

PONTÍFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Jorge Henrique Gualandi

**INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS COM GRAFOS PARA O
ENSINO MÉDIO**

Belo Horizonte
2012

Jorge Henrique Gualandi

**INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS COM GRAFOS PARA O
ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Maria Clara Rezende Frota

Belo Horizonte
2012

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

G899i Gualandi, Jorge Henrique.
 Investigações matemáticas com grafos para o ensino médio / Jorge
 Henrique Gualandi. Belo Horizonte, 2012.
 117f.: il.

 Orientadora: Maria Clara Rezende Frota
 Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.
 Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática.

 1. Teoria dos Grafos. 2. Matemática (Ensino médio). 3. Aprendizagem por
 atividades. I. Frota, Maria Clara Rezende. II. Pontifícia Universidade Católica de
 Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e
 Matemática. III. Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 518.4



PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

JORGE HENRIQUE GUALANDI

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Profª Drª Maria Clara Rezende Frota – Orientadora – (PUC Minas)
Doutorado em Educação – (UFMG)

Profª Drª Magali Maria de Araújo Barroso – (UNI-BH)
Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação – (UFRJ)

Profª Drª Eliane Scheid Gazire – (PUC Minas)
Doutorado em Educação – (UNICAMP)

Belo Horizonte, 13 de agosto de 2012

Qualquer trabalho é o fruto dos nossos esforços. Não acredito em sucesso isolado. Por isso, dedico este trabalho a minha família que sempre esteve me apoiando. Em especial, a minha mãe e a meu pai (*in memoriam*) pela forma com que me educaram.

AGRADECIMENTOS

Eu agradeço...

... a todos que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho!

... aos meus queridos alunos do Colégio “Jesus Cristo Rei”.

... a minha família que sempre apoiou meus estudos.

... aos meus amigos, que entenderam a distância nesse período de estudo.

... à minha amiga Cristiane pelo apoio e companheirismo.

... aos professores Magali Maria de Araújo Barroso e Eliane Scheid Gazire, membros da banca.

... à professora Maria Clara Rezende Frota, pela orientação e dedicação no desenvolvimento da nossa pesquisa. Obrigado pelos conselhos e paciência. Serei sempre grato a você.

... aos professores do Curso de Mestrado, Dimas, João Bosco, Eliane, Agnела, Amauri e Lídia obrigado pelos ensinamentos.

... à Congregação das irmãs de Jesus na Eucaristia, em especial às Irmãs Edith Thomazini, Aurora Côgo, Ercy Bahiense, Marta Lúcia Diniz Gonzaga e Irismã de Paula, por viabilizarem meus estudos.

... à diretora pedagógica do Colégio “Jesus Cristo Rei” Vera Lúcia Pereira Dias, por confiar em meu trabalho e incentivar minhas investigações no campo da Educação Matemática.

... à minha eterna professora Maria Lúcia Muruci (Malu), pessoa iluminada que provocou o lado investigativo nas aulas de Matemática.

... e, especialmente, ao meu pai (*in memorian*), pois sempre lutou para que tivéssemos sucesso. Sei que onde estiver está me abençoando e me protegendo.

A todos vocês, muito obrigado!

Aprendi que se depende sempre, de tanta muita diferente gente. Toda pessoa sempre é marca das lições diárias de outras tantas pessoas. É tão bonito quando a gente entende que a gente é tanta gente, onde quer que a gente vá. É tão bonito quando a gente sente que nunca está sozinho por muito mais que pense estar...

Gonzaguinha

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi investigar abordagens metodológicas que podem contribuir para uma introdução do conteúdo de grafos na educação básica, 3ª série do Ensino Médio, de forma a integrar os conteúdos de matrizes e análise combinatória. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola particular da cidade de Cachoeiro de Itapemirim, no estado do Espírito Santo, onde os alunos não estudam o conteúdo de grafos. Orientamo-nos pelo desenho da engenharia didática, organizando a pesquisa em quatro etapas: análises prévias ou preliminares; análises *a priori*; execução e análise *a posteriori*. Os referenciais teóricos que fundamentaram a pesquisa foram: a teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval e as atividades investigativas nos moldes propostos por João Pedro da Ponte. Tomamos como base também as etapas de resolução de problemas sugeridas por Polya para o desenvolvimento e resolução das situações problemas. As atividades elaboradas foram desenvolvidas na forma de uma oficina, através de um trabalho em grupos, favorecendo a interação entre os participantes na socialização dos resultados obtidos e as diversas formas de representação dos problemas e sua resolução. Os participantes responderam de forma positiva ao trabalho proposto, envolvendo-se em investigar, argumentar e discutir os resultados. As quatro listas de atividades desenvolvidas e um conjunto de atividades complementares foram agrupados em uma proposta de oficina de investigações matemáticas para introdução ao estudo de grafos no Ensino Médio, que constitui o produto desta dissertação e que poderá servir de apoio pedagógico para o ensino e aprendizagem desse conteúdo.

Palavras-chave: Grafos no Ensino de Matemática. Educação Básica. Investigações matemáticas. Registros de representação. Engenharia Didática.

ABSTRACT

This study aimed to investigate the methodological approaches which may contribute to introduce graph contents in fundamental school, in the third grade in high school, in order to integrate matrix contents and combinatorial analysis. The research has been developed in a private school in the city of Cachoeiro de Itapemirim, in the state of Espírito Santo, where the students do not study the graph contents. We were guided by the drawing of didactical engineering, arranging the research in four stages: previous analysis, *a priori* analysis, execution and *a posteriori* analysis. The theoretical references in which the research was based on were: semiotic representation theory of registers, by Raymond Duval, and the investigative activities into patterns proposed by João Pedro da Ponte. As a basis we also employed the stages of resolution of problems suggested by Polya for the development and resolution of problematic situations. The arranged situations were developed as a workshop, through work in groups, promoting the interaction among the participants in the socialization of the obtained results and the diverse ways to represent the problems and their solution. The participants had a positive response to the proposed work, being involved in investigating, debating and discussing the results. The four lists of developed activities and a set of complementary activities have been gathered in a workshop proposal for mathematics investigations to introduce graphs into high school, which is the issue of this dissertation and may be used as pedagogical support for the teaching and learning process of these contents.

Keywords: Graphs in Mathematics Teaching. Elementary Education. Math Investigations.

Records of representation. Engineering Curriculum.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - As sete pontes de Königsberg	33
Figura 2 - Grafo representativo das pontes de Königsberg	33
Figura 3 - Atividade envolvendo grafos	36
Figura 4 - Exercício proposto	37
Figura 5 - Exercício proposto sobre grafos	38
Figura 6 - Atividades de criação de problemas com grafos	39
Figura 7 - Resposta da Atividade 1(d) da 1ª Lista – G2	63
Figura 8 - Resposta da Atividade 1(e) da 1ª Lista – G4	64
Figura 9 - Resposta da Atividade 2 (g) da 1ª Lista - G3.....	64
Figura 10 - Grafo que indica um contra exemplo para a resposta	65
Figura 11 - Resposta da Atividade 2 (h) da 1ª Lista 1 - G3.....	65
Figura 12 - Resposta da Atividade 3 (b) da 1ª Lista 1 – G1	66
Figura 13 - Resposta da Atividade 3 (d) da 1ª Lista 1 – G4.....	66
Figura 14 - Resposta da Atividade 1 (g) da 2ª lista 2 - G2	67
Figura 15 - da Atividade 2 da 2ª Lista 2 – G1	67
Figura 16 - Resposta da Atividade 3 (h) da 2ª Lista - G2.....	68
Figura 17 - Resposta da Atividade 2 da 3ª Lista - G3	70
Figura 18 - Resposta da Atividade 3 da 3ª Lista - G4	70
Figura 19 - Resposta da atividade 1da lista 4 - G2.....	71
Figura 20 - Resposta da Atividade 1 da 4ª Lista - G3	71
Figura 21 - Resposta da Atividade 3 da 4ª Lista - G3	72

Figura 22 - Resposta da Atividade 2 (i)da lista 1 - G4.....	74
Figura 23 - Resposta da atividade 2 (i) da lista 1 - G3.....	74
Figura 24 - Resposta do Item 1 do Questionário - G2.....	75
Figura 25 - Resposta do Item 1 do Questionário - G4.....	75
Figura 26 - Resposta do Item 2 do Questionário - G1.....	76
Figura 27 - Resposta do Item 2 do Questionário - G4.....	76
Figura 28 - Resposta do item 3 do questionário - G2.....	77
Figura 29 - Resposta do item 4 do questionário - G3.....	77

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Considerações sobre as atividades do livro grafos: jogos e desafios	40
Quadro 2 - Considerações sobre o livro Grafos: introdução e prática.....	42
Quadro 3 - Momentos na realização de uma investigação	50
Quadro 4 - Primeira Atividade - 1ª Lista	53
Quadro 5 - Segunda Atividade - 1ª Lista	53
Quadro 6 - Terceira Atividade - 1ª Lista	54
Quadro 7 - Atividades da 2ª Lista.....	55
Quadro 8 - Primeira Atividade - 3ª Lista	57
Quadro 9 - Segunda Atividade - 3ª Lista	58
Quadro 10 - Primeira Atividade - 4ª Lista	59
Quadro 11 - Segunda e Terceira Atividade - 4ª Lista.....	60
Quadro 12 - Questionário de Avaliação	61

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
2 GRAFOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA	26
2.1 Algumas perspectivas da inserção do Estudo de Grafos na Educação Básica	27
2.2 Algumas pesquisas no ensino de grafos	31
2.3 Grafos e registros de representação semiótica.....	32
2.4 Grafos nos livros didáticos.....	35
2.4.1 <i>Análise do livro – Matemática ensino médio</i>	36
2.4.2 <i>Considerações sobre o livro Grafos: jogos e desafios</i>	39
2.1.3 <i>Considerações sobre o livro Grafos: introdução e prática</i>	42
3 O PERCURSO DA PESQUISA	46
3.1 O contexto da pesquisa.....	46
3.2 O desenho teórico-metodológico	47
3.3 Descrição da oficina: etapas e atividades	51
3.3.1 <i>Primeira etapa</i>	52
3.3.2 <i>Segunda etapa</i>	55
3.3.1 <i>Terceira etapa</i>	56
3.3.1 <i>Quarta etapa</i>	59
3.3.5 <i>Quinta etapa</i>	61
4 ANÁLISE DOS RESULTADOS	63
4.1 Primeira lista de atividades	63
4.2 Segunda lista de atividades	67
4.3 Terceira lista de atividades	69
4.4 Quarta lista de atividades	71
4.5 Questionário de avaliação	75
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	79
REFERÊNCIAS	83
APÊNDICE – PRODUTO	85

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa abordou o tema grafos na Educação Básica, um dos conteúdos que vem sendo discutido no currículo básico das escolas estaduais do Espírito Santo.

Algumas ideias sobre Grafos vêm sendo inseridas nos textos didáticos, no decorrer dos capítulos. Além disso, já existem livros paradidáticos que podem ser usados como apoio nas aulas de matemática, de forma que os professores tenham recursos para abordarem tal tema.

Segundo Boaventura e Jurkiewicz (2009), o mundo em que vivemos é complicado demais, e para interpretarmos as situações do cotidiano, construímos modelos utilizando registros para representar e interpretar essas situações. Essas representações podem ser feitas através da linguagem natural, ou através de uma representação icônica, um tipo de diagrama, denominado grafo.

Sabemos que, por vezes, os conteúdos matemáticos são ensinados de forma fragmentada, o que, em geral, resulta em uma aprendizagem também fragmentada, sem que se estabeleçam relações entre suas diversas subáreas. Assim, levantamos alguns questionamentos iniciais:

- a) o conceito de grafos vem sendo abordado nos livros de Ensino Médio? De que forma?
- b) os livros didáticos buscam estabelecer relações entre os conteúdos de matrizes, cálculo combinatório e a Teoria de Grafos?

Desenvolver um trabalho que proporcione a discussão de conteúdos em rede, conforme propõe Pires (2000), ainda é um desafio, pois encontramos resistência por parte dos professores e alunos, uma vez que estabelecer conexões entre saberes e ideias matemáticas, exige atenção, experiência e dedicação dos envolvidos no processo ensino-aprendizagem. Porém, os professores não se sentem motivados para tal trabalho e para os alunos falta incentivo para estudar fazendo uma conexão entre os conteúdos.

A partir dos questionamentos levantados e do desafio de desenvolver um currículo em rede, definimos a questão que norteou o desenvolvimento desta pesquisa:

- a) é possível ressignificar os conteúdos como Matrizes e Cálculo Combinatório através de problemas envolvendo grafos?

O desenvolvimento desta pesquisa partiu de motivações pessoais e de experiências conduzidas no ensino de matemática para o Ensino Médio, objetivando buscar respostas sobre como ressignificar alguns conteúdos, já estudados, como matrizes e análise combinatória, através da proposição de um conjunto de situações problematizadoras, de modo que os alunos pudessem atribuir um novo sentido para a Matemática escolar.

O ensino de grafos vem despertando o interesse de alguns pesquisadores, que desenvolveram pesquisas nessa área, como Bria (2008), Muniz (2007) e Malta (2008). A pesquisa que desenvolvemos teve como um dos referenciais teóricos os registros de representação semióticos de Duval (2003, 2009). Do ponto de vista metodológico a pesquisa foi inspirada na engenharia didática. Na elaboração, condução e análise das atividades, partimos das atividades de investigação sugeridas por Ponte (2006) e os processos de interpretação e condução da resolução de problemas, propostos por Polya (1995).

Investigar é procurar conhecer o que não se sabe, segundo Ponte (2006). A oficina proposta para alunos da terceira série do Ensino Médio compreendeu um conjunto de atividades para aprendizagem através de investigações de conhecimentos sobre Grafos.

O significado curricular de cada disciplina resulta do modo como ela se articula com as demais. De forma isolada, pode-se dizer que cada disciplina expressa relativamente pouco e interessa apenas a especialistas. O que parece essencial para os educadores é, então, analisar a interdependência entre as disciplinas, as formas como elas se articulam, que tipo de hierarquia se estabelece, que influências essa hierarquização desempenha nos currículos. Para isso uma ideia de currículo em rede, segundo Pires (2000), é o que propomos através da ressignificação dos conteúdos de Matrizes e Cálculo Combinatório através de estudos sobre grafos. Apresentamos, assim, algumas estratégias de ensino que poderiam contribuir para o entendimento da Teoria de Grafos no Ensino Médio de forma a desenvolver habilidades de raciocínio envolvendo as ideias apresentadas.

Esta dissertação é estruturada em cinco capítulos, sendo o primeiro esta Introdução.

No segundo capítulo discutimos como a Teoria dos Grafos vem sendo abordada nos materiais didáticos para a Educação Básica, as perspectivas, aplicações e metodologias usadas para explorar tal conteúdo. Apresentamos também algumas pesquisas que já foram conduzidas acerca do assunto discutido, buscando analisar como a teoria pode ser inserida na Educação Básica. Buscamos ainda, no segundo capítulo destacar a importância dos registros de representação para a resolução de um problema matemático, tendo em vista que para Duval (2003), os estudantes precisam conhecer mais de uma forma de registrar uma mesma ideia matemática, pois só assim haverá entendimento do conceito.

No terceiro capítulo apresentamos o percurso da pesquisa. Destacamos o desenho teórico-metodológico da pesquisa, inspirada na engenharia didática. Descrevemos o contexto da pesquisa, apresentando cada uma das etapas da oficina, conduzida nos moldes de uma atividade investigativa.

No quarto capítulo nos preocupamos com a análise dos resultados, fazendo as discussões acerca dos registros apresentados pelos grupos. Nesse momento foi feita a análise *a posteriori* que é uma das etapas da Engenharia Didática, metodologia que inspirou a pesquisa. Durante esse processo tivemos a oportunidade de observar como as interlocuções entre os registros são interessantes; os estudantes abordam as questões e ao representá-las discutem a importância dos vários tipos de registros, possibilitando assim que seja feita uma análise do desenvolvimento matemático de cada grupo.

Todas as atividades que serviram como referências para o desenvolvimento da pesquisa foram trabalhadas em forma de uma oficina com um grupo de alunos da terceira série do Ensino Médio, que se propuseram a investigar as questões propostas, bem como analisar e discutir os resultados dos registros escritos que apresentaram durante as etapas da oficina.

As atividades aplicadas foram reunidas no Apêndice na forma de uma proposta de oficina, que agrega novas atividades complementares. Nesse Apêndice apresentamos as atividades e sugestões metodológicas para serem usadas em salas de aula da Educação Básica. As atividades descritas associam grafos a outros conteúdos matemáticos, propondo uma abordagem integrada de alguns conteúdos dispersos ao longo do currículo escolar.

O estudo da Matemática pode proporcionar aos alunos uma grande oportunidade para estabelecerem uma rede que conecte conteúdos distintos de Matrizes, Análise Combinatória, Geometria entre outros, através do estudo de Grafos.

A Teoria dos Grafos pode ser apresentada na forma de desafios, oferecendo aos alunos possibilidades de investigar e elaborar suas próprias estratégias de resolução, sem se preocupar em estar se reportando a conteúdos matemáticos formais. Do ponto de vista pedagógico, os processos de investigações e de descoberta guiada podem incentivar nos estudantes o desenvolvimento da criticidade a respeito dos conteúdos matemáticos e da autonomia de aprendizagem.

2 GRAFOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Os processos de ensino e de aprendizagem são objetos de discussões no campo da Educação Matemática. Ensinar não significa que o processo de aprendizagem seja garantido; precisamos buscar caminhos que possam facilitar a aprendizagem, de forma que o educando atribua significado a essa aprendizagem. Para isso é necessário repensar metodologias de ensino que promovam a aprendizagem com entendimento.

Segundo Ferreira (1992), metodologia é uma junção de método + *logia*. Método é derivado do grego *methodos* que significa “caminho para chegar a um fim” e, *logia* que significa “estudo”.

O objetivo da pesquisa aqui relatada foi investigar caminhos para inserir os conceitos de grafos na Educação Básica, envolvendo principalmente a resolução de problemas.

A resolução de problemas é o ponto de partida para o ensino e a aprendizagem da matemática. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), é destacada a importância de se trabalhar a partir da proposição de problemas.

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL, 1998, p. 40).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) também apontam algumas possibilidades metodológicas para o Ensino de Matemática que devem ser citadas e consideradas.

A resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas, adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1998, p. 226).

Consideramos que a Teoria dos Grafos pode ser um elemento norteador para a resolução de situações problemas, algumas delas relacionadas ao cotidiano como, por exemplo: rotas de voos entre aeroportos, distribuição de gasolina em postos, rotas de viagens,

caminhos entre cidades, entre outras. Em todas essas situações a ideia de grafos pode desempenhar um papel integrador para a construção do conhecimento matemático.

2.1 Algumas perspectivas da inserção do Estudo de Grafos na Educação Básica

Para Bria (1998), o conceito de grafo é simples e interessante, além de apresentar inesgotáveis aplicações nos mais variados ramos de conhecimento e possibilitar a abordagem de uma infinidade de situações do nosso cotidiano.

Para Boaventura e Jurkiewicz (2009), grafo é um objeto matemático, ou estrutura matemática, formada por dois conjuntos, sendo o primeiro deles, um conjunto não vazio denominado de vértices e o outro um conjunto de relações entre os vértices, que denominaremos como arestas. Portanto, para se conhecer um grafo é preciso conhecer seus vértices e estabelecer quais arestas estão ligando-os entre si. Dessa forma o registro de representação de um problema proporciona a visualização e o entendimento das ideias matemáticas que podem estar relacionadas com os grafos.

Quanto à viabilidade e oportunidade do estudo de grafos na Educação Básica, é indiscutível que:

A extrema facilidade com que inúmeras situações reais do nosso cotidiano podem ser tratadas através dos grafos de forma bastante acessível aos estudantes da Educação Básica.

O inegável “potencial de competência” dessas aplicações/exemplos para aumentarem o poder de sedução da matemática sobre nossos estudantes, notadamente àqueles que não possuem grandes afinidades com a mesma.

A natural associação dos grafos com o uso do computador, da qual o professor poderia se valer, com sensibilidade e criatividade, na medida certa, em função das possibilidades circunstanciais para a sua realização; por exemplo, até de forma indireta, através de algum trabalho criterioso com algoritmos em prol do desenvolvimento do raciocínio lógico, visto que naturalmente, em nosso cotidiano, movimentamo-nos muito “de forma algorítmica” sem nos darmos conta disso.

A grande flexibilidade característica do estudo dos grafos, no sentido de poderem ser introduzidos e trabalhados de várias formas distintas, em função da ênfase com que se julgue mais conveniente orientar sua exploração: formal ou intuitivamente, através de figuras/diagramas ou mais estruturalmente, de forma lúdica, a partir da resolução de problemas (BRIA, 1998, p. 2).

Buscamos nesta pesquisa estabelecer uma relação da Matemática com a própria Matemática, interligando conteúdos como, matrizes e combinatória e as diversas formas de representação, através de situações envolvendo a teoria dos grafos.

Buscamos, também, incentivar a resolução de problemas, não de maneira mecânica ou por meio da memorização de processos:

Num mundo em que as calculadoras estão ao alcance de todos e que os computadores estão cada vez mais presentes, não se exige que se saiba a tabuada apenas, mas, sobretudo que se saiba que operação deve ser feita para se tomar a decisão correta. As tendências atuais em educação matemática vão à direção de buscar a vinculação prática entre o que ocorre na sala de aula e fora dela (ESPÍRITO SANTO, 2009, p. 107).

Assim, aprender Matemática significa ser capaz de aplicá-la para resolver situações da vida real, desenvolvendo habilidades de raciocinar e comunicar ideias. O ensino de grafos pode nortear essa relação entre a matemática escolar e a vida real, de forma instrumental e normativa para que a aprendizagem em matemática seja significativa, afetiva e cognitiva.

Quando nos referimos à aprendizagem matemática através da resolução de problemas, devemos ter em mente que a solução para determinada situação não está disponível de imediato, o que demanda uma realização de sequências de ações para que possam ser viabilizados caminhos e estratégias para a resolução dos mesmos. Através de um currículo em rede, podemos aplicar a teoria dos grafos como processo norteador e mediador das resoluções para as situações apresentadas. Quando são apresentadas problematizações para serem resolvidas a partir de conhecimentos prévios, estamos proporcionando aos alunos condições de darem significados aos conceitos matemáticos.

O Currículo Básico da Escola Estadual do Espírito Santo contempla o ensino de grafos nas segundas e terceiras séries do Ensino Médio, e propõe que desenvolvam nos alunos as seguintes competências/habilidades:

- Estabelecer conexões entre os campos da matemática e entre essa e as outras áreas do saber.
- Raciocinar logicamente, fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar.
- Comunicar-se utilizando as diversas formas de linguagem empregada na Matemática.
- Resolver problemas, criando estratégias próprias para sua resolução, desenvolvendo a imaginação e a criatividade.
- Utilizar a argumentação matemática apoiada em vários tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo, probabilístico, por analogia, plausível, etc.
- Utilizar as novas tecnologias de computação e informação.
- Desenvolver a sensibilidade para as ligações da Matemática com as atividades estéticas no agir humano.
- Perceber a beleza das construções matemáticas, muitas vezes expressa na simplicidade, na harmonia e na originidade de suas construções.
- Expressar-se com clareza utilizando a linguagem matemática. (ESPÍRITO SANTO, 2009, p. 115-116).

O Currículo Básico da Escola Estadual do Espírito Santo, no tema “Números e Operações”, para o segundo ano do Ensino Médio, sugere que, após o ensino de Análise

Combinatória - princípio fundamental da contagem, chances e possibilidades - seja feita uma introdução à teoria dos grafos, objetivando as competências de reconhecer os conjuntos dos números reais, suas diferentes representações e operar com eles e compreender as propriedades das operações em cada um dos conjuntos numéricos e saber usá-las em situações concretas. Para as terceiras séries do Ensino Médio, com o objetivo de resolver problemas, traçando estratégias e validando soluções, o Currículo Básico sugere a resolução de problemas utilizando grafos.

Ao focarmos as competências e as habilidades que devem ser desenvolvidas nos alunos da Educação Básica, destacamos mais uma vez a resolução de situações problemas, que pode ser desenvolvida através de investigações e registros para que os estudantes participem de forma efetiva no processo educacional. Os registros através dos grafos levam o aluno a pensar em estratégias para solucionar de forma organizada e sistematizada uma situação problematizadora com aplicações no cotidiano, retratando algumas formas do dia a dia, tais como problemas envolvendo: rotas de ônibus, otimização de caminhos, custos mínimos de uma rota, entre outros.

A Matemática, estudada no Ensino Médio, deve ser conduzida estabelecendo uma conexão de rede entre seus conteúdos (PIRES, 2000). Segundo Pires (2000) é importante estabelecer relações entre os conteúdos da matemática entre si, possibilitando aos alunos criar conexões entre os conteúdos e proporcionando uma aprendizagem significativa. A ideia interdisciplinar de organização curricular em rede pode favorecer formação matemática dos alunos.

Essa ideia pode trazer contribuições no sentido de eliminar a artificialidade de algumas propostas interdisciplinares, que na tentativa de privilegiar determinados temas, colocam-nos no centro das atenções e, de forma artificial, criam conexões para agrupar, em torno dele, assuntos de todas as disciplinas, fazendo com que a interdisciplinaridade pareça mais uma camisa de força do que uma forma atraente de organização curricular. (PIRES, 2000, p. 145).

Na construção do conhecimento, segundo Pires (2000), é fundamental para a escola considerar quatro elementos que podem ser articulados proporcionando um maior entendimento para estabelecer a organização das ideias. Combinando esses elementos - dados, informações, conhecimento e inteligência – podemos articular os conteúdos, estabelecendo uma organização curricular em rede. Compreender é aprender o significado e aprender o significado de um objeto é estabelecer relações com outros objetos, é relacionar um conteúdo com outros conteúdos:

Uma discussão importante refere-se ao fato de que, ao propiciar a cada pessoa a possibilidade de desenvolver capacidades como a de estabelecer conexões entre diferentes contextos de significação, a de transferir relações de um feixe a outro, a de desenvolver novos significados, a escola estaria contribuindo para o desenvolvimento da inteligência. (PIRES, 2000, p. 138).

Para contemplar o ensino de grafos na Educação Básica, pretendemos desenvolver nos alunos a capacidade de fazer uma relação entre os conteúdos de Matrizes, Análise Combinatória e a Teoria dos Grafos.

Para resolver problemas envolvendo registros através de grafos, podemos propor situações que envolvam problemas de contagem. O MEC traz recomendações sobre a exploração desses problemas.

No ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler... Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema via estrutura de grafo. (BRASIL, 2006, p. 94).

De acordo com a LDB Art. 35, o ensino de Matemática objetiva contribuir para que se atinjam as quatro finalidades seguintes:

O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidade:

- I. a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento dos estudos;
- II. a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- III. o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- IV. a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos nos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 2010, p. 33).

Quando apresentamos de forma introdutória os conceitos de Grafos, podemos colaborar para que as três finalidades descritas acima sejam atingidas.

Algumas atividades de Grafos podem ser realizadas em sala de aula do Ensino Médio para contribuir na compreensão científica e tecnológica dos processos produtivos, além de possibilitar que os alunos aprendam a resolver problemas, tomar decisões, desenvolvendo a autonomia. O ensino de Grafos pode fornecer instrumentos para a interpretação, análise e

execução de ações do cotidiano, cujo planejamento, execução e avaliação de ações de intervenção são apontados nos PCNs do Ensino Médio como objetivos da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias (BRASIL, 1999).

2.2 Algumas pesquisas no ensino de grafos

As possibilidades do estudo de grafos para o desenvolvimento do pensamento matemático têm motivado pesquisas sobre a inserção desse conteúdo no Ensino Médio. Dentre as pesquisas iremos destacar algumas que se tornaram relevantes para o ensino da matemática.

Segundo Bria (1998), o ensino de matemática deve ser ministrado de forma efetivamente atraente e produtiva para a maioria dos alunos, independente de suas aptidões naturais, afinidades ou vocações profissionais. Nesse ponto destacamos a teoria dos grafos como ponte entre os saberes, uma vez que os estudantes podem aplicar as várias formas de registrar as situações matemáticas, proporcionando um entendimento dos conteúdos que podem ser relacionados com a teoria descrita.

Bria, em sua tese de doutorado intitulada *Grafos para Educação Básica*, discute ideias matemáticas que podem ser modeladas através da aplicação de grafos para sua resolução. O autor foi um dos precursores na pesquisa sobre a aplicação de grafos no ensino de matemática. Bria menciona alguns problemas que os livros didáticos apresentam e que podem ser resolvidos através de uma modelagem a partir dos grafos.

Desde então as pesquisas sobre ensino de grafos no Ensino Médio só foram avançando no campo teórico e prático. Muniz (2007) pesquisou sobre a possibilidade de uma introdução à teoria de grafos no Ensino Médio, com um foco na investigação matemática.

Após investigarem e ao desenvolverem as atividades propostas, os alunos desenvolvem a capacidade de resolver problemas. Muniz (2007) afirma que os alunos desenvolvem a habilidade gradual de modelar os problemas propostos através de grafos e utilizam a estrutura do grafo para facilitar a visualização e investigação do problema.

Nesse momento, as investigações e as resoluções de problemas se fazem presentes, pois, ao partirem de uma prática investigativa, as conclusões acerca das ideias matemáticas relacionadas com a Teoria dos Grafos podem ser exploradas, de forma que os estudantes tenham entendimento dos processos matemáticos envolvidos.

Muniz (2007) trabalha em sua pesquisa com problemas que envolvem a otimização, o planejamento estratégico e a utilização do computador para a busca de soluções. Esses problemas foram modelados a partir da teoria dos grafos.

Malta (2008), em sua dissertação de mestrado, afirma que a Teoria dos Grafos apresenta aspectos relevantes que merecem ser discutidos na Educação Básica através de uma metodologia que explora a resolução de problemas, tornando o indivíduo autônomo, criativo e capaz de aprender a aprender.

Malta (2008) afirma que seremos agentes transformadores quando aceitarmos a nossa condição de sujeitos inacabados e em constante formação. Por isso, devemos proporcionar aos nossos alunos uma aprendizagem que seja capaz de transformá-los. E através de situações problemas contextualizados, podemos mostrar a importância do estudo de matemática.

Todas essas pesquisas apontam que a inclusão do estudo de grafos na Educação Básica é possível e desejável.

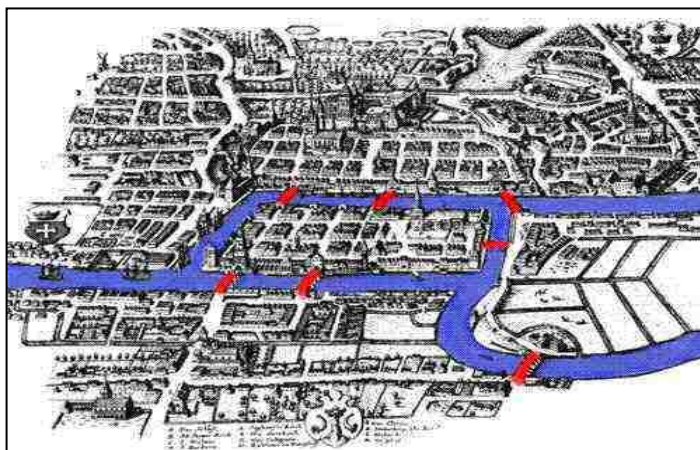
2.3 Grafos e registros de representação semiótica

Duval (2003) destaca a diferença entre a atividade cognitiva envolvida na Matemática, daquela que é exigida por outras áreas do conhecimento. Essa diferença é relacionada ao fato da importância das representações semióticas e da diversidade dessas representações na matemática. Só temos acesso aos objetos matemáticos através de suas representações e assim, os sistemas de registros desempenham um papel muito importante no desenvolvimento do pensamento matemático.

Os objetos matemáticos não são acessíveis de forma concreta; não podem ser medidos por aparelhos. Para ter acesso aos objetos matemáticos é preciso necessariamente ter acesso a suas representações semióticas e isso é um processo de abstração. Davis e Hersh (1995) exemplificam o processo de abstração em matemática usando um exemplo da teoria de grafos, destacando o processo de abstração. Os autores colocam o problema de atravessar um labirinto. O labirinto pode ser representado por um desenho, ou podemos associar a ele um grafo e depois ao grafo sua matriz de incidência. Há uma evolução do nível de abstração exigido.

O problema mais famoso, em teoria dos grafos, resolvido por Euler em 1736, foi o problema das sete pontes de Königsberg, que é um dos mais antigos registros sobre a teoria dos grafos e a resolução de problemas.

Figura 1 - As sete pontes de Königsberg



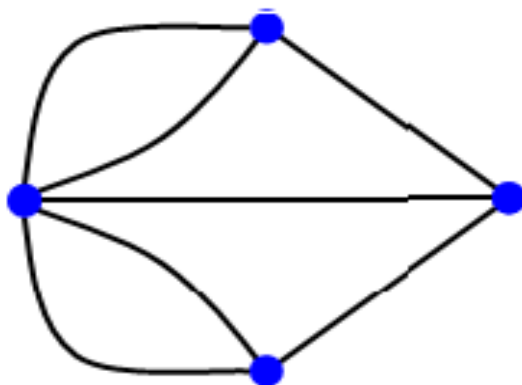
Fonte: EULER, 1968.

Na época, a cidade de Königsberg era o local de moradia de vários intelectuais conhecidos e Euler foi atraído pelo ambiente. Ao chegar à cidade, tomou conhecimento de um problema que estava sendo discutido entre os intelectuais da região e que, mesmo parecendo simples, ninguém ainda havia conseguido resolver.

No rio Pregel, que corta a cidade, havia duas ilhas que na época eram ligadas entre si e nas respectivas margens por sete pontes. O problema dizia o seguinte: será possível encontrar um caminho (percurso, passeio) que parta de uma das margens e, atravessando uma única vez cada ponte, retorne à margem de partida?

Euler observou e representou as partes de terra e as sete pontes pelo esquema representado na Figura 2.

Figura 2 - Grafo representativo das pontes de Königsberg



Fonte: EULER, 1968.

Cada linha representa uma ponte e cada ponto uma ilha ou uma margem. Ele observou que se pode passar, mas para retornar à margem de origem era preciso em algum momento repetir o caminho (ponte)¹.

O esquema gráfico apresentado por Euler, hoje em dia, é chamado de grafo.

O problema permite verificar a importância do grafo, como um registro de representação, um instrumento importante na modelagem e resolução de muitos problemas.

Os problemas relacionados à teoria dos grafos constituem hoje um campo de interesse crescente, com aplicações que vão desde os problemas de localização e de traçados de rotas para otimização de diversos tipos de serviços, projetos de processadores eletrônicos, planejamento de horários e outros.

Segundo Duval (2003), para que haja aprendizagem com entendimento, os alunos precisam conhecer pelos menos duas formas de representar um objeto matemático, aprendendo a: fazer conversões de um tipo de registro para outro (operação de conversão de registros) e operar dentro de um mesmo tipo de registro (operação de tratamento). Assim, uma situação matemática pode ser apresentada usando a linguagem natural, a linguagem gráfica, a linguagem algébrica, entre outras.

Os conhecimentos matemáticos podem ser solidificados a partir do momento em que os estudantes conseguirem transpor uma ideia expressa na linguagem natural para uma ou mais representações simbólicas, exemplificando e aplicando esses conhecimentos em situações do cotidiano.

Um grafo, sendo um objeto matemático, pode ser representado na forma icônica, consistindo em um tipo de diagrama que permite a representação de situações, constituindo-se também em instrumento de solução de problemas. Um grafo admite outras formas de representação: ao diagrama dado é possível associar uma representação matricial (matriz de incidência). Algumas vezes, representar o grafo por meio de sua matriz de incidência pode facilitar a resolução de um problema. Uma das riquezas da Matemática é justamente a variedade de possibilidades de representação de uma mesma ideia.

Duval (2003) descreve dois tipos de transformações das representações: o tratamento e a conversão. O primeiro tipo de mudança é o tratamento que não implica em uma mudança de registro, por isso é considerada “interna a um registro”. Por exemplo, transcrever um grafo da forma icônica para outra representação icônica, mudando apenas o tipo de desenho para representá-lo. O segundo tipo de mudança é a conversão em que ocorre a mudança do tipo de

¹ Uma discussão detalhada sobre o problema das sete pontes de Königsberg pode ser encontrada em Lima, 1988.

registro, como por exemplo, a mudança da representação do grafo da forma icônica para a forma matricial. Essa mudança conserva a ideia e a referência dos objetos, e é conhecida como uma transformação externa.

Entender um conceito matemático não é entender uma forma de representação. Para Duval (2003), a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro, estabelecendo relações entre o objeto e suas representações, mas sem confundir um objeto e sua representação.

A compreensão e o desenvolvimento do conhecimento matemático estão, assim, diretamente ligados ao conhecimento e utilização de mais de um tipo de registro de representação. Duval ressalta esse fato ao afirmar que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (DUVAL, 2003, p. 14).

Trabalhar com grafos é uma oportunidade de incentivar a utilização de diferentes tipos de representação de ideias matemáticas. Uma situação matemática, apresentada através de um problema escrito na linguagem natural, poderá ser representada na forma icônica, ou na forma de uma matriz, ou ainda na forma algébrica de pares não ordenados. Ao utilizarem essas diversas representações os alunos estão se desenvolvendo matematicamente, descobrindo várias possibilidades de representar e resolver uma situação problema.

2.4 Grafos nos livros didáticos

Sabemos que o livro didático é de extrema importância no processo ensino aprendizagem, vindo a se constituir em um recurso auxiliar e imprescindível na condução das atividades e do trabalho didático. O autor do texto didático torna-se um interlocutor, proporcionando um diálogo entre professor e aluno, na medida em que os conteúdos matemáticos vão sendo apresentados. No momento em que o professor direciona a aprendizagem e o aluno consegue compreender e desenvolver eficazmente uma situação com o auxílio do livro didático, é possível dizer que, de fato, a concepção do fazer e aprender matemática está sendo desenvolvida.

O conteúdo de grafos não necessariamente integra os textos didáticos do Ensino Médio. Analisando textos do ensino médio recomendados pelo programa nacional do livro didático (PNLD), verificamos que apenas um deles faz menção ao conteúdo de grafos. Procedemos a seguir a uma breve análise de como esse assunto vem sendo abordado nesse texto.

O livro analisado foi: Matemática Ensino Médio – 2º ano – Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz – Editora Saraiva – São Paulo, 6ª edição, 2010.

Procedemos à análise obedecendo a alguns critérios, que são:

- forma como o conteúdo é introduzido;
- conceitos da teoria de grafos explorados nas atividades propostas;
- tipos de registros de representação utilizados (icônico, matriz, tabela).

2.4.1 Análise do livro – Matemática ensino médio

O livro traz na unidade 13, que fala sobre matrizes, uma seção chamada *Para saber mais*. Nessa sessão as autoras retratam problemas associados a redes de comunicação, que pode ser esquematizada através de um grafo. Nesse momento as autoras sugerem a leitura e interpretação da atividade em duplas para análise e discussão das ideias apresentadas no texto.

Enerst (1996) fala em pedagogia de inquirição, buscando caracterizar os métodos de inquirição que caracterizam a descoberta guiada, resolução de problemas e abordagem investigativa. Ao resolver a atividade proposta pelas autoras, tem-se um momento privilegiado para registrar as investigações estabelecidas durante o processo de desenvolvimento da atividade.

Figura 3 - Atividade envolvendo grafos

PARA SABER MAIS

Redes de comunicação

Vamos supor que dos aeroportos de quatro cidades partam voos diários. No esquema ao lado, ①, ②, ③ e ④ representam essas cidades e as linhas representam os voos existentes entre elas.

Podemos associar a essa situação uma matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, que estabelece se há ou não voo direto entre as cidades, de modo que:

- se as cidades possuem ligação entre elas, ou seja, se há voo direto entre uma e outra, definimos $a_{ij} = 1$;
- se as cidades não se ligam diretamente, o que na situação descrita significa que não há voo direto entre elas, consideramos $a_{ij} = 0$;
- como todo ponto da rede se liga a ele mesmo, por convenção adotamos para esses casos $a_{ii} = 1$.

Em nosso exemplo, para montar a matriz A devemos "combinar" os pontos dois a dois, incluindo a "combinação" de cada ponto com ele mesmo. Assim, na matriz A :

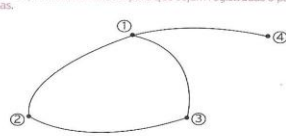
- a_{11}, a_{22}, a_{33} e a_{44} são iguais a 1, pois convencionamos assim pelo fato de os pontos 1, 2, 3 e 4 estarem ligados a si mesmos;
- $a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{31}, a_{23}, a_{32}$ e a_{41} são iguais a 1, porque representam pontos ligados entre si;
- a_{24}, a_{34}, a_{42} e a_{43} são iguais a zero, porque representam pontos que não estão diretamente ligados entre si.

Portanto, a matriz procurada é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A princípio, o desenho pode parecer mais simples que a matriz, mas pense no que aconteceria se tivéssemos 200 ou mesmo 1000 cidades.

Nesses casos, consultar as matrizes provavelmente seria mais fácil. Observe que essas matrizes teriam tamanho 200×200 ou 1000×1000 e poderiam estar armazenadas em computadores que permitissem uma consulta rápida para sabermos se duas cidades possuem ou não uma rota aérea direta entre elas e, até mesmo, que conexões são possíveis para ir de uma cidade à outra.

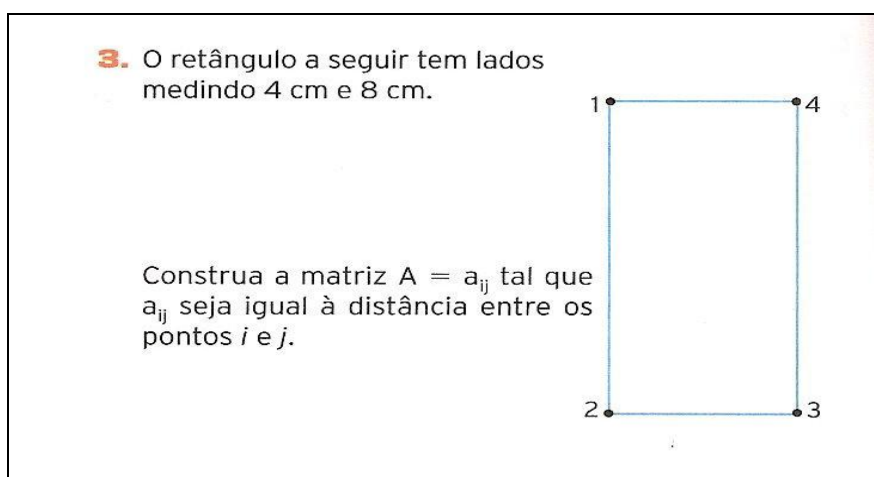


Fonte: Smole; Diniz, 2010.

Após a exploração dessa sessão, o livro apresenta os problemas e exercícios a serem desenvolvidos ao abordar o conteúdo de Matrizes, sendo que no decorrer dos exercícios são apresentados diagramas para serem interpretados e codificados em forma de matrizes, representando assim uma mudança no registro da atividade.

Na execução dessa atividade espera-se que os alunos consigam entender que uma ideia matemática pode ser representada de diversas formas. Uma das características mencionadas por Duval (2003, 2009) é que na matemática há uma variedade de representações semióticas utilizadas. Desenvolver o pensamento matemático passa por conhecer e dominar essas diversas formas de representação.

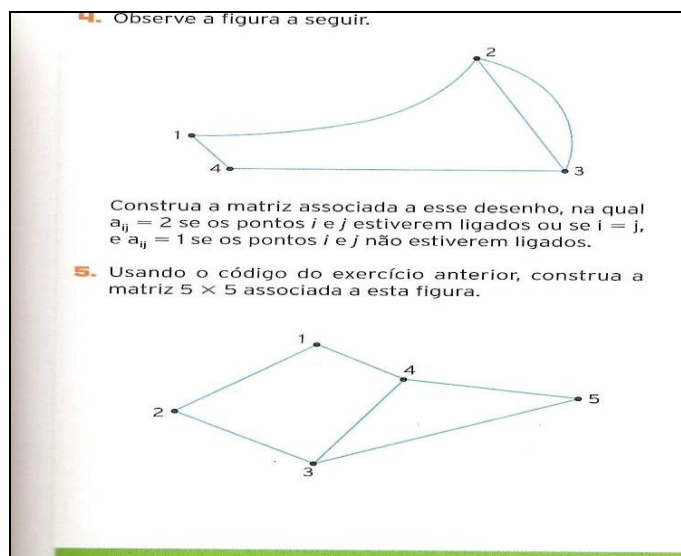
Figura 4 - Exercício proposto



Fonte: Smole; Diniz, 2010.

As atividades da Figura 5 trazem uma representação geométrica e um código para que os alunos representem as ideias geométricas em matrizes, fazendo também a transposição dos registros de representação. O domínio da multiplicidade das representações semióticas não está somente em conhecer as diferentes representações, mas sim em saber relacioná-las.

Figura 5 - Exercício proposto sobre grafos



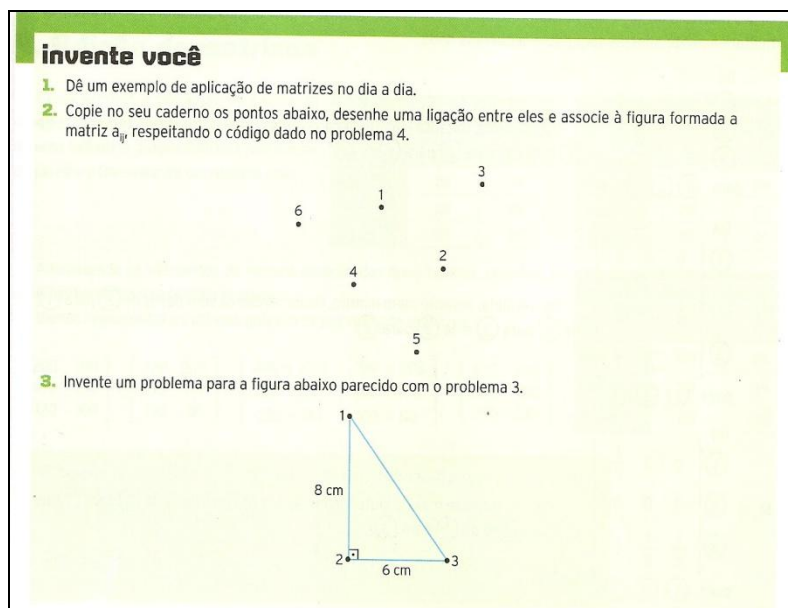
Fonte: Smole; Diniz, 2010.

Para concluir o capítulo as autoras apresentam uma sessão chamada *Invente Você*, na qual os alunos têm a oportunidade de criar problemas a partir de situações apresentadas. Nesse momento as variações de registros ficam a critério da criatividade de cada aluno, podendo ser representações geométricas, algébricas ou simplesmente uma justificativa na linguagem natural.

Esse tipo de atividade mostra a diversificação dos registros de representação semiótica destacados por Duval (2003), que aponta a necessidade de coordenação entre os diferentes registros. A produção de significados no trabalho com representações depende da relação existente entre eles como destaca Duval:

Nos sujeitos, uma representação pode verdadeiramente funcionar como representação [...] apenas quando duas condições são preenchidas: que eles disponham de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto [...] e que eles possa converter espontaneamente de um sistema semiótico a outro, mesmo sem perceber as representações produzidas. (DUVAL, 2009, p. 38).

Figura 6 - Atividades de criação de problemas com grafos



Fonte: Smole; Diniz, 2010.

A importância do estudo de grafos tem motivado autores a redigirem textos sobre o tema, que podem dar suporte a trabalhos desenvolvidos com estudantes da Educação Básica. Destacamos os textos:

- a) *Grafos: jogos e desafios*. Maria Laura Mouzinho Leite Lopes (org.) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – Projeto Fundação – Instituto de Matemática – 2010.
- b) *Grafos: introdução e prática*. Paulo Osvaldo Boaventura Netto, Samuel Jurkiewicz-Editora Blucher – São Paulo – 2009.

2.4.2 Considerações sobre o livro *Grafos: jogos e desafios*

O livro *Grafos: jogos e desafios* apresenta uma abordagem interdisciplinar e inovadora, como sugerem os PCNs para o Ensino Médio. As 15 práticas apresentadas no decorrer do livro proporcionam ao aluno um entendimento do que é Grafo e suas aplicações. Todas as atividades foram testadas em sala de aula e são apresentadas por meio de textos relatando fatos históricos ou situações do cotidiano, para, a partir da leitura e interpretação, o professor conduzir os alunos à exploração das mesmas, fazendo uma transposição de registros de representação.

Devemos nos desprender de pré-conceitos e levar os alunos para as discussões de situações que possam mostrar a aplicabilidade dos conteúdos estudados. Assim, o assunto

grafos pode ser abordado em várias áreas da matemática, proporcionando a interação entre conteúdo escolar e aplicações em situações do cotidiano. Quando os estudantes elaboram e transcrevem as representações em seus vários registros, demonstram que eles conseguem transformar a linguagem natural em outros registros, fazendo as conversões e suas caracterizações e proporcionando um melhor entendimento do conteúdo. As atividades introdutórias sobre grafos devem ser de forma sistematizada, pois esse conteúdo ainda é pouco abordado nos currículos de Matemática.

O livro trata do assunto sobre grafos através de resoluções de problemas. Apresentamos, a seguir, um quadro comparativo e algumas considerações acerca das questões apresentadas no livro.

Quadro 1 - Considerações sobre as atividades do livro grafos: jogos e desafios

(Continua)

ATIVIDADES	CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ATIVIDADES
1 - Sr. Manoel vai à cidade 2 - Reciclar é a solução	As duas atividades citadas abordam o tema reciclagem através de diagramas que no decorrer do desenvolvimento das mesmas, vai conceituando e formalizando o conceito de grafos. Portanto, devem ser aplicadas em sala de aula para introduzir as noções básicas do conteúdo.
3 - O jogo de dominó 4 - Alice no país do dominó	Essas duas atividades mostram uma aplicação da teoria de grafos com o jogo de dominó, apresentando uma conceituação básica da teoria, podendo, em grupos, discutir a ideia de representação dos grafos unicursais e multicursais de acordo com os números que estão nas peças do dominó.
5 - As sete pontes de Königsberg	O problema relata um fato histórico na representação dos grafos, pois foi a partir do problema das sete pontes de Königsberg que Euler, no século XVIII, começou a construir as ideias de grafos e suas representações. O problema é de grande importância, pois leva o aluno a interagir com os fatos históricos do desenvolvimento matemático.
6 - A copa de 2006	O problema é interessante, pois aplica a teoria dos grafos na organização das chaves que disputam o mundial de 2006. Podendo a ideia ser estendida a qualquer tipo de campeonato. Portanto, é um problema que pode sempre ser adaptado para os acontecimentos esportivos, tais como copas, campeonatos estaduais, campeonato brasileiro entre outros, uma vez que os alunos sempre se envolvem com as decisões desses campeonatos. O problema desperta a curiosidade para as aplicações do conteúdo de grafos.
7 - A feira de Magali	O problema aborda uma situação em que Magali vai à feira para saber o nome das frutas e trabalhou com duas representações (grafos) obedecendo alguns critérios. O primeiro critério foi organizar as frutas de acordo com a letra inicial e o segundo critério foi de acordo com o número de sílabas que cada nome de fruta possui. A importância desse tipo de trabalho é que ele pode ser adaptado para agrupar animais, pessoas, flores e outros, fazendo com que os registros de representação passam a ter importância e facilitem as interpretações das situações do cotidiano.

(Continua)

ATIVIDADES	CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ATIVIDADES
8 - Sequências Numéricas 9 - A Conquista do Acre	Essas duas atividades podem ser trabalhadas juntas, pois apresentam uma mesma ideia de representação. A atividade 8 propõe que os alunos façam representações de uma sequência numérica obedecendo a ordem dada na sequência de forma que o grafo seja orientado para que possamos através da representação do grafo identificar a ordem da sequência. O interessante é que pode ser trabalhado qualquer tipo de número, sendo eles inteiros, negativos, fracionários, decimais, proporcionando um entendimento em relação a ordem numérica. A atividade 9 segue o mesmo padrão da atividade 8, porém, relaciona a ordem alfabética, pois o grafo orientado a ser construído é através de palavras.
10 - O Problema das quatro cores	O problema relata um fato histórico na representação dos grafos, pois foi a partir dele que Morgan no século XIX começou a discutir as ideias de fronteiras. O problema é interessante, pois pode ser contextualizado, mostrando relações entre a matemática e a geografia por exemplo. O problema é de grande importância, pois leva o aluno a interagir com os fatos históricos do desenvolvimento matemático. Podendo ampliar o problema das quatro cores, sugerindo aos alunos uma pesquisa para verificar que só em 1976 os matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken demonstraram a proposição das quatro cores para demarcar regiões de um mapa, por países ou estados, fazendo distinções entre as regiões vizinhas, que tem fronteiras em comum. Verificando que são necessários no mínimo quatro cores.
11 - Grafos dos polígonos convexos 12 - Poliedros de Platão	As atividades 11 e 12 podem ser trabalhadas em conjunto, pois ambas abordam as ideias da geometria com os conceitos de unicursal e multicursal, proporcionando aos alunos os entendimentos e aplicações desses registros em outras áreas da matemática. Após as análises das atividades os alunos poderão concluir que a relação de Euler ($V+F = A+2$) é válida para os poliedros de Platão. O interessante é que Euler foi o matemático que começou o estudo dos grafos relacionando-os as pontes de Königsberg.
13 - O Computador e os Grafos	Nesta atividade caracteriza-se a importância de estabelecer relações entre os conteúdos matemáticos, em que os estudantes representam um grafo através de uma matriz quadrada, mostrando que um problema pode ser registrado de várias formas, sendo elas, a linguagem natural ou as representações icônicas como matrizes e grafos entre outras. O problema aborda também a linguagem matemática do computador, mostrando a importância de estabelecer relações entre as áreas do conhecimento.
14 - A criação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)	A questão aborda a ideia de vértice, sendo eles pares ou ímpares, que é uma condição inicial para verificar se o grafo possui um caminho ou ciclo e classificando o grafo em euleriano ou semieuleriano. Nesse momento os estudantes devem aplicar o conceito de que um grafo é euleriano se possuir todos os vértices pares e semieuleriano se possuir exatamente dois vértices ímpares. Esta atividade aborda uma temática sobre as pesquisas que estão sendo desenvolvidas no país, o que torna o problema interessante para contextualizar e aplicar as ideias matemáticas em situações práticas, mostrando as relações entre uma situação descrita na língua natural em outro registro de representação.

(Conclusão)

ATIVIDADES	CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ATIVIDADES
15 - O jogo das 20 cidades	Hamilton no século XIX apresentou o desafio histórico sobre o jogo das 20 cidades, definindo a partir desse fato que grafos hamiltonianos são aqueles em que é possível partir de um de seus vértices, passar todos os outros uma única vez e voltar ao vértice de partida. Um vértice pode ser hamiltoniano e euleriano ao mesmo tempo. Nesta atividade pode também propor aos alunos para criarem um roteiro incluindo 20 lugares para visitar em suas férias e através da construção do grafo relacionado traçar o caminho para que o roteiro seja cumprido com menor gasto. Nesse momento a contextualização do problema torna-se fundamental e envolvente, pois os alunos perceberão uma aplicação direta do conteúdo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

As atividades apresentadas nesse caderno podem ser trabalhadas como situações desafiadoras no decorrer do período letivo, levando os alunos a entenderem e representarem um grafo, bem como suas aplicações em situações do cotidiano.

2.1.3 Considerações sobre o livro *Grafos: introdução e prática*

O assunto grafos vem sendo bastante discutido nos dias atuais. O livro *Grafos: introdução e prática*, de Boaventura Netto e Samuel Jurkiewicz (2009), apresenta uma introdução à teoria dos grafos e é recomendado para disciplinas de graduação de cursos universitários, proporcionando aos alunos um contato com a matemática discreta. Os autores apresentam o texto com uma linguagem coloquial de fácil entendimento, para que os alunos possam a partir desse contato ter um fascínio sobre a teoria descrita e suas aplicações. Os autores esperam que o leitor, ao ter contato com a teoria dos grafos, compreenda a utilidade dos conceitos e processos apresentados. O livro apresenta no final de cada capítulo, atividades de aplicações dos grafos. O conteúdo é distribuído em nove capítulos, sobre os quais fazemos algumas considerações.

Quadro 2 - Considerações sobre o livro *Grafos: introdução e prática*

(Continua)

CAPÍTULO	CONSIDERAÇÕES
1 - Primeiras ideias	Neste capítulo os autores apresentam uma notação histórica do assunto, abordando problemas como o das pontes de Königsberg, que originou toda investigação e conceituação de grafos quando Euler representou a ideia das pontes em um registro planar, que hoje é chamado de grafo e verificou que é impossível solucionar o problema das sete pontes de Königsberg. Neste capítulo, também é

(Continua)

CAPÍTULO	CONSIDERAÇÕES
	apresentado outros problemas históricos que levam os alunos a investigarem a teoria dos grafos, chegando a entender e criar modelos de representação e a interpretar alguns conceitos como vértices, arestas, ciclos, caminhos, interpretações sobre os grafos unicursais e multicursais. Nesse momento os modelos de grafos são suficientes para transformar alguns problemas que estão na linguagem natural para outros registros de representação. É importante observar que a aplicação de alguns elementos da Matemática Discreta pode ser aplicado na computação e no desenvolvimento de alguns algoritmos.
2 - Conceitos básicos de grafos	Neste capítulo são abordados conceitos básicos, tais como alguns tipos de representações, apresentando nesse momento a interação entre a matemática com a própria matemática, explorando as matrizes de adjacência e de incidência e suas interpretações. Os conceitos de ordem, tamanho, grafos complementares, subgrafo, vizinhança, grau, percursos, diferenciando nesse momento caminho simples, caminho elementar, ciclo e circuito, qualificando assim os tipos de percursos que podem acontecer em um grafo. O capítulo aborda também alguns tipos especiais de grafos tais como o grafo simétrico, o grafo completo, o grafo orientado, o grafo induzido de outro grafo e o grafo bipartido. Os autores apresentam o algoritmo de Malgrange que é feito através da varredura da matriz de adjacência à procura das vizinhanças dos vértices encontrados. Logo após essas explicações o capítulo sugere uma lista geral de atividades para explorar e fixar as ideias discutidas durante o estudo do texto.
3 - Problemas de caminhos.	O capítulo aborda temáticas para o cálculo de caminhos mínimos em um grafo, aplicando neste contexto a linguagem dos grafos que indica o caminho de menor custo. Os autores apresentam nesse momento o algoritmo de Dijkstra que é usado para achar o caminho mínimo. Num processo investigativo e contextualizado, são apresentados problemas relacionados a distâncias entre cidades e com a aplicação do algoritmo de Dijkstra verifica-se qual é o menor percurso. Neste capítulo também é apresentado um método para o caminho máximo, ou caminho crítico.
4 - Problemas de interligação	Neste capítulo os autores abordam problemas envolvendo ideias de árvores, definindo que uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos. Os autores apresentam as aplicabilidades desse tipo de grafo em organogramas de empresas, esquema-tabela de campeonato, entre outras aplicações relacionadas a ideias do dia a dia. Havendo também aplicações desses grafos em problemas de custo mínimo. Nesse momento os alunos já possuem um conhecimento bem elaborado do assunto, podendo aplicar em várias áreas do conhecimento, transcrevendo os problemas da linguagem natural em outros registros de representação, facilitando assim os processos de resolução e o entendimento das mesmas.

(Conclusão)

CAPÍTULO	CONSIDERAÇÕES
5 - Subconjuntos especiais	Neste momento os autores abordam as relações de conjuntos independentes para apresentar a importância desse tipo de subconjunto numa ideia de modelagem, e identificar o número de independência, bem como sua cardinalidade. O capítulo também apresenta algumas ideias para programação linear inteira, usando a matriz de incidência e sua transposta. Destacando o algoritmo húngaro para o cálculo de alocação linear, mostrando uma aplicação contextualizada do conteúdo. As atividades apresentadas neste capítulo são bem interessantes, pois proporcionam aos estudantes uma análise das aplicações dos grafos em questões do cotidiano.
6 - Problemas de coloração	Os problemas associados à coloração dos vértices é diretamente relacionado aos conjuntos independentes que foram abordados no capítulo 5. Os autores sugerem problemas de aplicação e apresentam soluções usando o algoritmo guloso para entender resolver esse tipo de problema. Todas as atividades apresentadas no decorrer do capítulo e as de fixação que são apresentadas no final desta unidade são contextualizadas, proporcionando uma visão direta das aplicações dos grafos no dia a dia.
7 - Fluxos em grafos	O capítulo retoma aos grafos valorados, que são aqueles aos quais são atribuídos algum tipo de valor aos vértices, ou às ligações (arestas), mostrando que os tipos de valoração são de natureza estática, quando se trata de número de habitantes de uma cidade, ou de natureza dinâmica quando se trata do número de veículos que passam por uma avenida num determinado tempo. Os modelos de fluxos que os autores apresentam são os lineares e não lineares. Os exemplos apresentadas no decorrer do capítulo e os exercícios para fechamento do mesmo, são diretamente aplicados em situações do cotidiano, mostrando aos estudantes que de forma direta o conteúdo de grafos é usado para facilitar uma visualização das situações práticas, como por exemplo, um mapa rodoviário.
8 - Ciclos e aplicações	Nos capítulos anteriores foram abordados conceitos de grafos eulerianos e hamiltonianos, agora algumas aplicações desses grafos, serão apresentadas, principalmente quando se trata de uma ideia não orientada com todos os vértices ímpares. Os autores exploram o problema do carteiro chinês que sua representação é um grafo com os quatro vértices ímpares, portanto ele é não euleriano. Nesse momento aplica-se o algoritmo de Dijkstra para obter a distância entre os pares de vértices de grau ímpar e representá-los em uma matriz. Para transformá-lo em um grafo euleriano, serão adicionadas arestas fictícias que representam as repetições, tornando possível assim fazer o percurso, sem adicionar custos.
9 - Grafos planares	Neste capítulo os autores definem grafos planares, como sendo aqueles que admitem uma representação gráfica. Neste momento é apresentado os poliedros platônicos e suas representações planares. Neste capítulo é apresentado também o problema das ligações de telefone, luz e gás a três casas vizinhas sem que as linhas se cruzem. Esse problema é um dos clássicos da teoria dos grafos. Após investigar sobre as possíveis resoluções, verifica-se que é impossível resolvê-lo, pois seus vértices são todos ímpares. Os autores enfatizam também neste capítulo o teorema de Kuratowski, o problema da dualidade e o problema das quatro cores. Logo em seguida são apresentados os exercícios para serem resolvidos a partir das teorias discutidas no capítulo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. E a forma como Boaventura e Jurkiewicz abordaram a temática, no livro *Grafos: introdução e prática*, proporciona que os alunos investiguem as ideias sobre o tema e ao apresentarem as atividades de forma contextualizada, os estudantes aprimoram os conceitos acerca dos conteúdos e buscam uma aprendizagem com significado

Na pesquisa aqui relatada, apresentamos uma proposta de introdução da Teoria de Grafos no Ensino Médio, com o objetivo de que os alunos estabeleçam uma conexão entre os demais assuntos estudados com a teoria citada, proporcionando a eles uma visualização e aplicação dos conteúdos de Matemática.

Quando os alunos conseguem entender o significado de uma situação problema, representando-a sob outras formas de registros, evidencia-se necessariamente o papel da escola que é de mostrar significados para as ideias matemáticas discutidas em sala de aula. Para tanto, trabalhamos com a teoria de Duval (2003) que aponta os registros de representação semiótica como instrumento indispensável para o desenvolvimento matemático dos estudantes. Abordamos também as ideias investigativas de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) como instrumento para as interpretações e representações das situações que estarão envolvidas no processo de ensino aprendizagem.

3 O PERCURSO DA PESQUISA

Essa pesquisa teve como objetivo investigar e apresentar estratégias de ensino-aprendizagem que permitam viabilizar a introdução do conceito de Grafos no Ensino Médio, como conteúdo integralizador e como registros de representação que possam nortear algumas estratégias para a resolução de problemas.

As análises teóricas sobre a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2009), os métodos de inquirição de Ernest (1996), as atividades investigativas de Ponte (2006) e a resolução de problemas segundo Polya (1995), fundamentaram e objetivaram a elaboração da oficina, que teve como foco o Ensino de Grafos na Educação Básica. As atividades foram apresentadas na forma de situações problemas que abordavam os grafos buscando interligar os conteúdos de matrizes e cálculo combinatório.

Desenvolvemos um estudo empírico, junto a alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Cachoeiro de Itapemirim, Espírito Santo. O estudo consistiu na elaboração e posterior implementação de uma oficina composta de cinco etapas. Nas quatro primeiras etapas foram desenvolvidas quatro listas de atividades em duas aulas de cinquenta minutos cada. Na última etapa foi feita uma avaliação do trabalho desenvolvido.

3.1 O contexto da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida com um grupo de alunos da terceira série do Ensino Médio do Colégio *Jesus Cristo Rei*, escola da rede privada, confessional católica, com um percurso histórico de 82 anos de serviços prestados à cidade de Cachoeiro de Itapemirim, Espírito Santo, onde está localizada, e às cidades vizinhas. A escola trabalha com a Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio.

O projeto político pedagógico da escola incentiva inovações no campo da pesquisa em educação e a proposta de desenvolvimento das atividades abordando o conteúdo de grafos foi considerada relevante por envolver os alunos em atividades de investigação em matemática, possibilitando um trabalho em equipe.

O Colégio *Jesus Cristo Rei*, amparado pelo projeto político pedagógico, determina a responsabilidade como instituição educacional entender o passado, viver o presente e vislumbrar o futuro, criando condições para que os discentes se desenvolvam integralmente.

As atividades investigativas trabalhadas na oficina proporcionaram que os alunos desenvolvessem habilidades recomendadas pela escola, despertando:

A necessidade do questionamento;
A alegria da descoberta;
O valor da crítica conseqüente;
A coragem da denúncia;
O poder da ação.
(COLÉGIO JESUS CRISTO REI, 2010, p. 15)

No ano de 2010, as terceiras séries do Ensino Médio funcionavam no período vespertino e eram constituídas por 150 alunos. A maioria dos estudantes era da própria escola desde a primeira série do Ensino Médio. Os conteúdos sobre matrizes e análise combinatória são explorados na segunda série do Ensino Médio. Procurando fazer uma relação com a própria matemática, as atividades sobre grafos foram desenhadas para as turmas que já haviam estudado esses conteúdos.

A princípio, a pesquisa seria desenvolvida no horário regular das aulas, mas, considerando o fato de serem alunos do 3º ano, optamos por desenvolver o trabalho na forma de uma oficina, oferecida em horário extraclasse, pois os estudantes estavam em preparação para a realização dos processos seletivos de ingresso ao ensino superior, ou seja, para os vestibulares e para a realização do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Assim, dentre os alunos, 15 se disponibilizaram a participar das atividades da oficina, contribuindo com a pesquisa desenvolvida.

3.2 O desenho teórico-metodológico

A pesquisa foi desenhada tendo por inspiração a engenharia didática. A engenharia didática foi proposta por Artigue, segundo Pais (2008). Associa-se o nome engenharia didática ao trabalho desenvolvido por um engenheiro no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto.

Como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática caracteriza-se, a princípio, em experiências realizadas em sala de aula através de situações didáticas para observação, concepção e análise de sessões de ensino. A metodologia da Engenharia Didática vem sendo utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino aprendizagem de um dado conceito.

Segundo Carneiro (2005, p. 90), a engenharia didática foi criada para atender as questões das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino e nas realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. A prática de ensino é articulada com a prática de investigação, os conhecimentos matemáticos e didáticos são integrados.

Para Almouloud e Coutinho (2008, p. 62), esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer). Na escola francesa, as pesquisas em Didática da Matemática, geralmente, ocorrem de forma experimental para que haja investigação, experimentação e logo a seguir uma intervenção a partir da organização e sistematização das observações feitas no decorrer da pesquisa.

Durante a experimentação, recorre-se à experiência, à análise e aos registros que podem representar a situação descrita nas ideias problematizadoras. Os participantes respondem às questões utilizando os conhecimentos anteriores e à medida que desenvolvem as investigações, os conceitos vão sendo elaborados e as observações são registradas.

A metodologia da engenharia didática compreende quatro fases: análises preliminares; construção da sequência didática e análise *a priori*; experimentação, ou condução da sequência; análise *a posteriori* e avaliação.

A primeira fase das análises preliminares tem como referência o quadro teórico didático sobre o qual fundamenta a proposta de pesquisa. Sendo necessário nessa fase que o pesquisador faça uma análise das primeiras dimensões relacionadas aos conteúdos envolvidos na pesquisa, sendo uma análise epistemológica, uma pedagógica para avaliar os efeitos da proposta de pesquisa. A análise preliminar tem como base fornecer subsídios para a construção da engenharia didática.

Em nossa pesquisa, essa fase consistiu em estudos teóricos sobre as investigações matemáticas e a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, a partir do qual definimos o foco para elaboração das atividades da oficina.

A segunda fase é a fase da concepção e análise *a priori* das situações da engenharia didática. Tomando como base as análises preliminares, o pesquisador escolherá algumas variáveis que estão relacionadas ao ensino do conteúdo que está sendo pesquisado. Essas variáveis serão consideradas para se fazer o desenho da proposta didática, sendo que elas são de dois tipos: macrodidáticas ou globais, relativas às organizações globais da engenharia; e variáveis microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, organizando cada fase ou seção do desenvolvimento da pesquisa.

A elaboração de uma sequência didática exige toda uma preparação, conforme mostra Pais:

Uma sequência didática é formada por certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas

seções, tendo em vista o seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas no sentido da rotina da sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigatório. (PAIS, 2008, p. 102).

Na pesquisa aqui relatada, essa fase compreendeu o desenho da oficina, compreendendo quatro sequências de atividades e um questionário de avaliação. Cada atividade demandou um planejamento detalhado tendo como objetivo propor situações de aprendizagem, que envolvessem o aluno no estudo dos conteúdos apresentados. Na terceira seção deste capítulo faremos uma descrição de cada etapa e das listas de atividades, apresentando os objetivos e uma previsão das possíveis dificuldades dos alunos na resolução das mesmas.

A terceira fase da engenharia didática é a experimentação, que constitui o momento de se colocar em funcionamento as atividades propostas, entrando em prática o saber didático do professor. Nessa fase, a sequência didática proposta deverá ser desenvolvida através de uma abordagem metodológica que privilegie a criticidade e a reflexão numa perspectiva de construção de um saber consciente e indagador.

Assim, essa fase consistiu na implementação da oficina abordando o conteúdo de grafos. Essa fase da pesquisa compreendeu quatro etapas, com duração de cerca de 100 minutos cada, em que foram feitas as experimentações e discussões das atividades e os estudantes fizeram os registros das observações e conclusões. A etapa final compreendeu a avaliação dos trabalhos, feita pelos estudantes.

As atividades foram desenvolvidas de acordo com as etapas investigativas sugeridas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). O primeiro momento consiste no reconhecimento da situação, correspondendo a uma exploração preliminar das questões a serem abordadas. O segundo momento está associado ao processo de formulação de conjecturas para estar estabelecendo uma relação mais generalizada das atividades apresentadas. O terceiro momento está relacionado ao refinamento das conjecturas e a realização de testes sobre as questões investigadas, já o quarto momento refere-se às argumentações, demonstrações e avaliações das questões investigadas.

Quadro 3 - Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	- Reconhecer uma situação problemática. - Explorar a situação problemática. - Formular questões.
Conjecturas	- Organizar dados. - Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura).
Testes e reformulações	- Realizar testes. - Refinar conjecturas.
Justificação e avaliação	- Justificar uma conjectura. - Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006.

Na primeira etapa, foi proposto que os alunos trabalhassem em trios para resolverem a 1ª Lista de Atividades, compreendendo problemas envolvendo a teoria de grafos e suas representações. Nesse momento os alunos puderam questionar a respeito das atividades havendo uma discussão entre os componentes do grupo.

No segundo momento, houve uma socialização das questões desenvolvidas na etapa anterior para apresentação dos resultados obtidos em cada situação problematizadora. Logo após a exposição dos resultados, demos início à segunda etapa, compreendendo a 2ª Lista de Atividades, envolvendo combinatória e matrizes para que os alunos pudessem novamente em trios desenvolver e registrar suas conclusões a respeito de cada atividade proposta.

A terceira etapa da oficina iniciou com uma socialização das questões desenvolvidas anteriormente e logo após a discussão das atividades, o grupo foi novamente dividido em trios para que pudessem resolver a 3ª Lista de Atividades, envolvendo situações problemas que pudessem ser resolvidos através da teoria dos grafos e suas representações. Ao término das atividades os grupos fizeram uma breve apresentação para análise dos resultados e discussão das respostas encontradas pelos grupos.

Na quarta etapa da oficina, os alunos resolveram a 4ª Lista de Atividades nos mesmos moldes da terceira etapa.

A quinta e última etapa da oficina foi constituída por uma socialização geral das atividades desenvolvidas, havendo participação direta do grupo de alunos, sobre o que acharam a respeito das atividades e da forma como foram conduzidas suas resoluções e discussões a respeito de cada registro apresentados pelos grupos. Após essa conversa, os alunos responderam a um questionário para falar da experiência de fazer conexões entre conteúdos matemáticos.

A quarta fase da Engenharia Didática é a análise *a posteriori* da sequência de atividades. Consiste em uma análise dos resultados obtidos através das investigações e dos registros apresentados que possam contribuir para a melhoria dos conhecimentos didáticos.

A análise *a posteriori* de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se tem sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que:

- A observação foi preparada por uma análise *a priori* conhecida do observador.
- Os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise *a priori*. (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 68).

Na pesquisa aqui relatada, a análise *a posteriori* consistiu na análise dos registros escritos dos alunos, de cada uma das atividades da oficina e das gravações em áudio dos momentos de socialização, procurando relacionar os dados obtidos com a análise *a priori*, em que foram destacados os objetivos, buscando identificar as regularidades apresentadas no processo de resolução das atividades. Nessa fase buscamos a validação da Engenharia Didática através da articulação entre as três etapas de análises preliminares, análise *a priori* e análise *a posteriori*. Os resultados dessa análise integram o Capítulo 4.

3.3 Descrição da oficina: etapas e atividades

O desenvolvimento da oficina deu-se através da aplicação das atividades em sala, com base na proposta investigativa de Ponte e colaboradores:

Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito; (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma; (iii) discussão dos resultados, nos quais os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 25).

As listas de atividades, propostas numa forma investigativa, foram aplicadas em consonância com a proposta desses autores. Os alunos foram convidados a participar da oficina e a investigar características dos grafos, para então estabelecer ideias básicas acerca da Teoria dos Grafos. Ao final de cada atividade havia uma socialização sobre o desenvolvimento e conclusões estabelecidas a respeito da mesma, fazendo com que aos

poucos, no decorrer das atividades, as ideias e representações de grafos fossem sendo estabelecidas. Uma atenção especial foi dada à questão dos registros de representação, base teórica que fundamentou a elaboração das sequências de atividades, explorando-se as diversas formas de registro, icônica, linguagem natural, linguagem algébrica, linguagem matricial, entre outras.

No momento da socialização, os alunos eram levados a questionar e sugerir ideias para as interpretações e representações de cada problema. O professor e pesquisador tinha nesse momento o papel de organizador, coordenando a participação dos alunos, fazendo intervenções e esclarecendo algumas dúvidas bem como propondo alternativas para a resolução das atividades.

Após a socialização, os alunos recebiam uma folha para anotarem suas conclusões a respeito da Teoria de Grafos, conceito que estava sendo abordado nas atividades propostas.

As atividades trabalhadas na oficina apresentam os conteúdos de grafos, abordando suas definições, classificações, elementos e aplicações em problemas que se relacionam com situações do cotidiano. No percurso da oficina foram trabalhadas quatro listas de atividades em que os alunos deveriam analisar investigar e apresentar conclusões sobre grafos, a partir de uma breve orientação no enunciado das questões.

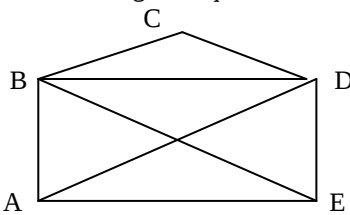
A oficina foi desenvolvida em quatro encontros de 100 minutos cada, compreendendo cinco etapas apresentadas a seguir.

3.3.1 Primeira etapa

A 1ª Lista de Atividades trabalhada na oficina teve como objetivo apresentar os grafos por meio de exemplos, buscando que os alunos identificassem seus elementos (vértices e arcos ou arestas), construindo o conceito do que é um grafo e que utilizassem esse novo objeto matemático para resolver problemas.

A primeira atividade da lista apresenta um modelo de grafo, na forma de um envelope e propõe questionamentos para que os alunos observem o grafo, identificando e classificando os seus vértices. É então proposto um problema, modelado pelo grafo dado para ser resolvido. Os alunos são convidados a investigar a possibilidade de desenhar o envelope sem tirar o lápis do papel, e sem passar pelo mesmo arco duas vezes. Nesse momento pretendemos que o aluno desenvolva experiências matemáticas, escolhendo pontos de partida e caminhos diferentes na tentativa de reconhecer, explorar e solucionar o problema.

Quadro 4 - Primeira Atividade - 1ª Lista

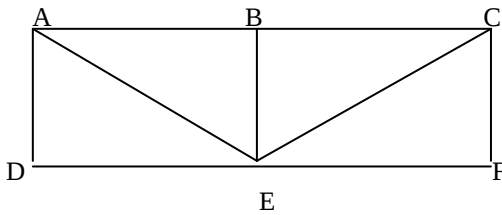
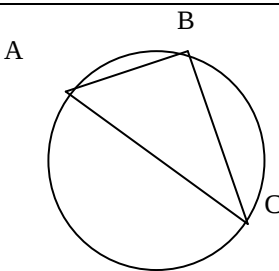
1ª LISTA de ATIVIDADES (sala) - Atividade 1	
Os problemas seguintes envolvem o conteúdo matemático denominado Grafos, que é novo para muitos de vocês. Nos grafos das Figuras 1, 2 e 3 cada ponto indicado por uma letra maiúscula é um vértice e cada linha que liga dois vértices é chamada de aresta ou arco. Leia com atenção os enunciados e responda as questões propostas, registrando por escrito suas ideias.	
Observe a Figura 1 que tem a forma de um envelope aberto	
	
Identifique os vértices da Figura 1.	
Em cada grafo, determinado vértice pode ser classificado como par, ou ímpar, dependendo do número de arcos que dele parte. Quais os vértices do grafo da Figura 1 que você classificaria como pares?	
Quais os vértices do grafo da Figura 1 que você classificaria como ímpares? Justifique.	
Pode-se desenhar o envelope sem tirar o lápis do papel, e sem passar pelo mesmo arco duas vezes? Justifique.	
Em caso afirmativo, quais poderiam ser os vértices de origem? E os de chegada?	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na segunda atividade da primeira lista são apresentados dois grafos e os alunos deveriam responder alguns questionamentos a partir das análises, investigações e conclusões obtidas na primeira atividade. Nesse momento os alunos são convidados a registrar por escrito usando a linguagem natural como explicariam para um colega o que seja um grafo. Pretendemos que os alunos aos poucos construam a ideia do objeto matemático grafo.

Quadro 5 - Segunda Atividade - 1ª Lista

(Continua)

1ª LISTA de ATIVIDADES (sala) - Atividade 2	
2) a) Observe as figuras e responda ao que se pede:	
	
Figura 2	Figura 3
Vértices:	Vértices:
Vértices pares:	Vértices pares:
Vértices ímpares:	Vértices ímpares:

(Conclusão)

b) Pode-se desenhar a Figura 2 sem tirar o lápis do papel, e sem passar pelo mesmo arco duas vezes?	d) Pode-se desenhar a Figura 3 sem tirar o lápis do papel, e sem passar pelo mesmo arco duas vezes?
c) Em caso afirmativo, quais poderiam ser os vértices de origem? E os de chegada?	e) Em caso afirmativo, quais poderiam ser os vértices de origem? E os de chegada?
f) Analise as características dos vértices das Figuras 1, 2 e 3.	
g) É possível sempre percorrer todas as arestas de um grafo uma única vez? Justifique, em que situações isso é possível.	
h) Como você explicaria para um colega o que seja um grafo?	
i) Escreva um pequeno texto relatando o que você aprendeu até agora sobre grafos.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

A terceira atividade da primeira lista apresenta um problema na linguagem natural, envolvendo caminhos entre quatro cidades. Os alunos deveriam representar através de um desenho (grafo) a situação descrita no problema, e a partir desse registro responder a quatro itens relacionados à quantidade de caminhos possíveis para ir de uma das cidades até outra.

Considerando-se o caráter integrador do conceito de grafos e a possibilidade desse tópico ser elemento de conexão com outros conteúdos matemáticos já estudados, esperávamos que os alunos associassem a questão ao princípio multiplicativo da análise combinatória.

Foram incentivadas as conversões que, conforme Duval (2003), são transformações de representações que constituem em mudar de registro, conservando os mesmos objetos denotados, por exemplo: passar o problema da linguagem natural para um registro em forma de desenho que é uma possível representação gráfica.

Quadro 6 - Terceira Atividade - 1ª Lista

1ª LISTA de ATIVIDADES (sala) - Atividade 3
3) Sonhos, Acordados, Bem Querer e Felicidade são cidades de país bem próximo. Duas das estradas existentes levam-nos de Sonhos a Acordados, cinco de Acordados a Bem Querer e três de Bem Querer à Felicidade.
Represente a ideia através de um desenho.
De quantos modos podemos ir de Sonhos a Bem Querer? Explique como fez para obter sua resposta.
De quantos modos podemos ir de Acordados a Felicidade e retornar a Acordados por caminhos diferentes? Represente o resultado através de uma expressão numérica.
De quantos modos podemos ir de Sonhos à Felicidade? Represente o resultado usando mais de uma forma de representação.
É possível representar o problema 3 por meio de um grafo? Justifique

Fonte: Elaborado pelo autor.

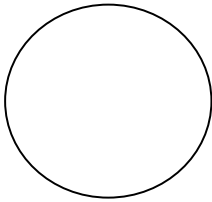
As dificuldades previstas para essa primeira etapa da oficina foram para o momento da conclusão das investigações, quando os alunos deveriam entender e justificar quando era possível fazer o percurso sem tirar o lápis do papel.

3.3.2 Segunda etapa

A segunda lista de atividades teve como objetivo a interpretação gráfica de um polígono inscrito numa circunferência e suas diagonais, relacionando com a ideia de registro de grafo e os possíveis caminhos entre suas arestas, explorada na primeira lista de atividades. Nesse momento da pesquisa, o aluno deveria mostrar que havia associado o que é um grafo e algumas formas de representá-los. O aluno deveria aplicar o tratamento de transformação de representação, operando dentro de um mesmo registro, analisando a figura e representando na própria figura suas diagonais, não havendo mudança de registro.

Quadro 7 - Atividades da 2ª Lista

(Continua)

2ª LISTA de ATIVIDADES (sala) - Atividades 1, 2 e 3
1) Sobre a circunferência (Figura 1) marque 5 pontos distintos.
Figura 1 
Represente cada ponto por uma letra maiúscula escolhida entre as cinco primeiras letras do nosso alfabeto.
As cordas AD e DA possuem a mesma medida? Justifique.
Desenhe todos os segmentos possíveis, tomando como extremos dois dos pontos destacados sobre a circunferência. Quantos segmentos foram desenhados?
Qual polígono ficou formado quando observamos os segmentos que ligam dois pontos consecutivos?
Quantas diagonais têm esse polígono?
Classifique os vértices do polígono formado em pares ou ímpares.
É possível desenhar o polígono formado e suas diagonais, partindo, de um vértice qualquer sem tirar o lápis do papel e passando uma única vez em cada segmento? Justifique.

(Conclusão)

Quantos segmentos podem ser formados unindo-se dois a dois 6 pontos distintos sobre uma circunferência? Justifique sua resposta.
2) Construa circunferências marcando: a) 6 pontos b) 7 pontos c) 8 pontos Anotar o que você observa sobre os polígonos formados ao se unir dois pontos consecutivos:
3) Você seria capaz de indicar uma condição para que se possa desenhar um polígono e suas diagonais partindo de um vértice, sem tirar o lápis do papel e sem passar pelo mesmo caminho mais de uma vez? Justifique

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa atividade, não se pensou em dificuldades para a sua realização, pois os alunos já haviam socializado as investigações feitas durante a primeira atividade. Os conhecimentos de Geometria exigidos eram bastante elementares, não consistindo em obstáculos para a resolução da questão.

3.3.1 Terceira etapa

A terceira lista de atividades teve como objetivo relacionar grafos e matrizes, a partir de problemas de aplicações em rotas de voos.

Nessa lista foi também apresentado o conceito de grafos através de conjuntos de pares não ordenados, relacionando a representação geométrica com a representação de conjuntos.

Nessa etapa da pesquisa houve necessariamente o tratamento da conversão, pois os alunos deveriam interpretar os problemas de grafos e representá-los de várias formas, como matrizes, conjuntos de pares não ordenados e a representação geométrica.

A terceira lista de atividades teve como objetivo a associação de uma representação geométrica a uma representação matricial (matriz de incidência), bem como a associação da representação icônica de um grafo à representação por meio de conjuntos de pares não ordenados. Essa lista constituiu-se de três atividades diversificadas, na qual os alunos deveriam necessariamente aplicar o tratamento de conversão para resolução da mesma.

Nesse momento da pesquisa os alunos deveriam mostrar o domínio no processo do tratamento denominado conversão, segundo Duval (2003), pois precisavam registrar um grafo usando várias formas de representação.

Quadro 8 - Primeira Atividade - 3ª Lista

3ª LISTA de ATIVIDADES (sala) – Atividade 1

Podemos representar um grafo através de uma matriz bidimensional, onde uma das dimensões são vértices e a outra dimensão são arestas.

Dado um grafo G com n vértices e m arestas, podemos representá-lo por uma matriz $n \times m$.

Para representar um grafo sem pesos nas arestas e não direcionado, basta que as entradas da matriz M contenham 1 se o vértice incide na aresta, 2 caso seja um laço (incide duas vezes) e 0 caso o vertice não incida na aresta.

1) Vamos supor que dos aeroportos de quatro cidades partem voos diários. No esquema abaixo (Figura-1), os números 1, 2, 3 e 4 representam essas cidades e as linhas, os voos existentes entre elas.

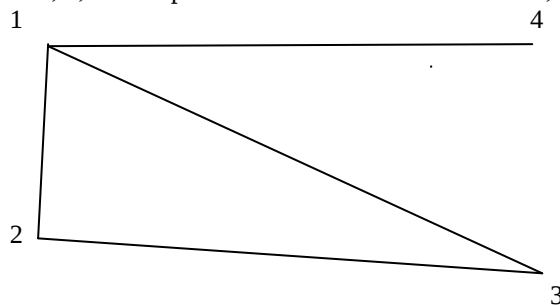


Figura - 1

Podemos associar a essa situação uma tabela, que estabelece se há ou não voo direto entre as cidades, de modo que:

Se as cidades possuem ligação entre elas, ou seja, se há voo direto entre uma e outra, escrevemos um na tabela;

Se as cidades não se ligam diretamente, o que na situação descrita significa que não há voo direto entre elas, escrevemos 0 na tabela.

Como não há voo de uma cidade para ela mesma, nesse caso também escrevemos 0 na tabela.

Complete a Tabela 1 associada à Figura 1, de acordo com as informações fornecidas:

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Tabela 1

Quadro 9 - Segunda Atividade - 3ª Lista

3ª LISTA de ATIVIDADES (sala) – Atividade 2

Sistematizando ideias

Seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, um conjunto finito não vazio, e um grafo G . A matriz $M_G = (a_{ij})$, é chamada de matriz de adjacências, ou associada ao grafo G se tomarmos $a_{ij} = (a_i, a_j)$, onde:

$a_{ij} = 1$, se i estiver ligado a j , e

$a_{ij} = 0$, se i não estiver ligado a j .

A tabela 1 é a matriz de adjacências do grafo representado na Figura 1.

2) Construir um grafo a partir da matriz de adjacências indicada abaixo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Observe a representação geométrica abaixo (Figura - 2).

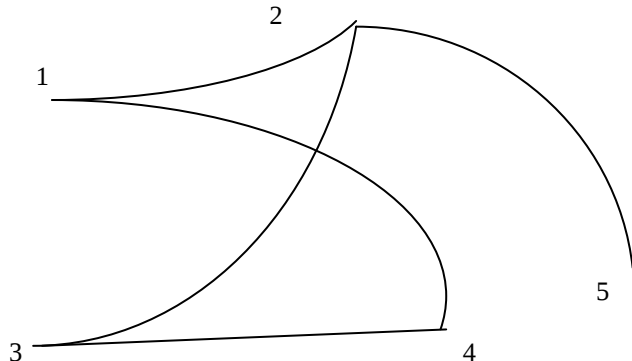


Figura - 2

Chamamos de vértice (V) todo conjunto finito não vazio, que nesta figura enumeramos por 1, 2, 3, 4 e 5. Assim, podemos representar $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Denominamos de E todo conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V . Podemos dizer que para a ilustração acima $E = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,5), (3,4)\}$.

Dizemos que os elementos de V são vértices do grafo (G), e os elementos de E são as arestas de G .

Represente geometricamente um grafo, sabendo que $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

$E = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,6), (5,3), (5,1), (5,6), (4,6), (4,5), (6,1), (6,2), (3,4)\}$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa lista de atividades, as possíveis dificuldades dos grupos seriam interpretar o conceito de grafos fornecidos através de um conjunto de pares não ordenados, uma vez que na

matemática geralmente se fala em pares ordenados. Quanto à representação e interpretação da matriz de adjacências não haveria problemas, uma vez que os alunos já haviam estudado o conceito de matrizes e suas representações.

3.3.1 Quarta etapa

A quarta etapa da oficina compreendeu o desenvolvimento de três atividades com objetivo de reforçar os conceitos investigados pelos alunos durante a oficina. Os conceitos abordados foram sobre vértices de um grafo e seu grau e se um grafo é unicursal ou multicursal. Nessa etapa da pesquisa esperava-se que os alunos já dominassem os conceitos de grafos e suas representações, bem como aplicar os tratamentos dentro de um mesmo registro e os tratamentos de conversão em que poderiam mudar a forma de registro de representação.

Quadro 10 - Primeira Atividade - 4ª Lista

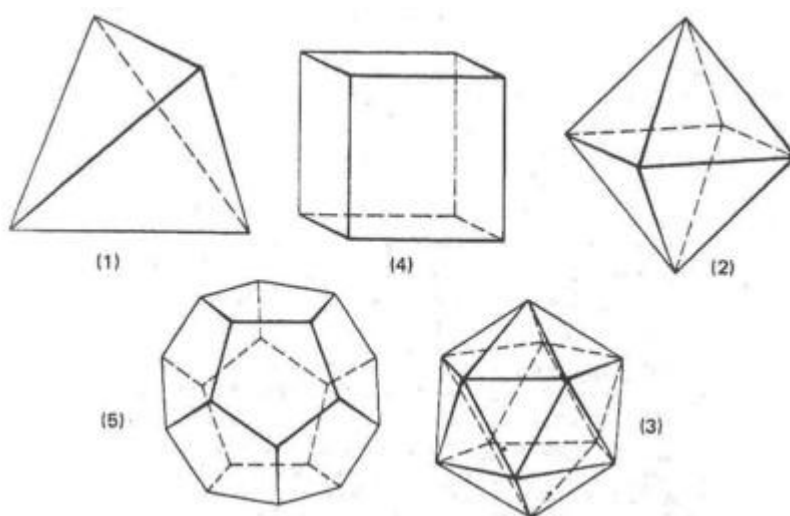
4ª LISTA de ATIVIDADES (sala) –
Na teoria dos Grafos, os seguintes conceitos são importantes: • Grau de um vértice, que é o número de arcos que saem dele. • Um vértice é par ou ímpar, conforme seu grau seja par ou ímpar, respectivamente. • Se um grafo pode ser percorrido totalmente, passando-se exatamente uma única vez em cada arco, ele é classificado como grafo unicursal. Caso contrário, ele é multicursal.
1) Construir 3 grafos, um multicursal, um unicursal com dois vértices ímpares e um unicursal com todos os vértices pares.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 11 - Segunda e Terceira Atividade - 4ª Lista

4ª LISTA de ATIVIDADES (sala) –

2) Observe os poliedros regulares (Poliedros de Platão).



- Quais dentre esses poliedros são unicursais? Justifique
- Quais dentre esses poliedros são multicursais? Justifique

3) Observe o grafo da Figura 1.

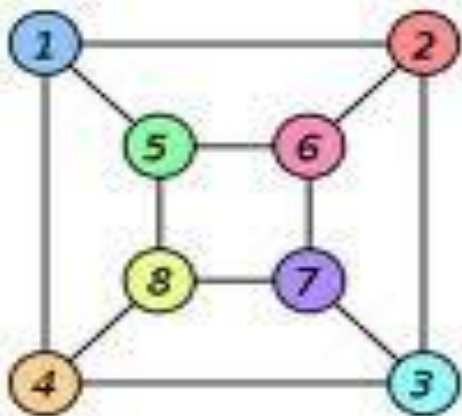


Figura 1

Construa uma matriz M 8×8 em que $M_{8 \times 8} = (m_{ij}) = 1$, se i estiver ligado a j e 0, se i não estiver ligado a j .

Identifique o tipo especial que a matriz M representa.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Não esperávamos dúvidas nessa lista de atividades, uma vez que era a etapa final da oficina, quando os alunos deveriam mostrar conhecimentos embasados nas investigações, análises, discussões e socializações durante o desenvolvimento da oficina.

Após essa atividade os alunos responderam a um questionário, em que deveriam explicitar seu aprendizado em relação ao conceito da Teoria de Grafos apresentado durante a oficina.

3.3.5 Quinta etapa

Nessa etapa da oficina, os alunos tiveram oportunidade de socializar sobre a importância de se estudar a Teoria dos Grafos no Ensino Médio, bem como suas aplicações em problemas do cotidiano.

Quadro 12 - Questionário de Avaliação

QUESTIONÁRIO
1) Dentre as atividades que desenvolvemos estudando Grafos, qual a que chamou mais a sua atenção? Por quê?
2) Seria importante que no Ensino Médio sejam estudados conteúdos sobre Grafos? Justifique
3) Com quais conteúdos matemáticos o Tópico Grafos pode ser relacionado?
4) Indique uma situação prática que poderia ser resolvida por meio do uso de Grafos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após essa etapa, o professor pesquisador observou se os problemas propostos eram significativos, de forma a garantir a aprendizagem, e se os mesmos levaram os alunos a criar estratégias próprias de resolução, estimulando o aluno a refletir durante as socializações, sobre o próprio pensamento e o próprio processo de aprendizagem.

O pesquisador levou em conta os possíveis “erros” para a elaboração de novas situações de aprendizagem, uma vez que ao investigar o conteúdo Teoria dos Grafos, os alunos poderiam levantar hipóteses e conclusões precipitadas acerca do estudo que estava sendo conduzido.

Na perspectiva da investigação matemática estabelecida pelo professor e pelo grupo, o processo de avaliação deve ser pensado como forma de integrar o ensino e a aprendizagem, tendo como um dos objetivos a orientação e a intervenção pedagógica, que irá possibilitar a reflexão contínua do processo de aprendizagem.

O processo de avaliação deve, segundo os Parâmetros Curriculares (PCN+):

- Retratar o trabalho desenvolvido;
- Possibilitar observar, interpretar, comparar, relacionar, registrar, criar novas soluções usando diferentes linguagens;
- Constituir um momento de aprendizagem no que tange às competências de leitura e interpretação de textos;
- Privilegiar a reflexão, análise e solução de problemas.

- Possibilitar que os alunos conheçam o instrumento assim, como os critérios de correção;
- Proporcionar o desenvolvimento da capacidade de avaliar e julgar, ao permitir que os alunos tomem parte de sua própria avaliação e da de seus colegas, privilegiando, para isso, os trabalhos coletivos. (BRASIL, 1998, p. 137).

Lembramos que o processo de avaliação é contínuo e uma oficina com cinco etapas não é suficiente para avaliarmos se de fato a aprendizagem foi efetivada. Mesmo assim, os resultados do trabalho, apresentados no Capítulo 4, permitem afirmar que a oficina conduzida possibilitou que os alunos conhecessem um novo objeto matemático, no caso, os grafos. O estudo de grafos conduzido possibilitou que os alunos revisassem conteúdos de geometria, e análise combinatória, entre outros, sendo um elemento integrador de ideias matemáticas.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, abordamos a última fase da engenharia didática que é a análise *posteriori*, consistindo no tratamento das informações que foram obtidas através das observações das oficinas e das análises dos registros de cada equipe para que o processo de análise fosse validado.

Para Pais (2008), a validação dos resultados é obtida através do confronto que se estabelece entre os dados obtidos na análise *a priori* e na análise *a posteriori*.

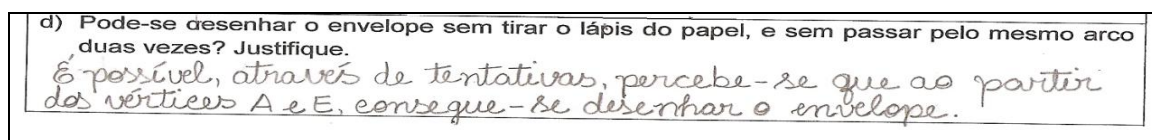
Os processos desenvolvidos nas oficinas foram significativos para esta análise; durante o trabalho os alunos iam desenvolvendo registros e através desses era possível constatar se estava ou não, havendo entendimento do assunto. A comparação entre as fases de análise *a priori* e *a posteriori* são uma tentativa de validar a sequência de atividades propostas na forma de uma oficina de investigações matemáticas com grafos e desenvolvida com alunos do Ensino Médio.

4.1 Primeira lista de atividades

Como era esperado, os alunos não apresentaram nenhuma dificuldade em resolver os itens 1a, 1b e 1c da primeira atividade. Todos eles foram capazes de identificar e classificar os vértices do grafo apresentado em pares ou ímpares, justificando a classificação quando solicitado.

Ao responderem os itens (d) da primeira atividade, os alunos concluíram ser possível desenhar um envelope aberto sem passar pelo mesmo arco mais de uma vez e sem tirar o lápis do papel. Para justificar, os alunos alegaram o uso de tentativas, como ilustrado na Figura 7:

Figura 7 - Resposta da Atividade 1(d) da 1ª Lista – G2



Fonte: Dados da pesquisa.

Indagados sobre quais poderiam ser os vértices de origem e os de chegada, todos conseguiram identificá-los, entretanto variou o nível de argumentação das justificativas. Apenas o Grupo 4 explicitou que o problema só era possível partindo de um dos vértices ímpares e chegando ao outro.

Figura 8 - Resposta da Atividade 1(e) da 1ª Lista – G4

e) Em caso afirmativo, quais poderiam ser os vértices de origem? E os de chegada?

Os vértices de origem e de chegada seriam vértices ímpares A e E. De forma que partindo do A, o ponto de chegada é o E, e partindo do E o ponto de chegada é o A.

Fonte: Dados da pesquisa.

No item (a) da Atividade 2 foram propostos dois grafos com características e classificações diferentes, para que os grupos identificassem os vértices e os classificassem em pares e ímpares. Como era esperado, todos os grupos acertaram, sendo capazes de justificar suas respostas quando solicitados.

Para justificar se era possível desenhar os grafos passando em cada arco uma única vez e sem tirar o lápis do papel, os grupos responderam que conseguiram identificar através de tentativas. Verificaram que para a primeira figura da atividade 2 não era possível fazer o percurso; já para a segunda figura da mesma atividade, eles identificaram como sendo possível completar o caminho percorrendo todos os arcos uma única vez.

Após esse momento foi pedido aos grupos que analisassem os três grafos apresentados nessa primeira lista de atividades, justificando se era possível fazer o percurso completo, percorrendo todos os arcos uma única vez e sem tirar o lápis do papel. Observamos que eles conseguiram identificar em quais situações isso era possível, estabelecendo algumas sistematizações teóricas sobre tipos e possibilidades de construção de grafos.

A Figura 9 apresenta a resposta do Grupo 3.

Figura 9 - Resposta da Atividade 2 (g) da 1ª Lista - G3

g) Analise as características dos vértices das figuras 1, 2 e 3.

É possível sempre percorrer todas as arestas de um grafo uma única vez? Justifique, em que situações isso é possível. Não, é possível apenas em situações que o número de vértices pares foi maior do que de ímpar.

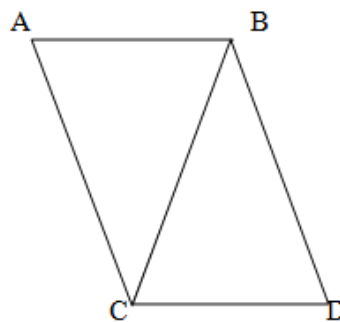
Fonte: Dados da pesquisa.

Percebemos que a resposta do Grupo 3 pode ser considerada válida para os três casos estudados, nesse sentido é uma generalização correta. Convém ressaltarmos a importância de o professor estar atento ao tipo de sistematizações feitas, que podem, ou não, ser válidas.

Consideremos, por exemplo, a situação:

Analisar o grafo abaixo e verificar se é possível percorrer todas as arestas uma única vez sem tirar o lápis do papel.

Figura 10 - Grafo que indica um contra exemplo para a resposta da Atividade 2 (g) da 1ª Lista 1 – G3

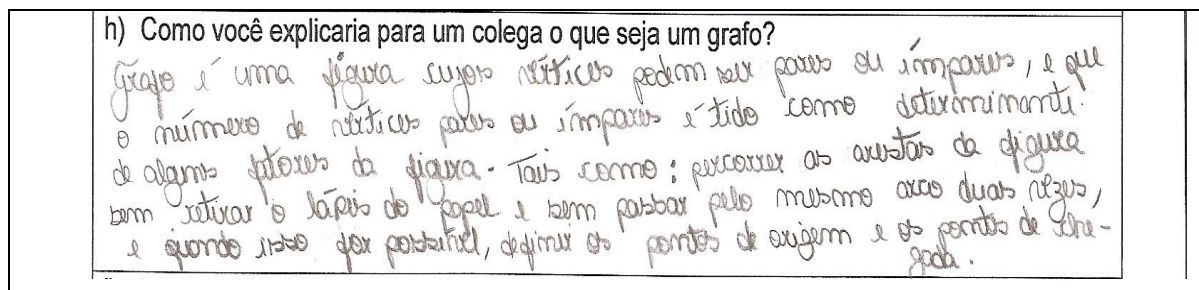


Fonte: Elaborado pelo autor.

Observamos que o grafo representado pelos vértices A, B, C e D possui dois vértices pares e dois ímpares, sendo possível percorrer todos os caminhos passando uma única vez em cada aresta ou arco. Podemos partir do vértice B, chegando em C, ou partir do vértice C, chegando em B.

Em seguida os grupos deveriam dizer como explicariam para um colega o que seja um grafo. E todos os grupos conseguiram de forma objetiva e clara elaborar a princípio uma primeira definição.

Figura 11 - Resposta da Atividade 2 (h) da 1ª Lista 1 - G3



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento, a única ideia esperada de grafo era associada à figura, uma vez que uma discussão mais abstrata do objeto matemático grafo iria acontecer no decorrer da oficina.

A terceira atividade apresentou um problema na linguagem natural para que os alunos representassem o mesmo através de um desenho. Como esperado, os grupos não tiveram dificuldade em fazer a associação proposta.

Os itens (3b e 3c) questionavam sobre as diversas possibilidades de se locomover de uma cidade a outra, pedindo aos alunos que representassem as várias formas através de uma expressão numérica. O que chamou atenção nesse momento da oficina foi que os grupos começaram a associar os conteúdos matemáticos que ali estavam sendo inseridos; nesse item da questão era o princípio multiplicativo aplicado na análise combinatória.

Figura 12 - Resposta da Atividade 3 (b) da 1ª Lista 1 – G1

b) De quantos modos podemos ir de Sonhos a Bem Querer? Explique como fez para obter sua resposta. Para ir de Sonhos a Acordados tem-se duas possibilidades, e de Acordados para Bem-Querer, cinco possibilidades. Logo de Sonhos a Bem-Querer são 10 possibilidades, de acordo com o princípio multiplicativo da análise combinatória.
--

Fonte: Dados da pesquisa.

No item (3d) os alunos deveriam utilizar mais de uma forma de registro. Todos os grupos acertaram a questão e o que ficou bem claro nessa etapa da oficina foi que as justificativas foram bem objetivas explicitando de forma clara e precisa os argumentos combinatórios empregados para a resolução do mesmo.

Figura 13 - Resposta da Atividade 3 (d) da 1ª Lista 1 – G4

d) De quantos modos podemos ir de Sonhos à Felicidade? Represente o resultado usando mais de uma forma de representação. $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ modos diferentes. / De Sonhos à Felicidade há 2 possibilidades de estrada, de Acordados à Bem Querer há 5 possibilidades de estrada, de Bem Querer à Felicidade há 3 possibilidades de estrada. Sendo assim, a partir do princípio multiplicativo obtemos 30 modos diferentes de caminhos a percorrer. e) É possível representar o problema de outra forma? (Sim ou Não)
--

Fonte: Dados da pesquisa.

4.2 Segunda lista de atividades

A primeira atividade da segunda lista apresentava uma circunferência e pedia para os alunos destacarem 5 pontos sobre a mesma, identificando cordas, vértices, diagonais e classificação do polígono ali descrito e identificar se os vértices eram pares ou ímpares, estabelecendo relações com a primeira etapa da oficina. Como era esperado, os quatro grupos não tiveram dificuldades para responder os itens 1a, 1b, 1c, 1d, 1e e 1f, que associava grafos com os polígonos, suas diagonais e análise da ideia icônica, na qual os estudantes deveriam interpretar as possibilidades de construção desses polígonos.

No item (g), os alunos deveriam responder se era possível desenhar o polígono descrito, partindo de um de seus vértices sem tirar o lápis do papel e passando em cada arco (lados e diagonais) uma única vez. Todos os grupos conseguiram responder de forma correta, uma vez que utilizaram as ideias investigadas nas atividades anteriores, sobre vértices pares e ímpares e as possibilidades de percorrer os caminhos.

Figura 14 - Resposta da Atividade 1 (g) da 2ª lista 2 - G2

g) É possível desenhar o polígono formado e suas diagonais, partindo, de um vértice qualquer sem tirar o lápis do papel e passando uma única vez em cada segmento? Justifique. <i>É possível, já que só apresenta vértices pares, ou seja, os vértices de chegada serão os mesmos de partida.</i>

Fonte: Dados da pesquisa.

Na segunda atividade, foi pedido aos alunos que representassem sobre três circunferências distintas, 6, 7 e 8 pontos, respectivamente, traçando todas as cordas possíveis em cada figura, classificando o polígono obtido quanto ao número de lados e o número de diagonais de cada um deles.

Figura 15 - da Atividade 2 da 2ª Lista 2 – G1

2) Construa circunferências marcando sobre as mesmas: a) 6 pontos b) 7 pontos c) 8 pontos  Anote o que você observa sobre os polígonos formados ao se unir dois pontos consecutivos. <i>- a quantidade de pontos determina a quantidade de lados do polígono.</i> <i>- O número de diagonais dos polígonos, aumenta de acordo com o número de vértices do mesmo polígono.</i>	5 pontos - 10 d. 6 pontos - 15 d. 7 pontos - 21 d. 8 pontos - 28 d. 9 pontos - 36 d.
--	---

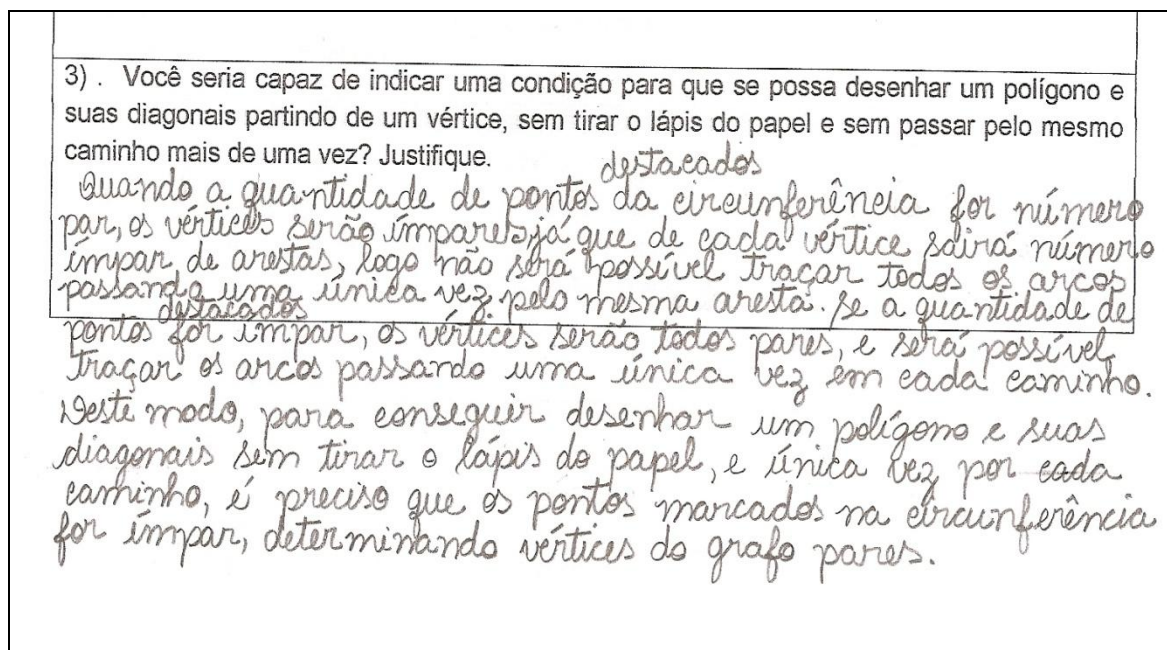
Fonte: Dados da pesquisa.

Os grupos não apresentaram dificuldades para realizar essa atividade, pois logo identificaram os polígonos e suas características.

Com o objetivo de associar as primeiras ideias de grafos com o ensino de geometria (polígonos e diagonais), pedimos aos grupos que respondessem sobre qual era a condição necessária para se desenhar um polígono e suas diagonais sem tirar o lápis do papel e sem passar pelo mesmo lado ou diagonal mais de uma vez.

Os grupos trocaram ideias e aplicando os conceitos discutidos na primeira etapa da oficina, ao resolverem a primeira lista de atividades, responderam com objetividade e clareza, sem dificuldades, pois já possuíam a noção de vértices pares e ímpares e as condições para se desenhar um grafo. Ilustramos a atividade com os argumentos apresentados pelo grupo (G2).

Figura 16 - Resposta da Atividade 3 (h) da 2ª Lista - G2



Fonte: Dados da pesquisa.

O que mais nos chamou atenção na segunda etapa da oficina foi a facilidade com que os grupos aplicaram a teoria discutida na socialização da primeira lista de atividade e a associação feita com os conteúdos de Combinatória e Geometria. Isso mostra a importância de levar situações inovadoras e investigativas para a sala de aula.

Para Frota (2005), práticas investigativas introduzidas na sala de aula de matemática parecem ser cruciais para o desenvolvimento de uma postura especulativa em Matemática.

Atividades de investigação podem conformar uma concepção de matemática como algo dinâmico, do conhecimento matemático como em construção, através do

desenvolvimento de ideias e processos, constituintes do pensar e fazer matemáticos. (FROTA, 2005, p. 2).

Na terceira lista de atividades apresentamos primeiramente uma conceituação mais elaborada a respeito do que seja um grafo, definindo algebricamente seus vértices e arestas de modo que os mesmos possam ser representados através de uma matriz. Nesse momento, as ideias apresentadas e investigadas foram a partir de problemas de aplicações, contextualizando o conteúdo discutido e observando a relevância de se aplicar os conceitos estudados em sala e interligar um assunto ao outro, fazendo assim uma conexão entre os conteúdos, como afirma Pires (2000, p. 144): “as disciplinas, como se sabe, não são apenas agregações sistematizadas de teorias e conceitos, mas expressam metodologias próprias de pesquisa, formas peculiares de coletar e interpretar dados, de usar instrumentos”.

Partimos do pressuposto, pois, de que é possível estabelecer redes conectoras entre os diversos conteúdos.

4.3 Terceira lista de atividades

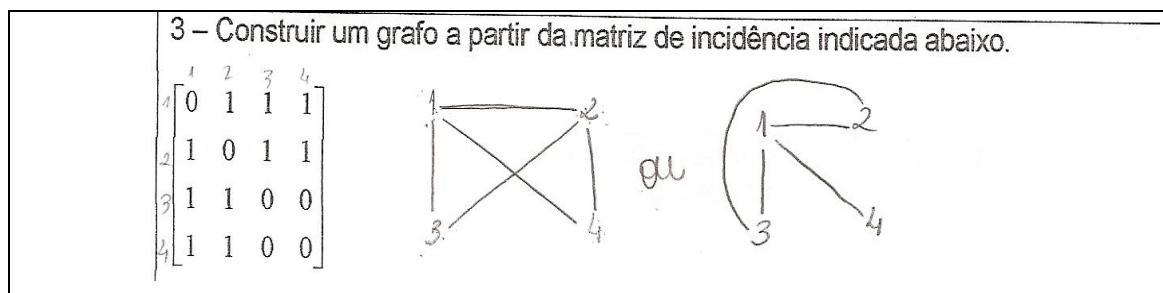
Na primeira atividade os grupos deveriam interpretar um problema que foi apresentado de forma icônica, com seus vértices e arestas, e algumas características a respeito dos mesmos. Essas características estavam explicitadas em linguagem natural para que os grupos investigassem seus elementos e preenchessem uma tabela. Os grupos não apresentaram dificuldades para desenvolver essa atividade, aplicando os conceitos de matrizes e relacionando com o grafo apresentado na Figura 1. Logo após foram sistematizadas as ideias de que um grafo pode ser representado por um conjunto finito não vazio, e o mesmo possui uma matriz relacionada a ele que é chamada matriz de adjacências.

Mais uma vez os alunos foram incentivados a investigar para conhecerem novos registros semióticos para o objeto matemático grafos, fazendo a conversão de um registro para outro. É relevante ser lembrado que, do ponto de vista de Duval (2003), a compreensão de um conceito ou objeto matemático, está relacionada com suas representações semióticas na forma de registros gráficos, discursivos e não discursivos. Nesse sentido, pode-se dizer que a conversão consiste em mudar a forma pela qual um objeto é representado.

Para resolver a Atividade 2 os alunos precisavam entender os conceitos sistematizados na Atividade 1, pois os grupos deveriam, a partir de uma matriz de adjacências, elaborar uma representação icônica do grafo para identificar a matriz dada. Nesse momento, os grupos trabalharam sem grandes dificuldades, expressando satisfação e

interesse em desenvolver as mesmas, pois as socializações e discussões estavam gerando entendimentos a respeito de ideias nunca associadas em sala de aula. O mais interessante nesse momento, foi quando os membros do Grupo 3 (G3) começaram a brincar com as ideias de representações e seus registros, desenvolvendo a questão de mais de uma forma.

Figura 17 - Resposta da Atividade 2 da 3ª Lista - G3

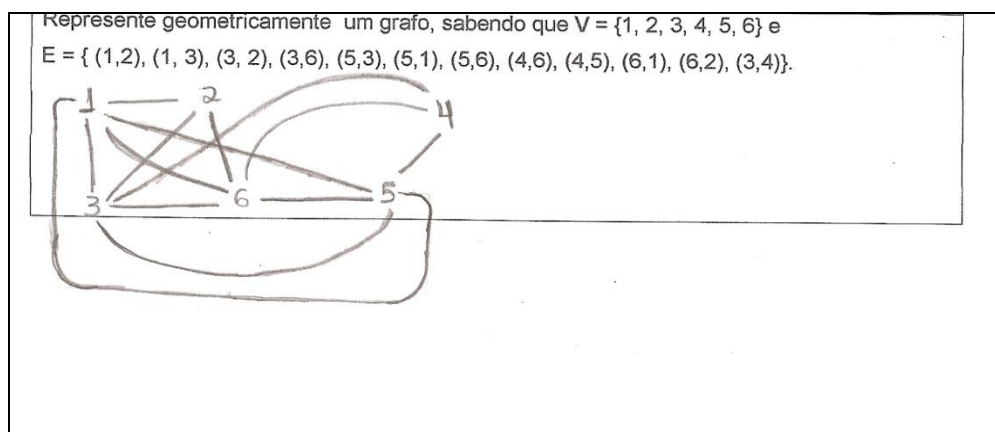


Fonte: Dados da pesquisa.

As investigações continuaram na atividade 3, quando os grupos deveriam observar uma representação geométrica e associar a um conjunto V , que representa os vértices do grafo e outro conjunto E de pares não ordenados que representam as arestas do grafo G .

Nesse momento os grupos também não encontraram dificuldades para as interpretações e representações, pois já lidavam com a linguagem geométrica e algébrica, fazendo conexões entre as mesmas. Para ilustrar o desenvolvimento dessa atividade, vamos utilizar a representação feita pelo Grupo 4 (G4).

Figura 18 - Resposta da Atividade 3 da 3ª Lista - G4



Fonte: Dados da pesquisa.

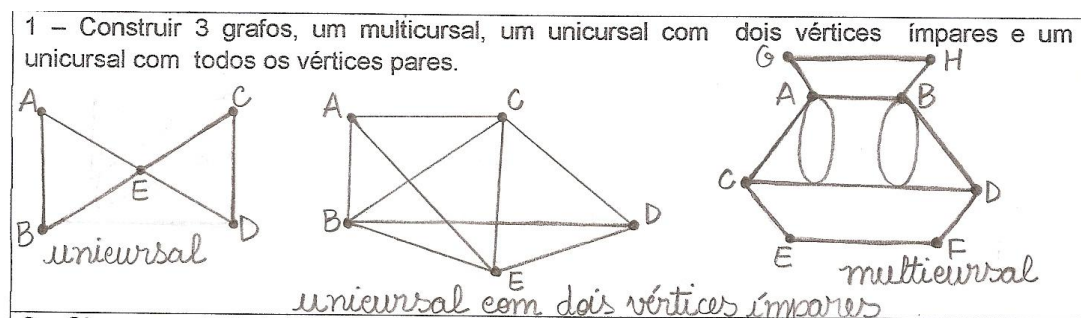
4.4 Quarta lista de atividades

Após a socialização das atividades da terceira lista, começamos a sistematizar grafos e seus nomes e representações. Assim, definimos:

- a) O grau de um vértice depende do número de arcos que partem dele: se a quantidade é par, o vértice é denominado par; se a quantidade de arcos é ímpar, o vértice é classificado como ímpar. Se um grafo pode ser percorrido totalmente, passando-se exatamente uma única vez em cada arco, ele é classificado como grafo unicursal. Caso contrário, ele é multicursal.

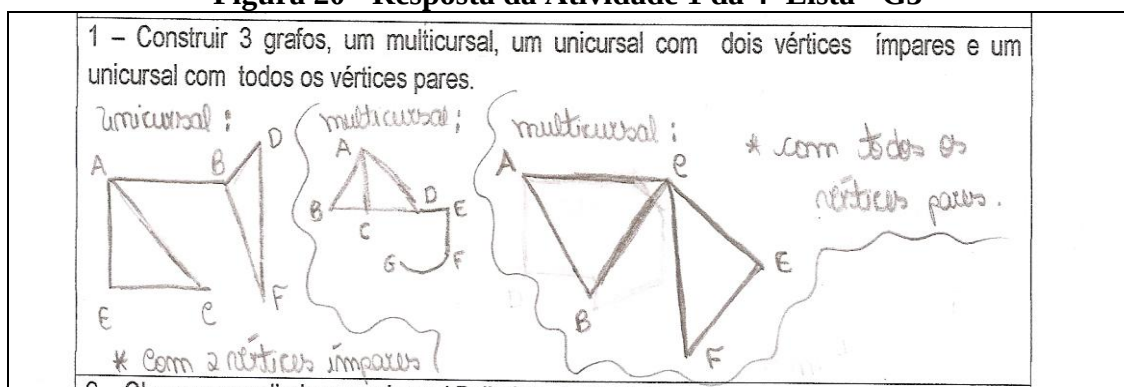
Na primeira atividade pedimos aos grupos que criassem grafos unicursais e multicursais. Como era esperado, os mesmos não apresentaram dificuldades para executar essa atividade. Ilustramos a situação com as representações dos grupos 2 e 3 (G2 e G3).

Figura 19 - Resposta da atividade 1da lista 4 - G2



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 20 - Resposta da Atividade 1 da 4ª Lista - G3



Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar de terem criado um grafo unicursal com todos os vértices pares, o grupo classificou-o como multicursal. No momento da socialização discutimos e concluímos que o

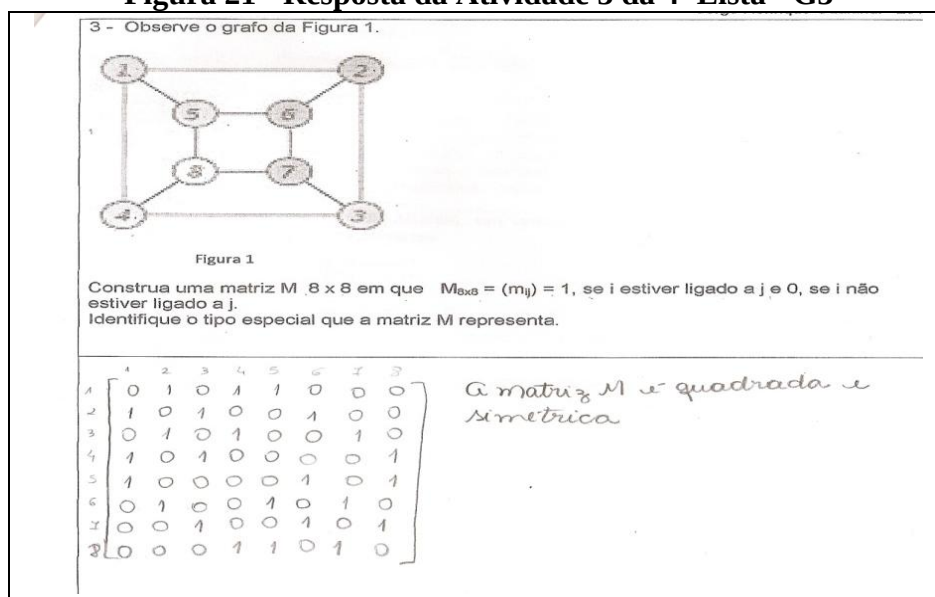
entendimento da teoria havia sido satisfatório; o grupo apenas equivocou-se na hora de classificar o grafo.

Nesse momento da oficina, ficou bem evidente a importância de levar o aluno a investigar e criar problemas e suas soluções. A criatividade na construção dos grafos é bem interessante para que possamos verificar se houve aprendizagem com entendimento da situação explorada. Nesse momento, os registros de representação tornam-se parte fundamental da compreensão das atividades desenvolvidas durante a oficina.

Apresentamos na atividade 2 os cinco sólidos geométricos regulares (Poliedros de Platão) e pedimos aos grupos que classificassem, justificando cada sólido em unicursal e multicursal. Foi uma atividade tranquila de ser resolvida, pois os conceitos estavam bem claros e a aprendizagem havia acontecido de forma significativa e com entendimento. Os grupos perceberam que o único poliedro de Platão que é unicursal é o octaedro regular, apresentando todos os seus vértices pares e os outros poliedros regulares são multicursais, apresentando todos os seus vértices ímpares.

A partir de um grafo com 8 vértices, a Atividade 3 solicitava que os grupos representassem uma matriz de adjacências e a classificassem. Nesta atividade também não houve dificuldades na sua execução, como já esperávamos, pois os conceitos já haviam sido discutidos durante as socializações das atividades. Destacamos na Figura 21 a representação do Grupo 3 (G3).

Figura 21 - Resposta da Atividade 3 da 4ª Lista - G3



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao desenvolverem a Atividade 3 da 4ª Lista, os alunos relacionaram mais de um tipo de registro de representação, estabelecendo relações entre matrizes e grafos, mostrando que o processo investigativo proporciona uma aprendizagem com entendimento.

Para Polya (1995, p. 4), a compreensão de um problema se dá quando o aluno consegue relacionar os possíveis registros de representação, sendo eles de tratamento ou de conversão, para depois efetuar a resolução do mesmo. Um problema precisa ficar bem entendido para que os estudantes identifiquem as partes principais, estabelecendo relações entre os conteúdos apresentados.

Percebemos a importância da criatividade dos grupos para desenvolverem as atividades. Deparamo-nos com diversas representações e registros, levando a entender que a aprendizagem através de investigações proporciona essa riqueza de informações que os grupos nos trazem, mostrando que se há entendimento dos conceitos, necessariamente os mesmos podem ser aplicados nas diversas atividades.

Para Ponte (2006), uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Por isso, as atividades propostas no decorrer da oficina foram necessariamente através da resolução e aplicação de problemas, em que cada grupo deveria transitar entre as linguagens geométrica, algébrica e a linguagem natural, estabelecendo relações entre as mesmas.

Sabemos que um bom problema é aquele em que a solução conduz o aluno a uma série de questionamentos, pois os mesmos devem abrir horizontes inteiramente novos na perspectiva da aprendizagem com entendimento e numa perspectiva de investigação que favoreça a aplicação dos conceitos discutidos durante a oficina.

A Atividade 1(i) da primeira lista de atividades pedia para que os alunos escrevessem um pequeno texto relatando o que aprenderam sobre grafos. Essa atividade não foi desenvolvida durante a primeira oficina e sim após a socialização de todos os encontros, pois nesse momento as discussões a respeito das primeiras ideias de grafos já haviam sido investigadas e proporcionariam uma forma para definir o que estava sendo investigado. Gostaria de apresentar alguns textos, pois os grupos conseguiram de forma simples definir grafo e falar de sua importância no cotidiano.

O Grupo 4 (G4) apresentou de forma natural uma definição para grafos e estabeleceu alguns conteúdos matemáticos que são aplicados nas resoluções dos problemas envolvendo a teoria de grafos.

Figura 22 - Resposta da Atividade 2 (i) da lista 1 - G4

i) Escreva um pequeno texto relatando o que você aprendeu até agora sobre grafos:

64

Gráfico é uma figura plana ou espacial, que possui vértices pares ou ímpares de acordo com o número de arestas que dele partem. Ambos nos permitem a definição da quantidade de lados e suas diagonais, além de nos possibilitar o entendimento de quando podemos o lápis sobre uma figura sem retirar o do papel e sem passar duas vezes na mesma aresta, é o porquê isso ocorre.

A matéria que também mostra conexão de arestas, seus pontos de origem e de chegada. Envolve princípios matemáticos como a análise combinatória, matrizes e geometria espacial e plana.

Fonte: Dados da pesquisa.

Enquanto o Grupo 3 (G3) apresentou a definição e associou a informações que podem estar contidas num grafo para serem utilizadas em situações do dia a dia.

Figura 23 - Resposta da atividade 2 (i) da lista 1 - G3

Escreva um pequeno texto relatando o que você aprendeu sobre grafos.

No estudo sobre grafos foi verificado como que dependendo da quantidade de vértices ímpares ou pares determina se um caminho é percorrido uma única vez (unicursal) ou várias vezes (multicursal). Foi perceptível também como que um percurso pode determinar uma matriz e suas características, a quantidade de arestas e arcos presente no grafo. Portanto através de um único grafo é possível retirar informações importantes para ser usadas no dia-a-dia.

Fonte: Dados da pesquisa.

4.5 Questionário de avaliação

Após análise e socializações a respeito do que aprenderam sobre grafos, foi solicitado aos grupos que preenchessem um questionário, relatando a experiência de participar da oficina sobre o assunto.

A primeira pergunta do questionário pedia apenas para os grupos explicitarem o que mais chamou atenção no decorrer da oficina. Ilustramos algumas respostas com os argumentos apresentados pelos Grupos G2 e G4.

Figura 24 - Resposta do Item 1 do Questionário - G2

1) Dentre as atividades que desenvolvemos estudando Grafos, qual a que chamou mais a sua atenção? Por quê? A que mais chamou minha atenção foi a atividade relacionada a matriz, pois desenvolvemos problemas de maneira lógica utilizando o conceito de matriz, entendendo situações-problemas aparentemente complicados, mas com a parte de grafos se tornou algo simples.
--

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 25 - Resposta do Item 1 do Questionário - G4

1) Dentre as atividades que desenvolvemos estudando Grafos, qual a que chamou mais a sua atenção? Por quê? Aquele a qual tínhamos desenhado a figura uma única vez sem utilizar o lápis do papel. Pois nos fez perceber que havia algo com relação aos nós dos grafos que nos possibilitava traçar a figura sem passar duas vezes pela mesma aresta, nos fazendo raciocinar e cogitar possibilidades de traços.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com as respostas fornecidas pelos grupos, percebemos que alguns conceitos e aplicações ficaram bem claros o que proporcionou o desempenho adequado na realização das atividades.

Questionamos aos participantes se seria importante que no Ensino Médio eles estudassem os conceitos introdutórios de Grafos. Apresentamos a seguir as respostas dos Grupos G1 e G4.

Figura 26 - Resposta do Item 2 do Questionário - G1

2) Seria importante que no Ensino Médio sejam estudados conteúdos sobre Grafos? Justifique. Sim. Pois é uma matéria não tão difícil de ser estudada, e que ajuda muito na resolução de alguns casos específicos.
--

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 27 - Resposta do Item 2 do Questionário - G4

2) Seria importante que no Ensino Médio sejam estudados conteúdos sobre Grafos? Justifique. Sim. São conceitos simples atualmente aplicados em situações. Além do fato de determinados cursos cuja matemática é enriquecida, ao utilizarem desta teoria, o que torna fundamental o saber de conceitos básicos a respeito.

Fonte: Dados da pesquisa.

Através das respostas escritas e no momento de socialização, ficou bem claro que os grupos perceberam a importância da teoria dos Grafos como um mecanismo de conexão entre os diversos conteúdos da Matemática.

Pedimos para que os alunos apresentassem as relações possíveis entre a Teoria investigada e os assuntos discutidos nas aulas de Matemática do Ensino Médio. O que não foi surpresa quando conseguiram estabelecer uma ordem de conteúdos, tais como matrizes, análise combinatória, geometria plana e espacial. O Grupo 2 (G2) respondeu da seguinte maneira:

Figura 28 - Resposta do item 3 do questionário - G2

3- Com quais conteúdos matemáticos o Tópico Grafos pode ser relacionado?

com análise combinatória, matriz, geometria plana e espacial.

Fonte: Dados da pesquisa.

Para finalizarmos as atividades desenvolvidas na oficina e procurando sistematizar algumas aplicações da Teoria dos Grafos, perguntamos em quais situações práticas podemos aplicar a teoria investigada e socializada no decorrer da oficina. Todos os grupos conseguiram relacionar as aplicações da Teoria dos Grafos com situações do dia a dia, mostrando que quando as atividades desenvolvidas em sala de aula envolvem aplicações e despertam interesse nos alunos, elas necessariamente serão resolvidas com mais interesse por parte dos alunos, o que proporciona uma aprendizagem com entendimento.

O Grupo 3 (G3) apresentou a explicação para o questionamento ilustrada na Figura 29.

Figura 29 - Resposta do item 4 do questionário - G3

4 - Indique uma situação prática que poderia ser resolvida por meio do uso de Grafos.

usa-se grafos na área de informática, na utilização de redes, nas rotas de aviões, como também nas rotas de ônibus.

Fonte: Dados da pesquisa.

Encerramos a oficina fazendo uma socialização geral sobre conceitos, aplicações, relações entre conteúdos e a importância de se estudar a Teoria dos Grafos no Ensino Médio.

Destacamos a seguir a síntese dos principais aspectos discutidos pelos grupos a partir das gravações dessa etapa da oficina.

O Grupo 1 (G1) disse que estudar descobrindo conceitos é muito mais prazeroso do que quando o conteúdo é apresentado através de fórmulas e formas para resolvê-los.

O Grupo 2 (G2) destacou a importância de apresentar as aplicações dos conteúdos, uma vez que quando sabemos para que se estuda determinado assunto, o interesse fica mais

evidente e conseqüentemente as formas para tentar resolvê-lo são mais interessantes e desafiadoras, o que proporciona uma diversidade nos desenvolvimentos das questões propostas.

O Grupo 3 (G3) focou a necessidade de problemas mais desafiadores nas aulas de Matemática do Ensino Médio. Apontaram que se essas atividades fossem trabalhadas com mais frequência durante as aulas, o ensino e a aprendizagem de Matemática ficariam menos cansativos, pois quando se trabalha de forma mecânica com repetições de fórmulas não se desenvolve o raciocínio lógico e nem se provoca a capacidade de pensar.

O Grupo 4 (G4) apresentou a necessidade de saber fazer relações entre os conteúdos da própria matemática, uma vez que são diversos os assuntos estudados no decorrer do Ensino Médio e da vida escolar. Quando se estabelece essas relações, proporciona-se uma visualização da Matemática e suas aplicações, fazendo com que a mesma passa a ter sentido significativo no dia a dia.

No decorrer da oficina percebemos que, quando as investigações são acompanhadas de orientações e sistematizações os alunos experimentam de forma dinâmica a interação entre a Matemática e os conceitos de aplicações para situações problemas envolvidas no cotidiano. A sistematização e aprendizagem com entendimento proporcionam o desenvolvimento do pensamento crítico e lógico que os conteúdos matemáticos devem desenvolver nos alunos. Uma vez que num momento investigativo, não sabemos a dimensão e nem a proporção que ele irá tomar, pois vai depender sempre da organização das atividades, do desempenho dos alunos e do papel fundamental do professor de mediar os possíveis questionamentos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) destacam que as práticas investigativas em matemática desenvolvem-se com a resolução de situações problemas em que o primeiro passo é identificar especificamente o problema a resolver. Os autores destacam que na busca pela resolução do problema se desenvolve a ideia especulativa citada por Frota (2005), em que podem ser feitas outras descobertas durante o processo de investigação. Essas descobertas para o processo de ensino-aprendizagem ganham um destaque tão importante ou até mesmo mais importante que a solução do problema original.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo investigar as possibilidades de ressignificar alguns conteúdos matemáticos através de problemas envolvendo a Teoria de Grafos.

A inserção de estudos sobre grafos na Educação Básica foi proposta na forma de uma oficina de atividades que exploram aspectos relevantes do tema. O primeiro aspecto considera o papel do grafo como um registro de representação, elemento norteador que possibilita estabelecer uma rede conectando conteúdos variados como matrizes, geometria e análise combinatória. O segundo aspecto considera a importância dos diferentes registros de representação semióticos e suas aplicações e transformações no ensino da Teoria dos Grafos.

As atividades foram pensadas e planejadas para serem desenvolvidas em forma de uma oficina para os alunos do Ensino Médio. O planejamento constituiu em analisar materiais didáticos que apresentavam atividades envolvendo grafos e a partir dessa análise, desenhar estratégias para que, através de investigações matemáticas, desenvolvidas de acordo com as orientações de Ponte e colaboradores (2006), os alunos pudessem desenvolver as questões propostas e através dos diferentes registros de representação, esquematizar uma resposta para os problemas propostos. Privilegiamos o uso do grafo como registro semiótico e instrumento que pode modelar situações matemáticas e o uso dos diferentes registros de representação de um grafo, na forma icônica, matricial, algébrica. Fundamentando-nos em Duval (2003, 2009) e procuramos incentivar as operações de tratamento e conversão de registros, além do desenvolvimento dos processos matemáticos de abstração e comunicação.

Acreditamos que a experiência com a resolução de problemas e os registros de representação foram significativos e os objetivos propostos foram atingidos, uma vez que os alunos conseguiram entender a teoria e aplicá-la a variadas situações problemas surgidas durante a oficina. A socialização dos resultados foi um ponto alto, pois percebemos as várias formas de representar um mesmo problema, contribuindo para o desenvolvimento intelectual dos estudantes. Os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar com situações desafiadoras, semelhantes a algumas das propostas por Smole e Diniz (2010) em seu livro, e que proporcionaram através da teoria dos grafos, contextualizar a matemática dentro da própria matemática.

Algumas dificuldades foram encontradas no tratamento das questões durante a oficina, pois era esperado que os alunos resolvessem os problemas considerando as quatro etapas propostas por Polya (1995): (i) investigação do problema; (ii) elaboração de um plano de

resolução; (iii) execução do plano e (iv) verificação ou validação do plano. Os estudantes investigavam e pensavam num tipo de registro para representar a situação, mas achavam que não havia necessidade de validar a solução encontrada.

De modo geral, os alunos não tinham ouvido falar de grafos; alguns já haviam visto questões associadas a essa teoria, mas não sabiam do que se tratava. Na primeira etapa, os alunos faziam investigações sobre as atividades propostas e, trabalhando, por vezes, por tentativa e erro, conseguiam percorrer os caminhos propostos, começando a identificar as características de cada grafo do tipo unicursal ou multicursal.

Identificamos na segunda etapa um interesse maior, pois os alunos já começavam a associar a Teoria dos Grafos com as outras áreas da Matemática, percebendo que havia ligações, por exemplo, com a Análise Combinatória. As práticas investigativas continuavam acontecendo, pois era a partir delas que as discussões sobre as formas de registrar um problema eram fundamentadas.

Na terceira etapa alguns conceitos da Teoria dos Grafos foram apresentados para que os alunos pudessem sistematizar ideias e representar de forma mais abrangente as situações problema propostas.

Durante a quarta atividade, percebemos que as aplicações dos problemas ficaram mais evidentes, proporcionando aos alunos uma discussão mais fundamentada sobre a teoria de grafos e suas aplicações. Nesse momento os alunos perceberam que um grafo pode ser representado de diversas maneiras e que envolvem a representação icônica, gráfica, matricial, por meio de pares não ordenados, existindo registros mais ou menos adequados à resolução de um problema. Nessa perspectiva conduzimos a socialização dos resultados; cada grupo apresentava seus registros, discutindo as operações de tratamento e conversão que eram utilizados (DUVAL, 2003). Para DUVAL, a análise dos problemas da aprendizagem de matemática e dos obstáculos contra os quais os alunos chocam-se regularmente, conduz a reconhecer as dificuldades em que os conteúdos são apresentados. Se partirmos de uma prática investigativa, na qual os registros de representação semióticos em suas variações são permitidos, proporcionamos aos alunos uma condição melhor para o entendimento das questões matemáticas.

Mesmo o grupo de estudantes tendo interagido de forma satisfatória com a proposta da oficina, algumas dificuldades encontradas merecem destaque:

- a) A dificuldade em registrar as atividades através de diferentes formas de representação;

- b) A dificuldade em socializar os registros obtidos, executando as operações de conversão;
- c) A dificuldade dos grupos em executar a etapa de verificar a validade das conclusões que obtiam, fazendo a verificação se eram casos particulares ou mais gerais.

É preciso ressaltar que mais importante que uma resposta certa ou errada, são os processos de análise, discussão e registros das atividades. A transcrição de um problema que é apresentado na linguagem natural para outro tipo de representação, proporciona o desenvolvimento matemático nos alunos.

Ao perceberem a importância do conteúdo e sua aplicação em outras áreas do conhecimento, notamos que os estudantes se envolvem mais para definir estratégias de resolução para as questões propostas, buscando compreender e sistematizar ideias sobre grafos.

Apesar de os alunos apresentarem algumas dificuldades, entendemos que na forma como foi desenhada, a oficina atendeu aos objetivos da pesquisa de investigar possibilidades da inserção do estudo de grafos, integrando conteúdos da própria Matemática. Segundo uma avaliação feita pelos participantes, na quinta etapa, o estudo de grafos no Ensino Médio foi considerado importante e principalmente a forma com que o estudo foi conduzido, a partir de atividades desafiadoras, que exigiam a investigação e não forneciam as respostas prontas.

Reconhecemos algumas limitações, pois o desenvolvimento da oficina poderia ter proporcionado maiores discussões e um maior tempo para a socialização. De modo geral, os alunos tiveram pouco tempo para incorporar a teoria apresentada e suas aplicações, ficando assim uma proposta para maiores discussões e aprofundamento do tema proposto.

Ao concluir a pesquisa, precisamos ressaltar que o trabalho do pesquisador nunca será encerrado, uma vez que novas propostas investigativas e o desenvolvimento de novas formas de registro podem ser incentivados.

A pesquisa desenvolvida aponta a importância da busca de novos caminhos para o Ensino de Matemática na Educação Básica. Entendemos também que um professor pesquisador deve sempre estar disposto a adquirir novos conhecimentos e a aplicar esses conhecimentos objetivando o desenvolvimento matemático e do espírito investigativo dos estudantes.

A oficina foi proposta para desenvolvimento com estudantes do Ensino Médio. Entretanto, algumas das atividades podem ser aplicadas a alunos do Ensino Fundamental. O

produto apresentado no Apêndice foi planejado para servir como orientação metodológica para a introdução da Teoria dos Grafos na Educação Básica.

Esperamos que os professores possam utilizar as atividades propostas para enriquecimento de suas aulas e se sintam motivados a elaborar outras questões para o desenvolvimento intelectual e cognitivo dos alunos, buscando interligar conteúdos matemáticos.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. D. Q. E. S. **Engenharia Didática**: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis/SC, 2008. v. 3, p. 62-77.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMT). Brasília: 1998. v. 3.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares da Educação Nacional**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMT). Brasília: 1999.
- BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Brasília: 2006. p. 40.
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases**. Lei n. 9.394/96. Ministério da Educação (MEC). Brasília: 2010.
- BOAVENTURA, N. P. O.; JURKIEWICZ, S. **Grafos**: Introdução e Prática. São Paulo: Edgard Blucher, 2009.
- BRIA, Jorge. **Grafos, por que não?** Caderno de Licenciatura em Matemática. Número 1 - ano 1, março 1998.
- CARNEIRO, V. C. G. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. In: **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 87-119, 2005.
- COLÉGIO JESUS CRISTO REI. **Projeto Político Pedagógico**. Cachoeiro do Itapemirim/ES, 2010.
- DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de Representação Semiótica. Campinas/SP: Editora Papirus, 2003. cap. 1, p. 1-31.
- DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- ERNEST, P. Investigações, resolução de Problemas e pedagogia. In: ABRANTES, P. et al. (Org.). **Investigar para Aprender Matemática**. Lisboa: APM, 1996. cap. 2, p. 25-48.
- ESPIRITO SANTO. Secretaria de Educação. **Currículo básico estadual**. Vitória: Secretaria de Educação, 2009;
- EULER, L. The Koenigsberg Bridges. In: **Mathematics and The Modern World**. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1968.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Minidicionário Aurélio**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1992.

FROTA, M. C. R. **Experiência Matemática e Investigação matemática**. V CIBEM, Porto/Portugal: jul. 2005. Disponível em: <http://www.matematica.pucminas.br/GrupodeTrabalho/Mariaclara/PraticasDocumentadoAcrobat.pdf>> Acesso em: 10 jan. 2012.

LIMA, E. L. Alguns problemas Clássicos sobre Grafos. In: **Revista do Professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, Nº 12, p. 36-42, 1988.

LOPES, M. L. M. L. (coord.) **Grafos: jogos e desafios**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática/Projeto Fundação, 2010.

MALTA, Gláucia Sarmiento. **Grafos no Ensino Médio** – uma inserção possível. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre.

MUNIZ, Ivail Júnior. **Encontrando, minimizando e planejando percursos: uma introdução à teoria dos grafos no ensino médio**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional Ensino de Ciências e Matemática) - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática** – uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PIRES, C. M. Carolino. **Currículos de Matemática: da Organização Linear à Ideia de Rede**. São Paulo: FTD, 2000.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João P. da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática ensino médio** – 2º ano do Ensino Médio. 6ª ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010. p. 448.

APÊNDICE – PRODUTO

**UMA OFICINA DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS PARA INTRODUÇÃO AO
ESTUDO DE GRAFOS NO ENSINO MÉDIO**

Jorge Henrique Gualandi
Maria Clara Rezende Frota

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO	88
2 REFERENCIAIS TEÓRICOS	88
3 ESTRUTURAÇÃO DA OFICINA	89
4 AS ATIVIDADES	91
4.1 Primeira Lista de Atividades	92
4.1.1 Orientações para a 1ª Lista de Atividades	95
4.2 Segunda Lista de Atividades	96
4.2.1 Orientações para 2ª Lista de Atividades	97
4.3 Terceira Lista de Atividades	98
4.3.1 Orientações para a 3ª Lista de Atividades	100
4.4 Quarta Lista de Atividades	101
4.4.1 Orientações para a 4ª Lista de atividades	103
4.5 Atividades Complementares	104
4.5.1 Atividade Complementar 1	104
4.5.2 Atividade Complementar 2	106
4.5.3 Atividade Complementar 3	107
4.5.4 Atividade Complementar 4	108
4.5.5 Atividade Complementar 5	110
4.5.6 Atividade Complementar 6	112
5 AVALIAÇÃO	115
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	116
REFERÊNCIAS	117

1 APRESENTAÇÃO

O presente material foi elaborado a partir de uma pesquisa de mestrado (Gualandi, 2012) que investigou as potencialidades do estudo de grafos no ensino médio, a partir de duas perspectivas: 1) enquanto conteúdo integrador, que pode viabilizar a resignificação de conteúdos de geometria plana e espacial, matrizes e princípios da análise combinatória; 2) enquanto registro de representação de ideias matemáticas.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Segundo Duval (2011), para que os alunos possam realmente compreender matemática, ou seja, para que a matemática contribua para a formação intelectual e geral desses alunos, é necessário que ela vá além de uma aprendizagem tecnológica de procedimentos executados à mão ou com máquinas. Os alunos precisam desenvolver um tipo de funcionamento cognitivo capaz de despertar seu interesse para a Matemática. Para que isso ocorra, os registros de representação e suas interpretações são fundamentais.

De acordo com Duval (2003), para que haja aprendizagem com entendimento, os alunos precisam conhecer pelo menos duas formas de representar um objeto matemático, aprendendo a: fazer conversões de um tipo de registro para outro (operação de conversão de registros) e operar dentro de um mesmo tipo de registro (operação de tratamento). Assim, uma situação matemática pode ser apresentada usando a linguagem natural, a linguagem gráfica, a linguagem algébrica, entre outras.

Um grafo representado por meio de um diagrama permite a solução de situações a partir da linguagem gráfica, sem a necessidade de conversão de registros. Algumas vezes, associar, por exemplo, uma matriz ao grafo dado na forma gráfica pode facilitar a resolução de um problema. Uma das riquezas da Matemática é justamente a variedade de possibilidades de representação de uma mesma ideia.

Propomos nesta oficina listas de atividades que podem permitir o desenvolvimento matemático, despertando o interesse do aluno, para buscar estratégias de raciocínio para lidar com problemas criados a partir de situações do cotidiano.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) as investigações matemáticas são atividades que os alunos podem realizar e que se relacionam com a resolução de problemas. O aluno é chamado a investigar e a agir como matemático e dessa forma, desenvolver habilidades de

levantar conjecturas, testar e sistematizar ideias, organizando o pensamento matemático. Nesse momento, necessariamente, a formação intelectual do aluno está sendo desenvolvida, pois o mesmo aprende quando mobilizar os seus recursos cognitivos e afetivos no processo de ensino-aprendizagem.

As atividades propostas envolvem a habilidade de resolução de problemas: os alunos deverão investigar interpretar e resolver os problemas propostos. Preocupamos exemplificar e exercitar as estratégias de resolução de problemas, inspirando-nos nas etapas de uma aula investigativa propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) e nas quatro fases para resolução de um problema, colocadas por Polya (1995). Ou seja, o professor irá apresentar os problemas, na medida do possível, envolvendo aplicações relacionadas ao cotidiano, para que os estudantes possam investigar o problema, estabelecer um plano de resolução, executar este plano e fazer a verificação e análise da solução. Para Wagner (2008), o professor procura no ensino de matemática a partir da resolução de problemas, incentivar os alunos a aprenderem: (i) as várias estratégias de resolução de problemas; (ii) as quatro fases de Polya; e (iii) a discutirem sobre como resolveram os problemas.

Ao pensarmos no ensino de Matemática, devemos deixar de lado a resolução de problemas de forma mecânica ou simplesmente através de memorização de processos ou fórmulas. Devemos propor um ensino a partir de discussões que promovam o desenvolvimento cognitivo do aluno, despertando e provocando a aprendizagem matemática através de processos investigativos. Nesse sentido estaremos focalizando os registros de representação; os alunos serão incentivados a reestruturar os problemas de forma que a linguagem natural seja convertida em outros registros de representação que facilitem o entendimento das questões propostas.

3 ESTRUTURAÇÃO DA OFICINA

A oficina é estruturada compreendendo um conjunto de 4 Listas de Atividades e um conjunto de 7 atividades complementares, que abordam os seguintes tópicos sobre Grafos:

- a) Definição
- b) Rotulação e representação (modelos)
- c) Matriz de incidência
- d) Classificação dos grafos
- e) Aplicações de grafos na resolução de problemas.

Além de aprender algumas ideias sobre Grafos, o objetivo é o de revisar alguns conteúdos de geometria plana e espacial, matrizes e princípios da análise combinatória, abordando-os de forma integrada.

Propomos que o desenvolvimento da oficina seja feito através da aplicação das atividades em sala, com base na proposta investigativa de Ponte e colaboradores:

Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito; (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma; (iii) discussão dos resultados, nos quais os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 25).

Os alunos são convidados a participar da oficina e a investigar características dos grafos, para então estabelecer ideias básicas acerca da Teoria dos Grafos. Ao final de cada atividade é prevista a socialização sobre o desenvolvimento e conclusões estabelecidas a respeito da mesma. Uma atenção especial é dada à questão dos registros de representação, base teórica que fundamentou a elaboração das sequências de atividades, explorando-se as diversas formas de registros, icônica, linguagem natural, linguagem algébrica, linguagem matricial, entre outras.

No momento da socialização esperamos que os alunos sejam levados a questionar e sugerir ideias para as interpretações e representações de cada problema. O professor e pesquisador tem nesse momento o papel de organizador, coordenando a participação dos alunos, fazendo intervenções e esclarecendo algumas dúvidas bem como propondo alternativas para a resolução das atividades.

É interessante que os alunos recebam uma folha para anotarem suas conclusões a respeito da Teoria de Grafos, ao longo do trabalho desenvolvido na oficina.

As atividades propostas para a oficina apresentam os conteúdos de grafos, abordando suas definições, classificações, elementos e aplicações em problemas que se relacionam com situações do cotidiano.

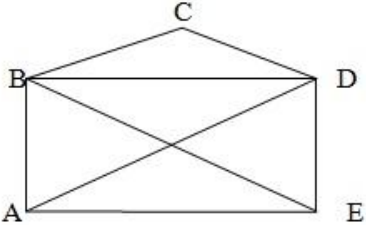
O número de encontros para desenvolvimento da oficina pode ser flexível, definido em função da disponibilidade da turma e professor. Estima-se quatro encontros de 100 minutos cada, para o desenvolvimento de 4 Listas de Atividades, além de 7 atividades complementares, de menor tempo de duração, variando de 30 a 50 minutos, que eventualmente podem ser feitas em casa.

4 AS ATIVIDADES

Ao aplicar essas atividades, sugerimos aos professores que não ofereçam diretamente as respostas, pois trabalhamos com a prática investigativa, de modo que cada aluno possa, a partir de suas investigações, elaborar conjecturas e aplicar os conceitos aqui desenvolvidos.

Ao final de cada atividade apresentamos algumas orientações para o desenvolvimento das mesmas. Essas orientações metodológicas visam contribuir com o trabalho do professor, orientando e direcionando o trabalho com a prática investigativa.

4.1 Primeira Lista de Atividades

1ª Lista - Atividade 1
Os problemas seguintes envolvem o conteúdo matemático denominado Grafos, que é novo para muitos de vocês. Nos grafos das Figuras 1, 2 e 3 cada ponto indicado por uma letra maiúscula é um vértice e cada linha que liga dois vértices é chamada de aresta ou arco. Leia com atenção os enunciados e responda as questões propostas, registrando por escrito suas ideias.
Observe a Figura 1 que tem a forma de um envelope aberto: Figura - 1 
Identifique os vértices da Figura 1.
Em cada grafo, determinado vértice pode ser classificado como par, ou ímpar, dependendo do número de arcos que dele parte. Quais os vértices do grafo da Figura 1 que você classificaria como pares?
Quais os vértices do grafo da Figura 1 que você classificaria como ímpares? Justifique.
Pode-se desenhar o envelope sem tirar o lápis do papel, e sem passar pelo mesmo arco duas vezes? Justifique.
Em caso afirmativo, quais poderiam ser os vértices de origem? E os de chegada?

Fonte: Elaborada pelo autor.

1ª Lista - Atividade 2	
2) a) Observe as figuras e responda ao que se pede:	
Figura - 2	Figura - 3
Vértices:	Vértices:
Vértices pares:	Vértices pares:
Vértices ímpares:	Vértices ímpares:
b) Pode-se desenhar a Figura 2 sem tirar o lápis do papel, e sem passar pelo mesmo arco duas vezes?	d) Pode-se desenhar a Figura 3 sem tirar o lápis do papel, e sem passar pelo mesmo arco duas vezes?
c) Em caso afirmativo, quais poderiam ser os vértices de origem? E os de chegada?	e) Em caso afirmativo, quais poderiam ser os vértices de origem? E os de chegada?
f) Analise as características dos vértices das Figuras 1, 2 e 3.	
g) É possível sempre percorrer todas as arestas de um grafo uma única vez? Justifique, em que situações isso é possível.	
h) Como você explicaria para um colega o que seja um grafo?	
Escreva um pequeno texto relatando o que você aprendeu até agora sobre grafos.	

Fonte: Elaborada pelo autor.

1ª Lista - Atividade 3
3) Sonhos, Acordados, Bem Querer e Felicidades são cidades de país bem próximo. Duas das estradas existentes levam-nos de Sonhos a Acordados, cinco de Acordados a Bem Querer e três de Bem Querer à Felicidade.
Represente a ideia através de um desenho.
De quantos modos podemos ir de Sonhos a Bem Querer? Explique como fez para obter sua resposta.
De quantos modos podemos ir de Acordados a Felicidade e retornar a Acordados por caminhos diferentes? Represente o resultado através de uma expressão numérica.
De quantos modos podemos ir de Sonhos à Felicidade? Represente o resultado usando mais de uma forma de representação.
É possível representar o problema 3 por meio de um grafo? Justifique

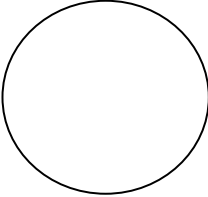
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.1 Orientações para a 1ª Lista de Atividades

Orientações para a 1ª Lista de Atividades	
Tempo estimado	2 aulas de 50 minutos cada
Objetivo	Apresentar os grafos por meio de exemplos, buscando que os alunos identifiquem seus elementos (vértices e arcos ou arestas), construindo o conceito do que é um grafo e utilizando grafos para resolver problemas matemáticos.
Tipo de trabalho	Em duplas
Outras observações / Dicas de solução	Essa atividade não costuma apresentar dificuldades; apenas incentiva o espírito investigativo, fornecendo, desta forma, um primeiro contato com a Teoria dos Grafos. O item 2.h) favorece o contato dos alunos com a escrita matemática e a linguagem natural. Se os alunos já estudaram análise combinatória, espera-se que os estudantes relacionem a questão 3.b) e 3.c) com os princípios multiplicativo e aditivo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 Segunda Lista de Atividades

2ª LISTA - Atividades 1, 2 e 3	
1) Sobre a circunferência (Figura 1) marque 5 pontos distintos.	
Figura - 1 	
Represente cada ponto por uma letra maiúscula escolhida entre as cinco primeiras letras do nosso alfabeto. As cordas AD e DA possuem a mesma medida? Justifique.	
Desenhe todos os segmentos possíveis, tomando como extremos dois dos pontos destacados sobre a circunferência. Quantos segmentos foram desenhados?	
Qual polígono ficou formado quando observamos os segmentos que ligam dois pontos consecutivos?	
Quantas diagonais têm esse polígono?	
Classifique os vértices do polígono formado em pares ou ímpares.	
É possível desenhar o polígono formado e suas diagonais, partindo, de um vértice qualquer sem tirar o lápis do papel e passando uma única vez em cada segmento? Justifique.	
Quantos segmentos podem ser formados unindo-se dois a dois 6 pontos distintos sobre uma circunferência? Justifique sua resposta.	
2) Construa circunferências marcando: a) 6 pontos b) 7 pontos c) 8 pontos Anoto o que você observa sobre os polígonos formados ao se unir dois pontos consecutivos:	
3) Você seria capaz de indicar uma condição para que se possa desenhar um polígono e suas diagonais partindo de um vértice, sem tirar o lápis do papel e sem passar pelo mesmo caminho mais de uma vez? Justifique	

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.1 Orientações para 2ª Lista de Atividades

Orientações para as atividades da Lista 2	
Tempo estimado	2 aulas de 50 minutos cada
Objetivo	Interpretação gráfica de um polígono inscrito numa circunferência e suas diagonais, relacionando o conteúdo de geometria com a ideia de registro de grafo e o estudo dos possíveis caminhos entre suas arestas.
Tipo de trabalho	Em duplas
Outras observações / Dicas de solução	É uma experiência de prática investigativa. Espera-se que os alunos consigam estabelecer relações entre o número de vértices, lados e diagonais de um polígono e quando é possível desenhar todos os segmentos (lados e diagonais) sem tirar o lápis do papel, conteúdo abordado no estudo de grafos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 Terceira Lista de Atividades

3ª LISTA de ATIVIDADES (sala) – Atividade 1

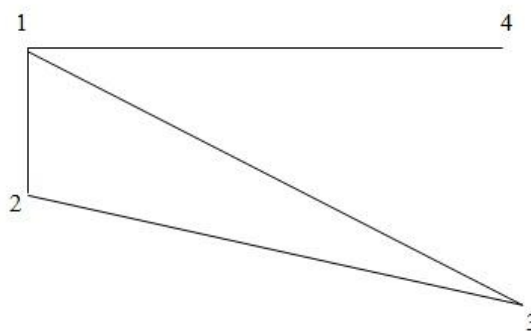
Podemos representar um grafo através de uma matriz bidimensional, onde uma das dimensões são vértices e a outra dimensão são arestas.

Dado um grafo G com n vértices e m arestas, podemos representá-lo por uma matriz $n \times m$.

Para representar um grafo sem pesos nas arestas e não direcionado, basta que as entradas da matriz M contenham 1 se o vértice incide na aresta, 2 caso seja um laço (incide duas vezes) e 0 caso o vertice não incida na aresta.

1) Vamos supor que dos aeroportos de quatro cidades partem voos diários. No esquema abaixo (Figura-1), os números 1, 2, 3 e 4 representam essas cidades e as linhas, os voos existentes entre elas.

Figura - 1



Podemos associar a essa situação uma tabela, que estabelece se há ou não voo direto entre as cidades, de modo que:

Se as cidades possuem ligação entre elas, ou seja, se há voo direto entre uma e outra, escrevemos um na tabela;

Se as cidades não se ligam diretamente, o que na situação descrita significa que não há voo direto entre elas, escrevemos 0 na tabela.

Como não há voo de uma cidade para ela mesma, nesse caso também escrevemos 0 na tabela.

Complete a Tabela 1 associada à Figura 1, de acordo com as informações fornecidas:

Tabela - 1

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Fonte: Elaborada pelo autor.

3ª LISTA de ATIVIDADES (sala) – Atividade 2

Sistematizando ideias

Seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, um conjunto finito não vazio, e um grafo G . A matriz $M_G = (a_{ij})$, é chamada de matriz de incidência, ou associada ao grafo G se tomarmos $a_{ij} = (a_i, a_j)$, onde:

$a_{ij} = 1$, se i estiver ligado a j , e

$a_{ij} = 0$, se i não estiver ligado a j .

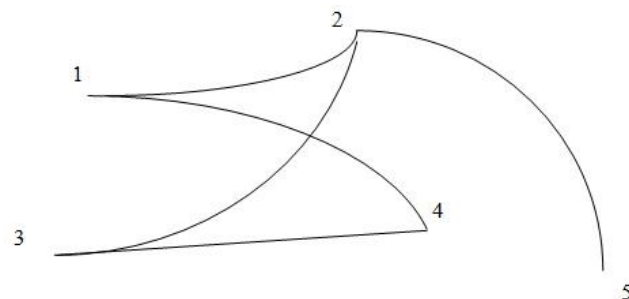
A tabela 1 é a matriz de adjacência do grafo representado na Figura 1.

2) Construir um grafo a partir da matriz de adjacência indicada abaixo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Observe a representação geométrica abaixo (Figura – 2).

Figura - 2



Chamamos de vértice (V) todo conjunto finito não vazio, que nesta figura enumeramos por 1, 2, 3, 4 e 5. Assim, podemos representar $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Denominamos de E todo conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V . Podemos dizer que para a ilustração acima $E = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,5), (3,4)\}$.

Dizemos que os elementos de V são vértices do grafo (G), e os elementos de E são as arestas de G .

Represente geometricamente um grafo, sabendo que $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

$E = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,6), (5,3), (5,1), (5,6), (4,6), (4,5), (6,1), (6,2), (3,4)\}$.

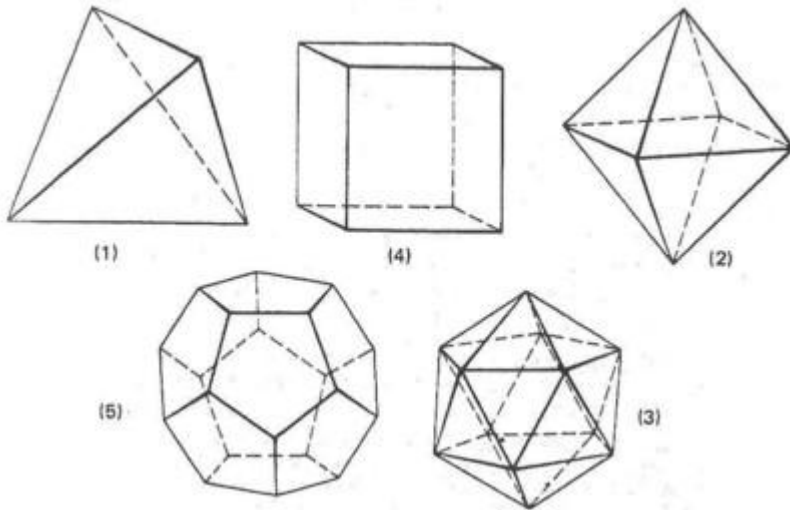
Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3.1 Orientações para a 3ª Lista de Atividades

Orientações para a 3ª Lista de Atividades	
Tempo estimado	1 aula de 50 minutos
Objetivo	Exploração de diversas formas de representação de um grafo e da associação entre essas formas: icônica, matricial (matriz de adjacências) e representação por meio de conjuntos de pares não ordenados.
Tipo de trabalho	Em duplas
Outras observações / Dicas de solução	Essa atividade desperta interesse dos alunos, pois a mesma associa as diversas representações de grafos, fazendo transposições de conteúdos, associando álgebra com a própria álgebra (mais de uma forma de representação dentro da própria álgebra). Geralmente os estudantes não encontram dificuldades para fazer essas associações. Nesse momento o professor deverá orientar as atividades de prática investigativa de modo que os alunos sejam conduzidos à descoberta dos conceitos e aplicações.

Fonte: Elaborado pelo autor.

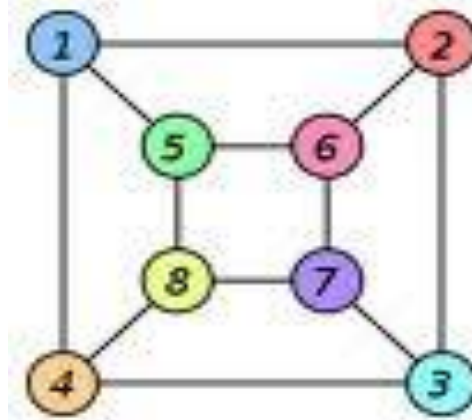
4.4 Quarta Lista de Atividades

4ª LISTA de ATIVIDADES (sala) – Atividade 1
Na teoria dos Grafos, os seguintes conceitos são importantes: a) Grau de um vértice, que é o número de arcos que saem dele. b) Um vértice é par ou ímpar, conforme seu grau seja par ou ímpar, respectivamente. c) Se um grafo pode ser percorrido totalmente, passando-se exatamente uma única vez em cada arco, ele é classificado como grafo unicursal. Caso contrário, ele é multicursal.
1) Construir 3 grafos, um multicursal, um unicursal com dois vértices ímpares e um unicursal com todos os vértices pares.
2) Observe os poliedros regulares (Poliedros de Platão).  i) Quais dentre esses poliedros são unicursais? Justifique j) Quais dentre esses poliedros são multicursais? Justifique

Fonte: Elaborado pelo autor.

4ª LISTA de ATIVIDADES (sala) – Atividade 3

3) Observe o grafo da Figura 1.



Construa uma matriz M 8×8 em que $M_{8 \times 8} = (m_{ij}) = 1$, se i estiver ligado a j e 0, se i não estiver ligado a j .

Identifique o tipo especial que a matriz M representa.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4.1 Orientações para a 4ª Lista de atividades

Orientações para a atividade 4	
Tempo estimado	2 aulas de 50 minutos
Objetivo	Reforçar os conceitos de grafos unicursais e multicursais e de matrizes investigados pelos alunos durante a oficina
Tipo de trabalho	Em duplas
Outras observações / Dicas de solução	Na primeira atividade os alunos poderão mostrar a criatividade na construção dos grafos, aplicando os conceitos investigados nas atividades anteriores. Na segunda atividade os alunos devem classificar os poliedros de Platão em unicursais ou multicursais, aplicando os conceitos sobre grafos na geometria espacial. Na terceira atividades os alunos deverão encontrar a matriz de adjacências do grafo apresentado. Geralmente os alunos não apresentam dificuldade nessa atividade, uma vez que a mesma é constituída por questões que podem ser resolvidas através dos conceitos investigados anteriormente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5 Atividades Complementares

4.5.1 Atividade Complementar 1

Atividade Complementar 1

Um grafo é uma figura constituída de um número finito de arestas ou arcos, cujas extremidades são chamadas vértices. Em um grafo, a “ordem de um vértice” é o número de extremidades de arestas ou arcos que se apoiam naquele vértice.

A figura 1 é um grafo cujos vértices A e C possuem ordem 3 (o vértice A é o apoio de um arco cujas extremidades coincidem) e os demais vértices possuem ordem 2.

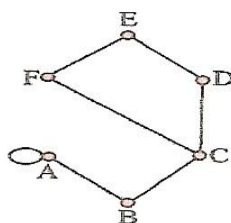
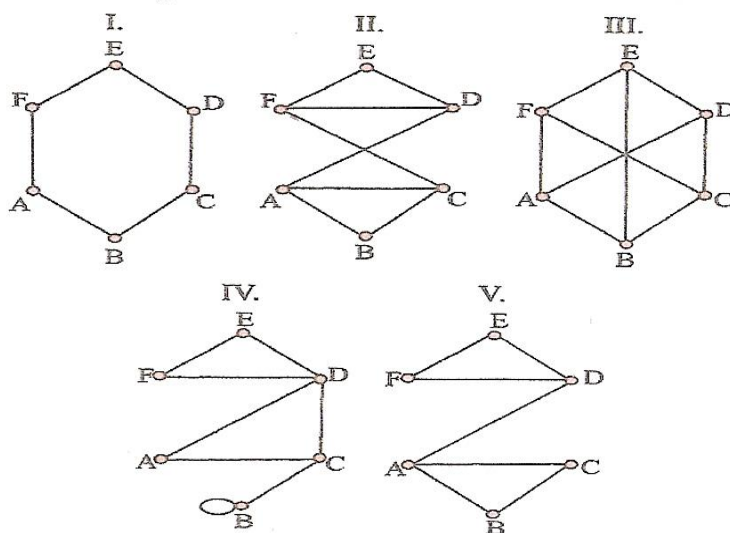


figura 1

Além disso, dizemos que um grafo admite um “passeio de Euler” se existir um caminho do qual façam parte todas as arestas ou arcos desse grafo, sendo possível desenhá-lo sem tirar o lápis do papel e passando-o uma única vez em cada aresta ou arco. Na figura 1 é possível fazer um “passeio de Euler” partindo-se apenas dos vértices “A” ou “C”. Por exemplo, um possível “passeio” pode ser representado pela sequência de vértices dada por: AABCDEFCA.

Considere os grafos:



Os que admitem um “passeio de Euler” são apenas:

- (A) I e III. (B) I e IV. (C) I, II e V. (D) I, III e IV. (E) I, IV e V.

- **Orientações para a Atividade Complementar 1**

Orientações para a Atividade Complementar 1	
Tempo estimado	30 min.
Objetivo	Identificar os grafos aplicando o conceito de que um grafo será unicursal se possuir todos os vértices pares ou exatamente dois vértices ímpares, podendo em um vértice ter um arco chamado de apoio, pois suas extremidades coincidem.
Tipo de trabalho	Individual
Outras observações / Dicas de solução	Após investigações os estudantes reconhecem as características de um grafo unicursal e de um multicursal. Nessa atividade eles deverão apresentar o domínio desse conceito e concluir que a resposta do problema é a letra (E), sendo o grafo (I) unicursal com todos os vértices pares, o (IV) unicursal com o vértice (C) ímpar e no vértice (B) possui um laço que chamamos de apoio, enquanto que o grafo (V) é multicursal com os vértices (A) e (D) ímpares.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5.2 Atividade Complementar 2

Atividade Complementar 2

A figura a seguir representa um mapa de estradas. Os números escritos nas setas indicam quanto de pedágio um viajante deve pagar ao passar pela estrada. Todas as estradas são de mão única, como indicam as setas. Qual o valor mínimo de pedágio pago por um viajante que sai da cidade A e chega na cidade B?

(A) 11 (B) 14 (C) 12 (D) 10 (E) 15

Fonte: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

• **Orientações para a Atividade Complementar 2**

Orientações para a Atividade Complementar 2	
Tempo estimado	30 min.
Objetivo	Entender as aplicações de grafos em problemas de caminhos mínimos.
Tipo de trabalho	Individual
Outras observações / Dicas de solução	Seguir os caminhos indicados por setas e verificar que a menor soma dos pesos dos arcos para se ir de A a B é 11.

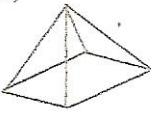
Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5.3 Atividade Complementar 3

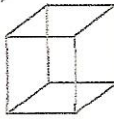
Atividade Complementar 3

Topázio desenhou cada figura a seguir, exceto uma, tirando o lápis do papel exatamente uma vez e passando pela mesma linha duas vezes. Qual das figuras abaixo ela não desenhou?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Fonte: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

- **Orientações para a Atividade Complementar 3**

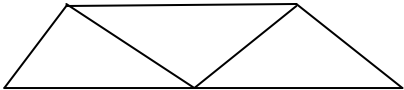
Orientações para a atividade 7	
Tempo estimado	30 min.
Objetivo	Identificar a composição de grafos e interpretar as características de unicursal e multicursal.
Tipo de trabalho	Individual
Outras observações / Dicas de solução	Durante as investigações os alunos descobriram que um grafo unicursal possui todos os vértices pares ou exatamente dois vértices ímpares. Para que um grafo seja desenhado tirando o lápis exatamente uma vez, é preciso que o mesmo tenha exatamente quatro vértices ímpares. Portanto, nas figuras apresentadas no exercício a única que possui mais de quatro vértices ímpares é a (D).

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5.4 Atividade Complementar 4

Atividade Complementar 4

Associe (V) para as proposições verdadeiras e (F) para as falsas.

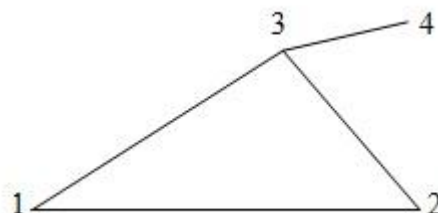
1 () O grafo  é unicursal com exatamente dois vértices ímpares.

2 () O heptágono possui 7 lados e 14 diagonais. Portanto, seus vértices são pares.

3 () O octaedro regular é um dos poliedros de Platão, possuindo 6 vértices e 12 arestas. Portanto, é um grafo multicursal.

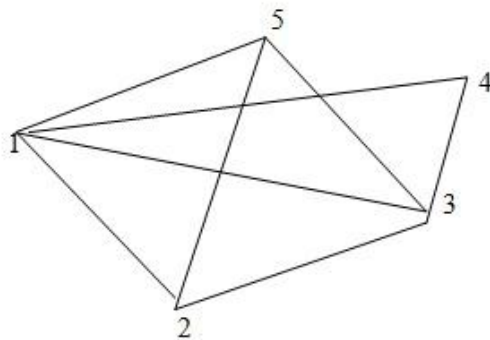
4 () A matriz de adjacências do grafo é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



5 Uma possível representação para a matriz de adjacências é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Fonte: Elaborado pelo autor.

- **Orientações para a Atividade Complementar 4**

Orientações para a Atividade Complementar 4	
Tempo estimado	30 min.
Objetivo	Associar os grafos com suas diversas formas de representação.
Tipo de trabalho	Individual
Outras observações / Dicas de solução	Observar as representações dos grafos, associando aos conteúdos de matrizes e geometria, para que fique evidenciando a importância das associações e aplicações dos conteúdos estudados no Ensino Médio, estabelecendo relações entre os mesmos. Ao investigar as questões para suas resoluções os alunos deverão chegar a conclusão sobre as respostas da seguinte forma: 1 (V); 2 (V); 3 (F); 4 (V); 5 (F)

Fonte: Elaborado pelo autor.

- **Orientações para a Atividade Complementar 5**

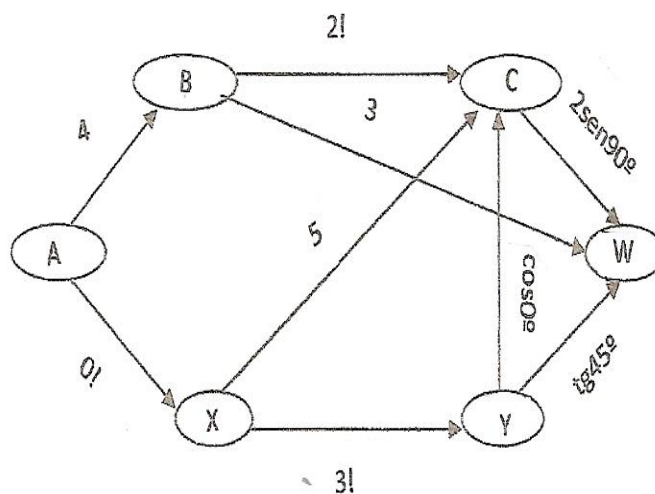
Orientações para a Atividade Complementar 5	
Tempo estimado	50 min.
Objetivo	Observar as sequências numéricas que serão construídas à partir do maior número e seguindo por um caminho orientado pelas setas.
Tipo de trabalho	Individual
Outras observações / Dicas de solução	Explorar com os alunos os divisores de um número. Por exemplo, no primeiro grafo, o número 120 está direcionado a todos os outros números, logo os seus divisores serão escritos nos círculos da figura. No primeiro grafo, do número 15 para se chegar ao número 1 pelo menor caminho, podemos passar pelo círculo onde está o número 3 ou o que está com o número 5. Logo, os divisores de 15 são os números 1, 3, 5 e 15

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5.6 Atividade Complementar 6

Atividade Complementar 6

Uma determinada loja que vende artigos domésticos, situada na cidade A, precisa fazer uma entrega na cidade W. Abaixo ilustramos os possíveis caminhos que o carro que presta serviços para a loja situada na cidade A pode tomar. O sentido obrigatório do percurso está indicado por meio de setas. Cada seta possui um valor que está colocado próximo a elas que especifica o custo do transporte para a situação descrita (dados em uma mesma unidade monetária).



Calcule o custo mínimo de um carro que presta serviços à loja situada na cidade A entregar o produto a cidade W.

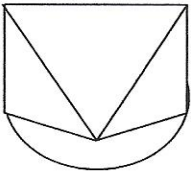
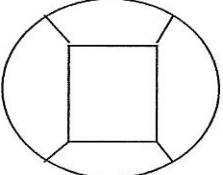
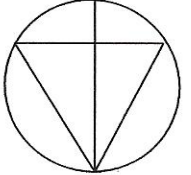
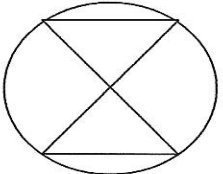
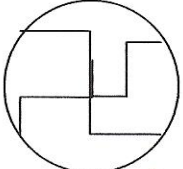
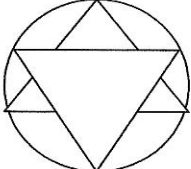
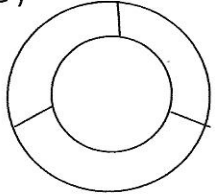
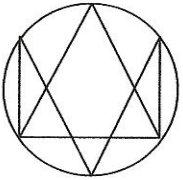
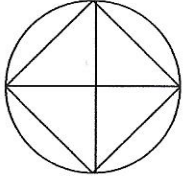
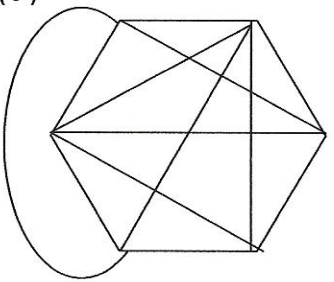
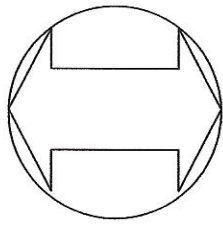
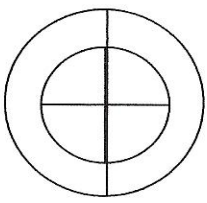
Fonte: Elaborado pelo autor.

- **Orientações para a Atividade Complementar 6**

Orientações para a Atividade Complementar 6	
Tempo estimado	30 min.
Objetivo	Identificar o caminho mínimo em um grafo orientado.
Tipo de trabalho	Individual
Outras observações / Dicas de solução	Explorar além do conceito de caminho mínimo, as outras áreas da matemática, proporcionando assim relações entre os conteúdos da disciplina. Esse tipo de questão proporciona ao professor revisar alguns conceitos matemáticos. Os alunos podem investigar as ideias de trigonometria e de fatorial apresentadas na questão.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5.7 Atividade Complementar 7

Atividade Complementar 7		
Sem sair do papel Veja se você consegue descobrir quais destas figuras não podem ser desenhadas sem tirar o lápis do papel.		
(A)	(B)	(C)
		
(D)	(E)	(F)
		
(G)	(H)	(I)
		
(J)	(L)	(M)
		

Fonte: Elaborado pelo autor.

- **Orientações para a Atividade complementar 7**

Orientações para a Atividade Complementar 7	
Tempo estimado	50 min.
Objetivo	Investigar em quais figuras é possível percorrer com um único caminho e as que não são possíveis. Podendo neste momento aplicar os conceitos de grafos unicursais e multicursais.
Tipo de trabalho	Individual
Outras observações / Dicas de solução	Explorar as ideias de vértices pares e ímpares em cada figura e após aplicar os conceitos de unicursais e multicursais, sabendo que um grafo é unicursal se possuir exatamente dois vértices ímpares ou se todos os vértices forem par. Quando um grafo apresenta mais de dois vértices ímpares ele é multicursal. Portanto, verifica-se que os grafos (A), (B), (E), (F), (G), (I) e (M), são multicursais e os grafos (C), (D), (H), (J) e (L) são unicursais.

Fonte: Elaborado pelo autor.

5 AVALIAÇÃO

Ao final das atividades, sugerimos que seja feita uma avaliação das atividades desenvolvidas na oficina.

Na perspectiva da investigação matemática estabelecida pelo professor e pelo grupo, o processo de avaliação deve ser pensado como forma de integrar o ensino e a aprendizagem, tendo como um dos objetivos a orientação e a intervenção pedagógica, que irá possibilitar a reflexão contínua do processo de aprendizagem.

Lembramos que o processo de avaliação é contínuo e uma oficina com um número reduzido de encontros pode não ser suficiente para avaliarmos se de fato a aprendizagem foi efetivada.

As perguntas seguintes podem motivar uma reflexão sobre o estudo desenvolvido:

QUESTIONÁRIO	
1) Dentre as atividades que desenvolvemos estudando Grafos, qual a que chamou mais a sua atenção? Por quê?	
2) Seria importante que no Ensino Médio sejam estudados conteúdos sobre Grafos? Justifique	
3) Com quais conteúdos matemáticos o Tópico Grafos pode ser relacionado?	
4) Indique uma situação prática que poderia ser resolvida por meio do uso de Grafos.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A oficina foi proposta para desenvolvimento com estudantes do Ensino Médio. Entretanto, algumas das atividades podem ser desenvolvidas com alunos que cursam o final do Ensino Fundamental.

As primeiras quatro listas de atividades foram testadas em uma oficina ofertada para alunos da terceira série do Ensino Médio. Mesmo o grupo tendo interagido de forma satisfatória com a proposta da oficina, o professor precisa estar atendo a algumas dificuldades que podem ocorrer:

- a) A dificuldade em registrar as atividades através de outras ideias de representação, sendo elas através das conversões ou dos tratamentos;
- b) A dificuldade em socializar os registros obtidos, executando as operações de conversão;
- c) A dificuldade dos grupos em executar a etapa de verificar a validade das conclusões que obtiam, fazendo a verificação se eram casos particulares ou mais gerais.

É preciso ressaltar que mais importante que uma resposta certa ou errada, são os processos de análise, discussão e registros das atividades. A transcrição de um problema que é apresentado na linguagem natural para outro tipo de representação, proporciona o desenvolvimento matemático nos alunos.

Ao perceberem a importância do conteúdo e sua aplicação em outras áreas do conhecimento, notamos que os estudantes se envolvem mais ao definir estratégias de resolução para as questões propostas, buscando compreender e sistematizar ideias sobre grafos.

Esperamos que os professores que atuam na educação básica possam utilizar as atividades propostas para enriquecimento de suas aulas e se sintam motivados a elaborar outras questões para o desenvolvimento intelectual e cognitivo dos alunos.

REFERÊNCIAS

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de Representação Semiótica**. Campinas/SP: Editora Papirus, 2003. cap. 1, p. 1-31.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**. São Paulo: Editora PROEM, 2011.

GUALANDI, Jorge Henrique. **Investigações matemáticas com Grafos para o Ensino Médio**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Belo Horizonte.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Olimpíada Brasileira de Matemática**. 2011. Primeira Fase – Nível 2 – Questão 16.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP. **Vestibular**. 2011. Prova de Conhecimentos Gerais – Questão 89

WAGNER, Vânia Maria Santos. **Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo**. GEPEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – Instituto de Educação da UFRRJ – N. 53, jul./dez. 2008.