PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Sebastião Leônidas Ferreira

LIÇÕES DE CÁLCULO COM UM FOCO NO USO DE EXEMPLOS PARA A APRENDIZAGEM DE INTEGRAIS

Belo Horizonte
2012

Sebastião Leônidas Ferreira

LIÇÕES DE CÁLCULO COM UM FOCO NO USO DE EXEMPLOS PARA A APRENDIZAGEM DE INTEGRAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Clara Rezende Frota

Belo Horizonte
2012

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Ferreira, Sebastião Leônidas
F383l Lições de cálculo com um foco no uso de exemplos para a aprendizagem de integrais / Sebastião Leônidas Ferreira. Belo Horizonte, 2012.
240 f. : il.

Orientadora: Maria Clara Rezende Frota
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Cálculo integral. 2. Integrais (Matemática). 3. Aprendizagem baseada em problemas. I. Frota, Maria Clara Rezende. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 517.3

Sebastião Leônidas Ferreira

PUC Minas

PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

SEBASTIÃO LEÔNIDAS FERREIRA

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Maria Clara R. Frota

Profª Drª Maria Clara Rezende Frota – Orientadora – (PUC Minas)
Doutorado em Educação – (Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG)

Prof. Dr. Antônio Olímpio Júnior – (UFJF)
Doutorado em Educação Matemática – (Universidade Estadual Paulista – UNESP)

Prof. Dr. João Bosco Laudares – (PUC Minas)
Doutorado em Educação: História, Política, Sociedade – (PUC-SP)

Belo Horizonte, 10 de agosto de 2012

A todos os meus familiares e principalmente a meu pai, que infelizmente já se foi, mas, certamente ficaria orgulhoso pelo trabalho realizado

AGRADECIMENTOS

todos que direta ou indiretamente contribuíram para que este trabalho fosse desenvolvido;

À minha orientadora, Professora Doutora Maria Clara Rezende, meus eternos agradecimentos; pelas valiosas contribuições e incentivos, lições de comprometimento e dedicação...

Aos Professores do curso de mestrado por compartilharem suas experiências e conhecimentos durante o curso de mestrado e em especial ao Professor Dr. João Bosco Laudares, por participar da banca, contribuindo com suas valiosas sugestões;

Ao Professor Dr. Antônio Olímpio Júnior, meu sinceros agradecimentos por participar da banca e pelas sugestões valiosas;

Aos meus alunos que participaram diretamente, tornando possível a execução desta pesquisa;

Às bibliotecárias, pela ajuda e esclarecimentos;

À Márcia, minha amada, amiga, companheira de todos os momentos, pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis;

Ao Matheus Leônidas, meu filho, agradeço pela compreensão de não poder estar a seu lado por diversos momentos em função da pesquisa;

A todos os familiares e amigos, por estarem ao meu lado e torcerem sempre pelo meu sucesso;

À todos, muito obrigado!

"Um bom exemplo nunca se perde"
(Autor desconhecido)

RESUMO

Esta pesquisa investigou as contribuições de uma abordagem de ensino com foco no uso de exemplos, para a aprendizagem de integrais. A metodologia qualitativa adotada compreendeu um estudo empírico desenvolvido com alunos do curso de Engenharia de uma Instituição de Ensino Superior da cidade de Ipatinga, Minas Gerais. Foram elaboradas doze lições fundamentadas no uso de exemplos, objetivando a aprendizagem conceitual e procedimental de Cálculo Integral. As lições intercalavam discussões teóricas, através da exposição dos pontos principais de cada tema e discussões práticas, conduzidas primeiramente em duplas, seguidas de momentos de socialização das resoluções dos exemplos. Os dados coletados compreenderam os trabalhos desenvolvidos pelos alunos durante as lições. Os resultados encontrados evidenciaram que lições com um foco no uso de exemplos podem proporcionar aos alunos uma melhor compreensão dos procedimentos, e uma reflexão sobre estes procedimentos pode favorecer um aprendizado conceitual. De modo geral os alunos se envolveram ao participarem ativamente do processo, destacando que, através do trabalho em dupla, puderam discutir com os colegas suas dúvidas e opiniões sobre os procedimentos e os conceitos estudados nas lições.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo. Conhecimento conceitual e procedimental. Lições sobre integrais. Aprendizagem através de exemplos.

ABSTRACT

This research investigated the contributions of a teaching approach which focused on the use of examples for learning integrals. The qualitative methodology adopted comprised an empirical study developed with students of an Engineering course in a Higher Education Institution in the city of Ipatinga, Minas Gerais. Twelve lessons were developed around the use of examples, aiming to allow the conceptual and procedural learning of Integral Calculus. The lessons alternated theoretical discussions, by exposition of the main points for each theme, and practical discussions, conducted initially in pairs and later followed by general comparison of the resolution of the examples. Data collected consists of the works produced by students during the lessons. The achieved results point that the lessons focused on the use of examples can provide students with a better understanding of the procedures and that reflection on these procedures may support conceptual learning. Generally, students got involved by participating actively in the process, noting that by working in pairs they could discuss with their classmates their doubts and opinions about the procedures and concepts studied in the lessons.

Key-words: Teaching Calculus. Conceptual and procedural knowledge. Integral Lessons. Learning through examples.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Através de nossa experiência profissional como professor de matemática, que teve início no ensino fundamental, temos observado o desafio que se apresenta a cada turma que iniciamos. Como professores temos expectativas de apresentar diversos conteúdos que a nossos olhos são de suma importância para o aprendiz, esperando que este aprendiz movimente seus esforços a fim de compreender conceitos e procedimentos que lhes são apresentados e, de posse destes conhecimentos, seja capaz de aplicá-los sempre que necessário. No entanto, os alunos muitas vezes não tiveram uma fundamentação adequada e apresentam sérias lacunas acerca de conteúdos básicos. Esses alunos, muitas vezes, já desestimulados pelas dificuldades no entendimento dos conteúdos de matemática, buscam estratégias de estudo baseadas em memorização e execução de algoritmos de forma inconsciente. Buscam atalhos a todo instante, a fim de resolver situações desconectadas, e, esse aprendizado fragmentado vai prejudicando cada vez mais a real compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos.

Como professores de Cálculo, consideramos fundamental pensar alternativas para intervir, modificando esse cenário, uma vez que os conceitos e procedimentos estudados em Cálculo serão fundamentais para a compreensão e aplicação em outras disciplinas posteriormente estudadas nos cursos de engenharia.

Tomados pelo desejo de contribuir para atender as expectativas de professores e alunos, buscando estratégias de ensino, apontando metodologias distintas a fim de alcançar um público maior, investimos nossos esforços em leituras e estudos. Iniciamos o curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática ofertado pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. As características do curso, de Mestrado Profissional, vinham ao encontro de nossas expectativas de investigar metodologias capazes de contribuir para modificar o ambiente e o tipo de trabalho desenvolvido na sala de aula de Cálculo.

Como podemos contribuir para o ambiente de estudo ser mais estimulante, envolvendo professores e alunos para estudar conteúdos de Cálculo? Um planejamento de estudos que antecipa discussões e dúvidas poderia contribuir e até mesmo estimular os alunos na busca do entendimento matemático? Apenas através da execução de procedimentos podemos contribuir para o entendimento matemático? Uma reflexão sobre os motivos que nos levam a executar determinados procedimentos, entendendo os motivos que nos levam a escolher e executar cada um deles, pode contribuir para o entendimento matemático e a construção de novos conceitos e procedimentos? Que papel desempenham os vários tipos de exemplos que todos os professores utilizam em suas aulas? O uso desses exemplos pode favorecer o ensino e a aprendizagem? Ao estudar e discutir os exemplos os alunos poderão aumentar sua autoestima e consequentemente a compreensão e o entendimento sobre os conteúdos estudados?

Os estudos e investigações que fizemos a partir de todos esses questionamentos e inquietações a fim de mudar o cenário da sala de aula, nos levaram a definir a seguinte questão de pesquisa: **Lições de cálculo com um foco no uso de exemplos podem contribuir para a aprendizagem de integrais?**

Nossas investigações teóricas nos levaram a estudos investigando os principais problemas no ensino de cálculo, que para Cury (2009), provocam excessiva desistência e evasão em cursos superiores da área de Ciências Exatas. Nasser (2007) buscou identificar os obstáculos que prejudicam o desempenho dos alunos no ciclo básico do curso superior,sugerindo meios de superá-los. Frota (2002) investigou as concepções de matemática e as estratégias de estudo utilizadas por estudantes de Cálculo, além de estudar as motivações e expectativas desses alunos ao escolherem o curso. Silva e Silva (2010) apontam que deficiências graves no ensino de cálculo ainda prevalecem, tendo origens diversas: currículos inadequados; despreparo dos alunos que ingressam na educação superior; tipo de aula de Cálculo tradicional e centrada no professor. Barufi (1999), ao investigar de que maneira é feita a negociação de significados nos Cursos de Calculo I, destacou que os livros didáticos são instrumentos importantes nesse processo. Silva (2004) investigou os registros de representação semiótica apresentados em livros didáticos com relação ao conceito de integral.

Tall (2010), renomado pesquisador em Educação Matemática, destaca que precisamos esclarecer exatamente o que nós desejamos que os estudantes aprendam. Pretendemos o desenvolvimento de conhecimentos conceituais (relacionais) e procedimentais (instrumentais), segundo Hiebert e Lefevre (1986) e Skemp (1976). Com esse objetivo investigamos as contribuições que os exemplos podem fornecer, apoiando-nos em estudos de Figueiredo, Contreras, e Blanco, (2006; 2009) bem como nos trabalhos de Watson e Mason (2005).

Nossa busca de estratégias iniciou-se no ano de 2011, no primeiro semestre, testando algumas lições e observando efeitos positivos e negativos. Reformulamos estas lições, aproveitando alguns exemplos que julgamos eficientes, melhorando alguns e complementamos com outros a fim de tornar as lições mais produtivas, de acordo com os objetivos pretendidos.

Procedemos a uma abordagem qualitativa, coletando os trabalhos produzidos pelos alunos durante a execução de 12 lições que se intercalavam entre dois momentos: discussões teóricas, através da exposição e discussão dos pontos principais de cada tema a estudar; e discussões práticas, momento que os alunos eram agrupados em duplas, executando os exemplos preparados para complementar a discussão teórica.

Pretendemos criar situações de aprendizagem estimulantes para os alunos, elevando sua autoestima, tornando-os mais participativos. Objetivamos proporcionar discussões entre professor e alunos, ou entre os próprios alunos, contribuindo para o desenvolvimento de suas argumentações escritas e verbais.

Estruturamos nossa pesquisa em cinco capítulos, sendo o primeiro esta Introdução, que apresenta as ideias gerais que originaram, sustentaram teórica e metodologicamente a pesquisa, os caminhos que utilizamos e os resultados esperados por nós.

No segundo capítulo apresentamos os referencias teóricos que sustentaram nossas investigações, dando-nos suporte para elaborar, aplicar e analisar as lições. O segundo capítulo foi dividido em quatro seções. Na primeira apresentamos o cenário do ensino e aprendizagem de Cálculo, apontando alguns dos pesquisadores que se dedicam a pesquisas na área. Na segunda seção desenvolvemos um estudo sobre os tipos de conhecimento conceitual e procedimental, discutindo seu papel no ensino e aprendizagem de matemática. Na terceira seção fizemos um estudo sobre a importância e o papel dos exemplos no processo de ensino e aprendizagem, relacionando sua importância ao desenvolvimento de conceitos e procedimentos em Cálculo. Finalizamos o capítulo dois, apresentando uma classificação dos tipo de exemplos por nós elaborada e adequada ao trabalho de pesquisa desenvolvido.

No terceiro capítulo, apresentamos a metodologia adotada. Buscamos caracterizar o contexto de pesquisa, o ambiente onde foi desenvolvida e os estudantes que dela participaram. Apresentamos as etapas de desenvolvimento da pesquisa, descrevendo o processo de elaboração e as contribuições que as lições podem proporcionar a professores e alunos. Encerramos o terceiro capítulo descrevendo os instrumentos de coleta por nós utilizados na pesquisa desenvolvida a partir de uma abordagem qualitativa.

No quarto capítulo, apresentamos as lições elaboradas, os objetivos pretendidos, destacando os tipos de exemplos utilizados, descrevendo a forma como foram desenvolvidas as lições e os resultados obtidos. Finalizamos este capítulo apresentando e analisando os resultados das avaliações desenvolvidas, na forma de atividades individuais feitas pelos alunos e de um questionário respondido por eles.

No quinto capítulo apresentamos nossas considerações finais, apontando nossas expectativas, destacando os principais resultados e as limitações de nossa pesquisa, as questões que emergem a partir de nossa pesquisa, e as contribuições da pesquisa para o próprio pesquisador.

No apêndice apresentamos o produto elaborado e aplicado durante a pesquisa. Esperamos que o material elaborado possa ser aplicado e sem dúvida aperfeiçoado por outros colegas professores, motivando os alunos para a aprendizagem de Cálculo, partindo de conhecimentos prévios, buscando nos exemplos um suporte para promover situações de ensino objetivando a aprendizagem de conceitos e procedimentos no estudo do Cálculo.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Este capítulo apresenta os referenciais teóricos que deram suporte a esta pesquisa, cujo objetivo foi investigar as possibilidades que o uso e produção de exemplos, contra exemplos e não exemplos pode trazer para o ensino-aprendizagem do Cálculo Integral, junto a alunos dos cursos de Engenharia Mecânica, Elétrica e de Produção de uma Instituição de Ensino Superior do interior de Minas Gerais.

O Cálculo Diferencial e Integral, disciplina curricular do ensino superior dos cursos da área das ciências exatas, tem seus conceitos fundamentais, como limite, derivada e integral sustentados em conceitos elementares vistos no Ensino Fundamental e Médio.

As dificuldades encontradas por professores e alunos de Cálculo Diferencial e Integral estão entre as causas apontadas para a excessiva desistência e evasão encontradas em cursos superiores da área de Ciências Exatas. (CURY, 2009).

O interesse pela Educação Matemática no Ensino Superior é crescente. (CURY, 2009).

Esse interesse crescente pode ser evidenciado a partir do número de dissertações do mestrado e teses de doutorado, que abordam essa temática, desenvolvidas no âmbito de programas de pós-graduação de grandes universidades.

Neste Capítulo, organizado em quatro seções, situamos a nossa pesquisa no contexto do Ensino e Aprendizagem de Cálculo, discutindo a importância do desenvolvimento do conhecimento conceitual e do conhecimento procedimental no estudo desse conteúdo. A terceira seção apresenta os principais trabalhos sobre o uso de exemplos na aprendizagem de Matemática e na última seção apresentamos o sistema de classificação dos exemplos que elaboramos, a partir dos estudos e pesquisas. Esse sistema de classificação foi empregado no desenvolvimento das Lições de Cálculo que constituem o foco desta pesquisa e produto dessa dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

2.1 O Ensino e a aprendizagem de cálculo

As pesquisas apontam que as dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática não dependem do nível de ensino e merecem igual atenção, seja nos níveis básicos de ensino ou no Ensino Superior. Segundo esta autora, é crescente o interesse de pesquisadores em Educação Matemática que investigam questões sobre o Ensino Superior, muitos dos quais desde 2000 fazem parte do grupo de trabalho GT4 (Educação Matemática no Ensino Superior), um dos grupos de trabalho da Sociedade Brasileira de Matemática. (IGLIORI, 2009).

Nesse grupo, o ensino de Cálculo tem sido um dos focos predominantes dos trabalhos. Diversos pesquisadores vêm se dedicando a pesquisas, buscando entender os obstáculos que se apresentam no ensino deste conteúdo que faz parte da grade curricular de muitos cursos de graduação. (NASSER, 2007).

Nasser, procurou identificar os obstáculos que prejudicam o desempenho dos alunos no ciclo básico do curso superior e sugerir meios de superá-los. A autora destaca que:

> No Ensino Médio, em geral, os alunos são acostumados a resolver mecanicamente os exercícios, decorando regras e macetes, não sendo estimulados a raciocinar. No início do curso superior, se deparam com exigências que não estão prontos para enfrentar, pois não tiveram oportunidade de desenvolver habilidades de argumentação (NASSER, 2007, p.1).

Os alunos que tiveram boas notas de matemática no ensino Médio, de modo geral têm expectativas de bom desempenho em matemática na Universidade, o que não ocorre necessariamente. (SILVA, 2011). Talvez o problema seja, conforme destacado por Nasser (2007), que a aprendizagem tenha sido de forma mecânica, sem que os alunos desenvolvam as habilidades de raciocinar e argumentar.

Por outro lado, segundo Silva, os professores também têm suas expectativas sobre os alunos.

> De seu lado, os professores de Cálculo também têm suas expectativas quanto ao nível de desempenho dos alunos, muitas vezes guiado por uma visão idealizada de que os estudantes trazem uma bagagem da educação básica suficiente para compreender suas explicações e construir seu próprio saber matemático. Também os professores do ensino médio esperam que, com a matemática ensinada e o modo como o ensino foi conduzido por eles, possam concorrer para que os alunos sigam sem traumas um ‘bom’

> curso de Cálculo na universidade.(SILVA, 2011, p. 400)

Frota investigou as concepções de matemática e as estratégias de estudo utilizadas por estudantes de Cálculo, além de estudar as motivações e expectativas desses alunos ao escolherem o curso. Ao discutir os fatores que influenciam os estilos de aprendizagem de estudantes de Cálculo e a autorregulação da aprendizagem Frota, destaca a importância da motivação.

> A motivação do aluno, por exemplo, é um fator que contribui para a aprendizagem, compreendendo as expectativas de desempenho que o aluno tem, fundamentadas em uma autoavaliação das próprias capacidades e na avaliação dos colegas, professores, familiares, bem como na importância ou valor que atribui à tarefa, ou seja, o valor da meta (FROTA, 2009, p.61).

Assim a falta de motivação pode ser um, dentre os fatores que influenciam para que não ocorra a aprendizagem.

Várias pesquisas apontaram os altos índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo, como por exemplo, Barufi (1999), Rezende (2003) e Anacleto (2007), entre outras.

Silva e Silva, ao observarem que muitas das pesquisas destacam esses altos índices de reprovação em Cálculo, concluem que essas pesquisas convergem para uma mesma resposta: é necessário buscar pedagogias diversas que possibilitem minimizar esses problemas. (SILVA; SILVA, 2010).

A partir de nossas leituras e de nossa experiência docente, podemos afirmar que o ensino de matemática apresenta deficiências graves. Essas deficiências têm origens diversas: currículos inadequados; despreparo dos alunos que ingressam na educação superior; tipo de aula de Cálculo tradicional e centrada no professor (SILVA; SILVA, 2010), que ainda predomina.

Os livros didáticos representam um papel importante para o ensino e aprendizagem de Cálculo. Alguns pesquisadores dedicaram-se a investigar os livros didáticos de Cálculo. Barufi (1999), por exemplo, investigou de que maneira é feita a negociação de significados nos Cursos de Calculo I, de forma a que os alunos construam conhecimentos. A autora considera que conhecer é conhecer o significado e que os significados são resultado de negociações estabelecidas entre alunos e o professor, sendo que os livros didáticos são instrumentos importantes nesse processo.

> O livro didático revela-se um suporte para o curso, seja para a leitura prévia por parte dos alunos, seja para complemento das aulas ministradas pelo professor, ou para a pesquisa dos alunos, mais ou menos aprofundada, ou mesmo como coleção de exercícios propostos. (BARUFI, 1999, p.48).

Assim, Barufi analisou 24 obras entre livros de Cálculo e de Análise, de acordo com os critérios: ideias, problematização, linguagem, visualização, argumentação, formalização/generalização. A abordagem dos autores divide-se entre uma abordagem que respeita a gênese histórica dos conceitos do Cálculo e uma abordagem lógico-formal. (BARUFI, 1999).

O professor tem liberdade de escolha do livro, não podendo perder de vista a negociação de significados das ideias do Cálculo. Bons livros sempre existiram e hoje em dia são muitos os livros com propostas de abordagens inovadoras para o ensino de Cálculo, fazendo uso, por exemplo, de recursos computacionais.

Em sua pesquisa, Silva (2004) investigou os registros de representação semiótica apresentados em dois livros didáticos com relação ao conceito de integral.[1]Silva fundamentou-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), que aborda aspectos cognitivos do conhecimento matemático. Silva (2004) analisou se os autores utilizaram mais de um tipo de representação das ideias de integral (linguagem natural, algébrica, gráfica, tabular) e se incentivavam as conversões de um registro para o outro, além das operações dentro de um mesmo tipo de representação.

Silva (2004) observou que existe uma preocupação grande, principalmente na obra de Stewart (2006), sobre o uso da linguagem gráfica ao introduzir as ideias. Não apenas no texto, mas também nos exercícios o uso dos vários tipos de representação é incentivado. Em todas as duas obras analisadas, Silva (2004) verificou que ao apresentar as técnicas de integração a ênfase é na linguagem algébrica.

A escolha do livro didático é importante. Os livros didáticos devem apresentar uma linguagem direcionada ao público a que se destina, apresentando um conteúdo vivo, que busca “conversar” com o leitor e para isso o uso das diversas representações deve revelar o quanto a Matemática é importante e levar o leitor a ter o desejo e gosto por estudá-la (SILVA; SILVA, 2010).

[1] Os livros analisados foram: (GUIDORIZZI, 2001; STEWART, 2002).

No entanto, percebemos nossos alunos, frequentemente relatando que os livros didáticos de Matemática são complexos, que seus exemplos e explicações são difíceis de compreender.

Mark van Doren, diz que "a arte de ensinar é a de tomar parte em descobertas", esclarecendo que ao escrever um livro de Cálculo, sua tentativa é que os alunos descubram o Cálculo, compreendendo sua beleza e utilidade. (DOREN apud STEWART, 2006). Stewart (2006) esclarece sobre a importância da compreensão conceitual e, segundo ele, tentou implementar esta compreensão através da chamada Regra de Três:

> Tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente. Visualização, experimentação numérica e gráfica e outras abordagens mudaram radicalmente a forma de ensinar o raciocínio conceitual. Mais recentemente a Regra de três foi expandida tornando-se Regra de Quatro com o acréscimo do ponto de vista verbal ou descritivo. (STEWART, 2006, p. vii).

A ênfase é explorar as várias formas de representação das ideias do Cálculo, o que vem em resposta aos resultados de pesquisas. (STEWART, 2006).

A linguagem gráfica é muito importante para o entendimento de conceitos do Cálculo. Analisando o progresso de alunos de Cálculo no traçado de gráficos de funções reais de uma e duas variáveis, Nasser (2009), acompanhou o desempenho de 8 alunos de Engenharia, ao longo das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Essa autora aponta como um dos obstáculos a não observação do domínio da função cujo gráfico deve ser traçado, evidenciando o desconhecimento de conceitos e procedimentos básicos, exercitados, muitas vezes, mecanicamente no ensino fundamental e médio.

Seja em grandes congressos de pesquisadores de Educação Matemática, em reuniões com pais e alunos, ou em conversas informais entre professores, alunos e demais interessados em educação, o entendimento matemático tem sido alvo de discussões. Até que ponto os alunos entendem o que os professores ensinam? Será que conceitos e procedimentos são aprendidos, ou será que são apenas momentaneamente memorizados, sem sentido, sem significado? Será que conceitos e procedimentos matemáticos são descartados por grande parte daqueles que consigam memorizá-los, restando uma pequena fração de alunos que realmente compreendam? Quais os fatores que dão continuidade a esse ciclo de memorização e descarte de conceitos e procedimentos que fundamentam o estudo do Cálculo

Diferencial e Integral?

Segundo Melo, “o ensino de Cálculo, muitas vezes é algoritmizado, e sua aprendizagem se reduz consequentemente, à memorização e à aplicação de uma série de técnicas, regras e procedimentos, que também terminam por algoritmizá-las”. (MELO, 2002, p. 4)

Frota ressalta que,

> Talvez um dos grandes problemas do ensino de Cálculo tenha suas raízes no tipo de aula de matemática e no tipo de matemática que o aluno vivencia na escola básica e reverter esse quadro tem demandado esforços da pesquisa em educação matemática. (FROTA, 2006 p.5).

Tall, um pesquisador internacionalmente conhecido por seus estudos do pensamento matemático avançado, destaca que começou a pensar sobre o Cálculo há mais de 35 anos e afirma que precisamos esclarecer exatamente o que nós desejamos que os estudantes aprendam e qual o desenvolvimento que é possível atingirem na época tecnológica atual. Comenta ainda, que para que os conceitos do Cálculo, como limite, continuidade, tangente, derivada, façam sentido, é preciso considerar como nós pensamos sobre eles, escrever o que eles significam. Não se trata de apenas colocar as definições, mas de apresentar as ideias e as relações entre elas, para que façam sentido para nós e para os estudantes. (TALL, 2010).

Rasslan e Tall (2002) investigaram os conhecimentos dos estudantes a respeito de definições e imagens sobre o conceito de integral. A pesquisa foi desenvolvida com um grupo de 41 estudantes ingleses cursando a etapa escolar correspondente ao Ensino Médio brasileiro. Foi possível constatar que apenas 7 alunos dos 41 da amostra sabiam a definição de integral. Esses pesquisadores utilizaram um questionário elaborado para explorar os esquemas cognitivos para o conceito de integral definida que são evocados pelos estudantes.

Ferrini- Mundy e Guardard, alertam que os estudantes que praticam rotinas em seus estudos de Cálculo no Ensino Médio, aprendem técnicas procedimentais que podem mesmo ser prejudiciais para seus estudos posteriores. (FERRINI-MUNDY; GUARDARD apud RASSLAN; TALL, 2002). Os resultados da pesquisa de Rasslan e Tall, apontam que os estudantes investigados, cujas notas eram acima da média e que estavam cursando um currículo com uma abordagem mais experimental e conceitual, na maioria não souberam escrever sobre a definição de integral de forma que fizesse sentido e apresentaram dificuldades na interpretação de problemas de cálculo de áreas ou integrais definidas, em contextos mais amplos. (RASSLAN; TALL, 2002).

Ao ingressarem nos cursos de engenharia, normalmente no primeiro semestre, os alunos se deparam com o Cálculo Diferencial e Integral, disciplina que exigirá conhecimentos vistos no ensino fundamental e médio. Não nos surpreendemos com as deficiências apresentadas pelos estudantes, especialmente na instituição onde foi realizada a nossa pesquisa; muitos dos estudantes optaram por fazer o curso de engenharia por trabalharem numa empresa que exige a formação superior. Assim, após anos sem estudar, retornam aos estudos para não perderem o emprego.

Não é raro escutarmos entre os estudantes um desabafo: "professor, nunca fui bom em matemática". Neste cenário, o ensino de Cálculo torna-se ainda mais desafiador. Como elaborar um curso de cálculo capaz de possibilitar aos estudantes, o entendimento e a confiança, capaz de motivá-los a continuar seus estudos, buscando recuperar o entendimento matemático dos conceitos e procedimentos, muitas vezes executados de forma rotineira sem que produzam os efeitos necessários ao aprendizado?

Quando se fala em entendimento matemático, aos olhos dos professores de matemática significa que os estudantes deveriam desenvolver habilidades de compreender conceitos matemáticos, interpretar esses conceitos, compreendendo os porquês de aplicar determinados procedimentos, reconhecer quando aplicá-los e perceber os alcances desta aplicabilidade.

O pouco tempo dos alunos que é disponível para os estudos nos leva a repensar: como preparar materiais didáticos para atender as necessidades desses alunos que possuem pouco tempo para estudar e que apresentam deficiências oriundas de um ensino fundamental e médio em que não puderam discutir e construir os conceitos fundamentais de Matemática?

Frota, em sua pesquisa investigou como os alunos estudam Matemática. Essa autora observou que os alunos apresentam perfis de estilos de aprendizagem diferentes, com uma ênfase teórica, prática ou investigativa. (FROTA, 2009). Segundo Frota, algumas vezes os alunos não desenvolvem um método próprio de estudo, o que a autora considerou como um estilo incipiente. (FROTA; 2002; 2007).

Os resultados de pesquisa apontam a importância do professor para que o aluno desenvolva estratégias de estudo e aprendizagem. Desde as séries iniciais ao curso superior, as deficiências vão, por vezes, se acumulando, provocando reações diversas nos estudantes como a sensação de incompetência e a insatisfação com o curso. Os alunos perdem o interesse em estudar Matemática. Muitos desses estudantes desistem de buscar o entendimento matemático e limitam-se, muitas vezes, a adotar estratégias de estudos que priorizam repetições de modelos, na maioria das vezes sem nenhum entendimento.

A solução rotineira de problemas pode não contribuir para o desenvolvimento mental do aluno. Segundo ele, a resolução de problemas não rotineiros pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento racional no processo de compreensão, exploração, análise e aplicação de conceitos matemáticos. No entanto, os alunos temem a resolução de problemas não rotineiros, pois, exigem ações inesperadas, exigindo maior compreensão dos conceitos e procedimentos. (POLYA, 1995).

Que tipo de estratégias poderia evitar a mecanização no estudo do Cálculo?

Melo, na tentativa de buscar abordagens diferenciadas para o ensino de cálculo, em especial o ensino de integrais, aponta as possibilidades que o uso de novas tecnologias pode trazer para o processo. Sugere a elaboração de atividades para o ensino de integral utilizando recursos computacionais, que através da visualização e simulações, possibilitam explorar e controlar variáveis, realizando de forma mais rápida e prática rotinas e algoritmos cansativos que não interferem no aprendizado. (MELO, 2002).

A pesquisa que desenvolvemos teve como objetivo investigar metodologias que buscam uma melhoria no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo. Não foi possível a utilização de laboratórios e recursos computacionais e a proposta foi elaborada para ser desenvolvida em sala de aula. A proposta de pesquisa consistiu em investigar as contribuições que Lições de Cálculo desenhadas com foco no uso de exemplos pode trazer para o aprendizado de Cálculo. A abordagem pretendeu dar significado ao aprendizado de conceitos e procedimentos do Calculo Integral, através da elaboração de um conjunto de exemplos que podem dar sentido aos conhecimentos conceituais e procedimentais, podendo levar ao entendimento matemático.

2.2 Conhecimento conceitual e procedimental

O sonho de todo professor de matemática é que seus alunos aprendam matemática com compreensão e de forma significativa. Para criar e desenvolver ambientes que promovam a compreensão e a aprendizagem, os professores precisam estar conscientes das dificuldades dos alunos na aprendizagem de matemática.

Os professores precisam saber que dois tipos de tipos de conhecimentos tornam-se importantes para aprender com significado: o conhecimento conceitual e procedimental.

Hiebert e Lefevre, caracterizam o conhecimento conceitual como aquele que é parte de uma rede composta por peças individuais de informação e as relações entre estas peças. Já se referindo aos conhecimentos procedimentais, definem que esses incluem uma familiaridade com o sistema de representação de símbolos da matemática e os conhecimentos de regras e procedimentos para a resolução de exercícios de matemática. (HIEBERT; LEFEVRE, 1986).

O conhecimento procedimental pode ou não ser aprendido de forma significativa, porém, o conhecimento conceitual é sempre aprendido com significado. (HIEBERT; LEFEVRE, 1986).

Skemp, classifica o conhecimento em conhecimento relacional e conhecimento instrumental. A matemática envolve uma extensa hierarquia de conceitos, nós não podemos formar qualquer conceito específico até que tenhamos formado todos aqueles que dele dependem. (SKEMP, 1976).

Conhecimento instrumental, é a capacidade de aplicar uma regra apropriada para a solução de um problema sem saber a razão pela qual a regra funciona. Em outras palavras, saber "como", mas não saber "por quê". Este conhecimento, geralmente requer não só o conhecimento dos objetos, mas também do formato e da representação simbólica relacionada. Além disso, muitas vezes exige execução de algoritmos, que às vezes são executados inconscientemente. (SKEMP, 1976).

Já o conhecimento relacional está associado à capacidade de saber o "porquê". Compreender os motivos pelos quais aplicamos determinados procedimentos e perceber outras possibilidades. Quando o aluno é capaz de relacionar e reorganizar conceitos, podendo deduzir outras possibilidades para os conceitos e procedimentos aprendidos, dizemos que houve a compreensão conceitual.

Skemp, classifica o conhecimento em relacional e instrumental. (SKEMP, 1976). Já Hiebert e Lefevre, falam em conhecimento conceitual e procedimental. Embora os termos usados sejam diferentes há um equivalência entre as categorias propostas por esses dois pesquisadores. (HIEBERT; LEFEVRE, 1986).

Para exemplificarmos o conhecimento conceitual, suponhamos duas funções f e g, com f(x)>g(x) num intervalo [a,b]. O aluno ao entender que a integral $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, poderá ser interpretada como a área da região compreendida entre as duas curvas representadas funções no intervalo [a,b] demonstra uma compreensão conceitual. Demonstra ter compreendido que essa área corresponde à soma das áreas de todos os infinitos retângulos introduzidos no intervalo de a até b, entendendo que a base de cada retângulo é representada por um valor infinitamente pequeno dx e a altura representada pela diferença f(x)-g(x). O conhecimento procedimental corresponderia à execução dos procedimentos, escolhendo a técnica de integração e fazendo os desenvolvimentos algébricos.

É compreensível o desejo dos professores de que seus alunos equilibrem os dois tipos de conhecimentos. O aprendizado de procedimentos sem o conhecimento conceitual não fornece aos alunos a capacidade de extrapolar suas conclusões a respeito do poder das integrais. Já o aprendizado conceitual poderá mostrar para os alunos que outras aplicações semelhantes à utilizada para o cálculo de áreas usando o conceito de soma infinita poderão surgir, como a utilização das integrais para o cálculo de volumes, comprimento de arcos, etc.

Concordamos com Frota (2002), que a realização de rotinas e procedimentos, a princípio, pode não levar a contribuir para a aprendizagem conceitual, porém, se estes procedimentos são realizados e há uma reflexão sobre porque são realizados, estes procedimentos podem contribuir para uma aprendizagem com significado, possibilitando a compreensão dos conceitos que poderão ser introduzidos através da reflexão sobre estes procedimentos. Frota destaca que

> Pode-se ensinar o calculo vetorial sem nenhuma relação como o cálculo matricial. Por outro lado, o estabelecimento de uma certa rotina ao operar nos espaços R^2 e R^3, pode facilitar sobremaneira a construção do conceito mais geral e abstrato de espaço vetorial (FROTA, 2002, p.63-64).

Para que o aluno compreenda um conceito, ou um grupo de conceitos ou um símbolo, deve relacioná-lo a um esquema apropriado, para formar uma ligação entre ideias, fatos e procedimentos. Um conceito é construído a partir de dados recolhidos e, em seguida é relacionado a outros conceitos. É um processo dinâmico. (SKEMP, 1976).

Para ilustrar este fato, imagine um professor numa primeira abordagem sobre Integral, escolhendo dedicar uma pequena fração de seu tempo questionando os alunos sobre algumas técnicas de derivação, recuperando conceitos e procedimentos anteriormente estudados. Sem dúvida a apresentação dos conceitos básicos de integral será mais produtiva, uma vez que foi relacionada a conceitos e procedimentos já conhecidos podendo conectá-los, facilitando uma "rede de conceitos e procedimentos", que ao se interligarem poderá fazer mais sentido, tornando o aprendizado mais significativo, evitando um aprendizado fragmentado, sem conexão. Ao aprenderem procedimentos e algoritmos isolados, esse aprendizado sem conexão dificilmente fará sentido para o aluno. Em especial no ensino de Cálculo, consideramos ideal relacionar procedimentos e conceitos anteriores para a introdução de novos conceitos. Partindo de conhecimentos prévios pode-se obter um interesse maior por parte dos alunos. No ensino de Matemática e em especial no ensino de Cálculo é grande o número de pesquisadores buscando discutir a aprendizagem. Objetivando encontrar abordagens que possibilitem o entendimento conceitual e procedimental, pesquisas são realizadas discutindo as possíveis contribuições e apontando diretrizes, adequando as abordagens às espectativas dos estudantes. É evidente que a abordagem do Cálculo, por exemplo, deverá ser diferente num curso de engenharia e num curso de Bacharelado em Matemática. Entretanto, independente do curso em que o Cálculo é trabalhado, é unânime entre os professores, que o entendimento matemático precisa ser atingido.

> É preciso estudar globalmente e com mais profundidade as relações dialéticas entre o pensamento (as ideias matemáticas), a linguagem matemática (sistemas de signos) e as situações-problemas, para as quais se inventam tais recursos (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.10).

Entedemos que houve o entendimento matemático no momento que os professores conseguirem sincronizar procedimentos e conceitos, fazendo com que os alunos consigam executar procedimentos conscientes das razões porque executá-los, evoluindo para outros níveis mais complexos de conceitos; formulando, aceitando e refutando hipóteses de forma consciente, ampliando suas redes de conhecimentos e conectando conhecimentos novos a antigos já estudados.

2.3 O papel do exemplo na aprendizagem de cálculo

O nosso objetivo de pesquisa foi investigar as possibilidades pedagógicas que o uso de exemplos pode proporcionar aos alunos no estudo de Cálculo Integral. Para desenvolver nosso estudo, nos apoiamos em diversos trabalhos realizados por pesquisadores que investigam as contribuições dos exemplos nos processos de ensino e de aprendizagem.

Sierpinska, aponta a necessidade de buscar métodos de ensino que possibilitem aos alunos entender a matemática e perceber o que eles não entendem. Conscientes do que os alunos não entenderam, é preciso buscar meios para esclarecer suas dúvidas. (SIERPINSKA, 1994).

O entendimento matemático possibilitaria aos estudantes desenvolverem a habilidade de compreender e construir conceitos matemáticos e procedimentos. Através do entendimento o estudante poderá interpretar os conceitos, perceber os motivos de aplicar determinados procedimentos, reconhecendo quando aplicá-los e os alcances desta aplicabilidade.

Qual o papel representado pelo uso de exemplos no ensino de Matemática? Consideramos que o uso de exemplos é fundamental no processo de ensino aprendizagem de Matemática, em particular de Cálculo Diferencial e Integral.

Concordamos com Figueiredo, Contreras e Blanco (2006, p.31), que afirmam que “os alunos aprendem matemática mais pelo envolvimento com exemplos do que através de definições formais.”

Através de nossa experiência acadêmica, é comum ouvirmos durante nossas aulas, após a exposição de determinadas definições o aluno propondo; "professor dê um exemplo". Percebemos muitas vezes que esse pedido visa esclarecer melhor o que não foi assimilado ou confirmar suas conclusões, tornando as definições e conceitos, mais próximos e palpáveis ao aluno.

A metáfora do andaime, usada por Figueiredo, Contreras e Blanco (2006), é útil para percebermos a importância dos exemplos na aprendizagem. Na aprendizagem, os exemplos têm o papel semelhante ao dos andaimes durante a construção de um edifício. Depois de construído o edifício, os andaimes podem ser retirados, pois o edifício já não necessita do seu auxílio na sustentação. Assim, é o papel dos exemplos na construção da aprendizagem matemática; uma vez construído o entendimento matemático, não necessitamos mais daqueles exemplos. Porém, sempre que uma dúvida surgir, poderemos recorrer aos exemplos.

Figueiredo, Blanco e Contreras, desenvolveram investigações acerca da Exemplificação do Conceito de Função. Os pesquisadores trabalharam com quatro professores estagiários e o papel principal dos exemplos deixou de ser o esclarecimento, passando a ser desempenhar a função de construção do conceito através das representações algébrica e gráfica. (FIGUEIREDO; BLANCO; CONTRERAS, 20056).

As contribuições dos exemplos na aprendizagem de Matemática são inquestionáveis. Cada professor, em sua trajetória profissional vai adquirindo com a experiência e observações, o seu modo de abordar determinados conteúdos. Essas abordagens, muitas vezes, são realizadas através de exemplos. Alguns desses exemplos são previamente preparados pelos professores, enquanto outros surgem durante as discussões que surgem com a participação dos alunos. Assim, os professores, atentos aos questionamentos levantados pelos alunos podem selecionar exemplos que abordam pontos cruciais dos conteúdos, objetivando otimizar o tempo de estudo, antecipando e provocando discussões necessárias ao entendimento dos conceitos e procedimentos relacionados a determinado conteúdo.

Segundo Figueiredo, Contreras e Blanco:

> [...] ensinar e aprender matemática baseia-se na criação e na ampliação dos espaços pessoais de exemplos nos quais alunos e os professores trabalham suas estruturas e ligações. Adquirir competências matemáticas consiste em desenvolver espaços de exemplos complexos, inter-relacionados, mas, no fundo, compreensíveis para o aluno. (FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009, p. 35).

Figueiredo, Contreras e Blanco, (2009), fundamentados em Goldenberg e Mason (2008), afirmam que aprender mais sobre um determinado tópico é evoluir para exemplos mais avançados e construções mais avançadas para esses exemplos. Ensinar eficientemente inclui o uso de atividades e interações através das quais os alunos melhoram os acessos aos exemplos.

Watson e Mason propõem que os exemplos constituem elementos de espaços estruturados. Os autores usam o termo espaço de exemplos para denominar esse espaço. Para eles a extensão e exploração de espaços de exemplos são essenciais em matemática.

> Aprender matemática consiste em explorar, rearranjar e estender espaços de exemplos e as relações entre eles e dentro deles. Desenvolvendo uma familiaridade com esses espaços, os estudantes podem ganhar fluência e facilidade em associar técnicas e discursos. Experienciando extensões de seu espaço de exemplos (se bem orientado) contribui para a flexibilidade de pensamento não apenas em matemática, mas, talvez, de modo mais geral, e isso fortalece a apreciação e adoção de novos conceitos. (WATSON; MASON, 2005, p.6, tradução nossa) [2].

Mason e Watson (2005), sobre espaço de exemplos citam Michener (1978), para quem o processo seria uma descoberta, porque a ideia desse autor de espaços exemplos é que eles existem para determinadas definições matemáticas e teoremas.

Os autores afirmam:

> Para nós, o processo é uma combinação de descoberta do que é convencional; do que já é conhecido, mas pode ser reestruturada em novas relações, e da construção de novos objetos, novas relações, significados e entendimentos pessoais de componentes antigos e familiares (MASON; WATSON, 2005, p.56).

Seguindo Figueiredo, Contreras e Blanco (2009), utilizaremos o termo espaço de exemplos para nos referirmos ao conjunto de exemplos que são previamente selecionados pelo professor, ou que surgirão a partir das discussões sobre os conceitos e procedimentos.

Entendemos que o termo espaço de exemplos refere-se aos exemplos que apresentamos aos alunos e aos quais recorremos durante as discussões. Ao surgirem questionamentos, recorremos a esses exemplos para esclarecer e delimitar os alcances dos conceitos e procedimentos. Consideramos de fundamental importância que o professor procure ampliar seu espaço de exemplo, e para tal, a observação e registros dos questionamentos e dúvidas surgidas durante uma

---

[2] Learning mathematics consists of exploring, rearranging, and extending example spaces and the relationships between and within them. Through developing familiarity with those spaces, learners can gain fluency and facility in associated techniques and discourse. Experiencing extensions of your example spaces (if sensitively guided) contributes to flexibility in thinking not just within mathematics but perhaps even more generally, and it empowers the appreciation and adoption of new concepts.

exposição poderá contribuir para uma melhor seleção desse espaço de exemplos, evitando a presença de exemplos que não apresentem as variações necessárias para o processo.

Figueiredo, Contreras e Blanco apresentam uma ampla discussão sobre os vários tipos de exemplos, categorizados por diferentes pesquisadores. (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009) que propõe quatro categorias para os exemplos: exemplos iniciais, exemplos referências, exemplos modelos e contra exemplos.

Exemplos iniciais são aqueles que possibilitam iniciar novos procedimentos e conceitos; são os que utilizamos numa primeira abordagem devido à facilidade de entendimento, provocando novas intuições importantes. Imaginemos um professor que expõe à turma que a integração é operação inversa da derivação. Assim, encontrar a integral de uma função f, é buscar outra função F, cuja derivada é f. Com certeza não haveria complexidade em compreender essa ideia se fosse apresentada ao aluno uma função do tipo $f(x)=2x$, indagando sobre qual a integral de f. Ele, provavelmente compreendendo as regras de derivação anteriormente estudadas e, através da apresentação feita pelo professor, compreenderia que uma integral de f é a função, $F(x) = x^2$, e incentivado pelo professor apontaria também, outras funções como: $F(x)=x^2+ 3$, ou $F(x)= x^2+10$. Alguns outros recordariam que a derivada da constante é zero e assim toda função da forma $F(x)= x^2+C$ tem como derivada $f(x)=2x$. A partir desse momento, os gráficos das várias funções poderiam ser apresentados, servindo de exemplos para a construção da ideia que todas aquelas curvas são primitivas de $f(x)=2x$, ou, ainda, falando de forma geométrica, $f(x)=2x=F'(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de F em um ponto genérico (x, F(x)).

Os exemplos de referência, para Rissland-Michener são aqueles que frequentemente mencionamos. Dada a amplitude de conclusões possíveis sobre novos conceitos e sua importância, lançamos mão desses exemplos para verificarmos, por exemplo, a compreensão de conceitos e procedimentos. (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009)

Ao introduzir o cálculo de áreas através de integrais definidas, um professor poderá recorrer a uma função, positiva num intervalo que seja conveniente, possibilitando ao aluno constatar que a área da região limitada acima pela reta dada por $f(x)=x$, abaixo pelo eixo x, no intervalo $0 \le x \le 4$ será equivalente ao valor numérico obtido ao calcularmos a integral definida $\int_0^4 x dx$. Observemos que este exemplo poderá ser usado para introduzir a aplicação da integral definida para calcular a área entre uma curva e o eixo x, podendo ser classificado como exemplo inicial e exemplo referência.

Os exemplos modelo, segundo Rissland-Michener, são paradigmáticos e genéricos; sistematizam as conclusões e evoluções sobre os argumentos aplicados e os conceitos em estudo. (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Ao apresentar a integração como uma operação inversa da derivação, pode-se exibir a potência de x^n, com n diferente de -1, e pedir aos alunos que apresentem uma expressão que represente a integral de x^n. Os alunos podem associar a função $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ como uma possível resposta.

Finalmente, os contra exemplos, são aqueles exemplos a que recorremos para demonstrar que um determinado argumento é falso. Ao introduzirmos um novo conceito ou procedimento, sem dúvida, os alunos vão evoluindo para outro nível de entendimento, novas conclusões surgem e outros questionamentos são inevitáveis, e certamente as conclusões, muitas vezes são construídas sem muita preocupação com o rigor por parte dos alunos, assim, os contra exemplos podem contribuir apontando que algumas dessas conclusões são falsas.

Para melhor esclarecer o papel do contra exemplo, retornemos ao exemplo anteriormente citado: a integral definida $\int_0^4 x dx$ poderá ser um exemplo referência, uma vez que o mesmo representa a área da região plana abaixo de *f(x)=x*, acima do eixo *x*, lateralmente pelas retas *x=0 e x=4*. Porém, considerando a integral definida da mesma função *f(x)=x* no intervalo [-1;2], o valor numérico obtido na integral $\int_{-1}^2 x dx$ não representará a área entre a reta dada pela função e o eixo x no intervalo considerado. Assim, pode-se perceber claramente que nem toda integral representa uma área, esclarecendo o argumento falso, aflorado com frequência, de que toda integral definida representa uma área.

Já Figueiredo, Blanco e Contreras, usaram uma classificação específica para a exemplificação do conceito de função. Eles categorizaram os exemplos em: Definição, Representação, Características, Aplicações Internas e Aplicações Externas. Primeiramente a apresentação da função em estudo; em seguida, os primeiros contactos com as suas possíveis representações; após os primeiros contatos, as pormenorizações, porque as primeiras dúvidas surgem e o seu esclarecimento torna-se necessário; logo depois, a relação entre o conceito de função com outros conceitos matemáticos; finalmente, as aplicações externas, porque a aplicação à vida real e a outras ciências é fundamental para uma compreensão global do conceito de função e para o seu ensino. (FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Bills et al., aprofundam a tipologia sobre exemplos, distinguindo-os pela sua natureza em: exemplos resolvidos, que são apresentados prontos ou resolvidos juntamente com o professor; exercícios, que são propostos pelo professor para que os alunos resolvam. (BILLS et al., apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Observamos também a distinção dos exemplos segundo a forma e a função que desempenham: exemplos genéricos, contra exemplos e não exemplos. Os exemplos genéricos são aqueles que ilustram procedimentos e conceitos. Os contra exemplos contrariam uma afirmação e os não-exemplos, delimitam os alcances de um conceito ou de um caso em que um procedimento não se aplique ou falhe, como anteriormente. (BILLS et al., apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

É importante ressaltar que professores e alunos poderão interpretar um mesmo exemplo de forma diferente. Para o professor, determinado exemplo pode ser visto como referência e generalizador, já o aluno poderá vê-lo como mais um exemplo a aprender. Ao professor cabe esclarecer e destacar as qualidades e os alcances pretendidos com o exemplo, alertar sobre sua importância e apontar a função que pretende que ele desempenhe.

Tsamir, Tirosh e Levenson, observaram que os alunos podem aprender novos conceitos através de experiências e dedução das relações geradas em exemplos particulares. Além disso, o contato com exemplos pode contribuir no ensino de novos conceitos. Para essas autoras:

> Na Educação Matemática, os dois pontos de vista são muitas vezes empregados ao abordar a formação de conceitos geométricos. Inicialmente, a construção mental de um conceito inclui principalmente imagens visuais com base na percepção semelhanças de exemplos, também conhecida como características (de acordo com Smith et al. 1974). Esta discriminação inicial pode levar apenas à aquisição de conceitos parciais. Mais tarde, exemplos servem como base para ambos os atributos perceptíveis e não perceptíveis, em última instância levando a um conceito baseado em suas características definidoras. (TSAMIR; TIROSH; LEVENSON, 2008, tradução nossa).[3]

Consideramos que o professor deverá apresentar uma grande variedade de exemplos que deverão contemplar diferentes abordagens de forma a atender as necessidades dos alunos, promovendo circunstâncias de aprendizagem. A utilidade de um exemplo dependerá de diversos fatores. A forma como o professor apresenta um exemplo e as características desse exemplo podem fazer a diferença entre um exemplo bem compreendido e útil e, apenas, mais um outro exemplo (FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

O professor dá sugestões e formula perguntas com o intuito de orientar os alunos na resolução de um exercício proposto. Os questionamentos e sugestões presentes num exercício a resolver podem facilitar o processo, conduzindo o aluno a buscar conhecimentos e recursos anteriormente estudados, mas, que às vezes ficam esquecidos. Desse modo, o professor poderá conduzir o aluno a uma descoberta guiada segundo coloca Ernest (1996).

Cabe destacar que a aprendizagem Matemática não é uma tarefa fácil, necessitando dedicação e estudo. À medida que o aluno vai evoluindo através da discussão e estudo dos exemplos, definições e procedimentos podem ser esclarecidos e reformulados. Nossas leituras e investigações sobre os tipos de exemplos e sua função possibilitaram propor uma classificação que julgamos adequada para a elaboração das Lições de Cálculo Integral que integram nossa pesquisa. As categorias buscam contemplar os tipos de exemplos com os quais lidamos na sala de aula e esperamos que essa classificação possa ser útil para outros professores, contribuindo em outras investigações.

---

[3] Within mathematics education, both views are often employed when addressing the formation of geometrical concepts. Initially, the mental construct of a concept includes mostly visual images based on perceptual similarities of examples, also known as characteristic features (in line with Smith et al. 1974). This initial discrimination may lead to only partial concept acquisition. Later on, examples serve as a basis for both perceptible and nonperceptible attributes, ultimately leading to a concept based on its defining features.

2.4 Uma proposta de classificação de exemplos

Concordando com a necessidade de buscar estratégias que possibilitem aos alunos compreender conceitos e procedimentos com significado, julgamos que, uma seleção adequada de exemplos, que auxiliem os alunos na busca do entendimento, poderia contribuir no processo de aprendizagem de Cálculo Integral.

Sustentados pelos estudos de diversos pesquisadores, desenvolvemos uma classificação própria dos tipos de exemplos. Essa construção só foi possível após um estudo de diversos trabalhos envolvendo o uso, a construção e as contribuições possíveis dos exemplos na aprendizagem de Matemática. Procuramos elaborar uma classificação que, julgamos ser objetiva e clara em relação às atribuições e objetivos que desejamos ao elaborar um exemplo como parte integrante de lições que objetivam o ensino de Cálculo Integral. Essas lições serão apresentadas no Capítulo de Metodologia, em que apresentamos o produto dessa dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Essa classificação compreende seis categorias de exemplos: introdutórios, ampliadores, sistematizadores, retificadores, desafiadores e diagnosticadores.

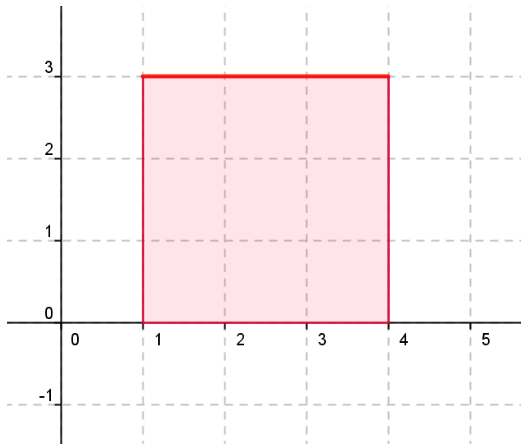
2.4.1 Exemplos introdutórios

São exemplos usados para introduzir conceitos e/ou procedimentos. Equivalem aos exemplos iniciais, propostos por Rissland-Michener. (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; BLANCO; CONTRERAS, 2009). Normalmente são de fácil entendimento e sem grandes dificuldades, sendo usados nas primeiras explicações. Envolvem regras e procedimentos básicos.

O exemplo ilustrado na Figura 1 pode ser considerado como introdutório.

Notemos que o exemplo da Figura 1 pode ser usado para introduzir conceitos e procedimentos usados para calcular áreas através de integral. O aluno poderá relacionar a representação simbólica da integral definida e rapidamente perceberá a eficiência do processo que poderá ser estendido a outras representações mais complexas.

Figura 1 - Exemplo introdutório

A representação gráfica seguinte refere-se à região plana delimitada por f(x)= 3, x=1 e x=4. Calculando a integral definida $I = \int_1^4 3dx$ obtemos: $\int_1^4 3dx = 3x\Big]_1^4 = 3(4-1) = 9$

a) Que relação existe entre o valor da integral calculada e o valor da área do retângulo sombreado? b) Observe os contornos do retângulo e os limites de integração da integral e descreva suas observações.

Fonte: Elaborada pelo autor

2.4.2 Exemplos ampliadores

São aqueles que dão seguimento à apresentação dos conceitos e procedimentos feita através de exemplos introdutórios. Evoluem quanto ao nível de complexidade; apresentam procedimentos mais complexos e exigem recursos normalmente não necessários em exemplos introdutórios. Esses exemplos desempenham o papel de ampliar os conhecimentos dos alunos, propondo situações de conflitos que, gradativamente conduzem o aprendiz a níveis mais complexos, levando o aluno a reformular seus conceitos e procedimentos. Podem ser comparados aos exemplos de referência, segundo a classificação de Rissland-Michener (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Propor primeiramente ao aluno que faça a representação gráfica de uma função *f(x)=x* e que use uma integral para representar e calcular a área da região limitada, por *y=x, o eixo x, x=1 e x=3*. Em seguida, pedir que calcule a área limitada, *por y=x, y=-1, x=1 e x=3.* O aluno perceberá que a área não será a mesma, necessitando uma reformulação de procedimentos; percebendo as variações ele retomará suas conclusões e ampliará seus modelos.

2.4.3 Exemplos retificadores

São exemplos que exibem situações conflitantes que aparecem frequentemente após a introdução de conceitos e procedimentos. Discutem possíveis interpretações equivocadas de conceitos e procedimentos adotados nas resoluções. Esta classificação contempla os contra exemplos adotados por Rissland-Michener (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Para melhor compreendermos o papel dos exemplos retificadores, após uma primeira abordagem sobre a operação de integração como operação inversa da derivação e apresentando a integral indefinida do tipo $\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ [4], frequentemente os alunos ao integrarem uma função do tipo $\int senxdx$, apontam como respostas funções do tipo $senx^2$. Percebemos facilmente que houve uma associação indevida com a fórmula de integração de potências: a ideia de somar ao expoente de x uma unidade. O professor poderá apontar tal solução e pedir ao aluno que identifique qual o erro cometido, antecipando situações que poderão surgir posteriormente.

Esses exemplos podem otimizar o aprendizado, uma vez que, apontando e discutindo procedimentos e interpretações erradas que surgem durante as leituras e aplicação de conceitos. Esses exemplos antecipam dúvidas que podem surgir individualmente ou coletivamente.

A ampliação do espaço de Exemplos Retificadores por parte dos professores possibilita um aproveitamento do pouco tempo de estudo disponível pela grande maioria dos estudantes das faculdades particulares, pois, a grande maioria tem que trabalhar e estudar, restando pouco tempo disponível para o estudo. É evidente que a ampliação do espaço de exemplos por um professor depende muito da sua experiência profissional, observação e interesse em detectar as interpretações

[4] Essa fórmula permanece válida para n real diferente de -1. (THOMAS, 2002, p.329).

erradas que podem e surgem com mais frequência.

2.4.4 Exemplos sistematizadores

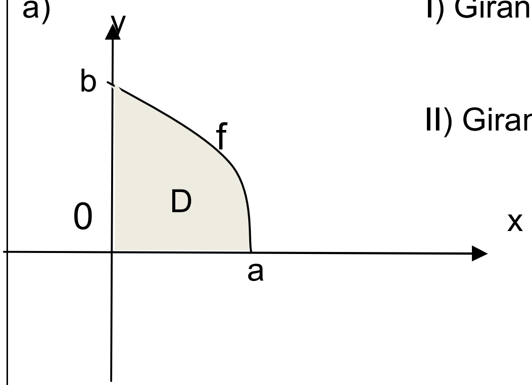
São exemplos que resgatam e sistematizam importantes conclusões acerca das definições e procedimentos, frequentemente utilizados. Desempenham papel semelhante ao dos exemplos modelos. Normalmente são teóricos. Podem ou não anteceder outros exemplos. Após um primeiro contato com um determinado assunto, o professor poderá apresentar tais exemplos como forma de sistematizar as ideias gerais.

Figura 2 - Exemplo sistematizador

EC27 - Seja D a região plana sombreada. Escreva uma integral que represente o volume do sólido obtido em cada caso:

Seja D a região plana sombreada. Escreva uma integral que represente o volume do sólido obtido em cada caso:

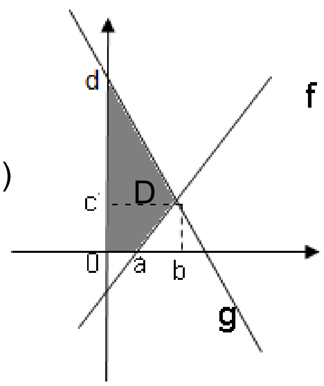
a)



I) Girando D em torno do eixo x:

II) Girando D em torno do eixo y:

b)



I) Girando D em torno do eixo y.

II) Girando D em torno do eixo x.

Fonte: Elaborada pelo autor

A Figura 2 apresenta um exemplo sistematizador. Neste exemplo, após uma primeira abordagem sobre o uso de integrais para o cálculo de volume de sólidos obtidos pela rotação de uma região em torno do eixo das abscissas ou do eixo das ordenadas, o professor, juntamente com os alunos retoma e sistematiza procedimentos e conceitos a fim de esclarecer eventuais dúvidas como quais os limites de integração utilizar? As secções perpendiculares ao eixo de rotação serão discos ou coroas circulares?

2.4.5 Exemplos desafiadores

São exemplos que, para a sua execução, lançamos mão de diversos conhecimentos acumulados nos exemplos introdutórios, exemplos ampliadores e exemplos retificadores. Normalmente articulam diversos conhecimentos e procedimentos desenvolvidos pelo estudante nos vários conteúdos já estudados.

Para exemplificar podemos apontar algumas integrais envolvendo funções trigonométricas. Em algumas delas o aluno necessita aplicar recursos diversos como fatoração, arco duplo ou arco metade, identidades trigonométricas etc. Ex.: Calcular $\int 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$. O desafio consiste na busca que terá de ser feita pelo aluno, pesquisando entre as identidades trigonométricas aquela que é adequada para transformar $sen^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ e então integrar.

2.4.6 Exemplos diagnosticadores

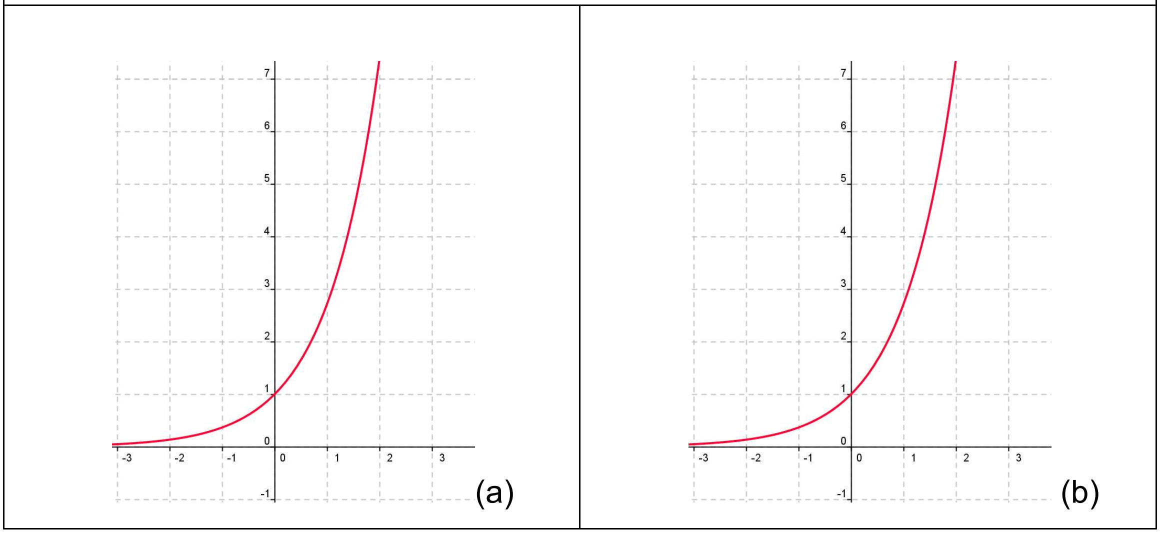
Consideramos exemplos diagnosticadores aqueles que usamos para diagnosticar as ideias prévias dos alunos sobre um conteúdo matemático, ou conceito já estudado. Podemos usar os exemplos diagnosticadores pretendendo uma verificação à priori; objetivamos, assim, um diagnóstico antecipado, para elaborar intervenções pedagógicas posteriores. Exemplos diagnosticadores estão sempre presentes em avaliações feitas individualmente ou em grupos, quando queremos verificar a compreensão por parte dos estudantes sobre os principais pontos dos conteúdos estudados.

Figura 3 - Exemplo diagnosticador

Dada a representação gráfica de $y=e^x$, faça o que se pede:

a) Destaque no gráfico a região cuja área será calculada ao resolvermos a integral definida $I_1=\int_{-1}^{2} e^x dx$, em seguida, calcule esse valor.

b) Represente graficamente a região cuja área é dada pela integral definida $I_2=\int_{0}^{2} [e^x - 1]dx$.



Fonte: Elaborada pelo autor

É importante ressaltar, que um exemplo poderá ser ao mesmo tempo introdutório e sistematizador, pois, poderá desempenhar as duas ou até mais função. Assim, uma classificação como exemplo inicial não o impedirá de ser classificado como sistematizador etc.

Estamos certos das contribuições que os exemplos podem desempenhar na aprendizagem. Entretanto, vale lembrar que a exposição de exemplos, mal conduzidos pelo professor, poderá criar concepções erradas, causando consequências desastrosas para o aprendizado. A transmissão de informações para a construção conhecimentos, por parte do professor, requer todo cuidado (FIGUEIREDO; BLANCO; CONTRERAS, 2006).

3 METODOLOGIA

No desenvolvimento desta investigação utilizou-se a metodologia qualitativa. Bogdan e Biklen escrevem sobre o conceito de pesquisa qualitativa apresentando cinco características básicas:

> - A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.
> - Os dados coletados são predominantemente descritivos.
> - A preocupação como o processo é muito maior do que com o produto.
> - O "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador.
> - A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. (BOGDAN; BIKLEN apud LUDKE; ANDRÉ, 1986, p11-13).

Consideramos que para responder à questão de nossa pesquisa seria adequada uma abordagem qualitativa, com a participação do professor pesquisador, preocupado mais com o processo, coletando as observações e registros com a participação dos alunos, para posterior análise e validação da pesquisa.

A pesquisa qualitativa é a modalidade que predomina entre os trabalhos de discentes e docentes, nas diversas linhas de pesquisa da área de Educação Matemática. (BORBA, 2008).

Os procedimentos usados em uma pesquisa moldam a questão a investigar. Na pesquisa qualitativa o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, bem como das condições sócio-políticas do momento. (BORBA, 2004).

Nessa pesquisa o objetivo foi investigar as contribuições que Lições de Cálculo, com um foco no uso de exemplos podem trazer no processo de Ensino de Cálculo Integral. A pesquisa não é isenta de nossas intenções e motivações.

Desenvolvemos o estudo junto aos alunos do 3º período de engenharia de uma instituição particular da cidade de Ipatinga, Minas Gerais, levando em conta a caracterização desses alunos e da instituição.

Fizemos primeiramente um estudo piloto, momento em que algumas lições foram testadas e posteriormente reorganizadas com as modificações e alterações que julgamos necessárias.

Após as reformulações foram reunidas e doze lições, que contemplaram, um estudo introdutório sobre as antiderivadas, integrais indefinidas, técnicas de integração por substituição simples, integração por partes, integral definida, teorema fundamental do cálculo. Algumas aplicações foram também abordadas, utilizando-se a integral no: cálculo de áreas e cálculo de volumes usando o método do disco e anel.

Usando a mesma abordagem através de lições com foco no uso de exemplos, abordamos a técnica de integração por frações parciais, mas, considerando-se o volume de dados, optamos por não inserir essa técnica no conjunto de Lições de Cálculo Integral apresentadas e analisadas no capítulo quatro.

3.1 O contexto de pesquisa

A pesquisa aqui relatada foi desenvolvida em uma Instituição de ensino Superior do interior de Minas Gerais, onde são ofertados cursos de graduação em Engenharia Civil, Elétrica, Mecânica, de Produção e de Automação.

Os alunos que ingressam nos cursos de engenharia nesta instituição, normalmente, realizam um vestibular que não tem um caráter seletivo, não exigindo dos aprovados conhecimentos matemáticos básicos que os mesmos já deveriam possuir para prosseguirem em um curso de graduação da área de exatas.

Ao ingressarem, os alunos cursam, entre outras disciplinas, a Matemática Básica, que tem por objetivo rever conceitos e procedimentos importantes estudados anteriormente e que fundamentam o estudo das disciplinas de Cálculo. Neste momento, percebe-se que a disciplina de Matemática Básica que teria um caráter revisional assume outro caráter, uma vez que grande parte dos alunos esqueceu ou até mesmo não estudou os conceitos e procedimentos básicos que deveriam ser apenas revisados. Muitos dos alunos concluíram seus estudos há muito tempo e estão retornando à faculdade. Há também um grande número de alunos que concluíram seus estudos em supletivos e cursos similares que aceleram o processo de ensino e muitas vezes não tiveram a oportunidade de apreender alguns conteúdos básicos.

No segundo período, os alunos cursam a disciplina de Cálculo Diferencial I, que aborda os conceitos de limites, derivadas e aplicação das derivadas. No terceiro período, é cursada a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, que prioriza o ensino de Integrais, apresentando ao final uma introdução ao estudo das funções de várias variáveis.

Nesta instituição as aulas são ministradas de segunda-feira à sexta-feira, no horário de 19h às 22h, tendo apenas dois módulos[5] de aula por dia. O primeiro de 19h às 20h15min e o outro de 20h45 às 22h. Os alunos cursam cinco disciplinas a cada semestre, distribuídas duas a duas revezando-se entre primeiro e segundo horário na segunda-feira e quarta-feira, ou na terça-feira e quinta-feira. A quinta disciplina funciona apenas na sexta-feira, ocupando os dois módulos de aula, havendo 30 minutos de intervalo entre o primeiro e o segundo módulo.

A pesquisa foi desenvolvida com duas turmas, A primeira delas era formada por alunos dos cursos de Engenharia de Produção e Mecânica, possuindo alguns poucos alunos de outros cursos que escolheram cursar a disciplina nessa turma. As aulas tinham a duração de 1h15min, uma no primeiro módulo da segunda-feira, de 19h às 20h15min e outra na quarta-feira, no segundo módulo, das 20h45min às 22h.

A segunda turma era composta, na maioria, por alunos do curso de Engenharia Elétrica, possuindo também, alunos do curso de Engenharia Civil que haviam sido reprovados anteriormente na disciplina de Cálculo II. As aulas ocorriam todas na sexta-feira, uma no primeiro módulo, 19h às 20h e 15 minutos e outra após o intervalo, 20h e 45 minutos até as 22 horas. Algumas vezes, os alunos e o professor acharam por bem usar os dois módulos sem intervalo, uma vez que parte do tempo poderia ser destinada a uma exposição coletiva e o restante do tempo destinado à execução das atividades em dupla pelos alunos, finalizando o tempo das duas aulas às 21h e 30 minutos.

Na instituição onde foi desenvolvida a pesquisa, a orientação é que uma das aulas semanais seja teórica e a outra prática. A aula dita teórica funciona em uma sala onde são disponibilizados um computador conectado a um projetor, utilizado para a projeção de slides elaborados em *"power point"*, contendo, algumas vezes, um resumo de pontos importantes a serem apresentados durante as aulas expositivas. Na turma que em que as aulas são geminadas, alterna-se entre discussões teóricas, usando a projeção de slides e aulas de exercícios.

A instituição disponibiliza para os alunos uma biblioteca, contendo um acervo razoável disponível para consulta, sendo o empréstimo aos alunos feito por um

[5] Módulo é o tempo destinado a uma aula.

prazo máximo de 15 dias, podendo ser renovado após este prazo. Há de se ressaltar que não há livros que atendam a todos os alunos, impedindo que o professor adote um texto e que o aluno possa emprestar da biblioteca.

Os alunos dos cursos de engenharia dessa Instituição não têm o hábito de adquirir livros didáticos, principalmente os livros de Cálculo, mesmo considerando o Cálculo uma disciplina importante para o curso. Os preços pouco acessíveis dos livros didáticos levam os alunos a não optarem pela compra de livros dessa disciplina, mas livros da área técnica. Dessa forma, considera-se importante a elaboração de um material para o acompanhamento e posterior consulta dos alunos acerca dos conteúdos de Matemática abordados.

Grande parte dos alunos dos cursos de Engenharia na Instituição não possui hábitos de estudos ou não dispõem de tempo disponível para dedicar aos estudos. A Instituição atende alunos que trabalham por turno, alguns destes trabalham durante o dia e estudam à noite ou revezam entre os horários de 7h às 15h, 15h às 23 h e de 23h às 7h. Às vezes, alguns desses alunos perdem as duas aulas da semana, o que costuma prejudicar muito o aprendizado.

Assim o desafio é manter os estudantes informados, fornecendo-lhes elementos para que possam estudar. Considerando também a limitação do tempo para estudos de Cálculo (carga horária pequena) é necessário optar por uma abordagem de ensino que privilegie os conhecimentos básicos de procedimentos e conceitos, procurando despertar nos alunos a consciência de que podem e precisam estudar em casa.

3.2 Etapas de desenvolvimento da pesquisa

Quando elaboramos as Lições de Cálculo, para discutirmos um determinado conteúdo, não queremos apenas fazer uma exposição de conceitos e procedimentos, transmitindo aos nossos alunos informações; pretendemos torná-los capazes de fazer novas descobertas. Nossas lições devem promover o crescimento dos alunos, promovendo sua criatividade, capacidade de descoberta e adaptação. Entendemos que as lições são importantes no processo de ensino-aprendizagem, desempenhando o papel de regulador da aprendizagem.

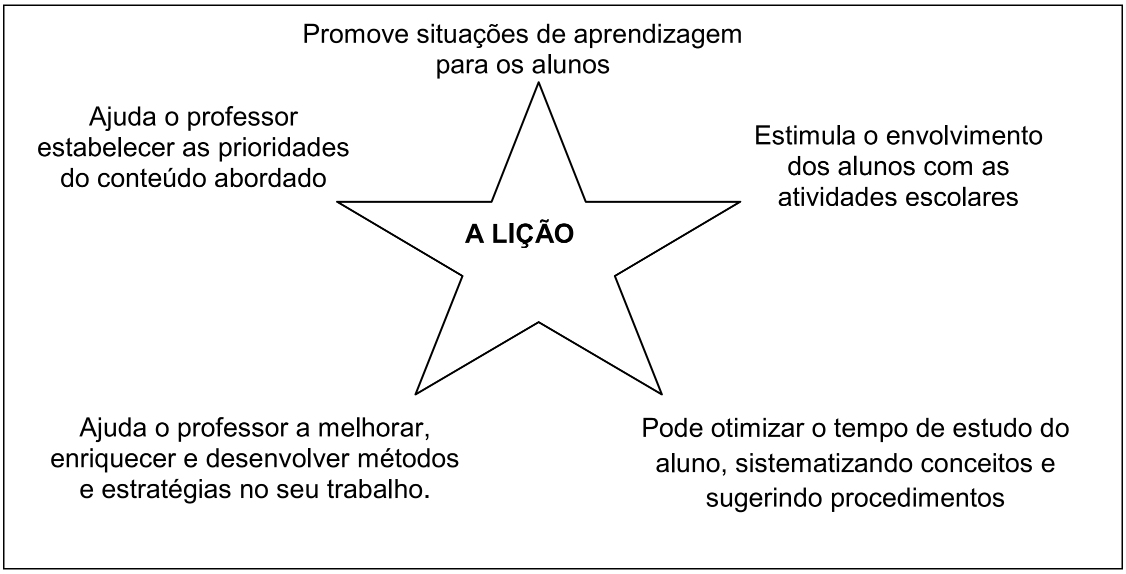
Um planejamento cuidadoso é um grande passo para o sucesso de uma lição. Ao planejar uma lição, o professor deve entender que ela será o caminho para a aprendizagem dentro ou fora da sala de aula, procurando não desperdiçar tempo em questões que poderão não contribuir com a aprendizagem, ou até mesmo prejudicar o entendimento dos alunos. No planejamento devemos considerar os objetivos, selecionando os métodos e procedimentos que ajudam na avaliação e execução da lição considerando os objetivos pretendidos.

Sabendo da importância de uma lição no processo de ensino-aprendizagem, consideramos que esta deve contemplar três pontos fundamentais: conteúdo, aluno e objetivos.

No conteúdo focalizamos o assunto a ser abordado com os alunos que são aqueles sujeitos que ativamente participarão da lição. O professor é um coparticipante, que acompanha e faz intervenções, sempre que forem necessárias. Algumas lições são preparadas para que, inicialmente, apenas o aluno a execute, e, posteriormente à execução, o professor poderá socializar as discussões, abordando dúvidas e observações que surgiram durante a execução da lição. Nestas lições, o aluno é o principal sujeito; o professor poderá atuar retirando dúvidas e apontando resultados importantes pretendidos com a lição. Em relação aos objetivos da lição, entendemos que devemos especificar o que é esperado durante e após sua execução, estando atentos às observações e dúvidas evidenciadas. Isto poderá facilitar uma socialização posteriormente, abordando os principais pontos pretendidos e às vezes não alcançados pelo coletivo da turma.

Uma lição apresenta contribuições importantes no processo de aprendizagem; ao ser um instrumento de ajuda para o professor, acarreta reflexos positivos para os alunos.

Quadro 1 - A lição e suas contribuições



Fonte: Elaborado pelo autor

Pretendendo que a pesquisa pudesse estar inserida dentro do planejamento curricular da Instituição escolhida, a execução das atividades iniciou-se no início do segundo semestre de 2011. As atividades foram planejadas para serem trabalhadas em duplas ou trios, de forma a favorecer o debate das questões propostas e argumentações entre os componentes de cada equipe. O cronograma da aplicação das atividades e avaliações encontra-se no Quadro 2.

Quadro 2 - Lições desenvolvidas

Lição/Condução/ Duração	Conteúdo abordado	Objetivos da lição
L1 - Coletivo - 40 min	Introdução às antiderivadas	Relacionar a ideia de método da exaustão de Arquimedes à aproximação de áreas por retângulos. Relacionar derivadas ao cálculo de áreas, consequentemente à antiderivação.
L2 - Duplas -35 minutos	EC1 e EC2	Perceber que à medida que aumentamos a quantidade de retângulos introduzidos no intervalo, mais próximo do valor da área abaixo da curva estará a soma das áreas dos retângulos; Usar o método da antiderivação[6] para calcular a área.
L3A e L3B - Coletivo - 1h 15 minutos	Antiderivada e Integral indefinida: resultados importantes.	Definir antiderivada; Introduzir a notação de integral; Sistematizar alguns resultados importantes: Integral de uma soma ou subtração de funções, Integral do produto de uma constante por uma função, e integral do tipo $\int x^n dx$.
L4[7] - Duplas - 2h 30 minutos	Integral indefinida	Fixar e ampliar conceitos e procedimentos.
L5 - Coletivo - 1h 15 minutos	Integração por substituição simples	Introduzir, discutir e apresentar a técnica de substituição simples como procedimento facilitador na resolução de algumas integrais.
L6[8] - Duplas - 1h 15 minutos	Integração por substituição simples	Reconhecer e aplicar diferentes estratégias na resolução de integrais por substituição, bem como reconhecer suas limitações.
L7 - Coletivo - 1h 15 minutos	Integração por partes	Introduzir, discutir e apresentar a técnica de integração por partes como fundamental na resolução de algumas integrais, bem como sua limitação.
L8[9] - Dupla - 2h 30 minutos	Integração por partes	Reconhecer e aplicar diferentes estratégias na aplicação da técnica de integração por partes; reconhecer a técnica do LIATE[10] facilitando a escolha adequada de u e dv para aplicação da técnica.
TE - Dupla - 1h 15 minutos	Trabalho em equipe	Atividade exigida pela instituição como parte das atividades avaliativas.
AV1_A_CD2 - Individual 2h 30 minutos	Primeira avaliação	Atividade exigida pela instituição como parte das atividades avaliativas.
L9 - Coletivo - 1h 15 minutos	Integral definida, Teorema Fundamental do Cálculo e Área entre curvas.	Definir integral definida relacionando ao cálculo de áreas. Apresentar o Teorema Fundamental do Cálculo e sua importância no cálculo das integrais definidas.
L10[11] - Dupla - 2h 30 minutos	Integral definida, Teorema Fundamental do Cálculo e Área entre curvas.	Ampliação dos conhecimentos sobre Integral definida, Teorema Fundamental do Cálculo e Cálculo de áreas entre duas curvas.
L11 - Coletivo 1h 15 minutos	Integral definida para calcular volumes: (Método dos discos e anéis).	Reconhecer a utilização das integrais definidas para calcular volume de sólidos; Calcular volume de sólidos obtidos pela rotação de uma região R em torno de um eixo vertical ou horizontal. (Método dos discos e anéis).
L12[12] - Dupla - 2h 30 minutos	Integral definida para calcular volumes: (Método dos discos e anéis).	Sistematizar e ampliar os conhecimentos acerca do cálculo de volumes através de integrais. Esta atividade teve um caráter avaliativo, sendo recolhida uma cópia de cada dupla.
AV2_A_CD2 - Individual - 2h 30 minutos	Segunda Avaliação	Atividade exigida pela instituição como parte das atividades avaliativas.

Fonte: Elaborado pelo autor

[6] O procedimento usado para encontrar áreas através da antiderivação é denominado **método da antiderivação** (Anton; Bivens; Davis, 2007, p.352)
[7] Lição iniciada durante a aula e finalizada na aula seguinte.
[8] Lição iniciada durante a aula e finalizada na aula seguinte.
[9] Lição iniciada durante a aula e finalizada na aula seguinte.
[10] LIATE, acrônimo usado para ajudar a lembrar a ordem de preferência para a escolha de u, na técnica de integração parcial. **L**ogarítmica, trigonométrica **I**nversa, **A**lgébrica, **T**rigonométrica, **E**xponencial.
[11] Lição iniciada durante a aula e finalizada na aula seguinte.
[12] Lição iniciada durante a aula e finalizada na aula seguinte.

As lições de Cálculo apresentadas foram elaboradas objetivando promover situações didáticas. Segundo Pais, uma situação didática

> É formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico. Esses três elementos componentes de uma situação didática (professor, aluno, saber) constituem a parte necessária para caracterizar o espaço vivo de uma sala de aula. (PAIS, 2008, p. 65-66).

A presença dos três elementos não é suficiente, sendo é necessário vincular aos outros elementos do sistema didático: objetivos, método, posições teóricas, recursos didáticos, entre outros. (PAIS, 2008).

3.3 Instrumentos de coleta de dados

As lições foram planejadas para que os alunos trabalhassem em equipe, ou individualmente.

Foram desenvolvidas 12 lições, além de duas avaliações. Algumas lições iniciaram-se em sala e foram finalizadas em casa, podendo os grupos se reorganizar posteriormente, em sala, para finalizar os trabalhos. Durante a execução das lições, o pesquisador usou o recurso de gravar em áudio; alguns questionamentos feitos pelos alunos ficaram por vezes mais evidentes; outros foram prejudicados pelo alto índice de ruído detectado pelo aparelho.

Nas aulas práticas, em que os alunos trabalhavam em equipe, sempre que um aluno solicitava a presença do pesquisador, a fim de elucidar ou expor suas conjecturas, o pesquisador, atento à importância deste momento para as investigações, procurou se aproximar da equipe, procurando registrar esses momentos, fazendo, ao final de cada lição, algumas anotações sobre cada lição.

Ao final de cada lição, os registros escritos de cada dupla e os registros escritos individuais foram coletados, obtendo-se com esses registros um conjunto de dados amplo e relevante.

Optamos por analisar os registros das duplas que permaneceram juntas durante o desenvolvimento das atividades. Observamos que, as duplas que apresentaram um rodízio muito grande durante o curso, eram formadas, muitas vezes, por alunos infrequentes ou que, muitas vezes não faziam realmente as lições, limitando-se a copiar de outras duplas que já haviam feito.

Assim, entre os alunos da turma 1, optamos por analisar os registros das lições de 13 duplas e, entre os da turma 2, consideramos os registros de10 duplas. Quanto às duas avaliações, analisamos as avaliações de alunos que participaram destas duplas que trabalharam juntas na realização das lições.

As lições foram analisadas, tendo como foco verificar as respostas aos exercícios elaborados como exemplos e classificados em exemplos: introdutórios, ampliadores, sistematizadores, retificadores, desafiadores e diagnosticadores.

Watson e Mason, escrevendo sobre o exercício como objeto matemático, discutem as contribuições que o exercício pode proporcionar através das diferentes variações, naturalmente afloradas durante a execução pelos alunos. Para esses autores,

> as ações que o aluno traz para esta observação e exploração são, no mínimo, propensões naturais para observar a variação e semelhança, e buscar padrão na variação, seja através da identificação ou a imposição de padrão sobre a experiência de percepção, e as relações entre esta variação e os outros em sua experiência. (WATSON; MASON, 2006, p.10, tradução nossa)[13].

Percepções de objetos e seus padrões associados são pontos de partida para as ações mais complexas da construção de significado que envolvem contexto, experiência,entusiasmo diálogo, e assim por diante.

No quarto capítulo apresentamos as 12 lições, e as duas avaliações desenvolvidas, buscando caracterizar os diversos tipos de exemplos elaborados, de acordo com objetivos indicados. Analisamos os dados buscando acompanhar as ações das duplas de alunos ao desenvolverem as atividades, identificando os erros e acertos, e também as similaridades e diferenças apresentadas.

[13] The actions that the learner brings to this observation and exploration are at the very least the natural propensities to observe variation and similarity, and to seek pattern in the variation, either by identifying or imposing pattern on the experience of perception, and relationships between this variation and others in their experience.

4 LIÇÕES DE CÁLCULO PARA UM ESTUDO INTRODUTÓRIO DE INTEGRAIS: PROPOSTA, APLICAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos as lições de Cálculo que foram elaboradas e desenvolvidas com alunos de Engenharia de uma instituição particular de Ensino Superior do interior do Estado de Minas Gerais. As lições foram desenvolvidas, de forma a focalizar o uso e produção de exemplos, visando a facilitar o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Integral.

Para cada lição são estabelecidos os objetivos e apresentados os diversos exemplos, de acordo com as categorias definidas no Capítulo 2, a partir dos estudos teóricos que foram conduzidos. Assim, os exemplos foram classificados em: introdutórios, ampliadores, sistematizadores, retificadores, desafiadores e diagnosticadores Ressaltamos novamente que um mesmo exemplo pode receber uma ou mais classificações, optando-se por aquela mais adequada no contexto da pesquisa.

Optamos, ainda, por apresentar cada lição, discutindo em seguida seu desenvolvimento e comentando os principais resultados, que apontam outros questionamentos, possibilitando novas investigações.

Para preservar a identidade dos alunos foram adotados, nesta pesquisa, nomes fictícios. Considerando o amplo conjunto de dados coletados, preferimos selecionar para fins de análise apenas os dados das equipes que permaneceram juntas na maioria das atividades. As demais equipes apresentaram um rodízio muito grande de alunos. A maioria desses alunos é infreqüente sendo que, muitos, por algum motivo, desistiram durante o curso, por motivos que poderiam ser investigados em uma nova pesquisa. Preferimos neste estudo focalizar a atenção naqueles alunos que permaneceram no curso. Assim, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos pelas duas turmas T1, com 13 duplas, e T2 com 10 duplas.

Procuramos adequar as lições às expectativas dos cursos objetivando trabalhar conceitos e procedimentos atendendo a um público que apresenta dificuldades diversas, como falta de pré-requisitos, pouco tempo disponível para os estudos, entre outras.

De modo geral, a pesquisa desenvolveu-se através de uma abordagem que compreendeu duas etapas: teórica, através da exposição de slides contendo um resumo teórico dos conceitos e procedimentos básicos de cada tópico a ser estudado; prática, momento que as equipes, normalmente em duplas, executavam as lições que foram preparadas objetivando complementar a abordagem teórica, exercitando e ampliando os conceitos e procedimentos apresentados na primeira abordagem.

No processo de ensino e aprendizagem, consideramos professor e aluno como sujeitos ativos, cada um com seu papel. O professor estimula a aprendizagem, criando situações que possibilitem ao aluno o entendimento necessário. As lições desenvolvidas buscam fornecer elementos para o professor, que precisará ter cuidados com a forma de conduzi-las. A empatia e a confiança no professor poderão contribuir para que o ambiente de aprendizagem seja adequado aos estudos. Dos alunos esperamos o comprometimento com os estudos, dedicando-se sempre que possível às leituras, sejam dos slides, livros recomendados, formar grupos de estudos para discussão dos conteúdos estudados e principalmente a participação durante as aulas.

4.1 Lição 1: ideias gerais sobre a antiderivação como operação inversa da derivação

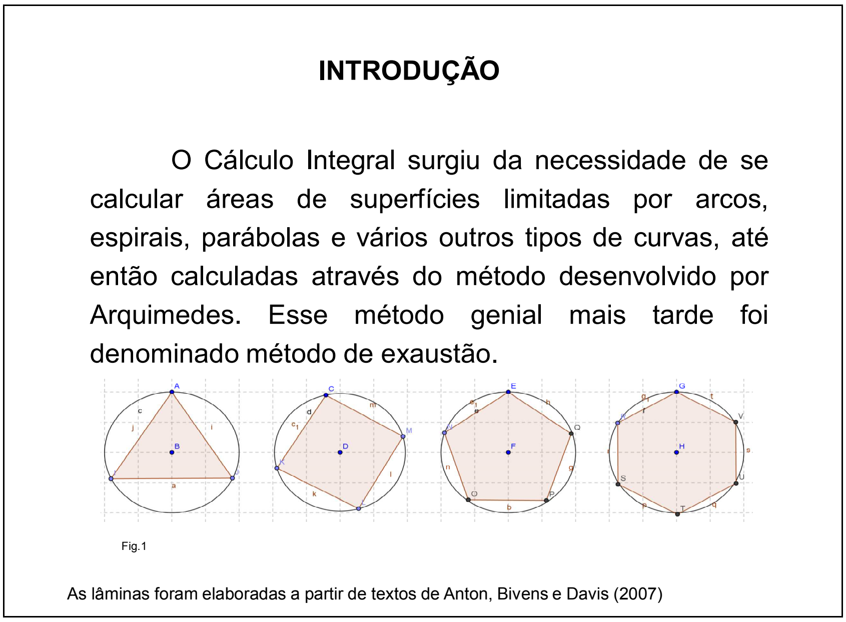
A Lição 1 apresenta rapidamente o método da exaustão de Arquimedes, e, representando os grandes nomes da História da Matemática que contribuíram para a construção e evolução do cálculo, cita Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Von Leibniz, com o intuito de mostrar aos alunos que, muitas vezes, os conhecimentos são construídos a partir de outros já existentes e em resposta a demandas de uma época. No caso das integrais, o problema prático era o de determinar a área de terrenos.

Concordando com Skemp, a matemática envolve uma extensa hierarquia de conceitos. Historicamente foi preciso tempo e esforço até que fossem estabelecidos todos os conceitos matemáticos relacionados ao cálculo de áreas: a derivada, a integral, uma relação entre as duas operações, como sendo uma a inversa da outra. (SKEMP, 1976).

O conhecimento processual pode ou não ser aprendido de forma significativa, porém, o conhecimento conceitual é sempre aprendido com significado, assim, procuramos dar sentido às ideias básicas de integração, objetivando contribuir para o conhecimento processual e conceitual. (HIEBERT; LEFEVRE (1986).

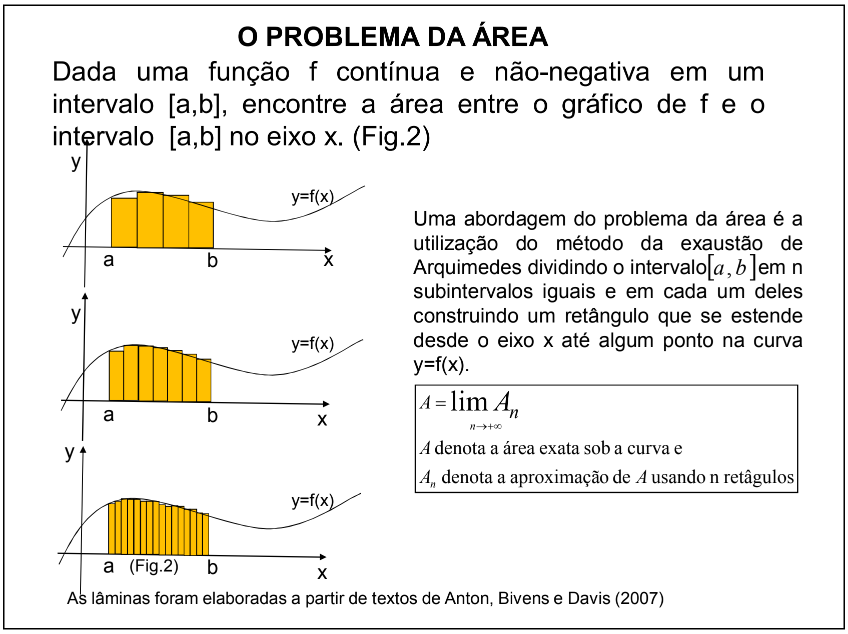
O slide da Figura 4 teve o objetivo de motivar as primeiras colocações históricas sobre o problema.

Figura 4 - Slide 1



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5 - Slide 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Para atingir os objetivos pretendidos nos apoiamos nos exemplos introdutórios Ex1 da Figura 6 e 7 e Ex2 das Figuras 8 e 9. Através de questionamentos e sugestões presentes nos exemplos conduzimos os alunos a buscar conhecimentos e recursos anteriormente estudados, que às vezes ficam esquecidos.

Figura 6 - Slide 3

O MÉTODO DOS RETÂNGULOS

Para ilustrar essa ideia, vamos calcular a área sob a curva y=x^2 , acima do intervalo $[0,1]$. Comecemos subdividindo o intervalo em n subintervalos iguais, cada um, portanto, com base 1/n; as alturas serão as imagens da função em

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$$

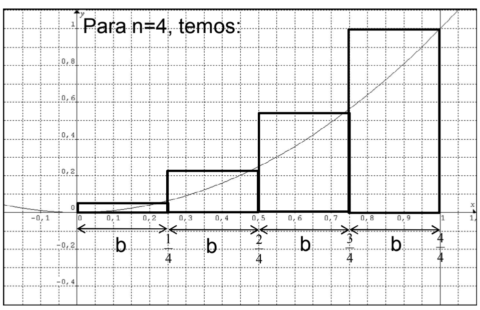
Ex.1 - Vamos calcular por, excesso, a área sob a curva y=x^2, acima do intervalo $[0,1]$, subdividindo em 4 retângulos.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7 - Slide 4

Para n=4 teremos a base b=1/4 e alturas serão :



$$h_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$
$$h_2 = f\left(\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$h_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$
$$h_4 = f\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}\right)^2 = 1$$

Somando as áreas dos retângulos temos $A = b.h_1 + b.h_2 + b.h_3 + b$

Escrevendo de forma mais simples temos $A = b.(h_1 + h_2 + h_3 +$

Fazendo as substituições e os cálculos temos $A = \frac{15}{32} = 0{,}46875$

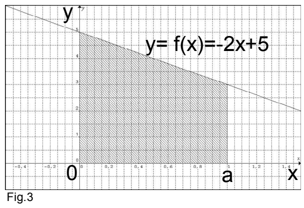
As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 8 - Slide 5

CALCULANDO ÁREAS A PARTIR DE DERIVADAS

EX.2 - Determinar a área sob o gráfico de função f(x)=-2x+
acima do intervalo $[0,a]$, com **a** menor ou igual a 5/2.



Através de conhecimentos de geometria plana sabemos que:

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{[(5)+(-2a+5)].a}{2}$$

$$A(a) = \frac{(-2a+10).a}{2}$$

$$A(a) = -a^2 + 5a$$

Como **a** é um parâmetro real variável podemos fazer **a=x**.

$$\boxed{A(x) = -x^2 + 5x}$$

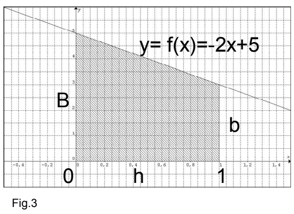
Derivando A(x) o que obtemos?

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9 - Slide 6

Vamos calcular a área da região sob a curva da função f(x)=-2x+5 no intervalo $[0,1]$.



$$b = f(1) - 0 = 3$$
$$B = f(0) - 0 = 5$$
$$h = 1 - 0 = 1$$

Fazendo as substituições:

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(5+3).1}{2} = 4$$

Retomando a expressão que encontramos anteriormente que nos fornece a área em função de x, veja: $A(x) = -x^2 + 5x$

Faça x=1 na função $A(x) = -x^2 + 5x$ e compare com o valor da área A encontrada anteriormente.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a Lição 1 sistematizando as primeiras ideias e apresentando algumas contribuições das integrais, conforme as Figuras 10 e 11.

Figura 10 - Slide 7

SISTEMATIZANDO IDEIAS IMPORTANTES

Se *f* é uma função contínua não-negativa no intervalo [a,b] e A(x) denota a área sob o gráfico de *f* acima do intervalo [a,x] em que x é um ponto qualquer do intervalo [a,b] (Figura 4), então

$$A'(x) = f(x)$$

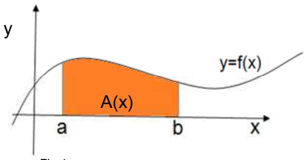


Fig.4

Assim , a partir da derivada A'(x)=f(x) dada, se recuperarmos a fórmula de A(x), poderemos obter a área sob o gráfico *f* acima do intervalo [a,b] calculando A(b).
O processo de encontrar uma função a partir de sua derivada é denominado **antiderivação**, e o procedimento para encontrar áreas através da antiderivação é denominado **método da antiderivação.**

* Anton, Bivens e Davis, 2007 p.352

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 11 - Slide 8

NECESSIDADE E IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO INTEGRAL

Determinação de:

- áreas
- volumes
- comprimento de curvas
- trabalho realizado por uma força variável
- centros de massa
- aplicações na engenharia
- ...

Fonte: Elaborada pelo autor

4. 1.1 Aplicação e análise dos resultados

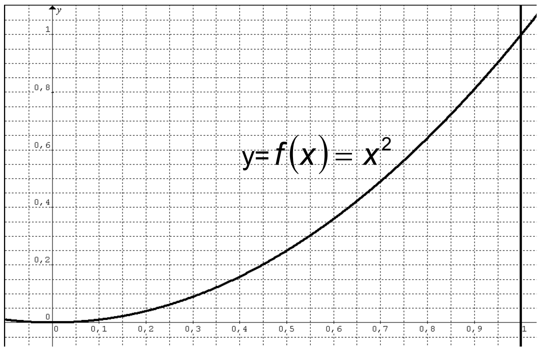
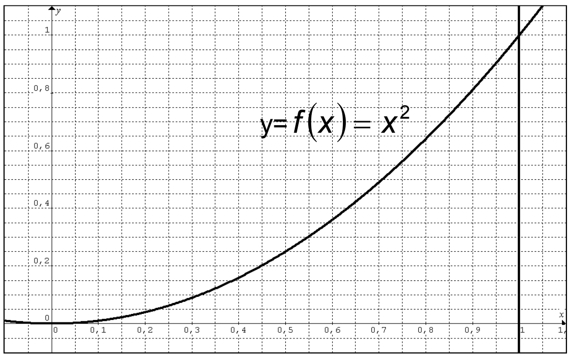
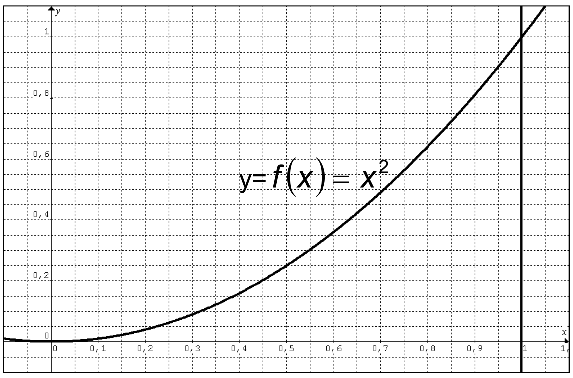
Como anteriormente exposto, por ser teórica, a primeira lição foi conduzida pelo professor/pesquisador e com a participação dos alunos, que contribuíram, expondo seus questionamentos e conclusões.

Na turma 1, por exemplo, durante a exposição do exemplo E1, na Figura 7, um aluno interrompeu e expôs sua pergunta/conclusão: "professor, então a altura do retângulo é a imagem da função?"

4.2 Lição 2: fixando e complementando conhecimentos sobre antiderivação

A Lição 2 utiliza o exemplo ampliador EC1 da Figura 12, que promove situações de aprendizagem para reforçar e ampliar informações apresentadas na Lição 1. O Exemplo EC2 da Figura 13 objetiva ampliar as conclusões acerca da antiderivação como operação inversa da derivação, relacionando a antiderivação ao cálculo da área sob uma curva.

Figura 12 - Exercício complementar 1

<table>
<tr><td colspan="3">EC1 – Se $f(x) = x^2$, no intervalo $[0,1]$, podemos calcular a área aproximada da região abaixo da curva $f(x) = x^2$ e acima de [0,1], através do método da subdivisão em retângulos. Assim, em cada caso:
I) Divida o intervalo [a,b] em n sub-intervalos e construa n retângulos tendo como altura algum valor de $f(x) = x^2$ em cada subintervalo;
II) Use o método da subdivisão em retângulos e calcule a área aproximada da região determinada.
III) Registre suas conclusões.</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>
</td><td>n = 5</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
</td><td>n = 10</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
</td><td>n = 20</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 13 - Exercício complementar 2

EC2 – Sabemos que é possível estabelecer uma relação entre áreas e antiderivadas. Use o **método de antiderivação** para calcular a área da região sob a curva dada por $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$.

Sugestão: Encontre uma função cuja derivada seja $f(x) = x^2$.

Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.1 Aplicação e análise dos resultados

Ao iniciar a Lição 2, os alunos foram agrupados em duplas, sendo orientados que em todas as atividades em equipe, a participação na execução das atividades seria avaliada, mas que não se preocupassem com acertos ou erros. Ainda, algumas equipes foram orientadas a resolverem o EC1 da Figura 12 por falta e outras por excesso.

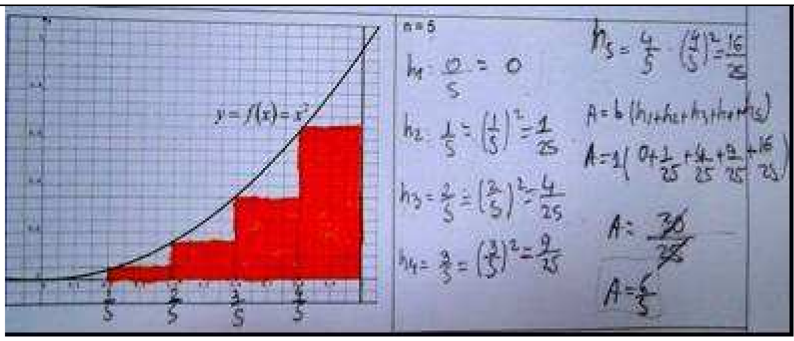
Ao iniciarem a Lição 2, os alunos mostraram-se bastante dependentes do professor, solicitando esclarecimentos sobre o que deveriam fazer; principalmente os que foram orientados a realizarem a atividade por calculando os valores por falta, tiveram dificuldades em entender que, por falta, o primeiro retângulo teria altura zero. Este fato evidencia dificuldades na interpretação de domínio e imagem de uma função, conhecendo seu gráfico.

Na turma 1, a dupla D1, formada pelos alunos Clayton e Rose, solicitou a presença do professor, pedindo esclarecimentos sobre o cálculo da área por falta (EC1). Eles apresentaram a figura já colorida, com os quatro retângulos após dividir 1 por 5, conforme orientação do exemplo. Então, Clayton perguntou: " professor, queremos calcular com n=5, então a base é 1 dividido por 5, que é 0,2. Sabemos que a altura do primeiro retângulo é zero, a altura do segundo retângulo é 0,2 ou 0,4?" Evitando fornecer respostas prontas, foi sugerido à dupla que numerasse os retângulos, perguntando então: " A altura do segundo retângulo é 0,2 ou será o valor da função em 0,2?" Após alguns instantes, o aluno Clayton, questionou novamente: "Então, pra calcular a altura do segundo retângulo eu devo usar 0,2 ou 0,4?". Imediatamente, sua colega de dupla, a aluna Rose respondeu, apontando na figura: " O 0,2; aqui a altura ocorre em 0,2".

Outros comentários entre os grupos foram observados, do tipo: "Veja que quanto mais retângulos colocamos no intervalo, menos sobras temos".

Constatamos também, grandes deficiências em relação às operações básicas da matemática como a multiplicação, potenciação, adição de frações, etc. Apresentamos a seguir, parte da resolução da dupla D2 da T2, formada por Lucas e Filipe.

Figura 14 - Resolução da D2T2[14]



Fonte: Dados da pesquisa

A Figura 14 apresenta o cálculo, por aproximação, da área sob a curva introduzindo 5 retângulos. A dupla errou ao interpretar a base b da expressão $A = b[h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5]$. Admitiram como base o comprimento do intervalo [0,1]. Não entenderam que a base b de cada retângulo será calculada dividindo a amplitude do intervalo que queremos calcular pelo número de retângulos que desejamos introduzir no intervalo, assim, a base será dada por b=1/n, no caso em questão, como n=5, o correto seria b=0,2.

Quadro 3 - Síntese das turmas 1 e 2 para o exemplo Ampliador EC1

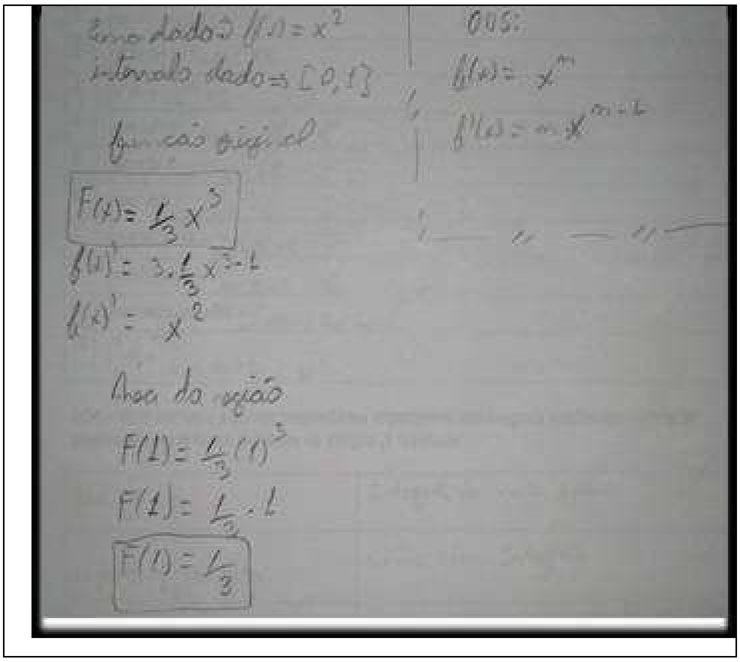
	Turma 1	Turma 2
Não resolveram	4	2
Acertaram	6	5
Erraram	3	3

Fonte: Elaborado pelo autor

[14] D2T2 denota dupla 2 da turma 2

No exemplo EC2 da Figura 13, os alunos das duas turmas não encontraram dificuldades em apresentar uma antiderivada da função $f(x)=x^2$, porém, na turma 2, somente duas duplas apresentaram o valor da área, conforme apresentamos a solução fornecida pela dupla D8 da turma 2.

Figura 15 - Resolução da D8T2



Fonte: Dados de pesquisa

Notamos pela resolução apresentada pela dupla que os objetivos principais foram alcançados. Percebemos por parte da dupla um cuidado com a representação, não muito comum aos alunos numa primeira atividade. Vale ressaltar que, apesar da turma possuir alunos que já haviam cursado a disciplina, os alunos desta dupla nunca estudaram este assunto. Notamos que estes alunos apresentaram em sua resolução, uma observação lembrando a regra da derivação que contribuiu na descoberta da antiderivada procurada. Vemos que as operações de antiderivação e derivação foram associadas como operações inversas pela dupla.

Quadro 4 - Resultados das turmas 1 e 2 para o exemplo Ampliador EC2

	Turma 1	Turma 2
Não resolveram	2	7
Acertaram	11	2
Erraram	0	1

Fonte: Elaborado pelo autor

Na turma 1, apenas duas duplas não apresentaram a resolução, os demais alunos resolveram sem apresentar grandes dificuldades, fornecendo o valor da área, conforme constatamos pelo Quadro 4.

Na turma 1, apenas duas duplas não apresentaram a resolução, os demais alunos resolveram sem apresentar grandes dificuldades, fornecendo o valor da área, conforme constatamos pelo Quadro 4.

4.3 Lição 3 : A integral indefinida e as primeiras ideias importantes

Optamos por dividir a Lição 3 em duas etapas: a primeira etapa L3-A, apresentamos a definição de antiderivada ainda relacionada a derivação. Na segunda parte da lição, denotada por L3-B, apresentamos a notação de integral indefinida e as primeiras propriedades importantes através de exemplos introdutórios.

Através do exemplo introdutório E1 da Figura 16, os alunos são convidados a relacionar uma antiderivada à sua derivada sem muita dificuldade.

Figura 16 - Slide 1

L3-A

Antiderivada

Definição*:
Dizemos que uma função F é uma **antiderivada** de uma função f em um dado intervalo se F'(x) = f(x) para cada x do intervalo.

E1- Definição

$F(x) = x^2 + 3x$ é uma antiderivada de $f(x) = 2x + 3$

Se derivarmos F encontraremos f. Logo, conhecendo uma função f podemos encontrar uma **primitiva** ou **antiderivada** F.

* Anton, 2007, p.355

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, na Figura 17 apresentamos o E2. No E2 selecionamos exemplos que assumem o papel de introduzir e ampliar procedimentos e conceitos. Serão conduzidos com a participação dos alunos fixando e ampliando as ideias iniciais. Ainda na primeira etapa da Lição 3 da Figura 16, apresentamos um exemplo sistematizador E3, a fim de estimular os alunos a descobertas importantes que serão formalizadas e frequentemente usadas.

Figura 17 - Slide 2

E2 – Relacione a 1ª e 2ª colunas, associando cada função da 1ª coluna a sua primitiva na 2ª coluna.

(1) $f(x) = 2x + 3$	$(a)\ F(x) = e^x + 2x^2 + 3$
(2) $f(x) = e^x + 4x$	$(b)\ F(x) = -\cos(x)$
(3) $f(x) = sen(x)$	$(c)\ F(x) = x^2 + 3x - 2$
(4) $f(x) = x$	$(d)\ F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 4$
(5) $f(x) = \cos(x)$	$(e)\ F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 4$
(6) $f(x) = x^2 + 6x\text{-}8$	$(f)\ F(x) = sen(x)$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 18 - Slide 3

E3 – Descobertas importantes

Seja um polinômio : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ para n inteiro não-negativo; $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1\ e\ a_0$ são coeficientes reais.

Considere um dos termos deste polinômio, por exemplo, $a_n x^n$. Você seria capaz de encontrar uma expressão que represente sua antiderivada?

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a primeira parte da Lição 3, fixando ideias através da discussão, juntamente com os alunos, do exemplo introdutório E4 da Figura 19.

Figura 19 - Slide 4

E4 – Complete as colunas:

Função F(x)	Derivada f'(x)
x^2	
$3x^2+2x+7$	
$5x^3-x-12$	

Função F(x)	Derivada f'(x)
	2x-3
	$2x^3-5x-4$
	x^2-3

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 20 - Slide 5

L3 - B **A INTEGRAL INDEFINIDA**

TEOREMA 1* - Se F(x) for qualquer antiderivada de f(x) em um intervalo I, então para qualquer constante C a função F(x) + C é também uma antiderivada de f(x) naquele intervalo. Além disso, cada antiderivada de f(x) no intervalo I pode ser expressa na forma de F(x) + C, escolhendo-se apropriadamente a constante C.

Acompanhe o exemplo:

E1- Fórmula da derivada — Fórmula de integração equivalente

$$\frac{d}{dx}\left[x^3\right]=3x^2 \qquad \int 3x^2dx = x^3 + C$$

Obs.: O sinal de s espichado $\int$ foi inventada por Leibniz.

* Anton, 2003, p.356

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 21 - Slide 6

Integral Indefinida

NOTAÇÃO:

Sinal de integral

Primitiva

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Integrando

Integral Indefinida

A Integral indefinida é o conjunto de todas as primitivas.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 22 - Slide 7

DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

A **derivação** e a **integração** são operações inversas, assim:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x) \quad \text{e} \quad \int f'(x)dx = f(x) + C$$

Para encontrarmos a integral de uma função f devemos encontrar uma função F tal que, sua derivada resulte na função f que conhecemos.

Assim, $\int f(x)dx = F(x) + C$ e $\frac{d}{dx}[F(x)+C] = F'(x) = f(x)$.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 23 - Slide 8

E2 - Seja a função $F(x) = x^4 + 5.$

Sua derivada é:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = 4.x^{4-1} + 0 = 4x^3 \Rightarrow F'(x) = f(x) = 4x^3$$

Uma vez que a integração é uma operação inversa da derivação, então, a integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int 4x^3 dx = 4\frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$

$$\int 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} + C = x^4 + C$$

No exemplo, conhecíamos a constante C=5, porém, ao calcularmos uma integral indefinida encontramos uma família de funções cuja derivada conhecemos. A função $F(x) = x^4 + 5$ é uma das funções que pertence à família.

Assim:

$$\int 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} + C = x^4 + C$$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 24 - Slide 9

E3 - Fixação:

Calcule a integral $\int \left(3x^2 + 5x - 3\right)dx$

Queremos encontrar uma função cuja derivada seja

$f(x) = 3x^2 + 5x - 3,$

Sabemos que $\int a_n x^n dx = a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para n inteiro diferente de -1.

$$\int \left(3x^2 + 5x - 3\right)dx = \int 3x^2 dx + \int 5x dx + \int (-3)dx$$

*Obs: Essa fórmula permanece válida para n real diferente de -1. (Thomas, 2002, p.329)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 25 - Slide 10

Retomando a integral pedida temos:

$$\int \left(3x^2 + 5x - 3\right)dx = \int 3x^2 dx + \int 5x dx + \int (-3)dx$$

$$\int 3x^2 dx = 3\frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{3x^3}{3} + C_1 = x^3 + +C_1$$

$$\int 5x dx = 5\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = \frac{5x^2}{2} + +C_2$$

$$\int (-3)dx = -3\frac{x^{0+1}}{0+1} + C_3 = -3x + C_3$$

Uma vez que C_1, C_2 e C_3 são constantes, podemos fazer $C_1 + C_2 + C_3 = C$, também uma constante arbitrária.

$$\int \left(3x^2 + 5x - 3\right)dx = x^3 + C_1 + \frac{5x^2}{2} + C_2 - 3x + C_3 = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 3x + C$$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 26 - Slide 11

PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

E4 - Calcule a integral $\int [2x + \cos x]dx$

$$\int [2x + \cos x]dx = \int 2x dx + \int \cos x dx$$

$$= \frac{2x^2}{2} + senx + c$$

$$= x^2 + senx + c$$

A integral de uma soma ou diferença de funções é igual à soma ou diferença das integrais dessas funções.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 27 - Slide 12

PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL

E5 - Calculemos a integra l $\int\left(4x^2+4x+4\right)dx$

$$\int\left(4x^2+4x+4\right)dx=\int 4x^2dx+\int 4xdx+\int 4dx=4\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}+4x+C$$

$$=\frac{4x^3}{3}+2x^2+4x+C$$

- Agora calculemos a integral

$$\int\left(4x^2+4x+4\right)dx=\int 4.\left(x^2+x+1\right)dx=4.\int\left(x^2+x+1\right)dx=$$

$$=4.\left[\int x^2dx+\int xdx+\int 1dx\right]=4.\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+1x+C\right]=\frac{4x^3}{3}+2x^2+4x+4C$$

A integral do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela integral da função.

$$\boxed{\int kf(x)dx=k\int f(x)dx}$$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 28 - Slide 13

E6 - Relacione a primeira coluna com a segunda encontrando integrais equivalentes:

$a)\int 3sen(2x)dx$	( ) $2\int x^4dx$
$b)\int 2sen(x)dx$	( ) $\frac{1}{3}\int sen(2x)dx$
$c)\int \frac{sen(2x)}{3}dx$	( ) $2\int sen(x)dx$
$d)\int \frac{3sen(2x)dx}{2}$	( ) $3\int sen(x)dx$
$e)\int 2\pi xe^{3x}dx$	( ) $3\int sen(2x)dx$
$f)\int 2x^4dx$	( ) $2\pi\int xe^{3x}dx$
$g)\int 3sen(x)dx$	( ) $\frac{3}{2}\int sen(2x)dx$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos esta lição sistematizando os principais resultados através da Figura 29.

Figura 29 - Slide 14

RESULTADOS IMPORTANTES

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para n diferente de -1.

Em palavras : para integrar uma potência em x, de expoente diferente de -1, some 1 ao expoente e divida a nova potência pelo novo expoente.

2) $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ A integral de uma soma ou diferença de funções é igual à soma ou diferença das integrais dessas funções.

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ para qualquer constante k real.

As propriedades 2 e 3 podem ser reunidas em uma só. Como ficaria?

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

4.3.1 Aplicação e análise dos resultados

As duas turmas acompanharam e contribuíram durante a condução da Lição 3 pelo professor pesquisador. Sempre que foi sugerida a participação dos alunos eles responderam demonstrando interesse e disciplina durante a lição teórica.

4.4 Lição 4: Fixando e complementando conhecimentos sobre Integral indefinida e as primeiras conclusões importantes

A Figura 30 apresenta o EC3, Exemplo Sistematizador. Ao construir uma tabela de integrais de posse de uma tabela de derivação, o aluno consulta as regras de derivação e a partir destas regras, sabendo que a integração é a operação inversa, apresentará a expressão correspondente a cada integral indefinida solicitada. Julgamos este exemplo como sistematizador, uma vez que resgata e sistematiza importantes conclusões acerca das definições e procedimentos anteriores já estudados.

No EC4, da Figura 31, queremos que o aluno registre os procedimentos já adotados pelo professor ao resolver uma integral indefinida. Concordamos com Pinto, (2008) e Porter e Masingila (2000), que atividades que levam o aluno a registrar seus procedimentos podem contribuir com a aprendizagem.

Através dos exemplos retificadores EC5 da Figura 32 e EC6 da Figura 33, queremos provocar discussões sobre procedimentos errados frequentemente cometidos pelos alunos. O EC7 da Figura 34 apresenta diversos exemplos a fim de fixar e ampliar procedimentos estudados.

Seguimos a lição apresentando o exemplo desafiador EC8 da Figura 35, pretendendo que os alunos, pesquisando entre as identidades trigonométricas, identifiquem aquela que é adequada para transformar o integrando num integrando mais simples, possibilitando a aplicação da tabela de integração. Finalizamos a lição com os exemplos que podem ser classificados como ampliadores e desafiadores EC9 da Figura 36 e EC10 da Figura 37.

Figura 30 - Exercício complementar 3

EC3- Você aprendeu que a derivação e a integração são operações inversas. A partir das regras de derivação que você conhece, monte uma tabela de integrais indefinidas.	
1	$\int dx =$
2	$\int x^n dx =$
3	$\int e^x dx =$
4	$\int \cos x dx =$
5	$\int senxdx =$
6	$\int \sec^2 xdx =$
7	$\int \cos\sec^2 xdx =$
8	$\int \sec x.tgxdx =$
9	$\int \cos\sec x.\cot gxdx =$
10	$\int \frac{1}{x} dx =$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 31 - Exercício complementar 4

EC4 – Você conhece algumas propriedades importantes das integrais indefinidas. Aponte as propriedades que foram aplicadas na integral já resolvida:	
$\int\left(6x^2 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$	
$I = \int 6x^2dx - \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}dx - \int x^{-3}dx$	
$= 6\int x^2dx - \frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{-3}dx$	
$= 6.\frac{x^{2+1}}{3} + C_1 - \frac{1}{2}.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} + C_2 - \frac{x^{-3+1}}{-2} + C_3$	
$= 2x^3 - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-2}}{2} + C_1 + C_2 + C_3$	
$= \ 2x^3 - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-2}}{2} + C$	

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 32 - Exercício complementar 5

EC5 – Não é correto afirmar que $\int sen(x)dx = \frac{sen(x^2)}{2} + C$. Justifique.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 33 - Exercício complementar 6

EC6 – a) Justifique porque não é correto afirmar que $\int 2x^2.x^6dx = 2\frac{x^3}{3}.\frac{x^7}{7} + C$.
b) Qual o valor correto da integral? Justifique.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 34 - Exercício complementar 7

EC7 – Fixe os procedimentos importantes já estudados calculando as seguintes integrais:
a) $\int 7x^6 dx$
b) $\int \frac{6}{x^3} dx$
c) $\int \left(5e^x + 2x - \frac{10}{x^3}\right) dx$
d) $\int \left(3senx + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$
e) $\int \frac{\sqrt[5]{x^4}}{2} dx$
f) $\int \left(6x^2 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$
g) $\int \left(\frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4}\right) dx$
h) $\int \left(\frac{3}{x} + 3x\right) dx$ (cuidado!)
Respostas:
7 a) $x^7 + C$ b) $-\frac{3}{x^2} + C$ c) $5e^x + x^2 + \frac{5}{x^2} + C$ d) $-3\cos x + 4\sqrt{x} + C$ e) $\frac{5}{18} x^{\frac{9}{5}} + C$ f) $2x^3 - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{2x^2} + C$ g) $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + C$ h) $3\ln x + \frac{3}{2}x^2 + C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 35 - Exercício complementar 8

EC8 - Muitas vezes, para calcular uma integral, precisamos transformar o integrando, usando relações conhecidas, como no caso do cálculo de integrais que envolvem funções trigonométricas.
Calcule as integrais seguintes:

a) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$ (Sugestão: cos2x = 2 cos² x – 1)

b) $\int 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ (Sugestão: $sen^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$)

c) $\int \frac{sen^2(x)}{1+\cos(x)}dx$ (Sugestão: $sen^2 x+\cos^2 x=1$)

Respostas: 8 a) $\frac{tgx}{2}+C$ b) $x-senx+C$ c) $x-senx+C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 36 - Exercício complementar 9

EC9 - Justifique porque são verdadeiros os resultados das integrais indefinidas:

$a)\int (x+1)dx = \frac{x^2}{2}+x+C = \frac{(x+1)^2}{2}+K$

$b)\int (x+1)^2dx = \frac{(x+1)^3}{3}+C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 37 - Exercício complementar 10

EC10 – a) Os procedimentos usados no exercício anterior não se aplicam à seguinte integral indefinida $\int (2x+1)^2dx$. Justifique.

b) Calcule a integral fazendo o desenvolvimento do produto notável $(2x+1)^2$ e aplicando as propriedades das integrais indefinidas já estudadas.

c) Na letra b) foi possível desenvolver o produto notável e calcular o valor da

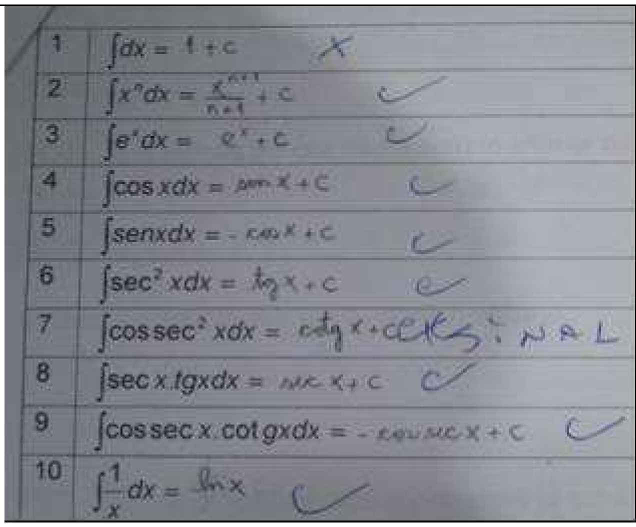
Desafio: Como proceder para calcular $\int (2x+1)^5dx$?

Fonte: Elaborada pelo autor

4.4.1 Aplicação e análise dos resultados

Sendo uma lição prática, os alunos agrupados em duplas desenvolveram os exemplos apresentados anteriormente. Nos exemplos sistematizadores EC3 e iniciais EC4 não apresentaram dificuldades. Não foram observados erros comuns, cabendo destacar apenas que 4 duplas entre as 18 que fizeram o EC3 esqueceram de apresentar o sinal negativo quando este era necessário, sendo que 3 entre as duplas foram da turma 2. Apresentamos o desenvolvimento de uma das duplas a seguir e o Quadro 5 com o resumo da execução do EC3 e EC4.

Figura 38 - Resolução do EC3 - D3T2



Fonte: Dados da pesquisa

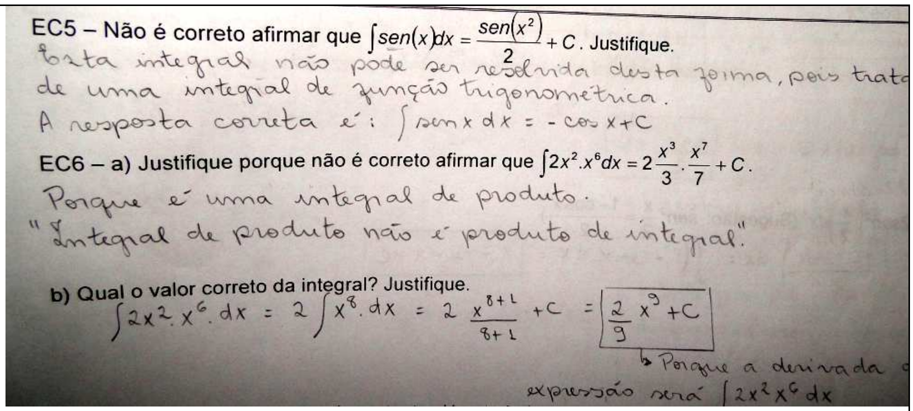
Quadro 5 - Resultados das turmas 1 e 2 para os Exemplos Ampliadores EC3 e EC4

	Turma 1	Turma 2
Fizeram	11	7
Não fizeram	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor

Nos exemplos retificadores EC5 e EC6, os alunos experimentaram o desafio de justificar porque não são corretos alguns procedimentos, podendo discutir com os colegas situações conflitantes, comumente percebidas pelo professor através de sua experiência didática em turmas anteriores. Analisando a resolução apresentada pela dupla 11 da turma 1, notamos que atingimos os objetivos de alertar os alunos sobre situações conflitantes que podem ser esclarecidas coletivamente ao discutirmos estes exemplos.

Figura 39 - Resolução dos exemplos EC5 e EC6 - D11T1



EC5 – Não é correto afirmar que $\int sen(x)dx = \frac{sen(x^2)}{2} + C$. Justifique.
Esta integral não pode ser resolvida desta forma, pois trat
de uma integral de função trigonométrica.
A resposta correta é: $\int sen\,x\,dx = -cos\,x + C$

EC6 – a) Justifique porque não é correto afirmar que $\int 2x^2.x^6dx = 2\frac{x^3}{3}.\frac{x^7}{7} + C$.
Porque é uma integral de produto.
"Integral de produto não é produto de integral".

b) Qual o valor correto da integral? Justifique.
$\int 2x^2.x^6.dx = 2\int x^8.dx = 2\frac{x^{8+1}}{8+1} + C = \boxed{\frac{2}{9}x^9 + C}$
Porque a derivada d
expressão será $\int 2x^2x^6dx$

Fonte: Dados da pesquisa

Com os exemplos contidos no EC7, feitos por todas as duplas, treinamos e ampliamos os conhecimentos dos alunos ao executar procedimentos e fixando importantes conceitos estudados. Apesar de apresentarem dificuldades em relação às operações básicas da matemática, grande parte dos alunos resolveu os exemplos, conforme o Quadro 6.

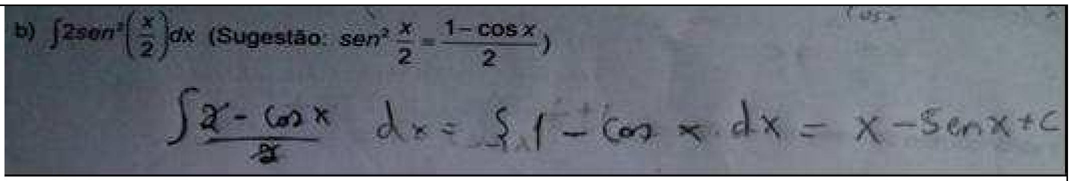
Quadro 6 - Resultados das turmas 1 e 2 para os exemplos Ampliadores EC5 e EC6

	Turma 1	Turma 2
Fizeram	12	7
Não fizeram	1	3

Fonte: Elaborado pelo autor

Nos exemplos desafiadores EC8 da Figura 35, percebemos que os alunos apresentaram dificuldades relativas à identificação, substituição das identidades, bem como dificuldades referentes às regras básicas como fatoração e simplificação. Das 13 duplas da turma 1, apenas 9 apresentaram a resolução; dessas, 5 corretas e 4 contendo erros em algum dos exemplos. A Figura 40 ilustra um tipo de erro cometido pela D6T1 na resolução do item b.

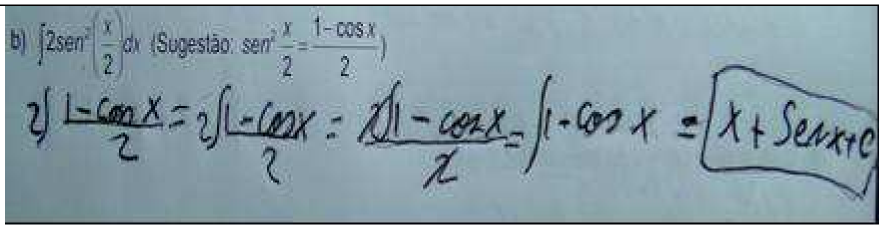
Figura 40 - Resolução do EC8 item b - D6T1



Fonte: Dados da pesquisa

Notemos que a dupla, apesar de apresentar uma resposta correta para a integral indefinida, cometeu um erro grave na simplificação. Acreditamos que a dupla tenha "forçado" para chegar a uma resposta, que já era conhecida. A dupla D9T1 apesar de inicialmente não cometer erros algébricos, não teve cuidados com a notação, escrevendo igualdades indevidas e errando o sinal ao final, conforme observamos na Figura 41.

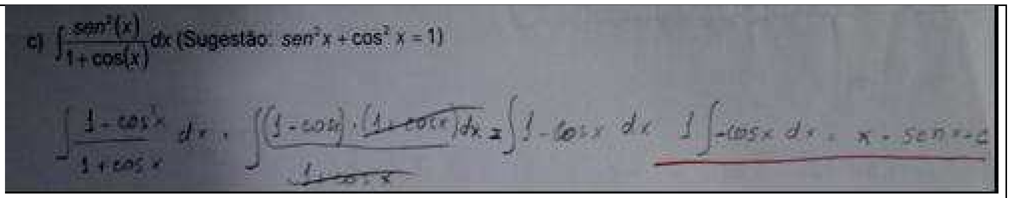
Figura 41 - Resolução do EC8 item b - D9T1



Fonte: Dados da pesquisa

A falta de rigor matemático na resolução de exercícios é muito comum como no caso da resolução apresentada pela dupla D5T1.

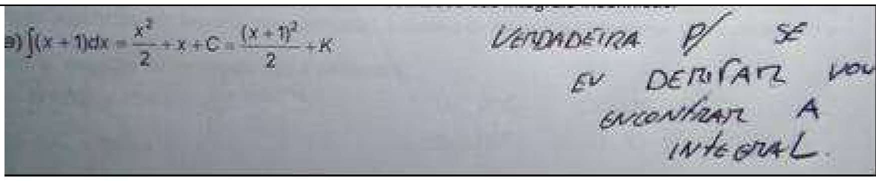
Figura 42 - Resolução do EC8 item c - D5T1



Fonte: Dados da pesquisa

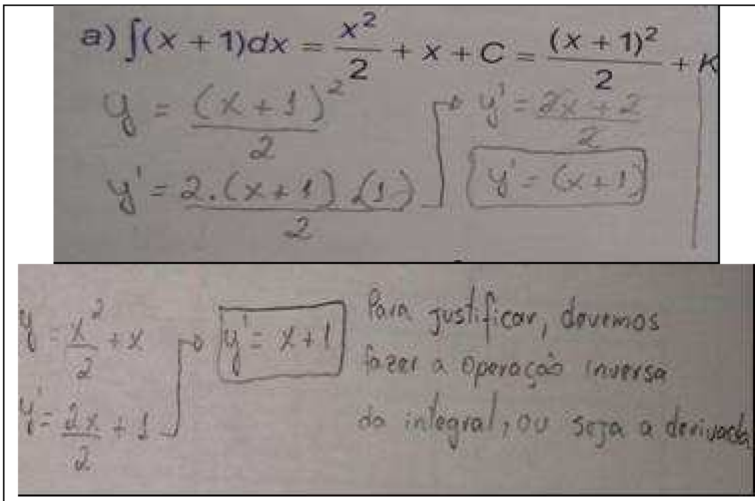
Os exemplos ampliadores e retificadores EC9 contribuíram para que os alunos percebessem e visualizassem a necessidade de aplicação de alguns procedimentos que podem facilitar a resolução de algumas integrais e compreender que sem o uso de tais procedimentos a solução de algumas integrais torna-se muito trabalhosa. Através do EC9 e EC10 preparamos os alunos para posteriormente apresentarmos a técnica da substituição simples. As Figuras 43 e 44 ilustram como a maioria dos alunos apresentou as resoluções desses dois exemplos.

Figura 43 - Resolução do EC9 item a - D10T2



Fonte: Dados da pesquisa

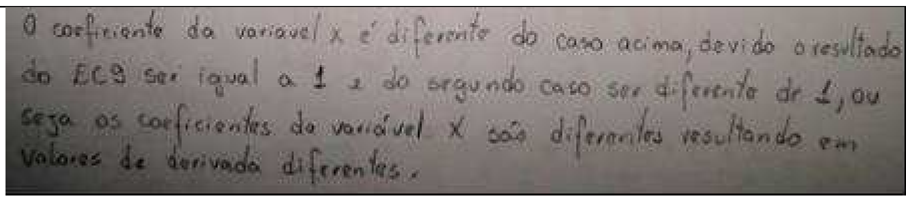
Figura 44 - Resolução do EC9 item a - D8T2



Fonte: Dados da pesquisa

Ao resolverem o exemplo EC10, os alunos perceberam as limitações dos procedimentos usados no EC9 e apontaram os motivos que impediram a aplicação dos mesmos procedimentos do EC9 no EC10. Vejamos a explicação apresentada pela dupla D8T2 na Figura 45.

Figura 45 - Observação da D8T2 para o EC10



Fonte: Dados da pesquisa

4.5 Lição 5: Ideias gerais sobre a técnica de integração por Substituição Simples

Inicialmente, através de um trabalho conjunto com a turma, procuramos retomar ideias importantes da Lição 4, reunidas nos slides das Figuras 46 e 47.

Figura 46 - Slide 1

Retomando ideias importantes

Você viu na lição anterior que a integral $\int (2x-1)^2\,dx$ não pode ser resolvida aplicando diretamente a regra $\boxed{\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$

É necessário primeiramente desenvolver o produto notável:

$$I) \int (2x-1)^2 dx = \int (4x^2 - 4x + 1) dx = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$$

Ou então proceder da seguinte maneira:

$$II) \int (2x-1)^2 dx = \int (u)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2} . \frac{u^3}{3} + C = \frac{u^3}{6} + C = \frac{(2x-1)^3}{6} + C$$

Observe que fizemos $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Vejamos que os resultados obtidos em I e II são equivalentes:

Desenvolvendo $\frac{(2x-1)^3}{6} + C = \frac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{6} + C = \frac{8x^3}{6} - \frac{12x^2}{6} + \frac{6x}{6} - \frac{1}{6} + C$

e simplificando temos $\frac{(2x-1)^3}{6} + C = \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x + K$ onde $K = -\frac{1}{6} + C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 47 - Slide 2

Sistematizando a técnica da substituição

Suponhamos que F seja uma antiderivada de f e que g seja uma função diferenciável. A derivada de F(g(x)) pode, pela regra da cadeia, ser expressa como $\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x)).g'(x)$ e, em forma de integral indefinida, pode ser escrita como

$\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C$

Será útil tomar u = g(x) e escrever du/dx = g'(x) na forma du = g'(x)dx. Assim podemos escrever $\int f(u)du = F(u) + C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Objetivando apresentar as primeiras ideias sobre a técnica da substituição simples elaboramos os exemplos introdutórios E1 da Figura 48 e E2 da Figura 49.

Figura 48 - Slide 3

E1) Calcule $\int (x^2 - 1)^{30} . 2xdx$

Note que $\int (x^2 - 1)^{30} .2xdx = \int (f(x))^{30} .g(x)dx$

Ao derivarmos f, encontramos g imediatamente, assim, a substituição torna a integral em termos de u mais simples.

$$u = x^2 - 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow du = 2xdx$$

$$\int (x^2 - 1)^{30} .2xdx = \int (u)^{30} du = \frac{u^{31}}{31} = \frac{(x^2 - 1)^{31}}{31} + C$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 49 - Slide 4

E2) Calcule $\int 6x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$:

Por substituição temos:

$u = x^3 - 5 \rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow du = 3x^2dx \rightarrow \dfrac{du}{3} = x^2dx,$

vemos que a integral $\int 6x^2\sqrt{x^3-5}dx = 6\int\sqrt{x^3-5}.x^2dx$, assim:

$$6\int\sqrt{x^3-5}.x^2dx = 6\int\sqrt{u}\frac{du}{3} = 6.\frac{1}{3}\int\sqrt{u}du = 2\int u^{\frac{1}{2}}du = 2.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{4u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{4\left(x^3-5\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Fonte: Elaborada pelo autor

As Figuras 50 e 51 buscaram sistematizar as conclusões que procuramos que os alunos pudessem obter sobre o método de substituição simples.

Figura 50 - Slide 5

A TÉCNICA DA SUBSTITUIÇÃO SIMPLES

Em geral, não há um método seguro e rápido para escolher u, e, em alguns casos, nenhuma escolha de u funcionará. Em tais casos, outros métodos serão necessários, alguns dos quais serão discutidos mais adiante. Fazer a escolha apropriada de u virá com a experiência, mas, o domínio das regras básicas de integrais e seguir o roteiro conforme sugerem Anton, Bivens e Davis (2007).

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 51 - Slide 6

ROTEIRO PARA USO DA TÉCNICA DE SUBSTITUIÇÃO SIMPLES

PASSO 1 Procure uma composição f(g(x)) dentro do integrando para a qual a substituição $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ produza uma integral expressa inteiramente em termos de u e du. Isso pode ou não ser possível.

PASSO 2 Se o Passo 1 tiver sido completado com sucesso, tente calcular a integral resultante em termos de u. Novamente, isso pode ou não ser possível.

PASSO 3 Se o Passo 2 tiver sido completado com sucesso, substitua u por g(x) para expressar a resposta final em termos de x.

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, pretendendo ampliar os conhecimentos e apresentar novos procedimentos, utilizamos o E3 da Figura 52.

Figura 52 - Slide 7

E3) a) Seja a integral indefinida $\int 2.\text{sen}(2x+9)\,dx$:

Vemos que no integrando temos $2.\text{sen}(2x+9)$

Se $u = 2x+9 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \rightarrow du = 2dx$ e assim podemos fazer a substituição de $2x+9$ por u e 2dx por du. Assim:

$$\int 2.\text{sen}(2x+9)dx = \int \text{sen}(u)du = -\cos(u) = -\cos(2x+9)+C$$

b) Se tivéssemos a integral $\int \text{sen}(2x+9)dx$ o que mudaria?

c) E se tivéssemos a integral $\int \text{sen}(3x\text{-}9)dx$?

d) A integral $\int \text{sen}(2x^2+9)dx$ poderia ser resolvida usando a mesma técnica de substituição simples?

Fonte: Elaborada pelo autor

4.5.1 Aplicação e análise dos resultados

A apresentação dos exemplos introdutórios E1 e E2, contribuiu para a compreensão da técnica da substituição simples, permitindo uma rápida visualização dos procedimentos adotados. A proposta do E3 foi de ampliar os conhecimentos anteriores, ao apresentar um integrando composto por uma função trigonométrica, inicialmente complexa, mas tornando-se muito simples ao aplicarmos os procedimentos adequados. Todos os exemplos foram compreendidos pelos alunos que contribuíram respondendo aos questionamentos feitos pelo professor, sendo essa participação fundamental na condução da lição. Assim, além de contribuir para a aprendizagem evitamos a indisciplina durante as aulas teóricas. Finalizada a Lição 5, outros procedimentos importantes foram complementados na Lição 6.

4.6 Lição 6: Fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre a técnica de integração por substituição simples

Para fixar e ampliar conhecimentos sobre a técnica da substituição simples, apresentamos os exemplos introdutórios no EC11 da Figura 53, visam apresentar o algoritmo usado na aplicação da técnica possibilitando ao aluno perceber os motivos que nos levam a escolher parte do integrando como u. Refletindo sobre os procedimentos, podemos conduzir o aluno a uma real compreensão e não uma memorização mecânica de procedimentos que podem não contribuir para uma real aprendizagem. Para atingir os objetivos pretendidos, apresentamos os exemplos ampliadores EC12 da Figura 54 e finalizamos a lição através dos exemplos ampliadores e desafiadores do EC13 da Figura 55, EC14 da Figura 56 e EC15 da Figura 57, objetivando evitar a mecanização não refletida de procedimentos e apresentando situações que os levam a buscar outros recursos para a resolução e apontando as limitações da técnica estudada.

Figura 53 - Exercício complementar 11

EC11 - Algumas integrais não são imediatas, ou seja, não há uma fórmula de integração que aponte sua resposta. Em alguns casos a aplicação da técnica da substituição torna mais simples sua resolução. Veja o exemplo apresentado e complete o quadro.						
Integral	Integrando	f(x)	g(x)	f´(x)	g´(x)	U
a) $\int 3x^2(x^3-2)^6\,dx$	$3x^2(x^3-2)^6$	$3x^2$	(x^3-2)	6x	$3x^2$	(x^3-2)
b) $\int \frac{x}{(3x^2-1)}\,dx$						
c) $\int (2x^2-2)^6\,xdx$						
d) $\int \frac{2x}{(5-3x^2)^5}\,dx =$						
e) $\int (2x-1)^{10}\,dx$						

O método da substituição é relativamente direto, desde que o integrando contenha uma composição f(g(x)) facilmente reconhecível e seu resto seja múltiplo constante de g´(x). Já que você apontou parte do integrando como u, agora veja se sua escolha foi adequada fazendo a substituição e resolvendo as integrais.
a) $\int 3x^2(x^3-2)^6\,dx =$
b) $\int \frac{x}{(3x^2-1)}\,dx =$
c) $\int (2x^2-2)^6\,xdx =$
d) $\int \frac{2x}{(5-3x^2)^5}\,dx =$
e) $\int (2x-1)^{10}\,dx =$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 54 - Exercício complementar 12

EC12 - Você aprendeu um roteiro para a escolha de u adequadamente para a aplicação da técnica da substituição. Siga esse roteiro e resolva as integrais:
a) $\int \text{sen}(3x)dx =$
b) $\int \cos(3x-2)dx$
$c)\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx =$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 55 - Exercício complementar 13

EC13) a) Calcule a integral $\int senx.\cos xdx$ por dois métodos: primeiro fazendo u=senx e, depois u=cosx,
b) Explique por que as duas respostas aparentemente diferentes de (a) são realmente equivalentes.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 56 - Exercício complementar 14

EC14) Às vezes a substituição não é imediata, ainda assim pode ser possível aplicar o método da substituição. Calcule as integrais aplicando as substituições sugeridas:
a) $\int x^2\sqrt{x-1}dx =$ (use u=x-1 logo x=u+1)
b) $\int \cos^3 xdx =$ (lembre-se que $\cos^3 x=\cos^2 x.\cos x$, $\cos^2 x+\text{sen}^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=1-\text{sen}^2 x$, faça $u=\text{sen}x$)

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 57 - Exercício complementar 15

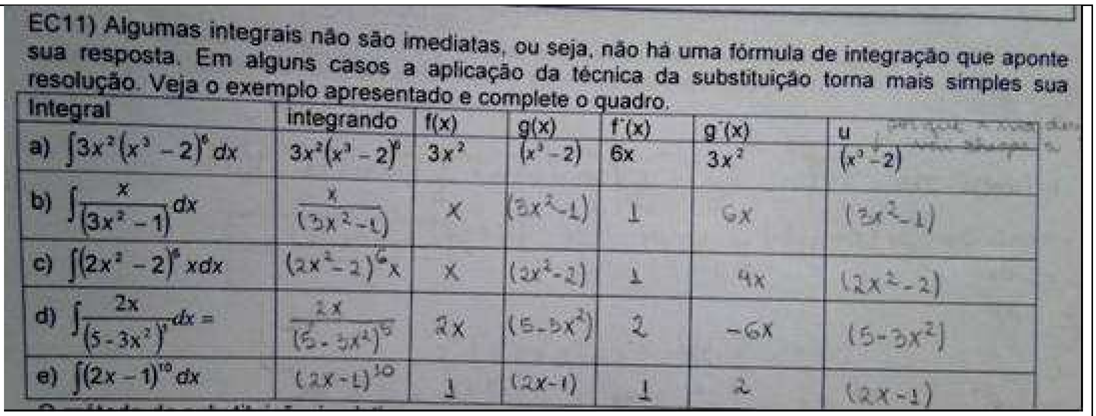
EC15) a) Apesar de serem quase iguais, as integrais indefinidas $\int xe^{x^2}dx$ e $\int xe^{x}dx$ não podem ser resolvidas usando os mesmos procedimentos. Justifique.
b) Desafio. Resolva as integrais anteriores:

Fonte: Elaborada pelo autor

4.6.1 Aplicação e análise dos resultados

Os alunos iniciaram a Lição 11 e necessitaram que o professor esclarecesse o primeiro exemplo EC11. Pelo item a, foram esclarecidas as dúvidas gerais, possibilitando que as equipes não apresentassem dificuldades em completar o quadro. Cabe destacar que no item e, alguns alunos mostraram-se indecisos em relação ao fato de que o integrando era composto apenas por $(2x-1)^{10}$, não percebendo que f(x) ou g(x) poderia ser completada com o valor 1. Essa dúvida não foi apresentada pela dupla D2T1, conforme constatamos através da Figura 58.

Figura 58 - Resolução do EC11 - D2T1

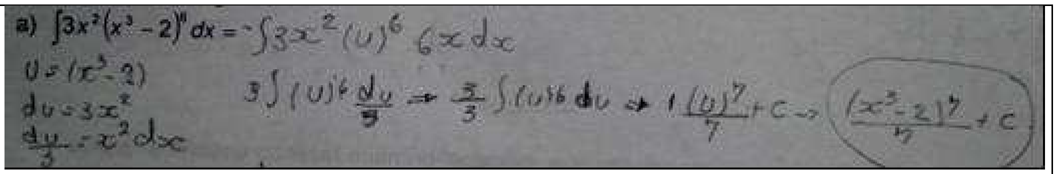

EC11) Algumas integrais não são imediatas, ou seja, não há uma fórmula de integração que aponte sua resposta. Em alguns casos a aplicação da técnica da substituição torna mais simples sua resolução. Veja o exemplo apresentado e complete o quadro.

Integral	integrando	f(x)	g(x)	f´(x)	g´(x)	u
a) $\int 3x^2(x^3-2)^6dx$	$3x^2(x^3-2)^6$	$3x^2$	(x^3-2)	6x	$3x^2$	(x^3-2)
b) $\int \frac{x}{(3x^2-1)}dx$	$\frac{x}{(3x^2-1)}$	x	$(3x^2-1)$	1	6x	$(3x^2-1)$
c) $\int (2x^2-2)^6xdx$	$(2x^2-2)^6x$	x	$(2x^2-2)$	1	4x	$(2x^2-2)$
d) $\int \frac{2x}{(5-3x^2)^5}dx =$	$\frac{2x}{(5-3x^2)^5}$	2x	$(5-3x^2)$	2	-6x	$(5-3x^2)$
e) $\int (2x-1)^{10}dx$	$(2x-1)^{10}$	1	$(2x-1)$	1	2	$(2x-1)$

Fonte: Dados da pesquisa

Não percebemos dificuldades nas turmas em relação à finalização da questão que propõe aos alunos encontrarem as integrais indefinidas em cada caso. Desenvolveram os exemplos, cometendo apenas erros referentes às operações básicas, evidenciando a necessidade de buscar estratégias para a eliminação dessas dificuldades, que permanecem impedindo a evolução das lições; o professor necessita quase sempre de esclarecer regras básicas que impedem uma correta condução das atividades apresentadas. Porém, algumas duplas evidenciaram uma memorização sem consciência dos procedimentos, apresentado um desenvolvimento de exemplos sem sentido. Este comportamento foi observado em 4 das 18 duplas que apresentaram a resolução do EC11. Podemos notar tais procedimentos através da resolução da dupla D13T1 mostrada na Figura 59.

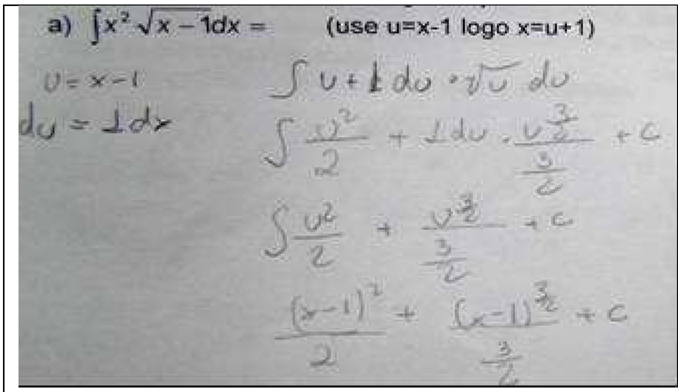
Figura 59 - Resolução do item a do EC11 - D2T1



Fonte: Dados da pesquisa

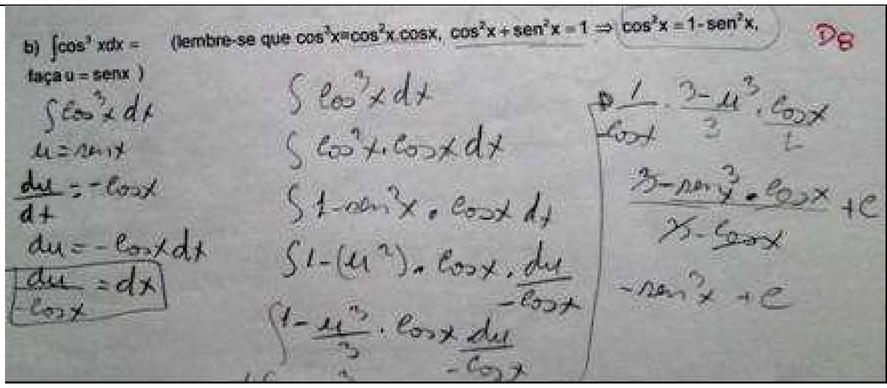
Os exemplos desafiadores apresentados no EC14 da Figura 56 provocaram um desequilíbrio com relação aos procedimentos até então utilizados, demandando dos alunos uma reformulação dos mesmos a fim de modificar o integrando de forma diferente dos exemplos anteriormente apresentados. Os alunos perceberam que os procedimentos anteriores não eram suficientes. Durante a resolução solicitaram com frequência a ajuda do professor, que limitou apenas a alertá-los sobre o uso da sugestão, Assim, alguns conseguiram apresentar a solução dos exemplos, enquanto outros cometeram erros básicos. Acreditamos que a dupla D6T2 tenha copiado, de forma errada, a resolução que outra equipe tenha feito. Vejamos na Figura 60 e 61:

Figura 60 - Resolução do EC14 a - D6T2



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 61 - Resolução do EC14 b - D6T2



Fonte: Dados da pesquisa

Como o exemplo desafiador EC15 da Figura 57 exigia o conhecimento de uma técnica não apresentada ainda, nenhum dos consegui resolvê-lo, evidenciando a necessidade de repensarmos o seu formato.

4.7 Lição 7: ideias gerais sobre a técnica de integração por partes

Retomamos desenvolvendo inicialmente com a turma uma sistematização de resultados anteriormente estudados sobre a técnica de integração por substituição simples, elaborando o slide da Figura 62 e introduzimos as discussões sobre a integração por partes a partir do slide da Figura 63.

Figura 62 - Slide 1

LIMITAÇÃO DA TÉCNICA DA SUBSTITUIÇÃO

Apesar de serem aparentemente semelhantes as integrais indefinidas $\int xe^{x^2}dx$ e $\int xe^{x}dx$ não podem ser resolvidas utilizando-se os mesmos procedimentos. Justifique.

I) Para calcular a integral $\int xe^{x^2}dx$

fazemos $u = x^2$, temos $du = 2xdx \Rightarrow \frac{du}{2} = xdx$

Assim, $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C$

retornando à variável x temos que $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

Os procedimentos não se aplicam ao cálculo da integral $\int xe^x dx$. Voltaremos a questão após o conhecimento de uma nova técnica de integração.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 63 - Slide 2

A REGRA DO PRODUTO E A INTEGRAÇÃO POR PARTES

Quando *u* e *v* são funções deriváveis de *x*, a Regra do Produto para derivação nos diz que $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Integrar os dois lados em relação a *x* e rearranjá-los leva à equação da integral

$$\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = \int\left(\frac{d}{dx}(uv)\right)dx - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

$$= uv - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

Apresentando de forma mais simples temos: $\int udv = uv - \int vdu$

Fonte: Elaborada pelo autor

O objetivo foi apresentar a técnica da integração por partes como importante na resolução de integrais onde a técnica da substituição simples não funciona, através de exemplos introdutórios E1 e E2 da Figura 64, a fim de atingirmos rapidamente a compreensão dos procedimentos usados na aplicação da técnica e deixando claro que o domínio da técnica necessita de prática e dos conhecimentos das regras básicas de cálculo diferencial e integral estudados anteriormente.

Figura 64 - Slide 3

E1: Podemos calcular $\int xe^x dx$ aplicando a nova fórmula obtida:

fazendo $u = x \Rightarrow du = dx$

e $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

e usando a fórmula temos $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

E2:Calcule $\int x\cos xdx$

Solução: Usamos a fórmula $\int udv = uv - \int vdu$

com $u = x$, $dv = \cos xdx$

Para completar a fórmula, tomamos a diferencial de *u* e achamos a primitiva mais simples de cos *x*.

$du = dx$, $v = senx$

Então,

$$\int x\cos xdx = xsenx - \int senxdx = xsenx + \cos x + C$$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 65 - Slide 4

ROTEIRO PARA INTEGRAÇÃO POR PARTES

O objetivo principal da integração por partes é escolher u e dv para obter uma nova integral que é mais fácil de calcular do que a original. Não há regras imediatas e precisas para isso.

Uma estratégia que geralmente funciona é escolher u e dv de tal modo que u fique “mais simples” ao derivar, enquanto dv seja fácil integrar e obter v.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ampliamos os conhecimentos através dos exemplos E3 e E4 da Figura 66. Esclarecemos, porém, que assim como a técnica da substituição simples, esta técnica apresenta suas limitações.

Figura 66 - Slide 5

E3: Resolva os exemplos seguintes como fixação:

a) $\int x\,\mathrm{sen}(2x)\,dx$ b) $\int x^3 \ln(x)\,dx$

E4: Algumas vezes é preciso usar a técnica de integração por partes mais de uma vez. Resolva as integrais seguintes:

a) $\int x^2 e^x\,dx$ b) $\int 2x^3\,\mathrm{sen}(x)\,dx$

Fonte: Elaborado pelo autor

4.7.1 Aplicação e análise dos resultados

Através dos primeiro exemplos introdutórios os alunos compreenderam com facilidade a técnica, ficando apenas dúvidas em relação às escolhas de qual parte do integrando seria nomeada de u e qual de dv. Porém, observou-se com o decorrer das atividades que as grandes dificuldades ficavam mais evidentes quando havia necessidade de repetirmos o processo da integração por partes mais de uma vez. Os alunos novamente demonstraram deficiências básicas nas operações elementares, impedindo o prosseguimento da resolução.

4.8 Lição 8: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre a técnica de integração por partes

Objetivando ampliar os conhecimentos acerca dos procedimentos adotados na aplicação da técnica da integração por partes, apresentamos alguns exemplos a serem resolvidos pelos alunos, alertando sobre quais funções compõem o integrando, estimulando-os a refletir sobre essas diferentes funções e sobre qual seria a escolha apropriada para u e dv em cada caso. Preparamos os exemplos introdutórios e ampliadores EC16 da Figura 67, EC17 da Figura 68, EC18 da Figura 69 e apresentamos um exemplo sistematizador EC19 da Figura 70, que visa formalizar as reflexões dos exemplos anteriores.

Figura 67 - Exercício Complementar 16

EC16) A integral do tipo $\int \ln x dx$ não é imediata, necessita a aplicação da técnica de integração por partes para a sua resolução. Da mesma forma, quando temos integrais que envolvem o produto de função **algébrica** por **logarítmica**, aplicamos a técnica de integração por partes. Use esta técnica e resolva as integrais abaixo. **Dica: A escolha de dv=lnxdx não é adequada**

a) $\int \ln x dx =$ b) $\int x \ln x dx$ c) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 68 - Exercício complementar 17

EC17) Observe as integrais seguintes envolvendo o produto de função **trigonométrica** por função **algébrica**.
Você já sabe que derivadas de funções algébricas são, na maioria das vezes, mais simples que derivadas de funções trigonométricas. Procure fazer a escolha adequada para u e dv e resolva as integrais.
Dica: Algumas vezes precisamos **repetir a técnica de integração por partes** para resolver uma integral.
a) $\int x^2 \cos(x) dx$ b) $\int 4x^2 sen(x) dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 69 - Exercício complementar 18

EC18) Nas integrais que envolvem o produto de função **exponencial** por função **algébrica**, a escolha de dv mais adequada será a exponencial, pois, pela fórmula de integração de exponencial $\int e^u du = e^u + C$ e escolhendo u como a função algébrica, sua diferencial será mais simples.

Faças as escolhas adequadas de u e dv e calcule as integrais seguintes.

a) $\int xe^x dx$ b) $\int 2x^3 e^x dx$ (Sugestão: ver dica do EX17)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 70 - Exercício complementar 19

EC19 - Baseando-se nas integrais já resolvidas aplicando a técnica de integração por partes, observe a tabela e faça a sugestão da escolha de u e dv, para aplicação da técnica de integração por partes.		
Integral	u	dv
I) $\int(\text{algébrica})(\text{logarítmica})dx$		
II) $\int(\text{algébrica})(\text{exponencial})dx$		
III) $\int(\text{algébrica})(\text{logarítmica})dx$		
Obs: Uma estratégia útil para escolher u e dv quando o integrando envolve o produto de duas funções de dois tipos diferentes da lista seguinte, é escolher **u** como a função que ocorre antes na lista e **dv** como o restante do integrando: **L**ogarítmica, trigonométrica **I**nversa, **A**lgébrica, Trigonométrica, **E**xponencial. O acrônimo **LIATE** ajuda a lembrar a ordem. De acordo com o método apresentado anteriormente, procure resolver as integrais: a) $\int x^2\ln(3x)dx$ b) $\int x\sec^2(x)dx$ c) $\int e^x\cos(x)dx$ (veja a dica do EC17) d) $\int e^x\cos(x)dx$ (inverta a escolha feita obedecendo o método do LIATE, e veja se é possível resolver a mesma integral)		

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a lição ampliando e desafiando através do EC20 da Figura 71.

Figura 71 - Exercício complementar 20

EC20 - Podemos encontrar integrais que necessitam a aplicação de mais de uma técnica na sua resolução. Aplicando a técnica de integração por partes e a técnica da substituição simples, resolva as integrais.
a) $\int xe^{-2x}dx$ b) $\int x\cos(2x)dx$ c) $\int x^2 sen(3x)dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

4.8.1 Aplicação e análise dos resultados

Analisando os Quadros 7 e 8, vemos uma diferença significativa entre as duas turmas. Acreditamos que houve uma participação da segunda turma pelo tempo de aula ser maior, assim, os alunos participaram da aula teórica e em seguida executaram os exemplos da Lição 7, enquanto na turma 1, como as aulas são de 1 hora e 15 minutos, sendo suficiente para a execução da aula teórica, então, os alunos receberam parte dos exemplos para fazerem em casa e os demais exemplos foram fornecidos na aula seguinte, finalizando o prazo a Lição 7 foi recolhida.

Quadro 7 - Resultados das turmas 1 e 2 para o exemplo EC18 e EC19

	Turma 1	Turma 2
Fizeram	7	8
Não fizeram	6	2

Fonte: Elaborado pelo autor

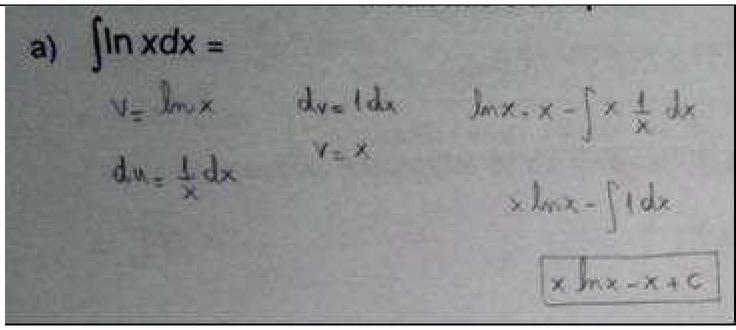
Quadro 8 - Resultados das turmas 1 e 2 para o exemplo EC20

	Turma 1	Turma 2
Fizeram	5	8
Não fizeram	8	2

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando os dados coletados percebemos que os exemplos introdutórios EC16 não apresentaram dificuldades para os que tentaram resolvê-los.

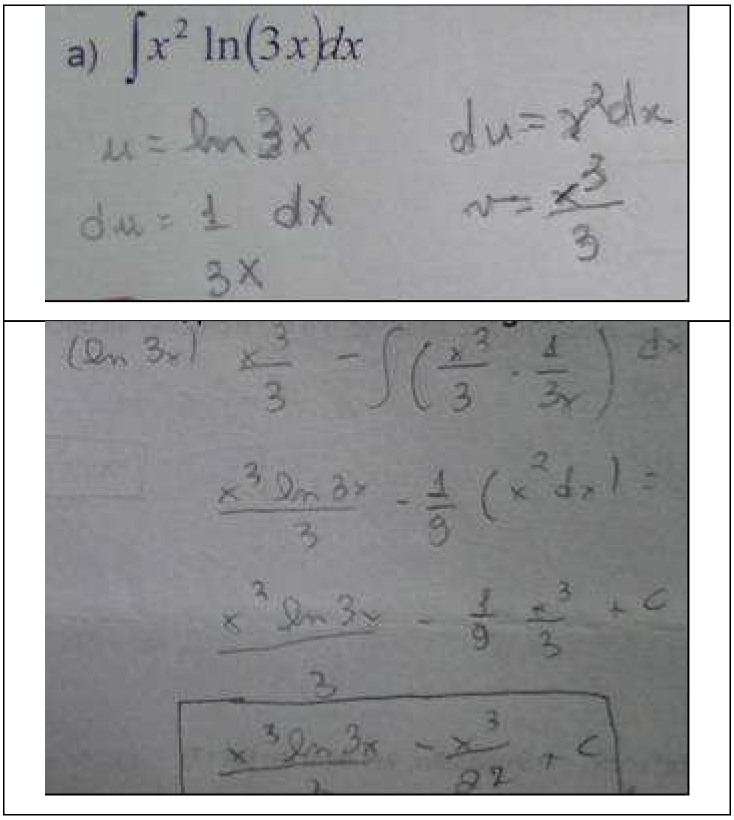
Figura 72 - Resolução do EC16 item a - D8T2



Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, a evolução nos estudos é prejudicada pela falta de pré-requisitos. Na resolução apresentada pela dupla D9T2 na Figura 73, percebemos claramente esta deficiência.

Figura 73 - Resolução do EC16 item a - D9T2

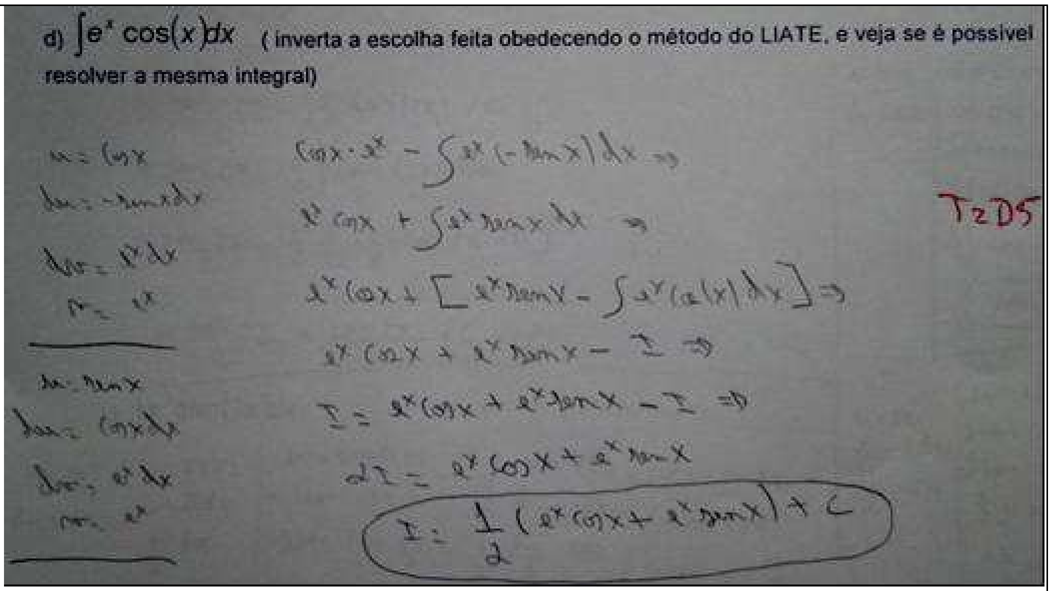


Fonte: Dados da pesquisa

A dupla cometeu um erro ao calcular a derivada, comprometendo a sequência da resolução da integral. No entanto, percebemos que em relação à técnica de integração houve o entendimento, a dupla segue a resolução aplicando corretamente os procedimentos aprendidos através dos exemplos.

Observamos que o EC17, item d, foi considerado difícil pelos alunos. Nas duas turmas, apenas uma dupla apresentou uma resolução que será apresentada a seguir na Figura 74. Os demais alunos utilizaram os procedimentos corretos, porém, não identificaram a possibilidade de transportar para o primeiro membro da equação obtida na aplicação da técnica, possibilitando encerrar com a parte do desenvolvimento que resultava sempre numa integral, retornando ao início da resolução. Alguns alunos comentaram: "professor isso não vai acabar nunca; quando eu repito a técnica, volta ao que começou ".

Figura 74 - Resolução do EC17 item d - D5T2



Fonte: Dados da pesquisa

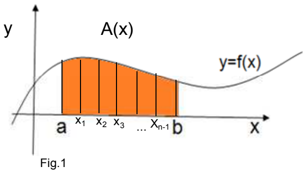
4.9 Lição 9: ideias gerais sobre Integral definida, teorema fundamental do cálculo e aplicação das integrais ao cálculo de áreas

Considerando os alunos com os quais foi desenvolvida a pesquisa, julgamos que seria razoável uma abordagem menos rigorosa do ponto de vista de um trabalho com teoremas e demonstrações dos resultados relacionados a Integral definida e ao Teorema Fundamental do Cálculo. Os slides das Figuras 75 a 77 retomam conceitos já abordados.

Figura 75 - Slide 1

RETOMANDO IDEIAS

Suponha que a função f seja contínua e não-negativa no intervalo [a,b] e que R denote a região delimitada inferiormente pelo eixo x, lateralmente pelas retas verticais x=a e x=b e superiormente pela curva y =f(x)



Dividimos o intervalo [a,b] em n subintervalos iguais inserindo n-1 pontos igualmente espaçados entre a e b e denotamos esses pontos por $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Cada um desses subintervalos tem comprimento $\Delta x = (b-a)/n$. Os retângulos com bases Δx e alturas $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$.

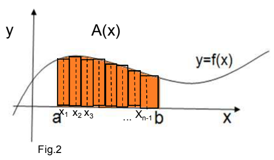
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 76 - Slide 2

O CÁLCULO DE ÁREA

As áreas dos retângulos seriam denotadas por:

$A_1 = f(x_1)\Delta x; A_2 = f(x_2)\Delta x; \ldots; A_n = f(x_n)\Delta x$



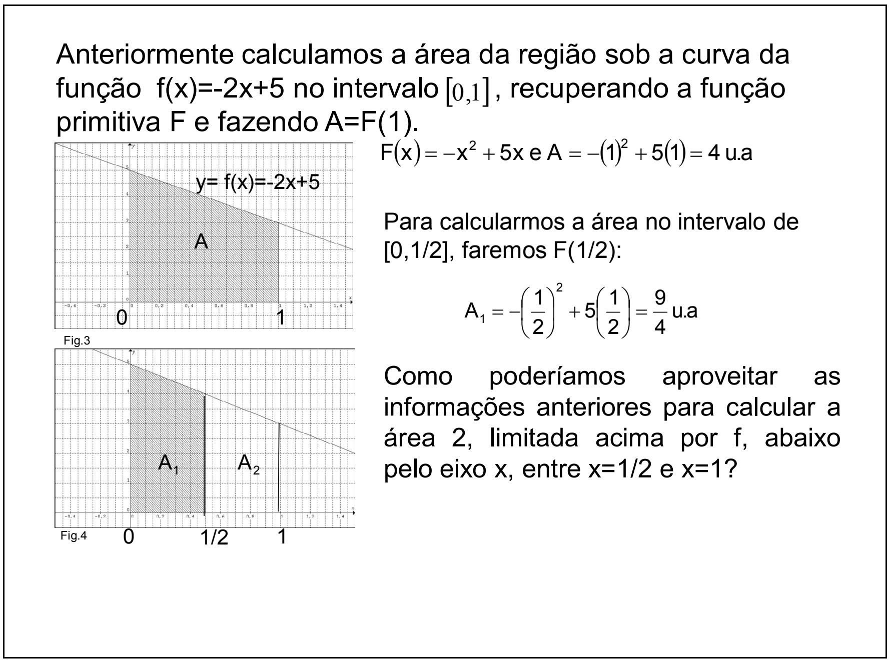
Dividimos o intervalo [a,b] em n subintervalos iguais inserindo n-1 pontos igualmente espaçados entre a e b e denotamos esses pontos por $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Cada um desses subintervalos tem comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Os retângulos com bases Δx e alturas $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$.

A união dos retângulos forma uma região cuja área pode ser uma aproximação da área da região abaixo da curva dada pela função f e acima do eixo x entre x=a e x=b. Em símbolos temos: $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

Quanto maior o número de subintervalos n, melhor será a aproximação, assim, a área exata será $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$, se o limite existir.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 77 - Slide 3



Fonte: Elaborada pelo autor

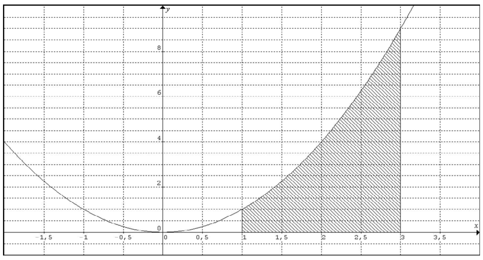
O principal objetivo da Lição 9 foi aplicar as integrais para o cálculo de áreas, visando a um maior interesse e participação dos alunos. Através dos exemplos introdutórios, E1 da Figura 78, E2 da Figura 80 e E3 da Figura 81, apresentamos as principais ideias e procedimentos adotados.

Figura 78 - Slide 4

E1) Calcule a integral definida $\int_1^3 x^2 dx$

$F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ É uma ntegral indefinida de $f(x)=x^2$

$$\int_1^3 x^2dx = F(3)-F(1)=\frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right)=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}+C-C=\frac{26}{3}$$



$$\int_1^3 x^2dx == \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

Esse método contribuiu para os matemáticos Newton e Leibniz, enunciarem um poderoso teorema, importantíssimo no estudo do cálculo, o **teorema fundamental do cálculo**, que possibilita o **cálculo de integrais definidas usando antiderivadas**.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 79 - Slide 5

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Parte 1:

Se f for contínua em [a,b], então a função g definida por

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt \quad a \le x \le b$$

é contínua em [a,b] é diferenciável em (a,b) e g'(x)=f(x).

Parte 2:

Se f for contínua em [a,b], então: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

Onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que F'=f.

Veja que, como $2x+1$ é contínua para qualquer x real, a integral definida

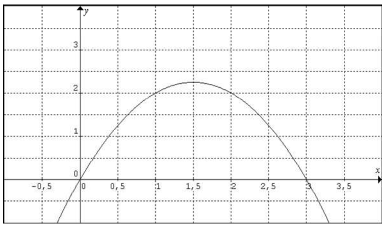
será: $\int_1^3 (2x+1)dx = x^2+x\Big|_1^3 = \left[(3)^2+3\right]-\left[(1)^2+1\right]=12-2=10$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 80 - Slide 6

E2) Calcule a integral definida $\int_0^2 \left(-x^2+3x\right)dx$

Sabemos que a função $f(x) = -x^2 + 3x$ é definida em todo o conjunto dos reais e podemos observar que é contínua. Temos ainda que, por se tratar de um polinômio, a função é diferenciável qualquer que seja o número real e portanto é diferenciável em(0,2).



Pela parte 2 do TFC, como f é contínua, encontremos qualquer antiderivada de f:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C$$

$$F(2) = -\frac{(2)^3}{3} + 3\frac{(2)^2}{2} + C = -\frac{8}{3} + 6 + C = \frac{10}{3} + C$$

$$F(0) = -\frac{(0)^3}{3} + 3\frac{(0)^2}{2} + C = C$$

Assim, $\int_0^2 \left(-x^2+3x\right)dx = F(2) - F(0) = \frac{10}{3} + C - C = \frac{10}{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 81 - Slide 7

E3) Calcule a integral definida $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx$.

Encontramos a antiderivada de senx, calculamos os valores das antiderivadas nos limites superior e inferior e aplicamos a segunda parte do TFC.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos x \Big]_0^{\pi} = [-\cos \pi] - [-\cos 0] = [-(-1)] - [-(1)] = 2$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = 2$$

Fonte: Elaborada pelo autor

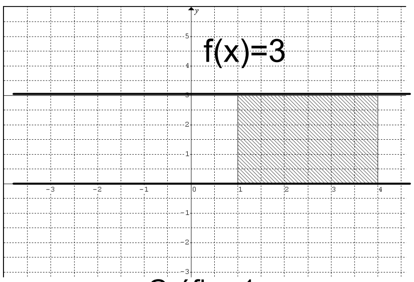
4.9.1 Aplicação e análise dos resultados

Ao reapresentar as ideias anteriores, envolvendo o cálculo de as áreas os alunos não demonstraram dificuldades no entendimento dos conceitos e procedimentos relacionados. Cabe ressaltar a satisfação dos mesmos ao visualizarem uma aplicação concreta do assunto estudado. Os comentários e o comportamento de grande parte da turma foram estimulantes para o professor que também se sentiu motivado para dar continuidade ao trabalho, introduzindo a Lição 10.

4.10 Lição 10: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre a integral definida, o teorema fundamental e cálculo de áreas

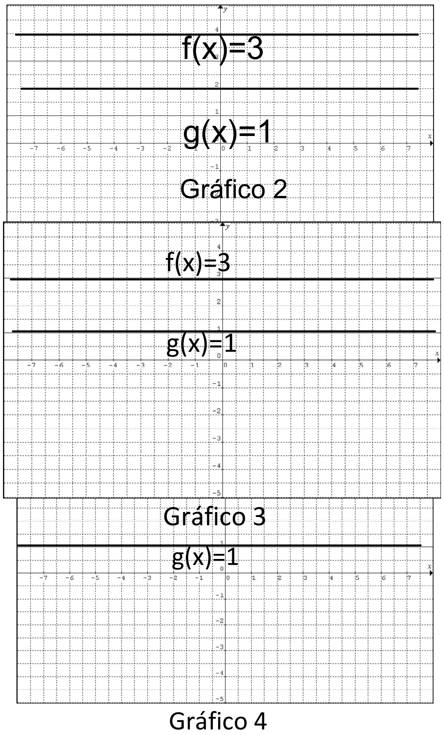
Apresentamos a proposta de resolução de uma sequência de exemplos EC21 da Figura 82 e EC22 da Figura 83, que desempenham o papel de introdutórios, ampliadores e sistematizadores, a fim de possibilitar aos alunos a construção de conceitos e procedimentos que serão aplicados posteriormente em exemplos mais complexos.

Figura 82 - Exercício complementar 21

 Gráfico 1	EC21 - A representação gráfica ao lado refere-se à região plana delimitada por f(x)= 3, x=1 e x=4. Calculando a integral definida da função dada no intervalo [1;4], teremos: $\int_1^4 3dx = 3x\Big\|_1^4$ =3.(4)-3.(1)=12-3=9. Observe que a integral definida representa a área do retângulo limitado por x=1, x=4, f(x)=3 e o eixo x.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 83 - Exercício complementar 22



EC22 - Observando o gráfico das curvas f(x)=3 e g(x)=1, faça o que se pede:

a) No gráfico 2, hachure a região cuja área é dada pela integral $\int_{2}^{6} f(x)dx$.

b) No gráfico 3, hachure a região cuja área é dada pela integral $\int_{2}^{6} g(x)dx$.

c) Represente no gráfico 4 a região entre as duas curvas dadas pelas funções **f** e **g** no intervalo $2 \le x \le 6$.

d) Usando $\int_{2}^{6} f(x)dx$ e $\int_{2}^{6} g(x)dx$ estabeleça uma expressão matemática que represente a área da região especificada no item c.

e) é possível expressar a área do item c através de **uma única integral definida**? Qual é essa integral?

f) Redija um pequeno parágrafo registrando suas conclusões sobre o cálculo de áreas entre duas curvas num dado intervalo usando integrais definidas.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 84 - Exercício complementar 23

EC23 - Supondo $\int_{-2}^{1} f(x)dx = M$, $\int_{1}^{3} f(x)dx = N$ e $\int_{3}^{5} f(x)dx = P$, calcule:

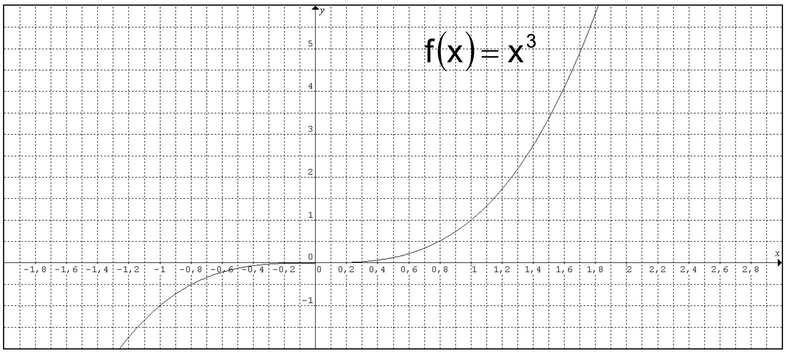
a) $\int_{-2}^{1} 2f(x)dx =$ b) $\int_{1}^{3} \frac{f(x)}{4}dx =$ c) $\int_{-2}^{5} f(x)dx =$

Fonte: Elaborada pelo autor

Com o exemplo ampliador e retificador EC24 da Figura 85 pretendemos que os alunos compreendam que nem toda integral corresponde a uma área. Queremos ainda, que percebam que quando a função possui uma representação gráfica abaixo do eixo x, a integral nesse intervalo resulta num valor negativo, que, em módulo, é igual ao valor da área. Com este exemplo, objetivamos discutir os procedimentos usados para calcular áreas através de integral definida. Apresentamos situações que a integral fornecerá o valor da área e outros que não fornecerá o valor da área, provocando discussões importantes.

Figura 85 - Exercício complementar 24

EC24 - Observe a representação gráfica da função $f(x)=x^3$ e responda:



a) Calcule a integral definida $\int_{-1}^{0} f(x)dx$. O valor da integral pode ser a área limitada entre a curva e o eixo x no intervalo [-1,0]?

b) Calcule a integral definida $\int_{0}^{2} f(x)dx$. O valor da integral pode ser a área limitada entre a curva e o eixo x no intervalo [0,2]?

c) Calcule a integral definida $\int_{-1}^{2} f(x)dx$. O valor da integral pode ser a área limitada entre a curva e o eixo x no intervalo [-1,2]?

Estabeleça uma expressão matemática que represente a área da região entre $f(x)=x^3$, x=-1, x=2 e o eixo x.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 86 - Exercício complementar 25

EC25 - Use as técnicas de integração já estudadas e calcule as integrais definidas:

a) $\int_0^2 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$ b) $\int_0^{\ln 3} e^x.(1+e^x)^2 dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cos(2x)dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

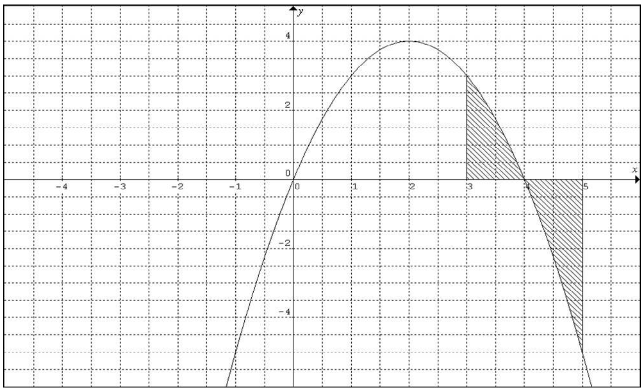
Figura 87 - Exercício complementar 26

EC26 - É possível calcular a área da região limitada por uma curva e o eixo x num intervalo $a \le x \le b$, usando integrais.

A representação gráfica abaixo refere-se à função $y = -x^2 + 4x$.

a) Escreva uma expressão envolvendo integrais que forneça a área da região sombreada.

b) Calcule o valor da área em destaque.



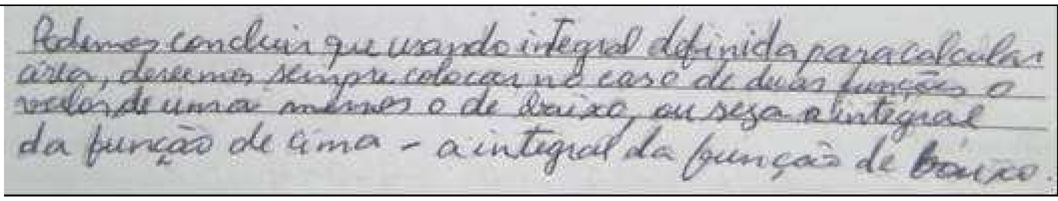
Fonte: Elaborada pelo autor

4.10.1 Aplicação e análise dos resultados

Consideramos que a proposta de condução de descobertas através da análise do exemplo resolvido EC21 da Figura 82 e de resolução do EC22 da Figura 83, poderia incentivar os alunos a refletir sobre os procedimentos e resultados encontrados. Assim, organizando e registrando estas informações e conclusões,eles estariam vivenciando a experiência de uma descoberta guiada, que segundo Ernest (1996), pode contribuir para uma aprendizagem mais eficiente, uma vez que, o aluno assume um papel de coadjuvante no processo de aprendizagem. Proporcionando momentos em que os alunos são levados a expor suas descobertas e conjecturas, o professor estará contribuindo para o desenvolvimento não apenas de conceitos, mas da capacidade de argumentação, verbal ou escrita. Os recursos mentais que o aluno utiliza para expor, verbalmente ou através da escrita podem contribuir para a aprendizagem, conforme constataram Porter e Masingila (2000).

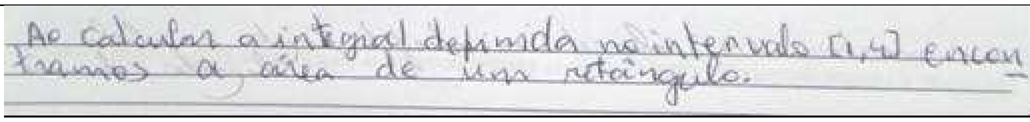
Ao analisarmos as conclusões fornecidas no final do EC22, observamos ainda, uma deficiência na capacidade de escrita dos alunos. Vejamos os registros da D8T2 na Figura 88. Esta dupla, assim como as outras 9 duplas que compõem a turma 1, forneceram as respostas corretas para as questões levantadas neste exemplo. Esta análise se estende à turma 1, pois, os resultados obtidos foram semelhantes.

Figura 88 - Resolução do EC22 - D8T2


Podemos concluir que usando integral definida para calcular área, devemos sempre colocar no caso de duas funções o valor de uma menos o de baixo, ou seja a integral da função de cima - a integral da função de baixo.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 89 - Resolução do EC22 - D4T1


Ao calcular a integral definida no intervalo [1,4] encontramos a área de um retângulo.

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 89 vemos uma conclusão fornecida pela D4T1 e verificamos a dificuldade de registrar suas conclusões, talvez pela pouca ou nenhuma prática em atividades que exijam esta habilidade.

O EC23, que pode ser classificado como sendo um exemplo introdutório e ao mesmo tempo ampliador, visando apresentar procedimentos e propriedades das integrais definidas, desempenhou seu papel; os alunos das duas turmas apresentaram as respostas corretas, não apresentando dificuldades.

Esperávamos que ao final do EC24, os alunos representassem usando integrais a área entre uma curva dada por uma função f e o eixo x, num intervalo em que a imagem da função f alterna o sinal, passando de negativa para positiva. Os alunos calcularam corretamente o valor das integrais nos intervalos considerados. Observaram que a integral no intervalo de [-1,0] era negativa e quando questionados se o valor poderia representar a área, responderam que não, justificando que a função está abaixo do eixo x. No intervalo [0,2], disseram que sim, pois a função estava acima. Quando questionados sobre o valor da integral no intervalo [-1,2], calcularam corretamente. Apesar de terem executado todos os procedimentos corretos no cálculo da integral definida, as duplas não conseguiram apresentar uma expressão por meio de integrais que representasse a área solicitada.

Após a entrega da lição, durante a socialização dos resultados, a questão foi retomada com os alunos. Foram feitos alguns questionamentos, solicitando que observassem a representação gráfica e os valores das integrais definidas nos intervalos solicitados no exemplo, a fim de contribuir para o debate. Os alunos não tiveram dificuldades em concluir que no intervalo que a função estava abaixo, seria necessário alterar o sinal da integral obtida, para que assim, representasse a área entre a curva e o eixo x. Assim, conseguiram observar que a integral no intervalo [-1,2] apresentava um valor menor do que o valor da integral em [0,2]. Na turma 2, um aluno muito participativo, comentou: "professor, o valor é menor porque a parte negativa foi descontada da parte positiva".

Os exemplos diagnosticadores EC25 possibilitaram verificar o aprendizado das técnicas e recuperar os procedimentos aprendidos anteriormente. Para resolvê-los os alunos tiveram de retomar as anotações anteriores para a execução. Assim, julgamos que esses exemplos desempenharam o papel esperado.

No EC26 observamos que os alunos não evidenciaram dificuldades em resolver corretamente o exemplo. No entanto, 5 duplas, entre as 23 construíram apenas uma integral apenas no intervalo e errando o exemplo.

Quadro 9 - Resultado das turmas 1 e 2 para o exemplo ampliador 26

	Turma 1	Turma 2
Representaram	10	8
Não representaram	3	2

Fonte: Elaborado pelo autor

Após a socialização desta lição, elaboramos uma lista contendo exemplos para retornar e discutir pontos importantes não compreendidos.

4.11 Lição 11: ideias gerais sobre o cálculo de volumes através das integrais

Através da Lição 11, pretendemos fornecer as noções gerais sobre os procedimentos usados para calcular o volume de sólidos obtidos por rotação ou não, dando uma maior ênfase aos sólidos obtidos por rotação de uma região plana R, em torno dos eixos x e y, ou em torno de um eixo qualquer, paralelo aos eixos coordenados.

Para atingir nossos objetivos, resgatamos as ideias já apresentadas no cálculo de áreas e estendemos as noções ao cálculo de volumes, a partir dos slides da Figura 90 e 91. Um exemplo sistematizador E1 foi apresentado na Figura 92, objetivando possibilitar um entendimento da expressão $\int_a^b A(x)dx$, usada para o cálculo do volume de um sólido que se estende ao longo de um eixo; eixo x, por exemplo, num intervalo de [a,b]. Nesse caso A(x) representa a área das secções perpendiculares obtidas ao longo do intervalo considerado e dx a altura destas secções.

Figura 90 - Slide 1

RELEMBRANDO PROCEDIMENTO IMPORTANTES

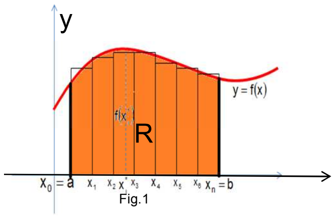


Fig.1

$\sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$ Soma de Riemann

$$A_R = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$$

Lembramos que o princípio básico para encontrar a área de uma região plana R é dividir a região em retângulos com comprimentos cada vez menores, agrupar os retângulos para formar uma aproximação da região que queremos encontrar. Formar uma **soma de Riemann** com a área desses retângulos e calculamos o limite, obtendo uma integral definida que representa a área região R.

$A_R = \int_a^b f(x)dx$ Integral definida de a para b da função f

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 91 - Slide 2

CÁLCULO DE VOLUMES

Sob condições apropriadas, a mesma estratégia usada para calcular áreas pode ser usada para calcular volumes. A ideia é dividirmos o sólido em fatias finas, aproximar o volume de cada fatia, somar as aproximações para formar uma soma de Riemann e passar ao limite para obter uma integral definida que nos forneça o volume.

Para começarmos, consideremos um cilindro gerado pela translação de uma região A ao longo de uma distância h, então dizemos que h é a altura do cilindro e o volume V deste é definido por

$$v = A.h = [\text{área de uma seção transversal}]x[\text{altura}]$$

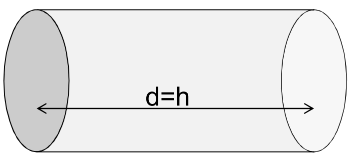
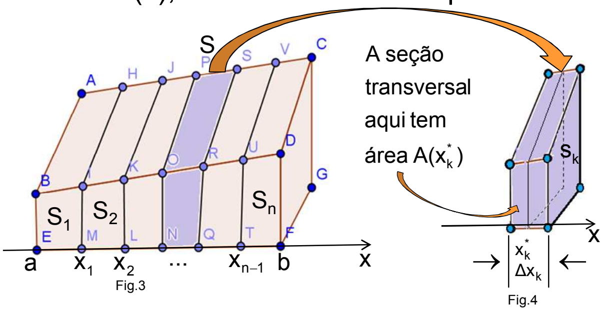


Fig.2

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 92 - Slide 3

E1) Seja S um sólido que se estende ao longo do eixo x e que é delimitado à esquerda e à direita, respectivamente, pelos planos perpendiculares ao eixo x em x=a e x=b. Vamos encontrar o volume V do sólido, supondo que sua seção transversal tenha área A(x), conhecida em cada ponto x do intervalo [a,b].



Somando as aproximações obtemos a soma de Riemann que aproxima o volume V:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x$$

Tomando limite quando n cresce e as extensões tendem a zero, obtemos a integral definida

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b A(x)dx$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 93 - Slide 4

Resultados Importantes

1ª Fórmula para o volume Seja S um sólido delimitado por dois planos **perpendiculares ao eixo x em x=a e x=b**. Se, para cada x em [a,b], a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x for **A(x)**, então o volume do sólido é

$$V = \int_a^b A(x)dx \qquad \text{desde que } A(x) \text{ seja integrável.}$$

2ª Fórmula para o volume Seja S um sólido delimitado por dois planos **perpendiculares ao eixo y em y=c e y=d**. Se, para cada y em [c,d], a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo y for **A(y)**, então o volume do sólido é

$$V = \int_c^d A(y)dy \qquad \text{desde que } A(y) \text{ seja integrável.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

No exemplo E2 das Figura 94 e 95, objetivamos apresentar o volume de uma pirâmide usando os procedimentos discutidos no E1.

Figura 94 - Slide 5

E2) Vejamos uma pirâmide de base quadrada com aresta da base a, e altura h. Introduzimos um sistema retangular de coordenadas no qual o eixo y passa pelo ápice, o eixo x passa pela base e é paralelo a um de seus lados.
Em qualquer ponto y de [0,h] sobre o eixo y, a seção transversal perpendicular ao eixo y é um quadrado. Se s for o comprimento de um lado desse quadrado, então, por semelhança de triângulos, podemos escrever:

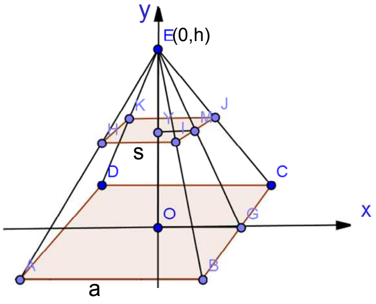


Fig.5

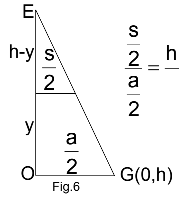


Fig.6

$$\frac{\frac{s}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{h-y}{h} \text{ ou } s = \frac{a}{h}(h-y)$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 95 - Slide 6

Assim, a área A(y) da seção transversal em y é $A(y) = s^2 = \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2$

E o volume é dado por $V = \int_0^h A(y)dy$, fazendo as devidas trocas e operações temos:

$$V = \int_0^h A(y)dy = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2 dy = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2 dy = \frac{a^2}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-y)^3\right]_0^h$$

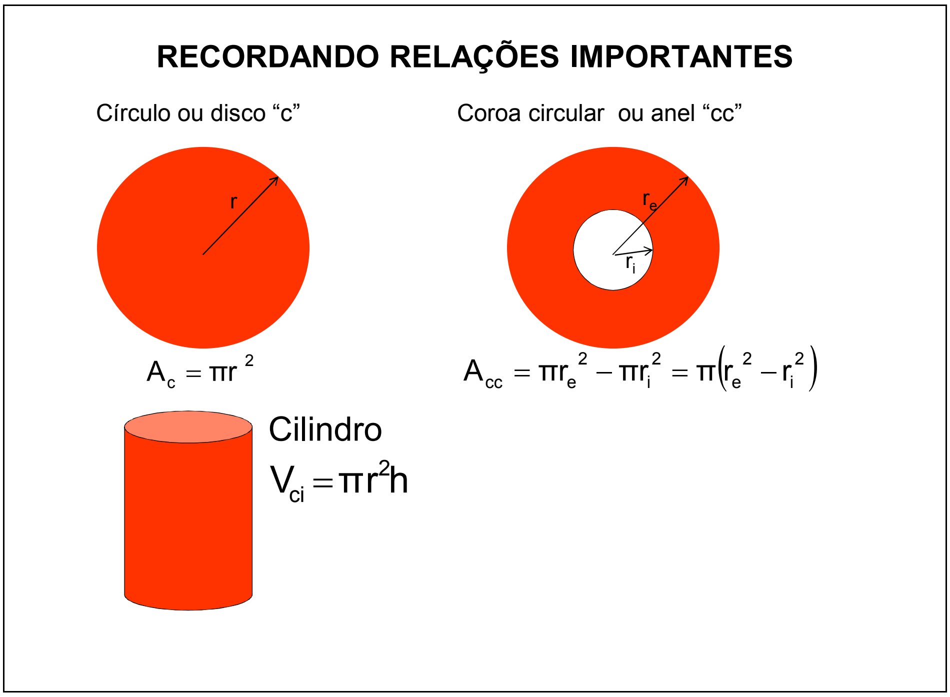
$$V = -\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{h^2}\left[(h-y)^3\right]_0^h = -\frac{a^2}{3h^2}\left[(h-h)^3-(h-0)^3\right] = \frac{1}{3}a^2.h$$

Verificamos que o volume é 1/3 da área da base vezes a altura.
Esse resultado já era esperado?

Fonte: Elaborada pelo autor

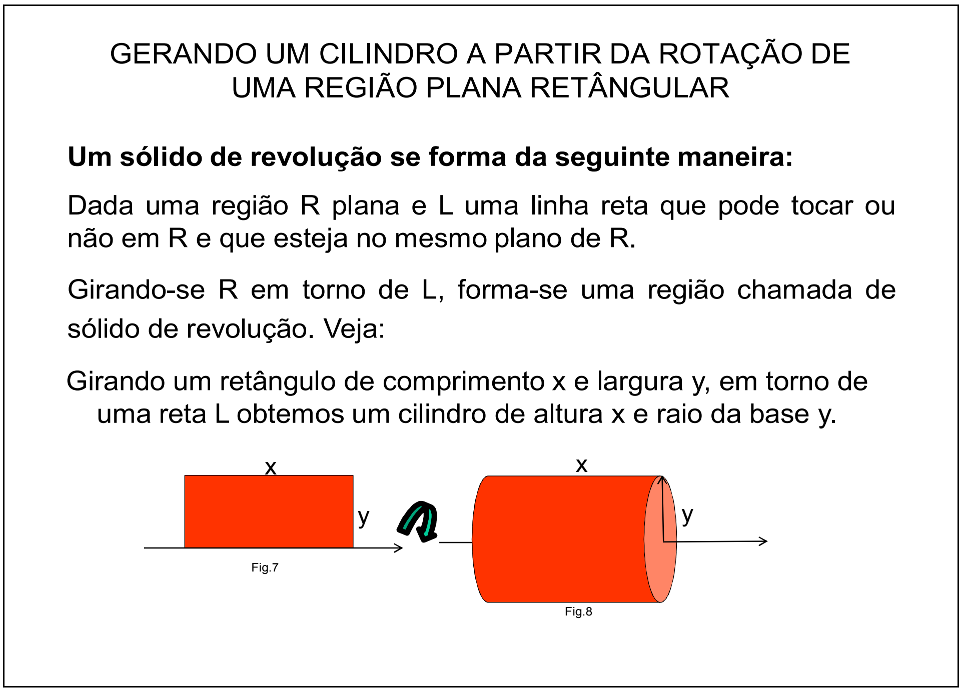
Recordamos os conceitos básicos relacionados ao cálculo de área do círculo e volume de cilindro para apresentarmos as ideias gerais sobre o cálculo do volume dos sólidos obtidos pela rotação.

Figura 96 - Slide 7



Fonte: Elaborada pelo autor

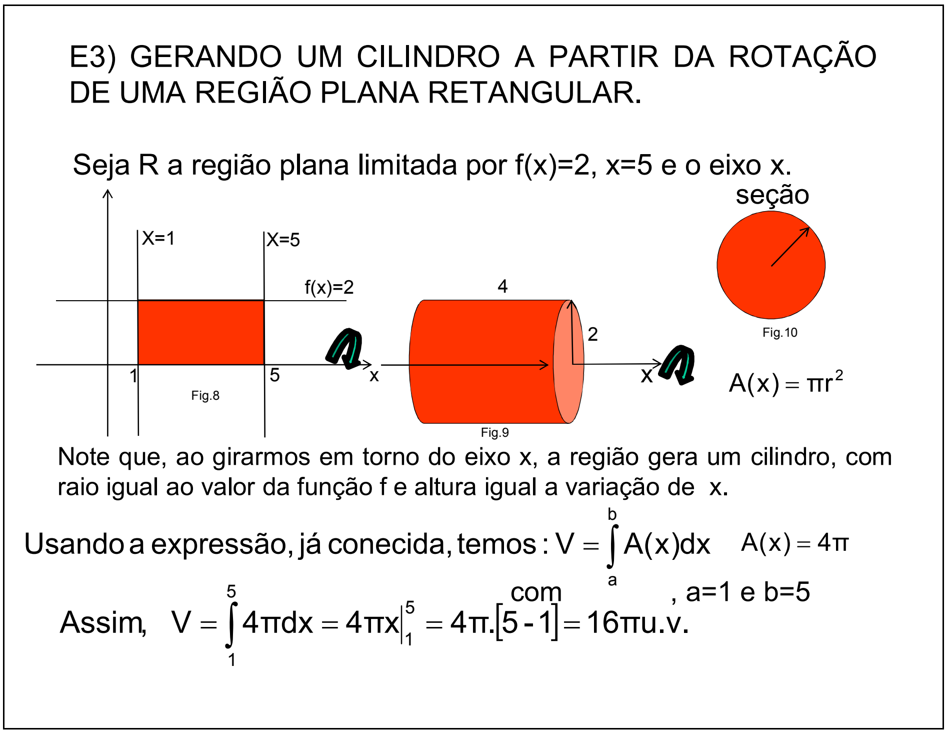
Figura 97 - Slide 8



Fonte: Elaborada pelo autor

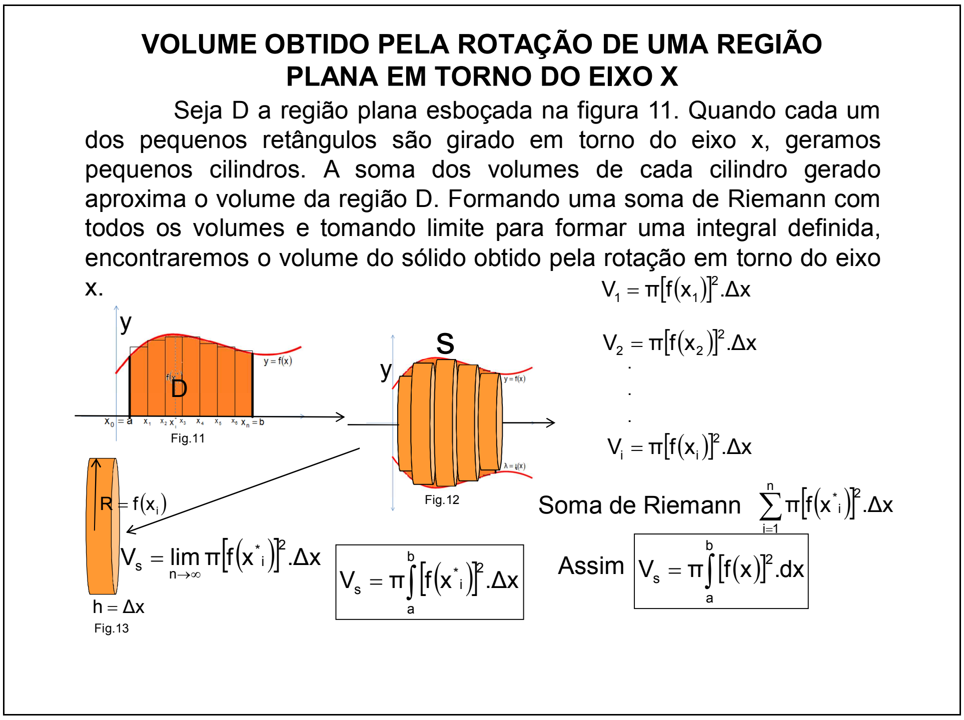
Apresentamos os exemplos introdutórios E3 através das Figura 98 e 99 e E4 na Figura 100.

Figura 98 - Slide 9



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 99 - Slide 10



Fonte: Elaborada pelo autor

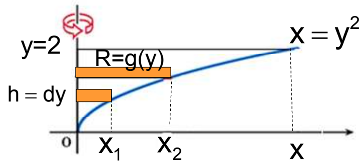
Figura 100 - Slide 11

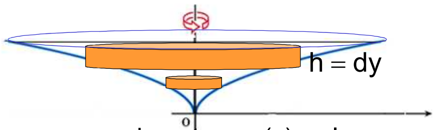
VOLUME OBTIDO PELA ROTAÇÃO DE UMA REGIÃO PLANA EM TORNO DO EIXO Y

E4) Vamos calcular o volume do sólido gerado pela rotação da região plana limitada por $y=\sqrt{x}$, y=2 e x=0 é girada em torno do eixo y.

$\text{Raio} = g(y) \Rightarrow R = y^2$

$\text{altura} = \Delta y \Rightarrow h = dy$





Cada um dos retângulos inscritos, com comprimento r=g(y) e largura h=dy, ao girar em torno do eixo y, gera um cilindro, com raio r e altura h. Sabemos que uma integral definida $V=\int_c^d A(y)dy$ nos fornece o volume do sólido gerado, e que a área A(y) é:

$$A(y) = \pi\left[(y^2)\right]^2$$

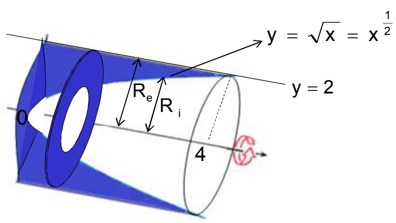
$$V_s = \pi\int_0^2 y^4 dy = \pi\left.\frac{y^5}{5}\right| = \frac{\pi}{5}\left[(2)^5\right] = \frac{32\pi}{5}\text{u.v.}$$

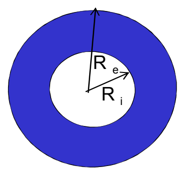
Fonte: Elaborada pelo autor

Os exemplos ampliadores E5 da Figura 101, E6 da Figura 102 e E7 da Figura 103 objetivaram apresentar as variações necessárias, fornecendo meios para generalizarmos o método do disco e da coroa-circular.

Figura 101 - Slide 12

E5) Qual é o volume do sólido gerado pela rotação da região anterior em torno do eixo eixo x?





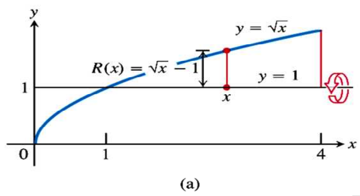
$$V_s = \pi\int_0^4 \left[2^2 - [f(x)]^2\right]dx = \pi\int_0^4\left[4 - [x^{\frac{1}{2}}]^2\right]dx = \pi\int_0^4 [4-x]dx = 4x - \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 \pi$$

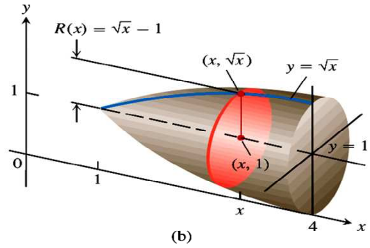
$$V_s = 4x - \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 \pi = \left[4.4 - \frac{4^2}{2}\right]\pi = [16-8]\pi = 8\pi\text{u.v.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 102 - Slide 13

Ex6) Seja D a região limitada por $y = \sqrt{x}$, y=1 e x=4. Escreva a integral que nos forneça o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno de y=1.





Nesse caso, o raio será $R = \sqrt{x} - 1$, assim, pela fórmula de volume temos:

$$V_s = \pi\int_1^4 \left[\sqrt{x} - 1\right]dx = \pi\int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right]dx = \pi\int_1^4 \left[x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1\right]dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x\right]_1^4$$

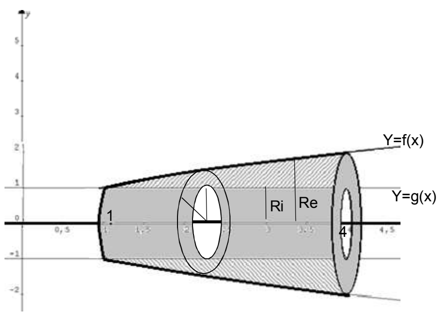
$$V_s = \pi\left[\left(\frac{4^2}{2} - \frac{4(4)^{\frac{3}{2}}}{3} + 4\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{4(1)^{\frac{3}{2}}}{3} + 1\right)\right] = \frac{7\pi}{6} \cong 3{,}66\text{u.v.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 103 - Slide 14

E7) Seja D a região limitada por $f(x) = \sqrt{x}$, g(x)=1 e x=4. Escreva a integral que nos forneça o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno do eixo x.

Re=f(x) Ri=g(x)



Como o sólido apresenta superfície interna, seu volume será a diferença entre o volumes, e pode ser calculado diretamente com a integral:

$$V_s = \pi\int_1^4 \left[[\sqrt{x}]^2 - [1]^2\right]dx =$$

$$V_s = \pi\int_1^4 [[x - 1]dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^4 = \frac{9}{2}\pi\text{u.v.}$$

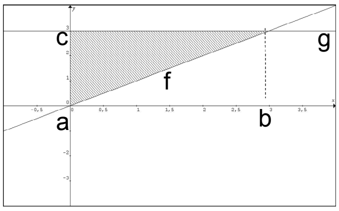
Fonte: Elaborada pelo autor

Apresentamos, então, alguns slides (Figuras 104 e 105), com o objetivo de possibilitar a sistematização e generalização dos procedimentos trabalhados no cálculo de volumes.

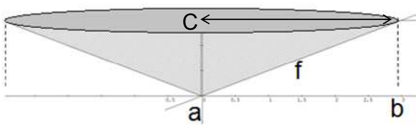
Figura 104 - Slide 15

GENERALIZANDO PROCEDIMENTOS IMPORTANTES

Seja a região plana D, sombreada, limitada pelas funções f, g e pelo eixo y, representada na figura.



Girando a região plana D, em torno do eixo y, obtemos um sólido, cujo volume será dado por:

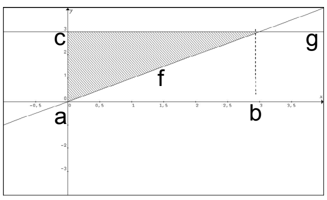


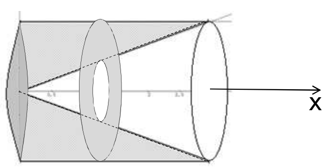
$$V_s = \pi\int_a^c \left[[f(y)]^2\right]dy$$

Fonte: Elaborada pelo autor

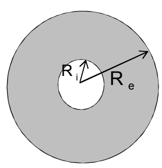
Figura 105 - Slide 16

Girando a região plana D em torno do eixo x, obtemos um sólido que possui superfícies internamente, seu volume será dado por:





$$V_s = \pi\int_a^b \left[[g(x)]^2 - [f(x)]^2\right]dx$$



Fonte: Elaborada pelo autor

4.11.1 Aplicação e análise dos resultados

Nas duas turmas percebemos que os alunos mostraram-se motivados, por verem uma aplicação interessante do assunto estudado.

Ao apresentar o exemplo E1, para que os alunos compreendessem, foi necessário retornar aos procedimentos relacionados à semelhança de triângulos para justificar a resolução apresentada, pois alguns alunos não compreenderam a expressão apresentada na Figura 91. No entanto, ao final, percebeu-se um clima de satisfação ao ver uma aplicação prática de um conteúdo estudado.

Percebemos, através de questionamentos que as noções básicas foram compreendidas, restando, porém, a confirmação através dos exemplos complementares, necessários para fixação e complementação de conceitos e procedimentos.

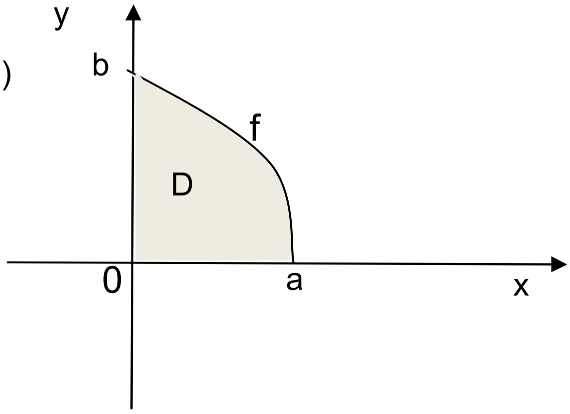
4.12 Lição 12: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre o cálculo de volumes através das integrais

Através dos exemplos sistematizadores EC27 da Figura 106, pretendemos fortalecer importantes procedimentos e esclarecer quaisquer dúvidas ainda presentes no uso de integrais para calcular volumes.

Figura 106 - Exercício complementar 27

EC27) Seja D a região plana sombreada. Escreva uma integral que represente o volume do sólido obtido em cada caso:

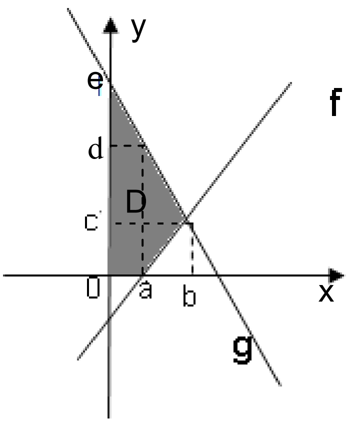
a)



I) Girando D em torno do eixo x:

II) Girando D em torno do eixo y.

b)



I) Girando D em torno do eixo y.

II) Girando D em torno do eixo x.

Fonte: Elaborada pelo autor

Com os exemplos introdutórios e ampliadores do EC28 Figura 107 e EC29 das Figura 108 pretendemos desenvolver e fixar os procedimentos visto genericamente pelo EC27.

Figura 107 - Exercício complementar 28

EC28 - Represente no sistema cartesiano a região D, limitada por $f(x) = -x + 2$, o eixo x e o eixo y.

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região D, em torno:

a) do eixo x

b) do eixo y

c) da reta x= -1

d) da reta x=3

e) da reta y=-1

f) da reta y=3

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 108 - Exercício complementar 29

EC29 - Faça a representação gráfica da região limitada por $y=x^2$, x=3 e o eixo x, em seguida calcule:

a) O volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo x.

b) O volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo y.

Fonte: Elaborada pelo autor

Através dos exemplos introdutórios e diagnosticadores EC30 da Figura 109 e EC31 da Figura 110, pretendemos verificar se ficou compreendido que nem todo sólido é obtido por rotação em torno de um eixo. O objetivo destes exemplos é esclarecer que os sólidos obtidos por rotação compreendem uma aplicação do procedimento geral que adotamos na apresentação dos exemplos EC30 e EC31.

Figura 109 - Exercício complementar 30

EC30 - Um sólido S se estende ao longo do eixo x de x=1 até x=3. Para x entre 1 e 3, a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x é $3x^2$.

a) Escreva uma integral que representa o volume de S.

b) Qual o valor do volume do sólido S?

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 110 - Exercício complementar 31

EC31 - Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ cujas seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.

Fonte: Elaborada pelo autor

O EC32 da Figura 111 visa ampliar e sistematizar os procedimentos aprendidos. No exemplo desafiador EC33, pretendemos que o aluno movimente recursos para representar a região não muito comum e após esta representação calcule o volume do sólido obtido. Com o exemplo sistematizador e desafiador EC34 da Figura 109, possibilitamos, primeiramente, um retorno aos procedimentos aplicados anteriormente e, consequentemente uma reflexão sobre estes procedimentos e conduzimos os alunos a uma organização mental, categorizando os exemplos, conforme os procedimentos adotados.

Figura 111 - Exercício complementar 32

EC32 - Qual o volume do sólido obtido pela rotação da região plana limitada abaixo por $y=x^2$, acima por $y=9$ e à esquerda pelo eixo y , girando em torno: a) do eixo y; b) do eixo x; c) de $y= -1$ d) de $x= -1$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 112 - Exercício complementar 33

EC33 - Seja a região plana D, limitada por $y=x^{3/2}$, $y=1$ e $x=3$. Crie exemplos de sólidos rotacionando a região plana D, em torno de um eixo, de forma que: a) A seção transversal ao eixo de rotação seja um disco; b) A seção transversal ao eixo de rotação seja uma coroa circular.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 113 - Exercício complementar 34

EC34 - Entre os exercícios resolvidos: a) Quais aqueles em que a seção transversal em relação ao eixo de rotação é um disco? b) Quais aqueles em que a seção transversal em relação ao eixo de rotação é uma coroa circular? c) Quais os que não são exemplos de sólidos de revolução.

Fonte: Elaborada pelo autor

4.12.1 Aplicação e análise dos resultados

No desenvolvimento da Lição 12 percebemos um interesse maior pelos exemplos. Acreditamos que o assunto despertou a curiosidade da maioria dos alunos.

O EC27a foi corretamente resolvido por 16 entre as 23 duplas, conforme quadro 10. Como os erros estavam relacionados a ausência do expoente 2 no integrando, acreditamos que os alunos não tiveram atenção ao apresentar a expressão.

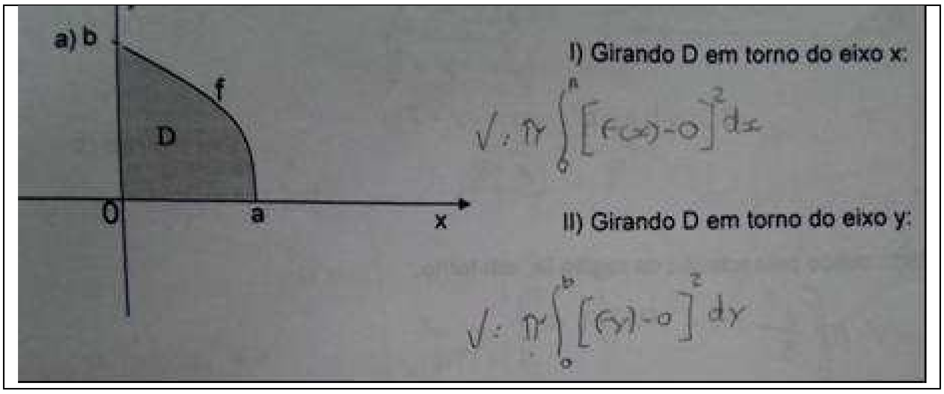
Quadro 10 - Síntese das turmas 1 e 2 para o EC27a

	Turma 1	Turma 2
Acertaram	10	7
Erraram	1	1
Não entregaram	2	2

Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir, na Figura 114, ilustramos através da resolução das duplas D6T1 e D4T2 a resposta apresentada com maior frequência. Notamos que nos casos que a rotação gera um disco os alunos compreendem os procedimentos, necessitando ainda, trabalhar um pouco mais os casos que a rotação é em torno do eixo y ou de um eixo paralelo ao eixo y.

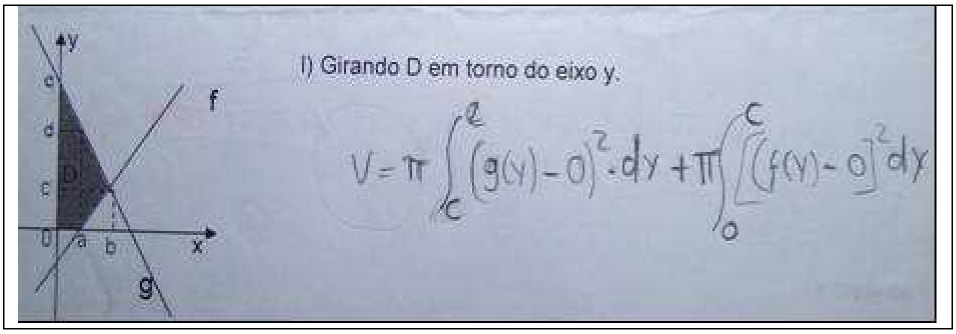
Figura 114 - Resolução do EC27 item a - D6T1



Fonte: Dados da pesquisa

No EC27b-I, ao girarmos a região em torno do eixo y, será gerado um sólido cujas secções transversais perpendiculares ao eixo y serão discos. Este fato foi compreendido por todos, porém, além da dificuldade em relação a qual função adotar, em termos de x ou de y, notamos para este exemplo, a dificuldade em relação aos limites de integração. Observamos que 5 entre as 13 duplas da turma 1 e 4 entre as 10 da duplas da turma 2 apresentaram apenas uma integral. Apresentamos na Figura 115, a resolução apresentada pela D6T1, percebemos que a dupla compreendeu os procedimentos apresentando corretamente a soma das integrais para o volume solicitado.

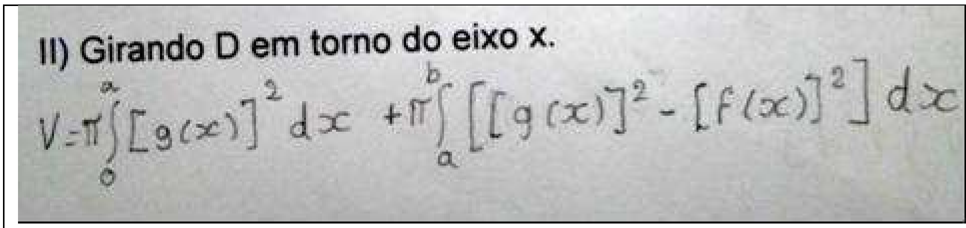
Figura 115 - Resolução do EC27 item b, sub-item I - D6T1



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 116, apresentamos o desenvolvimento do EC27b-II da D4T2. Pela expressão, percebemos que o exemplo sistematizador desempenhou seu papel, ao girarmos a região em torno do eixo x, notamos que parte das seções transversais ao sólido, perpendiculares ao eixo x serão discos, parte serão coroa-circular. Este fato foi corretamente visualizado pela dupla. Consideramos este um exemplo relevante, porque sistematiza importantes procedimentos.

Figura 116 - Resolução apresentada pela D4T2

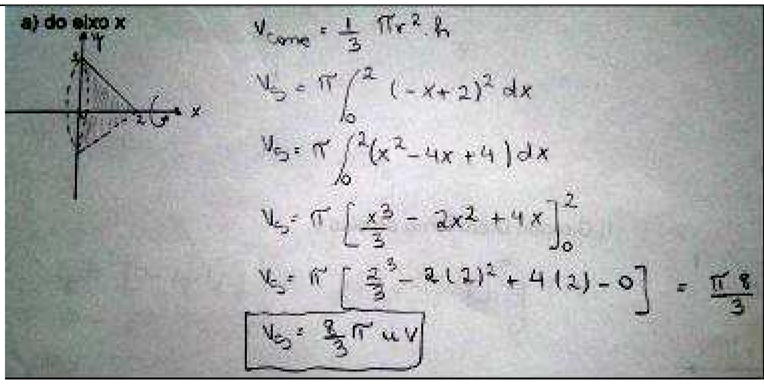

II) Girando D em torno do eixo x.

$$V = \pi \int_0^a [g(x)]^2\,dx + \pi \int_a^b \left[[g(x)]^2 - [f(x)]^2 \right] dx$$

Fonte: Dados da pesquisa

Ao acompanhar os alunos no desenvolvimento do EC28, notamos que este não foi um bom exemplo, pois ao representarmos a região, percebemos que girando a região em torno do eixo x ou em torno do eixo y, encontraremos o mesmo valor. A dupla D3T1, apresentou a resolução para o EC28a, conforme a Figura 117 abaixo.

Figura 117 - Resolução apresentada pela D3T1



$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_S = \pi \int_0^2 (-x+2)^2\,dx$$

$$V_S = \pi \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx$$

$$V_S = \pi \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2$$

$$V_S = \pi \left[\frac{2^3}{3} - 2(2)^2 + 4(2) - 0 \right] = \frac{\pi 8}{3}$$

$$\boxed{V_S = \frac{8}{3}\pi \text{ u.v}}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que os procedimentos foram corretamente aplicados, obtendo-se o resultado esperado. Observamos que a dupla confirmou seu resultado aplicando a expressão já conhecida para o cálculo do volume de um cone.

Porém, ao acompanharmos as duplas, percebemos na turma 1 que a dupla D1T1 apesar de cometer um erro, obteve uma resposta correta, o que pode causar dúvidas em relação aos procedimentos corretos. Vamos transcrever os procedimentos tomados pela dupla através da Figura 118.

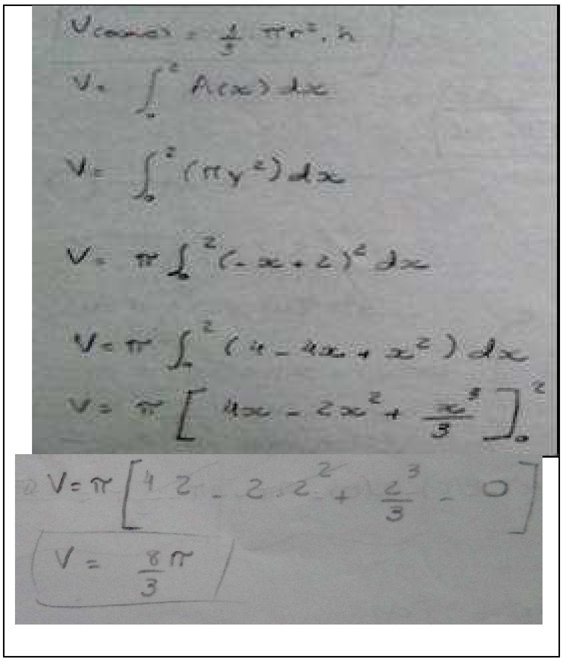
Figura 118 - Resolução apresentada pela D1T1

$$V = \pi \int_{0}^{2} y^{2} dx = \pi \left. \frac{y^{3}}{3} \right|_{0}^{2}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

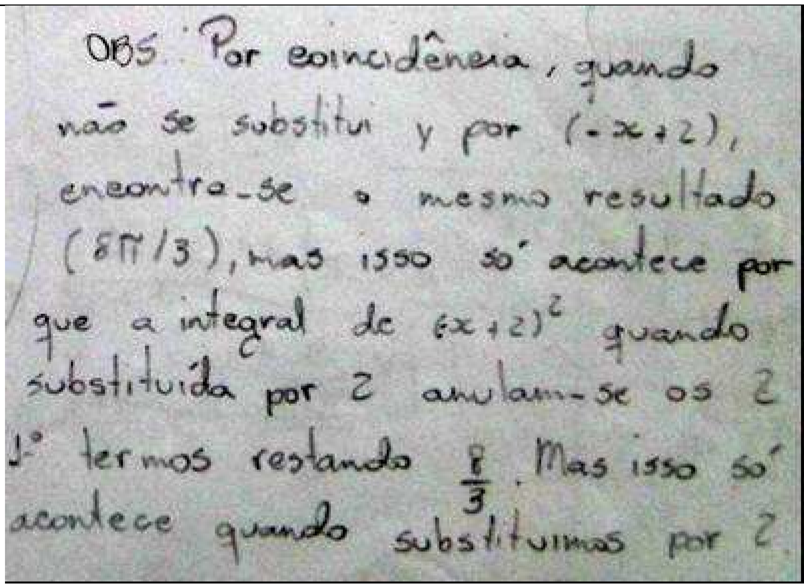
Analisando o desenvolvimento da dupla, onde foi apresentado y, deveria ser (2-x), pois, o integrando deverá estar em função de x. A dupla não substituiu y pela expressão correspondente, encontrando o mesmo resultado encontrado ao resolver corretamente. Sob orientação do professor, os alunos registraram suas observações. A resolução correta está na Figura 119 e as observações foram apresentadas na Figura 120.

Figura 119 - Resolução do EC28 - D1T1



Fonte: Dados da pesquisa

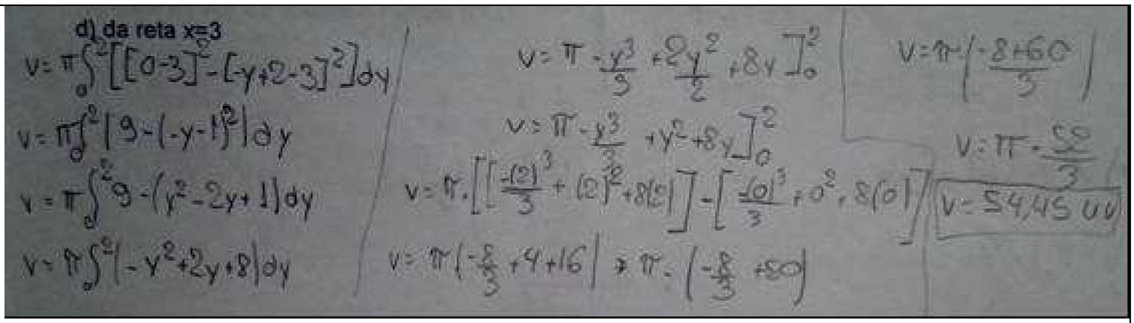
Figura 120 - Comentários sobre a resolução do EC28 - D1T1


OBS: Por coincidência, quando não se substitui y por $(-x+2)$, encontra-se o mesmo resultado $(8\pi/3)$, mas isso só acontece por que a integral de $(x+2)^2$ quando substituída por 2 anulam-se os 2 1º termos restando $\frac{8}{3}$. Mas isso só acontece quando substitumos por 2.

Fonte: Dados da pesquisa

Nos demais exemplos que compõem o EC28, os alunos puderam esclarecer e reforçar os procedimentos referentes ao método apresentado na lição teórica. Para demonstrar a importância dos exemplos ampliadores, apresentamos na Figura 121 a resolução da dupla D5T1. Mudamos o eixo de rotação para que o aluno perceba que girando em torno do eixo y é equivalente dizer, girando em torno de x=0. Para evitar dúvidas em relação a construção da integral, alertamos que se o sólido é obtido girando uma região em torno do eixo x, por exemplo, a altura das secções será dx, assim, o integrando ficará em função de x.

Figura 121 - Resolução apresentada pela D5T1


d) da reta x=3

$v = \pi\int_0^2 [[0-3]^2 - [-y+2-3]^2]\,dy$

$v = \pi\int_0^2 |9-(-y-1)^2|\,dy$

$v = \pi\int_0^2 9-(y^2-2y+1)\,dy$

$v = \pi\int_0^2 |-y^2+2y+8|\,dy$

$v = \pi\, -\frac{y^3}{3} + \frac{2y^2}{2} + 8y \Big]_0^2$

$v = \pi\, -\frac{y^3}{3} + y^2 + 8y \Big]_0^2$

$v = \pi.\left[\left[\frac{-(2)^3}{3} + (2)^2 + 8(2)\right] - \left[\frac{-(0)^3}{3} + 0^2 . 8(0)\right]\right]$

$v = \pi\left(-\frac{8}{3} + 4 + 16\right) \Rightarrow \pi.\left(-\frac{8}{3} + 20\right)$

$v = \pi\left(\frac{-8+60}{3}\right)$

$v = \pi . \frac{52}{3}$

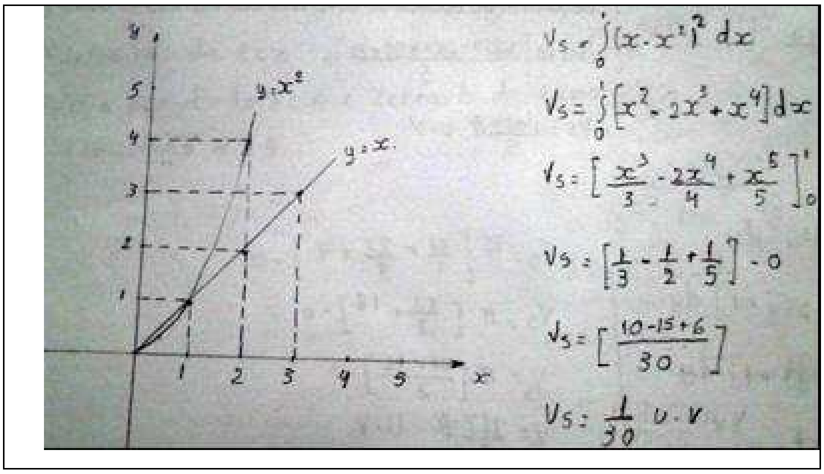
$\boxed{v = 54{,}45\ uv}$

Fonte: Dados da pesquisa

Vale observar que tanto para o EC28, quanto para os demais exemplos que exigem a representação da região, os alunos apresentaram dificuldades relacionadas aos conceitos básicos, fundamentais para o prosseguimento dos estudos, relacionadas à construção de uma tabela de pares ordenados e à representação destes no plano cartesiano.

Na Figura 122 apresentamos a resolução do EC31. Este exemplo amplia e sistematiza as ideias sobre o cálculo de volume de sólidos obtidos não por rotação, assim, neste caso, as secções geram quadrados. A dupla compreendeu estes procedimentos.

Figura 122 - Resolução apresentada pela D5T1



Fonte: Dados da pesquisa

No EC33, desafiamos os alunos a elaborar exemplos gerados pela rotação da região em torno de um eixo, formando sólidos cuja secção perpendicular aos eixos x e y fossem são: discos ou coroas circulares. Gerar exemplo é uma atividade que contribui para o aprendizado

> Aprender matemática consiste em explorar, rearranjar e estender espaços de exemplos e as relações entre eles e dentro deles. Desenvolvendo uma familiaridade com esses espaços, os estudantes podem ganhar fluência e facilidade em associar técnicas e discursos. (WATSON; MASON, 2005, p.6, tradução nossa[15]).

Finalizamos a Lição 12 com um exemplo sistematizador, desafiador e diagnosticador. Consideramos estas funções para este exemplos. Eles visam sistematizar através da reflexão que o aluno será levado a fazer sobre os

---

[15] Learning mathematics consists of exploring, rearranging, and extending example spaces and the relationships between and within them. Through developing familiarity with those spaces, learners can gain fluency and facility in associated techniques and discourse. (p. 6).

procedimentos aplicados em todos os exemplos, apontando entre eles os que são sólidos de rotação e os que não são; entre os de rotação, quais os que têm secção representando discos e quais representam coroa circular.

4.13 Avaliações aplicadas

Durante as lições, ao longo do curso, foram aplicadas duas avaliações.

Na turma 1, considerando o elevado número de alunos, foram aplicados dois modelos de avaliação, mas com exercícios similares.

Figura 123 - Modelo A da Primeira avaliação aplicada na turma 1

1) Sabemos que às vezes precisamos aplicar algumas técnicas para facilitar o cálculo de algumas integrais. Use a substituição simples e calcule as integrais

a) $\int 2sen(x).cos(x)dx$. b) $\int 3xe^{x^2}dx$

2) Responda as seguintes perguntas:
a) Descreva, em poucas linhas, os procedimentos que você usa para a aplicação da técnica da substituição simples.
b) Verifique se os procedimentos descritos anteriormente possibilitam a resolução das integrais, caso não seja possível, mude para a outra técnica estudada.

I) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x}dx.$ II) $\int x^3 \ln(x)dx.$

3) A aplicação das propriedades das integrais pode modificar a expressão, facilitando a resolução através do uso da tabela de integrais. Use as propriedades e consulte a tabela de integração para resolver as integrais indefinidas seguintes.

a) $\int [3x^5 + 3e^x - 3x^2 + 5sen(x) - 2]dx$ b) $\int \left[\frac{x^2}{3} - 2\cos(x) + \frac{3}{x} + 2\sec^2(x) - x\right]dx$

4) Muitas vezes, para calcular uma integral, precisamos transformar o integrando, usando identidades trigonométricas ou a fatoração do integrando. Faça as transformações necessárias e calcule as integrais seguintes:

a) $\int \frac{x.\cos^2(x)}{1+cox(2x)}dx$ (sugestão: $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$)

b) $\int \frac{1}{x^2-6x+9}dx$ (sugestão: fatoração do trinômio quadrado perfeito
$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

5) Use seus conhecimentos e calcule as integrais apresentadas a seguir:

a) $\int (x^2 - \sqrt[3]{x})dx.$ b) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$ c) $\int xe^{2x}dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 124 - Modelo B da Primeira avaliação aplicada na turma 1

1) A aplicação das propriedades das integrais pode modificar a expressão, facilitando a resolução através do uso da tabela de integrais. Use as propriedades e consulte a tabela de integração para resolver as integrais indefinidas seguintes.

a) $\int \left[3x^5 + 3e^x - 3x^2 + 5\text{sen}(x) - 2\right]dx$ b) $\int \left[\frac{x^2}{3} - 2\cos(x) + \frac{3}{x} + 2\sec^2(x) - x\right]dx$

2) Muitas vezes, para calcular uma integral, precisamos transformar o integrando, usando identidades trigonométricas ou a fatoração do integrando. Faça as transformações necessárias e calcule as integrais seguintes:

a) $\int \frac{x.\cos^2(x)}{1 + \text{cox}(2x)}dx$ (sugestão: $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$)

b) $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 9}dx$ (sugestão: fatoração do trinômio quadrado perfeito

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

3) Sabemos que às vezes precisamos aplicar algumas técnicas para facilitar o cálculo de algumas integrais. Use a substituição simples e calcule as integrais

a) $\int \frac{\cos(x)}{sen(x)}dx$. b) $\int 3xe^{x^2}dx$

4) Responda as seguintes perguntas:

a) Descreva, em poucas linhas, os procedimentos que você usa para a aplicação da técnica da substituição simples.

b) Verifique se os procedimentos descritos anteriormente possibilitam a resolução das integrais, caso não seja possível, mude para a outra técnica estudada.

I) $\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}dx$. II) $\int x^3 \ln(x)dx$.

5) Use seus conhecimentos e calcule as integrais apresentadas a seguir:

a) $\int \left(x^3 - \sqrt{x}\right)dx$. b) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. c) $\int xe^{2x}dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Na turma dois, não foi necessário elaborar modelos diferentes, já que se tratava de uma turma com poucos alunos.

Figura 125 - Primeira avaliação aplicada na turma 2

1) A aplicação das propriedades das integrais pode modificar a expressão, facilitando a resolução através do uso da tabela de integrais. Use as propriedades e consulte a tabela de integração para resolver as integrais indefinidas seguintes.

a) $\int \left[x^2 + 3e^x - 2x - 5\text{sen}(x) - 5\right]dx$ b) $\int \left[\frac{5x^4}{3} - 2\cos(x) + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^4} - x\right]dx$

2) Muitas vezes, para calcular uma integral, precisamos transformar o integrando, usando identidades trigonométricas ou a fatoração do integrando. Faça as transformações necessárias e calcule as integrais seguintes:

a) $\int \frac{1}{x^2 + 10x + 25}dx$ (sugestão: fatoração do trinômio quadrado perfeito $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

b) $\int \cos\theta.\text{tg}\theta d\theta$ (Sugestão: $\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$)

c) $\int \frac{x.\cos^2(x)}{1+\text{cox}(2x)}dx$ (sugestão: $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

3) Sabemos que às vezes precisamos aplicar algumas técnicas para facilitar o cálculo de algumas integrais. Use a substituição simples e calcule as integrais

a) $\int \text{sen}(x).\cos(x)dx$. b) $\int x^2 e^{-x^3}dx$

4) Responda as seguintes perguntas:

a) Descreva, em poucas linhas, os procedimentos que você usa para a aplicação da técnica da substituição simples.

b) Verifique se os procedimentos descritos anteriormente possibilitam a resolução das integrais, caso não seja possível, mude para a outra técnica estudada.

I) $\int \frac{x-1}{x^2 - 2x}dx$. II) $\int x^3 \ln(x)dx$.

5) Use seus conhecimentos e calcule as integrais apresentadas a seguir:

a) $\int \left(x^2 - \sqrt[3]{x}\right)dx$. b) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. c) $\int x^2 \ln(5x)dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

4.13.1 Análise da primeira avaliação

No Quadro 11 apresentamos os resultados da primeira avaliação, fazendo a equivalência das questões; por exemplo, a questão 1 do modelo A equivale à questão 3 do modelo B.

O Quadro 11 apresenta os índices de acertos, erros e resoluções incompletas de cada turma, dos exemplos que são classificados como diagnosticadores, por desempenharem esta função principal, mas que podem assumir outras classificações possíveis.

Quadro 11 - Resultados da primeira avaliação

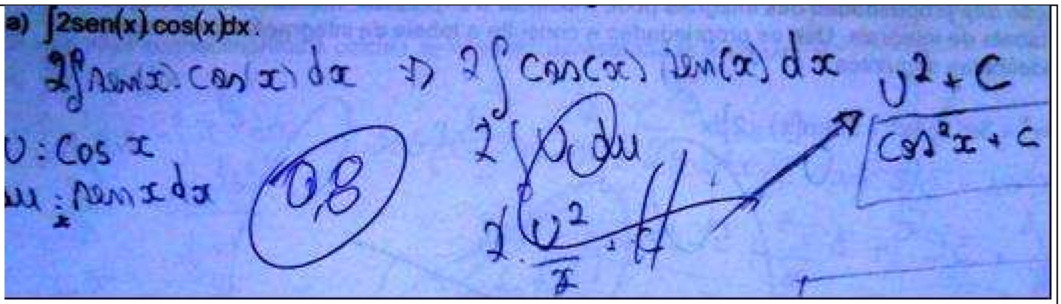
TURMA 1					
	T1P1	CERTO	ERRADO	INCOMPLETO	TOTAL
Q1A/Q3B	A	5	4	6	15
	B	12	2	1	15
Q2A/Q4B	A	8	1	6	15
	B	6	2	7	15
Q3A/Q1B	A	11	1	3	15
	B	10	1	4	15
Q4A/Q2B	A	11	2	2	15
	B	8	2	5	15
Q5	A	12	1	2	15
	B	0	13	2	15
	C	5	6	4	15
TURMA 2					
	T2P1	CERTO	ERRADO	INCOMPLETO	TOTAL
Q1	A	7	0	5	12
	B	4	0	8	12
Q2	A	5	6	1	12
	B	10	2	0	12
Q3	A	8	3	1	12
	B	11	1	0	12
Q4	A	3	5	4	12
	B	2	3	7	12
Q5	A	9	3	0	12
	B	0	12	0	12
	C	9	2	1	12

Fonte: Dados de pesquisa

Analisando o Quadro 11, verificamos que a primeira questão da prova A, da turma 1, corresponde à terceira questão da prova B, que por sua vez, possui questões similares às da prova aplicada na turma 2. Percebemos que os alunos encontraram dificuldade no primeiro item, talvez pelo fato de serem necessários conhecimentos de derivadas para aplicação da técnica da substituição. Grande parte dos alunos escolheu fazer u=cosx, na solução da e ao derivar, apresentaram du=senx, esquecendo o sinal, fato que levou a considerar como incompleta a resolução. Conforme vemos na resolução apresentada pelo aluno Willian da turma

1, ilustrada na Figura 126.

Figura 126 - Resolução do item a - Q1 – turma 1- Willian



Fonte: Dados da pesquisa

Notemos que dos 27 alunos que fizeram a avaliação, 13 acertaram integralmente e outros 7 acertaram parcialmente a questão. Ao todo erraram esta questão 26% dos alunos.

No item b o percentual de erro foi de aproximadamente 11%. Consideramos um bom desempenho dos alunos nesta questão, que exigia a aplicação da técnica da substituição.

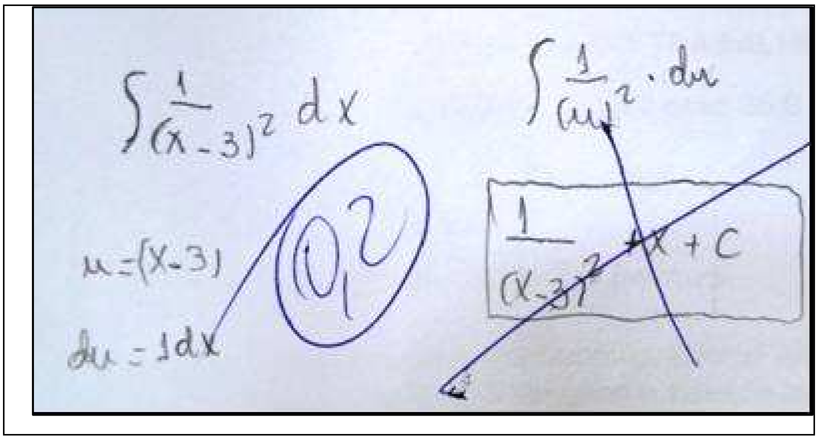
Na questão dois, item a, a necessidade de descrever pode ter representado uma dificuldade para os alunos. Percebemos que 11 foram capazes de descrever, 10 apresentaram descrições incompletas e outros 6 erraram ou não apresentaram uma descrição. Para o item b, percebemos que dificuldades em relação técnica de integração por partes.

Na terceira questão, nos itens a e b, exigimos apenas o conhecimento das regras básicas de integração. Percebemos que este estilo de questão ficou bem entendido, apenas 2 alunos erraram as questões.

Na quarta questão, apresentamos um exemplo desafiador, e talvez por esse motivo, constatamos dificuldades pelos alunos. Na turma 1 o resultado foi bom, no entanto na turma 2, 5 entre os 12 erraram e outros 4 apresentaram uma resolução incompleta. Notamos que as dificuldades em relação à fatoração, substituição de um termo por outro e a simplificação impediram a execução correta da questão.

Alguns alunos demonstraram confusão entre os procedimentos usados para derivação e integração; derivando quando o que se exigia era a integração. Conforme vemos na Figura 127, da resolução do item b da quarta questão, feita pelo aluno André da turma 1.

Figura 127 - Resolução do item b - Q4 - turma 1 - André

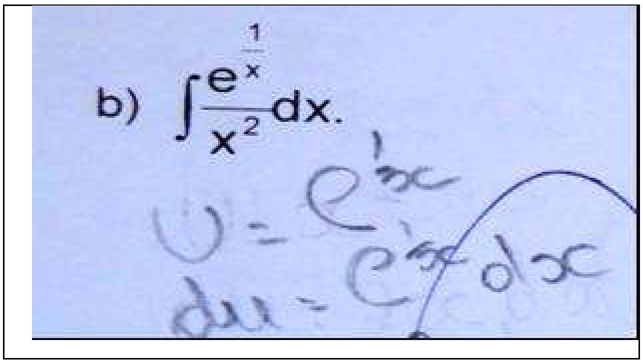


Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 5 analisando, primeiramente o item a, notamos que este não apresentou dificuldades. Observando o Quadro 11, constatamos que 21 alunos duas turmas acertaram este item, enquanto apenas 4 erraram e dois apresentaram uma resposta incompleta. Consideramos um bom aproveitamento, confirmando o domínio das regras básicas de integração. Vale destacar que entre os erros mais comuns, mais uma vez observamos os relativos às operações básicas da matemática. No entanto, por se tratar de uma atividade desafiadora, que exigia a aplicação da substituição e um domínio das operações básicas da matemática, percebemos um alto índice de erros nesta questão. Nenhum aluno apresentou uma resolução correta para o item b, apenas 2 apresentaram parte da resolução e os outros 15 erraram ou não resolveram este item. Evidenciando a necessidade de buscarmos recursos para vencer estas dificuldades.

Finalizamos analisando o item c, que apresentou um rendimento satisfatório, 14 acertaram, 8 erraram e outros 5 fizeram parte da resolução correta. Nesta questão exigimos a aplicação da técnica de integração por partes. Apesar de representar um desafio para os alunos, entre os participantes, que estiveram presentes ao longo do curso, notamos um bom aproveitamento, evidenciando que, através de um comprometimento dos alunos, as lições podem contribuir para a aprendizagem de cálculo integral.

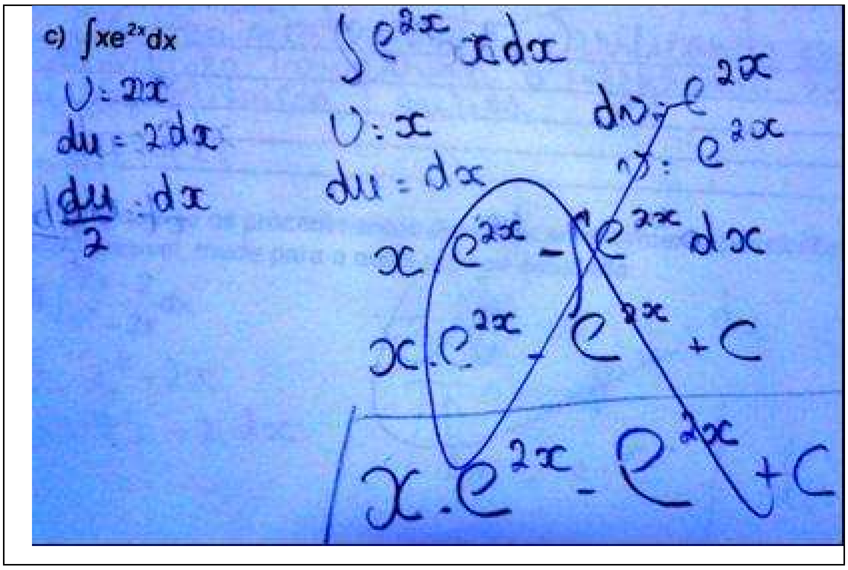
Figura 128 - Resolução do item b - Q5 – turma 1 - Rose



Fonte: Dados da pesquisa

Ao observarmos o início da resolução, vemos que a aluna comete um erro ao derivar o numerador, talvez por esse motivo não tenha completado sua resolução.

Figura 129 - Resolução do item c - Q5 turma 1 - Jorge



Fonte: Dados da pesquisa

Pela Figura 129, percebemos que o aluno não compreendeu corretamente, nem a técnica da integração por substituição nem a integração por partes.

4.13.2 Análise da segunda avaliação

A segunda avaliação abordou o cálculo das integrais definidas e sua aplicações para determinar áreas e volumes.

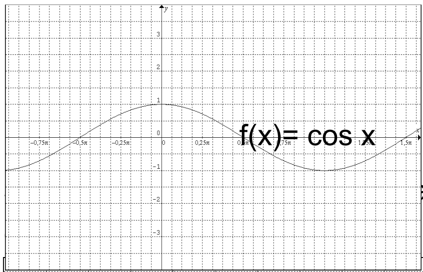
Figura 130 - Modelo A da segunda avaliação aplicada na turma 1

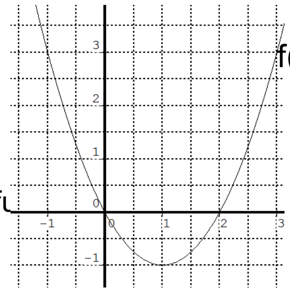
1) Aplicando o teorema fundamental do cálculo, calcule as integrais definidas:

a) $\int_{-1}^{2}\left[4x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x - 1\right]dx$ b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)dx$

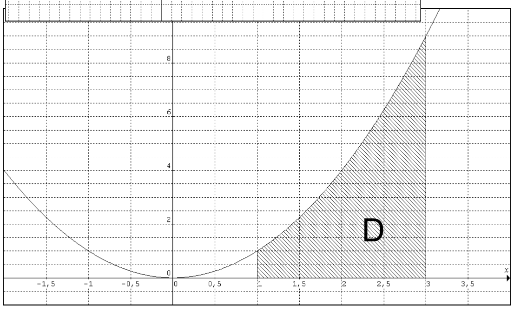
2) Algumas integrais definidas do tipo $\int_{a}^{b} f(x)dx$, representam a área sob a curva dada por f, acima do eixo x, entre x=a e x=b.
Veja as representações gráficas de algumas funções, calcule as integrais apontadas e verifique se as integrais calculadas correspondem a área.

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ b) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$





ada pela fu x, x= 1 e x=3.



4) Baseando-se na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D, em torno do eixo x?
5) Com base ainda na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D em torno do eixo y?
(Sugestão: Separe a região em duas regiões usando y=1)

Fonte: Elaborada pelo autor

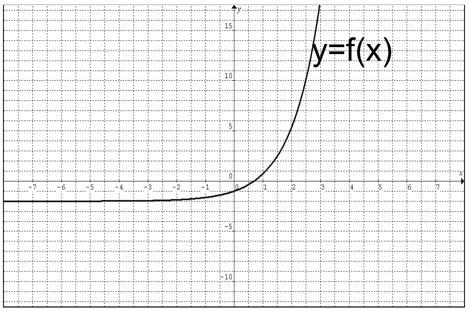
Figura 131 - Modelo B da segunda avaliação aplicada na turma 1

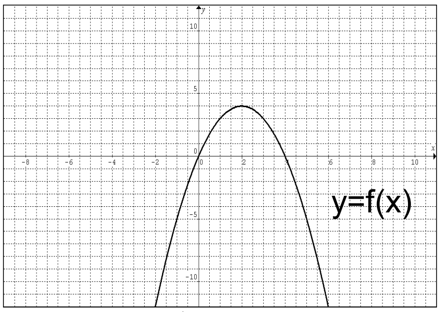
1) Aplicando o teorema fundamental do cálculo, calcule as integrais definidas:

a) $\int_1^3 \left[2x^3 - \frac{x^2}{3} + 4x - 1\right] dx$ b) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

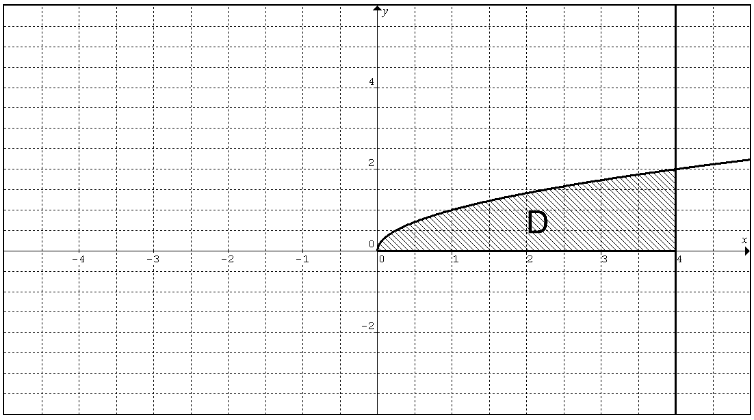
2) Algumas integrais definidas do tipo $\int_a^b f(x)dx$, representam a área sob a curva dada por f, acima do eixo x, entre x=a e x=b.
Veja as representações gráficas de algumas funções, calcule as integrais apontadas e verifique se as integrais calculadas correspondem a área.

a) $\int_0^2 f(x)dx$ b) $\int_{-1}^2 f(x)dx$





3) A região D abaixo, está limitada pela função $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, acima do eixo x e x=4. Calcule área da região D.



4) Baseando-se na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D, em torno do eixo x?
5) Com base ainda na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D em torno do eixo x=-1?

Fonte: Elaborada pelo autor

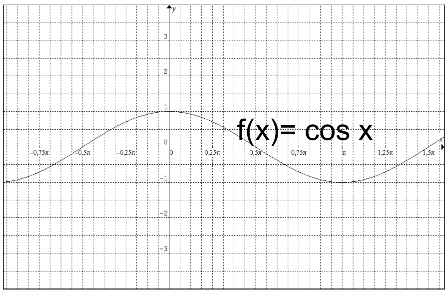
Figura 132- Segunda avaliação aplicada na turma 2

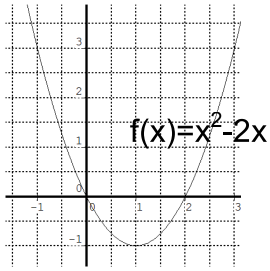
1) Aplicando o teorema fundamental do cálculo, calcule as integrais definidas:

a) $\int_{-1}^{2}\left[4x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x - 1\right]dx$ b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)dx$

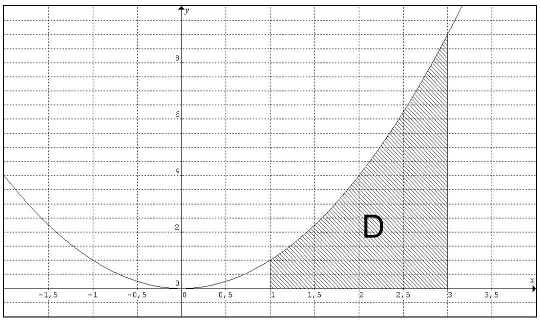
2) Algumas integrais definidas do tipo $\int_a^b f(x)dx$, representam a área sob a curva dada por f, acima do eixo x, entre x=a e x=b.
Veja as representações gráficas de algumas funções, calcule as integrais apontadas e verifique se as integrais calculadas correspondem a área.

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ b) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$





3) A região D abaixo, está limitada pela função $f(x) = x^2$, eixo x, x= 1 e x=3. Calcule área da região D.



4) Baseando-se na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D, em torno do eixo x?
5) Com base ainda na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D em torno do eixo y?
(Sugestão: Separe a região em duas regiões usando y=1)

Fonte: Elaborada pelo autor

No Quadro 12 apresentamos os resultados das avaliações conduzidas.

Quadro 12 - Resultados da segunda avaliação

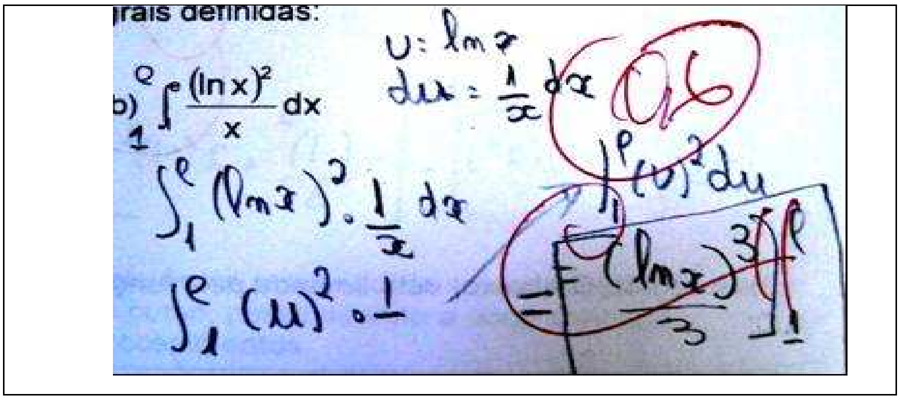
TURMA 1					
	T1P2	CERTO	ERRADO	INCOMPLETO	TOTAL
Q1	A	7	2	8	17
	B	4	8	5	17
Q2	A	6	7	4	17
	B	3	4	10	17
Q3		11	6	0	17
Q4		2	13	2	17
Q5		2	11	4	17
TURMA 2					
	T2P2	CERTO	ERRADO	INCOMPLETO	TOTAL
Q1	A	3	3	7	13
	B	2	9	2	13
Q2	A	10	1	2	13
	B	7	0	6	13
Q3		10	1	2	13
Q4		9	2	2	13
Q5		0	8	5	13

Fonte: Elaborada pelo autor

No Quadro 12 observamos que a questão Q1a apesar de ter um baixo índice de erro, apresentou um alto índice de alunos que cometeram erros nas operações elementares: soma, multiplicação, potenciação etc. Mais uma vez fica evidente o que diversos pesquisadores já apontaram. A falta de pré-requisitos é um dos fatores que contribuem para as altas taxas de reprovação e evasão em Cálculo. Sem o domínio dos procedimentos básicos, os alunos ficam desestimulados. Essas deficiências em conteúdos básicos os impedem de prosseguir os estudos. No item b, observamos as mesmas dificuldades, muitos executaram os procedimentos para a substituição simples, porém, cometeram erros na sequência da resolução.

Na Figura 133, notamos a deficiência em relação às operações básicas. Os procedimentos usados para integração foram corretos, no entanto, apesar de ter executado corretamente os procedimentos no item a, o aluno parou sua resolução antes de substituir os limites de integração. Acreditamos que isso ocorreu porque o aluno não sabia como proceder com os logaritmos.

Figura 133 - Resolução do item b Q 1 – turma 1 - Jorge



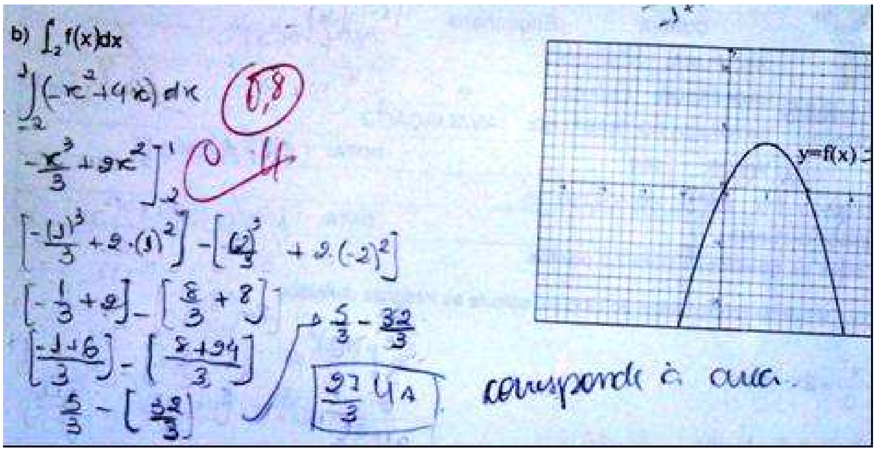
Fonte: Dados da pesquisa

Através da questão 2, notamos que conhecida a representação gráfica, os procedimentos usados para calcular áreas através de integrais ficaram claros, porém, se há a necessidade de fazer as representações, os alunos apresentam grandes dificuldades. Nesta questão, como não foi exigida a representação da função, observamos poucos erros, principalmente na turma 2. Apenas 1 aluno errou a Q2a e nenhum errou a Q2b, enquanto na turma 1, 7 erraram a Q2a e 4 erraram Q2b.

Fica evidente que a falta de domínio de conteúdos básicos, estudados no ensino médio, como operações envolvendo polinômios, construções gráficas, etc, interferem seriamente no rendimento dos alunos. Ao observarmos a tabela xx, analisando as questões 3, 4 e 5 e o rendimento apresentado por elas, notamos erros originados da falta de pré-requisitos. Na questão 3, fornecemos a região e pedimos para calcular a área. Nas duas turmas observamos apenas 6 erros na turma 1 e 1 erro entre os alunos da turma 2. Por apresentar uma expressão com expoente fracionário, pensamos que a turma 1 errou mais. Muitos alunos ainda apresentarem deficiências em relação ao uso das integrais para calcular áreas.

Pela Figura 134 percebemos que, da mesma maneira que o aluno Daniel, outros 10 alunos usaram apenas uma integral para representar a área solicitada, não percebendo que no intervalo de [-2,0] a função está abaixo do eixo x e de [0,1] a função está acima do eixo x.

Figura 134 - Resolução do item a – Q2 – turma 2 - Daniel



Fonte: Dados da pesquisa

Em relação à questão 4, observamos que na turma 1, 13 pessoas erraram, enquanto que na turma 2 apenas 2 alunos erraram. Vale observar que na turma 1 foram aplicados dois modelos de prova, um deles exigia o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo x, o outro girando em torno de x=4. Notamos maior quantidade de erro no modelo que exigia girar em torno de x=4. Acreditamos que alguns procedimentos ainda não ficaram claros para alguns alunos. A mudança da variável no integrando. Muitos não perceberam que girando em torno de x=4, as secções serão perpendiculares ao eixo y, assim os raios seriam obtidos pela variação de x, ou seja, x em função de y. Essa troca não ficou muito clara para os alunos. Ainda observamos dificuldades em relação às operações fundamentais. Na turma 2, exigimos apenas o modelo que exigia que girasse a região em torno do eixo x, talvez por isso não observamos muitos erros.

Já na questão 5, considerada desafiadora, o sólido gerava uma coroa circular. Talvez o fato de envolver dois raios e outras operações, normalmente potenciação de polinômios, ou ainda, a necessidade de representar um dos eixos tenha provocado tanta dificuldade. Nas duas turmas observamos dificuldades semelhantes, dos 33, apenas 2 alunos da turma 1 acertaram a questão, enquanto que, ainda considerando as duas turmas, 19 alunos erraram esta questão. Aproximadamente 58% dos alunos erraram esta questão.

Vale lembrar, que este percentual é entre os alunos que participaram em duplas que permaneceram juntos durante o trabalho desenvolvido ao longo do semestre. Se considerarmos a turma toda, o percentual será muito maior.

Entre os alunos que participaram das duplas, alguns deixaram de fazer alguma prova. Para analisarmos o aproveitamento entre os alunos que participaram da pesquisa, apresentamos o Quadro 13.

Quadro 13 - Aproveitamento das turmas nas duas provas

	Turma 1		Turma 2	
	Acima de 60%	Abaixo de 60%	Acima de 60%	Abaixo de 60%
1	12	3	8	4
2	4	13	9	4

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando o quadro, vemos que considerando apenas as provas, 20 entre os 27 ficaram acima de 60% na primeira prova. Já na segunda prova, vemos que 13 ficaram acima de 60%, enquanto outros 17 ficaram abaixo de 60%. Notamos que na prova 2 a turma 1 apresentou um rendimento inferior. Talvez a justificativa seja que muitos alunos ainda se dedicam aos estudos apenas para serem aprovados, não se preocupando em relação a entender conceitualmente o assunto. Como já estavam aprovados pelas boas notas obtidas na primeira prova e trabalhos, não se esforçaram para a última prova, assim, não apresentaram um bom rendimento.

A título de informação apenas, entre as duplas que analisamos nesta pesquisa, 4 alunos da turma 1 e 3 da turma 2 foram reprovados.

4.13.3 Questionário de avaliação das lições

Ao final das lições os alunos responderam algumas questões, elaboradas com o objetivo de avaliar os reflexos do trabalho, na perspectiva dos alunos.

Figura 135 - Questionário apresentado na última avaliação para as duas turmas

Prezados alunos, as questões que serão abordadas não influenciarão no resultado de sua avaliação. O objetivo das questões é avaliar o trabalho realizado durante este curso, possibilitando a você contribuir com sua opinião para uma possível melhora nas atividades e procedimentos. 1) Em relação aos procedimentos usados pelo professor, na exposição e aplicação das atividades desenvolvidas, você avalia em: ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Ótimo 2) Em relação às atividades elaboradas, como você avalia? a) Atividades comuns, normalmente trabalhadas por outros professores e não trouxeram grandes desafios. b) Atividades desafiaram os conhecimentos, possibilitando a abordagem de conceitos e procedimentos aprendidos. c) Atividades interessantes, mas, não me ajudaram no aprendizado. Aponte os motivos. 3) Em relação ao seu aprendizado, durante o curso desenvolvido com a metodologia e atividades propostas: a) Nada aprendi. b) Aprendi como poderia ter aprendido com qualquer outro método. c) Aprendi mais do que aprenderia com métodos já estudados. 4) Descreva uma atividade que foi desenvolvida durante o curso que chamou sua atenção, contribuindo para o seu aprendizado, aponte as características desta atividade. 5) Use o espaço abaixo para redigir qualquer comentário em relação ao trabalho desenvolvido, apontando pontos positivos e negativos. Novamente os meus agradecimentos às contribuições no desenvolvimento dos trabalhos. Boas Férias!!

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao analisarmos os questionários, observamos que entre os 17 da turma 1, um não respondeu o questionário. Este aluno apenas pegou a avaliação e desistiu de fazê-la. Na turma 2, apenas 12 responderam ao questionário.

Dos 28 que responderam ao questionário, com relação à primeira questão que pia que classificassem o trabalho desenvolvido, 1 aluno indicou regular, 7 bom e outros 20 indicaram ótimo.

Para a segunda pergunta, conforme questionário, um aluno escolheu a opção a, outros 26 a opção b e 1 escolheu a opção c. Na terceira pergunta, na turma 1, um aluno deixou de responder, assim, 10 escolheram a opção b como resposta e os outros 17 escolheram c.

Nas demais perguntas, observamos que dois alunos apontaram a necessidade de mais tempo para discutir as lições, eles alegaram que faltou mais tempo para retirar eventuais dúvidas, apesar de todas as lições práticas serem socializadas após a aula seguinte.

Muitos alunos ainda resistem a metodologias que os fazem trabalhar em alguns momentos sozinhos para uma posterior discussão sobre suas dúvidas. Solicitam a ajuda do professor sem antes ter movimentado seus recursos; mostram-se dependentes do professor e não evoluem nas suas próprias construções.

Destacamos na questão 4 a satisfação dos alunos ao verem uma aplicação prática do conteúdo de integral, evidenciando a necessidade de buscarmos a contextualização dos conteúdos por nós trabalhados.

Para as questões 4 e 5, vamos transcrever algumas das respostas observadas.

Para a questão 4, perguntamos: "Descreva uma atividade que foi desenvolvida durante o curso que chamou sua atenção, contribuindo para o seu aprendizado, aponte as características desta atividade."

Resposta do aluno Jônatas, da turma 2: "As listas de exercícios, é importante após a explicação da matéria fornecer logo após uma lista para fixar o aprendizado".

Resposta do aluno Willian: "Trabalhar em equipe com a assistência do professor; a utilização de integrais para calcular áreas e volumes".

Na questão 5, pedimos: " Use o espaço abaixo para redigir qualquer comentário em relação ao trabalho desenvolvido, apontando pontos positivos e negativos."

De modo geral a turma gostou do trabalho desenvolvido, alguns apontaram que aprenderam até o que não haviam aprendido no Cálculo 1, no caso, as derivadas. Alguns alunos se ofereceram para fazer depoimentos, porém, não julgamos necessário.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa desenvolvida e aqui relatada abordou o tema “Cálculo Integral”, indagando sobre as contribuições de Lições de Cálculo, com um foco no uso de exemplos, para a aprendizagem de integrais.

Comprometidos com uma melhoria constante do processo de ensino e aprendizagem, pensamos que o trabalho do professor é diário, e como um pesquisador, o professor deverá observar e registrar suas experiências, sejam elas positivas ou não. Com esse objetivo, pretendemos investigar as contribuições que os exemplos, sejam eles elaborados por alunos, resolvidos pelo professor com ou sem a participação dos alunos, puderam trazer para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem na Educação Matemática, em especial, no ensino de Cálculo Integral, em cursos de Engenharia.

Com o desenvolvimento do trabalho percebemos inicialmente algumas dificuldades em relação à metodologia usada. Acostumados a aulas tradicionais em que o conteúdo é apresentado pelo professor, que em seguida resolve listas de exercícios e ao obter a resposta correta encerra a atividade, os alunos, muitas vezes não têm noção da real utilidade do exercício executado. Nos casos em que os alunos ao resolverem um exercício não encontraram a resposta, solicitam a correção pelo professor, que, por vezes, não faz qualquer análise acerca dos motivos que levaram à execução errada do exercício.

A metodologia adotada buscou integrar os alunos, provocando discussões entre as duplas, apresentando lições que os levaram a descobrir resultados importantes sobre integrais indefinidas e definidas e sobre aplicações das integrais ao cálculo de áreas e volumes. Os alunos deixaram de ser expectadores do processo, passando a participantes ativo do processo.

Percebemos a satisfação dos alunos ao experimentarem aplicações práticas de um conteúdo por eles estudado. Como muitos deles citaram, as atividades desenvolvidas que mais chamaram sua atenção foram as aplicações das integrais ao cálculo de áreas e volumes.

Percebemos que a participação e o interesse dos alunos evoluíram através das lições. Analisando os questionários respondidos ao final, constatamos que se mostraram satisfeitos em relação ao desenvolvimento dos trabalhos através de duplas. Segundo eles, a oportunidade de discutir suas dúvidas e conclusões com o colega, e oportunamente um acompanhamento pelo professor, proporcionaram momentos produtivos. Ao defenderem seus pontos de vista, apresentar suas hipóteses e tentar defendê-las com o colega, eles refletem sobre o conteúdo estudado e, as vezes, descobrem novas coisas.

Consideramos que uma das limitações da pesquisa foi o tempo limitado pelo calendário escolar, que impediu trabalhar de forma mais detalhada e intensiva, para eliminar deficiências básicas apresentadas pelos alunos que cursam a disciplina de Cálculo II. Entretanto, entre as duplas que pudemos acompanhar e que se mostraram dispostas a buscar tais conhecimentos, notamos uma considerável melhora.

Novas questões surgem a partir de nossos estudos e apontam a possibilidade de elaborar lições com um foco no uso de exemplos para trabalhar as lacunas na formação básica em matemática dos ingressantes nos cursos de engenharia, trabalho que poderia ser desenvolvido na disciplina de Matemática Básica, que faz parte do currículo da instituição em que desenvolvemos a pesquisa. O uso de exemplos introdutórios, ampliadores, sistematizadores, esclarecedores e diagnosticadores, pode contribuir para os alunos retomarem conteúdos matemáticos do ensino fundamental e médio? Pode contribuir para desenvolver também estudos envolvendo outros conteúdos de Cálculo?

O desenvolvimento dessa pesquisa provocou reflexões importantes na vida profissional do professor/pesquisador. Ao desenvolver os estudos, conhecendo um pouco da pesquisa em Educação Matemática, foi possível perceber que há professores e pesquisadores que possuem expectativas semelhantes às nossas a fim de investigar estratégias e possibilidades pedagógicas que contribuam para tornar o ambiente de sala de aula um constante laboratório de ensino/pesquisa.

Esperamos que as lições tenham desempenhado o seu papel, provocando os desequilíbrios necessários à construção de conceitos e procedimentos para lidar com integrais, fornecendo meios para que os alunos compreendam o conteúdo de forma significativa. Esperamos ainda que as lições contribuam para outros pesquisadores, apontando possibilidades para a sua prática docente. Certamente as lições poderão ser melhoradas, incorporando novos exemplos, com o mesmo objetivo de incentivar o desenvolvimento de conhecimentos conceituais e procedimentais de Cálculo Integral.

REFERÊNCIAS

ANACLETO, Grácia Maria Catelli. **Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo**. 2007. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BARUFI, M. C. B. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral. 1999. Tese (Doutorado)- Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação.

CURY, Helena Noronha. Pesquisas em análise de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In: FROTA, M.C.R. ; NASSER, L. (Org.). **Educação matemática no ensino superior**: pesquisas e debates, p. 223-238. Recife: SBEM, 2009.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática In: MACHADO, S.D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica, Campinas(SP): Papirus Editora, 2003, Cap. 1, p. 1-31.

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES et al. (orgs.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996, p.

FIGUEIREDO, Carlos A.; CONTRERAS, Luis C.; BLANCO, Lorenzo J. A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. **Zetetiké,** Campinas, v. 17, n. 32, jul./dez., 2009.

FIGUEIREDO, Carlos A.; BLANCO, Lorenzo J. A; CONTRERAS, Luis C. A Exemplificação do conceito de função em quatro professores estagiários. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática,** n. 8, Dec., p. 23-39, 2006.

FROTA, Maria Clara Rezende. **O pensar matemático no ensino superior:** concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos. 2002. 287f. Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Minas Gerais - Departamento de Faculdade de Educação.

FROTA, M.C.R. . Teoria e Prática na Aprendizagem de Cálculo**. Bolema**, Rio Claro, Ano 20, n. 28. p. 21 a 38, 2007.

FROTA, M. Clara R. Investigações na sala de aula de cálculo. In**:** REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 29, Caxambu, MG. 2006. **Anais**..., Caxambu MG: 2006. CD-ROM. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/29r a/trabalh os/tra bal ho/GT19-2142--Int.pdf.> Acesso em: 10 maio 2012.

FROTA, Maria Clara Rezende. Estilos de aprendizagem matemática e autocontrole do processo de aprendizagem. In: FROTA, M.C.R.; NASSER, L (Org.). **Educação**

matemática no ensino superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p. 59-79

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientia,** Canoas, v. 10 n.2 p.7-37. 2008.

GUIDORIZZI, Hamilton Luis. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

HIEBERT, James; LEFEVRE, Patrícia. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). **Conceptual and procedural knowledge:** the case of mathematics. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erbaum, 1986, p.1-27.

IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo. Considerações sobre o ensino de cálculo e um estudo sobre números reais.In: FROTA, M.C.R.; NASSER, L (Org.). **Educação matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p. 11-42.

MELO, J. M. R. **Conceito de Integral:** uma proposta para seu ensino e aprendizagem. 2002. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

NASSER, Lilian . Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: IX ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, Belo Horizonte. **Anais...,** Belo Horizonte - MG: SBEM, 2007.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M.C.R.; NASSER, L (Org.). **Educação matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p. 43-58.

PINTO, Gisele Teixeira Dias Costa. **Uma proposta para o ensino e aprendizagem de limite de função real**. 2010. 172f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

POLYA, George**. A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PORTER, Mary K.; MASINGILA, Joanna O. Examinig the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. **Educational Studies In Mathematics**, Netherlands, v.42, n. 2, p.165-177, mar., 2000.

RASSLAN, Shakar; TALL, David. Definitions and images for the definite integral concept. In: Anne D. Cockburn; Elena Nardi (Eds.). **Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Norwich, UK, v. 4, p.89-96, 2002. Disponível em: <http://homepages. warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002h-pme26-rasslan.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2011.

REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: MACHADO, N.; CUNHA, M.(Org.) **Linguagem, conhecimento, ação**: ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras, 2003.

SIERPINNSKA, Anna. Good Understanding. In: SIERPINSKA, Anna. **Understanding in mathematics**: studies in mathematics education. Montreal: Concordia University, 1994.p. 125-137.

SILVA, Carlos Antônio. **A noção de integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. 2004. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SILVA, Carlos Antonio da; SILVA, Benedito Antonio. A noção de integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. SBEM. **Anais**..., Salvador: SBEM, 2010.

SILVA, Benedito Antônio. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, n.3, p.393-413, 2011.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics teaching***,* London*,* v. 77, p. 20-26, 1976.

STEWART, James. **Cálculo.** 5. ed. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2006. v.2.

STEWART, James. **Cálculo.** 4. ed. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2002. v.1.

TALL, David. A sensible approach to the calculus**. Plenary at The National and International Meeting on the Teaching of Calculus**, Puebla, Mexico, Sep. p. 23-25th ,2010. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David .Tall/ pdfs/dot2010a-sensible-calculus.pdf>. Acesso em: 12 maio 2012.

TALL, David; MEJIA, Juan Pablo Ramos. Reflecting on post-calculus-reform. plenary for topic group 12: **calculus, international congress of mathematics Education**, Copenhagen: Denmark. 2004.

TSAMIR, P., TIROSH, D.: LEVENSON, E. Intuitive nonexamples: The case of triangles. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v.69, p.81-95, 2008.

WATSON, An.; MASON, J. **Mathematics as a constructive activity**: learners generating examples. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, 2005. p.33-91.

APÊNDICE

APÊNDICE A - PRODUTO

LIÇÕES DE CÁLCULO PARA O ESTUDO DE INTEGRAIS: um foco no uso de exemplos

Sebastião Leônidas Ferreira
Maria Clara Rezende Frota

PUC-MG
Belo Horizonte - 2012

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Este trabalho é um extrato da dissertação de mestrado intitulada "Lições de Cálculo com um foco no uso de exemplos para aprendizagem de Integrais", desenvolvida por Sebastião Leônidas Ferreira, sob a orientação da professora Dra. Maria Clara Rezende Frota e defendida no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

As lições de Cálculo abordam o estudo das técnicas de integração por substituição simples e a integração por partes. As lições introduzem as integrais indefinidas e definidas, o Teorema Fundamental do Cálculo e algumas aplicações das integrais definidas ao cálculo de áreas e volumes.

As lições foram desenhadas objetivando o uso de exemplos para proporcionar situações de ensino que possam promover o aprendizado conceitual e procedimental de tópicos de Cálculo Integral. As diversas atividades propostas buscam apresentar conceitos e procedimentos através de exemplos, que são sistematizados após um processo de reflexão do qual participam os alunos e o professor.

Esperamos que este texto possa ser útil para professores e para alunos de cursos de engenharia e de outros cursos de graduação no estudo inicial das integrais.

2 REFERENCIAIS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Quando elaboramos as Lições de Cálculo, para discutirmos um determinado conteúdo, não queremos apenas fazer uma exposição de conceitos e procedimentos, transmitindo aos nossos alunos informações; pretendemos torná-los capazes de fazer novas descobertas. Nossas lições devem promover o crescimento dos alunos, sua criatividade, capacidade de descoberta e adaptação. Entendemos que as lições são importantes, desempenhando um papel regulador no processo de ensino-aprendizagem.

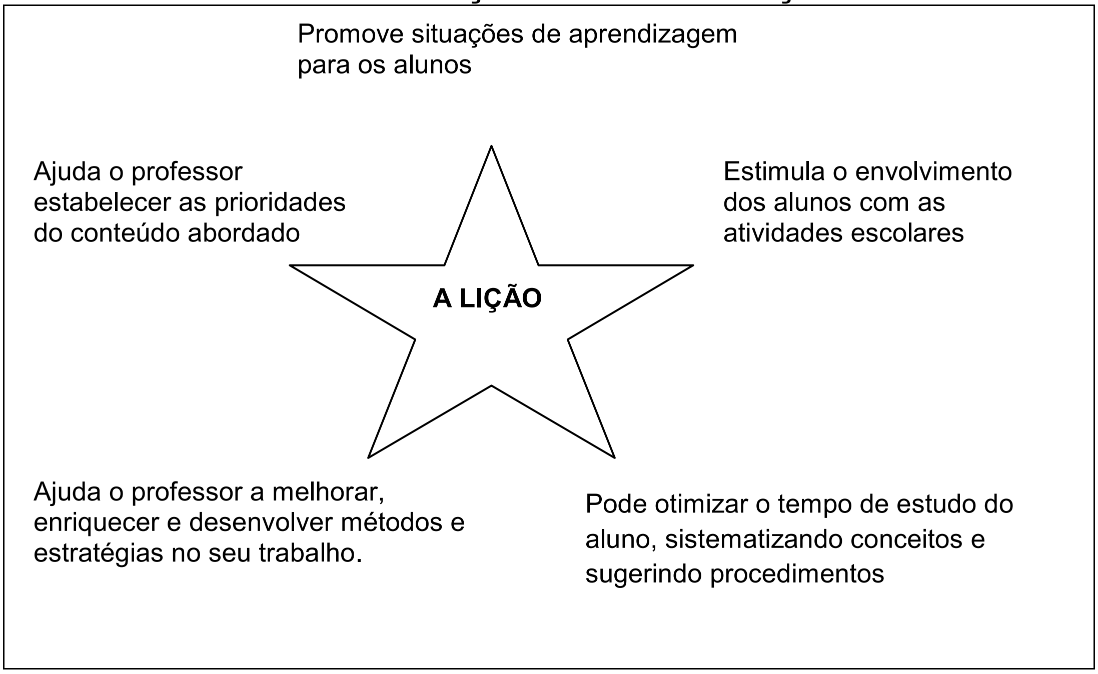
Um planejamento cuidadoso é um grande passo para o sucesso de uma lição. Ao planejar uma lição, o professor deve entender que ela será o caminho para a aprendizagem dentro ou fora da sala de aula, procurando não desperdiçar tempo em questões que poderão não contribuir com a aprendizagem, ou até mesmo prejudicar o entendimento dos alunos. No planejamento devemos considerar os objetivos, selecionando os métodos e procedimentos que ajudam na execução e avaliação da lição considerando os objetivos pretendidos.

Sabendo da importância de uma lição no processo de ensino-aprendizagem, consideramos que esta deve contemplar três pontos fundamentais: conteúdo, aluno e objetivos.

No conteúdo focalizamos o assunto a ser abordado com os alunos que são aqueles sujeitos que ativamente participarão da lição. O professor é um coparticipante, que acompanha e faz intervenções, sempre que forem necessárias. Algumas lições são preparadas para que, inicialmente, apenas o aluno a execute, e, posteriormente à execução, o professor possa socializar as discussões, abordando dúvidas e observações que surgiram durante a execução da lição. Nestas lições, o aluno é o principal sujeito; o professor poderá atuar retirando dúvidas e apontando resultados importantes pretendidos com a lição. Em relação aos objetivos da lição, entendemos que devemos especificar o que é esperado durante e após sua execução, estando atentos às observações e dúvidas evidenciadas. Isto poderá facilitar uma socialização posteriormente, abordando os principais pontos pretendidos e às vezes não alcançados pelo coletivo da turma.

Uma lição apresenta contribuições importantes no processo de aprendizagem; ao ser um instrumento de ajuda para o professor, acarreta reflexos positivos para os alunos.

Quadro 1 - A lição e suas contribuições



Fonte: Elaborado pelo autor

Estamos certos que um planejamento prévio, selecionando exemplos, com objetivos de desenvolver procedimentos e a reflexão sobre estes procedimentos, promove situações que favorecem discussões conceituais. A lição pode desempenhar o papel de introduzir, ampliar, esclarecer, sistematizar, desafiar e diagnosticar conhecimentos, sejam procedimentais ou conceituais.

2.1 Conhecimento conceitual e procedimental

Nosso desejo como professores de matemática é que os alunos apresentem uma compreensão conceitual da Matemática e sejam competentes ao desenvolverem os procedimentos corretamente quando necessário.

Hiebert e Lefevre (1986) caracterizam o conhecimento conceitual como aquele que é parte de uma rede composta por peças individuais de informação e as relações entre estas peças. Já se referindo aos conhecimentos processuais, definem que esses incluem uma familiaridade com o sistema de representação de símbolos da matemática e os conhecimentos de regras e procedimentos para a resolução de exercícios de matemática.

O conhecimento processual pode ou não ser aprendido de forma significativa, porém, o conhecimento conceitual é sempre aprendido com significado. (HIEBERT;

LEFEVRE, 1986)

Skemp, classifica o conhecimento em conhecimento relacional e conhecimento instrumental. De acordo com ele, a Matemática envolve uma extensa hierarquia de conceitos, nós não podemos formar qualquer conceito específico até que tenhamos formado todos aqueles que dele dependem. (SKEMP, 1976).

Conhecimento instrumental, é a capacidade de aplicar uma regra apropriada para a solução de um problema sem saber a razão pela qual a regra funciona. Em outras palavras, saber "como", mas não saber "por quê". Este conhecimento, geralmente requer não só o conhecimento dos objetos, mas também do formato e da representação simbólica relacionada. Além disso, muitas vezes exige execução de algoritmos, que às vezes são executados inconscientemente. (SKEMP, 1976).

Já o conhecimento relacional está associado à capacidade de saber o "porquê". Compreender os motivos pelos quais aplicamos determinados procedimentos e perceber outras possibilidades. Quando o aluno é capaz de relacionar e reorganizar conceitos, podendo deduzir outras possibilidades para os conceitos e procedimentos aprendidos, dizemos que houve a compreensão conceitual.

Para exemplificarmos o conhecimento conceitual, suponhamos duas funções f e g, com f(x)>g(x) num intervalo [a,b]. O aluno ao entender que a integral $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, poderá ser interpretada como a área da região compreendida entre as duas curvas representadas pelas funções y=f(x) e y=g(x) no intervalo [a,b] demonstra uma compreensão conceitual. Demonstra ter compreendido que essa área corresponde à soma das áreas de todos os infinitos retângulos introduzidos no intervalo de a até b, entendendo que a base de cada retângulo é representada por um valor infinitamente pequeno dx e a altura representada pela diferença f(x)-g(x). O conhecimento procedimental corresponderia à execução dos procedimentos, escolhendo a técnica de integração e fazendo os desenvolvimentos algébricos.

É compreensível o desejo dos professores de que seus alunos equilibrem os dois tipos de conhecimentos. O aprendizado procedimental sem o conhecimento conceitual não fornece aos alunos a capacidade de extrapolar suas conclusões a respeito do poder das integrais. Já o aprendizado conceitual poderá mostrar para os alunos que outras aplicações semelhantes à utilizada para o cálculo de áreas usando o conceito de soma infinita poderão surgir, como a utilização das integrais para o cálculo de volumes, comprimento de arcos, etc.

2.2 O papel dos exemplos em matemática

Qual o papel representado pelo uso de exemplos no ensino de Matemática? Consideramos que o uso de exemplos é fundamental no processo de ensino aprendizagem de Matemática, em particular de Cálculo Diferencial e Integral.

Concordamos com Figueiredo, Contreras e Blanco (2006, p.31), que afirmam que "os alunos aprendem matemática mais pelo envolvimento com exemplos do que através de definições formais."

Através de nossa experiência acadêmica, é comum ouvirmos durante nossas aulas, após a exposição de determinadas definições o aluno propondo; "professor dê um exemplo". Percebemos muitas vezes que esse pedido visa esclarecer melhor o que não foi assimilado ou confirmar suas conclusões, tornando as definições e conceitos, mais próximos e palpáveis ao aluno.

Figueiredo, Contreras e Blanco, (2009), fundamentados em Goldenberg e Mason (2008), afirmam que aprender mais sobre um determinado tópico é evoluir para exemplos mais avançados e construções mais avançadas para esses exemplos. Ensinar eficientemente inclui o uso de atividades e interações através das quais os alunos melhoram os acessos aos exemplos.

Watson e Mason propõem que os exemplos constituem elementos de espaços estruturados. Os autores usam o termo espaço de exemplos para denominar esse espaço. Para eles a extensão e exploração de espaços de exemplos são essenciais em matemática.

> Aprender matemática consiste em explorar, rearranjar e estender espaços de exemplos e as relações entre eles e dentro deles. Desenvolvendo uma familiaridade com esses espaços, os estudantes podem ganhar fluência e facilidade em associar técnicas e discursos. Experienciando extensões de seu espaço de exemplos (se bem orientado) contribui para a flexibilidade de pensamento não apenas em matemática, mas, talvez, de modo mais geral, e isso fortalece a apreciação e adoção de novos conceitos. (WATSON; MASON, 2005, p.6, tradução nossa)[16].

[16] Learning mathematics consists of exploring, rearranging, and extending example spaces and the relationships between and within them. Through developing familiarity with those spaces, learners can

Consideramos que o professor deverá apresentar uma grande variedade de exemplos que deverão contemplar diferentes abordagens de forma a atender as necessidades dos alunos, promovendo circunstâncias de aprendizagem. A utilidade de um exemplo dependerá de diversos fatores. A forma como o professor apresenta um exemplo e as características desse exemplo podem fazer a diferença entre um exemplo bem compreendido e útil e, apenas, mais um outro exemplo (FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Cabe destacar que a aprendizagem Matemática não é uma tarefa fácil, necessitando dedicação e estudo. À medida que o aluno vai evoluindo através da discussão e estudo dos exemplos, definições e procedimentos podem ser esclarecidos e reformulados.

Nossas leituras e investigações sobre os tipos de exemplos e sua função possibilitaram propor categorias que buscam contemplar os tipos de exemplos com os quais lidamos na sala de aula e que julgamos adequada para a elaboração das Lições de Cálculo Integral que integraram a pesquisa desenvolvida e que integram este texto.

2.3 Uma proposta de classificação de exemplos

Após um estudo de diversos trabalhos envolvendo o uso, a construção e as contribuições possíveis dos exemplos na aprendizagem de Matemática, procuramos elaborar uma classificação que, julgamos ser objetiva e clara em relação às atribuições e objetivos que desejamos ao elaborar um exemplo como parte integrante de lições que objetivam o ensino de Cálculo Integral.

Essa classificação compreende seis categorias de exemplos: introdutórios, ampliadores, sistematizadores, retificadores, desafiadores e diagnosticadores.

2.3.1 Exemplos introdutórios

São exemplos usados para introduzir conceitos e/ou procedimentos. Equivalem aos exemplos iniciais. (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO;

---

gain fluency and facility in associated techniques and discourse. Experiencing extensions of your example spaces (if sensitively guided) contributes to flexibility in thinking not just within mathematics but perhaps even more generally, and it empowers the appreciation and adoption of new concepts.

BLANCO; CONTRERAS, 2009). Normalmente são de fácil entendimento e sem grandes dificuldades, sendo usados nas primeiras explicações. Envolvem regras e procedimentos básicos.

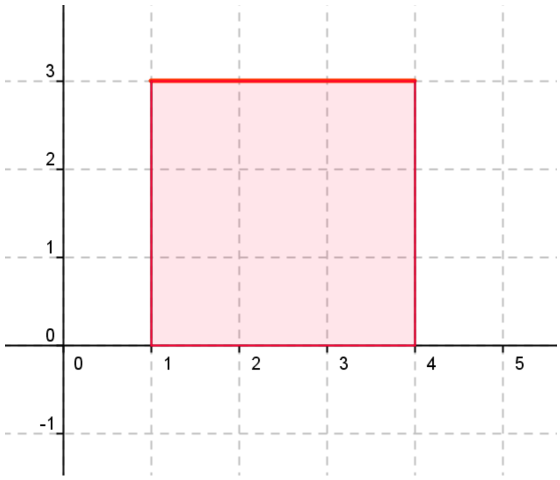
O exemplo ilustrado na Figura 1 pode ser considerado como introdutório.

Notemos que o exemplo da Figura 1 pode ser usado para introduzir conceitos e procedimentos usados para calcular áreas através de integral. O aluno poderá relacionar a representação simbólica da integral definida e rapidamente perceberá a eficiência do processo que poderá ser estendido a outras representações mais complexas.

Figura 1 - Exemplo Introdutório

A representação gráfica seguinte refere-se à região plana delimitada por f(x)= 3, x=1 e x=4.

Calculando a integral definida $I = \int_1^4 3dx$ obtemos: $\int_1^4 3dx = 3x\Big]_1^4 = 3(4-1) = 9$



a) Que relação existe entre o valor da integral calculada e o valor da área do retângulo sombreado?

b) Observe os contornos do retângulo e os limites de integração da integral e descreva suas observações.

Fonte: Elaborada pelo autor

2.3.2 Exemplos ampliadores

São aqueles que dão seguimento à apresentação dos conceitos e procedimentos feita através de exemplos introdutórios. Evoluem quanto ao nível de complexidade; apresentam procedimentos mais complexos e exigem recursos normalmente não necessários em exemplos introdutórios. Esses exemplos desempenham o papel de ampliar os conhecimentos dos alunos, propondo situações de conflitos que, gradativamente conduzem o aprendiz a níveis mais complexos, levando o aluno a reformular seus conceitos e procedimentos. Podem ser comparados aos exemplos de referência. (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Propor primeiramente ao aluno que faça a representação gráfica de uma função *f(x)=x* e que use uma integral para representar e calcular a área da região limitada, por *y=x, o eixo x, x=1 e x=3*. Em seguida, pedir que calcule a área limitada, *por y=x, y=-1, x=1 e x=3.* O aluno perceberá que a área não será a mesma, necessitando uma reformulação de procedimentos; percebendo as variações ele retomará suas conclusões e ampliará seus modelos.

2.3.3 Exemplos retificadores

São exemplos que exibem situações conflitantes que aparecem frequentemente após a introdução de conceitos e procedimentos. Discutem possíveis interpretações equivocadas de conceitos e procedimentos adotados nas resoluções. Esta classificação contempla os contraexemplos adotados por Rissland-Michener (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Para melhor compreendermos o papel dos exemplos retificadores, após uma primeira abordagem sobre a operação de integração como operação inversa da derivação e apresentando a integral indefinida do tipo $\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ [17], frequentemente os alunos ao integrarem uma função do tipo $\int \text{sen}x dx$, apontam como respostas funções do tipo $\text{sen}x^2$. Percebemos facilmente que houve uma

[17] Essa fórmula permanece válida para n real diferente de -1. (THOMAS, 2002, p.329).

associação indevida com a fórmula de integração de potências: a ideia de somar ao expoente de x uma unidade. O professor poderá apontar tal solução e pedir ao aluno que identifique qual o erro cometido, antecipando situações que poderão surgir posteriormente.

Esses exemplos podem otimizar o aprendizado, uma vez que, apontando e discutindo procedimentos e interpretações erradas que surgem durante as leituras e aplicação de conceitos. Esses exemplos antecipam dúvidas que podem surgir individualmente ou coletivamente.

É evidente que a ampliação do espaço de exemplos por um professor depende muito da sua experiência profissional, observação e interesse em detectar as interpretações erradas que podem e surgem com mais frequência.

2.3.4 Exemplos sistematizadores

São exemplos que resgatam e sistematizam importantes conclusões acerca das definições e procedimentos, frequentemente utilizados. Desempenham papel semelhante ao dos exemplos modelos. Normalmente são teóricos. Podem ou não anteceder outros exemplos. Após um primeiro contato com um determinado assunto, o professor poderá apresentar tais exemplos como forma de sistematizar as ideias gerais. A construção de uma tabela contendo as regras básicas de integração a partir das regras de derivação constitui um exemplo sistematizador, uma vez que resgata o conceito de integração como operação inversa da derivação.

2.3.5 Exemplos desafiadores

São exemplos que, para a sua execução, lançamos mão de diversos conhecimentos acumulados nos exemplos introdutórios, exemplos ampliadores e exemplos retificadores. Normalmente articulam diversos conhecimentos e procedimentos desenvolvidos pelo estudante nos vários conteúdos já estudados.

Para exemplificar podemos apontar algumas integrais envolvendo funções trigonométricas. Em algumas delas o aluno necessita aplicar recursos diversos como fatoração, arco duplo ou arco metade, identidades trigonométricas etc. Ex.: Calcular $\int 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$. O desafio consiste na busca que terá de ser feita pelo aluno, pesquisando entre as identidades trigonométricas aquela que é adequada para transformar $sen^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ e então integrar.

2.3.6 Exemplos diagnosticadores

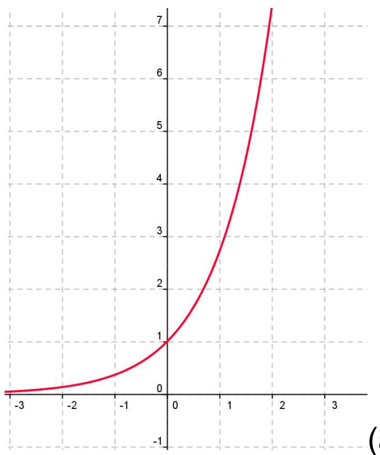
Consideramos exemplos diagnosticadores aqueles que usamos para diagnosticar as ideias prévias dos alunos sobre um conteúdo matemático, ou conceito já estudado. Podemos usar os exemplos diagnosticadores pretendendo uma verificação à priori; objetivamos, assim, um diagnóstico antecipado, para elaborar intervenções pedagógicas posteriores. Exemplos diagnosticadores estão sempre presentes em avaliações feitas individualmente ou em grupos, quando queremos verificar a compreensão por parte dos estudantes sobre os principais pontos dos conteúdos estudados.

Figura 2 - Exemplo diagnosticador

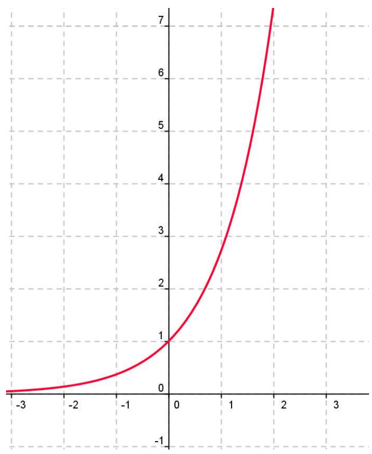
Dada a representação gráfica de $y=e^x$, faça o que se pede:

a) Destaque no gráfico a região cuja área será calculada ao resolvermos a integral definida $I_1=\int_{-1}^{2} e^x dx$, em seguida, calcule esse valor.

b) Represente graficamente a região cuja área é dada pela integral definida $I_2=\int_{0}^{2} \left[e^x - 1\right] dx$.



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pelo autor

É importante ressaltar, que um exemplo poderá ser ao mesmo tempo introdutório e sistematizador, pois, poderá desempenhar as duas ou até mais função. Assim, uma classificação como exemplo inicial não o impedirá de ser classificado como sistematizador etc.

Estamos certos das contribuições que os exemplos podem desempenhar na aprendizagem. Entretanto, vale lembrar que a exposição de exemplos, mal conduzidos pelo professor, poderá criar concepções erradas, causando consequências desastrosas para o aprendizado. A transmissão de informações para a construção conhecimentos, por parte do professor, requer todo cuidado (FIGUEIREDO; BLANCO; CONTRERAS, 2006).

3 PROPOSTA DE DESENVOLVIMETO

Sugerimos, de modo geral, que as lições desenvolvam-se através de uma abordagem que compreenda duas etapas:

teórica, através da exposição de slides contendo um resumo teórico dos conceitos e procedimentos básicos de cada tópico a ser estudado, sendo conduzida pelo professor em conjunto com os alunos;

prática, momento que as equipes, em duplas, executem as lições que foram preparadas objetivando complementar a abordagem teórica, exercitando e ampliando os conceitos e procedimentos apresentados na primeira abordagem.

O trabalho em dupla pode desempenhar um importante papel no desenvolvimento das lições. Os alunos ao se envolverem nas discussões deixam o papel de ouvinte para assumir o papel ativo no processo. A exposição de suas dúvidas e conjecturas pode promover o desenvolvimento da argumentação lógica de suas dúvidas e conclusões.

A elaboração das lições proporciona ao professor possibilidades de refletir e pensar sobre suas abordagens, antecipando e direcionando discussões, objetivando alcançar o entendimento necessário. Entendemos que é fundamental que o professor esteja atento durante a execução das lições, pois, ocorrerão resultados previsíveis e não previsíveis, podendo os alunos atingir ou não os objetivos pretendidos. Assim, se o papel dos exemplos não for alcançado, o professor deverá alertar sobre esses objetivos, assim como perceber quando um exemplo pode não ter sido o mais adequado.

4 AS LIÇÕES

Apresentamos as lições de Cálculo que foram elaboradas e desenvolvidas com alunos de Engenharia de uma instituição particular de Ensino Superior do interior do Estado de Minas Gerais. As lições foram desenhadas de forma a focalizar o uso e produção de exemplos, visando a facilitar o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Integral.

Para cada lição são estabelecidos os objetivos e apresentados os diversos exemplos, de acordo com as categorias por nós definidas e apresentadas no Capítulo 2, a partir dos estudos teóricos que foram conduzidos.

Procuramos adequar as lições às expectativas dos cursos objetivando trabalhar conceitos e procedimentos atendendo a um público que apresenta dificuldades diversas, como falta de pré-requisitos, pouco tempo disponível para os estudos, entre outras.

No processo de ensino e aprendizagem, consideramos professor e aluno como sujeitos ativos, cada um com seu papel. O professor estimula a aprendizagem, criando situações que possibilitem ao aluno o entendimento necessário. As lições desenvolvidas buscam fornecer elementos para o professor, que precisará ter cuidados com a forma de conduzi-las. A empatia e a confiança no professor poderão contribuir para que o ambiente de aprendizagem seja adequado aos estudos. Dos alunos esperamos o comprometimento com os estudos, dedicando-se sempre que possível às leituras, sejam dos slides, livros recomendados, formar grupos de estudos para discussão dos conteúdos estudados e principalmente a participação durante as aulas.

4.1 Lição 1: Ideias gerais sobre a Antiderivação como operação inversa da Derivação

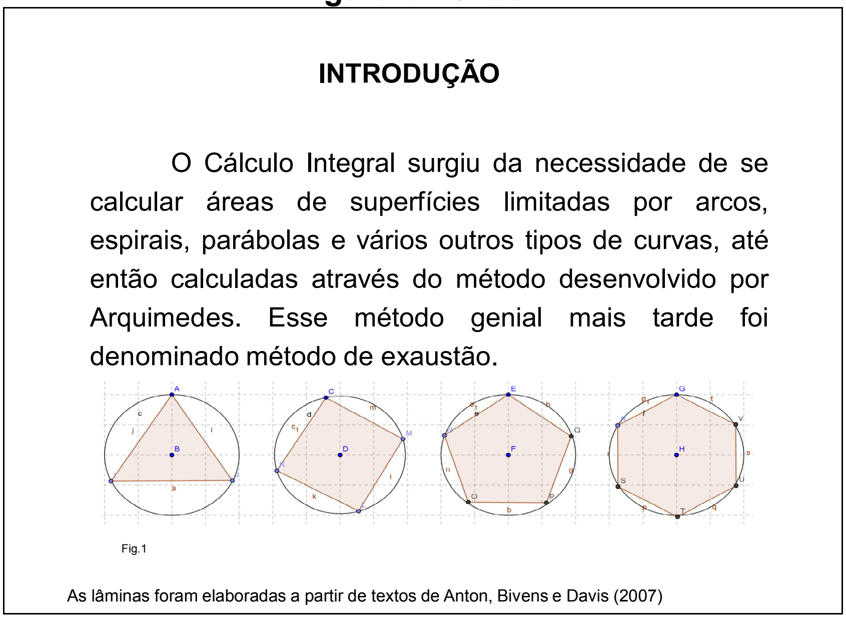
A Lição 1 apresenta rapidamente o método da exaustão de Arquimedes, e, representando os grandes nomes da História da Matemática que contribuíram para a construção e evolução do cálculo, cita Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Von Leibniz, com o intuito de mostrar aos alunos que, muitas vezes, os conhecimentos são construídos a partir de outros já existentes e em resposta a demandas de uma época. No caso das integrais, o problema prático era o de determinar a área de terrenos.

A matemática envolve uma extensa hierarquia de conceitos. Historicamente foi preciso tempo e esforço até que fossem estabelecidos todos os conceitos matemáticos relacionados ao cálculo de áreas: a derivada, a integral, uma relação entre as duas operações, como sendo uma a inversa da outra. (SKEMP, 1976).

O conhecimento processual pode ou não ser aprendido de forma significativa, porém, o conhecimento conceitual é sempre aprendido com significado, assim, procuramos dar sentido às ideias básicas de integração, objetivando contribuir para o conhecimento processual e conceitual. (HIEBERT; LEFEVRE, 1986),

O slide da Figura 3 teve o objetivo de motivar as primeiras colocações históricas sobre o problema.

Figura 3 - Slide 1

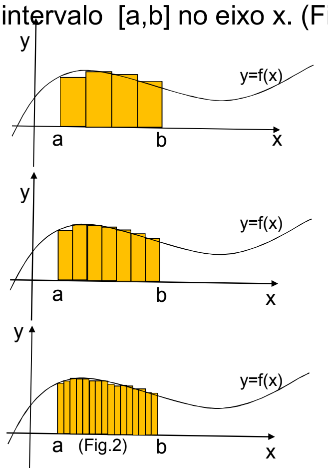


Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4 - Slide 2

O PROBLEMA DA ÁREA

Dada uma função f contínua e não-negativa em um intervalo [a,b], encontre a área entre o gráfico de f e o intervalo [a,b] no eixo x. (Fig.2)



Uma abordagem do problema da área é a utilização do método da exaustão de Arquimedes dividindo o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos iguais e em cada um deles construindo um retângulo que se estende desde o eixo x até algum ponto na curva y=f(x).

$$A = \lim_{n \to +\infty} A_n$$

A denota a área exata sob a curva e

A_n denota a aproximação de A usando n retâgulos

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Para atingir os objetivos pretendidos nos apoiamos nos exemplos introdutórios Ex1 da Figura 5 e 6 e Ex2 das Figuras 7 e 8. Através de questionamentos e sugestões presentes nos exemplos conduzimos os alunos a buscar conhecimentos e recursos anteriormente estudados, que às vezes ficam esquecidos.

Figura 5 - Slide 3

O MÉTODO DOS RETÂNGULOS

Para ilustrar essa ideia, vamos calcular a área sob a curva $y=x^2$, acima do intervalo $[0,1]$. Comecemos subdividindo o intervalo em n subintervalos iguais, cada um, portanto, com base 1/n; as alturas serão as imagens da função em

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$$

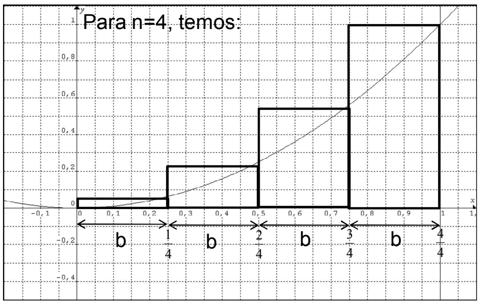
Ex.1 - Vamos calcular por, excesso, a área sob a curva $y=x^2$, acima do intervalo $[0,1]$, subdividindo em 4 retângulos.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6 - Slide 4

Para n=4 teremos a base b=1/4 e alturas serão :



$$h_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$
$$h_2 = f\left(\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$h_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$
$$h_4 = f\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}\right)^2 = 1$$

Somando as áreas dos retângulos temos $A = b.h_1 + b.h_2 + b.h_3 + b.h_4$.

Escrevendo de forma mais simples temos $A = b.(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$.

Fazendo as substituições e os cálculos temos $A = \frac{15}{32} = 0{,}46875$.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7 - Slide 5

CALCULANDO ÁREAS A PARTIR DE DERIVADAS

EX.2 - Determinar a área sob o gráfico de função f(x)=-2x+5 acima do intervalo $[0, a]$, com **a** menor ou igual a 5/2.

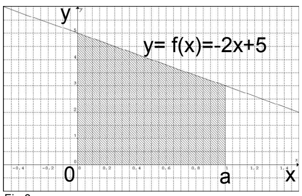


Fig.3

Através de conhecimentos de geometria plana sabemos que:

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{[(5)+(-2a+5)].a}{2}$$
$$A(a) = \frac{(-2a+10).a}{2}$$
$$A(a) = -a^2 + 5a$$

Como **a** é um parâmetro real variável podemos fazer **a=x.**

$$\boxed{A(x) = -x^2 + 5x}$$

Derivando A(x) o que obtemos?

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 8 - Slide 6

Vamos calcular a área da região sob a curva da função f(x)=-2x+5 no intervalo $[0,1]$.

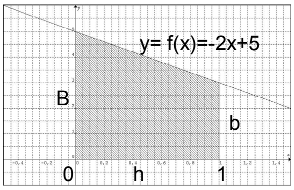


Fig.3

$$b = f(1) - 0 = 3$$
$$B = f(0) - 0 = 5$$
$$h = 1 - 0 = 1$$

Fazendo as substituições:

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(5+3).1}{2} = 4$$

Retomando a expressão que encontramos anteriormente que nos fornece a área em função de x, veja: $A(x) = -x^2 + 5x$

Faça x=1 na função $A(x) = -x^2 + 5x$ e compare com o valor da área A encontrada anteriormente.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a Lição 1 sistematizando as primeiras ideias e apresentando algumas contribuições das integrais, conforme as Figuras 9 e 10.

Figura 9 - Slide 7

SISTEMATIZANDO IDEIAS IMPORTANTES

Se *f* é uma função contínua não-negativa no intervalo [a,b] e A(x) denota a área sob o gráfico de *f* acima do intervalo [a,x] em que x é um ponto qualquer do intervalo [a,b] (Figura 4), então

$$A'(x) = f(x)$$

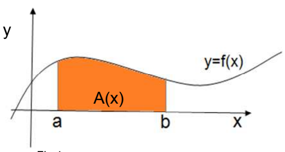


Fig.4

Assim , a partir da derivada A'(x)=f(x) dada, se recuperarmos a fórmula de A(x), poderemos obter a área sob o gráfico *f* acima do intervalo [a,b] calculando A(b).

O processo de encontrar uma função a partir de sua derivada é denominado **antiderivação**, e o procedimento para encontrar áreas através da antiderivação é denominado **método da antiderivação**.

* Anton, Bivens e Davis, 2007 p.352

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 10 - Slide 8

NECESSIDADE E IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO INTEGRAL

Determinação de:

- áreas
- volumes
- comprimento de curvas
- trabalho realizado por uma força variável
- centros de massa
- aplicações na engenharia
- ...

Fonte: Elaborada pelo autor

4.2 Lição 2: Fixando e complementando conhecimentos sobre antiderivação

A Lição 2 utiliza o exemplo ampliador EC1 da Figura 11, que promove situações de aprendizagem para reforçar e ampliar informações apresentadas na Lição 1. O Exemplo EC2 da Figura 12 objetiva ampliar as conclusões acerca da antiderivação como operação inversa da derivação, relacionando a antiderivação ao cálculo da área sob uma curva.

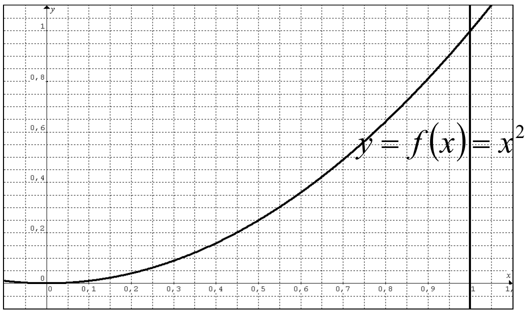
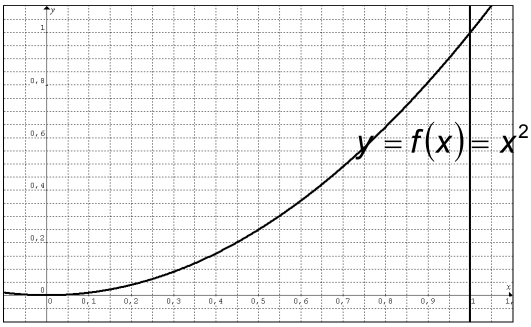
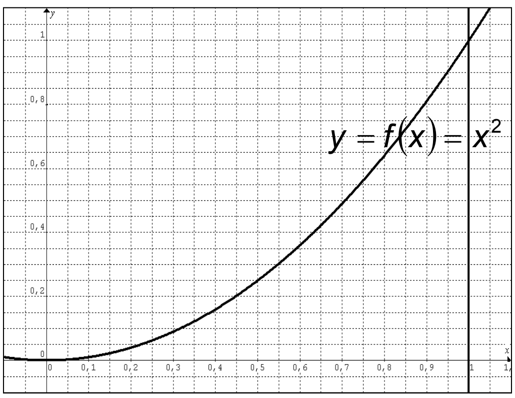
Figura 11 - Exercício complementar 1

EC1 – Se $f(x) = x^2$, no intervalo $[0,1]$, podemos calcular a área aproximada da região abaixo da curva $f(x) = x^2$ e acima de [0,1], através do método da subdivisão em retângulos. Assim, em cada caso:

I) Divida o intervalo [a,b] em n sub-intervalos e construa n retângulos tendo como altura algum valor de $f(x) = x^2$ em cada subintervalo;

II) Use o método da subdivisão em retângulos e calcule a área aproximada da região determinada.

III) Registre suas conclusões.

a)		N = 5
b)		n = 10
c)		n = 20

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 12 - Exercício Complementar 2

EC2 – Sabemos que é possível estabelecer uma relação entre áreas e antiderivadas. Use o **método de antiderivação** para calcular a área da região sob a curva dada por $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$.

Sugestão: Encontre uma função cuja derivada seja $f(x) = x^2$.

Fonte: Elaborada pelo autor

4.3 Lição 3: A integral indefinida e as primeiras ideias importantes

Optamos por dividir a Lição 3 em duas etapas: a primeira etapa L3-A, apresentamos a definição de antiderivada ainda relacionada a derivação. Na segunda parte da lição, denotada por L3-B, apresentamos a notação de integral indefinida e as primeiras propriedades importantes através de exemplos introdutórios.

Através do exemplo introdutório E1 da Figura 13, os alunos são convidados a relacionar uma antiderivada à sua derivada sem muita dificuldade.

Figura 13 - Slide 1

L3-A **Antiderivada**

Definição*:
Dizemos que uma função F é uma **antiderivada** de uma função f em um dado intervalo se F'(x) = f(x) para cada x do intervalo.

E1- Definição

$F(x) = x^2 + 3x$ é uma antiderivada de $f(x) = 2x + 3$

Se derivarmos F encontraremos f. Logo, conhecendo uma função f podemos encontrar uma **primitiva** ou **antiderivada** F.

* Anton, 2007, p.355

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, na Figura 14 apresentamos o E2. No E2 selecionamos exemplos que assumem o papel de introduzir e ampliar procedimentos e conceitos. Serão conduzidos com a participação dos alunos fixando e ampliando as ideias iniciais. Ainda na primeira etapa da Lição 3 da Figura 15, apresentamos um exemplo sistematizador E3, a fim de estimular os alunos a descobertas importantes que serão formalizadas e frequentemente usadas.

Figura 14 - Slide 2

E2 – Relacione a 1ª e 2ª colunas, associando cada função da 1ª coluna a sua primitiva na 2ª coluna.

(1) $f(x) = 2x + 3$	$(a)\ F(x) = e^x + 2x^2 + 3$
(2) $f(x) = e^x + 4x$	$(b)\ F(x) = -\cos(x)$
(3) $f(x) = sen(x)$	$(c)\ F(x) = x^2 + 3x - 2$
(4) $f(x) = x$	$(d)\ F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 4$
(5) $f(x) = \cos(x)$	$(e)\ F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 4$
(6) $f(x) = x^2 + 6x\text{-}8$	$(f)\ F(x) = sen(x)$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 15 - Slide 3

E3 – Descobertas importantes

Seja um polinômio : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ para n inteiro não-negativo; $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1$ e a_0 são coeficientes reais.

Considere um dos termos deste polinômio, por exemplo, $a_n x^n$. Você seria capaz de encontrar uma expressão que represente sua antiderivada?

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a primeira parte da Lição 3, fixando ideias através da discussão, juntamente com os alunos, do exemplo introdutório E4 da Figura 16.

Figura 16 - Slide 4

E4 – Complete as colunas:

Função F(x)	Derivada f'(x)
x^2	
$3x^2 + 2x + 7$	
$5x^3 - x - 12$	

Função F(x)	Derivada f'(x)
	2x-3
	$2x^3 - 5x - 4$
	$x^2 - 3$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 17 - Slide 5

L3 - B

A INTEGRAL INDEFINIDA

TEOREMA 1* - Se F(x) for qualquer antiderivada de f(x) em um intervalo I, então para qualquer constante C a função F(x) + C é também uma antiderivada de f(x) naquele intervalo. Além disso, cada antiderivada de f(x) no intervalo I pode ser expressa na forma de F(x) + C, escolhendo-se apropriadamente a constante C.

Acompanhe o exemplo:

E1: Fórmula da derivada — Fórmula de integração equivalente

$$\frac{d}{dx}\left[x^3\right] = 3x^2 \qquad \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Obs.: O sinal de s espichado $\int$ foi inventada por Leibniz.
* Anton, 2003, p.356

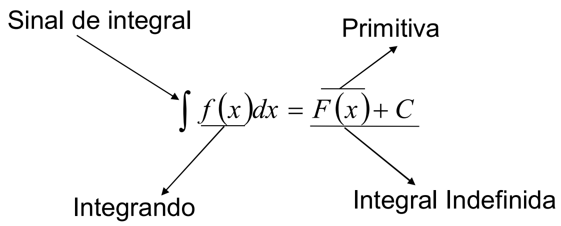
As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 18 - Slide 6

Integral Indefinida

NOTAÇÃO:



A Integral indefinida é o conjunto de todas as primitivas.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 19 - Slide 7

DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

A **derivação** e a **integração** são operações inversas, assim:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x) \quad \text{e} \quad \int f'(x)dx=f(x)+C$$

Para encontrarmos a integral de uma função f devemos encontrar uma função F tal que, sua derivada resulte na função f que conhecemos.

Assim, $\int f(x)dx=F(x)+C$ e $\frac{d}{dx}[F(x)+C]=F'(x)=f(x)$.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 20 - Slide 8

E2: Seja a função $F(x)=x^4+5.$

Sua derivada é:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}[F(x)]=4.x^{4-1}+0=4x^3 \Rightarrow F'(x)=f(x)=4x^3$$

Uma vez que a integração é uma operação inversa da derivação, então, a integral

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int 4x^3dx=4\frac{x^{3+1}}{3+1}+C$$

$$\int 4x^3dx=\frac{4x^4}{4}+C=x^4+C$$

No exemplo, conhecíamos a constante C=5, porém, ao calcularmos uma integral indefinida encontramos uma família de funções cuja derivada conhecemos. A função $F(x)=x^4+5$ é uma das funções que pertence à família.

Assim:

$$\int 4x^3dx=\frac{4x^4}{4}+C=x^4+C$$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 21 - Slide 9

E3 –Fixação:
Calcule a integral $\int\left(3x^2+5x-3\right)dx$

Queremos encontrar uma função cuja derivada seja

$f(x)=3x^2+5x-3,$

Sabemos que $\int a_n x^n dx = a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ para n inteiro diferente de -1.

$$\int\left(3x^2+5x-3\right)dx=\int 3x^2dx+\int 5xdx+\int(-3)dx$$

*Obs: Essa fórmula permanece válida para n real diferente de -1. (Thomas, 2002, p.329)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 23 - Slide 10

Retomando a integral pedida temos:

$$\int\left(3x^2+5x-3\right)dx=\int 3x^2dx+\int 5xdx+\int(-3)dx$$

$$\int 3x^2dx=3\frac{x^{2+1}}{2+1}+C_1=\frac{3x^3}{3}+C_1=x^3++C_1$$

$$\int 5xdx=5\frac{x^{1+1}}{1+1}+C_2=\frac{5x^2}{2}++C_2$$

$$\int(-3)dx=-3\frac{x^{0+1}}{0+1}+C_3=-3x+C_3$$

Uma vez que C_1, C_2 e C_3 são constantes, podemos fazer $C_1+C_2+C_3=C$, também uma constante arbitrária.

$$\int\left(3x^2+5x-3\right)dx=x^3+C_1+\frac{5x^2}{2}+C_2-3x+C_3=x^3+\frac{5x^2}{2}-3x+C$$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 23 - Slide 11

PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

E4: Calcule a integral $\int [2x + \cos x]dx$

$$\int [2x+\cos x]dx = \int 2xdx + \int \cos xdx$$

$$= \frac{2x^2}{2} + senx + c$$

$$= x^2 + senx + c$$

A integral de uma soma ou diferença de funções é igual à soma ou diferença das integrais dessas funções.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 24 - Slide 12

PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL

E5 - Calculemos a integra l $\int \left(4x^2 + 4x + 4\right)dx$

$$\int (4x^2+4x+4)dx = \int 4x^2dx + \int 4xdx + \int 4dx = 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 4x + C$$

$$= \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 4x + C$$

- Agora calculemos a integral

$$\int (4x^2+4x+4)dx = \int 4.(x^2+x+1)dx = 4.\int (x^2+x+1)dx =$$

$$= 4.\left[\int x^2dx + \int xdx + \int 1dx\right] = 4.\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1x + C\right] = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 4x + 4C$$

A integral do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela integral da função.

$$\boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}$$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 25 - Slide 13

E6 - Relacione a primeira coluna com a segunda encontrando integrais equivalentes:

$a)\int 3sen(2x)dx$	( ) $2\int x^4 dx$
$b)\int 2sen(x)dx$	( ) $\frac{1}{3}\int sen(2x)dx$
$c)\int \frac{sen(2x)}{3}dx$	( ) $2\int sen(x)dx$
$d)\int \frac{3sen(2x)dx}{2}$	( ) $3\int sen(x)dx$
$e)\int 2\pi xe^{3x}dx$	( ) $3\int sen(2x)dx$
$f)\int 2x^4 dx$	( ) $2\pi\int xe^{3x}dx$
$g)\int 3sen(x)dx$	( ) $\frac{3}{2}\int sen(2x)dx$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a lição sistematizando os principais resultados através da Figura 26.

Figura 26 - Slide 14

RESULTADOS IMPORTANTES

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para n diferente de -1.

Em palavras : para integrar uma potência em x, de expoente diferente de -1, some 1 ao expoente e divida a nova potência pelo novo expoente.

2) $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ A integral de uma soma ou diferença de funções é igual à soma ou diferença das integrais dessas funções.

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ para qualquer constante k real.

As propriedades 2 e 3 podem ser reunidas em uma só. Como ficaria?

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

4.4 Lição 4: fixando e complementando conhecimentos sobre integral indefinida e as primeiras conclusões importantes

A Figura 27 apresenta o EC3, Exemplo Sistematizador. Ao construir uma tabela de integrais de posse de uma tabela de derivação, o aluno consulta as regras de derivação e a partir destas regras, sabendo que a integração é a operação inversa, apresentará a expressão correspondente a cada integral indefinida solicitada. Julgamos este exemplo como sistematizador, uma vez que resgatam e sistematizam importantes conclusões acerca das definições e procedimentos anteriores já estudados.

No EC4, da Figura 28, queremos que o aluno registre os procedimentos já adotados pelo professor ao resolver uma integral indefinida. Concordamos com Pinto, (2008) e Porter e Masingila (2000), que atividades que levam o aluno a registrar seus procedimentos podem contribuir com a aprendizagem.

Através dos exemplos retificadores EC5 da Figura 29 e EC6 da Figura 30, queremos provocar discussões sobre procedimentos errados frequentemente cometidos pelos alunos. O EC7 da Figura 31 apresenta diversos exemplos a fim de fixar e ampliar procedimentos estudados.

Seguimos a lição apresentando o exemplo desafiador EC8 da Figura 32, pretendendo que os alunos, pesquisando entre as identidades trigonométricas, identifiquem aquela que é adequada para transformar o integrando num integrando mais simples, possibilitando a aplicação da tabela de integração. Finalizamos a lição com os exemplos que podem ser classificados como ampliadores e desafiadores EC9 da Figura 33 e EC10 da Figura 34.

Figura 27 - Exercício complementar 3

EC3 - Você aprendeu que a derivação e a integração são operações inversas. A partir das regras de derivação que você conhece, monte uma tabela de integrais indefinidas.	
1	$\int dx =$
2	$\int x^n dx =$
3	$\int e^x dx =$
4	$\int \cos x dx =$
5	$\int sen x dx =$
6	$\int \sec^2 x dx =$
7	$\int \cos\sec^2 x dx =$
8	$\int \sec x . tgx dx =$
9	$\int \cos\sec x . \cot g x dx =$
10	$\int \frac{1}{x} dx =$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 28 - Exercício complementar 4

EC4 – Você conhece algumas propriedades importantes das integrais indefinidas. Aponte as propriedades que foram aplicadas na integral já resolvida:	
$\int\left(6x^2-\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$	
$I=\int 6x^2dx-\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}dx-\int x^{-3}dx$	
$=6\int x^2dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-3}dx$	
$=6.\frac{x^{2+1}}{3}+C_1-\frac{1}{2}.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}+C_2-\frac{x^{-3+1}}{-2}+C_3$	
$=2x^3-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^{-2}}{2}+C_1+C_2+C_3$	
$=\ 2x^3-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^{-2}}{2}+C$	

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 29 - Exercício complementar 5

EC5 – Não é correto afirmar que $\int sen(x)dx=\frac{sen(x^2)}{2}+C$. Justifique.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 30 - Exercício complementar 6

EC6 – a) Justifique porque não é correto afirmar que $\int 2x^2.x^6dx=2\frac{x^3}{3}.\frac{x^7}{7}+C$.
b) Qual o valor correto da integral? Justifique.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 31 - Exercício complementar 7

EC7 – Fixe os procedimentos importantes já estudados calculando as seguintes integrais:
i) $\int 7x^6 dx$
j) $\int \frac{6}{x^3} dx$
k) $\int \left(5e^x + 2x - \frac{10}{x^3}\right) dx$
l) $\int \left(3senx + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$
m) $\int \frac{\sqrt[5]{x^4}}{2} dx$
n) $\int \left(6x^2 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$
o) $\int \left(\frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4}\right) dx$
p) $\int \left(\frac{3}{x} + 3x\right) dx$ (cuidado!)
Respostas:
7 a) $x^7 + C$ b) $-\frac{3}{x^2} + C$ c) $5e^x + x^2 + \frac{5}{x^2} + C$ d) $-3\cos x + 4\sqrt{x} + C$ e) $\frac{5}{18} x^{\frac{9}{5}} + C$ f) $2x^3 - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{2x^2} + C$ g) $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + C$ h) $3\ln x + \frac{3}{2} x^2 + C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 32 - Exercício complementar 8

EC8 - Muitas vezes, para calcular uma integral, precisamos transformar o integrando, usando relações conhecidas, como no caso do cálculo de integrais que envolvem funções trigonométricas.

Calcule as integrais seguintes:

a) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$ (Sugestão: cos2x = 2 cos² x – 1)

b) $\int 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ (Sugestão: $sen^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$)

c) $\int \frac{sen^2(x)}{1+\cos(x)}dx$ (Sugestão: $sen^2 x+\cos^2 x=1$)

Respostas: 8 a) $\frac{tgx}{2}+C$ b) $x-senx+C$ c) $x-senx+C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 33 - Exercício complementar 9

EC9 - Justifique porque são verdadeiros os resultados das integrais indefinidas:

$a)\int (x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C=\frac{(x+1)^2}{2}+K$ $b)\int (x+1)^2dx=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 34 - Exercício complementar 10

EC10 – a) Os procedimentos usados no exercício anterior não se aplicam à seguinte integral indefinida $\int (2x+1)^2dx$. Justifique.

b) Calcule a integral fazendo o desenvolvimento do produto notável $(2x+1)^2$ e aplicando as propriedades das integrais indefinidas já estudadas.

c) Na letra b) foi possível desenvolver o produto notável e calcular o valor da integral, mas por vezes o desenvolvimento da potência torna-se trabalhoso.

Desafio: Como proceder para calcular $\int (2x+1)^5dx$?

Fonte: Elaborada pelo autor

4.5 Lição 5: Ideias gerais sobre a técnica de integração por substituição simples

Inicialmente, através de um trabalho conjunto com a turma, procuramos retomar ideias importantes da Lição 4, reunidas nos slides das Figuras 35 e 36.

Figura 35 - Slide 1

Retomando ideias importantes

Você viu na lição anterior que a integral $\int (2x-1)^2 dx$ não pode ser resolvida aplicando diretamente a regra $\boxed{\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$

É necessário primeiramente desenvolver o produto notável:

$$I) \int (2x-1)^2 dx = \int (4x^2 - 4x + 1) dx = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$$

Ou então proceder da seguinte maneira:

$$II) \int (2x-1)^2 dx = \int (u)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}.\frac{u^3}{3} + C = \frac{u^3}{6} + C = \frac{(2x-1)^3}{6} + C$$

Observe que fizemos $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Vejamos que os resultados obtidos em I e II são equivalentes:

Desenvolvendo $\frac{(2x-1)^3}{6} + C = \frac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{6} + C = \frac{8x^3}{6} - \frac{12x^2}{6} + \frac{6x}{6} - \frac{1}{6} + C$

e simplificando temos $\frac{(2x-1)^3}{6} + C = \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x + K$ onde $K = -\frac{1}{6} + C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 36 - Slide 2

Sistematizando a técnica da substituição

Suponhamos que F seja uma antiderivada de f e que g seja uma função diferenciável. A derivada de F(g(x)) pode, pela regra da cadeia, ser expressa como $\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x)).g'(x)$

e, em forma de integral indefinida, pode ser escrita como

$\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C$

Será útil tomar u = g(x) e escrever du/dx = g'(x) na forma du = g'(x)dx. Assim podemos escrever $\int f(u)du = F(u) + C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Objetivando apresentar as primeiras ideias sobre a técnica da substituição simples elaboramos os exemplos introdutórios E1 da Figura 37 e E2 da Figura 38.

Figura 37 - Slide 3

E1) Calcule $\int \left(x^2 - 1\right)^{30} . 2xdx$

Note que $\int \left(x^2 - 1\right)^{30} .2xdx = \int \left(f(x)\right)^{30} .g(x)dx$

Ao derivarmos f, encontramos g imediatamente, assim,
a substituição torna a integral em termos de u mais simples.

$u = x^2 - 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow du = 2xdx$

$$\int \left(x^2 - 1\right)^{30} .2xdx = \int (u)^{30} du = \frac{u^{31}}{31} = \frac{\left(x^2 - 1\right)^{31}}{31} + C$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 38 - Slide 4

E2) Calcule $\int 6x^2\sqrt{x^3 - 5}\ dx$:

Por substituição temos:

$u = x^3 - 5 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow du = 3x^2dx \rightarrow \frac{du}{3} = x^2dx,$

vemos que a integral $\int 6x^2\sqrt{x^3 - 5}dx = 6\int \sqrt{x^3 - 5}.x^2dx$, assim:

$$6\int \sqrt{x^3 - 5}.x^2dx = 6\int \sqrt{u}\frac{du}{3} = 6.\frac{1}{3}\int \sqrt{u}du = 2\int u^{\frac{1}{2}}du = 2.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{4u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{4\left(x^3 - 5\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Fonte: Elaborada pelo autor

As Figuras 39 e 40 buscaram sistematizar as conclusões que procuramos que os alunos pudessem obter sobre o método de substituição simples.

Figura 39 - Slide 5

A TÉCNICA DA SUBSTITUIÇÃO SIMPLES

Em geral, não há um método seguro e rápido para escolher u, e, em alguns casos, nenhuma escolha de u funcionará. Em tais casos, outros métodos serão necessários, alguns dos quais serão discutidos mais adiante. Fazer a escolha apropriada de u virá com a experiência, mas, o domínio das regras básicas de integrais e seguir o roteiro conforme sugerem Anton, Bivens e Davis (2007).

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 40 - Slide 6

ROTEIRO PARA USO DA TÉCNICA DE SUBSTITUIÇÃO SIMPLES

PASSO 1 Procure uma composição f(g(x)) dentro do integrando para a qual a substituição $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ produza uma integral expressa inteiramente em termos de u e du. Isso pode ou não ser possível.

PASSO 2 Se o Passo 1 tiver sido completado com sucesso, tente calcular a integral resultante em termos de u. Novamente, isso pode ou não ser possível.

PASSO 3 Se o Passo 2 tiver sido completado com sucesso, substitua u por g(x) para expressar a resposta final em termos de x.

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, pretendendo ampliar os conhecimentos e apresentar novos procedimentos, utilizamos o E3 da Figura 41.

Figura 41 - Slide 7

E3) a) Seja a integral indefinida $\int 2.\text{sen}(2x+9)\,dx$:

Vemos que no integrando temos $2.\text{sen}(2x+9)$

Se $u = 2x+9 \rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2 \rightarrow du = 2dx$ e assim podemos fazer

a substituição de $2x+9$ por u e $2dx$ por du. Assim:

$$\int 2.\text{sen}(2x+9)dx = \int \text{sen}(u)du = -\cos(u) = -\cos(2x+9) + C$$

b) Se tivéssemos a integral $\int \text{sen}(2x+9)dx$ o que mudaria?

c) E se tivéssemos a integral $\int \text{sen}(3x\text{-}9)dx$?

d) A integral $\int \text{sen}(2x^2+9)dx$ poderia ser resolvida usando a mesma técnica de substituição simples?

Fonte: Elaborada pelo autor

4.6 Lição 6: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre a técnica de integração por substituição simples

Para fixar e ampliar conhecimentos sobre a técnica da substituição simples, apresentamos os exemplos introdutórios no EC11 da Figura 42, visam apresentar o algoritmo usado na aplicação da técnica possibilitando ao aluno perceber os motivos que nos levam a escolher parte do integrando como u. Refletindo sobre os procedimentos, podemos conduzir o aluno a uma real compreensão e não uma memorização mecânica de procedimentos que podem não contribuir para uma real aprendizagem. Para atingir os objetivos pretendidos, apresentamos os exemplos ampliadores EC12 da Figura 43 e finalizamos a lição através dos exemplos ampliadores e desafiadores do EC13 da Figura 44, EC14 da Figura 45 e EC15 da Figura 46, objetivando evitar a mecanização não refletida de procedimentos e apresentando situações que os levam a buscar outros recursos para a resolução e apontando as limitações da técnica estudada.

Figura 42 - Exercício complementar 11

EC11 - Algumas integrais não são imediatas, ou seja, não há uma fórmula de integração que aponte sua resposta. Em alguns casos a aplicação da técnica da substituição torna mais simples sua resolução. Veja o exemplo apresentado e complete o quadro.

Integral	Integrando	f(x)	g(x)	f´(x)	g´(x)	U
a) $\int 3x^2(x^3-2)^6\,dx$	$3x^2(x^3-2)^6$	$3x^2$	(x^3-2)	6x	$3x^2$	(x^3-2)
b) $\int \frac{x}{(3x^2-1)}dx$						
c) $\int (2x^2-2)^6\,xdx$						
d) $\int \frac{2x}{(5-3x^2)^5}dx =$						
e) $\int (2x-1)^{10}\,dx$						

O método da substituição é relativamente direto, desde que o integrando contenha uma composição f(g(x)) facilmente reconhecível e seu resto seja múltiplo constante de g´(x). Já que você apontou parte do integrando como u, agora veja se sua escolha foi adequada fazendo a substituição e resolvendo as integrais.

a) $\int 3x^2(x^3-2)^6\,dx =$

b) $\int \frac{x}{(3x^2-1)}dx =$

c) $\int (2x^2-2)^6\,xdx =$

d) $\int \frac{2x}{(5-3x^2)^5}dx =$

e) $\int (2x-1)^{10}\,dx =$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 43 - Exercício complementar 12

EC12 - Você aprendeu um roteiro para a escolha de u adequadamente para a aplicação da técnica da substituição. Siga esse roteiro e resolva as integrais:
a) $\int \text{sen}(3x)dx =$
b) $\int \cos(3x-2)dx$
$c)\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx =$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 44 - Exercício complementar 13

EC13) a) Calcule a integral $\int senx.\cos xdx$ por dois métodos: primeiro fazendo u=senx e, depois u=cosx,
b) Explique por que as duas respostas aparentemente diferentes de (a) são realmente equivalentes.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 45 - Exercício complementar 14

EC14) Às vezes a substituição não é imediata, ainda assim pode ser possível aplicar o método da substituição. Calcule as integrais aplicando as substituições sugeridas:
a) $\int x^2\sqrt{x-1}dx =$ (use u=x-1 logo x=u+1)
b) $\int \cos^3 xdx =$ (lembre-se que $\cos^3 x=\cos^2 x.\cos x$, $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, faça $u = \text{sen}x$)

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 46 - Exercício complementar 15

EC15) a) Apesar de serem quase iguais, as integrais indefinidas $\int xe^{x^2}dx$ e $\int xe^{x}dx$ não podem ser resolvidas usando os mesmos procedimentos. Justifique.
b) Desafio. Resolva as integrais anteriores:

Fonte:Elaborada pelo autor

4.7 Lição 7: Ideias gerais sobre a técnica de integração por partes

Retomamos inicialmente desenvolvendo com a turma uma sistematização de resultados anteriormente estudados sobre a técnica de integração por substituição simples, elaborando o slide da Figura 47 e introduzimos as discussões sobre a integração por partes a partir do slide da Figura 50.

Figura 47 - Slide 1

LIMITAÇÃO DA TÉCNICA DA SUBSTITUIÇÃO

Apesar de serem aparentemente semelhantes as integrais indefinidas $\int xe^{x^2}dx$ e $\int xe^{x}dx$ não podem ser resolvidas utilizando-se os mesmos procedimentos. Justifique.

I) Para calcular a integral $\int xe^{x^2}dx$

fazemos $u = x^2$, temos $du = 2xdx \Rightarrow \frac{du}{2} = xdx$

Assim, $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{u}du = \frac{1}{2}e^{u} + C$

retornando à variável x temos que $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

Os procedimentos não se aplicam ao cálculo da integral $\int xe^{x}dx$. Voltaremos a questão após o conhecimento de uma nova técnica de integração.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 48 - Slide 2

A REGRA DO PRODUTO E A INTEGRAÇÃO POR PARTES

Quando *u* e *v* são funções deriváveis de *x*, a Regra do Produto para derivação nos diz que $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Integrar os dois lados em relação a *x* e rearranjá-los leva à equação da integral

$$\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = \int\left(\frac{d}{dx}(uv)\right)dx - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

$$= uv - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

Apresentando de forma mais simples temos: $\int udv = uv - \int vdu$

Fonte: Elaborada pelo autor

O objetivo foi apresentar a técnica da integração por partes como importante na resolução de integrais onde a técnica da substituição simples não funciona, através de exemplos introdutórios E1 e E2 da Figura 49, a fim de atingirmos rapidamente a compreensão dos procedimentos usados na aplicação da técnica e deixando claro que o domínio da técnica necessita de prática e dos conhecimentos das regras básicas de cálculo diferencial e integral estudados anteriormente.

Figura 49 - Slide 3

E1: Podemos calcular $\int xe^x dx$ aplicando a nova fórmula obtida:

fazendo $u = x \Rightarrow du = dx$

e $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

e usando a fórmula temos $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

E2:Calcule $\int x\cos x dx$

Solução: Usamos a fórmula $\int udv = uv - \int vdu$

com $u = x$, $dv = \cos x dx$

Para completar a fórmula, tomamos a diferencial de *u* e achamos a primitiva mais simples de cos *x*.

$du = dx$, $v = senx$

Então,

$$\int x\cos x dx = xsenx - \int senxdx = xsenx + \cos x + C$$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 50 - Slide 4

ROTEIRO PARA INTEGRAÇÃO POR PARTES

O objetivo principal da integração por partes é escolher u e dv para obter uma nova integral que é mais fácil de calcular do que a original. Não há regras imediatas e precisas para isso.

Uma estratégia que geralmente funciona é escolher u e dv de tal modo que u fique "mais simples" ao derivar, enquanto dv seja fácil integrar e obter v.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ampliamos os conhecimentos através dos exemplos E3 e E4 da Figura 51. Esclarecemos, porém, que assim como a técnica da substituição simples, esta técnica apresenta suas limitações.

Figura 51 - Slide 5

E3: Resolva os exemplos seguintes como fixação:

a) $\int x\,\mathrm{sen}(2x)\,dx$ b) $\int x^3 \ln(x)\,dx$

E4: Algumas vezes é preciso usar a técnica de integração por partes mais de uma vez. Resolva as integrais seguintes:

a) $\int x^2 e^x\,dx$ b) $\int 2x^3\,\mathrm{sen}(x)\,dx$

Fonte: Elaborado pelo autor

4.8 Lição 8: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre a técnica de integração por partes

Objetivando ampliar os conhecimentos acerca dos procedimentos adotados na aplicação da técnica da integração por partes, apresentamos alguns exemplos a serem resolvidos pelos alunos, alertando sobre quais funções compõem o integrando, estimulando-os a refletir sobre essas diferentes funções e sobre qual seria a escolha apropriada para u e dv em cada caso. Preparamos os exemplos introdutórios e ampliadores EC16 da Figura 52, EC17 da Figura 53, EC18 da Figura 54 e apresentamos um exemplo sistematizador EC19 da Figura 55, que visa formalizar as reflexões dos exemplos anteriores.

Figura 52 - Exercício complementar 16

EC16) A integral do tipo $\int \ln x dx$ não é imediata, necessita a aplicação da técnica de integração por partes para a sua resolução. Da mesma forma, quando temos integrais que envolvem o produto de função **algébrica** por **logarítmica**, aplicamos a técnica de integração por partes. Use esta técnica e resolva as integrais abaixo. **Dica: A escolha de dv=lnxdx não é adequada**
b) $\int \ln x dx =$ b) $\int x \ln x dx$ c) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 53 - Exercício complementar 17

EC17) Observe as integrais seguintes envolvendo o produto de função **trigonométrica** por função **algébrica**. Você já sabe que derivadas de funções algébricas são, na maioria das vezes, mais simples que derivadas de funções trigonométricas. Procure fazer a escolha adequada para u e dv e resolva as integrais. **Dica:** Algumas vezes precisamos **repetir a técnica de integração por partes** para resolver uma integral. a) $\int x^2 \cos(x) dx$ b) $\int 4x^2 sen(x) dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 54 - Exercício complementar 18

EC18) Nas integrais que envolvem o produto de função **exponencial** por função **algébrica**, a escolha de dv mais adequada será a exponencial, pois, pela fórmula de integração de exponencial $\int e^u du = e^u + C$ e escolhendo u como a função algébrica, sua diferencial será mais simples.

Faças as escolhas adequadas de u e dv e calcule as integrais seguintes.

a) $\int xe^x dx$ b) $\int 2x^3 e^x dx$ (Sugestão: ver dica do EX17)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 55 - Exercício complementar 19

EC19 - Baseando-se nas integrais já resolvidas aplicando a técnica de integração por partes, observe a tabela e faça a sugestão da escolha de u e dv, para aplicação da técnica de integração por partes.

Integral	u	Dv
I) $\int(\text{algébrica})(\text{logarítmica})dx$		
II) $\int(\text{algébrica})(\text{exponencial})dx$		
III) $\int(\text{algébrica})(\text{logarítmica})dx$		

Obs: Uma estratégia útil para escolher u e dv quando o integrando envolve o produto de duas funções de dois tipos diferentes da lista seguinte, é escolher **u** como a função que ocorre antes na lista e **dv** como o restante do integrando: **L**ogarítmica, trigonométrica **I**nversa, **A**lgébrica, Trigonométrica, **E**xponencial. O acrônimo **LIATE** ajuda a lembrar a ordem.

De acordo com o método apresentado anteriormente, procure resolver as integrais:

a) $\int x^2 \ln(3x)dx$ b) $\int x \sec^2(x)dx$ c) $\int e^x \cos(x)dx$ (veja a dica do EC17)

d) $\int e^x \cos(x)dx$ (inverta a escolha feita obedecendo o método do LIATE, e veja se é possível resolver a mesma integral)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a lição ampliando e desafiando através do EC20 da Figura 56.

Figura 56 - Exercício complementar 20

EC20 - Podemos encontrar integrais que necessitam a aplicação de mais de uma técnica na sua resolução. Aplicando a técnica de integração por partes e a técnica da substituição simples, resolva as integrais.

a) $\int xe^{-2x}dx$ b) $\int x\cos(2x)dx$ c) $\int x^2 sen(3x)dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

4.9 Lição 9: ideias gerais sobre integral definida, teorema fundamental do cálculo e aplicação das integrais ao cálculo de áreas

Considerando os alunos com os quais foi desenvolvida a pesquisa, julgamos que seria razoável uma abordagem menos rigorosa do ponto de vista de um trabalho com teoremas e demonstrações dos resultados relacionados a Integral definida e ao Teorema Fundamental do Cálculo. Os slides das Figuras 57 a 59 retomam conceitos já abordados.

Figura 57 - Slide 1

RETOMANDO IDEIAS

Suponha que a função f seja contínua e não-negativa no intervalo [a,b] e que R denote a região delimitada inferiormente pelo eixo x, lateralmente pelas retas verticais x=a e x=b e superiormente pela curva y =f(x)

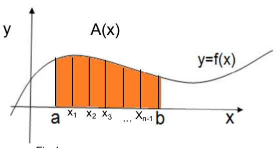
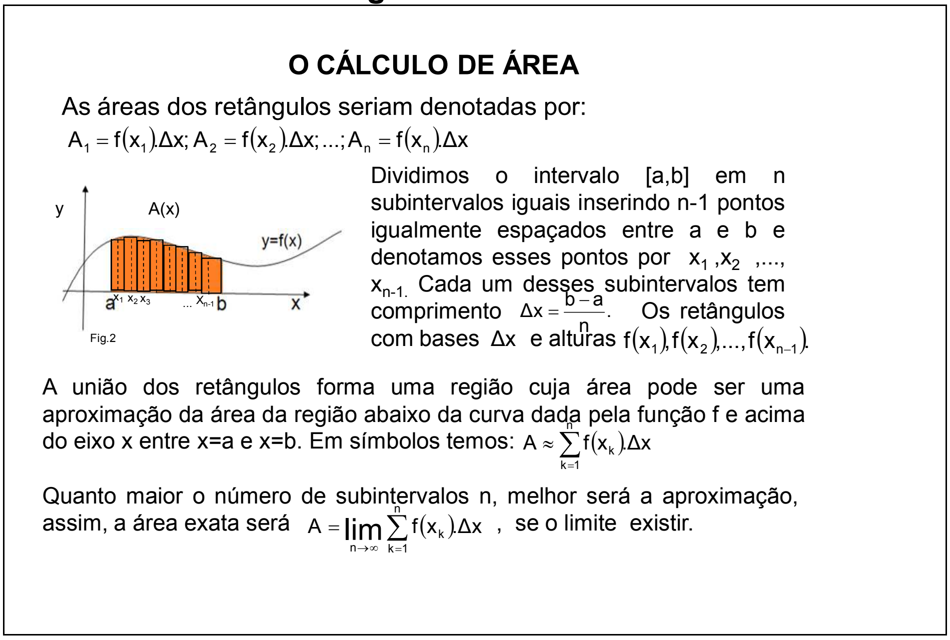


Fig.1

Dividimos o intervalo [a,b] em n subintervalos iguais inserindo n-1 pontos igualmente espaçados entre a e b e denotamos esses pontos por $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Cada um desses subintervalos tem comprimento $\Delta x = (b-a)/n$. Os retângulos com bases Δx e alturas $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$.

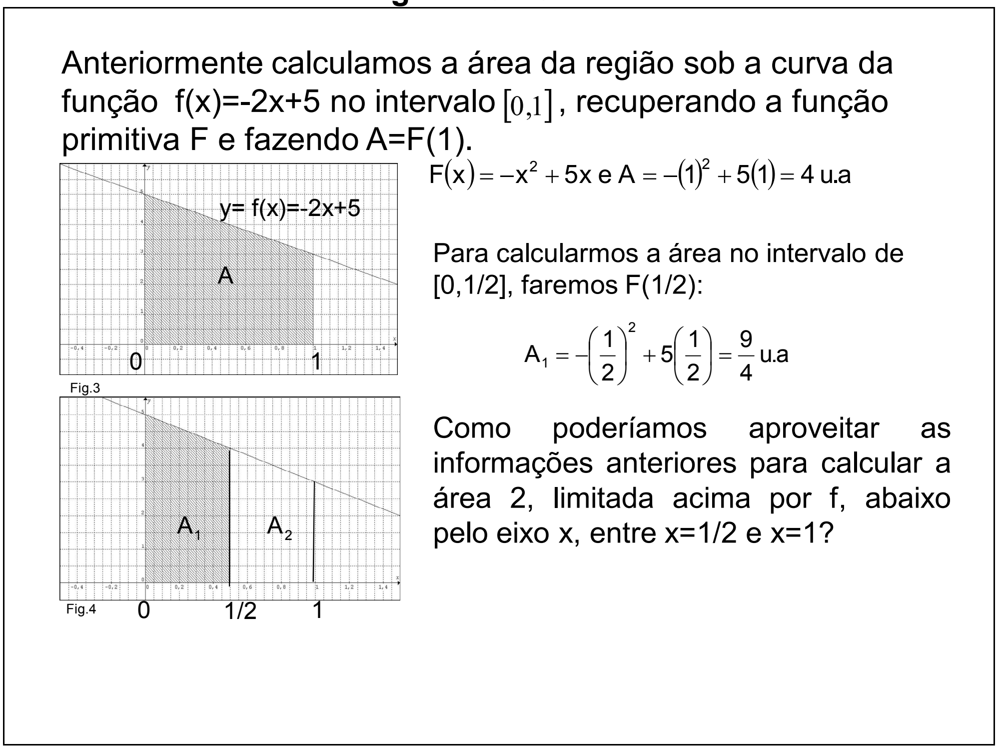
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 58 - Slide 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 59 - Slide 3



Fonte: Elaborada pelo autor

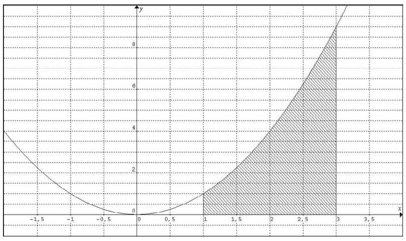
O principal objetivo da Lição 10 foi aplicar as integrais para o cálculo de áreas, visando a um maior interesse e participação dos alunos. Através dos exemplos introdutórios, E1 da Figura 60, E2 da Figura 64 e E3 da Figura 63, apresentamos as principais ideias e procedimentos adotados.

Figura 60 - Slide 4

E1) Calcule a integral definida $\int_1^3 x^2 dx$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ É uma ntegral indefinida de $f(x) = x^2$

$$\int_1^3 x^2 dx = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} + C - C = \frac{26}{3}$$



$$\int_1^3 x^2 dx = = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Esse método contribuiu para os matemáticos Newton e Leibniz, enunciarem um poderoso teorema, importantíssimo no estudo do cálculo, o **teorema fundamental do cálculo**, que possibilita o **cálculo de integrais definidas usando antiderivadas**.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 61 - Slide 5

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Parte 1:
Se f for contínua em [a,b], então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \le x \le b$$

é contínua em [a,b] é diferenciável em (a,b) e g'(x)=f(x).

Parte 2:
Se f for contínua em [a,b], então: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que F'=f.

Veja que, como $2x + 1$ é contínua para qualquer x real, a integral definida

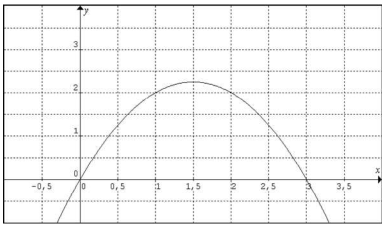
será : $\int_1^3 (2x+1)dx = x^2 + x\Big|_1^3 = \left[(3)^2 + 3\right] - \left[(1)^2 + 1\right] = 12 - 2 = 10$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 62 - Slide 6

E2) Calcule a integral definida $\int_0^2 (-x^2+3x)dx$.

Sabemos que a função $f(x) = -x^2 + 3x$ é definida em todo o conjunto dos reais e podemos observar que é contínua. Temos ainda que, por se tratar de um polinômio, a função é diferenciável qualquer que seja o número real e portanto é diferenciável em(0,2).



Pela parte 2 do TFC, como f é contínua, encontremos qualquer antiderivada de f:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C$$

$$F(2) = -\frac{(2)^3}{3} + 3\frac{(2)^2}{2} + C = -\frac{8}{3} + 6 + C = \frac{10}{3} + C$$

$$F(0) = -\frac{(0)^3}{3} + 3\frac{(0)^2}{2} + C = C$$

Assim, $\int_0^2 (-x^2+3x)dx = F(2) - F(0) = \frac{10}{3} + C - C = \frac{10}{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 63 - Slide 7

E3) Calcule a integral definida $\int_0^{\pi} \text{senx}dx$.

Encontramos a antiderivada de senx, calculamos os valores das antiderivadas nos limites superior e inferior e aplicamos a segunda parte do TFC.

$$\int_0^{\pi} \text{senx}dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = [-\cos\pi] - [-\cos 0] = [-(-1)] - [-(1)] = 2$$

$$\int_0^{\pi} \text{senx}dx = 2$$

Fonte: Elaborada pelo autor

4.10 Lição 10: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre a integral definida, o teorema fundamental e cálculo de áreas

Figura 64 - Exercício complementar 21

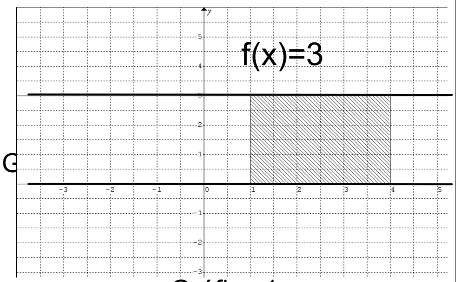
<table>
<tr>
<td>


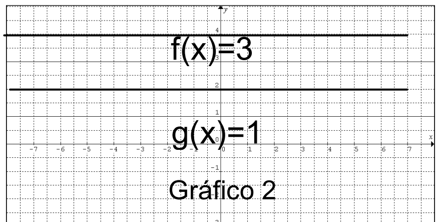
Gráfico 1
</td>
<td>
EC21 - A representação gráfica ao lado refere-se à região plana delimitada por f(x)= 3, x=1 e x=4. Calculando a integral definida da função dada no intervalo [1;4], teremos: $\int_1^4 3dx = 3x\Big|_1^4$ =3.(4)-3.(1)=12-3=9. Observe que a integral definida representa a área do retângulo limitado por x=1, x=4, f(x)=3 e o eixo x.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


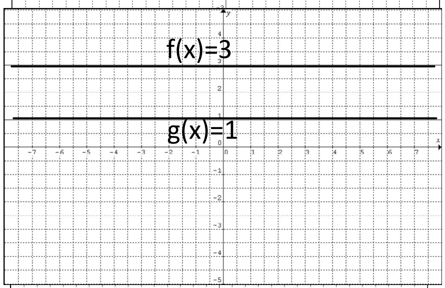
Gráfico 2


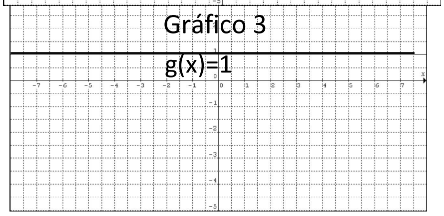
Gráfico 3


Gráfico 4
</td>
<td>
EC22 - Observando o gráfico das curvas f(x)=3 e g(x)=1, faça o que se pede:
g) No gráfico 2, hachure a região cuja área é dada pela integral $\int_2^6 f(x)dx$.
h) No gráfico 3, hachure a região cuja área é dada pela integral $\int_2^6 g(x)dx$.
i) Represente no gráfico 4 a região entre as duas curvas dadas pelas funções **f** e **g** no intervalo $2 \le x \le 6$.
j) Usando $\int_2^6 f(x)dx$ e $\int_2^6 g(x)dx$ estabeleça uma expressão matemática que represente a área da região especificada no item c.
k) é possível expressar a área do item c através de **uma única integral definida**? Qual é essa integral?
l) Redija um pequeno parágrafo registrando suas conclusões sobre o cálculo de áreas entre duas curvas num dado intervalo usando integrais definidas.
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborada pelo autor

Apresentamos a proposta de resolução de uma sequência de exemplos EC21 e EC22 da Figura 64, que desempenham o papel de introdutórios, ampliadores e sistematizadores, a fim de possibilitar aos alunos a construção de conceitos e procedimentos que serão aplicados posteriormente em exemplos mais complexos.

Figura 65 - Exercício complementar 23

EC23 - Supondo $\int_{-2}^{1} f(x)dx = M$, $\int_{1}^{3} f(x)dx = N$ e $\int_{3}^{5} f(x)dx = P$, calcule:

a) $\int_{-2}^{1} 2f(x)dx =$ b) $\int_{1}^{3} \frac{f(x)}{4}dx =$ c) $\int_{-2}^{5} f(x)dx =$

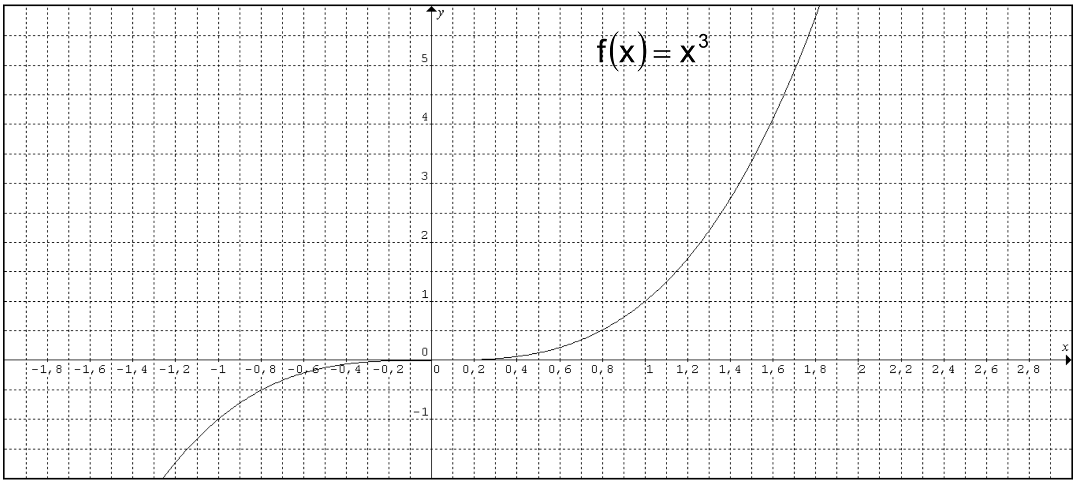
Fonte: Elaborada pelo autor

Através dos exemplos introdutórios e sistematizadores que compõem o EC23 da Figura 65, desejamos fixar e sistematizar propriedades da integral definida.

Com o exemplo ampliador e retificador EC24 da Figura 66 pretendemos que os alunos compreendam que nem toda integral corresponde a uma área. Queremos ainda, que percebam que quando a função possui uma representação gráfica abaixo do eixo x, a integral nesse intervalo resulta num valor negativo, que, em módulo, é igual ao valor da área. Com este exemplo, objetivamos discutir os procedimentos usados para calcular áreas através de integral definida. Apresentamos situações que a integral fornecerá o valor da área e outros que não fornecerá o valor da área, provocando discussões importantes.

Figura 66 - Exercício complementar 24

EC24 - Observe a representação gráfica da função $f(x) = x^3$ e responda:



a) Calcule a integral definida $\int_{-1}^{0} f(x)dx$. O valor da integral pode ser a área limitada entre a curva e o eixo x no intervalo [-1,0]?

b) Calcule a integral definida $\int_{0}^{2} f(x)dx$. O valor da integral pode ser a área limitada entre a curva e o eixo x no intervalo [0,2]?

c) Calcule a integral definida $\int_{-1}^{2} f(x)dx$. O valor da integral pode ser a área limitada entre a curva e o eixo x no intervalo [-1,2]?

Estabeleça uma expressão matemática que represente a área da região entre $f(x) = x^3$, x=-1, x=2 e o eixo x.

Fonte: Elaborada pelo autor

Objetivando retomar procedimentos os exemplos desafiadores EC25 da Figura 67 foram apresentados. Retomam algumas técnicas de integração e fixam os procedimentos vistos em integral definida.

Figura 67 - Exercício complementar 25

EC25 - Use as técnicas de integração já estudadas e calcule as integrais definidas:

a) $\int_{0}^{2} \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$ b) $\int_{0}^{\ln 3} e^x.(1+e^x)^2 dx$ c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} x\cos(2x)dx$ d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Através do exemplo ampliador e sistematizador EC26 da Figura 68, pretendemos provocar discussões acerca da composição do integrando adequado para a obtenção da área destacada.

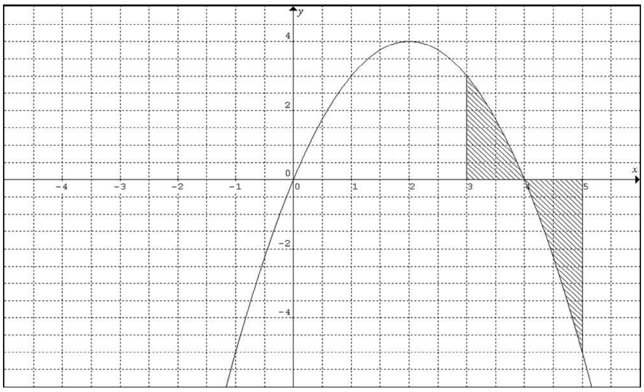
Figura 68 - Exercício complementar 26

EC26 - É possível calcular a área da região limitada por uma curva e o eixo x num intervalo $a \leq x \leq b$, usando integrais.

A representação gráfica abaixo refere-se à função $y = -x^2 + 4x$.

a) Escreva uma expressão envolvendo integrais que forneça a área da região sombreada.

b) Calcule o valor da área em destaque.



Fonte: Elaborada pelo autor

4.11 Lição 11: ideias gerais sobre o cálculo de volumes através das integrais

Através da Lição 11, pretendemos fornecer as noções gerais sobre os procedimentos usados para calcular o volume de sólidos obtidos por rotação ou não, dando uma maior ênfase aos sólidos obtidos por rotação de uma região plana R, em torno dos eixos x e y, ou em torno de um eixo qualquer, paralelo aos eixos coordenados.

Para atingir nossos objetivos, resgatamos as ideias já apresentadas no cálculo de áreas e estendemos as noções ao cálculo de volumes, a partir dos slides da Figura 69 e 70. Um exemplo sistematizador E1 foi apresentado na Figura 71, objetivando possibilitar um entendimento da expressão $\int_a^b A(x)dx$, usada para o cálculo do volume de um sólido que se estende ao longo de um eixo; eixo x, por exemplo, num intervalo de [a,b]. Nesse caso A(x) representa a área das secções perpendiculares obtidas ao longo do intervalo considerado e dx a altura destas secções.

Figura 69 - Slide 1

RELEMBRANDO PROCEDIMENTO IMPORTANTES

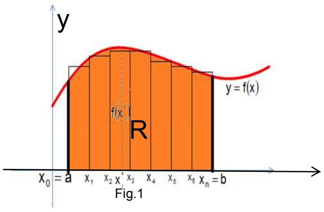


Fig.1

Lembramos que o princípio básico para encontrar a área de uma região plana R é dividir a região em retângulos com comprimentos cada vez menores, agrupar os retângulos para formar uma aproximação da região que queremos encontrar. Formar uma **soma de Riemann** com a área desses retângulos e calculamos o limite, obtendo uma integral definida que representa a área região R.

$\sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$ Soma de Riemann

$$A_R = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$$

$A_R = \int_a^b f(x)dx$ Integral definida de a para b da função f

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 70 - Slide 2

CÁLCULO DE VOLUMES

Sob condições apropriadas, a mesma estratégia usada para calcular áreas pode ser usada para calcular volumes. A ideia é dividirmos o sólido em fatias finas, aproximar o volume de cada fatia, somar as aproximações para formar uma soma de Riemann e passar ao limite para obter uma integral definida que nos forneça o volume.

Para começarmos, consideremos um cilindro gerado pela translação de uma região A ao longo de uma distância h, então dizemos que h é a altura do cilindro e o volume V deste é definido por

$$v = A.h = [\text{área de uma seção transversa l}]x[\text{altura}]$$

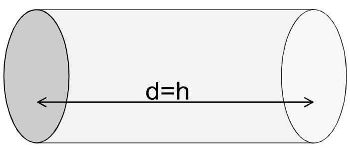
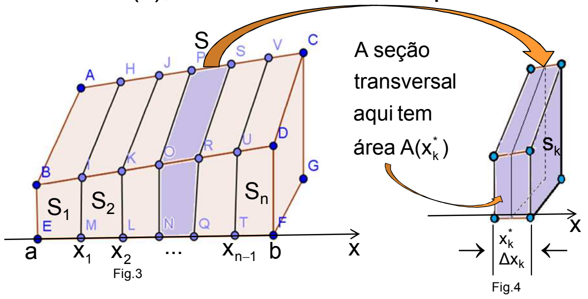


Fig.2

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 71 - Slide 3

E1) Seja S um sólido que se estende ao longo do eixo x e que é delimitado à esquerda e à direita, respectivamente, pelos planos perpendiculares ao eixo x em x=a e x=b. Vamos encontrar o volume V do sólido, supondo que sua seção transversal tenha área A(x), conhecida em cada ponto x do intervalo [a,b].



Somando as aproximações obtemos a soma de Riemann que aproxima o volume V:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x$$

Tomando limite quando n cresce e as extensões tendem a zero, obtemos a integral definida

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b A(x)dx$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 72 formalizamos as ideias gerais para ampliarmos através de exemplos.

Figura 72 - Slide 4

Resultados Importantes

1ª Fórmula para o volume Seja S um sólido delimitado por dois planos **perpendiculares ao eixo x em x=a e x=b**. Se, para cada x em [a,b], a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x for **A(x)**, então o volume do sólido é

$$V = \int_a^b A(x)dx \quad \text{desde que } A(x) \text{ seja integrável.}$$

2ª Fórmula para o volume Seja S um sólido delimitado por dois planos **perpendiculares ao eixo y em y=c e y=d**. Se, para cada y em [c,d], a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo y for **A(y)**, então o volume do sólido é

$$V = \int_c^d A(y)dy \quad \text{desde que } A(y) \text{ seja integrável.}$$

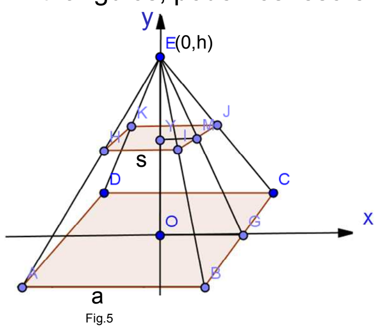
Fonte: Elaborada pelo autor

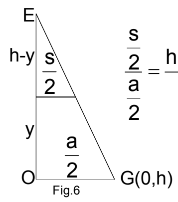
Através da Figura 72, sistematizamos os procedimentos apresentados, refletindo sobre estes procedimentos objetivamos facilitar a aplicação de conceitos e procedimentos ao cálculo de volumes de sólidos obtidos por rotação de uma região plana em torno de um dos eixos cartesianos e posteriormente em torno de eixos paralelos aos eixos cartesianos.

No exemplo E2 das Figuras 73 e 74, objetivamos apresentar o volume de uma pirâmide usando os procedimentos discutidos no E1.

Figura 73 - Slide 5

E2) Vejamos uma pirâmide de base quadrada com aresta da base a, e altura h. Introduzimos um sistema retangular de coordenadas no qual o eixo y passa pelo ápice, o eixo x passa pela base e é paralelo a um de seus lados.
Em qualquer ponto y de [0,h] sobre o eixo y, a seção transversal perpendicular ao eixo y é um quadrado. Se s for o comprimento de um lado desse quadrado, então, por semelhança de triângulos, podemos escrever:





$$\frac{\frac{s}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{h-y}{h} \text{ ou } s = \frac{a}{h}(h-y)$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 74 - Slide 6

Assim, a área A(y) da seção transversal em y é $A(y) = s^2 = \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2$

E o volume é dado por $V = \int_0^h A(y)dy$, fazendo as devidas trocas e operações temos:

$$V = \int_0^h A(y)dy = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2 dy = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2 dy = \frac{a^2}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-y)^3\right]_0^h$$

$$V = -\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{h^2}\left[(h-y)^3\right]_0^h = -\frac{a^2}{3h^2}\left[(h-h)^3 - (h-0)^3\right] = \frac{1}{3}a^2.h$$

Verificamos que o volume é 1/3 da área da base vezes a altura.
Esse resultado já era esperado?

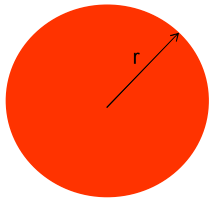
Fonte: Elaborada pelo autor

Recordamos os conceitos básicos relacionados ao cálculo de área do círculo e volume de cilindro para apresentarmos as ideias gerais sobre o cálculo do volume dos sólidos obtidos pela rotação.

Figura 75 - Slide 7

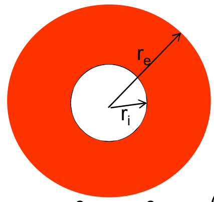
RECORDANDO RELAÇÕES IMPORTANTES

Círculo ou disco “c”

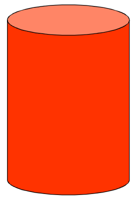


$A_c = \pi r^2$

Coroa circular ou anel “cc”



$A_{cc} = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi\left(r_e^2 - r_i^2\right)$

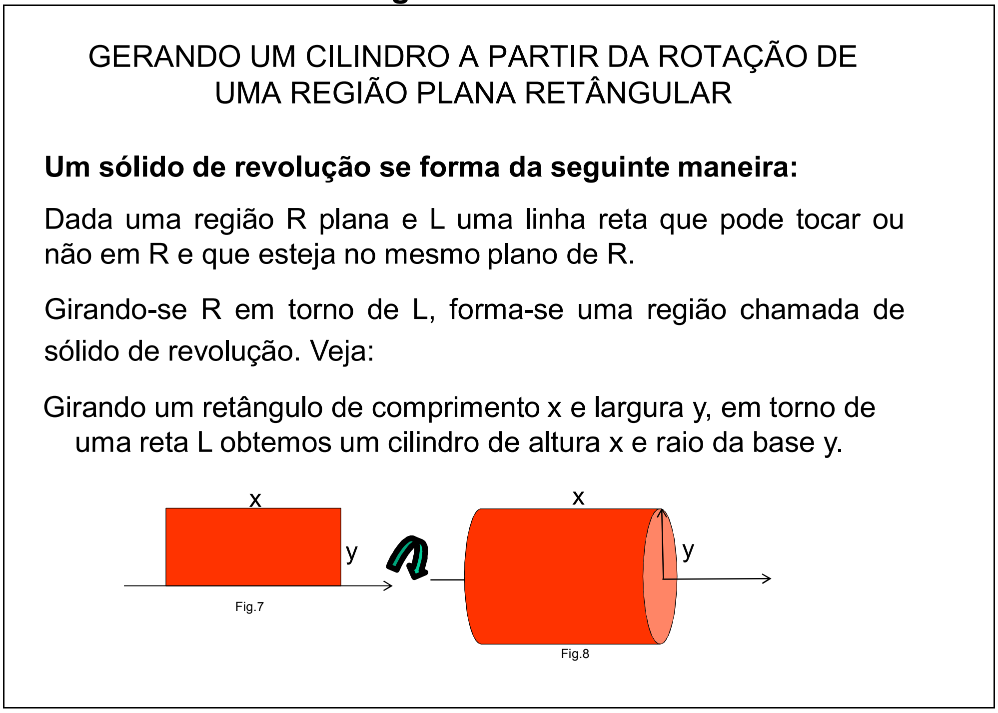


Cilindro

$V_{ci} = \pi r^2 h$

Fonte: Elaborada pelo autor

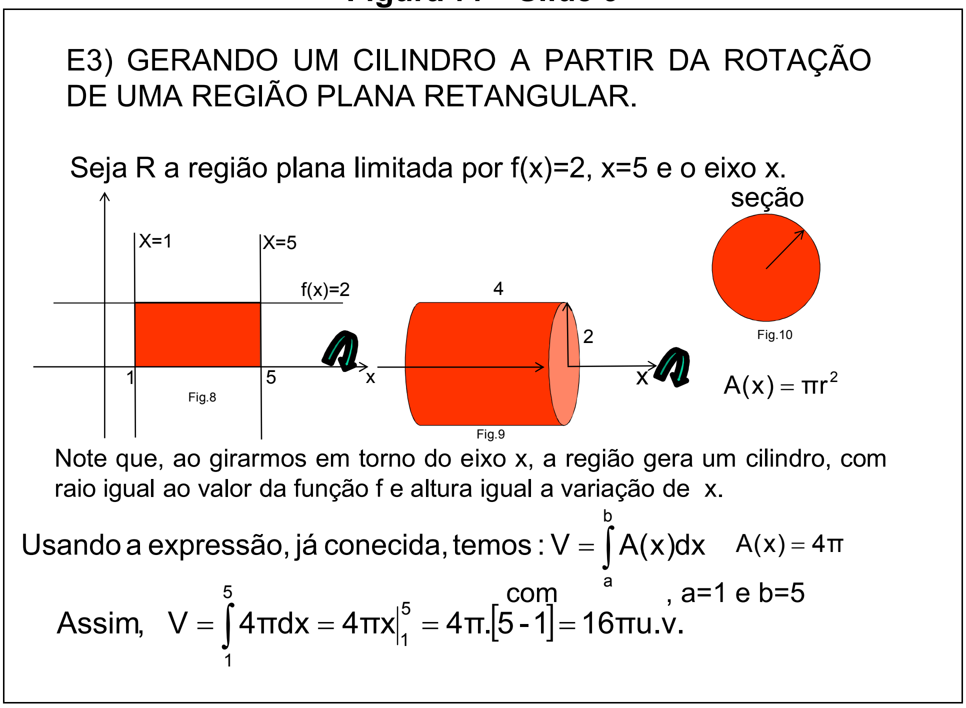
Figura 76 - Slide 8



Fonte: Elaborada pelo autor

Apresentamos os exemplos introdutórios E3 através das Figura 77 e 78 e E4 na Figura 79.

Figura 77 - Slide 9

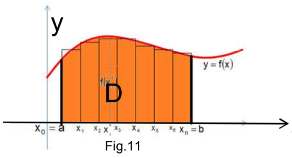


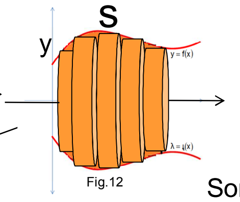
Fonte: Elaborada pelo autor

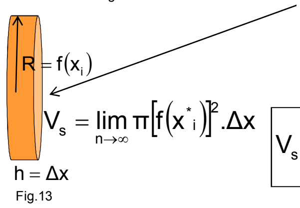
Figura 78 - Slide 10

VOLUME OBTIDO PELA ROTAÇÃO DE UMA REGIÃO PLANA EM TORNO DO EIXO X

Seja D a região plana esboçada na figura 11. Quando cada um dos pequenos retângulos são girado em torno do eixo x, geramos pequenos cilindros. A soma dos volumes de cada cilindro gerado aproxima o volume da região D. Formando uma soma de Riemann com todos os volumes e tomando limite para formar uma integral definida, encontraremos o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x.







$R = f(x_i)$

$h = \Delta x$

$V_1 = \pi[f(x_1)]^2.\Delta x$

$V_2 = \pi[f(x_2)]^2.\Delta x$

.
.
.

$V_i = \pi[f(x_i)]^2.\Delta x$

Soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} \pi[f(x^*_i)]^2.\Delta x$

$V_s = \lim_{n\to\infty} \pi[f(x^*_i)]^2.\Delta x$

$\boxed{V_s = \pi\int_a^b [f(x^*_i)]^2.\Delta x}$

Assim $\boxed{V_s = \pi\int_a^b [f(x)]^2.dx}$

Fonte: Elaborada pelo autor

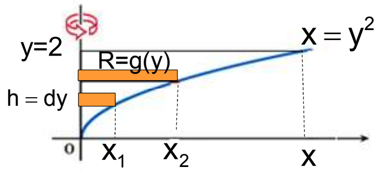
Figura 79 - Slide 11

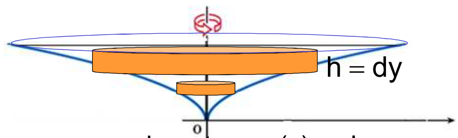
VOLUME OBTIDO PELA ROTAÇÃO DE UMA REGIÃO PLANA EM TORNO DO EIXO Y

E4) Vamos calcular o volume do sólido gerado pela rotação da região plana limitada por $y = \sqrt{x}$, y=2 e x=0 é girada em torno do eixo y.

$\text{Raio} = g(y) \Rightarrow R = y^2$

$\text{altura} = \Delta y \Rightarrow h = dy$





Cada um dos retângulos inscritos, com comprimento r=g(y) e largura h=dy, ao girar em torno do eixo y, gera um cilindro, com raio r e altura h. Sabemos que uma integral definida $V = \int_c^d A(y)dy$ nos fornece o volume do sólido gerado, e que a área A(y) é:

$$A(y) = \pi[(y^2)]^2$$

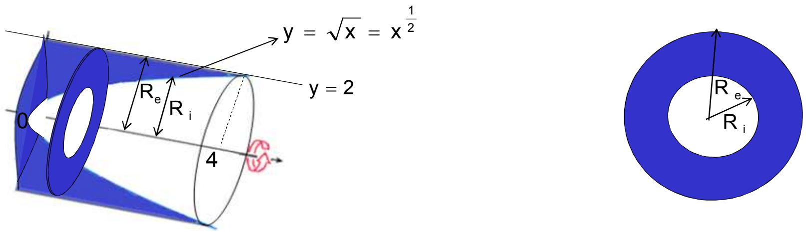
$$V_s = \pi\int_0^2 y^4 dy = \pi \left.\frac{y^5}{5}\right|_0^2 = \frac{\pi}{5}[(2)^5] = \frac{32\pi}{5} \text{u.v.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Os exemplos ampliadores E5 da Figura 80, E6 da Figura 81 e E7 da Figura 82 objetivaram apresentar as variações necessárias, fornecendo meios para generalizarmos o método do disco e da coroa-circular.

Figura 80 - Slide 12

E5) Qual é o volume do sólido gerado pela rotação da região anterior em torno do eixo eixo x?



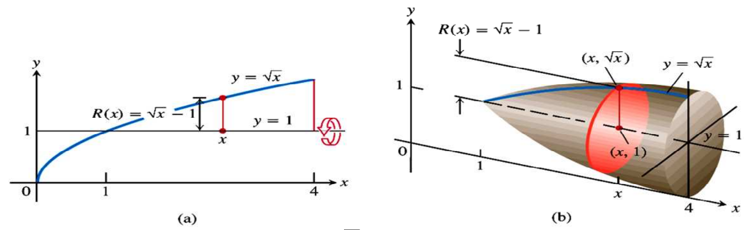
$$V_s = \pi\int_0^4 \left[2^2 - [f(x)]^2\right]dx = \pi\int_0^4 \left[4 - [x^{\frac{1}{2}}]^2\right]dx = \pi\int_0^4 [4 - x]dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 \pi$$

$$V_s = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 \pi = \left[4.4 - \frac{4^2}{2}\right]\pi = [16 - 8]\pi = 8\pi \text{u.v.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 81 - Slide 13

Ex6) Seja D a região limitada por $y = \sqrt{x}$, y=1 e x=4. Escreva a integral que nos forneça o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno de y=1.



Nesse caso, o raio será $R = \sqrt{x} - 1$, assim, pela fórmula de volume temos:

$$V_s = \pi\int_1^4 \left[\sqrt{x} - 1\right]dx = \pi\int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right]dx = \pi\int_1^4 \left[x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1\right]dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x\right]_1^4$$

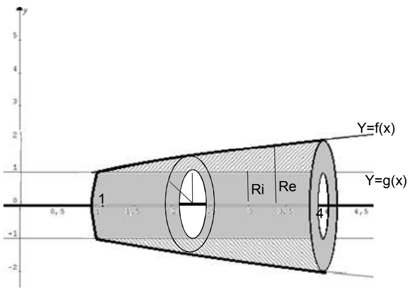
$$V_s = \pi\left[\left(\frac{4^2}{2} - \frac{4(4)^{\frac{3}{2}}}{3} + 4\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{4(1)^{\frac{3}{2}}}{3} + 1\right)\right] = \frac{7\pi}{6} \cong 3{,}66 \text{u.v.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 82 - Slide 14

E7) Seja D a região limitada por $f(x)=\sqrt{x}$, g(x)=1 e x=4. Escreva a integral que nos forneça o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno do eixo x.

Re=f(x) Ri=g(x)



Como o sólido apresenta superfície interna, seu volume será a diferença entre o volumes, e pode ser calculado diretamente com a integral:

$$V_s=\pi\int_1^4\left[[\sqrt{x}]^2-[1]^2\right]dx=$$

$$V_s=\pi\int_1^4\left[[x-1]\right]dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4=\frac{9}{2}\pi u.v.$$

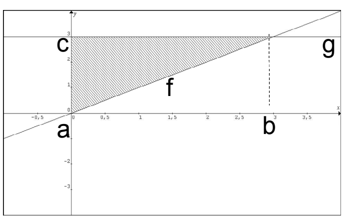
Fonte: Elaborada pelo autor

Apresentamos, então, alguns slides (Figuras 83 e 84), com o objetivo de possibilitar a sistematização e generalização dos procedimentos trabalhados no cálculo de volumes.

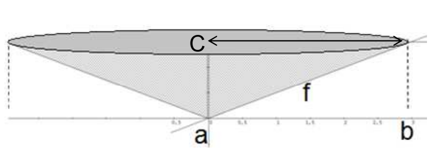
Figura 83 - Slide 15

GENERALIZANDO PROCEDIMENTOS IMPORTANTES

Seja a região plana D, sombreada, limitada pelas funções f, g e pelo eixo y, representada na figura.



Girando a região plana D, em torno do eixo y, obtemos um sólido, cujo volume será dado por:

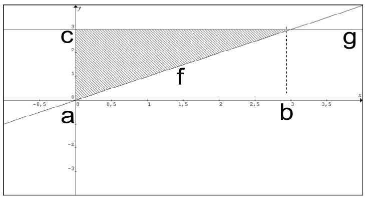


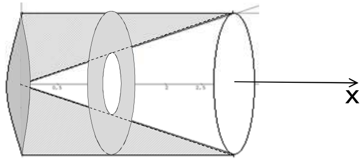
$$V_s=\pi\int_a^c\left[[f(y)]^2\right]dy$$

Fonte: Elaborada pelo autor

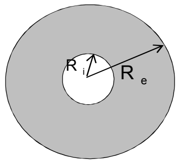
Figura 84 - Slide 16

Girando a região plana D em torno do eixo x, obtemos um sólido que possui superfícies internamente, seu volume será dado por:





$$V_s = \pi \int_a^b \left[[g(x)]^2 - [f(x)]^2 \right] dx$$



Fonte: Elaborada pelo autor

4.12 Lição 12: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre o cálculo de volumes através das integrais

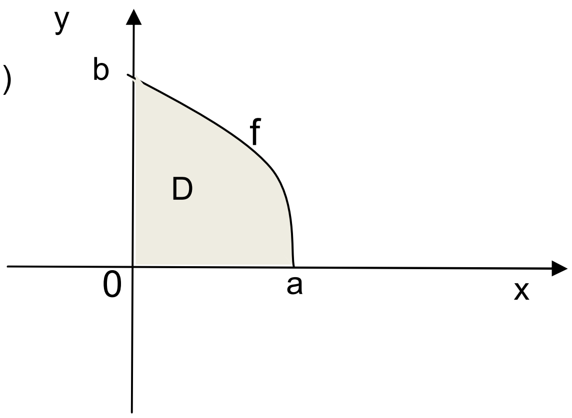
Através dos exemplos sistematizadores EC27 da Figura 85, pretendemos fortalecer importantes procedimentos e esclarecer quaisquer dúvidas ainda presentes no uso de integrais para calcular volumes.

Com os exemplos introdutórios e ampliadores do EC28 Figura 86 e EC29 da Figura 87 pretendemos desenvolver e fixar os procedimentos visto genericamente pelo EC27.

Figura 85 - Exercício complementar 27

EC27) Seja D a região plana sombreada. Escreva uma integral que represente o volume do sólido obtido em cada caso:

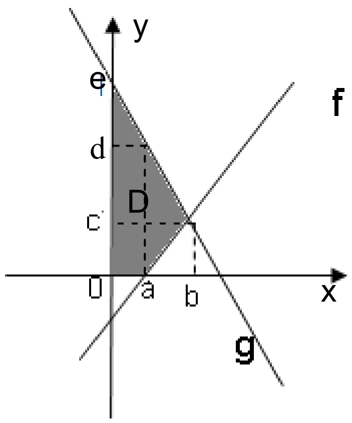
a)



I) Girando D em torno do eixo x:

II) Girando D em torno do eixo y.

b)



I) Girando D em torno do eixo y.

II) Girando D em torno do eixo x.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 86 - Exercício complementar 28

EC28 - Represente no sistema cartesiano a região D, limitada por $f(x) = -x + 2$, o eixo x e o eixo y.

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região D, em torno:

a) do eixo x | b) do eixo y

c) da reta x= -1 | d) da reta x=3

e) da reta y=-1 | f) da reta y=3

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 87 - Exercício complementar 29

EC29 - Faça a representação gráfica da região limitada por $y=x^2$, $x=3$ e o eixo x, em seguida calcule: a) O volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo x. b) O volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo y.

Fonte: Elaborada pelo autor

Através dos exemplos introdutórios e diagnosticadores EC30 da Figura 88 e EC31 da Figura 89, pretendemos verificar se ficou compreendido que nem todo sólido é obtido por rotação em torno de um eixo. Pretende com estes exemplos esclarecer que os sólidos obtidos por rotação compreendem uma aplicação do procedimento geral que adotamos na apresentação dos exemplos EC30 e EC31.

Figura 88 - Exercício complementar 30

EC30 - Um sólido S se estende ao longo do eixo x de $x=1$ até $x=3$. Para x entre 1 e 3, a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x é $3x^2$. a) Escreva uma integral que representa o volume de S. b) Qual o valor do volume do sólido S?

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 89 - Exercício complementar 31

EC31 - Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ cujas seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.

Fonte: Elaborada pelo autor

O EC32 da Figura 90 visa ampliar e sistematizar os procedimentos aprendidos. No exemplo desafiador EC33 da Figura 91, pretendemos que o aluno movimente recursos para representar a região não muito comum e após esta representação calcule o volume do sólido obtido. Com o exemplo sistematizador e desafiador EC34 da Figura 92, possibilitamos, primeiramente, um retorno aos procedimentos aplicados anteriormente e, consequentemente uma reflexão sobre estes procedimentos e conduzimos os alunos a uma organização mental, categorizando os exemplos, conforme os procedimentos adotados.

Figura 90 - Exercício complementar 32

EC32 - Qual o volume do sólido obtido pela rotação da região plana limitada abaixo por $y=x^2$, acima por $y=9$ e à esquerda pelo eixo y , girando em torno: a) do eixo y; b) do eixo x; c) de $y= -1$ d) de $x= -1$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 91 - Exercício complementar 33

EC33 - Seja a região plana D, limitada por $y=x^{3/2}$, $y=1$ e $x=3$. Crie exemplos de sólidos rotacionando a região plana D, em torno de um eixo, de forma que: a) A seção transversal ao eixo de rotação seja um disco; b) A seção transversal ao eixo de rotação seja uma coroa circular.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 92 - Exercício complementar 34

EC34 - Entre os exercícios resolvidos: a) Quais aqueles em que a seção transversal em relação ao eixo de rotação é um disco? b) Quais aqueles em que a seção transversal em relação ao eixo de rotação é uma coroa circular? c) Quais os que não são exemplos de sólidos de revolução.

Fonte: Elaborada pelo autor

No EC33, desafiamos os alunos a elaborar exemplos gerados pela rotação da região em torno de um eixo, formando sólidos, cujas seções perpendiculares aos eixos x e y são discos ou coroas circulares.

Finalizamos a Lição 12 com um exemplo sistematizador, desafiador e diagnosticador. Estes exemplos visam que através da reflexão o aluno seja levado a sistematizar os procedimentos aplicados em todos os exemplos, apontando entre eles os que são sólidos de rotação e os que não são; entre os de rotação, quais os que têm secção representando discos e quais representam coroa circular.

4.13 Avaliações

Apresentamos a seguir sugestões de avaliações (Figuras 93 e 94), abordando as primeiras ideias sobre integrais, integral indefinida, aplicação das técnicas de integração por substituição simples e integração por partes. Essas avaliações podem ser feitas em duplas ou individualmente, de acordo com o contexto em que é conduzido o trabalho.

Propomos ainda que ao final os alunos respondam a um questionário individual sobre o trabalho desenvolvido com o foco no uso de exemplos (Figura 95). Ao expor suas opiniões, os alunos estarão contribuindo para que alterações sejam feitas, possibilitando uma constante reelaboração e ampliação dos exemplos visando a aprendizagem do conteúdo de integrais de funções de uma variável real.

Figura 93 - Primeira avaliação

1) Sabemos que às vezes precisamos aplicar algumas técnicas para facilitar o cálculo de algumas integrais. Use a substituição simples e calcule as integrais

a) $\int 2\text{sen}(x).\cos(x)dx$.　　　b) $\int 3xe^{x^2}dx$

2) Responda as seguintes perguntas:
a) Descreva, em poucas linhas, os procedimentos que você usa para a aplicação da técnica da substituição simples.
b) Verifique se os procedimentos descritos anteriormente possibilitam a resolução das integrais, caso não seja possível, mude para a outra técnica estudada.

I) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x}dx.$　　　II) $\int x^3 \ln(x)dx.$

3) A aplicação das propriedades das integrais pode modificar a expressão, facilitando a resolução através do uso da tabela de integrais. Use as propriedades e consulte a tabela de integração para resolver as integrais indefinidas seguintes.

a) $\int \left[3x^5+3e^x-3x^2+5\text{sen}(x)-2\right]dx$　　　b) $\int \left[\frac{x^2}{3}-2\cos(x)+\frac{3}{x}+2\sec^2(x)-x\right]dx$

4) Muitas vezes, para calcular uma integral, precisamos transformar o integrando, usando identidades trigonométricas ou a fatoração do integrando. Faça as transformações necessárias e calcule as integrais seguintes:

a) $\int \frac{x.\cos^2(x)}{1+\text{cox}(2x)}dx$ (sugestão: $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$)

b) $\int \frac{1}{x^2-6x+9}dx$ (sugestão: fatoração do trinômio quadrado perfeito $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

5) Use seus conhecimentos e calcule as integrais apresentadas a seguir:

a) $\int \left(x^2-\sqrt[3]{x}\right)dx.$　　　b) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$　　　c) $\int xe^{2x}dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 94 - Segunda avaliação

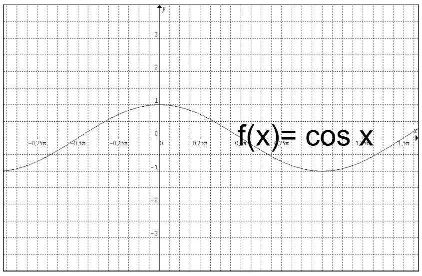
1) Aplicando o teorema fundamental do cálculo, calcule as integrais definidas:

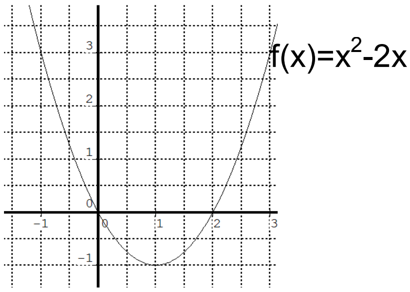
a) $\int_{-1}^{2}\left[4x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x - 1\right]dx$ b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)dx$

2) Algumas integrais definidas do tipo $\int_{a}^{b} f(x)dx$, representam a área sob a curva dada por f, acima do eixo x, entre x=a e x=b.

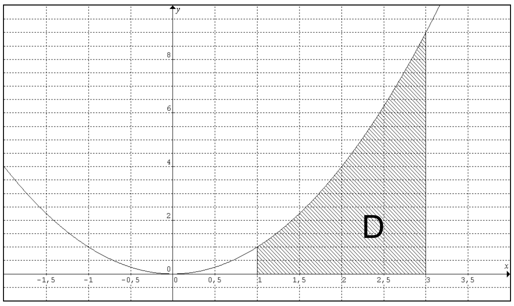
Veja as representações gráficas de algumas funções, calcule as integrais apontadas e verifique se as integrais calculadas correspondem a área.

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ b) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$





3) A região D abaixo, está limitada pela função $f(x) = x^2$, eixo x, x= 1 e x=3. Calcule área da região D.



4) Baseando-se na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D, em torno do eixo x?

5) Com base ainda na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D em torno do eixo y?

(Sugestão: Separe a região em duas regiões usando y=1)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 95 - Questionário avaliativo

Prezados alunos, as questões que serão abordadas não influenciarão no resultado de sua avaliação. O objetivo das questões é avaliar o trabalho realizado durante este curso, possibilitando a você contribuir com sua opinião para uma possível melhora nas atividades e procedimentos. 1) Em relação aos procedimentos usados pelo professor, na exposição e aplicação das atividades desenvolvidas, você avalia em: ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Ótimo 2) Em relação às atividades elaboradas, como você avalia? a) Atividades comuns, normalmente trabalhadas por outros professores e não trouxeram grandes desafios. b) Atividades desafiaram os conhecimentos, possibilitando a abordagem de conceitos e procedimentos aprendidos. c) Atividades interessantes, mas, não me ajudaram no aprendizado. Aponte os motivos. 3) Em relação ao seu aprendizado, durante o curso desenvolvido com a metodologia e atividades propostas: a) Nada aprendi. b) Aprendi como poderia ter aprendido com qualquer outro método. c) Aprendi mais do que aprenderia com métodos já estudados. 4) Descreva uma atividade que foi desenvolvida durante o curso que chamou sua atenção, contribuindo para o seu aprendizado, aponte as características desta atividade. 5) Use o espaço abaixo para redigir qualquer comentário em relação ao trabalho desenvolvido, apontando pontos positivos e negativos.

Fonte: Elaborado pelo autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As “LIÇÕES PARA O ESTUDO DE INTEGRAIS” aqui apresentadas objetivaram promover situações de aprendizagem que possibilitem professores e alunos abordarem importantes temas que fundamentam os cursos de Engenharia e de outros cursos de graduação que têm o Cálculo Integral como parte importante do da formação matemática.

No desenvolvimento dessas lições percebemos a importância da preparação, planejamento e elaboração de um exemplo, refletindo sobre os objetivos que desejamos atingir. Não basta elaborar uma atividade que nos desperta atenção pela sua complexidade, ou nos atrai por qualquer motivo; nossa preocupação é desenvolver habilidades e procedimentos, refletindo sobre esses procedimentos a fim de promover discussões teóricas e práticas, criando estratégias de ensino que podem possibilitar a aprendizagem conceitual.

Esperamos que as lições, elaboradas de forma a enfatizar o uso de diferentes tipos de exemplos, tenham desempenhado o seu papel, provocando os desequilíbrios necessários à construção de conceitos e procedimentos para lidar com integrais, fornecendo meios para que os alunos compreendam o conteúdo de forma significativa. Esperamos ainda que as lições contribuam para outros pesquisadores, apontando possibilidades para a sua prática docente. Certamente as lições poderão ser melhoradas, incorporando novos exemplos, com o mesmo objetivo de incentivar o desenvolvimento de conhecimentos conceituais e procedimentais no ensino de Cálculo Integral.

REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, Carlos A.; CONTRERAS, Luis C.; BLANCO, Lorenzo J. A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. **Zetetiké,** Campinas, v. 17, n. 32, jul./dez., 2009.

FIGUEIREDO, Carlos A.; BLANCO, Lorenzo J. A; CONTRERAS, Luis C. A Exemplificação do conceito de função em quatro professores estagiários. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 8, Dec., p. 23 – 39, 2006.

HIEBERT, James; LEFEVRE, Patrícia. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). **Conceptual and procedural knowledge:** the case of mathematics. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erbaum, 1986, p.1-27.

PINTO, Gisele Teixeira Dias Costa. **Uma proposta para o ensino e aprendizagem de limite de função real**. 2010. 172 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

PORTER, Mary K.; MASINGILA, Joanna O. Examinig the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. **Educational Studies In Mathematics**, Netherlands, v.42, n. 2, p.165-177, mar., 2000.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics teaching***,* London*,* v. 77, p. 20-26, 1976.

WATSON, An.; MASON, J. **Mathematics as a constructive activity**: learners generating examples. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, 2005. p.33-91.