

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**EXPLORAÇÃO DE CONVERGÊNCIA EM TÓPICOS DE CÁLCULO
DIFERENCIAL, INTEGRAL E NUMÉRICO, USANDO OS SOFTWARES
*VCN E GEOGEBRA.***

YARA PATRÍCIA BARRAL DE QUEIROZ GUIMARAIS

BELO HORIZONTE

2010

YARA PATRÍCIA BARRAL DE QUEIROZ GUIMARAIS

**EXPLORAÇÃO DE CONVERGÊNCIA EM TÓPICOS DE CÁLCULO
DIFERENCIAL, INTEGRAL E NUMÉRICO, USANDO OS SOFTWARES
*VCN E GEOGEBRA.***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Dr. Dimas Felipe de Miranda

BELO HORIZONTE

2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

G963e

Guimaraes, Yara Patrícia Barral de Queiroz

Exploração de convergência em tópicos de cálculo diferencial, integral e numérico, usando os softwares *VCN* e *Geogebra* / Yara Patrícia Barral de Queiroz Guimaraes. Belo Horizonte, 2011. 192f. : Il.

Orientador: Dimas Felipe Miranda

Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Educação matemática. 2. Cálculo. 3. Ensino auxiliado por computador. 4. *VCN* (Software). 5. *Geogebra* (Software). I. Miranda, Dimas Felipe. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 51:373

YARA PATRÍCIA BARRAL DE QUEIROZ GUIMARAIS

**EXPLORAÇÃO DE CONVERGÊNCIA EM TÓPICOS DE CÁLCULO
DIFERENCIAL, INTEGRAL E NUMÉRICO, USANDO OS SOFTWARES VCN E
GEOGEBRA.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

Dr. Dimas Felipe de Miranda (Orientador)
Programa de pós-graduação em Ensino e Matemática – PUC Minas

Dra. Maria Clara Rezende Frota - PUC Minas
Programa de pós-graduação em Ensino de Matemática – PUC Minas

Dr. Leônidas Conceição Barroso – PUC Minas
Programa de pós-graduação em Tratamento da Informação Espacial – PUC Minas

Belo Horizonte, 24 de maio de 2010.

DEDICATÓRIA

*À minha família, fonte de inspiração.
Ao Edson, um presente de Deus.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, porque *“é d’Ele a vitória alcançada em minha vida”*.

Ao professor Dr. Dimas que, com a habitual tranquilidade e inteligência, orientou-me com confiança, serenidade e segurança.

Ao meu esposo Edson José Guimarães que participou efetivamente deste momento, não apenas com o constante apoio, mas também com sugestões e correções.

A Danielle Cristina Barral de Queiroz e Maria Lília Cerqueira de Brito, que participaram da finalização deste trabalho, com atenção, apoio e competência.

Aos mestres Marcelo Souza Motta, Fernanda Aparecida Ferreira e Dárcio Costa Nogueira Júnior, por terem disponibilizado suas dissertações para estudo e, com isso, contribuído para a elaboração desta pesquisa.

Aos alunos que foram sujeitos dessa pesquisa, que participaram com compromisso, atenção e respeito. Em especial, aos alunos voluntários do curso de Sistemas de Informação, que compuseram o grupo extraclasse. Vocês foram muito importantes para este trabalho!

Aos professores João Bosco, Eliane, Maria Clara, Agnela, Lídia e Amauri, que brilham intensamente em pequenos detalhes, provocando em nós, alunos, admiração, respeito e a crença de que a Educação no Brasil tem solução.

Aos colegas do Mestrado, pela amizade e pelos momentos importantes de convívio, que me proporcionaram crescimento pessoal e profissional através das muitas experiências vivenciadas em conjunto.

A todos que torceram e acreditaram em mim e em meu trabalho, desejo que realizem muitos sonhos e tenham muito sucesso na vida!

*A Matemática desenvolve o
raciocínio para a análise da vida.*

(Euler de Souza Barral)

RESUMO

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral é objeto de estudo de vários pesquisadores e muitos constataram a grande defasagem dos alunos, ora justificada pelo ensino de Matemática durante a Educação Básica, ora pela falta de empenho dos próprios alunos, ora pelos métodos didático-pedagógicos utilizados pelos professores... Enfim, o fato é que existe um problema que ainda necessita de muita pesquisa para ser solucionado. Muito também se tem falado a respeito do uso da informática para o ensino da Matemática, que pode e deve ser um de seus fundamentais instrumentos. Sendo assim, este trabalho explorou a Convergência de Funções em situações contínuas e discretas, por meio do estudo dos Limites, Taxas de Variação, Métodos Numéricos de Resolução de Integrais e Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes, com o uso dos softwares gratuitos *Geogebra* e *VCN*. Um dos grandes objetivos desta pesquisa é oferecer uma proposta didática para docentes da área, como sugestão para sua prática diária. As atividades tiveram o caráter investigativo sob a visão de Ponte, tendo sido confeccionadas segundo a organização didática de Zabala, com projeto baseado na engenharia didática (estudo iniciado por Artigue em 1980); o suporte teórico para a elaboração das questões foram Stewart, Finney e Barroso. Esta pesquisadora foi também a professora das turmas cujos alunos foram sujeitos da pesquisa, de modo que as atividades elaboradas foram aplicadas simultaneamente ao trabalho com cada conteúdo. As atividades foram elaboradas de modo a priorizar a exploração numérica e gráfica das situações propostas e se tornaram objeto de observação ao longo da pesquisa.

Palavras-chave: Atividades Investigativas. Cálculo. Convergência. Educação Matemática. Informática no Ensino.

ABSTRACT

The teaching of Differential and Integral Calculus is studied by several researchers and many noted the large gap of students, sometimes justified by the teaching of Mathematics for Basic Education, sometimes by the lack of commitment from the students themselves, sometimes by didactic and pedagogical methods used teachers ... Finally, the fact is that there is a problem that still needs much research to find a solution. Much also has been said about the use of computers for teaching mathematics, which can and should be a great tool. Therefore, this study explored the Convergence of Functions in continuous and discrete situations through the study of Limits, Rates of Change, Numerical Methods for Solving Integral and Algebraic Equation Solver and Transcendent, with the use of free software *Geogebra* and *VCN*; one of the major objectives of this research is to offer a didactic proposal for area teachers, as suggestion for your daily practice. The activities had the character investigative under the vision of Ponte being constructed in the organization of didactic Zabala, with design based on engineering teaching (study initiated by Artigue in 1980); the theoretical basis for drawing up the questions were Stewart, Finney and Barroso. This researcher was also the teacher of the classes whose students were the research subjects, so that the activities developed were applied by the time that content was being worked on. The activities were designed so that there was a numeric and graphic exploration of the proposed situations, one way in which concepts and definitions are constructed through experimentation, resulting in the final understanding the initial idea on Convergence of a numerical sequence.

Keywords: Investigative Activities. Calculus. Convergence. Mathematics Education. Computers in Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esquema válido para a aplicação de qualquer projeto.....	38
Figura 2: Interface do <i>Geogebra</i>	43
Figura 3: Barra de menu do VCN.....	44
Figura 4: Comando “Integração Dupla Dada a Função”, do VCN.....	44
Figura 5: Representação gráfica da função real $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$, considerando o intervalo (aproximadamente) $] - 6,6[$, construída no software <i>Geogebra</i>	50
Figura 6: Função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ com o intervalo $[1,8;1,99]$, construída no VCN.....	51
Figura 7: Tabela da função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, de $[2,01;2,1]$, construída no VCN.....	52
Figura 8: Representação gráfica da função $f(x) = \frac{3}{2x - 5}$, com $x \neq \frac{5}{2}$, pelo software <i>Geogebra</i>	55
Figura 9: Tabelamento da função $f(x) = \frac{3}{2x - 5}$, de $[2,4;2,49]$, com passo 0,01, pelo programa VCN.....	56
Figura 10: Tabelamento da função $f(x) = \frac{3}{2x - 5}$, no intervalo $[2,501;2,51]$, com passo 0,001, pelo programa VCN.....	56
Figura 11: Ilustração do caso $h > 0$, em que Q está à direita de P.....	59
Figura 12: Função $f(x) = 3x^2 - 7x$, os pontos A(0, 0) e B(2,33; 0) que são as raízes dessa equação, e o ponto D(0,88; - 3,78), construídos no <i>Geogebra</i>	59
Figura 13: Representação da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x + 2)}{1 + x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, feito no <i>Geogebra</i>	62
Figura 14: Área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x + 2)}{1 + x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, feito no <i>Geogebra</i> . A região sob a curva foi dividida em 10 partes iguais.....	64

Figura 15: Área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, feito no <i>Geogebra</i> , por excesso.....	65
Figura 16: Representação gráfica da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, com destaque para as partições na forma de trapézios retângulos.....	68
Figura 17: Ilustração sobre a Primeira Regra de Simpson.....	72
Figura 18: Tabelamento de $-x^2 + 7x - 10.6875 = y$, $[0, 5]$, no VCN, com $h = 1$	77
Figura 19: Representação gráfica da função $-x^2 + 7x - 10.6875 = y$, no <i>Geogebra</i>	77
Figura 20: Ilustração do Princípio da Bisseção.....	79
Figura 21: Função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ tabelada, para o intervalo $[1,8; 1,99]$, construída no programa VCN.....	84
Figura 22: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir x unidades de certa mercadoria, pelo VCN.....	85
Figura 23: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 106 unidades de certa mercadoria, feito no VCN.....	86
Figura 24: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 106 unidades de certa mercadoria, feito no VCN.....	86
Figura 25: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 106 unidades de certa mercadoria, feito no VCN.....	87
Figura 26: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 106 unidades de certa mercadoria, feito no VCN.....	88
Figura 27: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 106 unidades de certa mercadoria, feito no VCN.....	88
Figura 28: Instituição pesquisada – unidade Belo Horizonte.....	93
Figura 29: Instituição pesquisada – unidade Betim.....	93
Figura 30: Laboratório de informática – unidade Belo Horizonte.....	94
Figura 31: Relação entre o referencial teórico com a proposta didática.....	96
Figura 32: Resolução da Atividade 0 pelo aluno A – 1º p. Sistemas de Informação.....	98
Figura 33: Resolução da Atividade 0 do aluno B – 1º p. Sistemas de Informação.....	99
Figura 34: Resolução do aluno C para a Questão 1 da Atividade 1.....	127
Figura 35: Resolução do aluno D para a Questão 1 da Atividade 1.....	127

Figura 36: Resposta do aluno A para a questão (1.j).....	129
Figura 37: Resposta do aluno M para a questão (1.j).....	130
Figura 38: Resolução do aluno A para as questões (1.q), (1.r) e (1.s).....	130
Figura 39: Resolução da questão 2 da Atividade 2, pelo aluno A.....	131
Figura 40: Resolução das questões (4.a) a (4.e), do aluno A.....	132
Figura 41: Resolução das primeiras questões da Atividade 3, do aluno H.....	134
Figura 42: Resolução das questões (1.e) e (1.f/g) do aluno I.....	135
Figura 43: Resolução das questões (1.h) e (1.j) do aluno I.....	136
Figura 44: Resolução das questões (1.k) e (1.l) pelo aluno J.....	136
Figura 45: Resposta do aluno K à questão (1.k) e (1.l).....	137
Figura 46: Resposta do aluno L para as questões (2.d-e).....	138
Figura 47: Resolução da questão (1.a – e) pelo aluno W.....	140
Figura 48: Resolução do aluno Y para as questões (3.a – f), da Atividade 4.....	141
Figura 49: Respostas para a questão 2, do aluno G.....	146
Figura 50: Respostas da Questão (2.d), do aluno H.....	146
Figura 51: Resolução do aluno W para a Questão 3.....	147
Figura 52: Resolução do aluno N, para a Questão 2, Atividade 4.....	148
Figura 53: Resolução da questão 3, Atividade 1, do aluno C.....	149
Figura 54: Resolução da questão 3, Atividade 1, do aluno E.....	149
Figura 55: Resolução das últimas questões da Atividade 1, do aluno E.....	152
Figura 56: Questão 6 da prova do aluno C – 1º p. Sistemas de Informação.....	154
Figura 57: Questão 5 da prova do aluno C – 1º p. Sistemas de Informação.....	155
Figura 58: Questão 1 da prova do aluno F – cursos de Engenharia de Produção e de Matemática Licenciatura.....	157
Figura 59: Resposta do aluno G para a questão (1.b) – enunciado: vide Figura 49.....	157
Figura 60: Resposta do aluno H para a questão (1.b).....	158
Figura 61: Questão 2 – Atividade 3, do aluno G, curso de Engenharia de Produção.....	159
Figura 62: Resposta para a questão (1.d) na prova escrita, do aluno X.....	161
Figura 63: Resposta para a questão (1.d) na prova escrita, do aluno Z.....	161
Figura 64: Questão 2 da prova do aluno P.....	162
Figura 65: Questão 2 da prova do aluno Q.....	162
Figura 66: Resposta de um aluno sobre o que entende por Convergência de funções contínuas e discretas.....	173

Figura 67: Resposta de um aluno sobre o que entende por Convergência de funções contínuas e discretas.....	173
Figura 68: Resposta de um aluno sobre o que entende por Convergência de funções contínuas e discretas.....	173
Figura 69: Resposta de um aluno sobre o que entende por Convergência de funções contínuas e discretas.....	173

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Índice de Desenvolvimento da Educação Básica.....	23
Quadro 2: Exemplo de sequência didática.....	31
Quadro 3: Momentos na realização de uma investigação.....	36
Quadro 4: Apresentação dos sujeitos participantes desta pesquisa, por turma e disciplina.....	92
Quadro 5: Turmas a que eram destinadas cada atividade.....	93
Quadro 6: Conteúdos explorados na realização da Atividade 1.....	105
Quadro 7: Conteúdos explorados na realização da segunda parte da sequência.....	112
Quadro 8: Conteúdos explorados na realização da terceira parte da sequência.....	119
Quadro 9: Conteúdos explorados na Atividade 4.....	126
Quadro 10: Sugestão de aulas para o conteúdo <i>Resolução Numérica de Equações Algébricas e Transcendentes</i> , com o uso de atividades investigativas.....	164
Quadro 11: Comentários de alguns alunos a respeito das atividades investigativas e do uso dos softwares <i>Geogebra</i> e <i>VCN</i>	169

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Cálculo da área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, por meio das Somas Inferiores, obtido com o uso do <i>Geogebra</i>	66
Tabela 2: Cálculo da área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, por meio das Somas Superiores, obtido por meio do <i>Geogebra</i>	67
Tabela 3: Tabelamento da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, com $h = 0,5$ e resultados truncados, construída por meio do VCN.....	71
Tabela 4: Resultados da integração numérica da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$ com $-2 \leq x \leq 1$, considerando os métodos numéricos aqui estudados.....	75
Tabela 5: Cálculo da raiz da equação $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \text{tg}(x) = y$ no intervalo $[3, 4[$, com precisão de 0,01, construída com auxílio do VCN.....	83
Tabela 6: Carga horária de algumas disciplinas em que esta pesquisadora já atuou.....	170
Tabela 7: Disciplinas que esta pesquisadora já trabalhou com prática de laboratório, com planejamento pessoal.....	171

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	16
2. APOIO TEÓRICO	22
2.1. O ensino e aprendizagem da matemática e o uso da informática	22
2.2. Sequência didática de caráter investigativo	29
2.3. Engenharia didática na confecção da sequência didática.....	37
3. APRESENTAÇÃO DOS SOFTWARES.....	42
3.1. Histórico dos softwares Geogebra e VCN	42
3.2. Alguns comandos do Geogebra e VCN.....	43
4. ESTUDO SOBRE CONVERGÊNCIA DE FUNÇÕES DISCRETAS E CONTÍNUAS	47
4.1. Definição de Limite de uma função real de uma variável.....	47
4.2. Das taxas de variação à derivada: construção do conceito.....	57
4.3. Métodos numéricos de resolução de uma integral.....	62
4.3.1. Somas de Riemann	63
4.3.2. Regra dos Trapézios	68
4.3.3. Regras de Simpson	72
4.4. Resolução de equações algébricas e transcendentess.....	76
4.5. Estudo de funções discretas e contínuas.....	83
5. AÇÃO DIDÁTICA: ELABORAÇÃO, APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS	92
5.1. Caracterização dos sujeitos participantes e da instituição onde aconteceu a pesquisa	92
5.1.1. Instituição onde a pesquisa foi realizada.....	93
5.2. Aplicação das atividades	97
5.2.1 Atividade 1: construção da ideia e da definição de limites	97
5.2.2. Atividade 2: das taxas de variação às derivadas.....	107
5.2.3. Atividade 3: métodos numéricos de resolução de uma integral	113
5.2.4. Atividade 4: resolução de equações algébricas e transcendentess.....	121

5.3. Análise de resultados.....	127
5.3.1. Exploração e formulação de questões.....	127
5.3.2. Conjecturas	142
5.3.3. Testes e reformulação.....	149
5.3.4. Justificação e avaliação	152
 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	 166
6.1. Reações observadas	166
6.2. Sugestões e comentários	170
6.3. Outras pesquisas possíveis	173
6.4. Ideias finais.....	174
 REFERÊNCIAS	 178
 APÊNDICES	 181
Apêndice A – Atividade 0.....	181
Apêndice B – Provas aplicadas / turmas: matemática e engenharia de produção	184
Apêndice C – Provas aplicadas / turma: sistemas de informação.....	186
Apêndice D – Questionário para pesquisa de opinião.....	192
Apêndice E – Lista de presença / grupo de voluntários	195

1 – INTRODUÇÃO

O computador é, atualmente, uma ferramenta essencial em qualquer segmento da sociedade. Existem programas simples que são de grande utilidade nas diversas áreas, inclusive na educação. Já não se pode pensar em uma instituição de ensino hoje que não se utilize dessa tecnologia em seu dia-a-dia, não apenas em serviços administrativos, mas também em sala de aula, como uma metodologia didática.

Diversos softwares já são conhecidos no mercado, como o *Cabri-Geométre*, o *Winplot*, o *Maple*, o *MatLab* e tantos outros, sendo que muitos deles são gratuitos, podendo ser baixados de sites próprios da Internet, como no caso do *Geogebra*.

Ao se pensar em utilizar esses e outros programas no cotidiano das aulas, facilmente se verifica a necessidade de novas propostas para o ensino de conteúdos matemáticos de difícil compreensão, como o Cálculo Diferencial e Integral.

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral é um dos assuntos em que os acadêmicos dos cursos da área de exatas sentem mais dificuldades, conforme comentários correntes no meio e constatações de várias pesquisas. Entre as pesquisas de professores do Departamento de Matemática e Estatística da PUC Minas, por exemplo, uma delas, oportunamente, ressalta que:

Transparece aqui um forte componente do *habitus* de aluno: considerar o professor como o responsável único pela aula e pelo conteúdo a ser estudado; aquele que detém o saber e regula sua distribuição. O aluno se percebe como alguém que tem o direito, ele paga por isso, de receber o bolo do saber; passa longe a ideia de ser ele próprio um agente construtor de conhecimento. (LACHINI, 2001, p. 160).

Neste sentido, constata-se que o aluno é um ser passivo nas salas de aula de Cálculo, esperando apenas receber o conteúdo para transmitir o que foi apreendido para as provas escritas e, assim, receber uma certificação ao fim do curso. Acrescente-se ainda que, em geral, o comportamento diário dos alunos não contribui muito para um resultado satisfatório do processo ensino-aprendizagem de Cálculo, uma vez que a supracitada pesquisa apurou que 94% (noventa e quatro por cento) dos alunos não cumprem todas as tarefas extraclases. No entanto, os professores também não estão isentos de sua parcela de culpa por esse fracasso. Na maioria das vezes, não fazem da sala de aula um ambiente de construção, explicitando para os educandos que aquele é um momento de aprendizado conjunto.

Não houve intenção aqui de realizar mais uma pesquisa para apontar ou reforçar algum fator da dificuldade de se obter sucesso em Cálculo por um grande número de estudantes. A presente pesquisa se propôs, a partir das dificuldades já constatadas, a oferecer uma oportunidade de o aluno trabalhar em um ambiente de construção (particularmente a exploração da ideia de *Convergência de funções contínuas e discretas*), e ser observado ao desenvolver uma sequência didática que lhe permitisse a experimentação, a descoberta de padrões e a obtenção de conclusões. Não apenas sob um enfoque matemático, somente através de uma experiência é que se pode diferenciar o real do abstrato.

Deseja-se, na verdade, oferecer uma proposta didática para o ensino-aprendizagem de alguns tópicos do Cálculo. Para isso, será feito um recorte com início no estudo dos limites, seguido do estudo das taxas de variação, a integração numérica e resolução de equações não-lineares.

A proposta dessa pesquisa foi estudar a convergência do limite de algumas funções, que remetem à ideia de uma sequência numérica, a partir da observação da representação gráfica de funções contínuas com o software *Geogebra* e de funções discretizadas com o uso do *VCN*. Houve aqui a intenção de elaborar uma sequência didática para a construção/assimilação do conteúdo, através de atividades investigativas que teriam como suporte os softwares acima mencionados.

O tema da convergência de funções contínuas e discretas foi escolhido porque ele contém as ideias de variação, movimento, tendência e limite. Estas ideias é que tornam o “cálculo fundamentalmente diferente da matemática” que o aluno estuda no colégio (STEWART, 2009). Através da experiência profissional que essa pesquisadora adquiriu, constatou-se uma grande dificuldade do aluno ao lidar com a transição de uma matemática estática (Ensino Médio) para outra mais dinâmica (Ensino Superior). Com a presente pesquisa, pretendeu-se contribuir para a redução desta dificuldade específica.

Com relação ao software *Geogebra*, desejou-se aproveitar a facilidade de manuseio que ele apresenta, com possibilidade de movimento de pontos, destaque com cores e estilo de linhas, obtenção de inclinação da reta e tantas outras ferramentas interessantes, que tornariam esse estudo mais agradável.

O software *VCN* apresenta muitas possibilidades de estudo para uma função analítica ou discreta (tabelada), de modo que o estudante poderá realizar experimentações numéricas com rapidez. Tendo como base de apoio o cálculo numérico, este programa permite a visualização e constatação numérica do que será observado graficamente com o *Geogebra*.

O objetivo principal deste trabalho é **explorar** a ideia de convergência, percebida especialmente no limite de uma sequência, perpassando pela ideia de taxas de variação, a integração numérica e a resolução de equações algébricas e transcendentais, auxiliados pelos softwares *Geogebra* e *VCN*. Porém, as entrelinhas deste objetivo geral possibilitam pensar em vários outros específicos, que são:

- a) trabalhar tópicos matemáticos visando que o estudante compreenda a ideia de convergência de funções contínuas e discretas;
- b) explorar os softwares *Geogebra* e *VCN* e disponibilizar os produtos e resultados conseguidos;
- c) propor uma atividade investigativa sobre o assunto com o uso dos softwares *Geogebra* e *VCN*, buscando na *experimentação* a *construção* do conhecimento;
- d) construir uma sequência didática que auxilie no processo ensino-aprendizado da convergência de funções contínuas e discretas com o conteúdo do Cálculo Diferencial, Integral e Numérico, como produto final.

Este material didático (produto final) elaborado será apresentado de forma impressa e poderá ser aplicado aos acadêmicos de cursos superiores que cursam as disciplinas Cálculo Diferencial, Integral e Numérico, particularmente de cursos de licenciatura em Matemática, mas também abrindo a possibilidade para estudantes de outros cursos da área de Ciências Exatas, que tenham esta disciplina em seu Programa Curricular. Para estas atividades, considerou-se a existência de conhecimentos prévios, por parte dos alunos, de matemática básica, como frações algébricas, produtos notáveis, funções, etc. Porém, caso fosse constatada a deficiência de tal conhecimento na prática, nada impediria que os professores fizessem uma breve apresentação (ou revisão) dos tópicos necessários, antes ou durante a aplicação da atividade.

Ao usar este material didático nessa pesquisa, como os softwares são a principal ferramenta, foi feita então uma apresentação do contexto histórico destes, antes da aplicação das atividades, de modo que os alunos conhecessem a história da criação tanto do *Geogebra* como do *VCN*, história esta que foi contada aos alunos no momento da apresentação dos programas.

Antes de realizar a aplicação das atividades, foi feita a apresentação da interface dos softwares, mostrando os ícones e as várias funções disponíveis. O aluno deveria adquirir uma noção das funções, de modo a compreender e conseguir ler a sequência de atividades. Esta

pesquisadora esteve, durante todo o tempo, junto aos estudantes, auxiliando-os na compreensão das atividades e no manuseio dos comandos dos softwares, mas a autonomia e independência de cada um também foram trabalhadas, no momento em que foram incentivados a buscar, por si só, a resolução das atividades. Após a devida familiarização dos alunos com cada um dos softwares, eles já estavam aptos a ler e interpretar corretamente os enunciados.

Uma vez que esta é uma proposta voltada para os professores que trabalham com cursos que contenham o Cálculo Diferencial e Integral, e o Numérico, como parte integrante do seu Programa Curricular, tem-se a intenção de proporcionar ao estudante a compreensão da ideia inicial sobre Convergência de funções contínuas e discretas, utilizando-se para isso cada uma das atividades propostas, ou seja, por meio do significado do limite, da derivada, da integral e também através da resolução de uma equação algébrica e/ou transcendente. Não foram dadas todas as definições antes das atividades, mas apenas as inevitáveis. Somente foi feita uma breve apresentação do assunto, falando sobre sua importância e os objetivos em questão, e através das atividades é que pretendeu-se que os alunos construíssem cada conceito. Após a resolução das questões é que foi feita a socialização em grupo, quando esta pesquisadora levantou a discussão geral sobre o assunto e as principais conclusões foram registradas.

O estudo e comentários acerca da teoria muito contribuirão para as justificativas que irão permear cada questão a ser elaborada e apresentada. Neste sentido, pretendeu-se que a sequência de questões acontecesse da seguinte maneira:

- a) Definição de limites (noção intuitiva);
- b) Estudo de taxas de variação;
- c) Métodos numéricos de resolução de integrais;
- d) Resolução de equações algébricas e transcendentais.

De acordo com o objetivo deste trabalho, deseja-se que os alunos construam pensamentos sobre o assunto a partir das visões numérica, geométrica e algébrica, de modo que acontecerá a construção sequencial da ideia, através das atividades investigativas. Stewart afirma que o aprendizado dos conteúdos matemáticos deve acontecer por meio da “Regra dos Três”: geométrica, numérica e, enfim, algebricamente.

A visualização e as experiências numéricas e gráficas, entre outras ferramentas, alteraram fundamentalmente a forma como ensinamos os raciocínios conceituais. Mais recentemente, a Regra dos Três expandiu-se em uma Regra dos Quatro, valorizando também o ponto de vista verbal (ou descritivo). (STEWART, 2009, Prefácio)

Após a elaboração das atividades, aconteceu a aplicação destas aos alunos; para isso o grupo a ser observado era de acadêmicos que estivessem cursando a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, de modo que já possuísem os pré-requisitos básicos necessários para a compreensão do que seria lido. Esta sequência foi utilizada como atividade cotidiana para três turmas que estavam cursando as seguintes disciplinas: Cálculo e Geometria Analítica (Cálculo I), e Cálculo Numérico.

As atividades foram individuais, mas nada impediu que um aluno discutisse com o colega para melhor compreensão do que era pedido. Cada folha de exercícios foi entregue somente quando a última já havia sido completamente resolvida, sempre na presença desta pesquisadora. As resoluções foram recolhidas para posterior análise.

Por fim, quando todos os alunos já haviam terminado os trabalhos, chegou o momento da análise e interpretação dos resultados obtidos. Nesta fase, aconteceu a análise qualitativa das atividades e, conseqüentemente, do material didático proposto, levando-se em consideração a contribuição ocasionada quanto à cada conteúdo focado e visando, principalmente, verificar se houve a compreensão da ideia inicial da *Convergência de funções contínuas e discretas*.

2. APOIO TEÓRICO

2.1. O Ensino e aprendizagem de Matemática e o uso da informática

No Brasil, o Ministério da Educação (e Saúde Pública) foi criado em 1930, com Getúlio Vargas na Presidência, porém os assuntos ligados à educação eram tratados pelo Departamento Nacional do Ensino, ligados ao Ministério da Justiça (fonte: MEC). Após uma longa trajetória e uma série de transformações, surgiu o MEC – Ministério da Educação e Cultura, sendo que em 1992, através de uma lei federal, o MEC recebeu a nova denominação de Ministério da Educação e do Desporto, e em 1995 o órgão passou a ser responsável apenas pela educação no país.

O ensino de Matemática vem sofrendo grande mudança no cenário educacional do Brasil e do mundo. Isso aconteceu principalmente depois do Movimento da Matemática Moderna, quando a Educação Matemática passou a ser um objeto de estudo de grandes teóricos, que passaram a divulgar amplamente suas ideias.

Especificamente sobre o Brasil, ainda existe uma grande discussão em torno do ensino dessa disciplina, não apenas com os segmentos da Educação Básica, mas principalmente por pesquisadores ligados aos cursos de licenciatura. Tais pesquisadores estão cada vez mais preocupados com a formação dos professores para os níveis Fundamental e Médio, pois o país ocupou a 54^a (quincuagésima quarta) posição na pesquisa do PISA 2006 – Pesquisa Internacional de Avaliação de Alunos, dentre 57 países participantes sobre o ensino de ciências; este estudo mediu principalmente a capacidade dos alunos de aplicarem os conhecimentos adquiridos na escola em situações reais. Abaixo, têm-se dados do IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, divulgados no site do MEC, que mostram a posição nacional no Ensino Fundamental (do 1º ao 5º ano, e depois do 6º ao 9º ano) e no Ensino Médio; mostra também uma projeção dos dados para o ano 2021, como uma meta a ser alcançada.

IDEB 2005, 2007 e Projeções para o BRASIL												
	Anos Iniciais do Ensino Fundamental				Anos Finais do Ensino Fundamental				Ensino Médio			
	IDEB Observado		Metas		IDEB Observado		Metas		IDEB Observado		Metas	
	2005	2007	2007	2021	2005	2007	2007	2021	2005	2007	2007	2021
TOTAL	3,8	4,2	3,9	6,0	3,5	3,8	3,5	5,5	3,4	3,5	3,4	5,2
Dependência Administrativa												
Pública	3,6	4,0	3,6	5,8	3,2	3,5	3,3	5,2	3,1	3,2	3,1	4,9
Federal	6,4	6,2	6,4	7,8	6,3	6,1	6,3	7,6	5,6	5,7	5,6	7,0
Estadual	3,9	4,3	4,0	6,1	3,3	3,6	3,3	5,3	3,0	3,2	3,1	4,9
Municipal	3,4	4,0	3,5	5,7	3,1	3,4	3,1	5,1	2,9	3,2	3,0	4,8
Privada	5,9	6,0	6,0	7,5	5,8	5,8	5,8	7,3	5,6	5,6	5,6	7,0

Fonte: Saeb e Censo Escolar.

Quadro 1: ¹Índice de Desenvolvimento da Educação Básica. (INEP, 2009).

O IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) foi criado para verificar o desempenho de cada escola e rede de ensino; para que o IDEB de uma escola cresça é necessário que o aluno não seja reprovado, frequente a sala de aula e ainda aprenda os conteúdos básicos ensinados. De acordo com o Quadro 1, o Brasil alcançou em 2007 o total de 3,5 pontos no Ensino Médio, sendo que há uma meta de 5,2 pontos para o ano 2021. Mundialmente segundo dados divulgados pelo jornal O Globo (matéria publicada em 04/12/2007, por Fadua Matuck), o Brasil ficou em 54º lugar dentre 57 países participantes do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos) elaborado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o que coloca o País como o quarto pior no ensino de Matemática. Mas segundo o prof. Nélcio Bizzo, segundo a mesma referência citada, o País deve ser comparado a outros que tenham realidade mais próxima da nossa; neste caso, comparando o Brasil com a Colômbia, Argentina e México, nosso País ficou “à frente apenas da Colômbia na avaliação das capacidades científicas” (MATUCK, 2007).

Tamanha dificuldade que os alunos apresentam ao estudar Matemática durante a Educação Básica é levada para o Ensino Superior, nas disciplinas da área de Ciências Exatas. Os estudantes das engenharias, ciências da computação, economia, farmácia, física, matemática e tantos outros, apresentam grande dificuldade durante o curso. Ao falar no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra, Geometria, etc., é fato o grande número de reprovados nessas disciplinas dos mais diversos cursos que as têm na grade curricular.

Uma explicação possível para este fato é o nível do ensino de matemática na Educação Básica, como comprovam as pesquisas. Hoje, é possível observar nos diversos cursos superiores a necessidade de incluir nos Projetos Político-Pedagógicos dos cursos disciplinas

¹ Este Índice mede a qualidade de cada escola e de cada rede de ensino.

como Fundamentos da Matemática – cujas ementas são compostas quase que totalmente por assuntos básicos dos Ensinos Fundamental e Médio, como uma espécie de “revisão”.

De qualquer modo, pode-se perceber que as discussões acerca do ensino da Matemática são necessárias e convenientes, de modo que a busca por novas metodologias que sejam mais eficazes para o processo ensino-aprendizagem do assunto na Educação Básica é, no mínimo, uma ação a ser tomada diante de informações já existentes sobre essa necessidade. Tais medidas vão proporcionar melhorias no aprendizado não apenas no ensino da Matemática da Educação Básica, como também irão refletir nos cursos de graduação da área de exatas.

A educação no Brasil vem passando por fortes mudanças nos últimos tempos. Hoje existe a conscientização geral de que o sistema educacional brasileiro precisa de grandes melhorias, de modo a cumprir seu objetivo principal: possibilitar sucesso no processo ensino-aprendizagem dos alunos. O Governo Federal e os Estaduais estão investindo mais em compra de material didático, equipamento para as escolas, cursos de aperfeiçoamento para o corpo docente, etc.

Muito se ouve falar sobre tais investimentos nos meios de comunicação; muitas escolas da educação básica estão recebendo novos equipamentos tecnológicos, tendo a possibilidade de atualizarem suas bibliotecas, etc. Em 2007, surgiu o PDE – Plano de Desenvolvimento da Educação, que propõe investimentos na educação básica, profissional e superior. Assim, tem-se como consequência o crescimento da informatização das escolas, também por meio do PROINFO – Programa Nacional de Tecnologia Educacional, que foi criado em 1997, e que a cada ano vem ganhando novas forças e em parceria com Estados e Municípios, instalará até 2010 computadores em todas as escolas públicas, começando por aquelas que oferecem o Ensino Médio, além do Ensino Fundamental. Como ainda existem escolas com deficiências básicas, o PDE, em parceria com o Ministério das Minas e Energia, prevê a instalação em 2009 de energia elétrica em todas, para que estas possam ser beneficiadas com as novas tecnologias.

Dessa forma, é possível a visualização da melhoria da educação no país, uma vez que o corpo docente terá mais alternativas didáticas para seu dia-a-dia. Segundo informações divulgadas também pelo portal do MEC, existe um programa de formação de professores, iniciado em maio de 2009, que se trata de um curso de tecnologias educacionais. Com uma carga horária média de 180 horas, os professores aprendem a usar as novas tecnologias na sala de aula, inclusive quanto à aplicação e comunicação digitais. Com certeza, o uso das novas tecnologias, particularmente do computador, em sala de aula, é uma importante e atualizada

metodologia didática, no momento em que essa é uma realidade presente na vida de muitas crianças, adolescentes e jovens.

Particularmente tratando do ensino da Matemática, há muito tempo os professores manifestam sua preocupação. Antigamente, o ensino dessa disciplina era considerado “artigo de luxo”, quando poucos eram aqueles que realmente tinham acesso; de acordo com alguns dizeres populares: alguns até tentavam aprender, mas não era um conhecimento para qualquer um; apenas quem tivesse uma inteligência diferenciada é que poderia alcançá-lo. Mas é claro que isso não é fato!

Por meio das pesquisas existentes sobre as tendências do ensino da Matemática, já na década de 1920, quando surgiu a Tendência Empírico-Ativista (e que mais tarde foi novamente notada entre as décadas de 70 e 80), existia a visão de que o ensino da Matemática deveria acontecer de forma empírica, com descobertas e pesquisas. Algumas características dessa tendência serão citadas:

- Entende que, a partir da manipulação e visualização de objetos ou de atividades práticas envolvendo medições, contagens, levantamento e comparações de dados, etc., a aprendizagem da Matemática pode ser obtida mediante generalizações ou abstrações de forma indutiva e intuitiva.
- Recomenda (a tendência empírico-ativista) que o ensino de Ciências e Matemática seja desenvolvido num ambiente de experimentação, observação e resolução de problemas, oportunizando a vivência do método científico, atestando a presença da didática experimental positivista. (SILVA apud FIORENTINI, 1995, p. 11/12)

Partindo já para a época do tecnicismo, a Matemática era ensinada na base da transmissão: o professor mostrava o conteúdo no quadro, com a explicação da teoria seguida da resolução de alguns exemplos, e o aluno devia praticar resolvendo muitas listas de exercícios, baseando-se no modelo inicialmente apresentado. Ainda segundo Fiorentini (1995, p. 16), os manuais didáticos dessa época (ao final da década de 60 e início da década de 1970) privilegiavam o “treino/desenvolvimento de habilidades estritamente técnicas”, em que os conteúdos seguiam uma espécie de “instrução programada onde o aluno deve realizar uma série de exercícios do tipo: ‘resolva os exercícios abaixo, conforme o seguinte modelo...’” Esse mesmo autor identifica esta como sendo a pedagogia “oficial” do regime militar pós-64 (1995, p. 15), indicando que a preparação era rigorosa, e baseada em muito treino. Como esta tendência não deu certo, Dário Fiorentini constatou em sua pesquisa que houve o retorno à tendência Empírico-Ativista, entre as décadas de 70-80.

A partir do Movimento da Matemática Moderna, os pesquisadores da área de Educação foram convidados a repensar o ensino da Matemática, de modo que o professor em

seu cotidiano docente não cultivasse a ideia da “venda de uma mercadoria”, em que o aluno era o cliente, uma vez que o conhecimento não é algo para ser transmitido por ele e recebido pelo estudante, pois é algo para ser construído.

A transmissão da informação não pode ocupar sozinha o centro do processo ensino-aprendizagem e nem pode ser tomada como único parâmetro norteador dos serviços oferecidos pela escola. Olhar o ensino-aprendizagem como um processo de aquisição, reelaboração ou construção é a maneira de abrir o trabalho escolar para o tratamento da informação, para a compreensão de conceitos, para o pensar de modo sistematizado e com mobilidade. (...) Ambos (professor e aluno) se tornam construtores e re-construtores do conhecimento. (LACHINI, 2001, p. 179).

Assim, partindo do princípio de que o conhecimento não é algo para ser imposto, mas sim construído, é claro que é um bem acessível a todos. Qualquer pessoa que se interesse de verdade pode aprender Matemática, desde que tenha paciência e dedicação. Tratando particularmente do uso do computador como uma nova ferramenta didática, como a maior parte das crianças e jovens se interessa por essa tecnologia, o ensino da Matemática pode ser beneficiado, no momento em que tiver seu uso otimizado para essa finalidade.

Neste sentido, a experiência com o uso de softwares como metodologia didática pode ser muito rica:

As atividades, além de naturalmente trazerem a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação. As novas mídias, como os computadores com softwares gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física. (BORBA, 2001, p. 34)

Muitos estudantes e até mesmo professores têm computador em casa, mas não sabem usá-lo da melhor forma, usando-o apenas para digitar materiais e fazer pesquisas na Internet. Muitas pessoas realmente desconhecem como melhor usar o computador, como o exemplo abaixo, que se trata do comentário de um formando do curso de licenciatura:

O início do semestre coincidiu com uma aquisição que fiz de um computador. A princípio usava-o somente como uma máquina de escrever; atualmente, já o uso como um computador, capaz de fazer mais coisas do que uma simples máquina de escrever. (PONTE, 2003, p. 179)

Uma maneira de os alunos conhecerem as possibilidades de uso dessa ferramenta é os professores dos cursos de graduação fazerem dessa uma prática cotidiana, com a naturalidade e segurança que o avanço da tecnologia nos dias de hoje proporciona. Ao se tratar do ensino de Cálculo nos cursos de graduação, muito se diz que o problema no processo

ensino-aprendizagem começa lá na educação básica (como mostram os indicadores divulgados pelos meios de comunicação). Segundo Lachini (p. 147, 2001), um dos objetivos do ensino do Cálculo encontrado nos livros didáticos é “habituar o estudante a pensar de maneira organizada e com mobilidade”, e completa que “é preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e numérico do que está fazendo”. Porém, esta é uma das disciplinas que apresenta alto índice de reprovação (LACHINI, p. 149, 2001); desse modo, é notória a necessidade de modificação no dia-a-dia das aulas de Cálculo, que geralmente é trabalhada na forma de transmissão de informações do professor para o aluno, com mudança de comportamento destes.

Uma nova postura que leve a redefinir a sala de aula como espaço de trabalho, o processo de ensino-aprendizagem como processo de incorporação de um capital cultural, a disciplina como atitude adequada ao trabalho, professor e aluno como estudantes, estudiosos munidos da certeza de serem eternos aprendizes. (LACHINI, 2001, p. 187)

Contudo, é essencial que haja uma quebra de paradigmas no atual sistema educacional, para que os sujeitos do processo possam bem compreender e, assim, assumir esse novo comportamento.

O uso dos computadores na educação tem aumentado a cada dia. Com o grande avanço tecnológico, já não é mais possível ficar de fora dessa realidade. Os primeiros registros da implantação da informática na educação no Brasil são de 1970, com a UFRJ, UFRGS e Unicamp. Depois disso, o Governo Federal veio traçando estratégias que possibilitassem a ampliação dessa realidade para as escolas brasileiras, podendo citar como exemplo o PROINFO – Programa Nacional de Tecnologia Educacional, que surgiu em 1997.

Porém, infelizmente esse processo ainda é lento, devido a diversas razões. Uma delas é a restrição por parte de muitos professores com traços ainda tradicionalistas, que não vêem no computador um aliado eficaz para o ensino; mas essa restrição pode ser uma fuga pela falta de preparação para lidar com essa ferramenta. Outra razão é o número de computadores existente nas escolas, que ainda é muito pequeno para a demanda. Por mais que o Governo Federal esteja oferecendo cursos de aperfeiçoamento para os professores da rede pública de ensino, e muitas escolas já tenham sala de informática com computadores disponíveis para o corpo docente, ainda não é suficiente para atender a todos os que se interessam e, como afirma Borba (2001), muitos problemas ainda precisam ser resolvidos para que essa seja uma realidade do nosso sistema educacional. De qualquer modo, ninguém pode ficar à espera da

solução desses problemas administrativos, uma vez que as pesquisas para o sucesso da implantação da informática no cotidiano escolar não podem parar.

A partir das ideias que foram apresentadas até o momento, partiu-se da seguinte questão no início da pesquisa:

Os softwares gratuitos VCN e Geogebra podem contribuir para o aprendizado dos conceitos de Limites, Taxas de Variação, Integrais Numéricas e Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes, de modo que ao final de todas estas atividades o estudante compreenda a ideia inicial sobre Convergência de funções contínuas e discretas?

Por meio de atividades investigativas elaboradas para este fim, tem-se aqui a proposta de investigar e analisar o quanto o ambiente informatizado (tratando especificamente dos programas aqui mencionados) pode contribuir para esse aprendizado, sempre se utilizando da interação entre alunos-alunos e alunos-professor, com base na visão de Zabala e Pais, num primeiro momento, e finalizando com a proposta de Ponte.

Para isso, inicialmente foi levantado um referencial teórico para a elaboração das atividades investigativas, num formato didático-sequencial e com a organização da Engenharia Didática, de modo a “casar” os recortes escolhidos fazendo a interação para se chegar à compreensão da ideia de Convergência, sendo que a abordagem para este fim será qualitativa.

A participação ativa é o grande segredo para todos os sujeitos aqui envolvidos, uma vez que sem o constante diálogo entre alunos e pesquisadora, não é possível firmar as conclusões devidas. Neste sentido, há o tratamento de estratégias de aprendizagem, uma vez que “cada indivíduo desenvolve habilidades isoladas que, coordenadas, constituem competências” e essas competências constituem as estratégias de aprendizagem, segundo Frota (2009, p. 61).

Esta mesma autora identificou três estilos de aprendizagem matemática em estudantes da engenharia: estilo com orientação teórica, estilo com orientação prática e estilo com orientação investigativa. Em sua pesquisa sobre as estratégias de aprendizagem, Frota constatou que muitos alunos precisam dialogar sobre o tema estudado para que realmente assimilem o conteúdo; conversar com o estudante enquanto ele constrói seu pensamento pode ajudá-lo a compreender a sua estratégia de aprendizagem e permite que o professor acompanhe o seu desenvolvimento.

Como a proposta investigativa de Ponte consiste exatamente em uma atividade em que ocorra o diálogo do início ao fim, ratifica-se a intenção de participar durante todo o processo junto ao aluno. Também Pais e Zabala dão destaque para esse momento, como será possível verificar no estudo teórico.

2.2. Sequência didática de caráter investigativo

Frota e Borges (2004, p. 02) falam em “consumir tecnologia para incorporar a tecnologia”, no sentido de que os docentes precisam ter o mínimo de conhecimento e confiança no uso das novas tecnologias. Essa ferramenta pode ser uma aliada para efetivação do pensar matematicamente, pois ao consumir a tecnologia na educação matemática “o foco do ensino de matemática pode deixar de ser operacional ou procedimental, para assumir uma perspectiva mais conceitual” (FROTA; BORGES, 2004, p. 05), de modo que o professor irá, naturalmente, incorporar a tecnologia em sua rotina didática.

No que diz respeito a essas novas metodologias didáticas, particularmente do uso do computador em sala de aula, é claro que este não substitui o trabalho do professor. Após adquirir confiança para utilizar essa ferramenta, através do consumir tecnologia (FROTA; BORGES, 2004), o docente que incorporá-la fará dessa uma prática que poderá auxiliar na construção do aprendizado matemático de seus alunos. Lachini e Laudares (2001, p. 85) comprovaram que o conhecimento é algo em construção, “algo que nunca está acabado”, tendo o professor seu papel bem definido no momento em que é o direcionador do processo ensino-aprendizagem. De acordo com a mesma referência, “é inevitável a aliança tecnológica com o trabalho, em todos os redutos sociais; uma nova postura metodológica decorre da definição de uma política para a escola e para formação do professor”. O uso do computador não deve ser considerado como único fim, como a solução para todos os problemas: a discussão do conteúdo entre professor e alunos é insubstituível.

Neste sentido, Lachini e Laudares (2001, p. 87) falam em pedagogia dialógica, ou seja, **“dar ao estudante a chance de simular, de perguntar, de investigar”** (grifos dos autores). No momento em que o aluno experimenta, ele tem a condição de generalizar, de abstrair e, então, formalizar (LINS; GIMENEZ, 2001) o conceito ali apresentado; daí a importância de permitir que o educando pense, investigando, e questione, se respondendo.

Como visto acima, o computador pode ser um grande aliado no trabalho diário do professor de Matemática, no sentido de contribuir para o aprendizado por meio da experimentação. O computador assume um importante papel na educação:

O computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais, etc. E, nesse sentido, a informática na escola passa a ser parte da resposta a questões ligadas à cidadania. (BORBA, 2001, p. 17)

Essas são algumas das qualidades que os softwares VCN e *Geogebra* possuem. Sendo softwares de fácil manuseio, com interface atraente, muito podem contribuir para o enriquecimento e até facilitar a aprendizagem do conteúdo proposto.

Como dito anteriormente, o papel do professor é bem definido. Ele deve acompanhar o estudante durante todo o processo de aprendizagem, organizando o percurso, disponibilizando “ao aluno o ferramental para seu caminho heurístico” (LACHINI; LAUDARES, 2001, p. 87).

É óbvio que qualquer profissional que deseja crescer em sua carreira deve buscar a melhoria de sua atuação e, como afirma Zabala (2007), procurar ser “cada vez mais competente em seu ofício” (p. 13). Para isso, é imprescindível que haja uma crença no que será feito! A partir do momento em que um docente decidiu seguir um novo caminho, adotar uma metodologia diferenciada, é importante que este realmente acredite nos futuros resultados positivos, pois assim irá agir com muito mais empolgação e confiança.

A melhoria de qualquer atuação, ou particularmente da prática pedagógica, se inicia com a análise e reflexão do cotidiano de trabalho, “a decisão de adotar uma estratégia de mudança precede o desenvolvimento da compreensão” como afirma Zabala (2007, p. 15). A partir do momento em que a análise dessa prática mostra a necessidade de enriquecimento ou até mesmo uma completa transformação, então o estudo sobre novas metodologias é essencial; esse desenvolvimento pode se iniciar com a observação de outras experiências que tenham o perfil que melhor se adapte à sua realidade. Sobre isso, o mesmo autor é bem enfático: “existem determinados conhecimentos mais ou menos confiáveis, mais ou menos comparáveis empiricamente, mais ou menos aceitos pela comunidade profissional, que lhes permitem atuar com certa segurança” (2007, p. 14).

Ou seja, o professor que deseja melhorar sua prática docente pode buscar por experiências já concretizadas, para servir-lhe até mesmo de inspiração. E ainda:

Se entendemos que a melhora de qualquer das atuações humanas passa pelo conhecimento e pelo controle das variáveis que intervêm nelas, o fato de que os processos de ensino/aprendizagem sejam extremamente complexos não impede, mas sim torna necessário, que nós, professores, disponhamos e utilizemos referenciais que nos ajudem a interpretar o que acontece em aula. Se dispomos de conhecimentos deste tipo, nós os utilizaremos previamente ao planejar, no próprio processo educativo, e, posteriormente, ao realizar uma avaliação do que aconteceu. (ZABALA, 2007, p. 15)

A partir do momento em que o professor dispõe de conhecimentos teóricos suficientes para estudar a própria prática e, assim, definir as novas diretrizes para seu trabalho, verifica-se a ocorrência da auto-reflexão necessária. O próximo passo é a definição do seu perfil, com o fortalecimento do que mais acredita.

Toda intervenção pedagógica deve vir acompanhada de um planejamento, da execução e, por fim, de uma avaliação. A execução sem um planejamento pode ocasionar péssimos resultados, pois não houve a organização necessária para as ações, de modo que o executor (professor) não alcance os objetivos que, supõe-se, tenha pretendido. Também a execução sem uma avaliação posterior não permitirá que erros possam ser encontrados e corrigidos, impedindo que essa prática alcance resultados mais favoráveis no futuro. Esta sequência de ações – planejamento, aplicação, avaliação – é o que Zabala chama de sequência didática, definida como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (2007, p. 18).

Esse mesmo autor apresentou em sua pesquisa quatro unidades possíveis de sequências didáticas, e após estudar e analisar cada uma, será desenvolvida a Unidade 3, que é apresentada no Quadro 2:

1. Apresentação por parte do(a) professor(a) de uma situação problemática em relação a um tema.
2. Diálogo entre professor(a) e alunos.
3. Comparação entre diferentes pontos de vista.
4. Conclusões.
5. Generalização.
6. Exercícios de memorização.
7. Prova ou exame.
8. Avaliação.

Quadro 2: Exemplo de sequência didática.
Fonte: (ZABALA, 2007, p. 70).

O Quadro 2 apresenta uma possível sequência de ações que pode ser desenvolvida como intervenção pedagógica. A respeito de cada item, será feita uma breve exposição com base nas ideias descritas por Zabala (2007):

- a) **Apresentação por parte do(a) professor(a) de uma situação problemática em relação a um tema:** Um tema sobre um fato ou acontecimento é escolhido pelo docente e desenvolvido junto aos alunos, sendo que aspectos problemáticos ou desconhecidos devem ser levantados;
- b) **Diálogo entre professor(a) e alunos:** Através de um momento de socialização, o docente levanta questões, instiga dúvidas e problemas, sendo que o diálogo entre todos é que levará às conclusões devidas;
- c) **Comparação entre diferentes pontos de vista:** No momento em que houve o diálogo, é importante que as opiniões sejam respeitadas. O(a) professor(a) deve, então, estabelecer comparações sutis entre essas opiniões, permitindo que os próprios alunos excluam as conclusões equivocadas;
- d) **Conclusões:** O(a) professor(a) protagoniza o fechamento das discussões, firmando então as conclusões finais;
- e) **Generalização:** Através das contribuições geradas pelas discussões, e com as conclusões obtidas, o docente estabelece “as leis, os modelos interpretativos ou os princípios que se deduzem deles” (ZABALA, 2007, p. 57);
- f) **Exercícios de memorização:** Os alunos, individualmente, põem em prática algumas atividades que lhes permitirão recordar, mais tarde, “os resultados das conclusões e da generalização” (ZABALA, 2007, p. 57);
- g) **Prova ou exame:** Os alunos têm seu aprendizado medido por meio do preenchimento de um questionário ou exercícios sobre o tema proposto, durante um tempo determinado;
- h) **Avaliação:** “O professor ou professora comunica aos alunos os resultados obtidos” (ZABALA, 2007, p. 57).

De acordo com este formato, as atividades proporcionam organização do raciocínio e clareza de ideias, de modo que o estudante pode elaborar seu próprio pensamento sobre o assunto, baseando-se em cada etapa. A partir do estudo que o autor fez sobre o tema, analisando cada um dos modelos de sequências didáticas comentados por ele, constata-se que nenhum modelo é completo, de modo que o professor deve adequar a opção de modelo à sua prática, fazendo inclusive modificações no momento em que sentir essa necessidade. Ele afirma, com isso, que:

Segundo quais sejam nossos objetivos, nosso conhecimento dos processos subjacentes à aprendizagem e o contexto educativo em que se realizam, nos daremos conta de que são incompletas. O que nos interessa desta análise é reconhecer as possibilidades e as carências de cada unidade, com o fim de que nos permita compreender outras propostas e reconhecer, em cada momento, aquelas sequências que se adaptam mais às necessidades educacionais de nossos alunos. (ZABALA, 2007, p. 59).

Zabala ainda comenta cada um dos oito itens apresentados no Quadro 2, a partir de uma análise sistematizada ao se levar em consideração o que está ligado ao aprendizado do aluno, ou seja, que não basta apenas que se aprenda o conteúdo, mas sim que ele compreenda que pode aprender, o que influenciará diretamente no que sabe fazer e na sua autoestima. Então, cinco destes itens serão assumidos neste trabalho como referenciais de observação, que são significância e funcionalidade dos novos conteúdos, o nível de desenvolvimento, atitude favorável, autoestima e autoconceito, e o “aprender a aprender”. Segundo Zabala:

- a) ***Significância e funcionalidade dos novos conteúdos:*** aqui são tratados assuntos de caráter conceitual, o que possibilita que o sentido das aprendizagens esteja bem determinado desde o início. Os novos conteúdos surgem como “meios para resolver os conflitos que o professor propôs e não como um conhecimento fora de um contexto mais ou menos próximo do aluno” (ZABALA, 2007, p. 70).
- b) ***Nível de desenvolvimento:*** o professor deve ficar alerta para perceber as dificuldades de compreensão apresentadas pelos alunos, uma vez que a participação deles nas atividades é intensa. “Portanto, é possível adequar as explicações aos diferentes graus de assimilação” (ZABALA, 2007, p. 70), permitindo que o professor acompanhe de perto a heterogeneidade de aprendizado dos alunos.

- c) **Atitude favorável:** como os alunos são motivados a partir de uma situação problemática, é necessário que estes sintam atração pela atividade, para que não haja um protagonismo daqueles que têm mais facilidade em aprender matemática. Como afirma esse mesmo autor, “a vantagem desta unidade é que oferece a possibilidade de potencializar nas atividades seguintes, o interesse inicial ou favorecer outros momentos para provocá-lo novamente” (ZABALA, 2007, p. 71).
- d) **Autoestima e autoconceito:** no momento em que os comentários dos alunos são a grande chave para o discurso do professor e as conclusões, o “tipo de intercâmbios, as avaliações que se fazem das opiniões e o tipo de valoração final das aprendizagens e sua publicidade serão peças cruciais na construção positiva da autoestima” (ZABALA, 2007, p. 71).
- e) **Aprender a aprender:** “esta sequência ajuda a promover certas habilidades de construção pessoal de conceitos, às quais é preciso acrescentar as técnicas de estudo e de memorização”. Têm, porém, o defeito de se limitar a apenas certo tipo de habilidades básicas do contexto escolar (ZABALA, 2007, p. 72).

Diante da análise acima exposta, o trabalho do professor neste tipo de proposta é maximizado, pois é preciso estar atento a cada um dos alunos quanto ao seu desenvolvimento nas atividades, de modo a perceber o desempenho de cada um, ou seja, o momento em que ocorrem dúvidas, construção de pensamentos e fortalecimento de conceitos. Assim, poderá intervir no momento certo e melhor contribuir para o sucesso do aprendizado do conteúdo proposto com esse material didático.

Nesse sentido, a pretensão aqui implícita é de que essa construção se inicie através da vivência de experiências, para que aconteça a generalização, a abstração e a produção de significados. Ao “imaginar” uma situação, depois de vivenciada, o aluno tem condições de usar essa experiência para abstrair em outras situações, usando a intuição (LINS; GIMENEZ, 2006).

Segundo esses mesmos autores, resolver um problema não significa necessariamente que haverá a generalização; pode-se guardar a experiência e tirar outras conclusões a respeito dela. O principal é estabelecer relações entre uma situação vivenciada e outras possíveis, levantando, inclusive, hipóteses. Exatamente quanto a isso, uma atividade investigativa pode

proporcionar ao aluno a experimentação, o que fará com que ele tenha a bagagem necessária para evoluir em situações futuras.

Uma vez que investigar significa prospectar o que não é conhecido, com uma atividade investigativa o aluno tem a possibilidade de pesquisar sobre o conteúdo proposto por seu professor, generalizando e produzindo significados, construindo seus conceitos. Tratando-se de uma atividade investigativa de matemática, Ponte (2006, p. 13) afirma que “para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” e acrescenta que “o processo de criação matemática surge aqui fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para a frente e para trás” (2006, p. 15).

Ao buscar a solução para um problema, é possível que outras descobertas sejam feitas e, nesse momento, pode acontecer o processo que se inicia com a abstração, seguido da generalização e chegando à construção de significados. De qualquer modo:

Para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona. (PONTE, 2006, p. 17).

Desse modo, mesmo que as atividades investigativas não tenham o resultado inicialmente desejado, haverá um crescimento do aluno a partir do momento que vivencia novas experiências de aprendizagem. Mesmo que inicialmente não interprete corretamente uma questão proposta, de qualquer modo aconteceu a busca por aquele significado e na etapa da socialização, este estudante terá a oportunidade de rever os conceitos por ele construídos e corrigir seu pensamento, no caso da construção de um significado matemático.

Mas uma atividade investigativa de matemática precisa ser organizada de forma que nenhuma etapa da construção do conhecimento se perca. Nesse sentido, Ponte, (2006, p. 21) apresenta os processos que devem ser realizados numa investigação matemática:

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática. • Explorar a situação problemática. • Formular questões.
Conjecturas	• Organizar dados. • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura).
Testes e reformulação	• Realizar testes. • Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura. • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Quadro 3: Momentos na realização de uma investigação.

Fonte: PONTE, 2006, p. 21.

De acordo com o Quadro 3, o primeiro momento é exatamente o da exploração, quando há o reconhecimento da situação problemática proposta, o que, conforme apresentado no Quadro 2, segundo Zabala (2007, p. 70), é também uma característica necessária da sequência didática que aqui se propõe. O segundo momento da investigação deve ser a organização de dados e formulação de conjecturas; na sequência didática apresentada por Antoni Zabala, esse momento acontece quando há o diálogo professor X alunos, a comparação entre os pontos de vista e o estabelecimento de conclusões. Quanto ao terceiro momento que Ponte propõe, ou seja, a fase dos testes e reformulação, é possível estabelecer a ponte com a sequência didática de Zabala através das etapas de generalização e resolução de exercícios de memorização. Por fim, no que diz respeito à justificação e avaliação apresentadas no Quadro 3, relaciona-se na Unidade 3 apresentada por Zabala no Quadro 2, as etapas de Provas ou Exames e Avaliação, uma vez que os alunos terão seu conhecimento avaliado no momento em que devem fazer uma atividade escrita (avaliativa ou não!), justificando seus pensamentos formulados e se autoavaliando, a partir da análise do professor, com a apresentação de seus resultados.

A relação entre a Sequência Didática apresentada por Zabala e o esquema de atividades investigativas apresentada por Ponte se justifica pelo fato de que o ápice deste material didático é uma sequência de atividades em que o estudante deve pesquisar sobre o assunto. A partir de cada questão da atividade, de modo a construir os significados, a finalização deste estudo acontece quando o professor realiza a avaliação geral de todo o

processo, fechando o assunto com os educandos. É importante ressaltar que tanto a sequência didática quanto as atividades investigativas aqui escolhidas têm as mesmas características, de modo que, a partir da primeira etapa da sequência até a última, os objetivos que se pretende alcançar são a todo tempo considerados através da observação e análise de todo o processo de ensino e aprendizagem.

2.3. Engenharia Didática na confecção da sequência didática.

A sequência didática pode contribuir muito com o processo ensino-aprendizagem. Mas elaborar uma proposta como esta não é tarefa simples, pois com um menor grau de organização alguma etapa do aprendizado pode ficar comprometida.

Exatamente a partir deste pensamento, para a confecção do material didático, será assumido o enfoque de L. C. Pais, que é uma das referências brasileiras para o estudo sobre a Engenharia Didática. Mas é importante ressaltar que esse estudo foi iniciado na década de 1980, na França, com Michèle Artigue sendo uma das pesquisadoras, a partir do movimento da Didática da Matemática Francesa.

De acordo com Vera Clotilde G. Carneiro (2008), como esta é uma proposta didática que leva em consideração a prática cotidiana do professor, em uma análise da prática docente, é importante comentar que este não é apenas um relato de experiência, uma vez que toda a construção das atividades está fundamentada. Então segundo esta mesma autora, esta se trata de uma “pesquisa do professor” (CARNEIRO, 2008, p. 203), onde todo o rigor necessário para o sucesso das atividades será adotado.

O tema escolhido para este trabalho sugere que esta pesquisadora seja professora do ensino universitário, além de atuar também no Ensino Fundamental e Médio. O trabalho docente deve estar sempre alicerçado na pesquisa, analisando e avaliando continuamente a própria prática. Neste sentido, Carneiro (2008, p. 205) ressalta que há uma divisão entre a pesquisa acadêmica tradicional e o “professor universitário pesquisador da própria prática”. Mas salienta que “abrem-se espaços de liberdade para a atuação deste docente que, ao ocupá-los, organiza os necessários caminhos para o professor da educação básica” (CARNEIRO, 2008, p. 206).

Sendo assim, espera-se que este estudo consiga solucionar “algumas” inquietações de professores em sua prática didática, particularmente ao que está relacionado com os assuntos tratados nas atividades aqui propostas. Quanto aos objetivos que se deseja alcançar:

Os objetivos incluem a compreensão dos processos de aprendizagem e desenvolvimento de seus alunos, o conhecimento da realidade para transformá-la, sempre com um objetivo mais geral que é a melhoria das práticas pedagógicas e a melhoria do ensino na área específica. (CARNEIRO, 2008, p. 206)

No que se refere à confecção de uma sequência didática confeccionada com apoio na Engenharia Didática, que tem sua fundamentação teórica vinda da Didática da Matemática sob influência francesa, busca-se aqui “a compreensão das múltiplas conexões entre teoria e prática” (CARNEIRO, 2008, p. 211). Pois, segundo esta mesma referência, esse estudo “contribui para a formação do professor pesquisador”.

A mesma autora ainda reforça que a Engenharia Didática representa “diferente tradição de investigação, em culturas e escolas didáticas diferentes, mas com foco no mesmo tema: o processo de escolher, preparar e avaliar tópicos matemáticos para o ensino escolar” (CARNEIRO, 2008, p. 213).

Ao mencionar a Engenharia Didática, espera-se que a pesquisa didática tenha a organização de um projeto com a atuação de um engenheiro, que trabalha com projetos arquitetônicos. Essa ideia foi estudada, aqui no Brasil, por Luiz Carlos Pais (dentre outros pesquisadores) a partir de uma análise da influência francesa com base em pesquisas publicadas na França, como por exemplo, por Michèle Artigue. Pais (2001, p. 100) afirma que “a engenharia didática se constitui em uma forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática” e diante do necessário rigor para a realização da pesquisa, ainda salienta que “no transcorrer da aplicação de uma tal proposta, cada etapa deve ser acompanhada com o rigor decorrente de um determinado método, dependendo da escolha do pesquisador”, conforme esta mesma referência.

De fato é claro que, para que qualquer projeto seja bem sucedido, é fundamental que o executor busque adquirir uma grande bagagem de conhecimentos, além do cuidado com as etapas de planejamento, execução e avaliação (que implica talvez numa próxima etapa, a da correção). É imprescindível que o autor do projeto tenha uma visão sistematizada de sua proposta, de modo a visualizar as possibilidades futuras de sucesso ou fracasso; com certeza, será no momento da execução que alguns problemas poderão surgir, mas se o planejamento é feito com cautela, a tarefa de voltar a ele para as correções não será difícil. Na verdade, essa

etapa das correções é muito importante, pois é quando o executor conseguirá aparar arestas eliminando imperfeições, e é isso que dará segurança quanto à validade do projeto para ser utilizado novamente no futuro.

A busca da qualidade pelos engenheiros assume uma dimensão em que programas de qualidade visam o estabelecimento de normas e procedimentos para que os envolvidos no processo possam executar cada tarefa a partir da procura pela perfeição na execução do projeto. Uma vez que o trabalho do professor deve também buscar a qualidade do seu ensino, esta pesquisadora deseja aliar a organização da sequência didática proposta por Zabala com os critérios rigorosos apresentados por Pais.

Ao estudar a Engenharia Didática, a aplicação de uma atividade investigativa é relacionada com o trabalho de um engenheiro e se pode dar ênfase a esse comentário ao comparar cada uma das etapas, conforme a Figura 1:

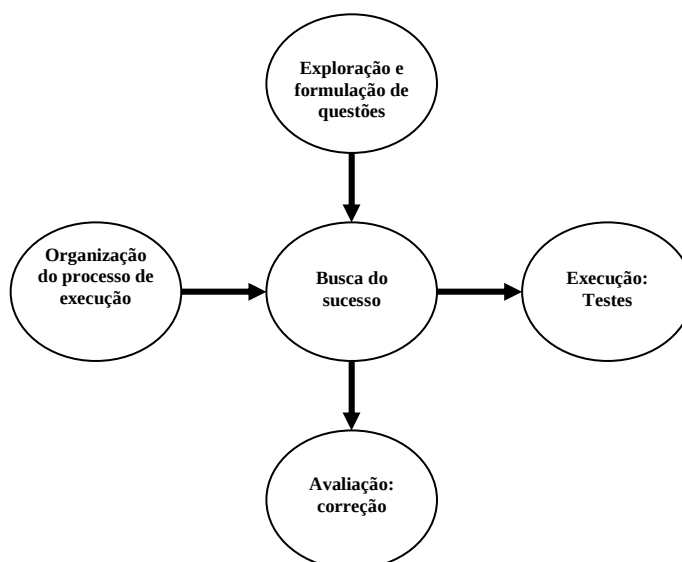


Figura 1: Esquema válido para a aplicação de qualquer projeto.

Fonte: esquema elaborado por esta pesquisadora com base nas ideias de Ponte (2006) e Pais (2001).

Conforme o esquema apresentado na Figura 1, é possível perceber que, ao considerar as etapas de Exploração e Formulação de Questões com a Organização do Processo de Execução, tem-se o objetivo primeiro de obter sucesso na etapa da Execução do projeto (Testes), para se chegar à etapa da Avaliação dos momentos anteriores com a devida correção das falhas observadas.

As quatro fases da Engenharia Didática são mostradas, segundo o estudo de Pais (2001, p. 101):

- a) **Análise preliminar:** algumas inferências devem ser feitas, como as observações das experimentações, análise do comportamento e opiniões dos sujeitos envolvidos e compreensão da realidade em que se está inserido.
- b) **Concepção e análise *a priori*:** é a definição de “um número de variáveis de comando do sistema de ensino que supostamente interferem na constituição do fenômeno”, sendo que estas variáveis são articuladas e analisadas durante a execução da sequência didática.
- c) **Aplicação da sequência didática:** é o momento da execução do projeto, é a etapa de observação das situações de aprendizagem, quando é “preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado” (PAIS, 2001, p. 102).
- d) **Análise *a posteriori*:** é o tratamento das informações obtidas durante o processo de aplicação da sequência de atividades.

O mesmo autor, na página 103, salienta que “a validação dos resultados é obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori*, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa”. A análise *a priori* é importante para que todos os objetivos específicos sejam bem definidos, de modo que durante todo o processo de execução o professor tenha em mente o que deve ser observado para saber se realmente seus alunos aprenderam o que foi trabalhado. Quanto à análise *a posteriori*, é um procedimento igualmente importante e uma atitude que o professor precisa ter, pois ao assumir essa nova postura é necessário ter em mente as possibilidades de sucesso ou fracasso.

Como esta é uma intervenção pedagógica, todas as etapas desse processo devem ser consideradas, sempre tentando responder às indagações iniciais, ou seja, a razão que motivou o projeto de pesquisa. Ao intervir na aprendizagem de determinado conteúdo matemático, tendo sempre em mente o objetivo geral,, o professor precisa assumir com consciência a responsabilidade sobre o aprendizado dos alunos e saber que é um processo sem volta, pois a partir do momento que se inicia um projeto como este, haverá cobranças dos próprios alunos quanto aos próximos conteúdos a serem estudados, caso reconheçam sua validade. Os estudantes, se gostarem da proposta, provavelmente irão esperar que em todos os demais conteúdos a serem trabalhados por esse docente sejam utilizadas alternativas didáticas

diferentes do que estão acostumados em seu cotidiano escolar e, possivelmente, vão querer conversar com o professor sobre isso.

3. APRESENTAÇÃO DOS SOFTWARES

3.1. Histórico dos softwares *Geogebra* e *VCN*

O *Geogebra* é um software criado por Markus Hohenwarter em 2001, na University of Salzburg, localizada na cidade de Salzburg, Estado de Salzburgerland, na Áustria, que hoje continua a estudar e a desenvolver este projeto na Florida Atlantic University. O criador do programa é PhD em Educação Matemática, pela University of Salzburg e seu projeto “*GeoGebra – educational material and applications in mathematics teaching*”, foi concluído em 2006.

A primeira versão (1.1) foi lançada em 28/01/2002 já com muitos recursos na área de Geometria; a última versão (3.2.0.0) saiu em 03/06/2009, com muitas novidades de recursos e ferramentas, tais como o cálculo de MDC e MMC, estudos estatísticos, Cônicas, etc.

Já recebeu vários prêmios na Áustria, Alemanha e França, e pode ser citado, por exemplo, o Prêmio de Software Educacional Alemão e Europeu. Hoje, é fonte de estudo para muitos pesquisadores, que utilizam o software como ferramenta. Já existem várias comunidades na Internet que tratam do estudo desse programa, e muitas delas têm a participação e cooperação do próprio autor, Dr. Markus Hohenwarter.

O *Geogebra* é um software de Matemática Dinâmica, gratuito e de código aberto. Pode ser instalado em qualquer computador (o acesso é por meio da página www.geogebra.org), sendo que o único pré-requisito é que este contenha o programa Java. Reúne recursos da Álgebra, Cálculo e Geometria, com uma interface atraente e de fácil manuseio; a janela algébrica é onde as funções e resultados aparecem como expressões dos objetos inseridos na parte geométrica, e vice-versa.

O *VCN* (*Virtual Cálculo Numérico*, que está disponível no endereço www.matematica.pucminas.br) – Sistema de Cálculo Numérico, produzido no ambiente DELPHI (MIRANDA; LAUDARES, 2007, p. 79) é um software que foi desenvolvido por um grupo de professores da PUC Minas, sendo que o início dos trabalhos se deu em 1990. A última versão lançada (5.1) conta com os seguintes autores: Prof. Célio Humberto Vasconcellos, Prof^a. Cristina Almeida Magalhães, Prof. Dimas Felipe de Miranda, Prof. Lamounier Josino de Assis, Prof. Luiz C. Picoreli de Araújo, Prof. Marcos Almeida

Magalhães, Prof. Pedro Américo Almeida Magalhães, Prof. Pedro Américo Almeida Magalhães Jr.

Este programa surgiu a partir da necessidade visualizada pelo DME - Departamento de Matemática e Estatística da PUC Minas em encontrar novas metodologias para o Ensino de Cálculo. Partindo do princípio de que as novas tecnologias oferecem melhores alternativas para o “aprender a matemática”, o grupo de professores do DME iniciou este projeto por meio de pesquisas com o software *Matlab* e a calculadora *HP*; após isso, houve então a construção do *VCN*, que gerou também a publicação de um caderno com atividades voltadas para o Cálculo Numérico, que deveriam ser resolvidas no *VCN*, *Matlab* e com a calculadora *HP*, através da Editora FUMARC. Sendo um software de distribuição gratuita, reúne recursos do Cálculo Diferencial e Integral e da Álgebra, no momento em que oferece comandos como Operações com Matrizes, Resolução de Sistemas Lineares, tabelamento de funções, etc.

O *VCN* foi classificado em 2º lugar no Concurso INFO de Software 2007, da Revista Exame, que contou com a participação de 71 produtos educacionais. Como apresenta mais de 120 opções de ferramentas, é bastante conhecido e utilizado por professores/pesquisadores de outras instituições no Brasil. A cada ano, o caderno Laboratório de Cálculo Numérico é revisto e atualizado, o mesmo acontecendo com o programa *VCN* que, após cada atualização, ganha nova versão.

3.2. Alguns comandos do *Geogebra* e do *VCN*

A Figura 2 ilustra a interface do *Geogebra*, com destaque para alguns comandos:

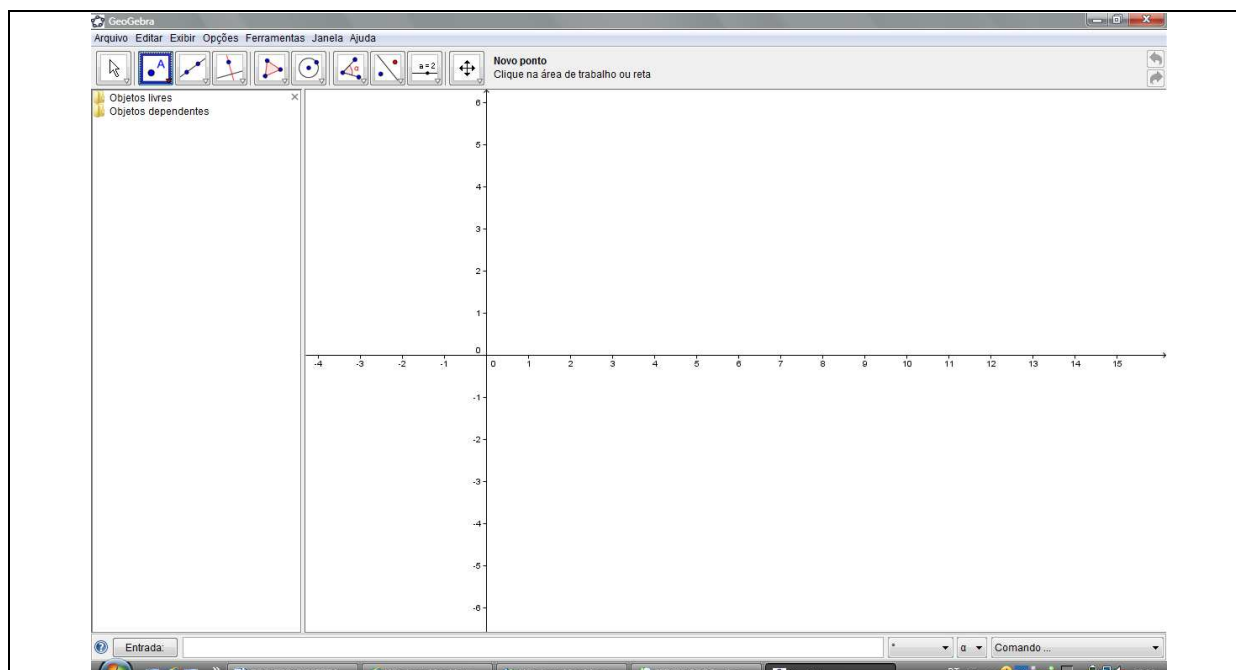


Figura 2: Interface do *Geogebra*. Fonte: Site do Geogebra, 2009.

A Figura 2 mostra que a tela do *Geogebra* é dividida em duas partes: a algébrica à esquerda, e a geométrica à direita. A parte geométrica é formada por um plano cartesiano que permite ser movimentado com a ferramenta “mover” da última caixa do menu; aqui aparecem os objetos inseridos na caixa “entrada”, que se localiza na parte inferior da tela. Na parte algébrica, ficam as expressões matemáticas que são representadas geometricamente ao lado (funções, pontos, polígonos, etc.).

As Figuras 3 e 4 apresentam a barra de menu do *VCN*, sendo que tiveram destaque apenas alguns comandos:

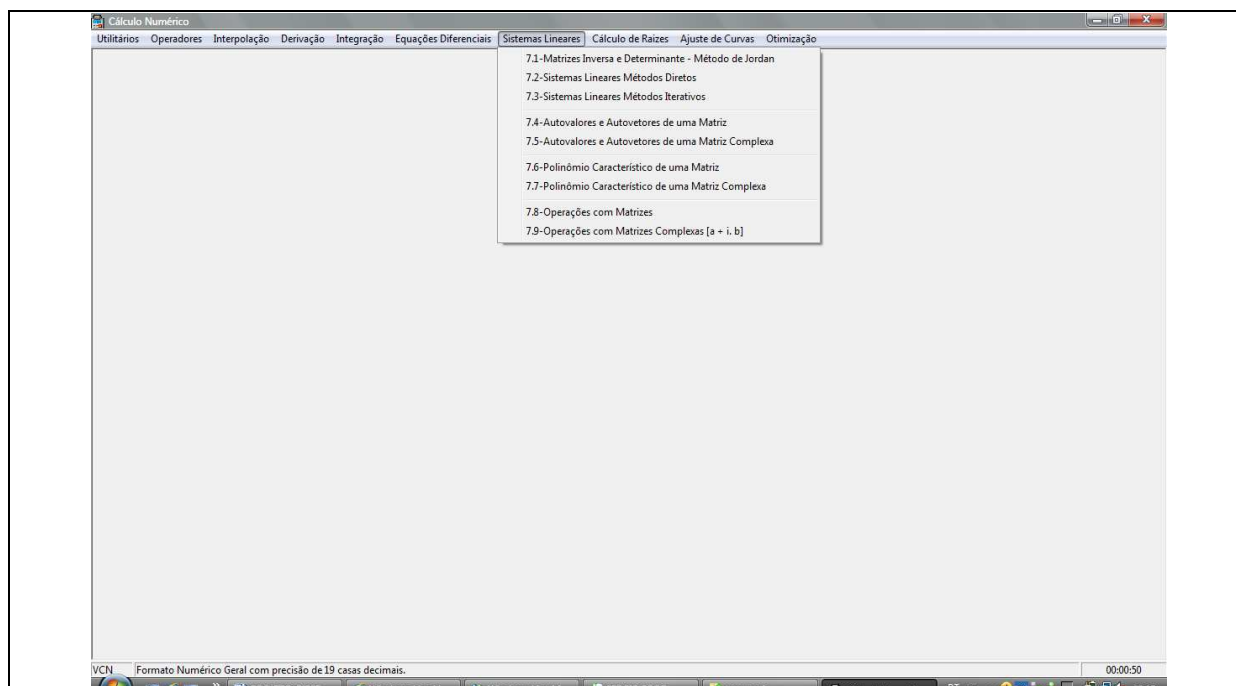


Figura 3: Barra de menu do VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

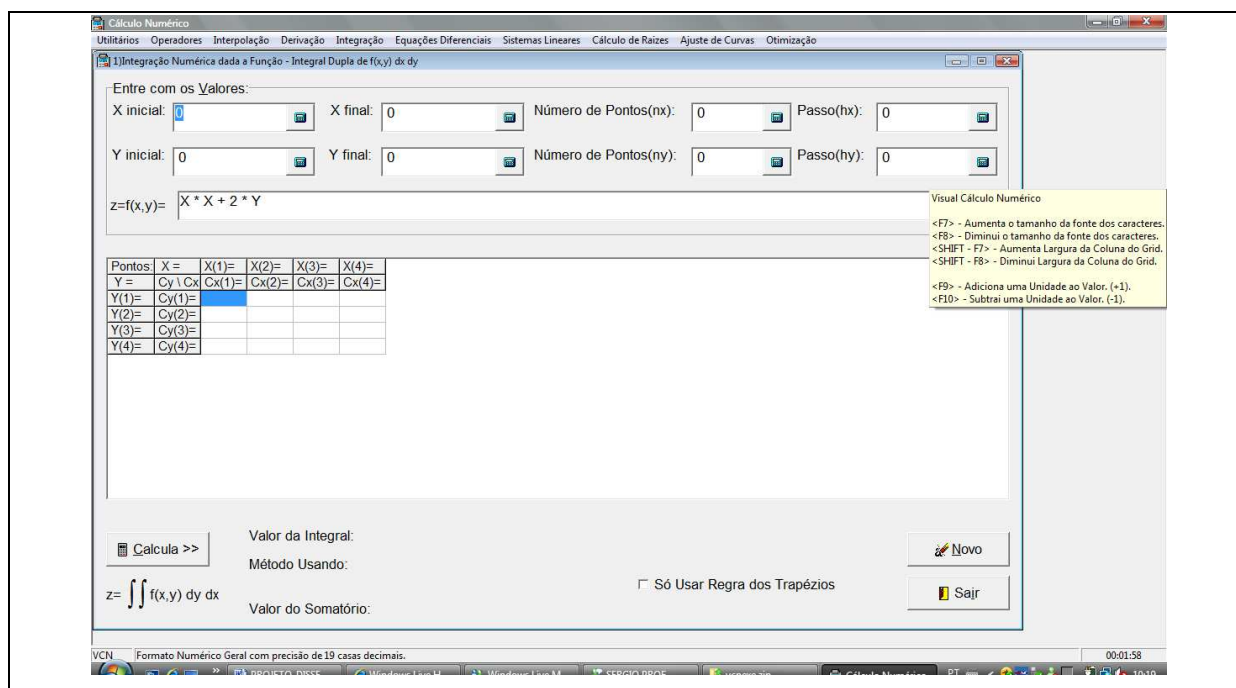


Figura 4: Comando “Integração Dupla Dada a Função”, do VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

Como as Figuras 3 e 4 sugerem, a experimentação será o grande foco que será explorado pelo professor, que deverá antes de iniciar o trabalho com esse material didático, estudar muito bem os dois softwares, de modo a conhecer bem o menu e responder a todas as indagações dos alunos no momento da resolução das questões. Exemplos da utilização dos recursos dos softwares serão apresentados no capítulo seguinte, que diz respeito ao estudo teórico dos conteúdos aqui tratados.

4. ESTUDO SOBRE A CONVERGÊNCIA DE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DISCRETAS

Como o estudo das integrais é o segundo ramo principal do Cálculo (FINNEY, 2006, p. 317), fica fácil perceber a importância que deve ser dada a esse significado e compreender realmente seu conceito; reconhecer a integral como o limite de uma função é a ponte necessária para se compreender o significado do Cálculo Diferencial e Integral.

Desse modo, para se compreender a ideia de Convergência, primeiramente serão estudados os conceitos de Limite, Taxas de Variação, Resolução Numérica de Integrais e Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes. Isso se justifica pelo fato de que todos esses conteúdos envolvem o cálculo de limites e o estudo da Convergência é, na verdade, uma análise de limites.

4.1. Definição de Limite de uma função real de uma variável

Ao estudar a definição de limite de uma função real, é necessário ir além do senso comum do significado da palavra. Para iniciar esse estudo, esta pesquisadora perguntou a algumas pessoas o que elas entendiam pela palavra limite; em geral, as respostas foram parecidas com as escolhidas abaixo. Dentre as respostas obtidas, foi possível perceber que todos têm alguma ideia do significado da palavra **limite**. A pergunta foi feita para dez pessoas (com formações diversas, que vão desde o semi-analfabetismo até a formação superior) e apenas uma delas disse não saber (essa pessoa concluiu o Ensino Médio). Das respostas apresentadas, percebe-se que elas se parecem bastante por conter a ideia de finitude:

- a) *“É quando a gente não consegue mais ir além daquilo, como um fim a que se deve chegar”.*
- b) *“É como uma meta que deve ser alcançada, um fim que se deve almejar. Muitas vezes, se um limite não é visualizado, necessárias barreiras podem não ser superadas.”*
- c) *“É como uma linha que não se pode ultrapassar... se for ultrapassada, a linha pode arrebentar e aí abrir um espaço que deveria ficar separado”.*

- d) *“É tudo o que a gente tem que ter na vida: limite entre o certo e o errado, limite pra comer, limite pra gastar... e quando a gente ultrapassa esse limite, acontece alguma coisa ruim”.*

Como mencionado, o limite no senso comum foi entendido como uma linha que não pode ser ultrapassada ou que deve ser alcançada. Essa ideia coincide com o significado que traz o Dicionário Aurélio: “1. Linha de demarcação; raia. 2. Local onde se separam dois terrenos ou territórios contíguos; fronteira. 3. Parte ou ponto extremo; fim, termo” (Ferreira, 2001, p. 427). É possível perceber que o significado do dicionário também contém características do senso comum. Geralmente é esse entendimento que acompanha o estudante até a graduação, ou seja, até o momento em que ele conhecerá o limite sob o ponto de vista matemático.

Ao estudar o significado de Limite sob o ponto de vista matemático, é interessante conhecer um pouco de sua história: por muitos séculos antes de Cristo, o conceito de Limite era ligado a ideias filosóficas relativas ao infinito, não recebendo propriamente um significado matemático. Mas segundo Cajori (2007), em 450 a.C. foi que surgiram os primeiros registros matemáticos sobre Limites, na discussão dos quatro paradoxos de Zenão e seus estudos foram divulgados por meio de seus críticos: Platão, Aristóteles e Simplicio. Os paradoxos de Zenão tratam do estudo do movimento e envolvem conceitos de continuidade do infinito e do infinitesimal (CAJORI, 2007).

De acordo com Sant’Ana e Tedesco (2004, p. 48), em seu artigo que discute as noções de limite e infinito, o significado de limite “está muito mais relacionado à noção matemática de fronteira de um conjunto limitado do que à noção matemática de limite”. Analisando a definição matemática apresentada por Lima (1998), um conjunto X é limitado quando existe $p \in X / x \leq p, \forall x \in X$ e essa definição envolve exatamente a ideia de um ponto final, de um extremo, ou seja, de um limite, deixando claro que o fato de esse conjunto ser limitado não significa que ele seja finito. Por exemplo, se for considerado o conjunto $P =]-6, 6]$, que é um intervalo real aberto à esquerda, existem infinitos elementos entre -6 e 6 , apesar de ser um conjunto limitado superiormente; sobre esse exemplo, ao se observar a sua representação gráfica, partindo da origem (ponto médio do intervalo, ou seja, $p = 0$), à medida que p se afasta de 0 (zero) pela esquerda, então p se aproxima de -6 , “caminhando” infinitamente até chegar muito perto de -6 , mas nunca chegará até esse valor. Já se p se afastar do ponto médio pela direita, ele chegará até 6 , sendo este um ponto de parada.

Para melhor compreensão do que foi dito acima, é preciso definir Conjuntos Finitos e Conjuntos Infinitos. Segundo Lima (1998), um conjunto Y qualquer é finito quando é vazio ou quando existe uma bijeção $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow Y$, para algum $n \in \mathbb{N}$; nesse caso, a bijeção f chama-se “contagem” dos elementos de Y e n é o número de elementos de Y . Um conjunto $P \neq \emptyset$ é infinito se não existe uma função bijetiva $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow P$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de acordo também com Lima (1998), ou seja, não é possível estabelecer uma contagem dos elementos do conjunto P .

Mas muitos alunos quando iniciam os estudos nos primeiros períodos dos cursos de matemática, engenharias diversas ou qualquer outro curso em que a disciplina Cálculo faça parte do currículo programático, acabam por relacionar erroneamente a ideia de limite com finito, assumindo que todo conjunto limitado é finito, de modo que, é claro, pensam que um conjunto infinito é ilimitado.

O sentido de infinito como ilimitado pode contribuir para a formulação de imagens conceituais equivocadas, gerando uma confusão entre conjuntos infinitos e ilimitados, criando a falsa impressão de que um conjunto limitado não pode ser infinito (SANT’ANA; TEDESCO, 2004, p. 48).

Desse modo, é muito importante que o aluno, ao estudar esse conteúdo nos cursos de graduação, tenha bem definido o significado de limite, de finito e de infinito. É preciso que ele saiba diferenciar um conjunto limitado infinito de um conjunto ilimitado infinito, pois é o início da reflexão para se chegar ao pensamento abstrato necessário. Como afirmam Sant’Ana e Tedesco, “a transição para o pensamento matemático avançado envolve a mudança da noção, meramente intuitiva, de conceitos para a construção e assimilação de definições formais e deduções lógicas” (2004, p. 47).

Ao se falar em pensamento matemático, David Tall (apud SANT’ANA; TEDESCO, 2004, p. 47) o caracteriza por dois elementos básicos: definições matemáticas precisas, com definições básicas e axiomas, e dedução lógica de teoremas, proposições e corolários, e ainda devem ser acrescentados aqui os termos primitivos. Sendo assim, para aprender matemática é necessária uma organização do pensamento, começando com as definições básicas até se chegar à capacidade de compreensão de teoremas e proposições.

Ao se mencionar a palavra Limite, considera-se na verdade o limite de uma função definida em um determinado conjunto (limitado ou não). Uma função é formada por um conjunto partida, denominado Domínio, por um conjunto chegada, ou Conjunto Imagem (que está contido num Contradomínio), e por uma lei ou regra de formação, que faz os elementos

do Domínio se corresponderem com os elementos do Conjunto Imagem, sendo que cada elemento do Conjunto Domínio possui apenas um correspondente no Conjunto Imagem.

Uma função com valores reais f definida em um conjunto D de números reais é uma regra que associa a cada número x em D um único número real, designado por $f(x)$. (...) O conjunto D de todos os números para os quais $f(x)$ é definida é chamado **domínio**, ou **domínio de definição** da função f . O número $f(x)$ é o valor de f no número (ou ponto) x . O conjunto de todos os valores $y = f(x)$ é a imagem de f . Isto é, a imagem de f é o conjunto $\{y : y = f(x)\}$, para algum x em D . (EDWARDS; PENNEY, 1997, p. 05)

Então, por meio de uma regra ou fórmula matemática, é possível operar os números reais x do conjunto D e obter como resultado algum elemento do conjunto imagem $f(x)$. Assim, essa fórmula matemática que fará $y = f(x)$ existir (se existir) indica que x é a **variável independente** e y é a **variável dependente** de x , de modo que variando x , o valor de y varia também.

Uma função estabelece uma relação de dependência entre dois objetos, aplicável em cada situação conveniente. Os resultados de uma função f podem ser visualizados por meio de um gráfico, ou seja, um conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, tal que $x \in D(f)$ e $f(x) \in \text{Im}(f)$ e denominando $A = D(f)$ e $\text{Im}(f) = B$, tem-se uma definição mais formal: $G(f) = \{(x, y) \in A \times B, \text{ onde } x \in A \text{ e } y \in B\}$; este gráfico pode ser representado por meio de uma tabela, de um diagrama de flechas (quando o conjunto é finito e enumerável²) ou por uma representação num sistema cartesiano.

Considere a seguinte função de variável real $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$. Esse exemplo foi escolhido para ser discutido neste momento por ser uma das questões envolvidas na Atividade 1, sobre Estudo dos Limites. Essa função pode ser representada pela Figura 5:

² Um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ (LIMA, 2004).

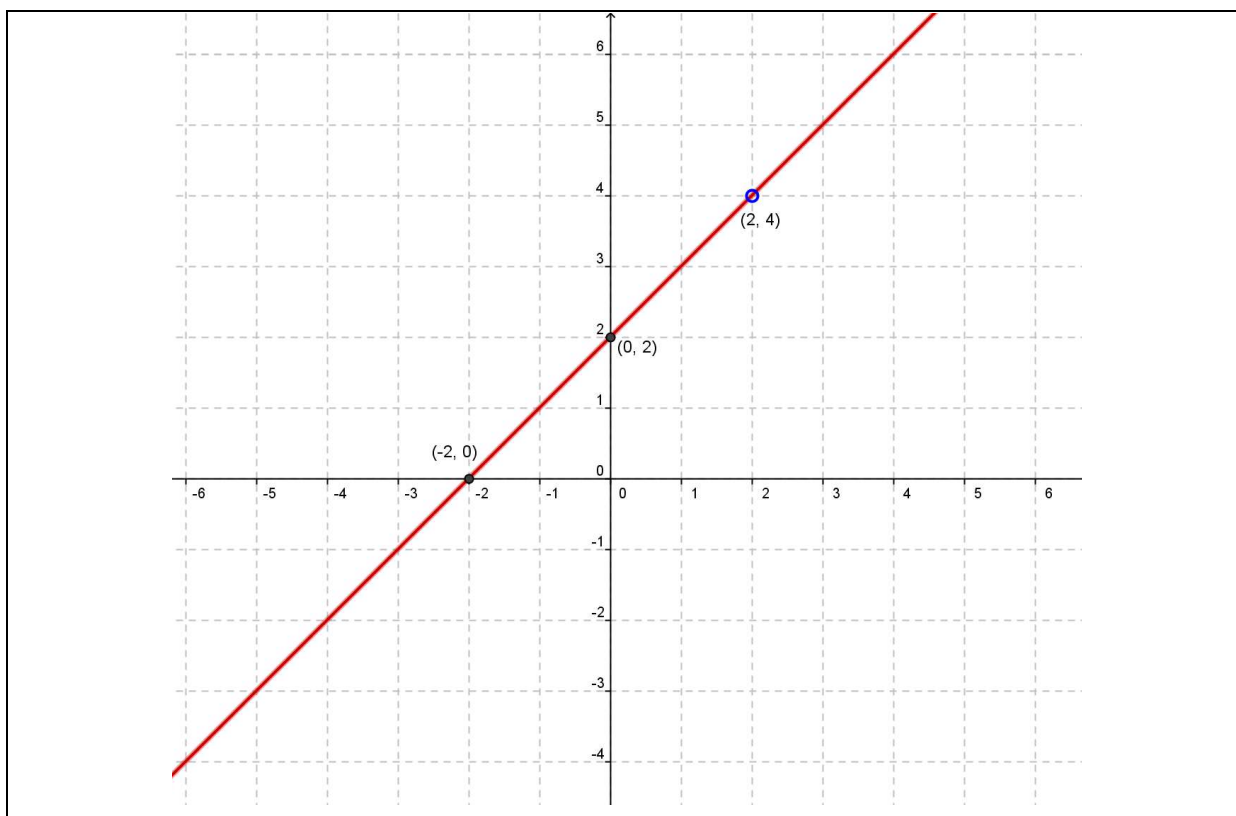


Figura 5: Representação gráfica da função real $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$, considerando o intervalo (aproximadamente) $] - 6, 6[$, construída no software *Geogebra*. Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x. Fonte: Site do Geogebra, 2010.

A representação gráfica que é apresentada na Figura 5 mostra que a função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, com $x \neq 2$, é uma reta com ponto aberto quando $x = 2$, pois a função g não é definida neste ponto; a reta intercepta o eixo x no ponto $(-2, 0)$ e o eixo y no ponto $(0, 2)$. Pode-se afirmar que a condição de existência para a função é $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}$; assim, a função será tabelada, conforme mostra a Figura 6:

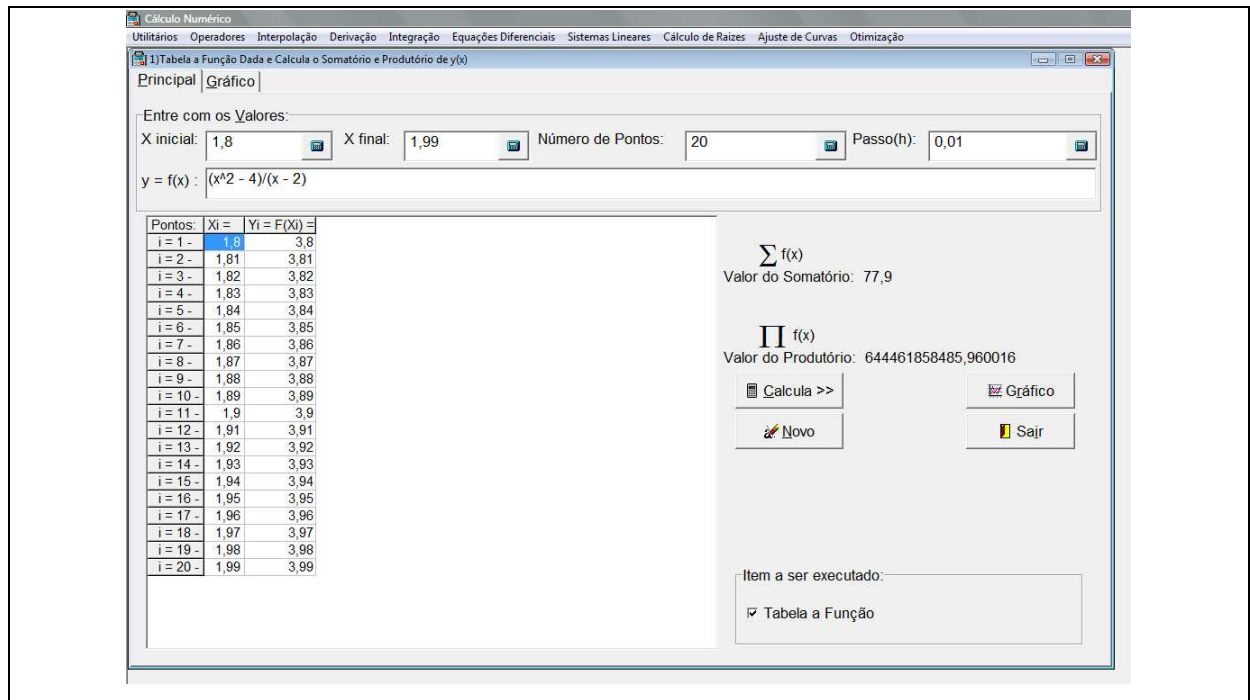


Figura 6: Função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ com o intervalo $[1,8; 1,99]$, construída no VCN.

Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

Como o interesse aqui é estudar a função em torno de $x = 2$, então o intervalo $[1,8; 1,99]$ foi escolhido de forma proposital, com o passo de 0,01, indicando as imagens da função quando x vem pela esquerda até se aproximar de 2. A tabela da Figura 6 já é suficiente para se perceber que quando x se aproxima de 2 pela esquerda, as imagens tendem a 4.

Agora, para estudar a função quando x se aproxima de 2 pela direita, pode-se considerar o intervalo $[2,01; 2,10]$, com o mesmo passo da tabela anterior. A Figura 7 diz respeito ao intervalo aqui mencionado, para a mesma função:

ideia pode ser estendida para os limites laterais, indicando que se uma função tem limites laterais iguais, então esse é o valor do limite da função.

De acordo com as ideias acima expostas e considerando a função g aqui estudada, é possível afirmar que o limite da função quando x tende a 2 pela direita e também pela esquerda é igual a 4, pois tanto quando x se aproxima de 2 pela direita ou quando se aproxima de 2 pela esquerda, as imagens se aproximam (ou tendem) a 4. Matematicamente, essa ideia pode ser assim descrita:

Definição informal de limite: seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0 , exceto talvez em x_0 . Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L , para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0 , dizemos que f tem limite L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. (FINNEY, 2006, p. 87).

Finney ainda ressalta que se trata de uma “definição informal” porque os termos “arbitrariamente e suficientemente próximos” não são precisos. Mas, com base nessa ideia, para o exemplo anterior, se for considerado que $x \rightarrow 2^-$ ou $x \rightarrow 2^+$, então $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Agora, o limite pode ser formalmente definido assim:

Definição formal de limite: seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0 , exceto talvez em x_0 . Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se, para cada número $\varepsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x , $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. (FINNEY, 2006, p. 90).

De acordo com essa definição formal, para o exemplo $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, isso significa que, para cada número $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x , então $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$. A seguir, apresenta-se a demonstração da informação aqui citada, por ser bastante simples:

Considerando que $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$, o limite da função g quando x tende a 2 será encontrado. Como x tende a 2, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} \right| = |x - 2| < \delta \quad \text{e se } \delta = \varepsilon, \text{ então } |x - 2| < \varepsilon. \quad \text{Logo,}$$

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x - 2| < \delta = \varepsilon.$$

O estudo do limite da função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$ foi obtido de forma numérica, com a construção das tabelas (vide Figuras 6 e 7), e algebricamente, ao fazer o estudo da definição formal acima. Mas por meio da análise do gráfico da função, ao acompanhar a curva com relação aos valores próximos a 2, pode-se perceber que o ponto aberto tem coordenadas (2, 4); inclusive, um detalhe importante a comentar é que a função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$ é representada graficamente por uma reta com a exclusão do ponto (2, 4) e isso acontece devido à fatoração e simplificação que se pode fazer com a expressão $\frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$. Assim, para

$x \neq 2, \quad \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$ e então a função g pode ser reescrita como

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, x \neq 2.$$

Considerando agora a função real $f(x) = \frac{3}{2x - 5}$, com $x \neq \frac{5}{2}$, a Figura 8 apresenta sua representação gráfica, sendo que uma observação atenta deve acontecer para a região em torno de $x = \frac{5}{2}$:

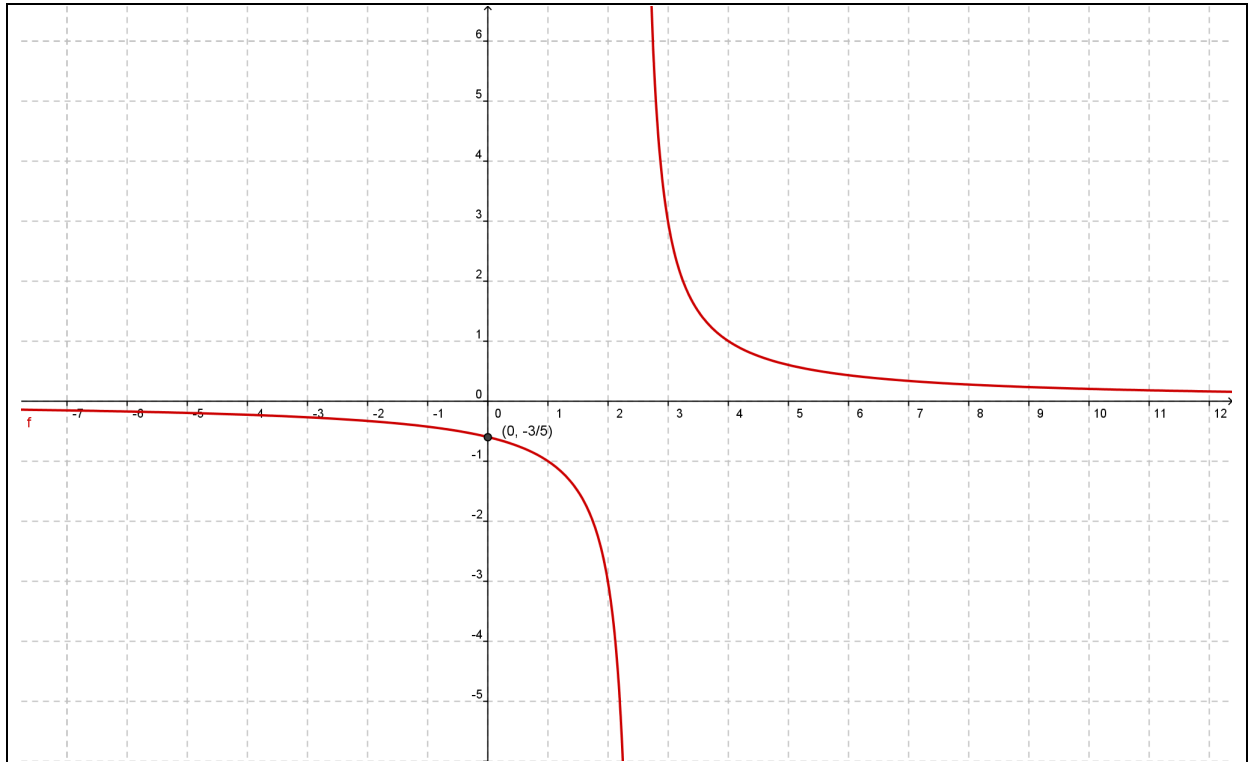


Figura 8: Representação gráfica da função $f(x) = \frac{3}{2x-5}$, com $x \neq \frac{5}{2}$, pelo software *Geogebra*. Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x . Fonte: Site do *Geogebra*, 2010.

De acordo com a Figura 8, a curva intercepta o eixo y no ponto $(0, -\frac{3}{5})$ e não intercepta o eixo x em nenhum ponto, ou seja, a função não admite nenhuma raiz. Isso acontece porque, sendo o numerador da expressão racional um valor numérico e, para o denominador $(2x-5)$, é necessário que $x \neq \frac{5}{2}$, então não há possibilidade de se obter uma imagem nula, ou seja, não existe um valor x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Além disso, ao acompanhar a curva em pontos próximos a $x = \frac{5}{2}$, em valores de x que se aproximam de $\frac{5}{2}$ pela direita a curva tende para o infinito positivo, e quando os valores de x se aproximam de $\frac{5}{2}$ pela esquerda, a curva (o conjunto imagem) tende para o infinito negativo.

Analisando agora o comportamento numérico da função próximo a $x = \frac{5}{2}$, o intervalo será restrito primeiramente para $[2,4; 2,49]$, com passo 0,01 e, em seguida, o intervalo $[2,501; 2,51]$, com passo 0,001, como mostram as Figuras 9 e 10:

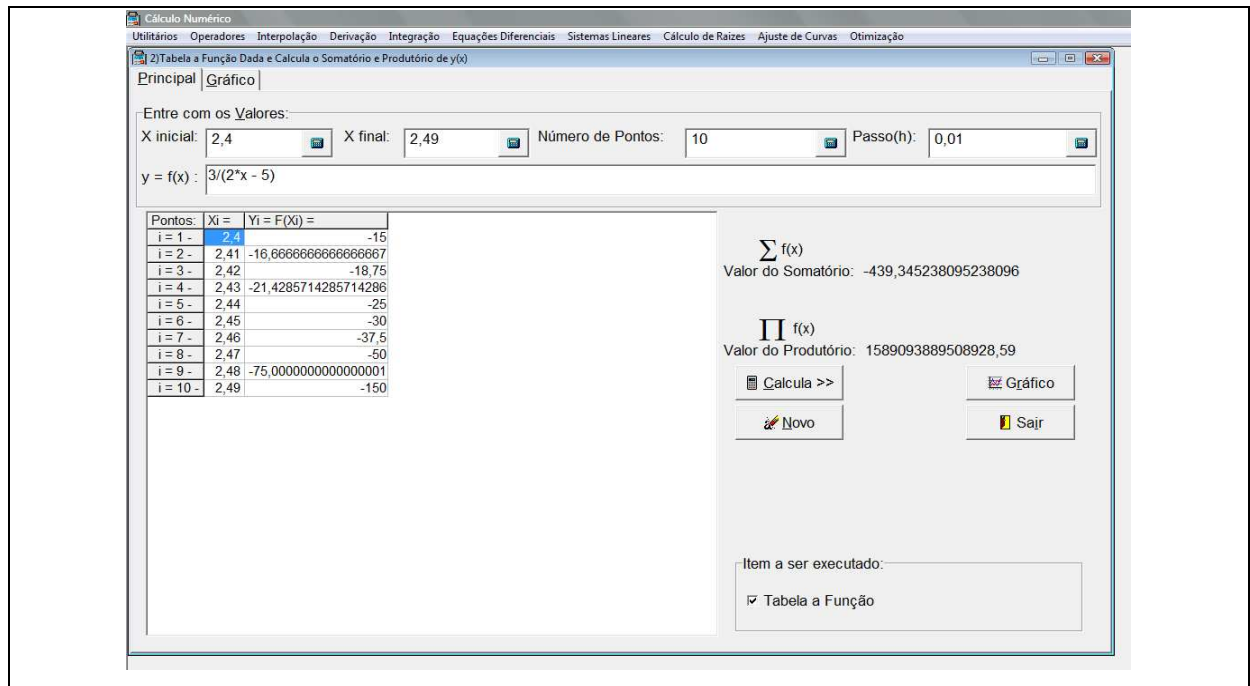


Figura 9: Tabelamento da função $f(x) = \frac{3}{2x-5}$, de [2,4; 2,49], com passo 0,01, pelo programa VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

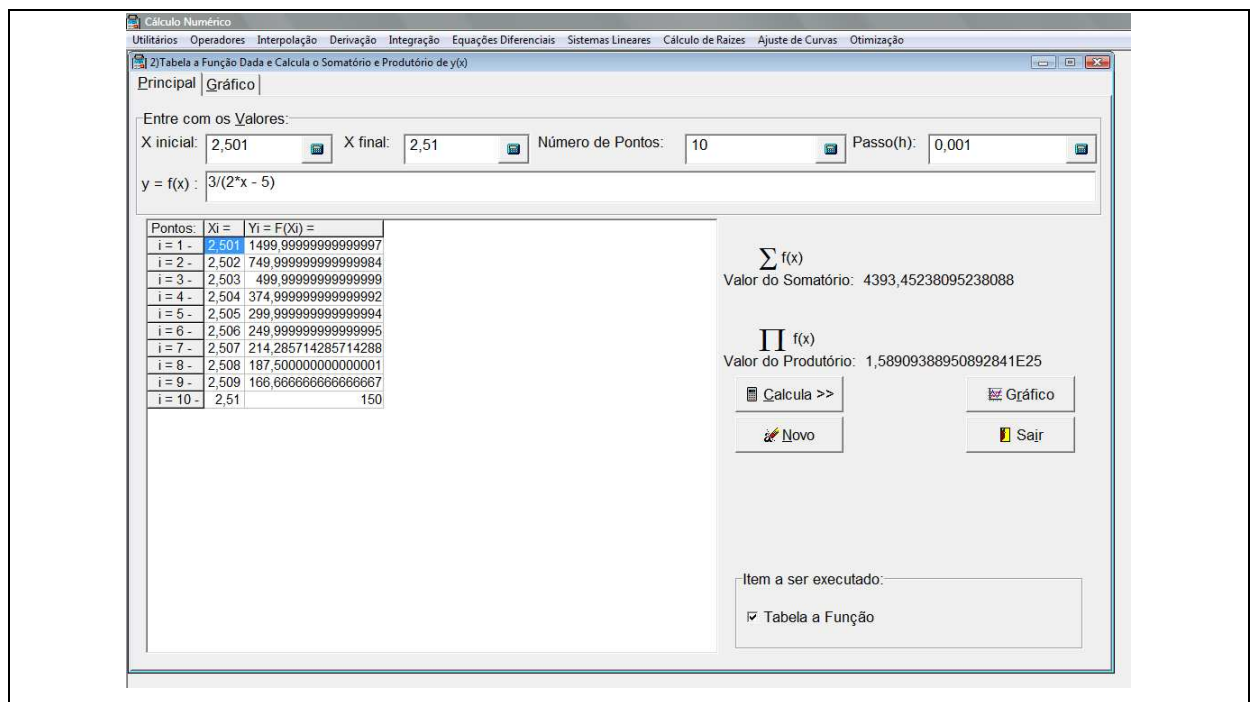


Figura 10: Tabelamento da função $f(x) = \frac{3}{2x-5}$, no intervalo [2,501; 2,51], com passo 0,001, pelo programa VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

Analisando as Figuras 9 e 10 é possível perceber que:

- a) Quando x se aproxima de $5/2$ pela direita, os valores das imagens da função tendem ao infinito positivo.
- b) Quando x se aproxima de $5/2$ pela esquerda, os valores das imagens da função tendem ao infinito negativo.

De acordo com a definição formal de limite apresentada por Finney (2006), essa função não tem limite quando x tende a $5/2$, pois os limites laterais são diferentes. Usando a linguagem matemática, isso pode ser escrito como:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} \frac{3}{2x-5} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^-} \frac{3}{2x-5} = -\infty$$

A partir do estudo sobre Limites de uma função com base no que foi exposto pelos autores pesquisados, percebe-se a importância da experiência com a visualização gráfica e a construção de tabelas para a compreensão do assunto. Por meio dessa experiência, o estudante tem a oportunidade de se explicar o conteúdo e construir conclusões, com o auxílio do professor, o que poderá desenvolver a maturidade de estudo e pesquisa.

4.2. Das taxas de variação à derivada: construção do conceito

O conceito de derivada surgiu com o estudo das retas tangentes na Grécia Antiga. Já no século XVII, René Descartes (1596 – 1650) utilizou tais ideias no desenvolvimento da Geometria Analítica, ao estudar amplamente as tangentes. Muitos foram os matemáticos que contribuíram para esse estudo, dentre eles pode ser mencionado Pierre de Fermat; inclusive, J. Lagrange e P. S. Laplace chegaram a afirmar que Fermat era o inventor do cálculo depois de conhecer suas ideias sobre os pontos de máximos e mínimos com o uso de uma reta tangente com inclinação nula (CAJORI, 2007, p. 265). Também podem ser citados Kepler, Isaac Barrow, etc.

Porém, é certo que o cálculo diferencial não foi uma descoberta individual, mas é um conjunto de informações que fazem parte de uma história que tem vários protagonistas; um

importante personagem é Isaac Newton, que estudou principalmente o movimento, publicando o seu tratado Método dos Fluxos, em 1672 (CAJORI, 2007, p. 267), com o que hoje é conhecido por derivada de x em função do tempo. Ao longo dos anos, a notação de Newton foi substituída pela proposta de Leibniz, que também contribuiu bastante para o desenvolvimento do cálculo, mas não por meio do estudo do movimento.

Leibniz considerou as variáveis x e y como grandezas com uma variação de valores infinitamente pequenos, e introduziu dx e dy como uma diferença entre essa sucessão de valores. Esse matemático não usou a definição de derivada, mas sabia que se tratava do coeficiente angular de uma reta tangente.

Tratando neste momento particularmente do conceito de derivada, vários livros didáticos iniciam o estudo com as taxas de variação, utilizando limites. Stewart (2009) traz logo no Prefácio do livro Cálculo Volume 1 a principal recomendação da Conferência de Tulane de 1986, cujo tema principal foi a reforma do ensino do cálculo: “concentrar-se na compreensão de conceitos” sendo este também um propósito desse trabalho.

Importante destacar que a derivada é um tipo de limite, sendo uma taxa de variação instantânea. Assim, considerando a curva C com uma equação $y = f(x)$, pode-se encontrar a reta tangente a essa curva em um certo ponto $P(a, f(a))$. Para isso, toma-se um ponto $Q(x, f(x))$, com $x \neq a$ de modo que a inclinação da reta secante PQ será $m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$; ao fazer Q se aproximar de P ao longo da curva C , então x se aproxima de a . Com $m_{PQ} \rightarrow m$, então a tangente t é a reta que passa por P e tem inclinação m (STEWART, 2009, p. 130). Com o coeficiente angular m é possível então encontrar a equação da reta tangente no ponto $P(a, f(a))$, utilizando uma ideia da Geometria Analítica: $y - y_p = m.(x - x_p)$, que Stewart (2009, p. 130) chama de **forma ponto-inclinação**; desse modo, como $m_{PQ} \rightarrow m$, então tem-se que $m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Outra forma possível de se encontrar o coeficiente angular é fazer com que $x - a = h \Rightarrow x = a + h$ e substituir na expressão acima, que ficará:

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Sobre o valor h acima, Stewart (2009, p. 131) destaca que quando $h > 0$ o ponto Q está à direita de P e quando $h < 0$, então o ponto Q está à esquerda de P , conforme ilustra a Figura 11:

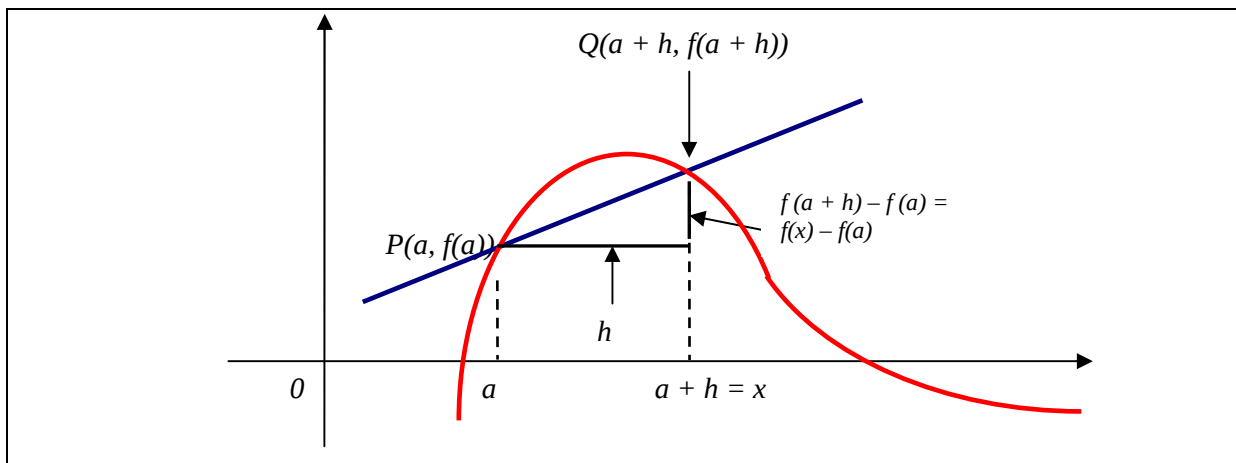


Figura 11: Ilustração do caso $h > 0$, em que Q está à direita de P .
Fonte: STEWART, 2009, p. 131.

Conforme a Figura 11 mostra, o ponto $Q(a + h, f(a + h))$ está à direita do ponto $P(a, f(a))$, pois $h > 0$. A Figura 12 mostra outra ilustração, elaborada por esta pesquisadora, para o caso de $h < 0$:

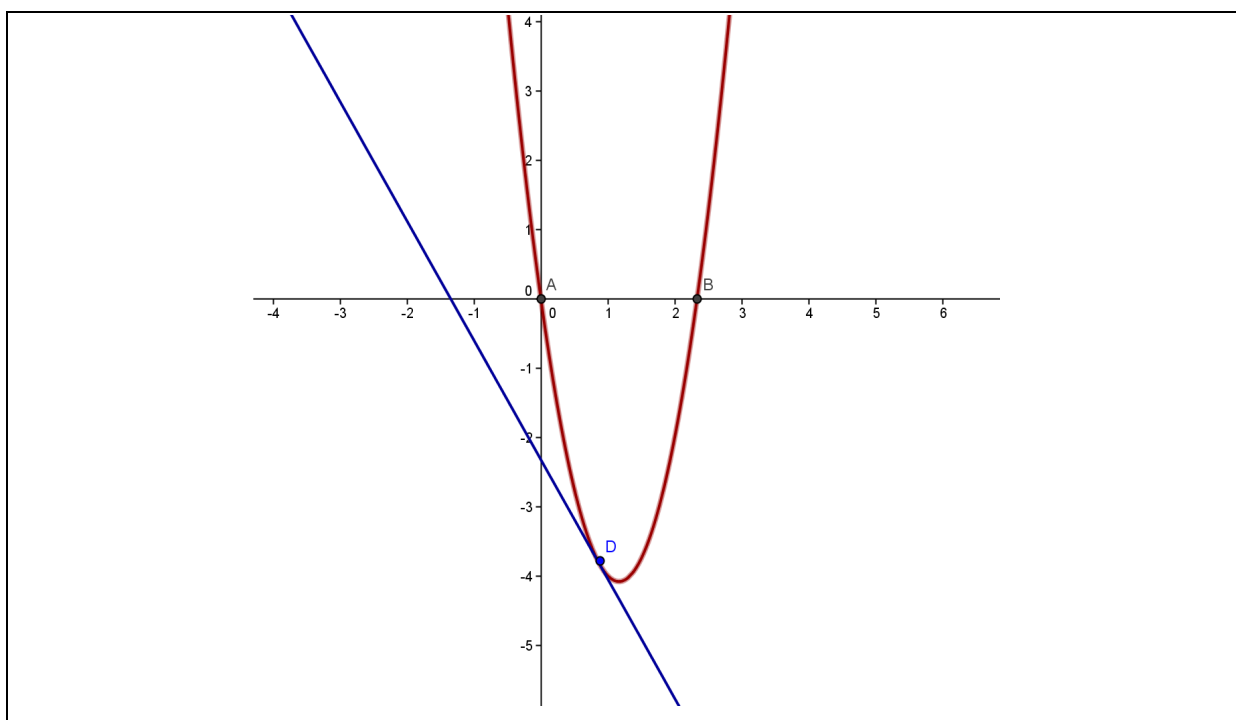


Figura 12: Função $f(x) = 3x^2 - 7x$, os pontos $A(0, 0)$ e $B(2,33; 0)$ que contêm as raízes dessa equação, e o ponto $D(0,88; -3,78)$, construídos no *Geogebra*. Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x .
Fonte: Site do Geogebra, 2010.

De acordo com a Figura 12, o ponto A está à esquerda do ponto D e isso pode ser justificado por $x_D = 0,88 - 0,88 = 0 = x_A$ e $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 = 0$, ou seja, $h < 0$; sobre o ponto B que está à direita do ponto D , $x_D = 0,88 + 1,45 = 2,33 = x_B$ de modo que $h > 0$.

Retornando à expressão que permite o cálculo do coeficiente angular da reta tangente a uma curva num ponto específico, é preciso lembrar lá da Geometria Analítica que o coeficiente angular é quem determina a inclinação dessa reta tangente; se ocorre que m é positivo, então a função é crescente, mas se m é menor do que 0 (zero), então a função é decrescente. Finney (2006) define quando uma função f definida em um intervalo I é crescente ou decrescente:

- **função crescente em I :** se para todos os pontos x_1 e x_2 em I , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **função decrescente em I :** se para todos os pontos x_1 e x_2 em I , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.³

Para melhor compreender o que foi mencionado acima, considere a função $f(x) = -x^2 + 4x$ e o ponto $P(1, 3)$. É possível encontrar a reta tangente a essa curva no ponto P , calculando primeiro o coeficiente angular dessa reta:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 + 4 \cdot (1+h)) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h+2) = 2$$

Assim, o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x) = -x^2 + 4x$ no ponto $P(1, 3)$ vale 2, e a equação dessa reta é $y = 2x + 1$, como pode ser confirmado pelos cálculos abaixo:

$$\begin{aligned} y - 3 &= 2 \cdot (x - 1) \\ y &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Sempre que há a necessidade do cálculo de uma taxa de variação, então surge a expressão $m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (ou $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$). Stewart ressalta que “os limites

³ (FINNEY, 2006, p. 251)

do tipo $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ surgem sempre que calculamos uma taxa de variação em uma das ciências ou engenharia, tais como a taxa de uma reação química ou o custo marginal em economia” (2009, p. 132).

A expressão $m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ recebe o nome particular de **derivada**, que possui a seguinte definição: “A derivada de uma função f em um número a , denotada por $f'(a)$ é $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se o limite existir” (STEWART, 2009, p. 133); essa definição pode ser utilizada para obter a derivada de qualquer função contínua⁴.

Uma vez que a derivada de uma função qualquer (desde que seja contínua)⁵ pode ser calculada por meio da expressão $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, então no exemplo dado acima, o resultado $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-(x+h)^2 + 4.(x+h)) - (-x^2 + 4x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h + 4) = -2x + 4$ na verdade é, então, a derivada da função $f(x) = -x^2 + 4x$ e a função $f'(x) = -2x + 4$ é chamada **função derivada de f** .

4.3. Métodos numéricos de resolução de uma integral

O cálculo da área de uma região é um problema muito comum para engenheiros, arquitetos e diversos outros profissionais; esse, juntamente com o cálculo de distâncias, é um objeto importante de estudo do Cálculo Integral (FINNEY, 2006). A partir deste momento, serão estudadas as diversas formas numéricas de se calcular uma integral, particularmente tratando da área de regiões. O método numérico de resolução de uma integral é chamado de quadratura.

Inicialmente, será considerada a região definida pela função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$; este exemplo foi escolhido por ser uma das questões exploradas na Atividade 3. Essa região, que satisfaz as condições de uma área: $|f(x)| > 0$, está representada na Figura 13:

⁴ Uma função é contínua em um número a se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (STEWART, 2009, p. 107).

⁵ **Teorema:** se f for derivável em a , então f é contínua em a (STEWART, 2009, p. 144). Mas a recíproca desse teorema não é verdadeira.

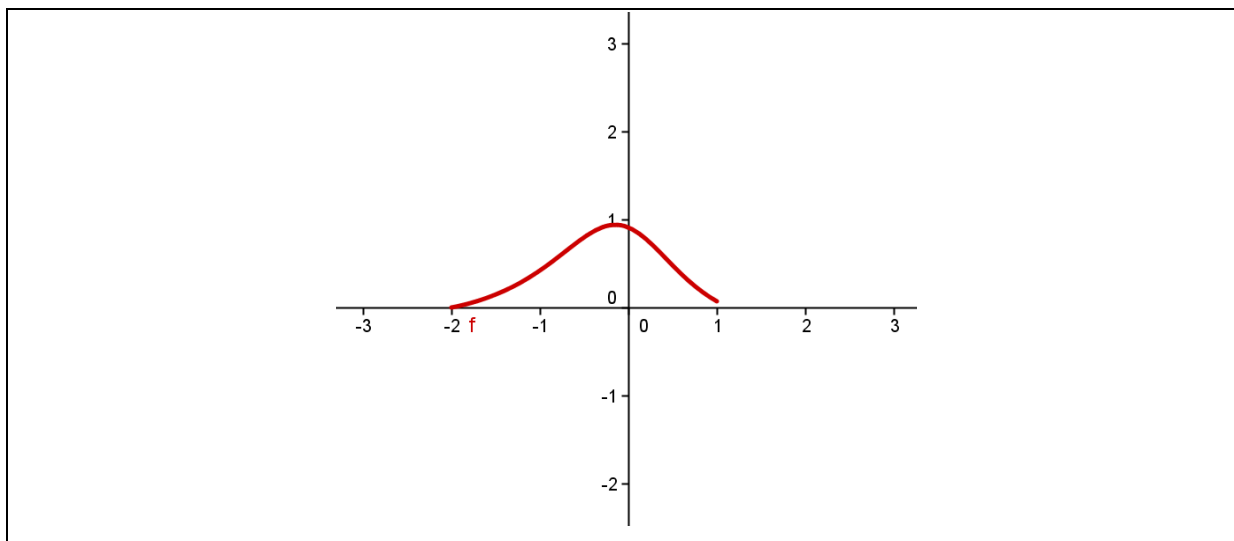


Figura 13: Representação da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, feito no *Geogebra*. Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x. Fonte: Site do *Geogebra*.

Supondo que se deseje encontrar a área sob essa curva, podem ser utilizados vários métodos numéricos, sendo que alguns serão descritos a seguir.

4.3.1. Somas de Riemann

Em primeiro lugar, é preciso apresentar Georg Friedrich Bernhard Riemann, que nasceu em 1826, concluiu seu doutorado na Universidade de Gottingen, sob a orientação de Gauss. Gauss, que não costumava elogiar outros matemáticos, disse que Riemann era “uma mente criativa, ativa e verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil” (STEWART, 2009, p. 346). Porém, Riemann morreu cedo (aos 39 anos), de tuberculose, mas contribuiu significativamente para a teoria das funções complexas, física-matemática, teoria dos números e fundamentos da geometria, além de ter passado a Einstein alguns conceitos amplos de espaço e geometria, para o desenvolvimento da teoria geral da relatividade.

A Soma de Riemann, ou $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$, é apresentada por Stewart (2009, p. 346), que afirma que “a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann”. Na expressão $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$, os valores

$f(x_i^*)$ e Δx são, respectivamente, a altura e a base do retângulo obtido por meio da partição de um intervalo $[a, b]$, com n subintervalos de comprimento Δx ; é importante ressaltar que “se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes” e se “ f assumir valores positivos e negativos, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e do oposto das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x ” (STEWART, 2009, p. 346).

Quando se obtém o limite da soma $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$, com $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, então se tem a integral definida:

Definição de integral definida: se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Sejam $x_0 (= a)$, x_1 , x_2 , ..., $x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, escolhamos os **pontos amostrais** $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de f de a a b** é $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ desde que este limite exista. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$. (STEWART, 2009, p. 345).

Para descobrir a área de uma região por meio da Soma de Riemann, de acordo com a definição acima (para $y = |f(x)|$), basta dividir a região, que pertence ao intervalo $[a, b]$, em n partes iguais e construir retângulos cuja base é dada por $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ e a altura de cada retângulo será o ponto de intersecção com a curva; a soma da área de cada um dos retângulos será a área da região sob a curva. Nesse caso, esse valor da área (ou o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |f(x_i^*)| \Delta x$) é a integral da função definida no intervalo $[a, b]$; então, dizer que uma função é integrável significa que a integral definida dessa função existe. Lima (2004, p. 303) confirma como sendo “reuniões de retângulos justapostos cujos lados são paralelos aos eixos $x = 0$ e $y = 0$ ”, fazendo com que cada um desses retângulos tenha uma área e que ao somar todas essas áreas, tenha-se a área sob a curva.

Quanto ao fato de uma função ser ou não integrável, Stewart (2009, p. 347) apresenta o seguinte teorema: “se f for contínua em $[a, b]$, ou tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x) dx$ existe”. Ainda de acordo com o mesmo autor, se uma função f é integrável em $[a, b]$, então

não importa quais são os pontos amostrais x_i^* escolhidos que o valor da área será o mesmo; acrescenta ainda que é comum tomar pontos amostrais nas extremidades direitas para simplificar o cálculo da integral. Desse modo, fazendo com que $x_i^* = x_i$, pode-se simplificar a definição de integral conforme o teorema: “se f for integrável em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$ em que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i.\Delta x$ ” (STEWART, 2009, p. 347).

Diante então do teorema e definições expostas acima, pode-se ilustrá-las com a representação gráfica da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $x \in [-2, 1]$, dando destaque para a divisão do intervalo, conforme mostra a Figura 14:

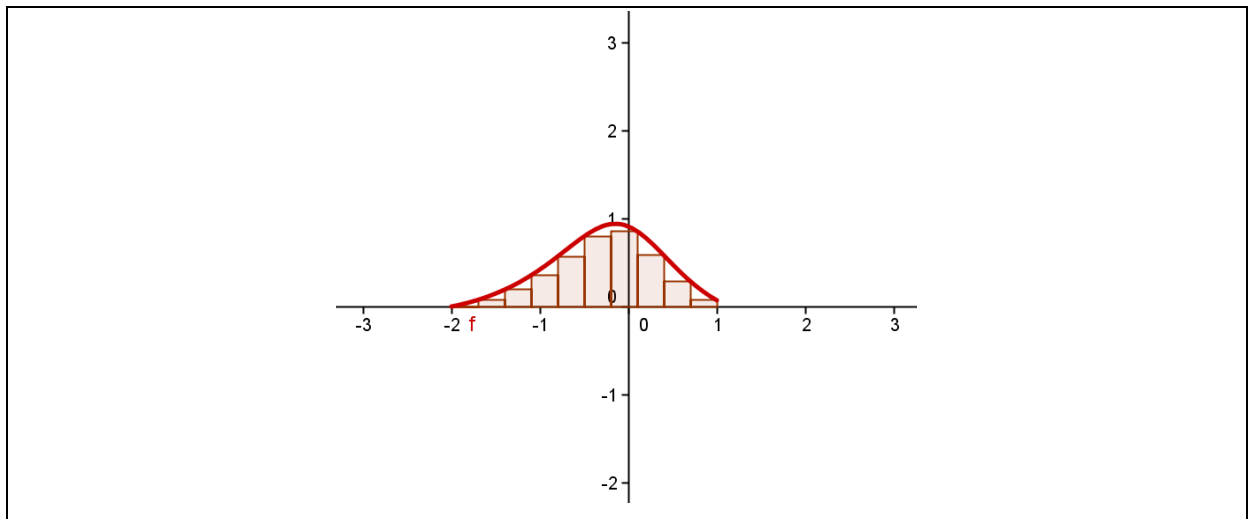


Figura 14: Área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, feito no *Geogebra*. A região sob a curva foi dividida em 10 partes iguais. Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x.
Fonte: Site do Geogebra, 2010.

Como mostra a Figura 14, $n = 10$ e o comprimento do intervalo é igual a $|1 - (-2)| = 3 \text{ u.c}$, então a base de cada retângulo mede $\frac{3}{10} = 0,3 \text{ u.c}$ em que *u.c* é uma unidade de medida de comprimento. É possível claramente perceber que a soma da área dos retângulos é menor do que a área real sob a curva e que cada retângulo não ultrapassa o limite da curva. É claro que quanto maior é o número de partições (divisões) que são feitas no intervalo, maior é a precisão do valor da área entre a curva e o eixo x. Sendo assim, para o exemplo anterior, a Tabela 1 pode ser construída com diferentes valores de n :

Tabela 1: Cálculo da área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, por meio das Somas

Inferiores, obtido com o uso do Geogebra.

N	Área (u^2)
10	1,13
100	1,38
200	1,40
500	1,41
1000	1,41
10000	1,41

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Analisando a Tabela 1, quanto maior é o número de retângulos, a área mais se aproxima de $1,41 u^2$; é possível observar que a área tende a $1,41$ pela esquerda. Então, a soma das áreas obtidas à esquerda em que existe uma aproximação por “falta” para completar a área real pode ser chamada de Soma Inferior ou Integral Inferior (LIMA, 2004, p. 304), uma vez que os resultados tendem ao valor exato (ou à área real) pela esquerda.

Há outra forma de obter a área com a construção dos retângulos. Isso será ilustrado com a Figura 15:

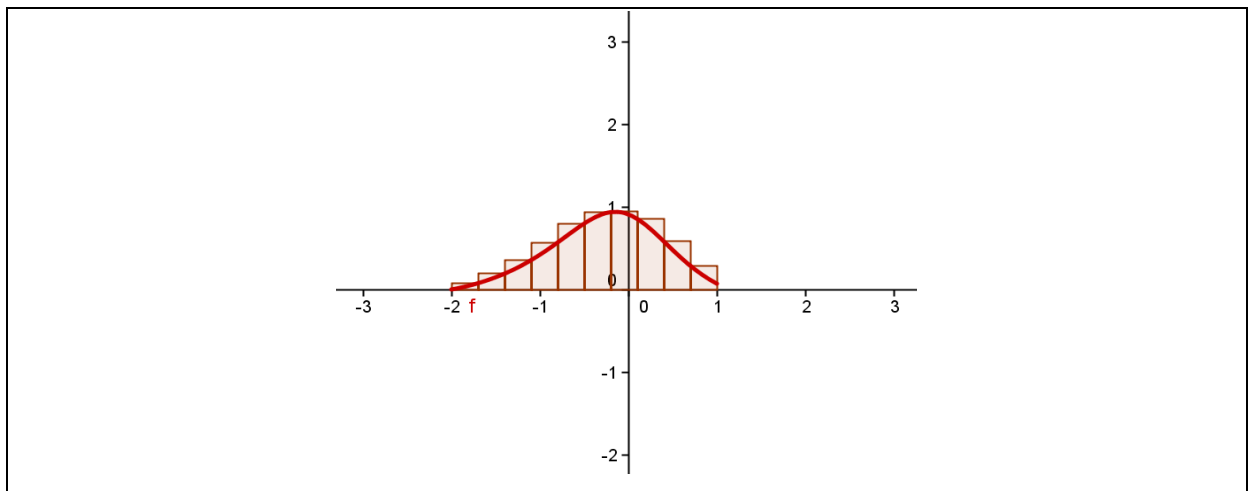


Figura 15: Área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, feito no Geogebra, por excesso. Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x. Fonte: Site do Geogebra, 2010.

Ao observar a Figura 15, é fácil perceber que algumas partes dos retângulos sobraram, pois ultrapassaram o limite da curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$. Quanto maior é o número de retângulos (partições), mais precisa é a área, o que pode ser observado seguir, através da Tabela 2:

Tabela 2: Cálculo da área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, por meio das Somas Superiores, obtido por meio do Geogebra.

N	Área (u^2)
10	1,68
100	1,44
200	1,42
500	1,42
1000	1,41
10000	1,41

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Conforme a Tabela 2, quanto maior é o número de retângulos, a área mais se aproxima de $1,41 u^2$, sendo que a área tende a $1,41$ pela direita. Neste caso, Lima (2004, p. 304) menciona a Soma Superior ou Integral Superior, pois existe uma aproximação por excesso. Este mesmo autor salienta que, com relação à curva f , a área interna é a Integral Inferior e a área externa é a Integral Superior.

Mas apesar de os limites das áreas serem iguais, pois tendem para o mesmo valor tanto pela direita como pela esquerda, para alguns valores de n os valores da área pela direita e pela esquerda são diferentes. Por exemplo, quando $n = 10$, $S_i = 1,13$ e $S_s = 1,68$, e como o limite da soma é $1,41$, então $1,68 - 1,41 = 0,27$ e $1,41 - 1,13 = 0,28$, ou seja, a diferença entre o maior valor e o limite da soma é aproximadamente igual à diferença entre o limite da soma e o menor valor da área, o que indica que a área ideal será a metade dessa diferença.

Geralmente os pontos amostrais x_i^* são as extremidades direitas do i -ésimo intervalo, porém, as diferenças entre as áreas maior e menor, e o limite das somas, indicam que a área exata é obtida pela soma da área menor com a metade da diferença, ou da subtração entre a maior área e a metade da diferença. Então, quanto a isso, o melhor é trabalhar com os pontos médios de cada subintervalo, denotando o ponto por $\bar{x}_i$, e apresenta a **Regra do Ponto Médio**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x = \Delta x[f(\bar{x}_1) + \dots + f(\bar{x}_n)] \text{ onde } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ e } \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ponto médio de } [x_{i-1}, x_i] \text{ (STEWART, 2009, p. 351).}$$

Então, trabalhando com a área maior como Soma Superior e a área menor como Soma Inferior, é possível constatar, através de uma dedução simples, que a integral sob uma curva é, na verdade, uma aproximação da média aritmética entre a Soma Superior e a Soma Inferior:

Suponha que $\int_a^b f(z)dz \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{1}{2} \cdot (z_{i-1} + z_i)\right) \Delta z$ seja a área maior sob a curva f no intervalo $[a, b]$, ou seja, a soma das áreas dos retângulos sob a curva, e que resultaram no valor com excesso sob a curva, e suponha também que $\int_a^b f(w)dw \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{1}{2} \cdot (w_{i-1} + w_i)\right) \Delta w$ seja a área menor sob a curva f no intervalo $[a, b]$. Como foi constatado de forma numérica acima, se $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{1}{2} \cdot (x_{i-1} + x_i)\right) \Delta x$ é a área real sob a curva f no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(w)dw \approx \int_a^b f(z)dz - \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow 2 \cdot \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(w)dw + \int_a^b f(z)dz$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{\int_a^b f(w)dw + \int_a^b f(z)dz}{2}$$

Então, de acordo com o exposto, a área definida pela função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, explorada nas Figuras 13 a 15 e nas Tabelas 1 e 2 pode ser reescrita como:

$$\int_{-2}^1 \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = 1,41$$

Logo, a integral definida da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, no intervalo $x \in [-2, 1]$, é igual ao limite da soma das áreas dos n subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{(1 - (-2))}{n} = \frac{3}{n}$ e altura igual a $f(x_i)$, com $1 \leq i \leq n$.

4.3.2. Regra dos Trapézios

Isaac Newton (1643 – 1727), natural de Lincolnshire, publicou um dos livros mais influentes da história da ciência, o *Principia*, que lançou as bases para a mecânica clássica.

Era físico, matemático, astrônomo, filósofo natural, alquimista e teólogo; as contribuições de Newton para o cálculo diferencial e integral foram fundamentais para seu desenvolvimento. Roger Cotes (1682 – 1716) nasceu em Leicestershire e foi um matemático inglês que trabalhou com Newton na segunda edição de seu livro *Principia*. Ele foi um grande estudioso dos métodos numéricos e, junto com Newton, desenvolveu a fórmula para a Regra dos Trapézios e as Regras de Simpson, também chamadas de fórmulas de Newton-Cotes Fechada, e se baseiam na avaliação do integrando em pontos igualmente espaçados.

Calcular a área sob uma curva por meio da Regra dos Trapézios significa dividir a região em partes iguais, como acontece com a Soma de Riemann, mas ao invés de retângulos são construídos trapézios de mesma altura (ou espaçamento). Para se ter uma ideia de como uma determinada região fica dividida em trapézios, será usado o mesmo exemplo anterior, ou seja, $f(x) = \frac{\sin(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, representada na Figura 16:

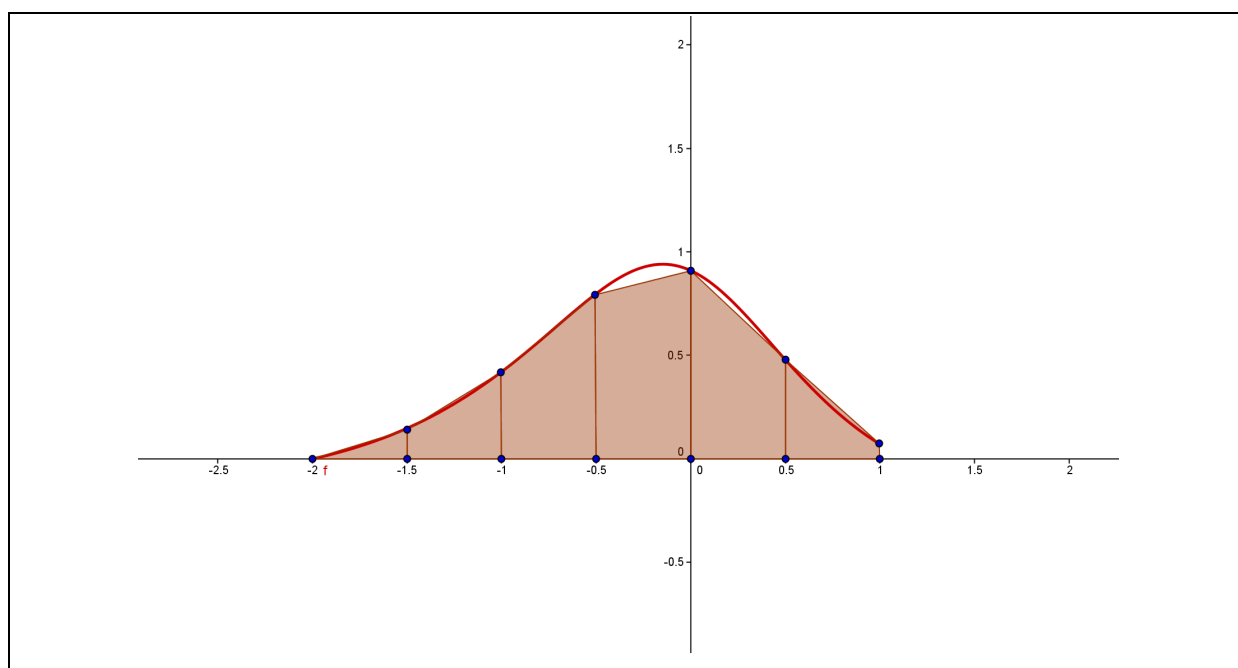


Figura 16: Representação gráfica da função $f(x) = \frac{\sin(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, com destaque para as partições na forma de trapézios retângulos. Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x. Fonte: Site do Geogebra, 2010.

De acordo com a Figura 16, o intervalo sob a curva foi dividido convenientemente (para melhor visualização) em 6 partes iguais, sendo que cada partição tem pontos sobre a curva que, quando ligados, formam trapézios. Os trapézios têm a característica de terem a mesma altura $\left(\frac{1 - (-2)}{6} = 0,5\right)$ e as bases têm o valor $f(x_0)$, sendo x_0 a abscissa do ponto sobre

a curva. No caso da Regra dos Trapézios, a área sob a curva é aproximadamente a soma das áreas dos trapézios ali inscritos.

Segundo Barroso [et al] (1987, p. 206), a Regra dos Trapézios é uma fórmula de Newton-Côtes “que empregam valores de $f(x)$ onde os valores de x são igualmente espaçados”. Os mesmos autores explicam o processo para obtenção da fórmula que é através do polinômio interpolador de Gregory-Newton:

$$P_n(x) = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}.\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}.\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1)}{n!}.\Delta^n y_0 + R_n \text{ e}$$

em que $z = \frac{|b-a|}{h}$ e R_n é um resíduo.

Como não é o objetivo deste trabalho o aprofundamento teórico sobre a Matemática que está envolvida nesses conteúdos, a demonstração da fórmula da Regra dos Trapézios será omitida; mas apresentar uma fórmula sem oferecer nem sequer uma explicação breve faz com que o seu uso seja mecanizado. Sendo assim, a justificativa a seguir se baseia na interpretação geométrica apresentada por Barroso [et al] (1987, p. 208) que envolve a fórmula para obtenção da área de um trapézio, da Geometria Plana:

Dado um trapézio de altura h , base maior B e base menor b , pode-se encontrar a sua área por meio da fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$. Considerando o gráfico 8 que é a representação gráfica da função $f(x) = \frac{\sin(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, a área sob a curva pode ser decomposta em trapézios.

Suponha então que as bases menores sejam b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5 , e as bases maiores sejam B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 , e como todos têm mesma altura, então esta será chamada de h . Mas como algumas bases estão justapostas, muitas coincidem, ou seja, $b_2 = B_1, b_3 = B_2, b_4 = B_3, b_5 = B_4$ e $b_6 = B_5$, e as áreas dos trapézios ficarão assim:

$$A_1 = \frac{(b_1 + B_1)h}{2}, A_2 = \frac{(b_2 + B_2)h}{2}, A_3 = \frac{(b_3 + B_3)h}{2}, A_4 = \frac{(b_4 + B_4)h}{2},$$

$$A_5 = \frac{(b_5 + B_5)h}{2}, A_6 = \frac{(b_6 + B_6)h}{2}. \text{ Como a área sob a curva é a soma das áreas dos trapézios,}$$

então a área total A_t será:

$$A_t = \frac{(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2b_4 + 2b_5 + b_6)h}{2} = \frac{h}{2} \cdot (b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2b_4 + 2b_5 + b_6) \text{ que também pode}$$

ser escrita como $A_t = h \cdot \left(\frac{b_1}{2} + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + \frac{b_6}{2} \right)$. Chamando b_n de y_n , então

$A_t = h \left(\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \frac{y_6}{2} \right)$, que é a fórmula apresentada por Barroso [et al] (1987, p. 207).

Contudo, é fácil perceber que o valor encontrado é apenas uma aproximação da área real, o que gera um erro que deve ser estudado. Quanto a isso, Barroso [et al] (1987, p.208) sugere que se estude o Erro de Truncamento, que é a “diferença entre a integral exata de f (área sob a curva f) e a integral aproximada (trapézio)”; detalhes também serão omitidos sobre novas fórmulas, uma vez que é possível recorrer à Regra de Três Simples para encontrar o erro de truncamento cometido, que após as devidas substituições fica $E_t = |I_E - I_A|$ e $E_R = \frac{E_t}{I_E} \cdot 100$, em que E_t é o erro de truncamento, E_R é o erro relativo, I_E é a integral exata e I_A é a integral aproximada.

Então, para o exemplo anterior, fazendo $h = 0,5$ (passo ou incremento), a integral da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$ com $-2 \leq x \leq 1$ será calculada por meio da Regra dos Trapézios. Mas para isso, é preciso primeiramente tabular a função de modo a obter os valores de y_1, y_2 , etc, conforme mostra a Tabela 3:

Tabela 3: Tabelamento da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, com $h = 0,5$ e resultados truncados, construída por meio do VCN.

x	y
-2,0	0
-1,5	0,14751
-1,0	0,42073
-0,5	0,79799
0,0	0,90929
0,5	0,47877
1,0	0,07056

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Com os pontos dessa tabela, já é possível calcular a integral por meio da Regra dos Trapézios:

$$I_A = \frac{0,5}{2} \cdot (0 + 2,0,14751 + 2,0,42073 + 2,0,79799 + 2,0,90929 + 2,0,47877 + 0,07056)$$

$$I_A = 1,39480$$

Então a área sob essa curva tende para $1,41 u^2$, de modo que há um erro aí cometido e que será calculado a seguir, considerando como área exata o valor de 1,41. Mas como esse valor tem apenas 2 casas decimais, será usado o valor de 1,39 como área aproximada:

$$E_t = |1,41 - 1,39| = 0,02 \quad \text{e} \quad E_R = \frac{0,02}{1,41} \cdot 100 = 1,42\%$$

4.3.3. Regras de Simpson

As Regras de Simpson também são conhecidas como fórmulas de Newton-Cotes Fechadas, com as mesmas informações já apresentadas ao falar sobre a Regra dos Trapézios. O termo Fechado significa que todos os pontos do intervalo são usados, incluindo os extremos.

Dentre os métodos numéricos conhecidos para resolução de integrais definidas, serão estudados apenas quatro: Somas de Riemann, Regra dos Trapézios e Regras de Simpson. São duas as regras de Simpson: 1ª e 2ª, que possuem diferenças nas fórmulas e nas condições para uso destas.

Segundo Barroso [et al] (1987, p. 216), a fórmula da Primeira Regra de Simpson é obtida aproximando-se a função $f(x)$ por um polinômio interpolador de 2º grau, através também do polinômio de Gregory-Newton. Como não há aqui o interesse no aprofundamento matemático dos conteúdos, a demonstração da fórmula também não será mostrada, mas apenas apresentada a seguir:

$$I_A = \frac{h}{3} (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + \dots + y_n)$$

Esse mesmo autor apresenta uma ilustração para a interpretação geométrica da Primeira Regra de Simpson:

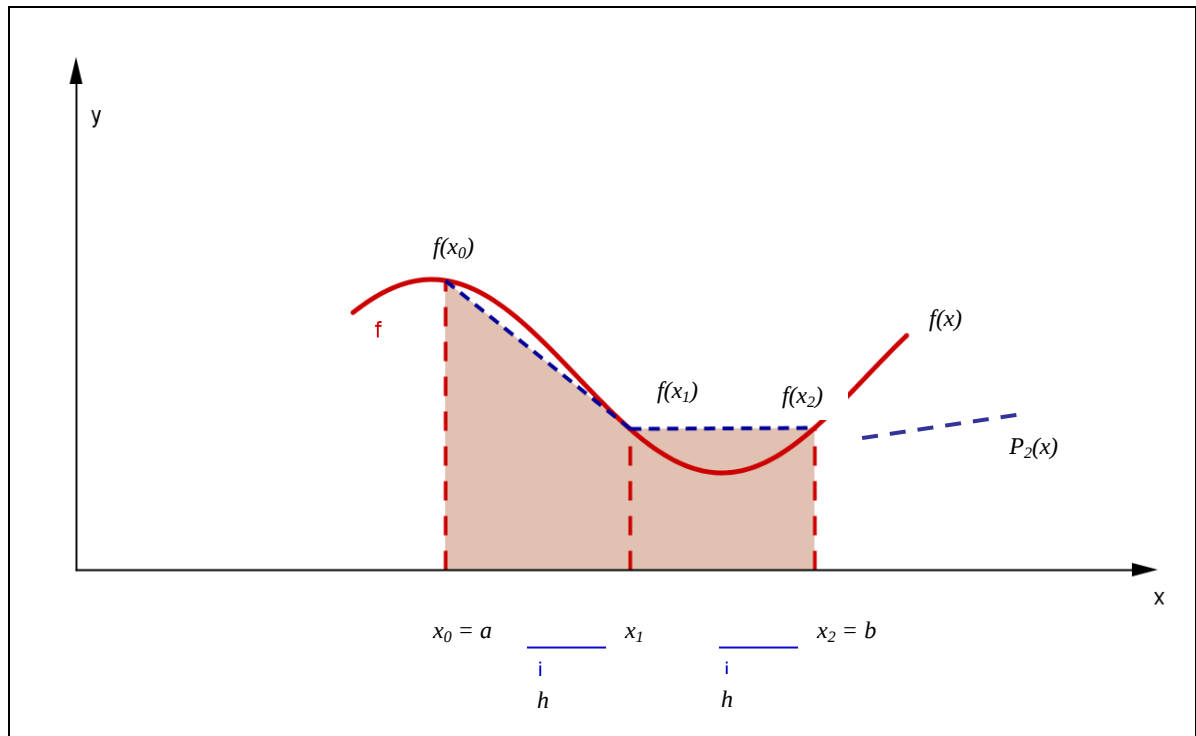


Figura 17: Ilustração sobre a Primeira Regra de Simpson.

Fonte: BARROSO [et al], 1987, p. 216.

A partir da Figura 17, há a aproximação da área sob a curva através da área hachurada. Pela Primeira Regra de Simpson, que é a aproximação pelo polinômio interpolador $P_2(x)$, existe uma parte da área sob a curva que faltou e uma parte que sobrou, mas que são aproximadamente equivalentes; desse modo, as integrais exata e aproximada têm mais ou menos o mesmo valor.

Há uma condição para que a Primeira Regra de Simpson seja utilizada: é necessário que o intervalo $[a, b]$ esteja dividido em um número par de subintervalos (BARROSO [et al], 1987, p. 217), ou seja, o número de pontos consecutivos da tabela tem que ser par.

Da mesma forma que a Regra dos Trapézios, a Primeira Regra de Simpson também permite que se estude o erro de truncamento, por ser apenas uma aproximação. Assim, ao se considerar a Tabela 3, existem 7 pontos consecutivos, com $h = 0,5$, ou seja, como o número de subintervalos é par (são 6 subintervalos); então é possível aplicar a Primeira Regra de Simpson para calcular o valor da área (vide Tabela 3).

O cálculo da área sob a curva mencionada, utilizando a Primeira Regra de Simpson, será:

$$I_A = \frac{0,5}{3} \cdot (0 + 4,0,14751 + 2,0,42073 + 4,0,79799 + 2,0,90929 + 4,0,47877 + 0,07056)$$

$$I_A = 1,40461$$

Como pode ser observado, a área é igual a $1,40461 u^2$, e calculando agora o erro cometido com estas operações, é claro que esse erro é menor do que o obtido anteriormente, sendo que os resultados foram truncados:

$$E_t = |1,41 - 1,40461| = 0,005389 \quad \text{e} \quad E_R = \frac{0,005389}{1,41} \cdot 100 \cong 0,38\%$$

A Segunda Regra de Simpson (que também é conhecida como a Regra dos 3/8) tem sua fórmula obtida através da aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio interpolador do 3º grau (BARROSO [et al], 1987, p. 227), e novamente não será apresentada toda a demonstração de sua obtenção. A fórmula dessa regra é:

$$I = \frac{3h}{8} \cdot (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + \dots + y_n)$$

A condição para que a Primeira Regra de Simpson seja utilizada é que o número de subintervalos seja par; a Segunda Regra de Simpson também admite uma condição que deve ser respeitada: o número de subintervalos deve ser múltiplo de 3, segundo Barroso [et al] (1987, p. 228), que justifica esse fato afirmando que “a regra dos 3/8 utiliza 4 pontos para determinar o polinômio do 3º grau”.

Voltando à função $f(x) = \frac{\sin(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, com $h = 0,5$, a tabela foi gerada com 7 pontos. Ora, como são 6 subintervalos e 6 é múltiplo de 3, então a área sob a curva pode ser obtida também com o uso da Segunda Regra de Simpson:

$$I_A = \frac{3,0,5}{8} \cdot (0 + 3,0,14751 + 3,0,42073 + 2,0,79799 + 3,0,90929 + 3,0,47877 + 0,07056)$$

$$I_A = 1,41289$$

Por estes cálculos, e comparando com o resultado obtido com a Primeira Regra de Simpson, a aproximação acima excedeu o valor da integral exata. Através do cálculo do erro, verifica-se se essa aproximação foi melhor ou pior do que a Primeira Regra:

$$E_t = |1,41 - 1,41289| = 0,00289 \text{ e } E_R = \frac{0,00289}{1,41} \cdot 100 \cong 0,20\%$$

Como o erro cometido com o uso da Primeira Regra foi de aproximadamente 0,38% e com a Segunda Regra foi de 0,20%, neste caso, a Segunda Regra ofereceu uma aproximação melhor com o valor real, pois o erro cometido foi menor. Mas não se deve pensar com isso que uma regra é melhor do que a outra, pois cada uma oferece o seu resultado de acordo com a condição respeitada.

De acordo com os resultados aqui obtidos, tanto na Regra dos Trapézios, Soma de Riemann ou com as Regras de Simpson, todos os resultados convergiram para o mesmo valor de 1,41, cada um com suas condições e restrições. São apenas aproximações, pois geraram erros possíveis de serem interpretados, e que para melhor análise, pode-se construir uma tabela com todos os resultados obtidos:

Tabela 4: Integração numérica da função $f(x) = \frac{\sin(x+2)}{1+x^2}$ com $-2 \leq x \leq 1$, considerando os métodos numéricos aqui estudados.

Fórmula	Valor da Integral	Erro Absoluto	Erro Relativo (%)
Somas de Riemann	1,41	-	-
Regra dos Trapézios	1,39480	0,02	1,42
Primeira Regra de Simpson	1,40461	0,005389	0,38
Segunda Regra de Simpson	1,41289	0,00289	0,20

Fonte: dados da pesquisa.

Pela Tabela 4, é evidente o que já foi comentado: que, para este caso, a Segunda Regra de Simpson proporcionou uma melhor aproximação com a integral exata. Novamente é preciso ressaltar que o resultado obtido através das Somas de Riemann foi considerado como o exato devido ao fato de que aconteceu a convergência dos valores obtidos para 1,41, tanto ao considerar a Soma Inferior como a Soma Superior. Também não significa que este é o método ideal, pois também é uma aproximação do resultado real.

Na verdade, quanto à escolha do método que deve ser aplicado, Barroso [et al] (1987) faz algumas considerações:

1) A regra dos trapézios para n pontos fornece uma precisão semelhante à aplicação de Simpson (1ª Regra) com $2n$ pontos; 2) Com relação ao esforço necessário para o cálculo, para uma mesma precisão, a Regra dos Trapézios requer o dobro de esforços que a Regra de Simpson. (BARROSO [et al], 1987, p. 260)

O que Barroso [et al] quis dizer ao mencionar “esforço” foi que o esforço computacional para a Regra dos Trapézios é muito maior do que para as Regras de Simpson, o que, agora, provoca uma certa preferência pela Regra de Simpson em relação à Regra dos Trapézios. Além disso, o erro na Regra dos Trapézios é da ordem de h^2 e o das Regras de Simpson é da ordem de h^4 , para $0 < h < 1$, $h \in \mathbb{R}$, ainda de acordo com este mesmo autor.

Outro importante assunto da matemática é a resolução de equações. Muitas vezes, para se determinar corretamente o intervalo a ser considerado para o cálculo da área sob uma curva (uma função), é necessário encontrar o(s) ponto(s) de intersecção da função com o eixo x; nesse caso, trata-se de resolver uma equação, que pode ser algébrica ou transcendente. Não apenas para se calcular áreas, mas em muitas outras situações em que se precisa calcular um limite ou uma derivada, esse tema se torna bastante útil. Sendo assim, justifica-se o outro tópico escolhido para esse estudo, que será apresentado a seguir.

4.4. Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes

As equações são expressões matemáticas que possuem uma ou mais incógnitas e uma igualdade; resolvê-las consiste em encontrar o valor (ou valores) das incógnitas que satisfaçam a igualdade, ou seja, consiste em obter x tal que $f(x) = 0$, sendo $f(x)$ a dada equação. As equações podem ser divididas em dois grupos:

- a) **Algébricas:** todas aquelas que podem ser escritas sob a forma geral $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$, com $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ e os coeficientes a_i são números reais (BARROSO [et al], 1987, p. 85).
- b) **Transcendentes:** são as equações que não são unicamente polinomiais, de modo que envolvem logaritmos e exponenciais que aparecem combinados com a incógnita (na mesma expressão ou não), expressões trigonométricas cuja variável aparece tanto como argumento ou termo independente.

Neste estudo, o enfoque são as equações de uma variável real, sendo x a variável livre. Para as equações algébricas de grau menor ou igual a 3, existem dispositivos algébricos que

as resolvem, como a *Fórmula de Bháskara* e o *Dispositivo de Briot-Ruffini*, que é um redutor do grau de equações algébricas; para algumas equações de grau 4, quando são biquadradas, estas também podem ser resolvidas por meio algébrico. Mas muitas equações de grau 3 ou grau 4 demandam técnicas numéricas de resolução e a maioria daquelas com grau maior do que 4 não podem ser resolvidas por métodos algébricos, de modo que, para isso, existem métodos numéricos bastante eficazes ou, como afirma Santos (1974, p. 55), “o problema da determinação dessas raízes encontra na Análise Numérica uma solução altamente satisfatória”. Aqui só serão considerados os zeros reais da função, que “são representados pelas abscissas dos pontos onde a curva corta o eixo x ” (SANTOS, 1974, p. 55), de modo que não serão consideradas as raízes complexas.

Dentre todos os métodos disponíveis, foi escolhido particularmente o Método da Bisseção, que é um método iterativo, por ser bastante simples. Para isso, é preciso primeiramente que seja apresentado o Teorema de Bolzano:

Teorema 3.1.: Se uma função contínua f assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a, b]$, isto é $f(a) \cdot f(b) < 0$, então o intervalo conterá, no mínimo, uma raiz da equação $f(x) = 0$; em outras palavras haverá, no mínimo, um número $r \in (a, b)$ tal que $f(r) = 0$. (BARROSO [et al], 1987, p. 84).

Assim, para conhecer a raiz de uma função num certo intervalo $[a, b]$, o primeiro passo é verificar se existe alguma raiz nesse intervalo. É preciso que se conheça uma aproximação da raiz ou mesmo o intervalo que contenha uma raiz; em seguida, tomam-se os extremos do intervalo e se deve então testar o Teorema de Bolzano. Caso este teorema seja satisfeito, então é possível aplicar o Método da Bisseção para se chegar até uma boa aproximação da raiz.

Como exemplo para o Teorema de Bolzano, considere a equação $-x^2 + 7x - 10,6875 = y$. Calculando o valor de Δ (delta) da Fórmula de Bháskara $\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10,6875) = 29,25$, o que indica que a equação tem raízes reais, interceptando o eixo x em pelo menos um ponto; a função foi tabelada num novo intervalo, no caso $[0, 5]$, como mostra a Figura 18:

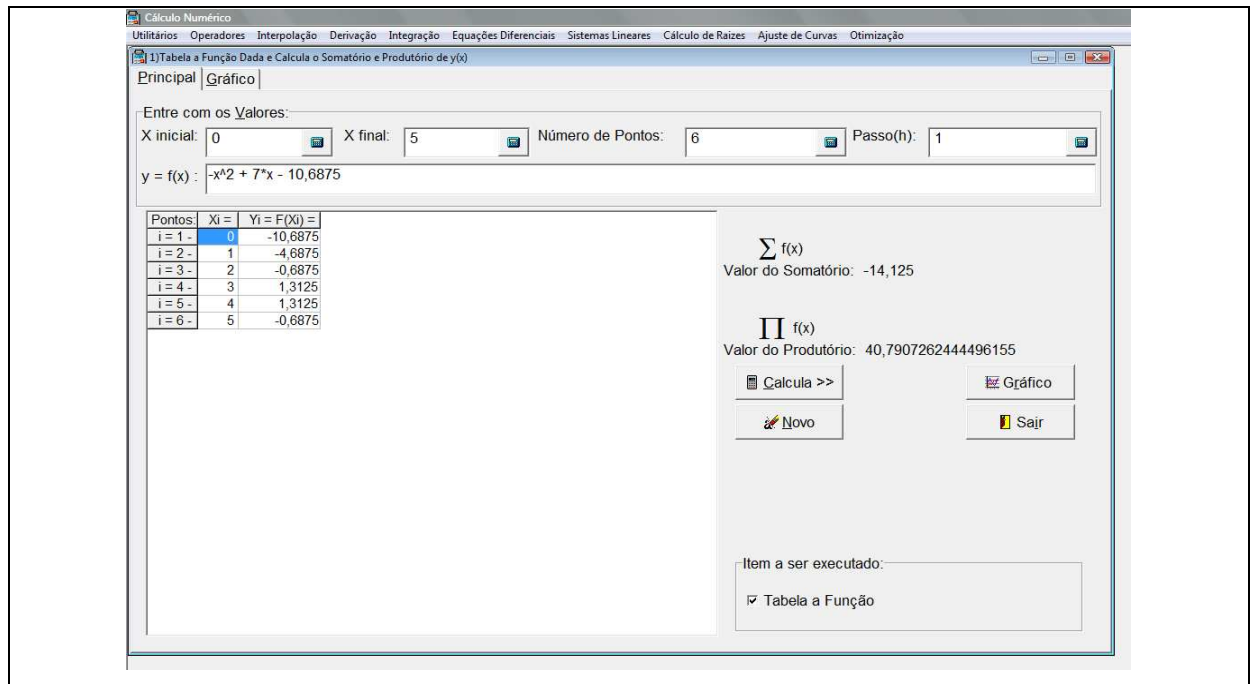


Figura 18: Tabelamento de $-x^2 + 7x - 10,6875 = y$, $[0, 5]$, no VCN, com $h = 1$.
Fonte: dados da pesquisa.

Pela Figura 18, $f(2) = -0,6875$ e $f(3) = 1,3125$ o que indica que $f(2) \cdot f(3) < 0$ e, pelo Teorema de Bolzano, existe uma raiz neste intervalo. De fato, observando a representação gráfica da função, essa informação é confirmada:

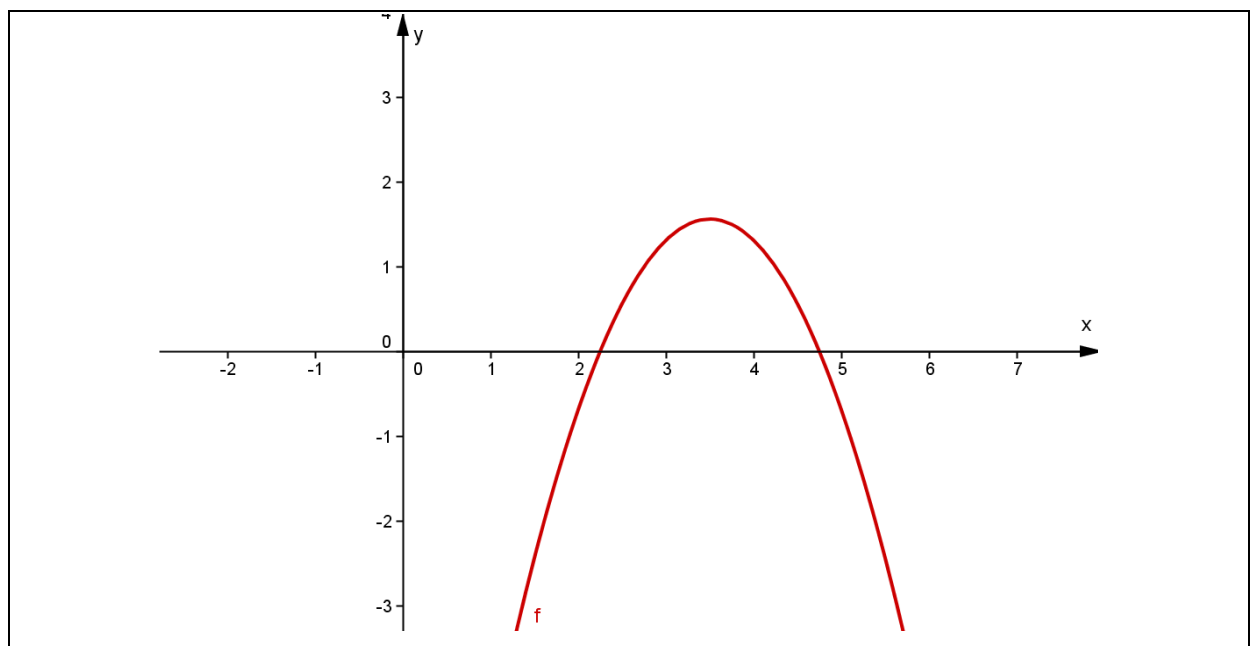


Figura 19: Representação gráfica da função $-x^2 + 7x - 10,6875 = y$, no Geogebra.
Fonte: Site do Geogebra, 2010.

Observando-se a Figura 19, existe uma raiz entre 2 e 3, pois a curva (parábola) intercepta o eixo x . O principal problema a ser agora solucionado é encontrar essa raiz, que pode ser resolvido por um método direto ou um iterativo. Os métodos diretos são aqueles em que se pode empregar um método analítico; os métodos iterativos consistem em obter uma sequência numérica $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ de aproximação de $\bar{x}$, dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (BARROSO [et al], 1987, p. 49).

Dentre os métodos iterativos disponíveis (Bisseção, Cordas, Pégaso, Newton ou Iteração Linear), esta pesquisa enfocará o Método da Bisseção, por ser relativamente simples, pois envolve apenas as operações aritméticas. Mas é importante destacar que esse método possui uma desvantagem: tem uma convergência lenta, como confirma Barroso [et al] (1987, p. 139) ao destacar que esse método “não exige o conhecimento das derivadas, mas tem uma convergência lenta, devendo ser usado apenas para diminuir o intervalo que contém a raiz”, pois “o esforço computacional cresce demasiadamente quando se aumenta a exatidão com que se quer a raiz” (BARROSO [et al], 1987, p. 110).

Barroso [et al] descreve esse método:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a).f(b) < 0$. Dividindo o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtém-se x_0 , havendo, pois, dois subintervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$, a serem considerados.
Se $f(x_0) = 0$, então $r = x_0$; caso contrário, a raiz estará no subintervalo onde a função tem sinais opostos nos pontos extremos, ou seja, se $f(a).f(x_0) < 0$, então $r \in (a, x_0)$; senão $f(a).f(x_0) > 0$ e $r \in (x_0, b)$. O novo intervalo $[a_1, b_1]$ que contém r é dividido ao meio e obtém-se o ponto x_1 . O processo se repete até que se obtenha uma aproximação para a raiz exata r , com a tolerância ε desejada. (BARROSO [et al], 1987, p. 106).

Como uma ilustração do Método da Bisseção, é apresentada a Figura 20, em que x_0 é a aproximação que se tem da raiz r no intervalo $[a, b]$:

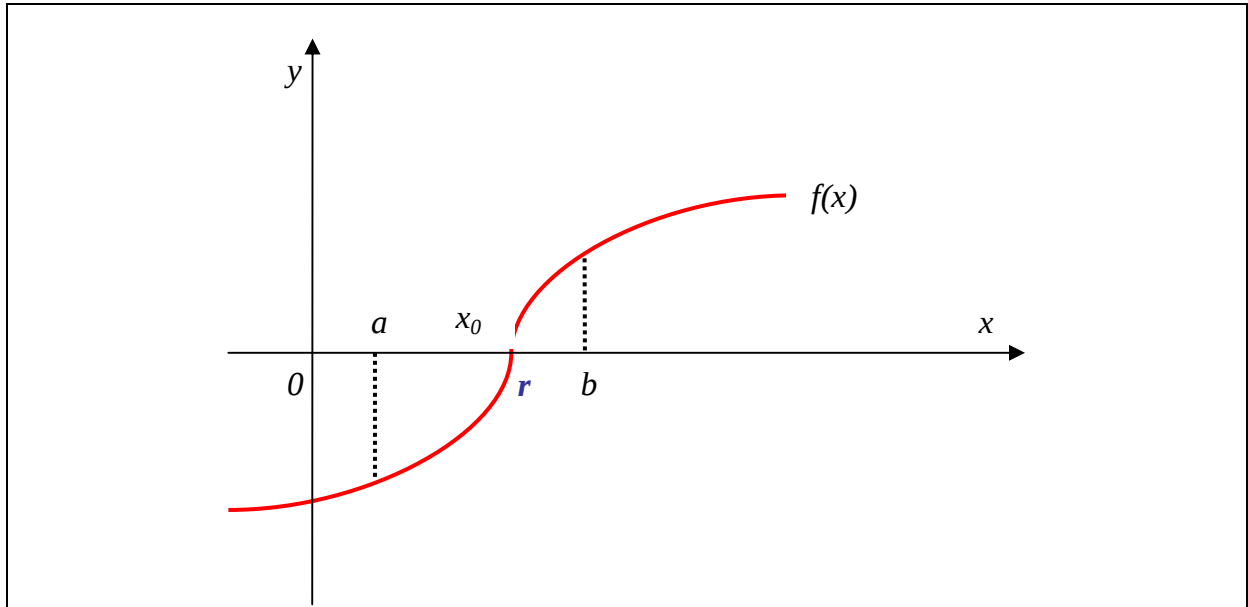


Figura 20: Ilustração do Princípio da Bissecção.

Fonte: SANTOS, 1974, p. 57.

Considerando a função $-x^2 + 7x - 10.6875 = y$, e uma vez que o Teorema de Bolzano foi satisfeito, pode-se aplicar o Método da Bissecção para encontrar uma aproximação para a raiz no intervalo $[2, 3]$. Então, pela descrição apresentada por Barroso (1987), são feitos os cálculos:

$$x_0 = \frac{2+3}{2} = 2,5 \rightarrow f(2,5) = 0,5625 \text{ e assim } f(2).f(2,5) = -0,38671875 < 0, \text{ ou seja, existe uma raiz entre 2 e 2,5;}$$

$$x_1 = \frac{2+2,5}{2} = 2,25 \rightarrow f(2,25) = 0 \text{ o que indica que 2,25 é a raiz exata procurada.}$$

No caso do exemplo citado, a raiz foi encontrada logo na 1ª iteração; porém, com muitas outras equações isso não acontece de forma tão rápida e é exatamente por isso que Barroso (1987) afirma que o Método da Bissecção tem uma convergência lenta. Para exemplificar essa informação, considere agora a equação $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \operatorname{tg}(x) = y$, com o intervalo $[3, 4[$ (neste caso, existe uma raiz nesse intervalo, descoberta através de um tabelamento prévio da função no intervalo $[0, 5]$). Mas como o intervalo é aberto à direita, então será usado o valor 3,999:

$$x_1 = \frac{3 + 3,999}{2} = 3,4995 \rightarrow f(3,4995) = -0,96051 \text{ e } f(3,4995) \cdot f(3,999) < 0$$

$$x_2 = \frac{3,4995 + 3,999}{2} = 3,74925 \rightarrow f(3,74925) = -0,69843 \text{ e } f(3,74925) \cdot f(3,999) < 0$$

$$x_3 = \frac{3,74925 + 3,999}{2} = 3,874125 \rightarrow f(3,874125) = -0,08091 \text{ e } f(3,874125) \cdot f(3,999) < 0$$

$$x_4 = \frac{3,874125 + 3,999}{2} = 3,93656 \rightarrow f(3,93656) = 0,95100 \text{ e } f(3,93656) \cdot f(3,999) > 0$$

$$x_5 = \frac{3,874125 + 3,93656}{2} = 3,90534 \rightarrow f(3,90534) = 0,29269 \text{ e } f(3,874125) \cdot f(3,90534) < 0$$

Foram feitas 5 iterações e a raiz não foi encontrada uma vez que nenhum dos valores de x tem imagem suficientemente próxima de 0 (zero); o valor mais próximo de zero obtido foi quando $x = 3,874125$. Mas pelos cálculos, surge logo a necessidade de uma pergunta inevitável: quando parar as iterações? É exatamente para resolver este problema que existe o Critério de Parada, que é uma maneira formal de estabelecer e decidir o número de iterações necessárias para se chegar a uma melhor aproximação da raiz da equação, mas isso depende de uma precisão inicialmente fixada.

É importante destacar que as iterações fazem com que o valor atribuído à incógnita se aproxime da raiz da equação, ou seja, a incógnita converge para o valor da raiz; assim, é claro que a imagem desse valor aproximado da raiz tende para 0 (zero).

Ao pensar na convergência da incógnita para a raiz, Barroso [et al] (1987) destaca que “em alguma etapa do processo tem-se ou a raiz exata ou uma sequência de intervalos encaixados $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$, tal que $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ” (p. 107), e para se obter a raiz do intervalo $[a, b]$ com n iterações, novamente Barroso [et al] (1987, p. 107/108) apresenta a maneira de se obter o número de iterações:

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \quad \text{ou}$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon \quad \text{então} \quad \left| \frac{b - a}{2^{n+1}} \right| \leq \epsilon \quad \text{ou} \quad n \geq \frac{\ln[(b - a) / \epsilon]}{\ln 2} - 1$$

sendo ϵ a tolerância (ou precisão) pedida.

Ao mencionar tolerância ou precisão, na verdade se busca o grau de exatidão da raiz e, nesse caso, é possível inclusive estudar o erro cometido da aproximação para a raiz em um dado intervalo. Sobre isso, considere o seguinte teorema: “seja r uma raiz isolada exata e x_n uma raiz aproximada da equação $f(x) = 0$, com r e x_n pertencentes ao intervalo $[a, b]$ e

$|f'(x)| \geq m > 0$ para $a \leq x \leq b$, onde $m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$. Então $|x_n - r| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$ (BARROSO [et al], 1987, p. 105).

O mesmo autor apresenta uma demonstração interessante e simples para o teorema acima: “aplicando o Teorema do Valor Médio, tem-se $f(x_n) - f(r) = (x_n - r) \cdot f'(c)$ onde $x_n < c < r$, $c \in (a, b)$. Como $f(r) = 0$ e $|f'(c)| \geq m$, tem-se $f(x_n) - f(r) = |f(x_n)| \geq m|x_n - r|$, portanto $|x_n - r| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$ ” (BARROSO [et al], 1987, p. 105).

Barroso [et al], a partir do teorema anterior, apresenta três critérios possíveis de serem utilizados para a escolha da melhor aproximação da raiz r , de acordo com uma precisão ϵ :

$$\begin{aligned} * |f(x_n)| &\leq \epsilon \\ * |x_n - x_{n-1}| &\leq \epsilon \\ * \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Dos critérios apresentados, a ideia é usar um deles, comparando a aproximação x_n encontrada com a precisão ϵ prefixada, até obter um resultado que satisfaça à condição. É claro que os pontos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ formam uma sequência monótona não-decrescente limitada assim como os pontos $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ formam uma sequência monótona não-crescente limitada, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$ (BARROSO [et al], 1987, p. 108), sendo r a raiz da equação no intervalo $[a, b]$. Desse modo, os extremos do intervalo convergem para a raiz r à medida que $n \rightarrow \infty$.

De acordo com as cinco iterações acima feitas e uma vez que o Teorema de Bolzano foi satisfeito, a escolha do melhor critério deve ser de acordo com as seguintes condições:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$ (teste de erro absoluto): se a ordem da raiz é da unidade (aproximadamente 1).
- $\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \leq \epsilon$ (teste de erro relativo): se a ordem da raiz não é aproximadamente 1.
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$: situações em que o primeiro critério acima não é satisfeito.

É importante ainda destacar que a precisão deve ser um valor bem pequeno, de modo que a imagem da raiz aproximada esteja bem próxima de 0 (zero). Assim, se for estabelecida a precisão de 0,01 para o exemplo anterior, ou seja, a equação $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \operatorname{tg}(x) = y$ no intervalo $[3, 4[$, tem-se a Tabela 5, com 5 casas decimais (os resultados de $f(x_n)$ e do *Erro* serão arredondados) e em que será utilizado o critério $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$:

Tabela 5: Cálculo da raiz da equação $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \operatorname{tg}(x) = y$ no intervalo $[3, 4[$, com precisão de 0,01, construída com auxílio do VCN.

x_a	x_b	x_n	$f(x_n)$	<i>Erro</i>
3	3,999	3,4995	-0,96051	
3,4995	3,999	3,74925	-0,69843	0,24975
3,74925	3,999	3,874125	-0,08091	0,12488
3,874125	3,999	3,9365625	0,95100	0,06244
3,874125	3,9365625	3,90534375	0,29270	0,03122
3,874125	3,90534375	3,889734375	0,083348	0,01561
3,8741253	3,889734375	3,8819296875	-0,00346	0,00780

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

A partir da Tabela 5, a melhor aproximação da raiz com a precisão prefixada de 0,01 é o último valor de x_n calculado, ou seja, 3,88193 (o resultado foi arredondado para 5 casas decimais); observe que cada valor de x_n é obtido através da média aritmética começando com 3 e 3,999 até chegar a essa raiz, uma vez que $|3,88193 - 3,88973| = 0,00780 < 0,01$. Logo, por meio do Método da Bisseção, a raiz procurada da equação $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \operatorname{tg}(x) = y$, com a precisão igual a 0,01 é 3,88193.

4.5. Estudo sobre a Convergência de funções contínuas e discretas

O significado de Convergência está sendo aqui estudado segundo um enfoque Matemático. Mas para isso, não será feita a apresentação da definição da palavra e sim será construída uma compreensão inicial. Partindo da definição geral acima citada, tem-se o uso da palavra “*aproximação*”. Ao falar em aproximação, há o entendimento de que existe algo que

“caminha” até um certo ponto podendo não chegar exatamente até esse ponto. Neste sentido, o “algo” é uma função f cuja variável independente tende a um ponto x_0 , partindo de uma origem, fazendo com que a variável dependente assuma um ponto de chegada. Essa é a ideia informal do limite de uma função.

Convergência, então, significa a tendência ou aproximação de diversos pontos para um ponto comum.⁶

Por meio dos estudos aqui realizados, para acontecer uma melhor aproximação é necessário que o erro entre o valor exato e o aproximado de um objeto seja o menor possível. Novamente é preciso ressaltar que não será feito aqui um aprofundamento matemático do assunto, por não ser este o objetivo.

O estudo da Convergência é, na verdade, um estudo de Limites. Quando uma sequência de números $(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x))$ converge para um único número $f(x)$, então esta é uma convergência simples, de acordo com Lima (2004, p. 362); nesse caso, segundo este mesmo autor, para qualquer valor de x fixado, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, sendo que a generalização $f_n(x)$ com n tendendo ao infinito significa que cada valor de n indica elementos distintos.

Se $f_n(x)$ é uma sequência de números, então é claro que existe uma função ou regra matemática que define a existência desses números em um dado conjunto. Considerando o exemplo $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, $x \neq 3$, pode-se então construir uma sequência numérica atribuindo alguns valores para x , conforme a Figura 21:

⁶ Ideia elaborada por esta pesquisadora a partir dos significados obtidos nas referências citadas no primeiro parágrafo deste subcapítulo.

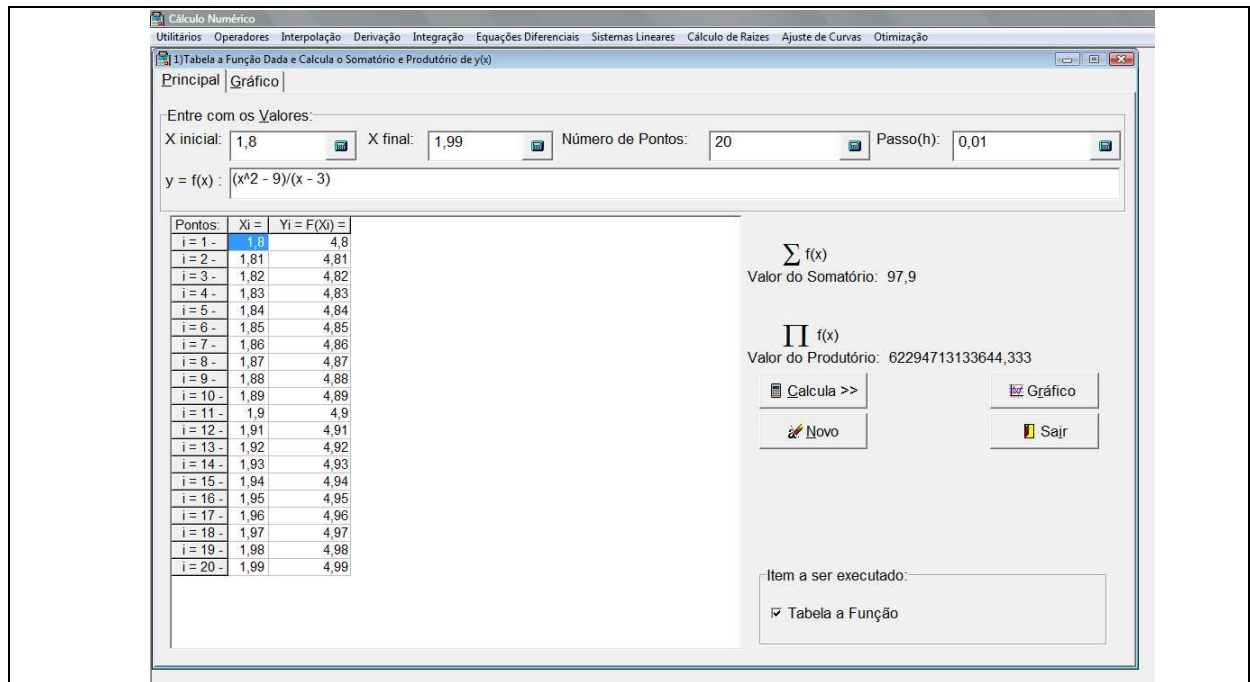


Figura 21: Função $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ tabelada, considerando-se $x \in [1,8; 1,99]$, construída no programa VCN.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Analisando a Figura 21, o limite da função h tende a 5 (dentro do intervalo considerado), ou seja, colocando os números $h_n(x)$ em sequência, percebe-se que eles crescem se aproximando de 5: (4,8; 4,81; 4,82; 4,83; 4,84; 4,85; 4,86; 4,87; 4,88; 4,89; 4,9; 4,91; 4,92; 4,93; 4,94; 4,95; 4,96; 4,97; 4,98; 4,99), e aumentando o passo ou estreitando ainda mais o intervalo considerado para x , isso fica mais evidente ainda.

Sendo assim, para esta situação, considerando os valores de x à esquerda de 2, existem infinitos elementos que são gerados pela expressão $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, com $x \neq 3$, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 5. \text{ É claro que o mesmo vale para os valores de } x \text{ à direita de 2.}$$

Também é possível observar a convergência ao se lidar com taxas de variação. Considerando que o custo (em dólares) para produzir x unidades de certa mercadoria é dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$, a taxa média de variação do custo quando se produz entre 100 e 105 unidades da mercadoria é:

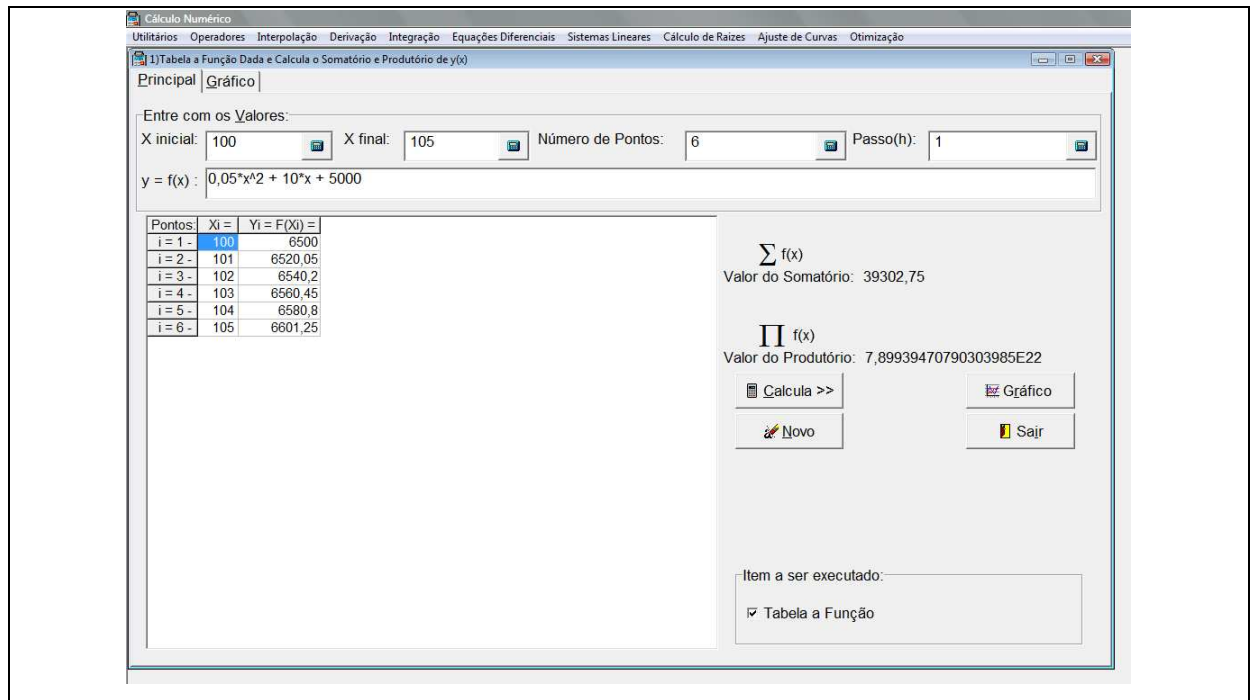


Figura 22: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir x unidades de certa mercadoria, pelo VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

É óbvio que à medida que a produção aumenta, o custo aumenta também, mas esse aumento não é tão grande assim. Para se saber o custo médio nessa produção, então se pode trabalhar com a variação do aumento, ou seja:

$$C_M(x) = \frac{6601,25 - 6500}{105 - 100} = 20,25$$

que é o custo médio para produzir entre 100 e 105 unidades da mercadoria.

Para melhor observar o que acontece nessa situação, algumas experimentações podem ser feitas, por exemplo com 106, 107, 108, 109 e 110 unidades, construindo tabelas para cada caso:

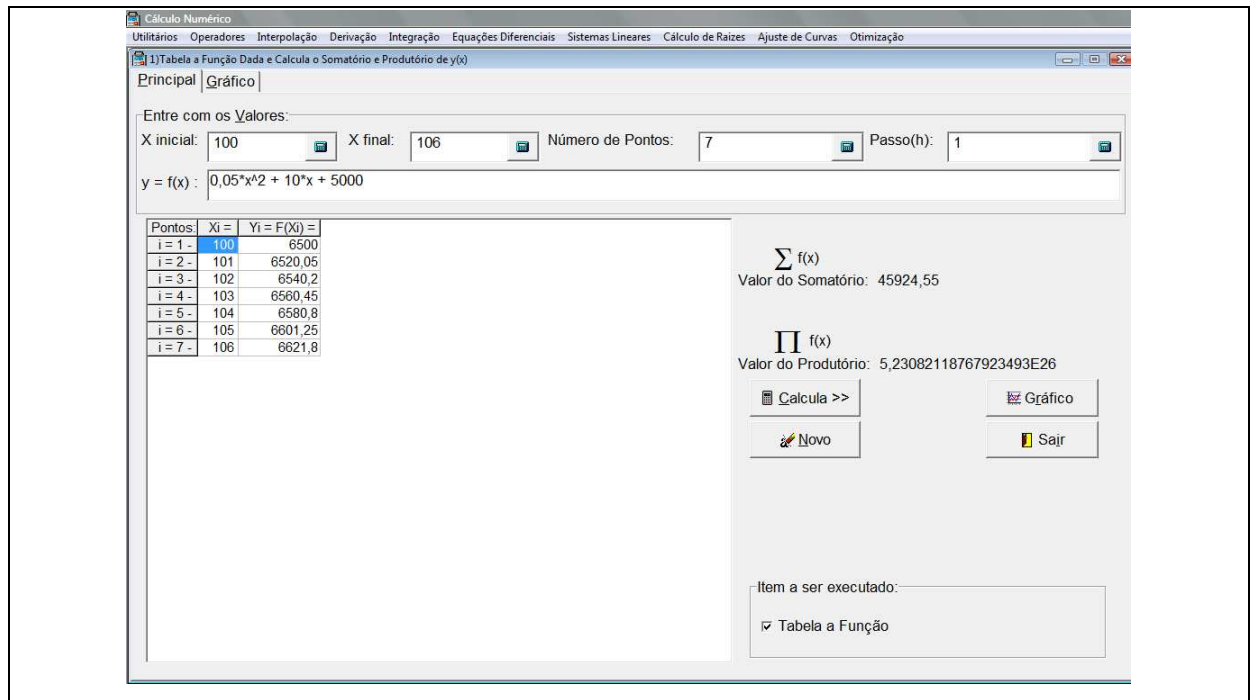


Figura 23: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 106 unidades de certa mercadoria, feito no VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

O custo médio para a produção entre 100 e 106 unidades da mercadoria é:

$$C_M(x) = \frac{6621,8 - 6500}{106 - 100} = 20,3$$

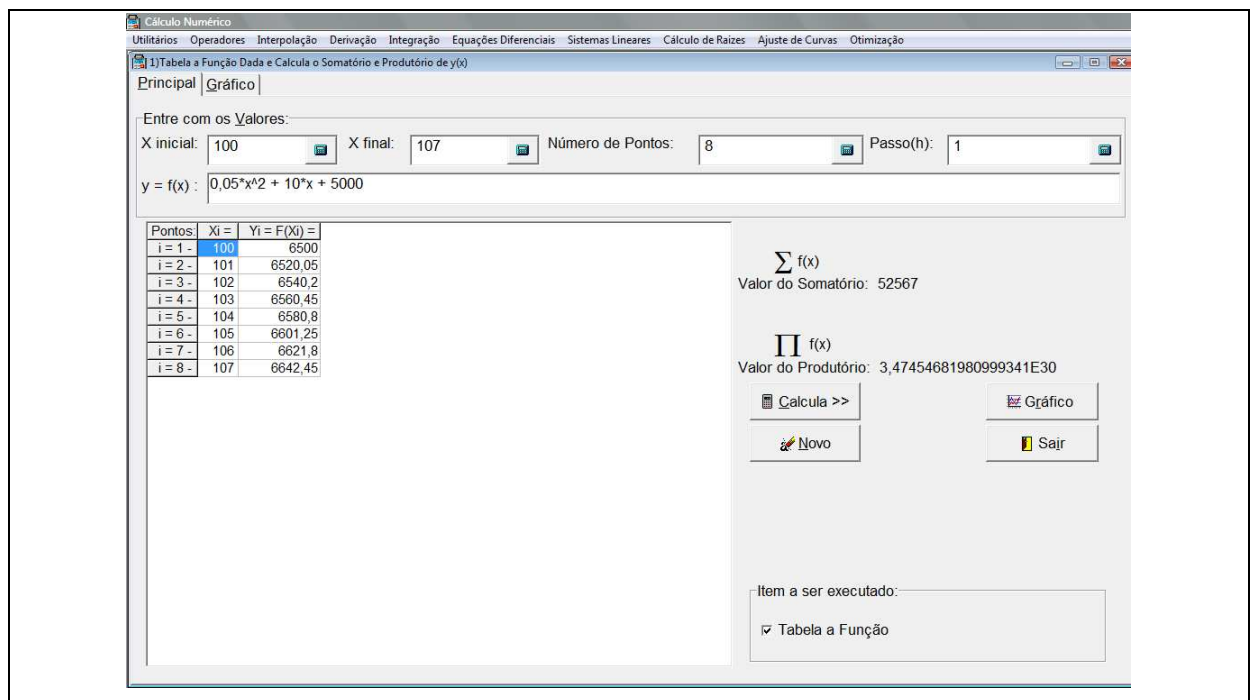


Figura 24: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 107 unidades de certa mercadoria, feito no VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

O custo médio para a produção entre 100 e 107 unidades da mercadoria é:

$$C_M(x) = \frac{6642,45 - 6500}{107 - 100} = 20,35$$

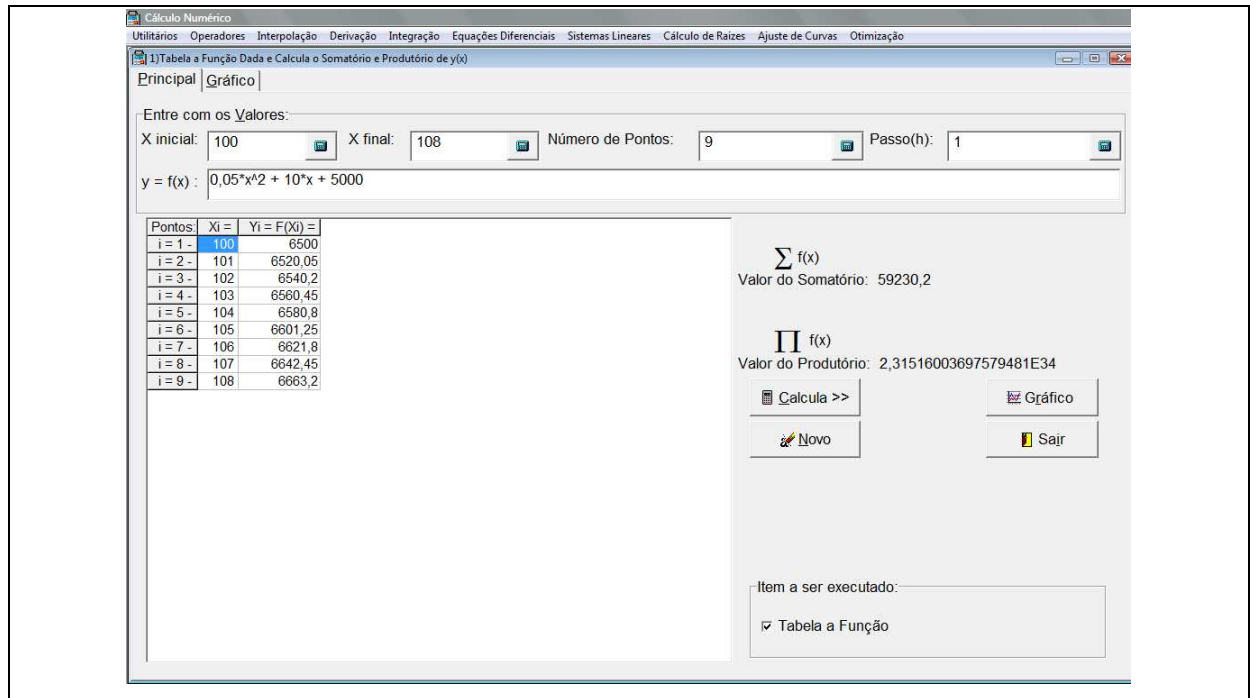


Figura 25: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 108 unidades de certa mercadoria, feito no VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

O custo médio para a produção entre 100 e 108 unidades da mercadoria é:

$$C_M(x) = \frac{6663,2 - 6500}{108 - 100} = 20,4$$

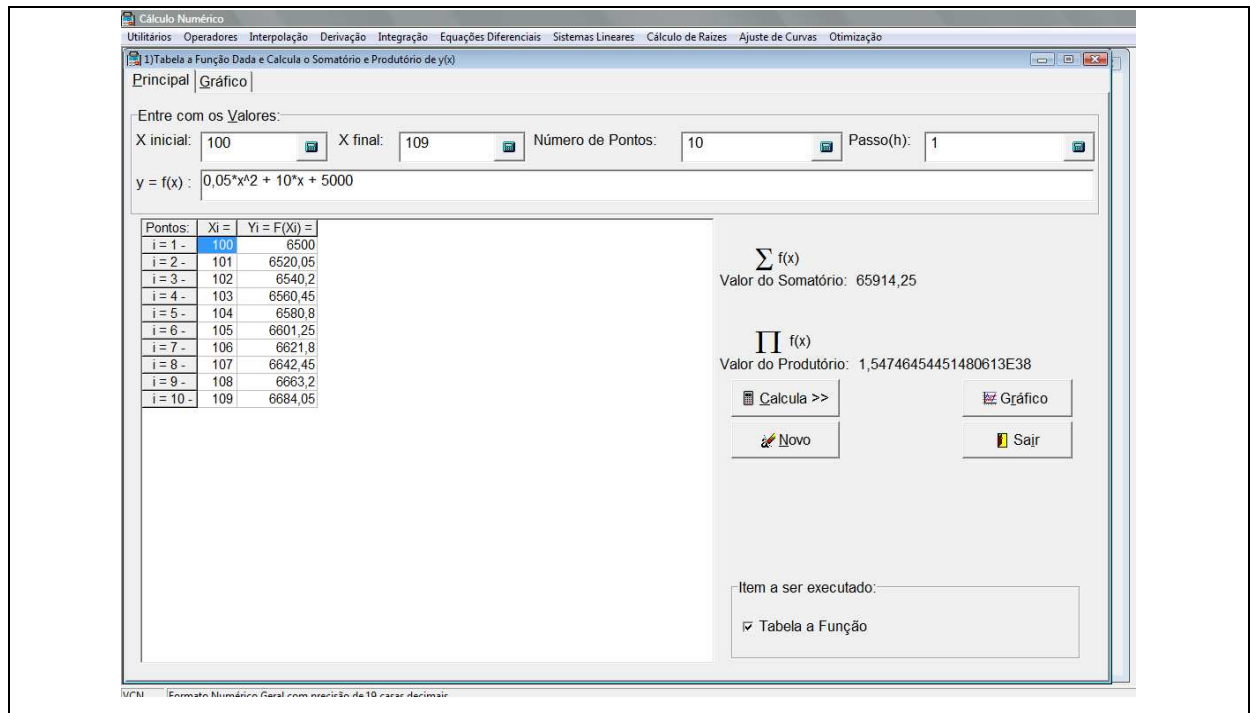


Figura 26: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 109 unidades de certa mercadoria, feito no VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

O custo médio para a produção entre 100 e 109 unidades da mercadoria é:

$$C_M(x) = \frac{6684,05 - 6500}{109 - 100} = 20,45$$

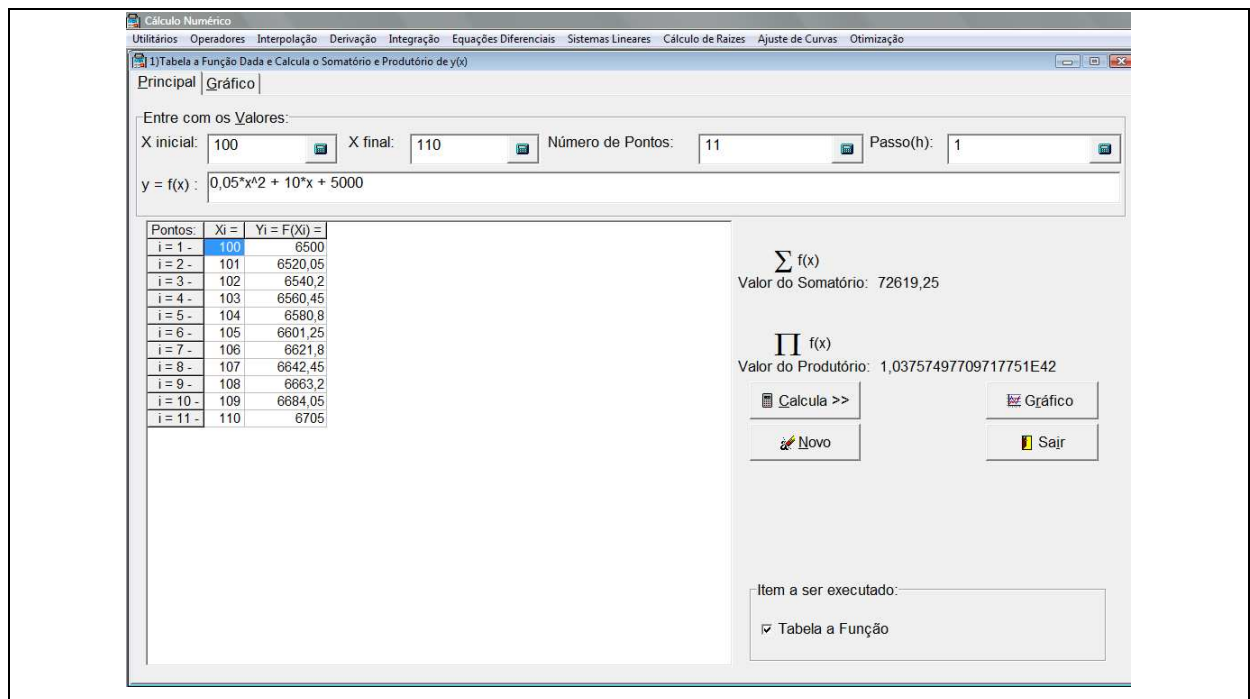


Figura 27: Tabelamento do custo (em dólares) dado por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ para se produzir entre 100 e 110 unidades de certa mercadoria, feito no VCN. Fonte: Site da PUC Minas/Laboratório de Cálculo Numérico, 2010.

O custo médio para a produção entre 100 e 110 unidades da mercadoria é:

$$C_M(x) = \frac{6705 - 6500}{110 - 100} = 20,5$$

A partir das Figuras 22 a 27, a variação do custo para as novas quantidades de mercadorias é bem pequena, em que entre 100 e 110 unidades, a variação do custo foi de apenas 0,25 dólares. Isso significa que à medida que a produção aumenta, tendendo ao infinito, o custo médio vai aumentando também, mas de forma bem pequena; nesse caso, para melhor compreender esse aumento, faz-se necessário estudar a taxa instantânea de variação desse custo, que é a derivada da função-custo.

O custo instantâneo da produção de 100 a 110 unidades da mercadoria é:

$$C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2 \rightarrow \frac{dC}{dx} = 10 + 0,1x$$

$$\frac{dC(100)}{dx} = 20$$

$$\frac{dC(101)}{dx} = 20,1$$

$$\frac{dC(102)}{dx} = 20,2$$

$$\frac{dC(103)}{dx} = 20,3$$

$$\frac{dC(104)}{dx} = 20,4$$

$$\frac{dC(105)}{dx} = 20,5$$

$$\frac{dC(106)}{dx} = 20,6$$

$$\frac{dC(107)}{dx} = 20,7$$

$$\frac{dC(108)}{dx} = 20,8$$

$$\frac{dC(109)}{dx} = 20,9$$

$$\frac{dC(110)}{dx} = 21$$

Então, tem-se o custo exato para cada quantidade específica da mercadoria; por exemplo, o custo para se produzir exatamente 110 unidades é de 21 dólares por unidade. Mas considerando os valores acima e calculando a média aritmética, o resultado é 20,5 dólares,

que é o custo médio para a produção de 100 a 110 unidades da mercadoria. Ao estender ainda mais os valores de x , existe uma tendência para 20,5 tanto à direita como à esquerda de 105, ou seja, o custo médio converge para 20,5 dólares.

Desse modo, é possível escrever que $\lim_{x \rightarrow \infty} 5000 + 10x + 0,05x^2 = 20,5$.

Voltando ao problema proposto no estudo das integrais, considerando a área sob a curva definida pela função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, $x \in [-2,1]$, obtêm-se os resultados calculados sob os métodos numéricos aqui estudados (vide Tabela 4). Pela Soma de Riemann, a área exata é $1,41 u^2$ e tanto o limite da Soma Inferior como da Soma Superior convergem para esse valor, lembrando que quanto maior é o número de partições melhor esses limites (Soma Inferior e Soma Superior) se aproximam do valor exato. E no caso da Regra dos Trapézios, Primeira e Segunda Regras de Simpson, o mesmo foi constatado, ou seja, que os resultados convergem para 1,41, por excesso ou falta.

Particularmente tratando de cada um dos métodos numéricos de integração aqui estudados, quanto maior é o valor de n , ou seja, o número de partições do intervalo onde a curva é definida, melhor é a aproximação da área com o valor real. Assim, novamente segundo Lima (2004, p. 362), o $\lim_{n \rightarrow \infty} I_A = 1,41$, sendo I_A o valor da integral aproximada por um dos métodos numéricos; esse limite pode ser garantido pelo menor erro gerado.

Com relação ao estudo apresentado aqui sobre a resolução das equações algébricas e transcendentais, constata-se também a convergência dos valores das incógnitas para a raiz da equação. Por exemplo, citando novamente a equação $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \text{tg}(x) = y$, em que $x \in [3, 4[$, foi encontrada a raiz por meio do Método da Bissecção, com a precisão de 0,01, considerando 5 casas decimais e como critério de parada $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$. Ao analisar a Tabela 5, os valores estão em torno de 3,88192 (o resultado foi truncado em 5 casas decimais), ora para mais ora para menos. Isso faz com que o erro convirja para zero, já que zero é a imagem da raiz pela função.

Com isso, dada uma equação $y(x)$, pode-se escrever $\lim_{x \rightarrow r} y(x) = r$ e, no caso do exemplo citado, a adaptação fica $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \text{tg}(x) \right) = 3,88192$.

5. AÇÃO DIDÁTICA: ELABORAÇÃO, APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS.

5.1. Caracterização dos sujeitos participantes e da instituição onde aconteceu a pesquisa.

Desta pesquisa, participaram um total de 115 alunos dos cursos de Engenharia de Produção, Matemática Licenciatura e Sistemas de Informação, de uma mesma instituição particular de ensino superior com unidades nas cidades de Belo Horizonte e Betim, em Minas Gerais. No momento da aplicação das atividades, a pesquisadora era também a professora das turmas e os alunos se subdividiam conforme o Quadro 4:

<i>Curso</i>	<i>Período</i>	<i>Disciplina ministrada</i>	<i>Número de alunos</i>	<i>Cidade</i>
Engenharia de Produção	3º	Cálculo Numérico	43	Belo Horizonte
Matemática Licenciatura	7º	Cálculo Numérico	20	Betim
Sistemas de Informação	1º	Cálculo com Geometria Analítica	52	Betim

Quadro 4: Apresentação dos sujeitos participantes desta pesquisa, por turma e disciplina.
Fonte: dados da pesquisa.

A maioria dos alunos do 3º período do curso de Engenharia de Produção tem entre 19 e 30 anos de idade, e somente um aluno da turma tinha 45 anos na ocasião. Em geral, os acadêmicos tinham bom conhecimento de informática, de modo que não tiveram problemas com o uso do computador, mesmo porque já tiveram disciplinas com aulas no laboratório de informática. Houve sim algumas dúvidas com relação à linguagem dos programas *VCN* e *Geogebra*, que foram solucionadas pela professora e/ou colegas à medida que surgiam.

A turma do 7º período de Matemática era formada por alunos com idades variadas, sendo que a pessoa mais jovem tinha 21 anos e a mais velha tinha 46. Como se trata de um curso de licenciatura, vários alunos já trabalhavam como professores da educação básica há alguns anos e, com isso, conheciam o dia-a-dia de uma sala de aula com crianças e adolescentes. Ademais, a turma já tivera uma disciplina em que o estudo do PCN – Plano Curricular Nacional, tanto no Ensino Fundamental II como no Ensino Médio – fazia parte do plano de ensino.

O 1º período de Sistemas de Informação era formado por alunos de perfis bastante variados: adolescentes recém-saídos do Ensino Médio, pessoas que se formaram no Ensino Médio há muitos anos e não estudavam desde então, e mesmo pessoas que já concluíram ou pelo menos começaram outro curso superior. O aluno mais jovem tinha 17 anos no momento em que este trabalho foi iniciado com a turma, e o mais velho tinha 40 anos.

Os alunos puderam fazer as atividades de forma individual ou em duplas, sendo que a maioria optou por usar um computador, mas discutindo com o colega ao lado. Vários alunos optaram por fazer as atividades em duplas, analisando em conjunto. A primeira aula no laboratório de informática em cada turma foi de apresentação dos programas, com alguns exercícios que exploravam os recursos de cada software. Cada uma das atividades tinha um destino particular, como mostrado pelo Quadro 5:

Atividade	Turma
Estudo dos Limites de uma função de uma variável.	1º período de Sistemas de Informação
Construção do conceito de derivada por meio de Taxas de Variação.	1º período de Sistemas de Informação
Métodos Numéricos de resolução de Integrais.	3º período de Engenharia de Produção 7º período de Matemática Licenciatura
Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes.	3º período de Engenharia de Produção 7º período de Matemática Licenciatura

Quadro 5: Turmas a que eram destinadas cada atividade.

Fonte: dados da pesquisa.

5.1.1. Instituição onde a pesquisa foi realizada

A instituição pesquisada é particular, e oferece cursos de graduação e pós-graduação; as turmas participantes pertencem à unidade de Betim e Belo Horizonte (vide Quadro 6). As Figuras 28 e 29 ilustram a fachada das unidades participantes da pesquisa:



Figura 28: Instituição pesquisada – Unidade Belo Horizonte.
Fonte: site da instituição.



Figura 29: Instituição pesquisada – Unidade Betim.
Fonte: site da instituição.

A instituição pesquisada, em suas duas unidades, possui espaço físico constituído por várias salas de aula, laboratórios de informática, auditório, quadras poliesportivas, capela, biblioteca, lanchonete, salas de atendimento aos alunos, bem como secretaria acadêmica independente da coordenação didática.

Como o enfoque será o laboratório de informática, é importante mencionar que os laboratórios de ambas as unidades tinham as mesmas características: salas com 20 computadores funcionando em perfeitas condições e com o programa *VCN* já instalado. A Figura 30 mostra a foto de um desses laboratórios, destacando-se que os outros dois têm o mesmo perfil:



Figura 30: Laboratório de informática – Unidade Belo Horizonte.
Fonte: foto da pesquisadora.

Antes de aplicar as atividades, foi constatado que o software *Geogebra* não estava instalado em todos os computadores da unidade Belo Horizonte, de modo que foi necessária a solicitação ao Setor de Informática e, no dia combinado, o software já estava disponível para uso. Com relação à unidade Betim, o *Geogebra* estava instalado no laboratório destinado às aulas de Cálculo Numérico (turma do 7º período de Matemática Licenciatura), mas não no laboratório da turma de Sistemas de Informação. Foi solicitado ao Setor de Informática e, também no dia da aula marcada, os computadores já estavam com o software instalado. O uso dos laboratórios é de responsabilidade de cada docente, sendo que no início da aula os laboratórios são abertos pelo funcionário da instituição e fechados ao final.

A confecção dos textos das atividades mereceu muita atenção neste trabalho, pois os resultados a serem obtidos dependeriam diretamente da compreensão que os alunos teriam das questões. Esforços foram feitos para evitar erros nas resoluções por falta de clareza nos enunciados ou interpretação incorreta.

As atividades passaram por vários momentos de releitura, quando foram observados e corrigidos possíveis erros ou dúvidas que os alunos pudessem ter. Mas, mesmo assim, durante os primeiros momentos de aplicação, algumas falhas ainda foram encontradas no uso da linguagem, que foram corrigidas a tempo.

Ao aplicar as atividades, houve o cuidado de observar atentamente as dúvidas que os estudantes levantavam e até mesmo os comentários que faziam com os colegas. As resoluções foram recolhidas como material de pesquisa sob o consentimento de todos e um estudo detalhado sobre cada atividade foi feito, que será apresentado no momento oportuno.

Primeiramente, será apresentado um estudo das atividades propostas de acordo com o referencial teórico e, em seguida, serão expostos os resultados, também a partir da proposta de cada autor. As atividades foram resolvidas individualmente ou em duplas, mas para a análise, os sujeitos serão identificados como Aluno A, Aluno B, etc., uma vez que a identidade original de cada aluno deve ser preservada.

Como esta é uma proposta confeccionada com inspiração na Engenharia Didática, em que é considerada toda a estrutura de um projeto de engenharia, esta pesquisa deverá conter uma **análise preliminar**, seguida da **concepção e análise *a priori***, da **aplicação** do projeto e de uma **análise *a posteriori***. Sob essa perspectiva, este material didático foi organizado da seguinte maneira:

- a) **Análise prévia:** devendo ser entendida como levantamento da situação, todas as atividades foram iniciadas com uma análise (observação prévia e leituras) das discussões de tópicos ensinados no Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo Numérico. Algumas dificuldades dos alunos foram detectadas durante o processo ensino-aprendizagem, especialmente com a noção de aproximação (Convergência) na passagem da matemática básica (estática) para a matemática superior (dinâmica);
- b) **Análise *a priori* de experiências e concepções:** dentre as experiências didático-pedagógicas, foram selecionadas as “sequências didáticas” (Zabala) e/ou as “atividades investigativas” (Ponte) a serem implementadas com o auxílio de dois softwares: um de caráter mais algébrico (Geogebra) e outro mais numérico (VCN);
- c) **Intervenção:** é a confecção dos textos didáticos, com as reformas necessárias, o uso dos softwares e, enfim, as aplicações em laboratórios de informática e em sala de aula, conforme metodologias concebidas por Zabala e Ponte;
- d) **Análise *a posteriori*:** a ação é submetida aos indicadores de validação. É a parte interna do processo, em que as observações das reações e manifestações são registradas e analisadas, e ainda com a coleta das produções, é feita a avaliação geral. Análises *a posteriori* da ação didática são realizadas em conformidade com as categorias de Zabala e Ponte.

De acordo com o estudo teórico realizado, as etapas para a análise das atividades investigativas, que fazem parte da quarta etapa proposta pela Engenharia Didática (indicadores de validação), de acordo com a visão de Zabala e Ponte são:

- a) Exploração e formulação de questões;
- b) Organização do processo de execução;
- c) Execução: testes;
- d) Avaliação: correção.

Logo, a partir da organização aqui proposta, a Figura 31 mostra a estrutura do material didático, segundo a ordem que permanecerá e será apresentada:



Figura 31: Relação entre o referencial teórico com a proposta didática.

Fonte: elaborado pela pesquisadora.

5.2. Aplicação das atividades

5.2.1. Atividade 1: Construção da ideia e da definição de limites

Esta atividade foi aplicada em dois momentos: no primeiro momento, fizeram a atividade os 52 alunos do 1º período do curso de Sistemas de Informação, que cursavam a

disciplina Cálculo com Geometria Analítica, ministrada pela pesquisadora. No momento da aplicação desses exercícios, os acadêmicos já haviam estudado os conteúdos Teoria dos Conjuntos, Definição de Funções, principais características das funções algébricas e transcendentais, e Geometria Analítica. Para esta atividade, foram necessários 100 minutos do dia 02 de outubro de 2009, no horário de 19h às 20h40min.

O segundo momento foi em um grupo extracurricular, com 10 alunos voluntários, em que as atividades foram trabalhadas na forma de oficinas no laboratório de informática, sendo que todos os discentes do 1º período de Sistemas de Informação foram convidados para compor esse grupo. Aqueles que não puderam participar justificaram que, como as oficinas aconteceriam à tarde, não teriam a disponibilidade necessária. Neste caso, os voluntários refizeram a atividade que haviam feito em sala de aula, mas agora já com as modificações necessárias, com mais atenção e cuidado; levaram cerca de 200 minutos, iniciando no dia 26 de outubro, no horário de 16h às 18h30min, e terminando no dia seguinte, usando parte do horário de 16h às 18h30min.

Antes de iniciar a atividade sobre Limites, os alunos do 1º período foram levados para o laboratório e foi aplicada uma atividade inicial – Atividade 0 – sobre o Estudo de Funções (em geral), cujo foco era fazer com que estreitassem seus laços com gráficos e equações, explorando intervalos finitos e infinitos, entre outros assuntos. A Atividade 0 (que recebeu a denominação de *Primeiras Experimentações*) foi também investigativa e propôs que os alunos construíssem o conhecimento sobre a representação gráfica de Funções. Com as atividades sobre equação da reta, os alunos se atentaram para os coeficientes angular e linear; tais conceitos seriam necessários no momento em que estivessem estudando Derivadas. O grupo de voluntários não fez a Atividade 0 por não haver necessidade.

Além disso, eles tiveram a oportunidade também de realizar experiências, ao mover as retas e observar as mudanças na equação. Nesse ponto, o *Geogebra* é muito atraente, pois permite que essas experimentações sejam feitas de forma simples, usando o *mouse*. Esta atividade inicial foi de grande importância para rever o que aprenderam sobre Funções e Geometria Analítica, e ainda experimentar os programas; a Figura 32 mostra parte desta atividade (cujo texto geral consta no Apêndice 1):

1. Digite na caixa Entrada os pontos (0, 3) e (-3, 0). Em seguida, clique na 3ª caixa do menu e escolha a ferramenta “**Reta definida por dois pontos**”. Qual é a equação que é representada por esta reta? Escreva-a na **forma geral** e também na **forma reduzida**.

Equação: $3x - 3y = -9$

Forma geral: $3x - 3y + 9 = 0$

Forma reduzida: $y = +3x + 9$

Essa função é crescente ou decrescente? Decrescente

2. Clique na 1ª caixa do menu, ou seja, em “Mover” e clique no ponto A. Mova esse ponto com o mouse, levando-o até o ponto (0, 4).

Qual é a nova equação da reta? $4x - 3y$

Essa função continua crescente? ☒ Sim () Não

3. Agora, clique novamente no ponto A e mova-o até a posição (3, 0) – observe na Parte Algébrica o ponto mudando de valor!

O que aconteceu com a reta? A reta ficou em cima do eixo x, ou seja, para qualquer valor de x, y=0.

Qual é a nova equação da reta? $y = 0$

O que podemos afirmar agora sobre a situação “crescente” ou “decrescente”? A situação é constante, ou seja, nem crescente nem decrescente.

4. Mova agora o ponto A até um ponto qualquer que esteja abaixo do eixo x.

Escreva as coordenadas do ponto em que você parou: $A = (3, -2)$

Qual é a equação dessa reta? $-2x - 6y - 6 = 0$

Essa função agora é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta. É uma função decrescente pois, à medida que o x aumenta o y diminui.

Figura 32: Resolução da Atividade 0 pelo aluno A – 1º p. Sistemas de Informação.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Inicialmente, esta atividade explorou o estudo de equações da reta, quando os alunos deveriam reconhecer a equação que passa por dois pontos e transformá-la para as formas geral e reduzida, identificando se era crescente ou decrescente. Com a dinâmica que o programa possui, os alunos usaram o *mouse* para movimentar a reta e obter novas equações, fazendo novas observações.

Já outro aluno (que será chamado de B – vide Figura 33) não conseguiu compreender exatamente a ideia anteriormente exposta em sala, como o aluno A conseguiu:

1. Digite na caixa Entrada os pontos (0, 3) e (-3, 0). Em seguida, clique na 3ª caixa do menu e escolha a ferramenta “Reta definida por dois pontos”. Qual é a equação que é representada por esta reta? Escreva-a na forma geral e também na forma reduzida.

Equação: $-3x + 3y = 9$
 Forma geral: $-3x + 3y - 9 = 0$
 Forma reduzida: $3y = 3x + 9$
 Essa função é crescente ou decrescente? crescente

2. Clique na 1ª caixa do menu, ou seja, em “Mover” e clique no ponto A. Mova esse ponto com o mouse, levando-o até o ponto (0, 4).

Qual é a nova equação da reta? $-4x + 3y = 12$
 Essa função continua crescente? () Sim (X) Não

3. Agora, clique novamente no ponto A e mova-o até a posição (3, 0) – observe na Parte Algébrica o ponto mudando de valor!

O que aconteceu com a reta? A reta é paralela ao eixo x.
 Qual é a nova equação da reta? $y = 0$
 O que podemos afirmar agora sobre a situação “crescente” ou “decrescente”?
A equação é nula, não tem como não se aplicar nenhum dos termos.

4. Mova agora o ponto A até um ponto qualquer que esteja abaixo do eixo x.

Escreva as coordenadas do ponto em que você parou: A(0, -4) B(-3, 0)
 Qual é a equação dessa reta? $4x + 3y = -12$
 Essa função agora é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta. decrescente, porque para todo $x \leq 0$ y será negativo e vice versa.

Figura 33: Resolução da Atividade 0 do aluno B – 1º p. Sistemas de Informação.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno B interpretou que a equação $-4x + 3y = 12$ é decrescente; quando solicitado que justificasse verbalmente essa afirmação, ele disse que “é porque o número que acompanha x é negativo”. Então, através da reta dessa equação, foi mostrado que, à medida que x cresce, os valores de y também crescem, de modo que a reta é crescente. Para justificar o fato a partir da resposta dada por ele, foi explicado que era necessário passar a equação para a forma reduzida e, então, verificar o coeficiente da variável x . No momento da aplicação das atividades, foi possível perceber que outros alunos também não haviam compreendido bem essa ideia, então foi feita uma intervenção, explicando-lhes novamente, mas agora de forma dinâmica com o uso do *Geogebra*, uma vez que a aula sobre Funções e Equações da Reta foi realizada em sala de aula somente com o uso do quadro e pincel.

Após essas primeiras experiências, foi então aplicada a Atividade 1, sobre Limites. Foram necessários 100 minutos para que houvesse alunos que conseguissem fazer todas as questões, mas é importante comentar que a maioria da turma não conseguiu terminar neste tempo, fazendo cerca de metade da atividade.

A Atividade 1 é mostrada na íntegra, para facilitar o acompanhamento do leitor:

Atividade 1

1) Considere a função real $f(x) = \frac{3}{2x-5}$. Analisaremos o comportamento desta função, observando a sua representação gráfica e dados numéricos.

As questões (a) até (j) devem ser feitas no Geogebra!

- a) Faça primeiramente a representação gráfica, usando o software *Geogebra*; para isso, você deverá digitar na caixa Entrada a expressão $3/(2*x-5)$.
- b) Qual é o comportamento da função próximo ao eixo x ? E com relação ao eixo y ? Use as ferramentas “ampliar” e “reduzir” para ampliar muitas vezes o gráfico para essa observação. Puxe o eixo x com a ferramenta “deslocar eixos” e observe o comportamento próximo ao eixo x .
- c) E qual é o domínio da função?
- d) Na caixa “Entrada”, insira $x = 2,5$ (o ponto de restrição!) e observe a reta que aparece. Analisando essa reta com relação ao gráfico da função f , o que é possível constatar?
- e) **Orientação:** a reta $x = 2,5$ é chamada de **Assíntota Vertical** da curva $f(x) = \frac{3}{2x-5}$. Como podemos, então, encontrar a assíntota de funções racionais como esta?
- f) Pela representação gráfica, ao se aproximar do ponto de restrição vindo pela direita, o que ocorre com a curva?
- g) Ainda com relação aos valores próximos ao ponto de restrição da função, mas agora vindo pela esquerda, o que ocorre com a curva?
- h) Então, é certo dizer que a função tende para resultados diferentes em valores próximos de 2.5 dependendo do lado que se olha? Quais?

As questões seguintes devem ser feitas no VCN!

- 2) Vamos estudar o comportamento numérico da mesma função acima, mas agora com o uso do VCN!
 - a) Você deverá tabelar a função $f(x) = \frac{3}{2x-5}$, considerando um intervalo conveniente para ser estudado, por exemplo, o intervalo $-2 \leq x \leq 4$ e passo 0,5. Para isso, vá em “Utilitários – Tabelar uma Função”; x inicial = - 2, x final = 4, passo = 0,5 (não preencha o número de pontos) e a expressão $3/(2*x-5)$ na caixa da função. Surgirá uma mensagem de erro! O que significa esse erro?
 - b) Vamos resolver esse problema? Para isso, apague o número de pontos (deixe em branco) e modifique o intervalo para $0 \leq x \leq 3$. O intervalo não foi totalmente considerado! A tabela foi finalizada em qual valor de x ?
 - c) Continuando com o mesmo intervalo da questão (b), mude o passo para 0,1 e não se esqueça de apagar o número de pontos. E agora qual foi o último valor de x na tabela?

d) Então, vamos fazer agora o mesmo estudo, mas considerando o intervalo $2,5 \leq x \leq 3$ e passo 0,1.

O que podemos constatar com relação a x ?

e) Você já deve ter percebido o que ocorre quando $x = 2,5$! Então, vamos estudar a região em torno desse valor? Considere agora x inicial = 2,4 e x final = 2,49, mas agora use o passo 0,01. Os resultados (imagens) estão crescendo ou decrescendo? As imagens estão *tendendo* para qual valor?

f) Modifique o intervalo de x , usando agora valores entre 2,51 e 2,6, também com passo 0,01. E agora as imagens estão crescendo ou decrescendo? E estão *tendendo* agora para qual valor?

g) Compare as tabelas obtidas nas questões (f) e (g) com a representação gráfica da função feita no *Geogebra*. Atenção para os intervalos que devem ser observados!

h) Modifique mais ainda o intervalo, restringindo para $2,49 \leq x \leq 2,4999$ e $2,5001 \leq x \leq 2,51$, com passo 0,0001.

i) Podemos dizer que existem valores que estão à esquerda do ponto $x = 2,5$. Então, para os valores à esquerda (e mais próximos do ponto) as imagens *tendem* para qual resultado?

j) E para os valores que estão à direita do ponto $x = 2,5$, as imagens à direita (e mais próximas do ponto) *tendem* para qual resultado?

k) Orientação: estamos estudando o limite da função quando x tende a 2,5. Neste caso, temos que estudar o comportamento da função quando x tende a direita e a esquerda de 2,5, obtendo assim os limites laterais da função. Quando esses limites laterais são iguais, então esse valor é o limite da função no ponto x .

l) Se sentir necessidade, estude mais valores próximos a $x = 2,5$ com passo bem pequeno, para que tenha certeza do que acontece quando $x = 2,5$!

m) Então, quando x tende a 2,5, qual a *tendência* das imagens?

3) Agora, você deverá considerar a função real $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Faça o que se pede abaixo:

a) Primeiramente, obtenha o conjunto domínio da função g acima, da forma como está escrita. Qual é a resposta?

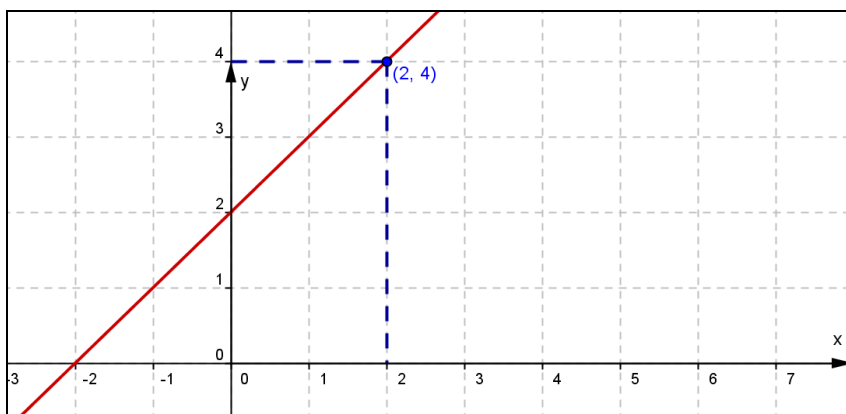
b) Agora, construa o gráfico da função no *Geogebra*, considerando, por exemplo, o intervalo $[-3, 3]$.

c) De acordo com o gráfico, qual é a imagem de $x = 2$? **Orientação:** Existe uma contradição entre o que você encontrou na questão (a) acima e o gráfico nesta questão! Esse é um problema que as ferramentas computacionais apresentam: não estudam a função!

d) Fatore o numerador da expressão $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$, para $x \neq 2$, e simplifique com o denominador. Agora, escreva qual é a imagem de 2 pela função simplificada?

e) **Orientação:** para a função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, temos que o domínio é mesmo $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}$. Porém, efetuando a fatoração do numerador e a simplificação com o denominador, para $x \neq 2$, temos que $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$. Assim, o gráfico da função g é a reta $y = x + 2$, porém o ponto $x = 2$ tem que ser aberto, conforme mostra a figura abaixo:

Figura 1: representação gráfica da função g feita no Geogebra.



Fonte: Site do Geogebra, 2010.

- f) Agora, faça o tabelamento dessa função no VCN, considerando o intervalo $0 \leq x \leq 3$ e supondo passo 0,5. O que acontece? Identifique a razão disso.
- g) Para resolver o problema encontrado no item (f), escolha outros intervalos e escreva uma possível solução para isso.
- h) Agora, tabelle a função com os intervalos $[0, 1.9]$ e $[2.1, 3]$, passo 0.1. O que ocorre? Escreva a sua observação.
- i) Por que sempre aparece um erro próximo a $x = 2$?
- j) Busque, então, imagens de funções próximas a 2 e observe o comportamento da função. Use, por exemplo, os intervalos $[1.99; 1.9999]$ e $[2.0001; 2.1]$, com passo de 0.0001.
- k) Para qual valor as imagens estão **convergindo** quando x tende a 2 pela direita? Então, qual é o limite da função quando x tende a 2 pela direita?
- l) E qual é o limite da função quando x tende a 2 pela esquerda?
- m) Então, quando x tende a 2 pela direita e pela esquerda ao mesmo tempo, para qual valor as imagens **convergem**?
- n) **Orientação:** neste caso, falamos em x tendendo a dois pela direita e pela esquerda, respectivamente. Quando os limites laterais são iguais, dizemos que esse é o valor do limite da função no ponto estudado.

o) Podemos dizer que essa é uma função **convergente** em $x = 2$. Qual é o limite então da função

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ quando } x \text{ tende a } 2?$$

p) Podemos agora definir a seguinte ideia:

“seja f definida em um intervalo aberto em torno de x_0 , exceto talvez em x_0 . Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L , para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0 , dizemos que f tem limite L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.” (Finney, 2006).

q) Então, analise o que Finney disse acima e reescreva essa informação usando os dados deste problema, ou seja, considere a função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, quando x tende a 2.

r) Definição formal de limites:

“seja f definida em um intervalo aberto em torno de x_0 , exceto talvez em x_0 . Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se, para cada número $\varepsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x , $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.” (Finney, 2006).

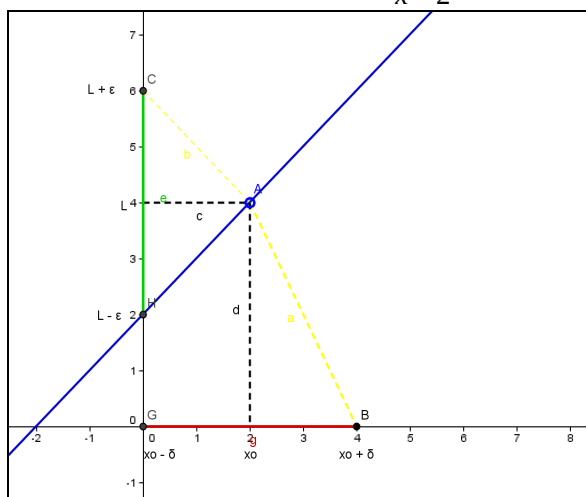
Neste nosso exemplo, como vimos que $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$, então temos que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$, tal que:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x + 2 - 4| < \varepsilon, \text{ ou seja, como } |x - 2| < \delta \text{ então fazendo } \varepsilon = \delta,$$

temos que $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right| < \varepsilon$.

Esta é a demonstração de que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ e observe abaixo uma representação gráfica para a demonstração acima:

Figura 2: ilustração da demonstração de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, feita no Geogebra.



Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x . Fonte: Site do Geogebra, 2010.

s) O que você entende agora sobre **Convergência**, baseando-se no que você estudou nesta atividade?

Os conteúdos explorados na Atividade 1 são mostrados no Quadro 6:

<i>Temas</i>	<i>Objetivos</i>	<i>Competências</i>
Limites infinitos	* Reconhecer o limite infinito de uma função. * Reconhecer uma reta assíntota.	* Compreender o significado de infinito. * Compreender os comportamentos gráfico e numérico de uma função com restrição. * Reconhecer quando uma reta pode ser chamada assíntota e relacionar esse significado com a função.
Limite de uma função num ponto específico	* Obter o limite de uma função real de uma variável num ponto específico. * Estudar limites laterais. * Conceituar e definir Limite de funções.	* Compreender o significado de limite num ponto determinado, dados os limites laterais. * Observar os comportamentos gráfico e numérico de uma função em torno do ponto determinado.
Significado de Convergência	* Construir uma primeira ideia sobre Convergência.	* A partir do estudo sobre limites, compreender a ideia sobre Convergência.

Quadro 6: Conteúdos explorados na realização da Atividade 1.

Fonte: dados da pesquisa.

- a) **Reconhecer o limite infinito de uma função e uma reta assíntota:** as Questões 1 e 2 possibilitam ao aluno visualizar o comportamento do gráfico da função $f(x) = \frac{3}{2x-5}$ próximo ao seu ponto de restrição $x = 2,5$, e com o estudo numérico, ele conclui que, quando x tende a 2,5 pela direita as imagens tendem ao infinito positivo, e quando x se aproxima de 2,5 pela esquerda, a curva tende ao infinito negativo. Nesse momento, ele constata que quando $x = 2,5$ existem infinitos pontos que não fazem parte do conjunto imagem da função e recebem a orientação de que esses pontos formam uma reta chamada de assíntota vertical;
- b) **Obter o limite de uma função real de uma variável num ponto específico e estudar limites laterais:** com a Questão 3, o aluno observou a representação gráfica, estudou o

domínio da função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ e realizou tabelamentos com pontos próximos a $x = 2$, observando qual é a tendência das imagens. Ao construir intervalos à direita e à esquerda de 2, estudou limites laterais;

- c) **Conceituar e definir Limite de funções:** as Questões (3.p) a (3.r) tratam da definição formal do limite de uma função real de variável real;
- d) **Construir uma primeira ideia sobre Convergência:** os termos “tendem”, “tendência”, “convergem” e “convergência” foram usados durante todo o tempo, quando os alunos puderam se familiarizar com essa linguagem e empregá-la de forma segura. Com isso, a Questão (3.s) perguntou ao aluno:

Qual é agora a sua ideia sobre Convergência de uma sequência numérica, baseando-se no que você estudou nesta atividade?

Fonte: Atividade 1.

Uma vez que a Atividade 0 – *Primeiras Experimentações...* – foi apenas para rever alguns conteúdos necessários para o entendimento das demais, um estudo aprofundado de seus objetivos com as possíveis competências a serem adquiridas não será mostrado aqui. Sendo assim, na Atividade 1 é que será feita a Construção da ideia e da definição de Limites.

5.2.2. Atividade 2: Das Taxas de Variação às Derivadas

A segunda parte da sequência didática é sobre a construção do conceito de derivada a partir do estudo de Taxas de Variação. A turma escolhida para aplicar esta atividade foram os 10 alunos voluntários do 1º período do curso de Sistemas de Informação, sob a forma de oficinas extraclasse, uma vez que não foi possível aplicar a atividade para toda a turma (os 52 alunos). A carga horária necessária foi de aproximadamente 250 minutos, com início em parte do dia 27 de outubro e término em 09 de novembro de 2009, no horário de 16h às 18h30min.

A Atividade 2 é apresentada na íntegra, para facilitar o acompanhamento:

Atividade 2

1. Vamos estudar agora o limite de uma função real, sob o enfoque de Taxas de Variação! Para isso, vamos estudar a função real $f(x) = -x^2 + 4x$, através de sua visualização gráfica e estudo numérico.

As próximas questões devem ser feitas no Geogebra.

Parte 2 – Compreensão da ideia de tangentes a uma curva, e da importância dos coeficientes angular e linear.

- a) Faça a representação gráfica da função f .
- b) Agora, clique na ferramenta “novo ponto” e insira o ponto (1, 3). Depois busque a ferramenta “tangentes” e clique no ponto e na função, para inserir a tangente.
- c) Observe a equação da reta na parte algébrica da tela. Escreva a equação dessa reta.
- d) Quais são os coeficientes angular e linear dessa equação? Essa reta é crescente ou decrescente?
- e) Qual a relação que pode ser observada entre o coeficiente linear da função e a reta?
- f) Qual é o limite dessa função quando $x \rightarrow 1$?
- g) Clique na ferramenta “mover” e, em seguida, no ponto. Mova o ponto pela função e observe as mudanças na equação. Fixe a reta em outro ponto qualquer que esteja à direita do vértice, por exemplo, (3, 3) e escreva a equação resultante.
- h) Quais são o coeficiente angular e o linear da equação dessa nova reta? Ela é crescente ou decrescente?
- i) Agora, encontre uma equação da reta tangente à parábola de $f(x) = -x^2 + 4x$ no ponto (2, 4). Qual é a equação dessa reta tangente? Justifique a razão de não podermos afirmar que ela é crescente ou decrescente.
- j) Vamos então formalizar essa ideia: qual a relação entre o coeficiente angular da equação e a posição da reta tangente no plano cartesiano?

Obs.: Se você tiver alguma dúvida se a reta é mesmo tangente à curva, então você pode “ampliar” ou “reduzir” muitas vezes próximo ao ponto para constatar que a reta apenas “toca” a curva nesse ponto.

Parte 2 – Construção da ideia de derivada

k) Observe a operação que é feita a seguir, considerando a função $f(x) = -x^2 + 4x$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 1} = \frac{-(x-1)(x-3)}{x-1} = -x + 3.$$

Neste caso, foi feita a substituição, a fatoração e a simplificação da expressão $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

l) **Orientação:** a expressão $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, que é o mesmo que $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, é simbolizada por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e é

chamada de **taxa média de variação** de y em relação a x . No caso, é claro que $x = x_2$, $x_1 = a$, $f(x) = y_2$ e

$$f(a) = y_1. \text{ Então, temos que } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

m) Considerando a expressão $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -x + 3$, qual é o limite da função $y = -x + 3$ quando x tende

a 1, ou seja, quanto vale $\lim_{x \rightarrow 1} (-x + 3)$?

n) Agora, deixe só a parábola $y = -x^2 + 4x$ e insira novamente o ponto (1, 3). Busque a ferramenta “tangentes”, clique na parábola e no ponto (1, 3). Observe o resultado!! Qual é a equação da reta tangente à curva no ponto (1, 3)?

o) E qual é o coeficiente angular dessa reta?

p) **Orientação:** a reta tangente a uma curva f em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta que passa por P e que tem a inclinação $m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Assim também é obtida a **taxa instantânea** de variação em

certas situações, como a **velocidade instantânea**.

q) Com a ferramenta “mover” da 1ª caixa do menu, mova o ponto (1, 3) até cada um dos pontos abaixo. Para cada ponto, você deverá anotar qual é o coeficiente angular da reta tangente nesse ponto:

i. (3, 3) =

ii. (2, 4) =

iii. (4, 0) =

r) Você deverá agora calcular os limites seguintes, que dizem respeito aos pontos acima:

$$i. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 1) =$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-x + 2) =$$

$$iii. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 4x - 0}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (-x) =$$

s) Compare as questões (q) e (r) acima. O que você pode afirmar ao analisar respectivamente as respostas acima?

t) Como você pôde comprovar, o coeficiente angular da reta tangente é igual ao limite da expressão

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ nesse ponto!}$$

As próximas questões devem ser feitas no VCN.

Parte 1 – Construção do conceito de derivada por meio das taxas de variação.

2. (Miranda, 1982, p. 132 – adaptada) Seja a função quadrática $y = f(x) = x^2$ e o ponto $x_0 = 4$. Tomando valores à direita de 4 (quatro) e valores da vizinhança à esquerda, vamos descobrir qual é a derivada da função no ponto citado, por meio da construção de tabelas.

a) Vá em “Utilitários – Tabelar uma Função”; como o desejo é trabalhar com pontos próximos a 4 (à direita e à esquerda), então vamos supor o intervalo inicial [4,1; 4] com passo $h = -0,001$, função $y = x^2$. Clique em “Calcula”.

b) Observe a função tabelada. Para qual valor x está tendendo? E para qual valor y tende?

c) **Atenção!** A função foi tabelada apenas com valores à direita de 4. A mesma análise pode ser feita para valores à esquerda, por exemplo, [3,9; 4].

d) Considerando agora $\Delta x = x - 4$ e $\Delta y = y - 16$, sendo x e y cada um dos pontos da tabela e observando os dados obtidos com o VCN, preencha a tabela abaixo com alguns valores sugestivos:

Tabela 1

Δx	0,1	0,01	0,001	$\rightarrow 0$
Δy				
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$				$\rightarrow \text{_____}$

e) Então, quando $\Delta x \rightarrow 0$, para qual valor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ está tendendo?

f) Logo, a taxa de variação instantânea da função $y = x^2$ no ponto $x = 4$ é igual a _____. É importante destacar que em outro ponto, a taxa será diferente!

g) **Atenção!** A taxa de variação instantânea, que é a derivada $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, mede a rapidez com o qual crescem os valores de y , portanto, a função.

h) Ao considerar outros pontos, como $x = 5, 6, 7$ ou 8 , teremos: $f'(5)=10$, $f'(6)=12$, $f'(7)=14$, $f'(8)=16$ e assim sucessivamente; portanto, a derivada de $y = x^2$ é $y' = 2x$.

As próximas questões devem ser feitas no Geogebra.

Parte 2 – Visualização gráfica.

i) Na caixa “Entrada”, digite a expressão x^2 e dê “enter”.

j) Agora, também na caixa “Entrada” digite o comando “derivada[]” e dentro dos colchetes, digite a expressão x^2 . Enter.

k) Observe as duas representações gráficas obtidas. Quando $x = 4$, as imagens pelos dois gráficos são iguais? Justifique sua resposta.

l) Quais são os pontos de intersecção entre os dois gráficos? Substitua as abscissas desses pontos em cada função e comprove os resultados encontrados.

3. Vamos considerar novamente a função $f(x) = -x^2 + 4x$. Vamos agora visualizar a variação que pode ocorrer com essa função! Para isso, obtenha apenas a parábola que representa essa função no Geogebra.

Parte 1 – Uso do Geogebra

a) **Orientação:** a derivada de uma função f em um número a , simbolizada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

b) Considere a função f que estamos estudando e os pontos que marcamos anteriormente, ou seja,

(1, 2), (2, 4) e (3, 3). Retome as equações das retas tangentes à curva f que passam por cada um desses pontos e escreva-as separadamente em um papel.

c) Agora, na caixa “Entrada” digite derivada[- $x^2 + 4x$, 1], o que indica que será calculada a 1ª derivada da função $f(x) = -x^2 + 4x$ e registre o resultado encontrado (na parte algébrica).

d) Agora, ainda na caixa Entrada, substitua o ponto (1, 2) na derivada da função f e observe o resultado na parte algébrica. Qual é a resposta?

e) Agora, compare o resultado com a equação. O que pode ser observado?

f) Faça o mesmo agora com os pontos (2, 4) e (3, 3), e observe os resultados.

g) Quando temos um ponto $P(x, y)$ e uma curva f , podemos encontrar a inclinação da reta tangente a essa curva f no ponto P , por meio da derivada de f . Escreva como isso deve então ser feito.

Fixando a ideia acima...

4. Para as questões a seguir, você deverá encontrar a reta tangente à curva no ponto P citado, dizer qual é o coeficiente angular e relacionar o coeficiente angular com a posição da reta (crescente, decrescente ou constante):

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5$, $P_1(2, -3)$, $P_2(-1, 0)$

b) $y = \sin(x) \cdot \cos(x)$, $P(1; 0,45)$

c) $y = \ln(x)$, $P(2; 0,69)$

d) $y = \frac{2x}{x+1}$, $P(1, 1)$

e) $y = \sec^2(x) + \tan^2(x)$, $P(0,3; 1,41)$

As próximas questões devem ser feitas no VCN

5. (STEWART, p. 138, 2009 - adaptada) O custo (em dólares) de produzir x unidades de certa mercadoria é $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$.

a) Vamos encontrar a taxa média de variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando de $x = 100$ a $x = 105$? Para isso, entre em “Utilitários – Tabelar uma Função”, e em seguida, digite a função acima, x inicial = 105 e x final = 100, não preencha o número de pontos e faça $h = -1$. Clique em “Calcula”.

b) Observe a tabela que foi montada. O que podemos afirmar sobre o custo com relação ao valor de x ?

c) Agora, será realizada a mesma análise feita na Questão 2. Então, considere novamente $\Delta x = x - 100$ e $\Delta y = y - 6500$, sendo x e y cada um dos pontos da tabela e observando os dados obtidos com o VCN, preencha a tabela abaixo com alguns valores sugeridos:

Tabela 2

Δx	5	4	3	2	1	$\rightarrow 0$
Δy						
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$						$\rightarrow$ _____

- d) Então, quando $\Delta x \rightarrow 0$, para qual valor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ está tendendo?
- e) Logo, a taxa de variação instantânea da função $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ no ponto $x = 100$ é igual a _____.
- f) Para obter a taxa média, subtraia as imagens correspondentes de 105 e 100, e divida o resultado por $105 - 100$. Qual é o resultado encontrado? Escreva como podemos interpretar esse valor.
- g) Agora, vamos encontrar a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$, ou seja, vamos encontrar o *custo marginal*? Para isso, calcule a derivada da função f e substitua $x = 100$. Qual é o custo marginal para 100 unidades dessa mercadoria?
- h) Calcule o custo marginal para outros valores, como $x = 1, 50, 110$ e 500 . Monte uma tabela com esses valores e seus resultados, para melhor comparação. O que pode ser afirmado então sobre o custo marginal para essas quantidades de mercadorias?

A Atividade 2 explorou principalmente a relação entre Taxa de Variação e Derivada; os temas, objetivos e competências da atividade constam no Quadro 7:

<i>Temas</i>	<i>Objetivos</i>	<i>Competências</i>
Coeficientes angular e linear de uma equação da reta.	* Reconhecer os coeficientes angular e linear de uma equação da reta.	* Descobrir a relação entre a posição de uma reta e seus coeficientes angular e linear.
Taxa média e taxa instantânea de variação.	* Relacionar o significado de taxa instantânea com derivada.	* Perceber que o coeficiente angular de uma reta tangente a uma curva $y = f(x)$ é a taxa instantânea de f quando $x \rightarrow a$, sendo a a abscissa de tangência. * Compreender que a derivada é uma taxa instantânea de variação.
Estudo da Convergência	* Relacionar a derivada com a Convergência da Taxa de Variação.	* Compreender que a derivada é o valor de Convergência da Taxa de Variação.

Quadro 7: Conteúdos explorados na realização da segunda parte da sequência. Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Cada objetivo pode ser relacionado com as questões da Atividade 2:

- a) **Reconhecer os coeficientes angular e linear de uma equação da reta:** a Questão 1 leva o aluno a estudar a equação de uma reta tangente a uma curva específica, através da movimentação do ponto de intersecção com o *mouse* do computador. À medida que movimenta a reta, a sua equação é modificada e destaque é dado para os coeficientes angular e linear, em que o aluno deve também identificar se a função é crescente, decrescente ou constante;

- b) **Relacionar o significado de taxa instantânea com derivada:** ainda na Questão 1, o

aluno relaciona a expressão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, que é a taxa de variação

média com a equação da reta. Ao calcular o limite da expressão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $x \rightarrow a$, ele

então chega ao conceito de taxa de variação instantânea e recebe a orientação de que se trata de derivada. Em seguida, com a Questão 2, o estudante trabalha com o tabelamento da função $y = x^2$ e o ponto $x = 4$; ao lidar com a variação de x e de y ,

preencheu a tabela com valores de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e concluiu que os resultados tendiam para o

valor que era a derivada da função no ponto específico. As Questões 3, 4 e 5 confirmam essa ideia, fazendo o aluno fixar e aplicar o conhecimento construído;

- c) **Relacionar a derivada com a Convergência da Taxa de Variação:** ao analisar as tabelas construídas e a movimentação da reta tangente à curva, o aluno se depara o tempo todo com ideias de “aproximação”, “tendência” e “comparação entre intervalos”, o que faz com que relacione a convergência da taxa de variação com a derivada.

5.2.3. Atividade 3: Métodos numéricos de resolução de uma integral

Esta atividade foi aplicada para duas turmas de Cálculo Numérico: a primeira foi o 3º período de Engenharia de Produção – Matutino, com 43 alunos. O estudo numérico de integrais era o quinto tópico do programa e foi trabalhado do fim do mês de setembro ao início de outubro de 2009. Todos os alunos resolveram todas as questões em 200 minutos, divididos entre os dias 14 e 28 de outubro de 2009, no horário de 08h50min às 10h30min, para a turma da Engenharia de Produção.

A turma de Engenharia de Produção tinha a disciplina Cálculo Numérico dividida em duas partes: aproximadamente 67% da carga horária era teórica e o restante era de prática no laboratório de informática, ou seja, a turma tinha carga horária prevista para estudar o conteúdo com o uso de computadores, o que facilitou bastante. Assim, no momento de estudar o tópico Integração Numérica Simples, foi possível trabalhar no laboratório a Atividade 3 como fixação. As aulas teóricas eram semanais e as práticas eram quinzenais.

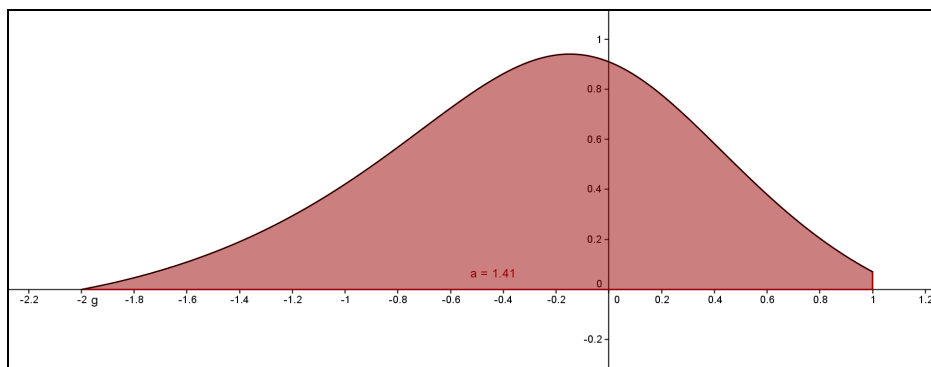
A segunda turma foi a do curso de Matemática Licenciatura – Noturno com 20 alunos, sendo que 50% da carga horária era teórica e 50% prática. Durante a aplicação, foi destacada a importância de se tratar de uma atividade investigativa com o uso de computadores, de modo que eles estavam estudando o conteúdo previsto e ainda vivenciando uma nova experiência didática, uma vez que a formação dos alunos é a docência. Tanto as aulas teóricas como as de prática eram semanais, sendo que todos os alunos conseguiram terminar todas as questões em 200 minutos, divididos entre os dias 09 e 16 de outubro de 2009, no horário de 20h50min às 22h30min.

A Atividade 3 é mostrada, na íntegra, para facilitar o acompanhamento do raciocínio:

Atividade 3

Questão 1: Vamos estudar a região que está destacada abaixo?

Figura 1: representação gráfica da função com o uso do *Geogebra*.



Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x .

Parte 1

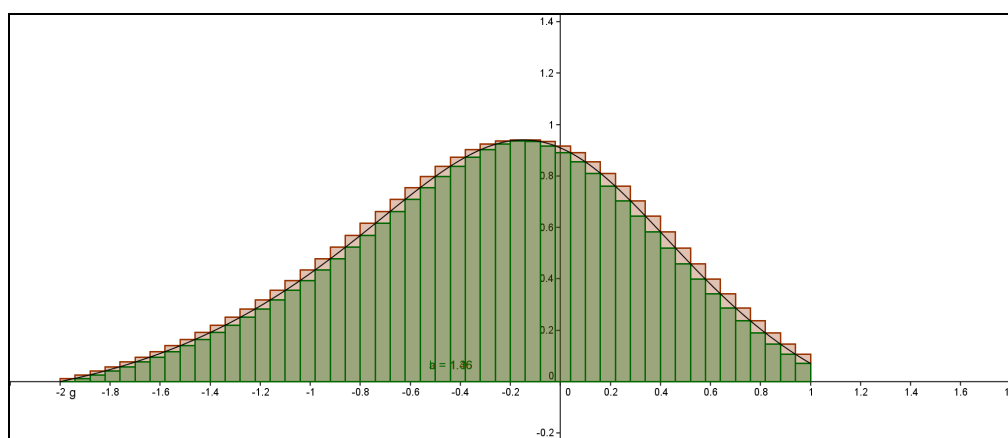
Observando a região destacada, podemos perceber que ela é definida pela função $f(x) = \frac{\sin(x+2)}{1+x^2}$,

com $-2 \leq x \leq 1$, determinando uma área aproximada de $1,41 \text{ u}^2$, com $E_t \leq 10^{-2}$. Sendo assim, faça o que se pede abaixo, primeiramente usando o programa *Geogebra*, para que possamos trabalhar a área dessa região:

- Digite as funções na caixa “Entrada”; para isso, digite “função[]” sendo que dentro dos colchetes você deverá escrever a função, o intervalo em que ela está definida (x inicial e x final), tudo separado por vírgula, ou seja, função[fórmula matemática, x inicial, x final].
- Uma forma de obter a área da região é quadricular o terreno todo, com quadrados de área unitária e verificar qual é a área aproximada. No *Geogebra*, é possível quadricular todo o plano cartesiano de forma bem simples: clique com o botão direito do *mouse* na janela de visualização e vá em “malha”.
- Usando esse método, é possível estimar a área da região de acordo com um número aproximado de quadradinhos. Então, estime qual seria a área aproximada da região. O que é possível dizer sobre a *precisão* deste método?
- Agora, usando o comando “Soma Inferior”, obtenha a área de outra forma: com a construção de retângulos de base unitária e altura igual à imagem do ponto x_i pela função, no intervalo considerado. Então, digite somainferior[] na Caixa de Entrada e, dentro dos colchetes digite a função, o intervalo e o número de retângulos desejado, ou seja, somainferior[função, origem do intervalo, extremo do intervalo, nº de retângulos]. Fique atento quanto à lei da função e o intervalo a serem usados.
- Use quantidades diferentes de retângulos, para obter aproximações mais precisas da área. Registre alguns resultados obtidos, atentando-se para o limite do número de partições (o número máximo de partições).

- g) Para qual valor a soma está *tendendo*?
- h) Agora, use o comando “Soma Superior”, da mesma forma que foi feito com a “Soma Inferior”, com as mesmas quantidades de retângulos usadas anteriormente. Registre também esses resultados em uma tabela.
- i) Compare os resultados obtidos com a ferramenta “Soma Superior” e “Soma Inferior”. Abaixo temos uma figura que ilustra a situação que foi criada aqui! Observando a figura abaixo, o que ela sugere?

Figura 2: destaque de uma parte do gráfico, através do programa *Geogebra*.



Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x .

- j) Qual é a provável medida da área sob a curva $f(x) = \frac{\sin(x+2)}{1+x^2}$?

Para as questões (k) a (n) seguintes, você deverá usar o programa *VCN*:

- k) Agora, estude a região e calcule a área usando, primeiramente, a Regra dos Trapézios. Anote o resultado encontrado, explicando o que você fez para isso (passo utilizado, número de pontos, etc.).
- l) Calcule agora a área do terreno usando a 1ª ou a 2ª Regra de Simpson, conforme as exigências das regras. Escreva os resultados, explicando qual o procedimento que você adotou (passo, número de pontos, etc.).
- m) Calcule o erro absoluto e o relativo dos métodos aqui utilizados para obter a área. Considere como real o resultado encontrado através da Regra de Simpson!
- n) Analisando os resultados anteriores e os conhecimentos que você obteve na sua vivência escolar, o que você entende pela palavra *Convergência*?

Parte 2: Estas questões deverão ser resolvidas no programa *Geogebra*:

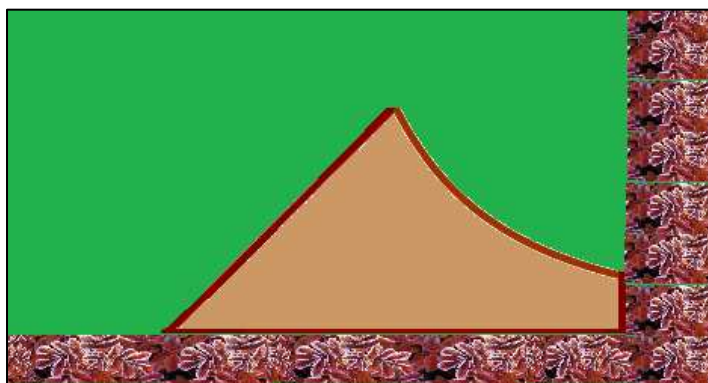
- 1) Agora, utilizando a ferramenta “Seletor”, que se localiza em uma das caixas do menu, você deverá obter a área da região, movendo o seletor n e observando o que acontece à medida que n aumenta de valor. Para isto, siga os passos abaixo:
- a) Insira um seletor, chamando a variável de n , escolhendo valores convenientes para n . Lembre-se: n é o número de partições que são feitas sob a curva, então precisa ser um número natural.

- b) Entre com a função aqui mencionada, fazendo a representação gráfica. Atenção para o intervalo definido!
 - c) Obtenha a “Soma Inferior”, deixando o número de retângulos como “ n ”.
 - d) Mova o cursor do seletor para a direita e esquerda, observando o que acontece com a região que estamos estudando. Monte uma tabela e registre cinco valores diferentes de n e da área, para esta análise. Modifique o valor máximo ou o mínimo de n caso julgue necessário.
 - e) Qual deve ser a melhor partição dessa região para obtermos um valor mais próximo da área?
 - f) Para qual valor a área está *convergindo*?
- 2) Estabeleça a relação entre as formas que você usou para calcular a área da região. Para qual limite essa área está *tendendo*? Qual é, então, a área dessa região?

Questão 2: Parte 1

Imagine que uma parte de um terreno está sendo demarcada para ser vendida. O desenho desta região é como abaixo se apresenta, considerando uma escala 1:200 cm:

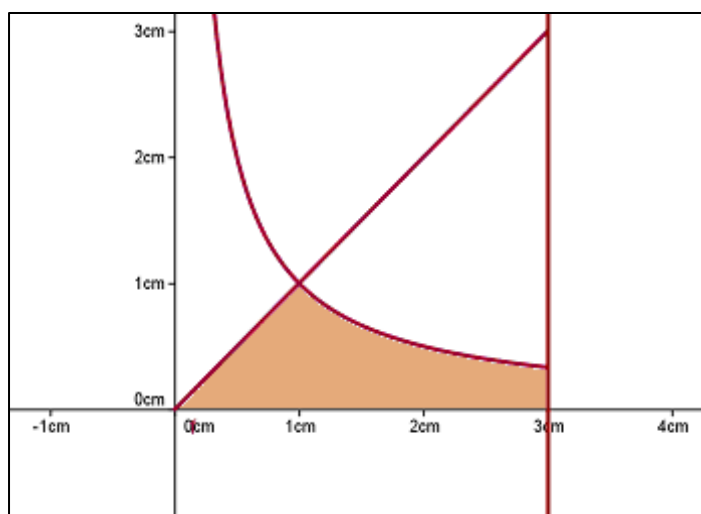
Figura 3: desenho feito no *Geogebra* e colorido no *Paint Brush*.



Suponha que esta representação foi obtida com o uso de um *GPS*, que também fornece a medida da área, mas o proprietário – que é engenheiro – preferiu conferir se a área é mesmo a que foi obtida com o aparelho. Então, solicitou a um topógrafo que apresentasse a representação gráfica da região, para que pudessem calcular a área precisa.

Ao colocar essa região num plano cartesiano e estudar os pontos extremos, pôde-se perceber que há funções que a delimitam. Eis a representação gráfica, cuja região destacada é a do terreno:

Figura 4: representação gráfica do terreno, usando o *Geogebra*.



Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x . Fonte: Site do Geogebra, 2010.

O engenheiro e o topógrafo apresentaram o croqui da região do terreno a ser vendida, como mostra a figura 2, e descobriram que as curvas que delimitam o terreno podem ser representadas pelas funções $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, e pelas retas $y = 0$ e $x = 3$. Agora, com o uso dos softwares *Geogebra* e *VCN*, você deverá descobrir a área da região a ser vendida do terreno, de acordo com os passos a seguir. As primeiras questões deverão ser resolvidas com o programa *Geogebra*:

a) Digite as funções na caixa Entrada; para isso, digite “função[]” sendo que dentro dos colchetes você deverá escrever a função (uma de cada vez), o intervalo em que ela está definida (x inicial e x final), tudo separado por vírgula, ou seja, função[fórmula matemática, x inicial, x final]. Fique atento ao intervalo para cada função!!

b) Uma forma de obter a área da região é quadricular o terreno todo, com quadrados de área unitária e verificar qual é a área aproximada. No *Geogebra*, é possível quadricular todo o plano cartesiano de forma bem simples; para isso, clique com o botão direito do mouse na janela de visualização e vá em “malha”. Após fazer isso, quantos quadrados inteiros foram obtidos? E quantas partes de quadrados sobraram?

c) Usando esse método, é possível estimar a área da região de acordo com um número aproximado de quadradinhos. Então, qual seria a área aproximada da região? O que é possível constatar com este método?

d) Agora, usando o comando “Soma Inferior”, obtenha a área de outra forma: com a construção de retângulos de base unitária e altura igual à imagem do ponto x_i pela função, no intervalo considerado. Então, digite somainferior[] na Caixa de Entrada e, dentro dos colchetes digite a função, o intervalo e o número de retângulos desejado, ou seja, somainferior[função, origem do intervalo, extremo do intervalo, nº de retângulos]. Fique atento quanto à lei da função e o intervalo a serem usados.

e) O que você fez para obter a área do terreno? O que foi necessário fazer para usar o comando acima?

- f) Use quantidades diferentes de retângulos, para obter aproximações mais precisas da área. Registre alguns resultados obtidos, atentando-se para o limite do número de partições.
- g) Para qual valor a soma está tendendo?
- h) Agora, use o comando “Soma Superior”, da mesma forma que foi feito com a “Soma Inferior”, com as mesmas quantidades de retângulos usadas anteriormente. Registre também esses resultados em uma tabela.
- i) Compare os resultados obtidos com a ferramenta “Soma Superior” e “Soma Inferior”. Qual é a provável medida da área da região? Explique o que pode ser observado.
- Para as questões (j) e (k) seguintes, você deverá usar o programa VCN:
- j) Agora, estude a região e calcule a área usando, primeiramente, a Regra dos Trapézios. Anote o resultado encontrado, explicando o que você fez para cumprir a exigência da regra.
- k) Calcule agora a área do terreno usando a 1ª ou a 2ª Regra de Simpson. Escreva o resultado, explicando qual o procedimento que você adotou.
- l) Considerando a escala inicialmente apresentada e a área do “desenho” que foi aqui encontrada, qual é a área real do terreno?

Parte 2: Estas questões deverão ser resolvidas no programa Geogebra:

- 1) Use a ferramenta “Seletor”, para obter a área da região. Para isto, siga os passos abaixo:
 - a) Insira um seletor, chamando a variável de n , e escolhendo o n mínimo = 0 e máximo = 250.
 - b) Entre com as funções aqui mencionadas, separadamente, fazendo a representação gráfica.
 - c) Obtenha a “Soma Inferior”, deixando o número de retângulos como “ n ”.
 - d) Mova o cursor do seletor para a direita e esquerda, observando o que acontece com a região que estamos estudando. Monte uma tabela e registre cinco valores diferentes de n e da área, para esta análise. Modifique o valor máximo ou o mínimo de n caso julgue necessário.
 - e) Para qual valor a área está *convergindo*?

- 2) Estabeleça a relação entre as formas que você usou para calcular a área da região. Para qual limite essa área está *tendendo*? Qual é, então, a área dessa região?



Os objetivos e competências pretendidos para a conclusão da Atividade 3 constam no Quadro 8:

<i>Temas</i>	<i>Objetivos</i>	<i>Competências</i>
Somas de Riemann	* Calcular a integral através das Somas Inferiores e Somas Superiores.	* Descobrir que a área real é a média aritmética das Soma Inferior e Soma Superior. * Compreender que as Somas de Riemann são na verdade a Convergência para o valor da área.
Regra dos Trapézios	* Calcular a mesma integral anterior através da Regra dos Trapézios.	* Perceber que a Regra dos Trapézios dá uma aproximação boa da área real.
Regras de Simpson	* Verificar qual das duas regras de Simpson pode ser utilizada e calcular a área sob a mesma curva anterior por esse método.	* Constatar que as Regras de Simpson dão uma aproximação melhor da área real do que a Regra dos Trapézios. * Perceber que a Regra dos Trapézios e as Regras de Simpson convergem para o valor real da área.
Todas as regras acima	* Obter o valor de uma integral numérica através de diferentes métodos.	* Comparar e analisar os resultados obtidos através dos diferentes métodos numéricos. * Perceber que há várias formas de se chegar a um mesmo resultado.
Todas as regras acima	* Visualizar a convergência dos métodos numéricos de integração para a área real, observando se a convergência é lenta ou não.	* Ao calcular a área com diferentes valores de n , por meio dos métodos numéricos propostos, o aluno deverá perceber a tendência de todos para o valor da área real.

Quadro 8: Conteúdos explorados na realização da terceira parte da sequência.

Fonte: dados da pesquisa.

A análise de cada objetivo a partir da Atividade 3 justifica a importância de cada questão:

- a) **Calcular a integral através das Somas Inferiores e Somas Superiores:** nas Questões 1 e 2, o aluno deve calcular a área por meio das Somas Inferiores e das Somas Superiores, visualizando graficamente o que ocorre quando divide a região em diferentes partições. Ao montar tabelas com os valores encontrados, pode perceber que

tanto as Somas Inferiores como as Somas Superiores tendem ao valor da área real, e que esse valor é, na verdade, a média aritmética entre os valores da Soma Inferior e Soma Superior para mesmo valor de n ;

- b) **Calcular a mesma integral anterior através da Regra dos Trapézios:** com os mesmos valores de n utilizados para as Somas de Riemann, é pedido que obtenha a área por meio da Regra dos Trapézios, para efeito de comparação e conhecimento de outro método numérico;
- c) **Verificar qual das duas regras de Simpson pode ser utilizada e calcular a área sob a mesma curva anterior por esse método:** inicialmente o aluno deve conhecer as condições para uso da Primeira e da Segunda Regra de Simpson, para que possa calcular a área das regiões propostas nas Questões 1 e 2. Nesse caso, como o passo não foi dado, foi pedido que ele explicasse o procedimento necessário para usar a regra escolhida. Foi sugerido que utilizassem as partições já usadas antes, para que pudessem ter melhor parâmetro de comparação entre os resultados;
- d) **Obter o valor de uma integral numérica através de diferentes métodos:** com os valores das áreas obtidas com os métodos numéricos propostos, o aluno pôde compreender e concluir qual é o método que proporciona melhor aproximação da área real. Ao montar uma tabela com esses valores, ele organiza as informações e melhor as compara;
- e) **Visualizar a convergência dos métodos numéricos de integração para a área real, observando se a convergência é lenta ou não:** em todas as questões, os termos “tendem”, “tendendo”, “aproximação” e “convergindo” são bastante explorados, de modo que a linguagem leva naturalmente à compreensão da ideia de *Convergência*. Terá, por fim, condições de responder à Questão (1. n):

Analizando os resultados anteriores e os conhecimentos que você obteve na sua vivência escolar, o que você entende pela palavra *Convergência*?

Esta atividade envolveu os métodos Somas de Riemann, Regra dos Trapézios, Primeira e Segunda Regras de Simpson, com o objetivo final de compreender a ideia de Convergência. Neste caso, houve a opção por nova metodologia: primeiramente, foram explicados os métodos Regra dos Trapézios, Primeira e Segunda Regras de Simpson em sala de aula e a atividade no laboratório foi aplicada à medida que o conteúdo progredia. Nas duas turmas, a atividade foi aplicada logo que se iniciou o estudo sobre Integração Numérica: na aula prática em que a atividade investigativa (que se inicia com Somas de Riemann) foi apresentada, nas aulas teóricas o estudo numérico de integrais estava começando (com breve comentário sobre Somas de Riemann e em seguida, a Regra dos Trapézios).

5.2.4. Atividade 4: Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes

Esta atividade foi aplicada para três grupos diferentes: o grupo de alunos voluntários das oficinas extraclasse, a turma do curso de Engenharia de Produção e os alunos do curso de Matemática. A aplicação para cada grupo aconteceu assim:

- a) Grupo Voluntário: dia 09 de novembro de 2009, no horário de 16h às 18h30min, sendo que para esta atividade foram utilizados aproximadamente 90 minutos do tempo mencionado pelos 08 alunos presentes;
- b) Turma do curso de Matemática: dia 06 de novembro de 2009, no horário de 20h50min às 22h30min, todo o tempo foi utilizado pelos 20 alunos presentes;
- c) Turma do curso de Engenharia de Produção: 11 de novembro de 2009, no horário de 08h50min às 10h30min, quando a maioria dos 43 alunos conseguiu resolver todas as questões.

Para facilitar o acompanhamento, a Atividade 4 é mostrada na íntegra:

Atividade 4

1. Seja a equação $-x^2 + 7x - 10.6875 = 0$. Buscaremos uma aproximação para as suas raízes por meio do tabelamento da função $y = -x^2 + 7x - 10.6875$, com precisão de 2 casas decimais; para isso, basta seguir as orientações abaixo:

Parte 1 – As questões a seguir devem ser resolvidas através do VCN

- a) Vá em “Utilitários – Tabelar uma Função”. Vamos começar com um intervalo qualquer, mas não muito grande, por exemplo, $[-4, 4]$. Insira a função acima, x inicial = - 4, x final = 4 e passo = 1, e clique em “Calcular”. Observe a tabela e verifique se há alguma imagem nula (zero). Se houver, qual é o valor correspondente de x ?
- b) Agora, apague o número de pontos e mude o passo para 0.1. E agora há alguma raiz?
- c) Vamos então encontrar a raiz que pertence a este intervalo? Para isso, observe as imagens na tabela; verifique quais são os valores consecutivos de x que cujo produto das imagens é negativo.
- d) Monte uma nova tabela com esses valores de x , não se esquecendo de apagar o número de pontos e mudar o passo para 0.01.
- e) Há algum valor de x cuja imagem é 0 (zero)? Essa é a raiz da equação, com uma precisão de 2 casas decimais!

Parte 2

- a) Vamos encontrar agora a outra raiz da equação? Para isso, apague o número de pontos e modifique o intervalo, para outro diferente do que foi usado na 1ª parte. Por exemplo, considere o intervalo $[4, 8]$, com passo 0.1.
- b) Novamente busque na tabela os valores de x cujas imagens tenham sinais opostos, e construa agora uma nova tabela, mas com esses valores de x . Não se esqueça de apagar o número de pontos e mudar o passo para 0.01.
- c) Já é possível conhecer alguma raiz dessa equação neste intervalo? Se sim, qual é ele? Se não, continue com esse procedimento até obter um valor de x cuja imagem é 0 (zero).
- d) Quais são, então, as raízes dessa equação?

Parte 3 – As próximas questões devem ser feitas no Geogebra.

- a) Abra o programa *Geogebra* e na caixa “Entrada”, digite a expressão $-x^2 + 7x - 10.6875$ e dê *enter*.
 - b) Agora, busque a ferramenta “Intersecção de dois objetos” e clique no gráfico e no eixo x . Os pontos que surgirão são as raízes da função.
 - c) Quais são, então, as raízes dessa equação?
2. Considere a equação algébrica $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 1 = 0$. Como é um polinômio de 4º grau, é fato que possui pelo menos uma raiz real, com $\varepsilon \leq 10^{-4}$. Sendo assim, tentaremos encontrar uma das raízes via método numérico através do programa VCN e, em seguida, analisaremos sua representação gráfica, com o uso do *Geogebra*.

Parte 1 – As primeiras questões devem ser feitas no programa VCN.

- a) Então, a partir dessa ideia, vamos encontrar uma raiz fazendo o tabelamento da equação. Vá em “Tabelar uma Função” e digite a equação acima, supondo um intervalo inicial, por exemplo, $[0, 1]$ com passo 0,1.
- b) Observe a tabela com as imagens da equação. Busque na tabela os dois valores consecutivos de x que tenham imagens cujo produto seja menor que 0 (zero).
- c) Na mesma tela, apague o número de pontos e insira os novos valores de x que você observou na tabela obtida na questão (b), mantendo a equação. Observe novamente a nova tabela construída.
- d) Busque novamente os dois valores consecutivos de x cujo produto das imagens seja negativo. Construa nova tabela com esses valores e faça a mesma análise.
- e) Faça as mesmas construções acima (com os valores de x) até obter uma imagem que seja menor do que o erro exigido $\varepsilon \leq 10^{-4}$, ou seja, até que $|f(x_k)| < \varepsilon$.
- f) O valor de x correspondente a essa imagem é a aproximação da raiz procurada. Neste caso, qual é a aproximação da raiz que você encontrou para esta equação?
- g) Quantas iterações foram necessárias?

Parte 2

O VCN tem uma ferramenta específica para cálculo de raízes de equações algébricas e transcendentais. Então, vamos obter a raiz da equação anterior por meio dessa ferramenta?

- a) Vá em “Cálculo de Raízes – Método da Bisseção”. Marque a primeira opção em “Critério de Parada”, ou seja, marque $|f(x_k)| < \text{Precisão}$, e considere o mesmo intervalo da questão (b) acima, ou seja, $[0, 1]$ e precisão (ou passo) 0,1. Qual o resultado que você encontrou?
- b) Agora, modifique apenas a precisão para 0,01. Qual o resultado encontrado? Observe a diferença que deu da questão anterior (a) para esta (b).
- c) Quantas iterações foram feitas?

Parte 3 – As próximas questões devem ser feitas no programa Geogebra.

- a) Agora, insira a equação acima na caixa Entrada do *Geogebra*, e faça a construção gráfica.
- b) Encontre as raízes da equação, explicando os procedimentos adotados, e escreva esses resultados.
- c) Compare os resultados que você encontrou no gráfico com a raiz encontrada na questão (f) da primeira parte. Há melhor aproximação entre qual das raízes?

Parte 4

Para encontrar as outras raízes da equação algébrica acima através do VCN, basta considerar outros intervalos para x (x inicial e x final) e fazer as mesmas observações e construções da primeira parte.

3. Considere a equação transcendente $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \operatorname{tg}(x) = 0$, com $\varepsilon \leq 10^{-4}$. Vamos procurar pelo menos uma raiz para esta equação, inicialmente no software VCN e depois analisaremos seu comportamento gráfico no *Geogebra*.

Parte 1 – As primeiras questões devem ser feitas no VCN.

- a) Vamos começar com um intervalo qualquer, por exemplo, $[0, 1]$. Então, vá em “Utilitários – Tabelar uma Função”, e insira os dados necessários, com passo 0.1. Pode não haver nenhuma raiz neste intervalo! Por quê?
- b) Agora, modifiquemos o intervalo para $[3, 4]$, também com passo 0.1. Aparece uma mensagem de erro! Por quê?
- c) Há pelo menos uma raiz neste intervalo! Vamos encontrá-la? Siga os mesmos procedimentos anteriores para encontrá-la, usando a ferramenta “Tabelar uma Função”.
- d) Para encontrar a raiz, considerando 4 casas decimais, anote todos os intervalos adotados.
- e) Qual é a raiz da equação acima no intervalo $[3, 4]$?
- f) Quantas iterações foram necessárias?

Parte 2

- a) Agora, abra a caixa “Cálculo de Raízes”, e escolha o “Método da Bisseção”. Insira a equação, o intervalo $[3, 4]$ e com a precisão 0.0001. Aparecerá uma mensagem de erro! O que devemos fazer para resolver esse problema?
- b) Após fazer a modificação necessária, encontre a raiz da equação nesse intervalo. Qual é essa raiz?
- c) Quantas iterações foram feitas?

Parte 3 – Você deverá usar o programa *Geogebra* para as próximas questões.

- a) Primeiramente faça a representação gráfica da função $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \operatorname{tg}(x) = y$.
- b) Busque agora a intersecção do gráfico com o eixo x . Para isso, você deverá clicar em cada uma das curvas e o eixo x .
- c) Qual é a raiz apresentada pelo *Geogebra* mais se aproxima da que você encontrou nas atividades acima (Partes 1 e 2!)?



Os alunos em geral conseguiram compreender a ideia expressa pelas questões e alguns alegaram que não compreendiam muito bem o significado de “raiz de uma equação”. Foi possível perceber que a maioria só estava acostumada com equações do tipo $y = ax + b$ e

$y = ax^2 + bx + c$, usando fórmulas decoradas (nem sempre!!) para descobrir essas raízes. No momento em que houve a proposta de encontrar a raiz de uma equação do tipo $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 1 = 0$, houve o comentário de um aluno da turma de Engenharia de Produção:

“Eu me lembro de ter estudado isso no 3º ano! Mas não sei mais como resolver.”

Se com essa equação houve um claro desconforto, quando a proposta foi para a equação $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \operatorname{tg}(x) = 0$ então, houve um “burburinho” geral, indicando certo ‘pavor’.

Os alunos (de todas as turmas pesquisadas) fizeram comentários do tipo:

“Professora, você vai pedir pra gente resolver isso aí? Eu não sei, não!”

“Eu não tenho nem ideia do que é pra fazer.”

Para a aplicação dessa atividade, antes foi explicado na aula teórica o significado da raiz ou zero de uma equação, primeiramente com equações do 1º e 2º graus, depois com outras equações como aquelas citadas acima. Para equações quaisquer, o Método da Bissecção foi apresentado em sala com alguns exemplos. Então, os alunos foram para o laboratório resolver essa atividade no computador após já terem boa noção do que era o Método da Bissecção, inclusive com relação aos seus critérios e condições. Dentre outros métodos existentes, este foi escolhido por ser bastante simples, envolvendo apenas as quatro operações aritméticas; inclusive, é um método fácil que poderia ser ensinado também no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Nesta atividade, os conteúdos explorados nas questões estão apresentados no Quadro 9:

<i>Temas</i>	<i>Objetivos</i>	<i>Competências</i>
Cálculo da raiz de uma equação.	* Tabelar uma equação e buscar a raiz pertencente a esse intervalo. * Relacionar a Convergência dos valores tabelados com a raiz da equação. * Calcular a raiz em um intervalo dado por meio do Método da Bissecção.	* Aprender a tabelar uma função, em um intervalo específico. * Descobrir a raiz de uma equação por meio da análise de sua tabela. * Compreender que os valores tabelados convergem para a raiz da equação. * Conhecer outra forma de obter a raiz de uma equação. * Comparar e analisar os dois resultados obtidos.

Quadro 9: Conteúdos explorados na Atividade 4.

Fonte: dados da pesquisa.

A partir dos objetivos, as questões da Atividade podem ser assim relacionadas:

- a) **Tabelar uma equação e buscar a raiz pertencente a esse intervalo:** em todas as questões da Atividade 4, o tabelamento das equações é o grande enfoque; é pedido ao aluno que tabele uma mesma equação com diferentes intervalos, mas o primeiro intervalo contém todos os demais, com a noção de “intervalos encaixados”. Ao analisar todas essas tabelas, o aluno percebe que os intervalos estão se restringindo e se fechando em torno da raiz da equação;
- b) **Relacionar a Convergência dos valores tabelados com a raiz da equação:** os intervalos em que a equação é tabelada giram em torno da raiz, de modo que o aluno percebe que os valores tendem para a raiz, tanto pela direita como pela esquerda. Essa análise é feita em todas as questões da Atividade 4;
- c) **Calcular a raiz em um intervalo dado por meio do Método da Bissecção:** o trabalho com o Método da Bissecção é proposto nas Questões 2 e 3, de modo que o aluno passa a conhecer uma forma bastante simples (apesar de lenta) de obter a raiz de qualquer equação.

5.3. Análise de resultados

A partir das atividades do material didático que é proposto nesta pesquisa, a análise dos resultados obtidos é feita de acordo com os autores estudados na fundamentação teórica. Para cada etapa, a análise é mostrada conforme a investigação matemática de Ponte (2006) e da sequência didática de Zabala (2007).

5.3.1. Exploração e formulação de questões

Na Atividade 1, a situação problemática apresentada aos alunos foi o estudo numérico e gráfico das funções $f(x) = \frac{3}{2x-5}$ e $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, exatamente nos seus pontos de restrição, ou seja, $x = 5/2$ para a função f e $x = 2$ para a função g . Através da primeira questão, que deve ser resolvida com o software *Geogebra*, nos itens de (a) até (j) os alunos reconheceram e exploraram o problema apresentado. Ao fazer a representação gráfica da função $f(x) = \frac{3}{2x-5}$ e estudar o gráfico com as ferramentas “ampliar” e “reduzir” na região próxima ao ponto de restrição $x = 5/2$ há a possibilidade de fazer experimentações e formular questões.

Dois alunos, que serão denominados de C e D, ilustrarão essas primeiras ideias, quanto ao que já foi comentado. É possível perceber que eles usaram uma linguagem particular, indicando que foi exatamente da forma como entenderam:

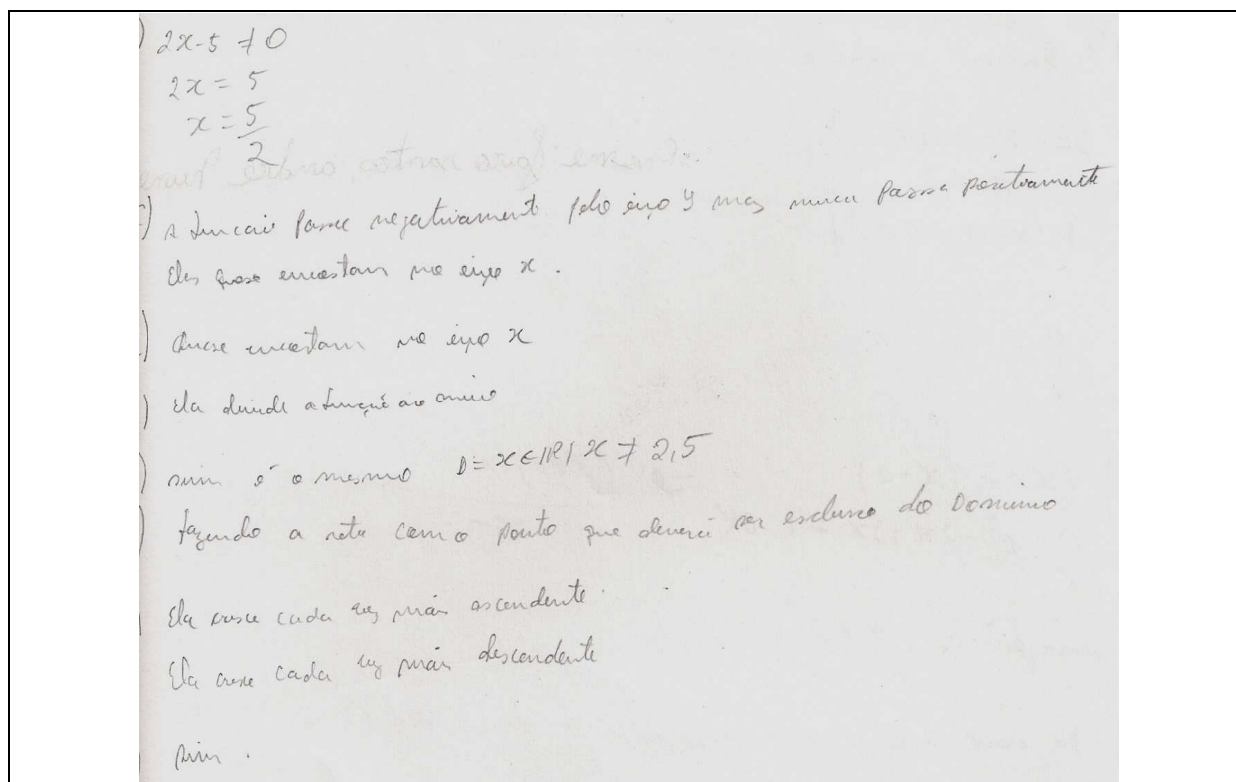


Figura 34: Resolução do aluno C para a Questão 1 da Atividade 1.
 Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

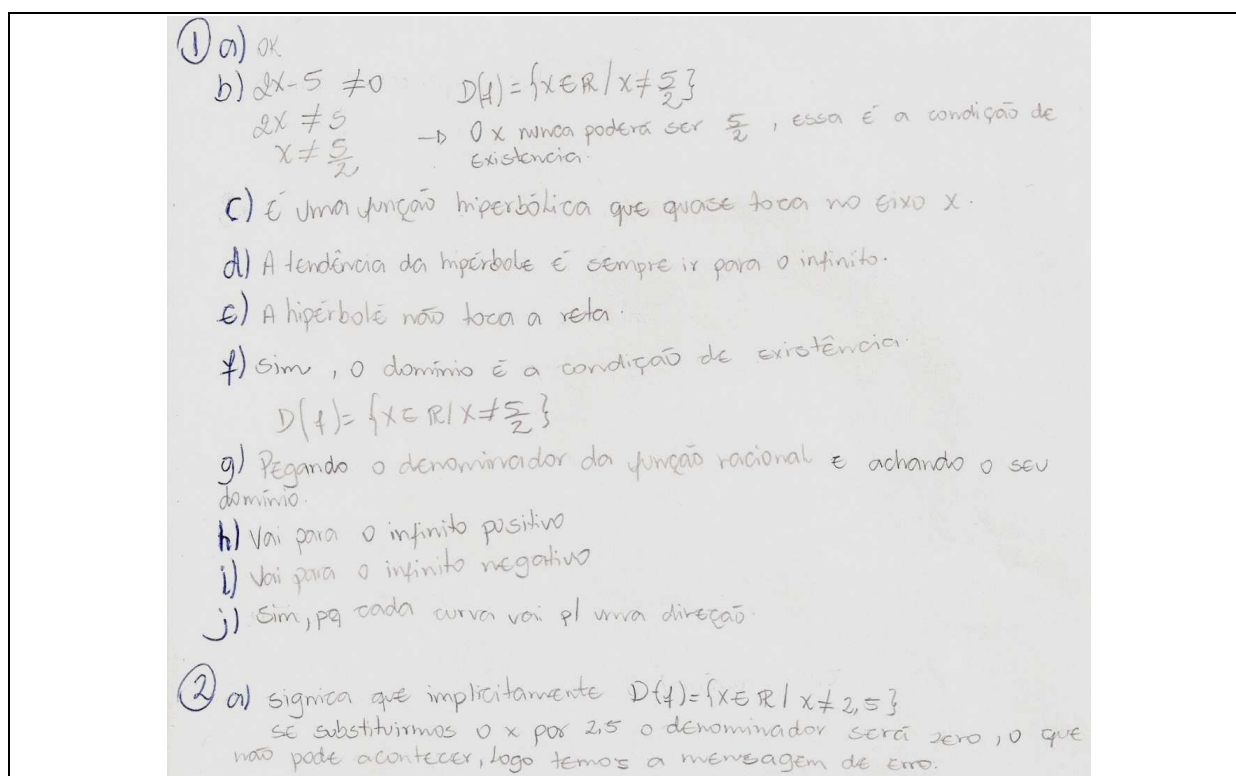


Figura 35: Resolução do aluno D para a Questão 1 da Atividade 1.
 Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Algumas perguntas e as respectivas respostas dadas pelos alunos serão destacadas:

1.b) Qual é o comportamento da função próximo ao eixo x ? E com relação ao eixo y ? Use as ferramentas “ampliar” e “reduzir” para ampliar muitas vezes o gráfico para essa observação. Puxe o eixo x com a ferramenta “deslocar eixos” e observe o comportamento próximo ao eixo x .

Fonte: Atividade 1.

Para a pergunta (1.b), serão citadas as respostas dos alunos C e D, de acordo com o entendimento de cada um:

Resposta do aluno C: “A função passa negativamente pelo eixo y , mas nunca passa positivamente. Eles quase encostam no eixo x .”

Resposta do aluno D: “O x nunca poderá ser $5/2$, essa é a condição de existência.”

1.e) **Orientação:** a reta $x = 2,5$ é chamada de Assíntota Vertical da curva $f(x) = \frac{3}{2x-5}$.
Como podemos, então, encontrar a assíntota de funções racionais como esta?

Fonte: Atividade 1.

Para a pergunta (1.e), os mesmos alunos acima mencionados registraram suas respostas sobre como entenderam que a assíntota vertical de uma função pode ser encontrada:

Resposta do aluno C: “Fazendo a reta com o ponto que deverá ser excluído do domínio.”

Resposta do aluno D: “Pegando o denominador da função e achando o seu ‘domínio’.”

Cada um dos alunos interpretou do seu modo a observação, mesmo que muitas vezes não tenham conseguido se expressar da melhor forma. A preocupação nesse momento foi se os educandos realmente estavam entendendo a ideia e, para isso, diante de algumas respostas observadas, eles as explicaram verbalmente, para melhor interpretação da sua realidade.

Com relação à Atividade 2, a primeira situação problemática apresentada foi o estudo da função $f(x) = -x^2 + 4x$ no que diz respeito à construção de retas tangentes em um ponto específico. Neste momento, outras situações foram apresentadas para que a generalização do conceito de derivada acontecesse. A segunda situação problemática apresentada foi uma aplicação das derivadas, que trata do custo para produção de certa quantidade de mercadorias.

O tabelamento das funções com enfoque nos valores de Δx e Δy fizeram os alunos perceberem que a taxa de variação instantânea é, na verdade, a derivada da função no ponto específico.

Os alunos deveriam reconhecer que a derivada da função $f(x) = -x^2 + 4x$ num ponto específico $P(x_0, y_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente a essa curva no ponto P , e com relação à expressão $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ que define o custo para produção de x unidades de certa mercadoria (2ª situação), devem compreender que a sua derivada em um número x_0 é o custo instantâneo para a produção dessa quantidade x_0 definida.

Com relação a essa atividade, os educandos puderam explorar cada situação, fazendo experiências numéricas e de visualização. Na primeira situação proposta, a partir de cada passo indicado, eles puderam relacionar a ideia de coeficiente angular da reta tangente à curva num ponto específico com a posição da reta, construindo essa ideia a partir das investigações; também construíram a noção de que a taxa de variação instantânea $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ num dado ponto, é a

derivada $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Os alunos então eram convidados a formalizar a relação entre o coeficiente angular da equação da reta tangente e a posição dessa reta no plano cartesiano. As respostas de dois alunos exemplificam a situação nas Figuras 36 e 37:

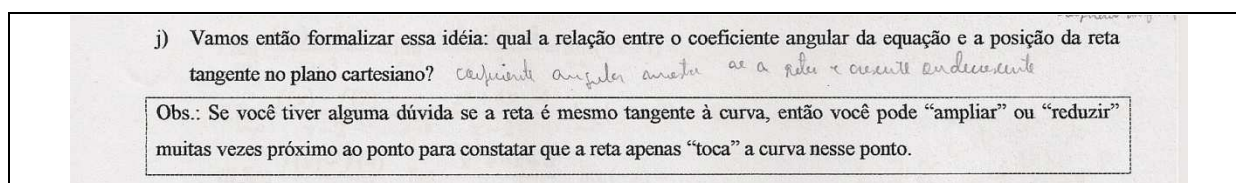


Figura 36: Resposta do aluno A para a questão (1.j).

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno A respondeu à pergunta com a frase:

“Coeficiente angular mostra se a reta é crescente ou decrescente.”

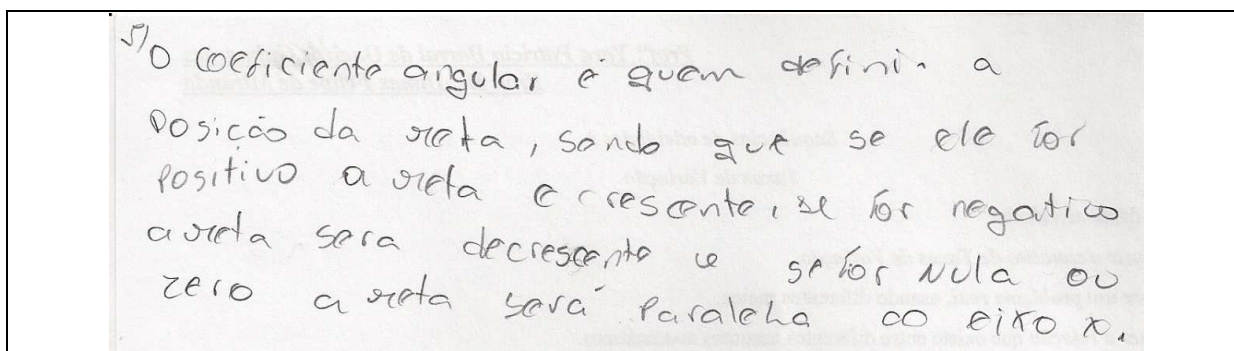


Figura 37: Resposta do aluno M para a questão (1.j).
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno M teve mais facilidade em redigir a resposta, explicando com mais detalhes. É possível perceber que cada um dos alunos acima, do seu modo, compreendeu e conseguiu registrar a ideia. Neste primeiro momento da Atividade 2, a atividade inicial “*Primeiras Experimentações...*” teve grande importância, pois explorou bastante essa noção da equação da reta.

Quanto às questões seguintes – **Parte 2: Construção da ideia de derivada** – os alunos investigaram a relação entre o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x)$ num ponto específico e o limite da função $f(x)$ nesse mesmo ponto. Como é possível constatar na Figura 38, o aluno em destaque percebeu a relação pedida:

q) Com a ferramenta “mover” da 1ª caixa do menu, mova o ponto (1, 3) até cada um dos pontos abaixo. Para cada ponto, você deverá anotar qual é o coeficiente angular da reta tangente nesse ponto:

i. (3, 3) = $-2x + 3$
 ii. (2, 4) = $0 + 4$
 iii. (4, 0) = $-4x + 16$

r) Você deverá agora calcular os limites seguintes, que dizem respeito aos pontos acima:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 1) = -2$
 ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-x + 2) = 0$
 iii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 4x - 0}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (-x) = -4$

s) Compare as questões (q) e (r) acima. O que você pode afirmar ao analisar respectivamente as respostas acima?

t) Como você pôde comprovar, o coeficiente angular da reta tangente é igual ao limite da expressão $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nesse ponto!

o limite = coeficiente angular da reta tangente

Figura 38: Resolução do aluno A para as questões (1.q), (1.r) e (1.s).
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

A primeira situação proposta se finaliza com a formalização do conceito de derivada. Sobre isso, será mostrada novamente a resolução do aluno A:

2. Vamos ainda considerar a mesma função anterior, ou seja, $f(x) = -x^2 + 4x$. Vamos agora visualizar a variação que pode ocorrer com essa função! Para isso, deixe apenas a parábola que representa essa função.

Parte 1 – Uso do Geogebra

a) *Orientação:* a derivada de uma função f em um número a , simbolizada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

b) Considere a função f que estamos estudando e os pontos que marcamos anteriormente, ou seja, $(1, 2)$, $(2, 4)$ e $(3, 3)$. Retome as equações das retas tangentes à curva f que passam por cada um desses pontos e escreva-as separadamente em um papel. $-2x+9$, $0+4$, $-4x+16$

c) Agora, na caixa “Entrada” digite derivada[- $x^2 + 4x$, 1], o que indica que será calculada a 1ª derivada da função $f(x) = -x^2 + 4x$ e registre o resultado encontrado (na parte algébrica): $-2x+4$

d) Agora, ainda na caixa Entrada, substitua o ponto $(1, 2)$ na derivada da função f e observe o resultado na parte algébrica. Qual é a resposta? _____

e) Agora, compare o resultado com a equação. O que pode ser observado?

f) Faça o mesmo agora com os pontos $(2, 4)$ e $(3, 3)$, e observe os resultados.

g) Quando temos um ponto $P(x, y)$ e uma curva f , podemos encontrar a inclinação da reta tangente a essa curva f no ponto P , por meio da derivada de f . Escreva como isso deve então ser feito.

Deriva-se f e substitui o valor do ponto x na derivada que dará a inclinação da reta

Figura 39: Resolução da questão 2 da Atividade 2, pelo aluno A.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno A só não respondeu às perguntas (2.d) e (2.e), mas conseguiu formalizar o que era pedido na questão (2.g), com a seguinte resposta (que será aqui transcrita para facilitar a leitura):

“Deriva-se f e substitui o valor do ponto x na derivada que dará a inclinação da reta.”

A segunda situação proposta trata do custo $C(x)$, definido por $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$. Foi pedido o custo médio e o instantâneo da produção de x unidades de certa mercadoria. Nesse momento, os alunos utilizaram os conhecimentos adquiridos nas primeiras questões. A Figura 40 apresenta a resolução de um aluno para essas questões:

a) Vamos encontrar a taxa média de variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando de $x = 100$ a $x = 105$? Para isso, entre em “Utilitários – Tabelar uma Função”, e em seguida, digite a função acima, x inicial = 100 e x final = 105, não preencha o número de pontos e faça $h = 1$. Clique em “Calcula”.

b) Observe a tabela que foi montada. O que podemos afirmar sobre o custo com relação ao valor de x ? *se aumenta o custo diminui*

c) Para obter a taxa média, subtraia as imagens correspondentes de 105 e 100, e divida o resultado por $105 - 100$. Qual é o resultado encontrado? Escreva como podemos interpretar esse valor. *30,25*

d) Agora, vamos encontrar a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$, ou seja, vamos encontrar o custo marginal? Para isso, calcule a derivada da função f e substitua $x = 100$. Qual é o custo marginal para 100 unidades dessa mercadoria? *20*

e) Calcule o custo marginal para outros valores, como $x = 1, 50, 110$ e 500 . Monte uma tabela com esses valores e seus resultados, para melhor comparação. O que pode ser afirmado então sobre o custo marginal para essas quantidades de mercadorias?

$C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$

$0,1x + 10 \Rightarrow 20$

x	Custo
1	10,1
50	15
100	20
110	21
500	60

Custo diminui a medida que a produção aumenta

Figura 40: Resolução das questões (4.a) a (4.e), do aluno A.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno A montou a tabela pedida na questão (4.e) e após analisar os resultados, concluiu que o “custo diminui a medida que a produção aumenta” (vide Figura 40). No momento em que a pesquisadora acompanhava as resoluções e viu essa resposta, questionou o aluno sobre a afirmação, pedindo que a justificasse. Ele respondeu em voz alta que:

“Se a gente dividir \$ 10,1 por 1 unidade, o resultado dá 10,1; \$ 20 por 100 dá 0,20 e se dividir \$ 60 por 500 unidades, o resultado é 0,12. Então, quanto maior a quantidade de unidades produzidas, menor é o custo de cada uma.”

O aluno deixou registradas as expressões $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ e $0,1x + 10 = 20$, de modo que é possível constatar que ele calculou a derivada de $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$ e substituiu o valor $x = 100$, encontrando \$ 20 como resultado. Neste caso, o aluno estava resolvendo a questão (4.d).

Na Atividade 3, duas situações foram propostas aos alunos – estudar a área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, cujo valor real é de aproximadamente $1,41 \text{ u}^2$, e a de um terreno que tem sua área definida pelas funções $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, e pelas retas $y = 0$ e $x = 3$. A primeira questão tem uma resolução bastante simples, apenas para que o aluno consiga compreender a ideia das Somas Inferiores e Superiores, e ainda comparar os resultados com aqueles obtidos com os métodos Regra dos Trapézios e Regras de Simpson; a segunda questão exige um raciocínio mais elaborado, na medida em que o aluno precisa perceber que para calcular a área da região é necessário dividir o intervalo em duas partes, sob cada função em particular.

As situações problemáticas que os alunos devem reconhecer dizem respeito a essas duas questões. A atividade consiste em uma série de perguntas cujas respostas levarão à construção do conceito de integral; as perguntas foram elaboradas de modo que haja bom entendimento sobre o uso dos recursos dos programas VCN e *Geogebra*, para que não acontecesse perda de tempo por falta de conhecimento com o programa.

Ambas as situações foram bem compreendidas pelos alunos, que interpretaram corretamente o que era pra fazer. Como a atividade era do tipo passo-a-passo, a maioria respondeu às perguntas de forma clara e analisando as respostas; aqueles que sentiram dificuldades no desenvolvimento da atividade chamavam pela professora quando necessário ou recorriam aos colegas em busca de auxílio, de modo que, ao final, todos conseguiram terminar as questões.

Com relação às primeiras questões (1.a-c), o software a ser usado é o *Geogebra* e eles deveriam fazer uma estimativa para o valor da área sob a curva $f(x) = \frac{\text{sen}(x+2)}{1+x^2}$, com $-2 \leq x \leq 1$, após quadricular a região e efetuar uma contagem simples dos quadradinhos ali demarcados; a maioria dos alunos estimou a área em 1,5 quadradinhos, como mostrado na Figura 41:

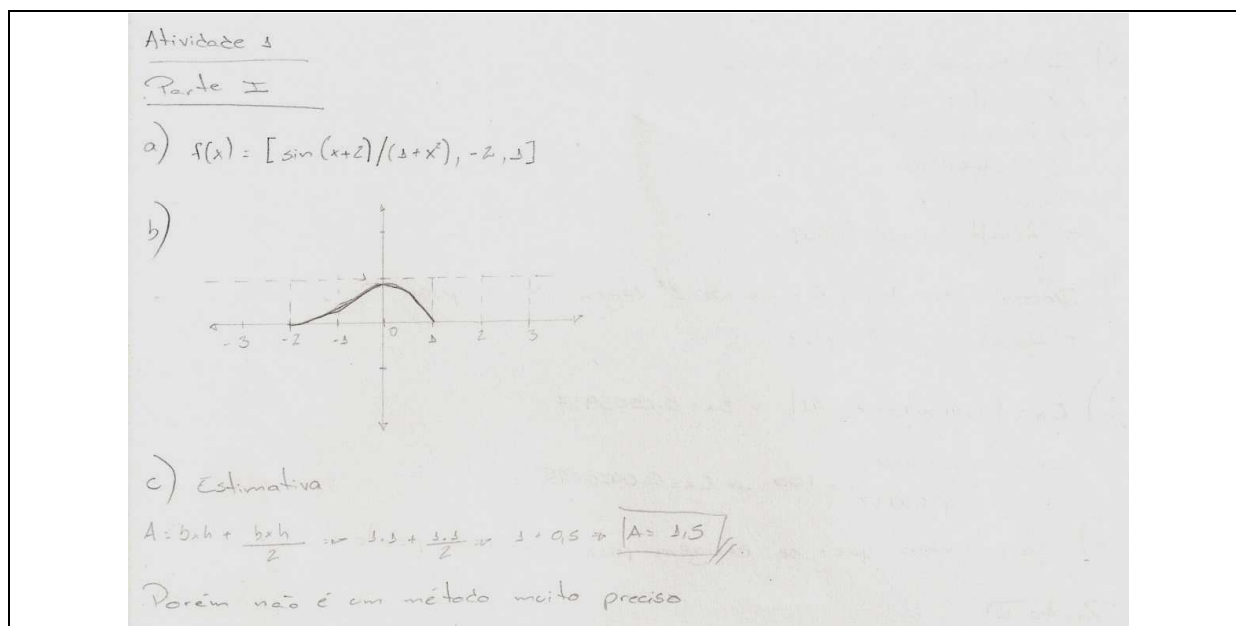


Figura 41: Resolução das primeiras questões da Atividade 3, do aluno H.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

As perguntas e as respectivas respostas que o aluno H registrou são transcritas para melhor acompanhamento:

1. b) Uma forma de obter a área da região é quadricular o terreno todo e verificar qual é a área aproximada. No *Geogebra*, é possível quadricular todo o plano cartesiano de forma bem simples: clique com o botão direito do *mouse* na janela de visualização e vá em “malha”.
1. c) Usando esse método, é possível estimar a área da região de acordo com um número aproximado de quadradinhos. Então, estime qual seria a área aproximada da região. O que é possível dizer sobre a *precisão* deste método?

Fonte: Atividade 3.

A questão (1.b) da Atividade 3 contém uma orientação sobre quanto aos comandos que serão usados, de modo que a questão (1.c) pediu que os alunos estimassem a área da região por meio da região quadriculada, através da quantidade aproximada de quadradinhos. O aluno H dividiu o intervalo em 3 (três) partes iguais e considerou que a curva determinava 1,5 quadrados, como pode ser observado:

Resposta do aluno H: (após um breve raciocínio expresso, finalizou com a resposta) $A = 1,5$. Porém não é um método muito preciso.

Para o cálculo da área, ainda no *Geogebra*, foi pedido que primeiramente utilizassem o comando Soma Inferior com diferentes valores de partições, e montassem uma tabela com esses valores. As respostas dos alunos foram iguais, conforme a Figura 42, em que também é mostrada a pergunta para facilitar a leitura:

1.e) Use quantidades diferentes de retângulos, para obter aproximações mais precisas da área. Registre alguns resultados obtidos, atentando-se para o limite do número de partições (o número máximo de partições).

1.f/g) Para qual valor a soma está *tendendo*?

Fonte: Atividade 3.

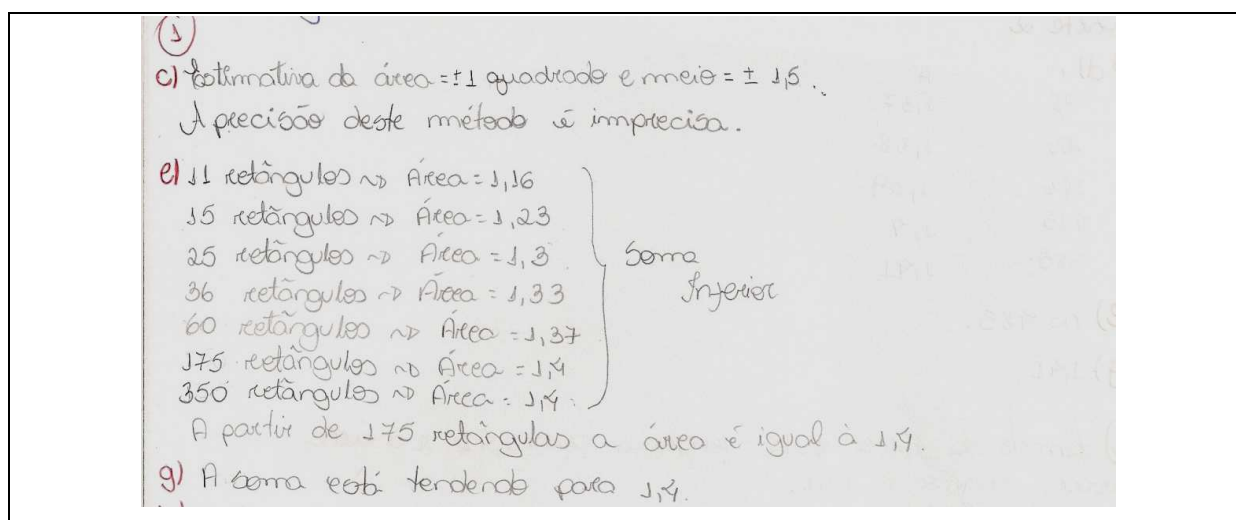


Figura 42: Resolução das questões (1.e) e (1.f/g) do aluno I.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Conforme a Figura 42, o aluno I fez várias tentativas para se chegar à conclusão que o limite da soma das áreas dos subintervalos (com diferentes partições) converge para 1,4.

Do mesmo modo, com relação à Soma Superior, utilizando as mesmas quantidades de retângulos da Soma Inferior, ainda o aluno I obteve os resultados, conforme a Figura 43:

h) Agora, use o comando “Soma Superior”, da mesma forma que foi feito com a “Soma Inferior”, com as mesmas quantidades de retângulos usadas anteriormente. Registre também esses resultados em uma tabela.

i) Compare os resultados obtidos com a ferramenta “Soma Superior” e “Soma Inferior”. Abaixo temos uma figura (*vide Apêndice 4*) que ilustra a situação que foi criada aqui! Observando a figura abaixo, o que ela sugere?

Fonte: Atividade 3.

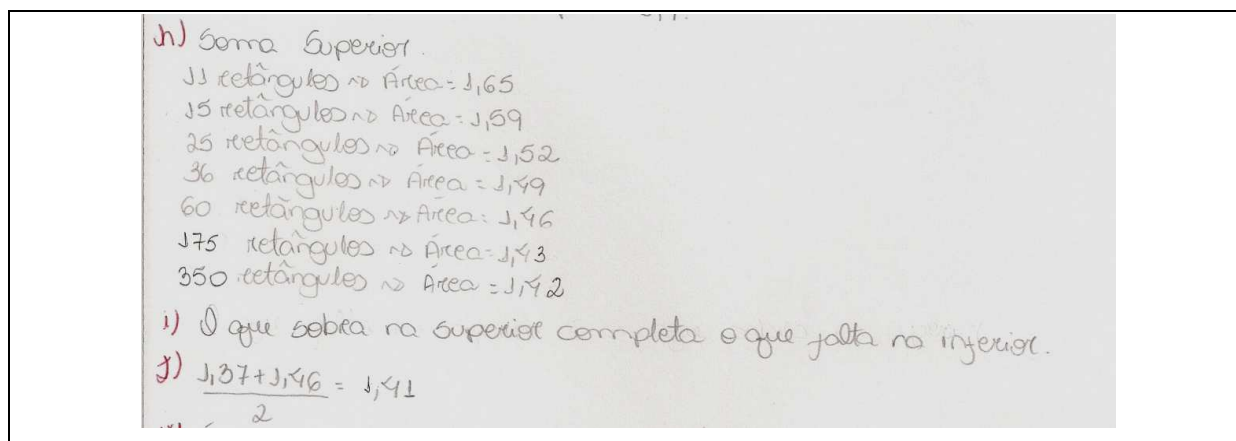


Figura 43: Resolução das questões (1.h) e (1.j) do aluno I.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

De acordo com a Figura 43, o aluno I conseguiu perceber que a área real é a média aritmética entre cada resultado da Soma Inferior e da Soma Superior, para mesmo número de partições (quantidades de retângulos). No que diz respeito à questão (1.i), em que lhe é perguntado o que a figura e a tabela dos resultados sugere, a sua resposta foi objetiva:

“O que sobra na superior completa o que falta na inferior”.

Os próximos exercícios da primeira questão dizem respeito ao cálculo da área por outros métodos, principalmente por meio do programa VCN. Os alunos deveriam calcular a mesma área anterior utilizando a Regra dos Trapézios e uma das Regras de Simpson, conforme a conveniência. Para cada regra, eles deveriam justificar o uso com passo utilizado, número de pontos, etc., comparando os resultados encontrados. A Figura 44 mostra a resolução do aluno J para as questões (1.k) e (1.l):

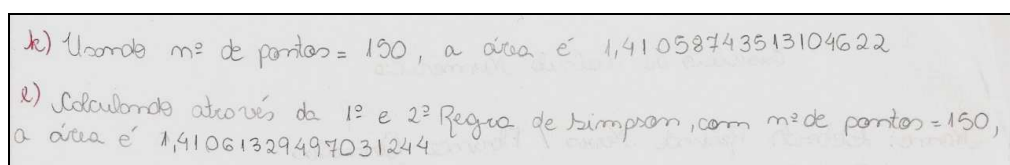


Figura 44: Resolução das questões (1.k) e (1.l) pelo aluno J.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

De acordo com o aluno J, o valor da área considerando 150 pontos pela Regra dos Trapézios é igual a 1,41058743513104622 e também com 150 pontos pela 1ª e 2ª Regras de Simpson (o aluno testou as duas regras e encontrou o mesmo resultado), o valor é 1,41061329497031244. Ao copiar os resultados com todas as casas decimais, o aluno J não

analisou o que estava fazendo, no sentido de usar o bom senso para arredondar ou truncar os números para 4 ou 5 casas decimais (era a sugestão da professora sempre que alguém questionava quanto a isso). Aproveitando esse resultado que alguns registraram (houve mais alunos que fizeram isso), a professora então passou para a fase da discussão dos valores encontrados, interpretando o significado de cada um, mas isso será mais comentado em outro momento.

Já outro aluno, que será chamado de K, explicou de forma mais detalhada o uso da Regra dos Trapézios, Primeira e Segunda Regra de Simpson. Outros alunos que também conseguiram se expressar claramente deixaram a pesquisadora eufórica, pois estavam comprovando o caminho que seguiam com sua linha de raciocínio. Ao escrever o pensamento empregado, o educando refina seu conhecimento, aperfeiçoando cada vez mais a sua técnica de aprendizagem. A Figura 45 apresenta a resposta dada pelo aluno K à mesma questão anteriormente explicitada:

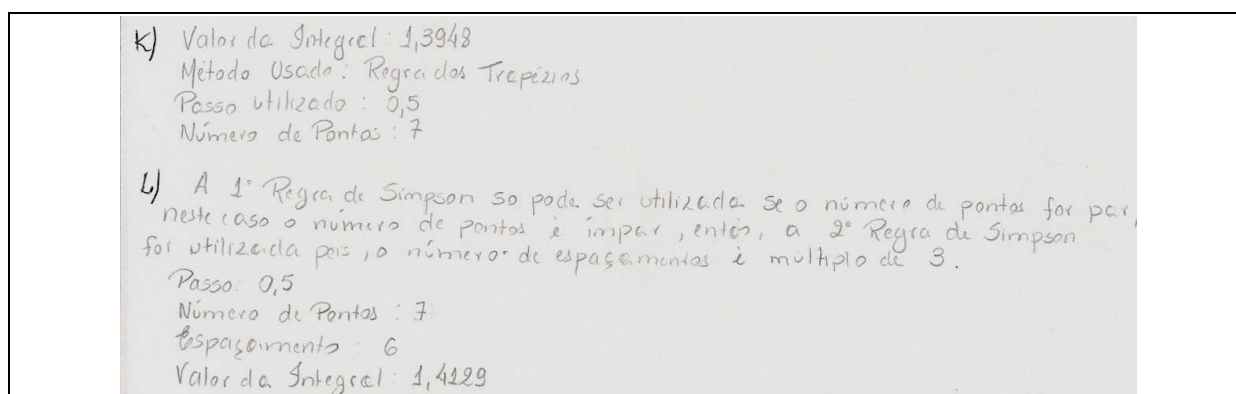


Figura 45: Resposta do aluno K à questão (1.k) e (1.l).

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Quanto à segunda questão, a sequência do raciocínio empregado era a mesma da primeira questão. Houve dúvidas somente no início da questão, quando era necessário dividir a região em duas considerando intervalos específicos; poucos alunos conseguiram analisar sozinhos e concluir que cada função era definida em um intervalo diferente, de modo que a área total seria a soma das duas áreas assim obtidas.

Para exemplificar essa observação, são apresentadas as perguntas e respectivas respostas (vide Figura 46) que o aluno L elaborou para as perguntas (2.d) e (2.e):

2. d) Agora, usando o comando “Soma Inferior”, obtenha a área de outra forma: com a construção de retângulos de base unitária e altura igual à imagem do ponto x_i pela função, no intervalo considerado. Então, digite `somainferior[ ]` na Caixa de Entrada e, dentro dos colchetes digite a função, o intervalo e o número de retângulos desejado, ou seja, `somainferior[função, origem do intervalo, extremo do intervalo, nº de retângulos]`. Fique atento quanto à lei da função e o intervalo a serem usados.

2. e) O que você fez para obter a área do terreno? O que foi necessário fazer para usar o comando acima?

Fonte: Atividade 3.

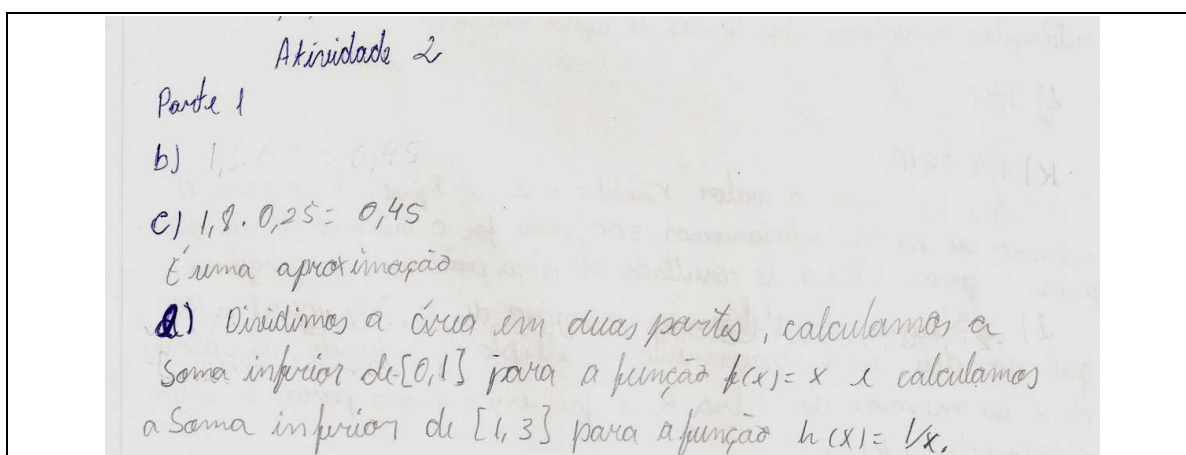


Figura 46: Resposta do aluno L para as questões (2.d-e).

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno K conseguiu se expressar de forma bastante clara, explicando com detalhes as decisões tomadas; ele conseguiu inclusive usar a linguagem matemática correta, ao afirmar que “dividimos a área em duas partes, calculando a soma inferior de $[0, 1]$ para a função $f(x) = x$ e calculamos a soma inferior de $[1, 3]$ para a função $h(x) = 1/x$ ”. Esse foi um dos alunos que conseguiu deduzir o que era necessário fazer; outros que também tiveram a ideia fizeram isso apenas verbalmente, não deixando o raciocínio registrado.

O raciocínio empregado para a Soma Inferior foi repetido para o cálculo da Soma Superior e para a obtenção da área total da região.

Sobre a Atividade 4, que trata da Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes, o proposto era encontrar as raízes das equações $-x^2 + 7x - 10.6875 = 0$, $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 1 = 0$ e $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \lg(x) = 0$, por meio dos comportamentos gráfico e numérico, e por meio do Método da Bissecção.

Diante, primeiramente, de uma equação do 2º grau ($-x^2 + 7x - 10.6875 = 0$), um intervalo para estudo foi sugerido. A partir do texto de apresentação e das aulas teóricas, os alunos adquiriram conhecimentos suficientes para seguirem os passos indicados, como perceber se há alguma raiz no intervalo dado, e caso houvesse, concluir qual é essa raiz. Depois foi pedido que o aluno modificasse o intervalo para outro determinado e procurasse a raiz ali existente. Com as outras equações dadas, foi solicitado o mesmo: que o aluno descobrisse a raiz usando o tabelamento da equação, o Método da Bissecção e a análise gráfica.

Os alunos diante da primeira questão conseguiram identificar rapidamente a raiz: o intervalo sugerido foi $[-4, 4]$ com passo $h = 1$, de modo que não há raiz aí definida, mas isso porque a raiz não era um número inteiro.

1. Seja a equação $-x^2 + 7x - 10.6875 = 0$. Buscaremos uma aproximação para as suas raízes por meio do tabelamento da função $y = -x^2 + 7x - 10.6875$, com precisão de 2 casas decimais; para isso, basta seguir as orientações abaixo:

Fonte: Atividade 4.

Ao mudar o passo para $h = 0,01$ no mesmo intervalo, a raiz pôde ser encontrada, como comprova o exemplo de resolução do aluno W, na Figura 47, da turma de Engenharia de Produção, mas antes serão mostradas as respectivas perguntas para facilitar a leitura:

1.a) Vá em “Utilitários – Tabelar uma Função”. Vamos começar com um intervalo qualquer, mas não muito grande, por exemplo, $[-4, 4]$. Insira a função acima, x inicial = - 4, x final = 4 e passo = 1, e clique em “Calcular”. Observe a tabela e verifique se há alguma imagem nula (zero). Se houver, qual é o valor correspondente de x ?

1.b) Agora, apague o número de pontos e mude o passo para 0.1. E agora há alguma raiz?

1.c) Vamos então encontrar a raiz que pertence a este intervalo? Para isso, observe as imagens na tabela; verifique quais são os valores consecutivos de x que cujo produto das imagens é negativo.

1.d) Monte uma nova tabela com esses valores de x , não se esquecendo de apagar o número de pontos e mudar o passo para 0.01.

1.e) Há algum valor de x cuja imagem é 0 (zero)? Essa é a raiz da equação, com uma precisão de 2 casas decimais!

Fonte: Atividade 4.

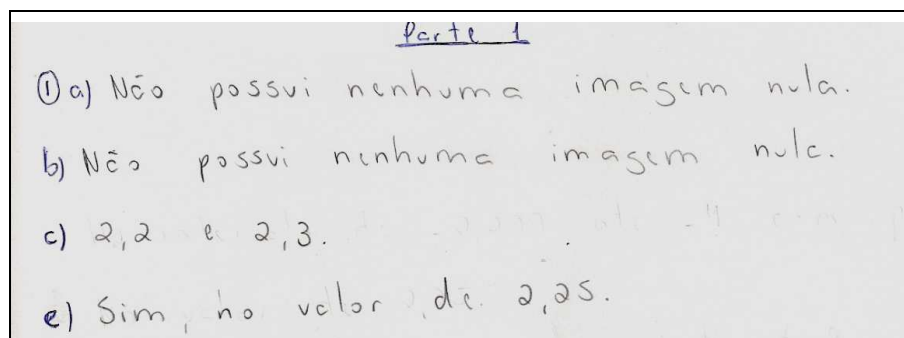


Figura 47: Resolução da questão (1.a – e) pelo aluno W.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno W afirmou que, com passo 1 ou 0,1 não existia nenhum valor de x com imagem nula, mas entre 2,2 e 2,3 havia uma raiz pois esses valores de x têm imagens com sinais contrários. Então, ao mudar o passo para 0,01, o valor de 2,25 tem imagem nula, sendo então a raiz da equação. Nas outras questões, os alunos exploraram a ideia, fazendo experiências com gráficos e tabelas, para concluir qual era o valor da raiz de cada equação também em intervalos diferentes. Graficamente, era possível constatar que havia mais raízes, mas numericamente somente se podia afirmar algo depois de verificar a validade do Teorema de Bolzano.

Outro aluno Y mostra a sua resolução para outras equações (vide Figura 48), com o uso do VCN e *Geogebra*, por exemplo, para a equação $\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2 - \operatorname{tg}(x) = 0$, com $\varepsilon \leq 10^{-4}$, mostrado logo após os enunciados das devidas perguntas:

- 3.a) Vamos começar com um intervalo qualquer, por exemplo, $[0, 1]$. Então, vá em “Utilitários – Tabelar uma Função”, e insira os dados necessários, com passo 0.1. Pode não haver nenhuma raiz neste intervalo! Por quê?
- 3.b) Agora, modifiquemos o intervalo para $[3, 4]$, também com passo 0.1. Aparece uma mensagem de erro! Por quê?
- 3.c) Há pelo menos uma raiz neste intervalo! Vamos encontrá-la? Siga os mesmos procedimentos anteriores para encontrá-la, usando a ferramenta “Tabelar uma Função”.
- 3.d) Para encontrar a raiz, considerando 4 casas decimais, anote todos os intervalos adotados.
- 3.e) Qual é a raiz da equação acima no intervalo $[3, 4]$?
- 3.f) Quantas iterações foram necessárias?

Fonte: Atividade 4.

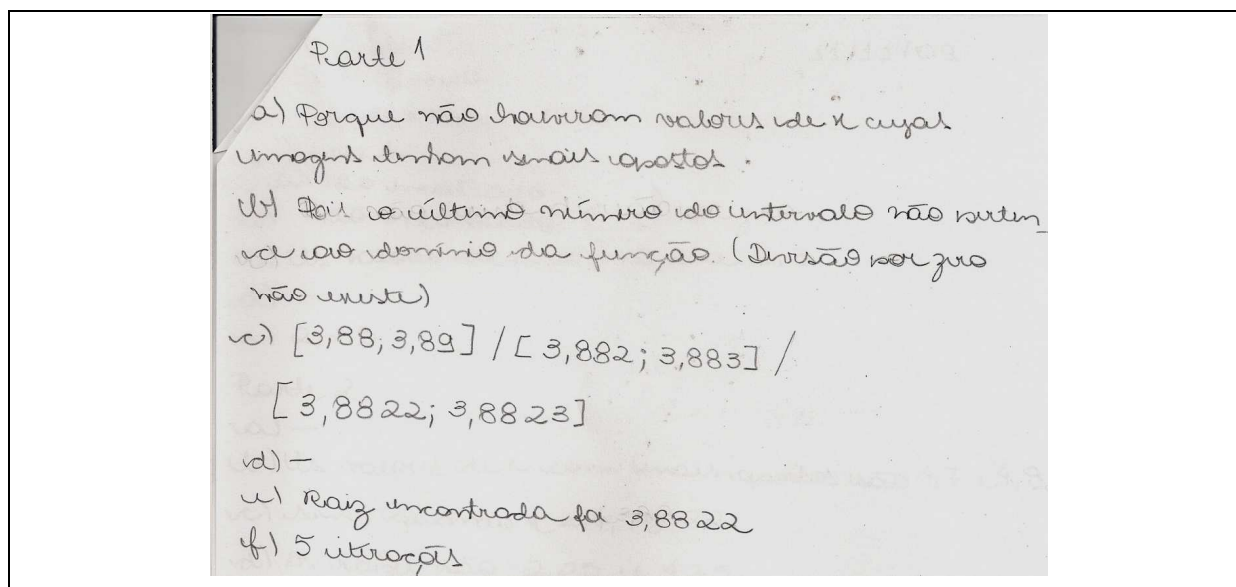


Figura 48: Resolução do aluno Y para as questões (3.a – f), da Atividade 4.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

A primeira questão afirma que pode não haver raiz no intervalo de 0 a 1, e pede que o aluno justifique essa afirmação. O aluno Y respondeu:

“Porque não ‘houveram’ valores de x cujas imagens tenham sinais opostos”.

No que diz respeito à raiz pertencente então ao novo intervalo sugerido $[3, 4]$, o aluno Y conseguiu encontrar como raiz o valor 3,8822 com 15 iterações.

5.3.2. Conjecturas

Quanto à Atividade 1, a segunda questão deve ser resolvida no software VCN e tem o objetivo de realizar verificações numéricas. São propostos vários intervalos, partindo de um maior (mais amplo) até chegar a subintervalos convenientes que estejam à direita e à esquerda do ponto $x = \frac{5}{2}$. Nesse momento, os alunos têm a oportunidade de organizar as informações e fazer afirmações sobre o fato estudado, comparando as tabelas montadas e respondendo às perguntas como: “Modifique o intervalo de x , usando agora valores entre 2,51 e 2,6, também com passo 0,01. E agora as imagens estão crescendo ou decrescendo? E estão *tendendo* agora para qual valor?”.

No momento de estabelecer conjecturas, serão verificadas as resoluções dos alunos para os comentários. Por exemplo, diante das questões (1.f) e (1.g), dois alunos (vide Figuras 34 e 35) deram respostas diferentes, mas que tendiam para o mesmo significado:

1.f) Pela representação gráfica, ao se aproximar do ponto de restrição vindo pela direita, o que ocorre com a curva?

Fonte: Atividade 1.

Resposta do aluno C: “*Ele cresce cada vez mais ascendente.*”

Resposta do aluno D: “*Vai para o infinito positivo.*”

1.g) Ainda com relação aos valores próximos ao ponto de restrição da função, mas agora vindo pela esquerda, o que ocorre com a curva? Fonte: questão (1.g) que consta no Apêndice 1.

Fonte: Atividade 1.

Resposta do aluno C: “*Ele cresce cada vez mais descendente.*”

Resposta do aluno D: “*Vai para o infinito negativo.*”

Diante de tais respostas, pode-se constatar que mesmo que uma ou outra palavra não tenha sido empregada da forma mais correta, as respostas têm o mesmo significado. No caso do aluno C, ao dizer “*cresce cada vez mais ascendente*”, analisando o significado de cada palavra, ele quis dizer que existe uma tendência em que os valores aumentam de forma crescente, ou seja, é o que o aluno D chamou de “*vai para o infinito positivo*”. O mesmo pode ser verificado com as respostas para a questão (1.g).

O diálogo é o mais importante ponto nesta atividade, pois é o momento em que os alunos têm a oportunidade de expor suas dúvidas e conclusões. A pesquisadora procurou deixar os alunos bastante à vontade para falar o que pensavam; para isso, muita diplomacia, respeito e atenção para com todos foram usados, elogiando quando obtinham sucesso e provocando com sugestões quando surgia algum erro. A comparação entre os diferentes pontos de vista e o estabelecimento de conclusões aconteceram também com o diálogo, envolvendo toda a turma, quando as questões trabalhadas foram novamente levantadas, dando destaque para os conceitos e termos descobertos. Como esta é uma atividade que foi aplicada na introdução ao estudo dos Limites, então foi necessária uma socialização ao final, com as

conclusões sobre as experiências e descobertas feitas, quando a professora protagonizou o fechamento da discussão, firmando a conclusão final.

Após as discussões que fecharam a introdução, com o registro dos principais conceitos construídos, outros exemplos de funções foram escritos no quadro em sala de aula, e resolvidos os limites propostos junto com a turma, usando a mesma linguagem proposta na atividade.

Sobre a Atividade 2, que trabalhou as Taxas de Variação e construção do conceito das Derivadas, o diálogo aconteceu do momento da aplicação até o fechamento do assunto. Durante a aplicação da atividade no laboratório de informática, houve grande interação entre a pesquisadora e os alunos. Os alunos se sentiram bastante à vontade para perguntar e expor suas conclusões. Alguns momentos foram muito interessantes, especialmente quando surgiam comentários de satisfação por parte dos alunos, por conseguirem entender o que era proposto. Durante as discussões no laboratório, os alunos se deparavam com opiniões diferentes das suas, e era necessário então, que analisassem melhor para se chegar a conclusão sobre qual era o ponto correto, com a devida intervenção da professora.

Após a aplicação das atividades, a professora fechou o conteúdo com as devidas conclusões a respeito do assunto, firmando os conceitos corretos e as definições, estabelecendo as generalizações. Ao resolver a **Parte 1** da atividade, o aluno já alcançou condições de organizar as informações e compreender a ideia expressa na **Parte 2 – Construção da ideia de derivada** – e generalizar o raciocínio na parte **Fixando a ideia acima**.

As conjecturas foram firmadas durante toda a resolução das questões, quando os alunos discutiram entre si e com a professora, confirmando os meios e fins de seus pensamentos. Eles se sentiram livres para experimentar bastante, usando a dinâmica do software *Geogebra* para verificar as várias posições possíveis para a mesma reta, observando as mudanças nas equações. E quanto à questão (4.a), por exemplo, foi interessante a experiência que alguns alunos realizaram com o VCN, como usar um passo não-inteiro no tabelamento da função, estudando o que ocorria.

Também na Atividade 3, houve muita interação entre os alunos e a pesquisadora, e pode-se considerar que isso foi fundamental para o desenvolvimento dos estudantes. Os alunos expunham suas dúvidas e comentários com a professora e com os colegas, e se sentiram muito à vontade nessa situação. Devido ao entrosamento já existente entre os alunos (cada um em sua turma), uma vez que já estudavam juntos há alguns períodos, houve um pouco mais de liberdade para o diálogo tanto na prática no laboratório como nas aulas teóricas. Alguns alunos da turma de Matemática fizeram comentários interessantes que

relacionavam o conteúdo que ali estavam estudando com os conteúdos do Ensino Fundamental e do Médio.

Após cada aula prática, a professora fazia, na aula teórica, uma revisão sobre o assunto, reescrevendo a teoria e mais exemplos. Nesse momento, os alunos então comparavam as conclusões que tiraram na aula prática com a explicação da professora e era, então, o momento de expor suas dúvidas e afirmações; os outros colegas intervinham ajudando a professora e isso ocorria de forma natural, como um diálogo sobre o assunto.

Por fim, a professora protagonizou o fechamento das discussões, destacando as definições, conceitos e condições de cada um dos métodos. Após as conclusões finais, os alunos em conjunto com a professora, estabeleceram as devidas generalizações definindo os limites necessários no entendimento.

Na Questão 1 – Parte 1 da Atividade 3, item (d), o aluno foi convidado a realizar experiências com os recursos “Soma Inferior” e “Soma Superior”, por meio de diferentes quantidades de retângulos (partições), e em seguida era pedido que comparasse os resultados. Nesse momento, o estudante organizou as informações em tabelas, para melhor estudar os resultados encontrados, e acabou concluindo qual era a “melhor” aproximação da área real. Essas experimentações são confirmadas nas questões (1.k) a (1.m), em que o uso de diferentes métodos de resolução permite que o raciocínio seja mais trabalhado.

Esse foi um importante momento da pesquisa, pois foi quando a professora-pesquisadora teve a oportunidade de dialogar com os alunos sobre os resultados encontrados. Alguns alunos leram suas respostas ou apenas emitiram suas opiniões, contestando, justificando ou concordando com as falas dos próprios colegas. Por exemplo, no que diz respeito à resposta do aluno J (vide Figura 44) para as questões (1.k) e (1.l), ao registrar os resultados com todas as casas decimais, a professora fez os seguintes questionamentos para a turma:

“Em que situações do mundo real nós precisaríamos de um resultado com muitas casas decimais? Faz sentido dizer que a área de um terreno mede $1,41058743513104622 u^2$, por exemplo?”

Com o cuidado de não provocar constrangimento no aluno que deu essa resposta no exercício, eles próprios tiveram liberdade para concluírem. Inclusive, houve até um comentário interessante de outro aluno que ajudou a finalizar o assunto:

“Não faz sentido! É a mesma coisa de falar que um terreno tem lado medindo $\sqrt{2}$ metros, por exemplo! Ninguém entenderia!”

A Atividade 4 foi a que gerou mais discussões, com muitos comentários positivos e também vários negativos, de modo que o diálogo foi muito importante também nessa atividade. Durante todo o tempo no laboratório, os alunos questionavam o comportamento numérico das equações, o critério de parada e a precisão escolhida. Nesses momentos, os alunos interagiram entre si e com a professora, comparando seus resultados e conclusões. Após as devidas discussões, a professora fechou o tema firmando as definições e conceitos, generalizando as questões em geral.

Muitos alunos gostaram da ideia depois que a compreenderam. Houve comentários positivos em todas as turmas como:

“Agora eu entendi o que é raiz.”

“Gostei de calcular a raiz com essa tabela. É tão simples! Mas é trabalhoso!”

Mas nem todos os alunos gostaram da atividade! Muitos a acharam cansativa e sem sentido. Uma aluna do grupo de voluntários comentou que:

“Eu entendi a ideia. Mas dá muito trabalho! Essa parte de ficar ‘mexendo’ no intervalo é chata!”

À medida que a resolução das questões e o diálogo aconteciam era notório que o aprendizado também ocorria. Por exemplo, através da análise dos tabelamentos das equações, os alunos constataram que o ‘fechamento’ do intervalo faria com que os dados convergissem para a raiz. Assim, era o momento de organizar os dados e de se fazer afirmações sobre o conteúdo.

A Figura 49 apresenta a resolução de um aluno para a Questão 2, quando as conjecturas foram firmadas. Os alunos experimentaram e organizaram as informações de modo que conseguiram estabelecer conclusões sobre o conteúdo.

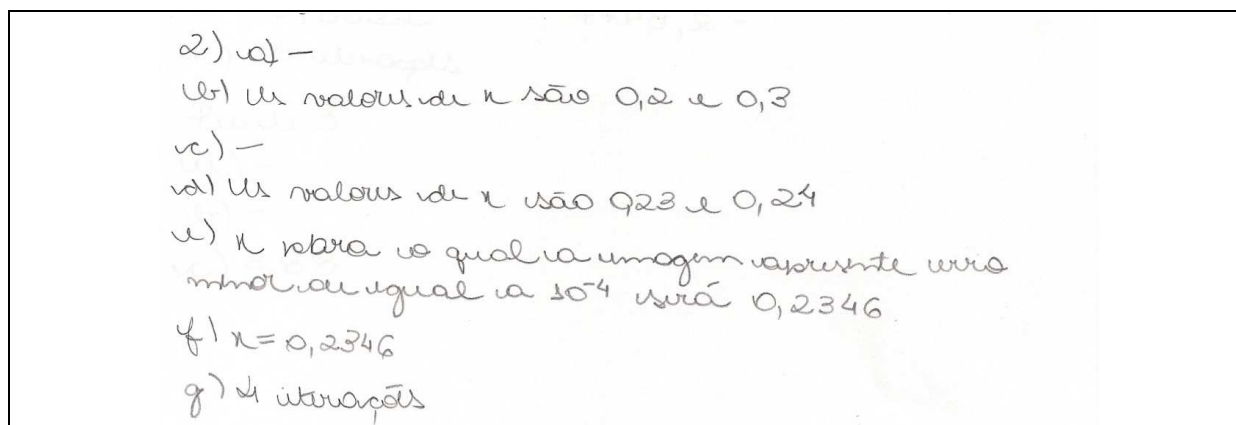


Figura 49: Respostas para a questão 2, do aluno G.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Neste caso, o aluno G utilizou os intervalos $[0,2; 0,3]$ e $[0,23; 0,24]$ para descobrir que a raiz é 0,2346. Na verdade, o aluno não registrou outro intervalo necessário, que é o de $[0,234; 0,235]$ como se pode comprovar pela resposta do aluno H mostrado na Figura 50:

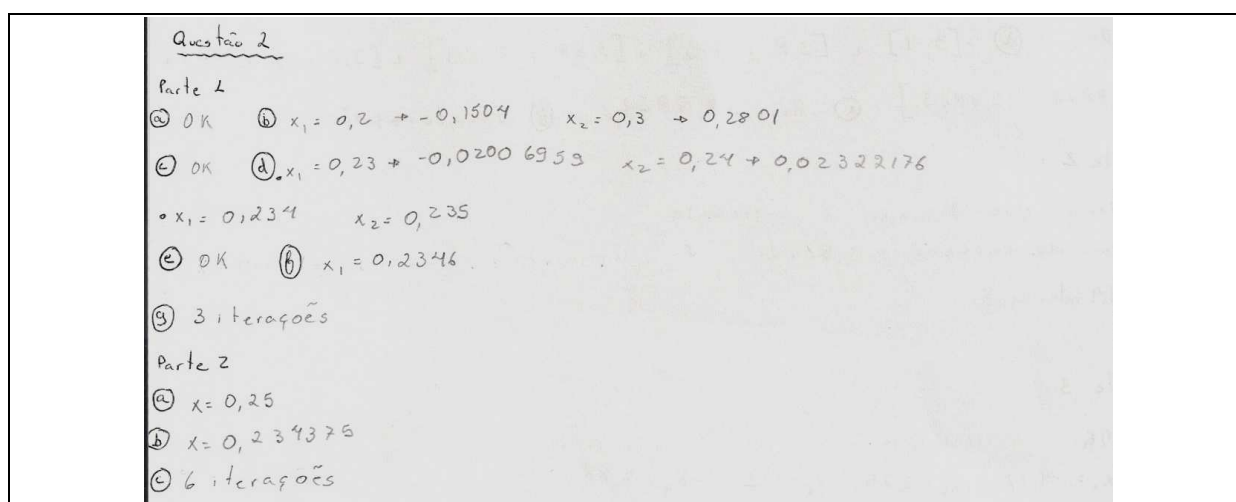


Figura 50: Respostas da Questão (2.d), do aluno H.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno H registrou também as imagens encontradas para cada valor de x , comprovando que o Teorema de Bolzano foi satisfeito. Desse modo, pôde buscar a raiz entre os respectivos valores de x ; concluiu por fim que a raiz da equação $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 1 = 0$ pertencente ao intervalo $[0, 1]$ é 0,2346, através do método do tabelamento da equação. Pelo método da Bissecção, o aluno encontrou o valor de 0,234375 com 6 iterações.

Para a última questão, os alunos encontraram exatamente o mesmo valor tanto pelo método do tabelamento como pelo da Bissecção, sendo que pelo tabelamento foram necessárias 5 iterações e pelo método da Bissecção, o VCN utilizou 14 iterações. Na Figura 51 consta um aluno que deixou registrados todos esses resultados:

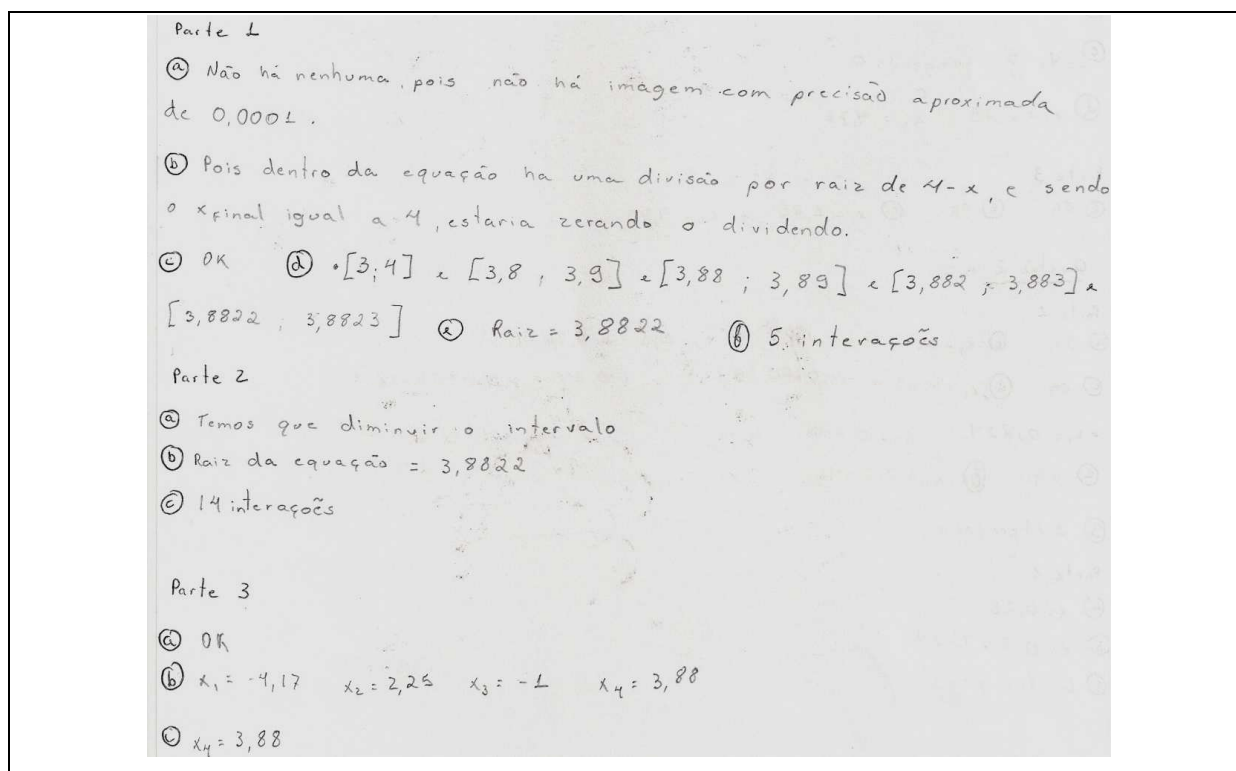


Figura 51: Resolução do aluno W para a Questão 3.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno W, como muitos outros, explorou a atividade o quanto pôde, resolvendo as questões com atenção e interesse. Outro aluno, N (vide Figura 52), utilizou uma linguagem diferenciada; ele relacionou corretamente as informações, e de forma organizada, fez até mais do que era pedido na questão. Por exemplo, para as questões (2.a – c), quando foram mencionadas as palavras “precisão” e “diferença”, ele apresentou o erro observado para cada passo h , dando a entender que era essa também uma preocupação sua.

2. ① a) b) $x = 0,2$ para $y = -0,1504$
 $x = 0,3$ para $y = 0,0301$
 c) $\begin{cases} x = 0,23 \text{ para } y = -0,02008 \\ x = 0,24 \text{ para } y = 0,02322 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = 0,234 \text{ para } y = -0,0027 \\ x = 0,235 \text{ para } y = 0,0015 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = 0,2346 \text{ para } y = -0,00034 \\ x = 0,2347 \text{ para } y = 0,00028 \end{cases}$
 d) $x \approx 0,23$
 f) 3) 4 interações
 ② a) $x = 0,25$
 $y_{\text{lim}} = 0,066$
 interações
 b) $x = 0,234395$
 $y_{\text{lim}} = 0,00111$
 6 interações

Figura 52: Resolução do aluno N, para a Questão 2, Atividade 4.
 Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

5.3.3. Testes e reformulação

Depois das conclusões e generalização, os alunos receberam listas de exercícios para fixação do conteúdo. Os alunos (considerando todas as atividades desse material didático) resolveram as listas de exercícios em casa, com a possibilidade de pesquisar em livros e nas anotações feitas em sala.

Com relação à Atividade 1, Estudo dos Limites, o prazo para a resolução das questões extraclasse foi de 5 dias (o tempo entre uma aula e a próxima: as aulas eram na quinta e sexta-feira). Após o prazo determinado, os alunos levaram para a sala as resoluções e a professora resolveu as questões no quadro, com a ajuda comentada dos alunos, de modo que estes puderam corrigir seus erros ou confirmar seus acertos.

Particularmente mencionando a terceira questão da Atividade 1, por exemplo, uma função diferente foi enfocada, cujo limite não tendia ao infinito como as duas primeiras, mas tinha como resultado um valor numérico. Porém, a análise não foi tão direta assim, pois exigiu que se fizesse a fatoração do numerador e a simplificação com o denominador, para que este limite fosse encontrado. Mas, para se chegar até esse momento, o aluno primeiro foi

convidado a construir o gráfico da função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$, no *Geogebra* e observar a curva obtida, que era uma reta, da qual foi extraído o ponto (2, 4) devido ao domínio da função; ao responder e analisar a questão, ele foi provocado a pensar que algum procedimento foi aplicado à função. Em seguida, então, foi dada uma orientação quanto à fatoração e simplificação da expressão.

(c) De acordo com o gráfico, qual é a imagem de $x = 2$? **Orientação:** Existe uma contradição entre o que você encontrou na questão (a) acima e o gráfico nesta questão! Esse é um problema que as ferramentas computacionais apresentam: não estudam a função!

Fonte: Atividade 1.

Para melhor observar as respostas de alguns alunos, são mostradas as resoluções dos alunos C (Figura 53) e E (Figura 54):

3) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
 a) $x \neq 2$
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
 c) ?
 d) $(x+2)(x-2)$
 $x^2 - 2x - 2x - 4 = 0$ OK $\Rightarrow \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$

Figura 53: Resolução da questão 3, Atividade 1, do aluno C.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

3-a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
 c) $Im = 4$
 d) $x+2$

Figura 54: Resolução da questão 3, Atividade 1, do aluno E.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Com base na Figura 53, o aluno C respondeu à questão (3.c) com uma interrogação, afirmando que não sabia a resposta ou não entendeu a questão. Já o aluno E respondeu que a imagem de $x = 2$ pela função é 4, estando correto.

Os testes que o estudante precisou fazer com a construção de vários intervalos à direita e à esquerda, até que tivesse um intervalo bem próximo de 2, permitiram que ele refinasse as afirmações que fez na questão anterior, só que agora estabelecendo as devidas diferenças entre uma situação e outra.

Sobre a Atividade 2, após a aplicação das atividades, a professora iniciou uma discussão em sala de aula fazendo uma revisão dos conceitos e definições, e solicitou que os alunos resolvessem listas de exercícios extraclasse para fixar o conteúdo estudado. Neste momento, os alunos puderam generalizar as ideias obtidas e praticar o que aprenderam, uma vez que, para fixar um conteúdo matemático, é necessário que muitos exercícios sejam resolvidos.

Através das listas de exercícios de fixação, os alunos confirmaram se realmente compreenderam o proposto. As listas de exercícios para resolução extraclasse foram corrigidas em sala de aula em um período que correspondeu a 4 (quatro) aulas ou 200 minutos totais, com a participação dos alunos. Durante a resolução feita pela professora, houve muito diálogo sobre cada resultado e vários alunos pediam mais exemplos, usando sempre a linguagem empregada na Atividade 2.

Especificamente na Questão 4 – Fixando a ideia acima, os alunos tiveram a oportunidade de realizar testes e confirmaram as conjecturas construídas anteriormente. A Questão 5 foi uma aplicação de Taxas de Variação e de Derivadas, e permitiu que o aluno aplicasse os conhecimentos adquiridos nas questões anteriores.

Sobre a Atividade 3, com a Questão 2, o aluno foi colocado diante de uma situação particular – o cálculo da área de um terreno que, graficamente, foi definido por duas funções em um único intervalo; para que se encontrasse a área, o aluno precisou primeiramente perceber que a área tinha que ser dividida separando as funções em cada intervalo conveniente. Então, como os recursos utilizados são os mesmos da Questão 1, o aluno teve a possibilidade de testar os conhecimentos obtidos anteriormente, e confirmaram as afirmações que realizou para si mesmo diante das questões. Caso percebesse que algum raciocínio sobre o conteúdo não ficou muito claro diante da primeira questão, pôde corrigir esse raciocínio através das discussões em sala de aula e dos exercícios de fixação extraclasse.

É importante destacar que, como a Atividade foi aplicada com os alunos em duplas, todos puderam interagir uns com os outros, retificando ou confirmando uma linha de raciocínio. Após o devido diálogo firmado, os alunos então resolveram listas de exercícios extraclasse, com pesquisa em livros didáticos, e puderam então fixar e assimilar o conteúdo.

Tais exercícios foram corrigidos em sala de aula (nas aulas teóricas) pela professora, mas com a participação oral dos alunos, em um tempo total de 300 minutos (6 aulas).

A Atividade 4 permitiu através das Questões 2 e 3, que os alunos confirmassem as ideias adquiridas na primeira. Com a confirmação das ideias, foi possível então refinar os conceitos e definições que eles se explicaram. Após isso, com as atividades de fixação extraclasse, os alunos confirmaram se realmente conseguiam colocar no papel o que lhes foi explicado oralmente e por meio da atividade investigativa.

As listas de exercícios para a fixação do conteúdo foram passadas para os alunos após o momento da socialização. Os exercícios foram corrigidos em sala, com a ajuda oral dos alunos (eles até foram convidados a irem ao quadro, mas por timidez ninguém aceitou). O tempo total que a professora precisou para corrigir as questões sobre o assunto foi aproximadamente 200 minutos, ou 4 aulas.

5.3.4. Justificação e avaliação

Com a Atividade 1, ao chegar até as últimas questões (itens (l) até (s)), o aluno se deparou então com a formalização dos conceitos adquiridos anteriormente. Neste caso, ele deveria compreender, explicar os significados dos termos e obter a necessária linguagem matemática para a solidificação do aprendizado. Através da socialização ao final e das atividades de fixação extraclasse, ele se auto-avaliou, concluindo se conseguiu realmente compreender o conteúdo estudado ou se as informações adquiridas foram apenas superficiais.

No que diz respeito à interpretação das informações obtidas, houve sucesso com esse objetivo. Os alunos não só entenderam o conceito de Limite como também se sentiram à vontade para usar esse significado, como é possível constatar com a Figura 55:

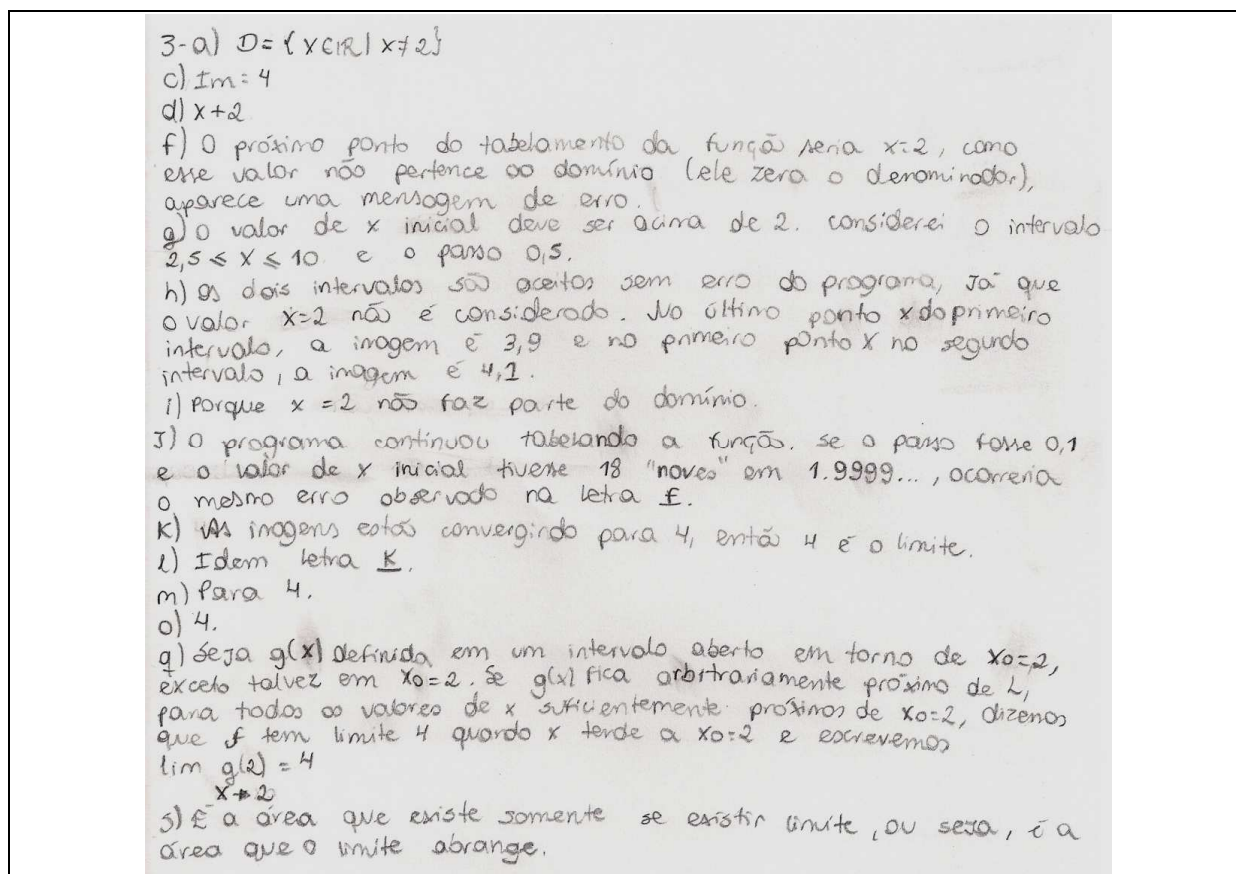


Figura 55: Resolução das últimas questões da Atividade 1, do aluno E.
 Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Diante da questão (3.q), em que os alunos reescreveram o significado de limite, a resposta do aluno E foi muito bem escrita:

“Seja $g(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de $x_0 = 2$, exceto talvez em $x_0 = 2$. Se $g(x)$ fica arbitrariamente próximo de 4, para todos os valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 2$, dizemos que f tem limite 4 quando x tende a $x_0 = 2$ e escrevemos $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$.”

Uma vez que esta foi uma atividade investigativa confeccionada com base também na Engenharia Didática, então a estrutura organizacional foi a de um projeto estrutural arquitetônico, em que quatro principais etapas deveriam ser bem demarcadas: o planejamento, a execução, a avaliação e a correção. Neste sentido, a atividade investigativa sobre Limites exigiu da professora muitos momentos de reflexão teórica, no momento do seu planejamento, para que não houvesse perdas por caminhos desnecessários, pois é um momento único de construção mútua: professor-“eu”, professor-aluno, aluno-“eu” e aluno-aluno.

No momento em que uma atividade como esta é aplicada, o professor assume o caráter de “professor pesquisador”, como bem colocou Carneiro (2008), com a oportunidade de estreitar seus laços docentes com o aprendizado do discente, no momento em que pode observar mais atentamente o raciocínio que este emprega ao resolver uma questão. Foi possível perceber inclusive que, diante do computador, o aluno se mostrou muito mais empolgado e interessado no que estava sendo proposto, demonstrando uma curiosidade afinada em cada situação.

Reconstruir conceitos e definições a partir de uma nova visão experimental fez com que a pesquisadora adquirisse uma nova postura e o pensamento de que o uso de ferramentas computacionais é uma boa metodologia para trabalhar este conteúdo, pois o entusiasmo que o aluno demonstrou a cada descoberta era como um novo caminho aberto e a confiança de que esse era o caminho certo.

Ao falar em entusiasmo do aluno, empolgação, isso pode ser confirmado com comentários feitos pelos próprios alunos, como:

“Mas isso é muito legal! A função vai mesmo ‘pro’ infinito, né?!”

“Aprender Matemática assim é bem mais interessante!”

“Esta é a terceira vez que faço essa disciplina e só agora fui entender esse ‘negócio’ dos Limites Laterais!”

“Num curso de Sistemas de Informação, tomara que todas as disciplinas sejam trabalhadas desse modo.”

Após a correção dos exercícios de fixação extraclasse, foi aplicada uma atividade avaliativa para comprovar se houve o aprendizado do conteúdo. A avaliação foi individual e teve a duração de um horário de 100 minutos. A professora corrigiu as avaliações em casa e apresentou o resultado aos alunos, fazendo a correção da prova no quadro. Os alunos puderam, então, tirar dúvidas e conclusões a respeito de alguma coisa que não tenham percebido antes. Por fim, aconteceu uma conversa informal sobre a Investigação Matemática, quando os alunos puderam expor suas opiniões a respeito: esta nova atividade foi interessante para o aprendizado ou não? Até que ponto ela contribuiu para a construção dos conceitos e formalização do tema?

O sucesso com o aprendizado não foi obtido com todos os alunos, uma vez que as notas da avaliação aplicada sobre o assunto não foram todas excelentes ou razoáveis, mas é possível constatar que muitos alunos aprenderam o conteúdo a partir dessa proposta, e essa

informação será ratificada no momento em que serão mostradas aqui algumas das provas feitas. Como esta pesquisadora também era a professora da turma, então foi possível coletar informações a partir de conversas e observações no dia-a-dia da sala de aula; durante a aplicação da prova houve um comentário interessante:

“Professora, se minha nota nessa prova for boa, pode ter certeza que foi por causa da atividade no laboratório, porque estou conseguindo visualizar direitinho a tabela do VCN para essas funções aqui da última questão.”

De fato, o aluno que fez esse comentário durante a prova acertou 100% das questões e, especificamente sobre essa questão mencionada, a resolução feita por ele é mostrada na Figura 56:

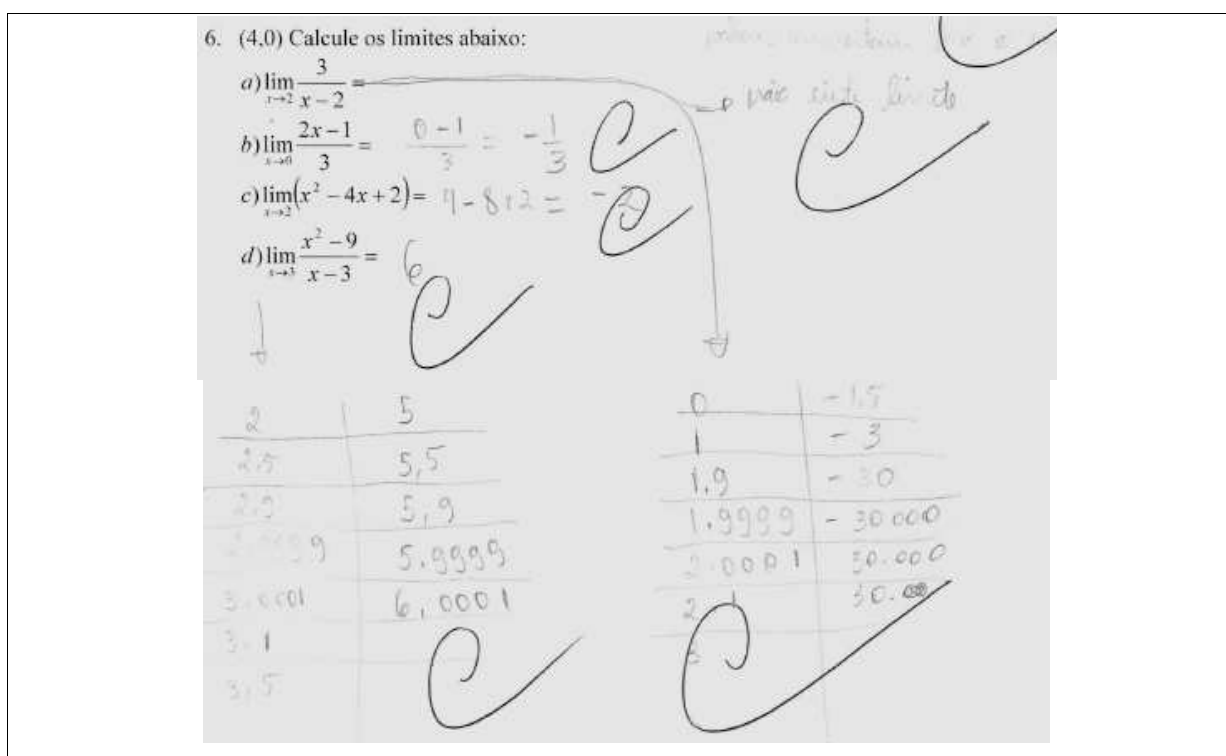


Figura 56: Questão 6 da prova do aluno C – 1º período de Sistemas de Informação.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Ao elaborar a prova, houve o cuidado de usar a mesma linguagem proposta na Atividade 1 (a linguagem matemática formal para Limites) e, em geral, não houve dúvidas quanto à interpretação dos enunciados. O mesmo aluno citado na Figura 56 alegou ainda que em todas as questões da prova ele conseguiu interpretar a partir das experiências vivenciadas

no laboratório de informática, tanto é que resolveu quase todas utilizando tabelas ou análise de gráficos, como é possível observar a resolução da Questão 5 da mesma prova, Figura 57:

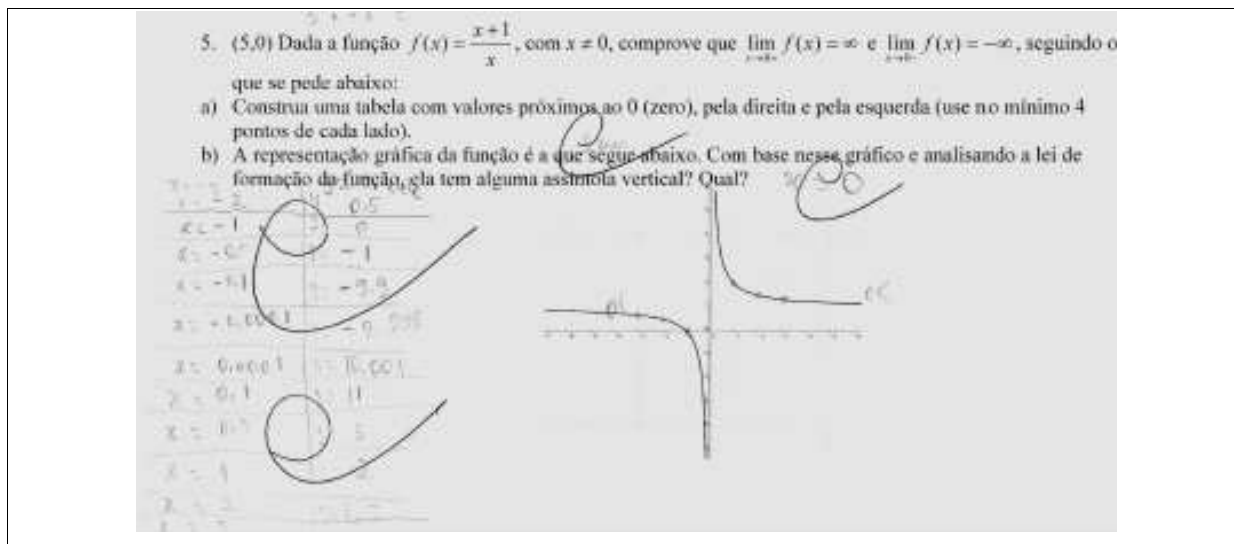


Figura 57: Questão 5 da prova do aluno C – 1º período de Sistemas de Informação.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Durante a aplicação da atividade para a turma, vários alunos participaram de forma bastante interessante, contribuindo com sugestões e levantando questionamentos que foram muito proveitosos para a confecção final deste trabalho. Diante de vários comentários sobre os enunciados das questões, a pesquisadora sentiu necessidade de corrigir o texto, excluir alguma pergunta repetida ou sem sentido, incluir perguntas importantes, melhorar a ideia de alguma outra questão, melhorar a apresentação de alguma figura, etc. Essas foram algumas das modificações feitas na atividade original até chegar a que hoje é apresentada.

Com a Atividade 2, também após o momento dos exercícios de fixação, a professora aplicou uma avaliação escrita para os alunos, quando estes puderam expor o que compreenderam sobre o assunto. Os resultados obtidos indicaram que houve entendimento do que foi proposto por uma parte dos alunos, de modo que para aqueles que não compreenderam a ideia, a pesquisadora sentiu necessidade de intervir com comentários diante das atividades no computador e com exemplos feitos no quadro. No momento de entregar as avaliações, a pesquisadora fez a divulgação do resultado, quando houve também a discussão sobre a Atividade 2, levantando questões como: se os objetivos foram cumpridos, se houve realmente contribuição para o aprendizado.

Com a Questão 4 (que tratou do custo para a produção de certa quantidade de mercadorias) da Atividade 2, já era possível que o aluno se autoavaliasse, uma vez que foi pedido que se calculasse o custo marginal e o custo médio, e ele deveria interpretar a situação.

Durante a aplicação desta atividade, os alunos conseguiram alcançar os objetivos inicialmente propostos. Além disso, outros resultados foram obtidos, como uma melhor compreensão de conceitos da Geometria Analítica e reforçaram a ideia sobre Limites que foi apresentada na Atividade 1.

O momento que mais chamou a atenção dos alunos, em que eles se expressaram com mais empolgação, foi diante da possibilidade de modificar a reta tangente com o *mouse* e ainda observar as alterações que surgiram na parte algébrica decorrentes das mudanças na reta. Para melhor compreensão do leitor, as questões que levaram a esse raciocínio foram:

- g) Clique na ferramenta “mover” e, em seguida, no ponto. Mova o ponto pela função e observe as mudanças na equação. Fixe a reta em outro ponto qualquer que esteja à direita do vértice, por exemplo, (3, 3) e escreva a equação resultante.
 - h) Quais são o coeficiente angular e o linear da equação dessa nova reta? Ela é crescente ou decrescente?
 - i) Agora, encontre uma equação da reta tangente à parábola de $f(x) = -x^2 + 4x$ no ponto (2, 4). Qual é a equação dessa reta tangente? Justifique a razão de não podermos afirmar que ela é crescente ou decrescente.
 - j) Vamos então formalizar essa ideia: qual a relação entre o coeficiente angular da equação e a posição da reta tangente no plano cartesiano?
- Obs.: Se você tiver alguma dúvida se a reta é mesmo tangente à curva, então você pode “ampliar” ou “reduzir” muitas vezes próximo ao ponto para constatar que a reta apenas “toca” a curva nesse ponto.

Fonte: Atividade 2.

Alguns comentários que os alunos fizeram enquanto resolviam essas questões mostraram o quanto gostaram da experiência:

“Que legal!”

“Mas isso é muito bacana... dá pra enxergar direitinho!”

Neste momento, a pesquisadora fez uma brincadeira com os alunos, dizendo: “Cuidado, hein! Isso não é pra brincar, não!” Mas havia a confiança na seriedade com que os alunos tratavam o momento, uma vez que todos os participantes demonstravam muito interesse nas atividades propostas.

Com a Atividade 3, também depois que os alunos fizeram os exercícios de fixação, eles foram submetidos a uma avaliação escrita, quando puderam expor seu pensamento sobre o conteúdo. Os resultados não foram excelentes, e muitos alunos que julgavam ter aprendido o conteúdo, perceberam diante da prova que essa compreensão não estava devidamente solidificada. Mas vários outros alunos se saíram bem, deixando inclusive resoluções que indicavam o raciocínio obtido na aula prática. Os resultados das avaliações foram divulgados pela professora para os alunos e houve uma discussão geral a respeito de motivos que tenham levado a tais notas. Uma possibilidade de recuperação do conteúdo foi dada aos alunos, na medida em que a professora tirou as dúvidas que ainda restaram e resolveu mais questões como fixação.

A prova que os alunos fizeram aconteceu no Laboratório de Informática, da mesma forma que a Atividade 2. A Figura 58 mostra um exemplo de uma das provas em que um aluno obteve bom resultado:

1. (3,0) A função $y = x^2$, $0 \leq x \leq 3$, está representada graficamente abaixo. A área sob a curva está destacada; faça o que se pede abaixo:

a) Qual é o valor da área por meio da Regra dos Trapézios no VCN? 9,125

b) Calcule o valor da área usando a Soma de Riemann no Geogebra. Qual é o valor? 9,000

c) Qual é o erro relativo que ocorre entre os dois valores de áreas obtidos acima? Considere o valor encontrado na questão (b) como valor real, e lembre-se de que o erro relativo deve ser expresso em %.

Resposta: $E_a = |9,000 - 9,125| = 0,125$ $E_r = \frac{0,125}{9} \cdot 100 = 1,39\%$

d) Qual dos métodos acima você acha mais interessante? Justifique sua resposta.

O método da soma de Riemann, pois ele nos fornece uma melhor aproximação da área.

Figura 58: Questão 1 da prova do aluno F – cursos de Engenharia de Produção e de Matemática Licenciatura. Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Outro aluno, que será chamado de G, deu uma resposta mais elaborada para a questão (1.b), não apresentando apenas o resultado encontrado. A Figura 59 apresenta a resposta do aluno G:

b. PARA ENCONTRAR A ÁREA REAL USAMOS A MÉDIA DAS DUAS ÁREAS ENCONTRADAS.

$\frac{9,92 + 8,08}{2} = 9,02$

c) $E_a = 1902 - 91 = 0,02$

$E_r = \frac{0,02}{9,02} = 0,22\%$

Figura 59: Resposta do aluno G para a questão (1.b) – enunciado: vide Figura 47. Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Mesmo não tendo pedido justificativa na questão (1.b), alguns alunos se sentiram à vontade para fazê-lo, demonstrando confiança com isso. A Figura 49 mostra outro exemplo que comprova essa afirmação:

b) Como no GeoGebra e primeiramente entramos com a função. DEPOIS ENTRAMOS COM SOMA INFERIOR DIGITAMOS A FUNÇÃO, INTERVALO E NUMERO DE PASSAGENS = 500. ENCONTRAMOS O VALOR 8,97. Em seguida fizemos o mesmo procedimento usando SOMA SUPERIOR E ENCONTRAMOS O VALOR DE 9,03. PARA CHEGARMOS NO RESULTADO FINAL fizemos a média entre os dois valores que deu $A = 9,00$.

c) $E_a = |x - \bar{x}|$
 $E_a = |9,5 - 9| = 0,5$

$E_r = \frac{0,5}{9} \times 100\%$
 $E_r = 5,55\%$

Figura 60: Resposta do aluno H para a questão (1.b).

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Analisando tais respostas, verifica-se que os resultados encontrados são aproximados, pois os alunos tiveram liberdade de utilizar o passo h que quisessem, dentro do intervalo pedido. Como a questão (1.a) pediu que a área sob a curva fosse calculada utilizando a Regra dos Trapézios, em que o passo h também foi de escolha do aluno, então os resultados encontrados foram diferentes. Esses diferentes resultados encontrados nas questões (1.a) e (1.b) provocaram erros absoluto e relativo diferentes na questão (1.c); no momento em que a professora entregou as provas corrigidas, houve uma boa discussão a cerca desses resultados, quando os alunos quiseram citar suas respostas e a forma como resolveram. Todos os alunos que fizeram a prova tiveram resultados muito bons, próximos a 100%, sendo que a nota mínima foi 70%.

Durante a resolução das questões da Atividade 3 no laboratório de informática, os alunos não encontraram dificuldades na primeira parte. Porém, um aluno em um total de 20 do curso de Matemática e 5 em um total de 43 do curso de Engenharia de Produção conseguiram entender rapidamente o que era proposto na Questão 2. A maioria não teve a ideia de dividir a região em duas partes: cada uma definida em um intervalo e pela função conveniente. Como esse era o raciocínio inicial para que se resolvesse o restante da questão,

então até que descobriram o que deveria ser feito, ninguém conseguiu sair da questão (2.d); mas depois que os primeiros descobriram e comentaram em voz alta, o restante ouviu e comentou: “Ah, é isso?”. Houve até alguns alunos que disseram que “*jamais teriam essa ideia*”. Um exemplo de resolução desta questão por outro aluno é ilustrado pela Figura 61:

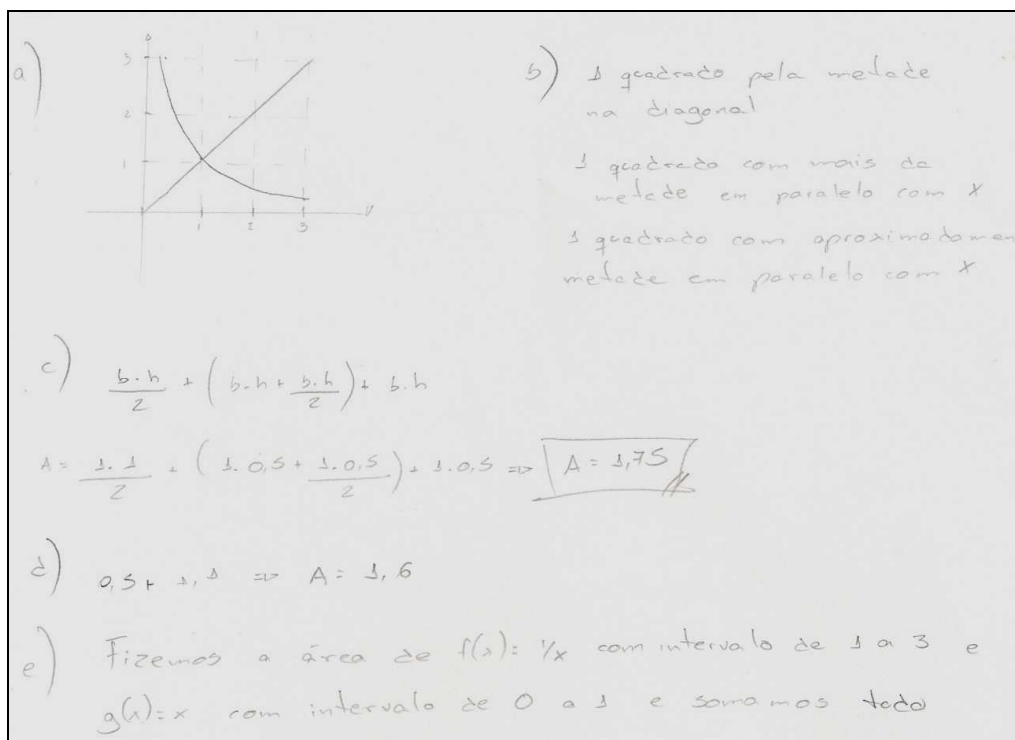


Figura 61: Questão 2 – Atividade 3, do aluno G, curso de Engenharia de Produção.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Em geral, a aplicação da atividade foi satisfatória, uma vez que a grande maioria conseguiu entender o conteúdo e a ideia proposta. Na turma de Engenharia de Produção, vários alunos disseram que não haviam estudado Integração ainda, pois só haviam feito a disciplina Cálculo I e estavam cursando Cálculo II (quando esse conteúdo é iniciado). Neste caso, foi explicado aos alunos que seria até melhor assim, pois eles teriam a oportunidade de visualizar numérica e graficamente o que acontece com uma Integral, e depois aprenderiam da forma algébrica na devida disciplina. Durante o momento das discussões em sala (na aula teórica), os alunos foram interrogados se acharam a proposta cansativa, interessante, etc.; os comentários foram bastante positivos, como:

“Eu não achei cansativa, porque prendeu minha atenção o tempo todo”.

“Eu gostei! Acho até que todas as disciplinas deveriam ser ensinadas assim”.

Mas nem todos os comentários foram positivos assim. Na verdade, muitos alunos têm grande dificuldade com leitura e interpretação de textos e como a atividade exigiu muita leitura, vários alunos não entendiam os enunciados muitas vezes por nem terem lido, querendo antecipar ou mesmo adivinhar o que era pra fazer. Isso pode ser comprovado através do comentário de alguns alunos:

“Eu achei um pouco cansativa, porque era muita coisa pra ler”

Mencionando a interpretação, alguns alunos, inclusive, não entenderam realmente o objetivo das aulas teóricas e práticas, pois disseram que não entendiam o porquê de terem aulas teóricas, em que eram avaliados com relação ao aprendizado teórico do tema, alegando que só as aulas práticas eram suficientes. Uma aluna fez o seguinte comentário:

“Se tem o computador que faz tudo, por que temos que fazer conta? Basta saber como que os cálculos acontecem e entender a resolução, sem precisar de aulas teóricas”.

Com esse comentário, houve a necessidade de esclarecer tais dúvidas. Para isso, o projeto do curso e o plano de ensino da disciplina foram importantes, pois os objetivos foram novamente mostrados para os alunos (isso já havia sido feito no início do semestre letivo).

Os alunos do curso de Matemática estabeleceram relações entre essas atividades e os conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio; ao conhecerem os recursos gráficos do *Geogebra*, em que puderam visualizar a aplicação das Somas Inferiores e das Somas Superiores, surgiram comentários do tipo:

“Mas isso é muito legal!”

“A gente tinha que ter aprendido Cálculo assim!”

“Acredito que todos os professores deveriam apresentar a ideia de Integral dessa forma.”

“Aprender Matemática assim é bem mais interessante.”

“Acabei de ter uma ideia bacana pra trabalhar no Ensino Médio.”

Com relação especificamente ao último comentário, esse aluno optou por desenvolver seu trabalho de fim de curso (TCC) com uma atividade inspirada neste material didático. Inclusive, a pesquisadora foi convidada por ele para ser sua orientadora da monografia, pois

ele queria desenvolver uma atividade investigativa sobre Teoria de Funções. Após o seu comentário, surgiram outros dois alunos com o mesmo convite: um optou por falar sobre o ensino de Cônicas com o uso de ferramentas computacionais (preferiu o *Winplot*) e o outro solicitou que esta pesquisadora sugerisse alguns temas, para que então definisse sua escolha. Após várias sugestões, o último aluno escolheu trabalhar com Limites de Funções, fazendo um estudo histórico e gráfico.

Em geral, a atividade alcançou os objetivos propostos, além de outros que não foram antecipadamente previstos, como confirma o parágrafo anterior. Na prova escrita, o aluno foi questionado em uma questão quanto ao método numérico de resolução de integrais que mais lhe agradou. A maioria optou pelo uso das Somas de Riemann no *Geogebra*, justificando a resposta, mas houve também quem preferiu a Regra dos Trapézios ou Regras de Simpson no VCN, como mostram as Figuras 62 e 63:

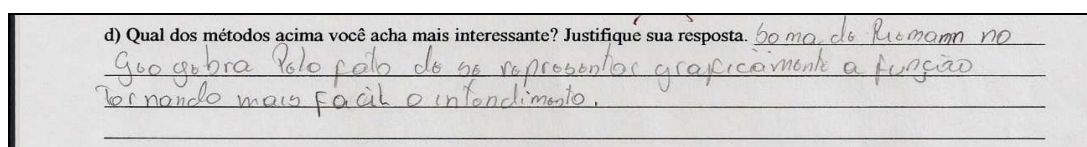


Figura 62: Resposta para a questão (1.d) na prova escrita, do aluno X.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

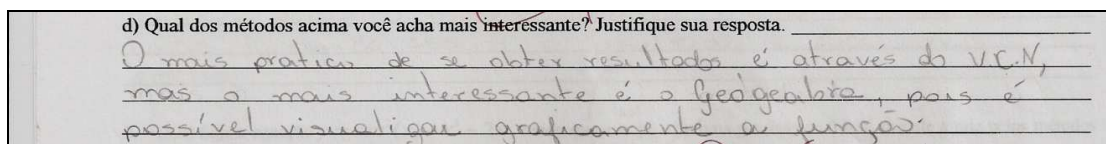


Figura 63: Resposta para a questão (1.d) na prova escrita, do aluno Z.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

O aluno Z achou o método proposto com o VCN mais prático – era só entrar com os valores nos campos certos que o programa calculava tudo, dando não só a resposta final como a resolução também – mas achou o *Geogebra* mais interessante, diante da possibilidade de visualização gráfica. Inclusive, essa opinião coincidiu com a do estudante X, que afirmou que a visualização gráfica torna o entendimento mais fácil.

Por fim, considerando agora a Atividade 4, os alunos também fizeram uma prova escrita para avaliar o que aprenderam sobre o assunto. A avaliação foi individual e constou de duas etapas: uma parte teórica, em sala de aula, e outra prática, com o uso dos computadores. Após corrigir as provas, a professora apresentou para os alunos os resultados, e iniciou uma discussão sobre isso; na prova do laboratório, as notas foram boas, porém as notas da parte teórica foram razoáveis. Todos chegaram à conclusão que mais exercícios deveriam ter sido

passados pela professora para fixar o conteúdo, pois as duas listas que totalizavam 24 questões não foram suficientes. Para resolver este problema, o assunto foi mais reforçado com exercícios resolvidos em sala, e o conteúdo foi novamente cobrado em outra atividade avaliativa, cujo resultado foi satisfatório.

Com relação à prova escrita, havia uma pergunta sobre a preferência de cada um por um dos métodos trabalhados: Método da Bissecção e o tabelamento das equações. A maioria conseguiu resolver a questão sem grandes problemas ou dúvidas, mas ao utilizar o Método da Bissecção no VCN, houve quem sentiu dificuldades em escolher o Critério de Parada. Nesse momento, alguns perguntaram à professora e esta respondeu às perguntas sem pestanejar. As Figuras 64 e 65 mostram dois exemplos de resolução da questão da prova que cobrou conhecimentos sobre Resolução de Equações Não-Lineares:

2. (3,0) Seja a equação $y = \sin^2(x) - x^3 + 2x$, sendo que $x \in [0, 1]$ e uma precisão de 0,001, calcule a raiz pelos métodos abaixo:

a) Método da Bissecção no VCN: $x = 0,00048$ com 11 iterações

b) Método do Tabelamento da Função no VCN: $x = 0$, pois sua imagem é nula.

c) Faça o gráfico da função no Geogebra e amplie muitas vezes próximos à raiz, para descobrir qual dos dois valores acima é uma melhor aproximação. Qual é esse valor? $x = 0$

d) Suponha que você não tenha um computador em mãos e necessite de resolver essa equação com uma calculadora. Qual dos métodos acima você achou mais simples? Justifique.

O Tabelamento de uma função, pois é só fazer $y = 0$ e encontramos a raiz da função.

Figura 64: Questão 2 da prova do aluno P.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

2. (3,0) Seja a equação $y = \sin^2(x) - x^3 + 2x$, sendo que $x \in [0, 1]$ e uma precisão de 0,001, calcule a raiz pelos métodos abaixo:

a) Método da Bissecção no VCN: $0,00048828125$

b) Método do Tabelamento da Função no VCN: 0

c) Faça o gráfico da função no Geogebra e amplie muitas vezes próximos à raiz, para descobrir qual dos dois valores acima é uma melhor aproximação. Qual é esse valor? 0

d) Suponha que você não tenha um computador em mãos e necessite de resolver essa equação com uma calculadora. Qual dos métodos acima você achou mais simples? Justifique. O método mais simples é o método de Bissecção, pois o resultado sai de imediato.

Figura 65: Questão 2 da prova do aluno Q.

Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Conforme as Figuras 64 e 65, os dois alunos acertaram a questão, como a maioria da turma (houve quem não resolveu a questão, deixando em branco). O aluno P (Figura 64) ofereceu mais detalhes nas respostas que o aluno Q (Figura 65); quanto à preferência pelos métodos, ambos têm opiniões diferentes: o aluno P preferiu o método do tabelamento ao da Bissecção, por considerar o fato de que a raiz tem imagem nula. Já o aluno Q tem sua

preferência pelo método da Bissecção por ser mais simples. Mas é importante salientar que talvez o aluno Q não tenha compreendido ou lido muito bem a pergunta (Suponha que você **não** tenha um computador...), pois afirmou que “o resultado sai de imediato” e, na realidade, não é bem assim.

Ao final da atividade, o comentário geral foi de que ela era cansativa. Por mais que tenha havido o consenso de que o aprendizado ocorreu, ou seja, os alunos compreenderam o conceito de raiz, de forma numérica e gráfica, acharam cansativa a construção das tabelas, mesmo sendo no VCN. Os comentários a esse respeito foram:

“É muito chata essa parte de construir um monte de tabelas e ficar procurando em cada uma a raiz.”

“Gostei de entender a raiz da função vendo no Geogebra, ampliando ou reduzindo próximo da raiz. E gostei também de entender o Método da Bissecção no VCN, mas essa coisa de ficar montando tabelas eu não gostei.”

Diante disso, uma vez que o procedimento sugerido por esse material didático é justamente a construção de tabelas para o estudo da Convergência, uma boa alternativa para esse problema detectado é não aplicar a Atividade 4 toda num mesmo momento. De acordo com essa ideia, um cronograma foi elaborado, que pode ser seguido para melhor adequação, em 10 horas-aulas, e que é mostrado no Quadro 10:

<i>Tempo de aula (em minutos)</i>	<i>Local</i>	<i>Programação</i>
02 h/a (100 minutos)	Sala de aula	Apresentação do conteúdo, com revisão do conceito de raízes e exposição do Método da Bissecção.
02 h/a (100 minutos)	Laboratório de Informática	Aplicação desta atividade investigativa, especificamente das questões 1 e 2.
02 h/a (100 minutos)	Sala de aula	Resolução de exercícios de fixação, em duplas ou grupos.
02 h/a (100 minutos)	Laboratório de Informática	Aplicação da questão 3 desta atividade investigativa, em conjunto com outros exemplos tirados na lista de exercícios de fixação, feitos em sala de aula, quando estes poderão ser corrigidos também pela professora.
02 h/a (100 minutos)	Sala de aula	Avaliação.

Quadro 10: Sugestão de aulas para o conteúdo *Resolução Numérica de Equações Algébricas e Transcendentes*, com o uso de atividades investigativas. Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Ao subdividir as questões dessa investigação em mais momentos, é possível que as questões da Atividade 4 possibilitem que os objetivos sejam alcançados e os problemas encontrados serão amenizados.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1. Reações observadas

As turmas que participaram desta pesquisa se apresentaram inicialmente como vários outros alunos da área de exatas: pensavam que a Matemática era um conjunto de fórmulas a serem decoradas, para serem trabalhadas em exercícios que o professor apresentava como exemplos na sala de aula. A pesquisadora teve a sorte de ter tido professores que não pensavam assim! Tanto no curso de graduação como no mestrado, vários docentes provocaram-na a pensar de outra forma: que a Matemática era um campo fascinante a ser explorado com paciência, determinação e paixão, e que para ensinar Matemática era necessário harmonizar a emoção com a razão.

Quanto a isso, a pesquisadora entende que o perfil assumido como docente deve ser claro e objetivo. E o perfil aqui assumido é de ser uma pessoa simpática com os alunos, exigente, mas que respeita o momento de cada um. Ensinar Matemática é muito mais do que simplesmente transmitir um conteúdo, pois é preciso buscar significado em cada atitude e olhar. Assim foi construído o seu perfil de educadora, baseado em uma metodologia que seja sempre atraente para os alunos, que possa despertar o interesse daqueles que mais se isolam na sala de aula.

O trabalho com os programas *Geogebra* e *VCN* se mostrou mais significativo do que o previsto em todas as turmas. Foi unânime a opinião de que aprender Matemática com o computador é tão mais prazeroso quanto eficiente, e os alunos sempre comentavam que nos cursos da área de exatas, parte da carga horária de cada disciplina deveria ser dedicada ao uso do computador, interagindo o conteúdo com softwares na área.

Particularmente sobre os softwares aqui pesquisados, à medida que as atividades transcorriam surgiam alguns comentários por parte dos alunos que diziam respeito a outras disciplinas que poderiam aproveitar um e/ou outro software em seu programa curricular. Diante da atração que sentiram pelos programas, vários estudantes (das três turmas participantes) incentivaram a pesquisadora a trabalhar sempre com esse perfil, independente da disciplina que atuasse.

As atividades incentivaram o diálogo constante, que privilegiou as constantes trocas, entre alunos - alunos e alunos - professor. Como a pesquisadora era a professora da turma, foi

possível observar atentamente todos os momentos, durante e após a aplicação das atividades, coletando informações no dia-a-dia da sala de aula, principalmente quanto ao aspecto emocional no que diz respeito às ansiedades, inseguranças, inquietações, entusiasmo, satisfação e confiança.

Com relação a esses sentimentos mencionados, as ansiedades, inseguranças e inquietações observadas dizem respeito principalmente à forma como o conteúdo seria cobrado nas avaliações, uma vez que esta proposta está do lado oposto dos métodos tradicionais de ensino de matemática. Não que tais métodos não tenham méritos, tanto é que essa proposta envolve um pouco da disciplina organizacional do sistema tradicional de ensino, no momento em que há o momento de exposição oral do conteúdo pelo docente (com auxílio de quadro e giz/pincel), também exige dedicação dos alunos na resolução de exercícios extraclasse que são corrigidos em sala pela professora e ainda há a fase de avaliação do aprendizado, mas não há enfoque na ideia de que o professor explica/apresenta o conteúdo em sala com exemplos ou modelos → o aluno repete a ideia exposta pelo professor em exercícios de fixação → o professor corrige exercícios em sala de aula → o aluno faz uma prova escrita elaborada pelo professor sobre o conteúdo explicado → o professor corrige as provas e entrega aos alunos, muitas vezes sem discutir os resultados.

Mesmo diante dos exercícios extraclasse, através dos quais a professora possibilitou que os alunos relembassem a linguagem empregada nas investigações matemáticas realizadas, alguns ainda se sentiram um pouco inseguros para a avaliação escrita que fariam. A partir desse fato, pode-se notar a existência de um mito por trás da Matemática, gerado pelas afirmações de muitos professores de que aprender esse assunto seria tarefa para poucos talentosos. Nesse sentido, foi preciso tranquilizar os alunos, mostrando que esse é um aprendizado acessível a todos que precisem e se interessem realmente, desde que haja dedicação e boa vontade.

Ainda foi possível perceber a insegurança em alguns alunos nos momentos em que eles eram convidados a resolver algum exercício em sala de aula, para posterior correção pela professora. Enquanto tentavam resolver, a pesquisadora os observava circulando pelo recinto, analisando as resoluções, confirmando o que fizeram ou sugerindo algum passo para corrigir o raciocínio. Nesse momento, tendo respeito e atenção pelo desenvolvimento de cada um, houve contribuição para a melhora da autoestima, pelo fortalecimento da autoconfiança e para a certeza da busca pelo aprendizado, além é claro, do aumento da interação entre alunos e professora.

Quanto aos sentimentos de entusiasmo, satisfação e confiança, isso foi percebido principalmente naqueles alunos que estavam conseguindo acompanhar o desenvolvimento do conteúdo. Mas esse fato chamou a atenção porque nesse grupo havia alunos que alegaram no início do semestre que não tinham muita afinidade com a Matemática, pois tinham grande dificuldade em compreender e colocar no papel o raciocínio necessário. Nesses casos, muito mais do que com os alunos que afirmaram sempre terem gostado do assunto, a pesquisadora sentiu grande satisfação e a crença de ter cumprido o papel de educadora.

Os diálogos em sala de aula e as observações feitas em cada turma confirmaram que o computador (particularmente falando dos programas *VCN* e *Geogebra*) é uma ferramenta muito eficiente no processo ensino-aprendizagem da Matemática. Isso pode ser confirmado por meio de alguns comentários dos alunos feitos após o trabalho com o *Geogebra* e o *VCN* (referente às três turmas), algumas registradas por meio de respostas a um questionário aplicado (vide Apêndice 4) e outras foram falas dos alunos durante o momento de socialização.

1. Acredito que a atividade investigativa sobre Limites contribuiu muito para meu aprendizado, porque através dela entendi a matéria com mais facilidade, além de sair daquela coisa de sala aula, tornou a aula interessante.
2. A visualização gráfica principalmente em tempo real tornou a cognição mais lógica e rápida.
3. Consegui aprender o conceito de derivadas de forma satisfatória.
4. Acredito que a atividade no laboratório em conjunto com a explicação da professora contribuíram para meu aprendizado.
5. Gostei muito das atividades no laboratório de informática e penso que todas as disciplinas deveriam ser assim.
6. Como ponto positivo para a atividade sobre Limites e Taxas de Variação vejo a visualização numérica e gráfica, com modificação em tempo real, e como ponto negativo é que necessita de um bom laboratório e mais tempo para apoio.

7. Uma maior carga horária e a utilização de métodos áudio visuais em tempo real como o proposto aumenta a capacidade de aprendizado.
8. Ponto positivo para a atividade sobre Limites, Taxas de Variação e Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes: saímos da rotina de sempre sala de aula, uma forma de complementar o ensino mostrando na prática computacional como realizar exercícios matemáticos. Ponto negativo: é mais difícil de memorizarmos fórmulas, devido elas já estarem anexadas no programa.
9. Aprender integral dessa forma é muito mais interessante, porque a gente consegue ver o que está acontecendo.
10. Eu não vou conseguir mais ensinar Matemática de outra forma, pois percebo que as atividades investigativas prendem muito mais a atenção do aluno, fazendo com que ele tenha mesmo que pensar.
11. Adorei aprender cálculo com o computador, e penso que hoje em dia já não dá para ser de outra forma.
12. As atividades foram um pouco cansativas porque exigem muita leitura e interpretação, mas depois que a gente entendia o que era pra fazer, ficava fácil.
13. A atividade que senti mais dificuldade foi na resolução de equações porque não conseguia entender quando era pra parar de construir tabelas e achar a raiz. Mas depois gostei porque ainda aprendi a tabelar melhor uma função.

Quadro 11: Comentários de alguns alunos a respeito das atividades investigativas e do uso dos softwares *Geogebra* e *VCN*. Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

As afirmações acima foram dadas como respostas para um questionário sobre as atividades investigativas que fizeram e em momentos durante a aplicação das atividades no laboratório.

É importante frisar que as atividades com o *Geogebra* e o *VCN* criaram nos alunos uma maior confiança e entusiasmo com a Matemática, pois passaram a encará-la como mais agradável e importante.

6.2. Sugestões e comentários

Através das ideias expostas nos capítulos anteriores, conduzir o aprendizado da Matemática adotando como ferramenta metodológica o computador é um fato real e importante. Diante do grande avanço tecnológico, em que a cada dia surgem mais novidades principalmente na área da informática (e essa é uma realidade vivenciada por essa nova geração de estudantes), não é possível que as instituições de ensino fiquem para trás. É preciso acompanhar o ritmo do desenvolvimento com boa vontade e atenção!

O trabalho com atividades investigativas em Matemática oferece muitas possibilidades de crescimento para todos: enquanto o estudante constrói seu aprendizado, o professor melhora seus métodos de ensino e cresce profissionalmente. Na medida em que os alunos experimentam novas possibilidades de aprendizado e reagem positivamente, o docente, sujeito observador e sempre pesquisador, tem a oportunidade de desenvolver novas metodologias e aperfeiçoar suas técnicas de ensino, melhorando assim o seu desempenho profissional.

No momento em que o docente acredita no que faz e se dedica ao trabalho, então ele já tem grandes chances de obter sucesso com seus alunos. Esta pesquisadora é realmente apaixonada pela docência e se empolga a cada novo olhar de satisfação que observa em seus alunos; perceber que a maioria aprendeu o conteúdo causa uma sensação de dever cumprido e a vontade de fazer algo por aqueles que ficaram de fora desse grupo.

Neste sentido, os resultados obtidos com o material didático foram de grande valia para nosso desenvolvimento profissional. Cada palavra positiva vinda dos alunos dava a certeza de estar no caminho certo, e cada palavra (ou expressão) negativa gerava a vontade de corrigir o erro detectado.

Uma das principais constatações foi quanto à carga horária das disciplinas. A pesquisadora já lecionou (também em outras instituições) com várias outras disciplinas na área de exatas, e dentre todas, apenas a de Cálculo Numérico tinha carga horária definida para prática no laboratório de informática.

Tabela 6: Carga horária de algumas disciplinas em que esta pesquisadora já atuou.

Disciplina (em ordem alfabética)	Carga horária total	Carga horária de prática no laboratório de informática
Álgebra Linear	80 h/a	-----
Cálculo com Geometria Analítica	64 h/a	-----
Cálculo I	80 h/a	-----
Cálculo II	80 h/a	-----
Cálculo III	80 h/a	-----
Cálculo Numérico	48 h/a	16 h/a
Espaços Métricos	72 h/a	-----
Estatística	80 h/a	-----
Fundamentos da Matemática	80 h/a	-----
Geometria Euclidiana	72 h/a	-----

Fonte: dados da pesquisadora.

As disciplinas acima foram trabalhadas nos cursos de Matemática Licenciatura, Engenharia de Produção, Sistemas de Informação e Tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas, em cinco instituições diferentes. As cargas horárias totais mencionadas dizem respeito às aulas teóricas em sala de aula, sendo que os momentos de prática no laboratório ocorreram como programação dentro dessa carga horária. Ao iniciar o curso de Mestrado, novos recursos didáticos foram conhecidos, dentre eles as atividades investigativas e os softwares *Geogebra* e *VCN*, e a partir daí, foi possível perceber que o computador pode ser um grande aliado do professor nas aulas de Matemática; assim, houve a busca por inserir em cada introdução de novo conteúdo, uma atividade que tivesse um desses softwares como apoio. Depois desses novos conhecimentos, foi possível inserir nas disciplinas uma carga horária específica, como mostrado na Tabela 7:

Tabela 7: Disciplinas que esta pesquisadora já trabalhou com prática de laboratório, com planejamento pessoal.

Disciplina	Carga horária total	Carga horária de prática de laboratório
Cálculo I	80 h/a	10 h/a
Cálculo com Geometria Analítica	64 h/a	04 h/a
Estatística	80 h/a	15 h/a
Fundamentos da Matemática	80 h/a	10 h/a

Fonte: arquivos da pesquisadora.

Os resultados obtidos com esta pesquisa possibilitaram a formulação de algumas ideias que poderiam contribuir para a melhoria do ensino de Cálculo e várias outras disciplinas, tais como Fundamentos da Matemática, Geometria Analítica, Álgebra Linear e Geometria Euclidiana:

- a) Que cada disciplina tenha parte da carga horária destinada a atividades no laboratório de informática, assim como acontece com Cálculo Numérico;
- b) Como a carga horária de laboratório será prevista em plano de ensino, então o professor deverá também avaliar os alunos nesses momentos. Poderá, por exemplo, passar a eles uma atividade avaliativa que deverá ser resolvida no computador;
- c) Que o professor de matemática use sempre em suas aulas atividades investigativas, para que os conceitos e definições sejam construídos e não decorados. Assim, o conhecimento matemático será assimilado de forma natural e como consequência de um processo de construção.

As sugestões acima foram elaboradas a partir das experiências vivenciadas através dos resultados desta pesquisa. Como informações para a elaboração de tais sugestões, foram considerados os materiais constantes no arquivo de pesquisa que, após os devidos estudos e análises, possibilitaram que se chegasse a tais conclusões.

Outra consideração importante a ser feita é com relação ao ensino do conteúdo Resolução de Equações. O Método da Bisseção é bastante simples e poderia ser incluído nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Ensino Médio. É do conhecimento de todos os professores que lecionam em cursos de graduação da área de Ciências Exatas que a grande maioria dos alunos só consegue resolver equações de 1º ou 2º grau, e quando muito, algumas equações exponenciais e trigonométricas simples. Quando há a necessidade de se focar uma equação não-linear, a maioria afirma nunca ter visto nenhum exemplo do tipo. Sendo assim, esse método simples de resolução de equações, que envolve apenas o cálculo de ponto médio entre dois pontos, poderia ser ensinado durante a Educação Básica, claro que com exemplos que estivessem à altura da maturidade de cada série.

Com isso, os alunos que pretendem seguir carreira na área de exatas não se sentiriam tão surpresos ao chegar no Ensino Superior e se deparar com as equações algébricas (de grau maior do que 3) e transcendentais, uma vez que a aplicação destas na vida real é bastante ampla.

6.3. Outras pesquisas possíveis

Essa pesquisa trata de quatro atividades investigativas que envolvem conteúdos do Cálculo Diferencial, Integral e Numérico. Cada atividade foi elaborada com o objetivo principal de fazer com que o aluno construísse o conhecimento sobre o assunto a partir de investigações realizadas nos softwares *Geogebra* e *VCN*. O conjunto das atividades faz parte do produto final, mas existe a consciência de que sobre cada uma das atividades poderia ser desenvolvida uma pesquisa à parte.

Assim, analisando essa proposta de material didático, à medida que o estudo sobre cada atividade era desenvolvido, percebeu-se que cada uma poderia ser aberta num grande leque:

- a) **Construção da ideia e da definição de limites:** uma nova pesquisa poderia ser desenvolvida se esse assunto fosse mais aprofundado. Por exemplo, uma pesquisa só com funções com a variável tendendo ao infinito, outra somente com funções racionais, outra com funções trigonométricas, estudo de limites laterais, etc.;
- b) **Taxas de Variação:** na Atividade 2, o enfoque foram as taxas média e instantânea de variação com a construção do conceito de derivadas. Assim, esse pode ser um tema de pesquisa, com o estudo da aplicação das derivadas envolvendo máximos e mínimos, pontos críticos, equações diferenciais, etc.;
- c) **Métodos numéricos de resolução de uma integral:** essa pesquisa privilegiou a resolução de integrais por métodos numéricos, mas as atividades elaboradas envolveram apenas o cálculo de áreas. Novos estudos poderiam ser desenvolvidos com o uso do *Geogebra* e *VCN* envolvendo também o cálculo de volumes, comprimento de arcos, etc., além é claro do desenvolvimento das fórmulas algébricas de resolução de integrais, partindo do Teorema Fundamental do Cálculo;
- d) **Resolução de equações algébricas e transcendentais:** outros métodos de resolução poderão ser explorados, como o método de Newton e da Secante. Além destes, a resolução por meio do tabelamento das equações poderá ser mais estudado e o método, aperfeiçoado;
- e) **Outros temas:** o estudo dos softwares *VCN* e *Geogebra* geraria, cada um, uma vasta pesquisa. Estudos sobre as várias funções, com seus comportamentos numérico e gráfico; o estudo da geometria analítica; a exploração de frações e números decimais;

o estudo dos teoremas e propriedades da geometria euclidiana plana; o estudo da geometria táxi; enfim, estes são apenas alguns dos vários assuntos que poderiam ser desenvolvidos com atividades investigativas tendo como base estes softwares.

6.4. Ideias finais

Diante de toda a pesquisa, ficou a grata consciência de que os resultados alcançados foram superiores ao esperado. No que diz respeito à compreensão inicial da ideia de Convergência de funções contínuas e discretas, alguns alunos demonstraram terem alcançado esse entendimento, como mostram as Figuras 66 a 69:

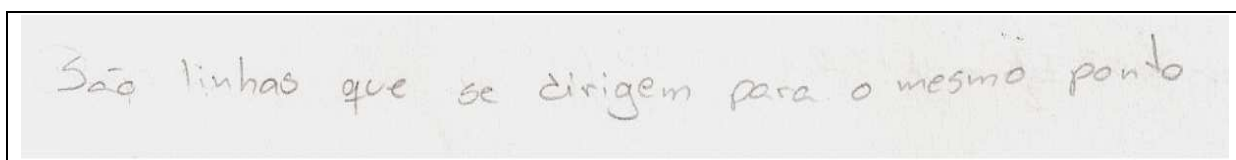


Figura 66: Resposta de um aluno sobre o que entende por Convergência de funções contínuas e discretas.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

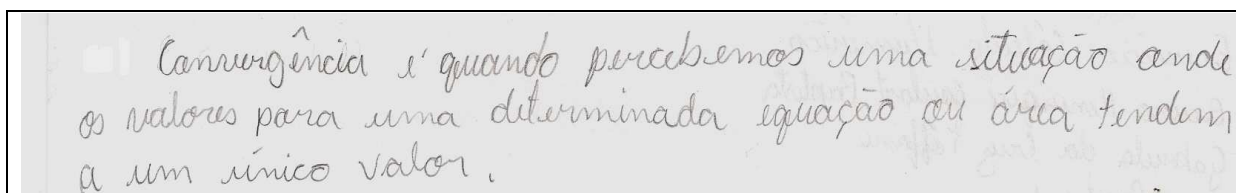


Figura 67: Resposta de um aluno sobre o que entende por Convergência de funções contínuas e discretas.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.



Figura 68: Resposta de um aluno sobre o que entende por Convergência de funções contínuas e discretas.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

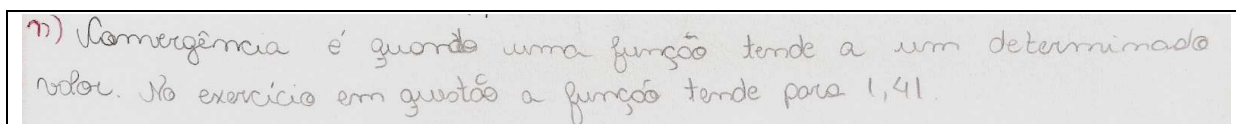


Figura 69: Resposta de um aluno sobre o que entende por Convergência de funções contínuas e discretas.
Fonte: arquivo da pesquisadora, 2009.

Considerando a sequência didática proposta, que é composta pelas Atividades 1, 2, 3 e 4, de acordo com a organização da Engenharia Didática, é possível fazer as seguintes observações:

- a) Para que uma pesquisa deste tipo alcance o sucesso dos seus objetivos, é essencial que o pesquisador acredite realmente na proposta, pois “a decisão de adotar uma estratégia de mudança precede o desenvolvimento da compreensão” como afirma Zabala (2007, p. 15);
- b) O computador de fato atuou como importante ferramenta no que diz respeito à experimentação para os alunos, conforme acentua Borba: “as atividades, além de naturalmente trazerem a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação” (BORBA, 2001, p. 304)
- c) Estas atividades proporcionaram à professora e aos alunos intensos momentos de aprendizado, favorecendo não apenas o ensino-aprendizagem do conteúdo como também contribuiu para o estreitamento da relação de amizade e confiança entre todos. Os alunos adquiriram mais autoconfiança, interesse em aprender e autonomia, e esta pesquisadora ganhou segurança e autodesenvolvimento não apenas para continuar com essa pesquisa, como também com sua carreira profissional. Neste sentido, foi confirmada a fala de Lachini, sobre o fato de professor e alunos se tornarem “construtores e re-construtores do conhecimento” (LACHINI, 2001, p. 179);
- d) Ainda de acordo com Lachini (2001, p. 147), “é preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e numérico do que está fazendo”. Com estas atividades, constatou-se que houve sucesso com o aprendizado dos conteúdos propostos, pois ao longo deste trabalho, esse foi um dos principais pontos positivos identificados pelos próprios sujeitos da pesquisa. A visualização gráfica, em conjunto com o estudo numérico (principalmente por meio do tabelamento das funções), foram os elementos principais na experimentação que aconteceu;
- e) Algumas fases da Engenharia Didática foram observadas ao se considerar as atividades desta sequência:
 - i. **Análise preliminar:** a professora-pesquisadora esteve atenta a todo o momento não apenas à resolução das atividades, mas também ao comportamento dos sujeitos envolvidos. As opiniões de todos foram de fundamental importância, como pode ser verificado ao longo do trabalho, e houve também a busca pela compreensão da realidade de cada turma com relação à respectiva atividade, ou seja, compreender se a

atividade que seria aplicada tinha sentido para a realidade em que o aluno estava inserido;

- ii. **Concepção e análise *a priori*:** as variáveis de comando identificadas ao longo deste trabalho são:
 - a. Importância da leitura e interpretação correta;
 - b. Desenvolvimento da autonomia;
 - c. Facilidade para trabalhar em grupo;
 - d. Desenvolvimento da expressão oral;
 - e. Desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, por meio da experimentação, seguida da generalização, abstração e produção de significados (LINS; GIMENEZ, 2006);
 - f. Aprendizagem do conteúdo proposto, por meio da experimentação e visualização, numérica e gráfica.
- iii. **Aplicação da sequência didática:** o momento da execução do projeto foi valorizado ao máximo a partir da observação atenta das resoluções das atividades e do comportamento individual e em grupo de cada sujeito. Tais informações foram registradas por meio de gravações e anotações, compondo o que se considera ser um ‘relatório informal de pesquisa’ (que foi utilizado neste trabalho ao longo do texto);
- iv. **Análise *a posteriori*:** por fim, o material obtido com a aplicação da sequência foi estudado, com atenção aos detalhes e informações diversas julgadas imprescindíveis para a conclusão desta pesquisa. O tratamento dado às informações foi qualitativo, à medida que cada sujeito foi considerado como um elemento particular dentro do universo que compunha o cenário aqui apresentado; a participação de cada sujeito foi registrada e analisada formando o resultado final.

Novamente será citada a fala de Pais (2001, p. 13), que afirma que “a **validação** dos resultados é obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori*, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa”; sendo assim, é importante agora frisar que, diante da análise *a priori* e das informações obtidas na análise *a posteriori*, há condições de responder à pergunta inicialmente proposta nesta pesquisa:

Os softwares livres VCN e Geogebra podem contribuir para o aprendizado dos conceitos de Limites, Taxas de Variação, Integração Numérica e Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes, de modo que ao final de todas estas atividades o estudante tenha compreendido a ideia inicial sobre Convergência de funções contínuas e discretas?

Diante das informações aqui coletadas e registradas, mostradas ao longo do capítulo referente à análise das atividades, pode-se afirmar que houve sucesso com o aprendizado dos conceitos de Limites, Taxas de Variação, Integrais Numéricas e Resolução de Equações Algébricas e Transcendentes; cada uma em seu devido momento e na turma conveniente, ao final, os alunos conseguiram demonstrar uma compreensão da ideia inicial sobre a Convergência de funções contínuas e discretas. Uma vez que esse é um assunto que fará parte de estudos futuros dos alunos, então essa compreensão inicial poderá contribuir para que os estudantes utilizem tal conhecimento no momento oportuno.

REFERÊNCIAS

- BARROSO, Leônidas Conceição. et al. **Cálculo Numérico com Aplicações**. São Paulo: Editora Harbra, 1987.
- BORBA, Marcelo de Carvalho. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BRASIL. Ministério da Educação. **História**. Disponível em: <<http://pde.mec.gov.br/index>>. Acesso em: 07 dez. 2009.
- CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
- CARNEIRO, Vera Clotildes Garcia. Contribuições para a formação do professor de matemática pesquisador nos mestrados profissionalizantes na área de ensino. **Revista BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 29, p. 199-222, 2008.
- EDWARDS JR., C.H.; PENNEY, D. **Cálculo com geometria analítica**. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil. 1997. v. 1.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **O minidicionário da língua portuguesa**. 4. ed. rev. Ampliada. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.
- FINNEY, Ross L. **Cálculo de George B Thomas Jr.** 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2002. v. 1.
- FIORENTINI, Dário (Org.). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. São Paulo: Mercado de Letras, 2003.
- FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, Ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.
- FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Autores Associados, 2007.
- FROTA, Maria Clara Rezende, BORGES, Oto N. **Perfis de Entendimento sobre o Uso de Tecnologias na Educação Matemática**. In: ENCONTRO DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 27, Caxambu, MG, 2004. **Sociedade, Democracia e Educação**. Rio de Janeiro: ANPED, 2004.
- FROTA, Maria Clara Rezende. Estilos de aprendizagem matemática e autocontrole do processo de aprendizagem. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian (Org.) **Educação Matemática no Ensino Superior**. Recife: SBEM, 2009, p. 63-84.
- GEOGEBRA.Wikipédia. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Geogebra>>. Acesso em: 13 ago. 2009.

GONÇALVES, Hortência de Abreu. **Manual de metodologia da pesquisa científica**. São Paulo: Avercamp, 2005.

HUGHES-HALLETT, Deborah. et al. **Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 1997. v. 1.

ÍNDICE DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO BÁSICA. **Apresentação**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/ideb>>. Acesso em: 21 ago. 2009.

LACHINI, Jonas. Subsídios para explicar o *fracasso* de alunos em Cálculo. In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas (Org.). **Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 146-189.

LAUDARES, João Bosco; MIRANDA, Dimas Felipe. Informatização no ensino da matemática: investindo no ambiente de aprendizagem. **Zetetiké**, Campinas, v. 15, n. 27, p. 71-88, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2004.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas da aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 2001.

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006.

MATUCK, Fadia. Pisa 2006: resultado do Brasil deve ser comparado ao de países com realidade semelhante. **O Globo**, 04 dez. 2007. Disponível em: <<http://moglobo.globo.com/integra.asp?txtUrl=/educacao/mat/2007/12/04/327448029.asp>>. 2007. Acesso em: 21 ago 2009.

MIRANDA, Dimas Felipe; LAUDARES, João Bosco; ALMEIDA, Trajano Coutinho de. **Matemática aplicada às ciências gerenciais**. Belo Horizonte: FUMARC, 1987.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SANT'ANA, Marilaine de Fraga; TEDESCO, Priscila. Discussões das noções de limite e infinito. **Educação Matemática em Revista**, Ano 11, n. 17, p. 47-51, 2004.

SANTOS, Vitoriano Ruas de Barros. **Curso de cálculo numérico**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

STEWART, James. **Cálculo**. 6.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009. v. 1.

ZABALA, Antonio. **A prática educativa: como ensinar**. São Paulo: Artmed, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Atividade 0 – Primeiras Experimentações...

Esta atividade tem o objetivo de fazer com que o aluno explore a representação gráfica de Funções. Para isso, utilizaremos o software Geogebra com esta lista de exercícios que tem o caráter de sequência didática. Você deverá ler com atenção as questões e, após resolvê-las, faça uma análise geral dos conteúdos apresentados, para que aconteça uma melhor assimilação. Bom trabalho!

Profª Yara.

1. Digite na caixa Entrada os pontos $(0, 3)$ e $(-3, 0)$. Em seguida, clique na 3ª caixa do menu e escolha a ferramenta **“Reta definida por dois pontos”**. Qual é a equação que é representada por esta reta? Escreva-a na **forma geral** e também na **forma reduzida**.

Equação: _____

Forma geral: _____

Forma reduzida: _____

Essa função é crescente ou decrescente? _____

2. Clique na 1ª caixa do menu, ou seja, em “Mover” e clique no ponto A. Mova esse ponto com o mouse, levando-o até o ponto $(0, 4)$.

Qual é a nova equação da reta? _____

Essa função continua crescente? () Sim () Não

3. Agora, clique novamente no ponto A e mova-o até a posição $(3, 0)$ – observe na Parte Algébrica o ponto mudando de valor!

O que aconteceu com a reta? _____

Qual é a nova equação da reta? _____

O que podemos afirmar agora sobre a situação “crescente” ou “decrescente”?

4. Mova agora o ponto A até um ponto qualquer que esteja abaixo do eixo x.

Escreva as coordenadas do ponto em que você parou: _____

Qual é a equação dessa reta? _____

Essa função agora é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

5. Abra nova janela. Digite na caixa Entrada as funções abaixo. Para cada uma você deverá anotar as raízes e o ponto de intersecção com o eixo y:

1) $y = 3x^2 - 5x + 9$

2) $y = -2x^2 + 5x$

3) $y = -x^2 - 2x + 3$

6. **Orientação 1:** Toda equação do tipo $y = ax^2 + bx + c$ é representada graficamente por uma parábola. A parábola tem um ponto importante chamado Vértice, que é uma ordenada positiva (ponto máximo) ou uma ordenada negativa (ponto mínimo). Então, com relação às equações do exercício anterior, responda às questões abaixo:

a) Encontre as coordenadas do vértice de cada uma delas. _____

b) Chamamos de Concavidade da Parábola, o lado para o qual a parábola está voltada. O que podemos afirmar então sobre a concavidade das parábolas das equações de 1 a 3 acima?

c) E observe as equações acima. Qual a relação que pode ser estabelecida entre a concavidade e as equações? _____

d) Consideremos, por exemplo, as equações 1 e 3 acima para essa análise. Para cada uma das equações, o que as raízes têm a ver com as coordenadas do vértice? Analise e escreva a sua conclusão.

7. Encerre essa tela e abra outra. Faça a construção gráfica das funções abaixo, se atentando para as questões a seguir:

a) $y = 5^x$

* Essa função admite raízes? Justifique. _____

* Ela é crescente ou decrescente? _____

* Qual é: $D(f) =$ _____

$Im(f) =$ _____

b) $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

* Essa função admite raízes? Justifique. _____

* Ela é crescente ou decrescente? _____

* Qual é: $D(f) =$ _____

$Im(f) =$ _____

c) $y = \lg(x)$ (logaritmo de x na base 10).

* Essa função admite raízes? Justifique. _____

* Ela é crescente ou decrescente? _____

* Qual é: $D(f) =$ _____
 $Im(f) =$ _____

d) $y = \lg(x)/\lg(1/2)$

* Essa função admite raízes? Justifique. _____

* Ela é crescente ou decrescente? _____

* Qual é: $D(f) =$ _____
 $Im(f) =$ _____

Orientação 2: A função $y = \lg(x)/\lg(1/2)$ é uma outra forma de escrever o logaritmo de x na base $\frac{1}{2}$. Para isso, usamos a propriedade **Mudança de Base** em logaritmos, porque o Geogebra só compreende logaritmos na base 10. Então, vamos definir essa propriedade:

Mudança de Base: o logaritmo de a na base b pode ser escrito também como $\log(a)/\log(b)$, desde que $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a > 0$ e $b > 0$. Em linguagem matemática, escrevemos assim:

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

8. Agora, represente graficamente as funções trigonométricas abaixo, observando bem a diferença entre as suas representações (**observe raízes, pontos de máximo e mínimo, domínio, imagens**). Sugestão: deixe as funções numa mesma tela (num mesmo plano cartesiano), colocando cores diferentes nas funções, para que você possa compará-las.

$$\begin{array}{l} a) y = \sin(x) \\ i) b) y = \cos(x) \\ c) y = \tan(x) \end{array}$$

ii) Clique em “Mover” e em uma das funções. Mova a função um pouco para cima e observe a mudança na equação; em seguida, mova para baixo e para os lados, sempre observando as mudanças ocorridas na equação.

Orientação 3: O Geogebra só compreende as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Mas há outras: secante, cossecante e cotangente. Isso porque essas são transformações das funções seno, cosseno e tangente. Então, saiba que:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)} \qquad \cot \operatorname{ang}(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

9. Vamos estudar agora outras funções transcendentais, além das citadas acima e, para cada uma delas, você deverá fazer o mesmo que foi pedido na questão 8 acima:

$$\begin{array}{ll} a_1) \sec(x) & a_2) \cosh(x) \\ b_1) \operatorname{cosec}(x) & b_2) \sinh(x) \\ c_1) \cot g(x) & c_2) \operatorname{tgh}(x) \end{array}$$

APÊNDICE B – Provas aplicadas às turmas de Engenharia de Produção e Matemática Licenciatura

Curso: _____ – Disciplina: Cálculo Numérico – Profª Yara

Nomes: _____

Data: 25/11/2009 – 10 pontos – Prova A

1. (3,0) A função $y = x^2$, $0 \leq x \leq 3$, está representada graficamente abaixo. A área sob a curva está destacada; faça o que se pede abaixo:

a) Qual é o valor da área por meio da Regra dos Trapézios no VCN?

b) Calcule o valor da área usando Somas de Riemann no Geogebra. Qual é o valor?

c) Qual é o erro relativo que ocorre entre os dois valores de áreas obtidos acima? Considere o valor encontrado na questão (b) como valor real, e lembre-se de que o erro relativo deve ser expresso em %.

Resposta: _____

d) Qual dos métodos acima você acha mais interessante? Justifique sua resposta.

2. (3,0) Seja a equação $y = x^2 - 3x + \sin(x)$, sendo que $x \in [0, 1]$ e com uma precisão de 0,001, calcule a raiz pelos métodos abaixo:

a) Método da Bisseção no VCN: _____

b) Método do Tabelamento da Função no VCN: _____

c) Faça o gráfico da função no Geogebra e amplie muitas vezes próximos à raiz, para descobrir qual dos dois valores acima é uma melhor aproximação. Qual é esse valor?

3. (1,0) Resolva o sistema $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$ pelo método de Jacobi, com $\varepsilon \leq 0,001$. Quantas iterações foram feitas e qual é o resultado encontrado?

4. (3,0) Considere a função $y = (x - 2,5)^3$. No entanto, ao buscar a raiz pelo método da bisseção com a precisão de 0,0001 no intervalo $[0, 3]$ encontramos apenas uma aproximação.

a) Qual é o valor dessa aproximação pelo método da Bisseção, no VCN?

b) Agora, faça o tabelamento da função, *começando* com $h = 0,1$ e escreva qual é a raiz da função com a precisão acima citada. _____

c) Observe que o valor encontrado é bem diferente daquele encontrado com o Método da Bisseção. Então, você deverá voltar ao Método da Bisseção e modificar o passo até obter o valor *mais próximo possível* do resultado da questão (b) acima. Qual é esse valor e qual foi a precisão necessária para encontrar esse resultado? _____

Curso: _____ – Disciplina: Cálculo Numérico – Profª Yara

Nomes: _____

Data: 25/11/2009 – 10 pontos – Prova B

1. (3,0) Para a função $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 3$ e $h = 0,5$, faça o que se pede abaixo:

a) Qual é o valor da área por meio da Regra dos Trapézios no VCN?

b) Calcule o valor da área usando a Soma de Riemann no Geogebra. Qual é o valor?

c) Qual é o erro relativo que ocorre entre os dois valores de áreas obtidos acima? Considere o valor encontrado na questão (b) como valor real, e lembre-se de que o erro relativo deve ser expresso em %.

Resposta: _____

d) Qual dos métodos acima você acha mais interessante? Justifique sua resposta.

2. (3,0) Seja a equação $y = \sin^2(x) - x^3 + 2x$, sendo que $x \in [0, 1]$ e uma precisão de 0,001, calcule a raiz pelos métodos abaixo:

a) Método da Bisseção no VCN: _____

b) Método do Tabelamento da Função no VCN: _____

c) Faça o gráfico da função no Geogebra e amplie muitas vezes próximos à raiz, para descobrir qual dos dois valores acima é uma melhor aproximação. Qual é esse valor?

d) Suponha que você não tenha um computador em mãos e necessite de resolver essa equação com uma calculadora. Qual dos métodos acima você achou mais simples? Justifique.

3. (1,0) Resolva o sistema $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$ pelo método de Jacobi, com $\varepsilon \leq 0,001$. Quantas iterações foram feitas e qual é o resultado encontrado? _____

4. (3,0) Considere a função $y = (3,6 - 3x)^3$. No entanto, ao buscar a raiz pelo método da bisseção com a precisão de 0,0001 no intervalo $[0, 2]$ encontramos apenas uma aproximação.

a) Qual é o valor dessa aproximação pelo método da Bisseção, no VCN?

b) Agora, faça o tabelamento da função, *começando* com $h = 0,1$ e escreva qual é a raiz da função com a precisão acima citada. _____

c) Observe que o valor encontrado é bem diferente daquele encontrado com o Método da Bisseção. Então, você deverá voltar ao Método da Bisseção e modificar o passo até obter o valor *mais próximo possível* do resultado da questão (b) acima. Qual é esse valor e qual foi a precisão necessária para encontrar esse resultado? _____

APÊNDICE C – Prova aplicada para a turma de Sistemas de Informação

Curso: Sistemas de Informação – Disciplina: Cálculo com Geometria Analítica

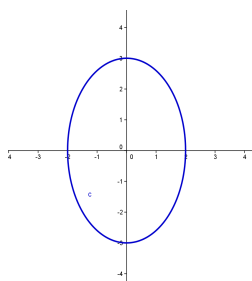
Profª Yara – 2ª Avaliação Semestral – Valor: 25,0 pontos – Prova A

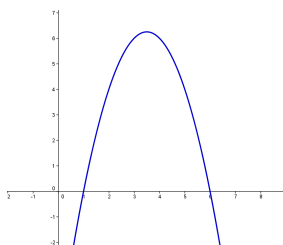
Nome: _____ - Data: 05/11/2009

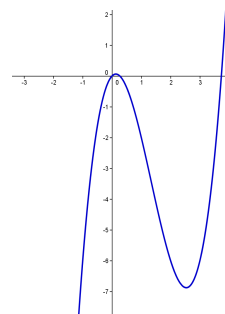
1. (3,0) Abaixo temos algumas expressões e algumas representações gráficas. Você deverá relacionar cada uma à sua respectiva representação gráfica, indicando abaixo de cada gráfico (eixo vertical = y e eixo horizontal = x) a expressão correspondente:

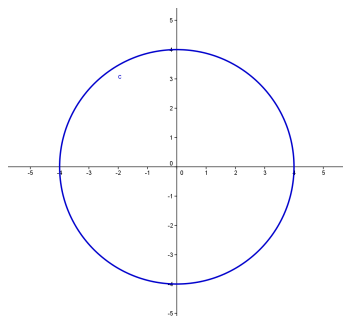
a) $y = -x^2 + 7x - 6$ b) $y = \text{sen}(2x)$ c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

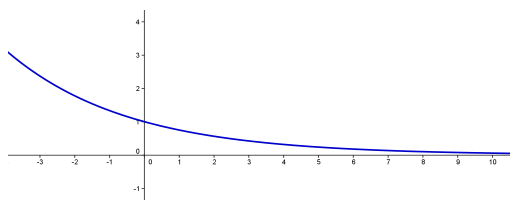
d) $x^2 + y^2 = 16$ e) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ f) $y = x^3 - 4x^2 + x$

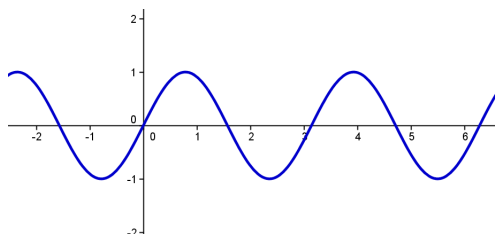












1. (4,0) Para as expressões acima, você deverá escolher duas delas para dizer quais são os conjuntos domínio e imagem.

Expressão: _____

Domínio: _____

Conjunto Imagem: _____

Expressão: _____

Domínio: _____

Conjunto Imagem: _____

2. (4,0) Analisando a função abaixo representada, responda às questões:

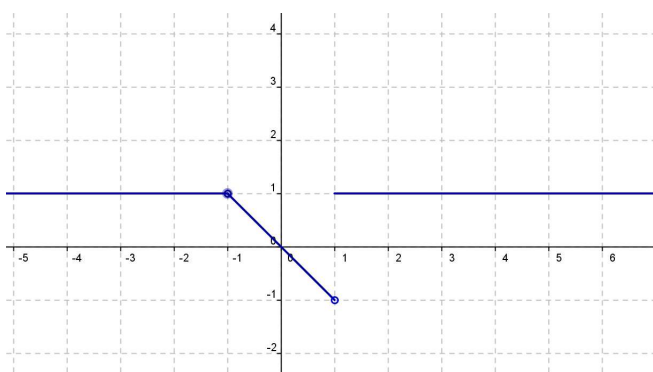
1) Qual é o limite da função quando x tende a -1 pela esquerda?

2) Qual é o limite da função quando x tende a -1 pela direita?

3) Qual é o limite da função quando x tende a -1?

4) Obtenha $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. O que podemos

dizer sobre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?



Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x .

3. (5,0) Suponha que $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = -3$ e $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = 4$. Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow k} (3 \cdot f(x) - 2 \cdot g(x))$

b) $\lim_{x \rightarrow k} f(x)^2$

c) $\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x)}{f(x) \cdot g(x)}$

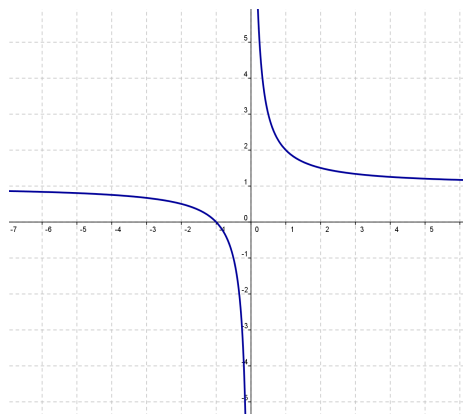
d) $\lim_{x \rightarrow k} ((f(x) + 2 \cdot g(x)) \cdot f(x))$

4. (5,0) Dada a função $f(x) = \frac{x+1}{x}$, com $x \neq 0$, comprove que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ e

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, seguindo o que se pede abaixo:

a) Construa uma tabela com valores próximos ao 0 (zero), pela direita e pela esquerda (use no mínimo 4 pontos de cada lado).

b) A representação gráfica da função é a que segue abaixo. Com base nesse gráfico e analisando a lei de formação da função, ela tem alguma assíntota vertical? Qual?



Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x.

c) Analisando a tabela que você montou, particularmente referente ao 0 (zero) pela direita, o que você pode dizer quanto à convergência dos valores?

5. (4,0) Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{3} =$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 2) =$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} =$

Curso: Sistemas de Informação – Disciplina: Cálculo com Geometria Analítica

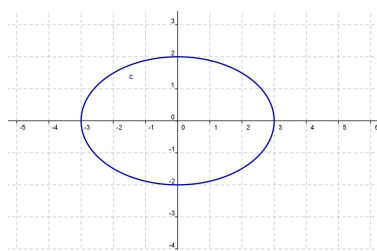
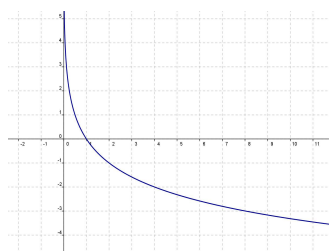
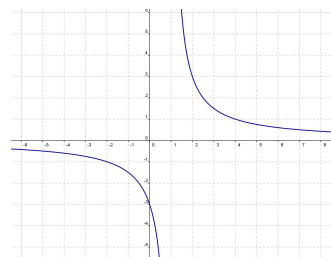
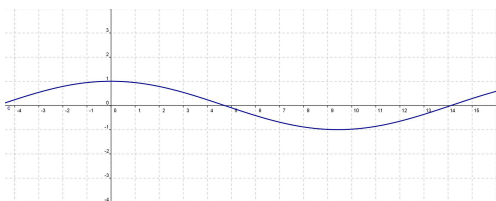
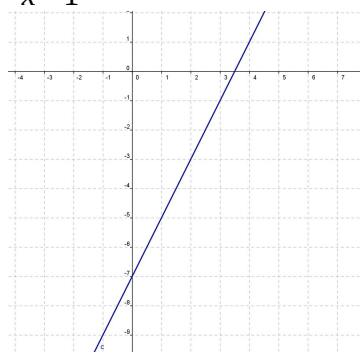
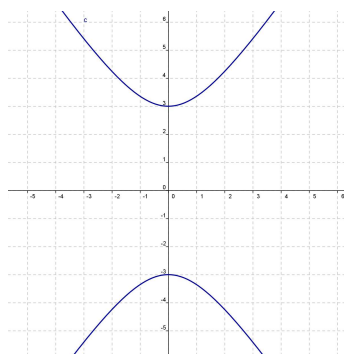
Profª Yara – 2ª Avaliação Semestral – Valor: 25,0 pontos – Prova B

Nome: _____ - Data: 05/11/2009

1. (3,0) Abaixo temos algumas expressões e algumas representações gráficas. Você deverá relacionar cada uma à sua respectiva representação gráfica, indicando abaixo de cada gráfico (eixo vertical = y e eixo horizontal = x) a expressão correspondente:

a) $y = 2x - 7$ b) $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ c) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

d) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ f) $y = \frac{3}{x-1}$



2. (4,0) Para as expressões acima, você deverá escolher duas delas para dizer quais são os conjuntos domínio e imagem.

Expressão: _____

Domínio: _____

Conjunto Imagem: _____

Expressão: _____

Domínio: _____

Conjunto Imagem: _____

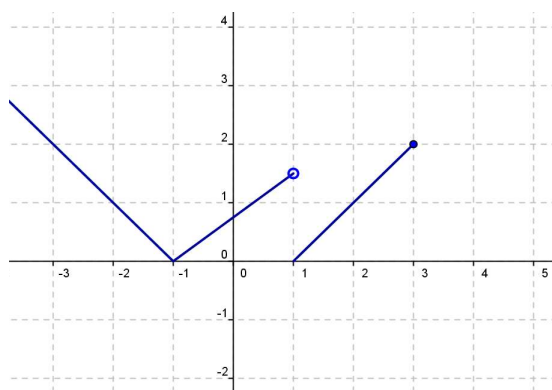
3. (4,0) Analisando a função abaixo representada, responda às questões:

a) Qual é o limite da função quando x tende a -1 pela esquerda?

b) Qual é o limite da função quando x tende a -1 pela direita?

c) Qual é o limite da função quando x tende a -1?

d) Obtenha $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. O que podemos dizer sobre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?



Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x .

4. (5,0) Suponha que $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = -3$ e $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = 4$. Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow k} (3 \cdot f(x) + 3 \cdot g(x))$

b) $\lim_{x \rightarrow k} g(x)^2$

c) $\lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x)}{2 \cdot g(x)}$

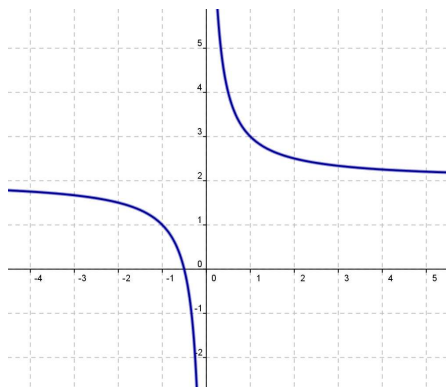
d) $\lim_{x \rightarrow k} ((f(x) - 3 \cdot g(x)) \cdot g(x))$

5. (5,0) Dada a função $f(x) = \frac{2x+1}{x}$, com $x \neq 0$, comprove que $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$ e

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty$, seguindo o que se pede abaixo:

a) Construa uma tabela com valores próximos ao 0 (zero), pela direita e pela esquerda (use no mínimo 4 pontos de cada lado).

b) A representação gráfica da função é a que segue abaixo. Com base nesse gráfico e analisando a lei de formação da função, ela tem alguma assíntota vertical? Qual?



Obs.: eixo vertical = y e eixo horizontal = x.

c) Analisando a tabela que você montou, particularmente referente ao 0 (zero) pela direita, o que você pode dizer quanto à convergência dos valores?

6. (4,0) Calcule os limites abaixo:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{2} =$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3}{x+4} =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{x^2-25} \right) =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) =$$

APÊNDICE D – Questionário para os estudantes
Referente às Atividades 1 e 2

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC Minas
Mestrado em Ensino de Matemática

Esta é uma pesquisa para que nós possamos saber a sua opinião sobre as atividades que aconteceram no Laboratório de Informática, particularmente aquelas sobre Limites e Taxas de Variação/Derivadas. Pedimos que você responda a todas as questões com muita sinceridade, pois sua opinião será de grande importância para que nossa pesquisa tenha êxito. A partir de sua opinião, saberemos se nossa proposta realmente será interessante para o objetivo que almejamos: contribuir com uma nova metodologia didática para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, e Cálculo Numérico. Agradecemos desde já por sua participação!

Profº Dr. Dimas Felipe de Miranda

Profª. Yara Patrícia B. Q. Guimarães

1. Qual é sua faixa etária?
☐ 17 a 21 anos ☐ 22 a 26 anos ☐ 27 a 31 anos ☐ 32 a 36 anos
☐ 37 a 41 anos ☐ acima de 42 anos.

2. Você já cursou ou começou algum outro curso superior?
☐ Sim. Qual? _____
☐ Não, este é o primeiro.

3. Você já fez a disciplina Cálculo Diferencial e Integral antes?
☐ Sim. Quantas vezes? _____
☐ Não, esta foi a primeira vez.

4. Quando você cursou Cálculo I, o professor utilizou alguma ferramenta computacional?
☐ Sim, muito.
☐ Sim, em poucas aulas.
☐ Não usou.

5. Você acredita que a atividade sobre Limites aplicada no laboratório de informática contribuiu de alguma forma para seu aprendizado sobre o conteúdo? Justifique, por favor, sua resposta.

6. E a atividade sobre Taxas de Variação? Você realmente conseguiu compreender o conceito de derivadas por meio da atividade do laboratório?
☐ Sim, consegui compreender de forma satisfatória.
☐ Sim, mas meu aprendizado por meio do laboratório de informática foi razoável.
☐ Não consegui aprender por este meio.

7. Sobre Limites, o que ficou melhor fixado em sua mente sobre esse assunto?

8. Sobre Limites, você acredita que tenha aprendido melhor por meio de:
- ☐ possibilidade de visualização numérica com o VCN e gráfica com o Geogebra.
 - ☐ não consegui aprender com a atividade do laboratório, mas somente com a explicação da professora.
 - ☐ não consegui aprender com a atividade do laboratório, mas somente com a ajuda dos colegas.
 - ☐ consegui aprender com a atividade do laboratório e complementei com a explicação da professora.
 - ☐ consegui aprender com a atividade do laboratório, mas não entendi a explicação da professora.
9. Sobre as Taxas de Variação e Derivada, você acredita que tenha aprendido melhor por meio de:
- ☐ possibilidade de visualização numérica com o VCN e gráfica com o Geogebra.
 - ☐ não consegui aprender com a atividade do laboratório, mas somente com a explicação da professora.
 - ☐ não consegui aprender com a atividade do laboratório, mas somente com a ajuda dos colegas.
 - ☐ consegui aprender com a atividade do laboratório e complementei com a explicação da professora.
10. Qual sua opinião sobre atividades como essas feitas no laboratório de informática?
- ☐ Penso que é uma perda de tempo; o bom mesmo é aprender na sala de aula, com a explicação do professor.
 - ☐ Gostei muito e penso que deveria ser assim com todas as disciplinas possíveis.
 - ☐ Não gostei muito, mas contribuiu para meu aprendizado sobre o conteúdo.
 - ☐ Foi interessante e proveitoso, mas não gostaria de outras oportunidades como esta.
11. Qual é o ponto positivo e o ponto negativo dessas atividades?
- Ponto positivo: _____
- Ponto negativo: _____
12. Qual nota você atribui para a atividade sobre Limites apresentada por esta professora?
- ☐ 0 a 2
 - ☐ 3 a 5
 - ☐ 6 a 8
 - ☐ 9 a 10
13. Qual nota você atribui para a atividade sobre Taxas de Variação e Derivadas apresentada por esta professora?
- ☐ 0 a 2
 - ☐ 3 a 5
 - ☐ 6 a 8
 - ☐ 9 a 10
14. Caso queira deixar algum comentário, crítica construtiva ou sugestão, saiba que será muito bem-vindo!

Obrigado por sua participação e atenção!

Atenciosamente,

Prof. Dr. Dimas.
Profª. Yara.

[illegible]