PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

PADRÕES DE REGULARIDADES:
Uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico

Tânia Aparecida Ferreira Hanke

Belo Horizonte
2008

Tânia Aparecida Ferreira Hanke

PADRÕES DE REGULARIDADES: Uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Dr[a] Eliane Scheid Gazire

Belo Horizonte
2008

Tânia Aparecida Ferreira Hanke

Padrões de regularidades:

uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais,

Belo Horizonte, 2008.

Eliane Scheid Gazire (Orientadora) - PUC Minas

Maria Clara Rezende Frota – PUC Minas

Luiz Roberto Dante – UNESP – Rio Claro SP.

À minha mãe: Por ter me ensinado a sonhar e a lutar com muita determinação e ética pela concretização de cada um desses sonhos, colocando Deus sempre a frente de tudo.

Ao Carlos: Pelo amor dedicado à nossa família e pela compreensão diante de tanta ausência.

Ao Lucas e à Bruna: Por serem a realização do meu maior sonho.

AGRADECIMENTOS

A todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização desse trabalho:

- minha mãe, que durante todo o trabalho de orientação foi minha companheira de estrada, sempre tão preocupada: “Está dando tudo certo minha filha?”

- meus amigos seminaristas, ao Pe. Adriano, Dona Gê e Maria das Graças, que durante cada módulo tão bem me acomodaram no Seminário São José.

- minha orientadora, Eliane Scheid Gazire, que de forma tão paciente, compreensiva, amiga e competente conduziu todo o desenvolvimento dessa pesquisa.

- meu filho Lucas, que, além de torcer muito pelo meu sucesso, fez toda a tradução dos Standarts (2000) e do resumo dessa pesquisa. Além disso, socorreu-me diante dos atropelos das digitalizações.

- toda minha família e amigos, pelas orações e força durante o percurso dessa pesquisa.

- meus colegas do mestrado, em especial: Mara e Murilo, que sempre fizeram parte do meu grupo de discussões.

- cada um dos professores do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, em especial a Professora Maria Clara, pela dedicação e compreensão.

- todos os alunos e professores do Colégio Berlaar Sagrado Coração de Maria envolvidos na realização desse trabalho.

- secretária e funcionários do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, que sempre estiveram presentes, mesmo que nos bastidores, dando suporte à realização desse nosso trabalho.

- ao meu marido e meus dois filhos que souberam tão sabiamente conduzir a ausência da esposa e mãe durante esses anos e, além disso, torcer e vibrar com cada conquista nossa.

A Deus, em especial.

“Para alcançar o conhecimento, acrescente coisas todos os dias. Para alcançar a sabedoria, remova coisas todos os dias.” **(Lao Tse)**

RESUMO

Diante de tantos problemas no Ensino da Álgebra vivenciados no dia-a-dia da sala de aula, sentimos necessidade de sistematizar algumas de nossas experiências a partir dessa pesquisa. Nesse trabalho, a abordagem do estudo de Álgebra tem por base a exploração de padrões e regularidades com o objetivo de fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos favorecendo a capacidade de generalização e compreensão da linguagem algébrica. Nosso primeiro passo no desenvolvimento desse trabalho foi a construção de um quadro teórico, com a utilização de autores como Eves (2004), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Linz e Gimenez (1997), Usiskin (1995), Devlin (2002), entre outros, para entender questões sobre a história da Álgebra, a educação algébrica e a exploração de padrões de regularidades. Além disso, foram pesquisados documentos oficiais, como *Standarts* (2000), PCNs (1998) e PCNs+ (2002), a respeito desse tema, para viabilizar a discussão sobre as perspectivas para o desenvolvimento do pensamento algébrico e da linguagem algébrica. Ao terminar esse estudo, investigamos, nos livros didáticos, como estão sendo abordados os conteúdos algébricos nessas coleções e qual a importância dada nas atividades propostas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, fazendo uma relação entre o encontrado nos livros didáticos e na pesquisa referencial. O produto final de nossa pesquisa é apresentado por meio de um Caderno de Atividades (CA), composto por 32 atividades elaboradas a partir de padrões de regularidades, que proporcionam a alunos da Educação Básica o desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula. Algumas delas foram aplicadas com caráter exploratório-investigativo e posteriormente analisadas nessa pesquisa com o objetivo de verificar a sua potencialidade e instrumentalizar o professor quanto às possibilidades diferenciadas de trabalho no cotidiano escolar.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, padrões, linguagem simbólica, atividades.

ABSTRACT

Taking into account the many problems faced by Algebra Teaching in the context of Brazilian Basic Education, we think it is necessary to systemize some of our experiences based on this research. In this research, the Algebra studying boarding is based on the exploration of patterns and regularities with the objective of improving the development of the students' Algebraic thought, making the capacity of generalization and comprehension of the Algebraic language more manageable for them. Our first step in the development of this research was the construction of a theoretical board, based on the work of authors such as Eves (2004), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Linz e Gimenez (1996), Usiskin (1995), Devlin (2002), among others – our main aim is to understand questions about the Algebra history, the Algebraic education and the exploration of patterns of regularities. Moreover, official documents such as Standarts (2000), PCNs (1998) and PCNs+ (2002) were investigated based on this theme to make it possible for us to discuss about the perspectives of the development of the Algebraic thought and the Algebraic language. After finishing the study, we analyzed how the Algebraic topics are being developed in recent textbooks and which importance they give to the activities proposed for the development of the Algebraic thought, establishing a relationship between what was found in the textbooks and in the research done for this study. The final product of our research is presented as an Activity Book (AB), composed of 32 activities produced from patterns of regularities, which provide the development of Algebraic thought by students enrolled in Basic Education in the Brazilian context. Some of these activities were applied with exploratory and investigative character and later analyzed with the objective of verifying its potentiality to make the educator aware of the different possibilities of work in the school routine.

Keywords: Algebraic thought, patterns, symbolic language, activities.

LISTA DE ABREVIATURAS

FAPAM – Faculdade de Pará de Minas
CBSCM – Colégio Berlaar Sagrado Coração de Maria
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática
SBM – Sociedade Brasileira de Matemática
MEC – Ministério da Educação
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PNLD – Programa Nacional do Livro Didático
NCTM – National Council of teachers of Mathematics
CA – Caderno de Atividades
IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada
CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
FAPERJ - Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro
MMM – Movimento da Matemática Moderna
CNE – Conselho Nacional de Educação
MMC – Mínimo Múltiplo Comum
DNA – Deoxyribonucleic acid (Ácido desoxirribonucleico - tradução nossa)
PCN+ – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.
SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Após vários anos de experiência profissional em escolas públicas e particulares, lecionando para alunos dos ensinos Fundamental, Médio e Superior, temos percebido uma aversão, pela maioria dos alunos, à compreensão de conteúdos algébricos. Muitas vezes, ansiosos por ficarem “livres” de determinadas tarefas, os alunos se apóiam em regras práticas (decoradas), sem o menor significado, mas que darão a resposta certa (desejada pelo professor) para aquela situação problema. O professor, por sua vez, percebendo a comodidade da situação, adere-se à “lei do menor esforço”, utilizando-se da prática presente na quase totalidade de nossos livros didáticos, ou seja, técnica- algorítmo / prática-exercício. (LINS e GIMENEZ, 1997).

Esses processos podem ser eficientes na resolução de equações, quando utilizados com algum significado, ou seja, com clareza quanto à validade dos procedimentos. Entretanto, quando os alunos aplicam qualquer que seja o método sem compreensão, sem encontrar um significado para aquilo que fazem, cometem erros graves. Esses erros podem ser provenientes tanto do fato de efetuar troca de termos dos membros da equação sem alterar a operação, como alterar indevidamente o sinal dos coeficientes. Muitas vezes, esses alunos, usam um procedimento sem o menor sentido: “Mudou de lado, muda o sinal”, apenas obedecendo a comandos e ignorando o significado daquilo que estão fazendo.

Uma outra concepção equivocada no ensino da Álgebra é o sentido da “letra”, que, para a maioria dos alunos, representa algo desconhecido (incógnita), onde, sempre que usamos algumas manipulações algébricas, determinaremos seu valor. É muito comum um aluno, ao se deparar com a expressão $x^2 - 2x + 3$, questionar ao professor: é para calcular o valor de “x”? A idéia da “letra” como algo que varia em função de... é ignorada por nossos alunos.

Nossa experiência profissional mostra que as dificuldades apresentadas em Álgebra por alunos da 7ª série do Ensino Fundamental são as mesmas apresentadas por alunos do Ensino Médio e mesmo no Ensino Superior. Em geral, usam processos mecânicos na resolução de qualquer tarefa algébrica. Essas dificuldades encontradas por nossos alunos na aprendizagem de Álgebra pode ser resultado de um processo ensino-aprendizagem baseado apenas em procedimentos e regras que limita sua capacidade de compreender os conceitos, as representações e as atividades que são importantes neste domínio do conhecimento.

Segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significado social e lógico, enfatizando, simplesmente, a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões. Na escola, ela nem ao menos é percebida como generalização de operações numéricas elementares, o que ajudaria muito na compreensão da lógica matemática e na aprendizagem da Álgebra.

A concepção que muitos educadores possuem em relação à Álgebra exerce forte influência na percepção sobre o processo ensino-aprendizagem. É bom lembrar que a geração que hoje está à frente de nossas salas de aula, é, na sua maioria, fruto de uma escola que viveu o declínio do Movimento da Matemática Moderna[1] (nas décadas de 70 e 80) quando a Álgebra assumiu a versão "cálculo literal". Um outro fator que ao nosso ver tem forte influência na aprendizagem da Álgebra é o livro didático, que desempenha um papel fundamental na abordagem e no direcionamento dos conteúdos matemáticos. Na cidade onde exerço minha profissão, 95% dos educadores têm no livro didático sua única fonte de pesquisa, utilizando-o, inclusive, como ferramenta que norteia todo seu trabalho.

Há mais ou menos cinco anos, assistindo a uma palestra do prof. Imenes[2], foi sugerido pelo palestrante que elaborássemos atividades que introduzissem o pensamento algébrico por meio de seqüências e padrões geométricos, buscando estabelecer um significado a conceitos abstratos até então tratados fora de um contexto. A partir daí, elaborei algumas atividades investigativas com o objetivo de proporcionar aos alunos experiências que desenvolvam a capacidade de analisar padrões, sejam eles: geométricos, numéricos, figurativos e/ou lineares, identificar regularidades, descrever relações e representar simbolicamente. Meu intuito era que o aluno conseguisse vislumbrar o processo de construção de uma linguagem algébrica

---

[1] **Movimento da Matemática Moderna**: proposta de reforma para o ensino da Matemática que priorizava a unificação da Matemática por meio da teoria dos conjuntos e do estudo de suas estruturas fundamentais. As idéias do MMM seguiam a corrente Bourbakista (adeptos das idéias de um grupo de matemáticos *Ecole Normale Supérieure in Paris* do séc XX que usavam o pseudônimo Bourbakin), e, por outro lado, se apoiavam também na teoria de Piaget e na importância do aspecto psicológico do ensino e da aprendizagem que até então estava sendo renegado.

[2] Luiz Márcio Imenes – professor de Matemática, autor de livros didáticos, integrante da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)- Palestra proferida no auditório da FAPAM – Faculdade de Pará de Minas, no dia 17 de junho de 2003.

antes de trabalhar com as regras do transformismo algébrico na tentativa de dar um significado à Álgebra.

Apliquei essas atividades em várias turmas, porém, sem fazer a devida sistematização. Apesar de muitos alunos, diante da primeira experiência com esse tipo de trabalho, não conseguirem entender o nosso propósito e nem ao menos fazer um elo entre a tarefa e o conteúdo trabalhado, essas foram experiências positivas, uma vez que conseguimos diagnosticar, com facilidade, o nível do pensamento algébrico de cada aluno. E, uma vez diagnosticado o seu nível do pensamento algébrico, é sempre muito mais fácil conduzir o processo ensino-aprendizagem.

Portanto, diante de tantos problemas apontados no Ensino da Álgebra, e vivenciando na nossa prática docente experiências positivas, porém de forma isolada na construção do pensamento algébrico, sentimos necessidade de sistematizar essas experiências a partir dessa pesquisa.

Para direcionarmos nosso trabalho, levantamos alguns questionamentos:

- Os alunos devem começar no ensino da Álgebra de modo intuitivo e motivador com atividades que contemplem as concepções da Álgebra desde os primeiros anos da escolarização?

- A exploração de padrões seria uma ferramenta eficaz no desenvolvimento do pensamento algébrico?

- Tendo os livros didáticos uma grande influência no processo ensino/aprendizagem, as atividades propostas nesse suporte têm explorado a utilização de padrões no ensino da Álgebra?

- Como o professor poderá conduzir a construção de uma linguagem algébrica significativa usando atividades que exploram padrões de regularidade como ferramenta eficaz no processo ensino/aprendizagem da Álgebra?

A partir desses questionamentos, decidimos investigar a abordagem do estudo da Álgebra, tendo por base a exploração de padrões com o objetivo de fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, favorecendo a capacidade de generalização e compreensão da linguagem algébrica.

Para isso, organizamos nosso trabalho em seis capítulos descritos da seguinte forma:

Neste capítulo introdutório, fizemos, além de uma descrição sobre cada capítulo da pesquisa, uma pequena introdução do trabalho levantando nossa problemática e argumentando sobre a relevância do tema.

No segundo capítulo, apresentamos o percurso da pesquisa, indicando o objetivo principal de nosso trabalho, a metodologia utilizada e todo caminho trilhado.

No capítulo três, fazemos um breve relato sobre a história da Álgebra e da Educação algébrica, dando ênfase ao desenvolvimento do pensamento algébrico conduzido a partir de experiências com padrões de regularidades. Para isso, nos referenciamos em alguns documentos oficiais como: *Principles and Standarts for School Mathematics*[3] (NCTM, 2000) e Parâmetros Curriculares Nacionais[4], como, por exemplo, PCNs (1998), PCNs+ (2002) e a pesquisadores, como Devlin (2002), Perez (2006) e Modanez (2003) que dissertam sobre o tema.

No quarto capítulo, descrevemos uma análise do aspecto algébrico das atividades apresentadas em cada uma das cinco coleções de livros didáticos escolhidos para nossa investigação.

No capítulo cinco, narramos a aplicação de três atividades que exploram padrões de regularidades com intuito de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico e apresentamos algumas análises feitas a partir das observações e registros coletados.

---

[3] Documento redigido em 2000 pela *National Council of Teachers of Mathematics* (associação de educadores que objetivam uma melhor aprendizagem em Matemática). A partir desse momento na exposição da pesquisa utilizaremos o termo *Standart* para denominar esse documento. Todas as citações na íntegra deste documento foram já traduzidas pela pesquisadora.

[4] PCNs (1998) Documento do CNE/MEC: legal, aprovado e homologado em 1998 que orienta o Ensino Fundamental atualmente no Brasil. PCNs+ (2002) Documento do CNE/MEC: legal, aprovado e homologado em 2002 que traz orientações educacionais complementares aos PCNEM – Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio – Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

As considerações finais são pontuadas no sexto capítulo, onde apresentamos, além dos resultados da pesquisa, fatos relevantes vivenciados por nós durante a aplicação dessas atividades com o intuito de contribuir com o trabalho do professor em sala de aula.

O produto final de nossa pesquisa (APÊNDICE A) é apresentado por meio de um Caderno de Atividades (CA)[5], composto por 32 atividades elaboradas a partir de padrões de regularidades que proporcionam a alunos da Educação Básica o desenvolvimento do pensamento algébrico facilitando a compreensão da linguagem algébrica.

[5] Este Caderno de Atividades encontra-se como apêndice A de nossa pesquisa.

2 PERCURSO DA PESQUISA

O estudo da Álgebra, como mostram os autores: Usiskin (1995), Fiorentin, Miguel e Miorim (1993), Bonadiman (2005), pode ser desenvolvido a partir de diferentes abordagens, sendo possível, então, seguir diversos caminhos. Nesse trabalho, a abordagem do estudo de Álgebra tem por base a exploração de padrões e regularidades com o objetivo de fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos favorecendo a capacidade de generalização e compreensão da linguagem algébrica.

Sendo assim, o produto final almejado foi a elaboração de um caderno de atividades (CA) que proporcione aos alunos do Ensino Fundamental das séries finais e do Ensino Médio o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de padrões de regularidades.

2.1 O caminho trilhado

Nessa pesquisa, optamos por uma abordagem qualitativa, pois ela nos permite a obtenção de dados pelo contato direto do pesquisador com o meio pesquisado. Essa coleta de dados se processa de forma predominantemente descritiva; os detalhes são tratados de forma extremamente relevante e há um interesse pelo processo em detrimento dos resultados, conforme apontam Bodgan e Biklen (1994) e Lüdke e André (1986).

Dentro dessa visão qualitativa, decidimos pelo estudo de caso que, além de utilizar uma variedade de informações, utiliza uma linguagem e uma forma mais acessível que outros relatórios de pesquisa. Para Lüdke e André (1986, p.20): “A preocupação aqui é com a transmissão direta, clara e bem articulada do caso e num estilo que se aproxime da experiência pessoal do leitor’’.

Em uma pesquisa com essa visão, quanto mais informações, quanto mais detalhes conseguíssemos coletar, mais rica e segura seria nossa análise dos resultados.

Portanto, nossa pesquisa contou com cinco diferentes momentos: a revisão bibliográfica e a construção do quadro teórico; a análise do aspecto algébrico de algumas coleções de livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental; a elaboração de atividades com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de exploração de padrões; a aplicação de três dessas atividades e a coleta e análise dos dados.

1° Momento: Construção do quadro teórico

Nosso primeiro passo no desenvolvimento desse trabalho foi pesquisar em Eves (2004), Boyer (2001) e Struik (1997) questões sobre a história da Álgebra e em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) questões sobre a educação algébrica, em especial no Brasil. Em seguida, nos reportamos a Linz e Gimenez (1997), Usiskin (1995), Fiorentini *et al* (2006), Modanez (2003), Bonadiman (2005), Nakamura (2003), Perez (2006) e nos PCNs (1998) para discutir perspectivas para a construção da linguagem algébrica e do pensamento algébrico.

Essas leituras, em especial Usiskin (1995), nos conduziu a um aprofundamento sobre as diferentes concepções da Álgebra. Para esse estudo, nos referenciamos a Modanez (2003), aos PCNs (1998), aos *Standarts* (NCTM, 2000), a Freitas(2002) e aos PCNs+ (2002).

Buscamos em Devlin (2002), Davis & Hersh (1995), Vale *et al*. (2007), argumentos que apontam o estudo a partir de padrões como uma das ferramentas eficazes no desenvolvimento do pensamento algébrico. E a partir desse estudo, levantamos sobre a perspectiva para o ensino da Álgebra nos documentos oficiais PCNs (1998), PCNs+ (2002), Guia de Livros Didáticos – PNLD (2005 e 2008) e *Standarts* (NCTM, 2000), procurando verificar como esses documentos se reportam à questão do desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de generalização de padrões.

Ao terminar esse estudo, sentimos necessidade de investigar nos livros didáticos: como é a abordagem às concepções algébricas, qual a incidência de atividades apresentadas em cada uma das quatro concepções, e se nas atividades apresentadas o autor propõe a exploração de padrões para conduzir o desenvolvimento do pensamento algébrico.

2º Momento: Análise do aspecto algébrico de algumas coleções de livros didáticos

Hoje, a diversidade de publicações de livros didáticos é imensa. Esse fato nos levou a selecionar alguns para análise. Para essa escolha, estabelecemos alguns critérios:

- O fato de existir, hoje, no mercado, livros com propostas diferenciadas de ensino, o primeiro critério seria, então, escolher livros que tivessem uma perspectiva mais inovadora e outros com propostas mais tradicionalistas. Muito nos ajudou nessa seleção uma leitura prévia no Guia dos Livros Didáticos Matemática: séries finais do Ensino Fundamental - PNLD Programa Nacional do Livro Didático (2005 e 2008).

- O segundo critério foi optar por livros adotados nos últimos dez anos pelas escolas públicas e particulares do município de Pará de Minas[6].

- Por último, como os livros didáticos têm uma influência muito grande na concepção de muitos educadores sobre o processo ensino-aprendizagem de Matemática, selecionei cinco que são tidos como referência para pesquisa dos educadores de Pará de Minas.

A partir desses critérios, selecionamos as cinco coleções que foram analisadas, conforme mostra o quadro abaixo:

[6] Pará de Minas é uma cidade localizada a 70 Km de Belo Horizonte, com uma população de aproximadamente 80.000 habitantes. Durante minha vida profissional, tive oportunidade de trabalhar nos mais diversos níveis de escolarização (fundamental, médio e superior) com as mais diversas classes sociais e nas três redes de ensino: municipal, estadual e particular. Isso me proporcionou uma visão bastante ampla do ensino de Matemática nessa cidade.

Nº	Coleção	Autor	Editora	Ano
01	Matemática	Edwaldo Bianchini	Moderna	2006
02	Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	2002
03	A Conquista da Matemática: a + nova	José Ruy Giovanni BeneditoCastrucci José Ruy Giovanni Jr.	FTD	2002
04	Matemática Paratodos	Luiz Márcio Imenes Marcelo Lellis	Scipione	2002
05	Matemática hoje é feita assim	Antonio José Lopes Bigode	FTD	2006

Quadro 1: Livros Didáticos para o Ensino Fundamental séries finais

A análise dessas coleções foi feita em duas etapas:

Em uma primeira etapa, detectamos o número de atividades no campo da Álgebra presentes em cada série e, mais tarde, em cada coleção. Ao fazer essa sondagem, categorizamos cada atividade em uma ou outra concepção algébrica. Algumas atividades apresentam duas, três ou até as quatro concepções e, ao categorizá-las, optamos por incluí-las na concepção que recebesse maior ênfase no desenvolvimento da atividade.

Ao final, tínhamos um quadro com um somatório da abordagem algébrica atribuída em cada coleção (Ver ANEXOS). Fizemos também um levantamento no manual do professor de cada uma das coleções analisadas com o intuito de verificar se o autor comunga das idéias em documentos oficiais e de pesquisadores referenciados nessa pesquisa.

Abaixo, apresentamos a tabela que utilizamos para quantificar e classificar atividades algébricas presentes em cada livro de cada coleção analisada.

TABELA 1

Concepções abordadas nos livros didáticos estudados

Concepção	Tipo de atividade	5ª	%	6ª	%	7ª	%	8ª	%
Aritmética Genralizada	Padrões numéricos								
	Generalização de Propriedades								
	Total								
Resolução de Equações	Problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas, teoremas,...								
	Resolva a equação, inequação, sistema..., verificar raiz								
	Relação com discriminante, soma e produto, vértice da parábola....								
	Determine as medidas indicadas nas figuras								
	Problemas de interpretação								
	Condição de existência								
	Aplicação princípios de equivalência								
	Total								
Estudo de Estruturas	Escrita simbólica de expressões								
	Demonstrações								
	Cálculo numérico								
	Reconhecimento e classificação de polinômios, TQP...								
	Operações com polinômios, frações algébricas.								
	Total								
Estudo de Relações entre grandezas	Problemas (cálculo de nº diagonais,								
	Construção de gráficos								
	Domínio, imagem, zeros, ponto de máximo e mínimo								
	Estudo de sinal								
	Total								

De posse desse levantamento, fizemos uma última tabela unificando as atividades em suas respectivas concepções para cada coleção analisada, conforme apresentamos abaixo:

TABELA 2

Análise Global

Concepções da Álgebra/ Coleção	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Aritmética Generalizada					
Resolução de equações					
Estudo das Estruturas					
Estudo das Relações entre grandezas					

Com essas informações, foi possível apontar, em cada coleção, a incidência de atividades que contemplam cada uma das quatro concepções algébricas.

Na segunda etapa, procuramos descrever, em cada uma das coleções, como o autor aborda os conteúdos algébricos. Além disso, procuramos responder às seguintes questões: a obra se preocupa em proporcionar ao educando experiências com uso das distintas interpretações dadas a uma variável? Como e quando a coleção faz uso de padrões numéricos, figurativos, geométricos e/ou outros para abordar conceitos algébricos?

Para essa verificação, nos reportamos, além dos resultados coletados por meio da análise dos livros, a documentos oficiais referenciados em nosso quadro teórico como: os PCNs (1998), os *Standarts* (NCTM, 2000) e o Guia dos Livros Didáticos Matemática- séries finais do Ensino Fundamental, PNLD (2005 e 2008).

Nesse momento, fizemos um confronto entre as duas vertentes: o que os documentos oficiais apontam como caminho eficaz para a construção do pensamento algébrico e o que os livros didáticos, principal referencial dos educadores, oferecem como atividades algébricas nas séries finais do Ensino Fundamental.

Como apresentação de um produto final, elaboramos algumas atividades que têm, como objetivo principal, a generalização de regularidades a partir de padrões. Essas generalizações deveriam conduzir o aluno ao estabelecimento de alguma propriedade e/ou uma relação entre grandezas de forma linear, quadrática ou exponencial.

3º Momento: Elaboração de atividades

Como professora de Matemática já há 17 anos, uma das coisas que sempre nos incomodou foi a aversão que a maioria dos alunos tem pela Álgebra. Isso nos fez durante esses anos, buscar metodologias diferenciadas de trabalho com o intuito de amenizar tal problema. Participamos de vários encontros, palestras, seminários, congressos na área da Educação Matemática, fizemos uma especialização em Educação Matemática, sempre com esse propósito buscar metodologias novas de ensino que pudessem nos auxiliar em nosso trabalho.

Em 2003, ano em que lecionávamos em três escolas diferentes, no Ensino Fundamental – séries finais na Escola Estadual Manoel Batista e no Colégio Berlaar Sagrado Coração de Maria - CBSCM e no Ensino Superior da FAPAM - Faculdade de Pará de Minas com as disciplinas Fundamentos I e II e Metodologia do Ensino da Matemática, fomos convidadas a assumir o Ensino Médio do Colégio Berlaar Sagrado Coração de Maria.

Nessa época, após aceitar o convite para atuarmos nesse segmento de ensino, uma de nossas iniciativas foi cadastrar o CBSCM para participar anualmente da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). A princípio, o cadastro se deu apenas pelo fato de um de nossos alunos do Ensino Médio mostrar muito interesse em participar de tal evento. Então, em função do interesse desse aluno, procuramos conhecer como funcionava, qual o propósito da olimpíada... e aí, a partir do cadastro da escola, começamos a receber a revista Eureka![7].

[7] EUREKA! Revista editada semestralmente pela SBM - Sociedade Brasileira de Matemática e o IMPA-Instituto de Matemática Pura e Aplicada com o apoio do CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, do Instituto do Milênio – Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira, da Academia Brasileira de Ciências e FAPERJ, distribuída gratuitamente a todas as escolas cadastradas na OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática. A revista apresenta uma coletânea de problemas da OBM com sugestões de resolução e problemas de outras olimpíadas de Matemática como: Olimpíada Iberoamericana, Olimpíada de Maio, Olimpíada Internacional de Matemática etc.

Isso nos proporcionou um contato direto com questões formuladas para tais eventos. E nesse contato, uma coisa que muito nos chamou a atenção foi a grande incidência de questões que para resolver de forma rápida e eficaz, o aluno precisaria observar a seqüência, o desenho ou mesmo o problema, identificar regularidades, estabelecer um padrão e, a partir daí, resolver tal questão. Entre elas, apresentamos a seguinte questão publicada na revista EUREKA! nº 19[8] :

Considere a seqüência oscilante: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, …

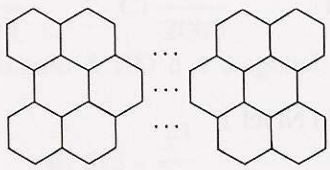
O 2003º termo desta seqüência é:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Figura 1: Questão 8

Veja essas duas publicadas na revista EUREKA! nº 22[9]:

O arranjo a seguir, composto por 32 hexágonos, foi montado com varetas, todas com comprimento igual ao lado do hexágono. Quantas varetas, no mínimo, são necessárias para montar o arranjo?



A) 113 B) 123 C) 122 D) 132 E) 152

Figura 2: Questão 23

A função f é dada pela tabela a seguir.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Por exemplo, $f(2) = 1$. Quanto vale $\underbrace{f(f(\ldots(f(f(4))\ldots))}_{2004\ \text{vezes}}$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Figura 3: Questão 1

[8] SBM. XXV Olimpíada Brasileira de Matemática – Enunciados e Soluções. **Eureka!**. N. 19, p.7, 2004.

[9] SBM. XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática – Enunciados e Soluções. **Eureka!**. N. 22, p.7 e 21, 2005.

Essas são questões cujo objetivo é verificar a potencialidade do aluno no que diz respeito a estabelecer padrões e, a partir deles, construir uma regra para depois resolver o problema.

Nessa mesma época, começamos a pesquisar junto às universidades, em especial à UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais, os tipos de questões que estavam sendo abordadas em provas de Matemática, pois o foco principal dos nossos alunos do 3º ano é a aprovação no vestibular dessa instituição. E, ao fazer o levantamento das últimas provas da UFMG, nos deparamos com questões do tipo:

Sabe-se que os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro têm 31 dias.

O dia 31 de março de um certo ano ocorreu numa quarta-feira.

Então, 15 de outubro do mesmo ano foi

A) quinta-feira.

B) terça-feira.

C) quarta-feira.

D) sexta-feira.

Figura 4: Questão extraída da primeira etapa do vestibular 2004 UFMG[10]

E ainda:

Sabe-se que:

- para se escreverem os números naturais de 1 até 11, são necessários 13 dígitos; e
- para se escreverem os números naturais de 1 até o número natural *n*, são necessários 1 341 dígitos.

Assim sendo, é **CORRETO** afirmar que *n* é igual a

A) 448.

B) 483.

C) 484.

D) 447.

Figura 5: Questão extraída da primeira etapa do vestibular 2005 UFMG[11]

---

[10] UFMG. Prova de Matemática – Caderno 1. Disponível em: http://www.ufmg.br/copeve/download/pdf/2004/1Matematica-cad1.pdf. Acesso em: 27 jun. 2008.

[11] UFMG. Prova de Matemática – Caderno 1. Disponível em: http://www.ufmg.br/copeve/download/pdf/2005/matematica%201a%20etapa%20cad%201.pdf. Acesso em: 27 jun. 2008.

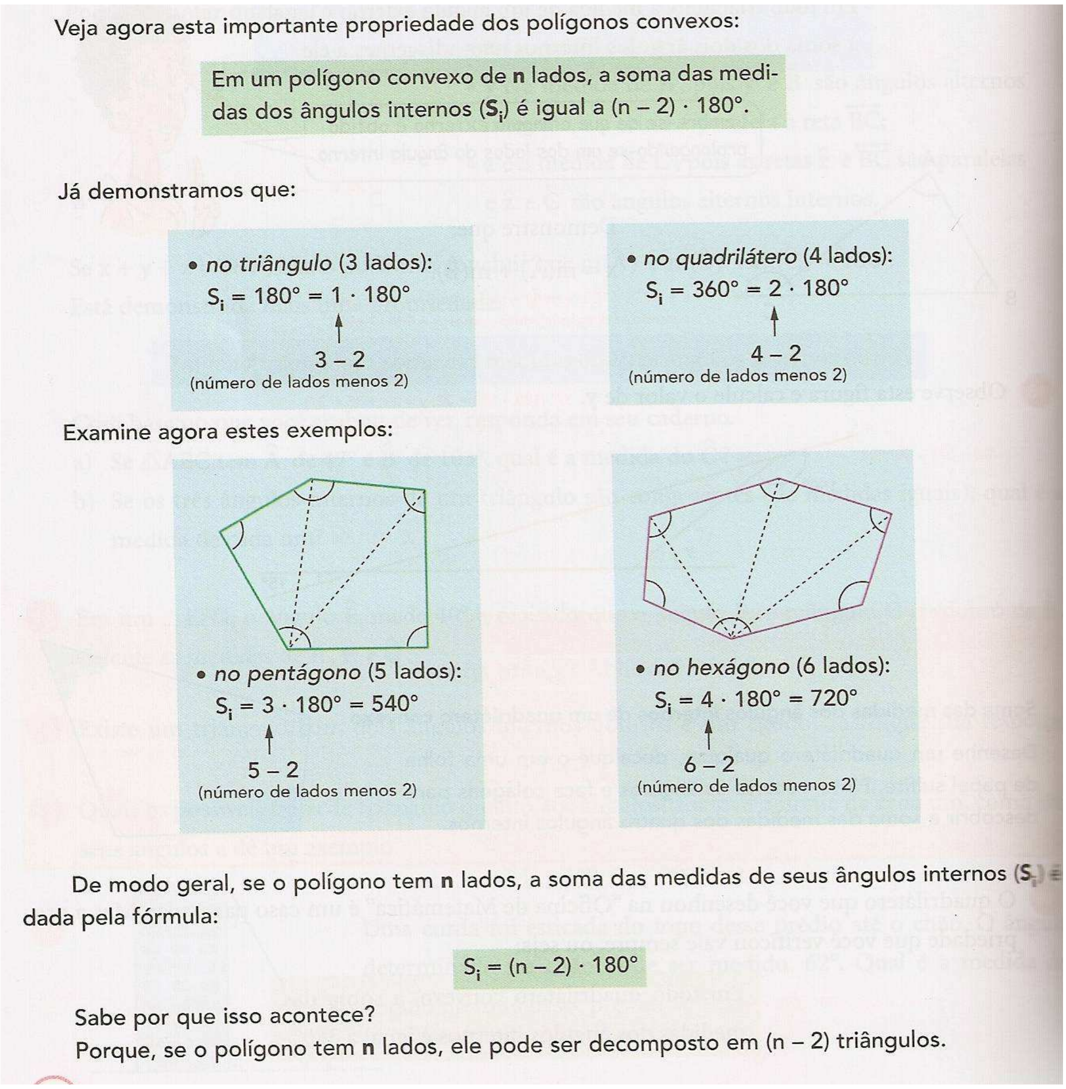
Como nas questões apresentadas anteriormente extraídas da Revista EUREKA!, essas também apresentam a mesma característica, ou seja, para uma resolução mais rápida e eficaz, é necessário que o aluno identifique alguma regularidade e, a partir daí, generalize e resolva a questão.

Diante de todos esses acontecimentos, fomos motivadas a desenvolver algumas atividades em sala de aula que preparassem nosso aluno para esses desafios, já que o material didático utilizado na escola onde atualmente lecionamos para o Ensino Fundamental e Médio, não contempla tais questões.

A partir daí, para cada conteúdo que abordamos em sala de aula, tentávamos elaborar alguma atividade com características de busca de regularidades, identificação de padrões e construção de generalizações com o intuito de dar significado ao conteúdo, motivar os alunos e promover o desenvolvimento dos vários aspectos da Álgebra.

Logo, a elaboração das atividades presentes em nosso CA se deu de forma gradativa e com uma pesquisa em várias fontes: OBM, vestibulares da UFMG, livros didáticos, entre eles os produzidos por: Dante (2002), Bigode (2006) e livros relacionados à Educação Matemática: Barbosa (1993), Carvalho (1997), Sampaio (2005) e Devlin (2002).

Alguns dos padrões utilizados na elaboração dessas atividades podem ser encontrados em livros didáticos, em questões de olimpíadas ou em para-didáticos. Porém, não aparecem com a sistematização e organização de um grupo de atividades de forma a explorar a possibilidade de um trabalho com padrões como o que aqui apresentamos. Por exemplo, quando elaboramos a atividade "soma dos ângulos internos de um polígono", nossa inspiração veio da abordagem apresentada abaixo, que, utilizando-se do mesmo raciocínio, demonstra intuitivamente para um aluno de 7ª série a fórmula, porém, em uma perspectiva de investigação de padrões (FIGURA 6).



Veja agora esta importante propriedade dos polígonos convexos:

Em um polígono convexo de **n** lados, a soma das medidas dos ângulos internos (**S_i**) é igual a (n – 2) · 180°.

Já demonstramos que:

- *no triângulo* (3 lados):
  $S_i = 180° = 1 \cdot 180°$
  ↑
  3 – 2
  (número de lados menos 2)

- *no quadrilátero* (4 lados):
  $S_i = 360° = 2 \cdot 180°$
  ↑
  4 – 2
  (número de lados menos 2)

Examine agora estes exemplos:

- *no pentágono* (5 lados):
  $S_i = 3 \cdot 180° = 540°$
  ↑
  5 – 2
  (número de lados menos 2)

- *no hexágono* (6 lados):
  $S_i = 4 \cdot 180° = 720°$
  ↑
  6 – 2
  (número de lados menos 2)

De modo geral, se o polígono tem **n** lados, a soma das medidas de seus ângulos internos (**S_i**) é dada pela fórmula:

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

Sabe por que isso acontece?
Porque, se o polígono tem **n** lados, ele pode ser decomposto em (n – 2) triângulos.

Figura 6: Demonstração intuitiva da soma dos ângulos internos de um polígono[12]

A análise do aspecto algébrico das atividades presentes nas coleções de livros do Ensino Fundamental, o estudo feito em documentos oficiais como PCNs (1998), PCNs+ (2002), os *Standarts* (NCTM, 2000) e o Guia dos Livros Didáticos – PNLD (2005 e 2008) serviram, portanto, como subsídios e ferramentas para potencializar e sistematizar a aplicação dessas atividades.

Algumas dessas atividades foram aplicadas em níveis diferenciados de ensino e, claro, com objetivos específicos. A atividade Torre de Hanói (Apêndice A, atividade 15), por exemplo, utilizamos em uma turma de 8ª série do Ensino Fundamental do CBSCM e com

[12] DANTE, L. R. Tudo é Matemática. São Paulo: Ed. Ática, 2002, p.136.

alunos do 2° período da FAPAM na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática e tivemos resultados bastante interessantes em ambas as turmas.

4º Momento: Aplicação das atividades

A seleção:

Todas as atividades elaboradas foram aplicadas nos últimos três anos nas turmas em que trabalhamos. A cada aplicação que fazíamos, analisávamos potencialidades e fragilidades da atividade e providenciávamos alguma correção ou adaptação com o intuito de aprimorá-la. Três dessas atividades foram por nós selecionadas para uma aplicação com um registro sistemático na coleta de dados e análise para essa pesquisa. Os critérios utilizados para seleção dessas atividades foram:

- Exploração de padrões diferenciados
- Adequação privilegiando os dois níveis da educação básica
- Ligação da atividade com algum conteúdo trabalhado na época de aplicação em sala de aula.

A partir desses critérios pré-estabelecidos, selecionamos as três atividades: atividade I - o *Triângulo de Pascal,* adequada para uma turma de 2° ano do Ensino Médio, atividade essa que aborda generalização da aritmética conduzindo à elaboração de propriedades e generalização de relações exponenciais; atividade II - *Mesas & Cadeiras* apropriada para turma das séries finais do Ensino Fundamental, que conduz a uma generalização de relações lineares e a atividade III - *Mosaicos* também adequada para as séries finais do Ensino Fundamental que aborda, além da generalização de relações lineares, a generalização de relações quadráticas.

Nosso campo de investigação

A escola selecionada como campo de investigação foi o Colégio Berlaar Sagrado Coração de Maria (CBSCM). Uma escola confessional católica situada no centro de Pará de Minas que atende hoje cerca de 450 alunos, distribuídos nos segmentos de Educação Infantil (berçário ao 2° período) e todos os níveis da Educação Básica. A maioria dos alunos tem um nível sócio-econômico bom. A escola conta hoje com cerca de 50 educadores diretos e indiretos.

Fazemos parte do corpo docente dessa instituição desde 1996, onde temos uma boa receptividade, por parte da equipe diretiva e do corpo discente, em todas as atividades no âmbito educacional que já propusemos. Tão logo iniciamos nosso mestrado, a escola abriu as portas para todo o trabalho que desejássemos ali fazer. Assim que delineamos nosso campo de trabalho, vimos ser esse um ambiente adequado à nossa investigação, já que nossos alunos do Ensino Médio apresentam muitas deficiências na aprendizagem da Álgebra e, uma pesquisa nesse campo contribuiria muito em nossas discussões do grupo de estudo[13].

Selecionando os sujeitos:

Os sujeitos selecionados para essa investigação foram 31 alunos que cursavam o 2º ano do Ensino Médio no CBSCM, em 2005, e 11 alunos que cursavam a 7ª série do Ensino Fundamental no CBSCM, em 2008.

A escolha por uma turma do Ensino Médio e outra do Fundamental deu-se com o objetivo de analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico de discentes em níveis diferentes. A coleta de dados efetuada uma em agosto 2005 e outra em março 2008 nos proporcionou momentos diferenciados de investigação.

Em 2005, quando cursava algumas disciplinas no mestrado, foi proposto um trabalho onde deveríamos relatar uma experiência com atividades investigativas vivenciando o desenvolvimento de algum processo matemático. Na época, o processo por nós escolhido foi o de generalização de padrões e a atividade aplicada foi Triângulo de Pascal.

Essa turma, um 2º ano do Ensino Médio, era composta por trinta e um alunos, todos com idade entre 16 e 18 anos, a maioria com bom nível socioeconômico, onde pelo menos uns dez já estavam na escola desde os 2 anos, e nós já desenvolvíamos um trabalho de

[13] Grupo formado pelo corpo docente do CBSCM que se reúne no último sábado de cada mês para discutir questões pedagógicas e fazer planejamentos. É nesse encontro que nos reunimos por área para discutirmos questões de nossa disciplina. A área de Matemática é composta por três educadoras uma para cada segmento: Ensino Fundamental séries iniciais, Ensino Fundamental séries finais e Ensino Médio.

Matemática com a maioria desde a 6ª série. Cinqüenta por cento da turma tinha um ótimo raciocínio lógico, onde podíamos desafiá-los o tempo todo, contando sempre com uma resposta positiva; quarenta por cento eram alunos que só respondiam a comandos, apresentando muita dificuldade em pensar matematicamente. Suas respostas eram sempre ligadas a questões técnicas com respostas mecânicas, sem argumento lógico, sem crítica. Os outros dez por cento eram alunos com grande defasagem de conteúdos, que não respondiam nem a questões práticas.

O tema escolhido, Triângulo de Pascal, além de atender aos critérios por nós estabelecidos, atendia também ao desenvolvimento do conteúdo trabalhado com a turma naquela época. Essa escola, sendo uma instituição de ensino particular, é muito cobrada por parte de toda a comunidade escolar no quesito “vencer” o conteúdo. E, de repente ‘‘usar’’ tantas aulas para realização desse trabalho poderia ser interpretado por muitos pais e alunos como perda de tempo, o que, felizmente, nesse caso, não aconteceu.

Para a aplicação da atividade I – *Triângulo de Pascal*, dividimos a turma em 8 grupos, assim distribuídos:

1º Grupo: Flávia, Clarissa, Fernanda e Thais Cristina
2º Grupo: Caroline, Rafaela, Roberta e Carla
3º Grupo: Thaís Pâmela, Ludmila, Amanda e Ana
4° Grupo: Letícia, Isabela G., Ana Paula e Werner
5º Grupo: Luiz Felipe, Guilherme, André e Marcos
6° Grupo: Isabela, Renata, Patrícia e Samira
7° Grupo: Felipe, Viviane e Rafael
8° Grupo: Mônica, Lívia, Lorena e Marina[14]

Como já lecionávamos para esses alunos desde a 6ª série do Ensino Fundamental, não foi necessário estabelecer um critério para a formação dos grupos uma vez que já tínhamos esses grupos formados e com todas as experiências vivenciadas anteriormente tendo respostas sempre positivas.

[14] Esses nomes são fictícios, como forma de preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa.

Na aplicação dessa atividade, tivemos 5 encontros. Em cada um desses encontros foi proposta uma atividade para o grupo e traçados alguns objetivos. As datas, os objetivos e tarefas propostas e desenvolvidas nos encontros estão sintetizadas no quadro abaixo:

ENCONTROS	OBJETIVOS	TAREFAS DESENVOLVIDAS	Tempo
1º Encontro 23/08/2005	Orientar os alunos sobre a realização do trabalho Promover um momento de discussão para realização da primeira etapa do trabalho	Construção do triângulo de Pascal a partir dos binomiais apresentados; Elaboração de um relatório constando todas as observações apontadas pelos integrantes dos grupos	2 h/a
2º Encontro 24/08/2005	Verificar o nível de linguagem algébrica apresentada pelo grupo	Para cada observação descrita o grupo deverá apontar alguma generalização ou simetria utilizando nesse momento a linguagem algébrica	2 h/a
3º Encontro 30/08/2005	Verificar o nível do raciocínio e do pensamento algébrico do grupo	Diante de cada generalização estabelecida, o grupo deveria provar matematicamente a identidade	2 h/a
4º Encontro 31/08/2005	Promover um momento de integração entre os grupos	Um ou mais integrante do grupo deveria expor para a turma uma das observações feitas pelo grupo, generalizando o fato e provando a identidade	2 h/a
5º Encontro 03/09/2005	Coletar informações sobre a percepção dos alunos diante da atividade	Cada aluno deverá fazer uma auto avaliação da atividade desenvolvida apontado aspectos facilitadores e dificultadores encontrados durante a realização	1 h/a

Quadro 2: Encontros realizados

Todos os encontros aconteceram na própria sala de aula da turma e em nossos respectivos horários de trabalho.

Para a aplicação das atividades II – *Mesas & Cadeiras* e III - *Mosaicos,* optamos por um trabalho com três trios e uma dupla. Essa experiência foi realizada fora do horário de aulas.

Todas as turmas do Ensino Fundamental séries finais, bem como as turmas do Ensino Médio dessa escola têm suas aulas com um início às 7:00 da manhã e término às 11:30 e 12:20, respectivamente. Analisando meus horários de aula e os horários da turma escolhida, era impossível a aplicação das outras duas atividades utilizando as aulas de Matemática da professora da turma, pois havia incompatibilidade em nossos horários Como já havíamos aplicado as duas atividades em uma turma de 8ª série em horário normal de aulas e com a participação de 38 alunos, tínhamos certeza da possibilidade e da potencialidade da atividade. Nosso propósito aqui, era ouvir, observar e analisar como alunos do Ensino Fundamental reagem, refletem, discutem e realizam atividades investigativas a partir de uma abordagem de padrões. Diante de todos esses fatores, optamos pela realização em horário extra-curricular.

Solicitamos, então, que a professora escolhesse dez alunos, obedecendo à disponibilidade de cada um, para participar de nossa pesquisa. Quando a professora auxiliar foi escolher os alunos para participarem da atividade, primeiramente ela perguntou quem gostaria e teria disponibilidade de estar na escola no período da tarde para a realização da atividade. Um dos alunos que se colocou à nossa disposição para o trabalho foi um aluno de inclusão da turma com Síndrome de Down, o que nos deixou satisfeitas. Escolhidos esses alunos (onze no total), encaminhamos um comunicado aos pais, colocando-os a par do trabalho que seria desenvolvido e informando-os do local, data e horário de sua realização.

Os alunos tinham idade variando entre 12 e 13 anos, sendo que apenas um tinha 15 anos, estando, portanto, fora da faixa etária da turma. Trata-se do aluno de inclusão citado anteriormente, ao qual chamaremos de Paulo Henrique, que acompanha essa turma desde a 3ª série, porém, com algumas limitações próprias de sua necessidade especial.

Decidimos por uma aplicação em grupos, sendo assim distribuídos:

1º Grupo: Vítor, Anderson e Rafael
2º Grupo: Bruna, Thalyta e Caroline
3º Grupo: Lucas, Adilson e Paulo Henrique
4º Grupo: Marcelino e Rafael Moreira

Contamos com a colaboração da professora de Matemática da turma, Valdirene, para nos auxiliar na organização e aplicação das atividades. O aluno Lucas Augusto, estudante do 3º ano do Ensino Médio do CBSCM cuidou dos registros em vídeo e fotográficos em todos nossos encontros. Tivemos três encontros com esses alunos para a realização dessas outras duas atividades. Encontros esses sintetizados no quadro abaixo:

ENCONTROS	OBJETIVOS	TAREFAS DESENVOLVIDAS	Tempo
1º Encontro 25/03/2008	Orientar os alunos sobre a realização do trabalho Verificar os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico e como esses alunos expressam uma generalização de padrão figurativo. Identificar o tipo de linguagem utilizada pelo grupo para expressar essa generalização. Promover um momento de integração entre os grupos	Atividade II: Mesas e Cadeiras • Discussão em grupo • Responder questões propostas • Apresentação à turma	2 h/a
2º Encontro 26/03/2008	Verificar os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico e como esses alunos expressam uma generalização de padrão de mosaicos. Identificar o tipo de linguagem utilizada pelo grupo para expressar essa generalização. Promover um momento de integração entre os grupos	Atividade III: Mosaicos • Discussão em grupo • Responder questões propostas • Apresentação à turma	2 h/a
3º Encontro 27/03/2008	Coletar informações sobre a percepção dos alunos diante da atividade	Auto avaliação do grupo frente às duas atividades desenvolvidas através de um questionário	1 h/a

Quadro 3: Encontros para realização de atividades com grupos

Os encontros aconteceram em uma das salas de aula do CBSCM, a partir das 13 horas, nas datas mencionadas.

5° Momento: Coleta e análise dos dados

Na aplicação das atividades, optamos pela utilização da técnica de observação. Conforme apontam André e Lüdke (1986):

> A observação direta permite também que o observador chegue mais perto da ‘‘perspectivas do sujeito’’, um importante alvo nas abordagens qualitativas. Na medida em que o observador acompanha *in loco* as experiências diárias dos sujeitos, pode tentar aprender sua visão de mundo, isto é o significado que eles atribuem à realidade que os cerca e às suas próprias ações. (André e Lüdke, 1986, p.26)

Para nossa análise, o mais importante é justamente a reação, a atitude, a decisão do aluno diante de uma situação apresentada. E a observação nos permitiria ver isso tudo de perto e em detalhes.

André e Lüdke (1986, p.25), quando apontam as potencialidades da técnica de observação na coleta de dados, levantam algumas fragilidades. Para os autores, “as observações que cada um de nós faz na nossa vivência diária são muito influenciadas pela nossa história pessoal, o que nos leva a privilegiar certos aspectos da realidade e negligenciar outros”.

Para amenizar essa fragilidade, fizemos um planejamento de onde e como se daria a observação? Quais os sujeitos estariam envolvidos nela? Quais os aspectos seriam relevantes na observação?

O planejamento e registro das observações se deram de forma diferenciada com os dois grupos de sujeitos envolvidos na pesquisa.

1º Grupo:

Com o primeiro grupo, uma turma do 2° ano do Ensino Médio, sujeitos já bastante conhecidos por essa pesquisadora, pois éramos professora da turma desde a 6ª série, optamos por realizar os registros dessa observação sozinha. Os recursos utilizados para o registro foram: uma planilha de anotações, o relatório elaborado por cada grupo e fotografias.

A planilha de anotações, elaborada por essa pesquisadora e utilizada para registro de observações e descrição de fala dos alunos no momento de discussão e apresentação, foi sintetizada e apresentada abaixo:

Data	Atividade	Grupo		Descrição da fala

Quadro 4: Planilha de Registro de observações *in loco*

Além da planilha e dos relatórios apresentados pelos grupos, solicitamos, por último, que cada aluno, individualmente, fizesse uma auto-avaliação do desenvolvimento da atividade. Para isso, ele deveria descrever suas percepções diante de cada momento vivenciado na tarefa, apontando pontos positivos e negativos do trabalho realizado.

Para a análise, separamos os registros por grupo de trabalho e fizemos um portifólio para cada grupo contendo a planilha de registro das observações, o relatório do grupo e a avaliação individual de cada integrante. A partir daí, procedemos à análise, dando ênfase às diferentes formas de expressar uma idéia apresentada pelos grupos, o nível de pensamento algébrico de cada grupo, a capacidade de expressar matematicamente uma regularidade, os aspectos positivos e negativos apresentados e as dificuldades diante da realização de cada tarefa proposta.

2° Grupo:

O segundo grupo, uma turma de 7ª série, eram sujeitos desconhecidos pedagogicamente por essa pesquisadora. Esse fato nos levou a sentir necessidade da ajuda da professora titular da turma nos registros das observações. Além disso, queríamos enriquecer nosso trabalho, incluindo, nele, as percepções de um sujeito, diferentes da nossa. Pois, durante a observação, por mais que tentamos, não conseguimos nos desligar e não deixar que nossas vivências nos influenciem a privilegiar determinados detalhes em detrimento de outros.

Antes da aplicação da atividade, fizemos uma reunião com a professora da turma para combinarmos como faríamos os registros das observações. Acordamos que eu faria o registro do grupo 01 e 02 e ela dos grupos 03 e 04 e que usaríamos a mesma planilha que nós havíamos elaborado, quando da observação do 1° grupo.

Além das observações escritas, fizemos um registro em vídeo, pois não conhecíamos o desenvolvimento cognitivo da turma e não queríamos perder nenhum detalhe do trabalho.

No terceiro encontro com a turma, distribuímos um questionário com uma proposta de averiguar as ações dos alunos diante de cada atividade proposta. As respostas às questões apresentadas irão complementar nossa análise do desenvolvimento da atividade. Abaixo, uma cópia do questionário distribuído a cada grupo (FIGURA 7).

Questionário :

Atividade : Mesas e cadeiras

1) Você teve dificuldade em compreender a situação problema ? Explique

2) O que fez para responder a questão 3 ?

3) Você conseguiu responder à questão 4 sem desenhar ? Explique

4) Houve um grau maior de dificuldade para responder ao item 5 ? Por que ?

5) Qual o raciocínio utilizado para responder ao 6º questionamento ?

6) Esse percurso facilitou a resposta para a questão 7. Explique

7) Você conseguiu desenvolver todas as atividades sozinho ? Precisou de auxílio ? De quem ? Em qual questão ?

Atividade : Mosaico 1

1) O que você utilizou para responder as questões 2 e 3 ? Explique com detalhes.

2) Antes de desenhar a figura de ordem 8 , você conseguiu estimar quantos quadradinhos pretos e brancos seriam necessários ?

3) Você encontrou maior dificuldade em responder ao questionamento 5 ? Explique.

4) Foi fácil chegar à resposta para a questão 7 ? Qual foi sua maior dificuldade ?

5) Existe alguma semelhança entre a atividade 1 e 2 ? Qual ?

6) Você consegue relacionar essa atividade a algum conteúdo estudado em sala de aula? Qual?

Figura 7: Questionário sobre as ações dos alunos diante das atividades propostas

De posse de todo esse material, fizemos um portifólio para cada grupo constando das planilhas com as observações e descrição de falas de cada grupo, uma folha com as respostas dadas a cada questão proposta, inclusive com os rascunhos de desenhos utilizados e a folha com as respostas do questionário. Assistimos ao vídeo várias vezes e fizemos registros das observações relevantes encontradas nas fitas. Concluído o trabalho, acrescentamos esse material ao portifólio de cada grupo.

Em seguida, fizemos a análise do desenvolvimento da atividade para cada equipe dando ênfase à forma de registro utilizada pelos alunos, ao nível de pensamento algébrico, aos argumentos utilizados que justificavam determinado raciocínio, à capacidade de representar simbolicamente um fato descrito em linguagem usual, às dificuldades apresentadas pelos grupos no desenvolvimento de cada tarefa proposta e à percepção do grupo diante de atividades que exploram padrões.

3 EVOLUÇÃO DA ÁLGEBRA E DA EDUCAÇÃO ALGÉBRICA ASPECTOS RELEVANTES

Para um melhor entendimento dos problemas vivenciados hoje em nossas escolas no processo ensino aprendizagem da Álgebra, torna-se imprescindível delinearmos a trajetória de desenvolvimento desse ramo da Matemática, bem como nos referenciarmos a alguns pontos relevantes da Educação Algébrica no Brasil. Ao nos reportarmos a pontos fundamentais dessas duas vertentes: Álgebra e Educação Algébrica, teremos uma visão mais sólida e consistente das mudanças vivenciadas no Ensino da Álgebra facilitando-nos a verificação de possibilidades de perspectivas futuras.

Como nosso foco de estudo é o desenvolvimento do pensamento algébrico, vamos nos deter em apresentar alguns pontos na evolução desse pensamento em várias civilizações ao longo da história. O quadro abaixo nos dará uma visão global desse desenvolvimento em várias civilizações e em épocas distintas:

Época	Estudiosos	Contribuições
2000 a.C.	Babilônios	Usavam a técnica de completar quadrados para resolver equações.
1950 a.C.	Egípcios	Os problemas pareciam enigmas. Encontramos em alguns papiros a utilização de símbolos para representação: mais, menos, igual e incógnitas.
500 a.C	Gregos	Utilizam a Geometria como ferramenta para se resolver equações algébricas por método da aplicação de áreas ou método das proporções
300 d.C.	Diofanto	Introduz algumas abreviações para escrita e resolução de equações algébricas.
1500 d.C.	Viète e outros	Introduz o simbolismo algébrico moderno.
1600 d.C.	Descartes	Aprimora o simbolismo algébrico moderno. Institui a utilização das primeiras letras do alfabeto (a,b,c) para representação dos coeficientes numéricos e as últimas (x,y,z) para as variáveis. É o pioneiro a utilizar o símbolo· representando a multiplicação.

Quadro 5: As civilizações e as formas de representação do pensamento algébrico

O desenvolvimento do pensamento algébrico conduziu a humanidade à elaboração de uma linguagem específica para a Álgebra. De acordo com Eves (2004, p.206), citando Nesselman e seu livro “*Die Álgebra der Griechen*”, Berlim, 1842, caracterizou três estágios no desenvolvimento da notação algébrica: Álgebra retórica (apenas palavras), Álgebra sincopada (mistura de palavras e símbolos) e a Álgebra simbólica (apenas símbolos).

Para Eves (2004) na Álgebra retórica, os argumentos da resolução de problemas são escritos em “prosa pura”, sem abreviações ou símbolos específicos. Todos os passos para descrever ou solucionar um problema eram feitos usando a linguagem corrente. Entre os problemas solucionados na época citamos um retirado da Antologia Grega: “Democares viveu um quarto de sua vida como criança, um quinto como jovem, um terço como adulto e há 13 anos é ancião. Quantos anos ele tem?” (EVES, 2004, p.225). Embora seja muito simples resolver esse tipo de problema usando nosso moderno simbolismo algébrico, uma solução retórica exigia uma atenção mental muito mais elevada.

A Álgebra sincopada é reconhecida pelo uso de algumas abreviações e/ou símbolos específicos. Encontramos em Diofanto (séc. IV), filósofo grego conhecido como “pai da Álgebra”, a primeira utilização sistemática de símbolos algébricos. Possuía um sinal especial para incógnitas, um para o sinal de menos e um para cada potência da incógnita. Porém, de acordo com Guelli (1997, p.24), nem tudo se valia de símbolos, por exemplo: a igualdade ainda é expressa em linguagem usual “é igual a”. O quadro abaixo mostra uma relação entre a linguagem na escrita de equações dos dias atuais e os utilizados por Diofanto, no século IV.

Símbolos atuais	**Símbolos de Diofanto**
$x + 3 = 18$	x1 u3 é igual a u18
$x + 3 = 12 - x$	x1 u3 é igual a u12 M x1
$x^2 = 4$	Q1 é igual a u4
$x^4 = 8x^3$	QQ1 é igual a C8

Quadro 6: símbolos atuais x símbolos gregos

Fonte: adaptado de GUELLI, O. (1997, p.24)

Essa notação algébrica mais desenvolvida conduziu à solução de problemas com maior grau de complexidade. É importante salientar que, mesmo com a sincopação da Álgebra, muitas civilizações permaneceram usando a Álgebra retórica por centenas de anos. Na Europa Ocidental, especificamente, a maior parte dela permaneceu retórica até o século XV.

A Álgebra simbólica, por sua vez, é marcada pelo momento em que as idéias algébricas passaram a ser expressas por meio de símbolos. A queda do Império Romano, a destruição durante as batalhas de vários centros de estudo retardou muito a passagem da Álgebra sincopada para a simbólica. Apenas por volta do século XVI, com François Viète que a Álgebra ganha uma nova estrutura – é a introdução do simbolismo moderno, que, mesmo ainda fazendo uso de algumas formas sincopadas, simplifica as escritas algébricas, denotando alguns símbolos específicos. Conforme Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) o uso da linguagem simbólica se consolidou a partir da publicação, por Descartes, em 1637, de seu livro "*La Géométrie*". Nesse livro, Descartes utiliza as primeiras letras do alfabeto (a, b, c,...) como quantidades fixas e as últimas letras (x, y , z,...) como incógnitas (e, implicitamente, como variáveis).

A humanidade precisou de muitos e muitos anos para se libertar do uso de palavras. Essa passagem da linguagem natural para a linguagem simbólica só foi possível graças ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Isso nos leva a entender o fato de determinadas civilizações demorarem mais tempo para conceber a utilização total da linguagem simbólica, afinal, os níveis de estruturação do pensamento algébrico eram diferentes.

No campo da Educação Algébrica, em especial no Brasil, podemos perceber uma preocupação com o estímulo ao desenvolvimento do pensamento algébrico apenas no final do século XX. O foco da Educação Algébrica, até então, sempre foi a manipulação de expressões algébricas obedecendo determinadas regras e, a partir daí, capacitar os alunos a resolver problemas. Apesar dessa característica comum, épocas distintas apresentaram certas especificidades que levaram Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) a usar o termo "concepções da Educação Algébrica" para categorizar cada uma delas.

A. Concepção lingüístico pragmática:

De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1992), durante todo o século XIX até meados do século XX, tanto no Brasil como em outros países, prevalece uma educação voltada à resolução de problemas, quase sempre artificiais que nada tinham a ver com o cotidiano do aluno. No Brasil, as disciplinas eram ensinadas na escola secundária, compartimentadas e de forma seqüencial. A aritmética, a Álgebra, a Geometria e a trigonometria tinham programas e livros diferentes, não existia, portanto, a disciplina Matemática. Não se tinha muita clareza dos objetivos de cada uma, dizia-se que tudo era muito importante, sem saber muito bem o porquê. Os próprios autores de livros justificavam a importância de se estudar esse ou aquele conteúdo, pela relevância que as ‘‘nações mais avançadas’’ davam aos mesmos.

Em 1931, com a reforma Francisco Campos[15], ocorre a primeira organização nacional da educação no Brasil e a legislação prevê a disciplina Matemática. Ainda de acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1992), surgem, então, as primeiras coleções de livros de Matemática. A abordagem dos conteúdos era mecânica e a Álgebra era sempre tratada com mais mérito do que a aritmética devido às suas possibilidades na resolução de problemas. Nessa época, o transformismo algébrico (processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de algumas regras), era considerado pré-requisito para uma Álgebra aplicada. O caminho era sempre esse:

- Treinar a utilização de regras para manipulação de expressões algébricas;
- Operacionalização de expressões algébricas;
- Resolução de equações;
- Resolução de problemas.

Esse modo de conceber a educação algébrica acreditando que capacitar o aluno com técnicas ainda que mecânicas seria suficiente para que o mesmo tornasse um hábil

[15] Nome da primeira reforma educacional de caráter nacional, realizada no início da Era Vargas (1930-1945), sob o comando do Ministro da Educação e Saúde, Francisco Campos. Essa reforma, de 1931, foi marcada pela articulação junto aos ideários do governo autoritário de Getúlio Vargas e seu projeto político ideológico, implantado sob a ditadura conhecida como “Estado Novo”. (MENEZES e SANTOS, 2002)

solucionador de problemas (quase sempre artificiais), foi denominado por Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) de “concepção lingüístico-pragmática”.

B. **Concepção fundamentalista-estrutural**

Conforme Fiorentini, Miguel e Miorim (1992), o Movimento da Matemática Moderna, que chega ao Brasil na década de 60, vai contrapor a essa concepção, numa tentativa de unificar os campos da Matemática, não de forma mecânica, excluindo alguns tópicos e incluindo outros, mas sim, usando elementos considerados unificadores: teoria de conjuntos, estruturas algébricas e relações que deveriam constituir a base para a construção de uma nova Matemática.

Com o propósito de capacitar o aluno a aplicar estruturas algébricas em diferentes contextos, tópicos fundamentais como: conjuntos numéricos, propriedades estruturais, sentenças abertas e fechadas, conjunto universo e conjunto verdade, equações e inequações de 1° grau, foram colocados como pré-requisitos ao estudo de expressões algébricas, valores numéricos, operações e fatoração. Com essa mudança, acreditavam dotar o aluno de argumentos lógicos que justificassem o transformismo algébrico. A Álgebra, nessa época, ganha um lugar de destaque e, segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), a educação algébrica ganha uma outra concepção: a “fundamentalista-estrutural”.

Essa concepção reorganiza os tópicos algébricos em uma cadeia linear, colocando um conteúdo sempre como pré-requisito a outro. Por exemplo: para abordagem do conteúdo de funções, o aluno deveria ter estudado conjunto e suas propriedades estruturais, sentenças abertas e fechadas, expressões algébricas, equações, polinômios, fatoração, frações algébricas.

C. **Concepção fundamentalista-analógica**

Ainda de acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1992), passados alguns anos, o ensino da Matemática no Brasil sofre influências da corrente pedagógica do tecnicismo. E aí nos deparamos com um impasse entre o fazer (ênfase tecnicista) e o compreender (ênfase estruturalista) e os matemáticos e educadores matemáticos começam a questionar o pressuposto que embasa o ideário modernista. O Movimento da Matemática Moderna, que não consegue dar conta dessa crise, acaba fracassando e contribuindo para o surgimento de uma terceira concepção de educação algébrica: a "fundamentalista-analógica". Essa concepção tenta efetuar, conforme Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), uma síntese entre a concepção lingüístico-pragmática e a concepção fundamentalista-estrutural. Para os autores:

> [...] essa concepção tenta efetuar uma síntese entre as duas anteriores, uma vez que procura, por um lado, recuperar o valor instrumental da Álgebra e, por outro, manter o caráter fundamentalista – só que não mais de forma lógico-estrutural – de justificação das passagens presentes no transformismo algébrico. (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p.84)

No final da década de 70, começam a surgir as primeiras mudanças com o objetivo de corrigir distorções e excessos cometidos ao longo da trajetória do movimento modernista. Um exemplo foi a volta e valorização do ensino da Geometria que havia sido "esvaziada" dos currículos durante o movimento. A proposta de ensino da Matemática para o 1º grau, além de defender uma abordagem intuitiva da Geometria, faz alguns apelos a recursos geométricos no sentido de justificar algumas operações algébricas, como, por exemplo, multiplicação de polinômios, fatoração algébrica, produtos notáveis etc.

A justificativa ao transformismo algébrico deixa de ser lógica e passa a ser visual. O que não quer dizer, segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993, p.84) que o aluno não terá acesso a uma abordagem estritamente simbólica, apenas terá um "estágio (geométrico-visual) intermediário e/ou concomitantemente à abordagem simbólico-formal".

A presença dessa concepção ainda é muito marcante nos atuais livros didáticos de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, que buscam a justificação de passagens algébricas usando uma geometrização da Álgebra, como podemos observar na figura a seguir:

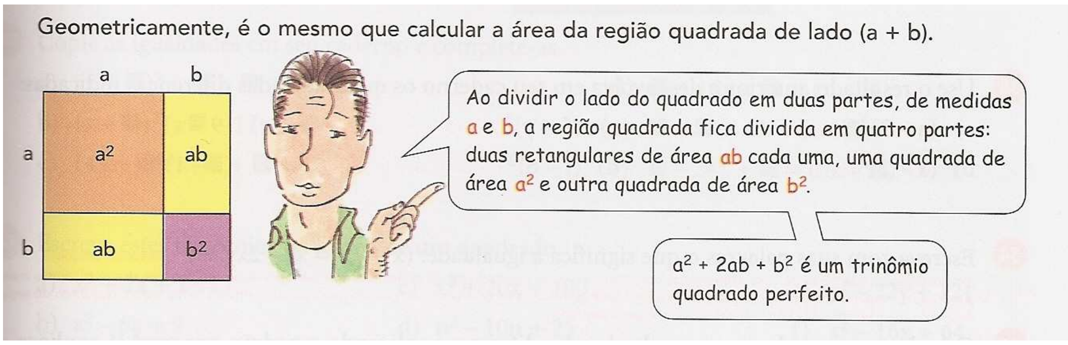


Figura 8: Coleção “Tudo é Matemática” - 7ª série, p. 165

Um fato comum a todas essas concepções, é que todas tomam como ponto de partida uma Álgebra simbólica já construída e, em todas, o ensino-aprendizagem da Álgebra reduz-se ao “transformismo algébrico”. O ensino da Álgebra é reduzido ao ensino de sua linguagem pré-estabelecida. O desenvolvimento do pensamento algébrico e a elaboração de uma linguagem a partir de experiências concretas são descartados, ficando para o aluno a idéia de que tudo está pronto e a única coisa a fazer é decorar regras sem o menor significado e depois aplicá-las na resolução de problemas.

> A tendência da Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da Álgebra. Entretanto, essa relação de subordinação do pensamento algébrico à linguagem desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é, pelo menos a princípio a expressão de um pensamento. (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, l993. p. 85)

A partir da década de 90, podemos perceber uma nova forma de pensar a educação algébrica. A preocupação maior deixa de ser com as regras de manipulações algébricas com uma linguagem pré-estabelecida, o foco principal passa a ser a proposta de experiências que desenvolvam o pensamento algébrico conduzindo à elaboração de uma linguagem simbólica.

No que diz respeito à educação algébrica, os PCNs do Ensino Fundamental destacam que:

> Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e

> gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver um estudo da Álgebra apenas enfatizando as “manipulações” com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (BRASIL, 1998, p.116)

Pesquisadores como: Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006), Bonadiman (2005) Lins & Gimenez (1997), comungando das idéias apresentadas pelos PCNs (1998), não apostam mais na estrutura de um currículo linear onde o aluno aprende a linguagem algébrica para depois desenvolver o pensamento algébrico. São unânimes em afirmar que é preciso proporcionar aos alunos experiências que desenvolvam, paulatinamente, o pensamento algébrico e, a partir daí, capacitá-los para que construam a linguagem algébrica.

3.1- Linguagem algébrica x pensamento algébrico

O conceito de pensamento algébrico tem sido abordado por diversos autores. É um conceito controverso, levando Lins & Gimenez (1997, p. 89) a referirem que não há consenso a respeito do que seja “pensar algebricamente”. Para nós as observações, as inferências, os questionamentos, as estratégias utilizadas por sujeitos diante de uma situação problema caracterizam o pensamento algébrico.

Tomando isso como pressuposto e nos remetendo à retrospectiva na evolução da Álgebra, percebemos a existência de um pensamento algébrico em todas as fases de seu desenvolvimento, até mesmo quando de sua fase retórica onde havia uma ausência total da linguagem simbólica. A linguagem algébrica utilizada nessa época era uma linguagem natural. Conforme apontam Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), o pensamento algébrico pode expressar-se por meio de várias linguagens:

> [...] não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p.88)

Assim como na construção da Álgebra, o pensamento algébrico estava presente em todos os momentos, mesmo antes do simbolismo algébrico. Na educação algébrica, Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006) defendem que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradativamente, antes mesmo da existência de uma linguagem simbólica. Para isso, apontam alguns aspectos a serem desenvolvidos, os quais são denominados como caracterizadores do pensamento algébrico:

- estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos;
- perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação problema;
- produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação problema;
- produzir vários significados para uma expressão numérica
- interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas;
- transformar uma expressão aritmética em outra mais simples;
- desenvolver algum processo de generalização;
- perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias;
- desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), os PCNs (1998) e os *Principles and Standarts for School Mathematics* (NCTM, 2000) afirmam que seria adequado introduzir o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de atividades que assegurem o exercício dos aspectos caracterizadores desse pensamento.

A proposta apresentada pelos PCNs do Ensino Fundamental, no que diz respeito à educação algébrica, sugere que:

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar “abstratamente”, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais de modo informal, em um trabalho articulado com aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida, rica em significados. (BRASIL, 1998, p.117)

Portanto, não há como sustentar o que ainda percebemos na educação algébrica, ou seja, o trabalho pautado apenas no transformismo algébrico. Se o objetivo, além de construir uma linguagem simbólica é desenvolver o pensamento algébrico, a educação algébrica não pode mais se deter a um único caminho: expressões – equações – problemas. Nos encontramos frente a uma nova proposta de educação algébrica, que vai além das manipulações, que se inquiete com questões sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico e com a construção do simbolismo como uma linguagem que expressa uma generalidade.

Segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), para a construção de uma linguagem que seja significativa para o estudante, torna-se necessário um trabalho reflexivo. Numa primeira etapa, objetiva-se chegar a uma expressão simbólica por meio da análise de situações concretas. Na segunda, percorre-se o caminho inverso e somente numa terceira etapa a ênfase dever recair ao transformismo algébrico. Para os autores:

> É esse trabalho reflexivo e analítico sobre situações problema de naturezas diversas, isto é, sobre o modo como conduzimos e expressamos o nosso pensamento visando a à resolução de tais situações, que possibilitará a construção de uma linguagem simbólica que seja significativa para o estudante. (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p.90)

Eles afirmam ainda, que esse trabalho deve começar nas séries iniciais do Ensino Fundamental, contrapondo, assim, à idéia de que, para aprender Álgebra, o aluno deve dominar todo o conteúdo de Aritmética.

Apesar de o ensino da Álgebra, atualmente na maioria das escolas no Brasil, ser precedido pela Aritmética, para Linz & Gimenez (1997, p.10), essa idéia é “infundada e prejudicial”, o aluno não precisa, necessariamente, dominar conteúdos da Aritmética para aprender Álgebra. Para eles, “*é preciso começar mais cedo o trabalho com Álgebra, de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra*” (itálico do autor). Portanto, o desenvolvimento desses dois ramos da Matemática deve acontecer concomitantemente, pois, ainda para Lins e Gimenez (1997):

> O que precisamos fazer é entender de que modo a Álgebra e a aritmética se ligam, o que elas têm em comum. Feito isso, teremos encontrado uma verdadeira raiz, o que nos permitirá repensar a educação aritmética e algébrica de forma única. (LINZ & GIMENEZ, 1997, p. 113)

Portanto, pesquisas atuais, bem como documentos oficiais, defendem que a Educação Algébrica deverá promover o desenvolvimento do pensamento algébrico desde as séries iniciais, gradativamente ir construindo a linguagem algébrica, e, a partir daí, assegurar o domínio e a compreensão dos transformismos algébricos.

Com o intuito de alcançar esses objetivos, os PCNs (1998), ao abordarem o ensino da Álgebra, destacam a importância de se desenvolverem atividades que levem o aluno a :

> - reconhecer que representações algébricas permitem generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações problemas e favorecer as possíveis soluções;
> - traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
> - utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. (BRASIL, 1998, p.64)

E mais :

> - produzir e interpretar diferentes escritas algébricas - expressões, igualdades e desigualdades – identificando as equações, inequações e sistemas ;
> - resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> - observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p.81)

Além disso, os PCNs (1998) enfatizam a importância de proporcionar ao educando atividades que desenvolvam sua capacidade de argumentar, observar, analisar, questionar, fazer inferências, ou seja, o aluno deve ser um sujeito ativo de seu processo ensino/aprendizagem. Para isso, afirmam os PCNs (1998), que é preciso mudar o papel do professor:

> Numa perspectiva de trabalho em que se considere o aluno como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conceitos e procedimentos e alimentar os processos de resolução que surgirem, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir. (BRASIL, 1998, p.38)

Usiskin (1995), Bonadiman (2005), Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006), Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), Modanez (2003), apresentam uma postura comum no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Segundo esses pesquisadores, sua construção se dá de forma gradativa e alguns processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da Álgebra escolar encontram suas raízes no desenvolvimento histórico da Álgebra como um sistema simbólico.

Os PCNs do Ensino Fundamental (1998, p.116) destacam que “para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico, o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra”.

Os *Standarts* (NCTM, 2000) apontam para um trabalho pautado em vários temas algébricos com um mesmo objetivo: o desenvolvimento do pensamento algébrico.

3.2 - Concepções da Álgebra

Uma ferramenta eficaz para esse trabalho, segundo vários pesquisadores, em especial Usiskin (1995), deve estar pautado em atividades que contemplem as quatro concepções da Álgebra: Álgebra como aritmética generalizada, Álgebra como estudo de procedimentos para se resolver certos tipos de problemas, Álgebra como estudo de relação entre grandezas e a Álgebra como estudo de suas estruturas. Ainda para o autor, quando enquadramos a variável sobre uma única concepção, colaboramos para que nosso aluno continue com aquela visão distorcida de que variáveis são letras que representam números. Segundo Usiskin (1995, p.12), “as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a idéia de variável numa única concepção implica uma supersimplificação que, por sua vez, distorce os objetos da Álgebra”.

Segundo Ponte (2007), o grande desafio para o educador matemático, hoje, é levar o educando a pensar matematicamente, e, para isso, é necessário que, em primeiro lugar, proporcionemos a esse educando, momentos de vislumbre matemático, onde ele possa observar, analisar, argumentar, identificar padrões, generalizar, comunicar, formalizar etc, ou seja, que ele viva em sala de aula momentos de construção da Matemática.

Para isso, ainda de acordo com o autor, não basta disponibilizar uma lista de exercícios intermináveis e com um mesmo objetivo. É necessário que as atividades sejam ricas, significativas e motivadoras.

A partir da caracterização do pensamento algébrico acreditamos ser necessário que o aluno esteja engajado em atividades que contemplem as quatro concepções da Álgebra para garantir o desenvolvimento do mesmo.

Os PCNs (1998), com relação à Álgebra enfatizam também, a importância de se desenvolver os diversos aspectos da Álgebra :

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos de Álgebra, é especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas, aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contrato com fórmulas), compreenderá a "sintaxe"(regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998 p.50 e 51)

O modelo de Ensino da Álgebra apontado pelos Standarts (NCTM, 2000 p. 36) em todos os segmentos da Educação Básica propõe que os programas instrucionais da pré-escola ao 3º ano deveria capacitar os alunos a:

- Entender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e entender relações quantitativas;
- Analisar mudanças em vários contextos.

Para Usiskin (1995):

> [...] as concepções que temos da Álgebra e a utilização de variáveis estão intrinsecamente relacionadas. **As finalidades da Álgebra** são determinadas por, ou relacionam-se com **concepções** diferentes **da Álgebra**, que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos **usos das variáveis**. (USISKIN, 1995, p.12-13) (Grifos do autor).

Essas concepções são categorizadas por Usiskin (1995, p.13) como: "Álgebra como aritmética generalizada, Álgebra como resolução de equações, Álgebra como estudo das estruturas e Álgebra como estudo das relações entre grandezas".

3.2.1 - Álgebra como aritmética generalizada

Conceber a Álgebra como uma aritmética generalizada constitui-se como ferramenta que pode dar um significado maior à idéia de variável. De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), quando a Álgebra é trabalhada sob essa perspectiva, não é necessário esperar até o 3º ciclo para se iniciar o processo de construção do pensamento algébrico. Desde os primeiros anos da educação básica, o professor pode explorar atividades algébricas, ainda que de forma intuitiva.

Segundo Usiskin (1995), a Álgebra, introduzida como uma aritmética generalizada, proporciona ao educando, além de uma experiência precoce com a mesma, um trabalho menos doloroso e mais significativo. Em um trabalho inicial, não deve haver preocupação por parte do professor com a formalização e o rigor matemático. As primeiras experiências devem acontecer de forma intuitiva e exploradas de maneira bem natural. Um exemplo disso está no estudo das propriedades operatórias: Questionando uma classe sobre as operações: 5 x 1= ?, 6 x 1=?, 100 x 1 = ? e anotando os resultados, logo que surgir a expressão a x 1 = ? , o aluno responderá, seguramente, que o resultado é igual a “a”. Nesse momento, a atividade terá proporcionado, ao mesmo tempo, uma experiência com a generalização de padrões, um primeiro contato com as “variáveis”, e o aluno estará começando a pensar algebricamente. Conforme os *Standarts* (NCTM, 2000, p.91), “quando os estudantes notam que operações parecem ter propriedades particulares, eles estão começando a pensar algebricamente. (2000, p.91)

Segundo Usiskin (1995), atividades do tipo: observar uma seqüência e tentar completá-la, também são muito úteis na abordagem dessa concepção. Exemplificando, temos a atividade abaixo:

2	**3**	**4**	**5**	**n**
5	**7**	**9**	**A**	

Observando a tabela acima, qual é o número que completa corretamente a seqüência, substituindo o valor de a? Encontre uma expressão que exprima essa regularidade para um valor n qualquer.

Para desenvolver atividades desse tipo, o aluno deverá observar e descobrir qual a regra de formação da segunda coluna, quer dizer: descobrir um padrão e, em seguida, generalizar e resolver o problema. Para Usiskin (1995), atividades que envolvem padrões são as que mais auxiliam o desenvolvimento do processo de generalização.

Nessa concepção da Álgebra como aritmética generalizada, percebemos que as variáveis (letras) são tratadas como generalizadoras de modelos e sua finalidade é apenas substituir os números.

3.2.2 - Álgebra como estudo para resolver certos tipos de problemas (Resolução de equações)

Segundo Usiskin (1995), essa concepção talvez seja a que receba maior ênfase pelos professores autores de livros didáticos, porém, se pautada apenas em métodos, técnicas e regras que o aluno decora e não encontra o menor significado, perde a sua verdadeira finalidade. É muito importante atenção e cuidado para que, ao explorar atividades que abordem resolução de equações, não nos detenhamos apenas no desenvolvimento de métodos que, muitas vezes, são decorados e camuflam dificuldades, constroem conceitos errôneos que, depois, podem comprometer todo o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse sentido, de acordo com os *Standarts* (NCTM, 2000, p.38): “se os alunos ocupam-se excessivamente na manipulação simbólica antes de desenvolverem uma base conceitual para seu trabalho, eles serão incapazes de fazer mais que manipulações mecânicas”.

Ainda de acordo com o autor, torna-se necessária, principalmente, a construção correta do conceito de equação, do significado do sinal de igualdade, do significado de equivalência de equações, e o verdadeiro significado da letra, que, aqui deixa de ser apenas algo que substitui um número e é concebida como incógnita. As variáveis são tratadas, nesse caso, como termo desconhecido e o objetivo central é determinar seu valor. Uma ferramenta poderosa no trabalho dessa concepção é a interpretação geométrica da equação de 1º grau e a construção do conceito de raiz ou solução como sendo a interseção dessa reta com o eixo “x”.

Conceitos que, para nós professores são tão simples (pois já foram enraizados ao longo de nossa experiência profissional com a Matemática) podem ser vistos pelos alunos como verdadeiras aberrações quando trabalhadas sem significado. Numa equação, nem sempre o símbolo +, significa uma adição a ser efetuada. Por exemplo, na equação: $2x + 5 = 9$, o símbolo + não indica que devamos adicionar 5 a 2x. Bem diferente disso, a regra nos manda realizar sempre operações inversas para determinarmos o valor de x. Essa regra da transposição, usando operações inversas, muitas vezes é assimilada pelo aluno como “muda de membro, muda sinal”, daí o aparecimento de erros, tais como:

$$\mathbf{2x = 6}$$
$$\mathbf{x = 6 - 2}$$
$$\mathbf{x = 4}$$

O sinal do dois é positivo, na transposição de membro fica negativo. Fatos como esses decorrem, muitas vezes, do uso de regras sem significado e do uso de técnicas matemáticas desvinculadas de contextos do dia-a-dia.

Um outro fato é o significado que a maioria dos alunos dá ao sinal de igualdade: acreditam que ele sempre determina “fazer algo” e nunca enxergam esse sinal com uma noção de equilíbrio, de balança, de equivalência.

Para Kaput (1996), citado por Freitas (2002), pensar a Álgebra como um processo para resolver equação, implica em realizar manipulação guiada pela sintaxe (regras) e também pela semântica (significado). Nesse aspecto, as regras sintáticas são usadas para manipular ou modificar a forma da estrutura algébrica, obtendo equações equivalentes, que proporcionem sua resolução. Como esse processo requer uma rotina de passos, ele pode levar a uma mecanização. Por outro lado, ele pode atuar semanticamente sobre o formalismo. Se faltam cinco do dobro de um número que é igual a nove, então duas vezes esse número daria 4, logo, o número procurado é o dois.

3.2.3 - Álgebra como estudo das estruturas

Conforme afirma Usiskin (1995) o estudo das estruturas nos cursos superiores envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Contudo, reconhecemos a álgebra como estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios. Nesse trabalho, utilizaremos essa nomenclatura estudo das estruturas para nos referenciarmos às manipulações algébricas como fazem os PCNs (1998).

O trabalho com essa concepção demanda um amadurecimento maior do educando e uma construção significativa do pensamento pré-algébrico, pois, aqui, as variáveis (letras) tornam-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. É necessário que os alunos tenham facilidade em manipular simbolismos algébricos para conseguirem lidar abstratamente com técnicas adequadas.

As primeiras experiências que a maioria de nossos alunos tem com essa concepção acontecem no início do 4º ciclo do Ensino Fundamental, quando são propostas atividades que buscam simplificações de estruturas algébricas. Aqui, o objetivo não é buscar "um resultado" para uma determinada expressão, mas, simplesmente, manipular variáveis de uma forma diferente, usando propriedades tão abstratas quanto a expressão a ser manipulada.

O uso de técnicas ou regras sem sentido, sem significado, dificulta o trabalho, pois, na maioria das vezes, o aluno não vê objetivo nenhum em simplificar uma expressão, a menos que seja para determinar o valor da variável. Por exemplo: ao ser solicitado que simplifique a expressão: $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$, o aluno não admite que a solução seja x - 3, e acaba questionando: é para resolver e determinar o valor de x? Episódios como estes demonstram a falta de significado que o aluno tem das estruturas algébricas, bem como a construção errônea de conceitos básicos como: a distinção entre equações e expressões algébricas.

A abordagem de atividades baseadas nessa concepção tem como finalidade enriquecer o entendimento de sistemas que realizam abstrações e proporcionar ao aluno base para a compreensão de níveis mais abstratos e de formalização. Logo, para Usiskin (1995), torna-se necessária uma abordagem de cálculo algébrico de maneira significativa e que estimule o aluno a manipular estruturas, buscando uma justificativa razoável para simplificar, fatorar ou desenvolver expressões.

3.2.4 - Álgebra como estudo de relações entre grandezas

O desenvolvimento do pensamento algébrico, focando essa concepção, é que dá significado e compreensão para o estudo de funções, no final do 4º ciclo do Ensino Fundamental. Atividades que estabeleçam relações entre grandezas podem ser exploradas desde os primeiros anos daquela etapa. Um exemplo disso é um jogo de bolinhas coloridas, onde se estabelece que cada três bolinhas vermelhas, a criança troca por uma amarela. Isso nos possibilitaria construir um esquema, como registrado logo abaixo:

Vermelha	Amarela
3	1
6	2
9	3
?	4
?	n

Uma criança, ainda que nos primeiros anos do Ensino Fundamental, consegue estabelecer uma relação entre o número de bolas amarelas e o número de bolas vermelhas. Nessa concepção de Álgebra, as letras são tratadas como variáveis para expressar relações de dependência entre grandezas.

Atividades usando seqüências geométricas (triângulos, quadrados, hexágonos) confeccionadas usando palitos de fósforo, são um bom exemplo de relações entre grandezas, que podem ser abordadas, bem antes do aluno ter noção de função, domínio, contra-domínio, imagem etc. O desenvolvimento de atividades com esse propósito, nas primeiras séries do Ensino Fundamental, não tem como objetivo a formalização desses conceitos, mas proporcionar ao aluno a construção da idéia, mesmo que de forma intuitiva, da relação entre grandezas.

A compreensão das relações funcionais é uma das competências a ser desenvolvida pelo educando, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+, 2002). Formular e comunicar generalizações e representar relações são processos essenciais no desenvolvimento do pensamento matemático, que auxiliam a compreensão da própria estrutura matemática, bem como são utilizados na resolução de problemas do dia-a-dia, inclusive os oriundos de outras ciências. Os PCNs + (2002) nos dizem que:

> [...] O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. (BRASIL, 2002, p.121).

Essa compreensão pode acontecer de forma gradativa, passando do intuitivo para o formal, no decorrer da escolarização, para que o aluno encontre um significado naquilo que está estudando.

Um estudo sobre as várias concepções da Álgebra nos permite uma melhor compreensão sobre os vários conceitos de variáveis. A falta desse entendimento, talvez seja um dos fatores responsáveis pelo fracasso de nossos alunos na matéria. O quadro a seguir mostra, de forma simples, os vários significados das letras em Álgebra, bem como sua finalidade.

Dimensões da Álgebra	**Aritmética generalizada**	**Estudo de relações entre grandezas**	**Resolução de equações**	**Estudo de estruturas**
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético.	Letras como variáveis para expressar relações e funções.	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações, generalizações de padrões aritméticos.	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico; obtenção de expressões equivalentes.

Quadro 7: Os significados das letras em Álgebra e sua finalidade

Fonte: PCN, 1998, p.116

Diante disso, delineamos um fio condutor para o desenvolvimento do pensamento algébrico pautado em experiências diversificadas contemplando todos os significados e finalidades das letras podendo, a utilização de padrões, constituir uma ferramenta importante para o alcance desse objetivo. Segundo os PCNs (1998), essas experiências devem contemplar todos os níveis da Escola Básica, inclusive as séries iniciais do Ensino Fundamental. Ainda de acordo com os PCNs (1998):

> As atividades algébricas propostas no Ensino Fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir a "sintaxe" das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas e variáveis), e construir as "regras" para resolução de equações. (BRASIL, 1998, p.121-122).

Os *Standarts* (NCTM, 2000, p. 36) enfatizam que todos os alunos deveriam aprender Álgebra devido à sua relevância, tanto na preparação para curso superior quanto no trabalho, e argumentam sobre a importância de um trabalho algébrico desde as séries iniciais, apontando experiências sistemáticas com padrões e números como base para o entendimento posterior da compreensão e utilização da linguagem algébrica.

Modanez (2003), Nakamura (2003) e Perez (2006) defendem que atividades de generalizações de padrões é uma das abordagens para superar as dificuldades apresentadas pelos alunos dos Ensinos Fundamental e Médio na manipulação das expressões algébricas e, conseqüentemente, na resolução de equações, constituindo-se como um meio eficaz para que o aluno construa uma linguagem simbólica significativa.

Os PCNs (1998, p.117) também defendem a exploração de padrões no desenvolvimento da capacidade de raciocínio algébrico. Segundo o documento, "é interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões tanto em sucessões numéricas quanto em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente".

Um trabalho pautado em atividades que exploram padrões de regularidades podem, além de proporcionar o desenvolvimento dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, contemplar todas as concepções algébricas, tornando-se adequado para todos os níveis da Educação Básica, desde que devidamente adaptado ao nível de cognição do aluno que vai desenvolvê-lo.

3.3 - Importância dos padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico

No dia-a-dia, desde os tempos mais remotos, o homem sempre foi motivado à procura de regularidades. A própria história da Matemática, da Física, da Geografia etc nos remete a uma busca constante de um padrão para explicação de determinado fenômeno proporcionando a evolução de algum aspecto da ciência. Por exemplo: quando Pitágoras intui que em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos, suas primeiras argumentações partem de observações, análise, identificação de regularidades, intuição e a construção de um padrão. Somente mais tarde é que ele conclui seu trabalho com uma demonstração sistematizada. Na física, quando Galileu desperta para o fato de que todos os objetos caem em direção ao solo (regularidade), isso o conduz à idéia da gravidade. O fato de que a cada três meses o clima parece mudar levou à determinação das quatro estações; o movimento de rotação e translação que a Terra faz em seu eixo levou à origem do dia com 24 horas e do ano com 360 dias. Essas e inúmeras outras situações revelaram um padrão.

Devlin (2002) ressalta que podemos encontrar padrões tanto no mundo físico como no mundo das idéias. Segundo ele, esses padrões podem ser: reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo.

Uma das ferramentas usada para o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser a observação e a generalização de padrões de regularidades conforme apontam os PCNs (1998) e os *Standarts* (NCTM, 2000).

Segundo Davis e Hersh (1995, p.167), “o próprio objetivo da Matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão”.

A proposta de ensino aprendizagem apresentada pelos PCNs (1998) tem sido de uma busca constante para uma significação a todos os conteúdos abordados. Sendo o padrão uma presença contínua na vida de qualquer indivíduo, a sua utilização na construção do pensamento algébrico, além de dar significado à simbologia e às abstrações algébricas, assegura o exercício dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Para Vale *et al*. (2007):

> Quando apelamos aos padrões no ensino da Matemática é normalmente porque queremos ajudar os alunos a aprender uma Matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com sua realidade e experiências. O estudo de padrões vai de encontro a esse aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões e fazerem generalizações e também previsões. (VALE et al., 2007, p.6).

Mas, o que a literatura define como padrão?

Sempre que pensamos em padrões, o que nos vem à mente são pinturas de parede, mosaicos, estampas de tecidos, ou seja, padrões visuais, que envolvem arranjo de formas, cores, números com alguma regularidade. Porém, padrão vai muito além dos aspectos visuais. Em vários aspectos da vida, somos atraídos pela busca de regularidade, tentando interpretar situações, procurando ou impondo padrões. Por exemplo: quando dispomos os quadrados perfeitos: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ..., que a princípio é uma seqüência caótica, sem nenhuma relação, ela traz internamente uma regra padrão: o somatório de “n” números ímpares.

Não encontramos na literatura, uma definição precisa para padrão. Para Vale *et al.* (2007, p.2), “o conceito de padrão têm-se revelado bastante fluído, com definições muito díspares, consoante a utilização que é pretendida”.

Encontramos padrões na natureza, na Física, na Biologia, na Geografia, na Arte etc. Segundo Devlin (2002), não será, portanto, má descrição, considerar a Matemática como a “ciência dos padrões”. Por isso, esse autor dá ao seu livro o sugestivo nome de “Matemática: a ciência dos padrões”, devido à importância que o mesmo dá à procura de regularidades, ressaltando que o significado de padrões, na Matemática, é amplo. Ele ainda esclarece que:

> Foi só nos últimos vinte anos, mais ou menos, que surgiu a definição de Matemática que é hoje consensual entre a maioria dos matemáticos: a Matemática é a ciência dos padrões. O que o matemático faz é examinar "padrões" abstratos – padrões numéricos, padrões de forma, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana. [...] Com o objetivo de transmitir o conceito moderno de Matemática, este livro aborda seis temas genéricos, abrangendo padrões de contagem, padrões de raciocínio e de comunicação, padrões de movimento e mudança, padrões de forma, padrões de simetria e regularidade e padrões de posição (topologia). (DEVLIN, 2002, p.9)

Os nossos olhos são capazes de visualizar vários tipos de padrões de forma e de figuras. Uma estrela do mar, por exemplo, apresenta uma regularidade geométrica (FIGURA 9).

Figura 9: Estrela do Mar

Assim como os alvéolos pulmonares (FIGURA 10):

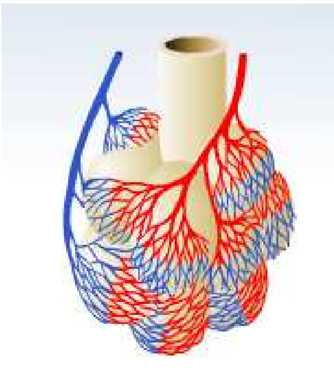


Figura 10: Alvéolos Pulmonares

Existem ainda padrões cujas características mais interessantes ao matemático referem-se ao fato de eles se repetirem de forma regular até preencherem completamente um polígono, como, por exemplo, o desenho mostrado abaixo, de autoria do famoso artista M.C.Escher (FIGURA 11).

Figura 11: "O Sol e a lua" - 1948

Padrões de movimentos, que encontramos na órbita dos planetas, num jogo nos passos de dança, num nado sincronizado etc. (FIGURA 12).

Figura 12: Nado Sincronizado

As notas musicais que agrupadas com uma regularidade de intervalos produz melodias belíssimas. (FIGURA 13).

Figura 13: Notas Musicais

A arte milenar dos crochês, tricôs e bordados, que a partir de um padrão dão origem a peças, roupas e adereços.

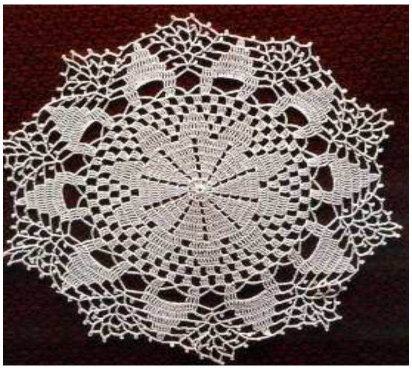
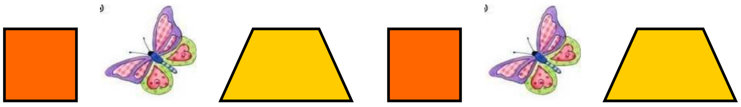
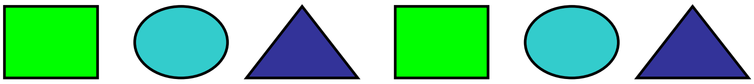
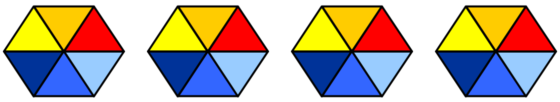
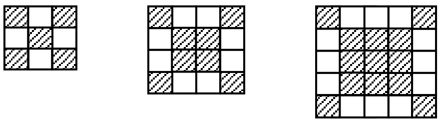
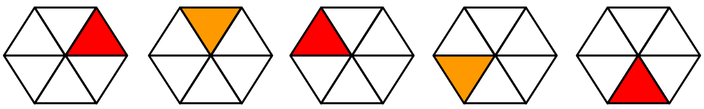


Figura 14: A arte do crochê

Dentro da Matemática, encontramos várias estruturas de padrões que, de acordo com suas características e particularidades, podem ser categorizados em numéricos, visuais, geométricos, figurativo-numérico, geométrico-numérico etc. (TABELA 3).

TABELA 3

Alguns estilos de padrões matemáticos:

Estilos	**Categorização**
	figurativo- numérico
	geométrico-numérico
	visuais
2 1 3 5 2 1 3 5 ...	numéricos
	mosaico
	movimento

Relacionados com o conceito matemático de padrão, também se encontram subjacentes o padrão estrelar, padrão climático, padrão do dia e da noite, padrão de gestação, padrão genético, padrão dos componentes do DNA, padrão das marés, padrão de alimentação, padrão de produtividade, ...

Vários fenômenos, naturais ou não, explicam-se por meio de padrões matemáticos. É o caso da disposição de pétalas na flor de lírio, na flor de girassol, disposição dos galhos em algumas árvores, das folhas em algumas plantas. A incidência de chuva em determinadas regiões. Nas asas de borboletas ou nas plumas de um pavão, por exemplo, podem-se identificar padrões geométricos.

A essência da Matemática e a linguagem na qual ela se expressa são os padrões. Quando consideramos a Matemática como a ciência dos padrões, estamos fazendo uma descrição, não só porque os padrões se encontram em nossa vida e na própria Matemática sob várias formas, mas também porque acreditamos "constituir um tema unificador", conforme descreve Vale *et al.* (2007, p. 6).

Conduzir o ensino da Matemática a partir de experiências com padrões é uma tentativa de torná-lo mais significativo, de fazer o aluno vivenciar o processo de construção da Matemática privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e a criação de uma linguagem simbólica.

Sendo assim, conceitos algébricos podem evoluir e desenvolver-se desde a educação infantil. Inicialmente, a criança pode ser levada a descrever verbalmente algum tipo de regularidade, indicar qual é o próximo termo de determinada seqüência, sem nenhuma preocupação, obviamente, com o simbolismo algébrico. Por exemplo: na seqüência CACACACA... , facilmente uma criança na educação infantil percebe a regularidade e, quando questionada quanto ao próximo termo da seqüência, indicaria a letra C.

De acordo com os *Standarts* (NCTM, 2000):

> […] Experiências iniciais com classificação e ordenação de objetos são naturais e interessantes para crianças mais novas [...] Inicialmente, os estudantes devem descrever a regularidade dos padrões mais verbalmente que com símbolos matemáticos. Nas séries 3-5, eles podem começar a usar variáveis e expressões algébricas assim como eles descrevem e entendem padrões. Ao final da escola secundária eles deveriam estar confortáveis com o uso de notação de funções para descrever relações. (NCTM, 2000, p.37).

Segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), quando a criança consegue estabelecer alguma relação em padrões geométricos e/ou numéricos, constrói mais de um modelo matemático para uma mesma situação problema, consegue simplificar uma expressão numérica, desenvolve algum tipo de generalização, consegue desenvolver uma linguagem mais simples que poderá ajudá-la na solução de um problema. Quando consegue expressar-se matematicamente, podemos dizer que está desenvolvendo seu pensamento algébrico. À medida que a criança vai desenvolvendo esse pensamento, torna-se necessário que ela também produza uma linguagem mais apropriada para resolvê-lo. Entre a linguagem e o pensamento algébrico não deve haver um grau de importância diferenciado, nem preocupação em se esgotar um para iniciar o outro. O desenvolvimento se dá lado a lado e de forma gradativa. Nesse sentido, para Fiorentini, Miguel e Miorim (1993):

> [...] a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra, o menosprezo ao modo de expressão simbólico-formal constitui também em um impedimento para o seu pleno desenvolvimento. (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p. 89).

Os *Standarts* (NCTM, 2000) dão ênfase ao trabalho com padrões durante toda a educação básica objetivando o desenvolvimento do pensamento algébrico. Segundo o documento:

> [...] Padrões são uma maneira para os alunos mais novos reconhecerem ordem e organizarem seu mundo e são importantes em todos os aspectos matemáticos. [...] Assim que os alunos generalizam através de observações sobre números e operações, eles estão formando a base do pensamento algébrico. (NCTM, 2000, p. 91-93).

As várias orientações para o processo ensino aprendizagem da Álgebra apontam para a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico. Os alunos, antes de estabelecer contato com os tópicos formais de domínio da Álgebra, já pensam algebricamente e já desenvolvem estratégias pessoais de pensamento. É função do professor, portanto, diante do exposto, utilizar metodologias de ensino que, partindo dessas estratégias informais do aluno, proporcionem o desenvolvimento do pensamento algébrico com o intuito de, gradativamente, alcançar de maneira significativa o formalismo algébrico.

Uma idéia que é sempre apontada quando o assunto é a Álgebra é a de generalização, o que faz com que pensemos nela como um dos elementos integrantes do pensamento matemático. A generalização surge da observação, reconhecimento e análise de padrões e relações. Como referem os *Standarts* (NCTM, 2000), os padrões são a base do pensamento algébrico e o trabalho com padrões convida os estudantes a identificar relações e fazer generalizações.

4 ANÁLISE DO ASPECTO ALGÉBRICO NAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Nossa opção pela análise do aspecto algébrico em algumas coleções de livros didáticos para o desenvolvimento dessa pesquisa fundamenta-se na enorme influência que esse recurso exerce sobre os professores da Educação Básica, principalmente nas escolas públicas.

O acesso aos livros didáticos pelos professores e alunos da rede pública de ensino tornou-se muito fácil, principalmente a partir da década de 90, quando as escolas começaram a receber gratuitamente coleções de Matemática, Português, Geografia, História e Ciências para todas as séries do Ensino Fundamental.

Hoje, para o processo de escolha do livro, a escola recebe gratuitamente, além do Guia de Livros Didáticos - PNLD, coleções variadas e atualizadas das disciplinas ministradas a cada três anos. Os professores se reúnem, analisam e fazem a escolha do livro para o próximo triênio. Todas as coleções recebidas para análise são disponibilizadas na biblioteca para uso dos alunos e professores interessados. Não existe nenhum outro material pedagógico que chegue tão fácil às mãos do professor da escola pública quanto o livro didático.

Os livros didáticos constituíram-se, assim, o maior recurso pedagógico do professor. As atividades propostas na coleção para o desenvolvimento do pensamento algébrico serão sempre as conduzidas em sala de aula. Então, por mais que os documentos oficiais apontem a importância de se trabalhar com atividades que explorem padrões de regularidades, contemplando todas as concepções da Álgebra na construção da linguagem algébrica, por mais que pesquisadores comprovem sua eficácia, o aluno continuará não tendo acesso a esse tipo de experiência caso os autores de livros didáticos não valorizem essas atividades.

Nosso propósito, então, foi investigar como estão sendo abordados os conteúdos algébricos nessas coleções e qual a importância dada nas atividades propostas ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Para isso, selecionamos cinco coleções que têm influenciado o ensino da Álgebra nos últimos anos na cidade de Pará de Minas e que apresentam metodologias de ensino diferenciadas, que serão especificadas mais adiante.

Para cada coleção, fizemos uma breve identificação e caracterização da obra. Em seguida, apresentamos o resultado obtido a partir de um estudo detalhado nas atividades algébricas propostas nos quatro volumes, ilustrando a quantidade de tarefas que abordam cada uma das quatro concepções algébricas já identificadas no capítulo 3. Em seguida, tecemos alguns comentários relevantes, inclusive usando de exemplos extraídos da coleção, nos referenciando o tempo todo aos PCNs (1998) e ao Guia de Livros Didáticos - PNLD (2005-2008). Usamos como referência para análise o Guia de Livros Didáticos - PNLD de 2005 e de 2008, devido ao estudo de coleções com datas de publicações diferenciadas. Por último, fizemos um relato sobre a incidência de atividades com a utilização de padrões de regularidade, remetendo-nos, novamente, a exemplos extraídos da própria coleção.

Assim, ao final da análise, tivemos uma visão geral da concepção algébrica de cada obra e o percurso proposto pelo autor para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

4.1 – Coleção: *Matemática*, autor Edwaldo Bianchini

4.1.1 – Caracterização da obra

A coleção *Matemática* é composta por quatro volumes, um para cada série, de 5ª à 8ª séries do Ensino Fundamental. No início de cada volume, encontramos uma carta de apresentação, seguida de uma breve amostra da estrutura da obra.

Os volumes são divididos em capítulos, que apresentam uma estrutura e uma seqüência hierárquica abrangendo, inicialmente, o campo aritmético; em seguida, o campo algébrico; e, por fim, o campo geométrico. Exceção apenas para o volume da 5ª série, que não apresenta conteúdo específico de Álgebra. A coleção apresenta uma estrutura de currículo linear.

Todos os capítulos são introduzidos por meio de recursos como: textos com situações do dia-a-dia, imagens do cotidiano e fatos históricos. Em seguida, apresenta a teoria apoiada em alguns exemplos, que auxiliam na a compreensão do conteúdo. Apresenta, ainda, algumas seções como: *Exercícios propostos e complementares*, contendo uma lista de exercícios para fixação do tema estudado; *Para saber mais*: um tópico onde são apresentados textos sobre estatística, Geometria e História da Matemática, usados para enriquecer e aprofundar os conteúdos. No final dessa seção temos *Agora é com você!*, sempre com uma atividade relacionada ao tema exposto. A coleção, ainda, apresenta seções como: *Pense mais um pouco...*, com questões desafiadoras e *Matemática & Jogos*, com atividades de entretenimento que proporcionam um estímulo à aprendizagem. Ao final de cada capítulo, a coleção traz alguns testes de múltipla escolha com o propósito de rever o conteúdo e verificar a aprendizagem.

Finalizando cada volume, temos um suplemento de consulta, respostas dos exercícios complementares e testes, uma bibliografia com referências das obras utilizadas na elaboração da coleção e sugestões de leitura para o aluno.

A coleção consta ainda, de um suplemento com orientações para o professor. Nesse suplemento, encontramos uma apresentação da obra e sua estrutura, objetivos gerais e específicos, uma pequena discussão sobre avaliação e sugestões de leitura para o professor.

A coleção não consta no Guia do Livros Didáticos - PNLD 2005, nem no Guia dos Livros didáticos - PNLD 2008, mas, apesar disso, sua análise teve relevância para nosso estudo por ser uma obra já adotada pelas escolas públicas de Pará de Minas e devido ao grande número de professores que utilizam-se dela para consulta de exercícios complementares em sala de aula.

4.1.2 - Análise da abordagem algébrica na obra

Encontramos nessa obra, 2770 atividades algébricas devidamente classificadas em uma planilha, segundo as quatro concepções da Álgebra. O resultado final desse levantamento é apresentado por meio do gráfico abaixo, que nos deu uma visão global do aspecto algébrico da coleção.

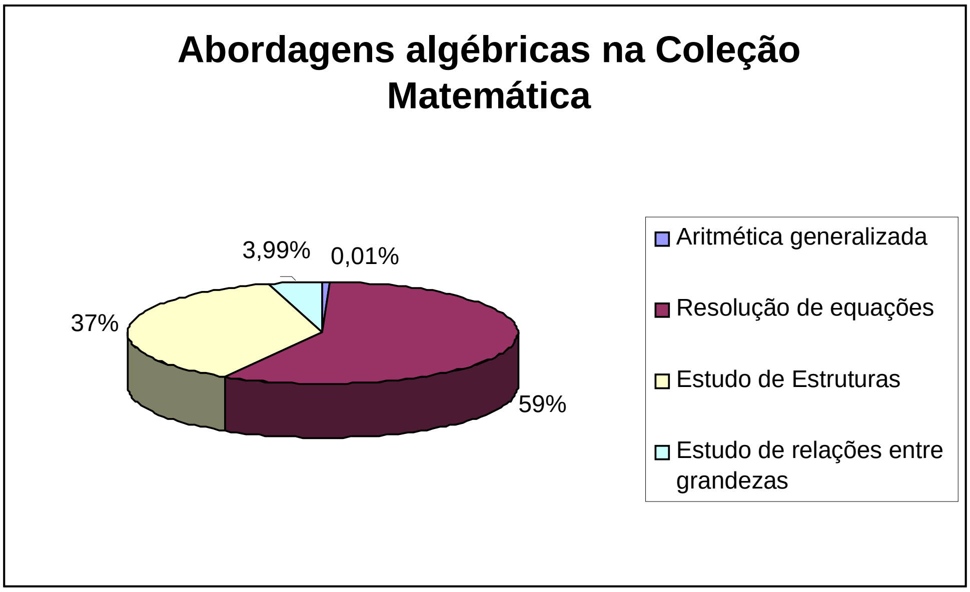


Gráfico 1: Abordagens algébricas na Coleção *Matemática*

No campo algébrico, percebemos uma ênfase dada à resolução de equações e ao cálculo algébrico, atingindo uma média de 96% das atividades presentes nos quatro volumes, sendo que, nos livros de 6ª e 7ª séries, esse índice atinge 100% das atividades propostas. Apenas no volume da 7ª série aparecem cerca de 1200 atividades, todas contemplando resolução de equações e cálculo algébrico. Esse fato nos chamou muito a atenção, não apenas pelo alto número de exercícios, mas também pela sua estrutura: repetitivos e mecânicos.

Entre inúmeras atividades com características citadas, podemos exemplificar com o exercício número 85, página 65, do volume da 7ª série:

Calcule os produtos :

A) $3x \,.\, (3x - 3)\,.\,(x + 2)$

B) $-2x \,.\, (x + 5)\,.\,(2x - 5)$

C) $(x + 1)\,.\,(x - 2)\,.\,(x - 3)$

D) $(x - 3)\,.\,(2x - 1)\,.\,(3x - 2)$

E) $(a - 2b)\,.\,(a + 2b)\,.\,(a - b)$

F) $(a - b)\,.\,(a + b)\,.\,(3a - b)$

G) $\frac{x}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right).\left(2x-\frac{1}{2}\right)$

$$H)\ \left(\frac{y}{2}+1\right).\left(\frac{y}{3}-1\right).\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

Nessa mesma lista de exercícios, no número 82, o autor propõe: *calcule...* com o mesmo enunciado e mesmo objetivo. Já o próximo exercício, o autor pede aos alunos que calculem a área de um retângulo (número 83) e o exercício 84 possui o seguinte enunciado:

Dados : $A = x^2 + 3x - 2$, $B = x + 2$ *e* $C = x - 3$
Calcule : A) $A \cdot B$ *e* $A \cdot C$
B) $A \cdot (B + C)$

Os PCNs do Ensino Fundamental (1998), quando se referem à importância de um trabalho amplo, que contemple todas as dimensões da Álgebra, diz que:

> [...] é fato conhecido que os professores não desenvolvem todos os aspectos da Álgebra no Ensino Fundamental, pois privilegiam fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações – muitas vezes descoladas dos problemas. Apesar de esses aspectos serem necessários, eles não são absolutamente suficientes para aprendizagem desses conteúdos. Para compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões ao longo dos terceiros e quarto ciclos. (PCN, 1998, p.117).

Todas as atividades propostas e exemplificadas anteriormente contemplam apenas a concepção que Usiskin (1995) caracterizada como estudo de estruturas, ou seja, o autor utiliza várias listas de exercícios e todas com o mesmo propósito.

Atividades que explorem a concepção da Álgebra como aritmética generalizada não são contempladas em nenhum dos volumes desta coleção. O estudo de relações entre grandezas é abordado apenas no conteúdo de funções do volume 4. Até então, o aluno tem uma visão da “letra” apenas como algo desconhecido (incógnita). Abdicar do estudo da “letra”como algo que varia em função de... pode comprometer todo o estudo da Álgebra e contribuir de forma enfática nos freqüentes erros cometidos por nossos alunos nos Ensinos Fundamental e Médio citados na introdução desse trabalho.

Fazendo referência a esse tema, diz os PCNs do Ensino Fundamental (1998) que:

> [...] a noção de variável, de um modo geral, não tem sido explorada no Ensino Fundamental e por isso, muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve apenas para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles letra sempre significa uma incógnita. (PCNs, 1998, p. 118).

Também pudemos observar, na pesquisa realizada, que as atividades propostas no volume 4 recaem no mesmo problema verificado anteriormente, contemplando apenas a resolução de equações e estudo de estruturas. Vejamos um exemplo retirado do livro da 8ª série, página 91:

> *Um losango tem diagonal maior medindo 12cm.*
>
> *A) Represente a área desse losango em função da medida da diagonal menor.*
>
> *B) Calcule a área desse losango quando a diagonal menor tem 7 cm.*
>
> *C) Quanto deve medir a diagonal menor para que a área desse losango seja 45 cm^2?*

Diante dos autores pesquisados, podemos, então, afirmar que são situações como as apresentadas na atividade acima que podem ser usadas para uma exploração sobre a variação de determinada grandeza em função de outra, o que, pela nossa observação, não ocorreu.

Em uma visão geral da obra, não percebemos uma preocupação do autor na condução de um processo de construção da linguagem algébrica. Sua concepção é de um currículo linear que capacite o aluno com técnicas que o habilite a resolver problemas.

4.2 – Coleção: *Tudo é Matemática*, autor Luiz Roberto Dante

4.2.1 – Caracterização da obra:

Tudo é Matemática é uma coleção composta por quatro volumes, um para cada série, de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental. A coleção foi aprovada pelo MEC – Ministério da

Educação – por meio do Guia dos Livros didáticos - PNLD de 2005. Cada volume é dividido em capítulos e cada capítulo, em tópicos. Os conteúdos são apresentados de forma intercalada contemplando todos os campos da Matemática.

Os volumes iniciam com uma carta de apresentação ao aluno, onde o autor esclarece qual é a concepção da obra frente ao ensino da Matemática.

Os capítulos começam com uma introdução, sempre que possível problematizando o tema que será abordado. Em seguida, propõe alguns exercícios e/ou algumas situações problemas. Outras seções aparecem no decorrer de cada capítulo, entre elas: *Trocando idéias,* proporcionando sempre um momento de reflexão, análise e discussão; *Você sabia que...,* trazendo uma informação ou curiosidade sobre o tema trabalhado, que por muitas vezes é utilizada na resolução de problemas posteriores; *Oficina de Matemática*, que, em geral, sugere a utilização de algum material concreto; *Revendo o que aprendemos*, com uma lista de exercícios para revisão ou verificação de aprendizagem; *Projeto em equipe,* oportunizando um momento de trabalho em grupo; *Redação – escrevendo sobre o capítulo*, com uma proposta de elaboração de um texto sobre o que foi estudado; *Revisão cumulativa*, com uma lista de testes de múltipla escolha. *Para ler, pensar e divertir* é a seção que encerra todos os capítulos, trazendo sempre textos com curiosidades ou fatos históricos sobre o conteúdo, um desafio e uma atividade recreativa.

No final de cada volume, é apresentado um glossário, uma seção verificando suas respostas, sugestão de leituras complementares e uma bibliografia, com referências das obras utilizadas na elaboração da coleção.

A coleção tem, ainda, um manual do professor composto de duas partes: uma geral, onde o autor caracteriza a obra, discute alguns pontos importantes para o ensino da Matemática: objetivos, segundo os PCNs do Ensino Fundamental, recursos didáticos, temas transversais, resolução de problemas, etnomatemática e modelagem, critérios de avaliação em Matemática; e uma outra parte específica, com o gabarito das questões. De acordo com o autor da coleção, "como há muitas inovações no conteúdo, na metodologia e na ênfase em determinados assuntos, tornou-se fundamental a existência de um manual pedagógico com orientações e sugestões para facilitar o trabalho na sala de aula". (DANTE, 2002, p.6 – Manual Pedagógico do Professor).

No manual pedagógico do professor, quando o autor pontua os objetivos específicos do ensino da Matemática, deixa clara sua concepção sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico comungando com as idéias apresentadas em nosso referencial teórico.

Nessas séries (ou ciclos), o ensino da Matemática deve procurar desenvolver, ainda de acordo com Dante (2002):

> [...] o pensamento algébrico, procurando generalizar propriedades das operações aritméticas; traduzindo situações problema na linguagem matemática; generalizando regularidades; traduzindo tabelas e gráficos em leis matemáticas que relacionem duas variáveis dependentes; interpretando expressões algébricas, igualdades e desigualdades e resolvendo equações, inequações e sistemas. (DANTE, 2002, p.13 – Manual pedagógico do professor)

4.2.2 - Análise da abordagem algébrica na obra

Nessa obra, foram encontradas 1850 atividades algébricas que, após categorizadas em uma planilha, tiveram seus resultados apresentados pelo gráfico abaixo:

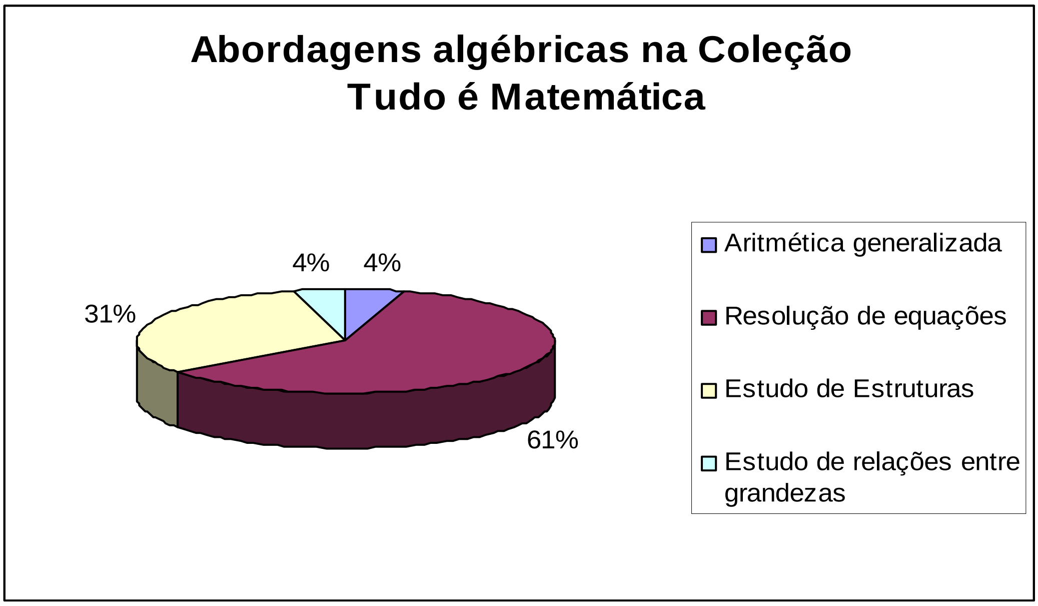


Gráfico 2: Abordagens algébricas na coleção *Tudo é Matemática*

Percebemos, portanto, nessa coleção uma incidência maior de atividades que contemplam as quatro concepções da Álgebra. O número de atividades que envolvem resolução de equações e estudo das estruturas, apesar de ainda apresentar um percentual maior que as outras duas concepções, ou seja, aritmética generalizada e o estudo de relações entre grandezas são mais bem estruturadas e menos repetitivas.

Atividades que buscam o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de generalização de propriedades e operações aritméticas traduzindo na linguagem matemática são pontos fortes dos livros de 5ª e 6ª séries. Como exemplo, podemos verificar a atividade proposta abaixo[16]:

Copie em seu caderno a tabela abaixo e depois complete-a.

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	...	*n*	...
0	*8*	*16*	*24*	*32*				...		...

Qual é a generalização nesse caso ?

Para realizar essa atividade, o aluno deverá observar inicialmente a variação de 8 em 8 na segunda linha para depois relacionar a primeira linha com a segunda generalizando o fato ocorrido para um número “n”. Atividades como essa proporcionam ao aluno uma construção gradativa da linguagem algébrica, bem como permitem uma estruturação significativa para o conteúdo de funções. Ao professor, permitem uma visão do nível de pensamento algébrico em que o aluno se encontra.

Algumas atividades, que o autor denomina como: *Máquinas programadas*, estimulam o aluno a fazer generalizações e obter expressões algébricas, proporcionando, também, uma preparação para o estudo de funções, que aparece no volume da 7ª série, p.112, como mostrado a seguir:

[16] DANTE, L. R. Tudo é Matemática. São Paulo: Ed. Ática, 2002, p.55, ex. 51.

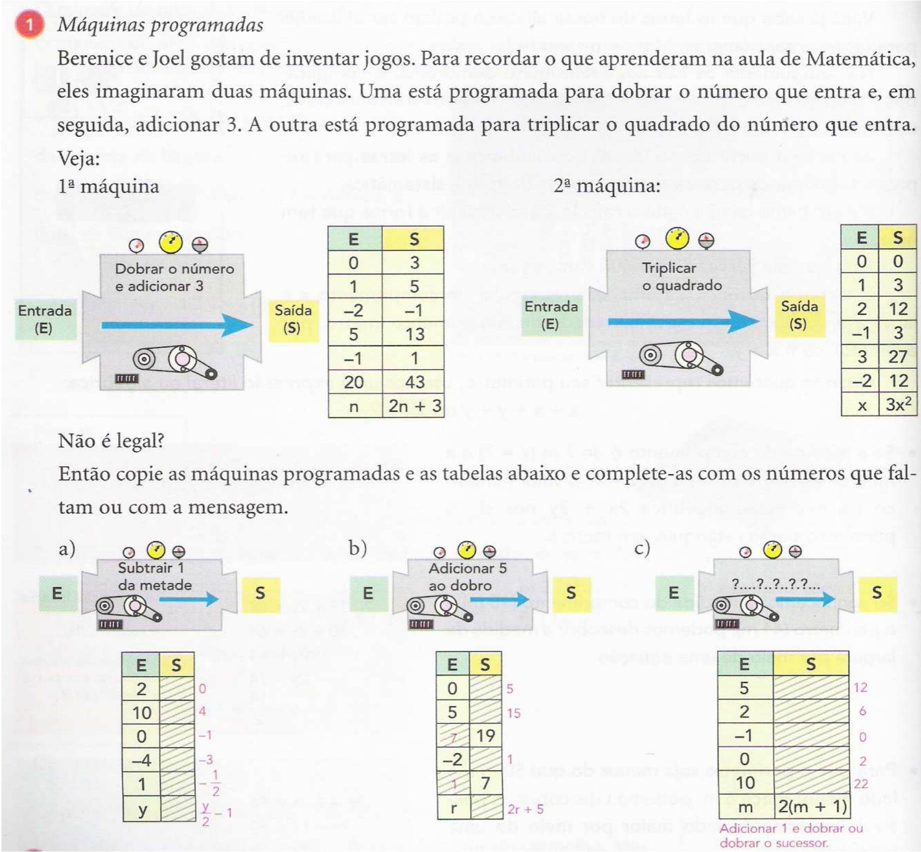


Figura 15: Máquinas programadas

Atividades como essas são exploradas pelo autor em várias etapas e contemplam a utilização de padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, o autor aborda, numa mesma atividade, várias concepções algébricas. Por exemplo: quando o autor dá o comando: subtraia um da metade, o aluno, para realizar a operação, realiza um cálculo algébrico (estudo das estruturas). Quando ele altera esses valores, proporciona ao aluno uma experiência da "letra" enquanto variável, estabelecendo uma relação entre grandezas: mudou o número no comando, muda também o resultado. Ao propor que o aluno escreva uma expressão em função de y, r ou m, ele está conduzindo a construção de uma linguagem simbólica e explorando a concepção de generalização da aritmética. Para essa mesma atividade, o professor poderá abordar a concepção de resolução de equações propondo uma inversão do problema: Qual é o número que adicionando 5 ao seu dobro tenho como resultado 17?

Segundo os PCNs do Ensino Fundamental (1998):

> [...] é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as "manipulações" com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (PCN, 1998, p.116).

A coleção *Tudo é Matemática* dá uma ênfase à interpretação geométrica de fatorações, com o intuito de promover uma melhor compreensão. Um exemplo desse fato encontra-se no volume da 7ª série, página 177, observado a seguir (FIGURA 16):

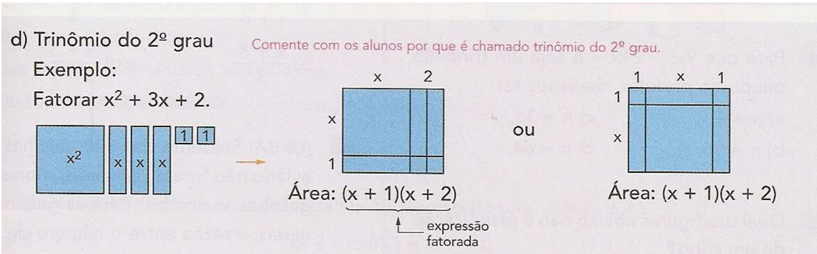


Figura 16: Trinômio do 2º Grau

Utilizando-se da composição de área de retângulos, o autor, com a atividade acima, tenta dar um significado geométrico à fatoração do trinômio do 2° grau. Usando a mesma ferramenta, desenvolve a diferença de quadrados, o trinômio do quadrado perfeito e o fator comum em evidência.

Há uma preocupação do autor, também, no conteúdo de sistemas de equações de 1º grau, com a representação geométrica ao solucionar o problema: "*Represente graficamente em seu caderno as retas x + y = 3 e x – y = 1. A seguir, responda: esse sistema é impossível? Por quê?*" (DANTE, 2002, 7ª série, p. 220).

Questões como essas não objetivam apenas a resolução da questão, mas a compreensão do conteúdo, proporcionando momentos de reflexão e discussão sobre o assunto. Além disso, busca apresentar enfoques diferentes no desenvolvimento de um mesmo conteúdo.

Percebemos na coleção, o desenvolvimento do raciocínio algébrico de forma gradativa, proporcionado a evolução de vários processos matemáticos como: intuição, abstração, generalização, observação de regularidades, comunicação e demonstração.

A obra, no geral, apresenta atividades que, além de capacitarem o aluno para os transformismos algébricos, conduzem à elaboração de uma linguagem algébrica trabalhando a “letra” em todas as suas dimensões.

4.3 – Coleção: *A Conquista da Matemática: a + nova*, autores José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Júnior

4.3.1 - Caracterização da obra

A Conquista da Matemática é uma coleção composta por quatro volumes, um para cada série, 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, publicada em 2002 e aprovada pelo MEC por meio do Guia dos Livros didáticos - PNLD de 2005.

Cada volume é organizado de forma linear, por capítulos. Em todos há uma seqüência na abordagem dos campos da Matemática, primeiro o campo aritmético, depois o algébrico e finalizando com o campo geométrico. No início de cada capítulo, há sempre um texto, geralmente usando uma história em quadrinhos, fazendo a introdução do conteúdo.

Os capítulos apresentam algumas seções, como, por exemplo: *Troque idéias com seus colegas*, estimulando o trabalho em grupo; *Tratando a informação*, onde o aluno terá oportunidade de ler e interpretar gráficos e tabelas presentes no cotidiano; *Explorando*, aqui, o cálculo mental, a Geometria, o manuseio da calculadora, recebem um tratamento especial; *Informações matemáticas interessantes*, mostra a Matemática presente nos mais diversos lugares, por meio de textos que despertam atenção dos alunos para o conteúdo matemático desenvolvido; *Retomando*, com atividades extras que proporcionam uma revisão e melhor fixação do conteúdo; *História da Matemática*, embasando a construção do pensamento matemático.

Ao final de cada volume, encontram-se indicações de leitura, bibliografia, respostas para todos os exercícios, um glossário e sugestão de projetos a serem desenvolvidos durante o ano letivo.

Em cada volume, encontramos, também, o manual do professor com: orientações metodológicas, sugestões de atividades, objetivos específicos de cada capítulo, indicações de leitura para enriquecimento da prática pedagógica e sugestões de técnicas para avaliação.

4.3.2 - Análise da abordagem algébrica na obra

Na elaboração da planilha categorizando as concepções algébricas, encontramos na obra 2770 atividades algébricas. O resultado apresentamos no gráfico abaixo:

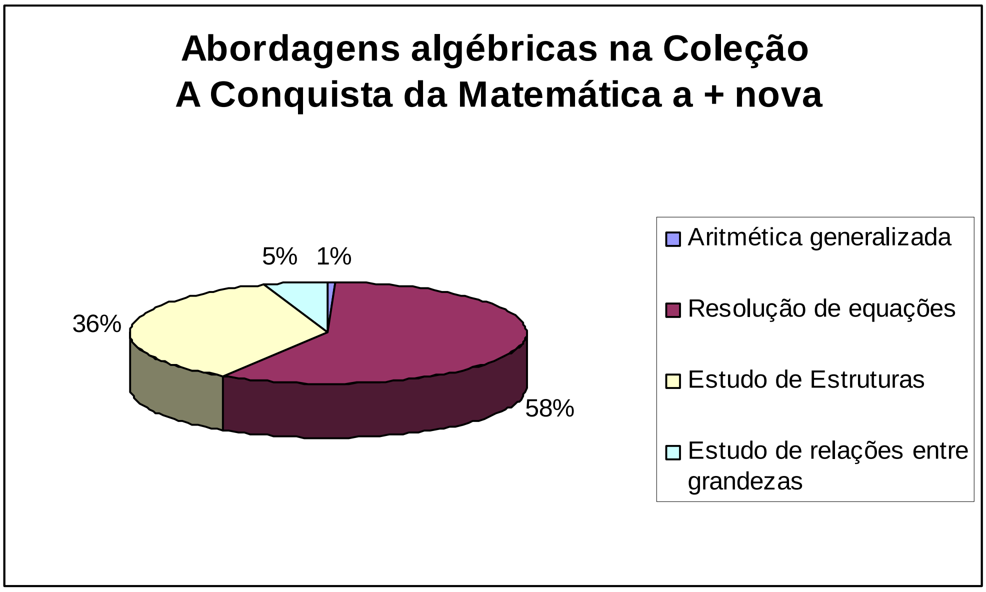


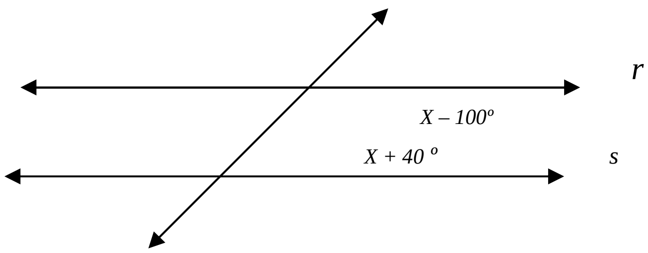
Gráfico 3: Abordagens algébricas na coleção A Conquista da Matemática a + nova

Como podemos verificar, no campo algébrico, predominam atividades que contemplam as concepções: estudo das estruturas e resolução de equações. No volume da 7ª série, devido à ênfase dada às operações com polinômios e frações algébricas, o índice chega a 99% das atividades algébricas.

Na coleção estudada, os conteúdos algébricos, normalmente são iniciados com uma exploração de situação problema envolvendo figuras ou conceitos geométricos, o que é justificado pelos autores, quando dizem que “devido à aproximação com algo mais concreto, o apoio da Geometria é significativo para a manipulação das expressões algébricas”. (Castrucci, Geovanni e Júnior, 2002, p.23 - Orientações para o professor).

Além da introdução do conteúdo, a coleção prioriza o tempo todo a comunicação entre os campo geométrico e algébrico, porém, por muitas vezes, as atividades se prendem a aplicação de propriedades e teoremas, como podemos observar a seguir, no exercício proposto da coleção[17]:

Determine o valor de x, sabendo que r // s :



São raras, portanto, pelo que pudemos observar, as atividades que a obra consegue aproximar a Álgebra de algo concreto aproveitando-se da Geometria. Uma dessas atividades é proposta no livro da 8ª série (p.264) a seguir:

[17] GIOVANNI, J.R., CASTRUCCI, B, JUNIOR, J.R.G., **A Conquista da Matemática: a + nova**. São Paulo. FTD, 2002, 7ª série, p.213.

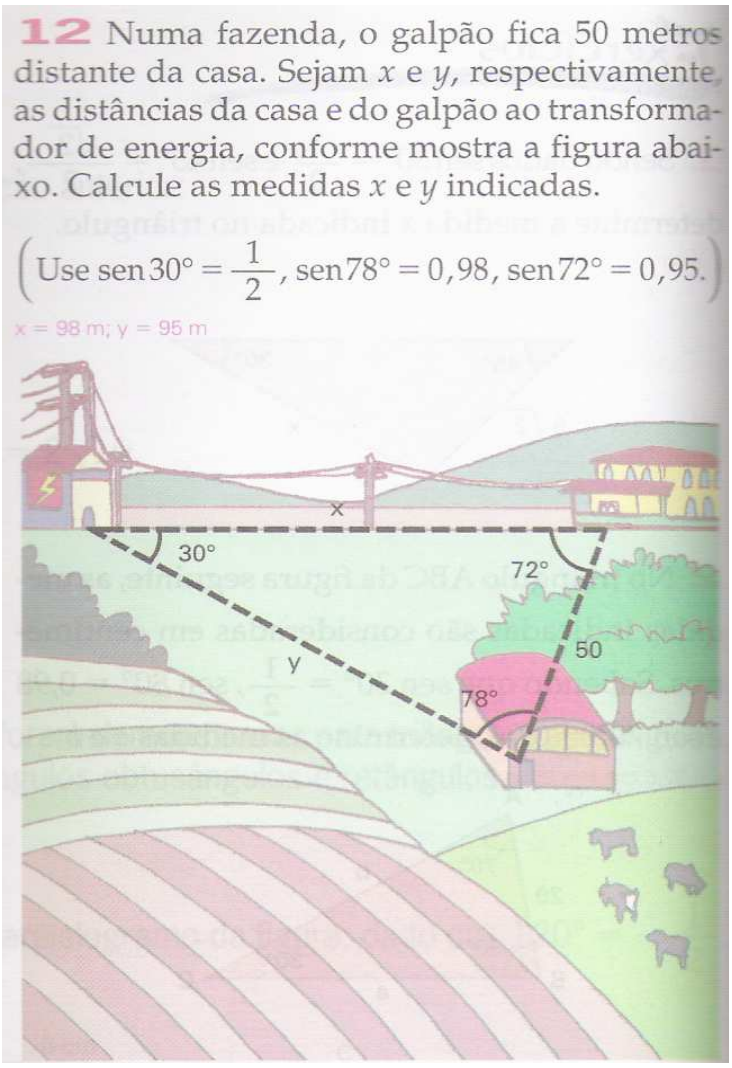


Figura 17: problema proposto

A coleção tem uma característica de utilização da Geometria para justificar transformismos algébricos, ou seja, algebrização da Geometria e geometrização da Álgebra.

Atividades que proporcionam abordagem de generalização da aritmética aparecem de forma muita sucinta, quando na quinta e sexta séries há exploração de propriedades operatórias. Para exemplificar, apresentamos o exercício a seguir[18]:

---

[18] GIOVANNI, J.R., CASTRUCCI, B, JUNIOR, J.R.G., **A Conquista da Matemática: a + nova**. São Paulo. FTD, 2002, 7ª série, p.213.

Considere o quociente : $7^5 : 7^2$

$$\underbrace{(7 x 7 x 7 x 7 x 7)}_{7^5} : \underbrace{(7 x 7)}_{7^2} = \frac{7 x 7 x 7 x 7 x 7}{7 x 7} = 7 x 7 x 7 = 7^3$$

Potências de mesma base

Logo : $7^5 : 7^2 = 7^3$ *ou* 7^{5-2}

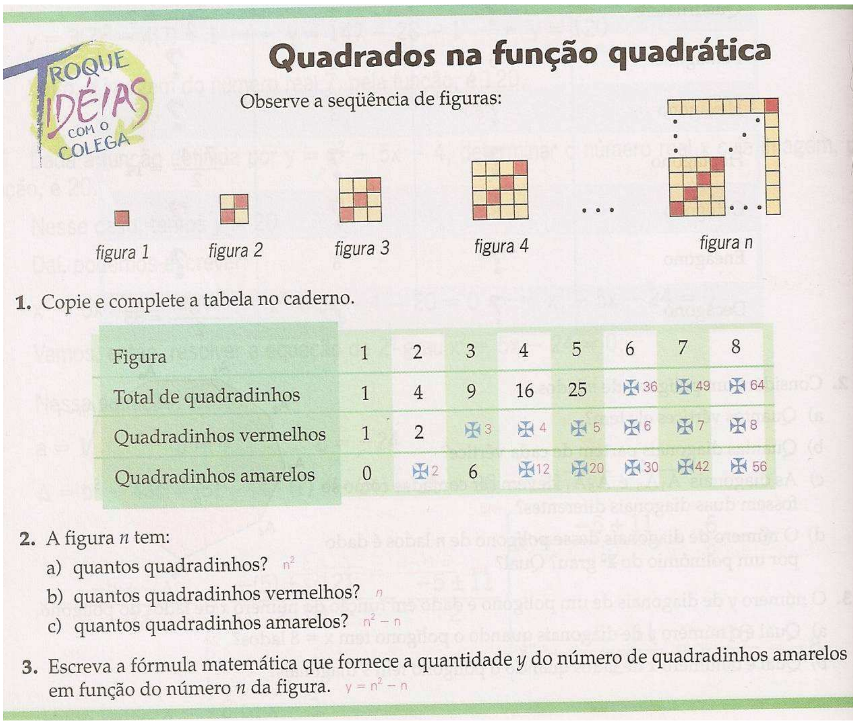
Um quociente de potências de mesma base, onde o expoente do dividendo é maior ou igual ao expoente do divisor, pode ser escrito na forma de uma única potência- conservamos a base e ***subtraímos os expoentes***

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ , com } a \neq 0 \text{ e } m \geq n$$

Importante ressaltar, que, nesse momento, não é proposto ao aluno para que ele faça a generalização. Ela é simplesmente apresentada. Sobre esse assunto, diz o Guia de Livros Didáticos – PNLD (2005), sobre a coleção, que:

> Como a obra pouco favorece a participação dos alunos, o professor deverá criar condições para que eles tenham um papel ativo na própria aprendizagem. Isso pode ser feito com o planejamento das atividades, de modo a problematizar os temas estudados. (PNLD, 2005, p.16).

A concepção estudo de relações entre grandezas aparece concentrada toda no volume da 8ª série no estudo de funções, onde há uma exploração de gráficos, problemas e análise de sinais. As duas atividades, dentre as 2770 apresentadas na coleção, em que o autor explora padrões de regularidades para construir uma linguagem algébrica aparecem nesse capítulo na seção *troque idéias com seus colegas*. Como exemplo, extraímos uma delas, a atividade da página 154, do livro da 8ª série:



TROQUE IDÉIAS COM O COLEGA

Quadrados na função quadrática

Observe a seqüência de figuras:

figura 1 figura 2 figura 3 figura 4 ... figura n

1. Copie e complete a tabela no caderno.

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8
Total de quadradinhos	1	4	9	16	25	36	49	64
Quadradinhos vermelhos	1	2	3	4	5	6	7	8
Quadradinhos amarelos	0	2	6	12	20	30	42	56

2. A figura *n* tem:

a) quantos quadradinhos? n^2

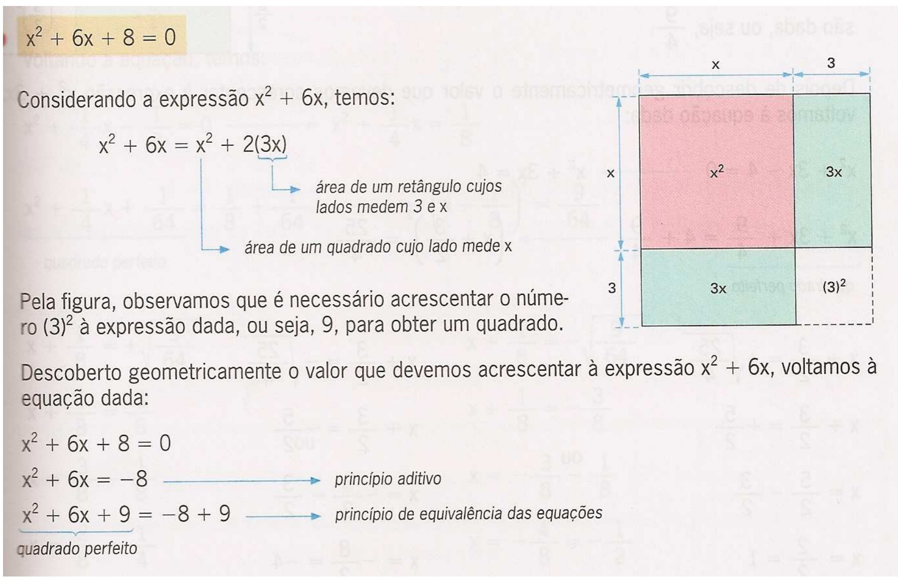
b) quantos quadradinhos vermelhos? n

c) quantos quadradinhos amarelos? $n^2 - n$

3. Escreva a fórmula matemática que fornece a quantidade *y* do número de quadradinhos amarelos em função do número *n* da figura. $y = n^2 - n$

Figura 18: Quadrados na função quadrática

De uma forma geral, a linguagem algébrica na coleção é apresentada, não construída. Portanto, a ênfase recai na utilização das letras como algo desconhecido (incógnitas), com abordagem de sua utilização como variável - praticamente isso acontece apenas no estudo de funções na 8ª série. O autor se preocupa, o tempo todo, em justificar passagens algébricas utilizando-se, para isso, a Geometria. Um exemplo desse fato pode ser encontrado no volume da 8ª série, na página 81, quando o autor explora a técnica de completar quadrados, como vemos a seguir (FIGURA 19):



$x^2 + 6x + 8 = 0$

Considerando a expressão $x^2 + 6x$, temos:

$$x^2 + 6x = \underbrace{x^2}_{\text{área de um quadrado cujo lado mede x}} + \underbrace{2(3x)}_{\text{área de um retângulo cujos lados medem 3 e x}}$$

Pela figura, observamos que é necessário acrescentar o número $(3)^2$ à expressão dada, ou seja, 9, para obter um quadrado.

Descoberto geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + 6x$, voltamos à equação dada:

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x = -8$ → princípio aditivo

$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{quadrado perfeito}} = -8 + 9$ → princípio de equivalência das equações

Figura 19: Técnica de completar quadrados

Percebemos, na obra, uma ênfase na concepção pós Matemática moderna, que estimula a utilização da Geometria para justificar passagens do transformismo algébrico: a concepção fundamentalista-analógica. Em contrapartida, não percebemos um trabalho que contemple as quatro concepções da Álgebra. Tanto que foram encontradas, por meio de nossa observação, apenas algumas em que o autor propõe a construção de uma linguagem algébrica.

4.4 – Coleção: *Matemática paratodos,* autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis

4.4.1 - Caracterização da obra

Matemática paratodos é uma coleção composta por quatro volumes, um para cada série, 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental. Todos os volumes iniciam com uma carta ao aluno(a) e outra aos pais, onde os autores argumentam sobre a escolha feita na estrutura da obra.

Os volumes são divididos em capítulos que se iniciam de forma contextualizada apresentando o item: *Conversando sobre o texto*, com o propósito de direcionar uma reflexão ou debate sobre a leitura feita. Em seguida, apresenta algumas seções, como, por exemplo: *Problemas e exercícios para sala de aula; Problemas e exercícios para casa,* proporcionando ao aluno um momento de estudo individual, sem ajuda do professor. Entre uma seção e outra de problemas, aparece *Ação*, propondo atividades com materiais auxiliares, jogos, etc. *Um toque a mais*, intercalando dois capítulos, essa seção pode conter atividades de investigação, um texto sobre a História da Matemática, uma seção de cálculo mental ou explora uso de calculadoras.

Ao final de cada volume, encontram-se, ainda: sugestões de leitura para o aluno, referências bibliográficas, problemas e exercícios complementares, *supertestes*, dicionário e *conferindo respostas*.

O manual do professor, apresentado como *Assessoria Pedagógica*, é composto por: apresentação da obra e dos autores, comentários sobre o ensino da Matemática e como a obra se insere nesse contexto, as contribuições dos PCNs, propostas para avaliação, orientação para o desenvolvimento dos conteúdos e conexões com outras áreas do conhecimento, sugestões de como melhor utilizar recursos didáticos, comentários e respostas das questões, indicação de fontes para atuação e aperfeiçoamento docente, bloco de folhas especiais para uso em atividades durante o ano.

4.4.2 - Análise da abordagem algébrica na obra

Elaborando a planilha com as atividades algébricas presentes na obra, encontramos 1330 no total. Os resultados são apresentados no gráfico seguinte:

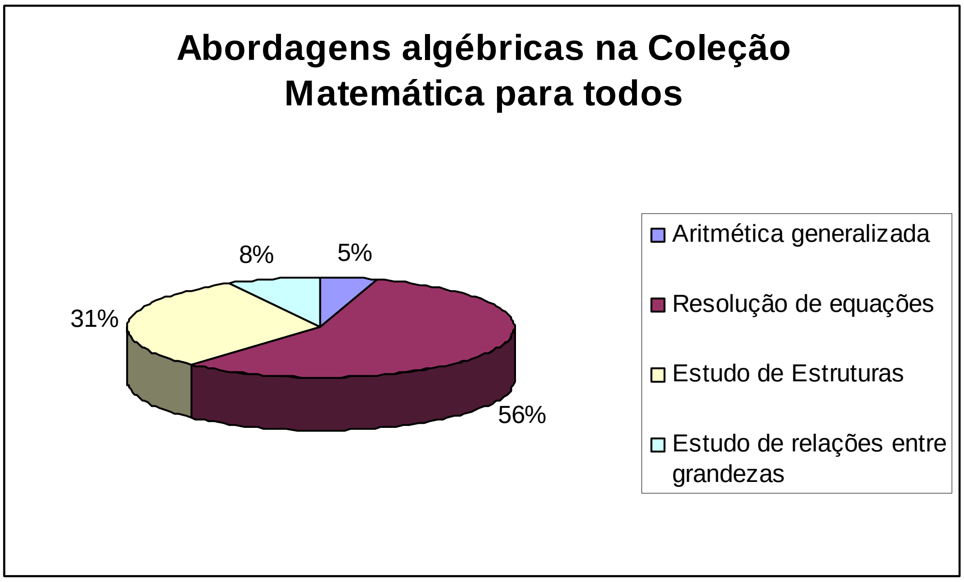


Gráfico 4: Abordagens algébricas na coleção *Matemática Paratodos*

A Coleção *Matemática paratodos* apresenta atividades que exploram as quatro concepções algébricas desde a 6ª série, apesar de ainda apresentar uma maior exploração nos campos de estudo das estruturas e resolução de equações.

Matemática paratodos é uma coleção com característica de currículo em espiral, pois não é preocupação dos autores esgotar o conteúdo em um único momento. Por vezes, uma mesma atividade é retomada com um grau de dificuldade ou propósito diferente. Para exemplificar o fato, usaremos duas atividades algébricas (denominadas 1 e 2), extraídas dos volumes da 6ª e 8 ª series, respectivamente.

Atividade 1[19]:

Veja a seqüência dos números quadrados e sua representação figurada:

. **1**

. .
. . **4**

. . .
. . . **9**
. . .

. . . .
. . . .
. . . . **16**
. . . .

A) *Copie a tabela no caderno e complete-a.* ***Dica :*** *a figura 4 tem* $4^2 = 16$ *bolas*

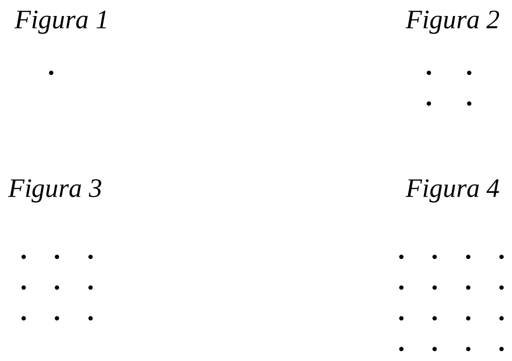
Figura	***Número de bolas***
1	
2	
3	
4	*16*
5	
6	
10	
20	

B) Nessa seqüência, indicaremos por Q_n *, o número de bolas da figura de número n. (O símbolo* Q_n *pode ser lido "que ene".) No caderno, copie e complete a fórmula* $Q_n = \square$*.*

[19] IMENES, L. M. , LELLIS , M. **Matemática Paratodos.** São Paulo . Scipione, 2002, p. 193.

Atividade 2[20]

Observe a seqüência de figuras :



Encontre a fórmula que dá a quantidade Q de bolinhas de cada figura em função de n.

O que podemos observar é uma exploração de regularidades de padrões por meio de uma investigação na primeira atividade, onde o aluno é conduzido, por meio de operações aritméticas, a efetuar uma generalização; na segunda, com um grau de abstração maior, o aluno é chamado a expressar um Q em função de n. Em ambas as atividades, percebemos uma exploração das quatro concepções da Álgebra concomitantemente.

Quando o aluno é convidado a expressar uma fórmula Q em função de “n”, ele, além de estabelecer uma relação entre grandezas, teve que identificar uma generalização a partir da observação de regularidades. Para chegar nessa regularidade, ele teve que efetuar cálculos algébricos completando uma tabela e se ao final da atividade o professor quiser explorar a resolução de equações, poderá questionar, por exemplo, qual seria a figura que teria 144 bolinhas?, o aluno seria conduzido a resolver uma equação.

Outra situação que podemos citar que mostra a não preocupação da coleção em esgotar o tema em um único capítulo, diz respeito ao conteúdo *Equações de 2º grau*, que no volume da 8ª série aparece em 3 momentos distintos: no capítulo 3, quando é feita uma introdução, onde o aluno utiliza-se da fatoração para resolver as equações; no capítulo 6, o conteúdo é retomado, com a demonstração da fórmula de Bháskara; e no capítulo 14 há uma exploração de equações fracionárias.

Diz o Guia dos Livros Didáticos - PNLD (2005) sobre a obra:

---

[20] IMENES, L. M. , LELLIS , M. **Matemática Paratodos.** São Paulo . Scipione, 2002, p. 183.

> Em todos os volumes observa-se uma distribuição dos conteúdos equilibrada. Os assuntos são progressivamente retomados das séries com diversos enfoques, configurando-se numa boa proposta de organização do currículo em espiral. Essa abordagem acompanha a experiência e o desenvolvimento cognitivo do aluno, favorecendo-lhe a compreensão dos conteúdos. (PNLD, 2005, p.150).

Fazendo uma análise específica do campo algébrico, podemos perceber uma organização desde o volume da 5ª série, proporcionando ao aluno desenvolver esse conteúdo em todas as suas dimensões.

A observação de regularidades oportuniza o aluno uma primeira experiência na escrita de expressões gerais, utilizando-se de recursos aritméticos. Cerca de 45% das atividades propostas no volume da 5ª série contemplam essa concepção. A partir da 6ª, a Álgebra é tratada em todas as suas perspectivas usando, por muitas vezes, como suporte, representações geométricas.

A coleção caracteriza-se, no que diz respeito à Álgebra, por não apresentá-la como um amontoado de símbolos e cálculos, que, para os alunos, não faz o menor sentido. O número de atividades algébricas presentes em cada volume é muito menor que na maioria dos livros didáticos, o que não significa, porém, que isso venha a prejudicar o aluno, já que elas buscam promover uma compreensão do conteúdo procuram levar o aluno a ser ativo no processo ensino aprendizagem. Segundo o Guia de Livros Didáticos - PNLD (2005):

> Na metodologia de ensino aprendizagem adotada, atribuiu-se papel central ao aluno, que é posto em interação permanente com o texto e solicitado responder a perguntas, a tirar conclusões, a confrontar soluções ou a verificar regularidades. As atividades favorecem o desenvolvimento dos raciocínios indutivo e dedutivo, com pouca ênfase na memorização de fórmulas prontas. (PNLD, 2005, p. 152-153).

Vejamos algumas atividades encontradas nessa coleção:

Atividade 1[21]:

Copie as tabelas no caderno e complete-as:

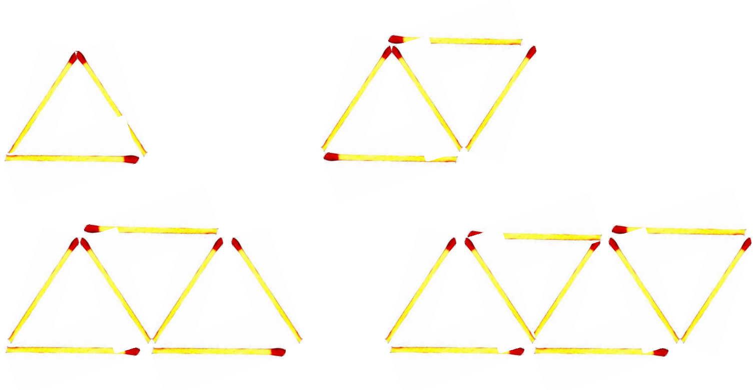
Número	*Metade*
6	*3*
9	*4,5*
24	/////////
25	/////////
x	*X : 2*

Número	*Dobro*
4	*8*
7,2	////////
19	/////////
131	/////////
X	/////////

Número	*Triplo*
4	*12*
5,5	/////////
17	/////////
133	/////////
X	/////////

Atividade 2[22]:

Com 3 palitos de fósforo, faço um triângulo. Depois, acrescentando sempre 2 palitos, vou obtendo novos triângulos. Veja:



...

A) Copie a tabela no caderno e complete-a

Número de triângulos	*Número de palitos*
1	*3*
2	*5*
3	///////////////
4	///////////////
10	///////////////
15	///////////////
20	////////////////

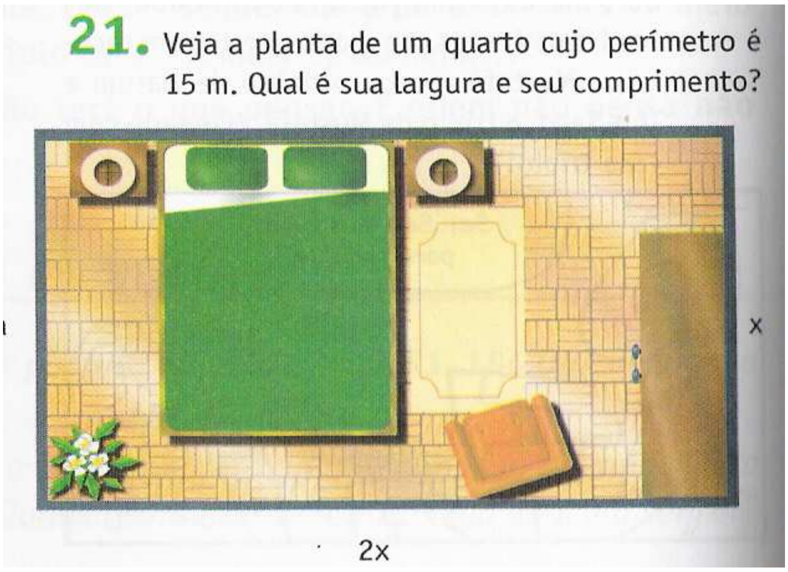
[21] IMENES, L. M. , LELLIS , M. **Matemática Paratodos.** São Paulo . Scipione, 2002, p. 219.
[22] IMENES, L. M. , LELLIS , M. **Matemática Paratodos.** São Paulo . Scipione, 2002, p.195.

B) No caderno, copie e complete a seguinte sentença, que se refere à figura deste exercício:

O número de palitos é igual ao número de triângulos.

B) Se p representa o número de palitos e t, o número de triângulos, qual é a fórmula que relaciona p com t?

Atividade 3[23]:



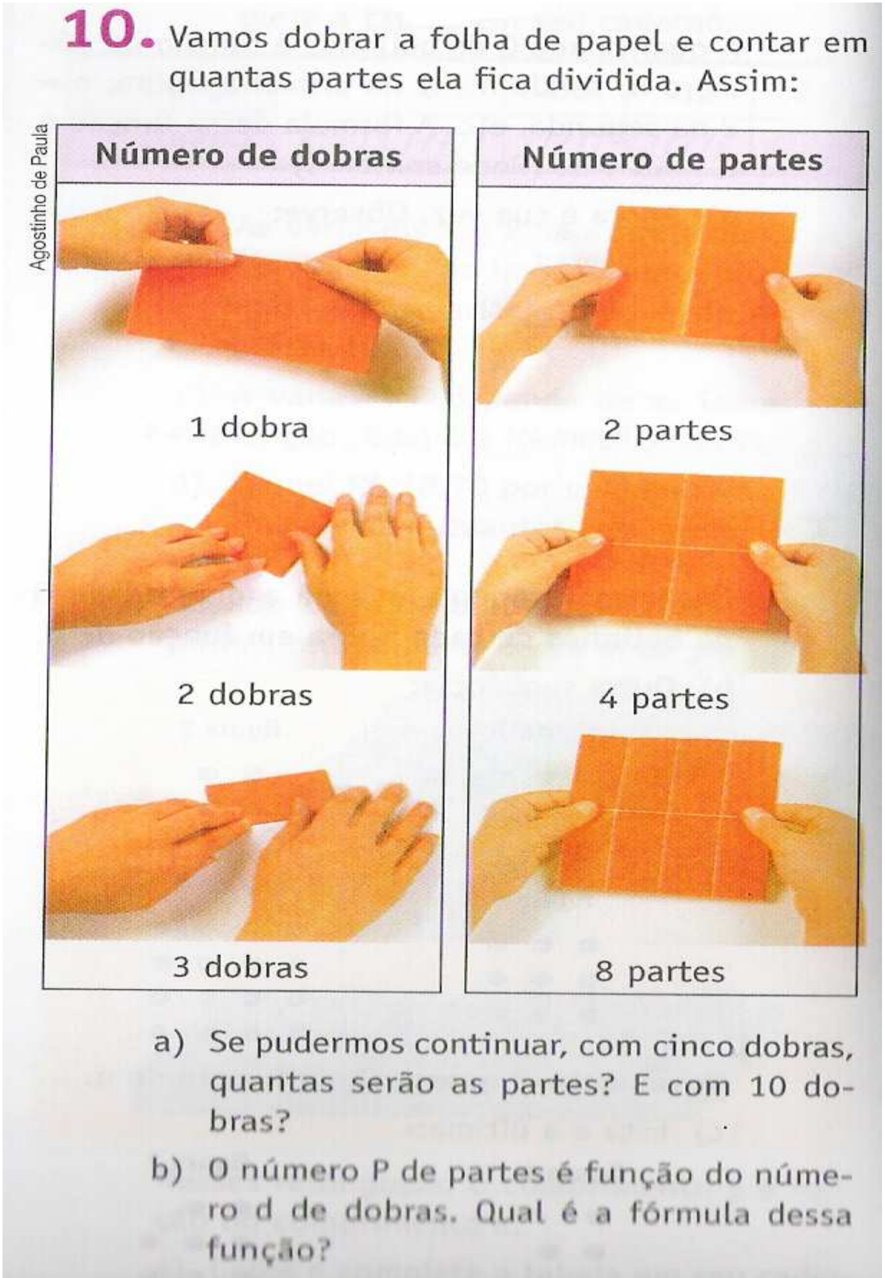
Atividade 4[24]:

Simplifique as frações em seu caderno :

A) $\frac{5x^2+15x}{5x}$ *B)* $\frac{6x^2y+12xy}{x+2}$

Atividade 5[25]:

[23] IMENES, L. M. , LELLIS , M. **Matemática Paratodos.** São Paulo . Scipione, 2002, 6ª série, p. 230.
[24] IMENES, L. M. , LELLIS , M. **Matemática Paratodos.** São Paulo . Scipione, 2002, 7ª série, p.193.
[25] IMENES, L. M. , LELLIS , M. **Matemática Paratodos.** São Paulo . Scipione, 2002, 8ª série, p.184.



10. Vamos dobrar a folha de papel e contar em quantas partes ela fica dividida. Assim:

Número de dobras	Número de partes
1 dobra	2 partes
2 dobras	4 partes
3 dobras	8 partes

Agostinho de Paula

a) Se pudermos continuar, com cinco dobras, quantas serão as partes? E com 10 dobras?

b) O número P de partes é função do número d de dobras. Qual é a fórmula dessa função?

Com esses exemplos, podemos perceber a diversidade de atividades algébricas contempladas pela coleção, ou seja, a “letra” é trabalhada em todas as suas dimensões desde a 5ª série. O autor demonstra uma preocupação como o desenvolvimento do pensamento algébrico em detrimento dos transformismos algébricos.

4.5 – Coleção: *Matemática hoje é feita assim*, autor Antonio José Lopes Bigode

4.5.1 - Caracterização da obra

Matemática hoje é feita assim é uma coleção composta por quatro volumes, uma para cada série, de 5ª a 8ª séries ou 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental . A coleção foi aprovada pelo MEC por meio do Guia de Livros didáticos - PNLD de 2008. Cada volume é dividido em capítulos e cada capítulo em tópicos. Os conteúdos são apresentados de forma intercalada e o autor busca, em cada volume, contemplar todos os campos da Matemática.

Os volumes iniciam com uma pequena biografia do autor. Em seguida, é feita uma apresentação da obra por meio de um texto denominado “Recado”.

Os capítulos são apresentados, na sua maioria, por um texto *Hoje tem Matemática,* onde são anunciados os assuntos a serem abordados. No final de cada capítulo, encontram-se as seções: *Retomando*, que propõe atividades para fixação de conceitos ou de procedimentos; *Revistinha*, com textos de História da Matemática, curiosidades, desafios, atividades práticas, entre outros.

No final de cada volume é encontrado um glossário; uma seção *Para saber e gostar mais de Matemática*, que contém uma lista de obras literárias e coleções de para-didáticos que podem enriquecer o trabalho; respostas para questões apresentadas em cada capítulo e as referências bibliográficas.

A coleção consta, ainda, de: “Projeto Pedagógico”, com orientações para o professor. O autor não utiliza da denominação “manual”, argumentando que:

> Os dicionários atribuem à palavra **manual** os seguintes significados: “livro que contém noções essenciais acerca de uma ciência, de uma técnica, etc” ou ainda, “livro pequeno que contém o resumo de alguma matéria”. [...] Este conjunto de significados não consegue dar conta dos propósitos deste apêndice, pois, em nossa concepção, o “manual didático do professor” deve ir além de um receituário sobre o livro texto. (BIGODE, 2006, p.5). (Grifo do autor).

Na primeira parte, o autor caracteriza a obra, pontuando objetivos gerais e discutindo questões atuais do ensino da Matemática, tais como: resolução de problemas, competências de cálculo, a relação com outras áreas do conhecimento, abordagem histórica, etc. A segunda parte, que o autor denomina *gestão de sala de aula*, traz algumas orientações para uma melhor utilização do material. Aborda: o uso do caderno, a lição de casa, as atividades em grupo, o laboratório, os projetos, o estudo de meio, os temas transversais, os recursos didáticos, as calculadoras, novas ferramentas e a avaliação. Em seguida, são feitas algumas considerações sobre cada capítulo, com sugestões de atividades suplementares e orientações didáticas. Para concluir, traz uma bibliografia relacionada à Educação Matemática.

4.5.2 - Análise da abordagem algébrica na obra

O gráfico abaixo mostra o resultado da pesquisa feita na distribuição das 1500 atividades algébricas encontradas na obra.

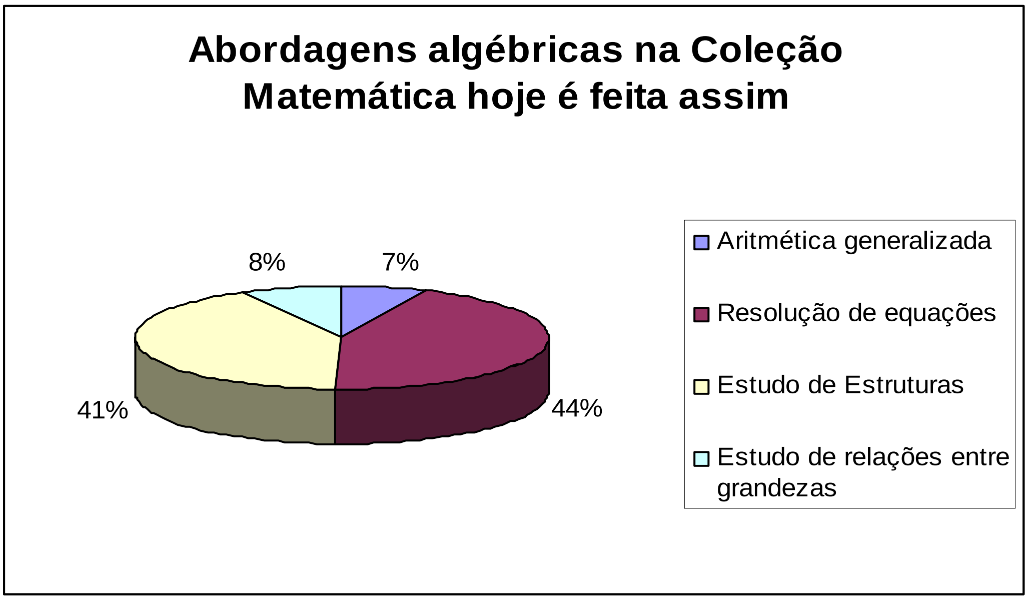
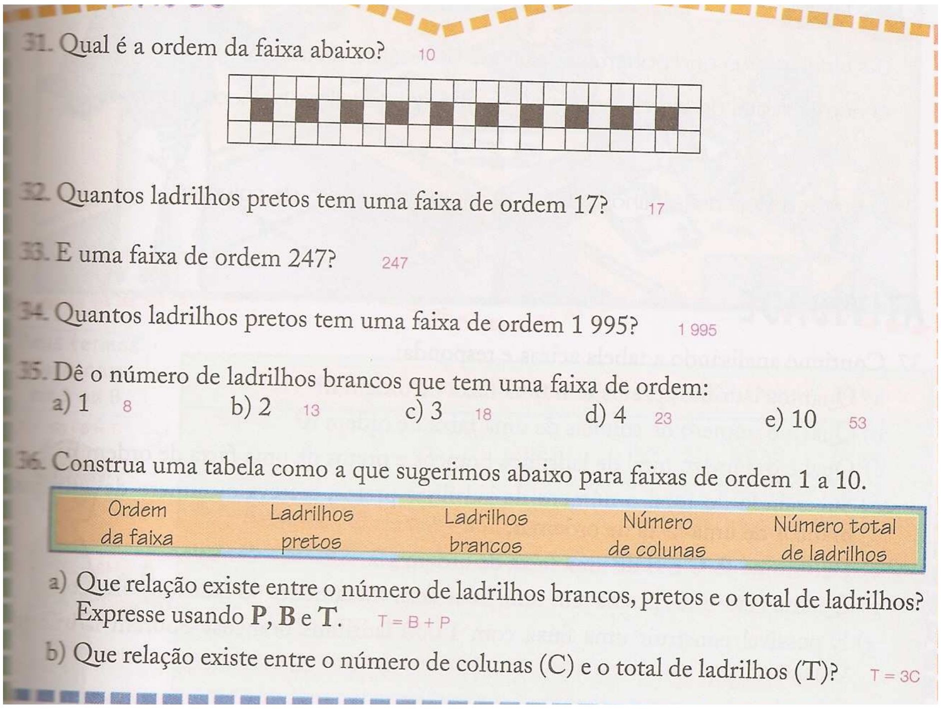


Gráfico 5: Abordagens algébricas na coleção *Matemática hoje é feita assim*

Com relação à Álgebra, os vários papéis do conhecimento algébrico são contemplados, apesar de a ênfase maior recair sobre o estudo das estruturas e procedimentos para resolução de equações.

Muitas atividades abordadas pelo autor contemplam mais de uma concepção algébrica, proporcionando ao aluno que ele construa, gradativamente, a linguagem algébrica, vivenciando experiências que tratam as “letras” como algo desconhecido (incógnita) ou como algo que muda de valor em conformidade com a situação (variável).

Para exemplificar, utilizamos a atividade presente no volume da 7ª série, página 123 (FIGURA 20):



31. Qual é a ordem da faixa abaixo? 10

32. Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem 17? 17

33. E uma faixa de ordem 247? 247

34. Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem 1 995? 1 995

35. Dê o número de ladrilhos brancos que tem uma faixa de ordem:
a) 1 8 b) 2 13 c) 3 18 d) 4 23 e) 10 53

36. Construa uma tabela como a que sugerimos abaixo para faixas de ordem 1 a 10.

Ordem da faixa	Ladrilhos pretos	Ladrilhos brancos	Número de colunas	Número total de ladrilhos

a) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos? Expresse usando **P**, **B** e **T**. T = B + P

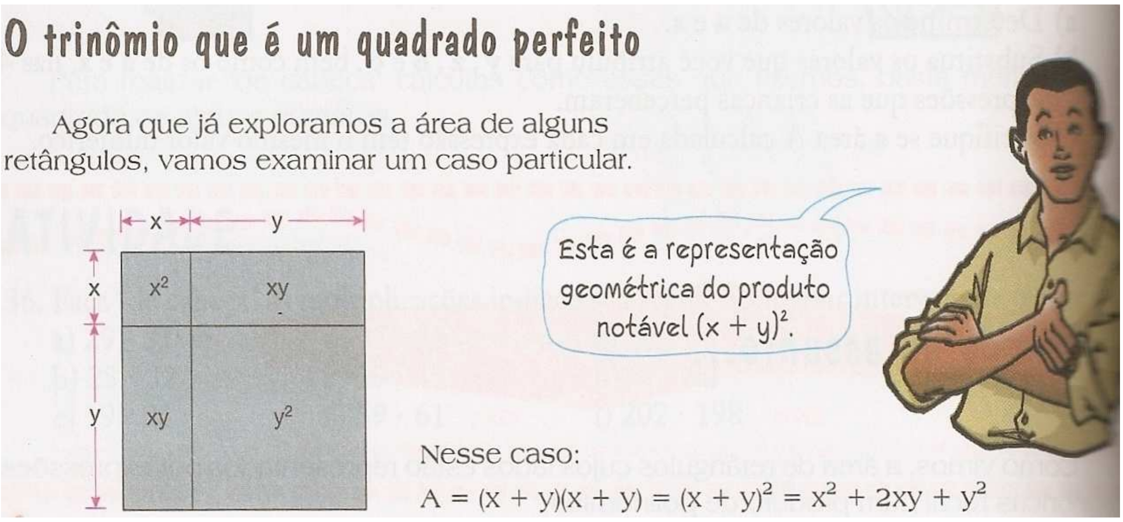
b) Que relação existe entre o número de colunas (C) e o total de ladrilhos (T)? T = 3C

Figura 20: Ladrilhos

Esse tipo de atividade, além de possibilitar ao professor identificar em que nível de pensamento algébrico está o aluno, proporciona a esse aluno experiências com padrões abordando as quatro concepções da Álgebra. O aluno é conduzido a estabelecer uma generalização a partir de uma relação entre duas ou três grandezas e, ao mesmo tempo, alguns exercícios o conduzirão a resolver alguns cálculos e/ou algumas equações algébricas.

São realizadas conexões entre a Álgebra e a Geometria recorrendo-se a figuras geométricas para justificar o cálculo algébrico, como podemos observar na atividade abaixo[26]:

[26] BIGODE, A. J. L., **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo. FTD, 2006, 7ª série, p.182.



O trinômio que é um quadrado perfeito

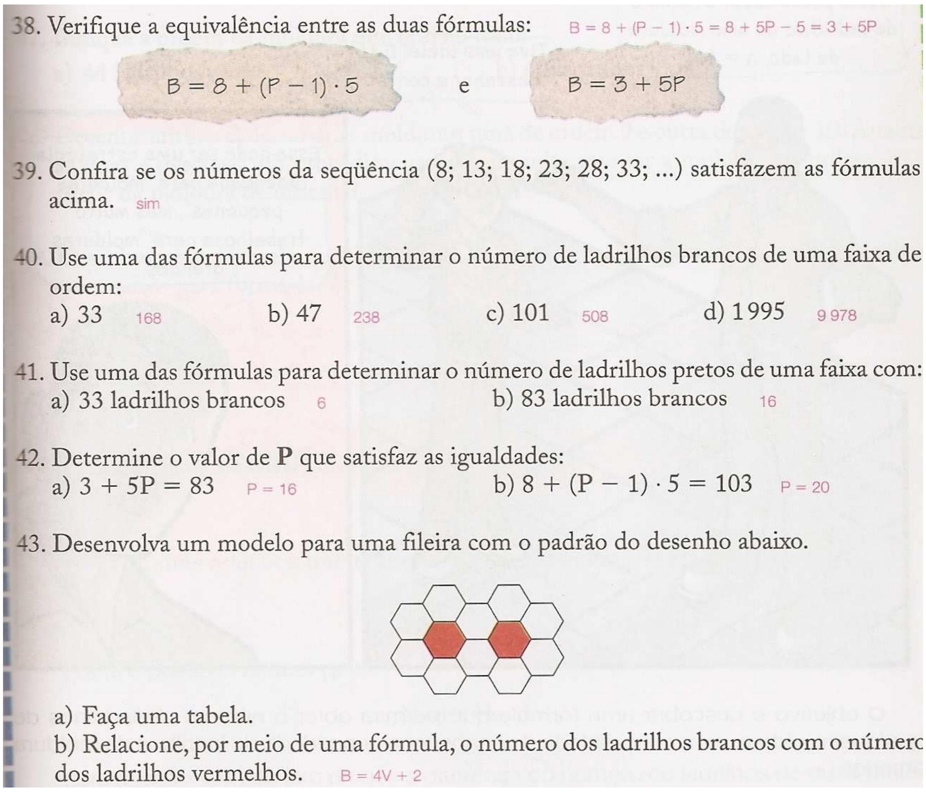
Agora que já exploramos a área de alguns retângulos, vamos examinar um caso particular.

Nesse caso:

$A = (x + y)(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Figura 21: Trinômio do quadrado perfeito

O autor explora, no volume da 7ª série, capítulo 7, atividades com padrões que preparam o aluno para o estudo das relações entre grandezas, denominadas “*Varia variável, varia*”. Nessas atividades são contempladas as construções de padrões com palitos, com mosaicos, ladrilhos, que proporcionam ao educando uma construção do conceito de variável, como podemos verificar na atividade abaixo[27]:



38. Verifique a equivalência entre as duas fórmulas: $B = 8 + (P - 1) \cdot 5 = 8 + 5P - 5 = 3 + 5P$

$B = 8 + (P - 1) \cdot 5$ e $B = 3 + 5P$

39. Confira se os números da seqüência (8; 13; 18; 23; 28; 33; ...) satisfazem as fórmulas acima. sim

40. Use uma das fórmulas para determinar o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem:
a) 33 168 b) 47 238 c) 101 508 d) 1 995 9 978

41. Use uma das fórmulas para determinar o número de ladrilhos pretos de uma faixa com:
a) 33 ladrilhos brancos 6 b) 83 ladrilhos brancos 16

42. Determine o valor de **P** que satisfaz as igualdades:
a) $3 + 5P = 83$ $P = 16$ b) $8 + (P - 1) \cdot 5 = 103$ $P = 20$

43. Desenvolva um modelo para uma fileira com o padrão do desenho abaixo.

a) Faça uma tabela.
b) Relacione, por meio de uma fórmula, o número dos ladrilhos brancos com o número dos ladrilhos vermelhos. $B = 4V + 2$

Figura 22: Ladrilhos II

[27] BIGODE, A. J. L., **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo. FTD, 2006, 7ª série, p.127.

Em atividades com essas, podemos perceber o desenvolvimento de vários processos matemáticos: observação, comunicação, argumentação, generalização, validação etc. Bem como a exploração de várias concepções da Álgebra: aritmética generalizada, estudo das estruturas, resolução de equações e relação entre grandezas.

O autor explora o uso de atividades diversificadas com padrões de regularidades, dando ênfase a uma abordagem metodológica que pode preparar o educando para uma compreensão do conceito de variáveis dependentes desde a quinta série, como verificado abaixo nos seguintes exercícios:

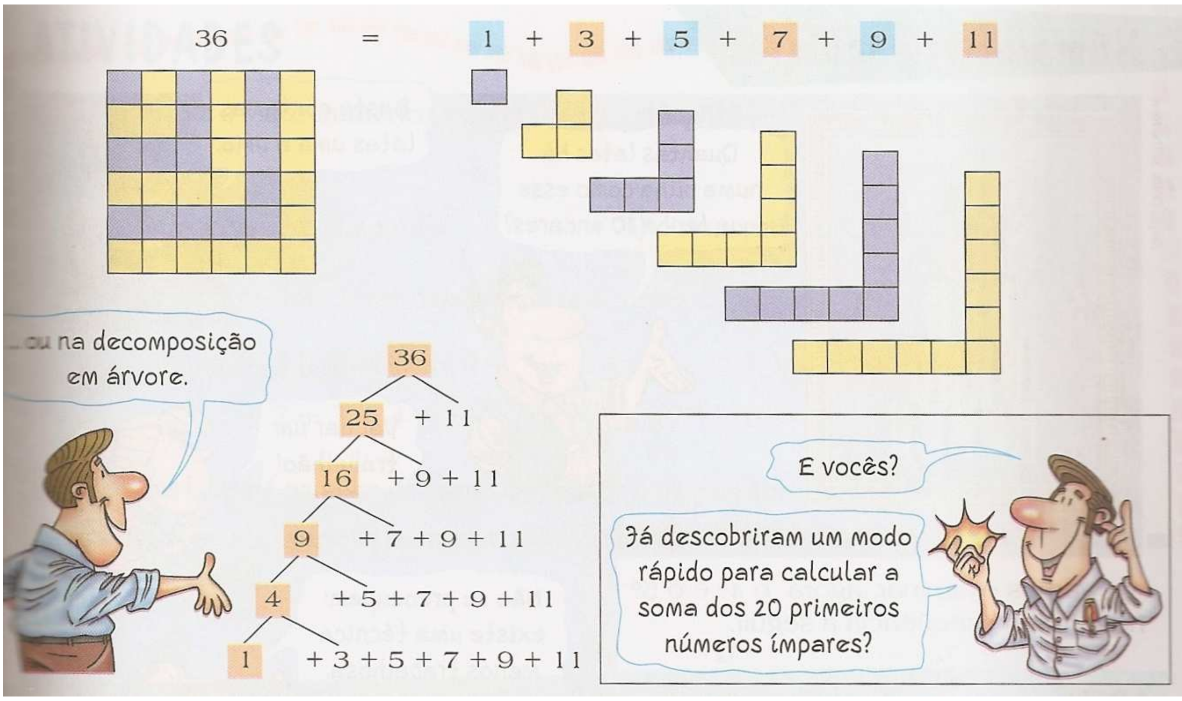
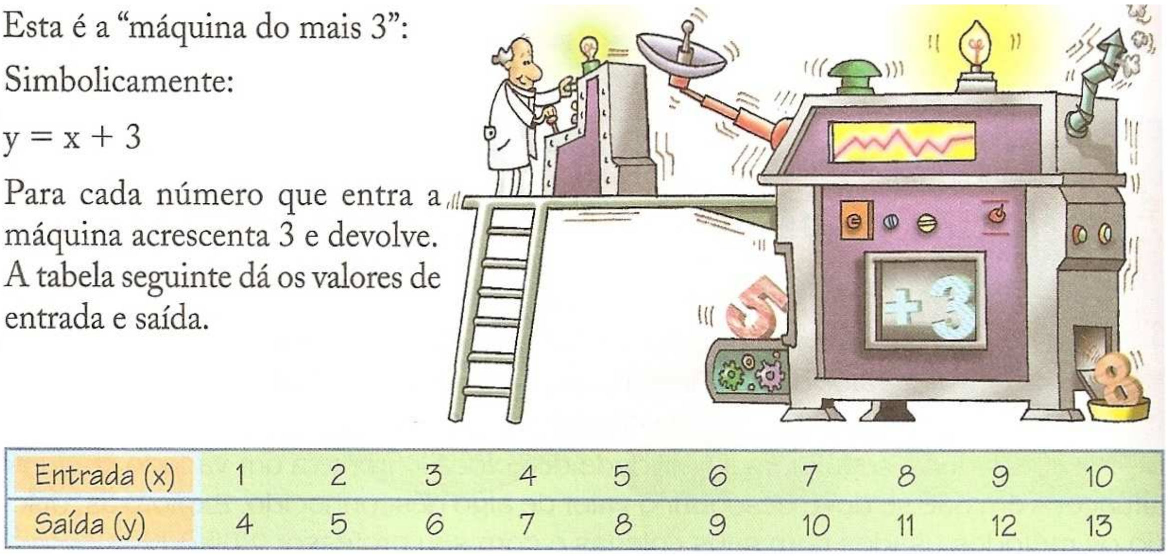


Figura 23: seqüência de números ímpares[28]

[28] BIGODE, A. J. L., **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo. FTD, 2006, 5ª série, p.95.


Esta é a "máquina do mais 3":
Simbolicamente:
y = x + 3
Para cada número que entra a máquina acrescenta 3 e devolve. A tabela seguinte dá os valores de entrada e saída.

Entrada (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Saída (y)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Figura 24: Máquina do mais 3[29]

Quanto à exploração de padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico, dizem os *Standarts* (NCTM, 2000) que:

> [...] estudantes das séries intermediárias deveriam aprender Álgebra tanto como um grupo de conceitos e competências ligados à representação de relações quantitativas quanto como um estilo de pensamento matemático para a formalização de padrões, funções e generalizações. (NCTM, 2000, p.221)

Sobre esse assunto, o documento diz, ainda, que "o estudo de padrões e relações nas séries intermediárias deveria focar-se em padrões que levam a funções lineares, o que acontece quando há uma taxa constante de mudança". (NCTM, 2000, p.222).

Em toda a obra, pudemos observar a valorização de conhecimentos extra-escolares dos alunos. A interação entre os educandos, bem como o desenvolvimento de habilidades como: observação, exploração e investigação, argumentação, relação, visualização, comunicação oral e escrita são estimulados.

Por meio dessa análise, pudemos, então, perceber uma abordagem de atividades que exploram a utilização de padrões de regularidades na construção do pensamento algébrico em três das coleções analisadas. Os autores das coleções Dante (2002), Imenes e Lellis (2002) e Bigode (2006) apresentam uma perspectiva do Ensino da Álgebra diferente do que é visto nas

---

[29] BIGODE, A. J. L., **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo. FTD, 2006, 6ª série, p. 178.

outras duas coleções estudadas. Essas três coleções possibilitam ao aluno uma compreensão da linguagem algébrica, bem como a utilização da "letra" abordando as concepções da Álgebra, como: aritmética generalizada, resolução de equações, estudo de estruturas e de relações entre grandezas, sem deixar de lado aspectos que envolvam o "transformismo algébrico". Em contrapartida, percebemos nas coleções Bianchini (2006) e Castrucci, Giovanni e Júnior (2002) uma concepção de ensino da Álgebra baseado em estudo de estruturas e resolução de equações. Na maioria das vezes, ela é apresentada seguida de algumas regras e depois fixadas por meio de exercícios e/ou resolução de problemas.

O estudo feito sobre as abordagens algébricas presentes nos livros didáticos e a tendência ao estudo da Álgebra baseado no desenvolvimento do pensamento algébrico, referenciado em nosso capítulo 3, nos conduziu à elaboração de um caderno de atividades (CA), que, a partir de padrões de regularidades, leva o aluno à elaboração de uma linguagem simbólica. A aplicação dessas atividades teve um caráter exploratório-investigativo e os resultados dessa experiência, com três delas, são apresentados no capítulo seguinte.

5 A EXPERIÊNCIA E A ANÁLISE DOS DADOS

No início do segundo semestre de 2005, o primeiro conteúdo que abordaríamos na turma do 2° ano do Ensino Médio do CBSCM era Binômio de Newton e, logo que iniciamos o trabalho, vislumbramos a possibilidade de um trabalho diferenciado onde o processo de abordagem do conteúdo se daria na contramão de nosso material didático. Nossa proposta era que o aluno construísse um Triângulo de Pascal e, a partir de suas análises e observações, identificasse regularidades e, por meio delas, que o educando pudesse apontar as propriedades envolvidas no triângulo como: binomiais complementares, a relação de Stiffel, o somatório dos valores envolvidos em cada linha, entre outras. Uma atividade com esta proposta seria indicada para uma investigação sobre abordagem da Álgebra a partir de padrões de regularidades. Apesar desse tipo de trabalho já fazer parte de nosso cotidiano, nunca nos preocupamos em sistematizar sua aplicação.

Também em julho de 2005, nossa professora do mestrado Maria Clara Rezende Frota, ministrando a disciplina de Ensino da Matemática na Educação Básica, nos solicitou que durante o semestre aplicássemos alguma atividade com o propósito de contemplar um ou mais processos matemáticos e fazer um registro detalhado sobre a aplicação. Esse trabalho, depois, culminou em um pôster por nós apresentado no Seminário de Matemática, organizado pela PUC Minas, em novembro de 2005.

A partir daí, fomos motivados a retomar a aplicação daqueles resultados, analisá-los, e redimensioná-los para a delineação de nosso projeto de pesquisa, agora apresentado. Essa atividade construída para aquele trabalho serviu como primeira atividade de um total das três aplicadas para o desenvolvimento dessa pesquisa.

A aplicação dessa atividade teve uma perspectiva de investigação matemática, proporcionando ao aluno o desenvolvimento de alguns processos matemáticos, especialmente a intuição e generalização.

Dois anos se passaram. Nesse tempo todo, estimulada pelo resultado positivo da atividade Triângulo de Pascal, pela inquietação diante de tantos problemas no ensino da

Álgebra e pelo prazer em elaborar e trabalhar com atividades que proporcionam o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de padrões, continuei aplicando atividades com esse propósito nas turmas em que lecionava. Turmas da 8ª série do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, do Colégio Berlaar Sagrado Coração de Maria, em Pará de Minas.

Foto 1: Aplicação da atividade: Diagonais - 8ª série, em outubro de 2005

Foto 2: Aplicação da atividade: Torre de Hanói - 8ª série em março de 2008

Essas atividades foram todas catalogadas em nosso CA. A aplicação dessas atividades em sala de aula teve um caráter exploratório-investigativo. Pois, em todas, o aluno, inicialmente, é apresentado a uma seqüência que pode ser aritmética, geométrica, figurativa, numérico-figurativa, numérico-geométrica, algébrica, ou mesmo uma seqüência desenvolvida a partir de um jogo. Em seguida, são propostas algumas questões com níveis de dificuldades crescentes. A princípio, o aluno é convidado a responder questões nas quais ele utilizará, para resolvê-las, ferramentas concretas, que pode ser um desenho, uma construção ou mesmo uma simples contagem. Posteriormente, são propostas questões nas quais o aluno será induzido a buscar uma forma mais fácil e rápida de solucionar o problema. E, por último, ele é convidado a estabelecer uma generalização para aquele fato e verificar sua veracidade. Essa trajetória é justamente o que Ponte, Brocado e Oliveira (2006) utilizam para definir e defender a utilização de atividades investigativas em sala de aula. Segundo esses autores:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (PONTE, BROCADO E OLIVEIRA, 2006, p.23)

Conforme descrito anteriormente, a proposta é que o aluno vislumbre, com atividades simples, o processo de criação da Matemática. E esse trabalho se dá numa constante investigação. Para melhor esclarecer o que aqui chamaremos de atividades exploratório-investigativas, faremos uma categorização das atividades matemáticas:

5.1 Atividades Matemáticas

Conforme já verificamos, o ensino aprendizagem da Matemática está diretamente relacionado ao tipo de atividade matemática que o professor propõe em sala de aula. Esse tipo de tarefa, por sua vez, está diretamente ligado aos objetivos propostos no desenvolvimento de determinado conteúdo. Por exemplo: quando o professor em uma turma de 7ª série tem como objetivo que os alunos memorizem regras ou propriedades ligadas ao estudo de polinômios, ele normalmente se reporta à atividade de resolução de exercícios. Quando seu objetivo em uma turma de 8ª série é que os alunos imbuídos pelo conhecimento das técnicas de resolução de equações do 2º grau saibam aplicá-las em problemas, provavelmente, ele irá fazer uso da atividade de resolução de problemas. Há, ainda, situações em que o objetivo do professor é que o aluno, diante de uma situação, elabore conclusões que facilitem um trabalho matemático. Quando, por exemplo, em uma turma de 2º ano do Ensino Médio, ao introduzir o conteúdo de progressões aritméticas, proponha ao aluno uma forma mais simples de determinar o 100º termo da seqüência formada pelos números (1, 4, 7, 10, ...). Nesse momento, a melhor abordagem seria, provavelmente, uma atividade investigativa. O quadro a seguir ilustra a diferenciação existente nos termos aplicados nessa pesquisa: exercício, problema, investigação.

Exercício	Problema	Investigação
Resolva: A) $2x - 1 = 3$ B) $x^2 - 3x + 2 = 0$	A área de um retângulo é 54 dm^2. Aumentando-se uma unidade na altura e diminuindo-se uma unidade na base, a área aumenta 2 dm^2. Qual o perímetro de retângulo?	Escreva o resultado dos seguintes produtos: 8 x 9 = ... 8 x 99 = ... 8 x 999 = ... 8 x 9999 = ... Você encontrou alguma regularidade para os resultados ? Determine, agora, o produto de 8 por 999.999.999. Conseguiu comprovar a regularidade?

Quadro 8: Atividades matemáticas

Ainda nesse sentido, Polya (1995) formula a diferença entre exercício e resolução de problemas. Um problema, para o autor, é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permite a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. Exercícios e problemas têm uma coisa em comum: em ambos, o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Já numa investigação, as coisas não são bem assim. Os pontos de partida e chegada podem não ser os mesmos. Investigar, então, nada mais é do que compreender, conhecer, encontrar soluções para problemas com os quais nos deparamos, porém, sem uma fórmula a *priori*, sem um caminho pré-determinado.

Para Ponte, Brocado e Oliveira (2006):

> [...] investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso.Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado. (PONTE, BROCADO E OLIVEIRA, 2006, p.9).

Na perspectiva de Ponte (2005), uma atividade tem quatro características básicas: o seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para sua resolução. Para esse pesquisador, conjugando as duas primeiras (grau de dificuldade e estrutura), obtemos quatro tipos básicos de tarefa, que podemos visualizar na figura abaixo:

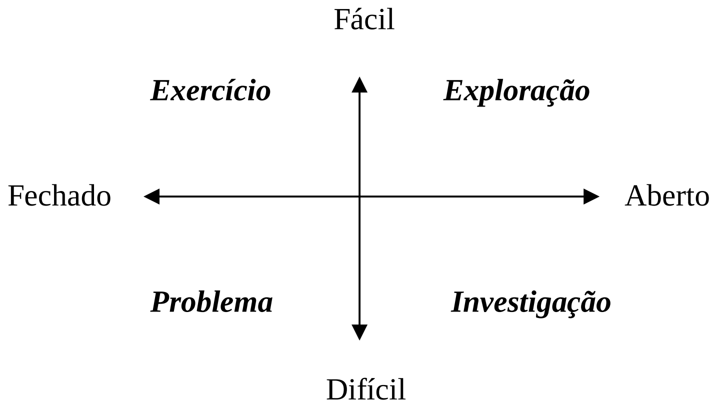


Figura 25: Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura[30]

Pelo esquema temos, então, que:

- Exercícios são tarefas relativamente fáceis e com uma estrutura fechada.
- Problemas são tarefas difíceis com uma estrutura também fechada.

---

[30] Idem ao esquema apresentado por PONTE, João Pedro Mendes da. **Investigar, ensinar e aprender**. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ponte/artigos-por-temas.htm. Acesso em: 05 jun. 2008.

- Investigações têm um grau de dificuldade maior, porém, apresentam uma estrutura aberta.
- As tarefas de exploração são fáceis e apresentam, também, uma estrutura aberta.

Essa caracterização da atividade como uma estrutura aberta se deve ao fato de que o professor nem sempre consegue prevê o produto final da atividade. Para Ponte (2005), nem sempre é muito clara a distinção entre tarefas investigativas e de exploração, pois o grau de dificuldade da tarefa não é inerente ao grupo de alunos que a desenvolverão.

As atividades selecionadas por nós e apresentadas em nosso caderno de atividades apresentam uma estrutura aberta, porém, não conseguimos, a *priori,* determinar seu grau de dificuldade. Logo, elas apresentam características de atividades de exploração (se consideradas fáceis) e de investigação (quando consideradas com um maior grau de dificuldade). Diante disso, apropriaremos de uma expressão já utilizada por Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2006), quando argumentam sobre as potencialidades dessas atividades no desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno chamando-as: exploratório-investigativas. Para esses autores:

> A nossa hipótese é que a realização de atividades exploratório-investigativas que visam levar os alunos a *pensar genericamente, perceber regularidades e explicar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis,...* (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, p. 87) – pode ser uma alternativa poderosa para o desenvolvimento inter-relacionado do pensamento e da linguagem algébrica do aluno. (FIORENTINI, FERNANDES E CRISTÓVÃO, 2006, p.5).

Apesar de nosso CA ser composto por 31 diferentes experiências que contemplam a exploração de padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico, decidimos que, para essa pesquisa, utilizaríamos o relato da aplicação de três atividades com perspectivas diferenciadas para atender nosso propósito de mostrar que proporcionar aos alunos experiências com padrões favorece a capacidade de generalização e a construção da linguagem algébrica. O relato da aplicação dessas atividades é encontrado a seguir:

5.2 Relatos das atividades

5.2.1 Atividade I – Triângulo de Pascal

O primeiro encontro para iniciarmos a aplicação da atividade (FIGURA 26) contou com a presença dos 31 alunos da turma do 2º ano do Ensino Médio. Inicialmente, orientamos a turma sobre a realização da tarefa para que tudo acontecesse da melhor forma. Formamos os grupos que foram previamente divididos e entregamos para cada grupo o roteiro para o desenvolvimento da primeira parte da atividade. O nosso objetivo com essa atividade era que os alunos, por meio de observações na formação do Triângulo de Pascal, formulassem e testassem conjecturas acerca das propriedades principais abordadas no conteúdo do 2° ano do Ensino Médio.

Atividade : Triângulo de Pascal

Etapas :

- *Orientação*
- *Discussão em grupo*
- *Elaboração de um relatório para entregar com todos os registros*
- *Apresentação do trabalho à turma*
- *Conclusão do trabalho*

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}$$

1) Construa um triângulo , usando apenas os resultados dos binomiais encontrados.

2) Observe com muita atenção , os resultados encontrados , e faça um relatório, detalhando todas as observações feitas pelo grupo.

3) As observações feitas pelo grupo, têm caráter que estabelecem alguma generalização, simetria ou propriedade ?

4) Identifique-as , fazendo uma justificativa.

5) Essas observações, são passíveis de demonstrações que comprovem matematicamente sua veracidade?

6) Discuta , com o grupo e tente efetuar essas demonstrações , usando corretamente a linguagem matemática.

Figura 26: Atividade Triângulo de Pascal

No primeiro item, foi solicitada aos alunos a construção do triângulo de Pascal, usando o resultado dos binomiais encontrados. Os alunos não apresentaram nenhuma dúvida quanto à realização dessa atividade, visto que já sabiam calcular binomiais usando combinação simples e tinham algum conhecimento do triângulo estudado no primeiro ano na disciplina de biologia.

Na segunda etapa, “discussão”, onde os grupos deveriam observar, analisar e discutir com seus colegas todas as coisas que julgassem importantes ou mesmo interessantes dentro do triângulo de Pascal, a sala ficou um pouco tumultuada, pois todos queriam falar de suas descobertas. Cada descoberta feita pelo aluno era um momento de glória, principalmente quando vinha daqueles cinqüenta por cento que não apresentavam tanta facilidade em lidar com o conhecimento matemático. Esse foi o momento em que sentimos os alunos mais motivados, pela alegria pela descoberta e a vontade de mostrar para o outro o que haviam encontrado.

Durante esse momento da realização da atividade, tivemos muita dificuldade em deixar que os alunos produzissem sozinhos. Por várias vezes nos pegamos fazendo interferências, até que fomos abordadas por um aluno (aluno este colocado entre aqueles dez por cento com enorme dificuldade):

“*Tânia, deixe que a gente descubra, não fale*”. (Werner, g.4)

Esse momento para nós foi extremamente importante, pois percebemos que pelo menos parte dos nossos objetivos começávamos a alcançar, pois os alunos queriam produzir. A partir desse momento, sentimos a motivação pela qual todos estavam imbuídos e deixamos que trabalhassem sozinhos.

Foto 3: Desenvolvimento da atividade Triângulo de Pascal

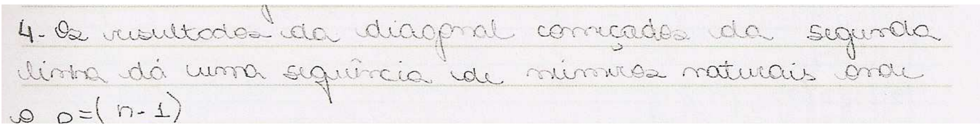
Nesse primeiro encontro, não nos preocupamos com uso de simbologia correta da Matemática, pois nosso objetivo era que os alunos investigassem, discutissem com o grupo, chegassem num consenso e, depois, fizessem um relato de suas conclusões.

Enquanto estavam apenas falando, não percebemos nenhuma dificuldade, porém, quando foi proposto que fizessem um relato por escrito de suas descobertas, surgiram as primeiras dificuldades. Muitos falavam, discutiam, argumentavam sobre suas descobertas, porém, não conseguiam passar da linguagem oral para a escrita. Muitos questionavam:

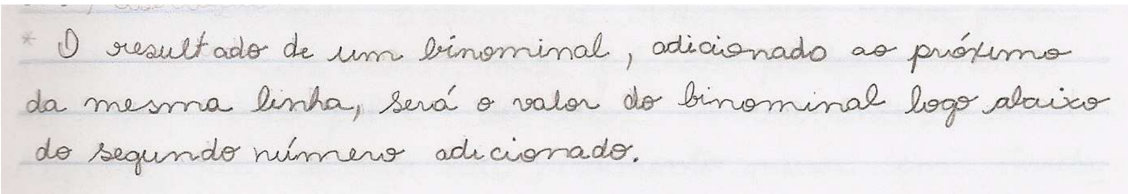
> *"Tânia, não podemos apenas falar o que observamos? Não conseguimos escrever''*. (Ludmila, g.3)

Sugerimos, então, que escrevessem da forma que conseguissem, lembrando-se apenas de que a pessoa que fosse ler o relatório deveria entender.

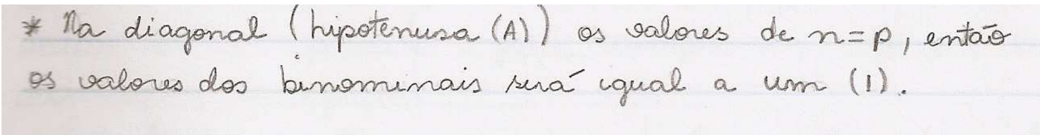
A partir dessa orientação, os alunos tentaram escrever como podiam, muitas vezes utilizando nomenclaturas incorretas ou mesmo desenhos, na tentativa de serem compreendidos. Abaixo, apresentamos alguns protocolos[31] que dizem respeito a essa atividade.



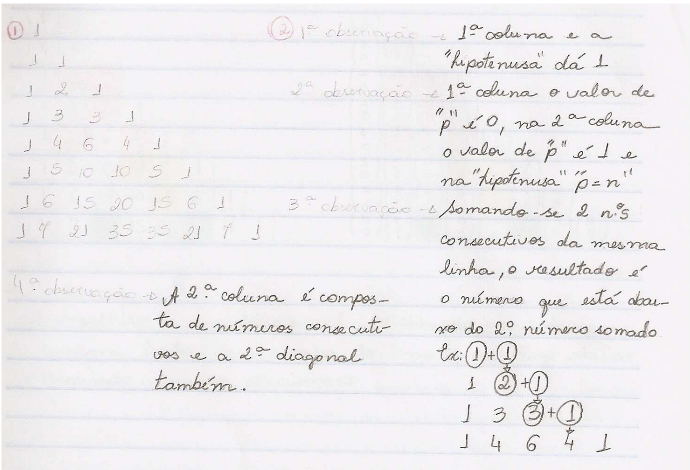
4- Os resultados da diagonal começados da segunda linha dá uma sequência de números naturais onde
: $p=(n-1)$



* O resultado de um binominal, adicionado ao próximo da mesma linha, será o valor do binominal logo abaixo do segundo número adicionado.



* Na diagonal (hipotenusa (A)) os valores de $n=p$, então os valores dos binominais será igual a um (1).



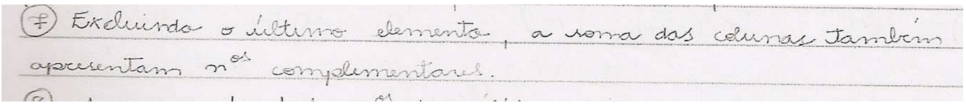
① 1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

② 1ª observação → 1ª coluna e a "hipotenusa" dá 1
2ª observação → 1ª coluna o valor de "p" é 0, na 2ª coluna o valor de "p" é 1 e na "hipotenusa" "p = n"
3ª observação → Somando-se 2 nºs consecutivos da mesma linha, o resultado é o número que está abaixo do 2º número somado
Ex: 1 + 1
1 2 + 1
1 3 3 + 1
1 4 6 4 1

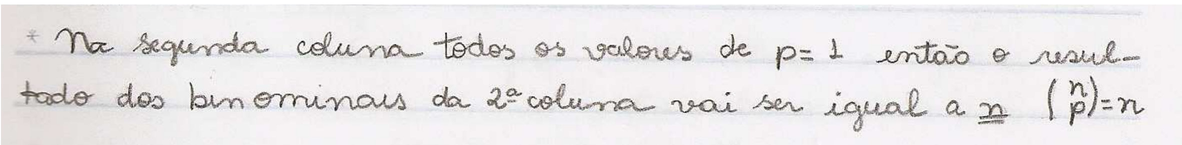
4ª observação → A 2ª coluna é composta de números consecutivos e a 2ª diagonal também.

Quanto à perspectiva de nosso primeiro encontro, onde os alunos deveriam chegar intuitivamente às propriedades do Triângulo de Pascal como: relação de Stiffel, números complementares, o somatório de cada linha do triângulo, o resultado dos binomiais, cujo valor de n = p ou, ainda, cujo valor de p = 0 ou 1, os grupos foram além. Apontaram todas essas propriedades e vislumbram muitas outras possibilidades, entre elas esta descrita pelo grupo 4:

[31] Nessa pesquisa, denominamos "protocolo" os fragmentos de atividades apresentados no decorrer do capítulo. Por serem apenas fragmentos, optamos por não identificá-los como figura, como acontece nas outras partes desta pesquisa.


(7) Excluindo o último elemento, a soma das colunas também apresentam nºs complementares.

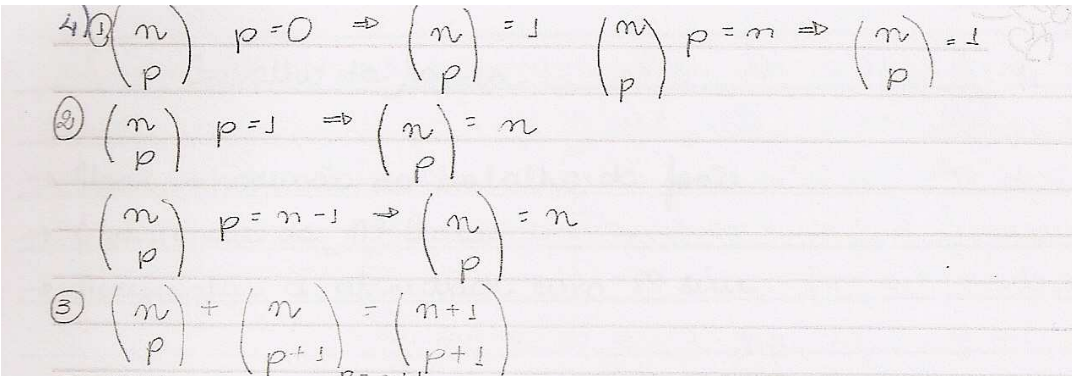
Alguns grupos apontaram a regularidade já acompanhada por uma abstração, fazendo uso de simbologia para descrever um fato:


* Na segunda coluna todos os valores de p= 1 então o resultado dos binominais da 2ª coluna vai ser igual a n $\binom{n}{p}=n$

Apesar dos erros de nomenclatura apresentados nos relatórios, todos os grupos alcançaram satisfatoriamente nosso objetivo. A dificuldade diante da escrita pode ser interpretada pela ineficiência do ensino da Matemática que dificilmente coloca os alunos para ler ou escrever. O aluno só irá adquirir habilidade para escrever um texto matemático, quando forem oferecidos a ele momentos em sala de aula que lhe proporcionem essa experiência.

No segundo encontro, tivemos a presença de 30 alunos e a atividade proposta para esse dia era que cada grupo, diante das regularidades observadas e descritas no encontro anterior, tentasse estabelecer alguma generalização. Devolvemos, então, para cada grupo, seu relatório e os alunos começaram a trabalhar.

Para a realização dessa tarefa, precisávamos de um nível maior de abstração e apenas o grupo 4 conseguiu realizá-la por completo sem a nossa intervenção, cuja resposta foi a seguinte:


4) (1) $\binom{n}{p}$ $p=0 \Rightarrow \binom{n}{p}=1$ $\binom{n}{p}$ $p=n \Rightarrow \binom{n}{p}=1$

(2) $\binom{n}{p}$ $p=1 \Rightarrow \binom{n}{p}=n$

$\binom{n}{p}$ $p=n-1 \Rightarrow \binom{n}{p}=n$

(3) $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$

Os demais conseguiram intuir propriedades, como, por exemplo:

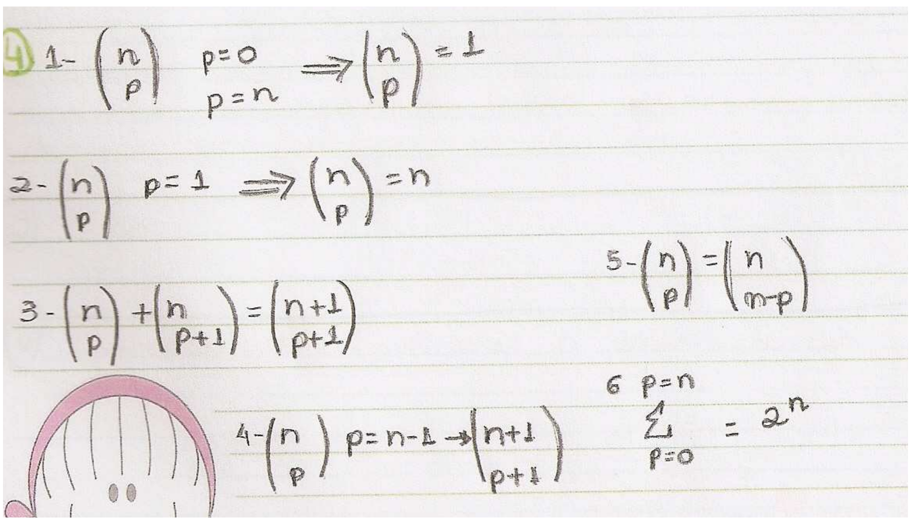
$$\binom{1}{0} = 1, \text{ “Todo número situado na primeira coluna é igual a 1’’}$$

Porém, não conseguiam generalizar o fato usando simbologia matemática: $\binom{n}{p} = 1$, $\forall$ n $\in$ IN e p = 0

Diante dessa situação, fazíamos os seguintes questionamentos:

- Nessa primeira coluna, quando escrevemos os binomiais, existe algum valor constante? Se existe, o que ele representa no binomial?
- Existe um valor que muda? O que ele representa?

A partir dessas perguntas, os grupos: 2, 3, 6, 7 e 8 conseguiram escrever simbolicamente a generalização, conforme podemos verificar no protocolo abaixo:



Os grupos 1 e 5 conseguiram dizer qual era o valor constante e qual era o variável, porém, não identificaram que esses valores representavam, respectivamente, os valor de n e p.

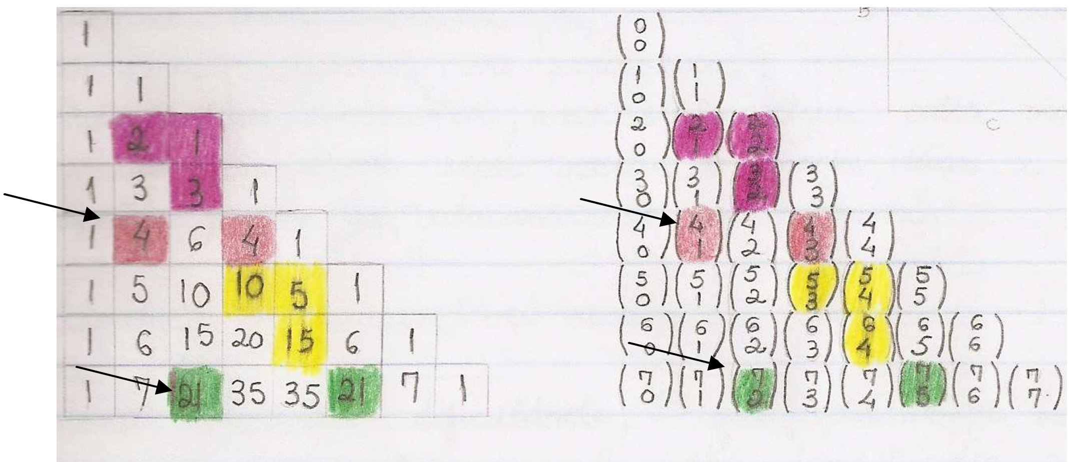
Uma outra conclusão apresentada pelos grupos foi a de que:

> *"Os números situados na segunda coluna formam uma seqüência de naturais consecutivos''* (Flávia, g.1)

A maioria não observou que os resultados eram sempre o valor de n e que generalizando podíamos concluir que $\binom{n}{p} = n$, $\forall$ n $\in$ IN e p = 1.

Para conduzir o raciocínio desses grupos, solicitei que escrevessem em uma coluna os binomiais e ao lado os resultados encontrados. A partir dessa construção, os grupos 3, 6 e 8 efetuaram corretamente a generalização. Com os demais: 1, 2, 5, e 7, tivemos que retomar as mesmas perguntas anteriores e, a partir daí, como já haviam feito a generalização anterior, conseguiram concluir corretamente.

A maior dificuldade apresentada na realização dessa atividade foi no momento de escreverem a generalização para a relação de Stiffel e para os binomiais complementares. Para os binomiais complementares, solicitei que, mais uma vez, voltassem ao Triângulo com os binomiais e com os resultados. Solicitei que circulassem com lápis colorido os resultados de alguns pontos que apresentassem essa regularidade. Para cada par deveriam usar uma cor diferente. E depois, usando a mesma cor, deveriam marcar os binomiais correspondentes. O protocolo abaixo mostra o caminho utilizado para conduzir à generalização:

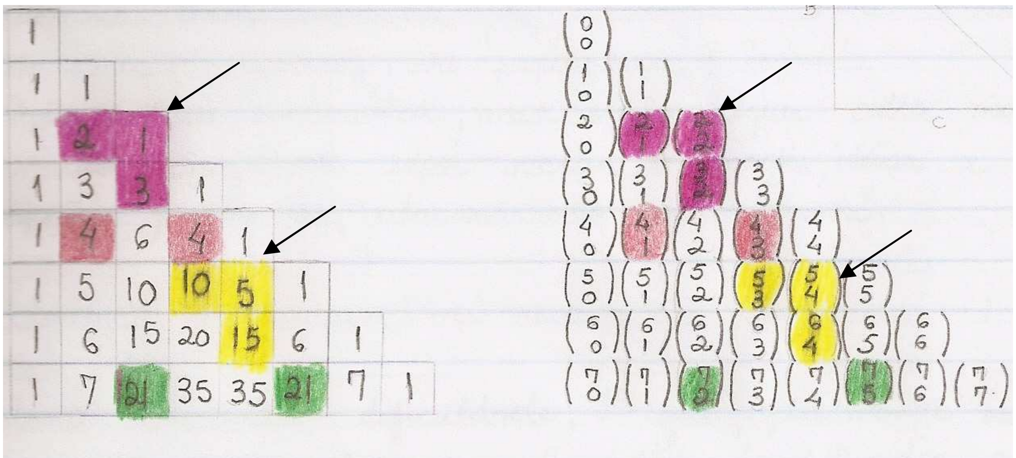


A partir daí, fui novamente fazendo questionamentos do tipo: quem é constante? Quem varia? Você percebe alguma relação entre esses valores? E, quando o grupo apontava:

sim existe, a soma dos números debaixo é igual ao de cima, nós dizíamos: isso é válido para todas as situações? O número que está embaixo representa o valor de quê? E o que está em cima?

Sempre que fazia a condução do raciocínio, os grupos 3, 6 e 8 rapidinho concluíam seu trabalho. Os demais 1, 2, 5 e 7 ainda apresentavam dificuldades e, para essa situação, não conseguiram escrevê-la usando a simbologia correta. Descreviam exemplos, mas não uma generalização.

Para a escrita da relação de Stiffel foi ainda mais difícil e procedemos da mesma maneira: solicitamos que os alunos fizessem os dois triângulos (um com os binomiais e outro com os resultados), colorissem a região que representasse o fato ocorrido (mostrado abaixo), e aí prosseguimos com os questionamentos.



Os grupos 3, 6 e 8, depois de desenhar, usaram o mesmo raciocínio e, sozinhos, conseguiram estabelecer a generalização usando a simbologia correta. Os demais, por mais que tentamos guiar seus pensamentos, não conseguimos que abstraíssem e efetuassem a generalização.

Para o terceiro encontro, cada grupo deveria desenvolver as identidades abordadas anteriormente comprovando, assim, sua veracidade. O grupo 4 foi o único que concluiu o trabalho sozinho, apresentando o seguinte resultado:

$$⑥ \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\frac{n!}{(n-p)!\,(p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\;p!}$$

O único momento que solicitaram minha presença, foi quando, ao desenvolver o binomial, identificaram uma adição de frações envolvendo fatoriais e a única intervenção nossa foi dizer: o que vocês fariam se não tivesse fatorial? A resposta: *tiraríamos o MMC*. E continuaram o desenvolvimento da identidade, apresentada no protocolo abaixo:

$$③ \quad \frac{n!}{(n-p)!\;p!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$\frac{p+1\;(n)! + n-p\;(n)!}{(n-p)!\;(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$\frac{n!\,(p+1+n-p)}{(n-p)!\;(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-p)!\,(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

Os demais grupos não conseguiram provar a relação de Stiffel nem com nossa interferência. As outras propriedades, depois que os orientei que bastava desenvolver os binomiais, todos concluíram com êxito a tarefa.

Para o quarto encontro, a tarefa era escolher uma das generalizações concluídas pelo grupo e apresentar para a turma numa forma de seminário (FOTO 4).

Foto 4: Apresentação de um aluno do grupo 7 da atividade Triângulo de Pascal no seminário

É importante que, durante a realização desse tipo de atividade, ocorra um momento de troca entre os grupos. Uma das alunas, ao término da aula comentou que:

> "*Nunca tinha tido a oportunidade de demonstrar no quadro para meus colegas um exercício feito por mim mesma*" (Fernanda, g.1)

O simples comentário feito por essa aluna mostra o quanto é rico esse momento, inclusive proporcionando o desenvolvimento da auto-estima e autonomia do aluno.

A relação de Stiffel foi apresentada pelo grupo 4, tendo em vista ter sido o único grupo a provar sua identidade. Os demais, deixamos que cada um escolhesse aquela propriedade que queria apresentar.

No quinto encontro, preparamos uma auto-avaliação, que foi conduzida a partir de quatro questionamentos com o objetivo de analisar a percepção do aluno diante da atividade, fator pertinente em nossa análise de resultados. Abaixo, anexamos um protocolo, que se trata da percepção de um aluno que apresentava uma enorme dificuldade com a área de exatas.

① Você acha importante, que dentro dos conteúdos de matemática, tenha momentos de discussão e troca de idéias como essa atividade lhe proporcionou? Porque?

Não só na matemática, mas em qualquer outra matéria é muito importante expor nossas observações, idéias e percepções quanto ao "relacionamento dos números".

② Sentiu dificuldades na realização do trabalho? Qual? Por quê?

Senti bastante dificuldade; 1º que, geralmente os alunos de uma forma geral estão desabituados a fazerem atividades assim na Matemática (uma falsa idéia de Ciências Exatas), mas falando particularmente de mim, sinto falta de certos conhecimentos de Álgebra, que tornam meu rendimento menor em atividades como esta Talvez essa deficiência começou na 6ª ou 7ª Série, e por causa disso é mais difícil provar uma dedução com a linguagem da Matemática.

③ Após a realização dessa atividade, conseguiu ver a matemática com outra perspectiva? Explique?

Com toda certeza Atividades como essa ajudam a diluir a idéia de que Matemática é quase ditatorial (no relacionamento entre o aluno e o conhecimento) Ampliou meu interesse pela matéria!

④ Acha importante que o aluno participe ativamente das aulas, ou ser passivo e fazer simplesmente o que lhe é ordenado? Justifique

Eu tenho certeza que a participação é muito mai produtiva, tanto em quantidade como em qualidade. Uma vez que aprendemos a fazer, e fazemos, a matéria "entra" mais fácil na "cabeça".

Analisando essas entrevistas, percebemos uma aceitação de cem por cento da turma com relação à atividade desenvolvida. Inclusive, alguns chegaram a propor que atividades como essas deveriam acontecer mais vezes, pois discussões e troca de idéias com os colegas "tornam a aula extremamente mais rica e interessante", o que pode ser visto abaixo:

1) Penso que os momentos de discussão e trocas de idéias são importantes dentro de qualquer conteúdo, seja ele ligado a área humanas à exatas. Isso porque o conhecimento partirá das descobertas do próprio aluno que é induzido pelo professor. No sub consciente do aluno foi ele que conseguiu descobrir como resolver o problema, mudando assim a rotina que é: o professor chega com uma grande bagagem de conhecimento e transmite para o aluno. Se a matéria for desvendada pelo aluno, ela torna-se mais fácil e mais interessante.

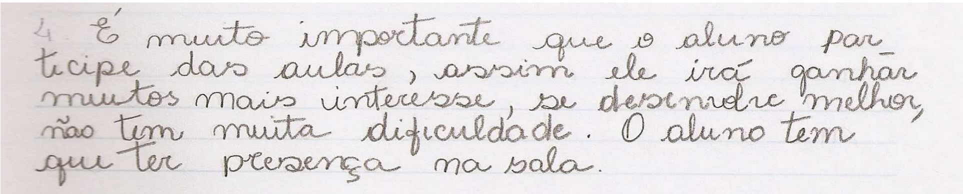
Esse relato, feito pela aluna Ana Paula, aponta para a importância de colocar o sujeito (aluno) em constante interação com o objeto de conhecimento na construção de uma aprendizagem significativa.

Outro fato interessante para nós, enquanto pesquisadora, foi a mudança de perspectiva em relação à Matemática apontada por cerca de noventa por cento da turma após a realização da atividade. Os protocolos abaixo exemplificam esse fato:

3) Depois de perceber que eu tenho a capacidade de realizar um trabalho na área matemática sem a intervenção direta do professor eu fiquei mais confiante em aplicar os meus conhecimentos matemáticos onde for necessário.

Com toda certeza Atividades como essa ajudam a diluir a idéia de que Matemática é quase ditatorial (no relacionamento entre o aluno e o conhecimento) Ampliou meu interesse pela matéria!

Os alunos também foram questionados sobre a sua postura em sala de aula, que pode ser ativa, participando o tempo todo da construção do conhecimento, ou passiva, simplesmente escutando e repetindo comandos dados pelo professor. Os alunos foram unânimes em dizer que, para que ocorra uma aprendizagem com qualidade, é necessário que o aluno seja ativo no processo ensino aprendizagem. Abaixo, o protocolo de uma aluna referente a essa questão:


4 É muito importante que o aluno par_
ticipe das aulas, assim ele irá ganhar
muitos mais interesse, se desenvolve melhor,
não tem muita dificuldade. O aluno tem
que ter presença na sala.

A postura da aluna, como dos demais alunos da sala, reforça, assim, a afirmação de Ponte (2006, p.23), quando diz que: “Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista atingir um objetivo”.

Os resultados evidenciam uma dificuldade dos grupos na formalização escrita de idéias matemáticas, apontando a necessidade dos educadores em intensificar a busca de estratégias de ensino que proporcionem o desenvolvimento dessa habilidade. Eles também mostram uma deficiência com relação ao desenvolvimento de alguns processos matemáticos (generalização, abstração, formalização). Por outro lado, foi notável, durante todas as etapas de realização do trabalho, o prazer e a motivação com os quais os alunos realizavam as tarefas, superando, inclusive, o medo que muitos têm da Matemática, despertando o prazer da descoberta.

5.3 Atividade II – Mesas & Cadeiras

O nosso objetivo diante dessa atividade era que os alunos, a partir de alguns questionamentos, encontrassem a lei de formação que estabelecia uma relação entre o número de mesas e o total de cadeiras. E assim, experimentassem situações concretas em que a "letra" não apresentasse características de algo desconhecido, mas sim de algo que varia, que muda em função de...

Em nosso primeiro encontro, realizado em uma sala de aula do CBSCM no horário da tarde, tivemos a participação dos 11 alunos, da professora de Matemática da turma e de um aluno do 3° ano que fazia os registros fotográficos e em vídeo. Primeiramente, orientamos os alunos sobre como seria realizada a atividade. Solicitamos que em momento algum ficassem preocupados em acertar ou não, apenas apontassem uma solução suas para aquele problema. Depois de concluída a orientação, entreguei a folha xerografada para cada grupo com a atividade proposta (FIGURA 27).

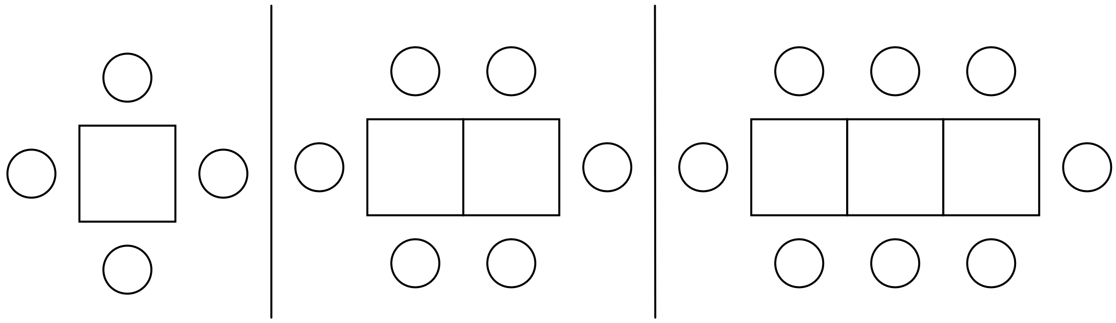
Atividade: Mesas e Cadeiras

Etapas :

1) Observe a seqüência abaixo:

** Quadrados representam mesas;*

** Círculos representam as pessoas que podem se acomodar ás mesas.*



2) Quantas pessoas conseguimos acomodar usando 3 mesas?

3)Quantas pessoas conseguimos acomodar usando 4 mesas?

4) Quantas pessoas conseguimos acomodar usando 10 mesas?

5) Quantas mesas são necessárias para acomodar 42 pessoas?

6) É possível acomodar 86 pessoas utilizando essa disposição? De quantas mesas precisaríamos?

7) Você consegue descrever uma regra que associe de forma geral o numero de mesas com o numero de pessoas?

Figura 27: Atividade Mesas x Cadeiras

Nosso propósito diante dessa atividade era que o aluno por meio da observação de uma situação, respondesse a algumas questões. Essas questões apresentam um nível de dificuldade crescente e provocam no aluno, a partir do item 4, uma necessidade da descoberta de uma forma mais prática para as soluções seguintes. Até o item 3, o aluno normalmente apenas observa os desenhos conta as cadeiras e dá a resposta. Porém, no item 4 ele já começa a tentar entender o processo e descobrir uma forma de resolver o problema sem o concreto em mãos. No item 5, a proposta de trabalho se inverte e ele, então, precisa de uma abstração maior, pois deverá fazer o caminho inverso. Para o item 6, pretende-se que o aluno questione sobre a relação existente entre o número de mesas e cadeiras. E, por fim, no item 7, o aluno é convidado a estabelecer uma regra que associe essas duas grandezas. Existem várias maneiras possíveis para essa regra. Por exemplo: ele poderá prever que o número de cadeiras é o dobro do número de mesas mais dois, poderá prever que o número de mesas é a metade da diferença do número de cadeiras e dois, poderá prever que o número de cadeiras é o quádruplo do número de mesas menos o dobro da diferença entre o número de mesas e um. Nosso objetivo, portanto, era que o aluno, ao final da atividade, conseguisse expressar primeiro verbalmente, depois usando a linguagem simbólica, sobre uma regra que estabelecesse a relação entre o número de cadeiras e o número de mesas.

Logo que foi proposta a atividade, alguns alunos mencionaram: já fizemos algo parecido. E foram rapidamente respondendo aos questionamentos 2, 3 e 4 e 5. Um dos grupos, ao desenvolver a proposta da atividade 6, chegou a um impasse. As alunas Bruna e Thalyta apresentavam como resposta 44 e Carol 42. Interessante o argumento usado por Thalyta e Bruna, e depois o de Carol, para convencer as colegas (FOTO 5):

> "*São 86 cadeiras, mais duas 88, dividido por 2 é 44*". (Bruna e Thalyta, g.2)

> "*Vejam, são 86 pessoas, acomodamos duas, uma em cada ponta da mesa. Sobram 84. Em cada mesa eu coloco duas pessoas, logo 84 dividido por dois é igual a 42*". (Carol, g. 2)

Foto 5: As alunas debatendo sobre a questão

Diante dos quatro primeiros questionamentos, o raciocínio usado foi multiplicar por dois e depois somar dois. As alunas Bruna e Thalyta não perceberam que, ao inverter a situação problema, todas as operações se inverteriam. Para aguçar a critica à resposta apresentada pelas duas, fiz o seguinte questionamento: Tenho 44 mesas. Quantas pessoas consigo acomodar? Rapidamente me responderam: 90. Continuando o diálogo, argumentei: mas como? Se vocês acabaram de me dizer que, para acomodar 86 pessoas, precisaríamos de 44 mesas? Bruna, na mesma hora, responde:

> "*Tem razão Carol, fizemos burrada. Precisamos de 42 mesas*". (Bruna, g.2)

Questionei os alunos sobre o raciocínio usado para responderem às primeiras questões da atividade, onde obtive respostas do tipo:

> "*Coloquei duas pessoas nas pontas, depois duas em cada mesa*". (Marcelino, g.4)
>
> "*Uma mesa, quatro pessoas, duas mesas, oito pessoas, porém, devo tirar as duas do encontro das mesas, então seis pessoas*". (Lucas, g.3)
>
> "*Desenhei, depois contei quantas cadeiras*". (Vítor, g.1)

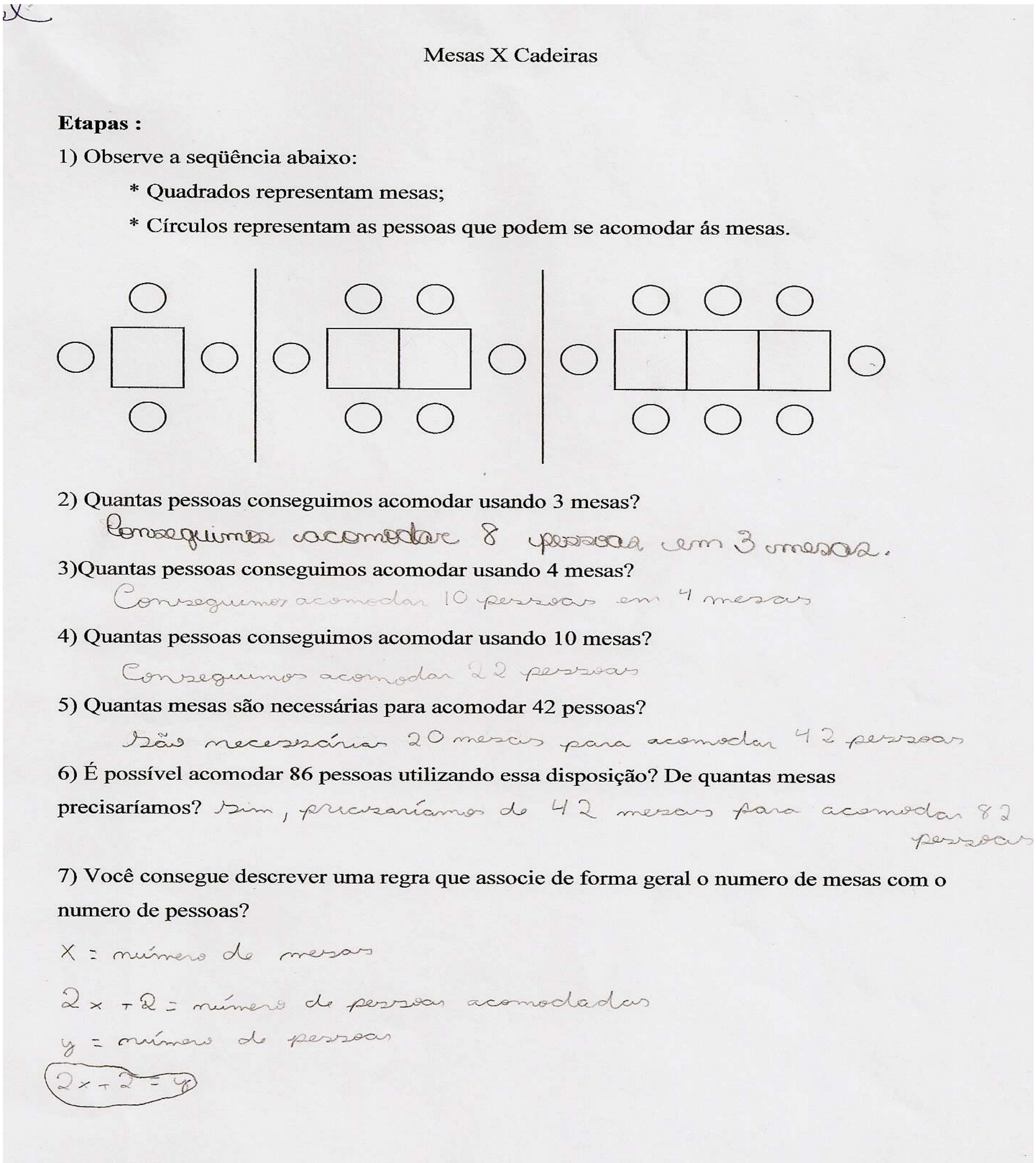
Foto 6: Grupo 1, na discussão da atividade

Essas diferentes falas dos alunos mostram os diversos caminhos e níveis de raciocínio para um mesmo problema. Enquanto um grupo, ainda no concreto, conta quantos lugares disponíveis, os outros tentam uma análise da situação e depois abstraem, porém, de maneiras inversas. Um calcula o total como se as mesas não estivessem encostadas umas as outras, depois diminui os lugares que ficariam nesses encontros. O outro calcula como se cada mesa acomodasse apenas duas pessoas e depois acrescenta as duas das pontas.

Quando convidados a desenvolverem a etapa 7, alguns grupos fizeram a regra de associação descrevendo o ocorrido:

> "*O número de pessoas é igual ao número de mesas vezes dois, mais dois*". (Bruna, g.2).
>
> "*O total de pessoas menos dois, que são as pessoas das pontas, dividido por dois, dá o total de mesas*" (Vítor, g.1).

Apenas o grupo 4 estabeleceu a relação utilizando a linguagem matemática, conforme podemos observar pelo protocolo abaixo:



Mesas X Cadeiras

Etapas :

1) Observe a seqüência abaixo:

* Quadrados representam mesas;

* Círculos representam as pessoas que podem se acomodar ás mesas.

2) Quantas pessoas conseguimos acomodar usando 3 mesas?

Conseguimos acomodar 8 pessoas em 3 mesas.

3)Quantas pessoas conseguimos acomodar usando 4 mesas?

Conseguimos acomodar 10 pessoas em 4 mesas

4) Quantas pessoas conseguimos acomodar usando 10 mesas?

Conseguimos acomodar 22 pessoas

5) Quantas mesas são necessárias para acomodar 42 pessoas?

São necessárias 20 mesas para acomodar 42 pessoas

6) É possível acomodar 86 pessoas utilizando essa disposição? De quantas mesas precisaríamos? Sim, precisaríamos de 42 mesas para acomodar 82 pessoas

7) Você consegue descrever uma regra que associe de forma geral o numero de mesas com o numero de pessoas?

X = número de mesas

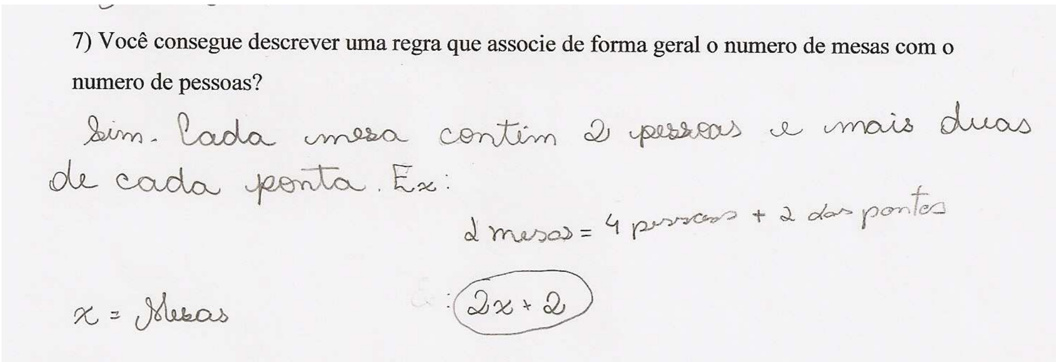
2x + 2 = número de pessoas acomodadas

y = número de pessoas

2x + 2 = y

Esse grupo apresentou uma capacidade de abstração e o uso correto da linguagem algébrica, inclusive tendo o cuidado de especificar primeiro o que ele denominava como x e como y utilizados na generalização da situação problema.

Os outros três grupos foram convidados a tentar escrever usando uma linguagem simbólica sobre o fato ocorrido. O grupo 3 apresentou a seguinte generalização:


7) Você consegue descrever uma regra que associe de forma geral o numero de mesas com o numero de pessoas?

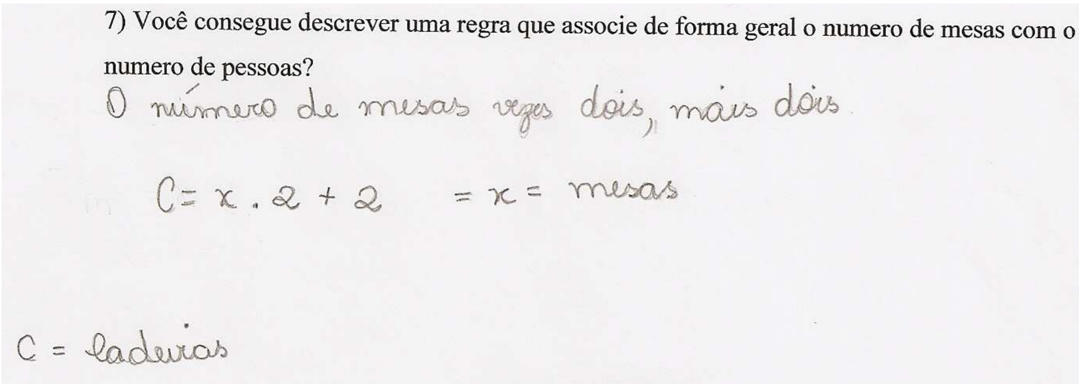
Sim. Cada mesa contém 2 pessoas e mais duas de cada ponta. Ex:

2 mesas = 4 pessoas + 2 das pontas

x = Mesas

: $2x + 2$

Apesar de concluir a generalização 2 x + 2, especificando x = mesas, ele não relacionou esse fato ao total de pessoas. Já o grupo 2 concluiu que:


7) Você consegue descrever uma regra que associe de forma geral o numero de mesas com o numero de pessoas?

O número de mesas vezes dois, mais dois.

$C = x . 2 + 2$ = x = mesas

C = Cadeiras

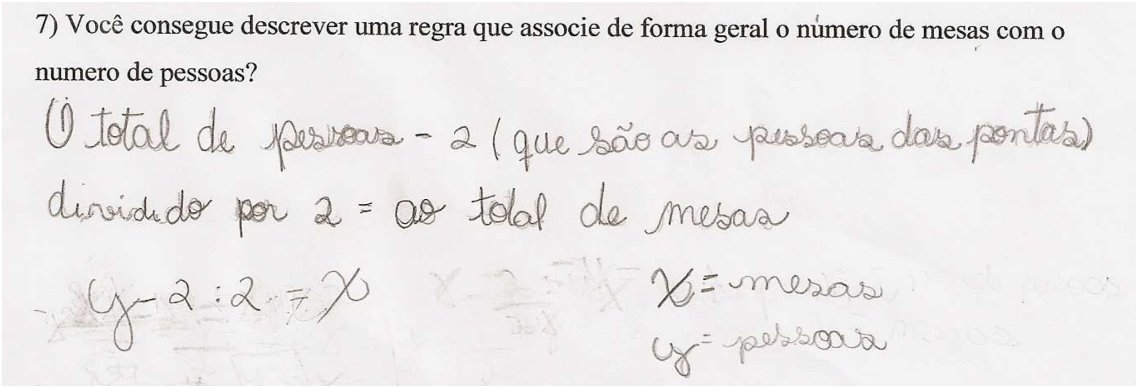
Apesar de não ter uma organização no desenvolvimento do pensamento algébrico, como apresentou o grupo 4, foram capazes de estabelecer corretamente a relação entre as grandezas mesas e cadeiras.

Apenas o grupo 1 não conseguiu efetuar corretamente a generalização. Um fato observado é que esse foi também o único grupo que tentou a generalização calculando o número de mesas em função do número de pessoas. Esse fato contribuiu para a dificuldade apresentada pelo grupo.

Esse grupo, quando questionado sobre o raciocínio usado para resolver as questões, argumentou que:

> "*Total de pessoas menos dois, dividido por dois, é igual ao total de mesas*". (Vítor, g.1)

Enquanto a resolução contemplava apenas a verbalização oral, tudo bem. Porém, quando foram convidados a escrever matematicamente o raciocínio, fizeram:


7) Você consegue descrever uma regra que associe de forma geral o número de mesas com o numero de pessoas?

O total de pessoas - 2 (que são as pessoas das pontas) dividido por 2 = ao total de mesas

y - 2 : 2 = x

x = mesas

y = pessoas

Nesse momento, solicitei que o grupo comprovasse a veracidade de seu raciocínio, o que foi perfeitamente comprovado por todos os integrantes. Porém, os alunos não perceberam que, na expressão por eles construída, a prioridade era da divisão e, sendo assim, para um total de 86 pessoas, precisaria de 85 mesas. Para eles, os parênteses usado na escrita matemática é totalmente desnecessário e a resolução da expressão se dá exatamente na ordem em que aparecem as operações.

Logo após a realização dessas tarefas, fizemos uma plenária para apresentação à turma do raciocínio usado pelo grupo e as respostas encontradas. Ao final da plenária, solicitamos que cada grupo fizesse cálculos que comprovassem a veracidade da regra estabelecida no item 7. Em seguida, oralmente, fui propondo algumas situações problemas como, por exemplo: Com 150 mesas conseguiremos acomodar quantas pessoas? Precisaríamos de quantas mesas para acomodar 168 pessoas? Nosso objetivo, aqui, era que o aluno percebesse que a partir de uma regra pré-estabelecida, qualquer problema envolvendo aquela situação, por maior que sejam os números, se resolve de forma rápida e eficaz.

Sempre que o questionamento era proposto sobre o número de pessoas em função de determinado número de mesas, a resposta era quase que automática, pois a relação era direta. Quando o questionamento seguia na contramão, o número de mesas em função de determinado número de pessoas, a resposta não vinha de forma tão rápida. Muitas vezes os alunos precisaram de um registro escrito para resolver tal questão, pois a relação era inversa.

Mais tarde, percebemos ser este um momento adequado para a abordagem de funções inversas, sem, é claro, falar em função. Apenas solicitamos que fizessem a generalização partindo do número de mesas em função do número de pessoas.

5.4 Atividade III – Mosaicos

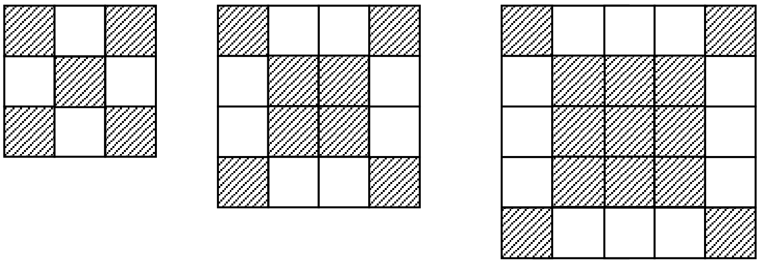
Nosso segundo encontro foi contemplado pela atividade *Mosaicos*. O objetivo dessa atividade também era que os alunos tivessem uma experiência concreta da "letra" enquanto variável. Porém, a atividade apresentava um nível de dificuldade maior, pois a relação não se dava apenas entre duas grandezas, mais entre três: quadradinhos brancos, pretos e total de quadradinhos.

Iniciamos o trabalho, entregando uma folha xerografada com a atividade proposta para cada grupo (FIGURA 28).

Atividade: Mosaicos

Etapas :

1) Observe a seqüência :



2) Quantos quadradinhos brancos há na figura de ordem 3 ?

3) E na de ordem 4 e 5 ?

4) Desenhe uma figura que represente a ordem 8 e responda quantos quadradinhos pretos e quantos brancos aparecem .

5) Em alguma figura, seguindo esse padrão , aparecerão 68 quadradinhos pretos ? S e existir, qual é a sua ordem ?

6) Explique o raciocínio usado para resolver o exercício anterior

7) Você consegue estabelecer alguma relação entre a ordem e o total de quadradinhos brancos e pretos ?

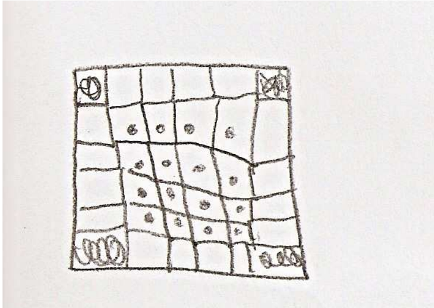
Figura 28: Mosaicos

Essa atividade mostra um mosaico construído a partir de quadrados grandes, subdividido em quadradinhos menores, onde, obedecendo a um padrão, colorimos alguns de preto, outros de branco. As questões conduziriam o aluno à elaboração de duas regras, uma que relacionasse o total de quadradinhos ao número de quadradinhos pretos e outra que relacionasse o total ao número de quadradinhos brancos. Até o item 4, o aluno poderia apenas contar o número de quadradinhos pelo desenho. A partir do item 5, ele deveria deixar o concreto de lado e partir para uma abstração.

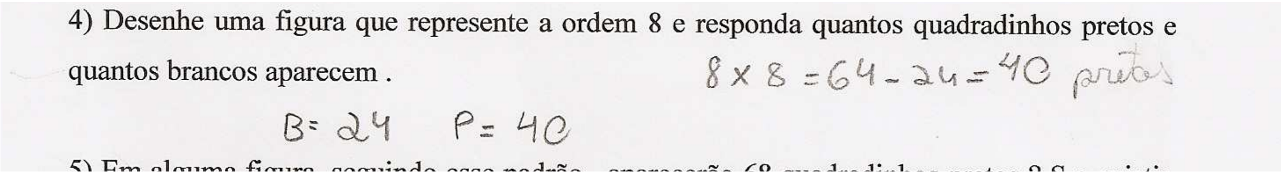
Para responder aos itens 5 e 6, o aluno poderia retirar 4 quadradinhos pretos para os cantos, ficando, assim, com 64, e como a figura central é o quadrado, seu lado deveria ter 8 quadradinhos. Sendo assim, a ordem seria 10: oito brancos mais 2 pretos, ou, ainda, pensar nos quadrados perfeitos maiores que 68 e testar respostas. O primeiro seria 81, logo, 9 de cada lado. Percebendo, assim, que o número de quadradinhos pretos seria menor que 68, pois 9 menos 2 é igual a 7 e fazendo 7 ao quadrado mais 4, teria 53. O próximo, 100, seria, logo, 10 de cada lado. Daí, 10 menos dois é igual a 8. Fazendo 8 ao quadrado mais 4 teria 68. Chegando também na ordem 10.

Diante do item 7, o aluno poderia usar vários raciocínios. Por exemplo, total de quadradinhos menos os brancos é igual aos pretos. Total de quadradinhos menos os pretos é igual aos brancos. Ou, simplesmente, fazendo separadamente cada um deles. Quadradinhos brancos seria a ordem menos dois, multiplicado por quatro. Quadradinhos pretos seria o quadrado da ordem menos dois mais quatro.

Logo no início do desenvolvimento da atividade, percebemos uma falha em sua elaboração, pois a mesma não deixava claro para os alunos o que estava considerando como ordem. Três, dos quatro grupos de trabalho, interpretaram como ordem a posição do desenho e, no entanto, o que queríamos nos referir era o número de quadradinhos que a figura apresentava de cada lado. Por exemplo: o quadradinho 3 x 3 representava a ordem três, o quadradinho 4 x 4, ordem quatro, e assim por diante. Esclarecida a dúvida, os grupos iniciaram a atividade, desenvolvendo com muita facilidade as etapas 2, 3 e 4. Para responder o item 4, todos os grupos fizeram um desenho e contaram o número de quadradinhos pretos e brancos. Abaixo, o protocolo usado pelo grupo 4 para refletir sobre o quadrado de ordem 6 e, a partir daí, generalizar os demais.



O grupo 3, diante do desenho, conta o total de quadradinhos, o número de quadradinhos brancos, depois faz:



4) Desenhe uma figura que represente a ordem 8 e responda quantos quadradinhos pretos e quantos brancos aparecem .

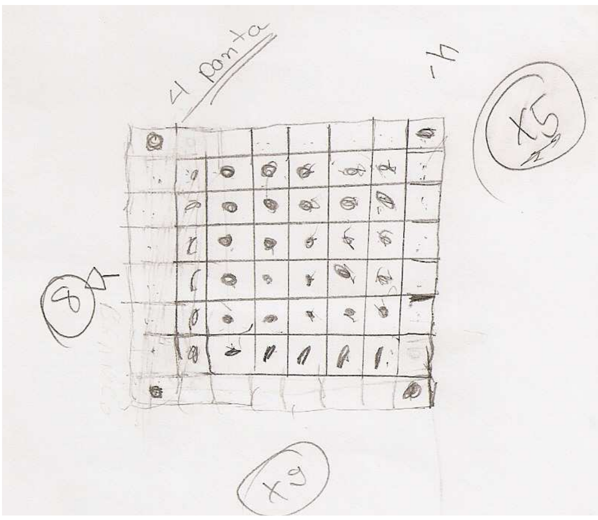
$8 \times 8 = 64 - 24 = 40$ pretos

B= 24 P= 40

A partir do questionamento 5, os grupos precisariam de um grau maior de abstração para responder. Ao responder a questão cinco, a aluna Bruna (g.2) diz que:

> É só fazer 68 – 4 (que estão nas pontas), sobram 64 e como 8 x 8 = 64, a ordem é 10.

O grupo não se convence com a explicação e a aluna, com muita habilidade, faz um desenho para comprovar seu raciocínio:



Os alunos do primeiro grupo também ficam na dúvida quanto à ordem. Vítor também se remete a um desenho para tentar resolver o problema.

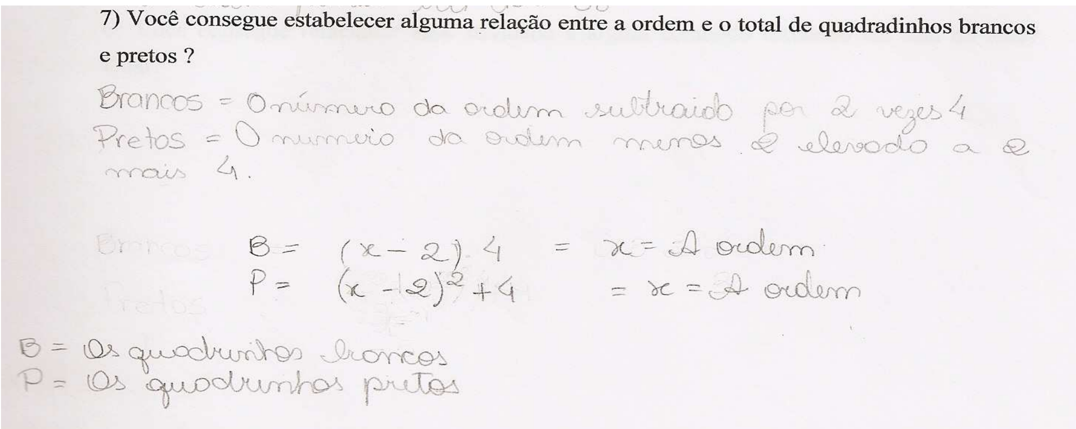
O mais interessante no desenvolvimento dessa atividade foi a relação estabelecida entre quadradinhos brancos, pretos e o total, pois os grupos determinaram expressões bem diferentes, porém, demonstrando uma ótima abstração e uma perfeita compreensão da atividade. O segundo grupo apresentou:

$$B = x - 2 \cdot 4$$
$$P = x - 2^2 - 4 \quad \text{, onde x representa a ordem.}$$

Quando apresentaram o resultado, solicitamos que fizessem alguns testes com o intuito de verificar sua veracidade, pois havíamos percebido a ausência de dois parênteses: um na primeira, indicando a prioridade do x – 2, e outro na segunda, indicando o quadrado da diferença. Os alunos fizeram os testes e não perceberam a falha, pois, automaticamente, mesmo sem os parênteses, efetuavam a subtração e depois o produto e também o quadrado da diferença ao invés da diferença de x e o quadrado de 2. Somente perceberam a ausência do parênteses quando questionamos – de quem é a prioridade ? Esse fato aponta, mais uma vez, a necessidade de um ensino pautado em significados e em compreensão, como mostra a frase da aluna:

“*Ah! É mesmo! Faltou um parênteses*”. (Thalita, g.2)

O grupo 2 prosseguiu na correção, apresentando o raciocínio descrito no protocolo abaixo:

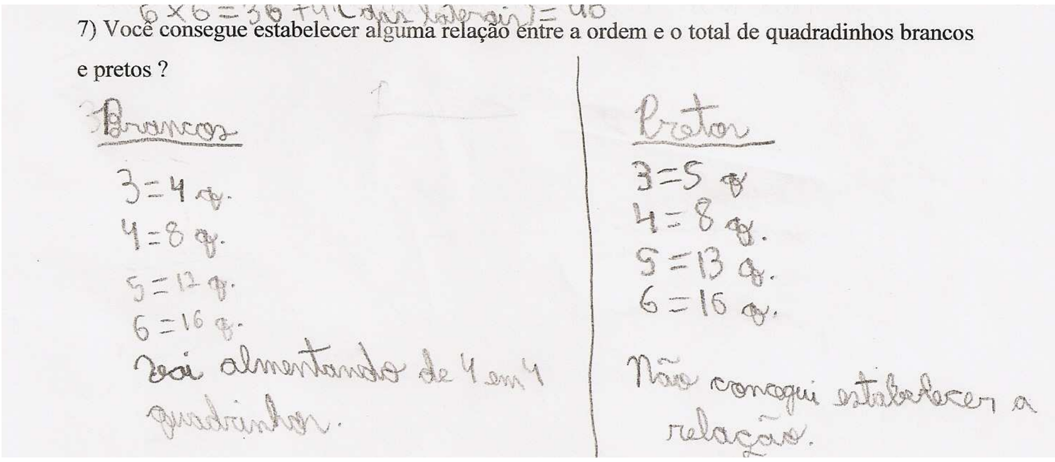

7) Você consegue estabelecer alguma relação entre a ordem e o total de quadradinhos brancos e pretos ?

Brancos = O número da ordem subtraido por 2 vezes 4
Pretos = O numero da ordem menos 2 elevado a 2 mais 4.

$B = (x - 2) \cdot 4 \quad = x =$ A ordem
$P = (x - 2)^2 + 4 \quad = x =$ A ordem

B = Os quadrinhos brancos
P = Os quadrinhos pretos

Já o primeiro grupo não conseguiu estabelecer as relações. Solicitei que construíssem, então, uma tabela, pois a mesma poderia facilitar suas observações. Mesmo assim, a única conclusão que tiraram era de que o número de quadradinhos brancos vai aumentando de quatro em quatro, como indica o protocolo a seguir:



$6 \times 6 = 36 + 4$ (dos laterais) $= 40$

7) Você consegue estabelecer alguma relação entre a ordem e o total de quadradinhos brancos e pretos ?

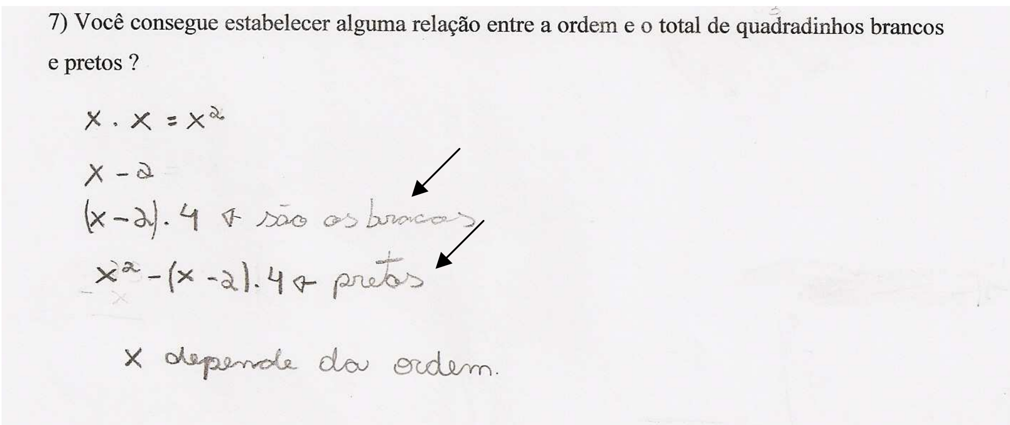
Brancos

3 = 4 q.
4 = 8 q.
5 = 12 q.
6 = 16 q.
vai almentando de 4 em 4 quadrinhos.

Pretos

3 = 5 q
4 = 8 q.
5 = 13 q.
6 = 16 q.
Não consegui estabelecer a relação.

O terceiro grupo descreveu que:



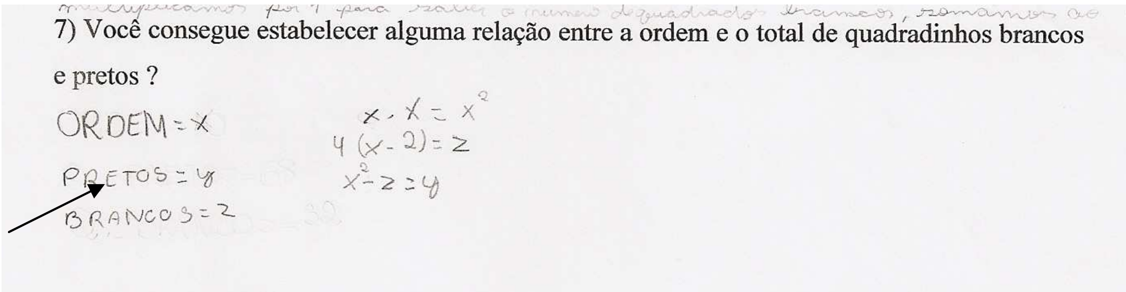
7) Você consegue estabelecer alguma relação entre a ordem e o total de quadradinhos brancos e pretos ?

$x \cdot x = x^2$
$x - 2$
$(x-2).4$ ← são os brancos
$x^2 - (x-2).4$ ← pretos

x depende da ordem.

O raciocínio descrito acima mostra que os alunos não se preocuparam com os quadradinhos pretos, pois, tendo o total e o número de quadradinhos brancos, bastava efetuar uma subtração. Como aconteceu na primeira atividade, o grupo não estabeleceu a relação entre as grandezas simbolicamente, conforme apontamos no protocolo acima.

O quarto grupo escreveu da seguinte forma:



7) Você consegue estabelecer alguma relação entre a ordem e o total de quadradinhos brancos e pretos ?

ORDEM = X

PRETOS = y

BRANCOS = Z

$x \cdot x = x^2$

$4(x-2) = z$

$x^2 - z = y$

O raciocínio usado pelo quarto grupo foi basicamente o mesmo do terceiro, porém, ao escrever a generalização, estabeleceram a relação simbolicamente utilizando-se, para isso, de uma terceira variável. Como na primeira atividade, o grupo demonstra uma boa organização do pensamento algébrico, fazendo referências antes mesmo de efetuarem a generalização ao significado de cada variável utilizada na resolução do problema.

Terminada a atividade, fizemos uma plenária para exposição à turma do raciocínio e os caminhos percorridos por cada grupo, para alcançar sucesso na realização da atividade. Um fato que muito nos chamou a atenção foi a vontade que todos tinham em comunicar suas idéias. A princípio, ouviríamos apenas um dos grupos para cada item, porém, como as respostas e os raciocínios foram bem diferentes e todos queriam falar, optamos por ouvir cada um que quisesse contar o caminho percorrido na realização da atividade. Ao final da discussão, nos chamou atenção a percepção dos alunos para o conceito de variável e a relação que estabeleciam o tempo todo entre as grandezas.

No terceiro encontro, ainda com a turma dividida em grupos, entregamos um questionário com algumas perguntas sobre a execução da atividade para que discutissem, chegassem num consenso e respondessem. Esse questionário (Ver página 38) objetivou uma auto-avaliação, por cada grupo, das atividades desenvolvidas.

Fazendo uma análise das respostas do questionário e o plenário, percebemos uma facilidade muito grande em falar, explicar oralmente um fato observado. Em contrapartida, uma enorme dificuldade em escrever um texto ou mesmo uma expressão. Anexamos, aqui, o registro feito pelo grupo 2:

MESAS E CADEIRAS

1- Não. Pois já conheciamos o problema.

2- Fizemos a seguinte conta: 4 x 2 + 2 = 10

3- Sim. Porque fizemos: 10 x 2 + 2 = 22

4. Não. Porque fizemos: 42 - 2 : 2 = 20

5- 86 - 2 : 2 = 42

6- Sim. Porque descobrindo a regra foi mais fácil para descobrirmos o número 7

7- Sim. A professora ajudou só a passarmos a questão 7 que estava convercional para a matemática.

MOSAICO 1

1- utilizamos a figura do exercício 1 para responder.

2- Não, tivemos que desenhar a figura do lado da questão, para responder a resposta.

3- não, pois já sabiamos qual era a regra.

4. Sim, pois tivemos dificuldade para passar a resposta para escrita matemática e onde deveriamos colocar o parêntese para chegar a resposta certa.

5- Sim. Pois precisaríamos saber a regra.

6- Sim. A álgebra e potência

Dentre as perguntas, uma consideramos pertinente descrever seu resultado. Os alunos foram questionados quanto à semelhança encontrada no desenvolvimento das duas atividades (questão 5 da atividade Mosaico). Ao que responderam:

Grupo 1

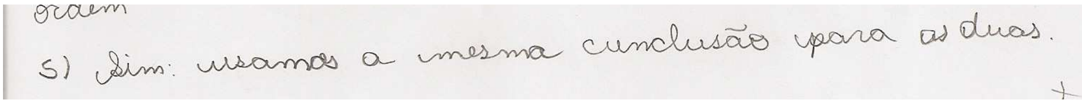
5) Existe alguma semelhança entre a atividade 1 e 2 ? Qual ?

Sim. Nos 2 tivemos que fazer calculos e desenhos.

Grupo 2

5- Sim. Pois precisaríamos saber a regra.

Grupo 3



5) Sim: usamos a mesma cunclusão para as duas.

Grupo 4

? sim, a utilização da álgebra

Analisando essas respostas, percebemos uma capacidade de observação sem preocupação de ligar o que fizeram a algum conteúdo nos grupos 2 e 3. Na nossa opinião, quando o grupo se refere a regra ou conclusão é o padrão que lhe chamou atenção. O grupo 1 mostra, ainda, uma aprendizagem pautada em algo concreto, descrevendo exatamente o que fizeram. Já o grupo 4 apresenta uma resposta mais ampla, ligando a atividade ao conhecimento algébrico.

Se compararmos essas repostas com a análise da relação estabelecida, percebemos uma coerência entre a resposta e o pensamento algébrico dos alunos.

O primeiro grupo é o que demonstrou dificuldade na realização de todas as tarefas que dependiam de uma abstração maior. Portanto, podemos concluir que esses alunos ainda encontram-se enraizados na fase do concreto. O terceiro grupo chamou-nos atenção pela forma de raciocínio, sempre o inverso do que o resto da turma idealizava, porém, com bastante coerência e com argumentos convincentes.

Quando relacionamos o desenvolvimento do pensamento algébrico desses alunos à evolução histórica da Álgebra, podemos dizer que os alunos do grupo 1 ainda estão na fase retórica, os grupos dois e três, na fase sincopada preparando-se para entrar na fase simbólica, e o grupo quatro é formado por alunos que já se encontram na fase simbólica.

Na realização das três atividades, apesar de apresentarem grandes dificuldades em relatar usando a escrita daquilo que observavam, os alunos se mostraram o tempo todo motivados e com muita vontade de compreender o que estava acontecendo.

Acreditamos que a exploração de padrões para auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico apresentou, pela experiência, várias potencialidades:

- Aguçou no aluno o desejo em aprender Matemática.
- Possibilitou um trabalho algébrico pautado nas quatro concepções.
- Facilitou a compreensão do conceito de variável.
- Proporcionou ao aluno uma experiência de construção matemática.
- Possibilitou ao professor diagnosticar os vários estágios da Álgebra em que os alunos se encontravam.

Para essa pesquisadora, a maior riqueza dessa atividade foi perceber os diferentes níveis de pensamento algébrico encontrados na turma. Dificilmente em uma atividade de exercício ou mesmo resolução de problema que apresente uma estrutura fechada de raciocínio, nos possibilitaria tal análise. Isso só foi possível por que essa dinâmica possibilitou ao aluno descrever sua forma de pensar e não apenas solucionar o problema. E é justamente o caminho, o percurso, que mais nos interessa em uma atividade exploratório-investigativa.

Além disso, a freqüência de trabalhos com essa perspectiva poderá contribuir com o desenvolvimento da escrita dos alunos, uma deficiência detectada em todas as atividades aplicadas.

Durante a realização da atividade, ficamos atentas ao aluno de inclusão quanto à sua reação. Esse aluno, em sala de aula, não participa das mesmas atividades que os demais. Isso tem o angustiado, o que pode ser comprovado, quando, muitas vezes, pelos corredores da escola, ele se aproxima e diz: *"Tânia, eu quero trabalhar com o x ..., eu consigo"*. Porém, devido à sua deficiência cognitiva, ele só consegue trabalhar com o concreto. E a professora dele sempre elabora para ele atividades diferentes dos outros alunos da classe. Na realização da atividade, percebemos que ele ficou feliz, pois sua tarefa era a mesma de toda a turma. E, como até a questão 4 o aluno poderia usar do concreto para realizar a atividade, isso o encheu de contentamento. Para ele, mesmo sem conseguir fazer a atividade inteira, o que importava é que estava participando da mesma aula que os demais alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizarmos nossa pesquisa, torna-se necessário tecer algumas considerações acerca das possibilidades de um trabalho na construção do pensamento algébrico. Considerações essas que podem ser fruto de investigações posteriores, conduzindo a uma revisão ou confirmando o que aqui apresentamos.

Nossa intenção era a proposta de atividades com caráter exploratório-investigativo utilizando, como ferramenta, o padrão de regularidade, o que possibilitaria uma motivação para que os alunos sujeitos dessa pesquisa desenvolvessem seu pensamento algébrico e, a partir daí, compreendessem algumas manipulações algébricas dando significado às mesmas, proporcionando a esse aluno experiências com finalidades diferenciadas da “letra”, o que acaba por atenuar o problema no ensino da álgebra apresentado na introdução dessa pesquisa.

Por meio da análise dos cinco livros didáticos, pudemos verificar que a abordagem do ensino da Álgebra tem sido feita de várias maneiras: utilizando-se de recursos geométricos para justificar passagens algébricas, utilizando-se de exercícios para fixação de algumas regras básicas (por exemplo, produtos notáveis), utilizando-se de situações problemas contextualizadas ou não, investigando relações entre grandezas etc. Em algumas atividades encontramos uma abordagem buscando construção do pensamento algébrico por meio de exploração de padrões, onde o aluno, diante de algumas observações ou questionamentos, é motivado a construir uma linguagem algébrica para aquela situação. Contudo, algumas atividades propostas naqueles livros não aparecem, conforme nossa observação, com uma proposta de investigação.

Diante disso, construímos nosso Caderno de Atividades com 32 atividades com caráter exploratório-investigativo, apresentando propostas de trabalho para turmas do Ensino Fundamental e/ou Médio. Essas atividades, além do propósito de fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de exploração de padrões, apresentaram-se como conectivo entre dois ou mais conteúdos.

O desenvolvimento dessas atividades mostrou-nos uma potencialidade além do que foi proposta nessa pesquisa. As observações, os protocolos das atividades e as respostas apresentadas no questionário de auto-avaliação nos permitem concluir que as atividades com propostas de exploração de padrões proporcionam aos alunos:

- Experiências variadas com a utilização de “letras”, tais como: relação entre grandezas, generalização da aritmética, estudo das estruturas e resolução de equações.
- Proporcionou uma compreensão acerca da importância do estudo da álgebra na Matemática.
- Identificar o nível de seu pensamento algébrico.
- Perceber a Matemática como uma Ciência em constante construção e que só se desenvolve a partir de problemas levantados.
- Estabelecer um elo entre conteúdos normalmente tratados separadamente como, por exemplo, funções e progressões.

Pudemos, então, verificar que, quando alguma atividade é apresentada com uma abordagem exploratório-investigativa, o aluno se sente motivado em desenvolvê-la, pois este se torna protagonista do processo, elevando a sua auto-estima com relação à Matemática, pois o essencial, aqui, é o processo e a forma como o aluno pensa o problema e não a resposta “certa” atribuída à questão. Essas atividades estimulam o aluno a escrever corretamente por linguagem usual ou simbólica.

Por meio dos protocolos de desenvolvimento da atividade apresentados pelos grupos, percebemos que comunicar-se por meio de palavras escritas ou usando uma linguagem abstrata é uma fragilidade evidenciada em alunos tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio. O desenvolvimento da linguagem abstrata do aluno é gradativo e necessita de um estímulo e de um acompanhamento por parte do professor na evolução desse processo. As atividades propostas em nosso caderno podem ser utilizadas para esse acompanhamento, uma vez que o professor, à medida que for trabalhando cada uma delas, poderá construir um portifólio e depois fazer uma avaliação do desenvolvimento da construção da linguagem algébrica de seus alunos.

Porém, como toda nova experiência, pela nossa observação, a aplicação de atividades com caráter exploratório-investigativo requer alguns cuidados por parte do professor para que o trabalho alcance o resultado almejado. Quando os alunos não estão habituados a desenvolver trabalhos desse tipo, eles se sentem inseguros solicitando a presença do professor o tempo todo para verificar se está certo ou não. Como a proposta apresentada foi de uma atividade com caráter exploratório-investigativo e realizada em pequenos grupos, o professor precisou, o tempo todo, percorrer os grupos e incentivar a participação de todos os integrantes, para que tivesse o sucesso pretendido no momento da sua elaboração. Muitas vezes, o próprio grupo, quando efetua a verificação, percebe a incoerência e reformula a conclusão. Se isso não acontecer, o professor poderá elaborar outros questionamentos que conduzam o grupo a essa percepção. Por isso, podemos concluir que é importante estimular, para que os integrantes de cada grupo observem, reflitam, discutam, argumentem e proponham novas soluções para o problema. Essa experiência é uma forma de levar os alunos a vivenciarem o processo de construção da própria Matemática.

Ao escolher a atividade a ser abordada em sala de aula, o professor deverá estar atento aos pré-requisitos da mesma, pois explorar situações com termos ou definições ainda desconhecidos pela turma pode ser um dificultador na realização da atividade, podendo o professor inclusive não alcançar os objetivos propostos. Por exemplo: a atividade 15 Torre de Hanói, se conduzida sem uma devida orientação a cerca do funcionamento do jogo, sem um momento de manipulação prévia do material, o professor além de ter dificuldades em conduzir seu desenvolvimento, poderá não ter seu objetivo alcançado.

Sugerimos que em cada atividade aplicada, o professor solicite que os grupos apresentem para a turma o caminho percorrido para chegar à conclusão do exercício. Essa técnica além de proporcionar ao professor mais um momento de acompanhamento para análise do raciocínio de cada um, valoriza o trabalho dos grupos e mostra que para uma mesma situação problema, podemos trilhar caminhos diferentes e chegar no mesmo objetivo.

Pudemos verificar, também, com relação à pesquisa feita, que este é apenas um dos caminhos possíveis para a abordagem realizada aqui. O fato de termos a oportunidade de trabalhar, ainda, com um aluno com síndrome de Down, nos mostrou uma outra potencialidade para a atividade, que poderá ser tema de uma outra pesquisa: a utilização de padrões para desenvolver o pensamento algébrico em alunos com deficiências cognitivas leves ou moderadas. Isso mostra, portanto, as inúmeras possibilidades de uma pesquisa envolvendo o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno em sala de aula e todas as suas potencialidades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo Padrões Pitagóricos**. São Paulo: Atual, 1993

BIANCHINI, E. **Matemática**. São Paulo. Moderna, 2006 (coleção 5ª a 8ª)

BIGODE, A. J. L., **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo. FTD-2006 (Coleção 5ª a 8ª).

BOGDAN, R.C ; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em Educação.** Portugal : Editora Porto, 1994.

BONADIMAN, A. **Uma proposta para desenvolver o pensamento algébrico no Ensino Fundamental objetivando evitar os recorrentes erros**. Porto Alegre, 2005.19 fl .Mestrado em ensino de Matemática, UFRS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2001

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília : MEC/SEF, 1998

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais aos Parâmetros Curriculares Nacionais,** 2002, pp. 111-144

BRASIL, Ministério da Educação.**Guia de livros didáticos PNLD 2008** (Anos Finais do Ensino Fundamental – Brasília : MEC, 2007.

BRASIL, Ministério da Educação.**Guia de livros didáticos PNLD 2005** (Anos Finais do Ensino Fundamental – Brasília : MEC, 2004.

CARVALHO, M. C. C. S. **Padrões Numéricos e Seqüências.** São Paulo: Moderna, 1997

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.(org). **As Idéias da Álgebra.** São Paulo. Ed. Atual, 1995

DANTE, L.R. **Tudo é Matemática**. São Paulo. Ática, 2004 (coleção 5 ª a 8ª)

DAVIS, P. J. ; HERSH, R. **A experiência matemática.** Lisboa. Gradiva , 1995.

DEVLIN, K. **Matemática : a Ciência dos Padrões .** Porto. Editora Porto, 2002.

GUELLI, O. **Contando a história da Matemática**, São Paulo: Ed. Ática,V.1, 1998.

EVES, H. **Introdução á história da Matemática**, São Paulo : UNICAMP, 2004

FIORENTINI, D. ; FERNANDES, F.L.P. ; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** São Paulo, 22 fl. Faculdade de Educação, Unicamp 2006.

FIORENTINI, D. , MIGUEL, a. , MIORIM, M. A. **Contribuição para um Pepensar... a Educação Algébrica Elementar** . Campinas, UNICAMP. Pro-posições, 1993 V4 p. 79

FREITAS, M. A. **Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio.** PUC. São Paulo, 2002 (Dissertação de mestrado).

GIOVANNI, J.R., CASTRUCCI, B, JUNIOR, J.R.G., **A Conquista da Matemática: a + nova**. São Paulo. FTD,2002 (coleção 5ª a 8ª)

IMENES, L. M. , LELLIS , M. **, Matemática Paratodos.** São Paulo . Scipione, 2002 (coleção 5ª a 8ª)

KAPUT, J. J. **Uma línea de investigación que sustente la reforma del Álgebra.**UNO. Revista de Didática de lãs Matemáticas, nº 9 (p.85-97). Barcelona, 1996

LINS, R.C. ; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e Álgebra para o século XXI** . Campinas, SP. Ed. Papirus, 1997.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas.** São Paulo. EPU, 1986.

MENEZES, Ebenezer Takuno de; SANTOS, Thais Helena dos. Reforma Francisco Campos (verbete). **Dicionário Interativo da Educação Brasileira** - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora, 2002. Disponível em: http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=372. Acesso em: 10 jul. 2008.

MODANEZ, L. **Das seqüências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico.** São Paulo, 2003 , 93 fl. Mestrado em educação matemática,PUC/SP

NAKAMURA, O. Y. A. **Generalização de padrões geométricos: Caminho para a construção de expressões algébricas no Ensino Fundamental.** Dissertação de mestrado – PUC São Paulo , 2003.

NCTM (2000). **Pinciples and Standards for School Mathematics.** Reston: NCTM

PEREZ, E. P. Z. **Alunos do Ensino Médio e a generalização de padrão.** PUC – São Paulo, 2006 (dissertação de mestrado).

PIAGET, J. **Biologia e Conhecimento**. Petrópolis : Ed. Vozes, 1996

PONTE, J. P. **Números e Álgebra no currículo escolar.** Lisboa , 2007 – disponível em www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Ponte(Caminha).rtf . Acesso em: 31 ago. 2007.

PONTE, João Pedro Mendes da. **Investigar, ensinar e aprender**. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ponte/artigos-por-temas.htm. Acesso em: 05 jun. 2008.

PONTE, J.P., BROCADO, J., OLIVEIRA, H.- **Investigações matemáticas na sala de aula** – Autêntica, 2006.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SAMPAIO, F. A. **Matemágica – Histórias, aplicações e jogos matemáticos.** Campinas: Papirus, 2005 .

SBM. XXV Olimpíada Brasileira de Matemática – Enunciados e Soluções. **Eureka!**. N. 19, p.7, 2004.

SBM. XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática – Enunciados e Soluções. **Eureka!**. N. 22, p.7 e 21, 2005.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**, Lisboa. Gradiva, 1997.

UFMG. Prova de Matemática – Caderno 1. Disponível em: http://www.ufmg.br/copeve/download/pdf/2004/1Matematica-cad1.pdf. Acesso em: 27 jun. 2008.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis : As idéias da Álgebra.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Ed. Atual, 1995.

VALE, I.; PALHARES, P. ; CABRITA, I. ; BORRALHO, A. **Os padrões no Ensino e Aprendizagem do Número e Álgebra**, 2007 – disponível em www.ese.epvc.pt/numalgebra/PDF/G2.pdf. Acesso em: 31 ago. 2007.

VALE, I.; PALHARES, P. ; CABRITA, I. ; BORRALHO, A **Os padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra**, 2007, disponível em: www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Vale-Palhares-Cabrita-Borralho.doc. Acesso em: 24 ago. 2007.

ANEXOS

Anexo 1 - Concepções abordadas no livro didático - Coleção: *Matemática* - Edwaldo Bianchini

Concepção : Aritmética Generalizada

Tipo de atividades	**5ª**	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Observe a seqüência ... Múltiplos,....								
Propriedades	4	100			2	100	7	100
Total	**4**				**2**		**7**	

Concepção : Resolução de Equações

Tipo de atividades	**5ª**	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas, teoremas , etc			19	6	110	23	230	29
Resolva a equação , inequação, sistema..., verificar raiz	14	100	224	70	97	20	171	22
Relação com discriminante, soma e produto, vértice da parábola....							90	12
Determine as medidas indicadas nas figuras			33	10	213	44	181	23
Problemas onde o aluno deve interpretar, equacionar e resolver			42	13	37	8	105	13
Resolução gráfica de um sistema					22	4		
Condição de existência					7	1		
Invente uma equação cuja raiz...			1	1			10	1
Total	**14**		**319**		**486**		**787**	

Concepção : Estudo de Estruturas

Tipo de atividades	5ª	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Escrita simbólica de expressões			51	35	88	12	8	6
Demonstrações								
Cálculo numérico	10	100	27	19	46	6	67	46
Reconhecimento e classificação de polinômios, identificar suas partes, Reconhecimento de uma equação, TQP, função.			41	28	77	11	44	30
Operações com polinômios, frações algébricas.			25	18	520	71	24	17
Aplicação de propriedades							2	1
Total	**10**		**144**		**731**		**145**	

Concepção : Estudo de Relações entre grandezas

Tipo de atividade	5ª	%	6ª	%	7ª	%	8ª	%
Problemas (cálculo de nº diagonais, preço unit. X valor a pagar, etc.)							40	33
Construção de gráficos							32	26
Domínio, imagem, zeros, ponto de máximo e mínimo							11	9
Estudo de sinal							39	32
Total							**122**	

Análise Global - Percentual

Concepções da álgebra	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**
Aritmética Generalizada	14		0,2	0,5
Resolução de equações	50	69	39.8	74
Estudo das Estruturas	36	31	60	14
Estudo das Relações entre grandezas	-	-	-	11,5

Anexo 2 - Concepções abordadas no livro didático - Coleção: *Tudo é Matemática* - Luiz Roberto Dante

Concepção : Aritmética Generalizada

Tipo de atividades	**5ª**	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Observe a seqüência ... Múltiplos,....	11	100	19	90	18	56	14	82
Propriedades			2	10	14	44	03	18
Total	**11**		**21**		**32**		**17**	

Concepção : Resolução de Equações

Tipo de atividades	**5ª**	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas, teoremas , etc			26	10	56	19	169	31
Resolva a equação , inequação, sistema..., verificar raiz	16	94	94	38	144	48	240	44
Relação com discriminante, soma e produto, vértice da parábola....							02	0,5
Determine as medidas indicadas nas figuras			66	26	38	13	77	14
Problemas onde o aluno deve interpretar, equacionar e resolver	1	6	62	25	39	13	48	8
Resolução gráfica de um sistema					17	6		
Fração geratriz							5	1
Invente uma equação cuja raiz...			2	1	6	1	**7**	1,5
Total	**17**		**250**		**300**		**548**	

Concepção : Estudo de Estruturas

Tipo de atividades	5ª	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Escrita simbólica de expressões	**3**	**27**	61	34	41	16	34	26
Demonstrações					6	2	24	18
Cálculo numérico	7	64	62	35	25	9,7	13	10
Reconhecimento e classificação de polinômios, identificar suas partes, Reconhecimento de uma equação, TQP, função.			12	7	28	11	40	30
Operações com polinômios, frações algébricas.			13	7	159	61	22	16
Aplicação de propriedades	1	9	30	17	1	0,3		
Total	**11**		**178**		**260**		**133**	

Concepção : Estudo de Relações entre grandezas

Tipo de atividade	5ª	%	6ª	%	7ª	%	8ª	%
Problemas (cálculo de nº diagonais, preço unit. X valor a pagar, etc.)			24	100	10	83	27	73
Construção de gráficos					2	17	10	27
Domínio, imagem, zeros, ponto de máximo e mínimo								
Estudo de sinal								
Total			**24**		**12**		**37**	

Análise Global - Percentual

Concepções da álgebra	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**
Aritmética Generalizada	28	4	5	2
Resolução de equações	44	53	50	75
Estudo das Estruturas	28	38	43	18
Estudo das Relações entre grandezas	-	5	2	5

Anexo 3 - Concepções abordadas no livro didático - Coleção: *A conquista da Matemática* - Castrucci, Giovanni e Júnior

Concepção : Aritmética Generalizada

Tipo de atividades	5ª	%	6ª	%	7ª	%	8ª	%
Observe a seqüência .... (desenhos) Na posição , a quantidade de □ , é dada pela expressão .... , nº diagonais ...					3	100	01	100

Concepção : Resolução de Equações

Tipo de atividades	**5ª**	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas, teoremas , etc			13	3%	61	14	216	32
Resolva a equação , inequação, sistema..., verificar raiz	16	76%	211	52%	72	16	177	26
Relação com discriminante, soma e produto, vértice da parábola....							73	11
Determine as medidas indicadas nas figuras			25	6%	216	49	157	23
Problemas onde o aluno deve interpretar, equacionar e resolver	5	24%	147	36%	85	19	59	8
Condição de existência					11	2		
Aplicação princípios de equivalência			14	3 %				
Total	**21**		**410**		**445**		**682**	

Concepção : Estudo de Estruturas

Tipo de atividades	5ª	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Escrita simbólica de expressões			47	38%	100	15	6	2,4
Demonstrações					15	2	21	8,4
Cálculo numérico	4	100%	50	40%	71	10	39	16
Reconhecimento e classificação de polinômios, identificar suas partes, Reconhecimento de uma equação, TQP, função.			8	7%	35	5	46	18,2
Operações com polinômios, frações algébricas.			1	1%	465	68	12	5
Aplicação de propriedades			17	14%			125	50
Total	**4**		**123**		**686**		**249**	

Concepção : Estudo de Relações entre grandezas

Tipo de atividade	5ª	%	6ª	%	7ª	%	8ª	%
Problemas (cálculo de nº diagonais, preço unit. X valor a pagar, etc.)					01	100	18	13
Construção de gráficos							24	17
Domínio, imagem, zeros, ponto de máximo e mínimo							62	45
Estudo de sinal							34	25
Total					**01**		**138**	

Análise Global - Percentual

Concepções da álgebra	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**
Aritmética Generalizada	11	2	1	-
Resolução de equações	75	75	39	64
Estudo das Estruturas	14	23	60	23
Estudo das Relações entre grandezas	-	-	-	13

Anexo 4 - Concepções abordadas no livro didático - Coleção: *Matemática Paratodos* - Imenes e Lellis

Concepção : Aritmética Generalizada

Tipo de atividades	**5ª**	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Observe a seqüência ... Múltiplos,....	25	96	15	75	5	83	11	100
Propriedades	1	4	5	25	1	17		
Total	**26**		**20**		**6**		**11**	

Concepção : Resolução de Equações

Tipo de atividades	**5ª**	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas, teoremas , etc			3	3	40	17	65	17
Resolva a equação , inequação, sistema..., verificar raiz	08	36	64	55	76	33	194	50
Relação com discriminante, soma e produto, vértice da parábola....							4	1
Determine as medidas indicadas nas figuras			12	10	52	22	61	16
Problemas onde o aluno deve interpretar, equacionar e resolver	14	64	34	29	60	26	49	13
Resolução gráfica de um sistema								
Fração geratriz								
Invente uma equação cuja raiz...			4	3	5	2	10	3
Total	**22**		**117**		**233**		**383**	

Concepção : Estudo de Estruturas

Tipo de atividades	5ª	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Escrita simbólica de expressões	11	100	30	49	39	19	9	7
Demonstrações					11	5	33	25
Cálculo numérico			20	32	44	22	13	10
Reconhecimento e classificação de polinômios, identificar suas partes, Reconhecimento de uma equação, TQP, função.					8	4	16	12
Operações com polinômios, frações algébricas.			8	13	94	47	55	43
Aplicação de propriedades			4	6	7	3	4	3
Total	**11**		**62**		**203**		**130**	

Concepção : Estudo de Relações entre grandezas

Tipo de atividade	5ª	%	6ª	%	7ª	%	8ª	%
Problemas (cálculo de nº diagonais, preço unit. X valor a pagar, etc.)			25	100	16	100	47	75
Construção de gráficos							15	24
Domínio, imagem, zeros, ponto de máximo e mínimo							1	1
Estudo de sinal								
Total			**25**		**16**		**63**	

Análise Global - Percentual

Concepções da álgebra	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**
Aritmética Generalizada	44	9	1	2
Resolução de equações	37	52	51	65
Estudo das Estruturas	19	28	44	22
Estudo das Relações entre grandezas	-	11	4	11

Anexo 5 - Concepções abordadas no livro didático - Coleção: *Matemática hoje é feita assim* - Antonio José Lopes Bigode

Concepção : Aritmética Generalizada

Tipo de atividades	5ª	%	6ª	%	7ª	%	8ª	%
Observe a seqüência .... (desenhos) Na posição , a quantidade de □ , é dada pela expressão .... , nº diagonais ...	02	22	23	50	14	50	12	70
Propriedades	07	78	21	46	14	50	5	30
A = b ⇨a+ c = b + c			2	4				
Total	**09**	**100**	**46**	**100**	**28**	**100**	**17**	**100**

Concepção: Resolução de Equações

Tipo de atividades	**5ª**	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas, teoremas , etc	07	**37**	-		11	9	132	30
Resolva a equação , inequação, sistema..., verificar raiz	09	47	51	59	46	39	225	52
Representação gráfica de um sistema....					18	15		
Determine as medidas indicadas nas figuras			16	18			34	8
Problemas onde o aluno deve interpretar, equacionar e resolver			14	16	41	34	23	5
Pirâmide, quadro mágico	03	16	05	6				
Invente uma equação....			01	1	4	3	21	5
Total	**19**	**100**	**87**	**100**	**120**	**100**	**435**	**100**

Concepção: Estudo de Estruturas

Tipo de atividades	5ª	**%**	**6ª**	**%**	**7ª**	**%**	**8ª**	**%**
Escrita simbólica de expressões			38	66	83	19		
Demonstrações							7	5
Cálculo numérico			09	15	174	41	6	4
Reconhecimento e classificação de polinômios, identificar suas partes, Reconhecimento de uma equação, TQP, função.			11	19	5	1	41	30
Operações com polinômios, frações algébricas.					165	39	84	61
Aplicação de propriedades								
Total			**58**	**100**	**427**	**100**	**138**	**100**

Concepção : Estudo de Relações entre grandezas

Tipo de atividade	5ª	%	6ª	%	7ª	%	8ª	%
Problemas (cálculo de nº diagonais, preço unit. X valor a pagar, etc.)					12	100	26	23
Construção de gráficos							59	53
Domínio, imagem, zeros, ponto de máximo e mínimo							25	23
Estudo de sinal							1	1
Total					**12**	**100**	**111**	**100**

Análise Global - Percentual

Concepções da álgebra	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**
Aritmética Generalizada	32	24	5	2
Resolução de equações	68	46	20	62
Estudo das Estruturas	-	30	73	20
Estudo das Relações entre grandezas	-	-	2	16

APÊNDICE

Apêndice A – Caderno de Atividades

PRODUTO FINAL

Durante o desenvolvimento de nossa pesquisa, elaboramos atividades que, a partir de padrões de regularidade, proporcionassem a nossos alunos da Educação Básica experiências conduzindo ao desenvolvimento do pensamento algébrico e favorecesse a compreensão da linguagem algébrica. Nosso objetivo era, por meio dessas atividades, valorizar a construção pelo aluno de uma linguagem algébrica significativa, diminuindo, assim, a incidência de erros cometidos na manipulação de expressões algébricas.

Apresentamos essas atividades como produto final de nossa pesquisa.

Optamos por uma apresentação em forma de um Caderno de Atividades (CA). Nesse caderno encontramos 32 atividades que exploram padrões de regularidade, sendo, cada uma delas, dividida em três partes:

1. **Apresentação do padrão;**
2. **Roteiro da atividade a ser desenvolvida a partir do padrão apresentado;**
3. **Orientações metodológicas sobre a atividade.**

Na primeira parte, apresentação do padrão, utilizamos materiais concretos, desenhos, tabelas, problemas, operações etc. Todos os padrões envolvidos nas atividades foram analisados e categorizados de acordo com suas especificidades. Essa categorização e o objetivo específico de cada atividade apresentamos na tabela abaixo:

Categoria de Padrões		Atividades	Objetivos
Estr utur	Geométrico	01 – 04 – 08 – 17 - 18	Construir intuitivamente fórmulas usadas em geometria a partir de investigações.

	Numérico	10 – 14 – 25 – 27 - 31	Estabelecer generalização na formação de estruturas numéricas.
	Algébrico	16	Construir intuitivamente regras de produtos notáveis a partir de investigações.
Figurativo	Palito	12	Estabelecer uma lei de formação para a formação de “m” figuras a partir de “n”palitos.
	Fractais	19	Estabelecer uma lei de formação para “t” triângulos brancos posicionando “p” figuras.
	Mosaico	02 – 07 - 21	Estabelecer relações entre grandezas distintas de um mesmo mosaico.
	Cestas	20	Estabelecer relações entre grandezas distintas de uma cesta.
	Geométrico	29	Estabelecer relações entre figura e seu posicionamento na seqüência.
Numérico	Seqüencial	03 - 05 – 09 – 22 - 28	Estabelecer relações entre o número e seu posicionamento na seqüência.
	Operacional	06 – 23 – 30	Conseguir efetuar cálculos mentais a partir de observação de regularidades.
	Geométrico	26	Estabelecer relação entre a posição e o polígono construído.
Movimento	Lúdico	15	Construir uma fórmula que determine o número mínimo de movimentos da Torre de Hanói.
	Figurativo	24 – 32	Estabelecer uma regra de posicionamento da figura a partir do movimento de rotação.
Relação	Objetos	11	Estabelecer uma relação entre total de mesas e pessoas assentadas.
	Grandezas	13	Estabelecer uma relação entre o valor arrecadado e o número de lugares vagos no vôo.

Aqui, denominamos padrão estrutural todo aquele que, ao desenvolver questões acerca de sua formação, o caminho percorrido nos conduz à elaboração de alguma fórmula geométrica, algébrica e/ou numérica já existente, e que, a posteriori, favorece a resolução de algumas situações problemas. Padrão figurativo é todo aquele que envolve algum tipo de desenho com regularidades, simetrias e que, a partir de uma análise das grandezas envolvidas em sua formação, conseguimos estabelecer uma generalização. Apesar de todos os padrões, quando analisados, nos conduzir a um padrão numérico, aqui chamaremos numéricos somente aqueles que partem de uma seqüência ou de uma relação numérica. Classificamos como padrões de movimentos as estruturas que, quando analisadas, envolvem algum movimento uniforme. Por exemplo: o movimento de rotação que encontramos na atividade 24, quando alteramos o triângulo interno colorido no hexágono. Quando nos referimos aos padrões de relação, estaremos falando daqueles padrões que partem de uma relação e não daqueles que conduzem a uma relação. Conduzir a uma relação é característica freqüente em todas as atividades elaboradas.

Todas as atividades foram construídas com o propósito de desenvolver no aluno a habilidade de observar, intuir, argumentar, comunicar, justificar, verificar, generalizar, expressar-se, usando mais de uma linguagem para que ele possa experimentar um pouco do processo de criação da Matemática.

Diante dos objetivos propostos para cada padrão elaborado, apresentamos alguns questionamentos com níveis de dificuldades crescentes, que deveriam conduzir, de forma gradativa, ao alcance de nossa meta.

Na terceira parte da atividade, apresentamos algumas orientações metodológicas que têm o propósito de contribuir com o trabalho do professor em sala de aula. Essas orientações foram construídas a partir de uma avaliação que fazíamos diante de cada atividade aplicada. Dentre os quesitos pontuados estão:

- Abordagens possíveis de conteúdos matemáticos;
- Metodologia de trabalho (individual, dupla, trios etc);
- Possibilidades de enriquecimento do trabalho a partir de atividades similares;
- Outras abordagens possíveis a partir da mesma atividade;
- Indicação de outras ferramentas que o professor poderá utilizar para conduzir o sucesso da atividade;
- Esclarecimentos acerca do padrão utilizado;
- Indicação de pré-requisitos necessários para abordagem da atividade;
- Estratégias para a avaliação;
- Dicas de materiais alternativos para a realização da atividade;
- Cuidados que o professor deve ter com o intuito de garantir o sucesso da atividade.

Nosso objetivo é que esse material possa contribuir com o ensino da Álgebra de forma significativa na Educação Básica. Que o professor, utilizando qualquer uma das atividades propostas, tenha resultados positivos e sinta-se motivado não só a utilizar-se de outras como também criar experiências novas, com padrões de regularidade que estimulem, além da habilidade em manipulações algébricas, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Atividade 1

Pavimentação do plano com polígonos regulares de um só tipo:

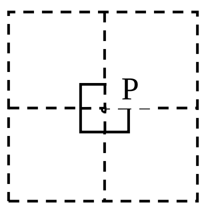
Material utilizado:

Vários polígonos regulares e congruentes: (quadrados, triângulos, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos etc.) confeccionados com papel cartão, cartolina, madeira ou mesmo um emborrachado.

OBS: Quanto mais perfeito os recortes, melhor o resultado do experimento.

Desenvolvimento da atividade:

1) Sem sobreposição de figuras, é possível pavimentar sua carteira utilizando apenas quadrados?
2) E utilizando apenas triângulos? Foi possível cumprir a tarefa?
3) Agora, utilizando pentágonos, verifique a possibilidade de pavimentar um plano.
4) Investigue, experimentando com os outros polígonos regulares que tiver em mãos, quais nos dão a possibilidade de pavimentação perfeita, ou seja, sem sobreposição de figuras.
5) Em cada um dos experimentos, considere um ponto P qualquer e identifique, como na figura abaixo, quantos polígonos de cada tipo são necessários para uma perfeita pavimentação.



5) Com base nos experimentos, complete a tabela:

Polígono	Nº de lados	Ângulo interno	Nº de polígonos ao redor do pto.	Pavimentação perfeita?

6) Agora, responda:

A) Qual é maior número de lados que pode ter um polígono para que consigamos uma pavimentação perfeita? Justifique.
B) Um decágono pavimenta um plano? Por quê?
C) Seja "k", o número de polígonos colocados ao redor do ponto e "a" a medida dos ângulos internos desse polígono. Estabeleça uma relação que comprove a pavimentação sem a realização do experimento.

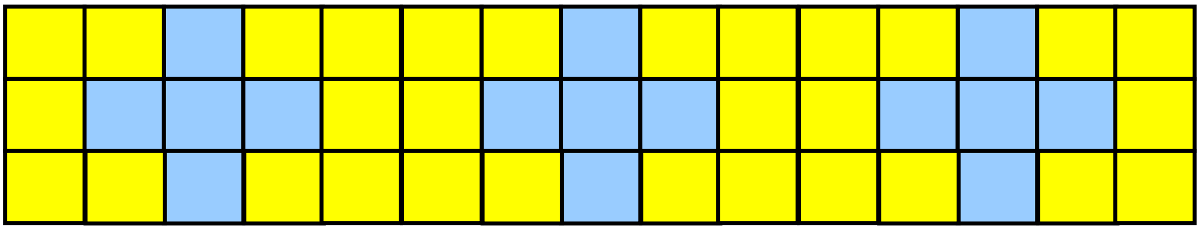
Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutura geométrica
Pré-requisitos	Polígono regular – Classificação quanto ao número de lados e identificação dos ângulos internos.
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Área de figuras planas, composição de figuras, polígonos regulares
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Ampliar o número de questionamentos caso a turma necessite. • Solicitar que os alunos façam o registro na tabela imediatamente após a composição dos polígonos sobre a carteira. • Ao final da atividade é interessante propor aos alunos que façam a verificação da resposta do item 6c para validar a expressão.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Pode-se explorar com o mesmo material, atividades que envolvam pavimentação de polígonos regulares diferentes

Atividade 2

Faixa Decorativa 1

Desenvolvimento da atividade:

Observe a faixa decorativa abaixo:



1) Como será colorida a 20ª coluna?

2) Descreva a característica da 89ª coluna. Explique o raciocínio.

3) Você consegue descrever algum padrão que foi utilizado para colorir a tira decorativa acima? Descreva-o.

4) A faixa acima apresenta uma periodicidade. Quantas colunas são necessárias para fechar um período?

5) A cada período completo responda:

A. Quantos quadradinhos são amarelos?
B. Quantos são azuis?
C. E o total?

6) Complete a tabela abaixo:

Períodos	Azuis	Amarelos	Total
01			
02			
03			
08			
25			
P			

7) A partir da faixa decorativa e observando a tabela acima, estabeleça uma relação entre o número de quadradinhos amarelos e azuis.

Orientações metodológicas	
Padrão	Figurativo mosaico
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Múltiplos, expressões algébricas, equações, funções
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Ampliar o número de questionamentos caso a turma necessite. • Ao final da atividade é interessante propor aos alunos que façam a verificação da resposta do item 7 para validar a expressão.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Pode-se explorar com o mesmo material, outras faixas decorativas criadas pelo professor.

Atividade 3

Tabela

Desenvolvimento da atividade:

Observe a tabela abaixo:

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32		30		28			25
		35					
				44			
64							

1) Obedecendo a regra de formação, complete-a.
2) A partir da tabela, indique a linha e a coluna ocupadas pelo número 38.
3) Agora, indique a linha e a coluna ocupadas pelo número 56.
4) Se continuássemos completando essa tabela, que número ocuparia a décima linha e a oitava coluna?
5) Que linha ocuparia o número 103? Por quê?
6) Agora, responda: que coluna o número 103 ocuparia? Explique o raciocínio que você utilizou para resolver esse problema.
7) Que número ocuparia a 30 ª linha, 8 ª coluna?
8) Você consegue descrever uma expressão que nos dê todos os números que ocuparão a última coluna em função da linha?
9) Com essa expressão, é possível localizar qualquer número? Como?

Orientações metodológicas	
Padrão	Numérico seqüencial
Pré-requisitos	Operações básicas.
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Múltiplos, expressões algébricas, equações, funções e progressões aritméticas.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Ampliar o número de questionamentos caso a turma necessite. • Ao final da atividade é interessante propor aos alunos que façam a verificação da resposta do item 8 para validar a expressão.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Discutir com os alunos todas as possibilidades de raciocínio possível para realização da atividade. O professor poderá propor a generalização de qualquer coluna em função da linha.

Atividade 4

Pirâmides

Material utilizado:

Pirâmides de base triangular, quadrada, pentagonal, hexagonal etc. (Podem ser confeccionadas em madeira, vidro, plástico, emborrachado, papel cartão, ou até mesmo cartolina).

Planificação de cada modelo utilizado na atividade.

Desenvolvimento da atividade:

1) Considerando uma pirâmide de base triangular, indique:

A) Número de arestas

B) Número de faces

C) Número de vértices

2) Faça o mesmo procedimento com uma pirâmide de base quadrada, base hexagonal, base pentagonal etc.

3) Construa uma tabela, identificando a pirâmide, o número de vértices, arestas e faces.

4) Uma pirâmide de base pentadecagonal (15 lados) tem quantos vértices, arestas e faces?

5) Agora, considerando uma pirâmide de "n" lados na base, você consegue identificar seu número de vértices, arestas e faces?

Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural geométrico
Pré-requisitos	Geometria plana
Segmento	Séries finais do E. Fundamental.
Conteúdos abordados	Pirâmide
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• A planificação dos modelos é um excelente recurso para um trabalho intuitivo sobre questões de área lateral e total da figura. • Ao final da atividade é interessante propor aos alunos que façam a verificação da resposta do item 5 para validar a expressão.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Uma atividade similar poderá explorar conhecimentos a cerca dos prismas e da relação de Euler.

Atividade 5

Seqüência numérica oscilante

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência oscilante:

1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2...

OBS.: Seqüência retirada da Revista EUREKA nº 19/2004 p. 7.

1) Obedecendo ao mesmo padrão acima, qual será o 32º termo da seqüência?

2) Qual será o 42º termo?

3) Você consegue estabelecer alguma relação entre a ordem e o termo que aparecem na seqüência?

4) Sem descrever toda a seqüência, qual será o 100 º termo?

5) Que procedimento você usou para chegar a essa resposta?

6) Qual é o 2007º termo da seqüência?

7) Escrevendo toda a seqüência, do 1º ao 1000º termo, quantas vezes aparece o número 2? Explique o raciocínio usado para a resolução dessa questão.

8) O número 5 aparece o mesmo número de vezes que o 2? Justifique sua resposta.

Orientações metodológicas	
Padrão	Numérico seqüencial
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio
Conteúdos abordados	Múltiplos, funções, seqüências
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor atividades mais simples antes de propor a atividade 5. • Um item importante nessa atividade é apresentar para a turma os diferentes raciocínios utilizados pelos grupos para solucionar o problema.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá criar outras seqüências para trabalhar na mesma perspectiva.

Atividade 6

Curiosas multiplicações

Desenvolvimento da atividade:

Observe as multiplicações a seguir:

101 x 11 = 1111

101 x 111 = 11211

101 x 1111 = 112211

101 x 11111 = 1122211

1) Qual será o resultado do produto 101 x 111111?

2) E o resultado de 101 x 1111111111?

3) Considerando o 1º fator o número 101 e o produto 112222222222211, qual será o 2º fator?

4) Que raciocínio você usou para responder ao item anterior? Descreva-o.

5) Verifique a veracidade de seu raciocínio, conferindo os resultados das multiplicações anteriores.

6) Agora, responda: Qual é a soma dos algarismos do número obtido, quando multiplicamos 101 pelo número $\underbrace{11111\ldots111}_{2007\,vezes-número\,1}$?

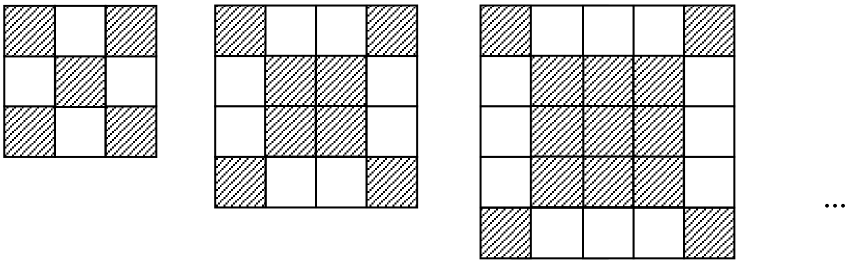
Orientações metodológicas	
Padrão	Numérico operacional
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio
Conteúdos abordados	Multiplicações, produtos notáveis, funções
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• O professor poderá, ainda, propor que os alunos tentem justificar a regra de formação para o produto analisando a multiplicação. Questionando por exemplo: Por que o termo das unidades simples é sempre o um, ou, ainda, por que não aparecem algarismos diferentes do um e do dois nesse produto?
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá criar outras multiplicações que possam ser trabalhadas com essa perspectiva.

Atividade 7

Mosaicos

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência:



OBS.: Aqui consideraremos como ordem, o número de quadradinhos de cada lado da figura.

1) Quantos quadradinhos brancos há na figura de ordem 3?

2) Agora, responda: quantos quadradinhos brancos há na figura de ordem 4. E na figura de ordem 5?

3) Desenhe uma figura que represente a ordem 8 e responda quantos quadradinhos pretos e quantos brancos aparecem.

4) Em alguma figura, seguindo esse padrão, aparecerão 68 quadradinhos pretos? Se existir, qual é a sua ordem? Explique seu raciocínio.

5) Você consegue estabelecer alguma relação entre a ordem e o total de quadradinhos brancos e pretos?

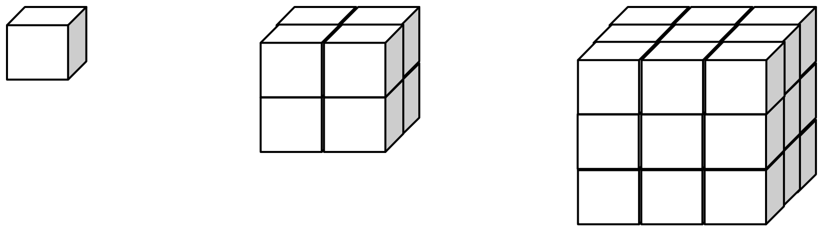
Orientações metodológicas	
Padrão	Figurativo mosaico
Pré-requisitos	Operações básicas.
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Potências, equações do 2° grau, expressões algébricas, funções.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • Discussão com a turma sobre os raciocínios utilizados é uma experiência que enriquece a realização do trabalho. • O professor poderá propor a confecção de uma tabela para auxiliar aos alunos na intuição do item 5 • Também deverá propor a verificação da expressão para validar a mesma.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá criar outros mosaicos para trabalhar com essa perspectiva.

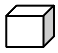
Atividade 8

Volume de um cubo

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência:



Para essa atividade, onde falarmos de cubinho, estaremos considerando essa figura  e seu volume será equivalente a uma unidade.

1) Quantos cubinhos foram usados na figura 1? Qual o seu volume?

2) Quantos cubinhos foram usados na figura 3? Qual seu volume total?

3) Continuando a seqüência com o mesmo padrão, quantos cubinhos serão necessários para obtermos a figura de número 6?

4) Com esse mesmo número de cubinhos, é possível construir um sólido diferente? Faça a representação desse sólido. O seu volume permanecerá o mesmo?

5) Agora, imagine que iremos pintar todas as faces do sólido construído. Gastaremos mais tinta para pintar o cubo ou o novo sólido criado? Justifique sua resposta.

6) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de cubos utilizados em cada lado e o volume do sólido obtido?

Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural geométrico
Pré-requisitos	Operações básicas e conceito de volume.
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Volume de um cubo, área lateral e área total de prismas, função
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• O professor poderá propor a criação de vários sólidos no item 5 e discutir questões de economia a cerca da fabricação de embalagens. • Propor a verificação da atividade 7 com o intuito de validar a mesma.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá criar atividades similares explorando o volume de um prisma qualquer.

Atividade 9

Função

Desenvolvimento da atividade:

Seja a função f definida por:

x	1	2	3	4	5
F (x)	4	1	3	5	2

Extraído da revista EUREKA, nº 22, p.12.

Por exemplo f (2) = 1 , f (1) = 4 etc.

Considerando uma seqüência formada a partir de várias composições desta f (x), responda:

1) Orientados pela tabela, podemos dizer que f (f (2)) é igual a:

2) Complete a tabela até o 10º termo da seqüência, partindo de f (2).

3) Qual é o valor de f (f (f (f (4))))?

4) Quantas vezes, até o 20º termo da seqüência, partindo de f (4), aparecerá o valor 3? E o 2?

5) Você consegue definir alguma regularidade? Descreva-a.

6) Por fim, quanto vale $\underbrace{f(f(f(\ldots f(f(4))))}_{2007\,vezes}$?

Orientações metodológicas	
Padrão	Numérico seqüencial
Pré-requisitos	Operações básicas, funções
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio
Conteúdos abordados	Múltiplos, funções (composição de funções), seqüências
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• O professor poderá propor questionamentos complementares, caso seja necessário para o êxito da atividade. • Propor uma discussão entre os grupos de trabalho sobre os tipos de raciocínios utilizados.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá criar outras seqüências para trabalhar na mesma perspectiva.

Atividade 10

Triângulo de Pascal

Desenvolvimento da atividade:

Considerando a formação do triângulo de Pascal, faça o que se pede:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}$$

1) Construa um triângulo, usando apenas os resultados dos binomiais encontrados.

2) Observe os resultados encontrados e faça um relatório, detalhando todas as observações feitas pelo grupo.

3) As observações feitas pelo grupo têm caráter que estabelecem alguma generalização, simetria ou propriedade? Identifique-as, fazendo uma justificativa.

5) Essas observações são passíveis de demonstrações que comprovem, matematicamente, sua veracidade?

6) Discuta com o grupo e tente efetuar essas demonstrações, usando corretamente a linguagem matemática.

Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural numérico
Pré-requisitos	Análise combinatória
Segmento	Ensino. Médio
Conteúdos abordados	Triângulos de Pascal, combinação simples, equações, expressões algébricas
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Para realização dessa atividade, o professor necessitará, no mínimo, de 6h/a e, de preferência, com aulas geminadas, para que não fragmente tanto o trabalho. • Fazer interferências apenas quando necessário, deixando que os alunos procurem uma solução com seus argumentos. • Durante a realização da atividade, o professor deverá ficar atento para que os alunos contemplem, em suas observações, as propriedades fundamentais do Triângulo, os números complementares e a relação de Sttifel.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá propor, após a realização da atividade, um trabalho interdisciplinar com a Biologia com o intuito de mostrar uma aplicação para o conteúdo e avaliar o resultado do trabalho investigativo.

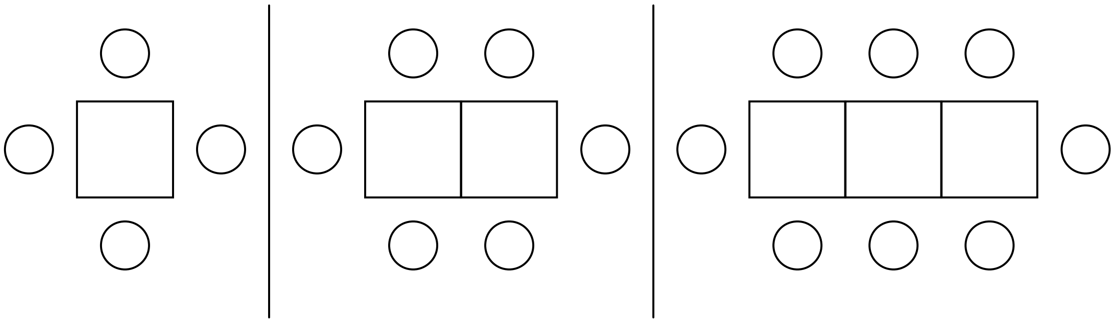
Atividade 11

Mesas X Cadeiras

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência abaixo:

Orientações: Nessa atividade, quadrados representam mesas e círculos representam as cadeiras e, conseqüentemente, o número de pessoas que podem se acomodar às mesas.



1) Quantas pessoas conseguimos acomodar usando 3 mesas?

2) Quantas pessoas conseguimos acomodar usando 4 mesas?

3) Quantas pessoas conseguimos acomodar usando 10 mesas?

4) Quantas mesas são necessárias para acomodar 42 pessoas?

5) É possível acomodar 86 pessoas utilizando essa disposição? De quantas mesas precisaríamos?

6) Você consegue descrever uma regra que associe, de forma geral, o número de mesas com o número de pessoas?

Orientações metodológicas	
Padrão	Relação objetos
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	E. Fundamental
Conteúdos abordados	Operações, expressões algébricas, equações, funções.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos que conduzam ao êxito da realização da atividade. • Propor a elaboração de uma tabela poderá auxiliar no raciocínio. • Propor a verificação do item 6 para validar a relação estabelecida.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá criar outras formas de agrupamento de pessoas com o mesmo propósito dessa atividade, por exemplo, colocando 6 pessoas em cada mesa.

Atividade 12

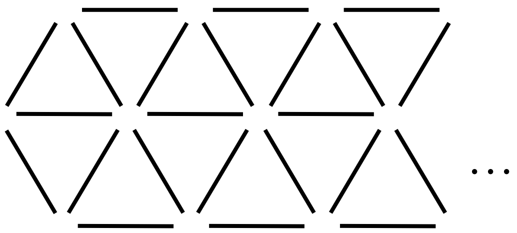
Hexágonos, triângulos e palitos

Material:

Palitos de fósforo

Desenvolvimento da atividade:

1) Construa sobre sua carteira uma seqüência de triângulos eqüiláteros e, a partir desses triângulos, construa hexágonos regulares, conforme mostra o desenho abaixo:



2) Quantos palitos serão necessários para construirmos uma seqüência com 4 hexágonos?

3) Quantos palitos serão necessários para construirmos uma seqüência com 6 hexágonos?

4) Uma pessoa com 75 palitos conseguirá formar uma seqüência de quantos hexágonos?

5) Quantos palitos serão necessários pra construirmos uma seqüência com 35 hexágonos?

6) Você consegue escrever uma expressão que relacione, de forma geral, o número de hexágonos e o número de palitos? Como?

7) Verifique a validade da expressão usada por você.

Orientações metodológicas	
Padrão	Figurativo palito
Pré-requisitos	Operações básicas, polígonos
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, polígonos, progressões aritméticas
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá explorar questões, como: composição de figuras, áreas e perímetros.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá criar outras figuras para trabalhar com a mesma perspectiva, ou ainda, explorar, dentro da mesma atividade, o número de triângulos em função dos hexágonos.

Atividade 13

Economia aérea

Desenvolvimento da atividade:

Leia atentamente o problema proposto:

"Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia aérea cobrou de cada passageiro R$800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago no vôo. Qual deve ser o número de passageiros para que a companhia tenha lucro máximo?"

Responda aos questionamentos abaixo:

1) Caso o avião faça a viagem completo, ou seja, com todos os lugares ocupados, qual será o montante arrecadado pela empresa?
2) E tendo apenas um lugar vago, terá uma arrecadação maior ou menor que a anterior?
3) Faça o cálculo agora, para 98 lugares ocupados.
4) O que você fez para efetuar esse cálculo?
5) Agora, complete a tabela abaixo:

Total de lugares	Total de lugares vagos	Total de passageiros	Valor pago por passageiro	Total arrecadado pela empresa
100	0	100	800,00	
100	1	99	810,00	
100	2			
100	3			
100	4			
100	5			
100	...			

6) Você consegue estabelecer uma relação entre o total arrecadado pela empresa e o número de lugares vagos no vôo? Explique seu raciocínio.
7) Com essa relação, é possível responder ao problema mencionado? Explique.

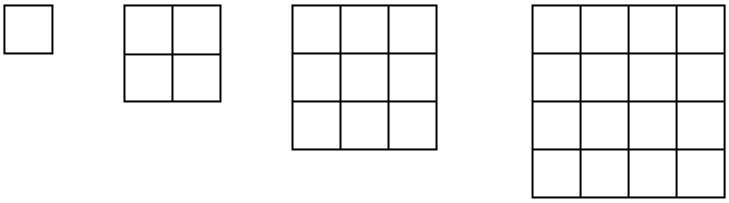
Orientações metodológicas	
Padrão	Relação grandezas
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações de 2° grau, funções (valor de máximo)
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá mudar o valor a ser pago por lugar vago e discutir o lucro da empresa. • O professor poderá, também, fazer opção por trabalhar o problema sem questionamentos e deixar que o aluno encontre a solução do problema fazendo uso ou não da expressão algébrica.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor criar outros tipos de problemas que explorem questões acerca de máximos e mínimos na função do 2º grau.

Atividade 14

Quadrados perfeitos:

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência abaixo:



1) Desenhe a 5ª figura da seqüência. Quantos quadradinhos terá essa figura?

2) Agora, sem desenhar, tente responder: quantos quadradinhos terá a 6ª figura?

3) Com 100 quadradinhos você consegue desenhar uma figura semelhante às da seqüência acima? Que posição ela ocupará na seqüência?

4) Quantos quadradinhos serão dispostos na 15ª figura?

5) Escreva uma expressão que relacione o número de quadradinhos da base e o total de quadradinhos da figura?

Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural numérico
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, progressão aritmética.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá propor que os alunos elaborem uma tabela para facilitar a conclusão da atividade.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Essa atividade proporciona um momento privilegiado de conexão de dois conteúdos básicos: função do 2º grau e soma dos termos de uma progressão aritmética.

Atividade 15

Torre de Hanói

Material:

Jogos da torre de Hanói

Desenvolvimento da atividade:

Distribuir um jogo da Torre de Hanói para cada dupla, contando a história relacionada ao jogo.

Quebra-cabeça vendido em 1883 como Torre de Brahma. Vinha acompanhado por uma história (lenda) que dizia:

Num grande templo em Benares (Índia), há uma placa de metal onde estão fixos 3 pinos de diamantes. No momento da criação, o Deus Brahma colocou 64 discos de ouro puro, o maior deles na base e os restantes em ordem decrescente de tamanho até o topo. Dia e noite, incessantemente , os monges se revezavam, transferindo os discos de um pino para o outro, obedecendo às leis imutáveis fixadas pelo Deus: transferir um disco de cada vez, de modo que jamais um disco maior seja posto sobre o menor, com o menor número de movimentos. Quando os 64 discos de ouro forem transferidos do pino em que Deus os colocou, templo e brâmanes virarão pó e, com um estrondo, o mundo desaparecerá. Se desrespeitassem as leis, haveria maremoto e terremoto. Quando eles terminassem, o mundo desapareceria. Se a história fosse verdadeira e os monges conseguissem manter a média de um disco por segundo, eles levariam muitos bilhões de anos para transferir os 64 discos, ou seja, seriam *18446744073709551615 movimentos, que levariam 584942417355 anos para terminar*[32].

2) Explicar as regras do jogo:

- Marcar 3 pontos (ABC) no papel.
- Colocar as peças em A, em ordem decrescente, com a maior na base.
- Passar uma de cada vez, na ordem que estão.
- Nunca sobrepor peça maior sobre a menor.
- Mudar a torre de lugar com o menor número possível de movimentos.

[32] Texto adaptado de BALDUÍNO, Grazielle Eloísa. **Torre de Hanói**. Disponível em: http://www.escoladacrianca.com.br/TORRE%20DE%20HANOI-%20uma%20historia%20divertida.ppt#268. Acesso em: 10 jul. 2008.

3) Complete a tabela abaixo:

Peças	**Descrição dos movimentos**	**Nº de movimentos**
3	A B A C A B A	7 movimentos
4		
5		
6		

4) Responda aos questionamentos:

a) Como são os movimentos das peças?

b) O que acontece com a peça maior?

c) O que acontece com a peça menor?

d) O que acontece com a penúltima peça?

e) Qual a diferença entre o número de movimentos, a partir do momento que você muda a quantidade de peças?

f) Se dispuséssemos de 10 discos, qual seria o número mínino de movimentos necessários para a transposição?

g) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de discos e o número mínimo de movimentos necessários?

Orientações metodológicas	
Padrão	Movimento lúdico
Pré-requisitos	Jogo Torre de Hanói, Potenciação.
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, simetria.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Antes do início da atividade, o professor deverá explicar o funcionamento do jogo para a turma e deixar que os alunos manipulem o jogo por alguns minutos. • À medida que os alunos vão explorando o jogo, o professor deverá percorrer os grupos orientando para que os alunos procurem o menor número de movimento possível. • Para o item 4 g, o aluno deverá elaborar uma tabela para facilitar suas conclusões.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O jogo poderá ser explorado em séries iniciais apenas como desafio matemático.

Atividade 16

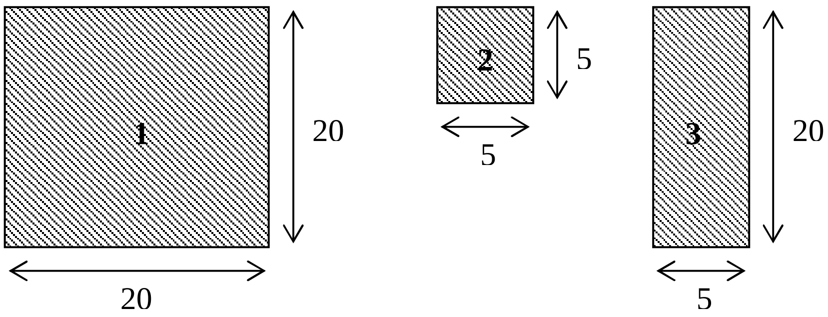
Quadrado da soma

Material:

Cartolina, tesoura, régua.

Desenvolvimento da atividade:

Observe as figuras:



1) Desenhe e recorte figuras com as medidas indicadas acima.

Observação: Deverão ser confeccionadas duas figuras iguais à de numero 3.

2) De posse dessas 4 figuras e usando todas elas, monte um quadrado.

3) Você consegue calcular a área total da figura formada?

Observação: Tente fazer esse cálculo usando pelo menos dois procedimentos diferentes.

4) Escreva em seu caderno os procedimentos utilizados.

5) Mude as dimensões das figuras e faça o mesmo procedimento dos itens 2, 3 e 4.

6) Suponhamos que desconhecemos as medidas das figuras e, então, usaremos um símbolo qualquer para representar o maior lado das figuras e um outro para representar o lado menor. (Sugestão: a e b, x e y, k e w, b e c etc.) Usando essas medidas, faça o mesmo procedimento dos itens 2, 3 e 4.

7) A partir dos itens 4, 5 e 6 você conseguiu chegar a alguma conclusão? Descreva-a.

Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural algébrico
Pré-requisitos	Operações básicas, área de figuras planas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, área de figuras planas, operações com polinômios, produtos notáveis, composição de figuras.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Se for necessário, indicar algumas medidas para que o aluno possa trabalhar com o item 6. • Peça que os alunos representem a solução sempre usando dois raciocínios e que faça o registro de tudo.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá, usando processos similares, desenvolver o quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença de dois termos.

Atividade 17

Diagonais

Material :

Folha de papel, régua, lápis, borracha.

Desenvolvimento da atividade:

1) Desenhe em seu caderno polígonos que tenham 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 lados.

2) Nomeie todos os vértices dos polígonos construídos.

3) Trace, nesses polígonos, todas as diagonais possíveis.

4) Construa uma tabela, contendo o número de lados, nome, número de diagonais de cada vértice e o total de diagonais.

5) Observando a tabela, tente responder aos seguintes questionamentos:

a) Sem desenhar, responda: quantas diagonais tem um icoságono?

b) É possível traçar um polígono que tenha exatamente 740 diagonais? Justifique.

c) E um polígono com 60 diagonais? Justifique.

d) Você consegue estabelecer algebricamente uma relação entre o número de lados e o número de diagonais de um polígono?

5) Elabore um relatório com as conclusões do grupo.

Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural geométrico
Pré-requisitos	Polígonos, operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, cálculo do número de diagonais de um polígono qualquer.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • É interessante que, ao término da atividade, o professor proponha ao aluno que faça a verificação do item 5 d com o intuito de validar sua conclusão.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Após a realização da atividade, o professor poderá explorá-la em problemas de contagem simples.

Atividade 18

Soma dos ângulos internos de um polígono qualquer

Material :

Folha de papel, régua, tesoura, lápis de cor e cola.

Desenvolvimento da atividade:

1) Desenhe em seu caderno polígonos que tenham 3, 4 , 5, 6 , 7 , 8 , 9 e 10 lados.

2) Usando lápis de cor, pinte cada um dos ângulos internos dos polígonos desenhados.

3) Usando uma tesoura, recorte o polígono de 3 lados.

4) Divida o triângulo em três partes, de modo que cada ângulo interno pertença a uma dessas partes.

5) Junte os três ângulos e cole a figura em seu caderno.

6) O que você observou?

7) Faça o mesmo procedimento com um polígono de quatro lados.

8) Relate novamente suas observações.

9) Dá para executar o mesmo procedimento com um polígono de 5 lados? E de 6? Por quê?

10) Usando a experiência com triângulos, você consegue descobrir a soma dos ângulos internos desses dois polígonos? E dos demais?

11) Construa uma tabela em seu caderno semelhante ao modelo projetado abaixo:

Polígono	**Número de ângulos internos**	**Nº de triângulos obtidos ****	**Soma dos ângulos internos**

12) Observando a tabela, tente responder aos seguintes questionamentos:

a) Sem desenhar, qual a soma dos ângulos internos de um pentadecágono?

b) E de um icoságono?

c) Existe um polígono convexo cuja soma dos ângulos internos seja 4500º? Justifique sua resposta.

d) E um polígono cuja soma seja 5100º? Justifique sua resposta.

e) Você consegue estabelecer algebricamente uma relação entre o número de vértices e a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer?

13) Faça um relatório com todas as observações feitas pelo grupo.

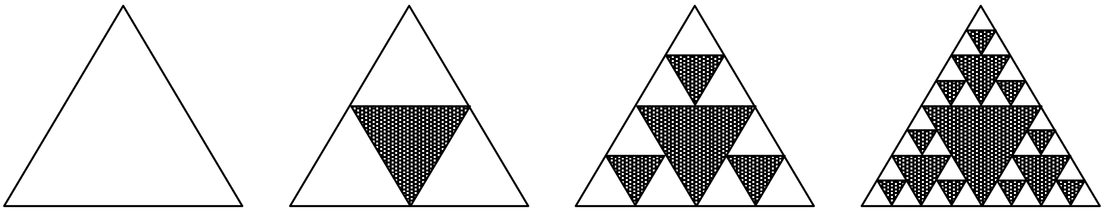
Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural geométrico
Pré-requisitos	Operações básicas, polígonos, ângulos.
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio.
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá propor que os alunos façam a verificação do item 12 d para validar a expressão. • É importante que o professor conduza a turma para que todos percebam a possibilidade de dividir a figura em triângulos que tenham como vértice parte de um dos vértices da figura e que nenhum deles tenha área em comum.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Com base nessa atividade, o professor poderá conduzir a turma para que determinem uma expressão para o cálculo de um ângulo interno de um polígono regular. Poderá explorar, ainda, a soma dos ângulos externos e central.

Atividade 19

Triângulo de Sierpinsk

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência:



1) Quantos triângulos brancos aparecem na segunda figura?

2) E na figura de número 4?

3) Continuando a seqüência e utilizando o mesmo padrão, quantos triângulos brancos aparecem na quinta figura?

4) Existirá alguma figura nessa seqüência contendo 243 triângulos brancos? Se existir, que ordem ela ocupará? Explique seu raciocínio.

5) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de triângulos brancos e a ordem ocupada pela figura na seqüência?

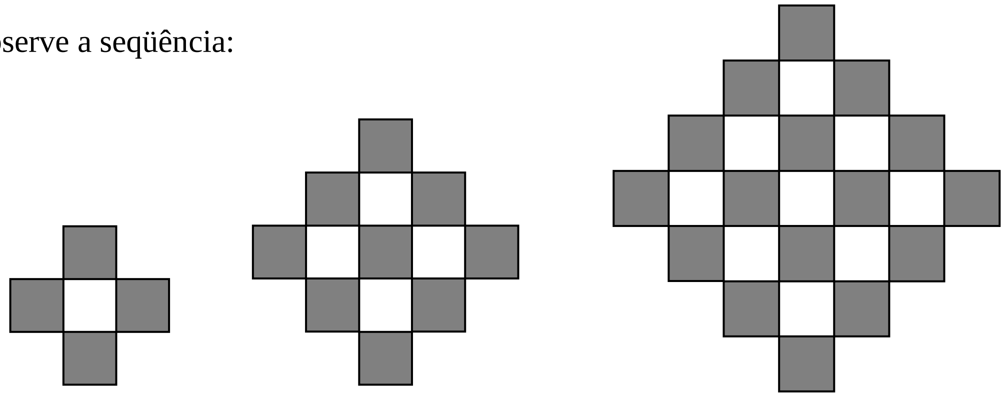
Orientações metodológicas	
Padrão	Figurativo fractal
Pré-requisitos	Operações básicas, fatoração
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio.
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, progressões geométricas.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá propor que os alunos façam a verificação do item 5 para validar a expressão.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O triângulo usado nesse experimento é denominado triângulo de Sierpinsk (criado por Waclaw Sierpinski). Cada triângulo obtido é uma réplica do original, por isso, caracteriza-se como um fractal. A palavra fractal vem do latim e significa “fragmento”. É um experimento que pode ser usado também na abordagem de soma de progressões geométricas infinitas.

Atividade 20

Cestarias

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência:



1) Indique o número de quadradinhos brancos e pretos que aparecem na primeira figura.

2) E na figura de número 3, quantos aparecem?

3) Seguindo esse mesmo padrão de cestaria, como ficaria a quarta figura? Faça o desenho e, em seguida, responda: quantos quadradinhos pretos e quantos quadradinhos brancos aparecem nessa figura?

4) Se uma figura apresenta 36 quadradinhos brancos, quantos serão os pretos?

5) Se uma figura apresenta 100 quadradinhos pretos, quantos serão os brancos?

6) Você conseguiu estabelecer uma relação entre o número de quadradinhos brancos, pretos e a posição ocupada pela figura na seqüência? Explique seu raciocínio.

7) Verifique a veracidade para todas as figuras desenhadas.

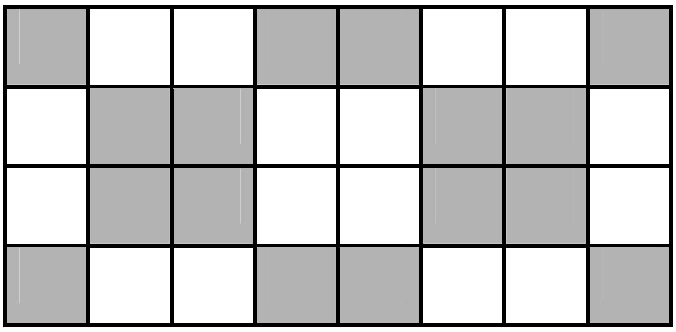
Orientações metodológicas	
Padrão	Figurativo cestas
Pré-requisitos	Operações básicas, fatoração
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio.
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá propor que os alunos elaborem uma tabela contendo o número da figura, quadradinhos brancos e pretos, isso facilitará o sucesso na conclusão da atividade. • Se necessário for, peça aos alunos que desenhem outras figuras da seqüência até que todos, mesmo que apenas verbalmente, consigam identificar o padrão e estabelecer a generalização.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá criar outros modelos de cestaria para explorar questões com essa perspectiva. Também poderá abordar, incluindo outros questionamentos, o conteúdo de progressões aritméticas e/ou geométricas.

Atividade 21

Faixa Decorativa 2

Desenvolvimento da atividade:

Observe o desenho:



1) Qual é a cor do quadradinho localizado na 1ª linha e 4ª coluna?

2) Continuando a seqüência, qual deverá ser a cor do quadradinho localizado na 1ª linha e 8ª coluna?

3) E o localizado na 1ª linha e 20ª coluna?

4) É possível determinar a cor do quadradinho da 67ª coluna, ainda na 1ª linha? E na 4ª linha?

5) Observando ainda apenas a primeira linha, você consegue descrever alguma regularidade? Descreva-a.

6) Conhecida a cor do quadradinho de uma coluna qualquer na 1ª linha, é possível determinar os demais que se localizarem na mesma coluna? Como?

7) Que cor terá o quadradinho localizado na 102ª coluna e 3ª linha? Justifique sua resposta.

8) Uma faixa constituída por quatro colunas é dita completa, pois apresentará um eixo de simetria. Isso não acontecerá com uma faixa de cinco colunas. Uma faixa constituída por 43 colunas poderá ser classificada como completa? Justifique.

9) É possível determinar um padrão de regularidade para uma faixa completa? Qual seria?

Orientações metodológicas	
Padrão	Figurativo mosaico
Pré-requisitos	Operações básicas, simetria
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio.
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, progressões aritméticas
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá propor que os alunos elaborem uma tabela contendo posicionamento coluna/linha, cor do quadradinho. Isso facilitará o sucesso na conclusão da atividade. • Se necessário for, peça aos alunos que desenhem outras figuras da seqüência até que todos, mesmo que apenas verbalmente, consigam identificar o padrão e estabelecer a generalização. • O professor poderá solicitar que a turma verifique a expressão estabelecida nos itens 5 e 9.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	É possível, ainda, explorar, com essa atividade, a relação entre o total de quadradinhos brancos e pretos. O professor poderá criar outras faixas decorativas e explorar outros padrões de regularidade.

Atividade 22

Seqüência Numérica.

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência:

2 , 7 , 12 , 17 , 22 , 27 , ...

1) Qual será o 7º termo dessa seqüência?

2) O número 97 estará presente nessa seqüência? Explique.

3) Qual seria sua ordem?

4) E o número 238? Por quê?

5) Que número ocupará a 105ª posição? Justifique sua resposta.

6) Você percebeu alguma regularidade na seqüência? Qual?

7) Escreva uma expressão que relacione o número à posição que ele ocupará na seqüência.

Orientações metodológicas	
Padrão	Numérico seqüencial
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio.
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, progressões aritméticas
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá propor que os alunos que verifiquem o item 8 para validar a expressão encontrada.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá explorar inúmeros exemplos de seqüências como essa e/ou seqüências com características de progressões geométricas e estabelecer uma conexão entre os dois conteúdos: funções e seqüências.

Atividade 23

Produtos Legais

Desenvolvimento da atividade:

Observe os produtos:

9 x 9 = 81

9 x 99 = 891

9 x 999 = 8991

9 x 9999 = 89991

9 x 99999 = 899991

2) Qual será o resultado do produto de 9 por 999.999?

3) E o resultado de 9 x 99.999.999.999?

4) Qual é o número que multiplicado por 9 terá como resultado 8.999.999.991? Explique o raciocínio usado.

5) Verifique a veracidade de seu raciocínio para outros produtos.

6) Determine a soma dos valores absolutos do resultado do produto abaixo:

$$9x\underbrace{999\ldots9}_{2008\,vezes}$$

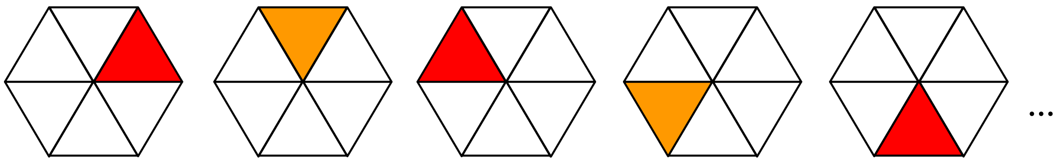
Orientações metodológicas	
Padrão	Numérico operacional
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Cálculo mental
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá fazer alguns questionamentos que leve os alunos a investigarem as causas que levam o produto a apresentar sempre essa regularidade.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Outras multiplicações com resultados regulares podem ser exploradas em sala de aula com essa mesma perspectiva.

Atividade 24

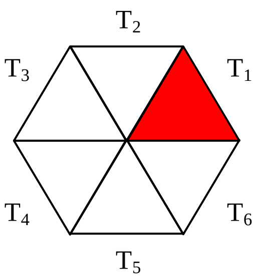
Rotação nos hexágonos.

Etapas:

1) Observe a seqüência:



Utilizando o esquema abaixo para representar as posições dos triângulos eqüiláteros no hexágono, responda aos questionamentos.



1) No desenho número 6, qual triângulo deverá ser colorido? De que cor?

2) E no desenho de número 12?

3) Continuando a seqüência e obedecendo ao padrão apresentado, qual será a região e a cor utilizada para colorir o 20º desenho?

4) O 58º desenho apresentará qual região colorida e de que cor?

5) Nas 50 primeiras figuras, quais terão a região T_2 colorida de amarelo?

6) Você consegue descrever uma generalização que aponte todos os hexágonos que terão a região T_2 colorida?

7) Você consegue descrever uma relação entre a posição do hexágono e a cor utilizada para colorir o triângulo interno?

Orientações metodológicas	
Padrão	Movimento figurativo
Pré-requisitos	Polígonos, operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, progressões aritméticas, movimento de rotação
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor deverá ficar atento, pois a atividade explora dois padrões simultâneos: posicionamento e cor. • Propor aos alunos que construam uma tabela para contribuir com o êxito da atividade.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Apesar de a atividade propor que o aluno estabeleça a regularidade apenas acerca da região T_2 e as cores, o professor poderá explorar todas as regiões do hexágono.

Atividade 25

Conjunto das partes

Desenvolvimento da atividade:

1) Dados os conjuntos, determine todos os seus subconjuntos:

A = {1} → P (A) = {∅, {1}}

B = {1 , 2} → P (B) = {∅, {1} , {2} , {1 , 2}}

C = {1 , 2 , 3} → P(C) = {...}

D = {1 , 2 , 3 , 4} → P (D) = {...}

2) Quantos elementos tem o conjunto A? E P (A)?

3) Quantos elementos tem o conjunto B? E P (B)?

4) Descreva os conjuntos P (C) e P (D) .

5) Construa uma tabela representando o conjunto, o seu número de elementos e o número de elementos de suas partes, conforme modelo abaixo:

Conjunto	**Número de elementos**	**Total de subconjuntos**

6) Um conjunto com 6 elementos terá quantos subconjuntos? Explique seu raciocínio.

7) Sabendo que um determinado conjunto apresenta 256 subconjuntos, determine o número de elementos desse conjunto. Explique seu raciocínio.

8) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de elementos do conjunto e o seu total de subconjuntos. Descreva-a.

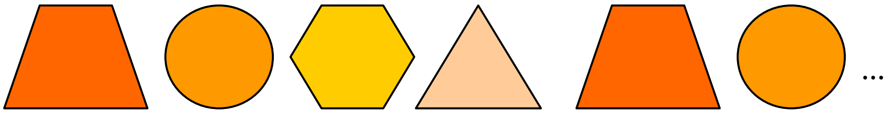
Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural numérico
Pré-requisitos	Operações básicas, Conjuntos
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e E. Médio
Conteúdos abordados	Conjunto das partes de um conjunto, expressões algébricas, funções
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá fazer, com essa atividade, uma conexão entre os conteúdos conjuntos e funções exponenciais.

Atividade 26

Números e formas

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência:



1) Continuando a seqüência e usando o mesmo padrão apresentado, que forma terá a 7ª figura? E a figura de número 15?

2) Em uma seqüência de 2007 figuras, quantas vezes aparecerá a forma triangular? Explique seu raciocínio.

3) Que posição na seqüência ocupará o 12º triângulo? Explique.

6) Você consegue estabelecer uma relação entre a figura triangular e as posições ocupadas?

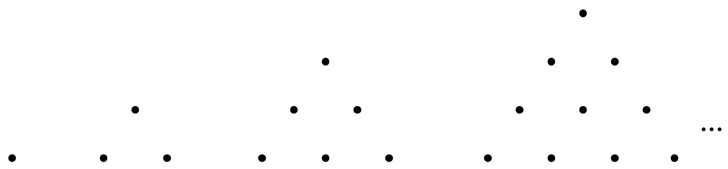
Orientações metodológicas	
Padrão	Numérico geométrico
Pré-requisitos	Operações básicas, formas geométricas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Expressões algébricas, equações, funções, progressões aritméticas.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor também poderá propor a elaboração de uma tabela para facilitar no sucesso da atividade.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Apesar de a atividade contemplar apenas a posição da figura triangular, o professor ainda poderá explorar as figuras: trapézio, círculo e hexágono, bem como poderá criar outras seqüências utilizando-se de outras figuras com o mesmo propósito. Poderá, ainda, alternando as cores das figuras comuns, estabelecer uma relação entre as cores e a posição ocupada, ou ainda, entre as figuras e as cores.

Atividade 27

Números triangulares

Desenvolvimento da atividade:

Observe a seqüência:



1) Construa uma tabela estabelecendo uma relação entre a posição ocupada pela figura na seqüência e o total de pontos traçados.

Posição	1	2	3	...						
Total	1	3	6	...						

2) Quantos pontos terá a 5ª figura da seqüência?

3) Existirá alguma figura nessa seqüência com 55 pontos? Que posição ela ocupará?

4) E com 212 pontos? Justifique sua resposta.

5) Você consegue determinar o total de pontos da 200ª figura? Explique seu raciocínio.

6) É possível estabelecer uma generalização para esse padrão? Explique

7) Confirme a veracidade de sua generalização para as 10 primeiras figuras.

Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural numérico
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e E. Médio
Conteúdos abordados	Números, expressões algébricas, equações, progressões aritméticas
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • A atividade poderá ser usada na abordagem de soma de progressões aritméticas.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá abordar seqüência de outros números figurados com essa mesma perspectiva.

Atividade 28

Armários e Estudantes

Desenvolvimento da atividade:

Faça uma leitura com bastante atenção no texto descrito abaixo:

Uma escola tem exatamente 100 armários e 100 estudantes. No primeiro dia de aula os estudantes encontraram-se fora do prédio e concordaram no seguinte plano: o primeiro estudante entrará na escola e abrirá todos os armários. O segundo aluno entrará e fechará todos o armários com números pares (2 , 4 , 6 , 8 , 10 ,...). O terceiro aluno, então, inverterá o que tiver sido feito a cada 3 armários (no 3º , 6º , 9º ,...). O quarto aluno inverterá o que tiver sido feito a cada 4 armários (no 4º , 8º , 12º. 16º, ...) e assim por diante. Após todos os alunos terem entrado e realizado suas tarefas, como estará o armário de número 100: aberto ou fechado?

1) Antes de responder à questão proposta, faça o que se pede:

a) Quando o 8º aluno entrar, o armário de número 8 ficará aberto ou fechado?

b) É possível que alguém, depois do 8º aluno, inverta a ordem desse armário? Justifique sua resposta.

c) Quando o 18º aluno entrar, como ficará o 18º armário? Aberto ou fechado? Explique seu raciocínio.

d) Esse mesmo raciocínio poderá ser usado para descobrir a situação do 48º armário na entrada do 48º aluno?

e) Construa uma tabela mostrando essa movimentação para os 15 primeiros alunos e 15 primeiros armários.

2) Agora, você consegue responder o questionamento do problema? Explique seu raciocínio.

3) É possível construir uma generalização para essa situação a partir do problema proposto?

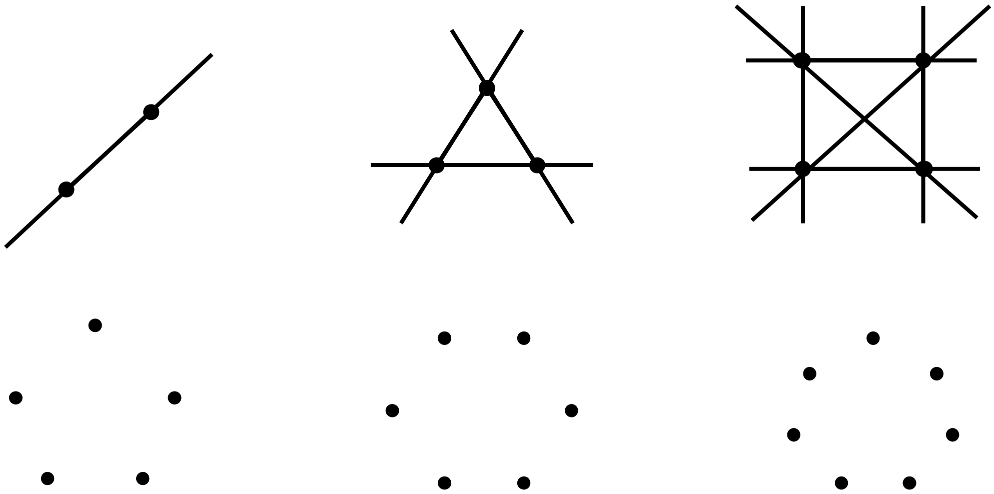
Orientações metodológicas	
Padrão	Numérico seqüencial
Pré-requisitos	Operações básicas, múltiplos
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Múltiplos, expressões algébricas, equações
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá fazer uma analogia entre essa atividade e a construção de uma matriz e/ou funções definidas por mais de uma condição. • O professor poderá também apenas propor o problema e deixar que os alunos discutam sobre sua resolução.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	Vários problemas de lógica, algébricos, geométricos ou numéricos podem ser facilmente resolvidos a partir de uma generalização.

Atividade 29

Contagem das Linhas

Desenvolvimento da atividade:

1) Usando uma régua, trace tantas linhas quantas puder, cruzando pares de pontos localizados nas seções marcadas, como exemplificado abaixo, nas três primeiras figuras. Conte o número de linhas, construa uma tabela e anote os resultados encontrados:



2) Sem marcar os pontos e/ou traçar as linhas correspondentes, responda:

a) Quantas linhas poderiam ser traçadas com 8 pontos? E com 10 pontos?

b) Imagine agora, 100 pontos. É possível determinar o número de linhas sem traçá-las?

c) Quantos pontos precisariam para traçar 55 linhas? Justifique sua resposta.

3) É possível estabelecer uma relação entre o número de pontos e o total de linhas? Como?

Orientações metodológicas	
Padrão	Figurativo geométrico
Pré-requisitos	Fundamentos da geometria plana.
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Geometria plana, expressões algébricas, equações, progressões aritméticas
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá explorar conceitos como: diagonais, construção de retas, posicionamento de duas retas.

Atividade 30

Operações curiosas

Desenvolvimento da atividade:

1) Resolva corretamente e anote o resultado encontrado para as seguintes operações:

65^2 =

75^2 =

45^2 =

85^2 =

135^2 =

115^2 =

2) Agora, mentalmente ,você consegue estabelecer um valor para 95^2? E para 165^2?

3) Explique o processo que você está usando para realizar essas operações.

4) Existe alguma relação entre o resultado e os números envolvidos na multiplicação? Qual seria?

5) Essa relação existirá para a potência 125^2? E para 152^2? Justifique suas respostas.

Orientações metodológicas	
Padrão	Numérico operacional
Pré-requisitos	Operações básicas
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Potenciação, cálculo mental, produtos notáveis.
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • Para essa atividade, o professor deverá utilizar a calculadora como ferramenta de trabalho, afinal o essencial aqui é a investigação.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá explorar outros exercícios com atividade similares. Por exemplo: o produto $89^2 = (90 - 1)^2$. Por meio de uma exploração acerca de produtos notáveis, o professor estimulará o cálculo mental.

Atividade 31

O Jogo de Xadrez

Desenvolvimento da atividade:

1) Contar para os alunos a lenda da origem do xadrez:

[...] ***O semblante do rei da Índia mostrava espanto e admiração. Com os olhos fixos no tabuleiro, ele procurava compreender os movimentos das peças: reis, rainhas, bispos, cavalos, torres, peões. Que engenhosa invenção?***

Ficou ainda mais satisfeito quando lhe contaram que o criador do jogo era um súdito de seu reino: Sessa, professor de Matemática e Ciências. Solicitou que o trouxessem imediatamente à sua presença!

Sessa era um verdadeiro sábio, calmo e digno, que enfrentava o soberano com os olhos francos e ar sereno.

Com nenhum de seus súditos o rei havia sido tão benevolente. Fez perguntas sobre o jogo, falou do apreço que tinha pela ciência, do respeito que dedicava aos que cultivavam o saber. No final da conversa, fez um generoso oferecimento:

- Sessa, quero recompensá-lo por sua invenção. Peça o que desejar, nada lhe será negado.

Sessa pensou um pouco e pediu um dia de prazo para a resposta.

O soberano admirava as pessoas prudentes e agradou-lhe ver que Sessa não queria desperdiçar a grande oportunidade da sua vida.

No dia seguinte, o sábio dirigiu-se ao rei e solenemente fez seu pedido:

- Quero um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda casa, quatro pela terceira, oito pela quarta e assim sucessivamente, até a última casa do tabuleiro.

O rei permaneceu calado algum tempo. Que decepção! Oferecera tanto e obtivera como resposta um pedido tão pequeno. Como podia aquele súdito ser assim mesquinho, desdenhar de tal forma sua generosidade?

Com um simples gesto de mão despediu-se de Sessa, dizendo-lhe que os matemáticos do reino calculariam o total de grãos de trigo e ele receberia imediatamente a recompensa.

Um rápido brilho passou pelos olhos de Sessa, mas o rei não soube interpretá-lo.

Algumas horas depois, perguntou a seu ministro se o trigo havia sido entregue a Sessa. Um pouco constrangido, o funcionário respondeu que não, que os matemáticos ainda estavam fazendo as contas.

O rei franziu a testa com desagrado. Não admitia que suas ordens demorassem tanto a ser cumpridas. Que os cálculos fossem acelerados!

Na manhã seguinte, os matemáticos foram falar com ele. Pela expressão grave e sombria de cada um, o rei logo percebeu que havia alguma coisa errada. Mas nunca poderia adivinhar o que lhe disse o mais brilhante matemático do reino:

- Majestade, Sessa nunca poderá receber sua recompensa! A quantidade de grãos pedida é tão grande que nem em todos os celeiros do mundo existe tanto grão de trigo. Seria necessário secar todos os rios, lagos, mares e oceanos, fundir o gelo neve no norte, cobrir de searas toda a superfície da Terra e entregar-lhe cada grão colhido!

Nesse momento, o rei lembrou-se da expressão que vira no rosto de Sessa. Que grande astucioso! Enganara a todos, fingindo-se modesto.

Não era possível atender ao pedido como havia sido feito, mas era preciso premiar a notável inteligência de Sessa. Que ele recebesse uma quantidade tão grande de moedas que pudesse ter uma vida tranqüila e continuasse a inventar jogos como aquele[33].

2) Construa uma tabela, identificando a ordem, o número de grãos recebidos por aquela casa e o total de grãos recebidos.

Ordem da casa	**Nº de grãos da casa**	**Total de grãos recebidos**
01	01	01
02	02	01 + 02 = 03
03	04	01 + 02 + 04 = 07
04	....	
05	....	
06	....	
......	....	

3) Quantos grãos Sessa deveria receber pela 8ª casa do tabuleiro?

4) Qual o total de grãos recebidos pelas oito primeiras casas?

5) Existe alguma casa em que Sessa receberia o equivalente a 1024 grãos de trigo? Qual a ordem dessa casa? Explique seu raciocínio.

6) Quantos grãos Sessa deveria receber pela 64ª casa do tabuleiro?

7) Qual o total de grãos recebidos até a casa de ordem 64?

8) Você consegue estabelecer uma relação entre a ordem da casa e o número de grãos recebidos nela? E com o total?

9) Utilizando a relação estabelecida no exercício anterior, calcule o total de grãos recebidos por Sessa até a 30ª casa do tabuleiro.

[33] Texto extraído e adaptado: GUELLI, O. **Contando a história da Matemática**, São Paulo: Ed. Ática,V.4, 2000, p.7.

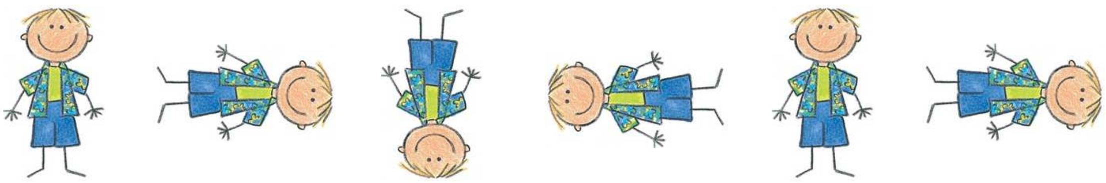
Orientações metodológicas	
Padrão	Estrutural numérico
Pré-requisitos	Operações básicas,
Segmento	Séries finais do E. Fundamental e/ou E. Médio
Conteúdos abordados	Potenciação, expressões algébricas, equações, funções, progressões geométricas
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá utilizar-se, para a realização dessa atividade, ferramentas como calculadora e/ou computador para auxiliar nos cálculos.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá propor à turma a construção de um gráfico que represente a situação problema e discutir questões acerca da interpretação do mesmo.

Atividade 32

Animação

Desenvolvimento da atividade:

Observe a animação produzida pelo desenho abaixo:



...

1) Se continuarmos a animação obedecendo à mesma seqüência, em que posição estará a 8 ª criança? E a 10 ª?

2) Em um grupo de exatamente 12 crianças, quantas estarão de pé?

3) Qual será a posição da 20ª criança?

4) É possível que a 46ª criança esteja de cabeça para baixo? Explique seu raciocínio.

5) Em um grupo de 15 crianças, quantas estarão deitadas em qualquer posição? E com a cabeça voltada para a esquerda?

6) Você consegue dizer rapidamente se a 96ª criança estará de pé? Explique seu raciocínio.

7) Você consegue escrever uma regra que determine a posição de todas as crianças que estarão de pé? E de cabeça para baixo?

Orientações metodológicas	
Padrão	Movimento figurativo
Pré-requisitos	Operações básicas, múltiplos
Segmento	Séries finais do E. Fundamental
Conteúdos abordados	Múltiplos, expressões algébricas, equações, funções
Metodologia	Trabalho em grupo utilizando abordagem exploratório-investigativa
Orientações complementares	• Caso seja necessário, o professor poderá propor outros questionamentos para o sucesso da atividade. • O professor poderá ainda sugerir que os alunos confirmem a veracidade da expressão apresentada no item 7.
Avaliação	Relatório, Observação e/ou plenária.
Outras possibilidades	O professor poderá elaborar outras seqüências de animações como essa e trabalhar nessa mesma perspectiva.