PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Lunarde Lourenço dos Santos Freitas

ÁLGEBRA BOOLEANA E MODELOS MATEMÁTICOS DE SIMPLIFICAÇÃO EM CURSOS TÉCNICOS.

Belo Horizonte
2014

Lunarde Lourenço dos Santos Freitas

ÁLGEBRA BOOLEANA E MODELOS MATEMÁTICOS DE SIMPLIFICAÇÃO EM CURSOS TÉCNICOS.

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda

Belo Horizonte

2014

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Freitas, Lunarde Lourenço dos Santos
F866a Álgebra booleana e modelos matemáticos de simplificação em cursos técnicos / Lunarde Lourenço dos Santos Freitas. Belo Horizonte, 2014.
177f.: il.

Orientador: Dimas Felipe de Miranda
Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Álgebra booleana. 3. Lógica. 4. Modelos matemáticos. I. Miranda, Dimas Felipe de. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 51:37.02

Lunarde Lourenço dos Santos Freitas

ÁLGEBRA BOOLEANA E MODELOS MATEMÁTICOS DE SIMPLIFICAÇÃO EM CURSOS TÉCNICOS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda – Orientador - PUC Minas

Doutorado em Tratamento da Informação Espacial – (PUC Minas)

Prof. Dr. Arlindo José de Souza Júnior – (UFU)

Doutorado em Educação – (UNICAMP)

Prof. Dr. João Bosco Laudares – (PUC Minas)

Doutorado em Educação: História, Política, Sociedade – (PUC – SP)

Belo Horizonte, 23 de maio de 2014.

A Deus, por permitir que eu busque o conhecimento;
aos meus pais, Lúcio e Selma, por todo ensinamento e por serem meus pais, à minha esposa, Simônia, e minhas filhas, Vivian e Luana, por estarem sempre próximas, pela compreensão e paciência, à minha irmã e a meus irmãos, pelo apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter colocado tantas pessoas importantes em meu caminho, não só durante este trabalho, mas durante toda a minha vida.

Aos meus pais, Lúcio e Selma, por serem minha referência de vida.

À minha esposa, Simônia, a minhas filhas, Vivian e Luana, que caminharam comigo lado a lado, com paciência, compreensão e apoio.

À minha irmã, Shirlei, a meus irmãos, Leonardo, Ladimir e Luciano, pelo apoio, pela confiança e pelo estimulo.

Ao Professor Dimas Felipe de Miranda, pela competência, sabedoria, tranquilidade e disponibilidade, pelos conselhos, pelo apoio e pela valorização que me incentivaram durante todo o período do mestrado e da orientação para este trabalho.

Aos professores João Bosco Laudares, Maria Clara Resende Frota e Eliane Scheid Gazire, que, além de contribuírem com seus conhecimentos, sempre estiveram próximos e nos dando todo o apoio necessário.

A todo o corpo docente do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, por contribuírem para o meu conhecimento.

Às minhas colegas e amigas Vânia, Lana e Lílian, que participaram de todos os momentos desafiadores ao longo do período do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática.

Às professoras Maria Salete (em memória) e Celisa, que me incentivaram a iniciar o mestrado e não me deixaram desistir da ideia.

Aos grupos de estudos PINEM e GRUPIMEM, que contribuíram, apontando caminhos a serem seguidos para a evolução de minha prática pedagógica e também deste trabalho.

À UTRAMIG, à FAPEMIG e à PUC Minas, que me proporcionaram esta oportunidade.

RESUMO

Este trabalho explorou o ensino da Álgebra Booleana no processo de construção de circuitos eletrônicos, observando-se uma situação real. O objetivo da pesquisa foi levar os alunos de um curso técnico pós-médio a aplicar conhecimentos matemáticos trazidos do Ensino Fundamental e Médio, durante o processo de minimização de expressões booleanas, especialmente quando se aplica o método de simplificação pela Álgebra de Boole. Tentou-se compreender as dificuldades dos alunos por meio de uma análise quantitativa e qualitativa das atividades didáticas aplicadas após o ensino do conteúdo. A fundamentação da pesquisa se deu em obras e textos com foco no ensino da lógica, na história da lógica, na Álgebra de Boole, em Mapas de Karnaugh e em obras ligadas à eletrônica digital. O resultado das análises das atividades didáticas mostra a necessidade de se trabalhar o conceito de função e propriedades da aritmética que são equivalentes às regras e propriedades booleanas. Concluiu-se ser de extrema importância, no ensino desse conteúdo, estruturar as aulas teóricas e práticas em um modelo, que pode ser chamado de Modelo Booleano, pois se percebe que a visão da modelagem ou modelamento matemático ajuda o aluno a visualizar a matemática de uma forma mais agradável e próxima da vida real. O mapeamento das dificuldades encontradas na resolução das atividades inspirou o desenvolvimento de um ferramental que foi chamado de Ambiente Virtual de Aprendizagem da Lógica Matemática.

Palavras-chave: Lógica Matemática. Modelo. Álgebra booleana.

ABSTRACT

This paper explored the teaching of Boleean Algebra in the process of construction of electronic circuits within a real situation. The goal of the research was to lead the students from a technical post-secondary course to applying mathematical knowledge brought from fundamental and secondary teaching, during the process of minimization of Boolean expressions, especially when it is applied the simplification method by Boole´s Algebra. An attempt was made to understand the students´ difficulties by means of a quantitative and qualitative analysis of the didactic activities applied after the teaching of the content. The foundation of the research happened in works and texts focused in the teaching of logic, the history of logic, Boolean Algebra, Karnaugh Maps and in works linked to digital electronics. The result of analyses of the didactic activities shows the necessity of working the concept of function and properties of arithmetic that are equivalent to the Boolean rules and properties. It was concluded that it is very important, in the teaching of this content, to structure the theoretical and practical classes in a model, which may be called Boolean Model, since it is noticed that the view of the mathematical modeling helps the student to visualize mathematics in a way more pleasant and close to the real life. The mapping of the difficulties found in the resolution of the activities inspired the development of Mathematical Logic Virtual Learning Environment.

Keywords: Mathematical Logic. Model. Boolean Algebra.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nos dias de hoje, os termos digital, bit, byte, Megabits já fazem parte de nosso vocabulário diário, devido ao modo como os artefatos digitais e eletrônicos ocuparam espaço em quase tudo com que a nossa sociedade se relaciona: produtos eletrônicos, computadores, equipamentos médicos, telefonia celular, TV Digital, sistemas computadorizados para automóveis e internet, entre outros. Tópicos da área da Matemática, como o sistema binário, a lógica matemática, a lógica proposicional e a Álgebra de Boole, têm papel fundamental na evolução da eletrônica e, como consequência, na evolução das ciências e tecnologias.

Diante de toda essa evolução, como os conceitos abordados no processo ensino-aprendizagem da Matemática se aplicam à disciplina de eletrônica digital? Como os alunos que buscam os cursos de Eletrônica e Telecomunicações reagem diante da necessidade da aplicação de habilidades matemáticas que, muitas vezes, estão esquecidas ou nunca foram apreendidas devidamente?

Todas essas perguntas são preocupações do autor desta pesquisa, professor de eletrônica digital, que se depara, frequentemente, com as dificuldades dos alunos em usar ou transpor conhecimentos matemáticos e de áreas correlatas.

É importante ressaltar que o Brasil vem se preocupando com esse assunto, em âmbito nacional. De acordo com o PNE[1] - 2011/2020, Plano Nacional de Educação (PNE) aprovado para vigorar de 2011 a 2020, dentre as suas 10 diretrizes, a quinta trata da formação para o trabalho e a sétima, da promoção humanística, científica e tecnológica do País. Dentre as metas no PNE, pode-se destacar a sétima meta, que visa atingir as seguintes médias nacionais para o IDEB[2]:

Quadro 1 – Médias Nacionais para o IDEB

IDEB	2011	2013	2015	2017	2019	2021
Anos iniciais do Ensino Fundamental	4,6	4,9	5,2	5,5	5,7	6,0
Anos finais do Ensino Fundamental	3,9	4,4	4,7	5,0	5,2	5,5
Ensino Médio	3,7	3,9	4,3	4,7	5,0	5,2

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do Plano Nacional de Educação para o decênio 2011-2020

[1] PNE – Plano Nacional de Educação.
[2] IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica.

E como estratégia desta meta, podemos destacar uma que vem ao encontro de nossas reflexões, a meta 7.25, que diz “Confrontar os resultados obtidos no IDEB com a média dos resultados em Matemática, Leitura e Ciências obtidos nas provas do Programa Internacional de Avaliação de Alunos - PISA[3], como forma de controle externo da convergência entre os processos de avaliação do ensino conduzidos pelo INEP[4] e processos de avaliação do ensino internacionalmente reconhecidos, de acordo com as seguintes projeções:”

Quadro 2 – Metas PISA de 2009 a 2021

PISA	2009	2012	2015	2019	2021
Média dos resultados em Matemática, Leitura e Ciências	395	417	438	455	473

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do Plano Nacional de Educação para o decênio 2011-2020

No dia 31 de março de 2014, os meios de comunicação, TV e internet, informaram a divulgação feita pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE[5]) dos resultados da pesquisa do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa). A pesquisa avaliou 44 países, quanto à capacidade dos alunos de 15 anos na resolução criativa de problemas de Matemática aplicados à vida real. O Brasil melhorou na pesquisa, atingindo 428 pontos, colocando-se na posição de 38º entre os 44 países, chegando próximo da meta projetada para 2015, que é de 438 pontos, mas continua no grupo dos últimos colocados. Observando-se o *ranking* dos melhores classificados, encontramos Singapura, em primeiro lugar com 562 pontos, Coreia do Sul, em segundo lugar com 561 pontos, e Japão, em terceiro lugar com 552 pontos. Paralelamente, podemos observar que esses países ocupam posições importantes como dos mais avançados tecnologicamente, em áreas como telecomunicações, eletrônica e outras tecnologias.

O autor desta pesquisa acompanha e está inserido nesse processo, pois é professor licenciado em Matemática pelo Instituto Cultural Newton de Paiva Ferreira, em Minas Gerais, tendo iniciado sua carreira de professor em 1994, em uma Fundação ligada ao município de Contagem – MG, nos cursos de Ensino Médio e Técnico, nos conteúdos de Matemática e Estatística. Trabalhou nessa instituição nos períodos de 1994 até 1997 e de 2001 até 2004. De março de 2005 até a presente data, vem trabalhando com a disciplina de Eletrônica Digital, no

[3] PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos
[4] INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - http://portal.inep.gov.br/
[5] OCDE - Organização para a Cooperação do Desenvolvimento Econômico

curso técnico em Telecomunicações, nível pós-médio, na instituição UTRAMIG - Fundação de Educação para o Trabalho de Minas Gerais, onde se realizou esta pesquisa. Além da carreira de professor, o pesquisador mantinha outra carreira, ligada à área de eletrônica e em telecomunicações, que iniciou em 1978, como técnico em eletrônica, atuando em uma empresa multinacional na área de eletromedicina. Depois atuou em uma empresa de circuitos eletrônicos de segurança bancária até o ano de 1984. A partir de 1984, trabalhou em uma empresa estatal na área de telecomunicações, exercendo, paralelamente, a partir de 1994, a carreira de professor até a data atual.

A experiência empresarial na área de tecnologia eletrônica, telecomunicações e sistemas digitais associada à atuação no ensino da Matemática e Eletrônica Digital foi de fundamental importância na realização deste trabalho. Também ao estudar o tópico de Lógica na disciplina Matemática Discreta, mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-Minas, e participar das discussões sobre metodologia de ensino no GRUPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática e Metodologia em Educação Matemática da PUC Minas), surgiu a ideia de se trabalhar a lógica inserida em situação prática.

O foco desta pesquisa se deu no ensino do tema Álgebra de Boole e sua aplicação no desenvolvimento de projetos de circuitos eletrônicos combinacionais, explorando conceitos e propriedades matemáticas.

Durante nove anos lecionando Eletrônica Digital, pude perceber uma dificuldade do aluno do curso de Telecomunicações em trabalhar no processo de simplificação de expressões lógicas pelo processo de simplificação pela Álgebra de Boole. A dificuldade reside na aplicação de propriedades matemáticas, constatada pela experiência do pesquisador e nas entrevistas informais com outros professores da mesma disciplina. A partir daí, buscou-se, nesta pesquisa, elaborar atividades e recursos didáticos para o ensino e a aprendizagem dos principais pontos que levam os alunos a não concluírem e, às vezes, nem conseguirem iniciar o processo de simplificação da expressão booleana. Após a aplicação do método de simplificação por Boole, abordou-se o método de simplificação pelos Mapas de Karnaugh, outro método matemático de simplificação de expressões booleanas.

Na busca de um recurso didático, pensou-se em um Ambiente de Aprendizagem Virtual de Lógica Matemática. Após pesquisar vários *softwares*, o pesquisador deparou-se com algumas dificuldades, o que o direcionou ao desenvolvimento de um *site* específico para esta pesquisa, no qual seria possível hospedar material teórico para os temas lógica matemática, modelagem matemática, modelos matemáticos, dissertações e artigos ligados ao tema, objetos de aprendizagem para atividades que facilitem o entendimento das funções booleanas e outras.

A construção do *site* foi realizada de forma simples e praticamente artesanal pelo próprio pesquisador, que necessitou de um estudo anterior para construí-lo, utilizando ferramentas básicas.

O objetivo do Ambiente Virtual de Aprendizagem de Lógica Matemática é facilitar ao aluno o acesso virtual, por um computador, celular ou *tablet* ligado à rede internet, ou ainda por um arquivo que lhe permita ter acesso *off-line.*

1.1 Importância do trabalho

A importância deste trabalho está caracterizada em dois momentos.

O primeiro é recuperar as habilidades matemáticas básicas que o aluno não assimilou, pelos mais diversos motivos, ao longo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e apresentar ferramentas ligadas à tecnologia que possam estimulá-lo a pesquisar e compreender o papel da Matemática e a lógica matemática em situações da vida real.

O segundo é contribuir, disponibilizando material didático que trata de temas como lógica matemática, modelagem matemática e outros, para pesquisas através de buscadores na rede internet através do AVALM – Ambiente Virtual de Aprendizagem de Lógica Matemática, o que atingirá, de forma abrangente, professores, alunos pesquisadores e interessados nos temas.

1.2 Delimitação do trabalho

Este trabalho limita-se à análise de atividades baseadas no conteúdo lecionado em sala de aula na disciplina de Eletrônica Digital para o curso técnico de Telecomunicações, identificando dificuldades dos alunos em aplicar conhecimentos matemáticos aos métodos de simplificação de expressões e desenvolver ferramentas que o estimulem a desenvolver um raciocínio lógico matemático que o ajudará a aplicar os métodos com maior facilidade e melhor compreensão.

A principal questão deste trabalho é: ***de que forma uma sequência de atividades e recursos didáticos que explorem conceitos e propriedades matemáticas podem contribuir para um ensino mais eficiente e contextualizado da Álgebra Booleana?***

1.3 Objetivos

Apresentamos a seguir o conjunto de objetivos que nortearam esta pesquisa, dividindo-os em geral e específicos.

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver o ensino da álgebra booleana, aplicada à disciplina de Eletrônica Digital de um curso técnico pós-médio, explorando conceitos e propriedades matemáticas nas diversas fases do modelo booleano.

1.3.2 Objetivos específicos

Como objetivos específicos, propomos:

a) Levar o aluno a lidar com as várias fases de construção e representação do modelo da Álgebra de Boole (modelo booleano).
b) Conduzir o aluno a desenvolver Atividades Didáticas, devidamente planejadas, trabalhando e recuperando conceitos e propriedades matemáticas fundamentais na simplificação de expressões booleanas.
c) Utilizar um ambiente e o laboratório de eletrônica digital, visando à inserção do aluno numa situação de aplicação real e validação do processo desenvolvido.

1.4 Estrutura do trabalho

Esta dissertação tem fundamentação teórica em obras, artigos e dissertações relacionadas aos temas lógica matemática, modelagem matemática, Álgebra Booleana, métodos de simplificação de expressões e aplicação da Álgebra de Boole em eletrônica digital.

É composta por cinco capítulos.

O capítulo 1 contém uma Introdução, que apresenta a influência das tecnologias na sociedade e a necessidade de preparar o aluno para as profissões que contribuem para o desenvolvimento tecnológico e científico que necessita de um maior domínio em conteúdos básicos da matemática, preparando-o para o mercado de trabalho. Apresenta, ainda, as diretrizes, metas e estratégias do Plano Nacional de Educação (PNE) para 2011 a 2020, ligadas à Matemática e à educação para o trabalho.

O capítulo 2 apresenta a base teórica que sustenta o trabalho, o processo de coleta de material de pesquisa, e um breve histórico que traça um caminho de Aristóteles até a álgebra booleana e sua aplicação em circuitos eletrônicos.

Nesse capítulo, o tema **A lógica e seu Ensino** se baseia nos autores Daghlian (1995), Rosen (2009) e Mühl (1989) em sua dissertação com o tema "*Uma proposta Alternativa para o Ensino da Lógica Matemática*".

O tema **Tipos de Lógica** é abordado com base em Machado e Cunha (2005), no livro "*Lógica e linguagem cotidiana - verdade, coerência, comunicação e argumentação*".

O tema **Lógica Proposicional** está embasado em Alencar Filho (2002), no livro *Iniciação à Lógica Matemática*, em Rosen (2009), no livro *Matemática Discreta e Suas Aplicações* e em Daghlian (1995), na obra *Lógica e Álgebra de Boole*.

O tema **Modelagens e Modelos** tem como base na obra de Bassanezi (2005), *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*.

O tema **Álgebra de Boole** baseou-se em Rosen (2009) e Tocci, Widmer, Moss (2007), em *Sistemas Digitais - Princípios e Aplicações*, em Floyd (2007), em *Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações*, em Capuano e Idoeta (1984), em *Elementos de Eletrônica Digital*.

O tema **Minimização de expressões booleanas** baseou-se em Daghlian (1995), Bochenski (1985), Garrido (1995), Blanché (1985), Carroll (1986) e Gardner (1958), contribuindo no histórico da evolução dos processos de simplificação de expressões. Já Capuano e Idoeta (1984) deram base nas regras da Álgebra de Boole.

O tema **O modelo de simplificação pelos Mapas de Karnaugh** foi baseado em Capuano e Idoeta (1984).

O tema **O modelo Booleano** descreve um modelo baseado na teoria de modelagem matemática de Bassanezi (2005) e nos processos e princípios da Álgebra de Boole e nos diagramas de Karnaugh, inspirados em Capuano e Idoeta (1984).

O capítulo 3 descreve os procedimentos metodológicos utilizados, apresentando os resultados esperados na pesquisa e as características dos indivíduos, expõe como foram definidas as atividades a serem aplicadas e como foram aplicadas. Apresenta-se também a planilha de coleta, organização e estatísticas dos dados, gerando valores em percentual do desempenho dos alunos em cada item das atividades, permitindo uma análise quantitativa. Um mapa do modelo apresenta as conexões internas do modelo e as atividades relacionadas a cada fase, compondo os três momentos que o constituem. O mapa tem o objetivo de facilitar o entendimento do leitor no momento de relacionar a análise qualitativa de cada item com seus respectivos momentos e fases do modelamento, da situação real até o esquema elétrico encontrado.

E conclui com a ferramenta desenvolvida a partir das análises, apresentando o *site* que virá a ser chamado de AVALM - Ambiente de Virtual de Aprendizagem de Lógica Matemática, com acesso pelo endereço www.avalm.com.br.

O capítulo 4 descreve a coleta e o tratamento dos dados extraídos das respostas no caderno de atividades aplicadas, a análise quantitativa do desempenho dos alunos através de tabelas e com os resultados ilustrados por gráficos, com dados em percentual de acertos e análise qualitativa de cada item dos indicadores. A partir dos resultados, identificam-se as principais dificuldades e os possíveis motivos que levam os alunos a ter dificuldades na aplicação de conceitos e instrumentos matemáticos.

O capitulo 5 apresenta uma conclusão da pesquisa e busca mostrar a importância do conteúdo e a necessidade de se dar maior ênfase no ensino da lógica e no raciocínio lógico de forma geral a alunos do Ensino Médio, visto que os temas, nos dias de hoje, estão presentes em aplicações nas várias ciências.

2 LITERATURA, TEORIAS E APLICAÇÕES

A base teórica deste trabalho consiste no estudo de obras que tratam a lógica matemática no campo educacional e também em suas aplicações, mais especificamente na área tecnológica, no ensino da eletrônica digital.

Há aproximadamente dois anos, iniciou-se uma busca de obras, dissertações e artigos que abordavam o tema Álgebra booleana, o Ensino de Álgebra booleana, Mapas ou Diagramas de Karnaugh e modelagem matemática.

Além de pesquisar livros em base de dados em bibliotecas via internet, foi utilizada uma ferramenta de busca do Google acadêmico, inserindo as palavras chaves referentes aos temas. Essa ferramenta de busca foi bastante eficiente, coletando, nesses 2 anos, aproximadamente 250 arquivos com publicações acadêmicas (artigos, dissertações e teses), muitas delas sendo descartadas por não estarem relacionadas aos pontos chaves, educação, ensino da lógica ou da álgebra booleana ou aplicação tecnológica.

Dos artigos, dissertações e obras selecionadas, criou-se um filtro mais seletivo, para dar base ao tema principal: o ensino da álgebra booleana, mapas de Karnaugh e a simplificação de expressões.

2.1 Lógica e seu Ensino

A compreensão do termo Lógica pode ser alcançada, analisando a história da Lógica, sua relação com o pensamento, a linguagem e a evolução histórica do conhecimento humano.

Conforme Daghlian (1995) e Hosen (2009), o desenvolvimento da lógica teve início com Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.), nascido em Estagira, na Grécia. Após ficar órfão dos pais, ainda muito jovem, foi enviado para Atenas aos 17 anos para continuar seus estudos. Juntou-se à Academia do filósofo Platão (437 a.C. - 347 a.C.), dedicando-se aos estudos junto a Platão por 20 anos. Durante esse tempo de estudos, Aristóteles desenvolveu sua própria linha de pensamentos, que divergia muito das ideias de Platão. Desenvolveu trabalhos de lógica, filosofia, psicologia e física. As ideias de Aristóteles passaram a ser usadas em discussões que buscavam a simplificação, com respostas curtas que auxiliavam na Matemática.

Platão estabeleceu, na Grécia antiga, uma distinção entre Aritmética e Logística. A logística seria a técnica do contar, do procedimento operacional e algorítmico. Os comerciantes e os guerreiros necessitavam dela e deveriam dominá-la para obterem lucros melhores ou disporem suas tropas militares.

A Aritmética, por outro lado, seria a teoria dos números, do raciocínio sobre o número abstrato. Interessava aos filósofos, que deveriam captar o verdadeiro ser do número, transcendendo o fluxo das coisas materiais, para elevar suas mentes ao mundo das ideias universais e eternas, no qual as coisas verdadeiras existiriam de fato. Muitas discussões e consequências surgiram a partir dessa teoria, conforme se lê em Teles (1989), referindo-se aos filósofos sofistas.

Aristóteles, presenciando as discussões e contradições que o pensamento filosófico dessa época levantava, especialmente com os sofistas, decidiu investir na elaboração de um sistema lógico de pensamento. Para ele, as ideias universais residiriam nas próprias coisas, sendo importante a coerência entre os elementos do sistema, objeto de estudo da lógica (TELES, 1989).

As leis básicas da lógica enunciadas por Aristóteles, de acordo Cyrino & Arantes (1984) são:

a) Lei da identidade:
   - A é A
b) Lei da contradição:
   - A não pode ser simultaneamente B ou não B
c) Lei do meio excluído:
   - A ou B ou não B, pois não há outra alternativa.

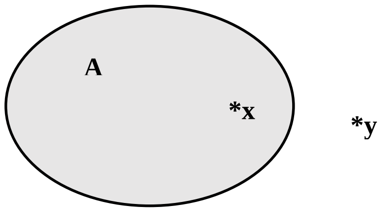
Teles (1989) afirma que a lógica sistematizada por Aristóteles influenciou toda a Idade Média e a Idade Moderna e se ligou à Matemática, constituindo a Lógica Matemática ou simbólica.

A ideia da Lógica Matemática, conforme Daghlian (1995), aparece em escritos de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) em 1666, nos quais ele utiliza os termos *calculus ratiocinator*, *logica mathematica*, *logística*, porém as ideias nunca foram teorizadas por ele.

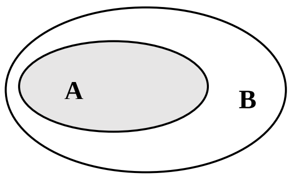
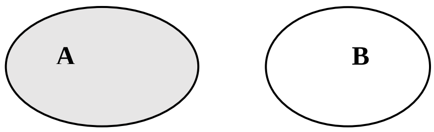
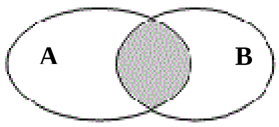
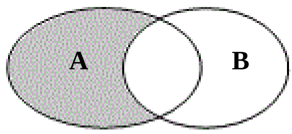
Conforme Machado (2005), por volta de 1770 é apresentada uma nova maneira de se trabalhar com a lógica, em que Leonhard Eüler (1707-1783) introduz a representação gráfica das relações entre sentenças ou proposições, conforme se vê na Figura 1, em Daghlian (1995, p. 17). A partir daí, outros geraram outras formas gráficas, diagramas apresentados por Eüler, representações como John Venn (1834-1923) que, por volta de 1880, desenvolveu uma forma de representar as relações, entrelaçando os círculos. E. W. Veictch cria um método gráfico em 1952, que é modificado no ano seguinte por M. Karnaugh, dando origem aos Diagramas ou Mapas de Karnaugh. Inicialmente, o método era chamado por Diagramas de Veitch-Karnaugh, mas, na atualidade, é chamado de Mapas de Karnaugh, em homenagem a Maurice Karnaugh.

Figura 1: Eüler - a representação do pensamento

A: conjunto dos elementos possuidores da propriedade ***a***
x: possui a propriedade ***a***
y: não possui a propriedade ***a***



Temos, então, os seguintes diagramas, correspondendo às quatro proposições básicas:

PROPOSIÇÃO	DIAGRAMA DE EÜLER
Todo ***a*** é ***b***	
Nenhum ***a*** é ***b***	
Algum ***a*** é ***b*** (Ou Existe ***a*** que é ***b***)	
Algum ***a*** não é ***b*** (Ou existe ***a*** que não é ***b***)	

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Machado (2005)

Em 1847, é publicado um tratado por Augustos DeMorgan (1806-1871) chamado *Formal logic*. Essa publicação gerou uma discussão com alguns filósofos, o que levou George Boole (1815-1864), amigo de DeMorgan, a publicar, no ano seguinte (1848), o *The mathematical analysis of logic*. Em 1854, publica a obra que o deixou famoso *An* *investigation of the laws of thought*, tratando do tema Álgebra de Boole e, em 1859, a obra trata do método simbólico geral, *Treatise on differential equations*.

Conforme Daghlian (1995), a primeira utilização prática da Álgebra de Boole só ocorreu em 1937, numa tentativa de analisar circuitos construídos com relés, por A. Nakashima, porém sem sucesso. Mas, em 1938, a aplicação da Álgebra de Boole foi demonstrada com sucesso, na análise de circuitos com relés, por Claude Elwood Shannon. A demonstração foi feita em sua tese de mestrado no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). Sua demonstração contribuiu para o desenvolvimento de várias teorias e aplicações, como a teoria dos relés, o desenvolvimento da eletrônica digital, da computação e da matemática. Assim, o ensino da Lógica nessas áreas se tornou essencial.

2.1.1 Uma proposta Alternativa para o Ensino da Lógica Matemática

O ensino da Lógica Matemática vem sendo objeto de artigos, livros e dissertações de mestrado e doutorado.

Uma das dissertações que se aproxima da ideia deste trabalho no que diz respeito ao ensino da lógica, é a dissertação de Mühl (1989), com o título "Uma proposta Alternativa para o Ensino da Lógica Matemática", apresentada e defendida no Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, UNICAMP, em 02 de maio de 1989, tendo como orientador o Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio.

Nesse trabalho, a autora apresenta uma estratégia de se trabalhar lógica matemática em sala de aula, focada no aspecto de compreensão do significado da lógica, na sua importância e, consequentemente, no interesse e aprendizado do aluno. Ela descreve a maneira como se trabalhava até 1983, no curso de licenciatura plena em Matemática, na instituição onde ocorreu a pesquisa, bem como o resultado que era observado na avaliação dos alunos em relação à disciplina. Os alunos perguntavam: Por que estudar lógica? Qual sua aplicação? Eles encaravam a lógica como um jogo.

Após a pesquisa de como os professores entendiam a lógica e como a aplicavam em sala de aula, apresenta a proposta de levar os alunos a construir seu conhecimento a partir de sua realidade. |Ela acrescenta que a elaboração do conhecimento pelo indivíduo segue um ciclo: teoria - ação - reflexão - teoria e lembra que a escola tem sempre a visão de que o ciclo tem início pela teoria, mas, em sua proposta, esse início não é definido e pode mudar a partir da bagagem de conhecimento do aluno.

É nesse contexto didático/metodológico que o trabalho da presente pesquisa se insere, visando contribuir com material pedagógico e textos para um ensino mais eficaz da Lógica.

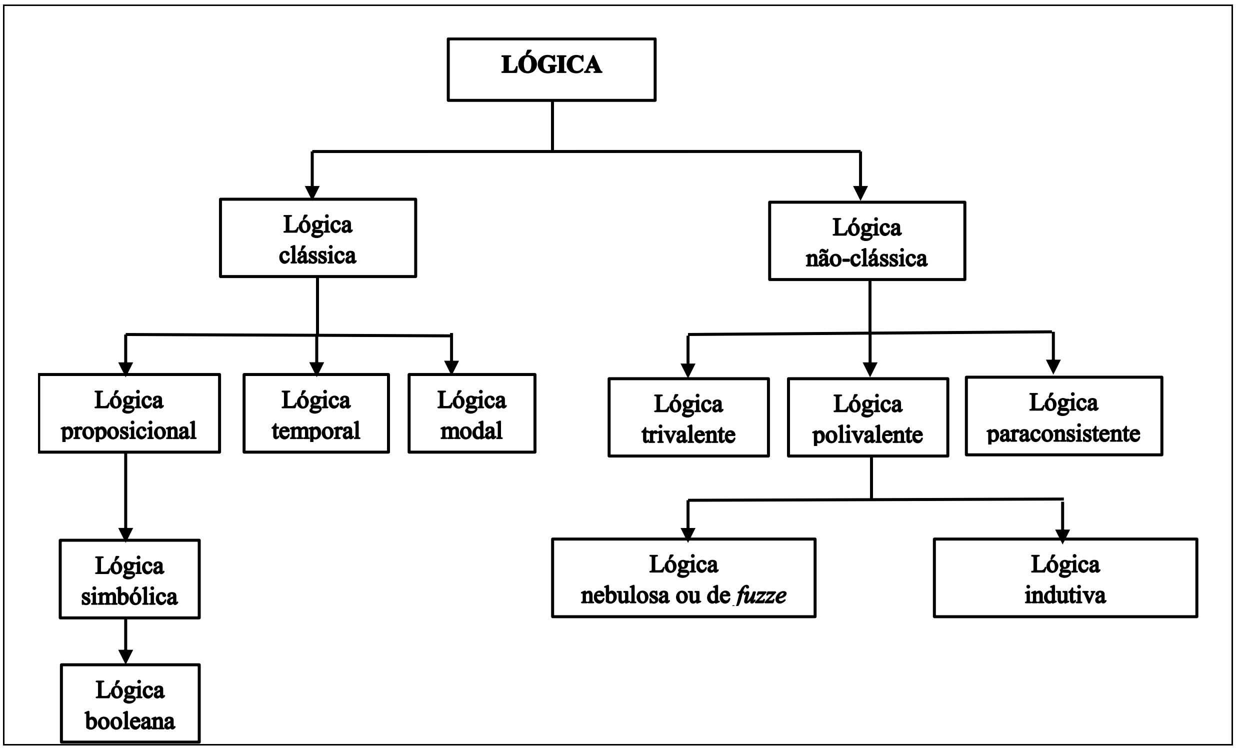
2.1.2 Tipos de lógicas

Quando se fala em lógica, numa abordagem cientifica, refere-se à lógica formal, lógica clássica ou, ainda, lógica aristotélica. (MACHADO, 2005).

Conforme afirma Mühl (1989), "quando falamos de lógica, precisamos dizer a qual delas estamos nos referindo - Lógica Simbólica, Lógica Matemática ou simplesmente Lógica Formal ou, ainda, Lógica Dialética".

A Figura 2 apresenta um fluxo desenvolvido pelo pesquisador, baseado em Machado (2005). Busca-se nesse fluxo apresentar um panorama das diversas lógicas desenvolvidas ao longo da história humana. Dessa forma, tem-se uma visão clara de onde esta pesquisa está inserida. Não é objetivo deste trabalho detalhar cada uma delas.

Figura 2: Lógicas - uma visão panorâmica



Fonte: Elaborada pelo autor

Neste trabalho, abordou-se a Lógica Proposicional, mais precisamente da Álgebra de Boole, desenvolvida por George Boole[6] (1815-1864) e a simplificação de expressões pela álgebra booleana e os Mapas de Karnaugh, que são tópicos do programa de ensino da escola em que a presente pesquisa foi realizada.

A Álgebra de Boole ou Lógica Simbólica é útil na matematização de uma situação real, tendo como resultado uma expressão booleana, ou seja, uma expressão com variáveis booleanas, ou ainda variáveis que trabalham com valores binários, F (falso) e V (verdadeiro), 0 e 1 e outros argumentos que tenham apenas dois valores possíveis.

A aplicação da álgebra booleana está presente em várias áreas e ciências, como na computação, na determinação de diagramas esquemáticos de circuitos eletrônicos digitais, nos programas de computadores e em outras áreas.

2.1.3 Lógica Proposicional

Entende-se por Lógica Proposicional todo sistema lógico constituído por fórmulas que representam proposições. Essas proposições podem ser combinadas por outras proposições simples ligadas por conectivos lógicos, seguindo um sistema de regras.

Conforme Alencar Filho (2002), a lógica matemática adota como regras fundamentais do pensamento dois princípios:

- **Princípio da não contradição –** Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
- **Princípio do terceiro excluído –** Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.

2.1.3.1 <u>Proposições</u>

Alencar Filho (2002), em seu livro *Iniciação à Lógica Matemática*, define proposição como sendo todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. Rosen (2009), no livro *Matemática Discreta e Suas Aplicações*, diz que uma proposição é uma sentença declarativa (isto é, uma sentença que declara um fato), que pode

---

[6] George Boole (Lincoln, Novembro de 1815 — Ballintemple, Dezembro de 1864) foi um matemático e filósofo britânico, criador da álgebra booleana, fundamental para o desenvolvimento da computação moderna (ROSEN, 2009).

ser verdadeira ou falsa, mas não ambas. Já Daghlian (1995) enquadra o conceito de proposição como um conceito primitivo e lembra que proposição é uma sentença declarativa, afirmativa, e que deve exprimir um pensamento de sentido completo, podendo ser escrita na forma simbólica ou linguagem usual.

Uma proposição pode ser classificada como simples ou composta. Conforme Alencar Filho (2002), uma proposição simples também pode ser chamada de proposição atômica e uma proposição composta pode ser chamada de proposição molecular. As proposições simples são representadas, normalmente, por letras minúsculas e as proposições compostas são representadas por letras maiúsculas. As letras que representam as proposições simples ou atômicas são chamadas de Variáveis Proposicionais, por serem variáveis que representam proposições. Os valores lógicos das variáveis proposicionais, ou seja, de uma proposição simples, são: Verdadeiro, se a proposição for verdadeira e é representado pela letra V, ou Falso, se a proposição for falsa e é representado pela letra F.

2.1.3.2 <u>Conectivos Lógicos</u>

Como já foi dito, as proposições moleculares ou compostas são formadas por proposições atômicas ou simples e por conectivos lógicos. Alencar Filho (2002) define que conectivos são palavras usadas para formar novas proposições a partir de outras, e dá alguns exemplos de proposições compostas:

P: O número 6 é par **<u>e</u>** o número 8 é cubo perfeito.
Q: O triângulo ABC é retângulo **<u>ou</u>** é isósceles.
R: **<u>Não</u>** está chovendo

Os conectivos ***e***, ***ou***, ***não, se ...então, se e somente se*** são os mais utilizados em lógica matemática e os conectivos ***e***, ***ou*** e ***não,*** serão considerados conectivos básicos, gerando as funções básicas na álgebra booleana. Na eletrônica digital, serão representados por portas lógicas e circuitos integrados que executam a sua função de conexão.

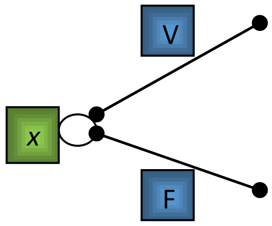
2.1.3.3 <u>Tabela-Verdade</u>

Chama-se Tabela-Verdade um mapa onde se representam todas as possíveis situações com seus respectivos resultados. Na tabela-verdade, pode-se determinar o modo como a função se comporta.

Voltando ao princípio do Terceiro excluído, toda proposição simples é verdadeira (V) ou é falsa (F). Se *x* é uma proposição simples, *x* = V ou *x* = F.

Conforme Daghlian (1995) e Alencar Filho (2002), a representação da tabela-verdade de uma proposição simples se faz por uma coluna, representando a proposição, e duas linhas, representando as possibilidades ou valores possíveis. O "diagrama de árvore" auxilia na montagem da tabela-verdade, como se vê na Figura 3.

Figura 3: Representação da tabela-verdade de uma proposição simples

Tabela-Verdade da proposição x	**Diagrama de árvore**
x V F	

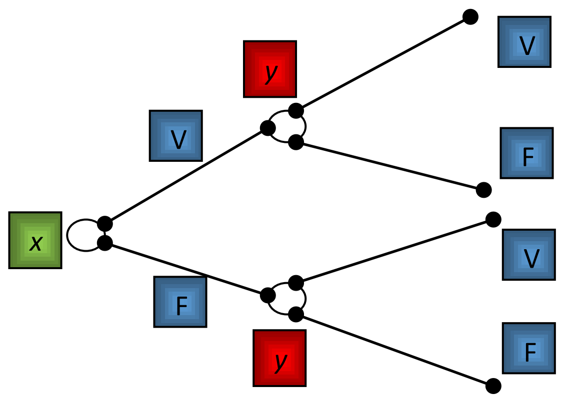
Fonte: Elaborada pelo autor

Alencar Filho (2002) afirma que, em se tratando de uma proposição composta, a determinação de seus valores segue o princípio de que o valor lógico de qualquer proposição composta depende, unicamente, dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Figura 4: Representação da tabela-verdade de uma proposição composta

Tabela-Verdade de uma proposição composta com quatro proposições simples	Diagrama de árvore

	x	y
1	F	F
2	F	V
3	V	F
4	V	V



Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme Daghlian (1995), em uma tabela-verdade de uma proposição composta, observa-se que o número de componentes simples determina o número de linhas da tabela-verdade. E apresenta um teorema:

Teorema: *O número de linhas de uma tabela-verdade é dado por* 2^n, *sendo n o número de proposições componentes*.

2.1.3.4 Operações Lógicas Fundamentais

As operações fundamentais da lógica proposicional são:

a) **Negação** (~, $\bar{\ }$, ´, $\neg$**)**

A negação de uma proposição x é uma proposição representada por "*não x*". Simbolicamente, podemos encontrá-la com as representações $(\bar{x}, \sim x, x', \neg x)$.

Exemplo: A negação de x é $\sim x$ (lê-se: não x).

O Quadro 3 apresenta a tabela-verdade da negação.

Quadro 3: Tabela-verdade da Negação de uma proposição x

x	$\sim x$
F	V
V	F

Fonte: Elaborado pelo autor

b) Conjunção ($\wedge$, .)

A conjunção de duas proposições x e y é a proposição representada por "*x* **e** *y*". Simbolicamente, é representada por $x \wedge y$ ou $x.y$ ou xy.

O valor da proposição $x \wedge y$ somente será verdadeiro, quando x for verdadeiro e y também for verdadeiro.

O Quadro 4 apresenta a tabela-verdade dos valores de uma conjunção $x \wedge y$.

Quadro 4: Tabela-verdade de uma Conjunção $x \wedge y$

x	**y**	$x \wedge y$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor

c) Disjunção ($\vee$,+)

A disjunção de duas proposições x e y é a proposição representada por "*x* **ou** *y*". Simbolicamente, pode ser representada como $x \vee y$ ou $x + y$.

O valor da disjunção $x \vee y$ será verdadeiro (V) sempre que x for verdadeiro (V) ou y for verdadeiro (V), ou então $x \vee y$ será falso (F) somente quando x for falso (F) e y também for falso (F).

Quadro 5 apresenta a tabela-verdade dos valores de uma disjunção $x \vee y$.

Quadro 5: Tabela-verdade de uma Disjunção $x \vee y$

x	**y**	$x \vee y$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor

d) Disjunção Exclusiva ($\oplus$)

Conforme Daghlian (1995), a disjunção exclusiva de duas proposições x e y é uma proposição verdadeira somente quando V(x) ≠ V(y) e falsa quando V(x) = V(y), ou seja, quando x e y são ambas falsas ou verdadeiras.

Simbolicamente, Daghlian adota a representação de uma disjunção de x e y como $x \oplus y$. Sua tabela-verdade é representada no Quadro 6.

Quadro 6: Tabela-verdade de uma Disjunção Exclusiva $x \oplus y$

x	**y**	$x \oplus y$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor

e) Condicional ($\rightarrow$)

Chama-se condicional uma proposição representada por "se *x então y*", cujo valor lógico for falso (F), quando o valor lógico de *x* for verdadeiro (V) e *y* for falso (F) e os outros casos forem verdadeiros (V).

Simbolicamente, o condicional de x e y é representado por $x \rightarrow y$. Sua tabela-verdade é representada no Quadro 7.

Quadro 7: Tabela-verdade de um Condicional $x \rightarrow y$

x	**y**	$x \rightarrow y$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor

f) Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Chama-se bicondicional de duas proposições *x* e *y* uma proposição verdadeira (V), quando o valor de *x* for igual ao valor de *y*, e falsa (F) quando o valor de *x* for diferente de *y*.

Simbolicamente, o bicondicional de x e y é representado por $x \leftrightarrow y$. Sua tabela-verdade é representada no Quadro 8.

Quadro 8: Tabela-verdade de um Bicondicional x $\leftrightarrow$ y

x	**y**	$x \leftrightarrow y$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor

Pode-se dizer que o bicondicional é a negação da disjunção exclusiva, ou seja, $x \leftrightarrow y = \neg(x \oplus y)$.

Essas operações lógicas fundamentais se associam, matematicamente, em expressões mais complexas nas aplicações práticas. Assim, as habilidades e competências para se lidar com os conteúdos matemáticos se tornam necessárias e úteis, conforme orientam os Parâmetros Curriculares de Matemática.

2.1.4 PCNEM e PCN+ de Matemática – Orientações

Conforme os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Médio, o aluno desse nível de ensino, apoiando-se em conteúdo da Matemática, deve desenvolver as seguintes competências e habilidades:

a) Representação e comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados.

- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

b) Investigação e compreensão

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

c) Contextualização sociocultural

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

> No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. [...] A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a ideia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e

> ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade. (BRASIL, 2004, p. 40).

> O estudo das **funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no **conceito de função** e em suas **propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos** e **nas aplicações dessas funções**. (BRASIL, 2004, p. 165).

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problema preferencialmente tomadas em contexto real. A **Resolução de Problemas** é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado. (BRASIL, 2004, p. 177).

Ao expressar matematicamente a realidade, configurada como um problema do mundo real, utiliza-se do método da modelagem e/ou modelo, podendo resultar numa função, equação, gráfico, algoritmo ou tabela.

A lógica booleana será tratada, nesta pesquisa como um modelo em suas variadas representações.

2.2 Modelagem e Modelos

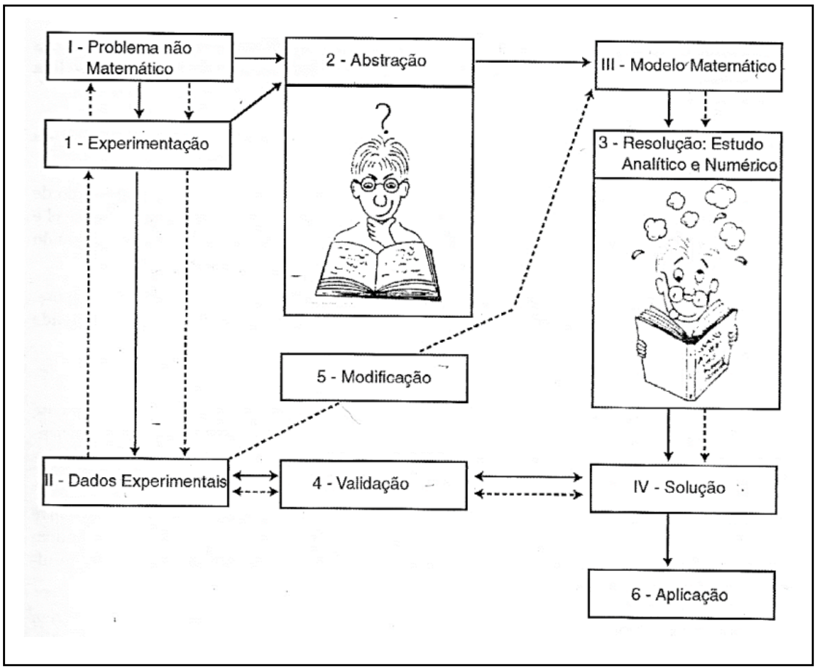
A partir da década de 70, iniciou-se a discussão entre os educadores da inserção da Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Essa proposta inicia-se com o objetivo de aproximar a realidade do aluno com a Matemática, estimulando o aluno a gostar e ter facilidades no aprendizado dos conteúdos matemáticos.

Paralelamente à proposta educacional, observa-se em várias áreas a utilização da modelagem para resolução de problemas e obtenção de resultados, o que reafirma a necessidade de inserir a modelagem matemática como ferramenta no ensino da Matemática em todos os níveis e dar habilidade ao aluno - de posse do conhecimento do processo da modelagem matemática - de poder gerar modelos matemáticos diversos para realidades de seu dia a dia e seu preparo como profissional.

Segundo Bassanezi (2002), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Bassanezi (2002) ilustra, na Figura 5, a sequência de etapas para a Modelagem Matemática de uma situação-problema real.

Figura 5: Esquema de Modelagem



Fonte: Bassanezi (2002)

Segundo Bassanezi (2002), quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar, no sistema argumentos, os parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: *o modelo.*

2.3 Álgebra Booleana

No século XlX, o matemático e filósofo George Boole (1814-1864) desenvolve um método para a matematização da lógica. Esse método foi enunciado por Boole no ano de 1854, em seu livro *An investigation of The Laws of Thought*. A esse método foi dado o nome de Álgebra de Boole ou Álgebra Booleana, em sua homenagem. A álgebra booleana busca investigar as leis fundamentais das operações da mente humana relacionadas ao raciocínio e opera com o sistema binário, no qual existem somente dois valores lógicos possíveis, verdadeiro (V) ou falso (F). É considerada a base da aritmética computacional.

A eletrônica digital, utilizada nos computadores e em equipamentos eletrônicos, utiliza o sistema de numeração binário (base dois), pelo fato de que este simplifica os circuitos eletrônicos. Assim, adotou-se a álgebra booleana, que é representada eletronicamente por dois estados distintos: chave aberta = 0 e chave fechada = 1. “[...] A Álgebra Booleana fornece as operações e as regras para trabalhar com o conjunto {0,1}. Chaves eletrônicas e óticas podem ser estudadas usando esse conjunto e as regras da álgebra booleana.” (ROSEN, 2009, p. 749).

Na eletrônica digital, os valores lógicos V (verdadeiro) e F (falso) são traduzidos para “1” e “0”, respectivamente. Conforme Tocci, Widmer, Moss (2007), circuitos lógicos digitais operam de forma binária, em que cada tensão de saída ou entrada tem valor 0 ou 1. Conforme Floyd (2007), os valores 0 e 1, chamados níveis lógicos, representam intervalos de tensão predefinidos. Essa característica permite a utilização da álgebra booleana como ferramenta de projeto de circuitos digitais. A álgebra booleana é um modelo matemático que permite representar, matematicamente, através de uma equação (expressão booleana), a relação da saída de um circuito lógico e suas entradas.

> As tensões usadas para representar 1 e 0 são denominadas *níveis lógicos*. Teoricamente, um nível de tensão representa um nível ALTO e o outro representa um nível BAIXO. Entretanto, em um circuito digital prático, um nível ALTO pode ser qualquer tensão entre um valor mínimo e um valor máximo especificados. Da mesma forma, um nível BAIXO pode ser qualquer valor de tensão entre um valor mínimo e máximo especificados. Não existe sobreposição entre as faixas aceitáveis para os níveis ALTO e BAIXO. [...] A variável *V*H(máx) representa o valor máximo de tensão para o nível ALTO e *V*H(mín) representa o valor mínimo de tensão para o nível ALTO. O valor máximo de tensão para o nível BAIXO é representado por *V*L(máx) e o valor mínimo de tensão para o nível BAIXO é representado por *V*L(mín). Os valores de tensão entre *V*L(máx) e *V*H(mín) são inaceitáveis para uma operação adequada. Uma tensão na faixa proibida pode ser interpretada tanto como um nível ALTO quanto um nível BAIXO por um determinado circuito sendo, portanto, valores inaceitáveis. Por exemplo, os valores referentes ao nível ALTO para um determinado circuito digital chamado de CMOS pode variar de 2 V a 3,3 V e os valores referentes ao nível BAIXO podem variar de 0 a 0,8 V. Assim, por exemplo, se uma tensão de 2,5 V for aplicada, o circuito interpretará como um nível BAIXO ou binário 0. Para esse tipo de circuito, as tensões entre 0,8 V e 2 V não são permitidas. (FLOYD, 2007).

A aplicação da álgebra booleana em projetos de circuitos eletrônicos tem uma sequência de regras que utilizam as operações básicas da lógica proposicional. A complementação (não), o produto (a conjunção), a soma (disjunção), a bicondicional e suas derivadas serão denominados, na álgebra booleana aplicada na eletrônica digital, como NOT, AND, OR e OR-Exclusivo e suas derivadas NAND, NOR, NOR-Exclusivo.

2.3.1 Funções Lógicas - Portas Lógicas – Tabela-Verdade

Rosen (2009) define Função Booleana da seguinte forma:

> Seja $B = \{0,1\}$. Então, $B^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) / x_i \in B \ para\, 1 < i < n\}$ é o conjunto de todas as *n-uplas* de 0s e 1s. A variável *x* é chamada de variável booleana se ela assume valores apenas em *B*, ou seja, se seus únicos valores possíveis são 0 e 1. Uma função de B^n para *B* é chamada função booleana de *n* variáveis. (p. 750).

A álgebra booleana aplicada à eletrônica digital é considerada a base da computação e é também bastante utilizada na indústria e em equipamentos eletrônicos de várias áreas, como eletromedicina, equipamentos telecomandados e outros. Cada função é representada por um símbolo de um bloco lógico que executa a função, de acordo com sua tabela-verdade, conforme apresenta Daghlian (1995):

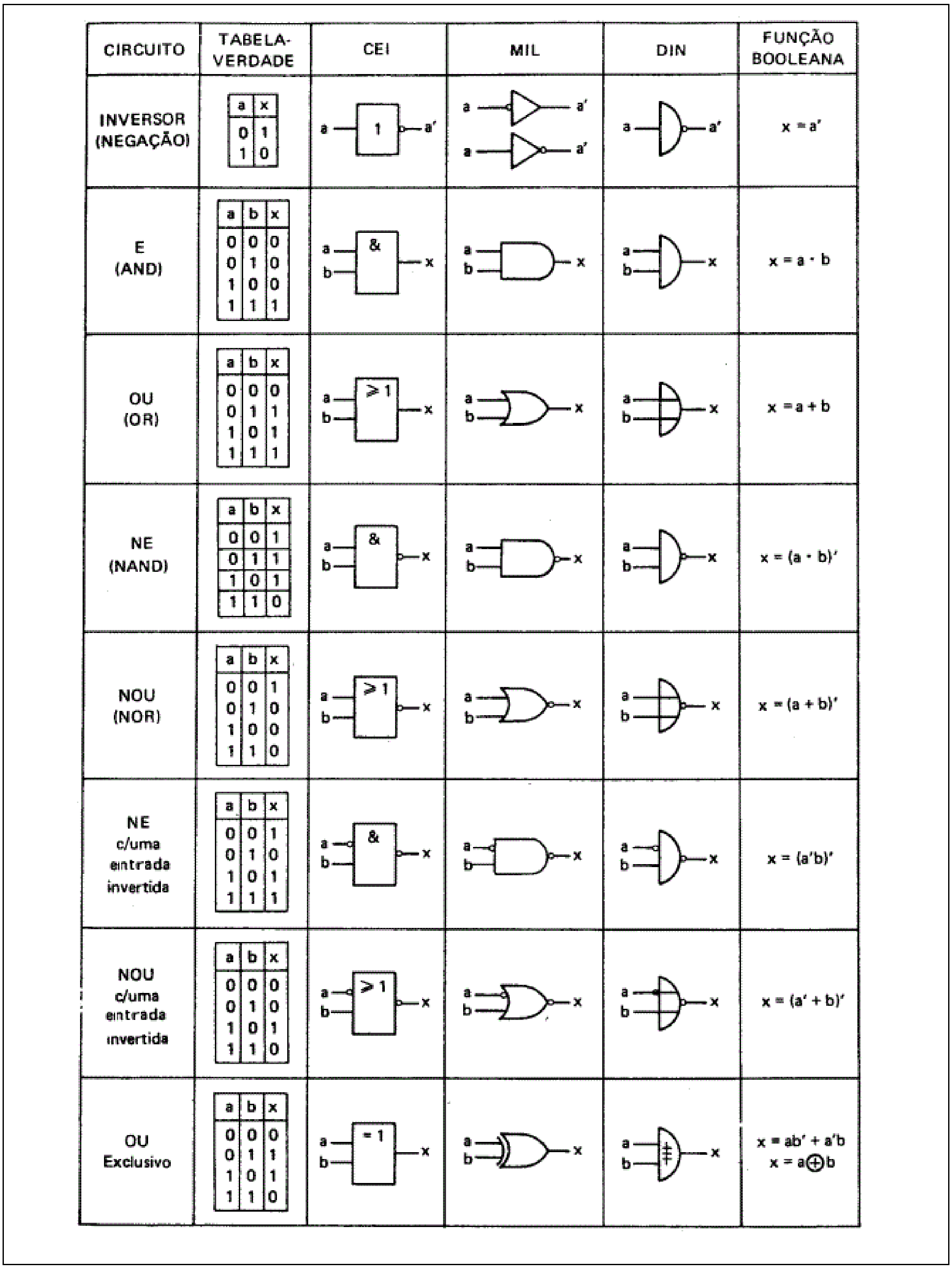
> A representação gráfica das funções booleanas é feita mediante símbolos padronizados por normas internacionais chamados blocos ou portas lógicas.
> As portas lógicas são as bases dos circuitos lógicos e têm por finalidade combinar as diferentes grandezas booleanas, de modo a realizar determinada função. Cada porta lógica pode ter diferentes linhas de entrada, porém, somente uma linha de saída [...]. (p. 154).

Daghlian (1995) apresenta, na Figura 6, os nomes dos circuitos, tabela-verdade que os definem e portas lógicas, segundo três normas (CEI, MIL, DIM)[7], e as funções booleanas correspondentes.

---

[7] MIL-STD-806B (MILITARY STANDARD) de uso muito frequente na prática.
CEI (COMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNACIONALE) reconhecida internacionalmente.
E as normas alemãs DIN 40700 (DEUTSCHE INDUSTRIE NORM).

Figura 6: Circuitos, tabela-verdade, padrões e função booleana



Fonte: Daghlian (1995)

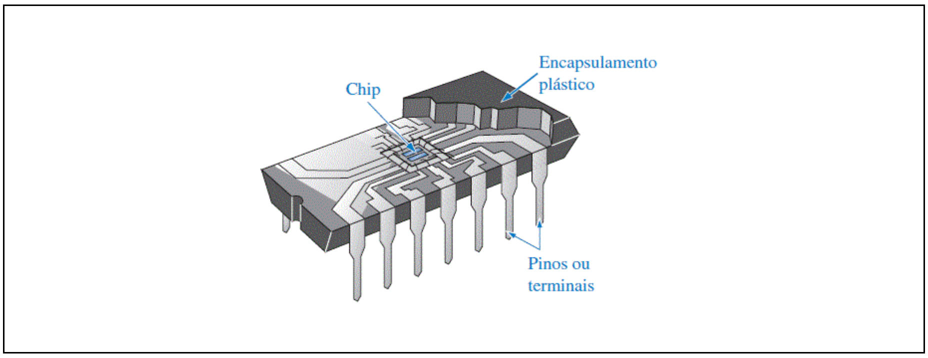
2.3.1.1 Circuito Integrado (CI)

Os blocos lógicos são projetados e construídos em pastilhas ou *chips* que são chamados Circuitos Integrados (CI's). Floyd (2007) trata de maneira clara e intensa, com maiores detalhes, os CI's, encapsulamento de CI's, numeração dos pinos, classificação de complexidade, tecnologia de circuitos integrados, precauções de manuseio e fabricação.

> Um **circuito integrado (CI)** monolítico é um circuito eletrônico construído totalmente em um único e pequeno *chip* de silício. Todos os componentes que formam o circuito (transistores, diodos, resistores e capacitores) são partes integrais de um único *chip*. Os CIs digitais podem ser divididos em duas grandes categorias: funções lógicas fixas e funções lógicas programáveis. No caso dos dispositivos de funções lógicas fixas, as funções são estabelecidas pelo fabricante e não podem ser alteradas. (p. 35). Os pontos de conexão do *chip* são interligados aos pinos no encapsulamento para permitir as conexões de entrada e saída com o mundo externo. (p. 36).

Como neste trabalho não é foco detalharmos os CI's, apresentaremos apenas a imagem do encapsulamento mais utilizado, que é o utilizado nas aulas práticas. Na Figura 7 é apresentada a imagem de corte de um CI, podendo-se observar o *chip*, o encapsulamento e os pinos de interligação do CI.

Figura 7: Vista de corte de um CI (Circuito Integrado)



Fonte: Floyd (2007)

2.3.1.2 Encapsulamento dos CI's

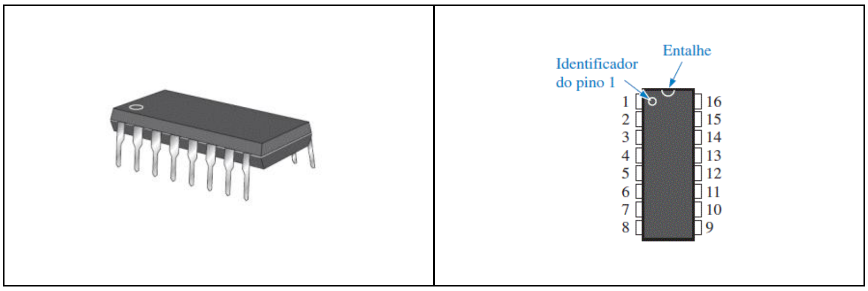
O encapsulamento de um circuito integrado é a forma como o componente se apresenta, conforme descreve Floyd (2007):

> Os encapsulamentos de circuitos integrados são classificados de acordo com a forma com que eles são montados nas placas de circuito impresso como dispositivos com pinos que passam através de furos (PTH – *pin through-hole*) na placa ou como

> dispositivos montados na superfície (SMD – *surface mounted-device*) da placa. O tipo PTH tem pinos (terminais) que são inseridos em furos na placa de circuito impresso e podem ser soldados a condutores (trilhas na placa) no lado oposto da placa. O tipo mais comum de PTH é o encapsulamento no qual os pinos estão dispostos em duas linhas paralelas (DIP – *dual in-line package*). (p. 6).

O encapsulamento mais utilizado nos laboratórios da escola em eletrônica digital é o DIP (*dual in-line package*), o que muda é a quantidade de pinos, que irá variar de acordo com a função que ele executa. A Figura 8 apresenta o encapsulamento com 16 pinos utilizados.

Figura 8 - Encapsulamento DIP- *dual in-line package*



Fonte: Floyd (2007)

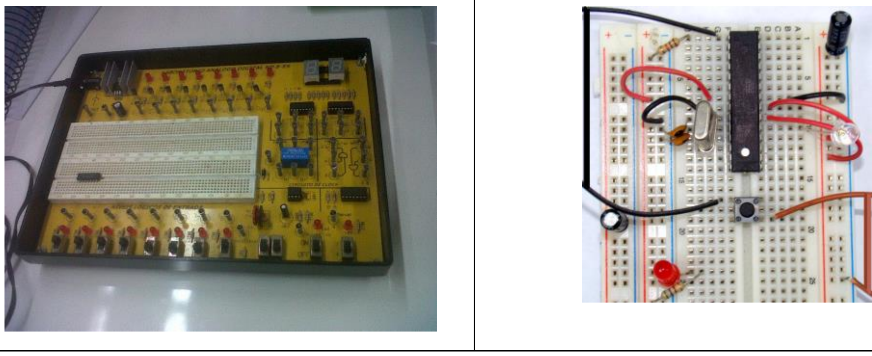
2.3.1.3 <u>Equipamentos utilizados em laboratório</u>

O laboratório é composto de bancadas preparadas para práticas que comprovam a execução das funções booleanas e permite desenvolver os circuitos eletrônicos a partir dos diagramas elétricos projetados.

O principal equipamento utilizado para o desenvolvimento e projeto é o Kit digital[8], como na figura 9.

[8] Laboratório didático de Eletrônica Digital KD8ES

Figura 9: Kit de teste e *Protoboard* utilizado em laboratório



Fonte: Arquivo do autor

2.3.1.4 <u>Funções booleanas e Portas Lógicas</u>

O processo de definição das representações de uma função booleana é bem entendido a partir da análise de uma situação real:

a) Função

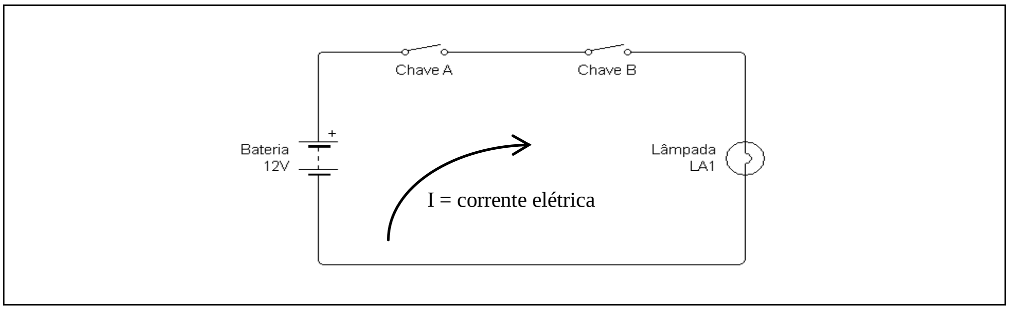
Pode-se definir uma função booleana a partir da análise de uma situação real e construção de uma Tabela-verdade que represente os valores das variáveis lógicas abstraídas da situação proposta.

Exemplo de uma definição de função a partir de uma situação real:

Em um ambiente em que uma lâmpada só deve acender quando a porta e a janela desse ambiente estiverem fechadas, utilizaremos um circuito elétrico com duas chaves elétricas (interruptores) Chave A e Chave B, ligadas em série com uma fonte (bateria) de 12 volts, e uma lâmpada. A bateria gera uma corrente elétrica (I) que circula pelo circuito sempre que ele estiver completamente fechado. A lâmpada acenderá, sempre que a corrente elétrica circular por ela, e apagará, quando o fluxo de corrente que passa por ela for interrompido.

Analisando esse circuito (Figura 10), vamos preencher uma tabela (Quadro 9) com as possibilidades de abertura e fechamento das chaves elétricas, observando para cada possibilidade a condição da lâmpada.

Figura 10: Circuito elétrico que representa a situação apresentada



Fonte: Elaborada pelo autor

O Quadro 9 apresenta uma tabela-verdade com resultados do comportamento do circuito da Figura 10.

Quadro 9: Tabela-verdade gerada pelo circuito elétrico da Figura 10.

Chave A	Chave B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Apagada
Fechada	Aberta	Apagada
Fechada	Fechada	Acesa

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando os resultados da tabela, observamos que a lâmpada somente acenderá caso as chave A ***e*** a chave B estiverem fechadas, caracterizando a função AND (E).

b) Tabela-verdade

- Traduzindo a tabela-verdade para a tabela com valores “0” e “1”.
- Chave A = a, chave B = b, chave aberta = 0, chave fechada = 1
- Lâmpada = X, Lâmpada apagada = 0, Lâmpada acesa = 1
- Com esta lógica, geramos a tabela do Quadro 10, apresentando os valores 0 e 1, que utilizaremos na aplicação da álgebra booleana em circuitos da eletrônica digital, relacionando aos mesmos seus respectivos valores de tensão previamente definidos.

Quadro 10 – Tabela-verdade da Função

a	b	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

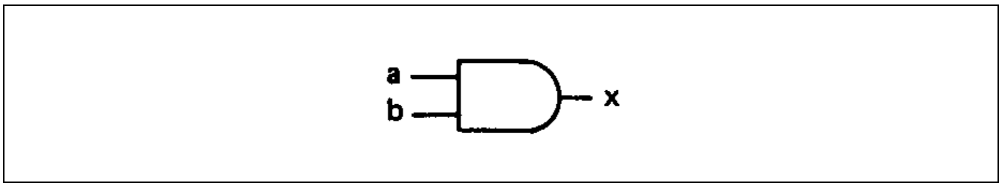
Fonte: Elaborado pelo autor

c) Símbolo da porta lógica

A partir do resultado da tabela-verdade, pode-se definir a função que, neste caso, é a função AND, pois somente tem saída 1 se as duas variáveis de entrada são 1. Neste trabalho, iremos utilizar o padrão MIL, por ser mais utilizado.

A porta AND se constitui de um circuito eletrônico transistorizado que executa a função AND. Na Figura 11, é apresentado o símbolo de uma porta lógica de duas entradas, mas é importante observar que existem portas com um número maior de entradas, porém somente uma saída.

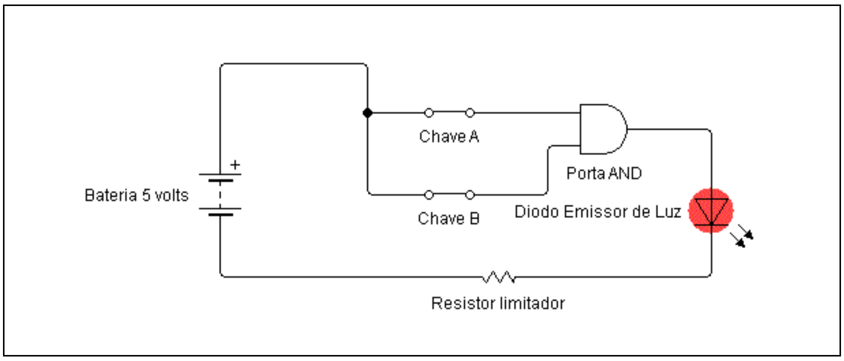
Figura 11: Símbolo da porta lógica AND de duas entradas



Fonte: Daghlian (1995)

No circuito eletrônico digital, Figura 12, é utilizado o símbolo lógico da porta e símbolos de componentes eletrônicos como o Diodo Emissor de Luz (LED). A partir do esquema eletrônico pronto, ocorre a aula prática em laboratório da respectiva porta.

Figura 12 – Esquema do circuito eletrônico digital



Fonte: Elaborada pelo autor

d) Expressão Booleana

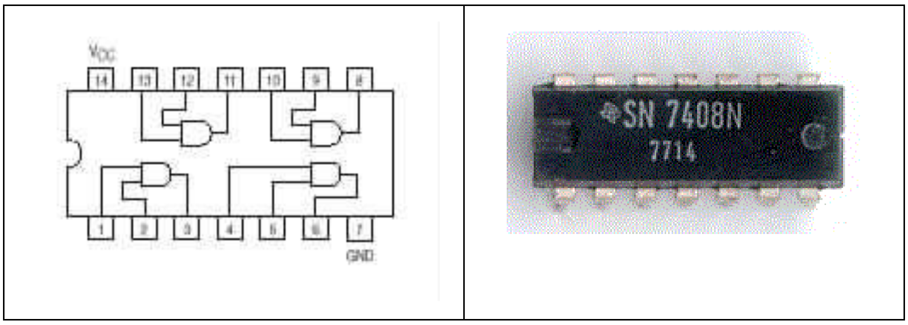
A função AND é definida como uma sentença lógica composta, formada por duas ou mais sentenças simples, ligadas pelo conectivo lógico “E”. Observa-se que a função AND pode ser representada por um sinal “.” parecido com o da multiplicação aritmética, porém temos que deixar claro para o aluno que não se pode confundir multiplicação com a lógica "E". Na multiplicação, a sentença é $a \times b$ (lê-se: *a vezes b)*, já na lógica, temos a.*b* ou *ab* (lê-se: *a* **e** *b).*

X = a . b, ou **X=ab,** ou **X= a** $\wedge$ **b**

- ***Hardware* CI para prática da função**

A Figura 13 apresenta o integrado com sua identificação, sendo que o número 7408 identifica o CI que executa a função AND. Esse CI é composto por quatro portas lógicas, que são mostradas no *layout* do circuito na mesma figura.

Figura 13 – Identificação do CI



Fonte: Elaborada pelo autor

Analogamente, as outras funções básicas têm suas representações na eletrônica digital conforme se observa nas figuras a seguir: Função AND (Figura 14); Função OR (Figura 15); Função OR-Exclusivo (Figura 16); Função NOT (Figura 17); Função NAND (Figura 18); Função NOR (Figura 20); Função EX-NOR (Figura 21).

Figura 14: A Função AND e suas representações na eletrônica

Função AND	Expressão booleana S = A . B

Circuito elétrico

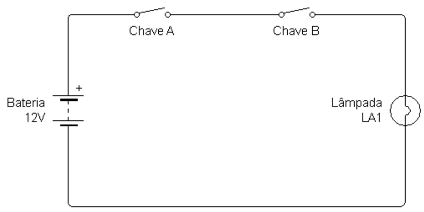


Tabela-verdade do circuito elétrico

Chave A	Chave B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Apagada
Fechada	Aberta	Apagada
Fechada	Fechada	Acesa

Circuito eletrônico

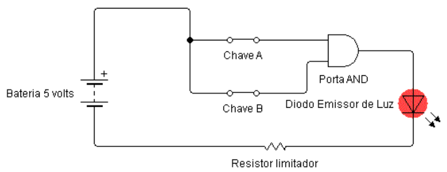


Tabela-verdade do circuito eletrônico

Chave A	Chave B	LED
Aberta	Aberta	Apagado
Aberta	Fechada	Apagado
Fechada	Aberta	Apagado
Fechada	Fechada	Aceso

Símbolo da porta lógica

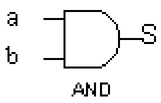


Tabela-verdade

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

***Layout* do Circuito integrado**

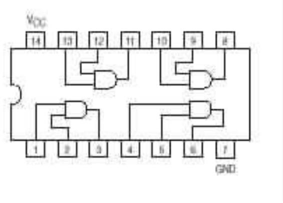


Foto do Circuito integrado 7408

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 15: A função OR e suas representações na eletrônica

Função OR	**Expressão booleana S = A + B**

Circuito elétrico

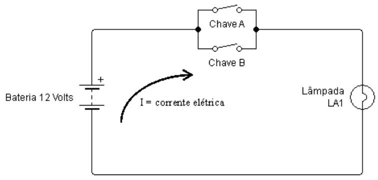


Tabela-verdade do circuito elétrico

Chave A	Chave B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Acesa

Circuito eletrônico

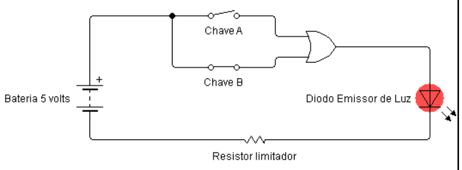


Tabela-verdade do circuito eletrônico

Chave A	Chave B	LED
Aberta	Aberta	Apagado
Aberta	Fechada	Aceso
Fechada	Aberta	Aceso
Fechada	Fechada	Aceso

Símbolo da porta lógica

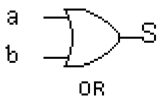


Tabela-verdade

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

***Layout* do Circuito integrado**

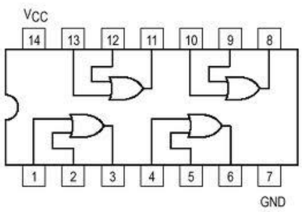


Foto do Circuito integrado 7432

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 16 – A função OR-Exclusivo e suas representações na eletrônica

Função: OR-Exclusivo

Expressão booleana $S = A \oplus B$

Circuito elétrico

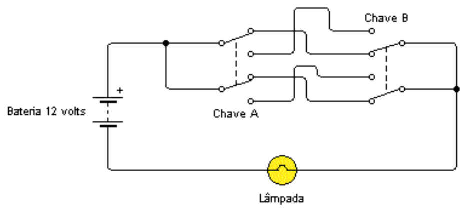


Tabela-verdade do circuito elétrico

Chave A	Chave B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Apagada

Circuito eletrônico

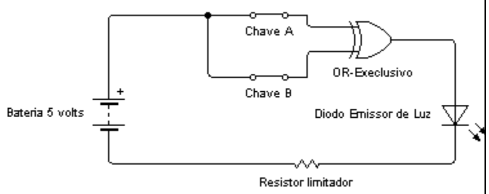


Tabela-verdade do circuito eletrônico

Chave A	Chave B	LED
Aberta	Aberta	Apagado
Aberta	Fechada	Aceso
Fechada	Aberta	Aceso
Fechada	Fechada	Apagado

Símbolo da porta lógica

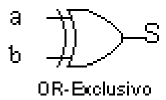


Tabela-verdade

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

***Layout* do Circuito integrado**

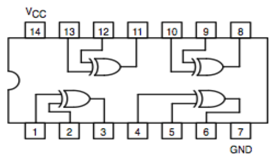


Foto do Circuito integrado 7486

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 17: A função NOT e suas representações na eletrônica

Função NOT

Expressão booleana $S = \overline{A}$

Circuito elétrico

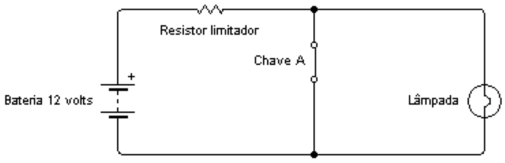


Tabela-verdade do circuito elétrico

Chave A	Lâmpada
Aberta	Acesa
Fechada	Apagada

Circuito eletrônico

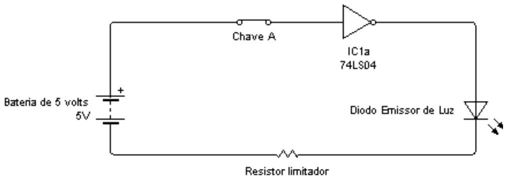


Tabela-verdade do circuito eletrônico

Chave A	LED
Aberta	Aceso
Fechada	Apagado

Símbolo da porta lógica

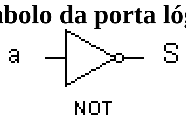


Tabela-verdade

a	S
0	1
1	0

***Layout* do Circuito integrado**

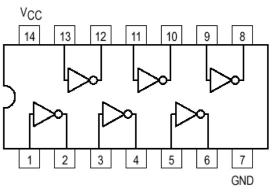


Foto do Circuito integrado 7404

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 18: A função NAND e suas representações na eletrônica

Função NAND	**Expressão booleana** $S = \overline{A.B}$

Circuito elétrico

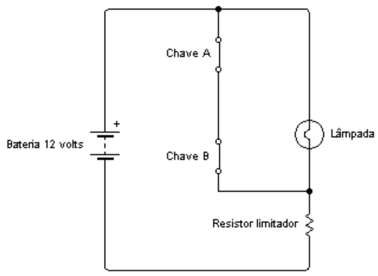


Tabela-verdade do circuito elétrico

Chave A	Chave B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Apagada

Circuito eletrônico

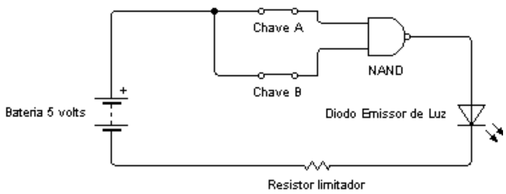


Tabela-verdade do circuito eletrônico

Chave A	Chave B	LED
Aberta	Aberta	Aceso
Aberta	Fechada	Aceso
Fechada	Aberta	Aceso
Fechada	Fechada	Apagado

Símbolo da porta lógica

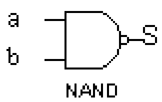


Tabela-verdade

a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

***Layout* do Circuito integrado**

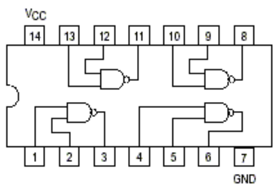
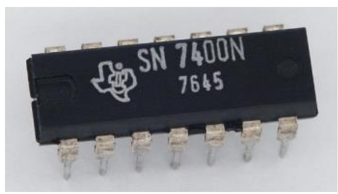


Foto do Circuito integrado 7400



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 19: A Função NOR e suas representações

Função NOR

Expressão booleana $S = \overline{A + B}$

Circuito elétrico

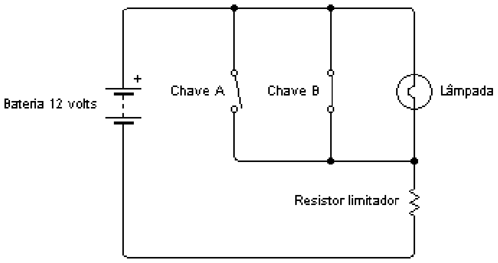


Tabela-verdade do circuito elétrico

Chave A	Chave B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Apagada
Fechada	Aberta	Apagada
Fechada	Fechada	Apagada

Circuito eletrônico

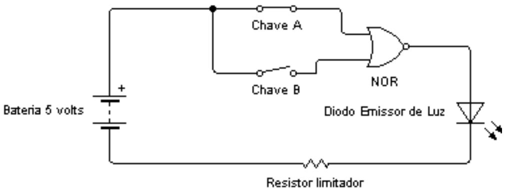


Tabela-verdade do circuito eletrônico

Chave A	Chave B	LED
Aberta	Aberta	Aceso
Aberta	Fechada	Apagado
Fechada	Aberta	Apagado
Fechada	Fechada	Apagado

Símbolo da porta lógica

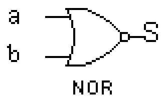


Tabela-verdade

a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

***Layout* do Circuito integrado**

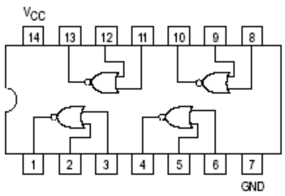
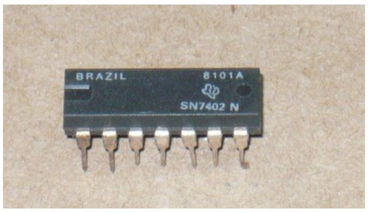


Foto do Circuito integrado 7402



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 20: A Função EX-NOR e suas representações

Função EX-NOR

Expressão booleana $S = \overline{A \oplus B}$

Circuito elétrico

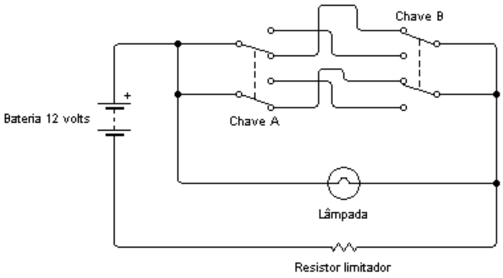


Tabela-verdade do circuito elétrico

Chave A	Chave B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Apagada
Fechada	Aberta	Apagada
Fechada	Fechada	Acesa

Circuito eletrônico

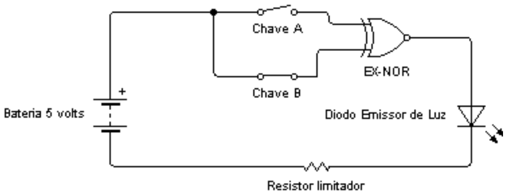


Tabela-verdade do circuito eletrônico

Chave A	Chave B	LED
Aberta	Aberta	Aceso
Aberta	Fechada	Apagado
Fechada	Aberta	Apagado
Fechada	Fechada	Aceso

Símbolo da porta lógica

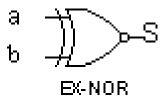


Tabela-verdade

a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Layout **do Circuito integrado**

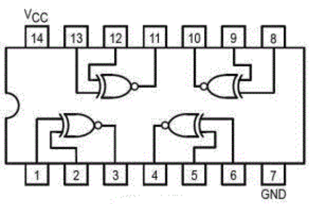
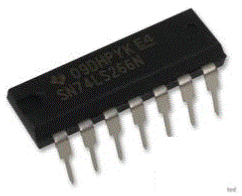


Foto do Circuito integrado 74266



Fonte: Elaborada pelo autor

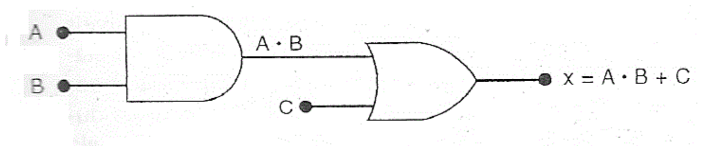
2.3.2 Expressões booleanas a partir de Circuitos Lógicos

Um circuito lógico pode ser definido por uma ou mais portas lógicas interligadas, seguindo uma combinação predeterminada, que levará a um resultado lógico anteriormente definido.

Conforme Widmer, Moss e Tocci (2007), todo circuito lógico pode ser completamente descrito usando operações booleanas previamente definidas. Logo, a partir do diagrama esquemático de um circuito, é possível construir uma expressão booleana que o represente. Conforme as Figuras 14, 15 e 17, que representam, respectivamente, as funções booleanas básicas AND, OR e NOT, em cada uma delas é apresentada a função booleana e seus respectivos símbolos das portas lógicas e a expressão booleana que os representam. Diante dessas informações, é possível determinar uma expressão booleana a partir de um circuito lógico.

Recorremos novamente a Widmer, Moss e Tocci (2007), em um exemplo básico para gerar a expressão booleana a partir do circuito da Figura 21.

Figura 21: Circuito Lógico e sua expressão booleana



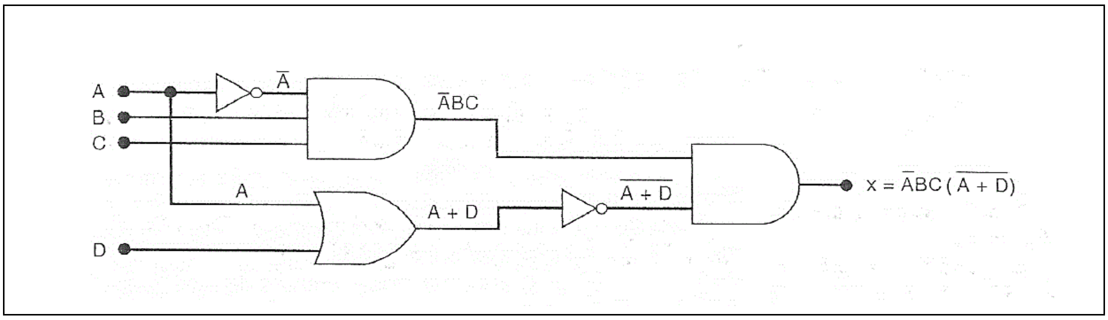
Fonte: Widmer, Moss e Tocci (2007)

Observa-se que, com a interligação de duas portas, a primeira uma porta AND com duas entradas *A* e *B* e a segunda uma porta OR também com duas entradas, sendo uma a saída da porta AND e a outra com entrada *C*, obtém-se um circuito composto por três entradas A, B, C e uma saída que é representada por x. Utilizando as expressões relativas a cada porta lógica, da esquerda para direita, podemos determinar com facilidade a expressão booleana que representa o circuito.

As entradas do circuito *A*, *B* e *C* representam as variáveis booleanas da expressão completa. Analisando a primeira porta (AND), representamos em sua saída a expressão contendo suas variáveis de entrada *A* e *B*, obtendo *A. B*. Essa saída está conectada à primeira entrada da porta lógica seguinte (OR). Da mesma forma, analisamos a segunda porta (OR) que lê, em suas entradas, *A. B* na primeira entrada e *C* na segunda entrada, executa a sua função (+), gerando em sua saída a expressão booleana que representa o circuito x = (*A . B) + C*. Neste caso, a operação *A. B* (AND) é realizada primeiro, por definição, e depois a OR, ou a que vier entre parênteses.

Em outro exemplo mais complexo, na Figura 22, têm-se duas portas NOT (comumente chamada inversora), uma AND de três entradas, uma OR de duas entradas e outra AND de duas entradas. A combinação dessas portas gera um circuito de quatro entradas (variáveis booleanas) e uma saída. Observa-se nesse circuito que a primeira porta AND à esquerda tem três entradas, a primeira está conectada a uma porta NOT (inversora), que, por sua vez, recebe a entrada *A* e executa a função adicionando uma barra (inversão da variável). A segunda e terceira entradas são conectadas às entradas *B* e *C*, respectivamente, gerando em sua saída a expressão $\overline{A}.B.C$, que se conecta à primeira entrada da porta AND de duas entradas. A porta OR tem suas entradas conectadas às entradas *A* e *D* do circuito e executa sua função, gerando em sua saída a expressão *A* + *D*, que se conecta à entrada de uma porta NOT (inversora). A inversora executa sua função e gera em sua saída a expressão $\overline{A+D}$, que é inserida na entrada da porta AND, gerando a expressão x = $\overline{A}\,BC\,(\overline{A+D})$, que representa o circuito completo.

Figura 22: Circuito Lógico e sua expressão booleana



Fonte: Widmer, Moss e Tocci (2007)

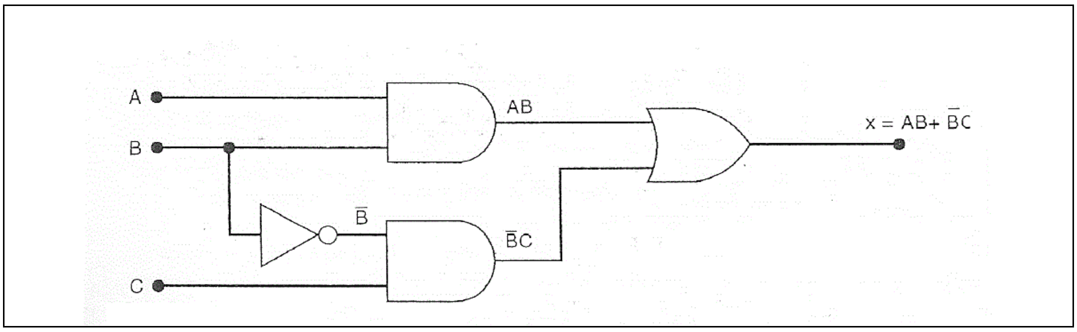
Diante disso, pode-se fazer o processo inverso, gerar o circuito a partir da expressão booleana.

2.3.3 Circuitos a partir de Expressões booleanas

Para gerar um circuito a partir de uma expressão booleana, deve-se recorrer, da mesma forma, às portas que representam as operações básicas e suas expressões. Por exemplo, se temos uma porta AND de três entradas, sabe-se que a expressão que a representa tem a forma $x = ABC$, se temos uma NOR de três entradas, a expressão que a representa tem a forma $x = \overline{A+B+C}$ e assim por diante. Vamos recorrer, mais uma vez, a um exemplo de Widmer, Moss e Tocci (2007): Desenhe o circuito que implementa a expressão $x = AB + \overline{B}C$.

Podemos dividir a expressão em quatro operações lógicas, AND (AB), NOT ($\overline{B}$), AND ($\overline{B}C$) e OR ($AB+\overline{B}C$), cada uma delas representa uma porta lógica. Após a conexão das portas, seguindo a ordem dos termos da expressão, obtemos o circuito conforme a Figura 23.

Figura 23: Circuito lógico e sua expressão booleana



Fonte: Widmer, Moss e Tocci (2007)

2.3.4 Tabela-Verdade a partir da Expressão booleana

Tabela-Verdade ou Tabela da Verdade, segundo Capuano e Idoeta (1984), “[...] é um mapa no qual colocamos todas as possíveis situações com seus respectivos resultados. Nessa tabela, iremos encontrar o modo como a função se comporta [...]. Uma tabela-verdade irá representar o comportamento tanto do circuito como de sua expressão característica.”

Em algumas situações, pode ser necessário avaliar o comportamento de um circuito, identificar qual o valor da saída para cada alteração das variáveis de entrada. Quando o circuito é representado apenas por uma porta lógica, mesmo que tenha mais entradas, a solução é de fácil resolução, mas, para circuitos representados por mais de uma porta, a resolução se torna mais complexa. Diante disso, recorremos a um método apresentado por Capuano e Idoeta (1984), que facilita a determinação da tabela-verdade a partir de uma expressão booleana qualquer.

Para exemplificar, vamos avaliar o comportamento do circuito da Figura 22, que gerou a expressão booleana, x = $\overline{A}\,BC\,(\overline{A+D})$.

O método apresentado por Capuano e Idoeta (1984) é composto por 5 (cinco) passos:

a) Montagem do quadro de possibilidades.
b) Montagem das colunas para os vários membros da expressão.
c) Preenchimento dessas colunas com seus resultados.

d) Montagem de uma coluna para o resultado final.

e) Preenchimento dessa coluna com os resultados finais.

Exemplo 1:

a) Para montagem do quadro de possibilidades, observamos quantas variáveis temos na expressão que representam as entradas do circuito. Neste caso, nossa expressão tem quatro variáveis (A, B, C e D). Conforme visto no Teorema: *O número de linhas de uma tabela-verdade é dado por* 2^n*, sendo n o número de proposições componentes*, teremos n= 4 e $2^4 = 16$ possibilidades. Logo, a tabela terá 16 linhas de possibilidades.

b) Para a montagem das colunas para os membros da expressão, precisamos do valor de uma coluna para definir os valores da função NOT ($\overline{A}$), para a função AND ($\overline{A}\,BC$), para a função OR ($A+B$), para a função NOT $(\overline{A+D})$.

c) Preencher as colunas, com os resultados das operações lógicas.

d) Montagem da coluna para o resultado final da expressão $x=\overline{A}\,BC(\overline{A+D})$

e) Preencher a coluna, fazendo AND de $\overline{A}\,BC$ e $(\overline{A+D})$

Observando o resultado da tabela-verdade no Quadro 11, chega-se à conclusão de que o circuito apresentado no exemplo só tem aplicação didática, pois, para qualquer valor nas entradas do circuito (A, B, C e D), a saída (x) permanece com o nível lógico 0 (zero).

Quadro 11: Tabela-verdade da expressão $x=\overline{A}BC(\overline{A+D})$

A	B	C	D	$\overline{A}$	$\overline{A}BC$	$A+B$	$(\overline{A+D})$	$x=\overline{A}BC(\overline{A+D})$
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Exemplo 2:

Dada a expressão booleana $x = (A + B).(\overline{B.C})$, gerada por um circuito lógico, determinar a tabela-verdade para avaliar o comportamento do circuito.

Seguindo os cinco passos do método, construímos a tabela-verdade da expressão apresentada no Quadro 12.

a) Identificam-se na expressão 3 (três) variáveis (A, B, C). Logo, teremos n=3 e $2^3 = 8$ possibilidades. Nossa tabela terá 8 linhas para as possibilidades.

b) Montagem das colunas para as diversas funções, uma para a função OR ($A + B$), para a função AND ($B.C$), para a função NOT $(\overline{B.C})$.

c) Preencher as colunas com os resultados das operações.

d) Monta-se outra coluna para o resultado final $x = (A + B).(\overline{B.C})$.

e) Preencher a coluna final, executando a operação AND de ($A + B$) e $(\overline{B.C})$.

Observando o resultado da tabela-verdade, concluímos que o circuito terá um valor lógico 1 em sua saída *x*, sempre que estiverem presentes em suas entradas *A*, *B* e *C* os seguintes valores:

A = 0, B = 1 e C = 0, ou
A = 1, B = 0 e C = 0, ou
A = 1, B = 0 e C = 1, ou
A = 1, B = 1 e C = 0.

Quadro 12: Tabela-verdade da expressão $x = (A + B).(\overline{B.C})$

A	B	C	$(A + B)$	$B.C$	$(\overline{B.C})$	$x = (A + B).(\overline{B.C})$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Para concluir, os tópicos necessários ao conhecimento dos alunos para poderem concluir o modelamento de uma situação real, ou seja, montar um projeto do diagrama esquemático de um circuito lógico para realizar uma função, é necessário conhecer o processo de determinação da expressão booleana a partir da tabela-verdade.

2.3.5 Expressões booleanas a partir da Tabela-verdade

Pode-se dizer que o modelamento de uma situação real utilizando a álgebra booleana se inicia pela abstração das variáveis lógicas e pela determinação das colunas relativas às variáveis e do número de linhas para os valores possíveis das variáveis. A partir daí, definem-se quais saídas devem ter valores lógicos verdadeiros, ou seja, iguais ao valor lógico 1.

Exemplo 1:

Em um determinado depósito, temos 3 (três) ambientes de estoque. Cada um desses ambientes tem somente uma porta, que não deve ser aberta ao mesmo tempo que as portas dos outros dois. Pede-se: Desenvolver um circuito lógico que alarme sempre que duas ou mais portas se abrirem simultaneamente.

Construindo a tabela-verdade, Quadro 13:

Primeiro, define-se que temos três colunas para as variáveis, Porta A, Porta B, Porta C e uma coluna para a saída lógica que acionará o alarme.

No segundo passo, definimos n=3 e o número de possibilidades que nossa tabela tem é 2^3 = 8 linhas de possibilidades.

No terceiro passo, definimos que, se a porta do ambiente estiver fechada, temos o valor lógico igual a “0”; se estiver fechada, temos o valor igual a “1”. Identificam-se as linhas que contêm a condição de duas ou mais variáveis, com o valor igual a “1” e preenche-se a coluna de alarme com o valor 1 na mesma linha. As outras posições que não contêm a lógica para alarme são preenchidas com “0”.

Nesse momento, necessitamos extrair a expressão booleana a partir dos resultados em que a coluna apresentar o valor “1”. Para construção da expressão, deve-se observar o seguinte:

Se a Porta A = 1, tem-se a variável igual a A.

Se a Porta A = 0, tem-se a variável igual a $\overline{A}$.

Se a Porta B = 1, tem-se a variável igual a *B*.

Se a Porta B = 0, tem-se a variável igual a $\overline{B}$.

Se a Porta C = 1, tem-se a variável igual a *C*.

Se a Porta C = 0, tem-se a variável igual a $\overline{C}$.

Com esta lógica definida, já se pode extrair a expressão booleana com facilidade.

Se A = 0 ***e*** B = 1 ***e*** C = 1, tem-se Alarme = 1. Então, geramos a operação AND $(\overline{A}.B.C)$

Se A = 1 ***e*** B =0 ***e*** C =1, tem-se Alarme = 1. Então, geramos outra operação AND $(A.\overline{B}.C)$

Se A = 1 ***e*** B =1 ***e*** C = 0, tem-se Alarme = 1. Então, geramos outra operação AND $(A.B.\overline{C})$

Se A = 1 ***e*** B =1 ***e*** C = 1, tem-se Alarme = 1. Então, geramos outra operação AND $(A.B.C)$

Com os produtos já identificados $(\overline{A}.B.C)$, $(A.\overline{B}.C)$, $(A.B.\overline{C})$, $(A.B.C)$, passamos à construção final da expressão. Como o alarme irá ser acionado na ocorrência de $(\overline{A}.B.C)$ ***ou*** na ocorrência de $(A.\overline{B}.C)$, ***ou*** $(A.B.\overline{C})$ ***ou*** $(A.B.C)$ temos uma função OR.

Concluindo, a expressão fica na seguinte forma:

Alarme = $(\overline{A}.B.C)+(A.\overline{B}.C)+(A.B.\overline{C})+(A.B.C)$

Quadro 13: Tabela-verdade

Porta A	Porta B	Porta C	Alarme
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor

2.4 Minimização de Funções Booleanas

Minimizar ou Simplificar uma função booleana é determinar, através de métodos ou modelos de simplificação matemáticos, uma expressão equivalente com o menor número de operações possíveis, podendo ter ou não todas as variáveis. É necessário alertar que nem toda expressão em sua forma normal é possível minimizar.

> Dizemos que uma função booleana está na *forma normal* a *n variáveis* quando envolve todas essas variáveis ou seus complementos. (DAGHLIAN, 1995). *Minimizar* ou *simplificar uma função booleana* é a operação mediante a qual se reduz ao mínimo o número de seus termos, resultando em economia do circuito a ela correspondente. (DAGHLIAN, 1995).

No ensino da disciplina Eletrônica Digital, o objetivo de se ter uma expressão booleana simplificada é o de se obter um circuito eletrônico digital com o menor número de componentes e, consequentemente, o menor custo e tamanho do *hardware*.

Os dois métodos mais utilizados no ensino tecnológico são o método de simplificação pela Álgebra de Boole e o método de simplificação pelos Mapas de Karnaugh.

2.4.1 Evolução dos métodos de simplificação

George Boole (1815-1864) - A lógica simbólica ou matemática teve seu surgimento em meados do século XIX, com as obras de George Boole (1815-1864), *Las leyes del pensamiento*, publicada em 1854, e de Gottlob Frege (1848-1925), *Conceptografia*, publicada em 1879. Boole propôs que fossem transportadas para a lógica a notação e as leis da álgebra, de forma a possibilitar a conversão de proposições categóricas em equações, e os silogismos, em sistemas de equações, cuja solução seria possível por métodos algébricos. (BOCHENSKI, 1985; GARRIDO, 1995)

John Venn (1834-1923) - Foi simpático à lógica de Boole e propôs ilustração da álgebra lógica através de diagramas. Tomou círculos de Eüler para fazer interpretação de termos e de proposições, tendo constatado que esses se prestavam para representar ou expressar as operações lógicas, mas não serviam para interpretar raciocínios mais complexos, afirmou Blanché (1985, p. 289).

Allan Marquand, em 1881, Alexander MacFarlane, em 1855, Lewis Carrol, em 1886, propuseram diagramas retangulares que, do cálculo das classes, podiam ser transportados para o cálculo das proposições (BLANCHÉ, 1985; CARROLL, 1986; GARDNER, 1958). Entretanto, as limitações encontradas no uso dos círculos de Eüler causaram o abandono do uso dos diagramas no cálculo dos predicados e das proposições.

Edward W. Veitch - Matemático dos Estados Unidos, escreveu em seu artigo "*A Chart Method For Simplifying Truth Functions*" (1952) um procedimento gráfico para simplificar funções lógicas. Esse método foi refinado em 1953 num artigo de Maurice Karnaugh, conhecido como mapa de Karnaugh.

Mapas de Karnaugh - É um método gráfico de simplificação, criado por Edward Veitch (1952) e aperfeiçoado pelo engenheiro em telecomunicações Maurice Karnaugh. Chamamos esse diagrama de mapa, visto ser um mapeamento biunívoco a partir de uma tabela-verdade da função que está a ser analisada.

2.4.2 Modelo de Simplificação de Expressões booleanas pela Álgebra de Boole

As variáveis booleanas são representadas por letras e assumem somente dois valores, que, no caso de estudos na eletrônica, são "0" e '1". Neste texto, representamos por letras maiúsculas, como *A*, *B*, *C*, *D* e assim por diante.

Uma expressão booleana é uma expressão matemática que é composta por variáveis booleanas e operadores lógicos como $+, ., \bar{}$, que indicam, respectivamente, *OU*, *AND* e *NOT*.

A simplificação de expressões booleanas, pelo método da Álgebra de Boole, se dá através das aplicações de regras bem definidas dentro da álgebra booleana, como seus postulados, suas propriedades, seus teoremas fundamentais e suas identidades. (CAPUANO e IDOETA, 1984; FLOYD. 2007).

2.4.2.1 <u>Postulados</u>

A álgebra booleana utiliza os postulados da complementação, da adição e da multiplicação.

a) Postulado da complementação

Neste postulado, apresentam-se as regras da complementação. Se $A=0 \rightarrow \overline{A}=1$ ou se $A=1 \rightarrow \overline{A}=0$. Através dessas regras pode-se estabelecer a identidade $\overline{\overline{A}}=A$.

A porta lógica que executa essa complementação é chamada na eletrônica digital de Inversor e executa a função *NOT*.

Exemplo de aplicação da propriedade:

$S = \overline{\overline{\overline{A}}} \rightarrow S = \overline{A}$ (observa-se que na expressão normal o número de barras é 3 – ímpar)

$S = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \rightarrow S = A$ (observa-se que na expressão normal o número de barras é 4 – par)

Pode-se concluir que, se uma barra está acima de outra, elas se anulam, ou ainda, se o número de barras que indicam complemento é par, o resultado é *A*. Se o número de barras que indicam o complemento é ímpar, o resultado é $\overline{A}$. Cada barra equivale no circuito a um inversor.

b) Postulado da adição

Neste postulado, apresentam-se as regras da adição com base na álgebra booleana:

- 0 + 0 = 0
- 0 + 1 = 1
- 1 + 0 = 1
- 1 + 1 = 1

Observa-se que estamos falando da operação lógica *OR* (qualquer "1" nas entradas leva a saída a "1"). Consequentemente, a saída só vai a "0" se as duas entradas estiverem em "0".

Com este postulado, podem-se estabelecer quatro identidades. São elas:

- $A+0=A$
- $A+1=1$
- $A+A=A$
- $A+\overline{A}=1$

c) Postulado da multiplicação

Neste postulado, apresentam-se as regras da multiplicação com base na álgebra booleana.

- 0 . 0 = 0
- 0 . 1 = 0
- 1 . 0 = 0
- 1 . 1 = 1

Pode-se observar pelas regras que a operação lógica é *AND* (qualquer “0” nas entradas leva a saída a “0”). Consequentemente, a saída só vai a “1” se as duas entradas estiverem em “1”.

Com este postulado, podem-se gerar quatro identidades. São elas:

- $A.0=0$
- $A.1=A$
- $A.A=A$
- $A.\overline{A}=1$

2.4.2.2 <u>Propriedades</u>

As propriedades tratadas na álgebra booleana são as mesmas tratadas na álgebra comum, comutativa, associativa e distributiva.

a) Propriedade Comutativa

- Propriedade Comutativa na Adição $A+B=B+A$
- Propriedade Comutativa da Multiplicação $A.B=B.A$

b) Propriedade Associativa

- Propriedade Associativa na Adição $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$
- Propriedade Associativa na Multiplicação $A.(B.C)=(A.B).C=A.B.C$

c) Propriedade Distributiva

- $A.(B+C)=A.B+A.C$

d) Teorema de De Morgan

- O Complemento do Produto é igual à Soma dos Complementos $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$
- O Complemento da Soma é igual ao Produto dos Complementos $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$

e) Identidades Auxiliares

- $A + A.B = A$
- $A + \overline{A}.B = A + B$
- $(A+B).(A+C) = A + B.C$

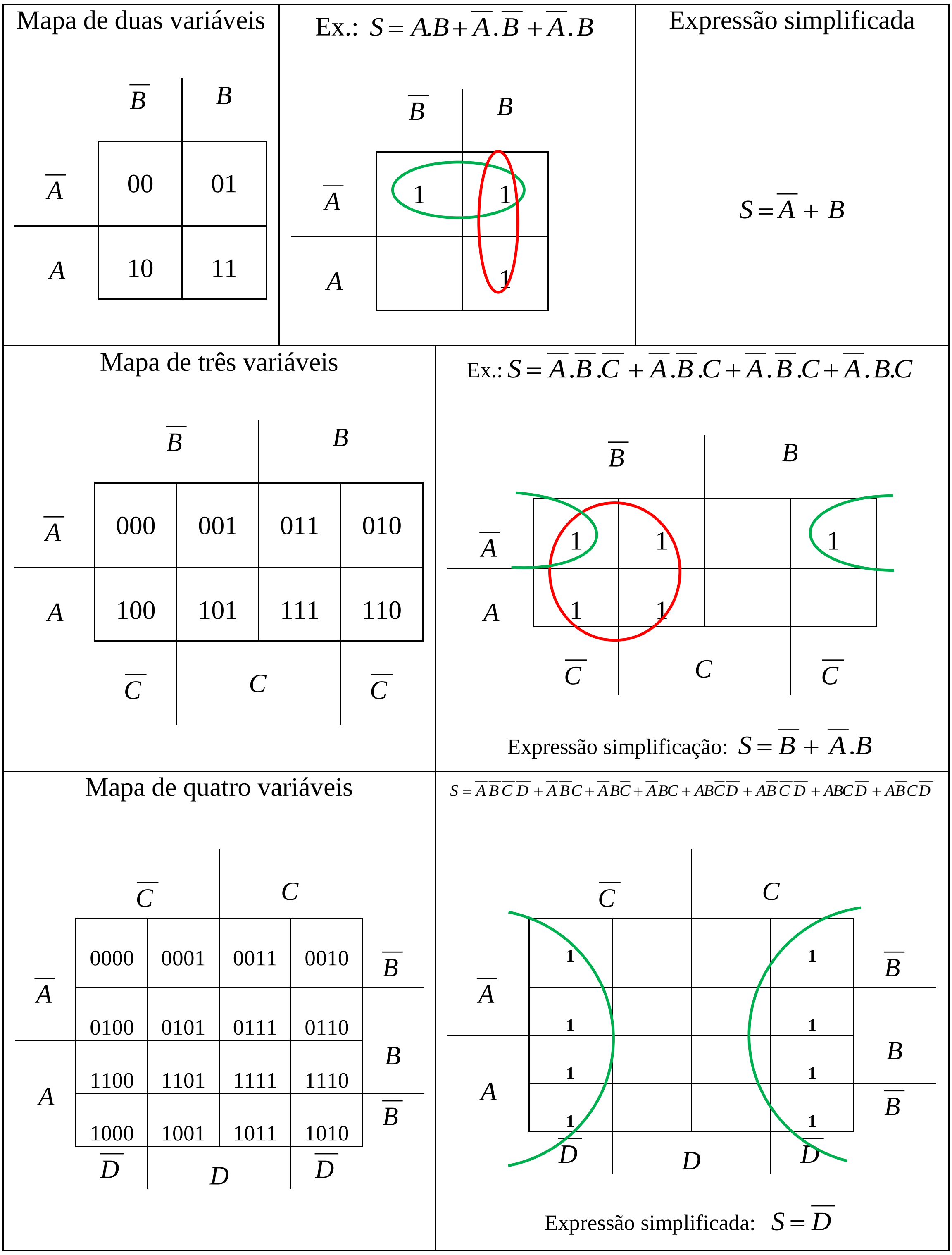
2.4.3 Modelo de Simplificação de Expressões pelos Mapas de Karnaugh

O segundo método mais utilizado para simplificar expressões booleanas é o de simplificação pelos Mapas de Karnaugh. Esse método foi desenvolvido por Maurice Karnaugh, em 1953. Ele se inspira em trabalhos anteriores de Eduard W. Veitch, por esse motivo era chamado, inicialmente, de Diagramas de Veitch-Karnaugh.

Conforme Daghlian (1995), "O mapa de Karnaugh é uma forma modificada de tabela-verdade e nos permite representar graficamente uma função booleana e, se for o caso, simplificá-la."

O método utiliza mapas de duas ou mais variáveis, porém, a partir de 5 variáveis, passa a ser muito complexo. Esses mapas podem ter representações diferentes, porém, todas são equivalentes. Na Figura 24, apresenta-se a forma utilizada por Capuano e Idoeta (1984).

Figura 24: Mapas de duas, três e quatro variáveis



Fonte: Elaborada pelo autor

2.5 Modelo Booleano

O processo de modelagem de uma situação real, quando aplicamos o Modelo Booleano, foi estabelecido nesta pesquisa por três momentos principais:

2.5.1 Primeiro momento – Matematização

O primeiro momento é o da matematização da situação real, que é concluído com a determinação de uma expressão matemática, que chamaremos de expressão booleana por ser uma expressão binária, obedecendo à simbologia e à lógica determinada por George Boole (1815-1864).

2.5.2 Segundo momento – Simplificação

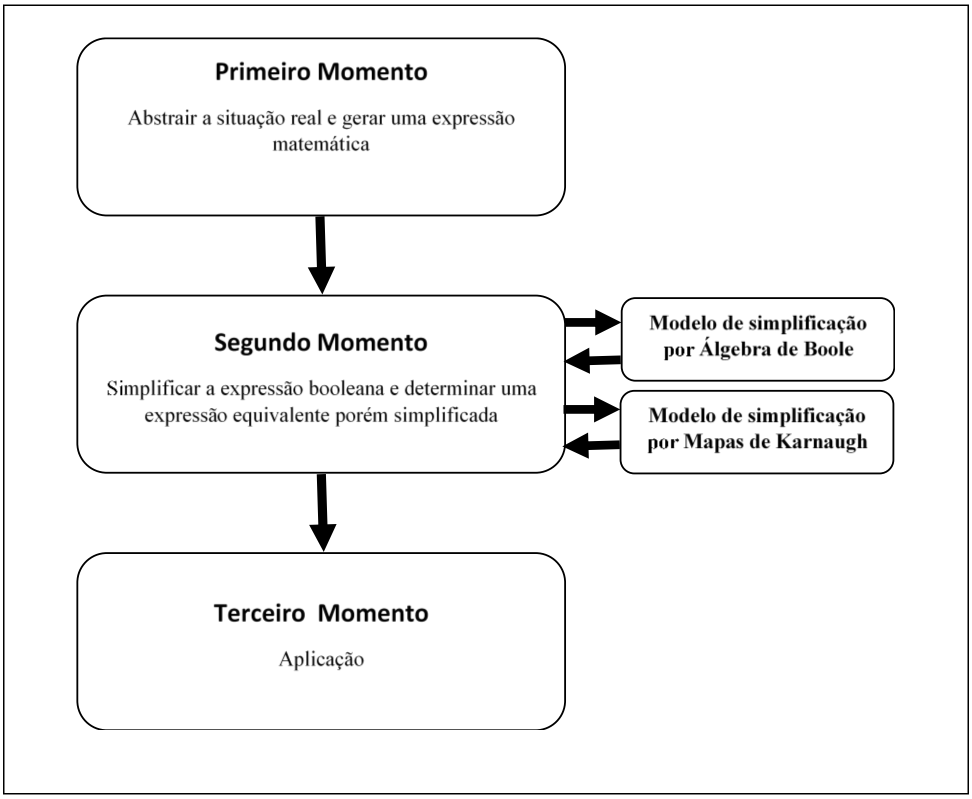
O segundo momento é o da simplificação da expressão booleana, que é concluído com a determinação de uma expressão equivalente à expressão raiz (chamo de expressão raiz a expressão gerada no primeiro momento).

2.5.3 Terceiro momento – Aplicação

O terceiro e último momento é o da aplicação, que seguirá as diretrizes da área em que estiver sendo aplicado o modelo booleano.

A Figura 25 apresenta, esquematicamente, os três momentos do modelo e os dois modelos de simplificação que são comumente aplicados no ensino da simplificação de circuitos digitais, utilizados nos cursos técnicos e em algumas outras áreas.

Figura 25: Principais momentos do Modelo Booleano



Fonte: Elaborada pelo autor

Neste trabalho, iremos aplicar o Modelo Booleano no ensino da primeira etapa do curso técnico em Telecomunicações, na disciplina de Eletrônica Digital.

O objetivo final é que o aluno tenha habilidade de, visando uma situação real, aplicar as seis fases do modelo booleano, em que a sexta fase, a aplicação, será gerar um diagrama esquemático de um circuito eletrônico digital que, após sua montagem, irá executar os resultados esperados a partir de uma situação real.

O modelo booleano busca matematizar situações reais que se relacionam com o pensamento humano, manipular expressões a partir da álgebra booleana e retornar com os resultados ao mundo real através de forma pré-determinada. “A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.” (BASSANEZI, p. 24).

Como o modelo booleano é um modelo lógico-determinístico, baseado na definição de modelo determinístico, e, por ser um modelo que trabalha com conjunções, disjunções e negações, que são base da álgebra booleana, pode-se determinar o resultado desejado na ocorrência de determinado evento em uma situação real. “Os modelos determinísticos são baseados na suposição de que, se existem informações suficientes em um determinado instante ou num estágio de algum processo, todo o futuro do sistema pode ser previsto precisamente.” (BASSANEZI, p. 22).

O trabalho com os alunos é iniciado com o ensino dos sistemas de numeração e suas relações. Destacamos o sistema binário e introduzimos as funções booleanas básicas, AND, OR, NOT e EX-OR, e, em seguida, as funções derivadas NAND, NOR e EX-NOR.

2.5.4 Fases do Modelo Booleano

Na execução dos 3 momentos do modelo booleano, seis fases são percorridas: no 1º momento, a 1ª fase - abstração, análise e delimitação da situação real, a 2ª fase - levantar os dados e construir a Tabela-verdade, a 3ª fase - determinar os resultado esperados na tabela e a 4ª fase - determinar a expressão a partir da tabela-verdade; no 2º momento, a 5ª fase - a simplificação da expressão e, no 3º momento, a 6ª fase - a aplicação.

2.5.4.1 1ª Fase - Abstração, análise e delimitação da situação real

Esta primeira fase é composta por atividades que analisam e delimitam a situação/problema real, determinam a lógica dos eventos e definem as variáveis lógicas binárias, para representar os *inputs* do modelo. As variáveis devem ter como possibilidades V (verdadeiro) ou F (falso), ou 1 (verdadeiro) e 0 (falso).

2.5.4.2 2ª Fase - Levantar dados e criar a tabela-verdade

A segunda fase é composta por atividades de criação de uma tabela-verdade contendo uma coluna para cada variável lógica e quantas linhas forem necessárias para conter todas as possibilidades de cada variável. Como as variáveis são binárias, o número de linhas da tabela será definido a partir do número de variáveis:

- 2^x = n, sendo x = número de variáveis e n = número de possibilidades (linhas da tabela).
- Preencher as colunas das variáveis com símbolos V (verdadeiro) ou F (falso).
- V – ocorreu o evento para a variável
- F – não ocorreu o evento para a variável

Ou

- 1 – ocorreu o evento para a variável
- 0 – não ocorreu o evento para a variável

2.5.4.3 3ª Fase - Determinar os resultados esperados na tabela-verdade

Nesta fase, criamos uma ou mais colunas na tabela, para informar os resultados esperados para cada possibilidade. A quantidade de colunas a serem criadas para os resultados dependerá da quantidade de resultados diferentes esperados, quando as variáveis lógicas apresentarem os eventos que se definiram como importantes. Preenchemos todas as colunas com as possibilidades (V ou F/ 1 ou 0).

2.5.4.4 4ª Fase – Determinar a expressão a partir da tabela-verdade

Após conclusão da fase anterior, com toda a tabela preenchida, determina-se a expressão booleana (modelo objeto em uma representação conceitual)[9]. Primeiramente, definimos a lógica de transposição, em que irão ter interesse as possibilidades em que as variáveis tragam valores que são de interesse (valores iguais a 1), pré-determinados na fase anterior.

Determina-se a seguinte lógica:

Se, por exemplo, a variável x for V (Verdadeira) ou (1), chamaremos de x.

Se a variável x for F(Falsa) ou (0), chamaremos de $\bar{x}$.

A mesma lógica vale para outras variáveis y, z etc.

Observa-se que, para cada linha da tabela que contenha o resultado esperado, é necessário que os valores nas respectivas variáveis ocorram simultaneamente. Por exemplo: Se esperamos ter um resultado verdadeiro, quando ocorrerem eventos que gerem x = 1, y = 0 e z = 1, teremos o seguinte termo da expressão $x.\bar{y}.z$, ou seja, para que o resultado seja verdadeiro, terá que ocorrer, simultaneamente, x = 1 **E** y = 0 **E** z = 1; quando dizemos ¨**E**¨ estamos determinando a função booleana AND. Por isso, $x.\bar{y}.z$. Caso sejam determinadas outras possibilidades que irão gerar um resultado verdadeiro, repetimos o processo e geramos outros termos da expressão. Por exemplo: $S = x.y.z + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z}$ (Expressão booleana).

[9] Modelo objeto é a representação de um objeto ou fato concreto: suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho esquema comportamental, um mapa etc), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica. (BASSANEZI, p. 20).

Neste ponto, chegamos ao final do primeiro momento do processo ou modelo booleano.

2.5.4.5 5ª Fase – Simplificação da expressão booleana

Nesta fase de simplificação, este Modelo Booleano apresenta dois modelos de simplificação que podem ser aplicados à expressão booleana gerada na quarta fase: o modelo de simplificação pela Álgebra de Boole ou o modelo de simplificação pelos Mapas de Karnaugh.

A simplificação da expressão pelo modelo de Álgebra de Boole se dá pela aplicação das regras (identidades, propriedades, teoremas) que, aplicadas adequadamente à expressão, gera uma expressão equivalente com um menor número de termos.

A simplificação de expressões pelo modelo dos Mapas de Karnaugh utiliza mapas ou diagramas definidos pelo número de variáveis que a expressão raiz apresenta. Esses mapas nada mais são do que uma forma diferente de representar a tabela-verdade.

2.5.4.6 6ª Fase – Aplicação

Nesta fase, iremos gerar um diagrama esquemático de um circuito eletrônico, que Bassanezi (2005) define como um modelo matemático, o modelo objeto em uma representação pictórica.

> Modelo objeto é a representação de um objeto ou fato concreto: suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho esquema comportamental, um mapa etc.), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica. (BASSANEZI, p. 20).

2.5.4.7 Aplicação do Modelo Booleano e dos dois métodos de simplificação

A seguir, mostra-se um exemplo de aplicação do modelo booleano e dos dois modelos de simplificação de circuitos eletrônicos digitais mais usados na eletrônica digital, realizando as seis fases do modelo:

a) Exemplo de um problema real e a determinação da Tabela-verdade (Figura 26).

Figura 26: Exemplo do projeto de um circuito eletrônico

Modelamento de uma situação para projeto de um circuito eletrônico digital

Em um determinado depósito, temos 3 (três) ambientes de estoque. Cada um desses ambientes tem somente uma porta, que não deve ser aberta simultaneamente com qualquer outra porta dos outros dois ambientes.

Pede-se: Desenvolver um circuito lógico que alarme sempre que duas ou mais portas se abrirem simultaneamente.

Solução:

1- Chamaremos as portas dos ambientes de A, B e C e a saída para alarme de S.

2 - Chamaremos de 0, se a porta estiver fechada, e de 1, se a porta estiver aberta.
(Sistema Binário), se alarme soa, S = 1, se não S = 0.

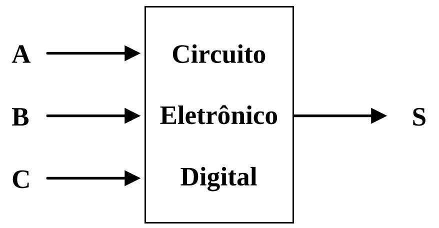
3 - Montaremos uma tabela com as possibilidades que chamaremos de tabela-verdade.

4 - A partir da tabela, determinaremos a expressão booleana que represente a saída como verdadeira para a situação proposta.

5 - Simplificaremos a expressão encontrada, para que tenhamos o circuito com menor número de componentes.

6 - A partir da expressão simplificada, associaremos às portas lógicas correspondentes a função e teremos o circuito lógico.

Diagrama em Bloco



Possibilidades portas				**Tabela-verdade**			
A	**B**	**C**	**Alarme**	**A**	**B**	**C**	**S**
Fechada	Fechada	Fechada	N/A	0	0	0	0
Fechada	Fechada	Aberta	N/A	0	0	1	0
Fechada	Aberta	Fechada	N/A	0	1	0	0
Fechada	Aberta	Aberta	Alarma	0	1	1	1
Aberta	Fechada	Fechada	N/A	1	0	0	0
Aberta	Fechada	Aberta	Alarma	1	0	1	1
Aberta	Aberta	Fechada	Alarma	1	1	0	1
Aberta	Aberta	Aberta	Alarma	1	1	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Determinando a expressão booleana (Figura 27).

Figura 27: Processo da determinação da expressão booleana

Determinando a Expressão booleana a partir da tabela-verdade

Lógica para extrair a expressão booleana da Tabela-verdade

Se *A* for 1, chamaremos de *A*;

Se *A* for 0, chamaremos de $\overline{A}$ (complemento de *A*, ou a negação de *A*);

Se *B* for 1, chamaremos de *B*;

Se *B* for 0, chamaremos de $\overline{B}$ (complemento de *B*, ou a negação de *B*);

Se *C* for 1, chamaremos de *C*;

Se *C* for 0, chamaremos de $\overline{C}$ (complemento de *C*, ou a negação de *C*);

Selecionando somente as saídas com resultado igual a 1 (Situação que irá alarmar).

Tabela-verdade				Extraindo a Expressão booleana a partir da Tabela-Verdade
A	*B*	C	*S*	Expressão AND
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{A}BC$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\overline{B}C$
1	1	0	1	$AB\overline{C}$
1	1	1	1	ABC

Expressão OR

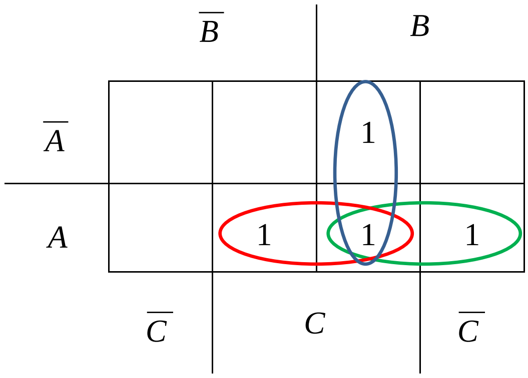
Expressão booleana que representa a Tabela-verdade

$$S = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Fonte: Elaborada pelo autor

c) Simplificando a expressão normal por Álgebra de Boole e Mapas de Karnaugh (Figura 28).

Figura 28: Simplificação da expressão pelos dois métodos

<table>
<tr><th>Simplificação pela Álgebra de Boole</th><th>Simplificação por Mapa de Kanaugh</th></tr>
<tr><td>
$S=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$
Aplicando a propriedade comutativa da adição:
$S=\overline{A}BC+ABC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$
Aplicando a propriedade distributiva:
$S=BC(\overline{A}+A)+A(\overline{B}C+B\overline{C})$
Aplicando a identidade $A+\overline{A}=1$:
$S=BC+A(\overline{B}C+B\overline{C})$
Obs.: O termo $(\overline{B}C+B\overline{C})$ é equivalente à expressão da função OR-Exclusivo $S=B\oplus C$.
Logo, a expressão booleana simplificada será:
$S=BC+A(B\oplus C)$ ou
$S=BC+A(\overline{B}C+B\overline{C})$
</td><td>
$S=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$


Expressão simplificada pelo Mapa de Karnaugh:
$S=BC+AC+AB$
</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pelo autor

d) Provando a equivalência das expressões simplificadas (Figura 29).

Figura 29: Provando a equivalência das expressões simplificadas

Tabela-verdade gerada pela simplificação pela Álgebra de Boole

A	**B**	**C**	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B}C$	$B\overline{C}$	$\overline{B}C+B\overline{C}$	$A(\overline{B}C+B\overline{C})$	BC	$S=BC+A(\overline{B}C+B\overline{C})$
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabela-verdade gerada pela simplificação pelo Mapa de Karnaugh

A	**B**	**C**	**BC**	**AB**	**AC**	$S=BC+AC+AB$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

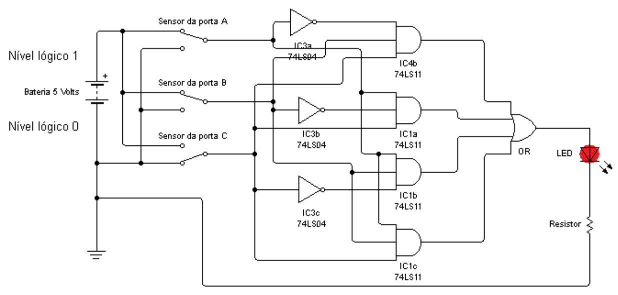
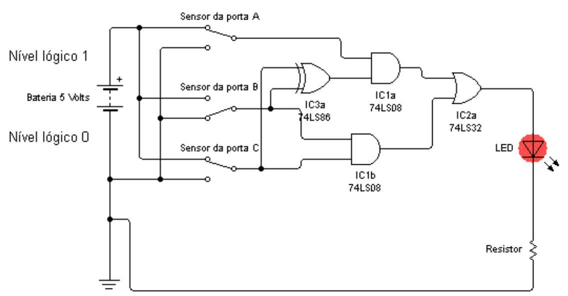
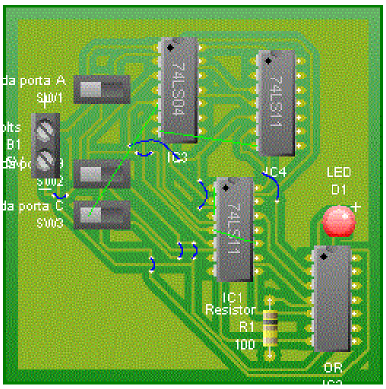
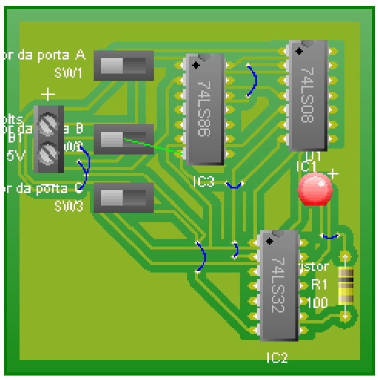
Tabela-verdade da expressão normal (sem a simplificação)

A	**B**	**C**	**S**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor

e) Comparando o circuito sem simplificar e após a simplificação pelo método da Álgebra de Boole (Figura 30).

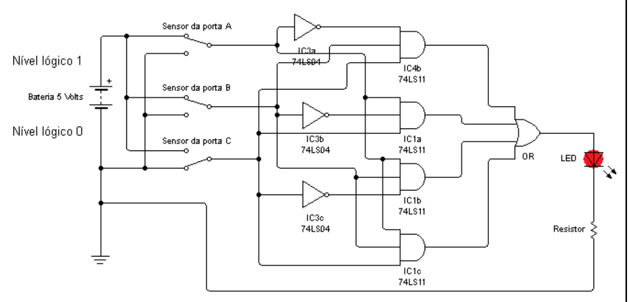
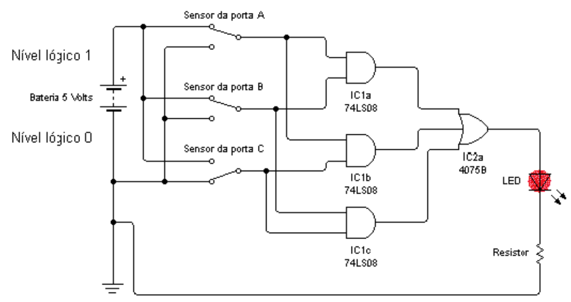
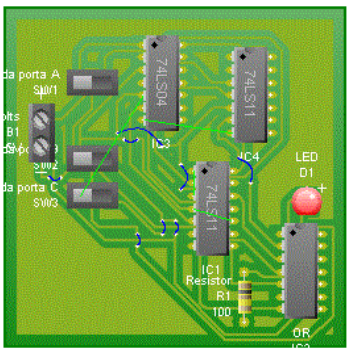
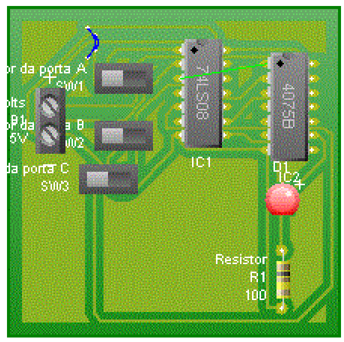
Figura 30: Comparando antes e depois da simplificação pela Álgebra de Boole

<table>
<tr><td>Circuito da expressão sem simplificação
$S = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$</td><td>Circuito da expressão simplificada pela Álgebra de Boole $S = BC + A(B \oplus C)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>*Hardware* do circuito</td><td>*Hardware* do circuito</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pelo autor

f) Comparando o circuito sem simplificar e após a simplificação pelo método dos Mapas de Karnaugh (Figura 31).

Figura 31: Comparando antes e depois da simplificação pelo Mapa de Karnaugh

<table>
<tr><td>Circuito da expressão sem simplificação
$S = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$</td><td>Circuito da expressão simplificada pelo Mapa de Karnaugh $S = BC + AC + AB$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>*Hardware* do circuito</td><td>*Hardware* do circuito</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pelo autor

3 CARACTERIZAÇÃO, ORGANIZAÇÃO E RESULTADOS

Apresentam-se neste capítulo os resultados esperados na pesquisa, os motivos que determinaram a escolha dos indivíduos que participariam da pesquisa, como foram feitas a divisão e a aplicação das atividades, como foram trabalhados os dados, na coleta, na organização e na análise. Os resultados observados na pesquisa e em cada fase do modelo aplicado irão dar condições de se criarem ferramentas, como objeto de aprendizagem e atividades, que sejam utilizadas como complemento no auxílio ao professor durante o ensino do conteúdo "Simplificação de expressões por Álgebra de Boole e Mapas de Karnaugh", na disciplina Eletrônica Digital.

3.1 Resultados esperados na pesquisa

Nesta pesquisa, pretende-se identificar a habilidade dos indivíduos que buscam o curso técnico pós-médio, nas áreas de telecomunicações ou eletrônica, em trabalhar e compreender alguns elementos ou conteúdos matemáticos, como teoremas, propriedades e identidades matemáticas, que são base para o aprendizado da simplificação de expressões pela Álgebra de Boole e os Mapas de Karnaugh. Busca-se perceber os motivos que dificultam o aluno em assimilar esses conteúdos.

3.2 Características dos indivíduos pesquisados

A pesquisa foi realizada em duas turmas da primeira etapa do curso técnico em Telecomunicações, nível pós-médio, na disciplina de Eletrônica Digital, no segundo semestre de 2013, no turno note, em uma escola técnica na cidade de Belo Horizonte. Cada turma foi formada no início do semestre com aproximadamente vinte e cinco (25) alunos. Ao longo do semestre, por motivos diversos de desistências, a turma "A" chegou a dezesseis (16) alunos e a turma "B", a dezoito (18) alunos, sendo que dois alunos da turma "B" não compareceram nas datas da aplicação das atividades e ficaram fora da pesquisa para não afetar os resultados, pois fizeram as atividades em condições diferentes. A escolha das turmas foi feita baseando-se no fato de que elas tinham características semelhantes, o conteúdo era dado pelo mesmo professor e estavam com o mesmo nível de desenvolvimento. A maioria dos alunos trabalhava durante o dia e estudava à noite. Durante a entrevista no primeiro dia de aula, cada aluno se apresentou e foi perguntado se alguém já havia estudado o conteúdo ou tinha alguma noção.

A resposta de que não tinham estudado e nunca tiveram contato com a eletrônica digital foi unânime. Logo, todos estavam no mesmo nível de conhecimento. Outra pergunta feita foi: “Há quanto tempo cada um está afastado da escola?”. Para essa pergunta houve várias respostas. Mais de cinquenta por cento estava há mais de um ano fora da escola, alguns há mais de dez anos. Observou-se, ainda, que a faixa etária dos alunos variava de 18 a 48 anos. Com relação a ter facilidade no conteúdo de Matemática, aproximadamente oitenta por cento dos alunos alegavam ter dificuldades na Matemática de forma geral.

3.3 Definição, divisão e aplicação dos blocos de atividades

Buscou-se criar 8 atividades que avaliassem e, ao mesmo tempo, servissem de instrumento de fixação do conteúdo dado em sala de aula e em laboratório.

As atividades foram criadas e divididas acompanhando o desenvolvimento do conteúdo e de forma a construir o aprendizado do aluno para que, ao final, ele pudesse aplicar o modelo que foi chamado de “Modelo Booleano”, modelando duas situações reais, para a obtenção de um circuito eletrônico digital para cada situação.

Distribuíram-se as atividades em três blocos: o 1º bloco é composto por atividades da 1ª, 2ª, 3ª e 4ª fases do modelo, o 2º bloco é composto por atividades da 5ª e 6ª fases e o 3º bloco é composto por duas atividades, modelamento da situação real 1 e modelamento da situação real 2.

O 1º bloco de atividades foi aplicado em 30/10/2013, no auditório da escola, para as turmas “A” e “B”, num total de trinta e dois (32) alunos, sendo dezesseis (16) da turma “A” e dezesseis (16) da turma “B”. Dois (2) alunos da turma “B” faltaram e não participaram da pesquisa. Iniciaram-se as atividades após orientações necessárias às 20 horas e 15 minutos, finalizando às 22 horas e 30 minutos, totalizando 2 horas e 15 minutos para última dupla a entregar o bloco de atividades. Neste 1º bloco, optou-se pelo trabalho em duplas e sem consulta a qualquer material. Após distribuição dos cadernos de atividades, foi colocado um número à caneta no caderno de cada dupla com o objetivo de identificar a dupla de alunos para posterior análise.

No dia 31/10/2013, divulgou-se o gabarito desse primeiro bloco de atividades, através do site http://www.avalm.com.br, no link atividades/gabarito da atividade 1. Após a correção, nos dias 09 e 10/11/2013, foram divulgados os resultados aos alunos, juntamente com os comentários necessários, sanando dúvidas e orientando-os para os próximos conteúdos.

O 2º bloco de atividades foi entregue juntamente com o 3º bloco, porém com outra dinâmica: as atividades seriam feitas em duplas que poderiam ser diferentes das que atuaram no 1º bloco e poderiam consultar qualquer material. Os dois blocos foram entregues em 27/11/2013 para os dezesseis (16) alunos da turma “B” e em 28/11/2013 para dezesseis (16) alunos da turma “A”. Os dois blocos de atividades foram recolhidos em 02/12/2013.

A correção e a divulgação dos resultados com os comentários e o atendimento às dúvidas e a correção das atividades foram feitos ao longo da semana.

3.4 Coleta, organização e análise os dados

Iniciou-se o tratamento dos dados com o planejamento de como coletar, organizar, analisar e apresentar os resultados. Optou-se pela criação de uma planilha no *software* Excel, para o tratamento estatístico dos dados, criando um espaço para coletar e organizar os dados de cada fase do modelo, conforme mostrado nos quadros 14, 15 e16.

Essa planilha foi criada da seguinte forma: a primeira coluna, para identificação do item da atividade; a segunda, para a descrição da atividade; a terceira, para contabilizar a quantidade de alunos da turma “A” que acertaram e que erraram a atividade do item; a quarta, para contabilizar a quantidade de alunos da turma “B” que acertaram e que erraram a atividade do item; a quinta, para a totalização de erros e acertos das duas turmas; e a sexta, para o cálculo percentual de erros e acertos de cada item em relação aos 32 alunos.

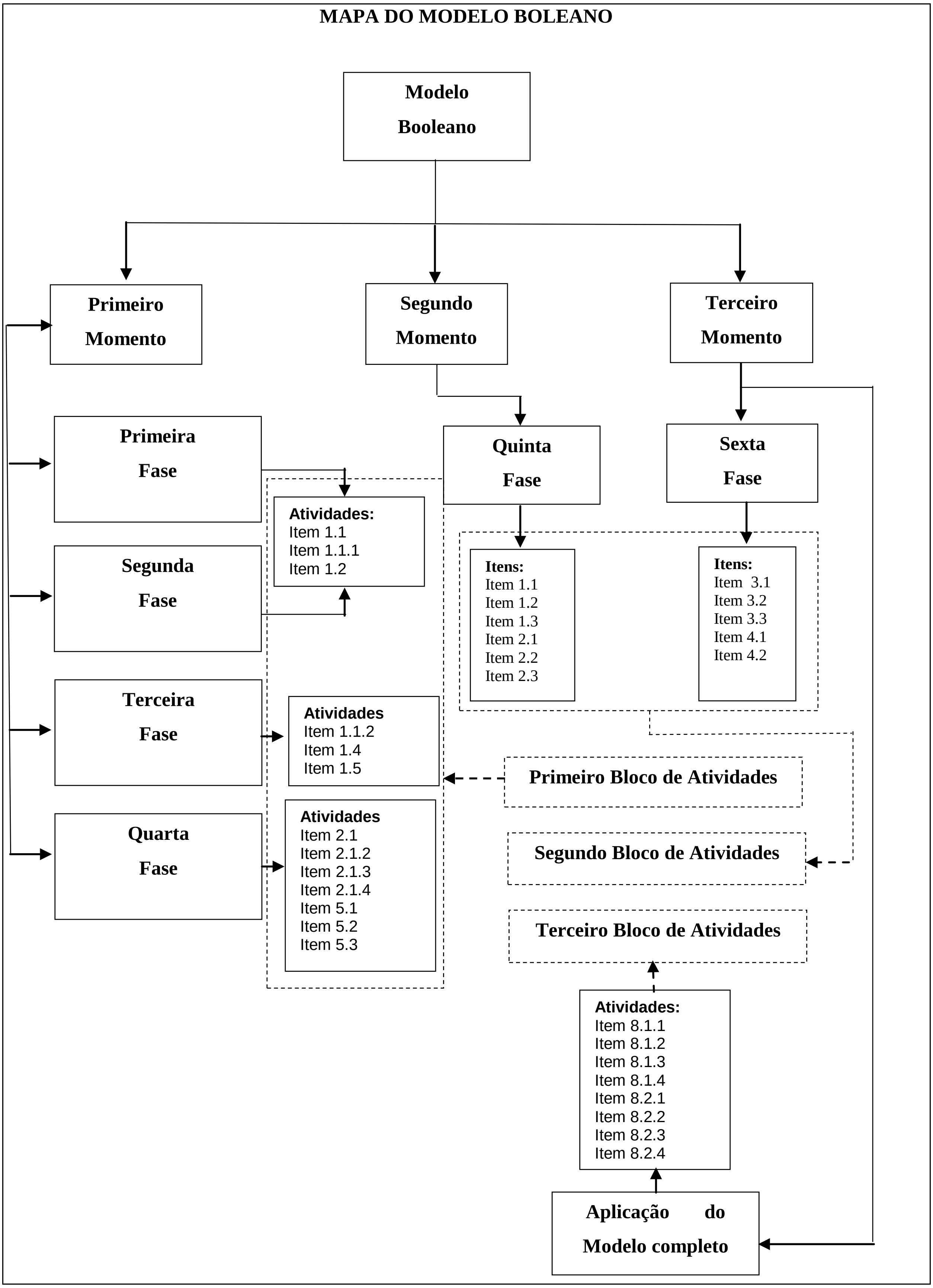
Não foi objetivo da pesquisa analisar, separadamente, as turmas “A” e “B”. Definiu-se fazer uma análise quantitativa do desempenho dos alunos no conjunto de atividades e em cada item, apresentando os resultados em forma gráfica e de tabelas com a descrição dos itens. De posse dos resultados, inicia-se a análise qualitativa, focando os resultados com menor desempenho, visando identificar a habilidade dos alunos que buscam o ensino técnico em aplicar conhecimentos adquiridos dos conteúdos matemáticos, como álgebra, propriedades da multiplicação e da adição, trabalhar com a lógica, além de outros aspectos, como a visão concreta e abstrata. A partir dessa análise, foram trabalhados os resultados, criando ferramentas e formas didáticas que venham ajudar professores e alunos do ensino técnico das áreas de Eletrônica, Telecomunicações e afins.

A Figura 32 apresenta-se o mapa deste modelo completo, indicando os blocos de atividades relacionados a cada fase e momentos do modelo.

O texto completo das 8 atividades está nos Apêndices A, B e C.

Os quadros 14, 15 e 16 apresentam o resultado quantitativo de acertos e erros dos alunos ao realizarem as 8 tarefas propostas.

Figura 32: Mapa do modelo e Blocos de atividades



Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 14: Resultados do 1º Bloco de atividades

CONTABILIZANDO OS RESULTADOS DAS ATIVIDADES									
1ª Bloco de atividades aplicadas – Matematização									
1ª Fase - Abstração e determinação das variáveis lógicas									
		Turma A		Turma B		TOTAL		Percentual - % - relação nº alunos	
Itens	Descrição	Acertos	Erros	Acertos	Erros	Total acertos	Total erros	Acertos	Erros
1.1	Identificar a tabela-verdade a partir do funcionamento do circuito elétrico	16	0	16	0	32	0	100	0
1.1.1	Identificar a função lógica booleana e símbolo a partir do circuito elétrico	14	2	13	3	27	5	84	16
1.2	Identificar a função booleana a partir da tabela-verdade	16	0	16	0	32	0	100	0
	Total	46	2	45	3	91	5		
		Total de atividades				96			

2ª Fase - Construção da Tabela-verdade									
		Turma A		Turma B		TOTAL		Percentual - % - relação nº alunos	
Itens	Descrição	Acertos	Erros	Acertos	Erros	Total acertos	Total erros	Acertos	Erros
1.1	Identificar a tabela-verdade a partir do funcionamento do circuito elétrico	16	0	16	0	32	0	100	0
1.1.1	Identificar a função lógica booleana e símbolo a partir do circuito elétrico	14	3	13	3	27	6	84	19
1.2	Identificar a função booleana a partir da tabela-verdade	16	0	16	0	32	0	100	0
	Total	46	3	45	3	91	6		
		Total de atividades				97			

3ª Fase - Determinar resultados esperados na Tabela-verdade									
		Turma A		Turma B		TOTAL		Percentual - % - relação nº alunos	
Itens	Descrição	Acertos	Erros	Acertos	Erros	Total acertos	Total erros	Acertos	Erros
1.1.2	Identificar a expressão booleana da função que o circuito executa	15	1	15	1	30	2	94	6
1.4	Identificar a expressão das funções básicas	16	0	16	0	32	0	100	0
1.5	Identificar a tabela-verdade das funções básicas	14	2	16	0	30	2	94	6
	Total	45	3	47	1	92	4		
		Total de atividades				96			

4ª Fase - Determinar a Expressão a partir da Tabela-verdade									
		Turma A		Turma B		TOTAL		Percentual - % - relação nº alunos	
Itens	Descrição	Acertos	Erros	Acertos	Erros	Total acertos	Total erros	Acertos	Erros
2.1	Identificar a expressão a partir da tabela-verdade	6	10	8	8	14	18	44	56
2.1.2	Identificação da expressão a partir da tabela-verdade	8	8	8	8	16	16	50	50
2.1.3	Identificação da expressão a partir da tabela-verdade	4	12	10	6	14	18	44	56
2.1.4	Identificação da expressão a partir da tabela-verdade	0	16	0	16	0	32	0	100
5.1	Tabela da Verdade a partir da expressão booleana	10	6	16	0	26	6	81	19
5.2	Tabela da Verdade a partir da expressão booleana	14	2	16	0	30	2	94	6
5.3	Tabela da Verdade a partir da expressão booleana	6	10	12	4	18	14	56	44
	Total	48	64	70	42	118	106		
		Total de atividades				224			

Fonte: Elaborado pelo autor em planilha Excel

Quadro 15: Resultado do 2º Bloco de atividades

2ª Bloco de atividades – Simplificação									
5ª Fase - Determinar a expressão simplificada									
		Turma A		Turma B		TOTAL		Percentual - % - relação nº alunos	
Itens	Descrição	Acertos	Erros	Acertos	Erros	Total acertos	Total erros	Acertos	Erros
1.1	Simplificação de expressões pela álgebra de Boole	14	2	16	0	30	2	94	6
1.2	Simplificação de expressões pela álgebra de Boole	14	2	14	2	28	4	88	13
1.3	Simplificação de expressões pela álgebra de Boole	16	0	10	6	26	6	87	19
2.1	Simplificação de expressões pelos mapas de Karnaugh de 2 variáveis	12	6	14	2	26	8	81	25
2.2	Simplificação de expressões pelos mapas de Karnaugh de 3 variáveis	8	8	13	3	21	11	66	34
2.3	Simplificação de expressões pelos mapas de Karnaugh de 4 variáveis	10	8	14	4	24	12	75	38
	Total	74	26	81	17	155	43		
		Total de atividades				198			

6ª Fase - Determinar o Modelo objeto (Esquema eletrônico)									
		Turma A		Turma B		TOTAL		Percentual - % - relação nº alunos	
Itens	Descrição	Acertos	Erros	Acertos	Erros	Total acertos	Total erros	Acertos	Erros
3.1	Circuito Lógico a partir da expressão booleana	10	6	16	0	26	6	81	19
3.2	Circuito Lógico a partir da expressão booleana	14	2	16	0	30	2	94	6
3.3	Circuito Lógico a partir da expressão booleana	6	10	16	0	22	10	69	31
4.1	Expressão Booleana a partir do circuito lógico	12	4	16	0	28	4	88	13
4.2	Expressão Booleana a partir do circuito lógico	14	2	12	4	26	6	81	19
	Total	56	24	76	4	132	28		
		Total de atividades				160			

Fonte: Elaborado pelo autor em planilha Excel

Quadro 16 – Resultado do 3º Bloco de atividades

3ª Bloco de atividades aplicadas - Modelo completo									
		Turma A		Turma B		TOTAL		Percentual - % - relação nº alunos	
Itens	Descrição	Acertos	Erros	Acertos	Erros	Total acertos	Total erros	Acertos	Erros
1.1	Abstrair as variáveis lógicas e construir a tabela-verdade - Problema 1	16	0	16	0	32	0	100	0
1.2	Determinar a expressão booleana e o esquema eletrônico do circuito sem a simplificação	14	2	14	2	28	4	88	13
1.3	Aplicar o processo de simplificação por álgebra booleana na expressão, desenhar o esquema eletrônico do circuito, e definir qual é mais econômico.	10	6	10	6	20	12	63	38
1.4	Aplicar o processo de simplificação pelos mapas de Karnaugh na expressão não simplificada; observar se chegou à mesma expressão simplificada no item anterior. Se não, desenhar o circuito da nova expressão.	10	6	9	7	19	13	59	41
2.1	Abstrair as variáveis lógicas e construir a tabela verdade - Problema 2	16	0	16	0	32	0	100	0
2.2	Determinar a expressão booleana e o esquema eletrônico do circuito sem a simplificação	14	2	16	0	30	2	94	6
2.3	Aplicar o processo de simplificação por álgebra booleana na expressão, desenhar o esquema, desenhar o esquema eletrônico do circuito, e definir qual é mais econômico.	14	2	16	0	30	2	94	6
2.4	Aplicar o processo de simplificação pelos mapas de Karnaugh na expressão não simplificada; observar se chegou à mesma expressão simplificada no item anterior. Se não desenhar o circuito da nova expressão.	6	10	14	2	20	12	63	38
	TOTAL	100	28	111	17	211	45		
		Total de atividades				256			

Fonte: Elaborado pelo autor em planilha Excel

3.5 Produto – AVALM - Ambiente Virtual de Aprendizagem de Lógica Matemática

Na busca de um produto que contribuísse com o professor na prática pedagógica e com os alunos no ensino da álgebra booleana e simplificação de expressões, decidiu-se criar um ambiente em que fossem reunidos uma biblioteca de dissertações, artigos e teses sobre Modelagem Matemática e Lógica Matemática, Modelos ligados à simplificação de expressões booleanas, objetos de aprendizagem que auxiliem no entendimento das funções básicas da álgebra booleana e mapas de Karnaugh na simplificação de expressões booleanas, atividades que ajudam a avaliar conhecimentos adquiridos, e uma biblioteca para assuntos ligados à Matemática que, de uma forma ou de outra, se ligam ao assunto lógica, álgebra booleana e matemática discreta.

Criou-se um *site*, ao qual foi dado o nome de AVALM – Ambiente Virtual de Aprendizagem de Lógica Matemática. A esse ambiente tem-se acesso através do endereço www.avalm.com.br.

3.5.1 Página inicial

Atualmente, percebe-se que os *sites* na rede internet vêm sendo criados de forma mais objetiva, trazendo, já na primeira página, o máximo de informações possíveis, facilitando assim a pesquisa do internauta, sem se preocupar com o chamativo visual. Buscou-se para o *site* AVALM - Ambiente Virtual de Aprendizagem Lógica Matemática uma página inicial com apresentação mais leve para o aluno, evitando-se, inicialmente, muitos textos e proporcionando um visual agradável e ligado ao tema. A imagem da primeira página foi construída utilizando-se uma figura capturada e selecionada dentre outras em pesquisa no *site* "*google.com.br*", utilizando-se o acessório *Paint* do *Windows*. A ferramenta utilizada na construção do *site* foi o acessório *WordPad* do *Windows*, conforme orientação dos livros e *sites* pesquisados para a construção de páginas WEB, como mostra a Figura 33.

Figura 33: Página inicial

Fonte: Elaborado pelo autor

3.5.2 Menu – MODELAGEM

No menu Modelagem, são disponibilizados dissertações, artigos e teses que tratam do assunto Modelagem Matemática. Inicialmente, esse menu foi povoado com dissertações e artigos utilizados na pesquisa, posteriormente será atualizado acrescentado-se outras dissertações e artigos. Veja Figura 34.

Figura 34 – Menu – MODELAGEM

Fonte: Elaborada pelo autor

3.5.3 Menu – MODELOS

Neste menu, Figura 35, estão disponibilizados textos referentes aos Modelos Booleano e Mapas de Karnaugh, que são ferramentas utilizadas no ensino da simplificação de expressões booleanas nos cursos técnicos em Eletrônica e Telecomunicações. Futuramente, poderão ser publicados outros modelos.

Figura 35: Menu Modelos

Fonte: Elaborada pelo autor

3.5.4 Menu – A LÓGICA

No menu A LÓGICA, Figura 36, pretende-se povoar textos diversos ligados aos sistemas de numeração, em especial ao sistema binário e a outros assuntos ligados à lógica matemática.

Figura 36 – Menu – A LÓGICA

Fonte: Elaborada pelo autor

3.5.5 Menu – FUNÇÕES BÁSICAS

Em funções básicas, Figura 37, estão presentes a teoria das funções básicas, suas expressões, conectivos, simbolos de portas lógicas, e objetos de aprendizagem que têm o objetivo de fixar o entendimento da função, do simbolo e da expressão referente a função.

Figura 37: Menu FUNÇÕES BÁSICAS

Fonte: Elaborado pelo autor

3.5.6 Menu – SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES

Este menu está apresentado na Figura 38. Nele está disponibilizado um objeto de aprendizagem que ajuda o aluno a exercitar a simplificação de expressões booleanas a partir da Álgebra de Boole e pelos mapas de Karnaugh. As expressões são pré-definidas, desenvolvidas a partir da análise e identificação de dificuldades dos alunos nas atividades da 5ª fase do modelo (Simplificação de expressões booleanas).

Figura 38 – Menu – SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES

Fonte:Elaborada pelo autor

3.5.7 Menu – ATIVIDADES

O menu “Atividades”, Figura 39, está povoado com objetos de aprendizagem desenvolvidos, como exercícios de fixação do conteúdo e atividades avaliativas, que permitem ao aluno averiguar o conhecimento adquirido. Os objetos de aprendizagem poderão ser atualizados, assim como poderão ser acrescentados novos exercícios.

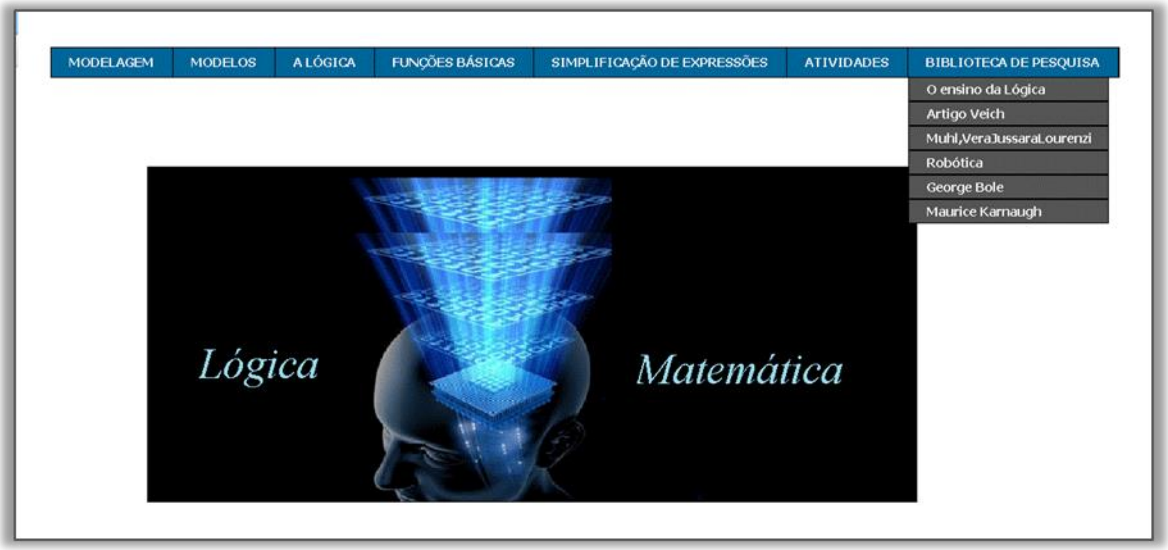
Figura 39: Menu – ATIVIDADES

Fonte: Elaborada pelo autor

3.5.8 Menu – BIBLIOTECA DE PESQUISA

Este menu, Figura 40, tem o objetivo de divulgar temas ligados à Matemática Discreta, aos grandes nomes que contribuíram para o desenvolvimento de assuntos ligados à Matemática e à Lógica e ferramentas úteis aos alunos pesquisadores.

Figura 40 – Menu – Biblioteca de pesquisa

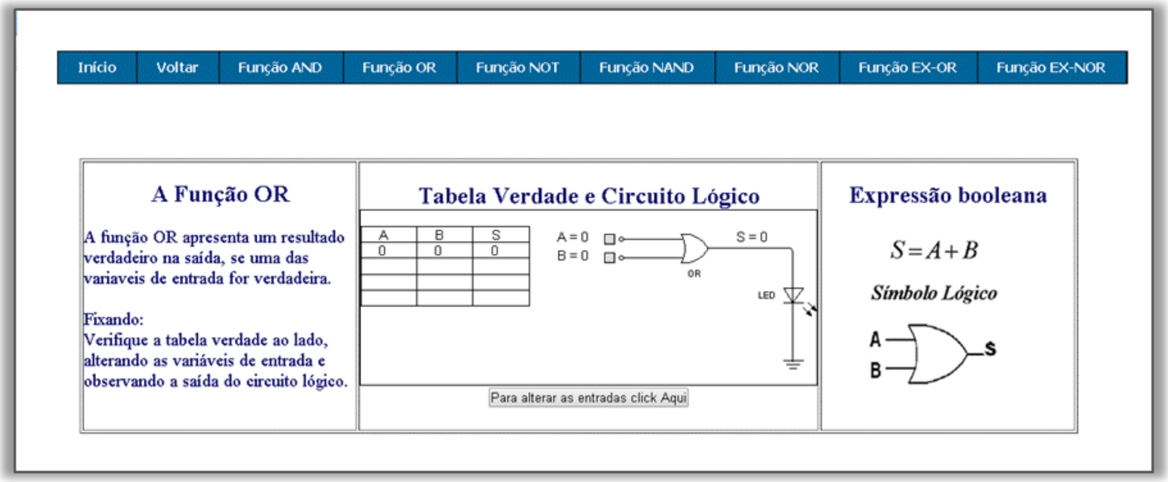


Fonte: Elaborada pelo autor

3.5.9 Exemplos de objetos de aprendizado disponíveis

a) A Figura 41 apresenta um objeto de aprendizagem que auxilia o aluno a analisar um circuito com a porta lógica OR. Ao clicar no local indicado, o aluno altera os valores das variáveis de entrada e visualiza o sinal de saída pelo nível lógico e pelo brilho do LED[10] (Diodo Emissor de Luz). O menu dessa página permite selecionar diretamente os objetos de aprendizagem das outras portas lógicas.

Figura 41: Teste porta lógica OR



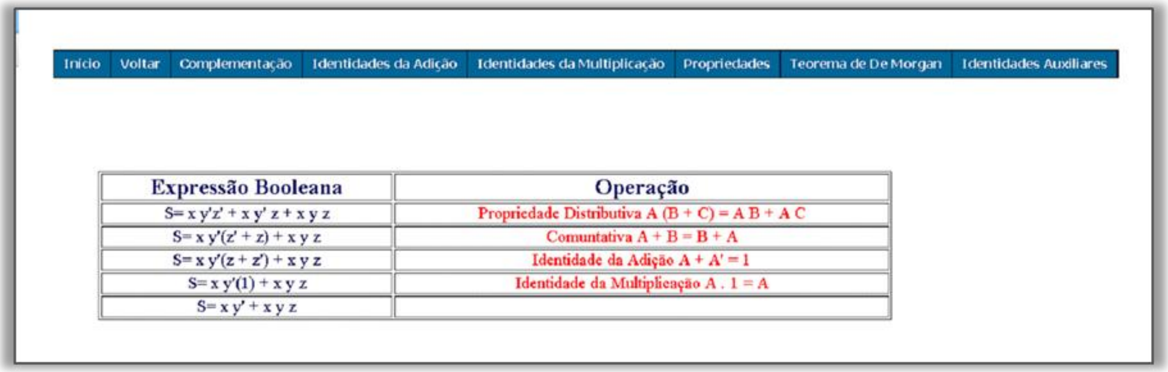
Fonte: Elaborada pelo autor

---

[10] LED (*Light Emitting Diode*) – Diodo Emissor de Luz

b) A Figura 42 apresenta um objeto de aprendizagem com a atividade de simplificação de expressões pela Álgebra de Boole. Apresenta expressões pré-definidas, em que o aluno irá praticar a simplificação de expressões aplicando regras da álgebra booleana. Durante o estudo desse conteúdo, observou-se a dificuldade do aluno em consultar o quadro resumo com as regras de simplificação, distribuído para auxiliar na atividade. Decidiu-se por representar essas regras em forma de menu de opções, buscando estimular o aluno à pesquisa de qual regra deverá ser aplicada a cada passo do processo de simplificação. Dessa forma, acredita-se que o aluno irá assimilar melhor as propriedades e os teoremas e identificar em qual momento aplicá-los.

Figura 42: Praticando a simplificação de expressões

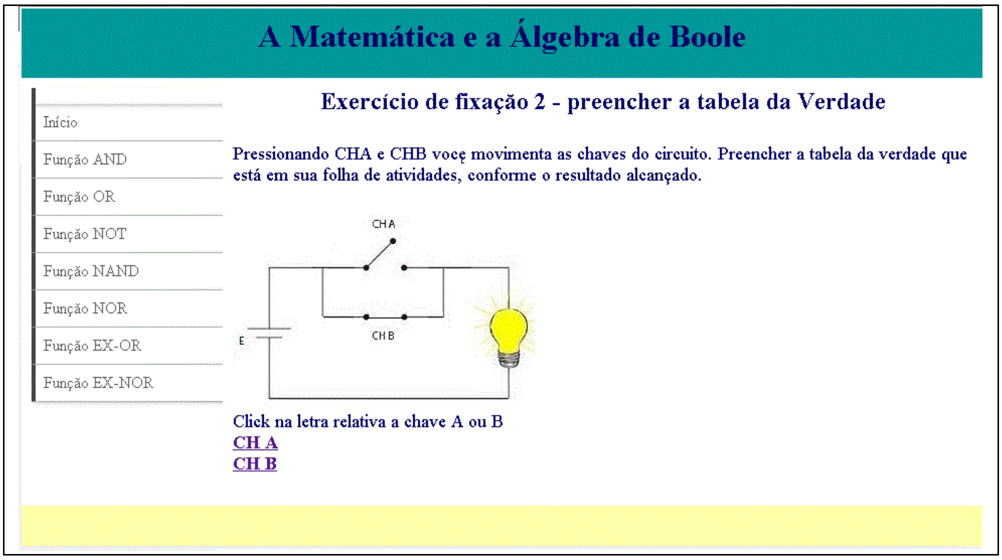


Expressão Booleana	Operação
S= x y'z' + x y' z + x y z	Propriedade Distributiva A (B + C) = A B + A C
S= x y'(z' + z) + x y z	Comuntativa A + B = B + A
S= x y'(z + z') + x y z	Identidade da Adição A + A' = 1
S= x y'(1) + x y z	Identidade da Multiplicação A . 1 = A
S= x y' + x y z	

Fonte: Elaborada pelo autor

c) A Figura 43 mostra um objeto de aprendizagem contendo um exercício de fixação, um circuito elétrico em que são representadas uma fonte (bateria), duas chaves elétricas CHA e CHB e uma lâmpada. O objetivo é abrir e fechar as chaves “A” e “B” e analisar em quais situações a lâmpada acende e em quais a lâmpada permanece apagada. No caderno de atividades, o aluno preenche a tabela com os resultados e, ao fim, terá a tabela-verdade da função OR.

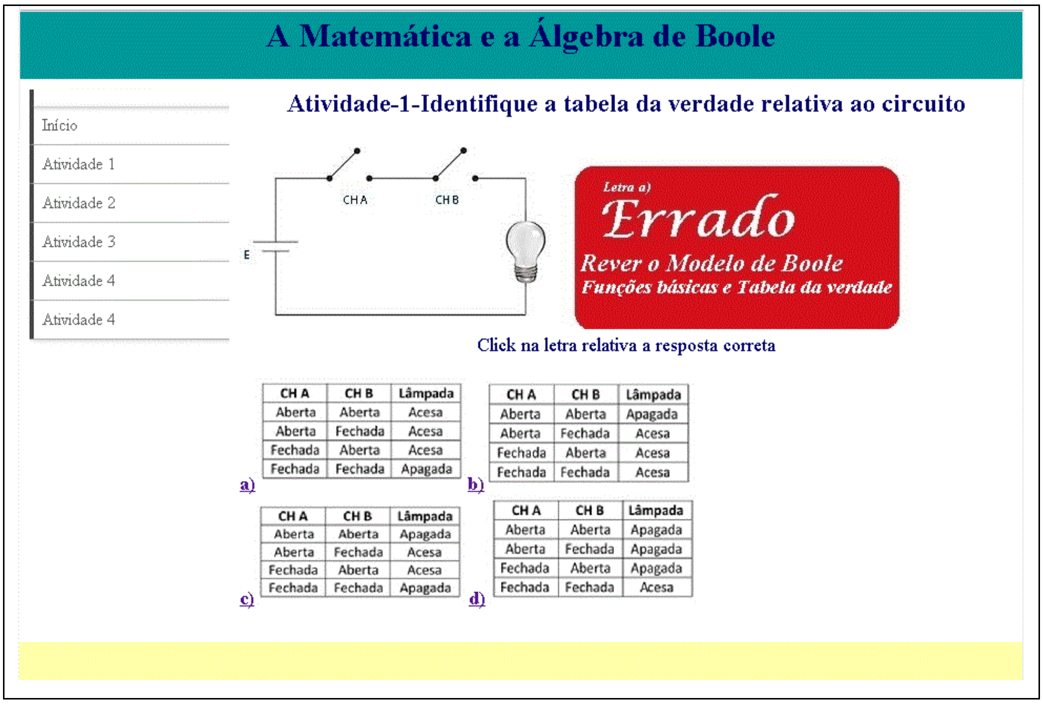
Figura 43 - Exercício de Fixação OR



Fonte: Elaborada pelo autor

d) A Figura 44 apresenta uma atividade avaliativa, cujo enunciado pede para identificar a tabela-verdade que representa o circuito. Caso seja selecionada a letra referente à tabela-verdade incorreta, o aluno é alertado do erro e orientado a rever o conteúdo relacionado à atividade. Se selecionar a letra correta, recebe o retorno de sucesso na atividade.

Figura 44: Exercício avaliativo



Fonte: Elaborada pelo autor

4 ATIVIDADES – DESCRIÇÃO E ANÁLISE

As atividades, para efeito de análise, foram divididas em três blocos, que atendem aos três momentos do modelo booleano, assumidos nesta pesquisa e já descritos no capítulo 2, figuara 32.

1º – Matematização da situação real.

2º – Simplificação da expressão gerada a partir da situação real.

3º – Aplicação do modelo, para gerar um circuito eletrônico digital a partir da situação real proposta.

4.1 Primeiro Bloco de Atividades - Matematização da situação real

Este primeiro bloco de atividades contém atividades que compõem a 1ª, 2ª, 3ª e 4ª fases do modelo trabalhado com os alunos. A conclusão das atividades deste bloco é a geração de uma expressão matemática que represente a situação real analisada.

4.1.1 Proposta

A partir de um estudo teórico em sala de aula, de exercícios de fixação e de atividades executadas pelo acesso ao site www.avalm.com.br, o aluno irá mostrar os conhecimentos adquiridos das funções booleanas básicas, suas tabelas-verdade, suas expressões booleanas e os símbolos das portas lógicas.

4.1.2 Objetivo

Avaliar os conhecimentos assimilados pelo aluno no aprendizado de funções booleanas básicas, circuitos elétricos que executam as funções, suas tabelas-verdade, suas expressões booleanas e símbolos das portas lógicas, para que possa passar aos próximos conteúdos.

4.1.3 Descrição

Após concluir essa primeira parte do conteúdo, aplicou-se uma revisão e agendou-se a data de aplicação do 1º bloco de atividades para aferir o conhecimento adquirido do conteúdo apresentado até aquele momento.

No dia da atividade, reuniram-se as turmas A e B da primeira etapa, cada turma com 16 alunos, e foram passadas as orientações. Informou-se que esse primeiro bloco de atividades continha atividades relativas ao conteúdo ministrado até aquela data, que seria trabalhado em duplas e sem consulta ao material e o tempo previsto para a atividade era de duas horas. Em seguida, solicitou-se que formassem suas duplas. Após a formação das duplas, foram distribuídos os blocos de atividades, dando-se início a elas.

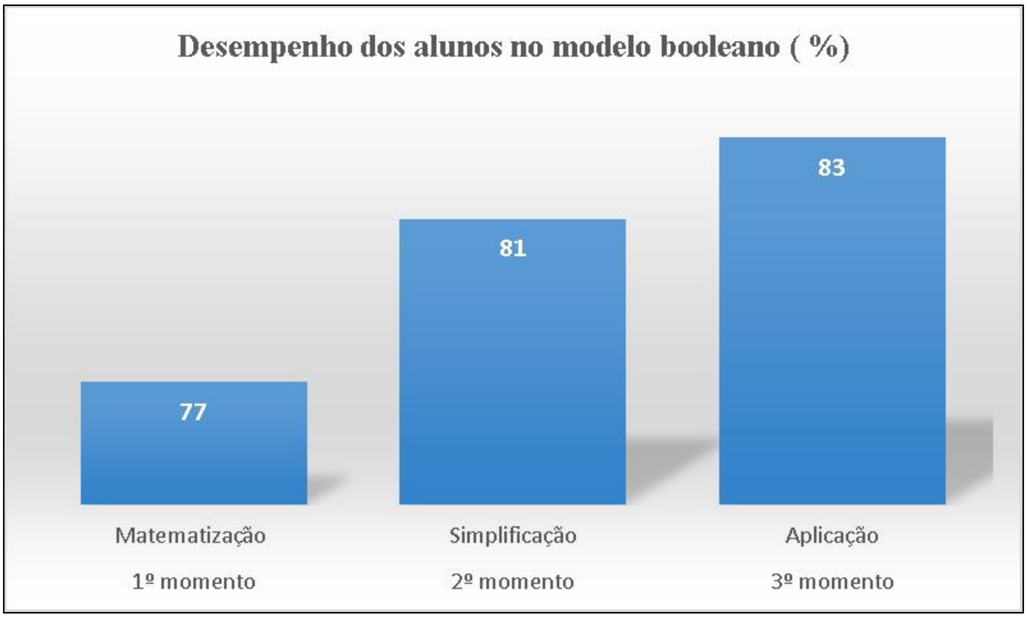
Cada bloco de atividades foi marcado com um número para representar a dupla, o que facilitaria as futuras análises das atividades.

A última dupla a terminar, concluiu as atividades em 2 horas e 15 minutos.

4.1.4 Análise do desempenho dos alunos nos três momentos

O gráfico 1 apresenta o desempenho dos alunos no modelo completo separado nos três momentos principais.

Gráfico 1: Desempenho dos alunos nos três momentos do modelo



Fonte: Dados da pesquisa

O Quadro 17 apresenta a descrição de cada um dos três momentos.

Quadro 17: Descrição dos três principais momentos do modelo

Momento	Descrição	Desempenho
1º Matematização	Abstrair a situação real e gerar uma expressão matemática	77%
2º Simplificação	Simplificar a expressão booleana gerando uma expressão equivalente	81%
3º Aplicação	Aplicação	83%

Fonte: Dados da pesquisa

O Quadro 18 apresenta as fases que compõem cada momento.

Quadro 18: Associando as fases aos momentos do modelo

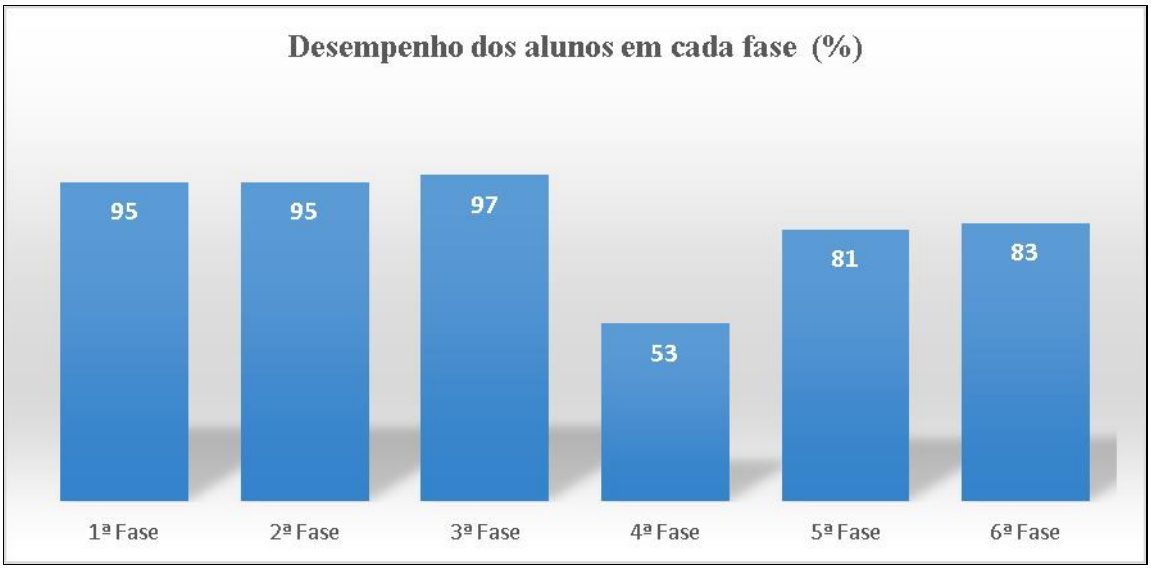
Momento	1ª Fase	2ª Fase	3ª Fase	4ª Fase	5ª Fase	6ª Fase
1º Matematização	Abstrair e determinar variáveis lógicas	Definir as possibilidades de eventos, tabela-verdade	Definir os resultados esperados da tabela-verdade	Determinar a expressão booleana a partir da tabela-verdade		
2º Simplificação					Determinar a expressão simplificada	
3º Aplicação						Determinar o esquema eletrônico (Modelo objeto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Após análise do desempenho em cada momento, observa-se que o 1º momento foi o momento em que os alunos tiveram mais dificuldades. Como esse 1º momento é composto por 4 fases, torna-se necessário fazer a análise individual das fases que o compõem, buscando identificar as reais dificuldades dos alunos.

O Gráfico 2 apresenta o desempenho dos alunos em cada fase do modelo e o quadro 19, a descrição das fases.

Gráfico 2: Desempenho dos alunos em cada fase do modelo



Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 19: Descrição das Fases

Fases	Descrição	Desempenho
1º	Abstrair e determinar variáveis lógicas de uma situação real	95
2º	Definir as possibilidades de eventos, tabela-verdade	95%
3º	Definir os resultados esperados da tabela-verdade	97%
4º	Determinar a expressão booleana a partir da tabela-verdade	53%
5º	Determinar a expressão simplificada	81%
6º	Determinar o esquema eletrônico - (Modelo objeto)	83%

Fonte: Dados da pesquisa

4.1.5 Primeira e Segunda Fases - Construir a tabela verdade a partir da situação real

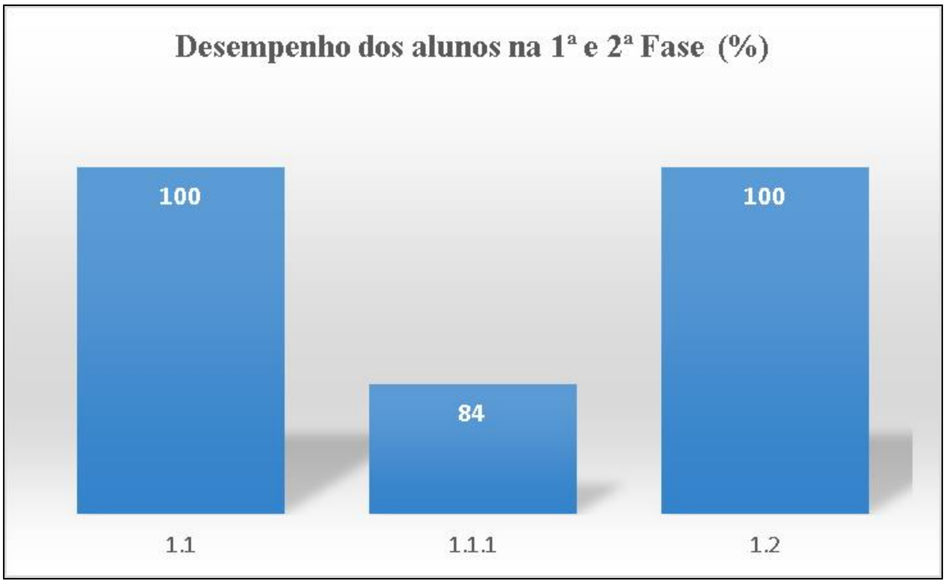
Para aferir os conhecimentos dos alunos nessas duas fases, foram definidas algumas atividades que são comuns a elas. Como consequência, obtiveram-se os mesmos resultados de desempenho. O conteúdo apresentado no primeiro momento busca preparar o aluno para reconhecer as variáveis de uma tabela-verdade, construir a tabela-verdade a partir de uma situação - no nosso caso foi o funcionamento de circuitos elétricos -, identificar as funções booleanas, os símbolos e expressões matemáticas (booleanas) que representam as funções booleanas básicas, conforme foi desenvolvido o conteúdo.

Primeira Fase - Abstrair e determinar variáveis lógicas de uma situação real.

Segunda Fase - Definir as possibilidades de eventos, tabela-verdade.

As atividades que avaliaram os alunos nessas fases estão presentes nos itens: 1.1, 1.1.1 e 1.2 do primeiro bloco das atividades. O Gráfico 3 apresenta o desempenho em cada um dos itens e o Quadro 20, a descrição de cada item.

Gráfico 3: Desempenho dos alunos na 1ª e 2ª Fases do modelo



Fonte: Dados da pesquisa

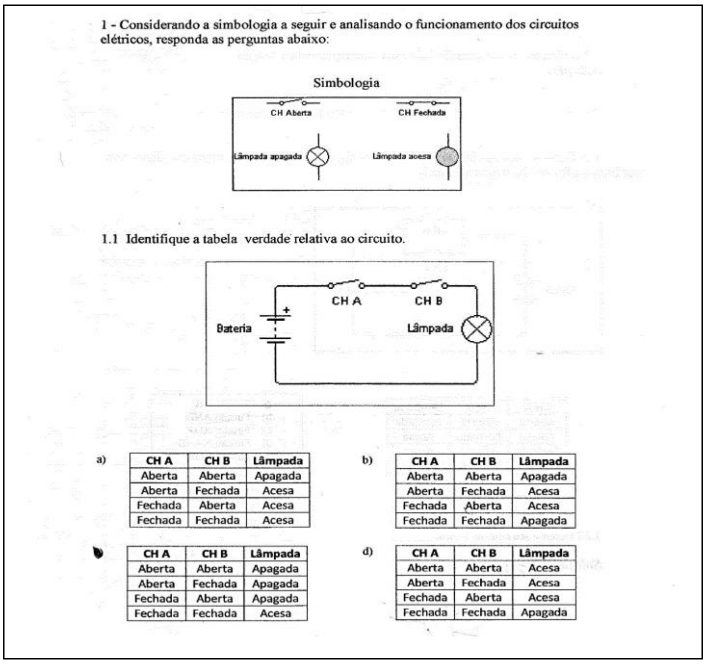
Quadro 20: Descrição dos itens da 1ª e 2ª Fases do modelo

ITENS	Descrição	Desempenho
1.1	Identificar a tabela da verdade a partir do funcionamento do circuito elétrico	100%
1.1.1	Identificar a função lógica booleana e símbolo a partir do circuito elétrico	84%
1.2	Identificar a função booleana a partir da tabela verdade	100%

Fonte: Dados da pesquisa

a) **Análise do item 1.1 -** Identificar a tabela da verdade a partir do funcionamento circuito elétrico (Figura 46).

Figura 46: Atividade do item 1.1 – Primeiro Bloco de atividades - Dupla 12



1 - Considerando a simbologia a seguir e analisando o funcionamento dos circuitos elétricos, responda as perguntas abaixo:

Simbologia

CH Aberta | CH Fechada | Lâmpada apagada | Lâmpada acesa

1.1 Identifique a tabela verdade relativa ao circuito.

Bateria | CH A | CH B | Lâmpada

a)

CH A	CH B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Acesa

b)

CH A	CH B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Apagada

CH A	CH B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Apagada
Fechada	Aberta	Apagada
Fechada	Fechada	Acesa

d)

CH A	CH B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Apagada

Fonte: Arquivo do autor

Buscou-se neste item uma questão fechada, dando ao aluno a oportunidade de refletir sobre a lógica das outras respostas e não só sobre o funcionamento do circuito elétrico.

Essa atividade avalia a capacidade de o aluno abstrair variáveis lógicas e matematizar uma situação real, construindo uma tabela que contempla todas as possibilidades de ocorrência de eventos das chaves elétricas A e B.

Os conhecimentos preexistentes do aluno, necessários para obter o sucesso na resolução da atividade, pressupõem reconhecer a simbologia elétrica:

- da bateria (fonte elétrica);
- da corrente elétrica;
- da lâmpada;
- da chave elétrica;
- do sentido do fluxo da corrente.

Por ser um circuito elétrico simples e que poderia estar representando uma situação de nosso dia a dia, como, por exemplo, acender uma lâmpada de um ambiente ou acionar um alarme luminoso quando duas portas estiverem abertas ou fechadas ao mesmo tempo, observa-se que o aluno tem maior facilidade no entendimento da lógica proposta e na construção da tabela-verdade, que comtempla o primeiro momento do modelo booleano.

Como resultado, obteve-se sucesso total desse item. Em um total de 32 alunos, todos acertaram.

b) **Análise do item 1.1.1 -** Identificar a função lógica booleana e seu símbolo a partir do circuito elétrico, conforme apresentado na Figura 47, com base na Figura 46.

Este item da atividade busca mostrar a habilidade do aluno em associar a lógica da tabela-verdade à função booleana e ao símbolo lógico.

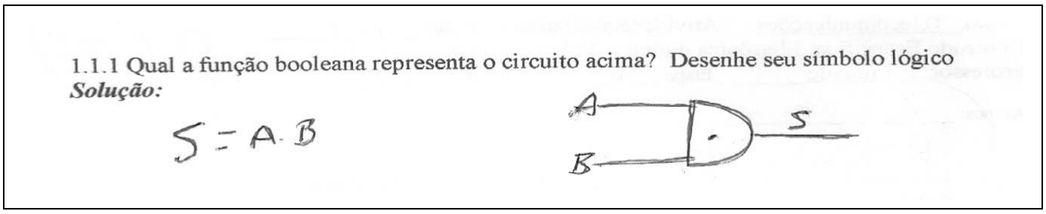
A partir de algumas dúvidas colocadas pelas duplas 2 e 3, observa-se que o termo “função” não estava bem claro para esses alunos e, mesmo com algumas dicas, não foi esclarecido, o que levou ao insucesso na resolução da questão. Identificou-se ainda, após a correção das atividades, que outras três duplas também tiveram a mesma dificuldade.

Dos 32 indivíduos, 6 (3 duplas) tiveram dificuldades em indicar qual função o circuito representava.

A resposta esperada para esse item, Figura 46, era: Função AND e o desenho do símbolo lógico.

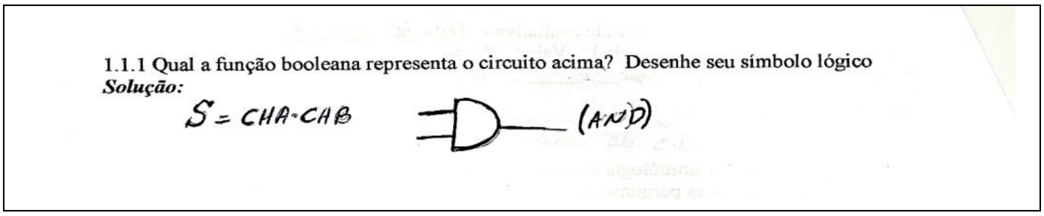
As Figuras 45, 46, 47, 48 e 49 são exemplos de respostas das duplas que não dominavam o conceito de função e não acertaram ou acertaram parcialmente.

Figura 45: Primeiro Bloco de atividades - item 1.1.1 - Dupla 2



Fonte: Caderno de atividades

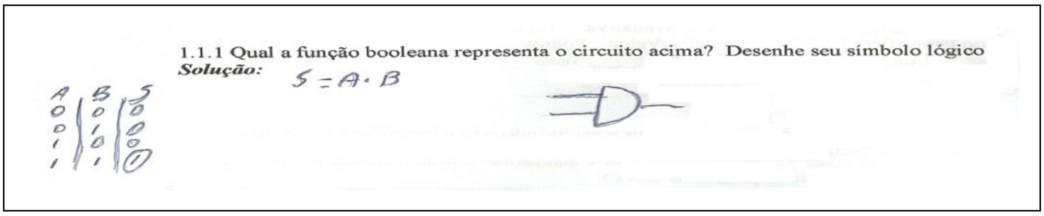
Figura 46: Primeiro Bloco de atividades – item 1.1.1 – Dupla 1



Fonte: Caderno de atividades

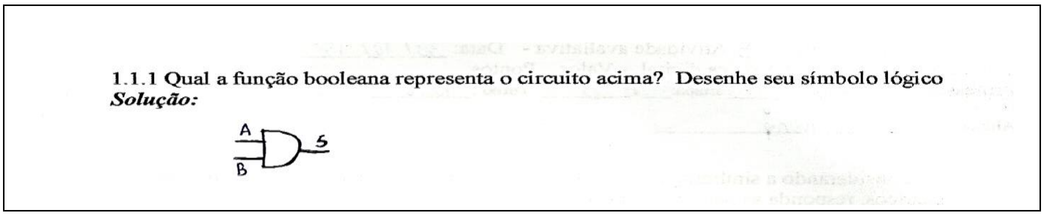
A não compreensão do conceito de função leva a confundir os termos função e expressão.

Figura 47: Primeiro Bloco de atividades – item 1.1.1 – Dupla 11



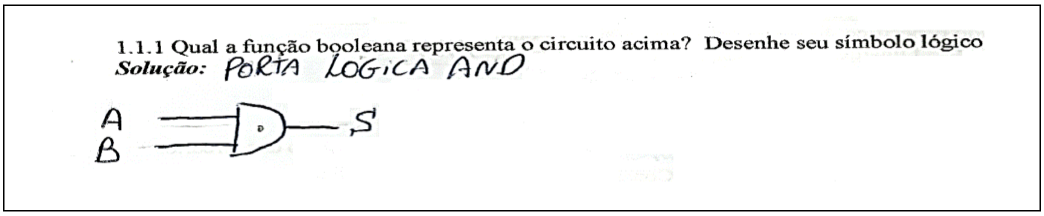
Fonte: Caderno de atividades

Figura 48: Primeiro Bloco de atividades – item 1.1.1 – Dupla 6



Fonte: Caderno de atividades

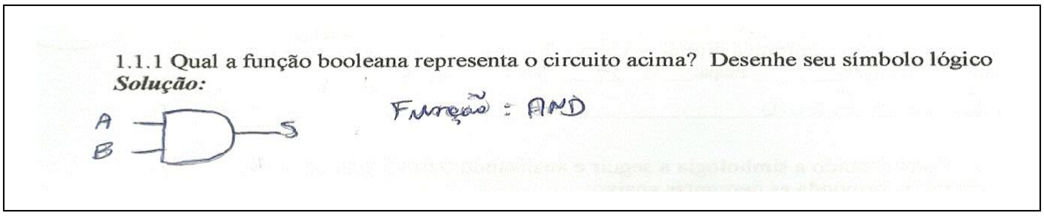
Figura 49: Primeiro Bloco de atividades – item 1.1.1 – Dupla 3



Fonte: Caderno de atividades

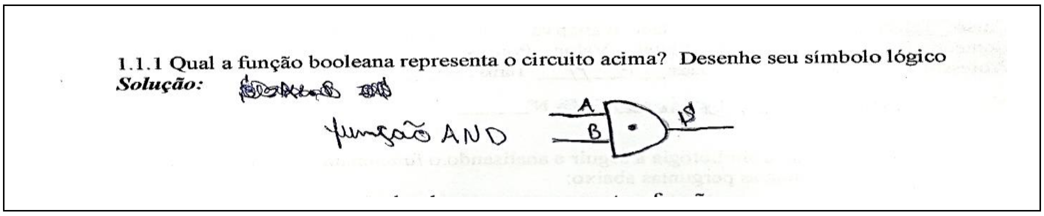
As Figuras 50 e 51 apresentam exemplos da resposta correta.

Figura 50: Primeiro Bloco de atividades – item 1.1.1 – Dupla 14



Fonte: Caderno de atividades

Figura 51: Primeiro Bloco de atividades – item 1.1.1 – Dupla 12



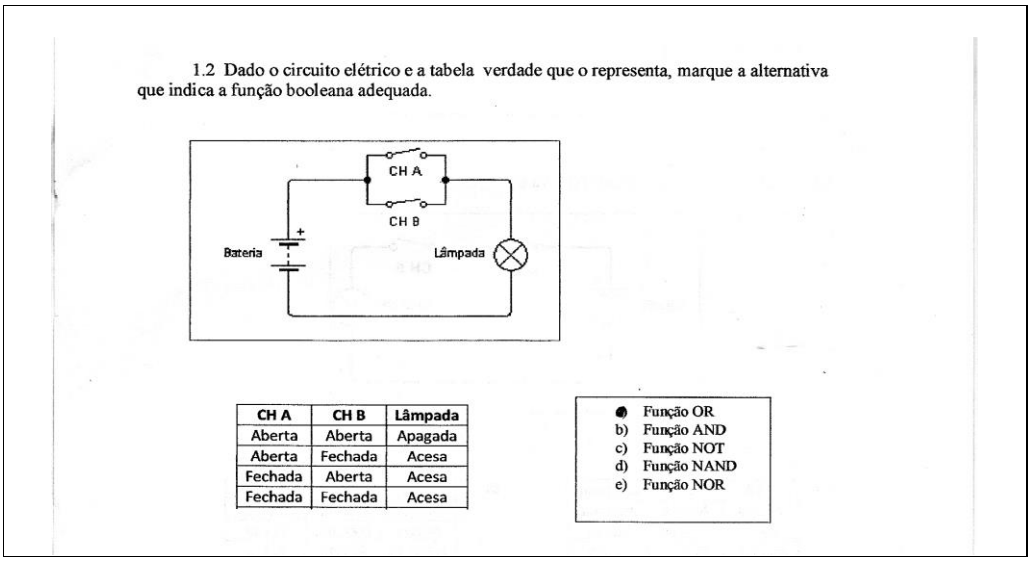
Fonte: Caderno de atividades

Diante destas observações, percebe-se a importância do conceito de função na matemática, sendo primordial na relação e interpretação de situações do dia a dia, ou de problemas propostos pela Física, Matemática e outras ciências, a partir de variáveis abstraídas.

c) **Análise do item 1.2 -** Identificar a função booleana a partir da tabela-verdade

Nesta atividade, não houve dúvida no entendimento, a totalidade dos alunos obtiveram sucesso (Figura 52).

Figura 52: Primeiro Bloco de atividades – item 1.2 – Dupla 12



1.2 Dado o circuito elétrico e a tabela verdade que o representa, marque a alternativa que indica a função booleana adequada.

CH A	CH B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Acesa

● Função OR
b) Função AND
c) Função NOT
d) Função NAND
e) Função NOR

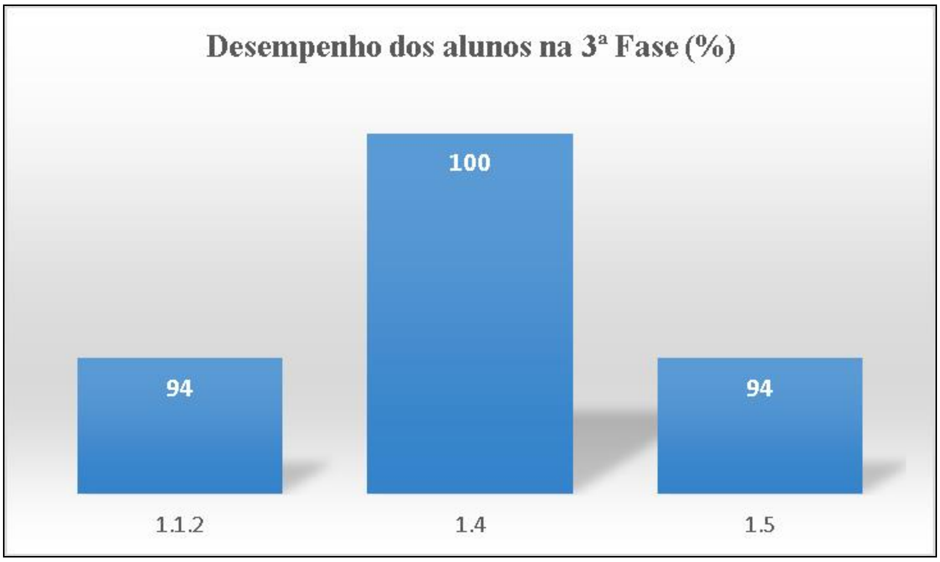
Fonte: Caderno de atividades

A atividade busca associar o circuito elétrico, a tabela-verdade e o nome da função. Neste momento espera-se uma reflexão do aluno, para o entendimento e a associação ao nome da função.

4.1.6 Terceira Fase - Definir os resultados esperados da tabela-verdade

As atividades que avaliaram o desempenho dos alunos na 3ª fase foram os itens: 1.1.2, 1.4 e 1.5, ainda em relação ao item, e o resultado é apresentado no Gráfico 4.

Gráfico 4: Desempenho dos alunos na 3ª Fase do modelo



Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 21: Descrição dos itens da 3ª Fase do modelo

ITENS	Descrição	Desempenho
1.1.2	Identificar a expressão booleana da função que o circuito executa	94%
1.4	Identificar a expressão das funções básicas	100%
1.5	Identificar a tabela da verdade das funções básicas	94%

Fonte: Dados da pesquisa

a) Análise do item 1.1.2 - Identificar a expressão booleana da função que o circuito executa.

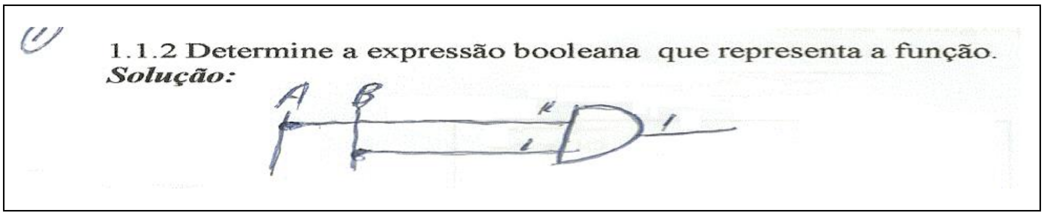
Essa atividade refere-se ao circuito da Figura 46, item 1.1, que representa uma função AND e complementa o processo de construção da tabela-verdade. Tem o objetivo específico de associar o resultado da tabela-verdade aos eventos ocorridos e a expressão matemática de funções básicas.

Observa-se a importância do conceito de "expressão matemática".

Nesta atividade, obteve-se um bom desempenho com 94% de acertos, apenas duas duplas não obtiveram sucesso na atividade.

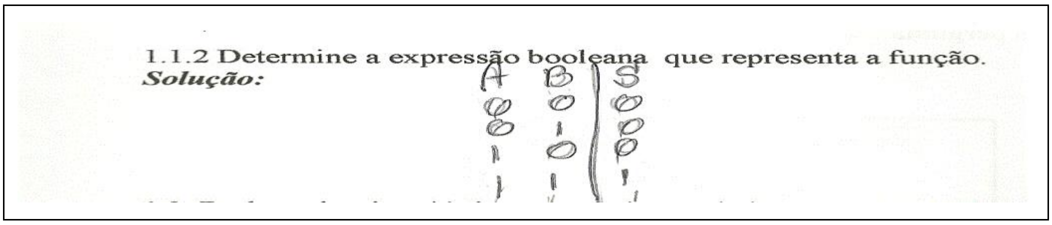
As Figuras 53 e 54 são exemplos de respostas dos alunos, relacionadas à Figura 46, item 1.1 – Função AND, que não tiveram a compreensão do enunciado nem do conceito de expressão booleana, gerando uma resposta sem sentido.

Figura 53: Primeiro Bloco de atividades – item 1.1.2 – Dupla 11



Fonte: Caderno de atividades

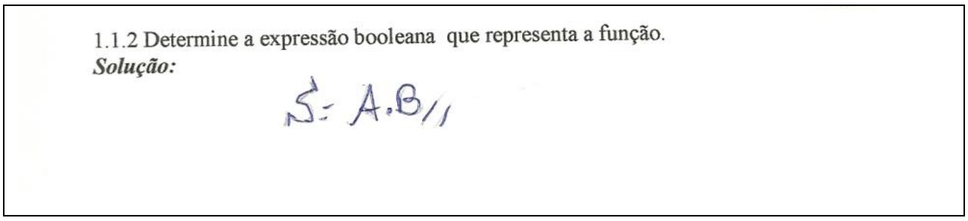
Figura 54: Primeiro Bloco de atividades – item 1.1.2 – Dupla 10



Fonte: Caderno de atividades

A Figura 55 apresenta uma resposta correta, circuito do item 1.1, Figura 46, função AND.

Figura 55: Primeiro Bloco de atividades – item 1.1.2 – Dupla 16

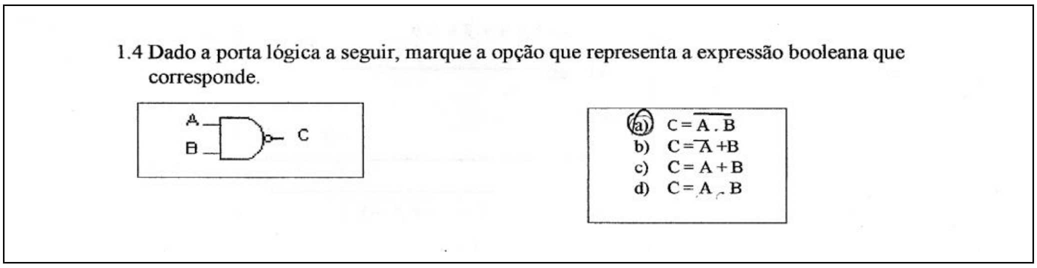


Fonte: Caderno de atividades

b) Análise do item 1.4 - Identificar a expressão das funções básicas.

Esta atividade tem objetivo específico de mostrar a habilidade do aluno em associar o símbolo lógico à expressão booleana correspondente. O bom desempenho aqui irá ajudar na construção do circuito eletrônico, na 6ª fase. A Figura 56 apresenta a resposta dada por todos os alunos.

Figura 56: Primeiro Bloco de atividades – item 1.4 – Dupla 4



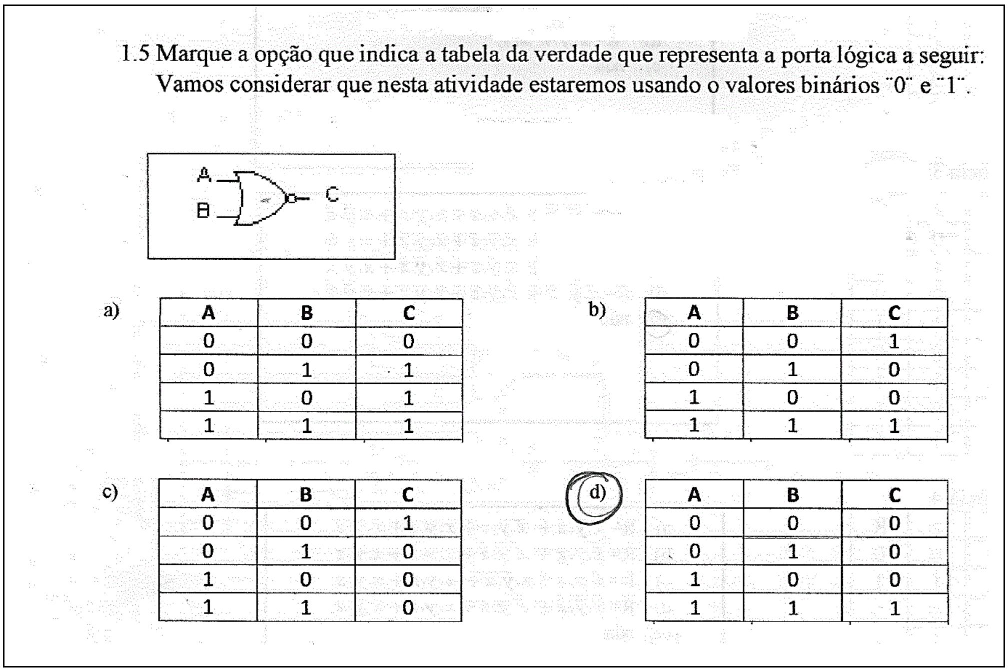
Fonte: Caderno de atividades

c) Análise do item 1.5 - Identificar a tabela da verdade das funções básicas (Figura 57).

Nesta atividade, introduziu-se a simbologia de “0” para representar “chave aberta” e “1” para representar “chave fechada”. A atividade tem como objetivo averiguar a habilidade do aluno em associar o símbolo da porta lógica de uma função booleana à tabela-verdade que representa a função booleana.

Nessa atividade, o desempenho foi de 97%. Apenas a dupla de número 8 não observou ou ainda não absorveu as diversidades simbólicas das portas que representam as funções booleanas. Conforme a figura a seguir, pela análise da resposta dada, é possível que tenha confundido o símbolo da porta NOR com a porta OR.

Figura 57: Primeiro Bloco de atividades – item 1.5 – Dupla 8



1.5 Marque a opção que indica a tabela da verdade que representa a porta lógica a seguir:
Vamos considerar que nesta atividade estaremos usando o valores binários ¨0¨ e ¨1¨.

a)

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

b)

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

c)

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

d)

A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

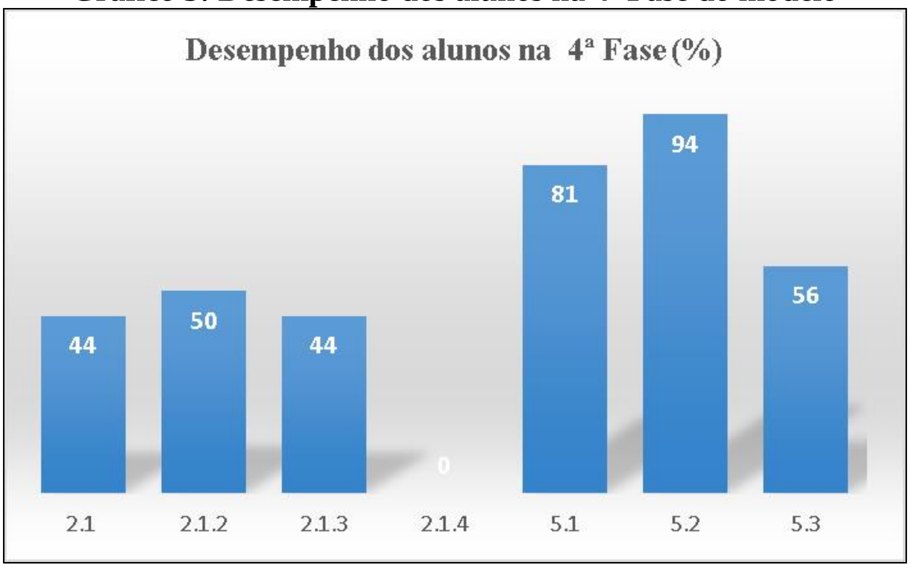
Fonte: Caderno de atividades

4.1.7 Quarta Fase - Determinar a expressão booleana a partir da tabela-verdade

As atividades que avaliaram o desempenho dos alunos na 4ª fase foram os itens 2.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 5.1, 5.2 e 5.5.

O desempenho de cada item é apresentado no Gráfico 5 e a descrição dos itens é apresentada no Quadro 22.

Gráfico 5: Desempenho dos alunos na 4ª Fase do modelo



Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 22: Descrição dos itens da 4ª Fase do modelo

ITENS	Descrição	Desempenho
2.1	Identificação da expressão a partir da tabela-verdade	44%
2.1.2	Identificação da expressão a partir da tabela da verdade	50%
2.1.3	Identificação da expressão a partir da tabela da verdade	44%
2.1.4	Identificação da expressão a partir da tabela da verdade	0%
5.1	Construção da Tabela da Verdade a partir da expressão booleana	81%
5.2	Construção da Tabela da Verdade a partir da expressão booleana	94%
5.3	Construção da Tabela da Verdade a partir da expressão booleana	56%

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa fase, avaliam-se as habilidades dos alunos em determinar a expressão booleana a partir da tabela-verdade, concluindo o processo de matematização de uma situação real.

Para avaliação dessa fase, foram propostos dois exercícios, o de número 2, com 4 itens, e o de número 3, com 3 itens.

O título da atividade de número 2 foi "Determinar a expressão matemática booleana, que represente as respectivas tabelas-verdade". Propõem-se duas atividades de identificar a expressão que representa uma tabela com duas variáveis, x e y, e duas para tabelas-verdade de três variáveis.

O título da atividade de número 5 foi "Dadas as expressões booleanas, monte as tabelas-verdade que as representem". Tem a proposta de identificar as expressões booleanas a partir de tabelas-verdade. Nos três itens, as expressões são de três variáveis.

Um desempenho positivo dos alunos nas atividades até este momento é significativo para obtenção de sucesso na aplicação do modelo completo, na construção de um circuito eletrônico digital a partir de uma situação real.

Atividade 2 – Determine a expressão matemática booleana que represente as respectivas tabelas-verdade.

Esta atividade se inicia com uma consideração:

Considerar a seguinte lógica:

Se x = 0 chamaremos de $\overline{x}$ (não x);

Se x = 1 chamaremos de x;

Esta lógica vale para "y" e "z".

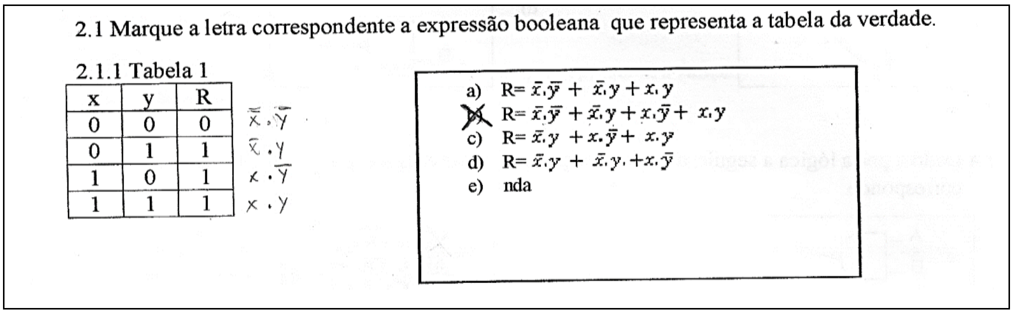
a) **Análise da atividade do item 2.1 -** Marque a letra correspondente à expressão booleana que representa a tabela-verdade, conforme mostram as Figuras 60 a 63.

A tabela-verdade dada é composta por duas variáveis de entrada (x e y) e quatro linhas de possibilidades de eventos diferentes ocorrerem. Na sua saída R, somente apresenta o valor “0” na linha em que x = 0 e y = 0, sendo as outras três linhas com resultados na saída R iguais a “1”.

Neste item, obteve-se um desempenho de 44% dos 32 alunos identificando a expressão corretamente, letra c, $R = \bar{x}\,y + x\,\bar{y} + x\,y$.

Exemplos de resultados que não identificaram a expressão correspondente são apresentados nas Figuras 58 e 59.

Figura 58: Primeiro Bloco de atividades – item 2.1 – Dupla 6


2.1 Marque a letra correspondente a expressão booleana que representa a tabela da verdade.

2.1.1 Tabela 1

x	y	R	
0	0	0	$\bar{x}.\bar{y}$
0	1	1	$\bar{x}.y$
1	0	1	$x.\bar{y}$
1	1	1	$x.y$

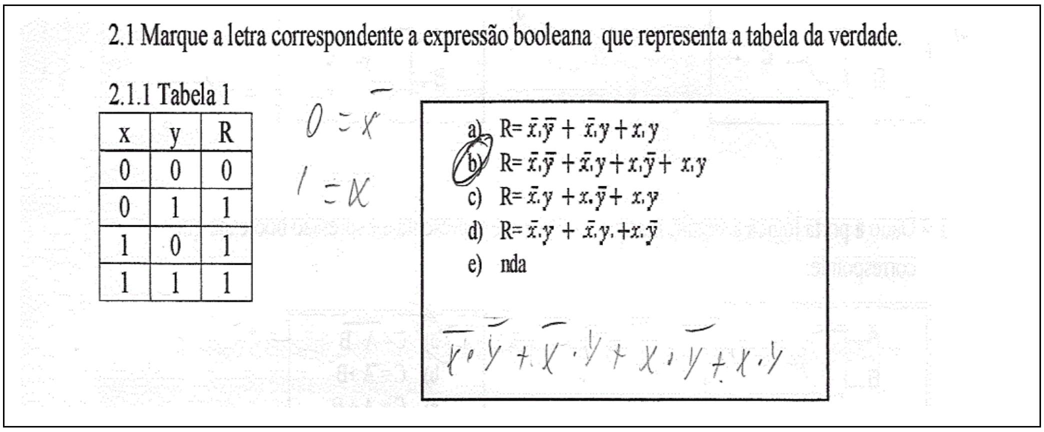
a) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.y$
b) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
c) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
d) R= $\bar{x}.y + \bar{x}.y. + x.\bar{y}$
e) nda

Fonte: Caderno de atividades

Nessa resposta dada pela dupla de número 6, observa-se que o raciocínio da lógica proposta foi correto, mas, no momento de extraírem os produtos, não se atentaram de que o produto de uma expressão booleana é a saída verdadeira, ou “1”, levando à seleção da expressão que continha todos os produtos gerados pela tabela-verdade, inclusive o que tinha saída “0”.

Observa-se que os 18 alunos (9 duplas) que não identificaram a expressão correta tiveram o mesmo raciocínio, não consideraram somente as saídas de R com valor “1”, levando a marcar a letra b, como outro exemplo a seguir:

Figura 59: Primeiro Bloco de atividades – item 2.1 – Dupla 11



2.1 Marque a letra correspondente a expressão booleana que representa a tabela da verdade.

2.1.1 Tabela 1

x	y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$0 = \bar{x}$

$1 = x$

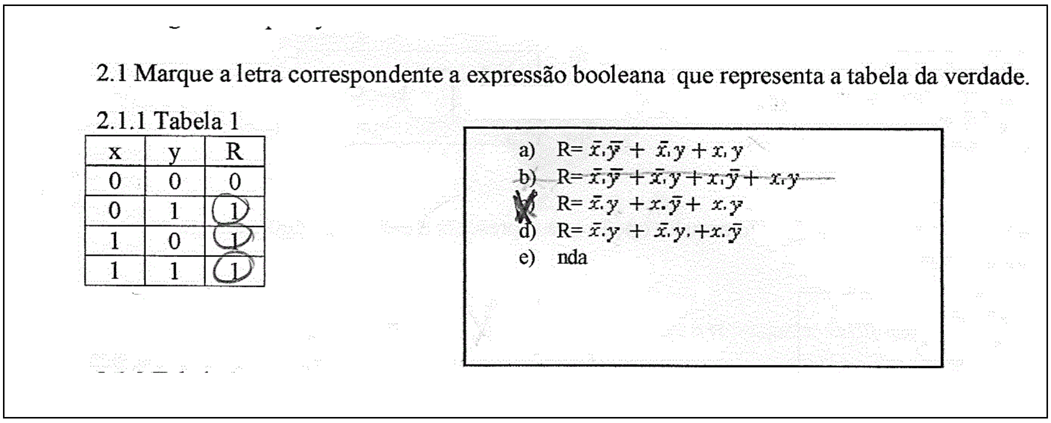
a) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.y$
b) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
c) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
d) R= $\bar{x}.y + \bar{x}.y. + x.\bar{y}$
e) nda

$\bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{x}\cdot y + x\cdot\bar{y} + x\cdot y$

Fonte: Caderno de atividades

Exemplos de duplas que identificaram corretamente a expressão seguindo o modelo:

Figura 60: Primeiro Bloco de atividades – item 2.1 – Dupla 9



2.1 Marque a letra correspondente a expressão booleana que representa a tabela da verdade.

2.1.1 Tabela 1

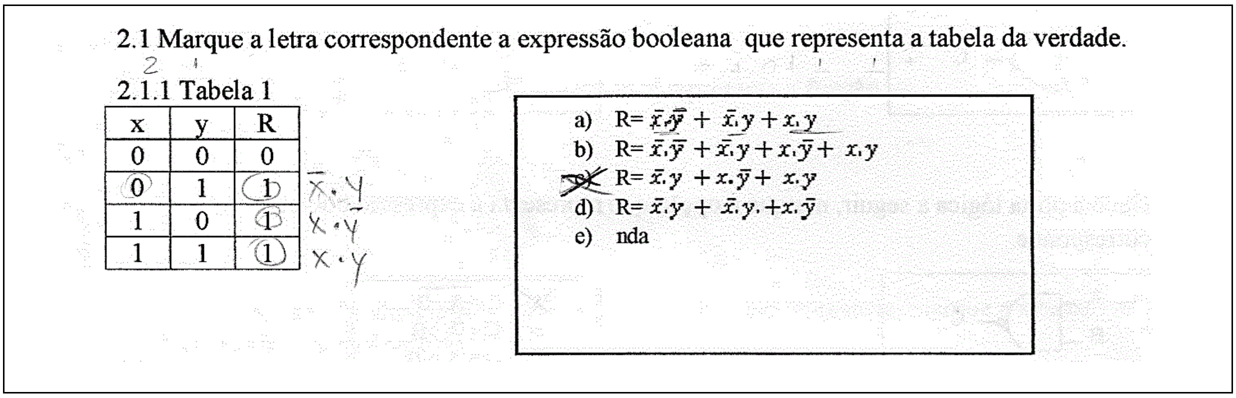
x	y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.y$
b) ~~R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$~~
c) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
d) R= $\bar{x}.y + \bar{x}.y. + x.\bar{y}$
e) nda

Fonte: Caderno de atividades

A dupla de número 14 seguiu o processo detalhadamente, identificou os resultados verdadeiros ou “1” da saída R, determinou o produto de cada linha e determinou a tabela a partir dos produtos encontrados, levando à expressão que representa a tabela.

Figura 61: Primeiro Bloco de atividades – item 2.1 – Dupla 14



2.1 Marque a letra correspondente a expressão booleana que representa a tabela da verdade.

2.1.1 Tabela 1

x	y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\bar{x} \cdot y$

$x \cdot \bar{y}$

$x \cdot y$

a) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.y$

b) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$

c) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$

d) R= $\bar{x}.y + \bar{x}.y.+x.\bar{y}$

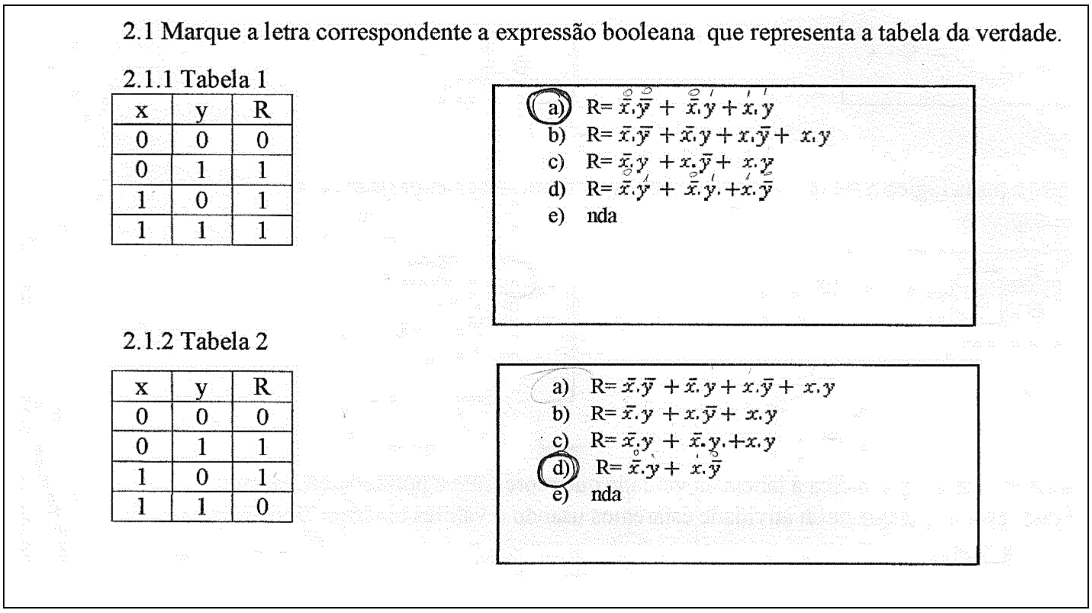
e) nda

Fonte: Cadernos de atividade

b) Análise da atividade do item 2.1.2 - Marque a letra correspondente à expressão booleana que representa a tabela-verdade. Veja a Figura 62.

Neste item, obteve-se um desempenho de 50% dos 32 alunos identificando a expressão corretamente, letra d, R = $\bar{x}y + x\bar{y}$. Como o processo é o mesmo do item anterior, alterando apenas a quantidade de variáveis, espera-se que o indivíduo que assimilou o processo corretamente e chegou à expressão booleana correta no item anterior chegaria também na expressão correta neste item, porém, a dupla de número 4 não identificou corretamente a expressão do item 2.1.1, mas identificou a do item 2.1.2, alterando o percentual de desempenho em 6% acima. Observa-se que não foi sinalizado o raciocínio através da escrita, logo, não será considerada esta variação como um ponto relevante ao aprendizado do conteúdo.

Figura 62: Primeiro Bloco de atividades – item 2.1.1 e 2.1.2 – Dupla 4



2.1 Marque a letra correspondente a expressão booleana que representa a tabela da verdade.

2.1.1 Tabela 1

x	y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.y$
b) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
c) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
d) R= $\bar{x}.y + \bar{x}.y. + x.\bar{y}$
e) nda

2.1.2 Tabela 2

x	y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
b) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
c) R= $\bar{x}.y + \bar{x}.y. + x.y$
d) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y}$
e) nda

Fonte: Caderno de atividades

c) **Análise da atividade do item 2.1.3 -** Marque a letra correspondente à expressão booleana que representa a tabela verdade.

Neste item, observam-se os mesmos resultados do item 2.1.1, obtendo um resultado de 44% de desempenho positivo, não sendo necessárias maiores análises.

d) **Análise da atividade do item 2.1.4 -** Marque a letra correspondente à expressão booleana que representa a tabela-verdade. Veja as Figuras 63 e 64.

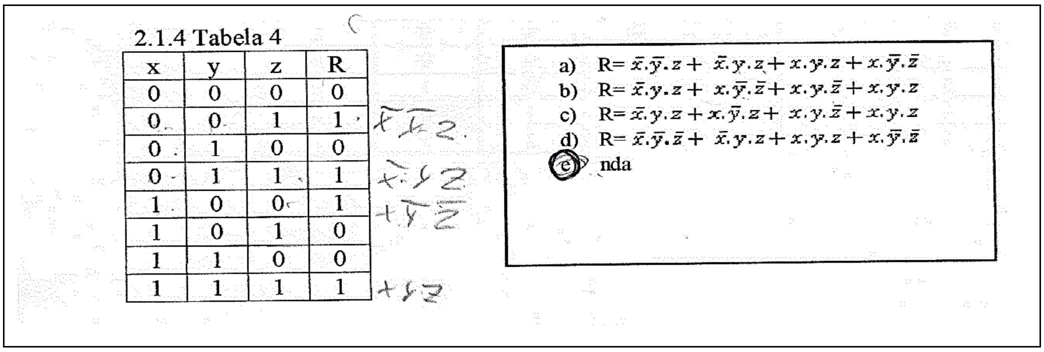
Com o objetivo de perceber o raciocínio do aluno em lidar com situações que exijam uma habilidade de questionar e utilizar conhecimentos pré-concebidos, neste item aplicou-se na expressão resultante a propriedade comutativa da adição, gerando uma expressão equivalente que é colocada como resposta correta para a questão.

Observa-se nas respostas que as duplas que obtiveram bom desempenho na geração da expressão booleana a partir da tabela-verdade nos itens anteriores não tiveram a habilidade de questionar o resultado, comparando com as possíveis respostas, nem questionaram a possibilidade de terem que aplicar alguma propriedade. Observa-se, também, que o fato de existir uma das opções como nda (nenhuma das respostas anteriores) induziu os alunos a marcá-la, sem avaliar as diversas possibilidades.

Após a correção dessa primeira parte das atividades e, em particular, deste item, vários alunos questionaram, *"o professor não tinha ensinado nem orientado a respeito da aplicação da propriedade"*. Foi explicada de uma forma intuitiva a comutatividade na adição em uma expressão booleana, no momento em que se dizia que cada termo (produto) da expressão se ligava ao outro por uma adição (operação OR) e que, na tabela-verdade, ou um ou outro termo gerava uma saída verdadeira ("1"), concluindo-se que não necessariamente teriam que estar na mesma ordem.

Esse questionamento é considerado positivo, uma vez que na próxima fase, simplificação por álgebra de Boole, trata-se com intensidade das propriedades.

Figura 63: Primeiro Bloco de atividades – item 2.1.4 – Dupla 5



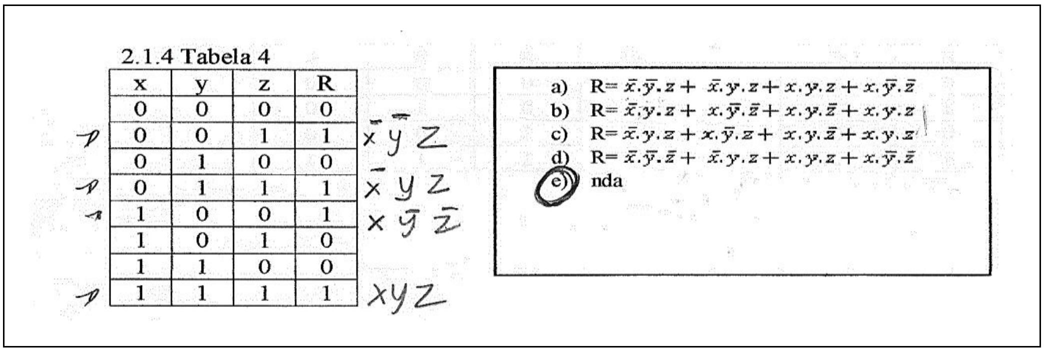
2.1.4 Tabela 4

x	y	z	R	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$+\bar{x}yz$
1	0	0	1	$+x\bar{y}\bar{z}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	$+xyz$

a) $R=\bar{x}.\bar{y}.z+\bar{x}.y.z+x.y.z+x.\bar{y}.\bar{z}$
b) $R=\bar{x}.y.z+x.\bar{y}.\bar{z}+x.y.\bar{z}+x.y.z$
c) $R=\bar{x}.y.z+x.\bar{y}.z+x.y.\bar{z}+x.y.z$
d) $R=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}+\bar{x}.y.z+x.y.z+x.\bar{y}.\bar{z}$
e) nda

Fonte: Caderno de atividade

Figura 64: Primeiro Bloco de atividades – item 2.1.4 – Dupla 3



2.1.4 Tabela 4

x	y	z	R	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\bar{x}yz$
1	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	xyz

a) $R=\bar{x}.\bar{y}.z+\bar{x}.y.z+x.y.z+x.\bar{y}.\bar{z}$
b) $R=\bar{x}.y.z+x.\bar{y}.\bar{z}+x.y.\bar{z}+x.y.z$
c) $R=\bar{x}.y.z+x.\bar{y}.z+x.y.\bar{z}+x.y.z$
d) $R=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}+\bar{x}.y.z+x.y.z+x.\bar{y}.\bar{z}$
e) nda

Fonte: Caderno de atividades

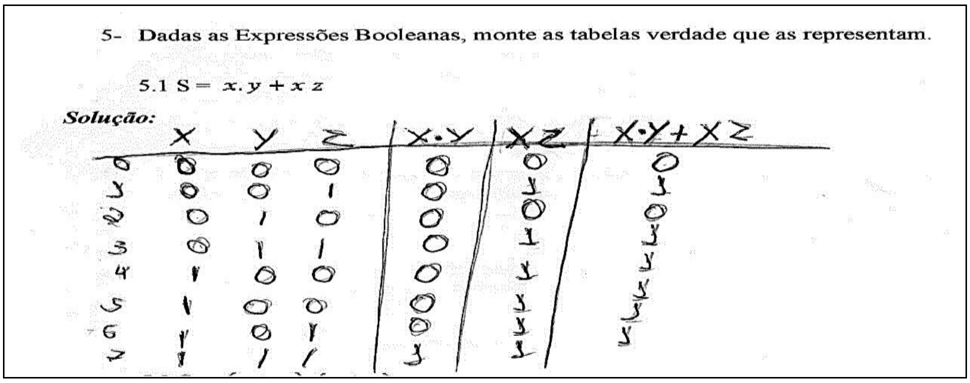
Atividade 3 – Dadas as expressões booleanas, monte as tabelas-verdade que as representam.

Nesta atividade, explora-se a habilidade do aluno em gerar a tabela-verdade a partir de uma expressão booleana. Essa tabela revela todas as possibilidades de ocorrência de eventos, espelhando o comportamento de uma situação real.

a) Análise da atividade do item 5.1 S = $x . y + x\ z$

Neste item, observa-se uma melhoria no desempenho dos alunos, pois 81% dos alunos conseguiram concluir a tabela corretamente. Veja Figuras 65, 66 e 67.

Figura 65: Primeiro Bloco de atividades – item 5.1 – Dupla 1


5- Dadas as Expressões Booleanas, monte as tabelas verdade que as representam.

5.1 S = $x . y + x\ z$

Solução:

	X	Y	Z	X•Y	XZ	X•Y+XZ
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	1
4	1	0	0	0	1	1
5	1	0	0	0	1	1
6	1	0	1	0	1	1
7	1	1	1	1	1	1

Fonte: Caderno de atividades

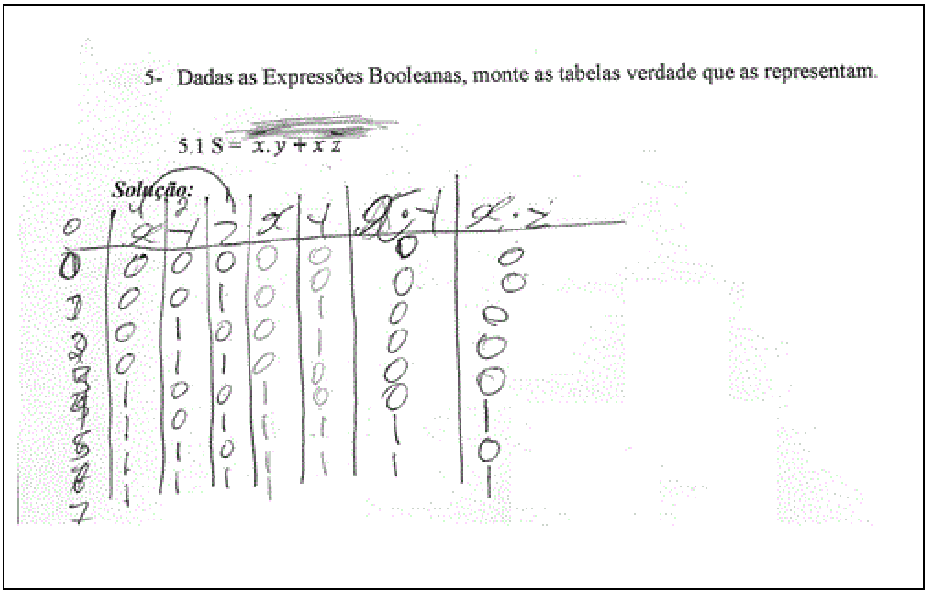
Observa-se, neste exemplo, que, por um problema na digitação da expressão, se representou o primeiro termo com o sinal de multiplicação e no segundo termo não, o que levou a dupla de número 1 a não reconhecer que a expressão que representa a função AND é S = x y ou S = x.y. Logo, conclui-se que o aluno ainda necessita de fixar melhor as representações das expressões.

Durante as aulas, identificou-se que alguns alunos não entendiam a expressão quando não se representava o sinal, quando se trabalhava com o produto. Buscando investigar o nível de entendimento dos alunos, foram propostos alguns exercícios de revisão com expressões simples para dar base às atividades seguintes. Utilizaram-se expressões algébricas envolvendo o produto, por exemplo, 2x+4, 3x+5x. Observou-se também que alguns passaram a compreender, mas outros precisavam praticar mais.

Nesse caso, percebe-se que o aluno dominou todo o processo e todas as operações em que o sinal da operação estava presente, mas não obteve sucesso na conclusão da tabela, devido ao não entendimento da representação da expressão sem o sinal.

A dupla de número 2 demonstrou insegurança no desenvolvimento do processo e não concluiu a tabela, conforme Figura 66.

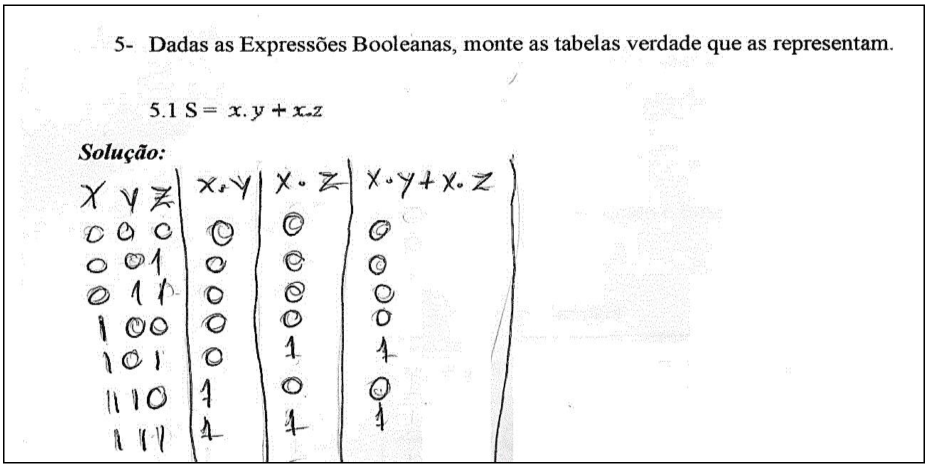
Figura 66: Primeiro Bloco de atividades – item 5.1 – Dupla 2



Fonte: Caderno de atividades

A dupla de número 14, Figura 67, teve bastante segurança em todo processo, observou a falta de sinal na operação x z e inseriu o sinal para não esquecer, o que pode sugerir insegurança no entendimento da presença ou não do sinal na operação de produto. A insegurança aparece também no momento de executar a operação "OR" (sinal +): a dupla executou a operação "AND" na sexta linha, o que sugere a não compreensão da expressão algébrica, ainda nos sinais.

Figura 67: Primeiro Bloco de atividades – item 5.1 – Dupla 14



Fonte: Caderno de atividades

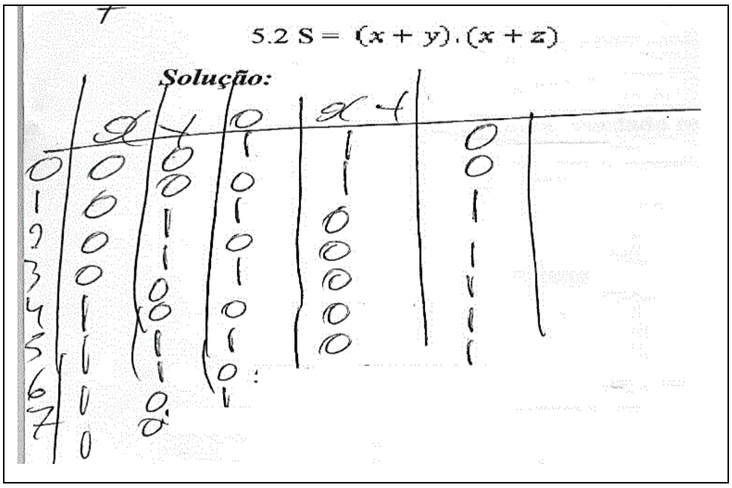
b) **Análise da atividade do item 5.2 - S =** $(x+y).(x+z)$ **(Figura 68).**

Neste item, obteve-se o melhor rendimento entre os alunos, somente uma dupla não obteve sucesso e, como resultado, obteve-se um rendimento de 94%.

Nesse caso, fica claro que 94% dos alunos compreenderam o processo de determinar a tabela-verdade a partir da expressão matemática. Baseia-se a afirmação, observando que toda a expressão possui os sinais da operação, inclusive o produto, evitando que ocorra erro devido à não compreensão da ausência do sinal no produto.

A dupla de número 2, por não ter assimilado o processo para determinar a tabela-verdade, não conseguiu evoluir na atividade.

Figura 68: Primeiro Bloco de atividades – item 5.2 – Dupla 2



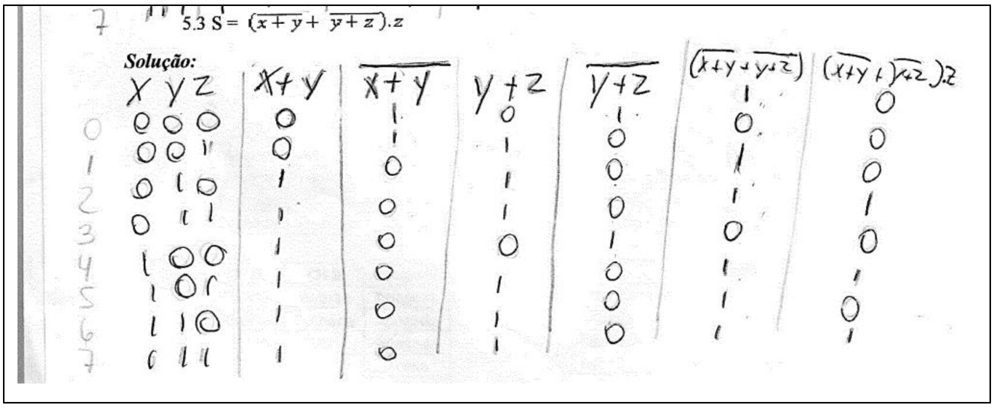
Fonte: Caderno de atividades

c) Análise da atividade do item 5.3 - S = $(\overline{x+y}+\overline{y+z}).z$ **. Figuras 69 e 70.**

Nesta atividade explora-se o domínio da ideia de negação. Os alunos obtiveram um desempenho de 56% no domínio.

A atividade da dupla número 16 (Figura 69) apresenta uma dificuldade no momento de trabalhar a operação que representa a função OR e a negação “$(\overline{x+y}+\overline{y+z})$”**.** Observa-se que os termos negados já estavam negados e, durante a operação, faz a negação do resultado.

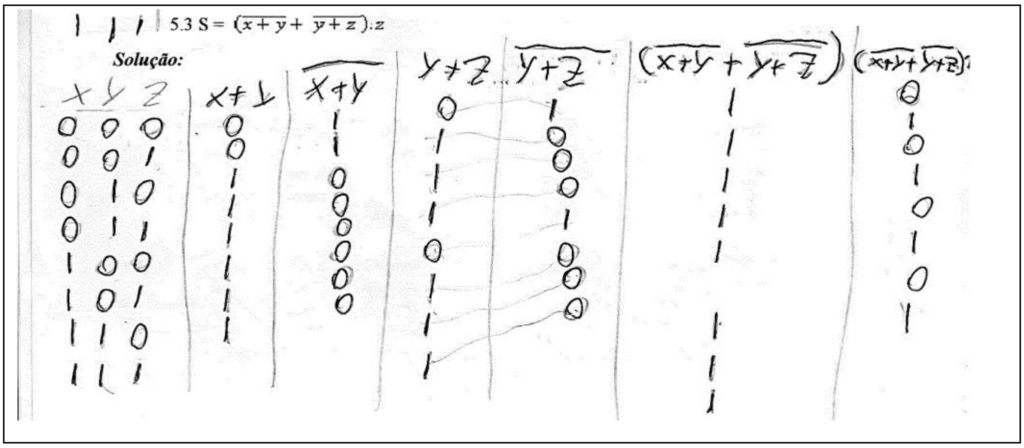
Figura 69: Primeiro Bloco de atividades – item 5.3 – Dupla 16



Fonte: Cadernode atividades

A dupla de número 5 (Figura 70) errou a atividade na operação da função OR(+), “$(\overline{x+y}+\ \overline{y+z})$”.

Figura 70: Primeiro Bloco de atividades – item 5.3 – Dupla 5



Fonte: Caderno de atividades

Conclui-se que a operação de negação e a compreensão da expressão não foram bem assimiladas.

4.2 Segundo bloco de atividades – Simplificação da Expressão

4.2.1 Quinta Fase – Simplificação

4.2.1.1 Proposta

A partir de um estudo teórico, exercícios de fixação em sala de aula e pelo acesso ao *site* www.avalm.com.br, o aluno irá mostrar os conhecimentos adquiridos no processo de simplificação de expressões pelos métodos da Álgebra de Boole e pelos Mapas de Karnaugh.

4.2.1.2 Objetivo

Avaliar os conhecimentos assimilados pelo aluno no aprendizado pelo método de Álgebra de Boole, a habilidade de aplicar os teoremas, propriedades e identidades, e pelo método dos Mapas de Karnaugh, buscando sempre gerar, através dos métodos, uma expressão equivalente mais simplificada, para que o circuito eletrônico gerado seja aquele com o menor número de componentes possível, o que resulta num menor custo e em menor tamanho.

4.2.1.3 Descrição

O aluno é orientado a executar os exercícios de fixação no *site* www.avalm.com.br, onde poderá praticar exercícios de aplicação dos teoremas, propriedades e identidades, e em seu material com as anotações das aulas em sala.

No dia da atividade, informou-se aos alunos que este segundo caderno de atividades continha somente atividades de simplificação de expressões, sendo agendada uma data para a atividade.

Na data agendada, foi solicitada a formação de novas duplas para a atividade, que foram numeradas de 1 a 16.

Foi distribuído o caderno com atividades e, em anexo, um quadro resumo, contendo todos os postulados, teoremas e identidades da álgebra de Boole.

A atividade foi feita com consulta ao material e um resumo (Quadro 23) dos teoremas foi anexado à folha de atividades.

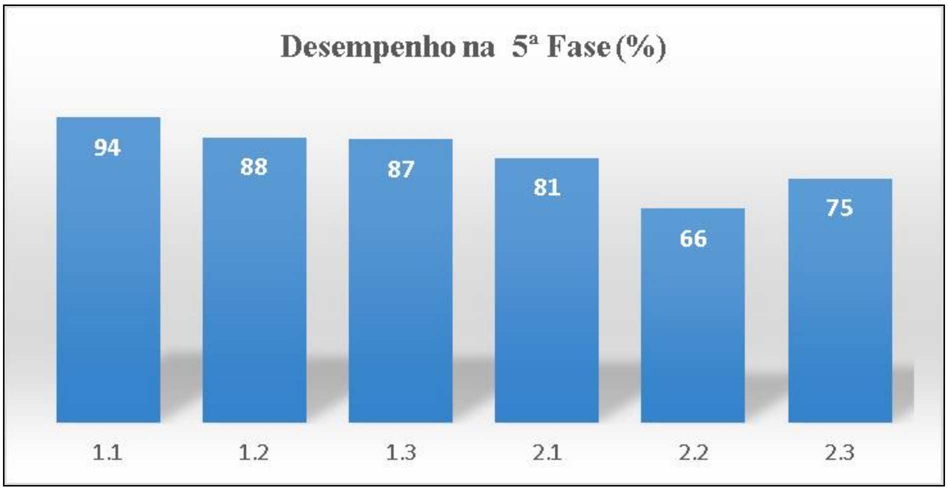
Quadro 23 – Quadro resumo da Álgebra de Boole

<table>
<tr><th colspan="4">POSTULADOS</th></tr>
<tr><th colspan="2">Complementação</th><th>Adição</th><th>Multiplicação</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$A=0$</td><td rowspan="2">$\overline{A}=1$</td><td>$0+0=0$</td><td>$0.0=0$</td></tr>
<tr><td>$0+1=1$</td><td>$0.1=1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A=1$</td><td rowspan="2">$\overline{A}=0$</td><td>$1+0=1$</td><td>$1.0=1$</td></tr>
<tr><td>$1+1=1$</td><td>$1.1=1$</td></tr>
<tr><th colspan="4">IDENTIDADES</th></tr>
<tr><th colspan="2">Complementação</th><th>Adição</th><th>Multiplicação</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$A=0$</td><td rowspan="2">$\overline{A}=1$</td><td>$A+0=A$</td><td>$A.0=A$</td></tr>
<tr><td>$A+1=1$</td><td>$A.1=1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A=1$</td><td rowspan="2">$\overline{A}=0$</td><td>$A+A=A$</td><td>$A.A=A$</td></tr>
<tr><td>$A+\overline{A}=1$</td><td>$A.\overline{A}=1$</td></tr>
<tr><th colspan="4">PROPRIEDADES</th></tr>
<tr><th>Comutativa</th><th colspan="2">Associativa</th><th>Distributiva</th></tr>
<tr><td>$A+B=B+A$</td><td colspan="2">$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$</td><td>$A(B+C)=AB+AC)$</td></tr>
<tr><th colspan="4">TEOREMAS de DE MORGAN</th></tr>
<tr><td colspan="4">$\overline{(A\,.\,B)}=(\overline{B}+\overline{A})$
$\overline{(A+B)}=(\overline{B}\,.\,\overline{A})$</td></tr>
<tr><th colspan="4">IDENIDADES AUXILIARES</th></tr>
<tr><td colspan="4">$A+AB=A$
$A+\overline{A}B=A+B$
$(A+B).(A+C)=A+BC$</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Capuano; Idoeta (1990)

As atividades que avaliaram o desempenho dos alunos na 5ª fase foram os itens: 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3. Os resultados são apresentados no Gráfico 6 e no Quadro 24.

Gráfico 6: Desempenho dos alunos na 5ª Fase do modelo booleano



Fonte: Dados coletados na pesquisa

Quadro 24: Descrição dos itens da 5ª Fase do modelo

ITENS	Descrição	Desempenho
1.1	Simplificação de expressões pela álgebra de Boole	94%
1.2	Simplificação de expressões pela álgebra de Boole	88%
1.3	Simplificação de expressões pela álgebra de Boole	87%
2.1	Simplificação de expressões pelos mapas de Karnaugh de 2 variáveis	81%
2.2	Simplificação de expressões pelos mapas de Karnaugh de 3 variáveis	66%
2.3	Simplificação de expressões pelos mapas de Karnaugh de 4 variáveis	75%

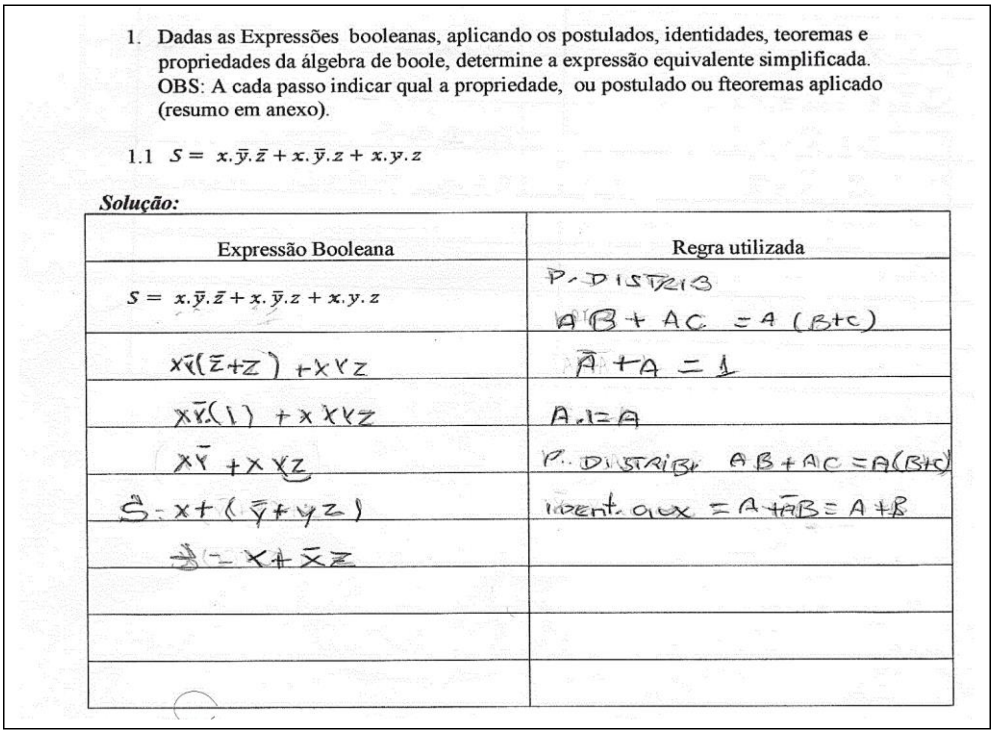
Fonte: Dados da pesquisa

a) **Análise da atividade do item 1.1 do segundo bloco de atividades.**

Simplificação de expressões pela álgebra de Boole $S = x.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.y.z$. Veja Figura 71.

Nesta atividade, o desempenho alcançado pelos alunos foi de 94%, apenas a dupla 4 não chegou à expressão correta. Apesar de ter identificado corretamente as propriedades e identidades, errou na aplicação da última identidade auxiliar, em que chegaria ao resultado $x.(\bar{y} + z)$.

Figura 71: Segundo Bloco de atividades – item 1.1.1 – Dupla 4



1. Dadas as Expressões booleanas, aplicando os postulados, identidades, teoremas e propriedades da álgebra de boole, determine a expressão equivalente simplificada.
OBS: A cada passo indicar qual a propriedade, ou postulado ou fteoremas aplicado (resumo em anexo).

1.1 $S = x.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.y.z$

Solução:

Expressão Booleana	Regra utilizada
$S = x.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.y.z$	P. DISTRIB $AB + AC = A(B+C)$
$x\bar{y}(\bar{z}+z) + xyz$	$\bar{A} + A = 1$
$x\bar{y}(1) + x\,xyz$	$A.1 = A$
$x\bar{y} + xyz$	P. DISTRIB $AB+AC=A(B+C)$
$S = x + (\bar{y} + yz)$	IDENT. AUX $= A + \bar{A}B = A + B$
$S = x + \bar{x}z$	

Fonte: Caderno de atividades

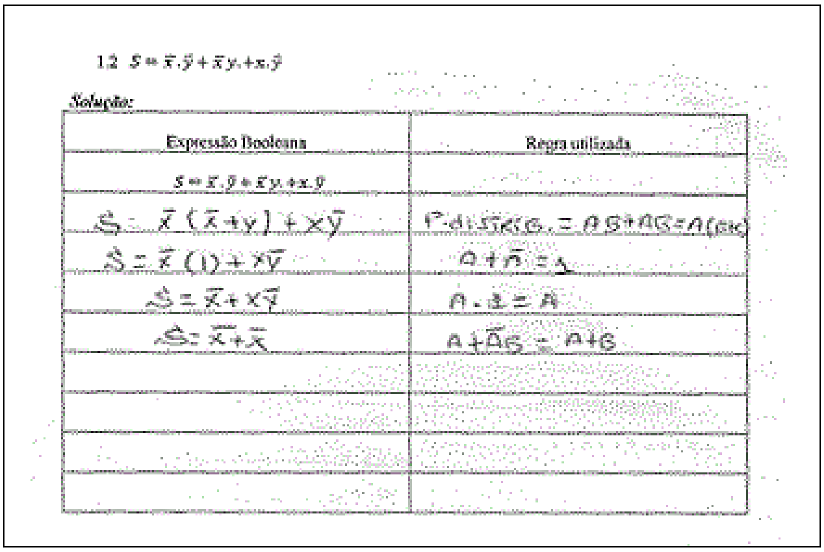
b) Análise da atividade do item 1.2, do segundo bloco de atividades. Figuras 74 e 75.

Simplificação de expressões pela álgebra de Boole $S = \bar{x}\,.\,\bar{y} + \bar{x}\,.\,y + x.\,\bar{y}$.

Nesta a atividade, apenas duas duplas aplicaram todas as regras para simplificação e completaram com sucesso com a aplicação do teorema de De Morgan $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x.\,y}$, chegando a uma expressão mais simplificada.

Porém, como a grande maioria aplicou corretamente as demais regras de simplificação pela álgebra de Boole, considerou-se correta também a resposta $S = \bar{x} + \bar{y}$ sem a aplicação de De Morgan, atingindo, assim, o desempenho de 88%. Apenas duas duplas não chegaram ao resultado correto, conforme as Figuras 72 e 73.

Figura 72: Segundo Bloco de atividades – item 1.2 – Dupla 4



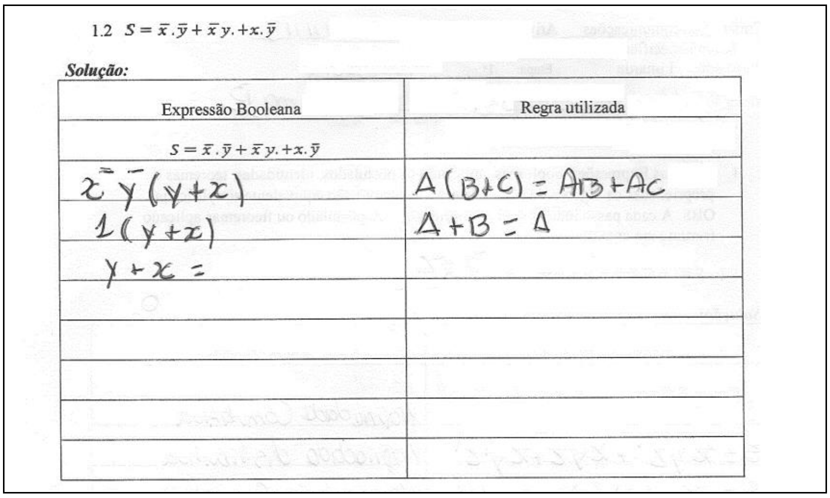
1.2 $S = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}y. + x.\bar{y}$

Solução:

Expressão Booleana	Regra utilizada
$S = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}y. + x.\bar{y}$	
$S = \bar{x}(\bar{x}+y) + x\bar{y}$	P. distrib. $= AB+AC = A(B+C)$
$S = \bar{x}(1) + x\bar{y}$	$A + \bar{A} = 1$
$S = \bar{x} + x\bar{y}$	$A . 1 = A$
$S = \bar{x} + \bar{x}$	$A + \bar{A}B = A + B$

Fonte: Caderno de atividades

Figura 73: Segundo Bloco de atividades – item 1.2 – Dupla 10



1.2 $S = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}y. + x.\bar{y}$

Solução:

Expressão Booleana	Regra utilizada
$S = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}y. + x.\bar{y}$	
$\bar{\bar{x}}\bar{y}(y+x)$	$A(B+C) = AB+AC$
$1(y+x)$	$A+B = A$
$y+x=$	

Fonte: Caderno de atividades

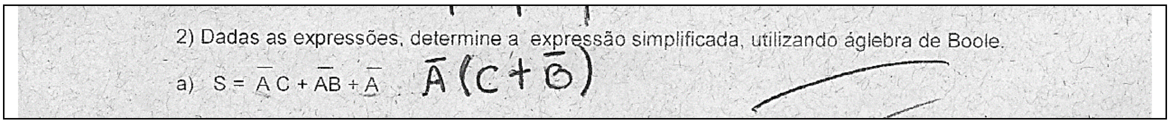
c) Análise da atividade do item 1.3 do segundo bloco de atividades.

Simplificação de expressões pela álgebra de Boole $S = \bar{x}.y + \bar{x} + \bar{x}.z$.

Esta atividade foi feita apenas por 16 alunos, pois os outros cadernos de atividade estavam com erro e foi necessário anular a questão. O desempenho baseado nos 16 alunos foi de 87%, apenas uma dupla não fez a atividade. Durante o conteúdo em sala de aula e em avaliações feitas em turmas dos semestres anteriores, observava-se a dificuldade de vários alunos em conseguir aplicar a propriedade distributiva, principalmente quando o termo em comum estava isolado, como mostram alguns exemplos nas Figuras 76 e 77:

O aluno A, da turma do segundo semestre de 2012, identificou a variável comum aos termos, mas, ao colocar em evidência, desconsiderou o termo que estava isolado (Figura 74).

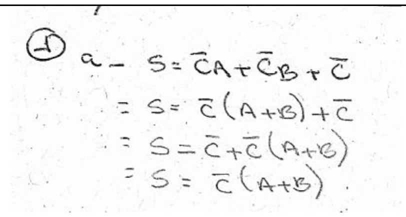
Figura 74: Exemplo 1 de aplicação da propriedade distributiva – Aluno A



Fonte: Arquivo do autor

O aluno B, da turma do primeiro semestre de 2013, resolvendo uma expressão que exige a aplicação da propriedade distributiva, coloca em evidência somente nos dois primeiros termos, mas deixa o terceiro termo isolado. (Figura 75).

Figura 75: Exemplo 2 de aplicação da propriedade distributiva – Aluno A



Fonte: Arquivo do autor

Nesse primeiro semestre de 2013, observou-se também a mesma dificuldade com a distributividade e a evidenciação, sendo proposta uma revisão teórica e com exercícios. A partir do comentário dos alunos, grande parte aprendeu a aplicar essa propriedade, ou colocar em evidência somente expressões do tipo S= 2x + 2y = 2(x+y). A partir dessa constatação, foi feita a revisão em uma aula, com exemplos e exercícios. Alguns alunos faltaram a essa aula e, após a correção das atividades que exigiam essa habilidade, observa-se a importância do ensino desse conteúdo ser passado de forma completa e não somente de forma direta.

Forma completa:

Exemplo 1: $z = (2x + 4y) = 2\left(\frac{2x + 4y}{2}\right) = 2(\frac{2x}{2} + \frac{4y}{2}) = 2(x + 2y)$.

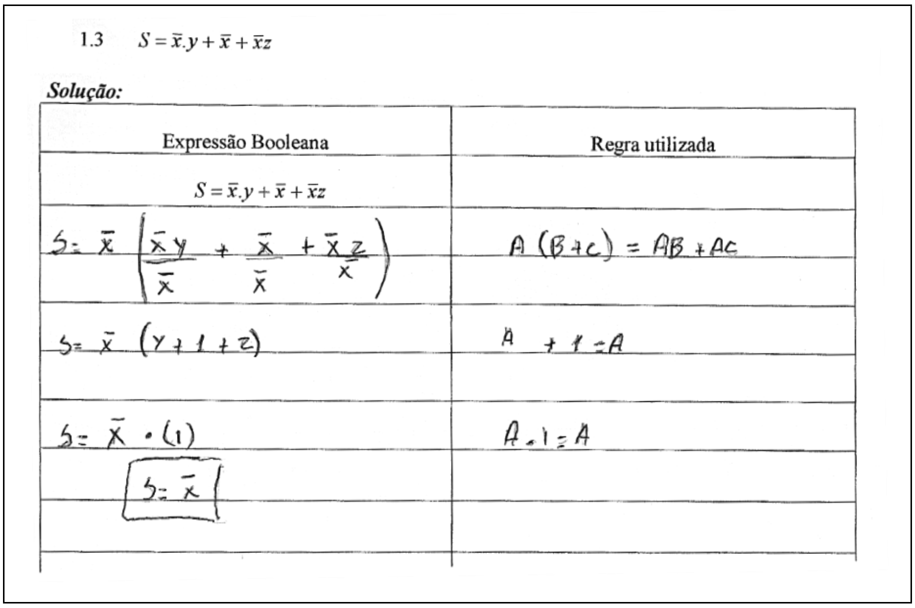
A princípio, os alunos acharam muito complexo, e iniciou-se uma investigação das dificuldades em aplicar esse processo. O primeiro argumento foi que “é mais fácil fazer a resolução de forma direta, como aprenderam”. A partir dessa constatação, foi proposto um exemplo (2), para que fosse feito da forma que eles achassem melhor.

Exemplo 2: $z = (2x + 4y + 2)$.

Praticamente todos resolveram de forma direta e chegaram a $z = 2(x + 2y)$ e perceberam que era o mesmo erro do exemplo 1.

Durante as atividades avaliativas, observou-se que alguns alunos mudaram a forma de resolução da expressão e atingiam o resultado esperado, como pode ser observado na Figura 76.

Figura 76: Segundo Bloco item 1.3 – Dupla 13



1.3 $S=\bar{x}.y+\bar{x}+\bar{x}z$

Solução:

Expressão Booleana	Regra utilizada
$S=\bar{x}.y+\bar{x}+\bar{x}z$	
$S=\bar{x}\left(\frac{\bar{x}y}{\bar{x}}+\frac{\bar{x}}{\bar{x}}+\frac{\bar{x}z}{\bar{x}}\right)$	$A(B+C)=AB+AC$
$S=\bar{x}(y+1+z)$	$A+1=A$
$S=\bar{x}\cdot(1)$	$A.1=A$
$\boxed{S=\bar{x}}$	

Fonte: Caderno de atividades

Outros, apesar de fazerem da forma direta, compreenderam a resolução através do cálculo mental e também chegaram ao resultado.

d) Análise da atividade do item 2.1 do segundo bloco.

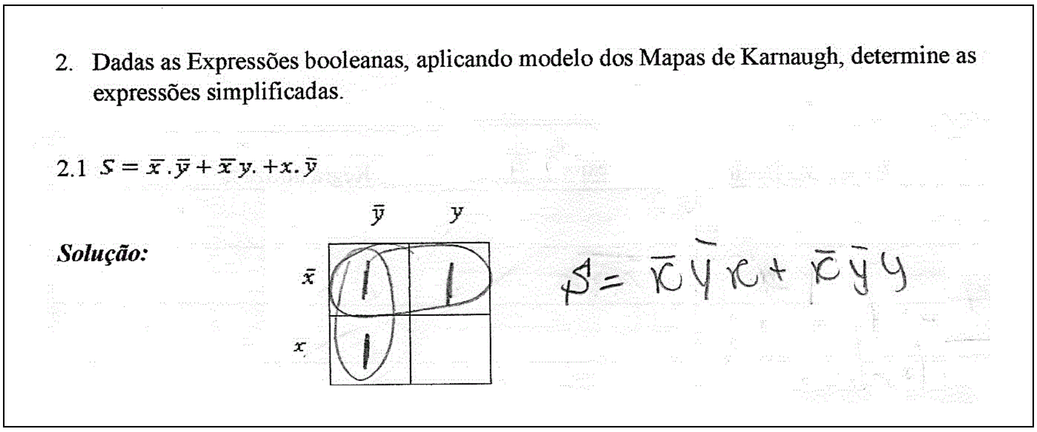
Simplificação de expressões pelos mapas de Karnaugh de 2 variáveis.

Dadas as expressões booleanas, aplicando o modelo dos Mapas de Karnaugh, determine as expressões simplificadas, conforme as Figuras 79, 80 e 81.

$$S = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}\,y. + x.\bar{y}$$

Nestas atividades em que é proposto ao aluno simplificar a expressão de duas variáveis, utilizando o Mapa de Karnaugh, obteve-se um desempenho de 81%. Apenas 4 duplas não atingiram o resultado esperado. A Figura 77 apresenta um resultado em que a distribuição da expressão foi correta, mas a extração da expressão simplificada, não.

Figura 77: Segundo Bloco - item 2.1 – Dupla 15



2. Dadas as Expressões booleanas, aplicando modelo dos Mapas de Karnaugh, determine as expressões simplificadas.

2.1 $S = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}y. + x.\bar{y}$

Solução:

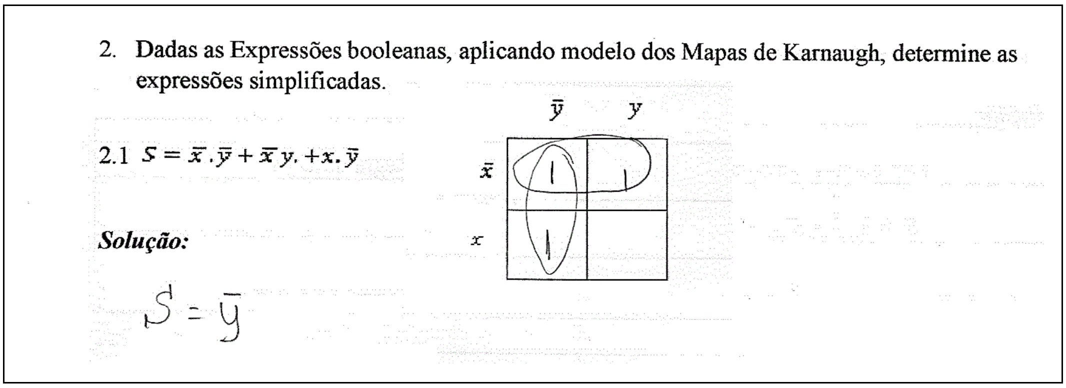
	$\bar{y}$	y
$\bar{x}$	1	1
x	1	

$S = \bar{x}\bar{y}x + \bar{x}\bar{y}y$

Fonte: Caderno de atividades

As duplas de números 2, 3, 14 e 15 compreenderam bem o início do processo, que é a representação da expressão booleana no mapa, mas não assimilou o processo de extrair a expressão a partir do mapa. Observa-se que a dupla também procede da mesma maneira no item seguinte, o mapa de 3 variáveis, demonstrando não ter compreendido o método. Mas, para o mapa de 4 variáveis, consegue concluir todo o processo (Figura 78).

Figura 78: Segundo Bloco - item 2.1 – Dupla 3



2. Dadas as Expressões booleanas, aplicando modelo dos Mapas de Karnaugh, determine as expressões simplificadas.

2.1 $S = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}y. + x.\bar{y}$

Solução:

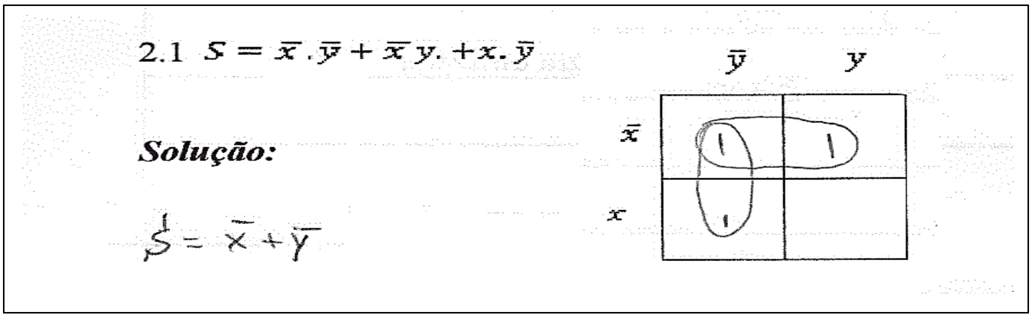
	$\bar{y}$	y
$\bar{x}$	1	1
x	1	

$S = \bar{y}$

Fonte: Caderno de atividades

81% dos alunos chegaram à expressão simplificada equivalente com facilidade, conforme a Figura 79.

Figura 79: Segundo Bloco - item 2.1 – Dupla 5



Fonte: Caderno de atividades

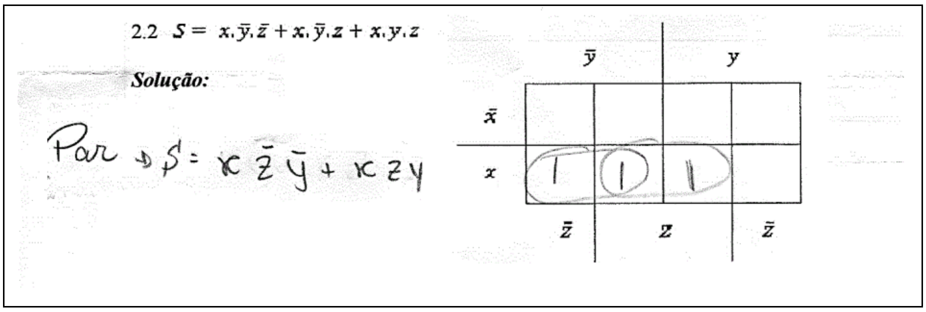
e) Simplificação de expressões pelos mapas de Karnaugh de 3 variáveis.

$$S = x.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.y.z$$

Na expressão de três variáveis, observou-se que obtiveram o menor desempenho, todos os alunos chegaram à representação da expressão no mapa corretamente, mas somente 66% dos alunos conseguiram gerar a expressão simplificada, após a representação da expressão original no mapa.

A Figura 80 mostra um exemplo da expressão representada no mapa corretamente, mas a expressão gerada está incorreta.

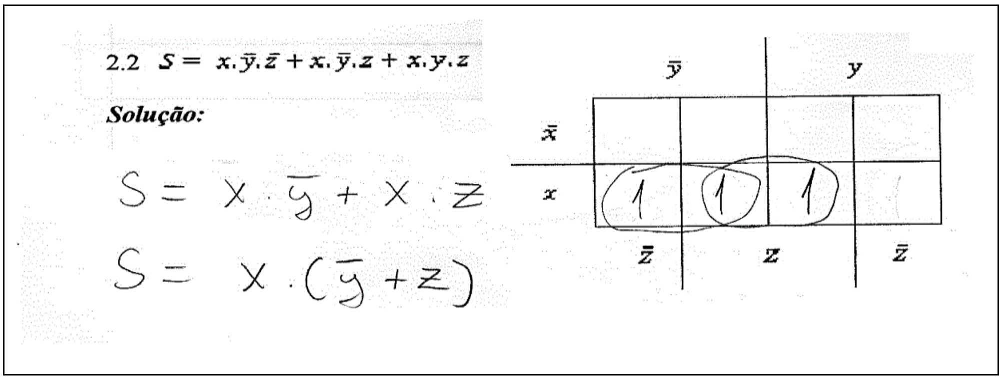
Figura 80: Segundo Bloco - item 2.2 – Dupla 5



Fonte: Caderno de atividades

A Figura 81 apresenta um exemplo do processo completo da geração da expressão e o complemento, com a aplicação da propriedade distributiva.

Figura 81: Segundo Bloco - item 2.2 – Dupla 1



Fonte: Caderno de atividades

f) Análise do item 2.3 do segundo bloco de atividades.

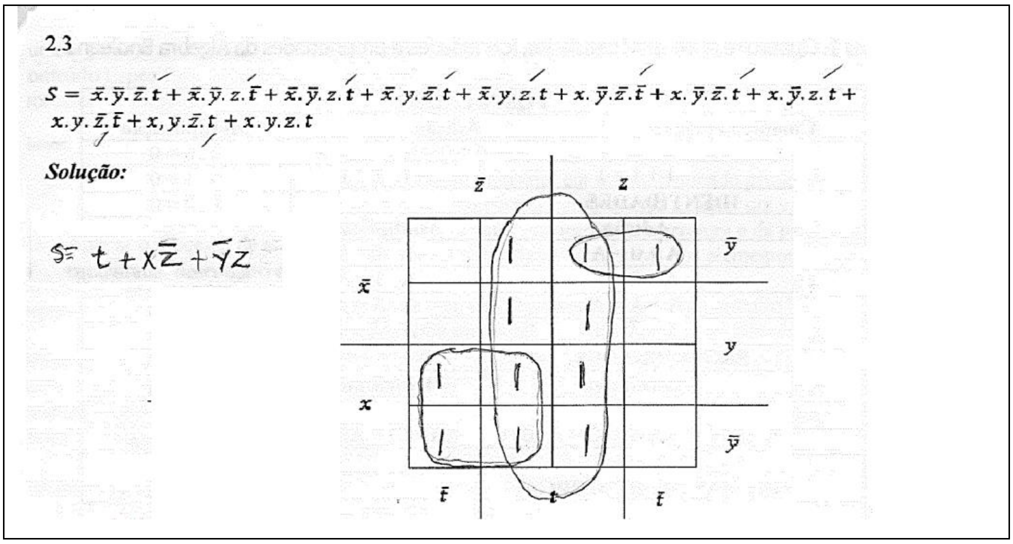
Simplificação de expressões pelos mapas de Karnaugh de 4 variáveis.

Neste item, houve um desempenho de 75% dos alunos concluindo com sucesso a simplificação. E 100% dos alunos obtiveram sucesso na primeira parte da simplificação, que foi a representação da expressão booleana no mapa de quatro variáveis (Figuras 82 e 83).

Concluiu-se ser necessária uma sequência de atividades que permita ao aluno absorver, de maneira gradativa, o método de extração das expressões a partir do mapa de Karnaugh. A visão do Mapa e os agrupamentos que são formados no processo são os principais pontos de dificuldade dos alunos e precisam ser trabalhados com maior detalhamento.

Exemplo da representação correta da expressão e falha na extração da expressão após a definição da oitava, da quadra e do par. A falha ocorreu em não considerar que o par estava contido nas células de $\bar{x}$, conforme a Figura 82.

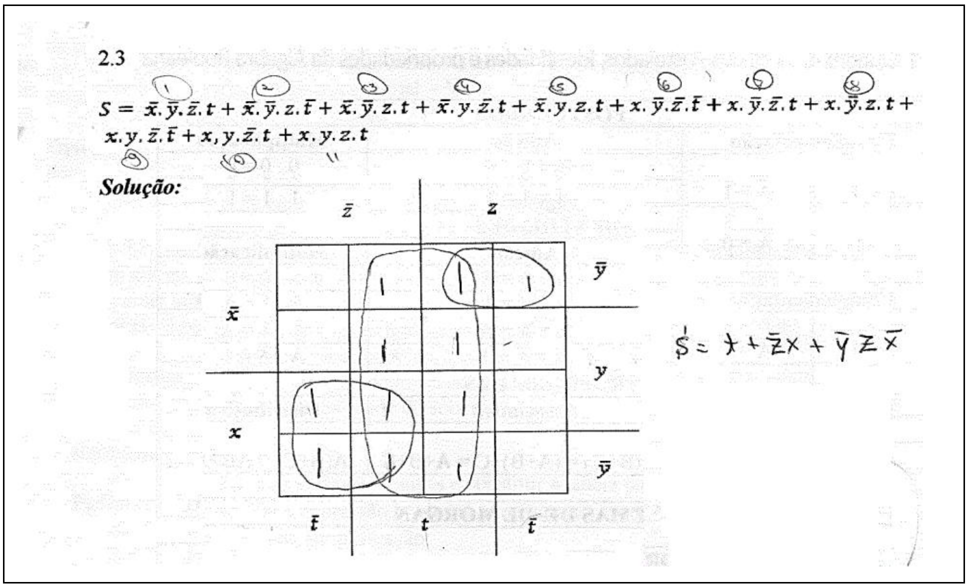
Figura 82: Segundo Bloco - item 2.3 – Dupla 16



Fonte: Caderno de atividades

A Figura 83 apresenta uma simplificação correta da dupla 5.

Figura 83: Segundo Bloco - item 2.3 – Dupla 5



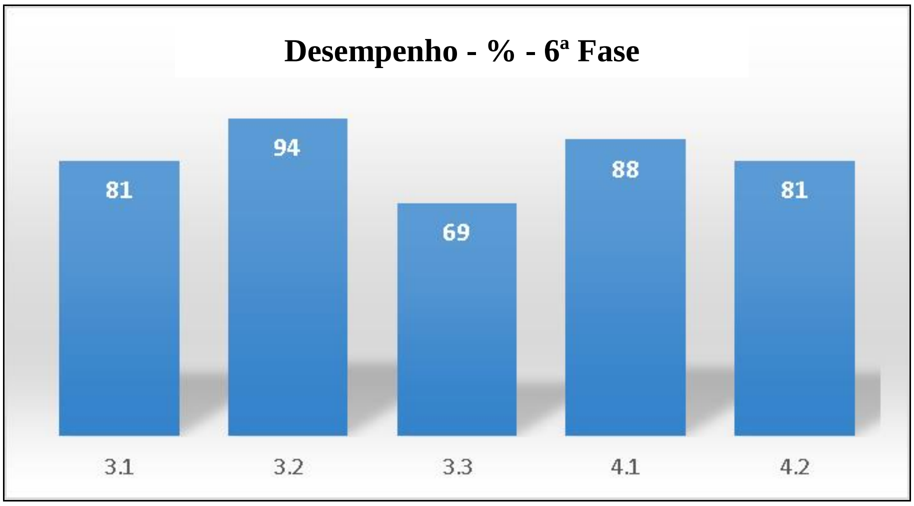
Fonte: Caderno de atividades

4.2.2 Sexta Fase – Determinar o Esquema eletrônico (Modelo objeto)

As atividades que avaliaram os alunos nesta fase estão presentes nos itens: 3.1, 3.2, 3.3, 4.1 e 4.2.

O Gráfico 7 apresenta o desempenho dos alunos nestes itens de avaliação.

Gráfico 7 – Desempenho dos alunos na 6ª Fase do modelo booleano



Fonte: Dados da pesquisa

O Quadro 25 descreve os itens e o desempenho em cada um.

Quadro 25: Descrição dos itens da 6ª Fase do modelo

ITENS	Descrição	Desempenho
3.1	Circuito Lógico a partir da expressão booleana	81%
3.2	Circuito Lógico a partir da expressão booleana	94%
3.3	Circuito Lógico a partir da expressão booleana	69%
4.1	Expressão Booleana a partir do circuito lógico	88%
4.2	Expressão Booleana a partir do circuito lógico	81%

Fonte: Dados da pesquisa

4.2.3 Proposta

A partir de um estudo teórico em sala de aula e de exercícios de fixação em sala e pelo acesso ao Ambiente Virtual de Aprendizagem de Lógica Matemática, o aluno irá mostrar os conhecimentos adquiridos no processo da construção de diagramas de circuitos eletrônicos a partir de expressões booleanas.

São propostas também duas questões que utilizam o processo inverso, determinar a expressão booleana a partir de um circuito eletrônico digital.

4.2.4 Objetivo

Explorar a habilidade do aluno em projetar o diagrama esquemático de um circuito eletrônico digital, a partir da expressão booleana, habilidade que irá ser importante no momento de aplicar o modelamento da situação real apresentada.

4.2.5 Descrição

Nesta fase, iremos explorar a habilidade de construção do diagrama esquemático de um circuito digital a partir da expressão booleana (itens 3.1, 3.2 e 3.3), e o processo inverso, determinar a expressão booleana a partir do circuito eletrônico dado (itens 4.1 e 4.2).

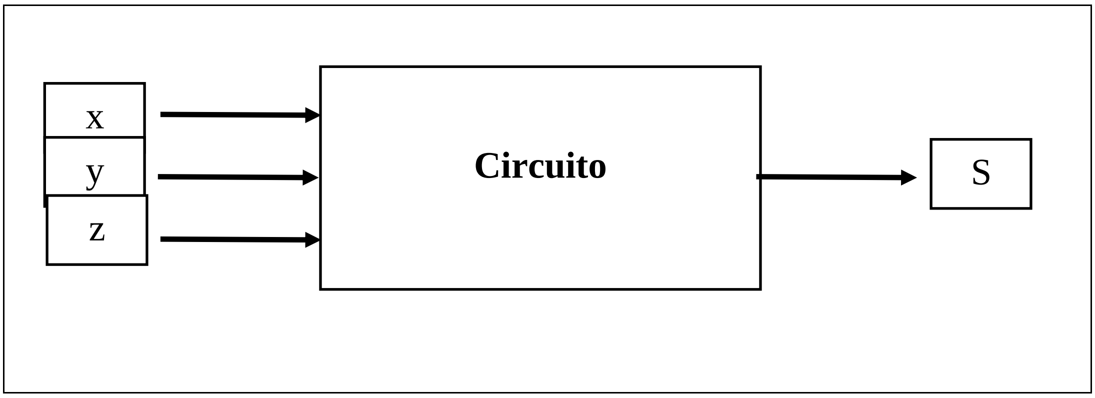
Para resolver os itens 3.1, 3.2, 3.3, são dadas as seguintes orientações:

Dadas as expressões booleanas a seguir, determine os diagramas dos circuitos lógicos que executam a função lógica da expressão, a partir de valores binários inseridos em suas entradas. Esses valores representam eventos de uma situação real.

Considere x, y e z as variáveis de entrada dos circuitos e S a sua saída.

Cada diagrama irá representar a lógica do circuito referente ao diagrama em bloco da Figura 84.

Figura 84: Diagrama em bloco do circuito proposto



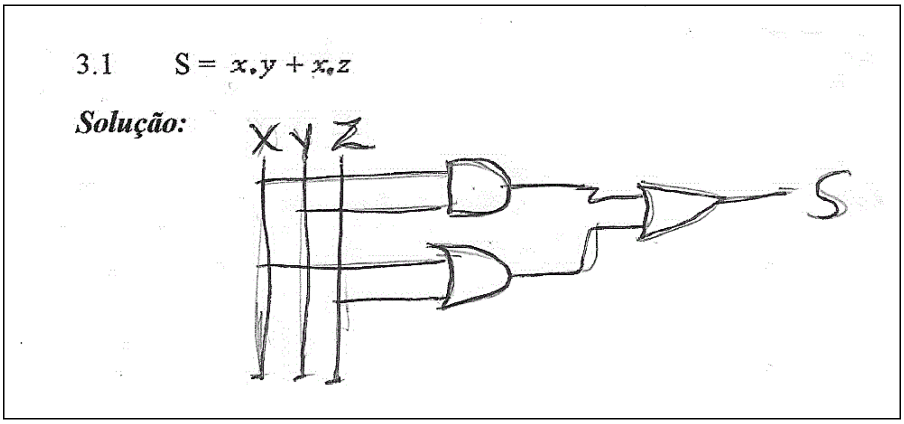
Fonte: Elaborado pelo autor

Para solução dos itens 4.1 e 4.2, é dado o circuito eletrônico digital e, a partir dos conhecimentos dos símbolos e de suas respectivas expressões booleanas, irá montar o diagrama.

a) Análise do item 3.1 – Expressão S = $x.y + x\ z$

O desempenho dos alunos neste item foi de 81%, e 3 duplas não chegaram ao resultado esperado.

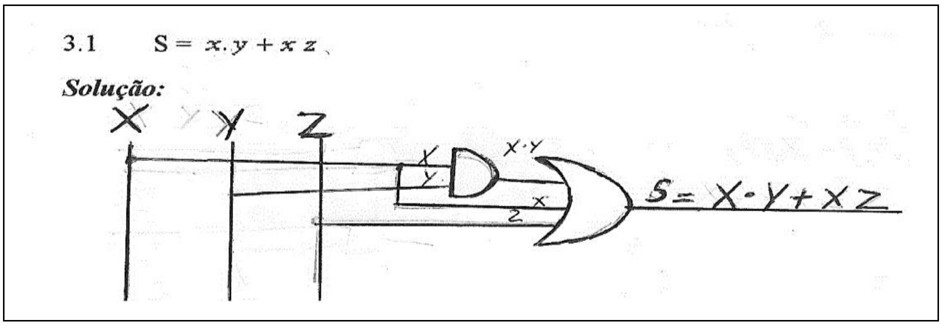
Figura 85: Primeiro Bloco – item 3.1 – Dupla 14



Fonte: Caderno de atividades

Neste exemplo (dupla número 14 – Figura 85), os alunos não associaram a operação AND (x . z) à simbologia equivalente da porta lógica, utilizaram a simbologia da porta OR. Outro ponto a analisar é a tentativa de concluir o circuito utilizando um símbolo não existente para as portas básicas e que não representava a porta lógica OR, evidenciando uma insegurança na associação simbólica das operações. Recorrendo às atividades iniciais do primeiro bloco de atividades, observa-se que esses alunos (dupla 14) tiveram habilidade em relacionar corretamente a função à tabela-verdade, o símbolo à porta lógica e à sua expressão booleana, mas, quando foi apresentada uma expressão com mais de uma operação, houve confusão e, como consequência, a não identificação dos símbolos. Recorrendo às duas próximas atividades, itens 3.2 e 3.3, percebe-se que a dupla completou corretamente os circuitos, não tendo dificuldades.

Figura 86: Primeiro Bloco – item 3.1 – Dupla 1

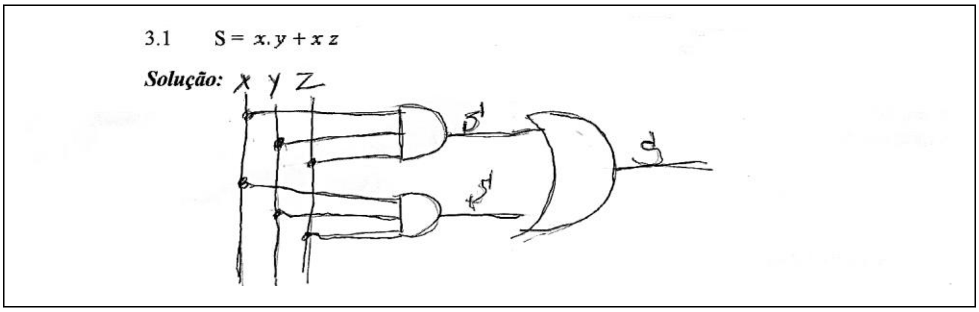


Fonte: Caderno de atividades

A dupla número 1 (Figura 86) representou corretamente os símbolos relativos à expressão AND (x . y), a porta OR(+), mas, ao representar (x z), não representou o símbolo da porta lógica. A omissão do sinal de produto (.) leva o aluno a não saber qual símbolo representar, confirmando que a não compreensão de que uma expressão que contém um produto pode ser representada com ou sem o uso do sinal de produto (x.z = xz). Essa mesma dupla apresentou esta dúvida durante a análise do item 5.1 quarta fase. Confirma-se este diagnóstico, observando-se nas questões dos itens 3.2 e 3.3 que exploram o mesmo conteúdo: o aluno concluiu corretamente a atividade, pois as expressões não tinham todos os sinais representados.

Na Figura 88, observa-se que a dupla de número 10 identificou corretamente os símbolos, mas apresenta a dificuldade de associar o diagrama em blocos com os componentes dos circuitos, utilizando portas AND de três entradas, apesar de a expressão mostrar serem necessárias somente portas de duas entradas, uma representando x . y e outra x . z.

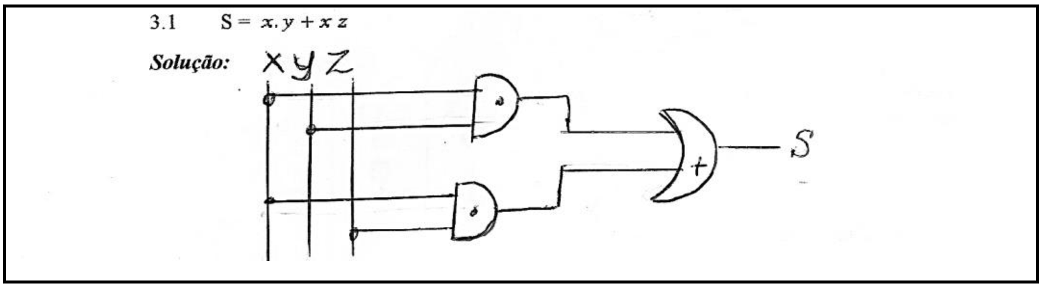
Figura 87: Primeiro Bloco – item 3.1 – Dupla 10



Fonte: Caderno de atividades

A Figura 88 mostra a resposta esperada.

Figura 88: Primeiro Bloco – item 3.1 – Dupla 3

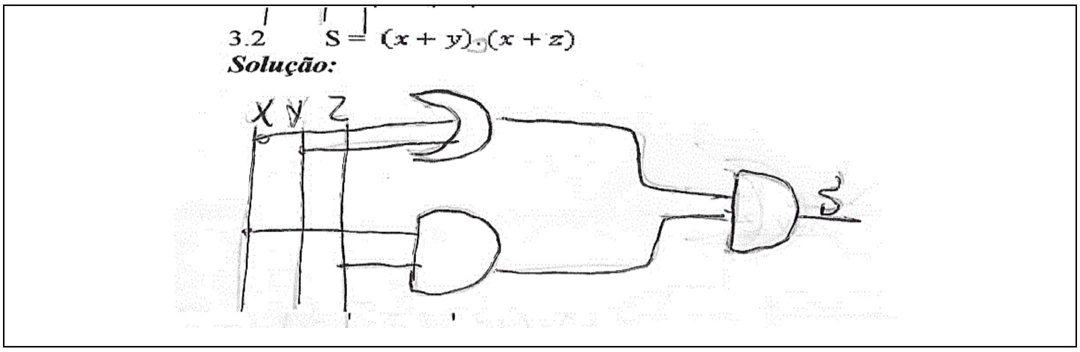


Fonte: Caderno de atividades

b) **Analise do item 3.2 - Expressão S =** $(x + y).(x + z)$

Neste item, 94% dos alunos conseguiram construir o diagrama esquemático eletrônico com sucesso, somente uma dupla não alcançou o resultado correto.

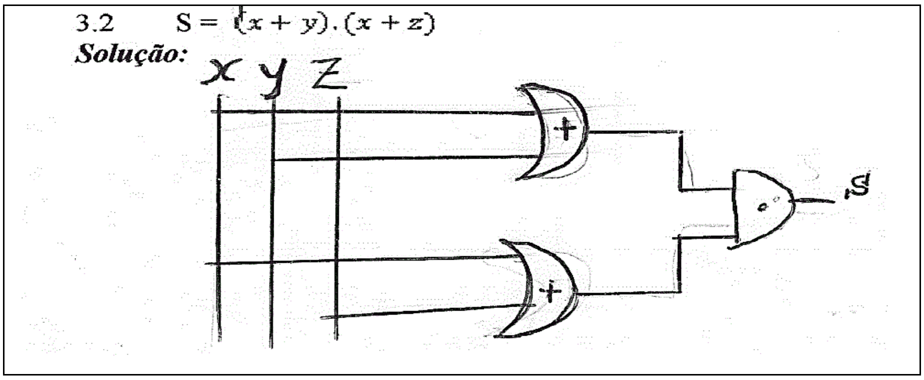
Figura 89: Primeiro Bloco – item 3.2 – Dupla 16



Fonte: Caderno de atividades

Na Figura 89, o resultado encontrado pela dupla de número 16, em que não observou que a operação nos dois termos deveria ter portas com símbolos iguais, representando o símbolo errado para o termo a expressão (x + z), deixa clara a insegurança em relacionar operação e símbolo. Recorrendo às questões dos itens iniciais, com as quais avaliamos individualmente as relações entre símbolos e expressões, a dupla de alunos obteve êxito em todas elas, deixando clara na análise a necessidade de desenvolvimento na visão da expressão com mais de um termo em relação à representação dos símbolos das portas lógicas.

Figura 90: Primeiro Bloco – item 3.2 – Dupla 3

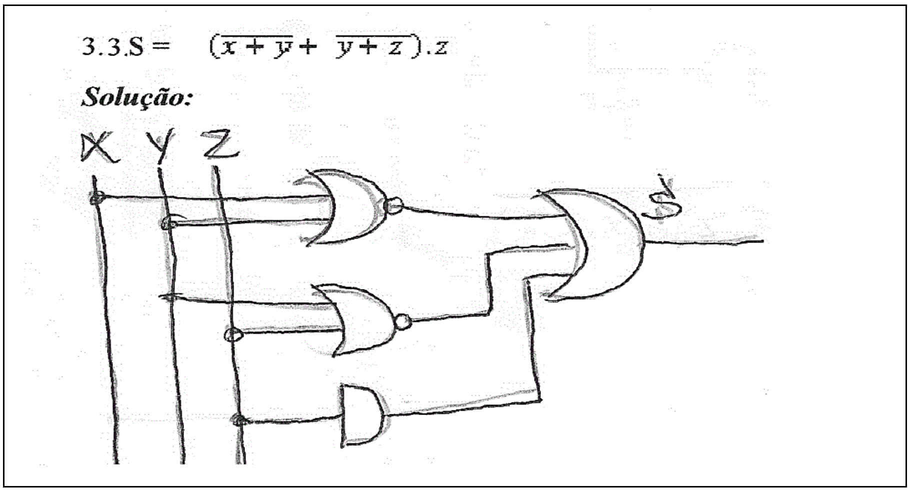


Fonte: Caderno de atividades

c) Análise do item 3.3 – Expressão S = $(\overline{x+y}+\overline{y+z}).z$. Figura 91.

Nesta expressão, foi explorada a habilidade do aluno em trabalhar com a negação de uma expressão ou de termos da expressão, e com um termo formado por apenas uma variável, fazendo a operação AND com o restante da expressão. Esperava-se que os alunos tivessem dificuldade em trabalhar com a negação, mas todos acertaram. Nessa atividade, 5 duplas (10 alunos) não obtiveram êxito na conclusão. Uma dupla deixou a questão em branco e as demais tiveram dificuldade em representar a função AND de uma variável com o resultado de um termo da expressão, como mostra a Figura 91.

Figura 91: Primeiro Bloco – item 3.3 – Dupla 12

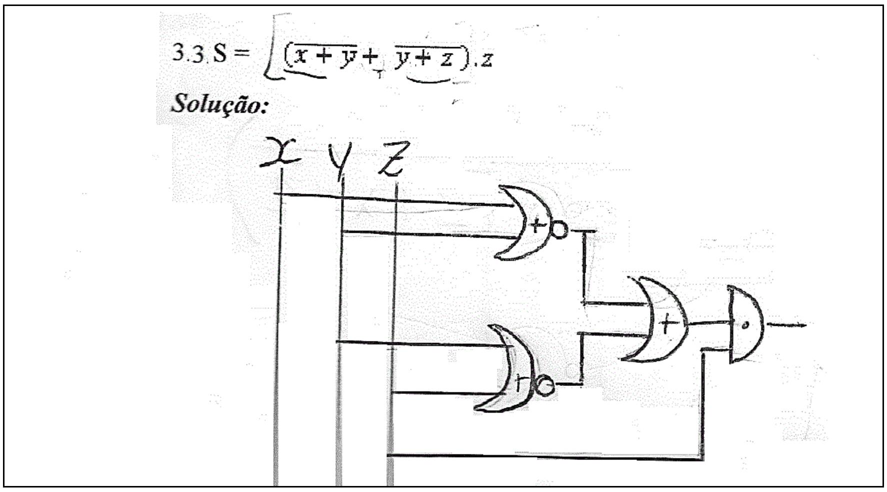


Fonte: Caderno de atividades

Nesse caso, o diagnóstico é deficiência na visão sistêmica do esquema elétrico. Há a necessidade de o aluno perceber que cada operação é uma função que está sendo executada e que, para cada função, temos uma porta que a representa.

A Figura 92 mostra o esquema que representa essa expressão corretamente.

Figura 92: Primeiro Bloco – item 3.3 – Dupla 3



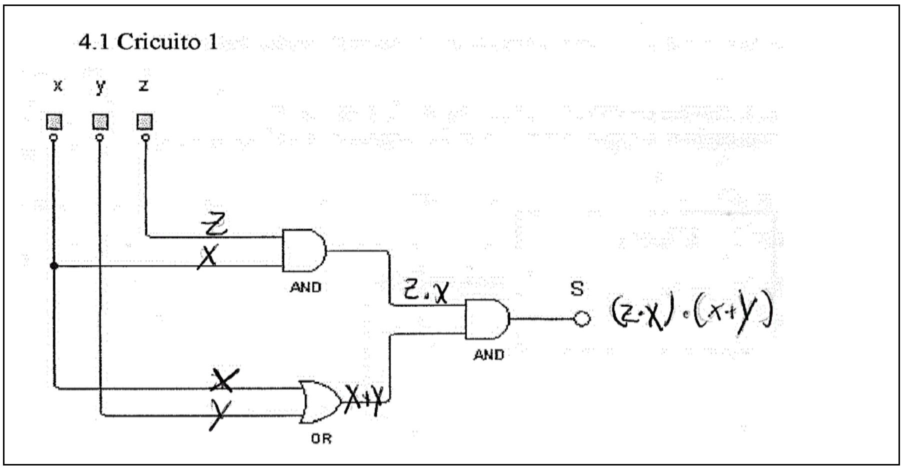
Fonte: Caderno de atividades

d) Análise do item 4.1 – Circuito 1.

Neste item, 88% dos alunos tiveram sucesso na determinação da expressão booleana que o circuito representa e duas das duplas não chegaram à expressão correta.

Para obter sucesso nessa atividade, os alunos deveriam construir a expressão passo a passo, o que levaria a um resultado correto, bastando para isso conhecer a expressão de cada símbolo, conforme é mostrado no desenvolvimento da dupla de número 16, na Figura 93.

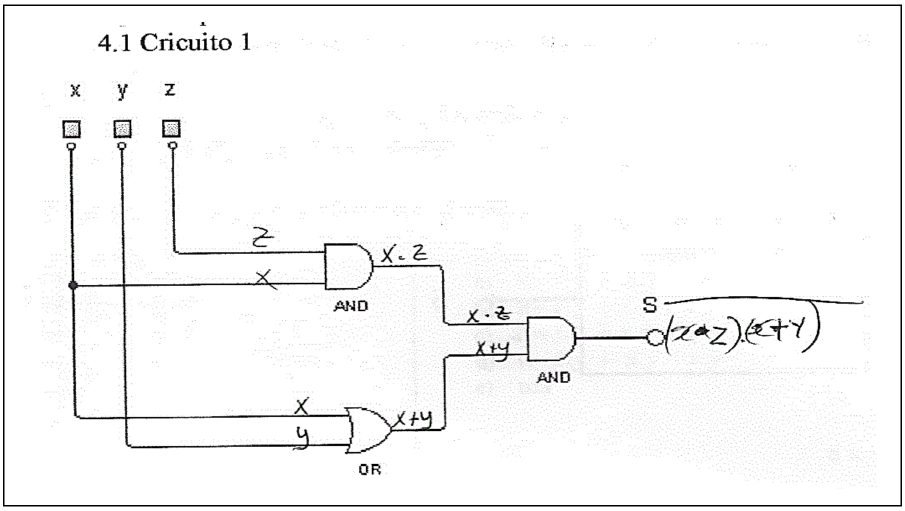
Figura 93– Primeiro Bloco – item 4.1 – Dupla 3



Fonte: Caderno de atividades

Na Figura 94, a dupla de número 2 segue o processo passo a passo e somente se engana no resultado final em que considera o último símbolo da saída como uma função NOR, considerando o complemento ou negação do resultado final.

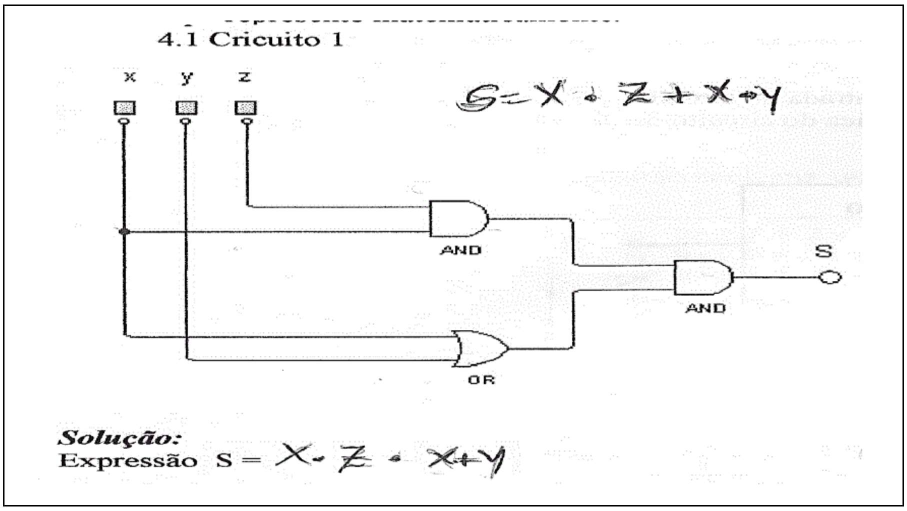
Figura 94: Primeiro Bloco – item 4.1 – Dupla 2



Fonte: Caderno de atividades

Na Figura 95, apresenta-se a expressão resultante da dupla de número 1, na qual se pode observar que seguiu o processo passo a passo, mas, no resultado final, não representa na expressão os termos resultantes de cada porta, o que deixa a expressão sem a estrutura correta, não colocando os parênteses para delimitar cada termo.

Figura 95: Primeiro Bloco – item 4.1 – Dupla 2

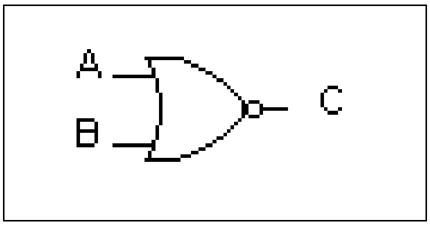


Fonte: Caderno de atividades

e) Análise do item 4.2 - Circuito 2

Neste item, 81% concluíram com êxito a atividade e 3 duplas não atingiram o resultado esperado. Duas das duplas (2 e 7) não aplicaram corretamente a negação representada no circuito pelo símbolo da expressão NOR (Figura 96).

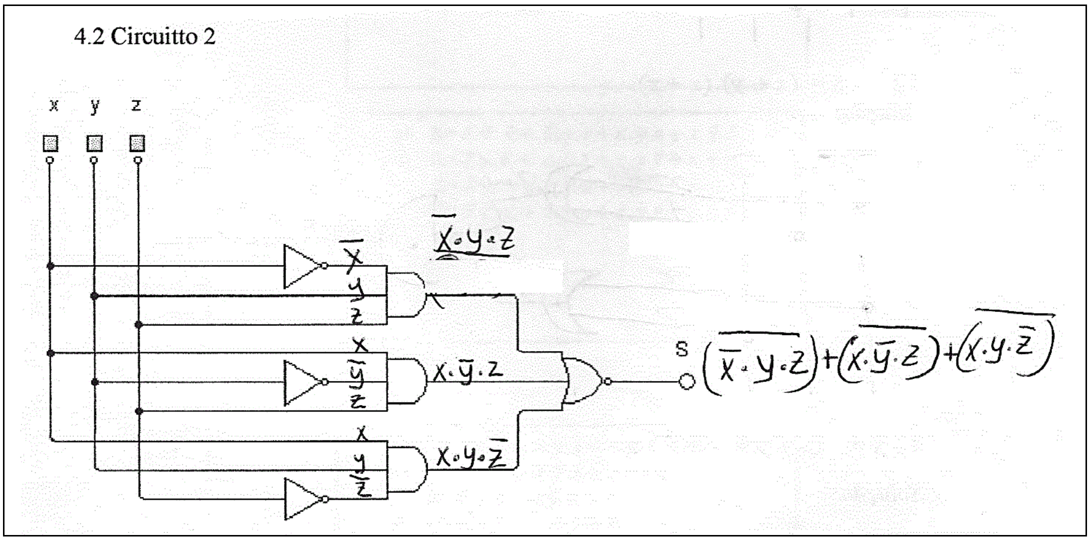
Figura 96: Símbolo da porta lógica NOR



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 97 apresenta o resultado obtido pela dupla de número 2, que mostrou não ter observado a representação correta da negação do resultado final, que é simbolizada, neste caso, pela porta NOR ao final do circuito, conforme Augustus De Morgan mostra em seu teorema, "o complemento da soma é diferente da soma dos complementos".

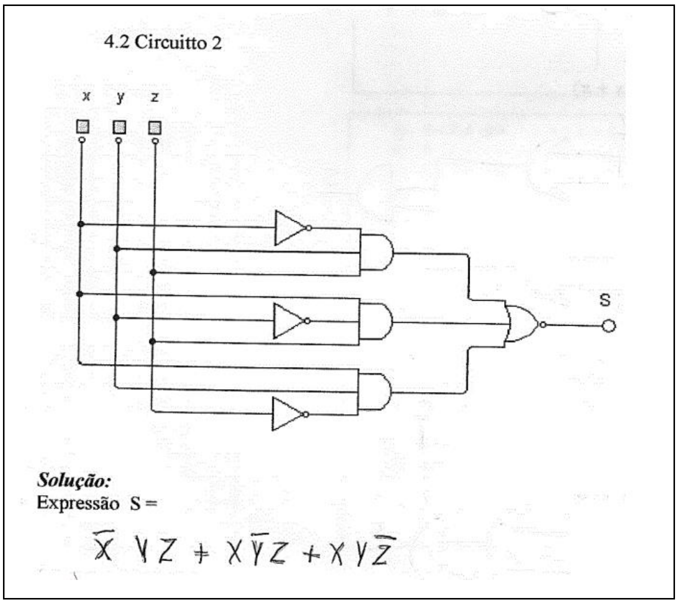
Figura 97: Primeiro Bloco – item 4.2 – Dupla 2



Fonte: Caderno de atividades

A Figura 98 contém o resultado da dupla de número 7, que definiu corretamente a estrutura da expressão, mas ignorou o símbolo da negação da porta NOR na saída do circuito. A dupla número 16 chegou ao mesmo resultado.

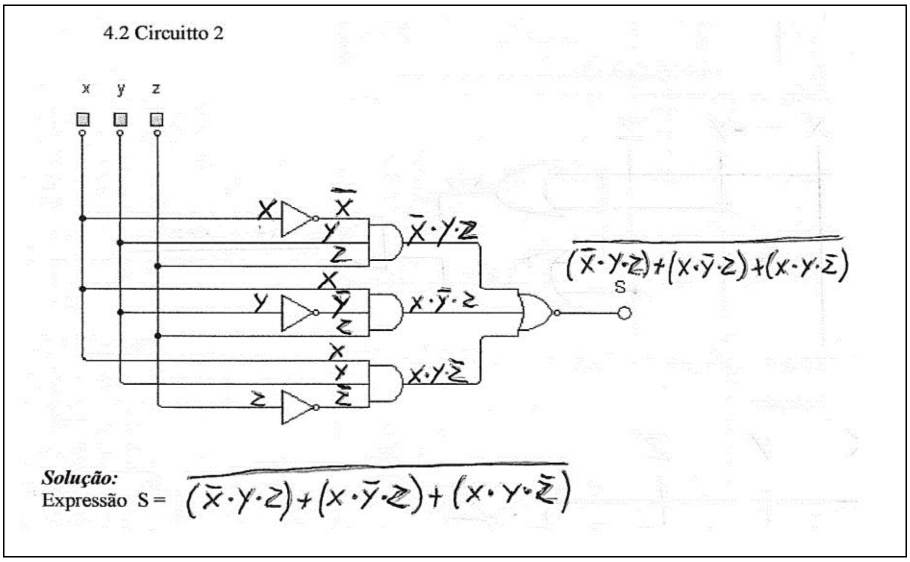
Figura 98: Primeiro Bloco – item 4.2 – Dupla 7



Fonte: Caderno de atividades

A Figura 99 apresenta o resultado esperado (Dupla 1).

Figura 99: Primeiro Bloco – item 4.2 – Dupla 1



Fonte: Caderno de atividades

4.3 Terceiro bloco de atividades – Aplicação, gerando circuito

Neste bloco, foram propostas duas atividades.

1) **Problema – Situação real 1**
2) **Problema – Situação real 2**

Nesses dois problemas, os alunos devem aplicar o modelo booleano completo, e o resultado final deve um esquema eletrônico digital que atenda a cada situação.

4.3.1 Proposta

A partir de uma situação proposta real, o aluno irá aplicar o modelo booleano estudado até aqui e, através dos conhecimentos adquiridos, irá projetar um circuito eletrônico digital simplificado, capaz de executar o que é solicitado no problema para o controle automatizado.

4.3.2 Objetivo

Aplicar corretamente o modelo booleano completo, em todas as fases vistas até aqui, simplificar a expressão matemática que representa o circuito pelos dois métodos apresentados aqui, Álgebra de Boole e mapas de Karnaugh, comparar a eficiência de cada método e, por fim, avaliar o método mais eficiente ou mais prático, indicando os motivos.

4.3.3 Descrição

Em cada situação, aplicar os seguintes passos:

1) Abstrair as variáveis lógicas e construir a tabela-verdade;
2) Determinar a expressão booleana e o diagrama esquemático do circuito, sem aplicar o processo de simplificação;
3) Aplicar o processo de simplificação por álgebra de Booleana, expressão booleana encontrada, desenhar o diagrama esquemático do circuito simplificado e definir qual seria mais econômico.
4) Aplicar o modelo de simplificação pelo método mapas de Karnaugh, para simplificar a expressão booleana, e observar se chega à mesma expressão simplificada pela álgebra booleana. Se não, desenhar o diagrama esquemático da nova expressão.
5) Com qual dos dois métodos você teve mais facilidade em aplicar?
6) Por quê?

A avaliação do desempenho dos alunos nas duas situações (problemas) foi feita em quatro itens:

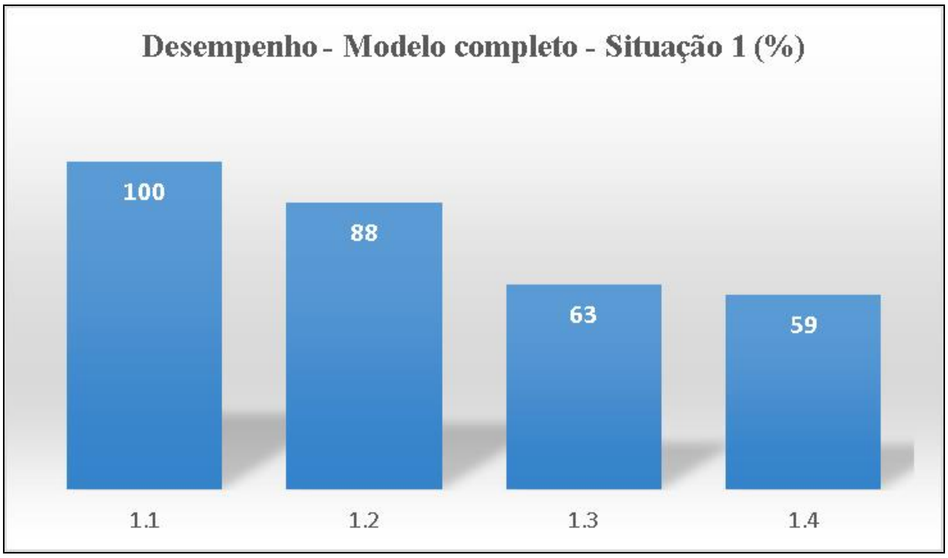
a) Abstrair as variáveis lógicas e construir a tabela verdade;
b) Determinar a expressão booleana e o esquema eletrônico do circuito sem a simplificação;
c) Aplicar o processo de simplificação por álgebra booleana na expressão, desenhar o esquema eletrônico do circuito, e definir qual é mais econômico;
d) Aplicar o processo de simplificação pelos mapas de Karnaugh na expressão não simplificada, observar se chegou à mesma expressão simplificada no item anterior. Se não, desenhar o circuito da nova expressão.

Situação real 1 - Análise da Situação-Problema 1

Um sistema de controle industrial em um determinado processo químico requer a ativação de um alarme sempre que a temperatura do processo exceder um valor máximo ou que a pressão ultrapassar um certo limite. O valor máximo da temperatura e da pressão é definido pelo responsável pelo processo, a partir das características dos elementos envolvidos no processo. **Orientações:** Aplicando o modelo booleano, projetar um circuito lógico eletrônico, determinando seu diagrama esquemático, que irá monitorar através de sinais recebidos por sensores acoplados ao recipiente do material, e, através da lógica construída, irá externar um alarme de acordo com a necessidade do solicitante.

Desempenho dos alunos na aplicação do modelo booleano completo.

Gráfico 8 – Desempenho dos alunos no modelamento da situação 1



Fonte: Dados da pesquisa

Observa-se neste gráfico uma queda a cada item. Essa tendência se deve ao fato de que cada dupla de alunos que deixa de concluir a etapa anterior leva a um percentual menor naquela etapa, concluindo que 59% dominaram todo o processo de modelamento matemático da situação apresentada, aplicando o Modelo Booleano e os métodos de simplificação, por Álgebra de Boole e pelos Mapas de Karnaugh.

1) Abstrair as variáveis lógicas e construir a tabela verdade.

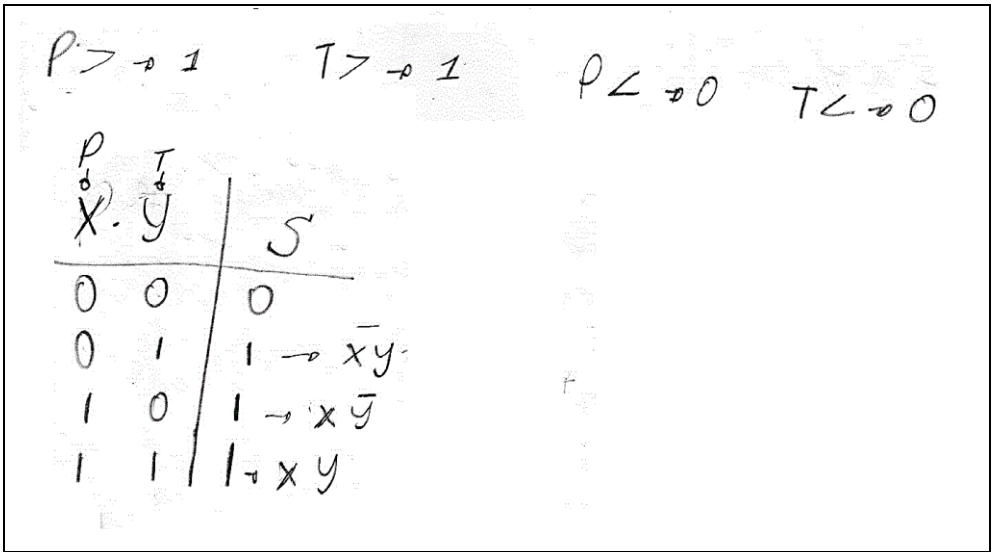
Neste item, a totalidade dos alunos desenvolveu bem a técnica de construir a tabela-verdade que representa a situação proposta, levantando as variáveis, definindo os resultados da tabela, conforme a ocorrência dos eventos.

No sistema de controle industrial, foram extraídos alguns dados importantes para a definição das variáveis de entrada e da saída da tabela-verdade:

- ✓ Identificaram os eventos, temperatura e pressão acima, igual ou abaixo do definido pelo responsável pelo processo.
- ✓ Alguns alunos definiram a Temperatura como “A” e a Pressão como “P”, outros chamaram a Temperatura como “T” e a Pressão como “P”, mas a saída, todos definiram como “S”.
- ✓ Definiram as possibilidades da temperatura e da pressão estarem abaixo, igual ou acima do especificado pelo responsável e montaram a lógica das situações utilizando T = 1, se exceder o valor máximo da temperatura, P = 1 se a pressão ultrapassar o limite definido. A dupla de número 7 utilizou $P > \rightarrow 1$, $T > \rightarrow 1$, $P < \rightarrow 0$, $T < \rightarrow 0$.
- ✓ Chegaram a uma tabela com quatro linhas, para representar as possíveis situações das duas variáveis, temperatura e pressão. A partir daí, definiram a saída “S”, que seria a responsável por acionar o alarme. Se os eventos definidos indicassem na tabela o valor “1” para temperatura ou “1” para pressão, a saída seria S = 1, se T e P fossem igual a “0”, a saída seria S = 0.

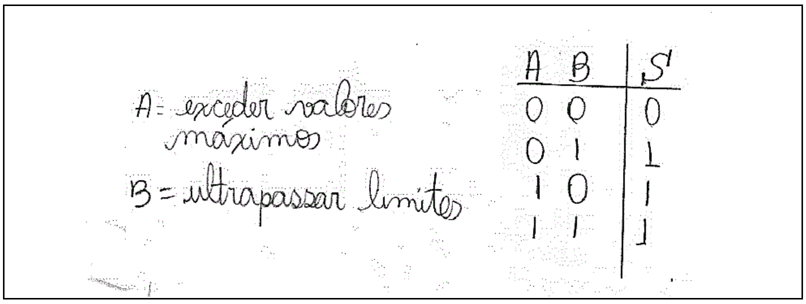
Alguns exemplos da construção da tabela-verdade podem ser vistos nas Figuras 100 e 101:

Figura 100: Terceiro Bloco – item 8.1.1 – Dupla 7



Fonte: Caderno de atividades

Figura 101 – Terceiro Bloco – item 8.1.1 – Dupla 3

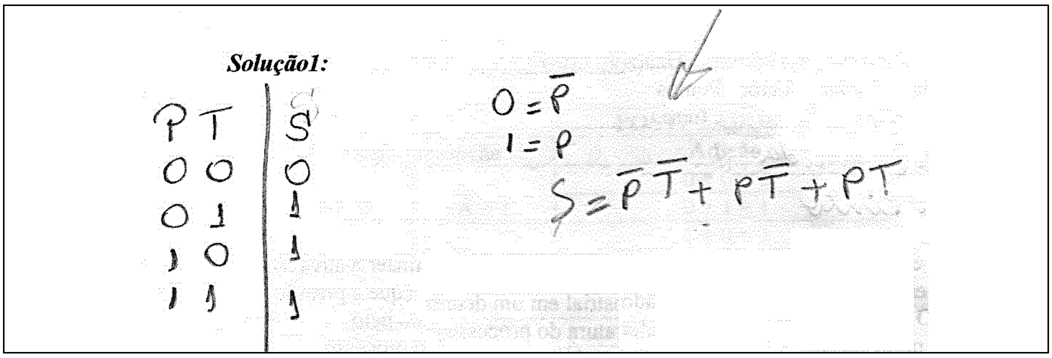


Fonte: Caderno de atividades

2) Determinar a expressão booleana e o esquema eletrônico do circuito sem a simplificação.

Neste item de avaliação, o desempenho atingiu a 94% dos alunos que conseguiram determinar a expressão booleana. Apenas uma dupla não chegou à expressão correta (dupla 14 – Figura 101). No início da construção da expressão, considerou-se incorretamente a primeira opção (P = 0 e T = 0). Caso seja desenvolvido um circuito com esta expressão, o alarme será acionado quando a pressão e a temperatura estiverem abaixo do especificado, e não acionará o alarme quando a pressão estiver abaixo e a temperatura estiver acima do especificado, colocando em risco o processo químico.

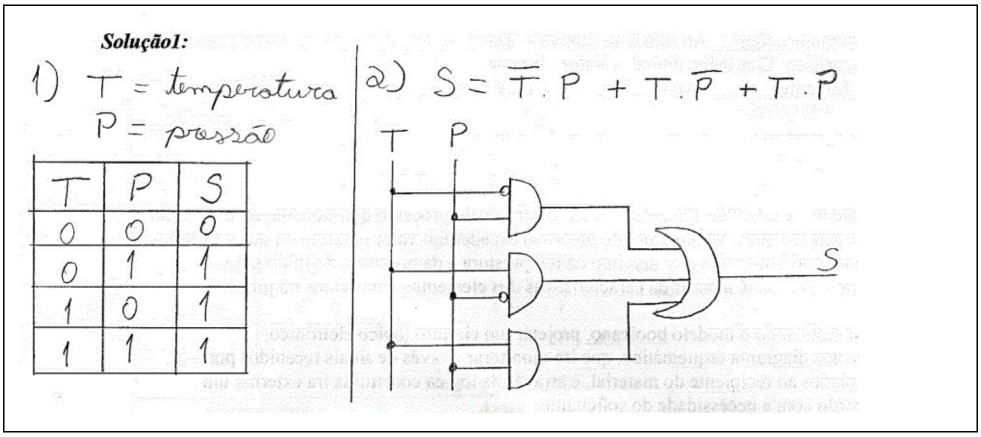
Figura 102: Terceiro Bloco – item 8.1.2 – Dupla 14



Fonte: Caderno de atividades

Os outros alunos chegaram à expressão booleana correta e ao circuito também, conforme exemplo da Figura 103.

Figura 103: Terceiro Bloco – item 8.1.2 – Dupla 1- Determinando a expressão e o circuito



Fonte: Caderno de atividades

3) Aplicar o processo de simplificação por álgebra booleana na expressão, desenhar o esquema eletrônico do circuito e definir qual é mais econômico.

Neste item de avaliação, observa-se que, da etapa de determinação da expressão a partir da tabela-verdade para o processo de simplificação da expressão, tivemos uma redução de alunos que obtiveram sucesso (31%), o que mostra uma dificuldade em aplicação de métodos matemáticos para reduzir a expressão determinada.

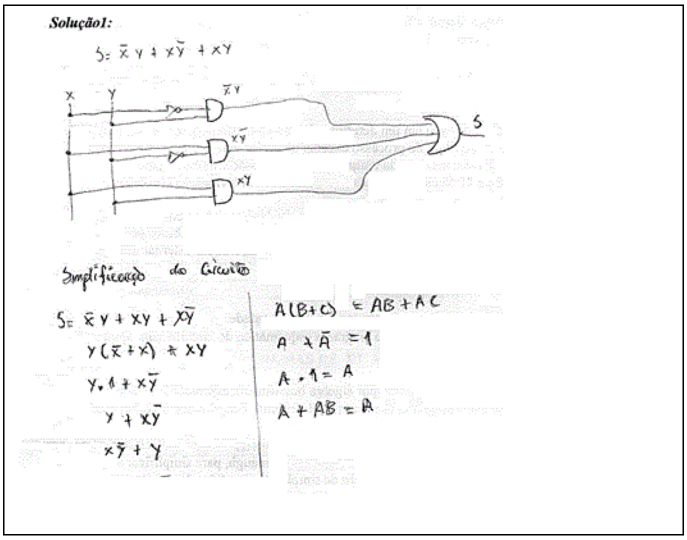
Seis duplas de alunos não chegaram à expressão esperada; das seis, somente duas conseguiram desenvolver a expressão e somente não tiveram sucesso na aplicação da identidade auxiliar da álgebra booleana $A + \bar{A}B = A + B$; as outras quatro duplas não chegaram a iniciar o desenvolvimento do processo, sendo necessários mais estudos do processo de aplicação da identidade.

Pelas Figuras 104 e 105, pode-se observar o momento da aplicação da identidade em que os alunos não obtiveram sucesso e um exemplo de sucesso na aplicação da propriedade.

A Figura 104 apresenta o processo de simplificação da dupla de alunos número 13, em que eles apresentam, do lado direito, as regras aplicadas, propriedade distributiva, a identidade da adição, identidade da multiplicação e a próxima seria a identidade auxiliar $A + \bar{A}B = A + B$, porém se enganaram, aplicando a identidade $A + AB = A$, o que levou a uma expressão não equivalente à expressão inicial.

No AVALM - Ambiente Virtual de Aprendizagem de Lógica Matemática, existem atividades similares, que ajudam o aluno a praticar essas aplicações.

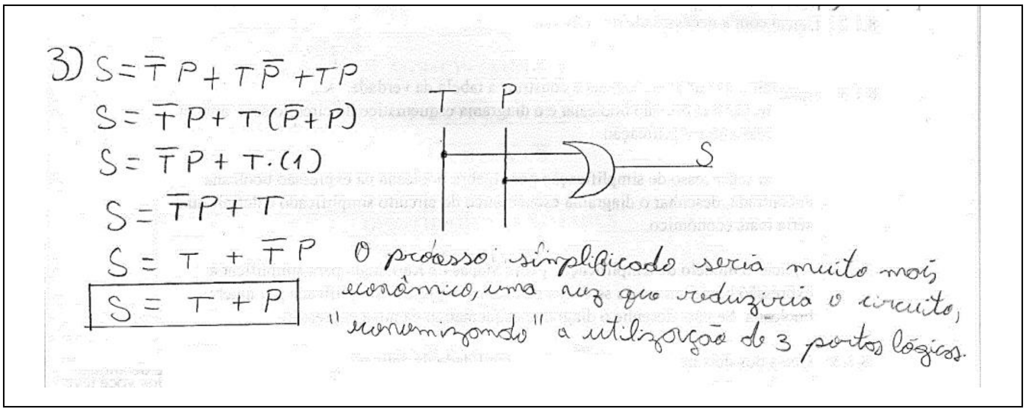
Figura 104: Terceiro Bloco – item 8.1.3 – Dupla 13- Simplificando a expressão



Fonte: Caderno de atividades

A Figura 105 mostra a atividade da dupla de número 1, que concluiu a simplificação corretamente.

Figura 105: Terceiro Bloco – item 8.1.3. – Dupla 1- Simplificando a expressão



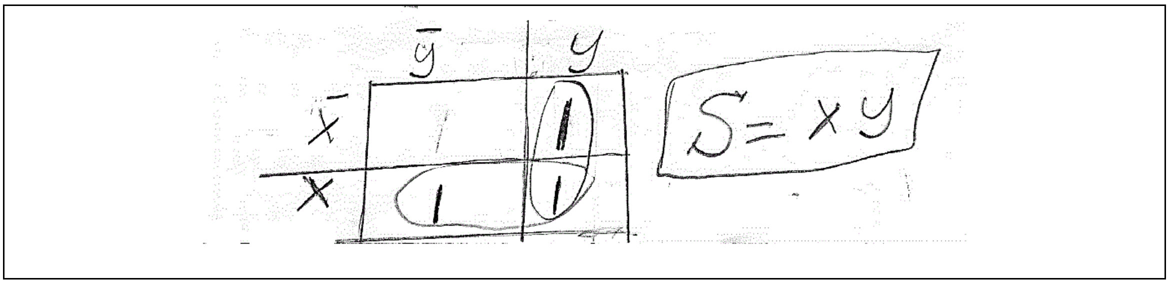
Fonte: Caderno de atividades

4) Aplicar o processo de simplificação pelos mapas de Karnaugh na expressão não simplificada e observar se chegou à mesma expressão simplificada no item anterior. Se não, desenhar o circuito da nova expressão.

Neste item de avaliação, obteve-se um desempenho de 63%, igual ao item anterior da simplificação por álgebra de Boole. Todos os alunos que obtiveram sucesso na álgebra booleana tiveram também sucesso na simplificação pelo método dos Mapas de Karnaugh. Todos os alunos que tiveram dificuldade de iniciar a simplificação por Álgebra de Boole também não tentaram pelo método de Karnaugh. Logo, não foi possível ter resultados em que o aluno assimilou o processo de simplificação pelo método dos Mapas de Karnaugh e não pelo da Álgebra de Boole.

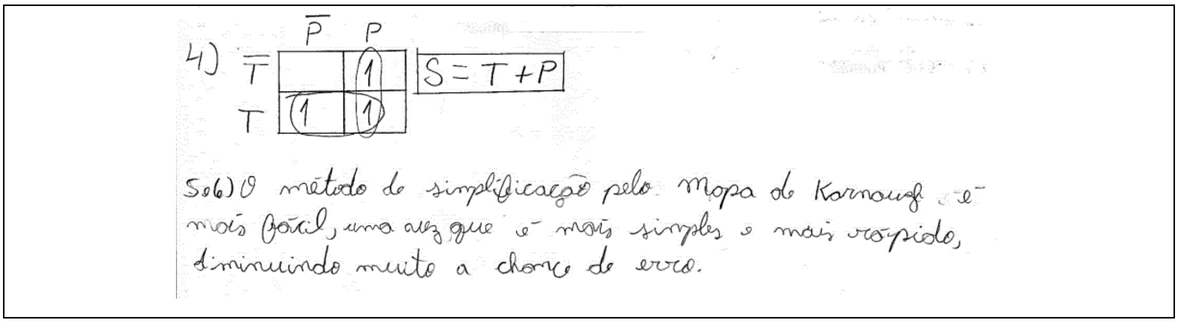
As duas duplas que iniciaram o desenvolvimento pela Álgebra de Boole representaram corretamente a expressão no mapa de Karnaugh, mas extraíram a expressão simplificada incorretamente. O diagnóstico é que repetiram o que tinham encontrado na simplificação por Karnaugh, não se preocupando em extrair a expressão simplificada do mapa. Provavelmente, se trabalhassem no mapa, teriam chegado à expressão correta e até encontrariam o erro cometido no processo anterior (Figura 106).

Figura 106: Terceiro Bloco – item 8.1.4. – Dupla 6- Simplificando a expressão pelo Mapa de Karnaugh



Fonte: Caderno de atividades

Figura 107: Terceiro Bloco – item 8.1.4, 8.1.5, 8.1.6 – Dupla 5- Simplificando a expressão pelo Mapa de Karnaugh



Fonte: Caderno de atividade

A resposta mostrada na Figura 107 conclui corretamente a simplificação e opta pela simplificação de expressões booleanas pelos Mapas de Karnaugh, justificando ser mais simples, mais rápido e diminuindo as possibilidades de erro.

Situação real 2 - Análise da Situação-Problema 2

Em uma máquina copiadora, um sinal de parada S é gerado para interromper a operação da máquina e ativar um indicador luminoso sempre que uma das condições a seguir ocorrer:

- ✓ A bandeja de alimentação de papel estiver vazia;
- ✓ As duas microchaves sensores de papel estiverem acionadas, indicando um atolamento de papel.

A presença de papel na bandeja de alimentação é indicada por um nível Baixo no sinal lógico x.

Cada uma das microchaves produz sinais lógicos (y e z) que irão para o nível Baixo sempre que um papel estiver passando sobre a chave, que é ativada. Projete um circuito que gere uma saída "S" em nível Alto para as condições estabelecidas.

Os alunos devem seguir os mesmos passos do problema anterior, buscando completar o modelamento da situação apresentada.

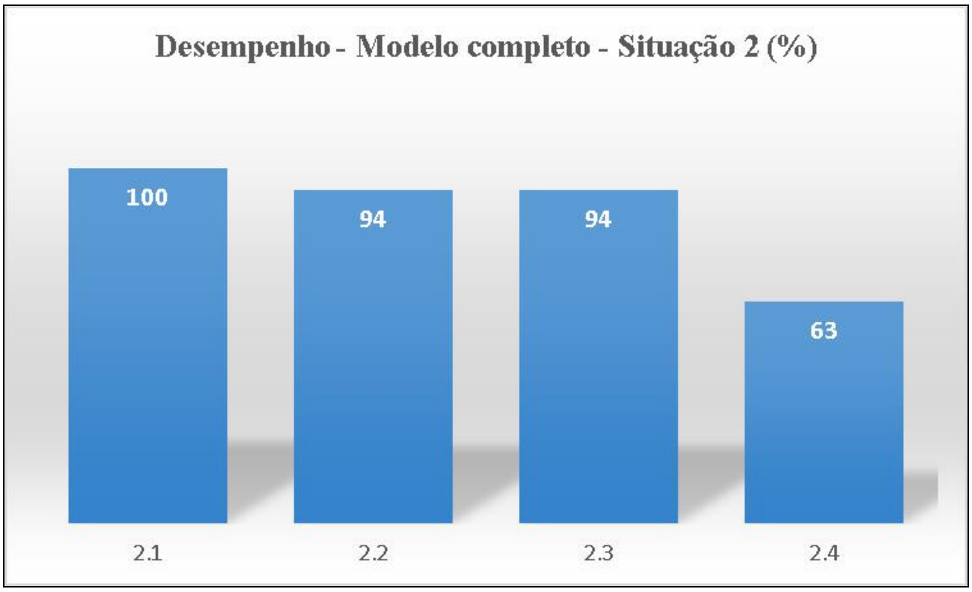
No início das atividades, foi necessário esclarecer a lógica dos sensores, pois fala-se em nível “Alto” e nível “Baixo”, que estava relacionado com o “1” e o “0”, respectivamente.

Bandeja vazia implica em nível lógico “Alto” para o sensor x, caso contrário, em nível “Baixo”.

Atolamento de papel implica em nível lógico “Alto” para microchaves y e z, caso contrário, nível Baixo.

O desempenho dos itens das atividades é apresentado no Gráfico 9.

Gráfico 9: Desempenho dos alunos no modelamento da situação 2



Fonte: Dados da pesquisa

1 Abstrair as variáveis lógicas e construir a tabela-verdade

Nesta atividade, todos os alunos alcançaram o esperado, abstrair as variáveis avaliando os eventos da situação. As variáveis são relacionadas à presença de papel na bandeja de alimentação e ao atolamento de papel em uma máquina copiadora. Como os sensores da passagem de papel pela máquina são duas microchaves, os alunos tiveram facilidade em visualizar que, neste caso, o número de variáveis seria três e não dois, como no problema anterior, mesmo porque, na observação com os dados do problema, constam o detalhamento dos sensores e a lógica dos sensores e saída do circuito que provoca a interrupção da máquina.

- ✓ Identificaram as variáveis x, y e z;

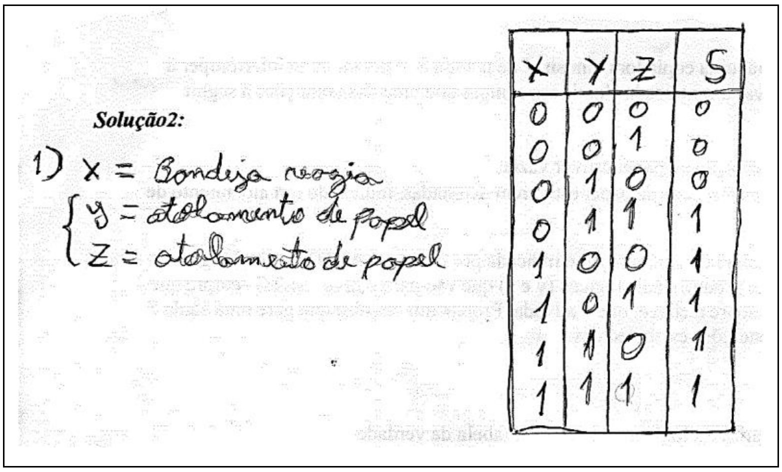
✓ Definiram as lógicas dos *status* dos sensores, associando nível “1” para nível Alto e “0” para Baixo;

✓ Construíram a tabela com todas as possíveis combinações de eventos sinalizados pelas microchaves e sensores, chegando a uma tabela com oito possibilidades.

✓ Identificaram cinco das combinações em que uma levaria à saída “S” da tabela para nível “1”, concluindo assim a tabela-verdade.

A Figura 108 mostra a atividade de uma das duplas.

Figura 108: Terceiro Bloco – item 8.2.1– Dupla 1- Construindo a tabela-verdade

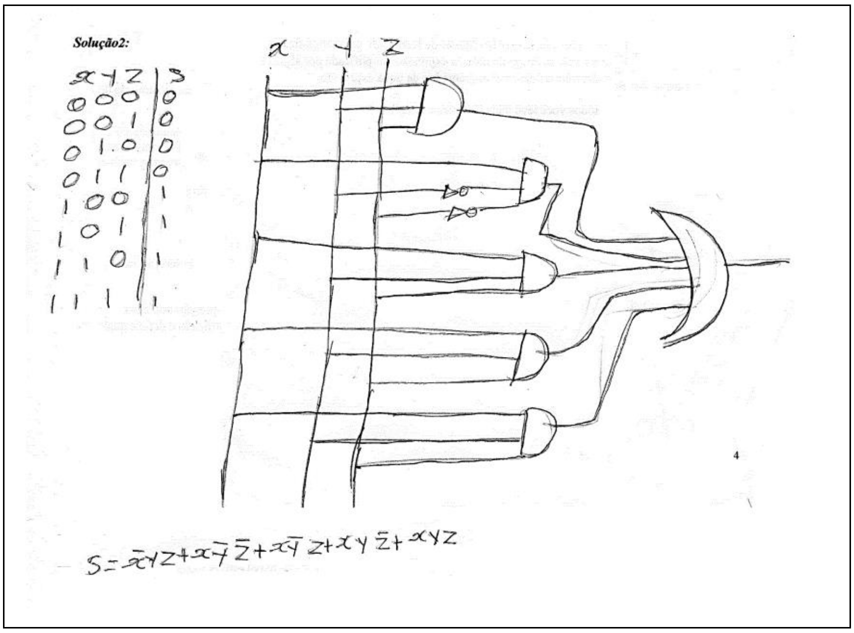


Fonte: Caderno de atividades

2 Determinar a expressão booleana e o esquema eletrônico do circuito sem a simplificação

Obteve-se um rendimento de 94% neste item de avaliação. Somente a dupla de número 2 não fez por completo a atividade, pois não concluiu corretamente o circuito relativo à expressão booleana, conforme a Figura 109.

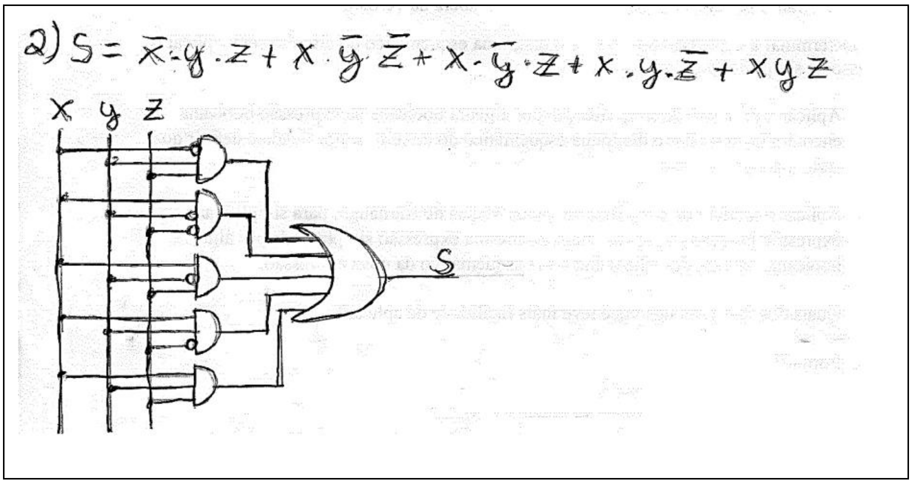
Figura 109 – Terceiro Bloco – item 8.2.2– Dupla 2- Determinando a expressão



Fonte: Caderno de atividades

A Figura 110 apresenta o resultado correto da expressão booleana a partir da tabela-verdade e o circuito equivalente gerado a partir da associação dos símbolos das portas, de acordo com as operações da expressão.

Figura 110: Terceiro Bloco – item 8.2.2– Dupla 1- Determinando a expressão



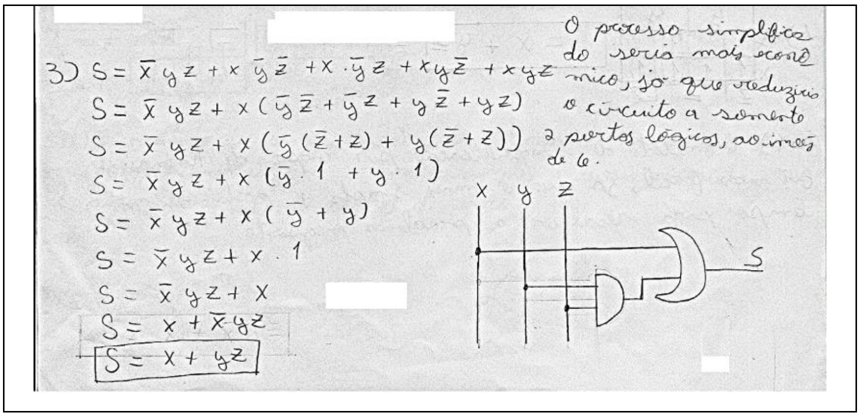
Fonte: Caderno de atividades

3 Aplicar o processo de simplificação por álgebra booleana na expressão, desenhar o esquema eletrônico do circuito, e definir qual é mais econômico.

Neste item, o desempenho também foi de 94% dos alunos que concluíram a simplificação correta da expressão e o circuito relativo à expressão simplificada. Somente a dupla 2 não chegou ao esquema do circuito simplificado, porém concluiu a simplificação por Álgebra de Boole corretamente, confirmando o diagnóstico da necessidade da dupla em rever os exercícios e a teoria do processo de construção do circuito a partir da expressão booleana.

Na Figura 111, é mostrada a conclusão esperada desta atividade.

Figura 111: Terceiro Bloco – item 8.2.2– Dupla 1- Simplificando a expressão por Álgebra de Boole



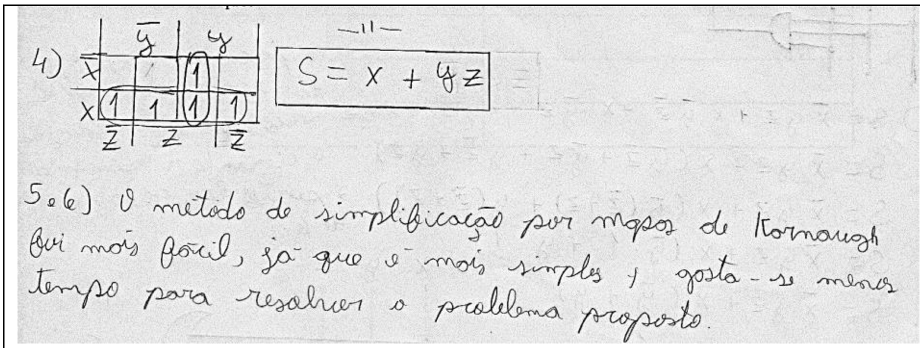
Fonte: Caderno de atividades

4 Aplicar o processo de simplificação pelos mapas de Karnaugh na expressão não simplificada, observar se chegou à mesma expressão simplificada no item anterior. Se não, desenhar o circuito da nova expressão.

Neste item, o desempenho foi de 63%. As duplas de números 2, 4, 9, 14, 15 e 16 não fizeram a simplificação pelo método dos Mapas de Karnaugh. O diagnóstico de não terem conseguido assimilar esse processo final foi o fato de o problema gerar três variáveis, o que torna o mapa diferente e a determinação da expressão também diferente. Outro provável ponto que pode ter contribuído para essas duplas apresentarem dificuldades, ou o desinteresse em concluir a atividade, foi o fato de ter sido a última atividade e gerado um *stress*, devido à sobrecarga de atividades no período e na data de aplicação deste bloco de atividades.

A Figura 112 apresenta uma atividade concluída com sucesso.

Figura 112: Terceiro Bloco – item 8.2.2– Dupla 1- Simplificando a expressão por Karnaugh



Fonte; Caderno de atividade

A Figura 113 mostra a solução do modelamento completo do problema 2, desenvolvido pela dupla 1 utilizando o modelo booleano.

Na atividade, os alunos sinalizam os passos propostos em números de 1 a 6, conforme os itens sugeridos no enunciado da atividade.

No número 1, eles fazem a abstração das variáveis x, y e z, a montagem da tabela-verdade, contendo três colunas para as variáveis, consequentemente oito linhas para as possibilidades e uma coluna “S” para os resultados, indicando o resultado “1” somente para as possibilidades que devem interromper a máquina e gerar um sinal luminoso.

No número 2, a dupla extrai a expressão matemática que se intitula expressão booleana, a partir da tabela-verdade, e constrói o diagrama esquemático do circuito a partir dessa expressão encontrada.

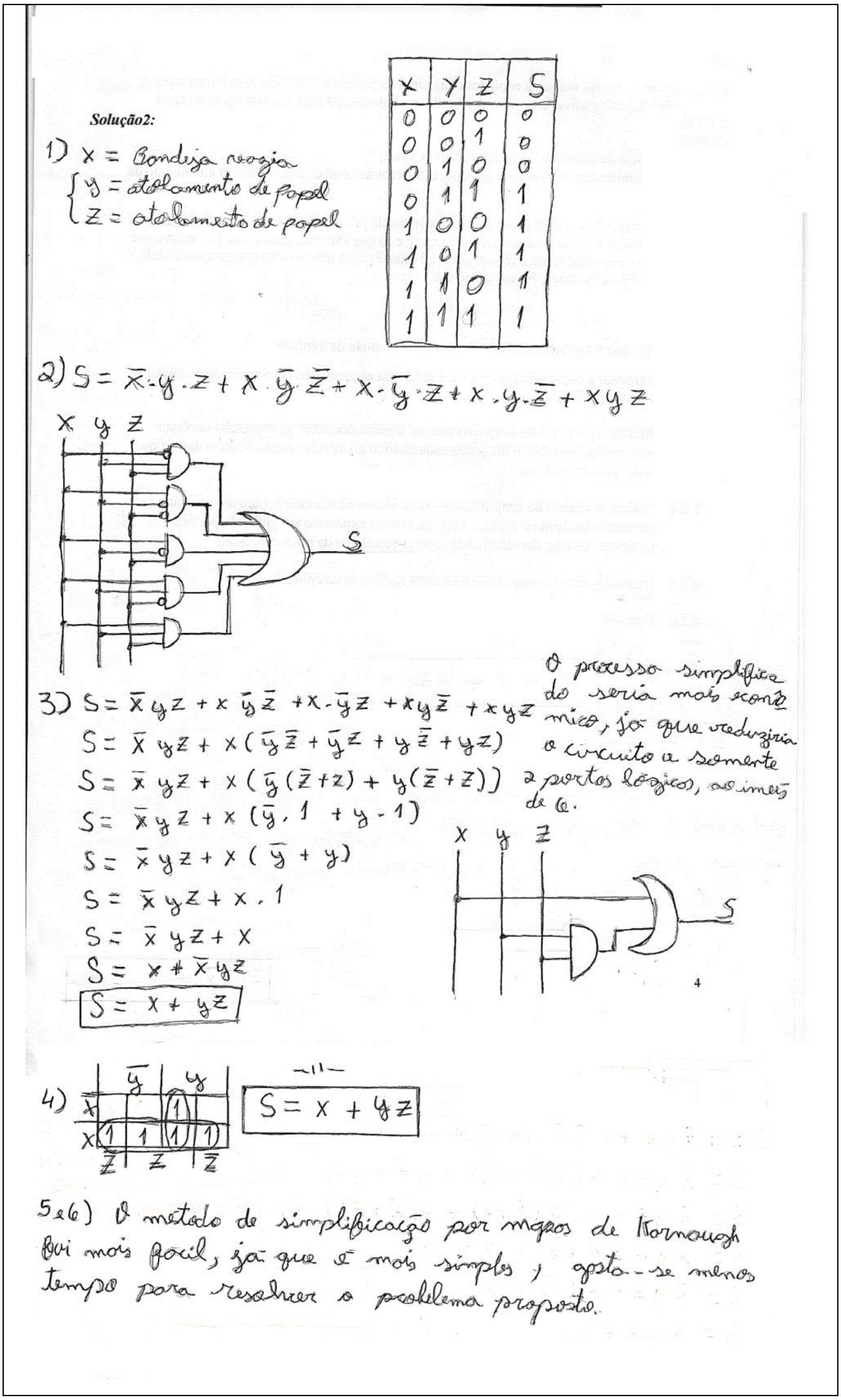
No número 3, é executada a simplificação da expressão booleana pelo método da Álgebra de Boole, chegando à expressão equivalente e ao circuito equivalente ao do segundo passo, porém bem mais simplificado, o que leva os alunos a concluir que esse circuito eletrônico simplificado é mais econômico que o anterior, pois utilizará somente duas portas lógicas (dois CIs[11]).

No número 4, é feita a simplificação pelo mapa de Karnaugh. Extraída a expressão simplificada, compararam-na com a expressão simplificada pela álgebra de Boole, chegaram à mesma expressão e concluíram que o método de simplificação pelo mapa de Karnaugh foi mais fácil, já que é mais simples e gasta-se menos tempo para chegar à expressão simplificada.

[11] CI – Circuito integrado

O que se estabeleceu como proposta neste trabalho de pesquisa está descrito pelas Figuras 113 a 117, em que se observa um modelamento completo de uma situação problema apresentada, alcançando o resultado esperado, conforme solução do protocolo da dupla 01.

Figura 113: Terceiro Bloco – Modelamento completo – Situação 2 Dupla 1



Solução2:

1) x = Bandeja reagia
y = atolamento de papel
z = atolamento de papel

X	Y	Z	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2) $S = \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + xyz$

3) $S = \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x \cdot \bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$

$S = \bar{x}yz + x(\bar{y}\bar{z} + \bar{y}z + y\bar{z} + yz)$

$S = \bar{x}yz + x(\bar{y}(\bar{z}+z) + y(\bar{z}+z))$

$S = \bar{x}yz + x(\bar{y} \cdot 1 + y \cdot 1)$

$S = \bar{x}yz + x(\bar{y} + y)$

$S = \bar{x}yz + x \cdot 1$

$S = \bar{x}yz + x$

$S = x + \bar{x}yz$

$\boxed{S = x + yz}$

O processo simplificado seria mais econômico, já que reduziria o circuito a somente 2 portas lógicas, ao invés de 6.

4)

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
$\bar{x}$			1	
x	1	1	1	1

$\boxed{S = x + yz}$

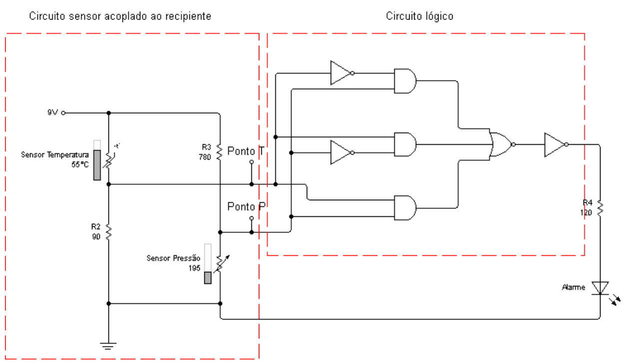
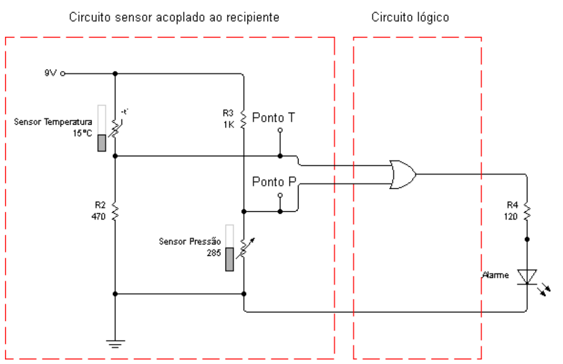
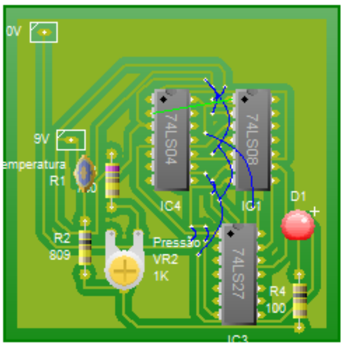
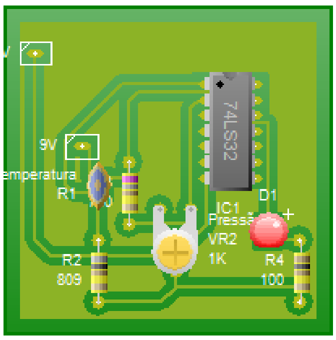
5e6) O método de simplificação por mapas de Karnaugh foi mais fácil, já que é mais simples, gasta-se menos tempo para resolver o problema proposto.

Fonte: Caderno de atividades

Após a determinação do esquema eletrônico do circuito simplificado, os alunos, trabalhando em laboratório, fazem a simulação do circuito determinado, em *softwares*, validando seu funcionamento, e, em seguida, a construção do *hardware* em laboratório de eletrônica, utilizando componentes disponibilizados no almoxarifado de componentes eletrônicos da escola.

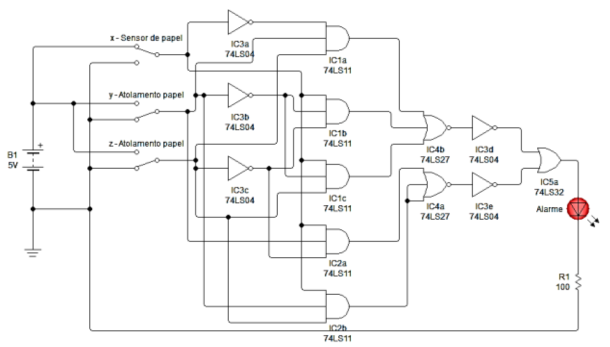
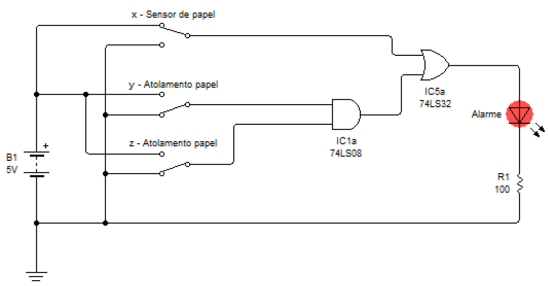
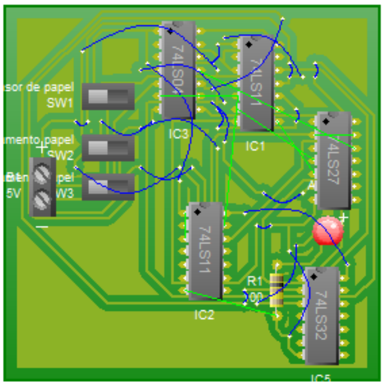
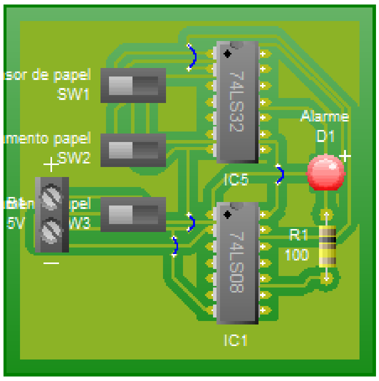
O resultado esperado nas práticas de laboratório pode ser visto nas Figuras 114 e 115.

Figura 114: Circuitos da Situação - Problema 1

Circuito da expressão sem simplificação $S=\overline{T}\,.\,P+T\,.\,\overline{P}\,+T\,.\,P$	Circuito da expressão simplificada pela Álgebra de Boole e Mapa de Karnaugh $S=T+P$
	
Hardware do circuito	*Hardware* do circuito
	

Fonte: Arquivo do autor

Figura 115: Circuitos da Situação-Problema 2

Circuito da expressão sem simplificação $S=\overline{x}.y.z+x.\overline{y}.\overline{z}+x.\overline{y}.z+x.y.\overline{z}+x.y.z$	Circuito da expressão simplificada pela Álgebra de Boole e Mapa de Karnaugh $S=x+y.z$
	
Hardware do circuito	*Hardware* do circuito
	

Fonte: Arquivo do autor

O laboratório é dividido em oito bancadas de testes que acolhem dois ou três alunos, conforme mostra a Figura 116.

Figura 116: Ambiente do Laboratório

Fonte: Arquivo do autor

A Figura 117 apresenta o teste de um CI.

Figura 117: Análise da porta lógica AND CI -7408

Fonte: Arquivo do autor

Conclui-se que os itens dos objetivos da presente pesquisa: desenvolver o ensino e aprendizagem da álgebra booleana, explorar conceitos e propriedades matemáticas, lidar com as várias fases e representações do modelo booleano, simplificar expressões usando a matemática, utilizar o ambiente virtual e laboratorial para aplicação e validação do processo foram alcançados por um número significativo de alunos e de forma integrada e completa, conforme registro nas Figuras de 113 a 117.

Os alunos encerraram essas atividades, motivados e interessados em outros projetos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, pesquisou-se a habilidade do aluno do curso técnico em lidar com aplicações de conceitos matemáticos necessários ao ensino da Eletrônica Digital. No aspecto teórico e prático do conteúdo inicial, pôde-se observar, por parte dos alunos, facilidade e entusiasmo no entendimento do Sistema Binário, da Lógica Booleana em suas funções básicas, da simbologia e das suas aplicações. Esses conteúdos são a base para o ensino da Eletrônica Digital e se torna atrativo ao aluno perceber uma aplicação da teoria à prática, motivando-o a se dedicar na resolução dos exercícios e a ter interesse pela disciplina.

Espera-se que essa motivação contribua para que o aluno desenvolva as habilidades de lidar com conceitos matemáticos necessários à compreensão e ao trabalho com o modelo booleano para simplificações de expressões booleanas. Pressupõe-se que o embasamento teórico e a formulação de atividades e recursos didáticos para trabalhar e recuperar os conceitos matemáticos que o aluno carrega consigo ao concluir o Ensino Médio são fundamentais ao ensino do conteúdo Simplificação de circuitos pelos modelos matemáticos, Álgebra de Boole e Mapas de Karnaugh.

Observa-se, inicialmente, que nenhum dos alunos participantes da pesquisa tinha conhecimento teórico ou prático anterior sobre o assunto, o que possibilitou iniciar com atividades básicas, mantendo o interesse no desenvolvimento das atividades.

O primeiro bloco de atividades proporcionou aos alunos trabalhar com representações e construção de tabela, expressões e símbolos. Nessas atividades, ficou destacada a dificuldade de parte dos alunos em identificar a função relacionada aos símbolos lógicos e tabelas da verdade, ficando evidente que o conceito de função ainda não é bem claro para alguns. Destacaram-se as propriedades distributiva e comutativa da adição, ficando evidente a necessidade do desenvolvimento de atividades que estimulem os alunos a trabalhar esses conceitos.

O segundo bloco de atividades proporcionou aos alunos a oportunidade de trabalhar os modelos matemáticos de simplificação de expressões booleanas. Durante a análise das atividades, pôde-se observar a dificuldade de alguns alunos em visualizar as identidades e propriedades a serem aplicadas para a simplificação da expressão. A maioria, no entanto, compreendeu bem a aplicação da atividade distributiva, a partir da resolução das atividades no *site* e em sala de aula. Foi possível, também, explorar o raciocínio dos alunos a partir das respostas das atividades, permitindo desenvolver novas atividades que conduzirão os alunos das próximas turmas a terem um desempenho maior na análise e aplicação dos conceitos matemáticos esperados para o trabalho com a Álgebra de Boole.

Na aplicação do modelo Mapas de Karnaugh para simplificação de expressões booleanas, pode-se destacar que a distribuição da expressão no mapa não apresentou dificuldade para a totalidade dos alunos, que demonstraram, informalmente, ser um método bem mais fácil e objetivo. No entanto, os resultados mostraram que 25% dos alunos não tiveram sucesso na extração da expressão booleana simplificada a partir do mapa. Observando-se essas atividades, evidencia-se uma dificuldade em visualizar conjuntos na forma de diagramas. O desenvolvimento de atividades didáticas no *site* (Ambiente Virtual), que estimulem os alunos a desenvolver uma visão de conjuntos na forma de diagramas, leva-os a um melhor desempenho na aplicação do método de simplificação pelos mapas de Karnaugh.

No processo de determinação do diagrama esquemático do circuito eletrônico digital a partir da expressão simplificada, destaca-se que, em média, 20% dos alunos ainda tiveram dificuldades na execução da tarefa. Observa-se pelas respostas desse grupo de alunos a dificuldade em associar a expressão booleana aos símbolos das portas lógicas, o que compromete a construção do diagrama do circuito completo. A atividade de Funções Básicas desenvolvida no *site* tem o objetivo de familiarizar o aluno com os símbolos lógicos relacionados às funções e às expressões lógicas básicas. Essa atividade é a que mais estimula os alunos, pois é parte de um resultado concreto que o aluno irá comprová-lo em laboratório na construção do circuito.

O terceiro bloco de atividades completa a pesquisa, propondo aos alunos o modelamento matemático de uma situação real e a construção de um diagrama esquemático que represente a situação sugerida. Nessa fase, observa-se que os alunos estão mais seguros na execução de todas as atividades, menos na de simplificação de expressões, em que se observam dificuldades de alguns alunos, demostrando ser necessário que esses alunos se exercitem mais no método por Álgebra de Boole e pelos Mapas de Karnaugh. A partir das respostas, consegue-se identificar os pontos a serem trabalhados em atividades para recuperação dos conceitos matemáticos envolvidos.

Diante dos resultados do desempenho dos alunos nessas atividades e da análise qualitativa de cada atividade, fica clara a importância do desenvolvimento do Ambiente Virtual de Aprendizagem, contendo atividades práticas e teóricas que estimulem o aluno a trabalhar com atividades que recuperem os conceitos matemáticos observados, como simbologia, conceito de função, análise de tabela, expressões booleanas, propriedades, identidades e postulados da álgebra booleana e análise gráfica de conjuntos. Esse ambiente oferece material didático, dissertações e teses para pesquisa, com foco em modelamento matemático e assuntos ligados ao tema de lógica matemática e eletrônica digital. Espera-se que essa ferramenta seja útil aos alunos e a interessados no tema e dê suporte aos professores da disciplina durante o desenvolvimento do conteúdo.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. **Iniciação à lógica matemática.** São Paulo: Nobel, 1999.

ALVES, C.M.C**. Lógica e Álgebras Booleanas**. 2002. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Lusíada de Lisboa, 2002.

BLANCHÉ, R. **História da Lógica**: De Aristóteles a Bertrand Russel. 1985

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BASTOS, R. R., **O Real tem uma Lógica**. Disponível em: <http://www.interseccaopsicanalitica.com.br/int-biblioteca/R.RBastos/Rachel real logica upld.pdf>

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática & implicações no ensino e aprendizagem da matemática**. Blumenau: Ed. da Furb. 1999. 134 p.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto. 2003. 125 p.

BLANCHE, R. **História da lógica de Aristóteles a Bertrand Russell.** Lisboa: Edições 70, 1985.

BOLEMA. Ano 17, n. 21, 2004. p. 45-60

BOLEMA, Ano 17, n 26, 2012. p. 1-364.

BOSHENSKI, I.M. **História de la lógica formal.** Madrid: Gredos, 1985.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais do Ensino Médio** – **Orientações educacionais complementares os parâmetros curriculares educacionais do Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEE, 2004. 144 p.

CAPUANO, Francisco G.; IDOETA, Ivan V. **Elementos de Eletrnica Digital**. 41. ed. São Paulo: Érica. 2012. 544 p.

CARROLL, L. **Lewis Carroll:** el juego de la lógica y otros escritos. Madrid: Alianza Editorial, 1986.

COSTA, Ramon Gomes; TODESCHINI, Leonardo. **WEB**: Como programar usando ferramentas livres. Rio de Janeiro: Alta Books, 2006. 268 p.

CYRINO, Hélio; ARANTES, Fernando. **Lógica Matemática**: Lógica Digital, Campinas (SP): Papirus, 1984. 79 p.

CYRINO, Hélio; PENHA, Carlos. **Filosofia Hoje**. 4. ed. São Paulo: Papirus, 1988. 108 p.

DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e álgebra de Boole.** 4. Ed. São Paulo: Atlas, 1995. 167 p.

GARDNER, M. **Logic machines and diagrams.** USA: McGraw-Hill, 1958.

GARRIDO, M. **Lógica simbólica.** 3. ed. Madrid: Tecnos, 1995.

GERSTING, J.L. , **Fundamentos Matemáticos para a Ciência Da Computação**, 4ª ed., p.01–22 e p.361-368 .1999.

LOURENZI, Vera Jussara; KRIPKA, Rosana Maria Luvezute; ORO, Neuza Terezinha. **Cálculo Proposicional:** Novas Propriedades das Operações Lógicas. Passo Fundo. Disponível em: < http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxi_cnmac/pdf/38.pdf>

MACHADO, Nilson José. **Lógica e Linguagem Cotidiana**: Verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 128 p.

MALUF, U. M. M. **Geometrização do raciocínio em Aristóteles e Boole, linearidade e epistemologia.** Rio de Janeiro. *Arq. Bras. De Psicol.,* 38(4):65-71, out./dez. 1985. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/abp/article/viewFile/19337/18080>

MIRANDA, Dimas F. **Modelagem Direcionada em Aulas de Matemática**. Anais do IV EEMOP/2009 – UFOP.

MORTARI, Cezar A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Editora UNESP, 2001.397 p.

MÜHL, V.J.L. **Uma proposta alternativa para o ensino de introdução à lógica matemática.** 1989. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática Estatística e Computação (IMEC), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

ROSEN, Kenneth H. **Matemática Discreta e suas aplicações**. Tradução João Giudice. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. 982 p.

SCHEINERMAN, Edward R. **Matemática Discreta:** Uma introdução. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. 532 p.

TAUB, Herbert. **Circuitos Digitais e Microprocessadores**. Tradução Fernando Fontes Barbosa, São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1984. 509 p.

TELES, Antônio Xavier. **Introdução ao Estudo de Filosofia**. 26. ed. São Paulo: Ática, 1989. 200 p.

TOCCI, Ronald J.; WIDMER, Neal S.; MOSS, Gregory L. **Sistemas Digitais:** princípios e aplicações.

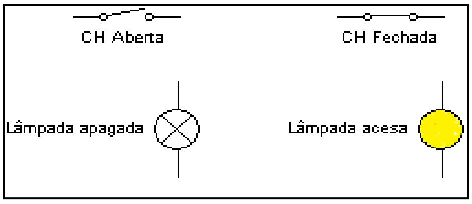
<http://www.sbfisica.org.br/arquivos/PCN_CNMT.pdf>

<http://portal.inep.gov.br/>

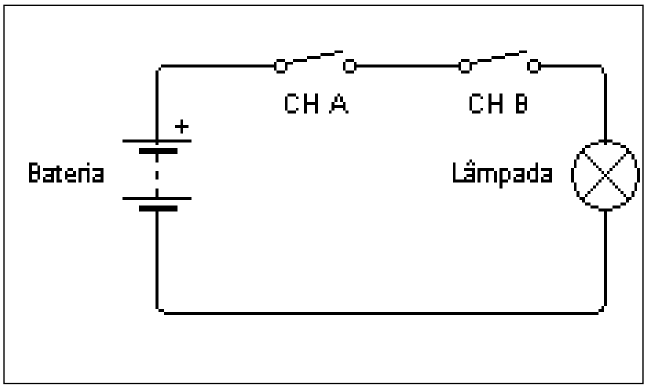
APÊNDICE A – BLOCO DE ATIVIDADES 1

Atividade 1 - Considerando a simbologia a seguir e analisando o funcionamento dos circuitos elétricos, responda às perguntas abaixo:

Simbologia



1.1 Identifique a tabela-verdade relativa ao circuito.



a)

CH A	**CH B**	**Lâmpada**
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Acesa

b)

CH A	**CH B**	**Lâmpada**
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Apagada

c)

CH A	**CH B**	**Lâmpada**
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Apagada
Fechada	Aberta	Apagada
Fechada	Fechada	Acesa

d)

CH A	**CH B**	**Lâmpada**
Aberta	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Apagada

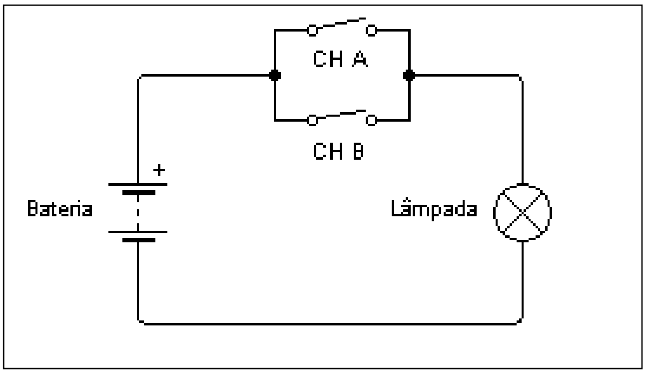
1.1.1 Qual função booleana representa o circuito acima? Desenhe seu símbolo lógico.

Solução:

1.1.2 Determine a expressão booleana que representa a função.

Solução:

1.2 Dado o circuito elétrico e a tabela-verdade que o representa, marque a alternativa que indica a função booleana adequada.



CH A	CH B	Lâmpada
Aberta	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Fechada	Fechada	Acesa

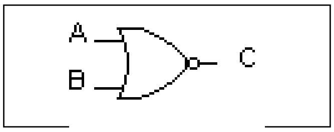
a) Função OR
b) Função AND
c) Função NOT
d) Função NAND
e) Função NOR

1.2.1 Desenhe seu símbolo lógico.

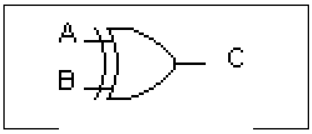
Solução:

1.3 Qual dos símbolos abaixo representa a função EX-OR?

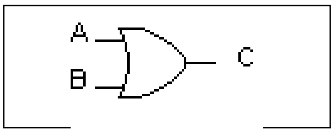
a)



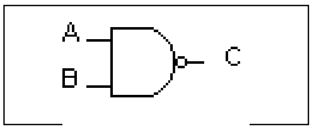
b)



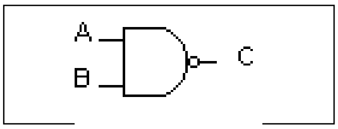
c)



d)



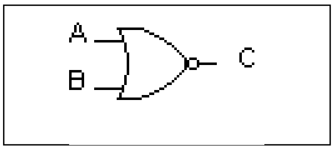
1.4 Dada a porta lógica a seguir, marque a opção que representa a expressão booleana que corresponde.



a) $C = \overline{A . B}$
b) $C = \overline{A} + B$
c) $C = A + B$
d) $C = A . B$

1.5 Marque a opção que indica a tabela da verdade que representa a porta lógica a seguir:

Vamos considerar que nesta atividade estaremos usando os valores binários “0” e “1”.



a)

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

b)

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

c)

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

d)

A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Atividade 2 – Determinar a expressão matemática booleana que represente as respectivas tabelas da verdade.

Considerar a seguinte lógica:

Se x = 0 chamaremos de $\bar{x}$(não x)
Se x = 1 chamaremos de x
Essa lógica vale para y e z

2.1 Marque a letra correspondente à expressão booleana que representa a tabela da verdade.

2.1.1 Tabela 1

x	y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.y$
b) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
c) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
d) R= $\bar{x}.y + \bar{x}.y. + x.\bar{y}$
e) nda

2.1.2 Tabela 2

x	y	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a) R= $\bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
b) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$
c) R= $\bar{x}.y + \bar{x}.y. + x.y$
d) R= $\bar{x}.y + x.\bar{y}$
e) nda

2.1.3 Tabela 3

x	y	z	R
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a) R= $\bar{x}.\bar{y}.\ \bar{z} + \bar{x}.y.z + x.y.z + x.\bar{y}.\bar{z}$
b) R= $\bar{x}.y.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.y.\bar{z} + x.y.z$
c) R= $\bar{x}.y.z + x.\bar{y}.z + x.y.\bar{z} + x.y.z$
d) R= $\bar{x}.\bar{y}.\ z + \bar{x}.y.z + x.y.z + x.\bar{y}.\bar{z}$
e) nda

2.1.4 Tabela 4

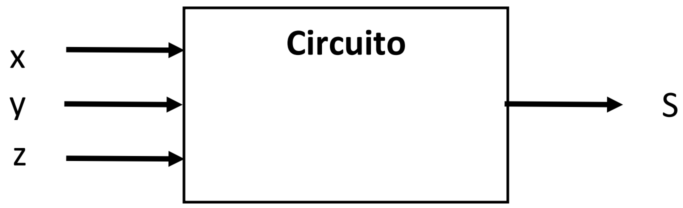
x	y	z	R
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

a) R= $\bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.z + x.y.z + x.\bar{y}.\bar{z}$
b) R= $\bar{x}.y.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.y.\bar{z} + x.y.z$
c) R= $\bar{x}.y.z + x.\bar{y}.z + x.y.\bar{z} + x.y.z$
d) R= $\bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.z + x.y.z + x.\bar{y}.\bar{z}$
e) nda

Atividade 3: Dadas as expressões booleanas a seguir, determinar os diagramas dos circuitos lógicos que executam a função lógica da expressão, a partir de valores binários inseridos em suas entradas. Esses valores representam eventos de uma situação real.

Considere x, y e z as variáveis de entrada dos circuitos e S a sua saída.

Cada diagrama irá representar a lógica do circuito do diagrama em bloco a seguir:



3.1 S = $x.y + x\,z$

Solução:

3.2 S = $(x + y).(x + z)$

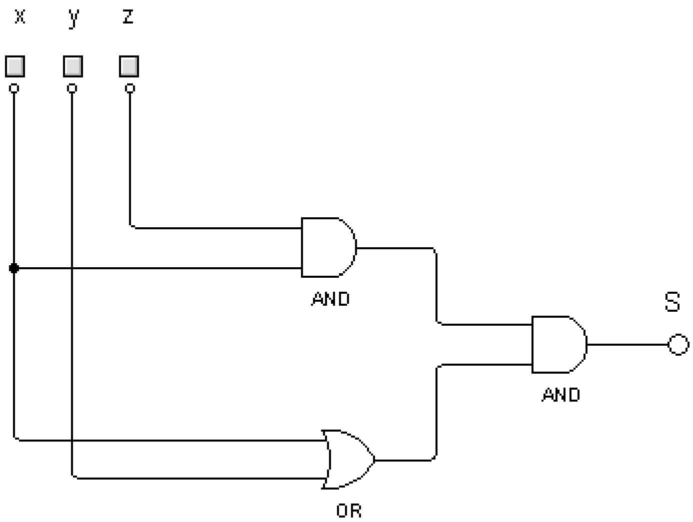
Solução:

3.3 S = $\left(\overline{x + y} + \overline{y + z}\right).z$

Solução:

Atividade 4 - Dados diagramas de um circuito lógico eletrônico, determine a expressão booleana que o represente matematicamente.

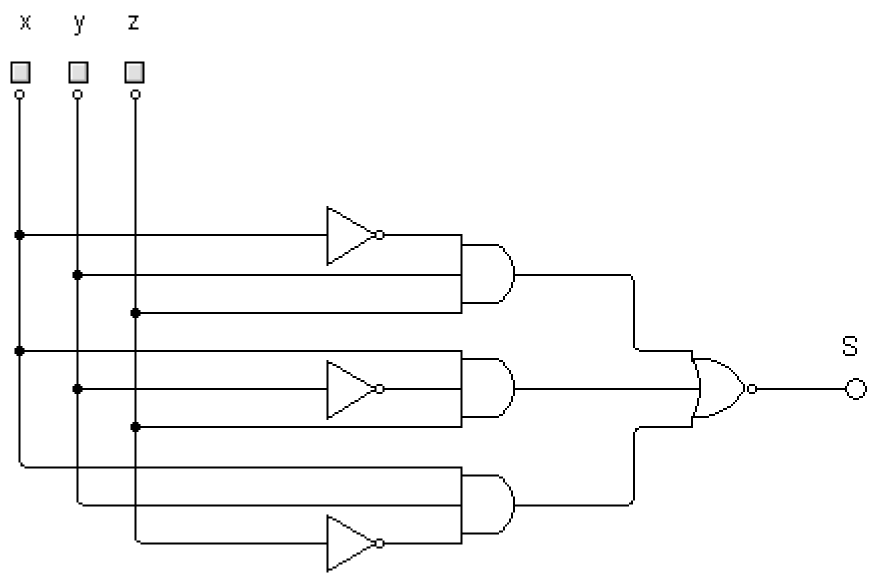
4.1 Circuito 1



Solução:

Expressão S =

4.2 Circuito 2.



Solução:

Expressão S =

Atividade 5 - Dadas as Expressões Booleanas, monte as tabelas-verdade que as representam.

5.1 S = $x.y + x\,z$

Solução:

5.2 S = $(x + y).(x + z)$

Solução:

5.3 S = $\left(\overline{x+y}+\overline{y+z}\right).z$

Solução:

APÊNDICE B - BLOCO DE ATIVIDADES 2

Atividade 1: Dadas as Expressões booleanas, aplicando os postulados, identidades, teoremas e propriedades da Álgebra de Boole, determine a expressão equivalente simplificada.

OBS: A cada passo, indicar qual a propriedade ou postulado ou teoremas aplicados (resumo em anexo).

1.1 $S = x.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.y.z$

Solução:

Expressão Booleana	Regra utilizada
$S = x.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.y.z$	

1.2 $S = \bar{x}\,.\,\bar{y} + \bar{x}\,y. + x.\,\bar{y}$

Solução:

Expressão Booleana	Regra utilizada
$S = \bar{x}\,.\,\bar{y} + \bar{x}\,y. + x.\,\bar{y}$	

1.3 $S = \bar{x}\,.\bar{y} + \bar{x}\,y. + x.\,\bar{y}$

Solução:

Expressão Booleana	Regra utilizada
$S = \bar{x}\,.\bar{y} + \bar{x}\,y. + x.\,\bar{y}$	

Atividade 2; Dadas as Expressões booleanas, aplicando modelo dos Mapas de Karnaugh, determine as expressões simplificadas.

2.1 $S = \bar{x}\,.\,\bar{y} + \bar{x}\,y. + x.\,\bar{y}$

Solução:

	$\bar{y}$	y
$\bar{x}$		
x		

2.2 $S = \; x.\,\bar{y}.\,\bar{z} + x.\,\bar{y}.z + x.\,y.\,z$

Solução:

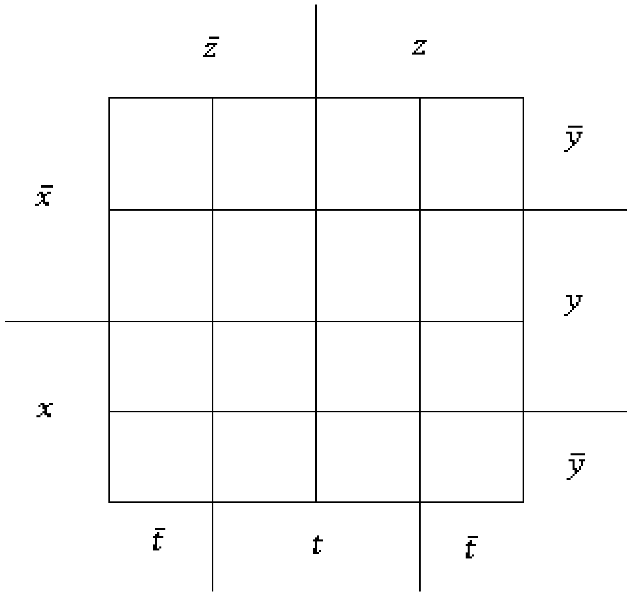
	$\bar{y}$		y	
$\bar{x}$				
x				
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

2.3

$S = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t + \bar{x}.\bar{y}.z.\bar{t} + \bar{x}.\bar{y}.z.t + \bar{x}.y.\bar{z}.t + \bar{x}.y.z.t + x.\bar{y}.\bar{z}.\bar{t} + x.\bar{y}.\bar{z}.t + x.\bar{y}.z.t +$

$x.y.\bar{z}.\bar{t} + x, y.\bar{z}.t + x.y.z.t$

Solução:



Quadro resumo dos Postulados, Identidades e Propriedades da Álgebra Booleana

POSTULADOS			
Complementação		**Adição**	**Multiplicação**
$A=0$	$\overline{A}=1$	$0+0=0$	$0.0=0$
		$0+1=1$	$0.1=1$
$A=1$	$\overline{A}=0$	$1+0=1$	$1.0=1$
		$1+1=1$	$1.1=1$
IDENTIDADES			
Complementação		**Adição**	**Multiplicação**
$A=0$	$\overline{A}=1$	$A+0=A$	$A.0=A$
		$A+1=1$	$A.1=1$
$A=1$	$\overline{A}=0$	$A+A=A$	$A.A=A$
		$A+\overline{A}=1$	$A.\overline{A}=1$
PROPRIEDADES			
Comutativa	**Associativa**		**Distributiva**
$A+B=B+A$	$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$		$A(B+C)=AB+AC)$
TEOREMAS de DE MORGAN			
$\overline{(A.B)}=(\overline{B}+\overline{A})$ $\overline{(A+B)}=(\overline{B}.\overline{A})$			
IDENIDADES AUXILIARES			
$A+AB=A$ $A+\overline{A}B=A+B$ $(A+B).(A+C)=A+BC$			

APÊNDICE C – BLOCO DE ATIVIDADES 3

Atividade 1- Um sistema de controle industrial em um determinado processo químico requer a ativação de um alarme sempre que a temperatura do processo exceder um valor máximo ou que a pressão ultrapassar um certo limite. O valor máximo da temperatura e da pressão é definido pelo responsável pelo processo, a partir das caracteristicas dos elementos envolvidos no processo.

Orientações: Aplicando o modelo booleano, projetar um circuito lógico eletrônico, determinando seu diagrama esquemático que irá monitorar através de sinais recebidos por sensores acoplados ao recipiente do material, e através da lógica construída irá externar um alarme de acordo com a necessidade do solicitante.

Pedimos:

8.1.1 Abstrair as variáveis lógicas e construir a tabela da verdade.

8.1.2 Determinar a expressão booleana e o diagrama esquemático do circuito, sem aplicar o processo de simplificação.

8.1.3 Aplicar o processo de simplificação por álgebra booleana na expressão booleana encontrada, desenhar o diagrama esquemático do circuito simplificado e definir qual seria mais econômico.

8.1.4 Aplicar o modelo de simplificação pelos Mapas de Karnaugh, para simplificar a expressão booleana, e ver se chega à mesma expressão simplificada por álgebra booleana. Se não, desenhar o diagrama esquemático da nova expressão.

8.1.5 Qual dos dois metodos você teve mais facilidade de aplicar?

8.1.6 Por quê?

Solução1:

Atividade 2 - Em uma simples máquina copiadora, um sinal de parada S é gerado para interromper a operação da máquina e ativar um indicador luminoso sempre que uma das condições a seguir ocorrer:

a) A bandeja de alimentação de papel estiver vazia;
b) As duas microchaves sensoras de papel estiverem acionadas, indicando um atolamento de papel.

A presença de papel na bandeja de alimentação é indicada por um nível BAIXO no sinal lógico x. Cada uma das microchaves produz sinais lógicos (y e z) que vão para o nível BAIXO, sempre que um papel estiver passando sobre a chave, que é ativada. Projete um circuito que gere uma saída S em nível ALTO para as condições estabelecidas.

Pedimos:

8.2.1 Abstrair as variáveis lógicas e construir a tabela da verdade.

8.2.2 Determinar a expressão booleana e o diagrama esquemático do circuito sem aplicar o processo de simplificação.

8.2.3 Aplicar o processo de simplificação por álgebra booleana na expressão booleana encontrada, desenhar o diagrama esquemático do circuito simplificado e definir qual seria mais econômico.

8.2.4 Aplicar o modelo de simplificação pelos Mapas de Karnaugh para simplificar a expressão booleana e ver se chega à mesma expressão simplificada por álgebra booleana. Se não, desenhar o diagrama esquemático da nova expressão.

8.2.5 Qual dos dois metodos você teve mais facilidade de aplicar?

8.2.6 Por quê?

Solução2: