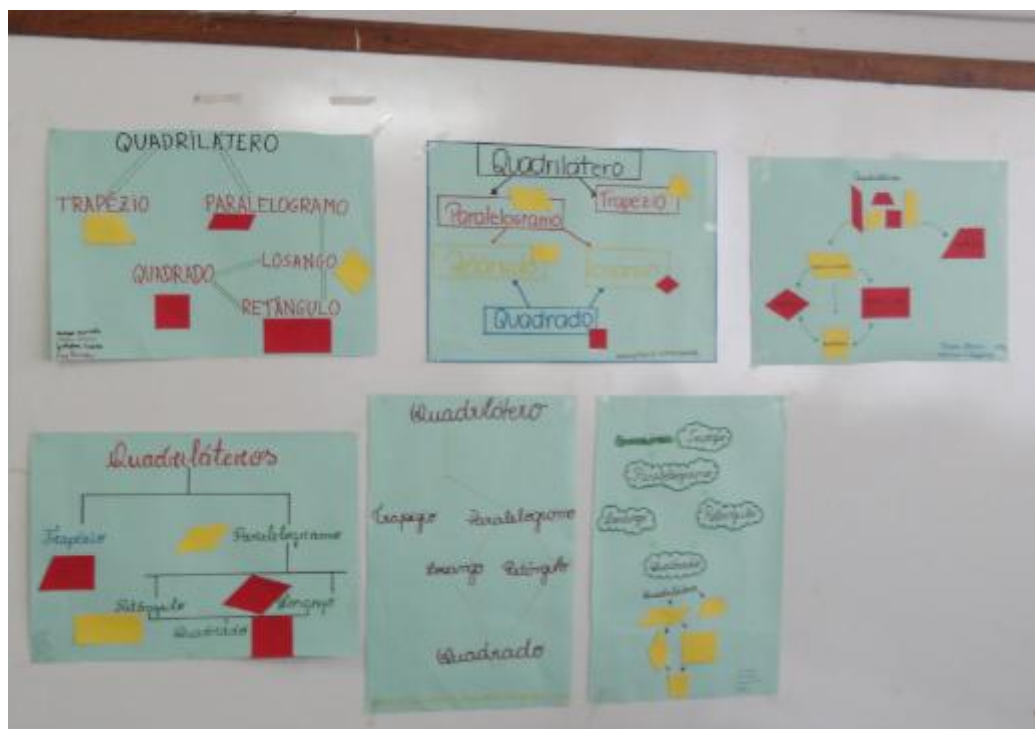
Fonte: Foto da autora.

No 3º JB, fizemos uma pequena alteração na proposta de confecção do cartaz ilustrando a inclusão de classes. Percebemos que no 3º JS houve uma dispersão dos alunos no momento da confecção do cartaz; apenas sete alunos se envolveram diretamente na tarefa e os demais, por falta de espaço, sentiram-se desmotivados e se afastaram.

Decidimos, então, mudar de estratégia; a primeira etapa da atividade, na qual as figuras são dispostas sobre o apergaminhado e são feitos questionamentos sobre a sua classificação, foi conduzida como no 3º JS. Já na etapa da construção do cartaz, resolvemos buscar a participação da maioria e solicitamos, ao invés de um único cartaz, a produção de vários, sendo um para cada grupo de quatro alunos. Garantimos, assim, o envolvimento de todos nas duas etapas e o clima de competição que se instalou durante a confecção dos cartazes impulsionou a qualidade da nossa produção.

Cartazes menores, feitos em cartolina, foram colados no quadro para a apreciação de todos; as vantagens e desvantagens das diferentes formas de ilustração apresentadas foram apontadas e serviram para reforçar não só os conceitos geométricos focados, mas também a importância das representações em qualquer área do conhecimento. A produção do 3º JB está exposta na figura 25.

Figura 25 – Módulo 4/Atividade 4: “A inclusão de Classes” do 3º JB



Fonte: Foto da autora.

Por se tratar de uma atividade direcionada aos pensadores de nível 2 ou 3, presta-se, principalmente, para a exploração das fases de orientação livre e de integração.

No entanto, percebemos que seria mais produtivo deixar os alunos livres para criar o cartaz somente após insistir na compreensão da idéia de inclusão de classes. Assim, pudemos dar mais atenção aos pensadores de nível 1 ou abaixo, pois de alguma forma, esses alunos precisavam ser atendidos, não só para garantir a sua evolução, mas para garantir o progresso do todo o grupo.

A última atividade aplicada foi a de número 5, do Módulo 4. Intitulada “*Descobrimo ou Adivinhando?*”, tinha como objetivo o reconhecimento de figuras geométricas através de seus elementos.

Demandou cerca de duas aulas geminadas e os alunos trabalharam, desta vez, individualmente; com ela pudemos avaliar como o aluno utiliza informações parciais de uma figura (vista parcial ou algumas propriedades) para fazer julgamentos sobre que figura aquela poderia ou não poderia ser.

Proposta como um jogo, a atividade explorou o lúdico para motivar o grupo que já havia passado por várias outras atividades coletivas.

Quadro 10 – Descrição da Atividade 5 - Módulo 4

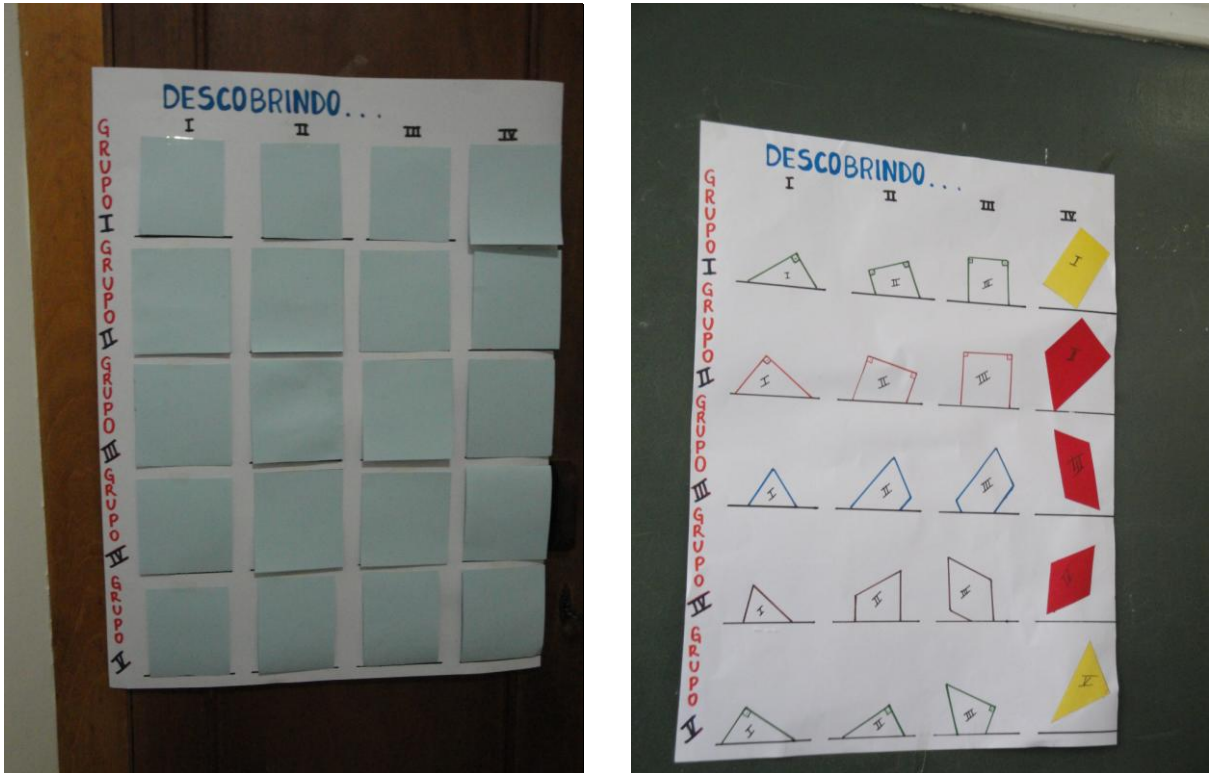
ORGANIZAÇÃO (professor)	PROPOSTAS DE TRABALHO (aluno)
<p>a) Propõe-se um “jogo” cujo objetivo é o reconhecimento de figuras geométricas através de seus elementos, a partir de um cartaz em que apareçam gradativamente partes de uma figura a ser descoberta.</p> <p>b) O cartaz deve conter cinco ou seis sequências de figuras a serem descobertas. Cada sequência apresenta a figura em quatro estágios (I, II, III e IV), com detalhes que vão se acrescentando na medida em que se caminha do estágio I para o IV, onde a figura está totalmente à mostra.</p> <p>c) Inicialmente o cartaz é apresentado com as figuras encobertas as quais vão sendo descobertas uma a uma, iniciando pela primeira sequência, do estágio I para o II, do II para o III e do III para o IV. A cada figura descoberta, os alunos são questionados sobre que figura poderia ser aquela, devendo justificar suas respostas e fazer o registro das informações obtidas na “ficha de possibilidades”.</p> <p>d) Após ter analisado a “figura” exposta no estágio III e com base nas características e propriedades observadas até então, o aluno tenta identificá-la, escrevendo o seu nome no espaço reservado para este fim, na ficha de possibilidades.</p> <p>e) Finalmente, alcança-se o estágio IV e a figura fica totalmente à vista. Cada um pode, então, verificar se havia indicado a figura correta.</p>	<p>Proposta 1: <i>Preencher a ficha de registro de possibilidades de a figura ser ou não o que se espera, de acordo com as propriedades observadas. Cada figura descoberta antes do estágio IV valerá 1,0 ponto.</i></p>

Fonte: Elaborado pela autora.

Confeccionamos para esta atividade, um cartaz, em uma folha de cartolina, com os 5 grupos de figuras a serem descobertas. Cada grupo correspondia a uma única figura parcialmente desenhada. Durante os estágios (I a IV), nesta ordem, aparecia parte daquela figura, que ia ficando cada vez mais à mostra, com o último estágio expondo-a integralmente. O objetivo do jogo era descobrir qual era a figura, o mais cedo possível, antes que o estágio IV fosse atingido. As observações das propriedades visíveis e/ou inferidas foram registradas pelos alunos, dando origem a uma lista de possibilidades e impossibilidades para cada figura (grupo). A figura 26 expõe o cartaz mostrando as duas situações extremas: todas as figuras encobertas em seus diversos estágios e todas as figuras já descobertas, revelando a figura “misteriosa”.

Uma ficha de registro de observações foi criada especialmente para esta atividade. Ela deveria ser preenchida individualmente e os alunos anotariam nos espaços “pode ser” e “não pode ser” as figuras que lhes pareciam corresponder às características reveladas em cada estágio (lista de possibilidades). Na figura 27 temos a reprodução parcial desta ficha.

Figura 26— Módulo 4/Atividade 5: Cartaz com as figuras totalmente cobertas e totalmente descobertas



Fonte: Fotos da autora.

Apesar de sabermos do apoio dos registros escritos, conduzimos a tarefa sempre atentas às falas dos alunos e às estratégias estabelecidas por eles para descobrir de que figura estávamos tratando. Procuramos, também, incentivá-los a fazer análises mais criteriosas e evitar as inferências imediatas e sem embasamento.

Figura 27 — Módulo 4/Atividade 5: Ficha de Registro de Possibilidades (reprodução parcial)

FICHA DE REGISTRO DE POSSIBILIDADES							
Módulo: 4 Atividade: 5 Descobrindo ou adivinhando?							
FIGURA	Estágio_I		Estágio_II		Estágio_III		Estágio_IV
	Pode ser	Não pode ser	Pode ser	Não pode ser	Pode ser	Não pode ser	Nome da figura
Grupo I							
•							
•							
Grupo II							
•							
•							
•							

Fonte: Elaborada pela autora.

Foi uma atividade que despertou interesse, principalmente pelo seu aspecto lúdico; quando lançamos o desafio de tentar descobrir qual seria a figura num estágio qualquer que não fosse o último e que quanto antes, mais interessante, o espírito competitivo dos alunos aflorou e acabou se tornando um fator positivo de motivação. As falas, a seguir, revelam o nível de entusiasmos e competição gerado:

Aluno 20: *“Nem precisa descobrir mais. Já sei.”*

Aluno 21: *“Ah! Não é a figura que eu escrevi aqui no último quadrinho. Nem pensei que pudesse ter um lado mais comprido e ser um trapézio retângulo”.*

Ao escolhermos esta atividade para fechar a nossa série de aplicações, consideramos a sua adequação ao nível da maioria dos nossos sujeitos de pesquisa e as suas potencialidades no sentido de integrar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores e, ainda, se possível, manter acesa a chama da curiosidade e a motivação.

Confirmando as nossas expectativas, a participação dos alunos foi intensa e observá-los fazendo conjecturas, defendendo escolhas com argumentos bem colocados e justificados, foi muito gratificante. Descobrimos muitos talentos na arte da argumentação e podemos afirmar que o grupo, como um todo, apresentou um notável crescimento neste aspecto tão importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Aluno 22: *“É claro que isso jamais vai ser um triângulo. Posso cortar esse (a anotação na coluna “pode ser”). Com dois ângulos retos . . . impossível.”*

A fala do aluno 22 mostra como o preenchimento da ficha de registro de possibilidades, por si só, instiga os alunos a conjecturarem e a formularem defesas para as suas posições. Percebe-se uma linguagem mais próxima à formal, aliada a um maior cuidado ao definir conceitos geométricos e, até mesmo, figuras.

Ao término do jogo, todos contaram os seus acertos e as fichas de registro foram recolhidas para posterior análise; o depoimento abaixo reitera a nossa ideia sobre o papel da inovação e da motivação na condução das práticas pedagógicas.

Aluno 22: *“Professora, quando é que tem mais? Faz doutorado e usa a gente como sujeitos de pesquisa.”*

Abaixo apresentamos a Ficha de Registro de Possibilidades preenchida por uma aluna do 3º JS (FIG.28).

Figura 28 — Atividade 5/Módulo 4 - Ficha de Registro de Possibilidades

FICHA DE REGISTRO DE POSSIBILIDADES							
Módulo: 4	Atividade: 5	Descobrimo ou adivinhando?	Nome do aluno				
FIGURA	Estágio I		Estágio II		Estágio III		Estágio IV
	Pode ser	Não pode ser	Pode ser	Não pode ser	Pode ser	Não pode ser	Nome da figura
Grupo I	retângulo triângulo trapézio	losango	trapézio losango	quadrado	quadrado retângulo trapézio	paralelo- grama	retângulo
Grupo II	retângulo triângulo trapézio	losango	quadrado retângulo trapézio	losango	quadrado trapézio retângulo	losango	trapézio
Grupo III	triângulo losango quadrado retângulo	trapézio	trapézio paralelo- grama	quadrado losango triângulo			paralelo- grama
Grupo IV	triângulo quadrado retângulo		trapézio paralelo- grama retângulo losango	triângulo	losango	triângulo	losango
Grupo V	triângulo quadrado retângulo trapézio	losango	triângulo quadrado retângulo trapézio	losango	triângulo		triângulo

Fonte: Dados da Pesquisa.

Encerramos essa etapa da nossa pesquisa acreditando no sucesso da nossa empreitada; a teoria de van Hiele se vale muito de aspectos comportamentais e, neste caso, a percepção que o professor tem do processo é muito importante. Observamos que a aplicação das atividades selecionadas permitiu aos nossos alunos do nível 1 (Visualização ou Reconhecimento) ou abaixo, uma boa oportunidade de ascensão rumo ao nível 2 (Análise) e, ao mesmo tempo, impulsionou os alunos deste nível para o nível subsequente (nível 3 - Dedução Informal), uma vez que a maioria das atividades lhes permitiu estabelecer relações de propriedades dentro das figuras e entre figuras.

Assim, mesmo sem testá-los, arriscamos a atestar o progresso no nível de raciocínio de muitos deles baseando-nos na linguagem utilizada e na maneira como mostravam compreensão acerca dos conhecimentos adquiridos ao final dos nossos trabalhos.

6.2 Avaliando os níveis de van Hiele dos sujeitos de pesquisa após a aplicação das atividades.

Após aplicarmos todas as atividades programadas reaplicamos o mesmo Teste de van Hiele - (TVH) aplicado aos sujeitos de pesquisa no início do nosso trabalho. O objetivo desse novo enquadramento num dos níveis de van Hiele era avaliar o efeito das atividades desenvolvidas em sala de aula sobre esses sujeitos no que diz respeito ao seu progresso em termos de pensamento em geometria e da ressignificação dos conceitos geométricos abordados. Esta avaliação nos conduziria a um posicionamento quanto às potencialidades do produto final da nossa pesquisa, a cartilha: “Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de van Hiele”.

Como o TVH, seus pressupostos, desenvolvimento, validação e composição das questões já foram descritos no capítulo 4, passaremos imediatamente às fases de aplicação e análise. Lembramos que, apesar de termos enquadrado apenas dois alunos no nível 4 e nenhum no nível 5, decidimos aplicar o TVH na íntegra, com as 25 questões, como anteriormente e com os mesmos objetivos.

O padrão de apresentação do TVH foi mantido: caderno (tamanho A5) com capa contendo todas as instruções à realização do teste e uma folha de respostas separada do caderno de questões; imprimimos novos cadernos porque alguns continham registros de cálculos anteriores.

As duas turmas realizaram o teste no dia 07 de outubro de 2011, em horário normal de aula, numa aula de Matemática (50 min.), sob a minha orientação e supervisão. As instruções na capa do caderno foram suficientemente esclarecedoras e nenhuma irregularidade foi observada; tudo transcorreu conforme o previsto e apenas dois alunos do 3ºJB não participaram dessa avaliação.

Os critérios de enquadramento também foram os utilizados anteriormente e embora já tenham sido detalhadamente descritos no capítulo 4, faremos uma breve exposição das suas principais características:

- a) o aluno deve acertar pelo menos de três questões dentre as cinco propostas para cada nível (subgrupo) para considerarmos que ele satisfaz o critério (3 em 5) para aquele nível;
- b) a cada nível para o qual o critério tenha sido cumprido, associa-se uma nota (peso), que corresponde a uma potência de 2, a partir do nível 1. A soma das notas

ponderadas obtidas pelo cumprimento dos critérios dos níveis testado indicará o nível de van Hiele daquele aluno;

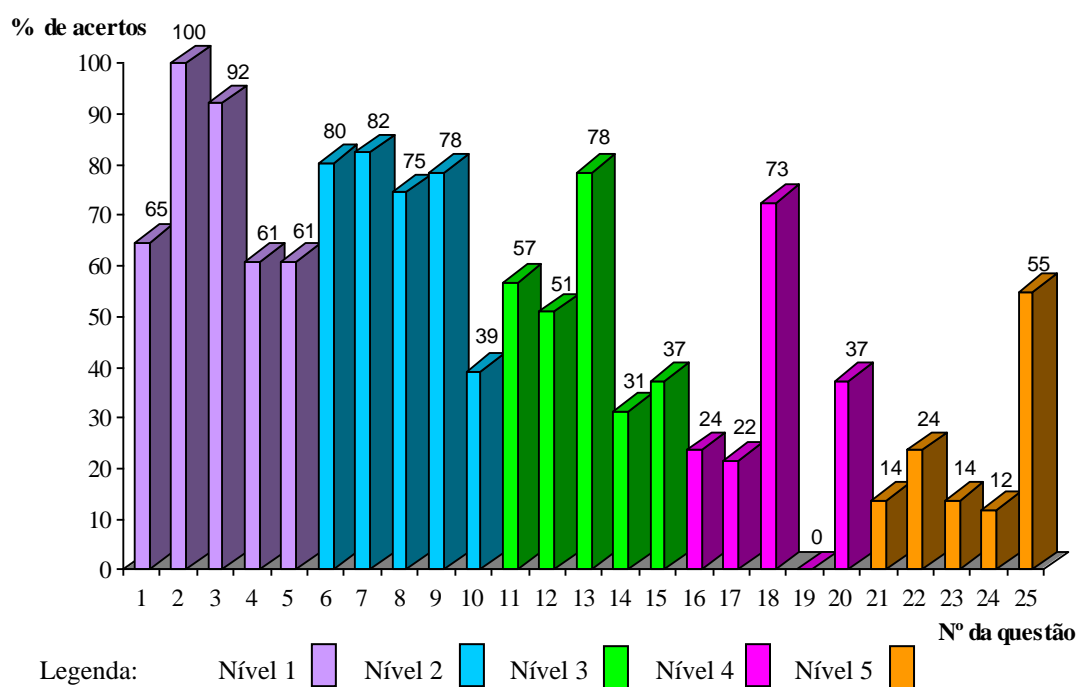
- c) lembramos, ainda, que o Modelo de van Hiele é sequencial e para que aluno seja enquadrado no nível n é preciso que ele satisfaça o critério estabelecido não apenas naquele nível, mas em todos os outros precedentes. A tabela 2, da seção 4.3.2, mostra as somas correspondentes aos enquadramentos possíveis.

Nesta segunda fase de avaliação dos níveis dos sujeitos, também discutiremos apenas o comportamento do grupo formado pelas duas turmas; o nosso projeto de pesquisa já previa a análise de um grupo de alunos da 2ª série do Ensino Médio sem distinção de turmas e, depois, as turmas atuais não correspondem, exatamente, às antigas turmas testadas. Uma avaliação comparativa do desempenho das duas turmas implicaria numa análise muito mais elaborada, relacionada ao histórico de formação dessas turmas e isso não faz parte do escopo do nosso trabalho.

Discutiremos, então, apenas os resultados globais obtidos e alguns casos isolados que se mostrarem esclarecedores e interessantes do ponto de vista qualitativo.

O gráfico 7 mostra o percentual de acertos nas 25 questões propostas no último TVH aplicado.

Gráfico 7 – Percentual de acertos no TVH, por questão (3ºJB e 3ºJS)



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como ocorreu na aplicação do primeiro TVH, mostrado no gráfico 6, do capítulo 4, podemos observar, também, uma perfeita distinção dos níveis apenas pela observação do número de acertos em cada um deles (GRAF.7).

Uma análise absoluta dos percentuais de acerto por questão, no entanto, não garante um maior ou menor enquadramento de alunos naquele nível, mas nos permite verificar se houve ou não uma evolução no número de acertos por nível.

A tabela 5 compara o percentual médio de acertos em cada subgrupo nos dois TVH aplicados.

Tabela 5 – Percentual de acertos médios por nível de van Hiele nos TVH aplicados

NÍVEIS	% MÉDIO DE ACERTOS - 1º TVH	% MÉDIO DE ACERTOS - 2º TVH	VARIAÇÃO DO % MÉDIO DE ACERTOS
1	73,6	75,8	+ 2,2
2	66,0	70,8	+ 4,8
3	39,8	50,8	+ 11,0
4	27,8	31,2	+ 3,4
5	20,0	23,8	+ 3,8

Fonte: Dados da Pesquisa

É notável o aumento do percentual médio de acertos em todos os níveis, principalmente nos níveis 2 e 3 que foram os níveis mais contemplados nas atividades que aplicamos. Nosso objetivo era impulsionar a grande massa de alunos dos níveis 1 e 2 para os subsequentes e embora apenas esta análise de valores não garanta o enquadramento dos sujeitos, já nos indica que houve uma sensível evolução no nível de pensamento geométrico dos mesmos.

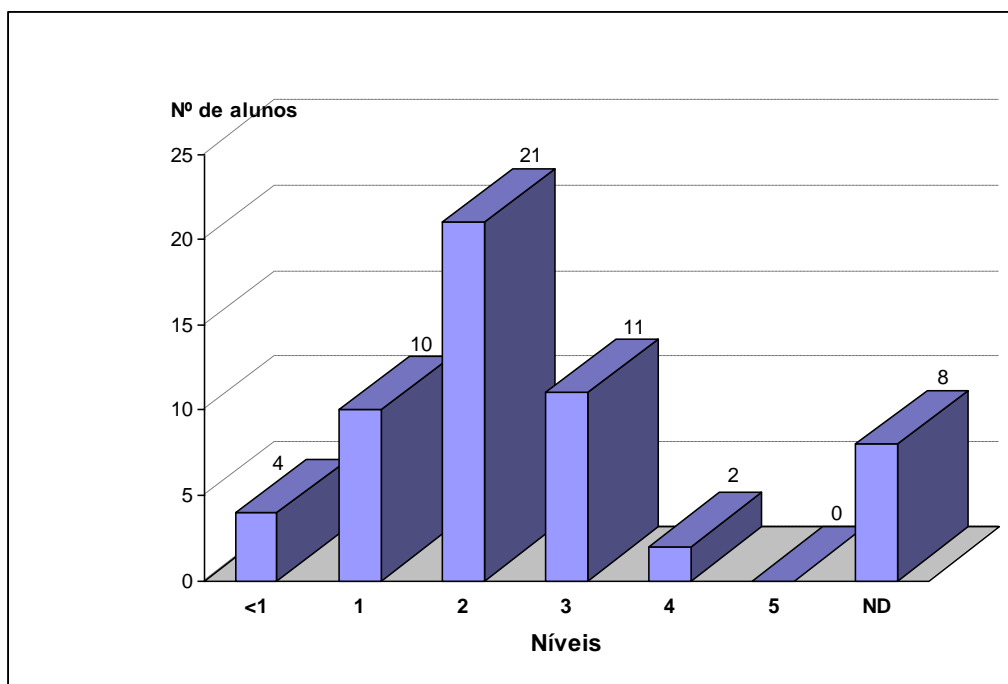
Com relação ao enquadramento, após a contagem dos acertos, ponderação pelo critério satisfeito em cada nível e obtenção das somas ponderadas de cada aluno, pudemos fazer a atribuição dos níveis de van Hiele correspondentes.

Nesta nova aplicação do TVH obtivemos um melhor aproveitamento no que diz respeito ao enquadramento dos nossos sujeitos de pesquisa⁹. Conseguimos enquadrar 90% deles e os resultados observados mostram-se superiores ao do teste anterior, confirmando as suspeitas levantadas pelos dados da tabela 5.

⁹ Os alunos ausentes foram excluídos da análise.

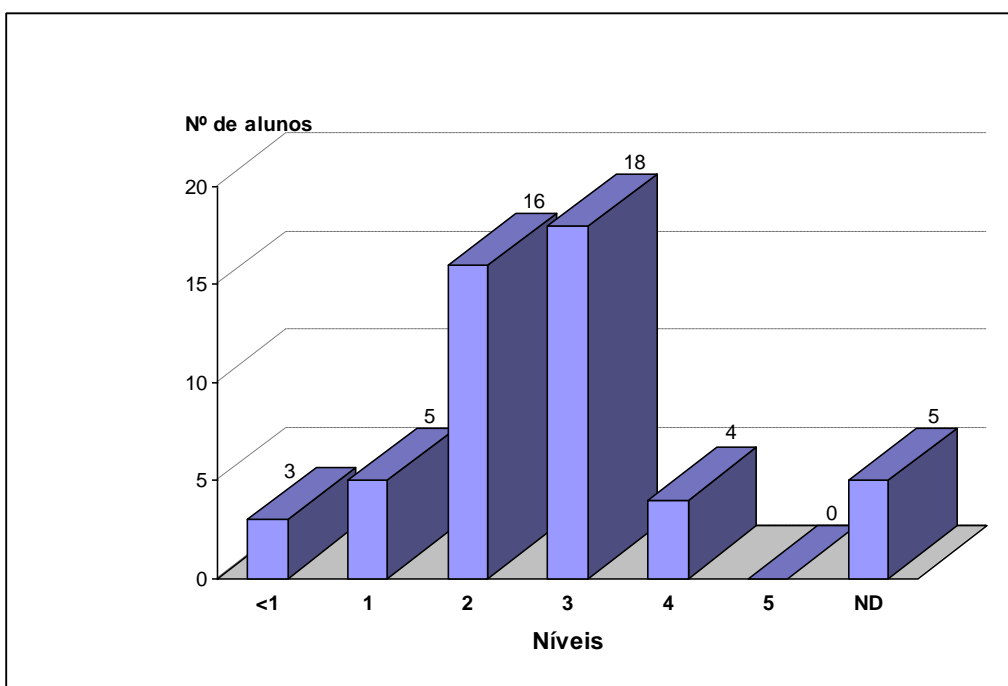
Os gráficos 8 e 9 a seguir ilustram essa evolução.

Gráfico 8 – Níveis de van Hiele - 1º TVH



Fonte: Dados da Pesquisa

Gráfico 9 – Níveis de van Hiele - 2º TVH



Fonte: Dados da Pesquisa.

Na tabela 6, apresentamos os resultados numéricos dos dois TVH aplicados para facilitar uma análise comparativa. Conseguimos, após a aplicação de atividades selecionadas da Cartilha, reduzir o percentual de alunos nos níveis < 1, 1 e 2 e aumentamos consideravelmente o percentual de alunos no nível 3 (cerca de 15%).

Tabela 6 – Percentual de enquadramento nos dois TVH aplicados

NÍVEL	Nº de Alunos 1º TVH	%	Nº de Alunos 2º TVH	%
< 1	4	7	3	6
1	10	18	5	10
2	21	37	16	31
3	11	20	18	35
4	2	4	4	8
5	0	0	0	0
Sub-Total	48	86	46	90
Indefinido	8	14	5	10
TOTAL	56	100	51	100

Fonte: Dados da Pesquisa.

Apesar de termos alcançado um nível de enquadramento muito bom com o TVH, decidimos que, nesta segunda etapa de avaliação dos níveis de van Hiele dos sujeitos, manteríamos firme o nosso propósito de enquadrar todos os nossos sujeitos de pesquisa.

Como tínhamos planejado, os cinco alunos não enquadrados com o TVH deveriam ser submetidos a outro teste, na forma de entrevista clínica, baseado nos estudos de Burger & Shaughnessy (1986), cujas tarefas e procedimentos de análise reproduzimos com o consentimento de um dos autores, o professor J. Michael Shaughnessy. Nos anexos E e F, respectivamente, temos o Roteiro das Entrevistas e os Formulários de Análise de Entrevistas (FAE) utilizados e no anexo G temos a autorização de reprodução concedida pelo autor.

Avaliando detalhadamente cada caso, percebemos que não seria necessário entrevistar os cinco alunos para atestar os seus respectivos níveis. Três dos cinco alunos com “nível indefinido” obtiveram somas ponderadas correspondentes ao cumprimento do critério (3 em 5) para o nível 5 sem cumpri-lo para algum dos níveis precedentes. Considerando o que diz a literatura em termos da possibilidade da não existência do nível 5, dos diversos estudos constatando que existe uma chance mínima de se encontrar alunos que o tenham atingido e, sustentadas por Usiskin (1982) que afirma ser a testabilidade do nível 5 questionável,

decidimos enquadrar esses alunos nos níveis que estariam, desconsiderando as cinco últimas questões. Designamos o conjunto desses alunos, cujo enquadramento não necessitou de novos testes, de “alunos de nível indefinido - tipo I”

Tabela 7 – Composição da Soma Ponderada dos alunos de nível “Indefinido” - tipo I

		NÍVEL 1	NÍVEL 2	NÍVEL 3	NÍVEL 4	NÍVEL 5	SOMA PONDERADA
Aluno A	Acertos	5	5	2	2	3	19
	Pesos	1	2	0	0	16	
Aluno B	Acertos	5	5	3	2	3	23
	Pesos	1	2	4	0	16	
Aluno C	Acertos	4	5	5	1	3	23
	Pesos	1	2	4	0	16	

Fonte: Dados da Pesquisa.

De acordo com a tabela 7, o aluno A será enquadrado no nível 2 e os alunos B e C serão enquadrados no nível 3.

Os outros dois alunos, cuja composição da Soma Ponderada não permitiu o seu enquadramento por motivos não relacionados ao nível 5, constituem o grupo de “alunos de nível indefinido - tipo II” e foram solicitados a serem testados novamente, através de um instrumento diferente do TVH. A tabela 8 mostra porque apenas desconsiderar o nível 5 não nos permitiu enquadrar esses dois alunos.

Tabela 8 – Composição da Soma Ponderada dos alunos de nível “Indefinido” - tipo II

		NÍVEL 1	NÍVEL 2	NÍVEL 3	NÍVEL 4	NÍVEL 5	SOMA PONDERADA
Aluno D	Acertos	4	5	1	3	0	11
	Pesos	1	2	0	8	0	
Aluno E	Acertos	2	5	4	3	1	14
	Pesos	0	2	4	8	0	

Fonte: Dados da Pesquisa.

O instrumento escolhido para avaliar e enquadrar estes últimos alunos constitui-se, na verdade, numa série de atividades sobre geometria aplicadas durante uma entrevista clínica gravada (áudio), conduzida por um professor/pesquisador. Após ouvir a gravação feita e registrar em formulário próprio todas as respostas dadas, esse professor irá confrontá-las com

os descritores de cada nível, procurando, seja na linguagem utilizada pelo aluno ou nos desenhos rascunhados por ele, o correspondente nível no qual irá enquadrá-lo.

Por se tratar de um teste longo, dispendioso e de análise complexa, com atividades específicas para avaliar os cinco níveis de van Hiele, optamos por não empregá-lo na íntegra a nenhum dos nossos alunos não enquadrados, mas usar apenas as atividades relacionadas aos níveis tidos com “duvidosos” pelo TVH.

Após a preparação de todo o material a ser utilizado durante as entrevistas clínicas, entramos em contato com os alunos a serem analisados e nos deparamos com um problema com o qual não contávamos. Alguns deles, hoje universitários, estão estudando e morando em outras cidades, distantes da cidade onde realizamos a pesquisa e onde moram as suas famílias. O fato de eles só retornarem às suas casas nos recessos escolares (feriados prolongados ou férias) impediu que alguns deles fossem entrevistados.

Já tínhamos tudo preparado para esta nova tentativa de avaliação dos níveis de van Hiele e a sua execução passou a representar mais uma oportunidade de utilizarmos um instrumento sofisticado e confiável, que não fosse um teste de múltipla escolha, que uma forma de garantir o enquadramento da totalidade dos nossos sujeitos de pesquisa. Desta maneira, decidimos pela continuidade do processo, entrevistando aqueles alunos que puderam e se dispuseram a nos atender.

O roteiro original das entrevistas apresenta oito atividades sobre figuras geométricas planas (triângulos e quadriláteros), envolvendo o desenho, a identificação e a definição das mesmas, além da sua classificação sob a perspectiva de raciocínio informal e formal. Essas atividades foram desenvolvidas com a intenção de evocar e provocar comportamentos compatíveis com os descritores dos níveis de Van Hiele, listados e exemplificados em nosso anexo A.

As primeiras atividades, sobre desenho, identificação e classificação (seis no total) de triângulos e quadriláteros, buscam trazer à tona caracterizações dos três primeiros níveis de Van Hiele. As duas últimas, de raciocínio formal, têm a intenção de obter dados sobre os níveis 3 e 4; nenhuma das oito atividades investiga o nível 5, que requer a capacidade de comparar diferentes geometrias e não se mostra aplicável aos nossos sujeitos.

Em nosso estudo, utilizamos seis dessas atividades, conforme se apresentam no anexo E. Priorizamos o estudo dos quadriláteros para mantermos a coerência com o enfoque dado a esta figura durante a aplicação das atividades da cartilha em sala de aula.

Nas atividades 1a e 1b, de desenho, pede-se ao aluno para desenhar uma figura, para desenhar outra que seja diferente da primeira de alguma forma, para desenhar outra que seja

diferente das duas primeiras e, assim por diante, enquanto a atividade se mostrar produtiva. Em seguida, o aluno é questionado sobre o que as diferencia e quantas figuras diferentes que ele poderia desenhar; o objetivo, neste caso, é investigar que propriedades os sujeitos variam para fazer "diferentes" figuras e se eles acham que o número de figuras possíveis é finito ou infinito.

Na atividade 2, de identificação e definição, o aluno recebe uma folha com o desenho de diversos quadriláteros e é pedido a ele que coloque um Q em cada quadrado, um R em cada retângulo, e se ele estiver familiarizado com os termos, um P em cada paralelogramo e um L em cada losango. Nesta primeira fase, de identificação, pede-se, também, que o estudante justifique as suas marcações e, se necessário, porque algumas das figuras não foram marcadas. Na parte de definição, questiona-se o aluno sobre o que ele diria a alguém para observar a fim de escolher todas as figuras de um mesmo tipo numa folha com diversas figuras diferentes, se ele poderia fazer uma lista mais curta de observações (apenas propriedades necessárias e suficientes) e se uma figura pode ser classificada em duas ou mais categorias. Assim, essa atividade explora as definições do aluno e as inclusões de classe.

Na atividade 3, de classificação, um conjunto de quadriláteros recortados é espalhado sobre a mesa e pede-se ao aluno para agrupar alguns desses quadriláteros segundo alguma característica comum que apresentem. Após um agrupamento ser concluído, novas investigações são feitas sobre a possibilidade de se formarem novos grupos e sobre a semelhança observada entre os elementos deste novo grupo. Estimula-se o aluno a diversificar o quanto puder as características observadas e pretende-se com isso verificar que propriedades ele considera quando compara quadriláteros, além da sua habilidade em distingui-las.

A atividade 4, de raciocínio formal, constitui-se num jogo de inferência em que um tipo particular de figura é revelada por suas propriedades; dicas sobre esta figura são mostradas uma a uma e o aluno deve interromper a revelação das mesmas assim que puder identificá-la. Procura-se, assim, determinar que propriedades e suas inter-relações o aluno considera como suficientes para caracterizar uma classe de figuras.

A atividade 5, também de raciocínio formal, apresenta uma série de perguntas sobre teoremas, axiomas e provas e procura saber se o aluno é capaz de estabelecer uma equivalência lógica entre duas proposições, além de verificar o seu conhecimento sobre os termos usuais típicos do formalismo geométrico.

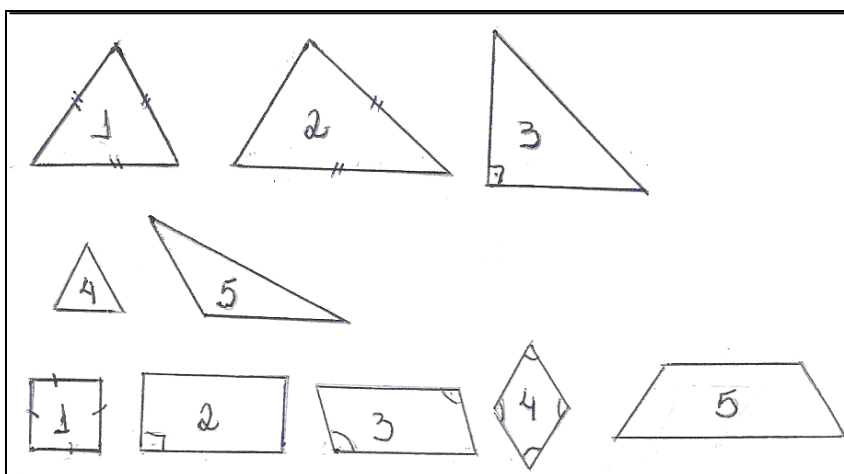
Todas as entrevistas clínicas foram realizadas individualmente e conduzidas por mim entre os dias 23 e 31 de março de 2012. O período de duração das mesmas variou entre 40 minutos e 1 hora e, ao término das atividades, o aluno era dispensado. À professora, após

ouvir cuidadosamente a gravação feita, cabia a tarefa de preencher o formulário de análise de entrevista (FAE), com respostas codificadas pelos criadores do instrumento, que serviria como norteador do processo de atribuição dos níveis de van Hiele aos alunos pesquisados. Neste documento também eram registrados resumos de respostas, evidências esclarecedoras ou de divergências, além de transcrições de fragmentos das fitas de áudio julgados particularmente úteis para revelar o nível de pensamento geométrico do aluno. Para cada atividade executada atribuía-se um nível predominante de raciocínio (de 1 a 4) e após uma análise de todo o conjunto atribuía-se ao aluno um nível global de raciocínio.

Dos alunos não enquadrados pelo TVH que deveriam ser reavaliados, apenas o aluno E foi testado. Por se tratar de um sujeito que cumpriu o critério (3 em 5) para os níveis 2, 3 e 4, sem cumpri-lo para o nível 1, decidimos avaliá-lo com a atividade 1a, relativa aos triângulos, e todas as atividades referentes aos quadriláteros. As atividades 1a e 1b são semelhantes, mas foram utilizadas por serem indicadas para a análise do nível 1 que é o nível sobre o qual pairavam as maiores dúvidas sobre o enquadramento daquele aluno.

De acordo com o FAE, nas tarefas de desenho (1a e 1b), o aluno E já mostrou um desempenho superior ao esperado para alguém que não cumpriu o critério para o nível 1 do TVH. Os desenhos foram feitos cuidadosamente com régua e diferenciavam-se por representarem tipos gerais — triângulos equiláteros, isósceles, escalenos, retângulos, acutângulos e obtusângulos. Apenas a nomenclatura usada para os dois últimos não foi adequada (agudo e obtuso, respectivamente); o mesmo pôde ser observado para os quadriláteros — quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.

Figura 29 — Desenhos do aluno E - atividades 1a e 1b



Fonte: Dados da Pesquisa.

O aluno mostrou conhecer as propriedades das figuras e como relacioná-las, razão pela qual lhe foi atribuído o nível 3 nesta atividade.

Nas atividades de identificação e definição (2- A,B,C,D,E) o aluno mostrou conhecer as propriedades das figuras, mas usou diversas propriedades redundantes; só quando estimulado procurava listar um número mínimo de propriedades definidoras de cada figura. Apesar de aceitar a inclusão de classes não mostrou ser capaz de definir concisa e precisamente cada grupo de figuras, necessitando fazer diversas alterações nas marcações originais. O nível atribuído a ele, nesta atividade, foi o 2.

As atividades de classificação (3 - A,B), nas quais as figuras recortadas pareciam facilitar as comparações e análises, foram executadas com facilidade e precisão; o aluno destacou diversos agrupamentos constituídos por tipos característicos de quadriláteros (paralelogramos, retângulos e losangos). Mostrou que entende bem a inclusão de classes, retirando figuras de um grupo e transferindo para outro com justificativas matematicamente precisas. Nesta atividade foi enquadrado no nível 3.

A atividade 4, sobre a figura misteriosa a ser descoberta por meio da revelação de suas propriedades, foi executada com o auxílio de desenhos sobre as possibilidades existentes. A fala transcrita abaixo indica traços de raciocínio lógico (dedução informal), indicando a sua busca por propriedades mínimas que determinassem a figura. O nível 3 foi atribuído ao aluno nessa atividade.

Aluno E: “se . . . , então pode (ou não pode) ser . . .” , “todo losango tem ângulos iguais . . .” , “nenhum trapézio tem os dois lados longos de mesmo tamanho. . . “

Quanto à atividade 5, também de raciocínio formal e indicada para pesquisar o nível 4, podemos dizer que as nossas suspeitas se confirmaram. Nenhuma prova ou mesmo a convicção de que ela é necessária foi observada. Apenas alguns desenhos para testar a validade das proposições foram feitos, sem nenhum traço de conhecimento da lógica matemática inerente às deduções formais. Assim, atribuímos o nível 2 para o aluno nessa atividade.

Com base no conjunto das atividades aplicadas, foi atribuído ao aluno E o nível de raciocínio global 3.

Considerando, ainda, a improbabilidade atestada por inúmeras pesquisas —Usiskin (1982), Burger & Shaughnessy (1985), Jaime e Gutiérrez (1990), Rezi (2001), dentre outras

— de um aluno de Ensino Médio atingir níveis superiores ao nível 3, resolvemos testar, também, aqueles que se enquadraram no nível 4 pelo TVH. É bem provável que, para esses alunos, tenha ocorrido um tipo de erro relacionado aos acertos por acaso, comum nos testes de múltipla escolha.

Dos quatro alunos enquadrados no nível 4 pelo TVH, três deles passaram pelas entrevistas clínicas e foram designados, neste estudo, por alunos X, Y e Z. Como o nível “duvidoso”, neste caso, era apenas o 4, não aplicamos a estes alunos as atividades relacionadas a desenhos (1a e 1b), apropriadas à avaliação dos primeiros níveis.

Pela avaliação dos FAE desses três alunos constatamos que os alunos X e Y apresentaram um comportamento semelhante em todas as atividades. Nas atividades de identificação e definição (2- A,B,C,D,E) ambos usaram as propriedades das figuras para identificá-las e defini-las; tiveram dificuldade em estabelecer um conjunto de propriedades mínimas capaz de definir algumas figuras, mas mostraram aceitar e compreender a inclusão de classes (retângulos são paralelogramos, quadrados são retângulos e losangos são paralelogramos). Para o aluno X, as propriedades do losango só ficaram claras após muita discussão, argumentação e refutação de contraexemplos; ao citar as propriedades do losango ressaltou o paralelismo dos lados opostos, o perpendicularismo das diagonais, mas não fez referência à congruência dos lados. O aluno Y confessou ter dificuldade em definir os losangos, como podemos observar pela sua fala:

Aluno Y: “. . . ele é como o quadrado, com lados opostos paralelos e de mesma medida. E os ângulos são iguais . . . Não . . . Os ângulos opostos é que são iguais . . . Eu realmente tenho dificuldade com os losangos . . .”

Este aluno terminou a atividade sem marcar os quadrados como sendo, também, losangos; aos dois alunos foi atribuído o nível 2 nessa atividade, mas se levarmos em conta a continuidade dos níveis, podemos afirmar que estão bem próximos do nível 3.

Nas atividades de classificação (3 - A,B), ambos utilizaram as propriedades dos diversos tipos de quadriláteros como critério para definir os agrupamentos feitos; os grupos eram feitos e designados pelos nomes (paralelogramos, retângulos, losangos e trapézios). Quando questionados sobre as propriedades que os caracterizavam as respostas eram consistentes e matematicamente precisas. A ambos foi atribuído o nível 3 nesta atividade.

Na atividade sobre a figura misteriosa ambos se colocaram de forma a buscar um conjunto mínimo de pistas para determinar a figura. Usaram desenhos para listar as possibilidades e a estratégia da eliminação das suposições não comprovadas. Também observamos uma certa familiaridade com a linguagem dedutiva informal como “todo”, “nenhum”, alguns, “se – então” e neste caso, foi atribuído o nível 3 aos alunos.

Como no caso do aluno E, a atividade 5 também desfez qualquer dúvida sobre a possibilidade de esses dois alunos estarem no nível 4, de dedução formal. Ambos tentaram mostrar através de desenhos a validade das proposições apresentadas na parte A da atividade. Nenhuma prova foi construída e ficou muito claro que esses alunos não conseguem ir além da análise das propriedades e das relações entre figuras. O termo teorema, conhecido de ambos, não foi corretamente definido por nenhum deles e o único exemplo que deram foi o Teorema de Pitágoras, conforme podemos constatar pelas falas abaixo:

Aluno X: Teorema é “*uma afirmação que dá prá mostrar que vale sempre*”.

Aluno Y: Teorema é “*uma verdade matemática que vai dar sempre certo*”.

Desta vez, a eles foi atribuído o nível 2. O nível de raciocínio predominante (global) atribuído a ambos foi o 3 e não 4, como indicava o TVH, confirmando as nossas suspeitas e o que indica a literatura sobre alunos com este grau de escolaridade. (REZI, 2001 ; USISKIN, 1982)

Quanto ao aluno Z uma pequena diferença foi notada em relação aos demais; nas atividades de identificação e definição (2- A,B,C,D,E) o aluno mostrou uma maior segurança e precisão na definição das propriedades mínimas (necessárias e suficientes) para caracterizar uma figura. Representou e justificou com precisão a inclusão de classes, além de relacionar propriedades para inferir outras, como mostra a sua fala transcrita abaixo; foi avaliado como estando no nível 3 para esta atividade.

Aluno Z: . . . *se eu digo que os ângulos opostos são iguais, os lados serão paralelos; nem preciso dizer . . .*”

Nas atividades de classificação (3 - A,B), de forma análoga aos demais, a grande classe dos quadriláteros foi subdividida nas diversas subclasses conhecidas. Diferentemente dos colegas criou um grupo com as duas figuras que não eram nem paralelogramos e nem trapézios, caracterizando-as como quadriláteros de lados opostos não paralelos; mostrou,

assim, que é capaz de relacionar as suas próprias definições, sendo classificado como nível 3 para a atividade.

Nas duas últimas atividades o comportamento foi semelhante ao apresentado pelos seus colegas testados, exceto pelo fato de mostrar mais afinidade com o termo postulado. A fala abaixo traduz a sua definição própria de postulado que, embora faça uso de termos não adequados, traz em si a ideia do conceito:

Aluno Z: Postulado é uma hipótese, proposição ou afirmação geral aceita como verdade”.

Mesmo assim, atribuímos a este aluno o nível 2, pois a construção de provas para a parte A desta atividade não mostrou ser relevante para ele.

No geral, atribuímos ao aluno Z o nível 3 de van Hiele, com boas perspectivas de ascensão ao nível 4.

Desta forma, demos por encerrada a etapa de reenquadramento dos sujeitos considerados de nível indefinido ou de nível 4 pelo TVH, com apenas dois deles permanecendo na condição em que estavam, pois não puderam participar das nossas entrevistas clínicas.

A tabela 9 mostra a nova distribuição dos nossos sujeitos de pesquisa nos 5 níveis de van Hiele.

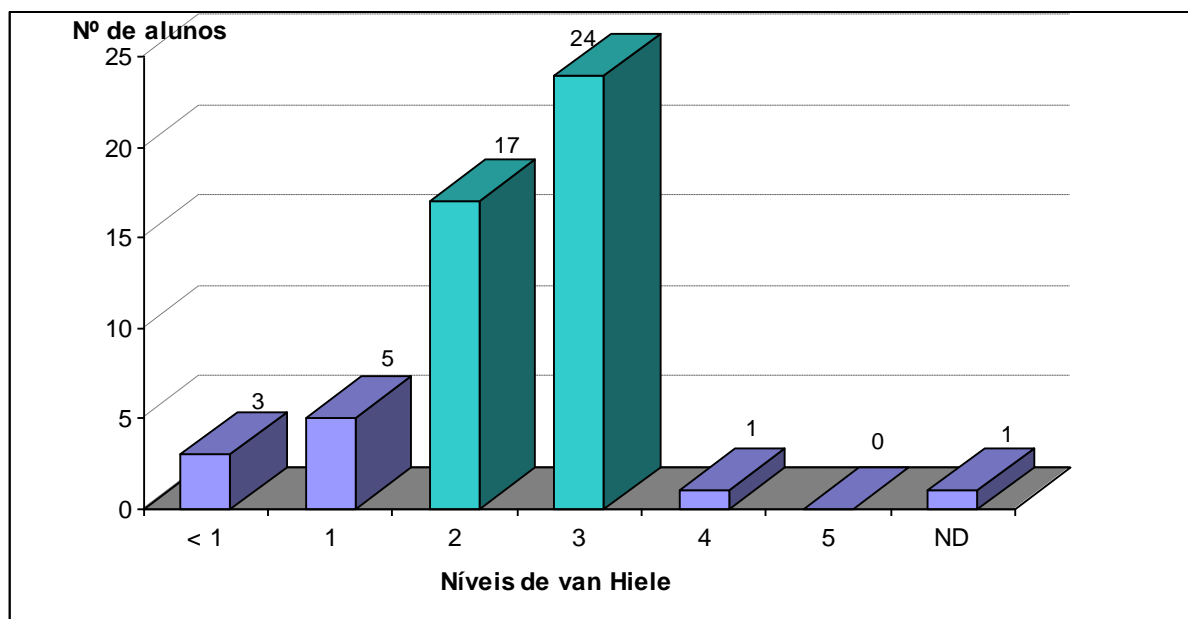
Tabela 9 – Níveis de van Hiele após reenquadramento

NÍVEL	Nº de Alunos avaliados (*)	%
< 1	3	6
1	5	10
2	17	33
3	24	47
4	1	2
5	0	0
Sub-Total	50	98
Indefinido	1	2
TOTAL	51	100

(*) Alunos testados pelo 2º TVH e/ou pelas entrevistas clínicas.
Fonte: Dados da Pesquisa.

Ter 98% dos nossos sujeitos de pesquisa enquadrados não é o fato que mais importa; ter 80% deles nos níveis 2 e 3 (ver destaque no Gráfico 10) e quase 50% no nível 3, após a aplicação das atividades selecionadas da cartilha, sim, pois confirma a nossa crença nas práticas pedagógicas embasadas na teoria de van Hiele.

Gráfico 10 – Níveis de van Hiele após reenquadramento



Fonte: Dados da Pesquisa.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segundo o nosso referencial teórico, não apenas questões de cunho pedagógico devem ser consideradas ao se avaliar as razões pelas quais, nas últimas décadas, a geometria tem sido relegada a um segundo plano dentro dos currículos escolares de todo o mundo. Pavanello (1989), Perez (1991) e Gazire (2000), em seus trabalhos sobre as causas e consequências do abandono da geometria nas escolas, afirmam que essa discussão não pode ser conduzida sem que aspectos políticos e socioculturais sejam também considerados. Destacam, ainda, as potencialidades da Geometria no desenvolvimento de habilidades e competências ligadas à construção e apropriação do conhecimento, aliada à capacidade de transferência desse conhecimento para situações fora da escola. Nesse contexto, o caráter emancipatório da Geometria torna-se mais evidente e a sua importância na Educação Básica ganha um status muito além do que lhe é atribuído atualmente.

O resgate da Geometria nas salas de aula representa, então, um passo significativo na formação de indivíduos autônomos e conscientes, capazes de interferir positivamente no meio em que vivem. Nessa perspectiva, desenvolver práticas pedagógicas que explorem esse potencial passou a ser, nos últimos anos, o grande desafio enfrentado pelos professores de matemática.

Durante todo o período de realização desta pesquisa tivemos a oportunidade de estudar, discutir e, principalmente, vivenciar alguns dos problemas mais evidentes relacionados ao ensino e aprendizagem da geometria. Dentre eles, destacamos a falta de conhecimento dos conceitos básicos da geometria plana apresentada pelos alunos do Ensino Médio, o qual acaba por se constituir num grande dificultador do processo de ensino e aprendizagem da geometria dos sólidos, conteúdo abordado na 2ª série daquele segmento.

A nossa primeira questão de pesquisa — *Como (re)significar, nas aulas de geometria dos sólidos, conceitos básicos de geometria plana, que deveriam ter sido construídos no Ensino Fundamental?* — levou-nos a pesquisar, também, “quais” desses conceitos constituiriam o objeto do nosso estudo.

A análise de alguns livros didáticos utilizados no Ensino Médio nos deu uma boa indicação sobre os conceitos geométricos cujo domínio ou não poderiam interferir na compreensão do estudo dos sólidos. No entanto, somente após a aplicação do teste de sondagem sobre o conhecimento prévio dos nossos sujeitos, em geometria, ocorrido na etapa inicial desta pesquisa, pudemos definir quais deles seriam abordados.

Era esperado que esses sujeitos, alunos da 2ª série do Ensino Médio, dominassem uma série de conceitos geométricos e demonstrassem algumas habilidades que deveriam ter sido desenvolvidas anteriormente, no Ensino Fundamental e Médio. Constatamos, porém, que alguns dos nossos alunos não dominavam nem os conceitos mais básicos da geometria plana, demonstrando não possuir as habilidades necessárias para dar continuidade ao estudo da geometria no Ensino Médio.

Embora o percentual de acertos nas questões do teste de sondagem tenha sido satisfatório para muitos dos conceitos pesquisados, optamos por trabalhar a ressignificação de todos eles e constatamos, ao final deste estudo, que não exageramos quando optamos por contemplá-los na sua totalidade. O comportamento dos alunos durante o desenvolvimento do nosso trabalho revelou a fragilidade de muitos conceitos avaliados como satisfatórios e acreditamos que essa incoerência possa ser atribuída à memorização de alguns conceitos e à mecanização na aplicação de fórmulas, fatores impossíveis de serem avaliados convenientemente num teste de múltipla escolha.

Como fazer a ressignificação desses conceitos geométricos foi, para nós, o grande propulsor desta pesquisa; consideramos, porém, impossível estabelecer procedimentos ou mesmo uma metodologia pedagógica capaz de conduzir o aluno a uma aprendizagem significativa, seja pela criação de novos conceitos ou pela reformulação de conceitos mal formados, sem refletir sobre a nossa segunda questão de pesquisa: *“Que aporte teórico poderia sustentar uma proposta de (re)significação desses conceitos?”*.

A bibliografia pesquisada conduziu-nos à teoria de van Hiele que, por seu caráter descritivo e prescritivo mostrou-se adequada aos nossos propósitos; o contato direto mantido com alguns dos mais renomados pesquisadores dessa teoria nos deu a confiança necessária para elegê-la como o embasamento teórico do nosso estudo. O teste de sondagem sobre o conhecimento prévio dos nossos alunos e o teste de múltipla escolha utilizado para enquadrá-los num dos níveis de van Hiele nos foram cedidos por um dos mentores do CDASSG, considerado um dos principais projetos americanos de pesquisa da teoria de van Hiele, o prof. Zalman Usiskin. As entrevistas clínicas que aplicamos em alguns dos nossos alunos também foram cedidas por outro importante pesquisador americano, o prof. J. Michael Shaughnessy, presidente do NCTM na gestão 2010-12. O fato de podermos contar com o material e orientação de ambos enriqueceu muito o nosso trabalho, pois tivemos a oportunidade de ir direto à fonte de valiosas informações, discutindo e comparando processos e resultados.

Desta forma, a nossa proposta de ressignificação de conceitos básicos de geometria plana, a partir do estudo de sólidos geométricos, firmou-se nos pressupostos da teoria de van

Hiele e não só se prestou a cumprir o seu objetivo, mas também nos permitiu constatar o quanto este modelo pode e deve ser explorado em benefício da compreensão dos conceitos abordados.

A resposta à nossa terceira e última questão de pesquisa — *“Como desenvolver práticas pedagógicas que favoreçam a construção do conhecimento geométrico e resgatem a crença nas potencialidades da geometria como instrumento de desenvolvimento de indivíduos criativos, capazes de selecionar, assimilar, processar, interpretar e conferir significações aos estímulos que o mundo lhe oferece?”* — está em cada um dos módulos de atividades que compõem o produto final dessa pesquisa, a cartilha *“Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de van Hiele”*.

Ressaltamos que este material deve ser considerado sob duas perspectivas. Primeiro, trata-se de uma proposta metodológica, com um embasamento teórico consistente e desenvolvida com o objetivo específico de ressignificar conceitos geométricos. Segundo, trata-se de um tutorial, pois não se constitui num material a ser usado diretamente pelo aluno, mas sim um material de apoio, direcionado ao professor que conduz o processo.

As atividades sugeridas colocam à disposição do professor um leque de possibilidades. Apesar de indicações sobre o nível de raciocínio contemplado, todas elas permitem adaptações e adequações. O grau de flexibilidade de cada uma dependerá, é claro, de como o professor se preparou para executá-la.

Lançar um olhar diferenciado para este professor que sabemos ser fruto de um ensino no qual a Geometria sempre foi preterida em relação à Álgebra, foi como apostar na importância da sua capacitação. Acreditamos que práticas pedagógicas diferenciadas, bem elaboradas e embasadas teoricamente só atingem os seus objetivos se forem aplicadas por um profissional preparado para explorar as suas potencialidades e isso ficou bem evidente em nossa pesquisa.

A aplicação de atividades selecionadas dessa cartilha mostrou que é possível uma aprendizagem significativa quando os sujeitos envolvidos são estimulados a interagirem com o objeto de estudo. Observamos, também, que alguns elementos foram fundamentais na formação e consolidação de conceitos, com destaque para a reflexão sobre a ação executada e a verbalização do raciocínio.

O primeiro teste de van Hiele que aplicamos acusou uma maior concentração de alunos no nível 2 e ao colocarmos nossa proposta pedagógica em prática, procuramos centrar na evolução desse grupo para o nível 3. Focadas nesse objetivo, priorizamos as atividades que

se valiam de modelos concretos, possibilitando ao aluno medir, observar, comparar, definir e classificar usando as propriedades das figuras.

Mais de uma atividade aplicada trabalhou o mesmo conceito, às vezes no mesmo nível de raciocínio, mas também em níveis diferentes. De acordo com van de Walle (2009), a recorrência, além da flexibilidade, é uma importante característica do modelo, pois as idéias criadas em um nível tornam-se o foco ou objeto de pensamento do nível seguinte.

Quase todas as atividades do módulo 4 abordaram as relações entre propriedades e o conceito de inclusão de classes, características do nível 3; mesmo assim, procuramos sempre explorar elementos que contemplassem os alunos dos níveis iniciais, adaptando o roteiro seguido e reforçando o desenvolvimento de habilidades condizentes com seus níveis.

Tivemos o cuidado de desenvolver, dentro de cada módulo, tarefas que correspondessem às fases de aprendizagem de van Hiele e isso também foi respeitado na seleção das atividades a serem aplicadas. Constatamos que o respeito a essa sequência metodológica constituiu-se num facilitador, pois o aumento gradativo da complexidade e do grau de liberdade das atividades permitiu aos alunos uma assimilação mais natural dos conceitos apreendidos, respeitando o tempo de cada um e suas particularidades no trânsito de um nível para outro.

Para os alunos que já estavam no nível 3, o trabalho desenvolvido serviu para consolidar conceitos e reforçar posturas, revelando grandes articuladores e mediadores durante as discussões travadas. Não era nossa proposta conduzi-los ao nível 4, mesmo porque nenhuma das atividades que desenvolvemos contempla formalmente as demonstrações e as provas, próprias desse nível.

Tivemos até alguns casos de alunos equivocadamente enquadrados no nível 4 pelo TVH, o que foi posteriormente corrigido pelas entrevistas clínicas efetuadas com cada um deles. Um aluno deste nível vai muito além de identificar as características das figuras geométricas e suas relações. Ele é capaz de construir provas usando axiomas e definições e esta habilidade dificilmente é trabalhada nas escolas brasileiras durante o Ensino Fundamental e Médio. Pode ser que um aluno que raciocine no nível 3 consiga até se dar bem num teste de múltipla escolha que avalie o nível 4 porque já é capaz de acompanhar argumentos informais numa demonstração, mas isso não garante que ele consiga criar novas provas partindo de premissas diferentes. De fato, baseado nas análises dos protocolos gerados nas entrevistas clínicas, todos eles estavam no nível 3, mas estamos certas de que, ao final desse trabalho e considerando a continuidade dos níveis de van Hiele, alguns deles se aproximaram bem do nível 4.

O crescimento conceitual dos nossos alunos, constatado pela evolução do seu nível de raciocínio após vivenciarem a proposta metodológica apresentada, confirmou as nossas expectativas na possibilidade de construção de um conhecimento com compreensão.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) indicam que a Geometria deve ser trabalhada desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, mas a realidade que nos é apresentada se contrapõe às determinações do MEC. Confiamos nas tentativas de reversão desse quadro, principalmente nas de cunho metodológico, visando superar a fragmentação e a desarticulação que se percebe no ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio.

Nosso trabalho pretende somar-se a todos aqueles que buscam resgatar a Geometria nas salas de aula, contribuindo para o desenvolvimento de práticas pedagógicas que se sustentem não somente pelo caráter prático de sua aplicação, mas pelo embasamento teórico que apresentam.

Acreditamos na teoria de van Hiele como um caminho promissor, capaz de sustentar um projeto efetivo de retomada da Geometria nos currículos escolares brasileiros e esperamos que este trabalho possa contribuir para a disseminação dessa ideia; que ela consiga efetivamente prosperar, a exemplo dos muitos países que a tem como alicerce do seu currículo de geometria, como é o caso dos Estados Unidos, Japão e Rússia.

Que o produto final desta pesquisa, executado dentro dos pressupostos da Educação Matemática, atinja os seus propósitos e possa, efetivamente, colaborar para a capacitação dos professores que lutam por um ensino de qualidade.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, José Antônio Araújo; NACARATO, Adair. M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. **Educação Matemática em Revista**, Recife, v. 11, n.17, p. 61-70, dez. 2004.
- ARBACH, Nelson. **O ensino de geometria plana: o saber do aluno e o saber escolar**. 2002. 96 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.
- ATEBE, Humphrey Uyoyoyo. **Students' van Hiele levels of geometric thought and conception in plane geometry: a collective case study of Nigeria and South Africa**. 2008. 346 f. Tese (Doutorado) - Rhodes University, Grahamstown .
- BERTONHA, Regina Aparecida. **O ensino de geometria e o dia-a-dia na sala de aula**. 1989. 225 f. Dissertação (Mestrado em Educação - Metodologia do ensino) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Novo ENEM**. Disponível em http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13318&Itemid=310&msg=1 >. Acesso em: 05/11/2009.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental e Médio: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRUNER, J. S. **Toward a theory of instruction**. Cambridge, MA: Belknap Press, 1974. 192 p.
- BURGER, William. F. ; SHAUGHNESSY, J. Michael. Spadework prior to deduction in geometry. **Mathematics Teacher**, Reston, v. 78, n.5, p. 419- 427, May 1985.
- BURGER, William. F. ; SHAUGHNESSY, J. Michael. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 17, n.1, p. 31-48, Jan.1986.
- BÚRIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. 1989. 286 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Porto Alegre.
- CHIELE, Joel Nardi. **A geometria no ensino médio: um estudo sobre o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área e volume**. 2007. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas.
- CHIUMMO, Ana. **O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do ensino fundamental**. 1998. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.
- CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In:

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.) **Aprendendo e ensinando Geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p.1-20.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática** - contexto e aplicações. 3.ed. São Paulo: Ática, 2008. 3v.

FACCO, Sonia Regina. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem**. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

FUYS, D. et al. The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. **Journal for Research in Mathematics Education - Monograph number 3**, Reston, 1988. 195 p. Suplemento especial.

GAZIRE, Eliane Scheid. **Perspectivas da resolução de problemas em educação matemática**. 1988. 207 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.

GAZIRE, Eliane Scheid. **O não resgate das geometrias**. 2000. 217 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

GENZ, Rebekah. **Determining high school geometry students' geometric understanding using van Hiele levels: is there a difference between standards-based curriculum students and nonstandards-based curriculum students?** 2006. 97 f. Dissertação (Mestrado em Artes) - Brigham Young University, Department of Mathematics Education, Provo.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1996. 159 p.

HOFFER, A. Geometry is more than proof. **Mathematics Teacher**, Reston, v. 71, n.1, p. 11- 21, Jan.1981.

JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A.: Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. In: LLINARES, S. ; SÁNCHEZ, M.V. (Ed.). **Teoría y práctica en educación matemática**. Sevilla: Alfar, 1990. p. 295 - 384 (fragmentos)

LAURO, Maira Mendias. **Percepção - construção - representação - concepção. Os quatro processos do ensino da geometria: uma proposta de articulação**. 2007. 396 f. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo (SP).

LUJAN, Maria Lúcia S. **A geometria na 1ª série do 1º grau: um trabalho na perspectiva de van Hiele**. 1997. 190 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

LUNA, Maria de Fátima Aleixo de. **Estudo das trajetórias hipotéticas da aprendizagem de geometria espacial para o ensino médio na perspectiva construtivista**. 2009. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et al. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

MORACO, Ana Sheila do Couto Trindade. **Um estudo sobre os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do ensino médio**. 2006. 107 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Ciências, Bauru.

NASSER, Lílian. **Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil**. 1992. 397 f. Tese (Doutorado) - University of London, King's College, Centre for Educational Studies, London.

NASSER, Lílian. A teoria de van Hiele para o ensino de Geometria: pesquisa e aplicação. In: 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1995, Rio de Janeiro. **Atas do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 1995. p. 29-40.

NASSER, Lílian; SANT'ANNA, Neide da Fonseca Parracho. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro: Projeto Fundação/IM-UFRJ, 1997. 78 p.

NASSER, Lílian; TINOCO, Lúcia. **Curso básico de geometria: enfoque didático**. 3. ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundação/IM-UFRJ, 2004, 3 v.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de geometria no Brasil: uma visão histórica**. 1989, 196 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

PEREIRA, Maria Regina Oliveira. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino**. 2001. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

PEREZ, Geraldo. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. 1991. 348 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

PIROLA, Nelson Antônio. **Um estudo sobre a formação de conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos de 1º grau**. 1995. 108 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Educacional) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

PIROLA, Nelson Antônio. **Solução de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas**. 2000. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

PUSEY, Eleanor Louise. **The van Hiele model of reasoning in geometry: A literature review**. 2003. 87 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - North Carolina State University, Raleigh.

REZI, Viviane. **Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria**. 2001. 174 f. Dissertação (Mestrado

em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática curso ginásial. 3ª série.** 78. ed. São Paulo: Companhia Editoria Nacional, 1964.

SECCO, Anderson. **Conceito de área: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas.** 2007. 198 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SILVA, Maria Célia Leme da. A geometria escolar em Portugal e no Brasil: primeiros estudos. In: MATOS, José Manuel; VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). **A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos.** São Paulo: Vinci/CAPES, 2007. p. 81-103.

SILVA, Maria Célia Leme da. A geometria nos congressos nacionais de ensino de matemática. In: BÚRIGO, E. Z.; FISCHER, M.C.B.; SANTOS, M.B. (Org.) **A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: novos estudos.** Porto Alegre: Redes, 2008. p. 69-80.

SILVA FILHO, Alvesmar Ferreira. **Desenvolvimento de uma sequencia didática sobre quadriláteros e suas propriedades:** contribuições de um grupo colaborativo. 2007. 165 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

TOJO, Benedita Natsuko. **Concepção de uma sequencia didática para o ensino/aprendizagem da congruência.** 2006. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

USISKIN, Zalman. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.** The University of Chicago, 1982. Disponível em:
<http://ucscmp.uchicago.edu/resources/van_hiele_levels.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2011.

VAN DE WALLE, John A. O pensamento e os conceitos geométricos. In: VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Cap. 21, p.438-484.

VAN HIELE-GELDOF, Dina. **The didactics of geometry in the lowest class of the secondary school.** 1957. English summary (by Dina van Hiele-Geldof). Unpublished doctoral dissertation. University of Utrecht, Utrecht (Holanda).

VAN HIELE-GELDOF, Dina. The didactics of geometry in the lowest class of the secondary school. In: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele.** Brooklyn: Brooklyn College, p. 1-214. Documento original em holandês - De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V. H. M. O. Tese (Doutorado) não publicada - University of Utrecht, 1957.

VAN HIELE, Pierre Marie. **Structure and insight:** a theory of mathematics education. Orlando: Academic Press, 1986. 246 p.

VAN HIELE, Pierre Marie. **El problema de la comprensión:** en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tradução Angel Gutiérrez. 1957. 151 f. Tese (Doutorado) - Universidad Real de Utrecht, Utrecht.

VIANA, Odaléa Aparecida. **O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais:** um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. 2000. 230f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

APÊNDICES

Ressignificando a GEOMETRIA PLANA no Ensino Médio, com o auxílio de van Hiele

Organização: Profa. Mariângela de Castro e Oliveira
Orientação: Profa. Dra. Eliane Scheid Gazire

Belo Horizonte
2012

Créditos

Produção Técnica:

Mariângela de Castro e Oliveira

Eliane Scheid Gazire

Revisão do Texto:

Profa. Maria Helena Salgado Gondim

Design e Diagramação:

Otávio de Castro e Oliveira

Ilustrações:

Otávio de Castro e Oliveira

Mariângela de Castro e Oliveira

Apresentação

Esta cartilha, fruto de um trabalho de pesquisa sobre as dificuldades do processo de ensino-aprendizagem de Geometria Tridimensional no Ensino Médio, decorrentes, principalmente, do ensino fragmentado e falho da Geometria Plana praticado no Ensino Fundamental, tem como objetivo servir de apoio ao professor, criando alternativas metodológicas, fundamentadas na teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, que favoreçam a avaliação contínua do nível de raciocínio do aluno e a possibilidade concreta de progressão desse aluno, mediante um trabalho sistematizado, envolvendo atividades diversificadas e elaboradas especificamente para aquele nível de raciocínio.

Apresentamos, inicialmente, uma breve descrição do Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele, a fim de elucidar os princípios que sustentam esta teoria e dar ao professor os subsídios necessários para fazer uso das atividades sugeridas, com liberdade e autonomia, uma vez que todas elas podem ser modificadas e/ou adaptadas para atender às particularidades de cada turma.

A seguir, são apresentados cinco módulos de atividades, os quais têm como referência o trabalho de alguns dos mais importantes pesquisadores da teoria de van Hiele, como David Fuys, Dorothy Geddes, Rosamond Tischler, William F. Burger, J. Michael Shaughnessy e outros.

Por fim, algumas sugestões de softwares, links, jogos e outras atividades complementares são propostas com o intuito de enriquecer o programa de trabalho. Apostamos na diversificação de experiências como fator motivador e acreditamos que a produção de um conhecimento com compreensão é sempre possível. Demanda tempo, dedicação, planejamento, desenvolvimento de mecanismos de controle, enfim, muito trabalho. Mas a satisfação de ver emergir a luz do entendimento nos olhos dos nossos alunos é algo que não tem preço. Vale todo e qualquer esforço.

Sumário

APRESENTAÇÃO	3
1. O MODELO VAN HIELE DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO EM GEOMETRIA	7
1.1 Existência de Níveis	8
1.2 Propriedades dos Níveis	9
1.3 Movimento de um Nível para o Próximo	10
2. MÓDULOS INSTRUCIONAIS	13
MÓDULO 1 - CONHECENDO O UNIVERSO TRIDIMENSIONAL	16
Atividade 1: “Sólidos Geométricos? Muito prazer”	16
Atividade 2: “Descobrimdo formas”	17
Atividade 3: “Agrupando formas”	17
Atividade 4: “Identificando os grupos de formas”	18
Atividade 5: “Dissecando formas”	20
Atividade 6: “Integrando saberes”	21
MÓDULO 2 - A COEXISTÊNCIA DOS DOIS UNIVERSOS: O BI E TRIDIMENSIONAL	22
Atividade 1: “Diagnosticando”	22
MÓDULO 3 - FORMAS BIDIMENSIONAIS - Identificação e definição	25
Atividade 1: “Jogando com as semelhanças e as diferenças”	25
Atividade 2: “Figuras em fotos”	27
Atividade 3: “Nome & Figura”	28
Atividade 4: “Ao telefone!!!”	28
Atividade 5: “Quem é e por quê?”	29
MÓDULO 4 - FORMAS BIDIMENSIONAIS - Classificação	31
Atividade 1: “Adivinhando a regra”	31
Atividade 2: “Identificando e definindo - quadrilátero”	33
Atividade 3: “Quadriláteros - características & propriedades”	34
Atividade 4: “Estabelecendo relações de inclusão de classes”	35
Atividade 5: “Descobrimdo ou adivinhando”	36

Atividade 6: “Quem sou eu?”	37
Atividade 7: “Lista Mínima de Propriedades - LMP”	38
MÓDULO 5 - FORMAS BIDIMENSIONAIS - Outros conceitos	40
Atividade 1: “Festa de aniversário sem chapéu? Não é festa!	40
Atividade 2: “Feito sob medida”	42
3. ATIVIDADES COMPLEMENTARES	44
3.1 Batalha Naval Geométrica	44
3.2 Investigando Triângulos e Quadriláteros	46
3.2.1 Triângulos	46
3.2.2 Quadriláteros	47
3.2.3 Investigando Áreas e Perímetros	47
3.3 Jogo: Eu tenho, quem tem?	48
4. SUGESTÕES DE LEITURA	49
5. SUGESTÕES DE APPLETS E SITES	50
6. ANEXOS	51

1. O modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento em geometria

A teoria de van Hiele, que pode, também, ser considerada um modelo de aprendizagem, descreve o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos ao evoluírem de uma simples percepção holística de formas geométricas até uma refinada compreensão de provas e demonstrações geométricas.

Pierre Marie van Hiele e sua esposa, Dina van Hiele-Geldof, desenvolveram esta teoria a partir das frustrações, tanto deles quanto dos seus alunos, vivenciadas na relação ensino-aprendizagem de geometria. P.M. van Hiele explica que a dificuldade dos seus alunos em aprender geometria era tão grave que ele se sentia como se estivesse falando uma língua diferente. Afirma ainda que, apesar de sua insistente procura por formas diferentes de explicar os conteúdos geométricos, a dificuldade persistia.

Seguiram-se, então, as pesquisas sobre a aprendizagem matemática, o papel da compreensão em Geometria e a busca por metodologias capazes de garantir um ensino com produção de significados. Os trabalhos de pesquisa do casal iniciaram-se no final dos anos 50 e a dificuldade apresentada por seus alunos em atividades que envolviam o desenvolvimento e a utilização de habilidades geométricas foi tema de todos eles, inclusive dos trabalhos de doutoramento de ambos, concluídos na Universidade de Utrecht em 1957.

Estudos sobre a aquisição da compreensão, à luz de diversas psicologias de aprendizagem e de pensamento, levaram P.M. van Hiele a considerar a existência de diferentes níveis de pensamento sobre conceitos geométricos, sugerindo que os estudantes passam por vários níveis de pensamento no seu progresso, desde o mero reconhecimento de formas geométricas até serem capazes de construir provas geométricas formais. Assim, surgiu a “teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele”.

Segundo Usiskin (1982), três aspectos básicos devem ser considerados no desenvolvimento desta teoria: a existência de níveis, as propriedades dos níveis e o movimento de um nível para o próximo, os quais estão sintetizados a seguir:

1.1. EXISTÊNCIA DE NÍVEIS

Para van Hiele, segundo o modelo original, as pessoas desenvolveriam o pensamento geométrico de acordo com cinco níveis, enumerados de 0 a 4. Atendendo às críticas dos pesquisadores americanos sobre a relevância do nível zero, no qual se enquadra a maioria dos alunos que iniciam o Ensino Médio, em 1986, ele escreveu o livro “Structure and Insight”, propondo uma simplificação do modelo original, com os níveis enumerados de 1 a 5, descritos em termos gerais e comportamentais como se segue:

1.1.1 Nível 1: (Reconhecimento ou Visualização)

Os alunos são capazes de reconhecer e nomear as figuras geométricas, mas o fazem apenas pela sua “aparência”, mostrando-se incapazes de identificar alguma propriedade das mesmas. Apesar de serem capazes de reconhecer algumas características das figuras, não conseguem se valer delas para reconhecer ou classificar as figuras sob análise.

1.1.2 Nível 2: (Análise)

Os alunos começam a identificar as propriedades das figuras geométricas e aprendem a utilizar um vocabulário apropriado, relacionado com essas propriedades. No entanto, são incapazes de fazer correlações entre propriedades, não veem inter-relações entre figuras e não entendem definições.

1.1.3 Nível 3: (Dedução Informal)

Os alunos são capazes de estabelecer relações entre propriedades de uma figura ou classe de figuras, indicando que a inclusão de classes já é compreendida neste nível. São capazes de acompanhar argumentos informais numa demonstração, mas não conseguem criar uma nova prova partindo de premissas diferentes.

1.1.4 Nível 4: (Dedução Formal)

Os alunos vão além de identificar as características das figuras geométricas e são capazes de construir provas usando postulados ou axiomas e definições. Um curso de geometria de nível superior deveria ser ministrado nesse nível.

1.1.5 Nível 5: (Rigor)

Este é o nível de pensamento mais elevado na hierarquia de van Hiele. Alunos neste nível podem trabalhar em diferentes sistemas geométricos ou axiomáticos e provavelmente estariam matriculados na disciplina Geometria de um curso de nível superior.

1.2 PROPRIEDADES DOS NÍVEIS

É inerente à teoria que uma pessoa seja capaz de “caminhar” através dos níveis ordenadamente e segundo alguns critérios especiais:

1.2.1 Propriedade 1: (Hierarquização e sequencialidade dos níveis)

Um aluno não pode atingir o nível n sem ter passado pelo nível $(n-1)$.

1.2.2 Propriedade 2: (Adjacência)

Em cada nível de pensamento, o que era intrínseco no nível precedente torna-se extrínseco no nível atual. O produto do nível n torna-se o objeto de estudo do nível $(n+1)$.

1.2.3 Propriedade 3: (Distinção)

Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relações conectando esses símbolos, ou seja, cada nível tem uma linguagem própria.

1.2.4 Propriedade 4: (Separação)

Duas pessoas que raciocinam em níveis diferentes não conseguem se entender. É o que muitas vezes ocorre na relação professor-aluno.

1.3 MOVIMENTO DE UM NÍVEL PARA O PRÓXIMO

Van Hiele é mais otimista que Piaget, acreditando que o desenvolvimento cognitivo em geometria pode ser acelerado através de instruções adequadas. Pode-se dizer que o modelo de van Hiele é composto de duas partes: a primeira, totalmente descritiva, procura explicar como se processa a evolução do raciocínio geométrico dos alunos através da descrição dos níveis de pensamento identificados; a segunda, prescritiva, dá indicações de como um professor pode ajudar o seu aluno a alcançar um nível superior de raciocínio.

Temos, então, que os estudantes progredem de um nível para o próximo, como resultado da instrução proposital, planejada e organizada em cinco fases das atividades sequenciadas, que enfatizam a exploração, a discussão e a integração dos saberes adquiridos. As cinco “fases de aprendizagem”, que podem ser vistas como passos a serem seguidos pelo professor para auxiliar seus alunos no trânsito entre os níveis, são as seguintes:

1.3.1 Informação

Os alunos experimentam um primeiro contato com o conteúdo a ser trabalhado. O professor apresenta materiais e informações sobre eles, dando ao aluno a oportunidade de adquirir conhecimentos básicos indispensáveis ao trabalho matemático propriamente dito. Por outro lado, o professor aproveita a oportunidade para se informar sobre o conhecimento prévio dos alunos sobre o assunto tratado.

1.3.2 Orientação Dirigida

Os alunos, devidamente orientados pelo professor, executam tarefas simples que lhes permitem explorar as relações implícitas dos elementos trabalhados. As tarefas devem ser cuidadosamente preparadas, de modo que os novos conceitos e estruturas possam ser assimilados de forma progressiva e efetiva, já que servirão de base para o nível superior.

1.3.3 Explicação

O professor deve estimular seus alunos a expressarem suas descobertas e a participar de diálogos em que a defesa ou contestação de ideias, próprias ou de outros, se manifestem e impulsionem o desenvolvimento do raciocínio. Iniciam-se, assim, os trabalhos de desenvolvimento

de uma linguagem técnica específica. A utilização de termos técnicos e de uma simbologia própria deve promover uma boa comunicação entre o grupo e uma consolidação dos conceitos adquiridos na fase anterior.

1.3.4 Orientação Livre

Nesta fase, propõem-se aos alunos tarefas mais complexas, onde todo o conhecimento já adquirido deverá ser posto em prática. Tais tarefas devem fugir aos padrões e modelos tradicionais, podendo ter mais de uma forma de resolução, o que exigirá do aluno um bom domínio da rede de relações já estabelecida, capacidade de raciocinar, investigar e deliberar sobre as melhores estratégias de solução.

1.3.5 Integração

Tudo o que foi trabalhado nas fases anteriores, o conhecimento adquirido, as habilidades e competências desenvolvidas devem, nessa fase, passar por processo de “sedimentação”. O professor deve estimular o aluno a ter uma visão global de tudo o que aprendeu, estabelecendo uma nova rede de relações mentais, mais ampla, mais abrangente e capaz de lhe servir de base para o novo nível a que pretende ascender. A redação de um resumo de tudo o que foi aprendido pode ser uma boa forma de reflexão e integração de conceitos. “No final da quinta fase os alunos alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizagem no nível seguinte” (CROWLEY, 1994, p.8).

Apesar de evidências de pesquisas atestarem o caráter hierárquico dos níveis de van Hiele, há dúvidas quanto à discretização (descontinuidade) dos mesmos, conforme a proposta de P.M. van Hiele. (USISKIN, 1982; BURGER & SHAUGHNESSY, 1986; FUYS, GEDDES, & TISCHLER, 1988).

Burger e Shaughnessy (1986), por exemplo, observam que, embora os van Hiele tenham apresentado os níveis como estruturas discretas, o seu estudo não detectou essa característica. Alguns alunos chegaram, inclusive, a oscilar de um nível para outro na mesma tarefa.

Jaime e Gutiérrez (1990) também contestam essa proposição e destacam o processo contínuo vivenciado por eles em suas pesquisas usando o modelo citado, onde as fases 4 e 5 de um nível se confundem com as fases 1 e 2 do nível seguinte. A figura 1, abaixo, ilustra a visão destes pesquisadores sobre a continuidade dos níveis.

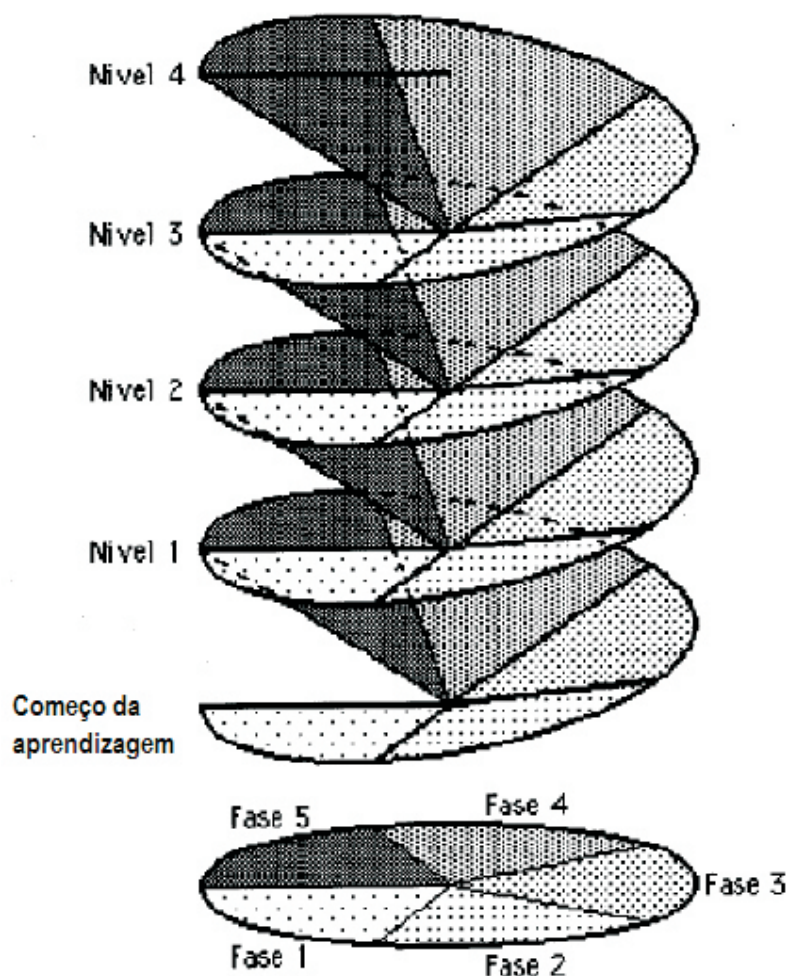


Fig. 1 - A continuidade dos níveis de van Hiele

Nas páginas finais desta cartilha o professor encontrará uma sugestão de leituras complementares que poderão lhe fornecer maiores informações sobre a Teoria de van Hiele, através de alguns trabalhos relacionados ao seu desenvolvimento e utilização no ensino de Geometria.

2. Módulos instrucionais

Os módulos elaborados têm por objetivo introduzir o aluno no estudo dos Sólidos Geométricos, conteúdo previsto na matriz curricular do 2º ano do Ensino Médio e que, por ser um conteúdo não abordado nas últimas séries do Ensino Fundamental, desperta, nos alunos, dois sentimentos conflitantes e que merecem a nossa atenção. O primeiro deles, extremamente positivo, é a curiosidade e o desejo de lidar com o novo, principalmente por estarem trabalhando com a Álgebra durante boa parte do ano letivo. O segundo, negativo, é o medo do desconhecido, frente às lembranças desmotivadoras da Geometria Plana com a qual tiveram contato no Ensino Fundamental.

Nossa pesquisa sobre o conhecimento dos alunos do 2º EM acerca dos conceitos básicos de Geometria Plana, considerados indispensáveis a um desenvolvimento consistente e significativo da Geometria dos Sólidos, conduziu-nos à elaboração de um programa de estudos que abordasse tais conceitos, mas que fosse fiel a três premissas:

1ª) A característica revisional deve ser abolida.

A tradicional “Revisão de Tópicos Importantes da Geometria Plana” que precede, na maioria dos livros didáticos de que dispomos, os capítulos referentes à Geometria dos Sólidos, tem se mostrado incapaz de resgatar este conteúdo e, muito menos, de motivar a produção de significados. “Rever” pressupõe ver algo que já foi visto, não importando quão superficialmente o objeto do conhecimento tenha sido abordado. Assim, para o aluno, a simples menção de uma “revisão” já o leva a crer que o que virá será repetitivo, desgastante e irá acrescentar muito pouco a “tudo” o que ele sabe, ou pensa que sabe.

2ª) O estudo dos Sólidos Geométricos deve estar sempre vinculado às atividades desenvolvidas.

Esta segunda premissa reforça, de certa forma, a primeira. É importante mantermos acesa a chama da curiosidade sobre o novo e tirarmos dela a motivação para a construção de novos significados ou para ressignificar os conceitos geométricos básicos que desejamos resgatar. Todas as atividades planejadas devem ter como núcleo motivador um sólido geométrico a ser trabalhado posteriormente.

3ª) O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele deve servir de suporte ao desenvolvimento das atividades propostas.

Existem inúmeras evidências de que a teoria dos van Hiele pode nos auxiliar a promover a construção da compreensão em Geometria. Será à luz desta teoria que buscaremos ressignificar alguns conceitos básicos da Geometria Plana e, portanto, adequar as atividades propostas ao nível do aluno é fator essencial a ser respeitado.

Organização dos Módulos

Os módulos instrucionais foram elaborados de forma a promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos de forma natural. Tanto a sequência dos módulos, quanto das atividades dentro de cada módulo, obedece aos princípios da teoria de van Hiele.

Iniciamos sempre com atividades que buscam fornecer ao professor subsídios para classificar seus alunos segundo os cinco níveis de pensamento de van Hiele e, a seguir, são propostas atividades que favoreçam o desenvolvimento de habilidades e competências que permitam aos alunos transitar de um nível para o nível seguinte, sempre em consonância com as fases de aprendizagem propostas por van Hiele.

Difícilmente encontraremos uma sala de aula com todos os alunos enquadrados em um mesmo nível de raciocínio e caberá ao professor a difícil tarefa de lidar com as diferenças e explorar o conhecimento dos mais avançados em favor dos outros.

Buscando padronizar a apresentação dos módulos e facilitar a execução de cada atividade, optamos por iniciá-las com passos instrucionais sequenciais dirigidos ao professor, orientando-o quanto à “organização” do cenário de trabalho — são indicados por letras minúsculas do nosso alfabeto.

Alguns ícones também foram utilizados para destacar o que deve ser executado e/ou produzido pelo aluno, além de sugestões exclusivas para o professor, visando a ampliar as possibilidades de exploração de cada atividade. São eles:



“Vamos trabalhar?”: Destaca as propostas de trabalho dirigidas diretamente ao aluno, sob a orientação do professor.



“Produzindo”: Indica que algum material concreto (ficha de registro, cartaz, gráfico, tabela, etc.) deve ser produzido pelo aluno ou por um grupo de alunos, conforme instrução.



“Conversando com o educador”: Destaca detalhes a serem observados na execução de cada tarefa, sugere alterações de procedimentos ou adaptações das atividades conduzidas com objetivos específicos, propõe atividades extras, avaliações, etc.

Sendo esta cartilha um apêndice da dissertação de mestrado da autora, sugerimos a leitura integral do referido documento. Ali, o professor poderá encontrar alguns testes para a avaliação do nível de raciocínio geométrico dos alunos utilizados pela autora nos seus trabalhos de pesquisa. A aplicação e a avaliação desses testes, baseadas nos descritores comportamentais de cada nível e descritas minuciosamente, poderão vir a esclarecer alguma dúvida que possa surgir.

Módulo 1 - Conhecendo o universo tridimensional

Visão Geral:

Este módulo tem como objetivo fazer com que o primeiro contato do aluno do 2º ano do Ensino Médio com a Geometria dos Sólidos seja motivador e prazeroso. As atividades propostas procuram levar o aluno a investigar, compartilhar idéias e materiais, conjecturar, discutir, aceitar ou refutar, mediante argumentação, idéias diferentes das suas, além de permitir ao professor uma primeira avaliação do conhecimento prévio dos alunos sobre este assunto.

Descritores:

Identificar, agrupar e classificar sólidos geométricos.

Contexto/Objetivo:

As atividades foram elaboradas considerando-se a dificuldade de muitos alunos em “visualizar” as formas geométricas tridimensionais que lhes são descritas. O contato com a forma física e a sua manipulação representa, neste momento, uma forma de aproximação da matemática com o mundo real, tridimensional.

Busca, ainda, desenvolver (ou valorizar) o raciocínio espacial de cada aluno que, ao contrário do que muitos pensam, não tem um caráter inatista, podendo ser estimulado e desenvolvido por meio de experiências ricas com formas e relações espaciais.

• **ATIVIDADE 1- “Sólidos Geométricos? Muito prazer...”**

a) Apresentar à turma uma coleção de sólidos geométricos de formas variadas (prismas e pirâmides de bases quadrangulares, triangulares ou hexagonais; cilindros e cones de tamanhos diferentes). Esclarecer que aquele material será o objeto de estudo daquela unidade — Geometria Tridimensional, Geometria dos Sólidos ou Sólidos Geométricos.

b) Deixar os alunos manipularem aquele material livremente e observar que tipo de comentário eles fazem sobre esses sólidos. Para o professor, é importante identificar as características consideradas relevantes para os alunos (o todo; as partes; a “aparência”; o nome do sólido; a linguagem utilizada; alguma propriedade facilmente observável; as relações entre propriedades, etc.). Esses elementos ajudarão o professor no reconhecimento do nível de raciocínio dos alunos relativo àquele assunto e o que os alunos sabem sobre ele.

- **ATIVIDADE 2 - “Descobrimo as formas”**

- Dividir a turma em grupos de 4 ou 5 alunos.
- Distribuir, entre os grupos, todos os sólidos geométricos disponíveis, procurando diversificar as formas tanto quanto possível.
- Fazer com que os alunos manipulem o maior número de sólidos possível e discutam, entre si, os prováveis nomes das formas, suas partes, em que aspectos se assemelham ou se diferenciam, etc.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Cada aluno escolherá um sólido e, um a um, conforme uma sequência previamente combinada, dirá ao grupo algumas características daquele sólido.



Construir ficha para o registro das características observadas. Se o grupo souber o nome do sólido, pode escrevê-lo antes de iniciar a lista de características. (Ver modelo no anexo 1)

Proposta 2: Cada aluno escolhe, ao acaso, dois sólidos. Todos deverão dizer ao grupo uma característica em que eles se assemelham e uma que os diferencia. Repetir a proposta com outros pares de sólidos.



Construir ficha para o registro das semelhanças e diferenças observadas. (Ver modelo no anexo 1)

- **ATIVIDADE 3 - “Agrupando as formas”**

- Manter os grupos já formados.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Um aluno do grupo escolhe um sólido e o coloca no centro da mesa. Outro aluno observa a figura e cria uma regra, que pode ser explícita ou oculta, a ser observada na comparação daquela forma com as demais. A partir daí, todos devem procurar na coleção do seu grupo (ou em outros grupos, se isso for combinado) formas que sejam como a que está em destaque, segundo a regra estabelecida.



Construir fichas para registro das formas destacadas, das regras criadas e das formas que atendem à proposta da atividade. (Ver modelo no anexo 1)

• ATIVIDADE 4 - “Identificando os grupos de formas”



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Juntar todas os sólidos disponíveis no grupo e separar os que, de alguma forma, se assemelham, procurando formar outros pequenos grupos.



Construir ficha para o registro das regras estabelecidas para a formação dos grupos. (Ver modelo no anexo 1)

Proposta 2: “Condensar” as regras anteriormente estabelecidas e criar uma nova regra de forma a se obter apenas dois grandes grupos.



Construir ficha para o registro das semelhanças e diferenças observadas. (Ver modelo no anexo 1)



Deixar que vários critérios de classificação se manifestem, mas guiar os grupos para que a classificação “poliedros” e “sólidos redondos” apareça. Aproveitar o momento para reforçar alguns conceitos advindos dos critérios de classificação criados pelos alunos.

Proposta 3: Construir um cartaz “nomeando” os dois grupos criados e listar as características marcantes de cada um deles.



Juntar todos os grupos e pedir para colarem no quadro os cartazes produzidos com as características dos dois grupos. Discutir as idéias de cada grupo e produzir um cartaz, nos moldes dos cartazes dos grupos, que consense a idéia de toda a turma.

• **ATIVIDADE 5 - “Dissecando as formas”**

- a) Separar apenas os poliedros para trabalhar esta atividade;
 b) Manter os grupos já formados; distribuir um questionário 1.5.1 para cada componente (ver modelo abaixo).



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Cada aluno deve escolher um sólido (poliedro) e analisar as parte que o compõem, respondendo ao questionário abaixo:

Questionário 1.5.1

- 1) O sólido que vocês têm em mãos já é conhecido de vocês? Que nome ele tem? A que grupo (dos estabelecidos pela turma) ele pertence?
- 2) De que partes ele é composto?
- 3) Quais delas poderiam ser chamadas de Faces?
- 4) Descreva as Faces que você identifica no seu sólido. Quantas são elas?
- 5) Como se dá o encontro de duas faces? Que nome recebe esse elemento?
- 6) Quantas arestas tem o seu sólido?
- 7) Como se dá o encontro de duas arestas? Que nome recebe esse elemento?
- 8) Quantos vértices têm o seu sólido?
- 9) Alguém consegue estabelecer alguma relação numérica entre os elementos “faces”, “vértices” e “arestas”?



Este questionário pode ser preenchido sob a orientação do professor ou não, conforme o nível da turma. Alunos do nível 1 sentirão a necessidade de estímulos e, neste caso, o professor pode ser muito útil na condução do processo. Lembrar que a linguagem do aluno é um dos maiores referenciais do seu nível de raciocínio, portanto, estimular a fala ,além da escrita, é tarefa fundamental.

• ATIVIDADE 6 - “Integrando Saberes”

a) Manter os grupos já formados; distribuir para o grupo um guia para a elaboração da ficha-resumo (ver modelo abaixo).



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Preparar uma ficha-resumo (texto) de tudo o que foi discutido sobre Sólidos Geométricos. O seu texto deve “responder” aos questionamentos apresentados na ficha abaixo:

Guia para a elaboração da ficha-resumo 1.6.1

- 1) Quantas dimensões podem ser observadas num Sólido Geométrico? Quais são elas?
- 2) Caso você queira separá-los em dois grandes grupos, que critério você usaria? Que nome você daria a um sólido pertencente a cada um desses grupos? Destaque as características (propriedades) fundamentais desses grupos.
- 3) Dentre os dois grupos já definidos, você seria capaz de fazer, ainda, alguma subdivisão? Como seria e quais os critérios utilizados?
- 4) Para cada grupo (e subgrupo) definido, desenhe um representante e defina o número de faces, arestas e vértices.
- 5) Incluir, no seu resumo, qualquer outra observação que considerar útil, pertinente e esclarecedora.
- 6) Se preferir, faça uma representação pictórica ou um diagrama que ilustre este grupo (Sólidos Geométricos) e as suas subdivisões.



Incentivar a subdivisão dos poliedros em prismas e pirâmides e a dos corpos redondos em cilindros e cones (lembrar que a esfera faz parte do segundo grande grupo). Como fator motivador; o professor pode propor que as melhores fichas-resumo sejam condensadas, dando origem a um material de estudo para toda a turma (apostila; ficha-resumo; etc.), com todo o mérito para os autores.

Módulo 2 - A Coexistência dos dois universos: o Bi e o Tridimensional

Visão Geral:

Neste módulo o aluno será levado a refletir um pouco mais sobre a atividade “dissecando as formas” onde ele, brevemente, pôde constatar que as figuras geométricas tridimensionais são formadas por elementos já conhecidos do universo bidimensional. Após vivenciar experiências com o “todo” no módulo I, o aluno será conduzido ao estudo das “partes” para que, através da compreensão das suas propriedades e das relações entre as mesmas, possa entender como se dá a composição das figuras planas na formação dos sólidos geométricos.

Em respeito à proposta de sempre usar o sólido como elemento motivador, não trabalharemos com a sua construção a partir de figuras planificadas. Ao contrário, os sólidos serão desmontados, dando origem às planificações que constituirão o principal objeto de análise deste módulo.

Descritores:

Identificar, agrupar e classificar figuras geométricas planas.

Contexto/Objetivo:

Respeitando a noção do “todo” que representa o sólido geométrico, faz-se necessário a compreensão dos conceitos de Geometria Plana que permeiam o universo tridimensional. Enxergar as partes que compõem esse organismo, o dinamismo de sua estrutura, bem como as relações entre as propriedades das figuras planas que os compõem e os seus próprios elementos, é fundamental nesta hora.

● ATIVIDADE 1- “Diagnosticando...”

- a) Dividir a turma em grupos de 4 ou 5 alunos.
- b) Distribuir, entre os grupos, alguns poliedros retos, de bases triangulares, quadrangulares e hexagonais.
- c) Fazer com que os alunos manipulem esse material.
- d) Estimular a troca de ideias sobre os conceitos de poliedros, prismas, pirâmides e suas partes.
- e) Colocar todos os sólidos sobre a mesa do professor e pedir para que cada grupo escolha quatro poliedros, sendo dois prismas e duas pirâmides.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Identificar cada um dos poliedros (A, B, C e D) e planificá-los. Para cada um deles, preencher a ficha 2.1.1 (ver modelo abaixo), com dados sobre as suas características e alguns questionamentos adicionais:

(usando o sólido A como exemplo)

Ficha de Identificação 2.1.1

- a) A qual grupo (classe) de poliedros pertence o sólido A?
- b) Quantas faces tem? Quantas arestas tem? Quantos vértices tem?
- c) A qual figura plana corresponde cada uma das suas faces laterais?
- d) Enumere todas as características (propriedades) observáveis ou dedutíveis nessas figuras planas.
- e) Calcule o perímetro e a área dessas faces.
- f) A qual figura plana corresponde(m) a(s) sua(s) base(s)?
- g) Enumere todas as características (propriedades) observáveis ou dedutíveis nessa figura plana.
- h) Calcule o perímetro e a área dessa(s) base(s).
- i) É possível dividir essa figura em outras figuras conhecidas? Que nome elas recebem? Calcule a área dessa(s) figuras(s).
- j) É possível se chegar à área da base, através das áreas das suas partes? Se sim, mostre como.
- k) As faces laterais e as bases dos seus sólidos apresentam alguma característica comum? Essas figuras poderiam ser agrupadas, constituindo uma categoria ou “classe” de figuras planas? Se sim, dê nome(s) e enumere as características que justificam essa “classificação”.
- l) Elabore uma ficha resumo que contenha todas as informações que o grupo conseguiu consensar, destacando conceitos e exemplificando sempre que possível.



O módulo 2 certamente evidenciará a necessidade de uma ressignificação de conceitos básicos da Geometria Plana. (Que propriedades foram listadas? A altura dos triângulos foi obtida por medição? Usou-se o Teorema de Pitágoras?). Alguns alunos conhecem as figuras planas, mas têm certa familiaridade apenas com a sua “aparência” (nível 1); outros conhecem algumas propriedades, mas não conseguem relacioná-las (nível 2); poucos fazem emergir algum conceito a partir de relações entre propriedades (nível 3 ou superior).

Módulo 3 - Formas Bidimensionais - Identificação e definição

Visão Geral:

Este módulo trata particularmente das formas bidimensionais. Compõe-se de atividades que permitem ao professor avaliar o conhecimento prévio e o nível de raciocínio apresentado pelo aluno em relação às formas geométricas bidimensionais e suas propriedades. Baseado nessa avaliação, que acontece continuamente durante todo o processo, propõe medidas e instruções a serem seguidas a fim de que o processo de construção de conceitos atenda aos pressupostos deste trabalho.

Descritores:

Identificar, agrupar, classificar e relacionar figuras geométricas planas.

Contexto/Objetivo:

Conscientes da importância de uma base conceitual sólida de Geometria Plana, para a consolidação dos novos conceitos da Geometria Tridimensional que estão começando a se formar, professores e alunos se veem diante da possibilidade de uma efetiva ressignificação dos conceitos básicos da primeira. Desta forma, este módulo tem como objetivo identificar e corrigir falhas de compreensão e formação de conceitos relacionados às figuras planas e suas propriedades, além de fornecer instruções para o acompanhamento da evolução do aluno dentro de um nível ou entre níveis de van Hiele.

- **ATIVIDADE 1- “Jogando com as semelhanças e as diferenças”**

Trata-se de um jogo que tem duas funções básicas: primeiro, criar uma atmosfera acolhedora e motivadora, capaz de favorecer a comunicação entre o professor e os alunos e entre os próprios alunos; depois, permitir ao professor avaliar a linguagem matemática (formal ou informal) do aluno.

a) Organizar os alunos em duplas.

b) Distribuir, entre as duplas, pelo menos cinco pares de figuras planas previamente separadas.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Um dos alunos da dupla deve pegar o primeiro par de figuras e dizer ao outro uma semelhança entre elas. O outro aluno, por sua vez, diz uma diferença entre as mesmas.

Para o segundo par a regra deve se inverter, ou seja, quem relatou uma semelhança deve relatar, agora, uma diferença. Continuar, revezando a regra, até que todos os pares disponíveis tenham sido discutidos.

O aluno que conseguir apontar uma semelhança ou diferença, com clareza de argumentos, ganha um ponto. O que não conseguir cumprir a tarefa, não marca ponto.

Proposta 2: Misturar todas as figuras e fazer novos pares. Repetir a proposta 1.

Obs.: Ganhará o jogo quem marcar mais pontos. (Em caso de empate, retomar pares já analisados e descobrir outras semelhanças e diferenças até que se esgotem as possibilidades da dupla)



É importante que o professor tenha a oportunidade de acompanhar algumas etapas de cada dupla de alunos. Só assim ele poderá avaliar não só a linguagem utilizada, como também o comportamento dos alunos (se toma iniciativa ou se tende a repetir a ação do parceiro; se usa gestos ao invés de palavras para se expressar; se só observa e quase não se manifesta; etc.).

Neste momento o professor não deve introduzir um vocabulário formal. Ao contrário, deve usar termos comuns (informais) como “laterais” (lados), “cantos” (ângulos), “mesma medida” (congruentes), etc. “Mostrar” algumas propriedades, como sobrepor ângulos e lados, para mostrar que eles têm a mesma medida, também podem trazer resultados muito positivos.

• **ATIVIDADE 2 - “Figuras em fotos???”**

Nesta atividade o professor poderá observar que conceitos geométricos básicos são familiares aos alunos. Serão abordados os conceitos de algumas figuras planas como o triângulo, o quadrado, o retângulo e o paralelogramo, além dos conceitos de alguns elementos que compõem essas figuras: ângulos, ângulos retos, lados e ângulos opostos, lados e ângulos congruentes.

- a) Pedir à turma que se organize formando um semicírculo em frente ao quadro, onde serão expostas as fotos a serem analisadas. (O uso do data-show pode ser um grande facilitador).
- b) Expor fotos de cidades, monumentos, paisagens, etc.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Analisar cada foto e buscar, nelas, algumas idéias geométricas que deverão ser listadas no quadro. Para cada uma delas, discutir o seu conceito e apontar outros exemplos contidos nas fotos.



Propor contra-exemplos, fazendo com que a discussão se enriqueça.

Proposta 2: Confeccionar vários cartazes (meia cartolina) com cada conceito mencionado, contendo uma possível definição. Colar os cartazes no quadro e discuti-los.



Caso alguns dos conceitos que se deseja enfatizar não tenha sido mencionado (posição relativa entre retas, ângulos, etc.), o professor deve abordá-lo, mostrar alguns exemplos, questionar os alunos sobre eles e, depois, acrescentá-lo aos outros que já se encontram no cartaz.

Esclarecer aos alunos que alguns conceitos serão investigados com maior profundidade no momento e os demais serão abordados oportunamente.

- **ATIVIDADE 3 - “Nome & Figura”**

a) Organizar os alunos em duplas. Eles podem ficar lado a lado no semicírculo já formado e cada um trabalhará com o seu colega (da direita ou da esquerda, conforme combinarem).

b) Distribuir entre os alunos fichas NOME & FIGURA (Ver modelos no anexo 2), com diversos exemplos associando estes dois elementos para triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, paralelogramos, etc. Deixar que as fichas circulem pela sala e que todos tenham acesso a elas.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Analisar cada ficha e discutir com o seu parceiro, que características distinguem uma classe de figuras da outra.



Construir ficha para o registro das observações feitas.

Proposta 2: Colar todas as fichas no quadro e estender a discussão para toda a sala.



Ficar atento à linguagem utilizada pelos alunos. Não inibir as discussões com termos técnicos, mas valorizar a utilização dos mesmos pelos alunos.

- **ATIVIDADE 4 - “Ao telefone !!!”**

a) Organizar os alunos em duplas.

b) Distribuir para cada dupla uma placa de isopor (meia placa por dupla), canudinhos cortados em dois tamanhos diferentes e algumas tachinhas ou alfinetes.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Construir quadriláteros sobre o isopor, usando os canudinhos como lados e as tachinhas como vértices. Anotar, para cada quadrilátero formado, caso saibam:

1.a) o seu nome, que tipos de ângulos são observados, como se posicionam os lados das figuras formadas?

1.b) que relação existe entre o tamanho dos lados e os ângulos formados? Sob que condições os lados serão paralelos? Perpendiculares?



Construir ficha para o registro das observações feitas.

Proposta 2: Escolher 4 duplas que estejam com quadriláteros diferentes montados sobre o isopor. Uma das duplas escolhidas deve ir à frente da sala e, sem revelar a sua figura aos colegas, irá descrevê-la, como se estivesse falando com um amigo ao telefone (sem usar gestos). Quanto mais precisa for esta descrição, mais fácil a identificação.

2.a) Repetir a atividade com outras três duplas.



A título de motivação, deixar que a turma eleja a melhor descrição.

• **ATIVIDADE 5 - “Quem é e por quê?”**

a) Apresentar aos alunos um cartaz contendo diversas figuras geométricas planas e com um cabeçalho a ser preenchido com tiras de papel contendo o nome de diversos quadriláteros ou outras figuras que se pretenda trabalhar, como retas paralelas e perpendiculares; ângulos retos, obtusos ou agudos, etc. (Ver modelo no anexo 2)



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Iniciar a tarefa com um dos componentes do grupo, preenchendo, inicialmente, o espaço em branco da questão que se encontra no cabeçalho da ficha:

“Quais dessas figuras são (retângulos; quadrados; etc)? Por quê?”

“Quais dessas retas são (paralelas; perpendiculares)? Por que?”

“Quais desses ângulos são (retos; agudos; obtusos)? Por que?”



O professor deve estar atento e manter o controle da compreensão dos alunos dos conceitos apresentados, estimulando a clareza de idéias, reformulando respostas, etc. O vocabulário “técnico” deve começar a ser introduzido, embora isso deva ser feito após a exposição do vocabulário próprio do aluno. O professor deve fazer referência aos termos não formais utilizados, seguidos da linguagem formal, até que o aluno se sinta seguro para fazer esta transposição espontaneamente: “canto = ângulo”; “ponta = vértice”; “característica = propriedade”; “igual = congruente”; etc. Uma análise posterior, desta atividade, pode ser interessante para a coleta de dados sobre os atributos (propriedades) e linguagem usada. Neste caso, sugerimos a sua gravação (áudio ou vídeo) ou mesmo uma ficha de registro de observações.

Módulo 4 - Formas Bidimensionais - Classificação

Visão Geral:

Neste módulo, o enfoque está na percepção que os alunos têm das figuras geométricas planas e das suas propriedades. Compõe-se de atividades que se valem da orientação guiada para avaliar que tipo de raciocínio os alunos apresentam ao tentarem agrupar figuras, permitindo ao professor distinguir se os alunos raciocinam, sobre os grupos de figuras, em termos de suas propriedades ou se o aspecto relevante é apenas a sua aparência.

Trataremos, especialmente, dos quadriláteros. A escolha desta figura plana foi feita, principalmente, por questões didáticas, devido à possibilidade de uma maior diversificação no estudo das suas propriedades, criando espaço para que o conceito de inclusão de classes pudesse ser abordado.

Descritores:

Agrupar, classificar e relacionar figuras geométricas planas.

Contexto/Objetivo:

Após todo o trabalho realizado nos módulos precedentes, abordando aspectos relacionados ao reconhecimento, identificação e definição de figuras planas, contemplando, principalmente, alunos que operam nos níveis 1 e 2 de van Hiele, faz-se necessário avaliar, não apenas até que ponto as atividades propostas conseguiram favorecer o seu progresso, em termos de raciocínio geométrico, mas, também, dar sequência ao processo instrucional, visando a atingir o nível 3 onde a classificação de figuras e a inclusão de classes já são compreendidas.

- **ATIVIDADE 1- “Adivinhando a regra”**

Apresentar aos alunos uma coleção de polígonos recortados em papel cartão, retirada, propositadamente, de um envelope grande, no qual está escrito, em “letras garrafais”, a palavra POLÍGONOS e algumas folhas de papel A3 em branco que servirão de suporte para a formação dos grupos de figuras.

a) Dizer aos alunos que todas aquelas figuras estavam separadas em grupos e que foram misturadas e colocadas num único envelope, pois todas eram polígonos (se necessário, discuta este conceito). Para levá-las de volta aos grupos a que pertenciam, alguém fez uma primeira tentativa, colocando duas figuras de cada grupo sobre uma folha branca que, por sua vez, servirá de suporte para todo o grupo.



O professor deve iniciar a atividade usando uma regra qualquer, como “figuras que apresentam: pelo menos um ângulo reto, ou o mesmo número de lados, ou lados opostos paralelos, ou lados congruentes, etc.”.

Introduzir a noção de “classe de figuras” em substituição ao “grupo de figuras”, para facilitar a compreensão do termo “classificação”.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Adivinhar a regra utilizada para a formação daquele grupo (classe) de figuras. Sem revelá-la, mas de acordo com ela, continuar colocando as peças no seu devido lugar.



Construir fichas para registro das regras criadas e das formas que atendem à proposta da atividade.

Proposta 2: Mudar a regra e repetir a tarefa tantas vezes quantas julgar necessário.



Caso queira, o professor pode deixar o estabelecimento da regra em aberto. Os próprios alunos podem criar regras e dar prosseguimento à tarefa. O único problema é o tempo demandado, pois os alunos tendem a demorar na escolha de uma regra que realmente estruture uma possível classificação.

Durante o estabelecimento das regras, ficará bem claro o nível de pensamento dos alunos. Os que operam no nível 1 usarão muito a expressão “porque parece com” e os que operam em níveis mais elevados procurarão justificar suas escolhas baseando-se nas características comuns que puderam observar.

Finalizar a atividade com a regra: “todas as figuras apresentam o mesmo número de lados” e discutir a nomenclatura utilizada para cada classe.

- **ATIVIDADE 2 - “Identificando e definindo - Quadriláteros”**

Esta atividade contempla apenas os quadriláteros. Segue os mesmos moldes da atividade 1, porém deve ser mais aberta (os alunos ficam mais livres para definir as regras).

a) Apresentar aos alunos uma coleção de quadriláteros recortados em papel cartão e algumas folhas de papel A3 em branco que servirão de suporte.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Separar os grupos de figuras que apresentam características comuns. Explicar o critério usado na formação dos grupos (classes) e escrevê-lo no cabeçalho da folha em branco. Se aquele grupo de figuras possuir um nome específico e este for do conhecimento de vocês, podem usá-lo como “título”.



Certamente a classificação padrão (quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios, etc.) aparecerá. Caso isso não aconteça, estimula-la com uma atividade adicional do tipo “adivinhandando a regra”, vista na atividade 1 deste módulo, onde o professor pode “guiar” o processo. Se alguma regra diferente aparecer, elogiar os alunos e discuti-la brevemente.

Não estimular, neste momento, a compreensão da inclusão de classes, que será abordada em tarefas posteriores.

Notar que o contexto para a classificação, nesta tarefa, é bem mais direcionado. Alunos que operam no nível 1 farão julgamento visuais e os que operam nos níveis 2 ou 3, certamente invocarão as propriedades dos grupos de figuras (todas as que apresentam lados iguais, todas as que apresentam os quatro ângulos retos, etc.).

Proposta 2: Elaborar pequenos cartazes com os grupos de figuras formados, destacando a regra estabelecida e as propriedades diretamente observadas e, depois, colá-los no quadro.

• ATIVIDADE 3 - “Quadriláteros - Características & Propriedades”

Esta atividade tem o propósito de avaliar a habilidade do aluno na caracterização dos grupos de formas em termos de propriedades e, também, através de uma orientação guiada, levar o aluno a progredir neste campo conceitual.

a) Preparar cinco cartazes, um para cada tipo de quadrilátero (quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios). Cada cartaz deve conter, na sua parte superior, desenhos dos quadriláteros correspondentes em diversas posições e tamanhos. A parte inferior da cartolina ficará reservada para que os alunos afixem tiras de papel com o nome do quadrilátero e suas respectivas propriedades. O número de tiras com as propriedades deve ser suficiente para todos os cartazes, lembrando que uma mesma propriedade será usada em vários quadriláteros. (Ver modelo no anexo 3)

b) Dividir os alunos em 5 grupos. Cada grupo de alunos ficará responsável por um tipo de quadrilátero. (Fazer sorteio ou designar o quadrilátero a ser tratado).



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Montar um cartaz sobre o quadrilátero que lhe foi destinado. Escolher dentre as diversas tiras, o nome do quadrilátero e, a seguir, as propriedades que ele apresenta.

Proposta 2: Colar o seu cartaz no quadro e fazer uma breve exposição do seu trabalho para toda a turma. Discutir exemplos e contra-exemplos, a (ir)relevância da orientação da figura, etc.



Deixar que os alunos sugiram alguma propriedade que não esteja nas tiras de papel, aproveitando para esclarecer a equivalência entre algumas delas.

Proposta 3: Reproduzir, no caderno, os cartazes apresentados.

Proposta 4: Preparar um quadro-síntese (Ver modelo no anexo 3) com as propriedades dos quadriláteros contemplados.



Uma tabela de dupla entrada, com os nomes dos quadriláteros e as propriedades observadas, servirá para sistematizar a aprendizagem. O quadro-síntese pode ser de grande valia na compreensão das propriedades que são comuns a mais de um tipo de quadrilátero. Uma reflexão sobre a inclusão de classes pode emergir da discussão desse quadro.

Sabemos que muitos alunos aprenderam e aplicam definições não padronizadas, ou seja, incluem propriedades incorretas em suas descrições (nos retângulos, um lado é maior do que o outro; lados de comprimentos diferentes não é condição necessária para retângulos; ter os quatro ângulos retos, sim.). Sempre que possível, aproveitar a oportunidade para corrigir este tipo de equívoco, o qual conduz à má formação de conceitos.

• ATIVIDADE 4 - “Estabelecendo relações de inclusão de classes”

Esta atividade pretende, além de avaliar se os alunos conseguem identificar e explicar as relações de inclusão de classes possíveis, promover esse entendimento.

a) Preparar uma coleção de quadrados, uma de retângulos, uma de losangos e uma de paralelogramos, de tamanho, orientação e cores diferentes.

b) Lembrar da atividade 1 deste módulo, em que várias figuras foram retiradas de um envelope e agrupadas segundo algumas características apresentadas (quadriláteros, triângulos, pentágonos, etc.). Todas aquelas figuras voltaram para o envelope grande, onde estava escrito o quê? Por quê?

c) Incentivar a discussão até que a resposta correta seja dada. Em seguida, mostrar, aos alunos os quatro grupos de figuras preparados e questioná-los: Posso mover um desses quadrados para o grupo dos quadriláteros da atividade 1? Por quê? E para o grupo dos retângulos? Por quê? (ou por que não?) Posso mover um desses retângulos para o grupo dos paralelogramos? Por quê? (ou por que não?)



Usar esse tipo de questionamento e argumentação, diversificando os exemplos e contra-exemplos, até que os alunos que operam nos níveis 1 ou 2 mostrem sinais de progresso na compreensão dessas relações. É conveniente deixar os cartazes com as listas de propriedades daquelas figuras ao alcance de todos, como forma de encorajá-los a usar as propriedades como argumento. Se ainda for necessário, continuar com a proposta que se segue.

d) Certo dia, li em um livro que “um quadrado é um retângulo de lados iguais”. Você concorda? E que um retângulo é “um paralelogramo de ângulos retos”. “Um quadrado é um losango de ângulos retos”. O que você tem a dizer sobre essas ideias?



Esse tipo de questionamento pode levar os alunos a aceitarem a lógica da relação de inclusão, mesmo que as suas próprias definições das formas não previssem, anteriormente, a interseção desses grupos. Ainda podemos trabalhar mais essa ideia com a subtarefa a seguir.

e) Coloque os quatro conjuntos de figuras sobre a mesa e proponha movimentos entre os elementos desses grupos: separe o grupo dos quadrados, questione sobre as suas propriedades e pergunte se algum elemento dos outros grupos pode ser transferido para ele. Por quê? Depois faça o mesmo com os outros grupos (losangos, retângulos e paralelogramos), até que se perceba uma compreensão efetiva da inclusão de classes.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Construir algum material que ilustre a inclusão de classes dentro dos quadriláteros.



Deixar os alunos livres para criarem. Diagramas de Venn, esquemas com setas indicando as relações de inclusão ou qualquer outra forma de manifestação desse entendimento deve ser elogiada.

• ATIVIDADE 5 - “Descobrimo ou adivinhando?”

Essa atividade deve ser feita individualmente. Pode ser proposta como um “jogo” cujo objetivo é o reconhecimento de figuras geométricas através de seus elementos, a partir de um cartaz em que apareçam gradativamente partes de uma figura a ser descoberta. (Ver modelo no anexo 4)

Neste caso, pode-se avaliar como o aluno utiliza informações parciais de uma figura (vista parcial ou algumas propriedades) para fazer julgamentos sobre que figura aquela poderia ou não poderia ser.

a) O cartaz deve conter cinco ou seis sequências de figuras a serem descobertas. Cada sequência apresenta a figura em quatro estágios (I, II, III e IV), com detalhes que vão se acrescentando na medida em que se caminha do estágio I para o IV, onde a figura está totalmente à mostra.



Criar uma ficha de registro de possibilidades de a figura ser ou não o que se espera, de acordo com as propriedades observadas. (Ver modelo no anexo 4)

b) Inicialmente o cartaz é apresentado com as figuras encobertas, as quais vão sendo descobertas uma a uma, iniciando pela primeira sequência, do estágio I para o II, do II para o III e do III para o IV. A cada figura descoberta, os alunos são questionados sobre que figura poderia ser aquela, devendo justificar suas respostas e fazer o registro das informações obtidas na “ficha de possibilidades”.

c) Após ter analisado a “figura” exposta no estágio III e com base nas características e propriedades observadas até então, o aluno tenta identificá-la, escrevendo o seu nome no espaço reservado para este fim, na ficha de possibilidades.

d) Finalmente, alcança-se o estágio IV e a figura fica totalmente à vista. Cada um pode, então, verificar se havia indicado a figura correta.



As dúvidas e questionamentos que surgirem devem ser discutidos com a turma, toda para que a socialização do conhecimento seja mais efetiva.

• ATIVIDADE 6: “Quem sou eu?”

Essa tarefa é semelhante à anterior. Embora, na primeira, o tratamento seja totalmente visual, nessa explora-se a abstração.

a) Preparar pequenos cartazes com propriedades de certa figura. (Ver modelo no anexo 5, para o retângulo)

b) Os alunos devem descobrir a que figura se refere o professor, somente com as dicas que ele fornecer.

c) As dicas sobre as figuras serão as propriedades apontadas nos cartazes, que o professor irá revelando uma por uma, sempre questionando sobre que figura poderia ser ou não ser e o que justifica a resposta dada.

d) Quanto menor o número de dicas necessárias, melhor o nível de abstração do aluno.



Cuidar para que a revelação da figura não seja fruto de uma simples adivinhação. Alguns alunos (nível 2 ou superior) conseguem perceber que, se uma figura não pode ser definida como tal, após a não verificação de duas propriedades, então não o será, mesmo que outras dicas venham a ser dadas. Para alunos do nível 1, as dicas anteriores não são consideradas quando uma nova dica é revelada, indicando a necessidade de um trabalho diferenciado.

- **ATIVIDADE 7: “Lista Mínima de Propriedades (LMP)”**

O objetivo é criar Listas Mínimas de Propriedades para alguns quadriláteros. Explicar aos alunos que uma LMP contém o menor número possível de propriedades de uma figura (mínima) que são capazes de defini-la (necessárias e suficientes).

a) Retomar as listas de propriedades já elaboradas para os quadriláteros.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Construir uma LMP para o quadrado.

De posse da lista de propriedades dos quadrados, construída na atividade 3 deste mesmo módulo, faça a seguinte colocação: suponha que você precise dar algumas pistas (dicas) para um amigo sobre uma figura desconhecida (no caso, o quadrado). Seria necessário listar todas essas propriedades para que ele descobrisse que você estava se referindo a um quadrado? Que propriedades você poderia retirar sem prejuízo para o seu amigo? Por quê? Que propriedades não poderiam, de forma alguma, ser retiradas? Por quê?



Criar uma LMP para o quadrado.

Proposta 2: Teste a lista de propriedades formada e certifique-se de que ela é mínima (nenhuma propriedade pode ser retirada) e que é definidora (nenhuma forma diferente do quadrado pode ser produzida usando apenas as propriedades da lista)

Proposta 3: Repita o processo e construa a LMP das outras figuras (retângulos, losangos e paralelogramos).



Trata-se de uma atividade onde o raciocínio lógico (se . . . então) começa a ser trabalhado. Alunos que operam no nível 2 ou acima dele, certamente terão mais facilidade em elaborar uma LMP, pois saberão reconhecer e estabelecer relações entre propriedades.

Uma LMP é uma definição em potencial. Com elas os alunos aprendem sobre a natureza de uma definição e o valor dos contra-exemplos.

Módulo 5 - Formas Bidimensionais - Outros conceitos

Visão Geral:

Este último módulo trabalhará os conceitos de geometria plana, identificados em nossa pesquisa como objeto de ressignificação neste estudo, mas que não foram abordados nos módulos anteriores: circunferência, círculo e suas partes.

Atividades abordando o conceito de perímetro e área também serão introduzidas.

Descritores:

Reconhecer os elementos e as partes do círculo. Medir comprimentos e superfícies de figuras geométricas planas. Diferenciar perímetro de área.

Contexto/Objetivo:

O fato de os círculos serem partes constituintes dos sólidos redondos nos leva a considerar o seu estudo e a compreensão da sua dimensão, fatores essenciais para o entendimento das propriedades desses sólidos. Sabemos que, neste caso, medidas envolvendo números irracionais, em especial o número π , resultam sempre numa dificuldade para o aluno.

Portanto, este módulo tem como objetivo trabalhar o significado do número π , além de ressignificar os conceitos de perímetro e área, com atividades que imprimam sentido às fórmulas já conhecidas e decoradas para o seu cálculo.

- **ATIVIDADE 1- “Festa de aniversário sem chapéu? Não é festa!”**
 - a) Dividir a turma em grupos de 4 ou 5 alunos.
 - b) Distribuir, entre os grupos, alguns cilindros e cones,
 - c) Fazer com que os alunos manipulem esse material.
 - d) Estimular a troca de ideias sobre o conceito de sólidos redondos, destacando as semelhanças e diferenças entre estes e os poliedros.
 - e) Recolher o material, deixando um cilindro e um cone em cada grupo.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Planificar os dois sólidos recebidos e, para cada um deles, descrever as figuras planas que os constituem.



Construir uma ficha para o registro das observações feitas.



A planificação do cilindro não revelará nenhuma figura plana desconhecida, mas a do cone pode gerar dúvidas. O nível de raciocínio do aluno indicará se temos um setor circular ou um “pedaço de círculo”? Aproveite, também, para discutir os conceitos de circunferência, círculo, raio, diâmetro, corda, setor circular, segmento circular, etc. Pedir para que guardem as planificações para futuros trabalhos.

Proposta 2: Desenhar, numa cartolina, cinco círculos que apresentem raios de medidas diferentes e, com o auxílio de um barbante e uma régua, medir o comprimento de cada circunferência. Preencher a tabela (Ver modelo no anexo 5) com os dados obtidos: raio (R) e comprimento da circunferência (C) e calcular o valor da razão C/R para cada figura. Sendo $D = 2R$, calcular também a razão C/D.



Será um bom momento para ressignificar o número irracional π . Na 1ª série do Ensino Médio, durante as aulas de trigonometria, fica muito evidente como alguns alunos não conseguem associar o símbolo π a um número. Motive-os a deduzir, a partir da razão $C/D = \pi$, a fórmula do comprimento da circunferência: $C = 2 \pi R$.

Proposta 3: Desenhar um círculo de 20 cm de raio. Cortar este círculo ao meio, formando dois semicírculos. Repetir o processo até obter 16 “fatias” de círculo. Dispor essas fatias de forma a obter uma figura que se assemelhe, o máximo possível, a um retângulo (ou paralelogramo). Estabelecer uma relação ou fórmula para o cálculo da área do círculo, usando aproximações observáveis para as medidas do comprimento e largura do “retângulo” formado (ver modelo no anexo 5). Escrever a “fórmula” obtida no quadro e explicar o seu raciocínio para toda a turma.



Não interfira nas discussões. Deixe que os alunos busquem caminhos alternativos livremente.

Proposta 4: Usando as figuras planificadas na proposta 1, calcular o perímetro e a área de cada uma delas.



Verifique se há ou não alguma falha conceitual que dificulte a diferenciação entre perímetro e área. Lembre os alunos de que a medição feita com o auxílio do barbante está associada ao perímetro. Deixe, também, que eles discutam as possíveis formas de se calcular as áreas pedidas e ressalte a importância da utilização correta das unidades de medidas.

• ATIVIDADE 2 - “Feito sob medida...”

Esta atividade, de aplicação de conceitos, busca consolidar ou integrar o conhecimento produzido. Deve ser realizada individualmente.



Vamos trabalhar?

Proposta 1: Medir o perímetro da sua cabeça (na altura da testa, onde se apoiam os chapéus). Construir, em cartolina, um chapéu cônico que lhe sirva com exatidão (feito sob medida). A altura deve ser definida pelo aluno, mas sugerimos que não seja inferior a 30 cm.



Observe como foram efetuados os cálculos para a obtenção do setor circular que deu origem a cada cone. Explore o conceito de proporcionalidade entre áreas e perímetros, o Teorema de Pitágoras e insista na utilização das unidades de medida.

Nas atividades desse módulo, o uso da calculadora deve ser incentivado. Aproveite a oportunidade para rever e/ou esclarecer as regras de arredondamento e, se possível, alguns detalhes operacionais das calculadoras comuns.

3. Atividades complementares

3.1 BATALHA NAVAL GEOMÉTRICA

Descrição:

Trata-se de um jogo similar ao jogo Batalha Naval. Os alunos deverão identificar e plotar pontos (pares ordenados) no primeiro quadrante, desenhando figuras geométricas planas e se valendo de suas propriedades para identificá-las. (Esta atividade pode ser estendida para incluir todo o plano cartesiano)

Objetivos:

Os alunos deverão:

- a) identificar pontos num plano cartesiano usando o conceito de pares ordenados;
- b) plotar pontos no plano cartesiano;
- c) usar as propriedades das figuras planas para identificar polígonos como triângulos e quadriláteros (quadrados, retângulo, paralelogramo, trapézios, etc.)

Materiais e Equipamentos:

- a) papel quadriculado
- b) lápis colorido
- c) retroprojektor

Motivação e introdução:

1. Pergunte aos alunos se eles já jogaram o jogo Batalha Naval. Caso algum aluno já o conheça, peça a ele (ou ela) que fale à classe sobre o jogo. Diga aos alunos que eles irão participar de um jogo semelhante à Batalha Naval.
2. No retroprojektor, ou em papel quadriculado grande, desenhar o primeiro quadrante do plano cartesiano. Peça aos alunos, individualmente, para plotarem alguns pontos e, em seguida, identificar o par ordenado correspondente. Faça isso algumas vezes; se ninguém escolher a origem $(0,0)$, coloque um ponto lá e peça aos alunos que identifiquem as suas coordenadas.
3. Desenhe alguns polígonos no plano cartesiano disponível (retângulo, triângulo, quadrado, paralelogramo, trapézios isósceles, etc.). Peça aos alunos para identificar as figuras e identificar as coordenadas dos vértices.

Desenvolvimento:

1. Divida a classe em pares. Instrua seus alunos para colocarem as mesas de modo que eles fiquem de frente um para o outro. Os alunos devem fazer uma pilha de livros entre eles para que um não possa ver o papel de seu parceiro.
2. Distribua a cada aluno uma folha de papel quadriculado, com o gráfico do primeiro quadrante na metade superior do papel e outro na metade inferior do papel.
- 3 Cada aluno irá desenhar um polígono (triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézios, etc.) na grade superior. Discuta algumas propriedades dessas figuras que possam ajudar os alunos a identificá-las.
4. Cada aluno vai, então, tentar adivinhar a forma que o seu parceiro desenhou. Para isso os alunos se revezam perguntando se a figura do seu parceiro tem ou não um ponto marcado em determinada localização. Quando um aluno sugere um ponto e ele é um dos vértices da figura do seu parceiro, ele deve colocar um ponto naquela posição, na grade inferior da sua folha; caso contrário, ele coloca um X. (Isso permite ao aluno acompanhar as suas tentativas de localização).
5. Quando um aluno achar que já é capaz de identificar a figura do parceiro, deverá dizer o seu nome e as coordenadas de todos os seus vértices. Teremos, então, um vencedor.
6. Repetir, se o tempo permitir.

Resumo e Encerramento:

1. Peça aos alunos para compartilharem algumas das estratégias que usaram para descobrir a forma do seu parceiro. Incentive-os a falar sobre as propriedades das figuras que os ajudaram nessa tarefa.
2. Peça aos alunos para plotar e unir alguns pontos que formem mensagens (FIM, EU TE AMO, etc.) ou imagens (estrela, hexágono, etc.)

Avaliação:

Observar os alunos durante a atividade, para se certificar de que eles estão jogando o jogo corretamente e ver se eles estão fazendo apenas tentativas aleatórias, ou se estão realmente usando o seu conhecimento das propriedades das figuras geométricas planas para identificar a forma do seu parceiro.

3.2 INVESTIGANDO TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

3.2.1 TRIÂNGULOS

Material Necessário:

- a) Dois triângulos retângulos de tamanhos e cores diferentes, de cartolina.
- b) Régua;
- c) Papel milimetrado e
- d) Lápis e marcadores coloridos.

Desenvolvimento:

No meio da folha, trace uma linha horizontal e, tomando-a como referência, trace figuras diferentes usando o triângulo menor como molde, de modo que cada novo triângulo toque o anterior no lado de mesmo tamanho. Reforce o traço entre eles.

• *Nível 1*

- 1) Você deslizou, girou ou refletiu e girou o triângulo que você estava desenhando?
- 2) Que figuras você vê? Vértices? Lados?
- 3) Esboce algumas dessas figuras. São polígonos? Côncavos ou convexos?

Obs: A habilidade de focar apenas nas linhas que são importantes para o seu caso em particular e bloquear, em sua mente, as linhas que não lhe interessam é importante em todos os níveis da Geometria. Esboçar figuras retiradas de um padrão complicado ajuda a desenvolver essa habilidade, levando o aluno a se fixar mais nas partes do que no todo, além de reforçar a importância do conceito de simetria.

• *Nível 2*

Investigar propriedades das figuras planas a partir do desenho para responder sempre, às vezes e nunca às questões:

- 1) Um triângulo _____ tem três lados.
- 2) Um triângulo _____ tem um ângulo reto.
- 3) Um triângulo _____ tem dois ângulos retos.
- 4) Um triângulo _____ tem um lado horizontal.

3.2.2 QUADRILÁTEROS

Use o triângulo maior como molde e desenhe quadriláteros diferentes.

- **Nível 1**

Observe se você teve que girar ou girar e deslizar o triângulo para desenhar os seus quadriláteros.

- **Nível 2**

1) Dê nome e faça uma lista de propriedades para cada um dos seus quadriláteros.

2) Responda sempre, às vezes e nunca às questões:

- Quadriláteros _____ têm dois pares de lados congruentes.
- Paralelogramos _____ têm dois pares de lados congruentes.
- Paralelogramos _____ têm diagonais congruentes.
- Retângulos _____ têm diagonais congruentes.

- **Nível 3**

Associe Verdadeiro (V) ou Falso (F) às afirmações abaixo:

- () Se ABCD é um quadrado, então as suas diagonais são perpendiculares.
 () Se as suas diagonais são perpendiculares, então ABCD é um quadrado.
 () Em todo paralelogramo as diagonais se cortam ao meio.

3.2.3 INVESTIGANDO ÁREAS E PERÍMETROS

Use o triângulo maior como molde e desenhe um retângulo.

- **Nível 1**

1) Você teve que girar ou girar e deslizar o triângulo? Use o papel milimetrado para investigar a área do triângulo e do retângulo.

2) Desenhe uma figura usando 2 retângulos e 3 triângulos. Qual seria a sua área? É possível fazer figuras diferentes usando esses mesmos módulos? E quanto às suas áreas? Seriam as mesmas?

- **Nível 2**

1) Use a técnica do ladrilhamento e tente obter a fórmula da área do triângulo, retângulo e paralelogramo.

2) Responda “**sempre, às vezes e nunca**” às questões:

- a) Triângulos que têm áreas iguais _____ têm perímetros iguais.
- b) Triângulos que têm a mesma base e a mesma altura _____ têm a mesma área.
- c) Triângulos que têm a mesma base e a mesma altura _____ são congruentes.

3) Charadas: “**Quem sou eu?**”

Prepare algumas charadas para os alunos solucionarem, como: “Eu sou um polígono; tenho quatro lados de mesmo tamanho, mas os meus quatro ângulos internos não são de mesma medida. Quem sou eu?”

Obs.: Peça aos alunos para criarem suas próprias charadas e compartilhá-las com os colegas.

3.3 JOGO: “EU TENHO, QUEM TEM?”

Prepare uma série de cartas contendo, cada uma, uma afirmação e uma pergunta (uma carta para cada aluno). A afirmação declara que o aluno tem uma determinada figura geométrica; a pergunta descreve as características de uma outra figura. A primeira carta deve ter apenas uma pergunta, para começar o jogo. Veja o exemplo:

Carta 1: Quem tem uma figura com três lados?

Carta 2: Eu tenho um triângulo.

Quem tem o nome de duas figuras que têm o mesmo tamanho e forma?

Carta 3: Eu tenho figuras congruentes.

Quem tem uma figura com cinco lados?

Obs.: As cartas dadas aos alunos não identificam a ordem. A última carta deve responder uma questão e afirmar: “Este é o fim do jogo”.

Desenvolvimento:

Distribuir uma carta para cada aluno. O aluno que sair com a carta contendo apenas uma questão começa o jogo. Os outros ouvem, processam e respondem, dando sequência ao jogo.

4. Sugestões de Leitura

BURGER, William. F. ; SHAUGHNESSY, J. Michael. **Spadework prior to deduction in geometry**. Mathematics Teacher - NCTM, Reston, VA (USA), v. 78, n.5 p. 419- 427. May.1985.

BURGER, William. F. ; SHAUGHNESSY, J. Michael. **Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry**. Journal for Research in Mathematics Education - NCTM. Reston, VA (USA). v. 17, n.1, p. 31-48, Jan.1986. Disponível em: <http://links.jstor.org/sici?sici=0021-8251%28198601%2917%3A1%3C31%3ACTVHLO%3E2.0.CO%3B2-G>

CROWLEY, M.L. O Modelo van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico. In: **Aprendendo e ensinando geometria**, Lindquist, M.M.; Shulte, A.P., traduzido por Hygino H. Domingues, São Paulo: Saraiva, p. 1-20. 1994.

FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. **An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents**. (Final report of the Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents Project). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education. 1985.

FUYS, D. et al. **The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents**. Journal for Research in Mathematics Education - Monograph Series, nº 3 - NCTM, Reston, VA (USA). 1988.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A.: **Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele**, en S. Llinares, M.V.Sánchez (eds), Teoría y práctica en educación matemática (Alfar: Sevilla, Spain), p.295 -384 (fragmentos). 1990.

NASSER, Lílian. **Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil**. 1992. 397 f. Tese de Doutorado. University of London. King's College. Centre for Educational Studies. London.

NASSER, Lílian. **A teoria de van Hiele: pesquisa e aplicação**. Rio de Janeiro: UFRJ. 1992. 16p.

NASSER, Lílian; SANT'ANNA, Neide P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro. IM/UFRJ - Projeto Fundação. 2004.

NASSER, Lílian; TINOCO, Lúcia (coord.). **Curso básico de geometria: enfoque didático**. 3. ed. Rio de Janeiro: IM/ UFRJ – Projeto Fundação. 2004. 3v.

USISKIN, Zalman. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry**. CDASSG Project. The University of Chicago. Chicago (USA). 1982.

VAN DE WALLE, John A. O pensamento e os conceitos geométricos. In: VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Cap. 21, p.438-484.

VAN HIELE, Pierre Marie. **Structure and insight: a theory of mathematics education**. Orlando, USA: Academic Press, Inc. 1986. 246 p.

5. Sugestões de Applets e Sites

Planificações do cubo:

http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=84

Planificações para cortar:

www.fi.uu.nl/toepassing.wisweb.en.html

Geoplanos:

<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>

Jogo labirinto:

www.shodor.org/interactive/activities/coords/index.html

Poliedros:

http://www.uff.br/cdme/poliedros_platão_dual/index.html

<http://www.leoakio.com/poliedros.html>

Tangrams:

www.nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_292_g_3_t_1.html

www.redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate.htm

http://centrovirtualgoeldi.com/paginas.aspx?Menu=areaedu_atividades&opcao=Tangram

<http://ensinarevt.com/jogos/tangram/index.html>

Tangram Pro – versão 2.0. Shareware

Relação Pitagórica:

<http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.5/index.htm>

Geometria Dinâmica:

Cabri-Géomètre II e 3D - <http://www.cabri.com.br/index.php>

C.a.R. -Régua e Compasso - <http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/>

Geogebra - <http://www.geogebra.org/cms/index.php?lang=pt>

Poly Pro 1.11 - www.peda.com/polypro

6. Anexos

Anexo 1

Fichas de registro de observações

Módulo: _____ **Atividade:** _____ **Proposta:** _____

Forma (figura): _____ (*)

CARACTERÍSTICAS OBSERVADAS:

-
-
-
-
-

ou

SEMELHANÇAS

DIFERENÇAS



ou

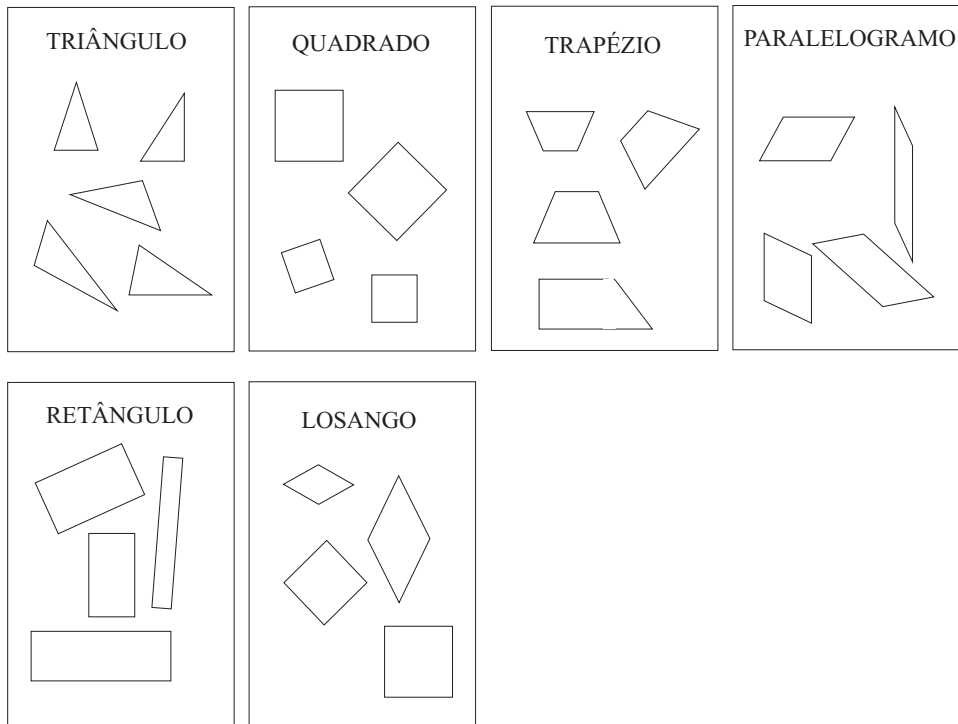
REGRA ESTABELECIDADA: _____

-
-
-
-

Anexo 2

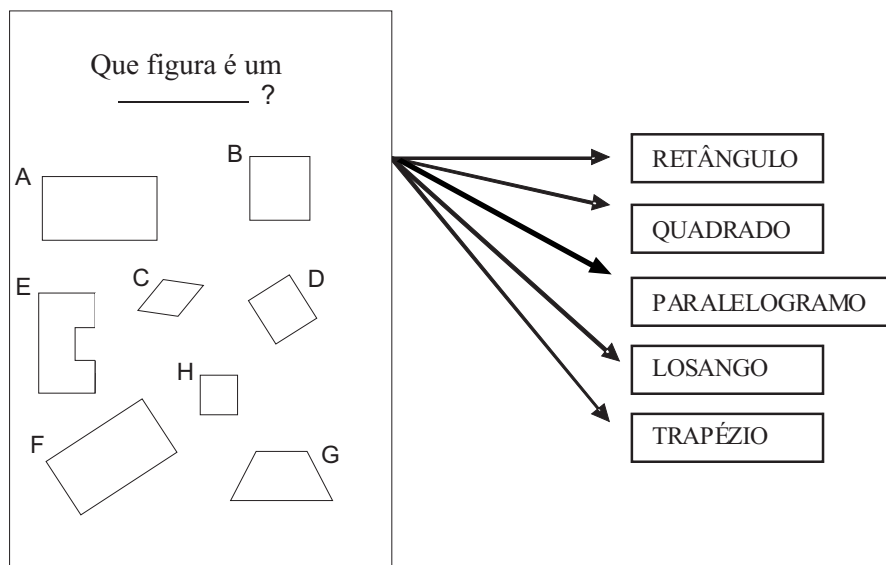
Modelos de fichas

Módulo: 3 Atividade: 3 “Nome & Figura”



Modelo de ficha

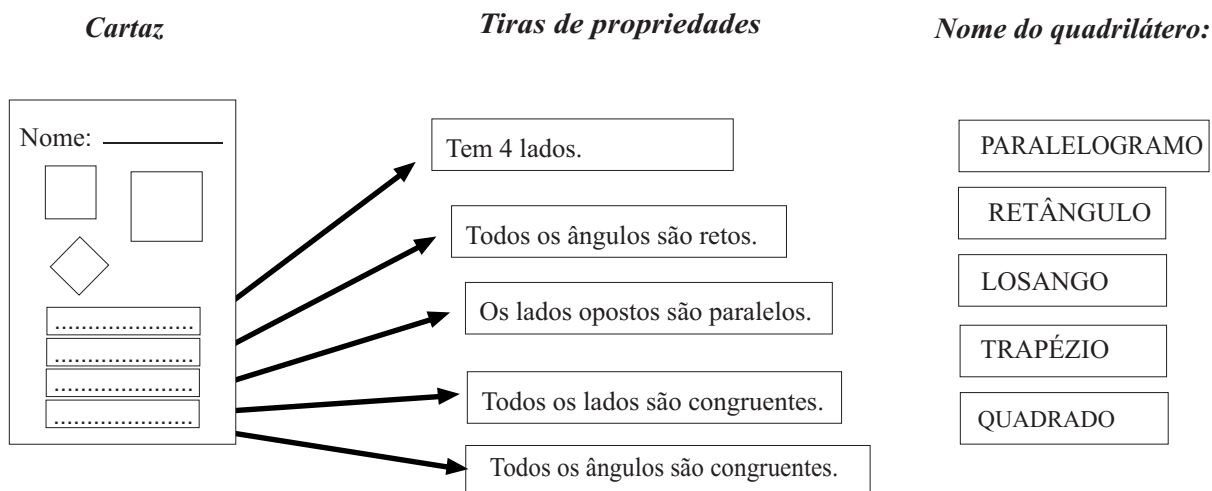
Módulo: 3 Atividade: 5 “Quem é e por quê?”



Anexo 3

Modelos de cartaz e fichas de propriedades

Módulo: 4 Atividade: 3 “Quadriláteros - características & propriedades”



Modelo de quadro de síntese de propriedades

Módulo: 4 Atividade: 3 “Quadriláteros - características & propriedades”

Nome das figuras \ Propriedades	QUADRILÁTERO	TRAPÉZIO	LOSANGO	PARALELOGRAMO	RETÂNGULO	QUADRADO
Tem quatro lados.	X	X	X	X	X	X
Tem quatro lados iguais.			X			X
Tem quatro ângulos.	X	X	X	X	X	X
Apenas um par de lados opostos paralelos		X				
Lados opostos paralelos.			X	X	X	X
Lados opostos congruentes (iguais).			X	X	X	X
Ângulos opostos congruentes.			X	X	X	X
Quatro ângulos retos.					X	X

Anexo 4

Modelo de cartaz para reconhecimento de figuras

Módulo: 4 Atividade: 5 “Descobrimdo ou adivinhando?”

	I	II	III	IV
Grupo 1				
Grupo 2				
Grupo 3				
Grupo 4				
Grupo 5				

Obs.: A primeira seqüência de figuras está totalmente exposta apenas para exemplificar.

Modelo de ficha de possibilidades

Módulo: 4 Atividade: 5 “Descobrimdo ou adivinhando?”

Figura	I		II		III		IV
	Pode ser	Não pode ser	Pode ser	Não pode ser	Pode ser	Não pode ser	Nome da figura
Grupo 1							
Grupo 2							
Grupo 3							

Anexo 5

Modelo de cartaz de propriedades (quadrado)

Módulo: 4 Atividade: 6 “Quem sou eu?”

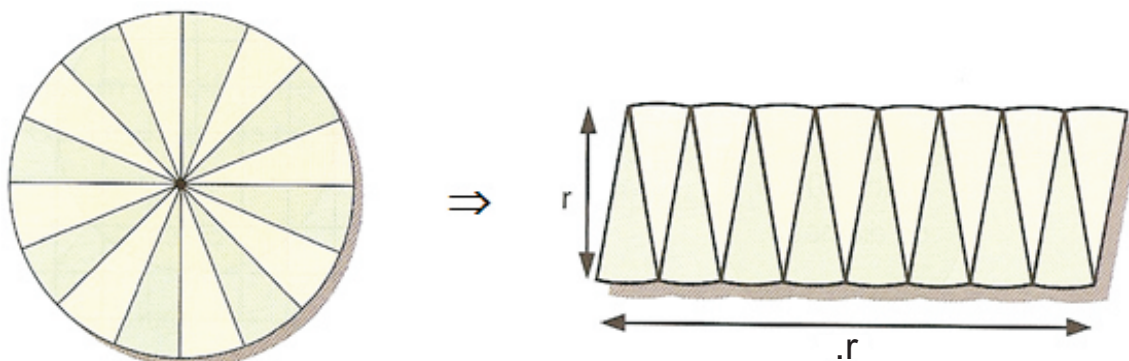
A)	Tem quatro lados.
B)	Os lados opostos são iguais.
C)	Tem pelo menos um ângulo reto.
D)	Um lado é maior do que o outro.
E)	As diagonais se cruzam ao meio.
F)	As diagonais são congruentes.

Modelo de tabela de identificação do Número

Módulo: 5 Atividade: 1 “Festa de aniversário sem chapéu? Não é festa!”

RAIO (R)	COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA (C)	C/R	C/D

Modelo: Cálculo da área do círculo

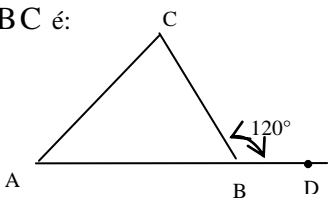


APÊNDICE B – RELAÇÃO ENTRE AS QUESTÕES PROPOSTAS NO TESTE DE SONDAGEM E O(S) CONCEITO(S) GEOMÉTRICOS QUE DEVEM SER RESSIGNIFICADOS ANTES (OU DURANTE) DO ESTUDO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.

QUESTÃO	ÂNGULOS	POLÍGONOS	TRIÂNGULOS	QUADRILÁTEROS	SEMELHANÇA	T. PITÁGORAS	POSIÇÃO RELATIVA (RETAS)	CIRCUNFERÊNCIA / CÍRCULO	PERÍMETRO / ÁREAS
1							X		
2		X		X					X
3					X				
4	X								
5	X	X	X						
6							X		
7								X	
8	X						X		
9	X								
10	X						X		
11		X	X						
12		X	X	X	X				
13		X	X						X
14	X	X		X					
15		X		X					X
16		X	X		X				
17								X	
18		X		X					X
19	X								
20	X	X	X			X			
21	X	X	X						
22	X	X	X	X					
23		X							
24		X		X		X	X		X
25		X		X	X				X

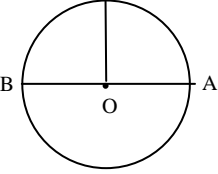
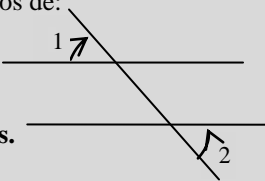
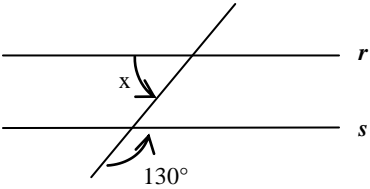
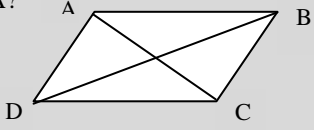
Fonte: Elaborado pela autora.

APÊNDICE C – DESCRIÇÃO DOS CONCEITOS ENVOLVIDOS NAS QUESTÕES DO TESTE DE SONDAAGEM E ANÁLISE DAS RESPOSTAS ASSINALADAS ¹

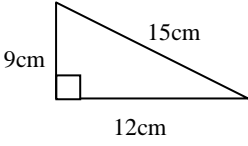
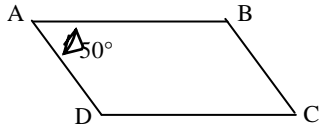
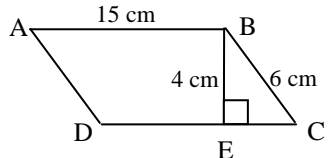
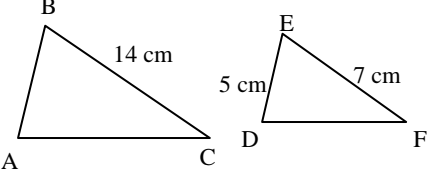
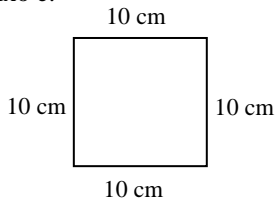
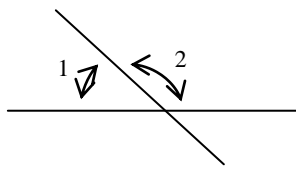
QUESTÃO	CONCEITO(S) GEOMÉTRICO(S)	ACERTOS POR RESPOSTA (%)
<p>1- Retas perpendiculares:</p> <p>➤ (a) interceptam-se formando quatro ângulos retos. (b) interceptam-se formando dois ângulos agudos e dois obtusos. (c) não se interceptam. (d) interceptam-se formando quatro ângulos agudos. (e) nenhuma das opções anteriores.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Posição relativa entre duas retas (<i>perpendicularismo/ ângulos formados por duas retas perpendiculares</i>) 	<p>(a) 52 % (b) 29 % (c) 9 % (d) 7 % (e) 3 %</p>
<p>2 - A área de um retângulo com 3cm de largura e 12cm de comprimento é:</p> <p>(a) 18 cm² (b) 72 cm² ➤ (c) 36 cm² (d) 15 cm² (e) 30 cm²</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos • Quadriláteros • Áreas 	<p>(a) 16 % (b) 2 % (c) 79 % (d) 0 % (e) 3 %</p>
<p>3 – Se duas figuras são semelhantes, mas não congruentes então elas:</p> <p>(a) têm bases congruentes e alturas congruentes. (b) têm a mesma altura. (c) ambas têm bases horizontais. (d) têm formas diferentes, mas têm o mesmo tamanho. ➤ (e) têm tamanhos diferentes, mas têm a mesma forma.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Semelhança de Figuras Planas 	<p>(a) 5 % (b) 0 % (c) 7 % (d) 9 % (e) 79 %</p>
<p>4 – A medida de um ângulo obtuso é:</p> <p>(a) 90° (b) entre 45° e 90° (c) menor do que 90° ➤ (d) entre 90° e 180° (e) maior do que 180°</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos 	<p>(a) 5 % (b) 10 % (c) 14 % (d) 61 % (e) 10 %</p>
<p>5 – Na figura à direita, A, B e D estão sobre a mesma reta. A medida do ângulo \widehat{ABC} é:</p> <p>(a) 120° ➤ (b) 60° (c) 80° (d) 240° (e) são necessárias mais informações.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos • Polígonos • Triângulos 	<p>(a) 5 % (b) 91 % (c) 2 % (d) 0 % (e) 2 %</p>
<p>6 – Retas paralelas são retas:</p> <p>➤ (a) de um mesmo plano que nunca se encontram. (b) que nunca se situam num mesmo plano e que nunca se encontram. (c) que sempre formam ângulos de 90° quando se encontram. (d) que têm o mesmo comprimento. (e) nenhuma das opções anteriores.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Posição relativa entre duas retas 	<p>(a) 90 % (b) 3 % (c) 2 % (d) 0 % (e) 5 %</p>

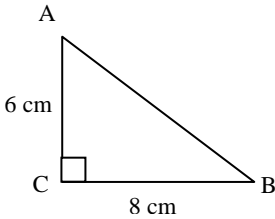
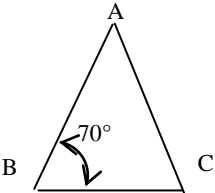
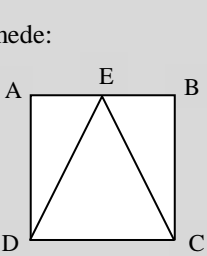
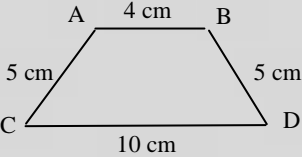
¹ As respostas corretas estão em destaque na 1ª coluna e as mais marcadas estão em destaque na 3ª coluna. As questões nas quais o percentual de acertos foi inferior a 60% aparecem sombreadas.

(continuação)

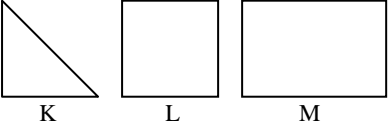
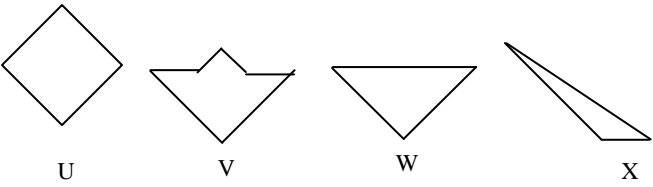
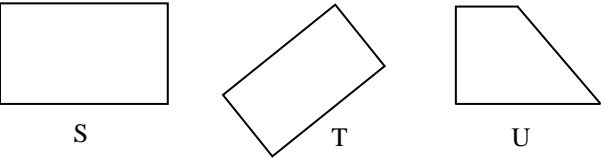
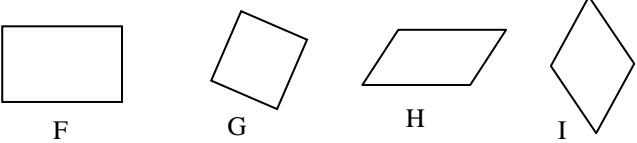
QUESTÃO	CONCEITO(S) GEOMÉTRICO(S)	ACERTOS POR RESPOSTA (%)
<p>7 – Seja O o centro do círculo. O segmento \overline{OA} é chamado de:</p> <p>➤ (a) raio do círculo. (b) diâmetro do círculo. (c) corda do círculo. (d) segmento do círculo. (e) setor do círculo.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Círculo/ Circunferência 	<p>(a) 80 % (b) 9 % (c) 9 % (d) 2 % (e) 0 %</p>
<p>8 – Os ângulos 1 e 2 são chamados de:</p> <p>(a) ângulos opostos. (b) ângulos paralelos. (c) ângulos alternos internos. ➤ (d) ângulos alternos externos. (e) ângulos correspondentes.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos (nomenclatura) • Posição relativa entre retas (paralelismo) 	<p>(a) 28 % (b) 14 % (c) 0 % (d) 17 % (e) 41 %</p>
<p>9 - A medida de um ângulo reto é:</p> <p>(a) menor do que 90°. (b) entre 90° e 180°. (c) 45° ➤ (d) 90° (e) 180°</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos 	<p>(a) 2 % (b) 0 % (c) 2 % (d) 93 % (e) 3 %</p>
<p>10 – As retas r e s são paralelas. A medida do ângulo x é:</p> <p>(a) 65° (b) 130° (c) 30° (d) 40° ➤ (e) 50°</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos • Posição relativa entre retas 	<p>(a) 3 % (b) 10 % (c) 3 % (d) 2 % (e) 82 %</p>
<p>11 – Um triângulo equilátero tem:</p> <p>➤ (a) todos os três lados com o mesmo comprimento. (b) um ângulo obtuso. (c) dois ângulos de mesma medida e o terceiro com medida diferente. (d) todos os três lados com comprimentos diferentes. (e) todos os três ângulos com medidas diferentes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos • Triângulos 	<p>(a) 86 % (b) 2 % (c) 7 % (d) 5 % (e) 0 %</p>
<p>12 – Considerando que a figura ABCD seja um paralelogramo, qual das seguintes afirmativas é CORRETA?</p>  <p>(a) ABCD é equiangular. ➤ (b) O triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD. (c) \overline{AC} tem o mesmo comprimento que \overline{BD}. (d) O perímetro de ABCD é quatro vezes o comprimento de \overline{AB}. (e) Todas as sentenças acima estão corretas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos (elementos; medidas de ângulos e lados; propriedades) • Quadriláteros (paralelogramos; propriedades) • Triângulos (congruência / semelhança) • Semelhança de Figuras Planas 	<p>(a) 7 % (b) 45 % (c) 14 % (d) 5 % (e) 29 %</p>

(continuação)

QUESTÃO	CONCEITO(S) GEOMÉTRICO(S)	ACERTOS POR RESPOSTA (%)
<p>13 – A área do triângulo mostrado é:</p> <p>(a) 36 cm^2. ➤ (b) 54 cm^2. (c) 72 cm^2. (d) 108 cm^2. (e) 1620 cm^2.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos • Triângulos • Áreas 	<p>(a) 3 % (b) 73 % (c) 5 % (d) 14 % (e) 5 %</p>
<p>14 – ABCD é um paralelogramo. A medida do ângulo C é:</p> <p>(a) 40° (b) 130° (c) 140° ➤ (d) 50° (e) são necessárias mais informações.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos • Polígonos • Quadriláteros 	<p>(a) 0 % (b) 2 % (c) 0 % (d) 98 % (e) 0 %</p>
<p>15 – O perímetro do paralelogramo ABCD, abaixo, é:</p> <p>(a) 25 cm. ➤ (b) 42 cm. (c) 21 cm. (d) 60 cm. (e) 90 cm.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos • Quadriláteros • Perímetro 	<p>(a) 3 % (b) 79 % (c) 2 % (d) 9 % (e) 7 %</p>
<p>16 – O triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF. A medida de \overline{AB} é:</p> <p>➤ (a) 10 cm. (b) 11 cm. (c) 12 cm. (d) 13 cm. (e) 14 cm.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos • Triângulos • Semelhança de Figuras Planas 	<p>(a) 95 % (b) 0 % (c) 5 % (d) 0 % (e) 0 %</p>
<p>17 – A figura plana produzida ao se desenhar todos os pontos que ficam a exatamente 6 cm de um ponto dado é:</p> <p>(a) uma circunferência com 6 cm de diâmetro. (b) um quadrado com 6 cm de lado. (c) uma esfera com 6 cm de diâmetro. (d) um cilindro com 6 cm de altura e 6 cm de largura. ➤ (e) uma circunferência com 6 cm de raio.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Círculo/ Circunferência (<i>elementos; propriedades</i>) 	<p>(a) 16 % (b) 28 % (c) 3 % (d) 0 % (e) 53 %</p>
<p>18 – A área do quadrado abaixo é:</p> <p>(a) 20 cm^2. (b) 40 cm^2. (c) 40 cm. ➤ (d) 100 cm^2. (e) 100 cm.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos • Quadriláteros • Áreas 	<p>(a) 0 % (b) 3 % (c) 0 % (d) 92 % (e) 5 %</p>
<p>19 – O ângulos 1 e 2 são:</p> <p>(a) interiores. (b) verticais. ➤ (c) suplementares. (d) complementares. (e) escalenos.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos (<i>nomenclatura</i>) 	<p>(a) 3 % (b) 5 % (c) 21 % (d) 64 % (e) 7 %</p>

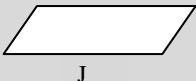

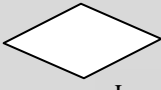
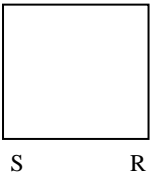
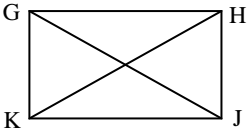
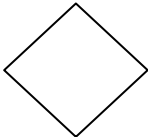
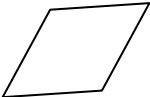
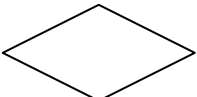
		(conclusão)
QUESTÃO	CONCEITO(S) GEOMÉTRICO(S)	ACERTOS POR RESPOSTA (%)
<p>20 – O ângulo C é um ângulo reto. O comprimento do lado \overline{AB} é:</p> <p>(a) 8 cm. (b) 14 cm. ➤ (c) 10 cm. (d) 12 cm. (e) 18 cm</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos • Polígonos • Triângulos • Teorema de Pitágoras 	<p>(a) 5 % (b) 9 % (c) 76 % (d) 10 % (e) 0 %</p>
<p>21 – O triângulo ABC, abaixo, é isósceles, de base \overline{BC}. A medida do ângulo \hat{A} é:</p> <p>(a) 70° (b) 110° ➤ (c) 40° (d) 60° (e) são necessárias outras informações.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos • Polígonos • Triângulos 	<p>(a) 7 % (b) 2 % (c) 75 % (d) 2 % (e) 14 %</p>
<p>22 – Na figura, ABCD é um quadrado e DEC é um triângulo equilátero. O ângulo \hat{ADE} mede:</p> <p>(a) 15° ➤ (b) 30° (c) 45° (d) 60° (e) são necessárias outras informações.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos <i>(medidas)</i> • Polígonos <i>(elementos; ângulos internos; propriedades)</i> • Quadriláteros <i>(quadrados; propr.)</i> • Triângulos <i>(triângulo equilátero; propriedades)</i> 	<p>(a) 3 % (b) 38 % (c) 19 % (d) 19 % (e) 21 %</p>
<p>23 – Sobre o hexágono regular pode-se afirmar que:</p> <p>(a) todos os seus lados têm a mesma medida. (b) todos os seus ângulos internos medem 120°. (c) o raio e o lado têm a mesma medida. (d) apresenta nove diagonais. ➤ (e) todas as sentenças acima estão corretas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos Regulares <i>(elementos; medidas de ângulos internos e lados; propriedades)</i> 	<p>(a) 72 % (b) 2 % (c) 10 % (d) 0 % (e) 16 %</p>
<p>24 – Os lados \overline{AB} e \overline{CD} do quadrilátero ABCD são paralelos. A sua área mede:</p> <p>(a) 25 cm^2 ➤ (b) 28 cm^2 (c) 35 cm^2 (d) 24 cm^2 (e) faltam dados na figura.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos • Quadriláteros <i>(trapézios; tipos; propr.)</i> • T. de Pitágoras • Posição Relativa entre Retas • Áreas <i>(área do trapézio; área e perímetro)</i> 	<p>(a) 17 % (b) 32 % (c) 12 % (d) 22 % (e) 17 %</p>
<p>25 – A medida do lado de um quadrado é x cm. Se dobramos a medida do lado desse quadrado obteremos um outro quadrado tal que:</p> <p>(a) a sua diagonal medirá o dobro da diagonal do quadrado inicial. (b) a sua área medirá o dobro da área do quadrado inicial. (c) o seu perímetro medirá o dobro do perímetro do quadrado inicial. ➤ (d) apenas uma afirmativa acima é falsa. (e) as afirmativas a, b e c são verdadeiras.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos <i>(elementos; medidas de ângulos e lados; propr.)</i> • Quadriláteros <i>(quadrados; propr.)</i> • Semelhança de Figuras Planas <i>(razão de semelhança)</i> • Áreas <i>(proporcionalidade/ figuras semelhantes)</i> 	<p>(a) 3 % (b) 3 % (c) 10 % (d) 30 % (e) 54 %</p>

**APÊNDICE D – DESCRIÇÃO DOS CONCEITOS ENVOLVIDOS NAS QUESTÕES DO
TESTE DE VAN HIELE E ANÁLISE DAS RESPOSTAS ASSINALADAS ¹**

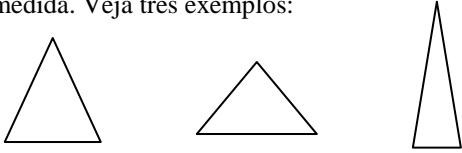
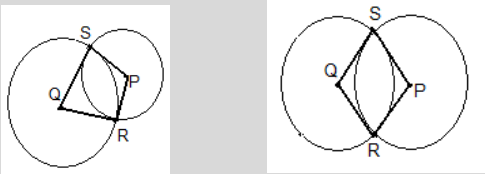
QUESTÃO	• CONCEITO(S) / HABILIDADE(S) MATEMÁTICA(S) EXIGIDA(S)	% DE ACERTOS POR RESPOSTA
<p>1 - Qual (ou quais) das figuras abaixo são quadrados?</p> <p>(a) Somente K. ➤ (b) Somente L. (c) Somente M. (d) Somente L e M. (e) Todas são quadrados.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Triângulos • Quadrados • Retângulos <p>(Identificação de figuras geométricas planas, com ênfase aos quadrados)</p>	<p>(a) 0 % (b) 75 % (c) 2 % (d) 23% (e) 0 %</p>
<p>2 - Qual (ou quais) das figuras abaixo são triângulos?</p>  <p>a) Nenhuma delas. b) Somente V. c) Somente W. ➤ (d) Somente W e X. (e) Somente V e W.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Quadrados • Triângulos • Polígonos Côncavos <p>(Identificação de figuras geométricas planas, com ênfase aos triângulos)</p>	<p>(a) 0 % (b) 0 % (c) 11 % (d) 89 % (e) 0 %</p>
<p>3 - Qual (ou quais) das figuras abaixo é (são) retângulo(s)?</p>  <p>(a) Somente S. (b) Somente T. ➤ (c) Somente S e T. (d) Somente S e U. (e) Todas são retângulos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Retângulos • Trapézios <p>(Identificação de figuras geométricas planas, com ênfase aos retângulos)</p>	<p>(a) 2 % (b) 2 % (c) 89 % (d) 0 % (e) 7 %</p>
<p>4 - Qual (ou quais) dessas figuras é (são) quadrado(s)?</p>  <p>(a) Nenhuma delas é um quadrado. ➤ (b) Somente G. (c) Somente F e G. (d) Somente G e I. (e) Todas são quadrados.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Retângulos • Quadrados • Paralelogramos • Losangos <p>(Identificação de figuras geométricas planas, com ênfase aos quadrados)</p>	<p>(a) 4 % (b) 69 % (c) 7 % (d) 4 % (e) 13 %</p>

¹ As respostas corretas estão em destaque na 1ª coluna e as mais marcadas estão em destaque na 3ª coluna. As questões nas quais o percentual de acertos foi inferior a 60% aparecem sombreadas.

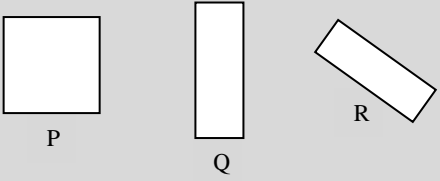
(continuação)

QUESTÃO	• CONCEITO(S) / HABILIDADE(S) MATEMÁTICA(S) EXIGIDA(S)	% DE ACERTOS POR RESPOSTA
<p>5 – Qual (quais) dessas figuras é (são) paralelogramo(s)?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">    </div> <p>(a) Somente J. (b) Somente L. (c) Somente J e M. (d) Nenhuma delas é um paralelogramo. ➤ (e) Todas são paralelogramos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Paralelogramos (e suas diversas orientações no plano). <p>(Identificação de figuras geométricas planas, com ênfase aos paralelogramos, independente da sua orientação no plano)</p>	(a) 18 % (b) 4 % (c) 27 % (d) 5 % (e) 46 %
<p>6 – PQRS é um quadrado. Qual relação é verdadeira para qualquer quadrado?</p> <p>(a) \overline{PR} e \overline{RS} têm o mesmo comprimento. P Q</p> <p>➤ (b) \overline{QS} e \overline{PR} são perpendiculares.</p> <p>(c) \overline{PS} e \overline{QR} são perpendiculares.</p> <p>(d) \overline{PS} e \overline{QS} têm o mesmo comprimento.</p> <p>(e) O ângulo Q é maior do que o ângulo R.</p> <div style="text-align: center;">  </div>	<ul style="list-style-type: none"> Quadrados (seus elementos e propriedades). <p>(Conhecimento das propriedades dos quadrados relacionadas aos ângulos internos, lados e diagonais)</p>	(a) 13 % (b) 66 % (c) 14 % (d) 5 % (e) 0 % <i>s/ resposta</i> 2%
<p>7 – No retângulo GHJK, \overline{GJ} e \overline{HK} são as diagonais.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Qual, de (a) a (d), <u>não</u> é verdadeira em <u>todo</u> retângulo?</p> <p>(a) Há quatro ângulos retos. (b) Há quatro lados. (c) As diagonais têm o mesmo comprimento. (d) Os lados opostos têm o mesmo comprimento. ➤ (e) Todas, de (a) a (d), são verdadeiras em todo retângulo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Retângulos (seus elementos e propriedades). <p>(Conhecimento das propriedades dos retângulos relacionadas aos ângulos internos, lados e diagonais)</p>	(a) 5 % (b) 5 % (c) 7 % (d) 11 % (e) 71% <i>s/ resposta</i> 1%
<p>8 - Um losango é uma figura de quatro lados, os quais são todos de mesmo comprimento. Veja os exemplos:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">    </div> <p>Qual, de (a) a (d), <u>não</u> é verdadeira em <u>todo</u> losango?</p> <p>➤ (a) As duas diagonais têm o mesmo comprimento. (b) Cada diagonal é a bissetriz de dois ângulos do losango. (c) As diagonais são perpendiculares. (d) Os ângulos opostos têm a mesma medida. (e) Todas, de (a) à (d), são verdadeiras em todo losango.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Losangos (seus elementos e propriedades). <p>(Conhecimento das propriedades dos losangos relacionadas aos ângulos internos, lados e diagonais)</p>	(a) 66 % (b) 5 % (c) 0 % (d) 5 % (e) 20 % <i>s/ resposta</i> 4%

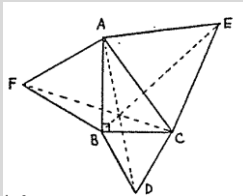
(continuação)

QUESTÃO	• CONCEITO(S) / HABILIDADE(S) MATEMÁTICA(S) EXIGIDA(S)	% DE ACERTOS POR RESPOSTA
<p>9 – Um triângulo isósceles é um triângulo com dois lados de mesma medida. Veja três exemplos:</p>  <p>Qual, de (a) à (d), é verdadeira em <u>todo</u> triângulo isósceles?</p> <p>(a) Os três lados devem ter o mesmo comprimento. (b) Um dos lados deve ter o dobro da medida de outro lado. ➤ (c) Deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma medida. (d) Os três ângulos devem ter a mesma medida. (e) Nenhuma, de (a) a (d), é verdadeira em todo triângulo isósceles.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Triângulos Isósceles (seus elementos e propriedades). <p>(Conhecimento das propriedades dos triângulos isósceles relacionadas aos ângulos internos e medidas dos lados)</p>	<p>(a) 0 % (b) 2 % (c) 87 % (d) 4 % (e) 7 %</p>
<p>10 – Dois círculos de centro em P e Q se interceptam em R e S formando uma figura de quatro lados PRQS. Veja dois exemplos:</p>  <p>Qual, de (a) à (d), não é sempre verdade?</p> <p>(a) PRQS terá dois pares de lados de mesmo comprimento. (b) PRQS terá pelo menos dois ângulos de mesma medida. (c) As linhas \overline{PQ} e \overline{RS} serão perpendiculares. ➤ (d) Os ângulos P e Q terão a mesma medida. (e) Todas, de (a) a (d) são verdadeiras.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Círculo (seus elementos e propriedades). <p>(Conhecimento das propriedades dos círculos relacionadas aos raios, às cordas e suas mediatrizes e aos ângulos do quadrilátero formado)</p>	<p>(a) 20 % (b) 11 % (c) 7 % (d) 39 % (e) 23 %</p>
<p>11 – A seguir há duas afirmações:</p> <p>Afirmiação 1 : A figura F é um retângulo. Afirmiação 2 : A figura F é um triângulo.</p> <p>Qual das afirmativas abaixo é a correta?</p> <p>(a) Se 1 é correta, então 2 é correta. (b) Se 1 é falsa, então 2 é correta. ➤ (c) 1 e 2 não podem ser, ambas, verdadeiras. (d) 1 e 2 não podem ser, ambas, falsas. (e) Nenhuma, de (a) a (d) é correta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Retângulos. • Triângulos. • Relações lógicas. <p>(Capacidade de formação de imagens mentais. Compreensão das implicações lógicas e inclusão de classes)</p>	<p>(a) 4 % (b) 23 % (c) 61 % (d) 4 % (e) 7 %</p> <p>s/ resposta 1 %</p>

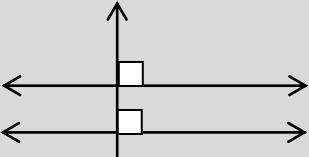
(continuação)

QUESTÃO	• CONCEITO(S) / HABILIDADE(S) MATEMÁTICA(S) EXIGIDA(S)	% DE ACERTOS POR RESPOSTA
<p>12 – A seguir há duas afirmações:</p> <p>Afirmção S: ΔABC tem três lados de mesmo comprimento.</p> <p>Afirmção T : no ΔABC , os ângulos internos B e C têm mesma medida</p> <p>Qual das afirmativas abaixo é a correta?</p> <p>(a) As afirmações S e T não podem ser ambas verdadeiras.</p> <p>➤ (b) Se S é verdadeira, então T é verdadeira.</p> <p>(c) Se T é verdadeira, então S é verdadeira.</p> <p>(d) Se S é falsa, então T é falsa.</p> <p>(e) Nenhuma, de (a) a (d) é correta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Triângulos. • Relações lógicas. <p>(Capacidade de formação de imagens mentais e de relacionar propriedades e figuras. Compreensão das implicações lógicas e inclusão de classes)</p>	<p>(a) 32 %</p> <p>(b) 43 %</p> <p>(c) 7 %</p> <p>(d) 4 %</p> <p>(e) 13 %</p> <p>s/ resposta 1%</p>
<p>13 – Qual (quais) dessas figuras pode(m) ser chamada(s) de retângulo?</p> <div style="text-align: center;">  <p>P Q R</p> </div> <p>➤ (a) Todas.</p> <p>(b) Somente Q.</p> <p>(c) Somente R.</p> <p>(d) Somente P e Q.</p> <p>(e) Somente Q e R.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Retângulos. • Quadrados. <p>(Capacidade de perceber relações entre propriedades e entre figuras. Compreensão da inclusão de classes)</p>	<p>(a) 36 %</p> <p>(b) 0 %</p> <p>(c) 0 %</p> <p>(d) 0 %</p> <p>(e) 64 %</p>
<p>14 – Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?</p> <p>➤ (a) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos quadrados.</p> <p>(b) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos retângulos.</p> <p>(c) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos paralelogramos.</p> <p>(d) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos paralelogramos.</p> <p>(e) Nenhuma, de (a) a (d) é verdadeira.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Retângulos e suas propriedades. • Quadrados e suas propriedades. <p>(Conhecimento das propriedades dos quadrados, retângulos e paralelogramos e da relação entre elas. Compreensão da inclusão de classes)</p>	<p>(a) 20 %</p> <p>(b) 16 %</p> <p>(c) 19 %</p> <p>(d) 11 %</p> <p>(e) 34 %</p>
<p>15 – O que todos os retângulos têm que alguns paralelogramos não têm?</p> <p>(a) Lados opostos iguais.</p> <p>➤ (b) Diagonais iguais.</p> <p>(c) Lados opostos paralelos.</p> <p>(d) Ângulos opostos iguais.</p> <p>(e) Nenhuma de (a) a (d)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Paralelogramos. • Retângulos. <p>(Conhecimento das propr. dos retângulos e paralelogramos e compreensão da inclusão de classes)</p>	<p>(a) 11 %</p> <p>(b) 39 %</p> <p>(c) 9 %</p> <p>(d) 7 %</p> <p>(e) 34 %</p>

(continuação)

QUESTÃO	• CONCEITO(S) / HABILIDADE(S) MATEMÁTICA(S) EXIGIDA(S)	% DE ACERTOS POR RESPOSTA
<p>16 – Na figura abaixo temos o triângulo retângulo ABC. Os triângulos equiláteros ACE, BFA e BCD foram construídos sobre os lados de ABC</p>  <p>Dessa informação, pode-se provar que \overline{AD}, \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum. O que essa prova diz a você?</p> <p>(a) Apenas neste triângulo desenhado podemos afirmar que \overline{AD}, \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.</p> <p>(b) Em alguns, mas não em todos os triângulos retângulos, \overline{AD}, \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.</p> <p>➤ (c) Em qualquer triângulo retângulo, \overline{AD}, \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.</p> <p>(d) Em qualquer triângulo, \overline{AD}, \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.</p> <p>(e) Em qualquer triângulo equilátero, \overline{AD}, \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Triângulos (tipos e propriedades). • Demonstrações ou provas. <p>(Domínio do processo dedutivo, das demonstrações e provas)</p>	<p>(a) 23 %</p> <p>(b) 11 %</p> <p>(c) 23 %</p> <p>(d) 32 %</p> <p>(e) 9 %</p> <p><i>s/ resposta</i> 2%</p>
<p>17 – Abaixo, estão relacionadas três propriedades de uma figura.</p> <p>Propriedade D: Tem diagonais de mesmo comprimento.</p> <p>Propriedade Q: É um quadrado.</p> <p>Propriedade R: É um retângulo.</p> <p>Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?</p> <p>(a) D implica em Q, a qual implica em R.</p> <p>(b) D implica em R, a qual implica em Q.</p> <p>➤ (c) Q implica em R, a qual implica em D.</p> <p>(d) R implica em D, a qual implica em Q.</p> <p>(e) R implica em Q, a qual implica em D.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Retângulos e suas propriedades. • Quadrados e suas propriedades. <p>(Compreensão das implicações lógicas e inclusão de classes. Reconhecimento de condições necessárias e suficientes)</p>	<p>(a) 36 %</p> <p>(b) 13 %</p> <p>(c) 14 %</p> <p>(d) 21 %</p> <p>(e) 16 %</p>
<p>18 – Abaixo temos duas afirmativas:</p> <p>I - Se uma figura é um retângulo, então suas diagonais se cortam ao meio.</p> <p>II - Se as diagonais de uma figura se cortam ao meio, a figura é um retângulo.</p> <p>Qual das afirmativas abaixo está correta?</p> <p>(a) Para provar que I é verdadeira, basta provar que II é verdadeira.</p> <p>(b) Para provar que II é verdadeira, basta provar que I é verdadeira.</p> <p>(c) Para provar que II é verdadeira, basta encontrar um retângulo cujas diagonais se cortam ao meio.</p> <p>➤ (d) Para provar que II é falsa, basta encontrar uma figura, diferente de retângulo, cujas diagonais se cortam ao meio.</p> <p>(e) Nenhuma, de (a) a (d) está correta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Retângulos. <p>(Compreensão das implicações lógicas. Domínio do processo dedutivo, das demonstrações e provas)</p>	<p>(a) 9 %</p> <p>(b) 11 %</p> <p>(c) 7 %</p> <p>(d) 66 %</p> <p>(e) 4 %</p> <p><i>s/resposta</i> 3%</p>

(continuação)

QUESTÃO	• CONCEITO(S) / HABILIDADE(S) MATEMÁTICA(S) EXIGIDA(S)	% DE ACERTOS POR RESPOSTA
<p>19 – Em geometria:</p> <p>(a) Todo termo pode ser definido e toda afirmação verdadeira pode ser provada.</p> <p>(b) Todo termo pode ser definido, mas é necessário assumir que certas afirmações são verdadeiras.</p> <p>(c) Alguns termos têm que ser deixados sem definição, mas toda afirmação verdadeira pode ser provada.</p> <p>➤ (d) Alguns termos têm que ser deixados sem definição e isso é necessário que se tenham algumas afirmações que são assumidas como verdadeiras</p> <p>(e) Nenhuma, de (a) a (d) está correta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Axiomas. • Definições. <p>(Compreensão do papel dos axiomas e definições)</p>	<p>(a) 51 %</p> <p>(b) 18 %</p> <p>(c) 11 %</p> <p>(d) 11 %</p> <p>(e) 9 %</p>
<p>20 – Analise as três sentenças:</p> <p>(1) Duas retas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.</p> <p>(2) Uma reta que é perpendicular a uma de duas linhas paralelas é perpendicular também à outra.</p> <p>(3) Se duas retas são equidistantes, então elas são paralelas.</p> <p>Na figura abaixo, as retas n e p são perpendiculares e as retas m e p também o são. Qual das sentenças acima pode justificar o fato de as retas m e n serem paralelas?</p> <p>➤ (a) Somente (1).</p> <p>(b) Somente (2).</p> <p>(c) Somente (3).</p> <p>(d) (1) ou (2).</p> <p>(e) (2) ou (3).</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Posição relativa entre retas. <p>(Compreensão das implicações lógicas. Domínio do processo dedutivo, das demonstrações e provas)</p>	<p>(a) 25 %</p> <p>(b) 16 %</p> <p>(c) 14 %</p> <p>(d) 34 %</p> <p>(e) 11 %</p>
<p>21 – Na Geometria F, a qual é diferente da que você costuma usar, existem exatamente quatro pontos e seis retas. Cada reta contém exatamente dois pontos. Se os pontos são P, Q, R e S, as retas são {P,Q} , {P,R} , {P,S} , {Q,R} , {Q,S} e {R,S}</p> <p style="text-align: center;">Q • • P</p> <p style="text-align: center;">R • • S</p> <p>Veja como as palavras “intersectam” e “paralelas” são usadas na Geometria F: “As retas {P,Q} e {P,R} se intersectam em P porque {P,Q} e {P,R} têm o ponto P em comum”. “As retas {P,Q} e {R,S} são paralelas porque não têm nenhum ponto em comum”.</p> <p>A partir desta informação, qual está correta?</p> <p>(a) {P,R} e {Q,S} se intersectam.</p> <p>➤ (b) {P,R} e {Q,S} são paralelas.</p> <p>(c) {Q,R} e {R,S} são paralelas.</p> <p>(d) {P,S} e {Q,R} se intersectam.</p> <p>(e) Nenhuma de (a) a (d) está correta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Geometrias não euclidianas. <p>(Capacidade de estabelecer e comparar diferentes sistemas matemáticos)</p>	<p>(a) 59 %</p> <p>(b) 7 %</p> <p>(c) 5 %</p> <p>(d) 4 %</p> <p>(e) 23 %</p> <p><i>s/resposta</i> 2%</p>

(conclusão)

QUESTÃO	• CONCEITO(S) / HABILIDADE(S) MATEMÁTICA(S) EXIGIDA(S)	% DE ACERTOS POR RESPOSTA
<p>22 – Trissectar um ângulo significa dividi-lo em três partes de mesma medida. Em 1847, P. L. Wantzel provou que, em geral, é impossível trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada. Desta prova, o que você pode concluir?</p> <p>(a) Em geral, é impossível <u>bissectar</u> ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada. (b) Em geral, é impossível trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua <u>graduada</u>. (c) Em geral, é impossível trissectar ângulos usando apenas instrumentos de desenho. (d) Ainda é possível que, no futuro, alguém possa encontrar uma método geral de trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada.</p> <p>➤ (e) Ninguém, jamais será capaz de encontrar um método geral de trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos. <p>(Domínio do processo dedutivo, das demonstrações e provas)</p>	<p>(a) 14 % (b) 20 % (c) 20 % (d) 14 % (e) 29 %</p> <p>s/ resposta 3 %</p>
<p>23 – Existe uma geometria, inventada por um matemático J, na qual a seguinte afirmação é verdadeira: <i>“A soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180°.”</i> Qual das afirmativas abaixo é correta?</p> <p>(a) J cometeu um erro ao medir os ângulos do triângulo. (b) J cometeu um erro de raciocínio lógico. (c) J tem uma idéia errada do que se entende por verdadeiro.</p> <p>➤ (d) J começou com pressupostos diferentes daqueles da geometria usual. (e) Nenhuma, de (a) a (d) está correta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Geometrias não euclidianas. <p>(Capacidade de estabelecer e comparar diferentes sistemas matemáticos)</p>	<p>(a) 46 % (b) 13 % (c) 7 % (d) 16 % (e) 16 %</p> <p>s/ resposta 2%</p>
<p>24 – Dois livros de geometria definem a palavra retângulo de maneiras diferentes. Qual afirmativa abaixo está correta?</p> <p>(a) Um dos livros tem um erro. (b) Uma das definições está errada. Não podem existir duas definições para retângulo. (c) Os retângulos em um livro devem ter propriedades diferentes daquelas dos retângulos no outro livro. (d) Os retângulos em um dos livros devem ter as mesmas propriedades apresentadas pelos retângulos no outro livro.</p> <p>➤ (e) As propriedades dos retângulos nos dois livros podem ser diferentes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Retângulos e suas propriedades. <p>(Compreensão de diferentes sistemas axiomáticos, e das relações entre as propriedades que definem um certo conceito)</p>	<p>(a) 18 % (b) 27 % (c) 16 % (d) 18 % (e) 18 %</p> <p>s/ resposta 3 %</p>
<p>25 – Suponha que você tenha provado as afirmativas I e II. I. Se p, então q. II. Se s, então não q. Qual das afirmativas abaixo decorre das afirmativas I e II?</p> <p>(a) Se p, então s. (b) Se não p, então não q. (c) Se p ou q, então s.</p> <p>➤ (d) Se s, então não p. (e) Se não s, então p.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Demonstrações (provas). • Relações lógicas. <p>(Domínio do processo dedutivo, das demonstrações e provas)</p>	<p>(a) 11 % (b) 32 % (c) 11% (d) 30 (e) 13%</p> <p>s/ resposta 3%</p>

Fonte: Elaborado pela autora.

ANEXO A – DESCRITORES DOS NÍVEIS DE VAN HIELE E EXEMPLOS DE RESPOSTAS DOS ALUNOS

Nível 1: O aluno identifica e opera com formas geométricas (ex.: quadrados, triângulos) e outras configurações (ex.: ângulos, retas, malhas) de acordo com a sua aparência.

N.1 - Descritores:

O aluno:

1. identifica as ocorrências de uma forma geométrica pela sua aparência global.
 - a) num simples desenho, diagrama ou num conjunto de recortes de figuras.
 - b) em diferentes posições.
 - c) numa figura ou em configurações mais complexas.
2. constrói, desenha ou copia uma forma geométrica.
3. nomeia ou rotula formas e outras configurações usando uma nomenclatura padronizada ou não e faz isso adequadamente.

Exemplos de respostas

O aluno

1.a) identifica quadrados em um conjunto de recortes ou desenhos.



1.b) indica ângulos, retângulos e triângulos em diferentes posições numa fotografia ou numa página de diagramas.



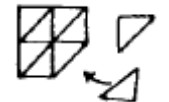
1.c) indica os ângulos retos num quadrilátero. descreve figuras numa malha (ex.: ângulos, retas paralelas, “escadas”).



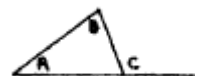
2. faz figuras com palitos: retângulo, retas paralelas.



faz um modelo de ladrilhamento com recortes de triângulos e copia esse modelo (peça por peça) no papel.



3. indica os ângulos de um triângulo chamando-os “de cantos”.



refere-se aos ângulos pela cor (p.ex.: “ângulo vermelho”) ou por letras (p.ex.: “os ângulos A e B somados formam o ângulo C”);

N.1 - Descritores:

O aluno:

4. compara e classifica formas com base na sua aparência global.
5. descreve verbalmente formas geométricas pela sua aparência global.
6. resolve problemas rotineiros operando com as próprias formas e não usando propriedades de aplicabilidade geral.
7. identifica partes de uma figura, mas:
 - a) não analisa a figura em termos dos seus elementos.
 - b) não pensa nas propriedades como características de uma classe de figuras.
 - c) não faz generalizações sobre formas e nem usa uma linguagem adequada.

Exemplos de respostas**(continuação)**

O aluno:

4. diz: “este é um quadrado e aquele é um retângulo” ou “este é mais largo” quando é questionado sobre a diferença entre recortes de quadrados e retângulos.

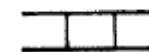
classifica recortes de quadriláteros em “quadrados, retângulos e outros” porque “eles se parecem” com aquelas formas.

5. descreve um retângulo como “parece um quadrado” ou um paralelogramo como um “retângulo inclinado” ou ângulos como “ponteiros de relógio”.

6. usa a abordagem de tentativa (acerto e erro) para resolver problemas de tangram, como fazer quadrados e paralelogramos a partir de duas pequenas peças triangulares.

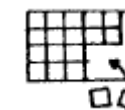


verifica que os lados opostos de um retângulo são paralelos colocando palitos nas suas bordas.



usa a sobreposição de transparências de ângulos para determinar o 3º ângulo de um triângulo.

quadricula um retângulo e conta os quadradinhos para determinar a sua área.



- 7.a) identifica quadrados pela aparência como um todo, mas não introduz espontaneamente a ideia “lados iguais e ângulos retos” ou “cantos retos”.
- 7.b) aponta para os lados do quadrado e mede para verificar se são iguais, mas não generaliza “lados iguais” para todo quadrado.
- 7.c) não usa espontaneamente “todo, alguns, cada, nenhum” ou outro quantificador ao dizer se todo, algum ou nenhuma figura de certo tipo apresenta uma propriedade.

Nível 2: O aluno analisa as figuras em termos dos seus elementos e de relações entre eles; estabelece empiricamente propriedades para uma classe de figuras; usa as propriedades das mesmas para resolver problemas.

N.2 - Descritores:

O aluno:

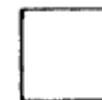
1. identifica e testa relações entre os elementos das figuras (ex.: congruência de lados opostos de um paralelogramo; congruência de ângulos em padrão de ladrilhamento).
2. lembra e usa um vocabulário apropriado para os elementos e relações (ex.: lados opostos, ângulos correspondentes são congruentes, as diagonais se cortam ao meio).
- 3
 - a) compara duas figuras de acordo com as relações entre seus elementos.
 - b) classifica figuras de diferentes maneiras, de acordo com certas propriedades, incluindo a classificação de todas os exemplos de uma classe a partir dos contra-exemplos.
4.
 - a) interpreta e usa descrições verbais de uma figura em termos de suas propriedades

Exemplos de respostas

(continuação)

O aluno:

1. aponta para os lados e ângulos de uma figura e espontaneamente observa que “ela tem 4 ângulos retos e todos os 4 lados são iguais.”



2. observa que para um paralelogramo “esses lados opostos são paralelos e esses outros também”, verificando com palitos que os lados não se encontram ou que são igualmente espaçados.



- 3.a) diz como um recorte de quadrado e de um retângulo são semelhantes ou diferentes em termos de seus ângulos e lados.
 - 3.b) estabelece uma regra para classificar quadriláteros — por exemplo, de acordo com o número de ângulos retos ou pelo número de lados paralelos.
- 4.a) lê cartões de propriedades “4 lados” e “todos os lados são iguais” e tenta desenhar uma figura com essas duas propriedades que não seja um quadrado.

N.2 - Descritores:

O aluno:

b) interpreta sentenças simbólicas ou verbais de regras e as aplica.

5. descobre, empiricamente, propriedades de figuras específicas e generaliza essas propriedades para uma classe de figuras

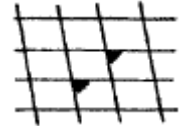
6. a) descreve uma classe de figuras (ex.: paralelogramos) em termos de suas propriedades.

b) diz que figura é, dadas certas propriedades.

Exemplos de respostas**(continuação)**

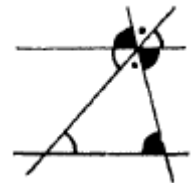
O aluno:

4.b) quando lhe é mostrado um cartão de propriedade para “serra”, ele descreve uma “serra” e a usa para identificar ângulos congruentes numa malha.

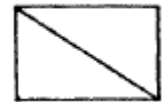


é capaz de explicar a fórmula da área — $\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$ — para um retângulo e reconhece quando ela é aplicável e quando não é.

5. depois de colorir ângulos congruentes numa malha triangular, o aluno nota que “os três ângulos internos de um triângulo são os mesmos que formam uma linha reta e, por isso, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .” Ele acha que isso valerá para outros triângulos e tentará verificar essa proposição usando outras malhas triangulares diferentes.



depois de várias tentativas colocando dois triângulos retângulos congruentes juntos para formar um retângulo, o aluno diz que você pode determinar a área de um triângulo retângulo fazendo um retângulo e tomando a metade da sua área.



a partir de diversos casos numéricos, o aluno descobre que cada ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos dois internos não adjacentes e acredita que isso seja verdade para qualquer triângulo.

6.a) descreve um quadrado para um amigo, ao telefone, dizendo “tem 4 lados, 4 ângulos retos, todos os lados são iguais e os lados opostos são paralelos.”

6.b) dadas certas propriedades como dicas sobre uma figura, o aluno diz que figura deve ser baseado nessas propriedades.

N.2 - Descritores:

O aluno:

7. identifica que propriedades usadas para caracterizar uma classe de figuras também se aplica a outras classes de figuras; compara classes de figuras de acordo com as suas propriedades.
8. descobre propriedades de uma classe de figuras que não lhe é familiar.
9. resolve problemas geométricos usando propriedades conhecidas de figuras ou por abordagens perspicazes.

Exemplos de respostas

(continuação)

(O aluno):

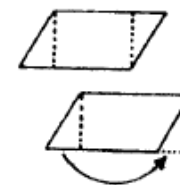
7. tendo observado que os paralelogramos têm “lados opostos paralelos”, o aluno espontaneamente acrescenta “oh, assim como esses quadrados e esses retângulos” (apontando para esses grupos de quadriláteros selecionados).
8. após completar uma classificação de quadriláteros em “pipas” e “não-pipas”, o aluno descobre e verbaliza propriedades que caracterizam as “pipas”
9. quando lhe é solicitado para determinar alguns ângulos numa fotografia o aluno diz “existem inúmeros ângulos pois existem vários triângulos e cada um tem 3 ângulos.”

resolve um problema sobre o segmento de reta que liga os centros de duas circunferências de raios iguais e o que une os dois pontos onde esses círculos se interceptam. O aluno vê um losango no diagrama e observa que os segmentos são perpendiculares porque eles são as diagonais de um losango .



descobre que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° porque um ladrilhamento cobre os 4 ângulos ao redor de um ponto (360°) ou porque um quadrilátero pode ser decomposto em 2 triângulos ($180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$).

descobre como determinar a área de uma nova forma geométrica subdividindo-a ou transformando-a em formas cuja área ele já sabe calcular (ex.: um paralelogramo em 2 triângulos e 1 retângulo ou em 1 retângulo).



N.2 - Descritores:

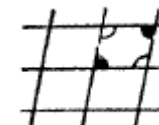
O aluno:

10. formula e usa generalizações sobre propriedades de figuras (guiados pelo professor/ material didático ou espontaneamente, ao seu modo) e usa uma linguagem adequada (ex.: todo, cada, nenhum), mas:
- não explica como certas propriedades de uma figura se interrelacionam.
 - não formula ou usa definições formais.
 - não explica relações de subclasses. Não vai além de checar ocorrências específicas numa lista de propriedades dada.
 - não vê a necessidade da prova ou de explanações lógicas de generalizações descobertas empiricamente e não usa a linguagem correlata (ex.: se - então, porque) corretamente.

Exemplos de respostas**(continuação)**

(O aluno):

- 10.a) quando lhe mostrada uma malha de paralelogramos, não é capaz de explicar como a idéia “ângulos opostos são iguais” decorre de “lados opostos são paralelos.”



- 10.b) quando é solicitado a definir um paralelogramo, o aluno lista várias propriedades mas não identifica um conjunto de propriedades necessárias ou um conjunto de propriedades suficientes
- 10.c) após o aluno ter listado as propriedades de todos os membros de uma família de quadriláteros, ele não consegue explicar porque “todos os retângulos são paralelogramos” ou porque “todos os quadrados são pipas”.
- 10.d) após descobrir o princípio que diz que a soma dos ângulos de um triângulo é 180° , colorindo os ângulos numa malha triangular ou por medição, o aluno não vê nenhuma necessidade de dar um argumento dedutivo para mostrar porque o princípio é válido.

Nível 3: O aluno formula e usa definições, apresenta argumentos informais que requisitam propriedades descobertas anteriormente, acompanha e apresenta argumentos dedutivos.

N.3 - Descritores:

O aluno:

1. a) identifica diferentes conjuntos de propriedades que caracterizam uma classe de figuras e verifica que elas são suficientes.

b) identifica conjuntos mínimos de propriedades que podem caracterizar uma figura.

c) formula e usa definições para uma classe de figuras.
2. apresenta argumentos informais (usando diagramas, recortes de figuras que podem ser dobradas e outros materiais).

a) tendo chegado a uma conclusão a partir de uma informação dada, justifica-a usando relações e argumentos lógicos.

Exemplos de respostas

(O aluno):

- 1.a) elege um conjunto de propriedades que caracterizam uma classe de figuras (ex.: quadrados, paralelogramos) e verifica por meio de desenhos ou construções com palitos se essas propriedades são suficientes.

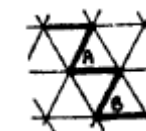
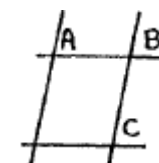
explica que dois diferentes conjuntos de propriedades podem ser eleitos para caracterizar uma classe de paralelogramos — ou “4 lados” e “lados opostos paralelos” ou “4 lados” e “lados opostos iguais”.

- 1.b) ao descrever um quadrado para um amigo, o aluno elege, a partir de uma lista de propriedades, o menor número delas que permitiria ao amigo ter certeza de que a figura era um quadrado.

- 1.c) formula uma definição para uma “pipa” e a usa para explicar porque uma figura é ou não uma “pipa”.

- 2.a) conclui que “se ângulo A = ângulo B e ângulo C = ângulo B, então ângulo A = ângulo C porque ambos são iguais ao ângulo B.

quando solicitado a explicar porque $\hat{A} = \hat{B}$ numa malha triangular, ele diz “as linhas são paralelas e existe uma “serra” (apontando para ela), assim o ângulo A é igual ao ângulo B, pela “serra”.



N.3 - Descritores:

O aluno:

b) ordena classes de figuras.

c) ordena duas propriedades.

d) descobre novas propriedades por dedução.

Exemplos de respostas

(continuação)

(O aluno):

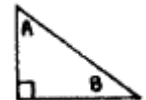
2.b) responde à questão: O retângulo é um paralelogramo? explicando “sim, porque ele apresenta todas as propriedades de um paralelogramo e também a propriedade especial de ter ângulos retos”.

usa as propriedades que caracterizam “pipas” e quadrados para explicar porque quadrados são pipas, mas nem todas as “pipas” são quadrados.

2.c) dada uma lista de propriedades de um quadrado, ele diz “não é necessário dizer que os lados opostos são iguais porque já foi dito que todos os 4 lados são iguais.”

tendo descoberto a regra para o cálculo da área de um triângulo retângulo a partir da fórmula da área do retângulo, ele resume fazendo uma “árvore genealógica” e explica “você precisa dessa ideia (fórmula do retângulo) antes dessa (fórmula do triângulo).

2.d) explica que os dois ângulos agudo num triângulo retângulo somam 90° porque “ 180° menos o ângulo reto deixa como resultado 90° e essa medida deve corresponder aos dois ângulo agudos.”



deduz que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° “porque o quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos, assim $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. Quando questionado se é possível se obter $4 \times 180^\circ = 720^\circ$ para a mesma soma, dividindo o quadrilátero em 4 triângulos (como mostra a figura), ele diz “não, os ângulos do centro não fazem parte dos ângulos do quadrilátero. Assim, se você fizer $4 \times 180^\circ$, deverá descontar os ângulos extras do centro e terá $720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$, como antes.”



N.3 - Descritores:

O aluno:

e) inter-relaciona diversas propriedades numa “árvore genealógica”

3. apresenta argumentos dedutivos informais

a) acompanha um argumento dedutivo e pode fornecer partes de um argumento

b) apresenta uma síntese ou variação de um argumento dedutivo

Exemplos de respostas

(continuação)

(O aluno):

descobre que a soma dos ângulos internos de um pentágono é 540° , dividindo-o em um quadrilátero (360°) e um triângulo (180°) e diz que isso valerá para qualquer pentágono.



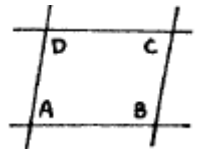
2.e) organiza cartões de propriedades para formar uma “árvore genealógica” e mostrar como uma relação decorre de outra, ou seja, ele explica como as “serras” e “ângulo raso = 180° ” antecedem a “soma dos ângulos de um triângulo = 180° ” esta última relação conduz à “a soma dos ângulos de um quadriláteros = 360° ”.

explica como a fórmula da área de um paralelogramo pode ser obtida a partir da fórmula da área do retângulo e coloca isso numa “árvore genealógica”.

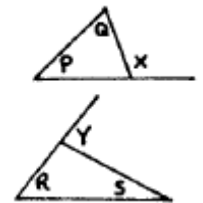
3.a) apresenta razões para os passos de uma prova sobre “a soma dos ângulos de um triângulo = 180° ”, na medida em que o entrevistador o guia através da prova.



3.b) quando recebe uma malha de paralelogramos e é solicitado a fazer uma explanação lógica sobre porque “ângulos opostos são congruentes”, o aluno não consegue fazê-lo por si só, mas acompanha a explanação feita pelo entrevistador para ângulo A = ângulo C. Depois o aluno sintetiza a explanação ao seu modo e explica porque ângulo B = ângulo D.



o entrevistador auxilia o aluno através de uma explanação dedutiva sobre porque o ângulo externo X de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos P e Q. O aluno sintetiza este argumento e apresenta uma argumentação completa, ao seu modo, para uma variação daquela (isto é: ângulo Y = ângulo R + ângulo S)



N.3 - Descritores:

O aluno:

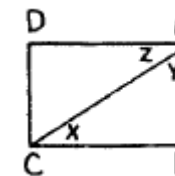
- c) apresenta argumentos dedutivos ao seu modo.
4. apresenta mais de uma explanação para provar alguma coisa e justifica essa explanações usando “árvores genealógicas”
5. informalmente reconhece a diferença entre uma proposição e sua recíproca.
6. identifica e usa estratégias ou raciocínio perspicazes para resolver problemas.

Exemplos de respostas**(continuação)**

(O aluno):

- 3.c) apresenta explanação própria para “ao ângulos opostos de um paralelogramo são iguais”.

justifica porque a área do triângulo retângulo é $\frac{1}{2}$ (base x altura), explicando que dois triângulos retângulos congruentes forma um retângulo. “Se coloca dois desses triângulos juntos, você obtém lados opostos iguais. Os ângulos B e D são os ângulos retos dos triângulos. Os ângulos A e C também são retos porque num triângulo retângulo os ângulos agudos somam 90° . O ângulo Z é igual ao ângulo X e, assim, os ângulos Y e Z somam 90° . A figura formada é um retângulo e cada triângulo retângulo deve ter a metade da área do retângulo.

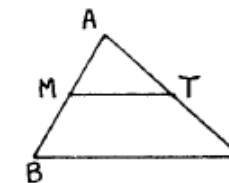


4. apresenta duas diferentes explanações sobre porque a soma dos ângulos de um triângulo é 180° — ou usando duas “serras” ou usando uma “serra” e uma “escada”. As duas explanações são mostradas por duas “árvores genealógicas” diferentes.

explica que a soma dos ângulos de um pentágono é igual a 540° , dividindo-o em três triângulos ($3 \times 180^\circ$) ou dividindo-o em um quadrilátero e um triângulo ($360^\circ + 180^\circ$) e mostra cada método por uma “árvore genealógica” diferente.

5. numa discussão sobre “serras e escadas”, ele descobre que “Oh, se os ângulos são iguais, então as retas são paralelas” e “Oh, também, se as retas são paralelas, os ângulos são iguais.” Quando questionado se as duas afirmações são iguais ele diz “não, em uma você começa com as retas paralelas e chega a ângulos iguais, e na outra você faz o oposto.”

6. dado o problema: M é o ponto médio de AB no triângulo ABC e MT é paralelo a BC; descubra a razão entre MT e BC, o aluno usa a estratégia da escada para definir ângulos congruentes e, portanto, triângulos semelhantes. Se $AM : AB = 1 : 2$, então $MT : BC = 1 : 2$



N.3 - Descritores:

O aluno:

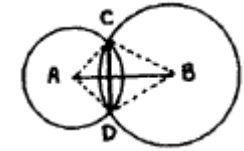
7. reconhece o papel de argumentos dedutivos e da abordagem de problemas de maneira dedutiva, mas:
- a) ele não entende o significado da dedução no sentido axiomático (isto é, não vê a necessidade de definições e das premissas básicas)
 - b) não distingue formalmente uma afirmação da sua recíproca (ex.: “não podemos separar as gêmeas siamesas” — a afirmação e a sua recíproca)
 - c) não estabelece, ainda, relações entre redes de teoremas.

Exemplos de respostas

(continuação)

(O aluno):

dados dois círculos secantes A e B, com raios diferentes e uma corda comum CD, pede-se ao aluno para mostrar que AB é perpendicular a CD. Ele prova esta proposição estabelecendo que ADBC é uma “pipa” e que o perpendicularismo das suas diagonais faz com que AB seja perpendicular a CD.



7. o aluno reconhece o papel das explicações lógicas ou argumentos dedutivos no estabelecimento de fatos (em comparação com as abordagens empíricas ou indutivas) e diz (após dar uma explicação lógica) “eu sei que a soma dos ângulos de um pentágono é 540° e eu não tenho que medir.” No entanto, o aluno ainda tem que se habituar a elaborar provas num sistema axiomático (usando postulados, axiomas, definições) e, por isso fica inseguro quando é questionado sobre os possíveis antecessores dos princípios da “serra” e da “escada”.

N.4 - Descritores:

O aluno:

1. reconhece a necessidade dos termos indefinidos, das definições e das premissas básicas (ex.: postulados)
2. reconhece as características de uma definição formal (ex.: condições necessárias e suficientes) e a equivalência de definições.
3. prova num sistema axiomático de relações o que era explicado informalmente no nível 3.
4. prova relações entre um teorema e afirmações correlatas (ex.: recíproca, inversa, contrapositiva).
5. estabelece inter-relações entre redes de teoremas.

Exemplos de respostas

Nota: este estudo não foi projetado para incluir uma investigação profunda de alunos com nível de raciocínio 4. No entanto, estão listadas abaixo algumas respostas de alunos que, segundo a perspectiva do Projeto, seriam indicativas do nível 4.

O aluno:

1. dá exemplos de axiomas, postulados e teoremas da Geometria Plana Euclidiana e descreve como eles se relacionam.
2. identifica propriedades suficientes para a definição de uma figura (ex.: paralelogramo) e cria outras derivadas das suficientes.

prova que dois conjuntos de propriedades são equivalentes para definir uma figura (ex.: paralelogramo).
3. prova que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° de forma rigorosa (ex.: usa o postulados das paralelas, “serras e escadas” e teoremas sobre a adição de ângulos).
4. prova que se um triângulo é isósceles, então os ângulos da sua base são congruentes, e reciprocamente.

usando provas por contrapositiva, prova que as medianas de um triângulo não se cortam ao meio.
5. reconhece o papel das “serras e escadas” em vários teoremas envolvendo propriedades dos quadriláteros e fórmulas de área.

N.4 - Descritores:

O aluno:

6. compara e contrasta diferentes provas de um teorema.
7. examina os efeitos de se trocar uma definição inicial ou postulado numa sequencia lógica.
8. estabelece um princípio geral que unifica vários teoremas diferentes.
9. cria provas a partir de um conjunto simples de axiomas, frequentemente usando um modelo para apoiar os argumentos usados.
10. apresenta argumentos dedutivos formais mas não investiga os axiomas usados ou compara sistemas axiomáticos.

Exemplos de respostas

(continuação)

(O aluno):

6. apresenta provas via Geometria Euclidiana ou via coordenadas geométricas (geometria vetorial) para a proposição: “as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio” e compara os dois métodos de prova.

compara provas alternativas do Teorema de Pitágoras.
7. começando com “duas retas perpendiculares a uma reta são paralelas” o aluno investiga como provar outros teoremas de retas paralelas.
8. prova a seguinte relação para a área de figuras cujos vértices estão sobre duas retas paralelas: $\text{área} = \text{base média} \times \text{altura}$.
9. apresenta provas de teoremas numa geometria finita.
10. não examina a independência, a consistência ou completude de um conjunto de axiomas.

N.5 - Descritores:

O aluno:

1. estabelece rigorosamente teoremas em diferentes sistemas axiomáticos (ex.: abordagens de Hilbert para os fundamentos da geometria)
2. compara sistemas axiomáticos (ex.: geometria Eucliana e não Euclidiana); espontaneamente explora como as mudanças nos axiomas afetam a geometria resultante.
3. estabelece a consistência de um sistema de axiomas, a independência de um axioma e a equivalência de diferentes sistemas de axiomas; cria um sistema axiomático para uma geometria.
4. inventa métodos generalizados para resolver classes de problemas.
5. busca o contexto mais abrangente no qual um teorema ou princípio matemático será aplicado.
6. faz um estudo profundo do objeto lógico para desenvolver novas percepções e abordagens em busca da inferência lógica.

Fonte: FUYs, D. et al.,1988.
Tradução da autora.

ANEXO B — GEOMETRIA PLANA – CONCEITOS BÁSICOS

TESTE DE SONDAGEM**INSTRUÇÕES:**

- Não abra este caderno de questões até que isso lhe seja solicitado.
- Este Teste de Sondagem sobre Conceitos Básicos de Geometria Plana contém 25 questões. Não se espera que você saiba tudo neste teste.
- Guarde todo o seu material escolar. O lápis e a borracha que você recebeu junto com este caderno de questões serão os únicos objetos permitidos na realização deste teste.
- Quando lhe for solicitado que comece este teste, siga as instruções que se seguem:
 - Leia atentamente cada questão;
 - Decida qual resposta você acredita estar correta. Há apenas uma resposta correta para cada questão. Marque um X na letra correspondente à sua resposta na “Folha de Respostas”;
 - Use o próprio caderno de questões para efetuar qualquer cálculo ou desenho que julgar necessário.
 - Se quiser mudar uma resposta, na “Folha de Respostas”, apague completamente a resposta inicial;
 - Não é permitida a comunicação entre alunos. Se precisar de outro lápis, solicite-o ao seu professor, levantando a mão.
 - Você terá **35 minutos** para fazer este teste.
- Espere até o seu professor dizer que você pode começar.

Teste adaptado com autorização do autor. In “Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry”, Usiskin (1982), copyright © 1980, University of Chicago.

1 - Retas perpendiculares:

- (a) interceptam-se formando quatro ângulos retos.
- (b) interceptam-se formando dois ângulos agudos e dois obtusos.
- (c) não se interceptam.
- (d) interceptam-se formando quatro ângulos agudos.
- (e) nenhuma das opções anteriores.

2 - A área de um retângulo com 3 cm de largura e 12 cm de comprimento é:

- (a) 18 cm^2
- (b) 72 cm^2
- (c) 36 cm^2
- (d) 15 cm^2
- (e) 30 cm^2

3 – Se duas figuras são semelhantes, mas não congruentes, então elas:

- (a) têm bases congruentes e alturas congruentes.
- (b) têm a mesma altura.
- (c) ambas têm bases horizontais.
- (d) têm formas diferentes, mas têm o mesmo tamanho.
- (e) têm tamanhos diferentes, mas têm a mesma forma.

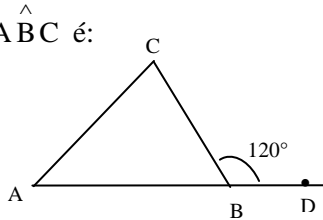
4 – A medida de um ângulo obtuso é:

- (a) 90°
- (b) entre 45° e 90°
- (c) menor do que 90°
- (d) entre 90° e 180°
- (e) maior do que 180°

5 – Na figura abaixo, A, B e D estão sobre a mesma reta. A

medida do ângulo \widehat{ABC} é:

- (a) 120°
- (b) 60°
- (c) 80°
- (d) 240°
- (e) são necessárias mais informações.

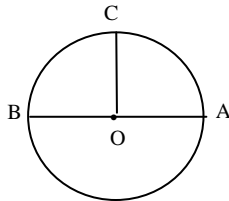


6 – Retas paralelas são retas:

- (a) de um mesmo plano que nunca se encontram.
- (b) que nunca se situam num mesmo plano e que nunca se encontram.
- (c) que sempre formam ângulos de 90° quando se encontram.
- (d) que têm o mesmo comprimento.
- (e) nenhuma das opções anteriores.

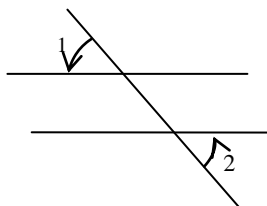
7 – Seja O o centro do círculo. O segmento \overline{OA} é chamado de:

- (a) raio do círculo.
- (b) diâmetro do círculo.
- (c) corda do círculo.
- (d) segmento do círculo.
- (e) setor do círculo.



8 – Os ângulos 1 e 2 são chamados de:

- (a) ângulos opostos.
- (b) ângulos paralelos.
- (c) ângulos alternos internos.
- (d) ângulos alternos externos.
- (e) ângulos correspondentes.

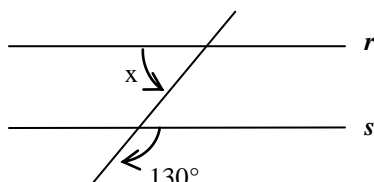


9 - A medida de um ângulo reto é:

- (a) menor do que 90° .
- (b) entre 90° e 180° .
- (c) 45°
- (d) 90°
- (e) 180°

10 - As retas r e s são paralelas. A medida do ângulo x é:

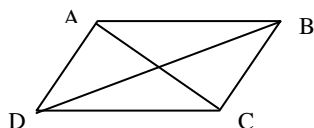
- (a) 65°
- (b) 130°
- (c) 30°
- (d) 40°
- (e) 50°



11 - Um triângulo equilátero tem:

- (a) todos os três lados com o mesmo comprimento.
- (b) um ângulo obtuso.
- (c) dois ângulos de mesma medida e o terceiro com medida diferente.
- (d) todos os três lados com comprimentos diferentes.
- (e) todos os três ângulos com medidas diferentes.

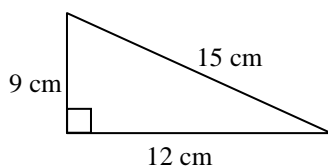
12 - Considerando que a figura ABCD seja um paralelogramo, qual das seguintes afirmativas é CORRETA?



- (a) ABCD tem todos os ângulos internos congruentes.
- (b) O triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD.
- (c) \overline{AC} tem o mesmo comprimento que \overline{BD} .
- (d) O perímetro de ABCD é quatro vezes o comprimento de \overline{AB} .
- (e) Todas as afirmativas acima estão corretas.

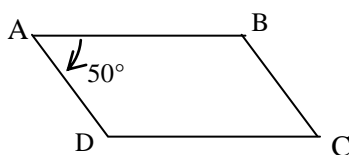
13 - A área do triângulo mostrado é:

- (a) 36 cm^2 .
- (b) 54 cm^2 .
- (c) 72 cm^2 .
- (d) 108 cm^2 .
- (e) 1620 cm^2 .



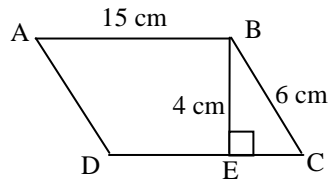
14 - ABCD é um paralelogramo. A medida do ângulo \hat{C} é:

- (a) 40°
- (b) 130°
- (c) 140°
- (d) 50°
- (e) são necessárias mais informações.



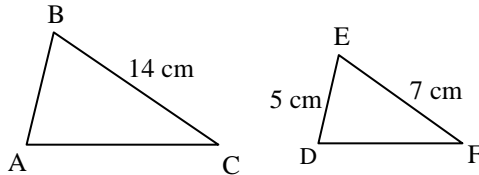
15 – O perímetro do paralelogramo ABCD, abaixo, é:

- (a) 25 cm.
- (b) 42 cm.
- (c) 21 cm.
- (d) 60 cm.
- (e) 90 cm.



16 – O triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF. A medida de \overline{AB} é:

- (a) 10 cm.
- (b) 11 cm.
- (c) 12 cm.
- (d) 13 cm.
- (e) 14 cm.

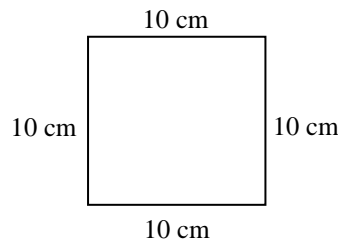


17 – A figura plana produzida ao se desenhar todos os pontos que ficam a exatamente 6 cm de um ponto dado é:

- (a) uma circunferência com 6 cm de diâmetro.
- (b) um quadrado com 6 cm de lado.
- (c) uma esfera com 6 cm de diâmetro.
- (d) um cilindro com 6 cm de altura e 6 cm de largura.
- (e) uma circunferência com 6 cm de raio.

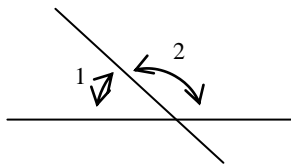
18 - A área do quadrado abaixo é:

- (a) 20 cm^2 .
- (b) 40 cm^2 .
- (c) 40 cm.
- (d) 100 cm^2 .
- (e) 100 cm.



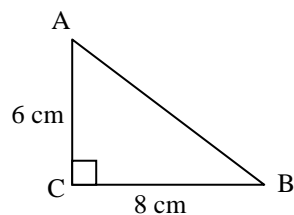
19 – O ângulos 1 e 2 são:

- (a) interiores.
- (b) verticais.
- (c) suplementares.
- (d) complementares.
- (e) escalenos.



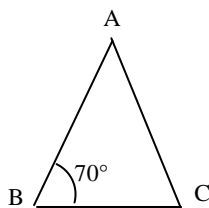
20 – O ângulo C é um ângulo reto. O comprimento do lado \overline{AB} é:

- (a) 8 cm.
- (b) 14 cm.
- (c) 10 cm.
- (d) 12 cm.
- (e) 18 cm.



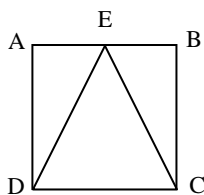
21 – O triângulo ABC, abaixo, é isósceles, de base \overline{BC} . A medida do ângulo \hat{A} é:

- (a) 70°
- (b) 110°
- (c) 40°
- (d) 60°
- (e) são necessárias outras informações.



22 – Na figura, ABCD é um quadrado e DEC é um triângulo equilátero. O ângulo \hat{ADE} mede:

- (a) 15°
- (b) 30°
- (c) 45°
- (d) 60°
- (e) são necessárias outras informações.

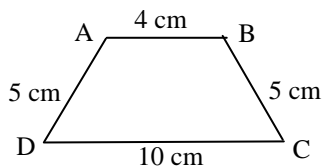


23 – Sobre o hexágono regular pode-se afirmar que:

- (a) todos os seus lados têm a mesma medida.
- (b) todos os seus ângulos internos medem 120° .
- (c) o raio e o lado têm a mesma medida.
- (d) apresenta nove diagonais.
- (e) todas as sentenças acima estão corretas.

24 – Os lados \overline{AB} e \overline{CD} do quadrilátero ABCD são paralelos. A sua área mede:

- (a) 25 cm^2
- (b) 28 cm^2
- (c) 35 cm^2
- (d) 24 cm^2
- (e) faltam dados na figura.



25 – A medida do lado de um quadrado é x cm. Se dobramos a medida do lado desse quadrado obteremos um outro quadrado tal que:

- (a) a sua diagonal medirá o dobro da diagonal do quadrado inicial.
- (b) a sua área medirá o dobro da área do quadrado inicial.
- (c) o seu perímetro medirá o dobro do perímetro do quadrado inicial.
- (d) Apenas uma afirmativa acima é falsa.
- (e) As afirmativas a, b e c são verdadeiras.

 GEOMETRIA PLANA – CONCEITOS BÁSICOS - Teste de Sondagem

FOLHA DE RESPOSTAS

Nome:		Nº	Série/Turma:
Idade: anos	Sexo: Masc. () Fem. ()		Data:
Professora: Mariângela de Castro e Oliveira			

Marque a resposta **CORRETA**.

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E
21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E

ANEXO C — TESTE DE VAN HIELE – GEOMETRIA

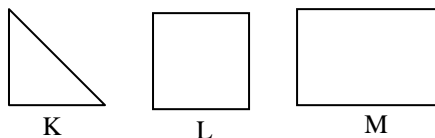
INSTRUÇÕES:

- Não abra este caderno de questões até que isso lhe seja solicitado.
- Este Teste de van Hiele contém 25 questões de geometria e não se espera que você saiba responder corretamente a todas elas.
- Guarde todo o seu material escolar. O lápis e a borracha que você recebeu junto com este caderno de questões serão os únicos objetos permitidos na realização deste teste.
- Quando lhe for solicitado que comece este teste, siga as instruções que se seguem:
 - Leia atentamente cada questão;
 - Decida qual resposta você acredita estar correta. Há apenas uma resposta correta para cada questão. Marque um X na letra correspondente à sua resposta na “Folha de Respostas”;
 - Use o próprio caderno de questões para efetuar qualquer cálculo ou desenho que julgar lhe ser útil.
 - Se quiser mudar uma resposta, na “Folha de Respostas”, apague completamente a resposta inicial;
 - Não é permitida a comunicação entre alunos. Se precisar de outro lápis, solicite-o ao seu professor, levantando a mão.
 - Você terá **35 minutos** para fazer este teste.
- Espere até o seu professor dizer que você pode começar.

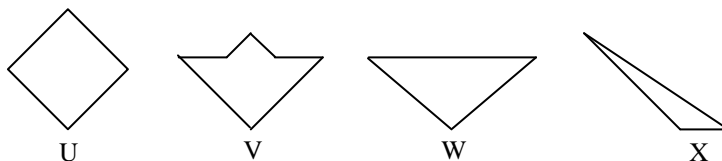
Teste reproduzido com a autorização do autor. In “Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry”, Usiskin (1982), copyright © 1980, University of Chicago

1 - Qual (ou quais) das figuras abaixo são quadrados?

- a) Somente K.
- b) Somente L.
- c) Somente M.
- d) Somente L e M.
- e) Todas são quadrados.



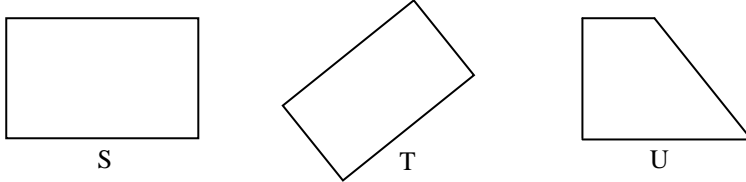
2 - Qual (ou quais) das figuras abaixo são triângulos?



- (a) Nenhuma delas.
- (b) Somente V.
- (c) Somente W.

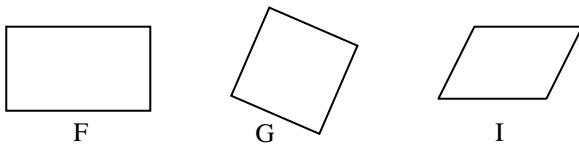
- (d) Somente W e X.
 (e) Somente V e W .

3 – Qual (ou quais) das figuras abaixo é (são) retângulo(s)?



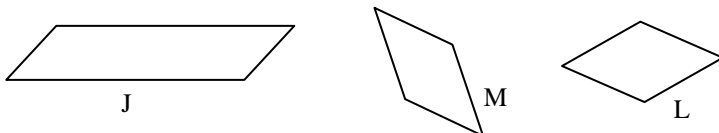
- (a) Somente S.
 (b) Somente T.
 (c) Somente S e T.
 (d) Somente S e U.
 (e) Todas são retângulos

4 – Qual (quais) dessas figuras é (são) quadrado(s)?



- (a) Nenhuma delas é um quadrado.
 (b) Somente G.
 (c) Somente F e G.
 (d) Somente G e I.
 (e) Todas são quadrados.

5 – Qual (quais) dessas figuras é (são) paralelogramo(s)?

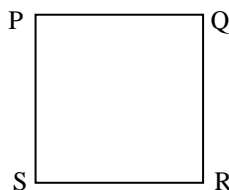


- (a) Somente J.
 (b) Somente L.
 (c) Somente J e M.
 (d) Nenhuma delas é um paralelogramo.
 (e) Todas são paralelogramos.

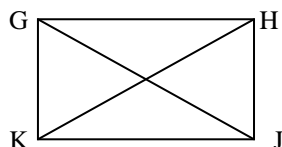
6 – PQRS é um quadrado.

Qual relação é verdadeira para qualquer quadrado?

- (a) \overline{PR} e \overline{RS} têm o mesmo comprimento.
 (b) \overline{QS} e \overline{PR} são perpendiculares.
 (c) \overline{PS} e \overline{QR} são perpendiculares.
 (d) \overline{PS} e \overline{QS} têm o mesmo comprimento.
 (e) O ângulo Q é maior do que o ângulo R.



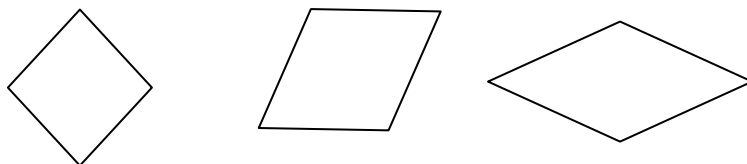
7 – No retângulo GHJK, \overline{GJ} e \overline{HK} são as diagonais.



Qual, de (a) à (d), não é verdadeira em todo retângulo?

- (a) Há quatro ângulos retos.
- (b) Há quatro lados.
- (c) As diagonais têm o mesmo comprimento.
- (d) Os lados opostos têm o mesmo comprimento.
- (e) Todas, de (a) a (d), são verdadeiras em todo retângulo.

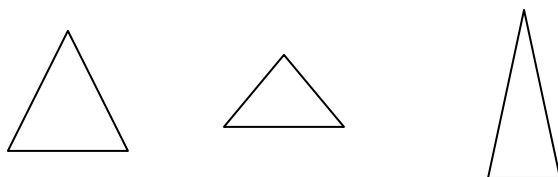
8 - Um losango é uma figura de quatro lados, os quais são todos de mesmo comprimento. Veja os exemplos:



Qual, de (a) a (d), não é verdadeira em todo losango?

- (a) As duas diagonais têm o mesmo comprimento.
- (b) Cada diagonal é a bissetriz de dois ângulos do losango.
- (c) As diagonais são perpendiculares.
- (d) Os ângulos opostos têm a mesma medida.
- (e) Todas, de (a) à (d), são verdadeiras em todo losango.

9 – Um triângulo isósceles é um triângulo com dois lados de mesma medida. Veja três exemplos:



Qual, de (a) à (d), é verdadeira em todo triângulo isósceles?

- (a) Os três lados devem ter o mesmo comprimento.
- (b) Um dos lados deve ter o dobro da medida de outro lado.
- (c) Deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma medida.
- (d) O três ângulos devem ter a mesma medida.
- (e) Nenhuma, de (a) a (d), é verdadeira em todo triângulo isósceles.

10 – Dois círculos de centro em P e Q se interceptam em R e S formando uma figura de quatro lados PRQS. Veja dois exemplos:



Qual, de (a) à (d), não é sempre verdade?

- (a) PRQS terá dois pares de lados de mesmo comprimento.
- (b) PRQS terá pelo menos dois ângulos de mesma medida.
- (c) As linhas \overline{PQ} e \overline{RS} serão perpendiculares.
- (d) Os ângulos P e Q terão a mesma medida.
- (e) Todas, de (a) a (d) são verdadeiras.

11 – A seguir há duas afirmações:

Afirmção 1 : A figura F é um retângulo.

Afirmção 2 : A figura F é um triângulo.

Qual das afirmativas abaixo é a correta?

- (a) Se 1 é correta, então 2 é correta.
- (b) Se 1 é falsa, então 2 é correta.
- (c) 1 e 2 não podem ser, ambas, verdadeiras.
- (d) 1 e 2 não podem ser, ambas, falsas.
- (e) Nenhuma, de (a) a (d) está correta.

12 – A seguir há duas afirmações:

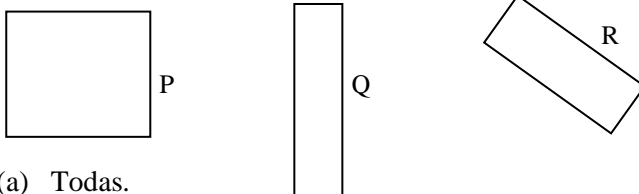
Afirmção S: $\triangle ABC$ tem três lados de mesmo comprimento.

Afirmção T : no $\triangle ABC$, ao ângulos internos B e C têm mesma medida.

Qual das afirmativas abaixo é a correta?

- (a) As afirmações S e T não podem ser ambas verdadeiras.
- (b) Se S é verdadeira, então T é verdadeira.
- (c) Se T é verdadeira, então S é verdadeira.
- (d) Se S é falsa, então T é falsa.
- (e) Nenhuma, de (a) a (d) é correta.

13 – Qual (quais) dessas figuras pode(m) ser chamada(s) de retângulo?



- (a) Todas.
- (b) Somente Q.
- (c) Somente R.
- (d) Somente P e Q.
- (e) Somente Q e R.

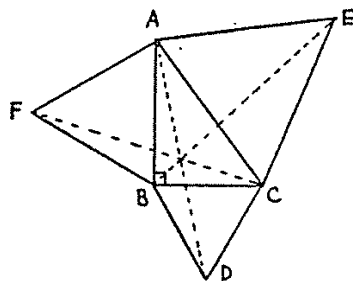
14 – Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

- (a) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos quadrados.
- (b) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos retângulos.
- (c) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos paralelogramos.
- (d) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos paralelogramos.
- (e) Nenhuma, de (a) a (d) é verdadeira.

15 – O que todos os retângulos têm que alguns paralelogramos não têm?

- (a) Lados opostos iguais.
- (b) Diagonais iguais.
- (c) Lados opostos paralelos.
- (d) Ângulos opostos iguais.
- (e) Nenhuma de (a) a (d).

16 – Na figura abaixo temos o triângulo retângulo ABC. Os triângulos equiláteros ACE, BFA e BCD foram construídos sobre os lados de ABC



Dessa informação, pode-se provar que \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum. O que essa prova diz a você?

- (a) Apenas neste triângulo desenhado podemos afirmar que \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.
- (b) Em alguns, mas não em todos os triângulos retângulos, \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.
- (c) Em qualquer triângulo retângulo, \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.
- (d) Em qualquer triângulo, \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.
- (e) Em qualquer triângulo equilátero, \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} têm um ponto em comum.

17 – Abaixo, estão relacionadas três propriedades de uma figura.

Propriedade D: Tem diagonais de mesmo comprimento.

Propriedade Q: É um quadrado.

Propriedade R: É um retângulo.

Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

- (a) D implica em Q, a qual implica em R.
- (b) D implica em R, a qual implica em Q.
- (c) Q implica em R, a qual implica em D.
- (d) R implica em D, a qual implica em Q.
- (e) R implica em Q, a qual implica em D.

18 – Abaixo temos duas afirmativas:

I - Se uma figura é um retângulo, então suas diagonais se cortam ao meio.

II - Se as diagonais de uma figura se cortam ao meio, a figura é um retângulo.

Qual das afirmativas abaixo está correta?

- (a) Para provar que I é verdadeira, basta provar que II é verdadeira.
- (b) Para provar que II é verdadeira, basta provar que I é verdadeira.
- (c) Para provar que II é verdadeira, basta encontrar um retângulo cujas diagonais se cortam ao meio.
- (d) Para provar que II é falsa, basta encontrar uma figura, diferente de retângulo, cujas diagonais se cortam ao meio.
- (e) Nenhuma, de (a) a (d) está correta.

19 – Em geometria:

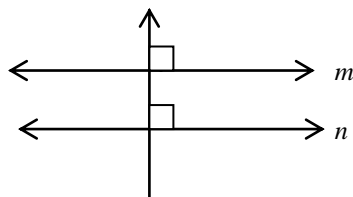
- (a) Todo termo pode ser definido e toda afirmação verdadeira pode ser provada.
- (b) Todo termo pode ser definido, mas é necessário assumir que certas afirmações são verdadeiras.
- (c) Alguns termos têm que ser deixados sem definição, mas toda afirmação verdadeira pode ser provada.
- (d) Alguns termos têm que ser deixados sem definição e isto é necessário para que se tenham algumas afirmações que são assumidas como verdadeiras.
- (e) Nenhuma, de (a) a (d) está correta.

20 – Analise as três sentenças:

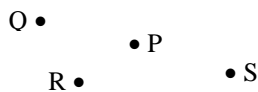
- (1) Duas retas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.
- (2) Uma reta que é perpendicular a uma de duas linhas paralelas é perpendicular também à outra.
- (3) Se duas retas são equidistantes, então elas são paralelas.

Na figura abaixo, as retas n e p são perpendiculares e as retas m e p também o são. Qual das sentenças acima pode justificar o fato de as retas m e n serem paralelas?

- (a) Somente (1).
- (b) Somente (2).
- (c) Somente (3).
- (d) (1) ou (2).
- (e) (2) ou (3).



21 – Na Geometria F, a qual é diferente da que você costuma usar, existem exatamente quatro pontos e seis retas. Cada reta contém exatamente dois pontos. Se os pontos são P, Q, R e S, as retas são $\{P,Q\}$, $\{P,R\}$, $\{P,S\}$, $\{Q,R\}$, $\{Q,S\}$ e $\{R,S\}$



Veja como as palavras “intersectam” e “paralelas” são usadas na Geometria F: “As retas $\{P,Q\}$ e $\{P,R\}$ se intersectam em P porque $\{P,Q\}$ e $\{P,R\}$ têm o ponto P em comum”. “As retas $\{P,Q\}$ e $\{R,S\}$ são paralelas porque não têm nenhum ponto em comum”.

A partir desta informação, qual está correta?

- (a) $\{P,R\}$ e $\{Q,S\}$ se intersectam.
- (b) $\{P,R\}$ e $\{Q,S\}$ são paralelas.
- (c) $\{Q,R\}$ e $\{R,S\}$ são paralelas.
- (d) $\{P,S\}$ e $\{Q,R\}$ se intersectam.
- (e) Nenhuma de (a) a (d) está correta.

22 – Trissectar um ângulo significa dividi-lo em três partes de mesma medida. Em 1847, P. L. Wantzel provou que, em geral, é impossível trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada. Desta prova, o que você pode concluir?

- (a) Em geral, é impossível bissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada.
- (b) Em geral, é impossível trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua graduada.
- (c) Em geral, é impossível trissectar ângulos usando apenas instrumentos de desenho.
- (d) Ainda é possível que, no futuro, alguém possa encontrar uma método geral de trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada.
- (e) Ninguém, jamais será capaz de encontrar um método geral de trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada.

23 – Existe uma geometria, inventada por um matemático J, na qual a seguinte afirmação é verdadeira:

“A soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° .”

Qual das afirmativas abaixo é correta?

- (a) J cometeu um erro ao medir os ângulos do triângulo.
- (b) J cometeu um erro de raciocínio lógico.
- (c) J tem uma idéia errada do que se entende por verdadeiro.
- (d) J começou com pressupostos diferentes daqueles da geometria usual.
- (e) Nenhuma, de (a) a (d) está correta.

24 – Dois livros de geometria definem a palavra retângulo de maneiras diferentes.

Qual afirmativa abaixo está correta?

- (a) Um dos livros tem um erro.
- (b) Uma das definições está errada. Não podem existir duas definições para retângulo.
- (c) Os retângulos em um livro devem ter propriedades diferentes daquelas dos retângulos no outro livro.
- (d) Os retângulos em um dos livros devem ter as mesmas propriedades apresentadas pelos retângulos no outro livro.
- (e) As propriedades dos retângulos nos dois livros devem ser diferentes.

25 – Suponha que você tenha provado as afirmativas I e II.

I. Se p, então q.

II. Se s, então não q.

Qual das afirmativas abaixo decorre das afirmativas I e II?

- (a) Se p, então s.
- (b) Se não p, então não q.
- (c) Se p ou q, então s.
- (d) Se s, então não p.
- (e) Se não s, então p.

 TESTE DE VAN HIELE

FOLHA DE RESPOSTAS

Nome:		Nº	Série/Turma:
Idade: anos	Sexo: Masc. () Fem. ()		Data:
Professora: Mariângela de Castro e Oliveira			

Marque a resposta **CORRETA**.

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E
21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E

ANEXO D – E-MAILS DE SOLICITAÇÃO E PERMISSÃO PARA A UTILIZAÇÃO DO TS-CBGP E DO TVH.

Em *ter, 25 /5/10, Mariângela Castro Oliveira escreveu:

I'm a Math teacher in Brazil. I'm working on a research involving students' geometric understanding and I'd like to use two of your test on it. I'd like to use the "Entering Geometry Test" and the "Van Hiele Geometry Test" if you allow me to do it, of course. In my study I'll examine 50 students and this is the number of copies of each test I'll use. I agree with all your recommendations and I guarantee you I'll send a copy of my report as soon as it is ready. Thank you. Mariângela

Em *qua, 26/5/10, Zalman Usiskin /<z-usiskin@uchicago.edu>/* escreveu:

De: Zalman Usiskin <z-usiskin@uchicago.edu>

Assunto: Re: Requesting Permission to use the Entering Geometry Test and the van Hiele Geometry Test

Para: "Mariângela Castro Oliveira" <mariangelacastro08@yahoo.com.br>

Data: Quarta-feira, 26 de Maio de 2010, 10:29

Dear Mariangela:

Your interest in this work is very much appreciated. Since you indicate that you agree with all our recommendations, I assume that you have seen these tests and the report (available online) that indicates how to use them. Could you please explain your study in a little more detail? What is the research on understanding that you are doing? How old are the students? In what kind of school are the students? What is the duration of the study?

Zalman Usiskin

Professor Emeritus of Education
 Director, University of Chicago School Mathematics Project
 The University of Chicago
 6030 S. Ellis Avenue
 Chicago, IL 60637 USA

Em *qua, 26/5/10, Mariângela Castro Oliveira wrote:

Dear Mr. Usiskin:

Sorry if I've not give you more detailed information about my study. First, I've seen your tests in many other researches I've read while I was trying to know more about "The van Hiele Levels Theory". Of course, your report "Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry" was my main reference and I got it from the web. I'm Brazilian and I've been a math teacher for almost ten years. About two years ago I started a course do get the degree of Master of Science in Mathematics Education. Since then, I've been doing a research on geometry understanding, trying to evaluate the reasons for the poor achievement of students in geometry. The subjects are my almost sixty students, from a private school.

They are high school students and they are about sixteen. I think my study will last a year more and I'd be so grateful to you if I might use your tests, because they are the best instruments I've noticed to examine the van Hiele model and help me to evaluate the implications of this theory for the improvement of the students' geometry understanding. Thank you very much.

Mariângela

Em *qua, 26/5/10, Zalman Usiskin /<z-usiskin@uchicago.edu>/* escreveu:

Dear Mariangela:

Thank you for these details.

We are pleased to give permission for you to copy and use the Entering Geometry Test and the van Hiele Geometry Test in the research you have described.

Best wishes for success in your work.

Zalman Usiskin

ANEXO E – ROTEIRO DAS ENTREVISTAS CLÍNICAS PARA A AVALIAÇÃO DO NÍVEL DE VAN HIELE DOS SUJEITOS DE PESQUISA

TRIÂNGULOS

ATIVIDADE 1a: *Desenhando Triângulos*

Objetivo: Descobrir que atributos (forma, tamanho, proporção, orientação, etc.) o aluno considera ao desenhar quadriláteros distintos.

Roteiro:

- 1- *Desenhe um triângulo. Vamos chamá-la de figura 1.*
- 2- *Desenhe outro triângulo que seja diferente, de alguma forma, do primeiro triângulo desenhado. Vamos chamá-la de figura 2.*
- 3- *Desenhe outro triângulo que seja diferente, de alguma forma, das figuras 1 e 2.*
- 4- *Desenhe outro triângulo que seja diferente dos outros já desenhados.*
- 5- *Desenhe outro triângulo diferente dos outros já desenhados.*
- 6- *Quantos triângulos diferentes, você poderia desenhar?*
- 7- *Como a figura 2 é diferente da figura 1?*
- 8- *Como a figura 3 é diferente das duas primeiras?*
- 9- *Como a figura 4 é diferente das três primeiras?*
- 10- *Como a figura 5 é diferente das quatro primeiras?*
- 11- *Quantos triângulos diferentes, você poderia desenhar?*
- 12- *Como eles poderiam se diferenciar um do outro?*

► Se o aluno focar apenas nos atributos orientação e tamanho, pergunte: “*Você encontraria outra forma de fazer figuras diferentes sem simplesmente girá-las ou torná-las maior ou menor?*”

Obs: Os alunos devem escrever os seus nomes em todas as páginas usadas durante a entrevista, inclusive nos esboços (rascunhos).

QUADRILÁTEROS

ATIVIDADE 1b: *Desenhando Quadriláteros*

Objetivo: Descobrir que atributos (forma, tamanho, proporção, orientação, etc.) o aluno considera ao desenhar quadriláteros distintos.

Roteiro:

- 1- *Desenhe uma figura de 4 lados. Vamos chamá-la de figura 1.*
- 2- *Desenhe outra figura de 4 lados que seja diferente, de alguma forma, da primeira figura desenhada. Vamos chamá-la de figura 2.*
- 3- *Desenhe outra figura de 4 lados diferente, de alguma forma, das figuras 1 e 2.*
- 4- *Desenhe outra figura de 4 lados diferente das outras já desenhadas.*
- 5- *Desenhe outra figura de 4 lados diferente das outras já desenhadas.*
- 6- *Quantas figuras diferentes, de 4 lados, você poderia desenhar?*
- 7- *Como a figura 2 é diferente da figura 1?*
- 8- *Como a figura 3 é diferente das duas primeiras?*
- 9- *Como a figura 4 é diferente das três primeiras?*
- 10- *Como a figura 5 é diferente das quatro primeiras?*
- 11- *Quantas figuras diferentes, de 4 lados, você poderia desenhar?*
- 12- *Como elas poderiam se diferenciar uma da outra?*

► Se o aluno focar apenas nos atributos orientação e tamanho, pergunte: “*Você encontraria outra forma de fazer figuras diferentes sem simplesmente girá-las ou torná-las maior ou menor?*”

Obs: Os alunos devem escrever os seus nomes em todas as páginas usadas durante a entrevista, inclusive nos esboços (rascunhos).

ATIVIDADE 2: Identificando e Definindo Quadriláteros

Parte A

Objetivo: Descobrir se o aluno pode identificar uma dada figura de 4 lados.

Roteiro:

Você já ouviu a palavra “quadrado”? (Se já:)

Ponha um Q em cada quadrado.

(Pare e espere o aluno executar a tarefa)

Você já ouviu a palavra “retângulo”? (Se já:)

Ponha um R em cada retângulo.

(Pare novamente)

Você já ouviu a palavra “losango”? (Se já:)

Ponha um L em cada losango.

(Pare novamente)

Parte B

Objetivo: Determinar as propriedades das figuras consideradas pelo aluno ao identificar quadriláteros

Roteiro:

Por que você colocou um Q nas figuras _____?

(Escolha algumas figuras marcadas.)

Repita a mesma questão para as outras duas classes de figuras caso o aluno as conheça.

Questione sobre alguma resposta incomum que possa ter ocorrido no momento da rotulação das figuras.

Parte C

Objetivo: Determinar as propriedades que o aluno considera como **necessárias** para certas figuras serem definidas como tal.

Roteiro:

*O que você diria a alguém para observar ao escolher/separar todos os **quadrados** de uma folha de figuras?*

(Repita para **retângulos**, se forem conhecidos)

(Repita para **paralelogramos**, se forem conhecidos)

(Repita para **losangos**, se forem conhecidos)

Parte D

Objetivo: Determinar as propriedades que o aluno considera como **necessárias** e **suficientes** para certos quadriláteros serem definidos como tal.

Roteiro:

(Se o “quadrado” for uma figura conhecida:)

*Qual é a menor lista de coisas que diria a alguém para observar ao escolher/separar todos os **quadrados** de uma folha de figuras?*

(Repita para **retângulos**, se forem conhecidos)

(Repita para **paralelogramos**, se forem conhecidos)

(Repita para **losangos**, se forem conhecidos)

Parte E

Objetivo: Examinar se o aluno aplica consistentemente suas próprias propriedades aos quadriláteros.

Roteiro:

(Se o retângulo for conhecido:)

A figura 2 é um retângulo? Por quê?

(Se o paralelogramo for conhecido:)

A figura 9 é um paralelogramo? Por quê?

(Se o losango for conhecido:)

A figura 7 é um losango? Por quê?

Se o aluno mudar de idéia e decidir que quadrados são retângulos, ou que retângulos são paralelogramos, etc., pergunte: “Se você pudesse voltar atrás e marcar essas figuras todas novamente, você faria tudo do mesmo modo? (Se não, peça ao aluno para rotular novamente as figuras abaixo dos números, na mesma folha)

(Se existir inconsistência na nova rotulação, isto é, R e P sob figura 9 e apenas R sob a figura 12, pergunte por que ele não colocou a segunda (ou terceira) letra sob aquela figura.

ATIVIDADE 3: *Classificando Quadriláteros*

Parte A

Objetivo: Determinar que propriedades consideradas pelo aluno quando compara quadriláteros.

Roteiro:

(Colocar as figuras recortadas sobre a mesa)

1- Junte algumas dessas figuras caso elas se assemelhem de alguma forma.

(Registre o(s) agrupamento(s) feito(s))

2- Em que as figuras se assemelham?

(Junte as figuras novamente.)

3- Você poderia reagrupá-las segundo alguma característica que apresentem, porém uma forma diferente da anterior?

(Repetir enquanto classificações úteis aparecerem. Lembrar aos alunos, se necessário, que eles podem usar uma figura mais de uma vez)

Parte B

Objetivo: Determinar a habilidade do aluno em distinguir propriedades de quadriláteros pré-selecionados.

Roteiro:

1- (O entrevistador seleciona um grupo de quadriláteros que têm propriedades em comum: n° de lados paralelos, exatamente dois pares de lados iguais, um ângulo reto, etc.)

Todas essas figuras apresentam alguma coisa em comum. Em que essas figuras são parecidas?

(O aluno pode encontrar alguma propriedade que seja comum às figuras, mas que não as distingue de outras figuras. Se isso acontecer, o aluno deve ser elogiado e deve-se dizer: “*Existe outra forma: Você consegue perceber isso?*” Continuar a pesquisa enquanto parecer útil.

2- Repetir o item 1 com uma regra diferente de classificação.

(Certifique-se de que as regras conduzem a grupos de pelo menos duas figuras)

3- Incluir pelo menos uma seleção de figuras usando o grupo que o aluno formou na parte A desta atividade.

ATIVIDADE 4: *Qual é a figura?*

Objetivo: Determinar que propriedades e suas inter-relações o aluno considera como **suficientes** para caracterizar uma classe de figuras, como retângulos, trapézios, etc.

Roteiro:

(Cuidadosamente dar as instruções na parte A)

Parte A:

1- *Eu vou mostrar pra você uma folha de papel com algumas dicas sobre uma certa figura. Eu vou revelar uma dica de cada vez.*

2- *Pare-me quando você tiver dicas suficientes para saber, com certeza, de figura se trata ou peça por outra dica se você precisar de mais uma.*

3- *Faça um desenho da figura, se você quiser. Pense em voz alta, se você quiser e conte-me sobre o que você está pensando.*

Parte B:

Começar o “jogo” descobrindo a dica 1 da figura A. Continue descobrindo dicas enquanto o aluno pedir. Tranqüilizar o aluno, se necessário, dizendo que as dicas são consistentes.

Se o aluno fizer desenhos, peça que inicie no topo da página e proceda organizadamente, nomeando as figuras A, B, C, etc.

4- Se após uma dica ele disser “quadrilátero”, diga: “*Muito bom, vamos ver outra dica e ver que tipo de quadrilátero.*”

5- Assim que ele disser com certeza de figura se trata, pergunte: “*Por quê?*” Então, pergunte: “*Existe outra figura que você possa desenhar que apresenta se encaixa nessas dicas?*”

Se o aluno disser não, pergunte: “*Se eu lhe mostrar uma outra pista, ela poderia fazer você mudar de idéia?*”

6- Descubra outra pista e pergunte: “*Esta faz você mudar de idéia?*”

Se o aluno decide que tomou uma decisão incorreta, jogue novamente e repita todas as questões da parte B.

FIGURA A

1 - É uma figura fechada com 4 lados retos.

2 - Todos os lados têm o mesmo comprimento.

3 - Um dos ângulos mede 60° .

4 - Um dos ângulos é 120° .

5 - Outro ângulo é 60° .

6 - Outro ângulo é 120°

7 - Dois lados são paralelos.

8 - Outros dois lados são paralelos.

9 - As diagonais são perpendiculares.

10 - As diagonais se cortam ao meio.

FIGURA B

1 - É uma figura fechada com 4 lados retos.

2 - Tem dois lados longos e dois curtos.

- 3 - Tem um ângulo reto.
- 4 - Tem 2 lados longos e paralelos.
- 5 - Tem dois ângulos retos.
- 6 - Os dois lados longos não são de mesmo tamanho.
- 7 - Os dois lados curtos não são de mesmo tamanho.
- 8 - Os dois lados curtos não são paralelos.
- 9 - Os dois lados longos fazem ângulos retos com dos lados curtos.
- 10 - Tem apenas dois ângulos retos.

FIGURA C

- 1 - É uma figura fechada com 4 lados retos.
- 2 - Tem dois lados longos e dois curtos.
- 3 - Os dois lados longos são de mesmo tamanho.
- 4 - Os dois lados curtos são de mesmo tamanho.
- 5 - Um dos ângulos é maior do que um dos outros ângulos.
- 6 - Dois dos ângulos são de mesma medida.
- 7 - Os outros dois ângulos são de mesma medida.
- 8 - Os dois lados longos são paralelos.
- 9 - Os dois lados curtos são paralelos.

ATIVIDADE 5: Definições equivalentes de “Paralelogramo”

Objetivo: Determinar se o aluno é capaz de estabelecer equivalência lógica entre duas definições de paralelogramo.

Roteiro:

A - *Suponha que nós temos um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Você poderia afirmar que os lados opostos são congruentes?*

(Se não, desenhe um. Se sim: Como você poderia mostrar isso?)

B - *Suponha que nós temos um quadrilátero cujos lados opostos são congruentes. Eles têm que ser paralelos?*

(Se não, mostre um exemplo. Se sim: Como podemos ter certeza?)

C - 1 - Você já ouviu a palavra “Teorema”?

Você já ouviu a palavra “Axioma”?

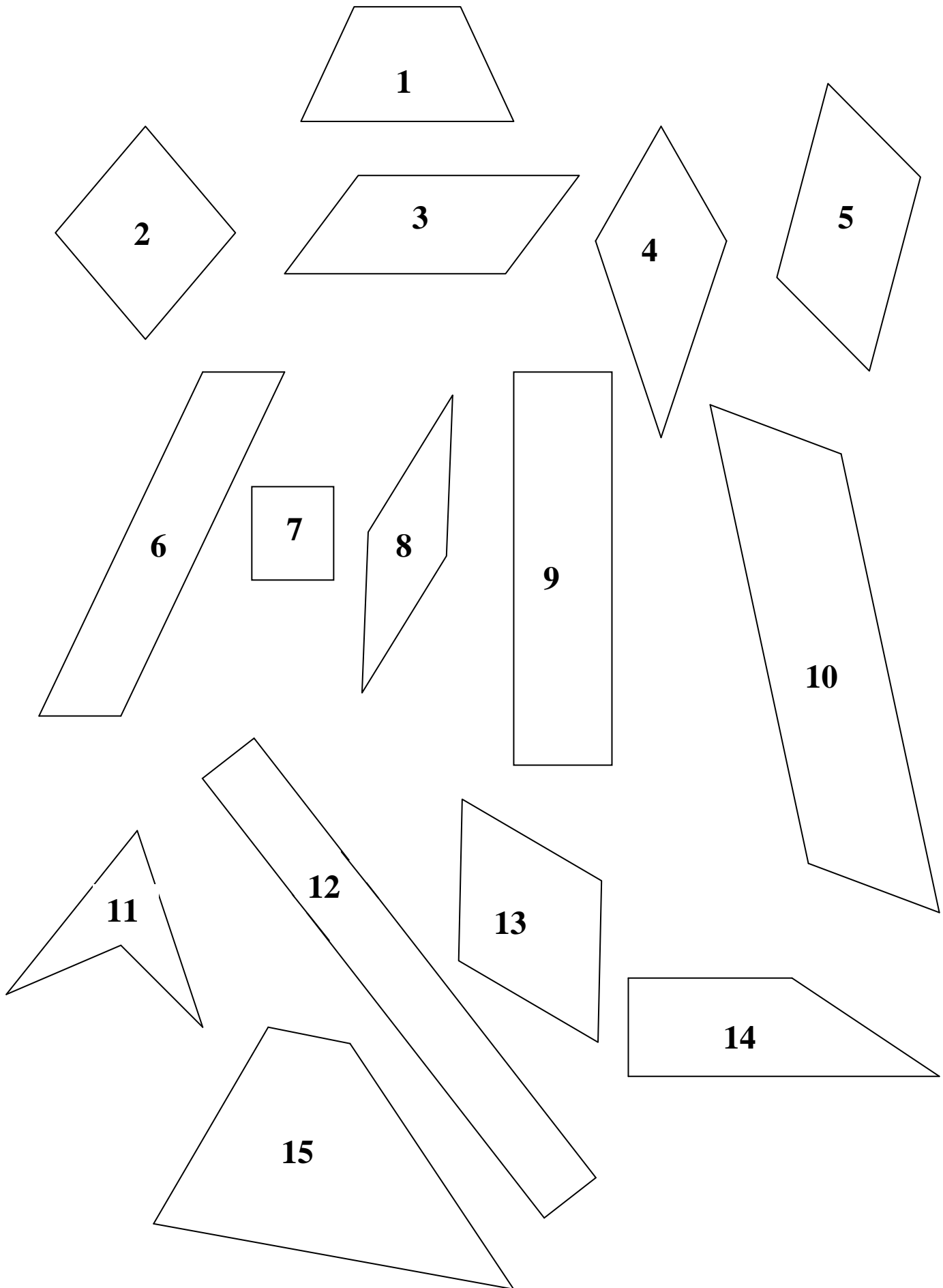
Você já ouviu a palavra “Postulado”?

2 - Você pode dar um exemplo para cada um desses termos que você já ouviu falar?

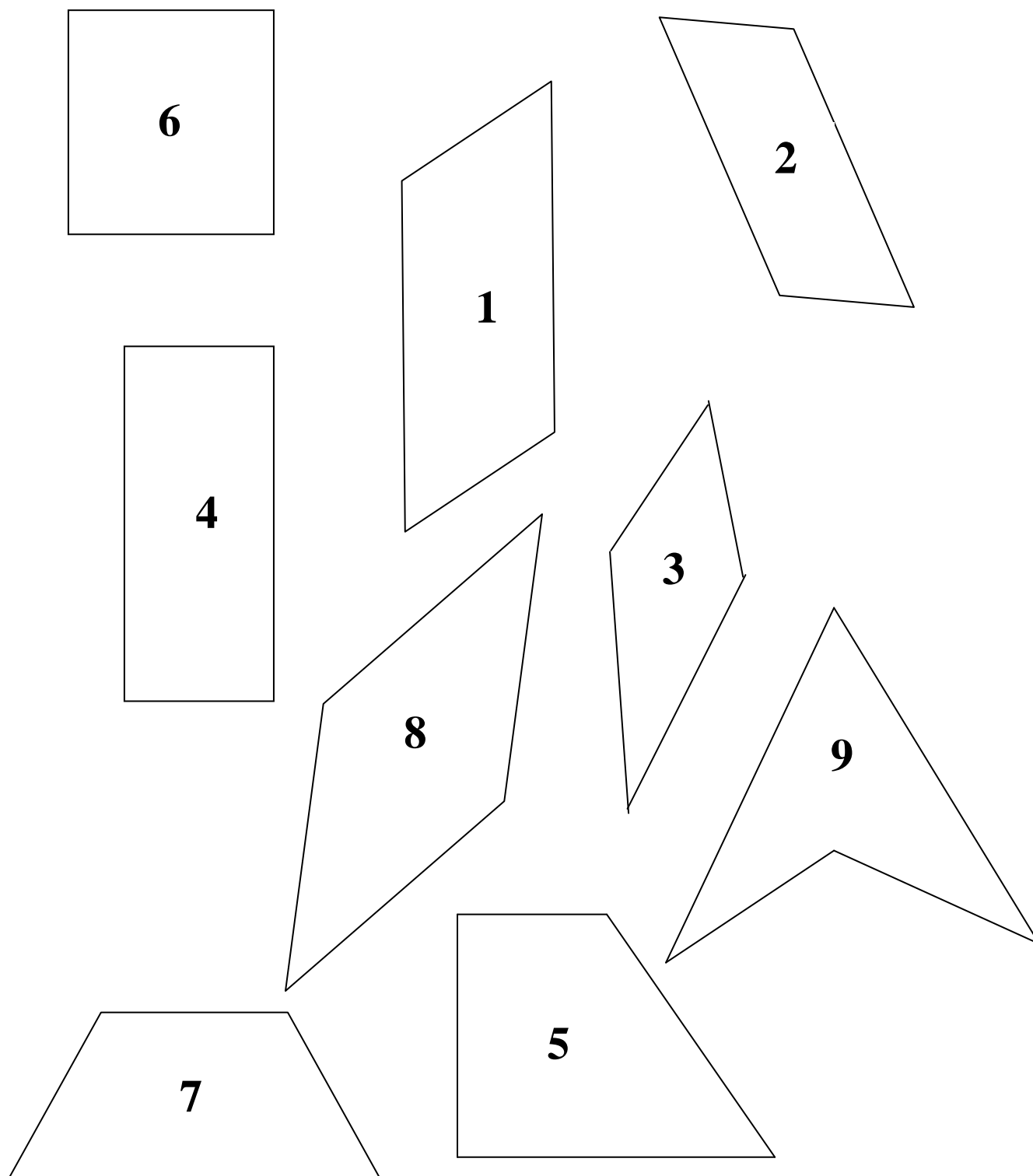
3 - Qual a diferença entre Teorema e Postulado? (Ou um axioma e um teorema?)

Compare todos os pares desses termos.)

ATIVIDADE 2



ATIVIDADE 3



Fonte: BURGER; SHAUGHNESSY, 1988 (Appendix A - Experimental Tasks)
Tradução da autora.

ANEXO F – FORMULÁRIOS DE ANÁLISE DAS ENTREVISTAS CLÍNICAS

NOME DO ALUNO:

Atividade 1a - Desenhando triângulos

Atributo	Atributos que o aluno variou		Matematicamente preciso?
	Variou?	Verbalizou?	
Tamanho dos lados			
Medidas dos ângulos			
Orientação			
Semelhança			
Classes Padrões			
Equilátero			
Retângulo			
Isósceles			
Acutângulo			
Escaleno			
Obtusângulo			
Triângulos desenhados da 1ª vez:		Triângulos desenhados da 2ª vez:	
Foi necessário estimular o aluno a variar os atributos?			
Se sim, que atributos foram variados?			
Comentários:			

<ul style="list-style-type: none"> ➤ Nível de raciocínio predominante: ➤ Dados de apoio: ➤ Dados que confundem:
--

Atividade 1b - Desenhando quadriláteros

Atributo	<i>Atributos que o aluno variou</i>		Matematicamente preciso?
	Variou?	Verbalizou?	
Tamanho dos lados			
Medidas dos ângulos			
Orientação			
Semelhança			
Classes Padrões			
Quadrado			
Retângulo			
Paralelogramo			
Losango			
Trapézio			
Quadriláteros desenhados da 1ª vez:		Quadriláteros desenhados da 2ª vez:	
Foi necessário estimular o aluno a variar os atributos?			
Se sim, que atributos foram variados?			
Comentários:			
Nível de raciocínio predominante:			
Dados de apoio:			
Dados que confundem:			

➤ Nível de raciocínio predominante:

➤ Dados de apoio:

➤ Dados que confundem:

Atividade 2 - Identificando e Definindo Quadriláteros

<i>Parte A - Identificação</i>			
Figura	Familiar?	Identificada corretamente? (circular)	Inclusões extras
Quadrado		2, 7	
Retângulo		2, 7, 9, 12	
Paralelogramo		2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13	
Losango (outras)		2, 7, 8, 13	
Trapézio		1, 14, 15	
O aluno mudou alguma identificação?			
Se sim, descreva as mudanças pelo número das figuras:			
Quando as alterações foram feitas?			
Quem iniciou a discussão?			

<i>Parte B - Razão para marcar as figuras</i>	
QUADRADO	
RETÂNGULO	
PARALELOGRAMO	
LOSANGO	

<i>Parte C- Caracterização das figuras</i>	
QUADRADO	
Propriedades adicionais necessárias para a definição:	
O aluno listou apenas propriedades necessárias?	O aluno listou propriedades suficientes?
Comentários:	
RETÂNGULO	
Propriedades adicionais necessárias para a definição:	
O aluno listou apenas propriedades necessárias?	O aluno listou propriedades suficientes?
Comentários:	
PARALELOGRAMO	
Propriedades adicionais necessárias para a definição:	
O aluno listou apenas propriedades necessárias?	O aluno listou apenas propriedades necessárias?
Comentários:	

(cont.)

<i>Parte C- Caracterização das figuras</i>	
LOSANGO	
Propriedades adicionais necessárias para a definição:	
O aluno listou apenas propriedades necessárias?	O aluno listou propriedades suficientes?
Comentários:	

<i>Parte D- Propriedades Mínimas das figuras</i>		
QUADRADO		
As mesmas da parte C?	Alterações na parte C:	
Propriedades adicionais necessárias para a definição:		
Propriedades redundantes:		
As propriedades listadas pelo aluno são necessárias?	As propriedades listadas pelo aluno são suficientes?	As propriedades listadas pelo aluno são mínimas?
Comentários:		

(Cont.)

<i>Parte D- Propriedades Mínimas das figuras</i>		
RETÂNGULO		
As mesmas da parte C?		Alterações na parte C:
Propriedades adicionais necessárias para a definição:		
Propriedades redundantes:		
As propriedades listadas pelo aluno são necessárias?	As propriedades listadas pelo aluno são suficientes?	As propriedades listadas pelo aluno são mínimas?
Comentários:		
PARALEOGRAMO		
As mesmas da parte C?		Alterações na parte C:
Propriedades adicionais necessárias para a definição:		
Propriedades redundantes:		
As propriedades listadas pelo aluno são necessárias?		
Comentários:		

<i>Parte E - Inclusão de Classes</i>	
Inclusão	O aluno permitiu a inclusão?
Quadrados \subset Retângulos	
Retângulos \subset Paralelogramos	
Quadrados \subset Losangos	
Descreva as omissões e inconsistências na Parte E. (Como o aluno as explicou?)	

<ul style="list-style-type: none">➤ Nível de raciocínio predominante: ➤ Dados de apoio: ➤ Dados que confundem:

Atividade 3 - Classificando Quadriláteros

Agrupamentos	<i>Agrupamentos do aluno na Parte A</i>			Classificação consistente (+)
	Quadriláteros Incluídos (*)	Propriedades comuns	Matematicamente preciso?	
1				
2				
3				
Comentários: (Por que as respostas do aluno não foram matematicamente precisas?)				

(*) Inclusões incorretas (de acordo com a propriedade comum do aluno) devem ser circuladas.

(+) “Consistente” significa consistente com a propriedade comum do aluno.

Atividade 4 - Figura Misteriosa

<i>Determinação da figura A (Losango)</i>			
Tentativa	Dica (3) <, =, >	Figura identificada	Correta?
1			
2 (*)			
3 (*)			
Forma de identificação 0. Visual 1. Analítica (descrição através das propriedades) 2. Pelo tipo Outra (explicar)		Forma de explanação 0. Visual 1. Analítica (caracterização pelas propriedades) 2. Inferencial (dedução informal) 3. Prova formal Outra (explicar)	
Suposições não comprovadas:			
Confiança do aluno na sua identificação: Forte () Pouca () Nenhuma ()			
Comentários:			

(*) Uma tentativa subsequente é uma mudança de opinião do aluno a partir de uma resposta prévia.

<i>Determinação da figura B (Trapézio Retângulo)</i>			
Tentativa	Dica (6) <, =, >	Figura identificada	Correta?
1			
2 (*)			
3 (*)			
Forma de identificação		Forma de explanação	
0. Visual 1. Analítica (descrição através das propriedades) 2. Pelo tipo Outra (explicar)		0. Visual 1. Analítica (caracterização pelas propriedades) 2. Inferencial (dedução formal) 3. Prova formal Outra (explicar)	
Posições que demonstram falta de confiança:			
Confiança do aluno na sua identificação: Forte () Pouca () Nenhuma ()			
Comentários:			

(*) Uma tentativa subsequente é uma mudança de opinião do aluno a partir de uma resposta prévia.

<i>Determinação da figura C (Paralelogramo)</i>			
Tentativa	Dica (7) <, =, >	Figura identificada	Correta?
1			
2 (*)			
3 (*)			
Forma de identificação		Forma de explanação	
0. Visual 1. Analítica (descrição através das propriedades) 2. Pelo tipo Outra (explicar)		0. Visual 1. Analítica (caracterização pelas propriedades) 2. Inferencial (dedução informal) 3. Prova formal Outra (explicar)	
Posições que demonstram falta de confiança:			
Confiança do aluno na sua identificação: Forte () Pouca () Nenhuma ()			
Comentários:			

(*) Uma tentativa subsequente é uma mudança de opinião do aluno a partir de uma resposta prévia.

➤ Nível de raciocínio predominante:

➤ Dados de apoio:

➤ Dados que confundem:

Atividade 5 - Definições equivalentes de “Paralelogramo”

<i>Solução da Parte A do Problema)</i>	
O aluno entendeu a questão?	O aluno entende a necessidade da prova?
Tipo de argumento: (circular) 0. Visual 1. Analítica (caracterização pelas propriedades) 2. Inferencial (dedução informal) 3. Prova formal 4. Rigor matemático	
Se o aluno apresentou uma prova formal: A prova está correta?	Qual a confiança do aluno sobre a prova? Forte () Pouca () Nenhuma ()
Comentários: Descrever argumentos:	

<i>Solução da Parte B do Problema)</i>	
O aluno entendeu a questão?	O aluno entende a necessidade da prova?
Tipo de argumento: (circular) 0. Visual 1. Analítica (caracterização pelas propriedades) 2. Inferencial (dedução informal) 3. Prova formal 4. Rigor matemático	
Se o aluno apresentou uma prova formal: A prova está correta?	Qual a confiança do aluno sobre a prova? Forte () Pouca () Nenhuma ()
Comentários: Descrever argumentos:	

<i>Termos familiares ao aluno na Parte C</i>			
Termo	Exemplo	Legitimado?	Corretamente estabelecido?
Teorema			
Axioma			
Postulado			
Comparação dos Termos na Parte C			
Termos	Descrição do aluno	Confiança (Forte, Pouca, Nenhuma)	
Teorema e Axioma			
Teorema e Postulado			
Axioma e Postulado			
Comentários:			

➤ Nível de raciocínio predominante:

➤ Dados de apoio:

➤ Dados que confundem:

ANEXO G – E-MAILS DE SOLICITAÇÃO E PERMISSÃO PARA A UTILIZAÇÃO DOS ROTEIROS DAS ENTREVISTAS CLÍNICAS

De: "Mariângela Castro Oliveira" <mariangelacastro08@yahoo.com.br>
 Para: guthreak@math.oregonstate.edu
 Terça-feira, 4 de Maio de 2010 15:44

Dear Karen.

I'm a Math student in Brazil and I've been made some researches on Mathematical Education for the last two years. I read the William F. Burger; J. Michael Shaughnessy's paper: **Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry** (*Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 17, No. 1. Jan., 1986, pp. 31-48.) and I'd liked it so much. I know the authors are (or were) both Associate Professors from the Oregon State University (Department of Mathematics) and I'd like you to help me to contact them. In fact, I'd like to have the experimental tasks they developed during their research, the interview script and analysis packet. If you help me get these materials I'll be grateful to you forever. Please, contact me. Sincerely, Mariângela

De: J Michael Shaughnessy <mikesh@pdx.edu>
 Assunto: van Hiele work
 Para: mariangelacastro08@yahoo.com.br
 Data: Quarta-feira, 5 de Maio de 2010, 13:27

Dear Mariangela,

Your message below was forwarded to me by former colleagues at Oregon State University. I am traveling to meetings and conferences in the US for the next couple of weeks, but when I return to Oregon later in May, I will make a copy of the analysis packet and interview script and tasks for you. It only exists in hard copy form, there is no electronic version. If you send me a mailing address, I will then be able to mail them off to you.

Thanks for your interest,

Mike Shaughnessy
 President of the National Council of Teachers of Mathematics

De: J Michael Shaughnessy <mikesh@pdx.edu>
 Assunto: Re: van Hiele work
 Para: "Mariângela Castro Oliveira" <mariangelacastro08@yahoo.com.br>
 Data: Terça-feira, 8 de Junho de 2010, 21:48

Dear Mariangela,

Thank you for your patience in waiting for me to send you some of the van Hiele materials. I have been doing an very large amount of traveling the past month, and have only in the past few days arrived back in Portland to make some copies of the materials you requested from our final report. I am first going to mail you the interview script that comes along with the tasks that we presented to students. We wrote the script so as to have a reliable data gathering mechanism from one interview to another--but of course as we said in the article, we went off in other directions with the students when interesting responses occurred, and always gave ourselves permission to ask other questions. But we also always asked the questions on the script itself.

I will make a copy of the coding sheets another day, and forward these to you as well. That document is longer, and provided us with a way to uniformly record the same information from all the students-- even if sometimes parts were blank, that too, was information.

The document will likely take some days to arrive at your address, probably about a week. Please let me know when it arrives. I would send you a complete copy of the report, but there are only one or two left here in Oregon, and I must keep them to make copies for others in the future. At some point, when I have time, I'll scan the report electronically, and then it will be much easier. This report was written just before the flood of personal computers arrived!

All the best,

Mike Shaughnessy

J Michael Shaughnessy

Department of Mathematics & Statistics, Portland State University, & President of the National Council of Teachers of Mathematics

De: "Mariângela Castro Oliveira" <mariangelacastro08@yahoo.com.br>

Para: "J Michael Shaughnessy" mikesh@pdx.edu

Quarta-feira, 9 de Junho de 2010 13:11

Thanks for your attention. I have to confess that I was very anxious waiting for your material but I'm conscientious about your activities and how busy you are. The important is that you sent me the material. As soon as I've received it I'll let you know.

Sincerely,

Mariângela de Castro e Oliveira

De: "J Michael Shaughnessy" <mikesh@pdx.edu>

Para: "Mariângela Castro Oliveira" <mariangelacastro08@yahoo.com.br>

Quarta-feira, 9 de Junho de 2010 17:14

Yes, Mariangela,

The first part is in the mail, and I will mail the analysis forms to you next week when I return to Oregon and have some time to make a copy of those.

Sincerely,

Mike

De: "J Michael Shaughnessy" <mikesh@pdx.edu>

Para: "Mariângela Castro Oliveira" <mariangelacastro08@yahoo.com.br>

Terça-feira, 15 de Junho de 2010 11:48

Dear Mariangela,

I mailed off the second part, the analysis and coding packet, to you today. Let me know when you receive them.

Sincerely,

Mike