PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Silvimar Fábio Ferreira

UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MAPLE PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

Belo Horizonte
2018

Silvimar Fábio Ferreira

UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MAPLE PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Prof. Dr. João Bosco Laudares

Belo Horizonte

2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Ferreira, Silvimar Fábio

F383u Utilização do software Maple para o cálculo de áreas e volumes / Silvimar Fábio Ferreira. Belo Horizonte, 2018.

73 f.: il.

Orientador: João Bosco Laudares

Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Cálculo diferencial - Estudo e ensino. 2. Cálculo integral. 3. Estratégias de aprendizagem. 4. MAPLE (Programa de computador). 5. Matemática - Ensino auxiliado por computador. I. Laudares, João Bosco. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 517.3

Ficha catalográfica elaborada por Fernanda Paim Brito– CRB 6/2999

Silvimar Fábio Ferreira

UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MAPLE PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Prof. Dr. João Bosco Laudares (Orientador) - PUC Minas

Profa. Dra. Marge da Conceição Ventura Viana - UFOP

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda - PUC Minas

Belo Horizonte, 17 de maio de 2018.

Ao estimado Prof. Dr. Edson Durão Júdice (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, em especial, a todos os Professores que me proporcionaram a realização desta pesquisa.

Ao Professor orientador Dr. João Bosco Laudares, pelo apoio na pesquisa desenvolvida e pelas orientações recebidas.

À minha esposa, filho e netos, pelo apoio incondicional e pelas privações a que se viram submetidos, durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos Professores Dimas Felipe de Miranda, Jonas Lachini, Vanessa Luciene de Assis e Willian Leal, pelo apoio direto ou indireto durante a realização desta pesquisa

Aos membros da banca, de modo especial, por terem lido e analisado o texto desta dissertação.

Aos meus alunos do Curso de Engenharia Mecânica do terceiro período de 2018, da PUC Minas Unidade Contagem, por sua participação na execução das sequências didáticas propostas.

RESUMO

Esta dissertação objetiva trazer uma contribuição para o ensino de cálculo diferencial integral, a partir de um instrumento que auxilia no reconhecimento dos Intervalos de Integração com aplicações no cálculo de áreas e volumes, com a utilização de uma técnica que auxilia a resolução de problemas e a visualização no *software Maple.* Tal proposta pretendeu possibilitar aos estudantes de Cálculo uma compreensão sobre a Integral definida, enfatizando seu alcance na resolução de problemas de aplicações de área e volume. O texto enfocou a determinação dos limites de integração na montagem da Integral Definida. A metodologia utilizada incluiu a pesquisa básica estratégica, a aplicada, a descritiva, a quantitativa, a bibliográfica e a de campo, porque suas características e procedimentos permitiram comparar resultados, levantar e compilar dados, fazer interpretações e chegar a conclusões. Como parte da pesquisa de campo, foram produzidas, organizadas e utilizadas sequências didáticas como estratégias de ensino para o tema proposto. Para isto, utilizou-se o *software Maple* que propiciou a construção e visualização dos Intervalos de Integração, instrumento relevante para a interpretação de resultados. A análise dos dados obtidos revelou maior interação entre os estudantes durante as discussões e interpretações entre as duplas de alunos e o *software Maple* possibilitou questionamentos mais consistentes entre os membros destas duplas e um entendimento mais satisfatório sobre o problema proposto. Concluiu-se que o produto desta pesquisa pode constituir um recurso didático eficiente, uma proposta, para o ensino da Integral Definida.

Palavras-chave: Ensino da Integral Definida. Problemas de área e volume. *Software Maple*. Sequências didáticas.

ABSTRACT

This dissertation aims to bring a contribution to the teaching of integral differential calculus, departing from an instrument which helps in the recognition of the integration intervals with applications in the calculus to find areas and volumes and through the use of a technique which helps in the solution of problems and the visualization in the Maple software. Rsearch proposal intended to possibilitate students of calculus to comprehend definite integral, emphazing its role for the problem-solving process when applied to areas and volumes. The text focused on the determination of the limits of integration in the mounting of the definite integral. The methodology used included the applied research, the descritive, the quantitative ones, the bibliographic and the field researches as their features and procedures allow for the comparison of results, process and gather data, make interpretations and help to reach conclusions. As part of the field research didactic sequences were elaborated, organized and used as strategies for teaching the subject matter. For the teaching of those sequences the Maple software was used because it facilitates the construction and visualization of the intergration intervals, and it constitutes an instrument relevant for interpretining results. Data analysis revealed considerable interaction among students during discussions and interpretations among the pairs of students. The Maple software stimulatated more consistent questions among the members of those pairs and a far more satisfactory understanding of the proposed problem. Research concluded that the research product, the didactic sequences, constitutes an efficient pedagogical tool, a teaching proposal for the definite integral.

Keywords: Definite integral teaching. Problems of area and volumes. Maple software. Didactic sequences.

A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria. (FREIRE, 2016, p. 16).

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da Matemática que serve como ferramenta auxiliar em várias áreas das ciências exatas. Muitos matemáticos contribuíram para sua criação, pois já utilizavam seus conceitos ainda de forma rudimentar; dentre eles podemos destacar Zenão, Eudoxo, Arquimedes, Cavalieri, Wallis, Borrow e Fermat. Entretanto, consideramos que o surgimento da CDI data do final do século XVII, /com Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhemlm Leibniz (1646-17160 que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo – os limites, as derivadas e as integrais. Eves (2004) destaca que o desenvolvimento histórico do Cálculo seguiu uma ordem contrária à dos textos que tratam o assunto atualmente, pois, primeiramente, surgiu o Cálculo Integral em processos somatórios atrelados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimento e, muito tempo depois, o Cálculo Diferencial como resultado de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estavam relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

> O Cálculo Diferencial Integral, parte curricular dos mais diversos Cursos do Ensino Superior, tem como precursores: Gottgried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727). Uma teoria que emerge tantas outras, realizadas por diversas pessoas que possivelmente atraídas por algo do meio ambiente, instigando-as a observá-lo, a realizar experiências, a refletir sobre os resultados – causas e consequências. Atos específicos da mente humana, desenvolvidas pela necessidade, seja a que se deseja obter, resolver ou criar, seja a que se queira explicar, intervir ou conhecer o saber de alguém ou de um grupo de pessoas (BIEMBENGUT, 2016, p.71).

O Cálculo Diferencial Integral é considerado uma das maiores realizações da inteligência humana. Para Stochiero (2007), após Leibniz e Newton, muitos matemáticos vêm promovendo ordenamento sistêmico importante para o desenvolvimento desse campo científico e constamos suas ressonâncias em quase todas as ramificações das atividades tecnológicas e sociais.

Atualmente, é uma disciplina que faz parte do currículo de vários cursos superiores e, portanto, tem sido contemplada com estudos e pesquisas relativos ao seu ensino e sua aprendizagem.

> O cálculo Diferencial e Integral, um ramo da Matemática, tem como principal objetivo o estudo do movimento e da variação. Considerado como a linguagem por excelência do paradigma científico e como instrumento indispensável de pensamento para quase todas as áreas do conhecimento [...] é colocado como disciplina básica e obrigatória em diversos cursos de graduação da área de Ciências Exatas. Dentro destes cursos, o ensino e aprendizagem pretende cumprir dois objetivos principais: um deles é habituar o estudante a pensar de maneira organizada e com mobilidade; o outro, estabelecer condições para que o estudante aprenda a utilizar as ideias do Cálculo como regras e procedimentos na resolução de problemas em situações concretas. (LACHINI, 2001, p. 147).

Godoy e Faria (2012) apontam as reprovações em disciplinas de Cálculo, principalmente, nos períodos iniciais do curso de matemática, como uma rotina que acarreta certa banalização, certo lugar comum, porque vista como um fato natural pelos alunos e professores. Gomes (2012) destaca o fato de o estudante brasileiro ter seu primeiro contato com o Cálculo Diferencial e Integral no início do curso superior, uma Matemática ‘diferente’ daquela que aprendia no Ensino Médio. Por ser dinâmica, essa disciplina é muito distinta de outros temas estudados pelos alunos que ingressam nos cursos superiores que encontram dificuldades para a compreensão dos teoremas, conceitos e até mesmo cálculos abordados na disciplina.

Outro fato que merece destaque é a não diversificação dos sistemas de representação do conhecimento matemático. Os alunos apresentam dificuldades na visualização dos elementos indispensáveis à aprendizagem do Cálculo e, mesmo assim, boa parte dos professores ignoram as ferramentas atualmente disponíveis para minimizar tal fator complicador.

Durante nossa atuação como professor do Ensino Superior da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, há mais de três décadas, constatamos a complexidade de se ensinar tal conteúdo. Há algum tempo, vimos observando que vem se acentuando a falta de conhecimento sobre conceitos e conteúdos matemáticos básicos, pré-requisitos para a aprendizagem dessa disciplina, o que dificulta seu ensino e sua aprendizagem. Isso exige dos professores universitários retomar certos aspectos fundantes da Matemática em atividades mais simples, com estratégias didáticas variadas, atraentes e significativas, na tentativa de se sanarem as dificuldades apresentadas naqueles conteúdos matemáticos que deveriam ter sido adquiridos nas séries iniciais do ensino fundamental, para depois apresentarem os “novos” conceitos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

Santarosa e Moreira (2011) discorrem essas dificuldades de ensinar e aprender conteúdos interligados aos Cálculos, e apontam o fato de os professores ensinarem os conteúdos, supondo que os estudantes já possuem conhecimentos prévios suficientes, e exigindo um nível elevado de abstração, o que seria um complicador para a aprendizagem. Sob essa perspectiva, a didática se transforma de uma prática tradicionalista para uma progressista

Para Kenski (2001) o papel do professor é buscar e divulgar as inovações existentes, como um agente que aproxima o aluno das novidades, que aponta descobertas e informações orientadas para a efetivação da aprendizagem. Tal professor deve facilitar o entendimento e a compreensão do conteúdo, de forma a favorecer uma aprendizagem significativa, que tenha sentido para o aluno, esteja em consonância com as diretrizes de uma metodologia que o mantenha em dia com as exigências da sociedade atual.

Com o avanço das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, professores buscam novas abordagens para as suas aulas. E, no Ensino Superior, essas novas ferramentas podem ajudar no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, pois, como defende Frota (2013), o uso de tecnologias auxilia os estudantes a estabelecerem conexões entre diferentes representações visuais de conceitos, favorecendo a compreensão e a resolução de problemas.

As possibilidades oferecidas por essas tecnologias e sua utilização didática facilitam a compreensão dos conceitos matemáticos, uma vez que possibilita uma melhor visualização - uma nova instância física, de caráter dinâmico, que auxilia o aluno nas construções mentais dos objetos matemáticos abstratos.

> A visualização contida numa atividade cognitiva adequada é um fator essencial para a compreensão intuitiva. As representações visuais, por um lado, contribuem para a organização das informações em representações sinópticas, constituindo um fator importante de globalização. Por outro lado, o aspecto concreto das imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto- evidência e imediação. Uma imagem visual não somente organiza os dados à mão em estruturas significativas, mas é também um importante fator que guia o desenvolvimento da solução. As representações visuais são dispositivos antecipatórios essenciais. (FAINGUELERNT, 1999, p. 42)

Nesse sentido, Gravina e Santarosa (1999) destacam que tais recursos possibilitam criar um novo tipo de objeto – os objetos ‘concreto-abstratos’ – concretos, porque existem na tela do computador; abstratos por se tratar de realizações feitas a partir de construções mentais. Para Couy (2008), tais recursos podem fazer com que o aluno se aproprie de processos mentais associados ao pensamento visual resultante da exteriorização.

Esta pesquisa apresenta sequências didáticas sob a perspectiva de resolução de problemas, com o objetivo de verificar os resultados de sua utilização no ensino dos Intervalos de Integração, no estudo e nas aplicações das Integrais, a partir da visualização.

Buscando facilitar o reconhecimento desses intervalos, que envolvem geometria elementar, analítica e traçado de gráfico no R2, estendendo para o R3, utilizaremos o *software* matemático - MAPLE -, ferramenta que possibilita diversos recursos algébricos, visualização gráfica, manipulações de fórmulas e a construção de modelos matemáticos; dessa maneira, que pode se tornar um instrumento poderoso para o ensino do Cálculo.

Com base no exposto anteriormente, e definimos os objetivos desta dissertação.

1.1 Objetivo geral

Como utilizar o *software Maple* no ensino e aprendizagem de cálculo de áreas e volumes por meio de integrais

1.2 Objetivos específicos

a) identificar em três livros didáticos as abordagens da Integral Definida;
b) identificar, graficamente, como se constroem os Limites de Integração em problemas de aplicações no cálculo de áreas e volumes;
c) utilizar o *software MAPLE* como suporte da sequência didática;
d) sugerir uma sequência didática para o ensino-aprendizagem do Cálculo/Integral Definida;
e) fundamentar e descrever os passos da sequência didática;
f) listar os questionamentos de acadêmicos, após contato com o objeto proposto nesta pesquisa, a sequência didática;
g) apresentar os resultados da aplicação da sequência didática.

A presente dissertação se estrutura em sete capítulos.

O capítulo 1, a Introdução, apresenta o trabalho, traz um breve histórico sobre as origens do Cálculo Diferencial e Integral, a justificativa para se desenvolver o trabalho e a relevância do tema e os objetivos da pesquisa.

No capítulo 2, Didática do ensino superior pela resolução de problemas e informática educativa, iniciamos a revisão bibliográfica, enfocando a Didática do Ensino Superior determinada pela Resolução de Problemas e Informática Educativa. Destacamos a importância da utilização de *softwares* para a melhor visualização e o entendimento dos Intervalos de Integração da Integral Definida. Apresentamos e descrevemos o *software Maple,* como um recurso didático de grande potencial para o acadêmico na formalização da Integral Definida nas suas diversas aplicações.

No capítulo 3, Metodologia, apresentamos as diretrizes para a execução dessa investigação.

No capítulo 4, Análise do reconhecimento de Limites de Integração, analisamos como são abordados no manuseio da Integral Definida e suas aplicações, em três livros didáticos. O primeiro, *Cálculo de uma variável*, de Deborah Hughes-Hallet, em coautoria com Otto K. Bretscher, coordenado por Elliot J. Marks e com tradução de Rafael José Iorio Júnior, Valéria de Magalhães Iorio, publicado em 2008. O segundo, *Cálculo,* primeiro volume, de George T. Thomas com tradução de Kleber Pedroso e Regina Simille de Macedo e revisão técnica de Claudio Hiurofome Asanouma, de 2012. O terceiro, sob o mesmo título, **Cálculo**, é, também um primeiro volume de James Stewart, com tradução da Ez2 Translate, de 2013.

No capítulo 5, Sequências didáticas como estrutura metodológica da pesquisa”, apresentamos e descrevemos as sequências didáticas, discorremos sua elaboração, organização e aplicação como valioso recurso metodológico.

O capítulo 6, Aplicação e análise dos dados, relata como transcorreu a aplicação da atividade em questão, os procedimentos didáticos a serem seguidos e a análise dos dados obtidos na aplicação das tarefas.

No capítulo 7, Considerações finais, retomamos os principais aspectos abordados nesta pesquisa, discutimos sobre seus resultados e sinalizamos outras possibilidades de análise e de estudos na área.

2 DIDÁTICA DO ENSINO SUPERIOR PELA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A INFORMÁTICA EDUCATIVA

A Didática do Ensino Superior (DES) busca o desenvolvimento de ambientes de ensino e aprendizagem com base no desenvolvimento da autonomia que viabilize a atuação como sujeito deste processo. A DES prima por uma aprendizagem crítica, reflexiva e significativa. Para atuar neste sentido, é fundamental que o professor ofereça e propicie situações desafiadoras, proponha e aplique atividades que exijam o envolvimento efetivo dos alunos e favoreçam a construção do conhecimento, partindo da realidade social e, projetando o aluno para além do seu cotidiano, formando-o para transformar a sociedade.

2.1 Didática do Ensino Superior de Cálculo Diferencial e Integral

2.2.1 Didática

Na Antiguidade, o ensino era baseado na estrutura das ciências e da filosofia, e a "arte de ensinar" se associava às normas e aos métodos extraídos das ideias de harmonia entre a fé, a natureza e as línguas. E, durante muito tempo, considerou-se que um método único bastaria para se ensinarem todos os conteúdos. Ledo engano.

A palavra didática, originada da expressão grega Τεχνή διδακτική (techné didaktiké), é geralmente traduzida como a arte ou técnica de ensinar. "É um dos ramos da pedagogia destinados a colocar em prática as diretrizes da teoria pedagógica, dos procedimentos para o ensino do conhecimento." (AMORIM, 2008, p. 17). Vale salientar, ainda, que, desde sua etimologia, a palavra didática, priorizava a realização lenta de ação, ao longo do tempo, própria do processo de instruir. O vocábulo "didático" surge, quando os adultos começaram a intervir na atividade de aprendizagem das crianças e dos jovens, através da direção deliberada e planejada do ensino, o que levou à formação da teoria didática do ensinamento. Portanto, não resta dúvida alguma de que a Didática, desde as suas origens, não é associada à palavra educação, mas, ao termo Ensino.

A Didática surgiu das ações de dois grandes didatas: Ratke e Comênio. Como fato interessante, notamos que ambos vêm da Europa Central, Alemanha e República

Tcheca, países onde se desenvolvia, à época, todo um processo de Reforma Protestante.

Comênio (1592-1670) deu início a esse novo campo do saber com sua obra Didática Magna. Nesse século XVII, com este trabalho, a Didática começa os estudos e as pesquisas de forma sistematizada, em busca de formas específicas de ensinar que obtivessem melhores resultados. O conhecimento, Comenius apregoava, deve ser adquirido, a partir da observação de coisas e fenômenos. Por essas razões, ele mesmo desenvolveu métodos orientados pela finalidade da educação do homem para a busca da felicidade, a partir da sua natureza. Há registros de experiências educacionais realizadas segundo os princípios expostos, embora nem todas tivessem tido sucesso.

Pode-se observar que, desde o início, o ensino deve ter uma finalidade educativa, o que não significa que se trate da educação em si, porquanto o fim da didática é o Ensino e não a Educação. Porém, em dado momento, obviamente, fica difícil separar essas duas entidades, pois, o objeto da Didática abrange o ensino de conhecimentos, atitudes e sentimentos. Prova disto é que inexistem, no entanto, fronteiras na obra do século XVII, que estabeleçam delimitações entre Educação e Ensino.

Para Zabalza (2004), a didática atual é um campo de conhecimentos, de investigações, de propostas teóricas e práticas que têm foco nos processos de ensino e de aprendizagem.

D'Amore (2007) destaca que foram necessários séculos para se conseguir estabelecer, de forma definitiva, que as didáticas "podem ser, e são específicas".

Assim, a didática para se ensinar um dado conhecimento pôde, então, ser redefinida como um projeto social sobre o como fazer, com um movimento para a aquisição desse conhecimento. Nesse sentido, o autor define a didática da matemática como a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um sujeito sobre um conhecimento matemático.

Neste sentido, Laudares e Lachini (2001) ensinam que

> A Matemática tem no Cálculo um de seus ramos, é colocada como ciência básica para os cursos da área de exatas. Dizer que uma ciência é básica significa considerá-la como linguagem, um capital cultural que deve ser incorporado pelo estudante. Incorporar se refere ao corpo, ao fazer parte do modo de ver os fenômenos, ao se transmutar em *habitus* (conforme discutido por Pierre Bourdieu), ao se tornar um referencial teórico por meio do qual é

> possível nomear, classificar e analisar as coisas e os acontecimentos. O processo de incorporação é lento, exige investimento pessoal de tempo e, à semelhança do bronzeamento, não pode ser feito por procuração. Em outros termos, trabalhar no *pagus* da matemática requer esforço e dedicação, envolvimento e responsabilização de professores e alunos, os agentes que conferem sentido ao que se faz na universidade. (LAUDARES; LACHINI, 2001, p. 9-10).

Os desafios sobre a forma de ensinar estão cada vez mais voltados para as necessidades e realidades vivenciadas pelos alunos. Nesta linha de pensamento, Freire (2016) indaga por que não se discutir com os alunos a razão de ser de alguns saberes, em relação ao ensino dos conteúdos. Entretanto, faz-se necessário, também, que o fazer didático propicie tal reflexão, em relação a cada situação de aprendizagem, partindo da realidade em que professor e aluno estão inseridos e ampliando essa aprendizagem para outras realidades e habilidades.

No que compete ao Cálculo diferencial e Integral, cujo ensino em muitas universidades ainda esteja pautado em aulas tradicionais, sem fugir do modelo dado por definições e propriedades de exercícios algébricos e algumas aplicações desses conceitos matemáticos pouco associados ao cotidiano do aluno, a didática para o ensino desse conteúdo não pode perder a sua essência.

Nesta linha de pensamento, afirmam alguns autores que

> De forma geral, nas aulas de Cálculo os conteúdos são apresentados aos alunos como um saber já construído, sem lugar para a intuição, experimentação ou descoberta e perante o qual não é possível a argumentação. Os conceitos são apresentados aos alunos, na maioria das vezes, já formalizados, não decorrentes das suas ações e da reflexão sobre eles, dando-se quase nenhum tempo aos alunos para sentirem a formalização como algo natural e necessário à comunicação de processos e resultados. (ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2007, p.3)

Zabala (1998) considera que as atividades de ensino devem promover aprendizagens as mais significativas e funcionais possíveis, que façam sentido e desencadeiem uma atitude favorável para realizá-las, que permitam o maior número de relações entre os distintos conteúdos, que constituam estruturas de conhecimento, e que, facilitem a compreensão de uma realidade que nunca se apresenta compartimentada.

2.2.2 Didática do Cálculo Diferencial e Integral

Para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, questiona-se o fato de os professores insistirem na aplicação de um número excessivo de exercícios repetitivos, inócuos e extremamente mecânicos e sem significado. Entretanto, se optarem por atividades que coloquem o aluno em contato com novas situações que possam estimular a busca por relações matemáticas e a construção da solução para as situações propostas, instalar-se-á uma aprendizagem significativa.

Vale, nesse sentido, citar que

> O que se pode perceber é que o insucesso dos alunos está fortemente relacionado com a não adequação dos conteúdos que compõem os programas das disciplinas de Cálculo à realidade dos estudantes e às necessidades do sistema social, cultural e econômico, com uma metodologia que, em geral, prioriza operações, técnicas e repetição de algoritmos, entre outros fatore. (ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2007, p.3)

Nesta perspectiva, cabe ao professor de Cálculo viabilizar a resolução de problemas, propondo questões que desenvolvam o pensamento matemático e a relação entre as diversas áreas do conhecimento, promovendo, assim, uma interação com o contexto social, profissional e humano.

2.2.3 Resolução de problemas

A resolução de problemas é uma importante ferramenta para a aprendizagem do Cálculo, pois permite ao aluno desenvolver suas potencialidades em sala de aula, fazendo, assim, aplicações práticas dessa ferramenta.

Para Gazire (1988), a resolução de problemas propicia a construção do conhecimento matemático através de uma situação-problema que favorece a construção interiorizada do conhecimento, faz o aluno adquirir autonomia e fortalece sua capacidade de usar seus conhecimentos prévios para solucionar situações.

Dante (2000) salienta que ensinar a resolver problema é uma árdua tarefa, pois, não é uma técnica única de ensino, mas, ao contrário, envolve uma multiplicidade de processos de pensamento que têm que ser cautelosamente desenvolvidos com o auxílio do professor. O autor ressalta que, seguindo estes passos e tendo o professor como condutor e mediador, o aluno chegará à solução de problema.

Segundo Polya (2006),

> [...] o professor que deseja desenvolver nos alunos o espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer. (POLYA, 2006, p.4).

A Integral é um instrumento de Cálculo. Assim, quando devidamente manuseada, pode constituir soluções de vários problemas. Ela pode representar o cálculo de uma área, de um volume, de um comprimento de arco. Na Termodinâmica, na Mecânica dos fluídos, na Física, são notórias as suas aplicações, e tudo se resume na determinação precisa dos intervalos de integração. Por exemplo, nos momentos e centro de massa, o problema é determinar, corretamente, os intervalos de integração da região e, da mesma forma, o momento de inércia. O problema se generaliza, desde as aplicações da integral simples à dupla e tripla, na escolha adequada dos intervalos de integração.

2.2.4 Informática Educativa: o uso de Softwares para a visualização no ensino de Intervalos de Integração

A integração das possibilidades oferecidas pela utilização de recursos computacionais nas práticas pedagógicas tem um caráter interdisciplinar e leva ao enriquecimento dos agentes envolvidos nesse processo. Assim, destacamos a importância do professor utilizar ferramentas computacionais, evoluindo suas práticas e transformando suas aulas em um ambiente de ensino significativo, despertando os alunos para uma nova forma de aprendizado - a de aprender a aprender.

Conforme Guimarães e Dias (2006)

> A questão que se coloca para os educadores é: como integrar essa nova forma de pensar, impulsionada pela realidade de espaço cibernético, ao desenvolvimento de conhecimento e saberes do aluno? Torna-se cada vez mais necessário um fazer educativo que ofereça múltiplos caminhos e alternativas, distanciando-se do discurso monológico da resposta certa, da sequência linear de conteúdos, de estruturas rígidas dos saberes prontos, com compromissos renovados em relação à flexibilidade, à interconectividade, à diversidade e à variedade, além de contextualização no mundo das relações sociais e de interesses dos envolvidos no processo de

aprendizagem. (GUIMARÃES; DIAS, 2006, p. 23)

O desenvolvimento das tecnologias de comunicação e informação trouxe para a educação a possibilidade de utilização dos ambientes virtuais como apoio para o ensino do Cálculo. Os recursos computacionais em sala de aula constituem uma ferramenta importante que possibilita uma aprendizagem colaborativa, e promove maior interação entre alunos e professor. Para Valente (1999) com a utilização de recursos computacionais, a "educação deixa de ser a memorização da informação transmitida pelo professor e passa a ser a construção do conhecimento realizada pelo aluno de maneira significativa, sendo o professor, o facilitador desse processo de construção". (VALENTE, 1999, p. 17-18).

Para D'Ambrósio e Valente (2016), os professores de Cálculo sabem o quanto a desistência e o baixo aproveitamento assomam nossos alunos, e, por isto, questionam:

> Será que são os alunos que não têm capacidade, ou os métodos de ensino que ainda são arcaicos em face da revolução das novas tecnologias? Mesmo vivendo na era do Conhecimento, na era das Redes Sociais, praticamos a educação da era Industrial. (D'AMBRÓSIO; VALENTE, 2016, p. 23)

Os *software*s desenvolvidos para a manipulação de conteúdos matemáticos e gráficos que potencializam a visualização gráfica das equações em estudo, torna o trabalho mais dinâmico. Na perspectiva de Frota (2013), a utilização de ambientes informatizados favorece a visualização e a comunicação em Cálculo, uma vez que essa tecnologia pode mudar a forma de fazer matemática, pois contribui para o processo de se fazerem conjecturas, interpretarem soluções, estimularem a investigação e a descoberta.

D´Ambrósio (2002) afirma que

> A matemática é sem dúvida uma das matérias mais temidas pelos alunos em geral, e como tal, pode-se ver que quanto mais recursos e meios reais forem utilizados numa aula, maior será o aproveitamento da matéria. A escola não se justifica pela apresentação do conhecimento obsoleto e ultrapassado e, sim em falar em ciências e tecnologia. (D´AMBROSIO, 2002, p. 80)

No mundo de hoje, onde a tecnologia avança de maneira vertiginosa, aproveitar este momento para despertar o interesse dos alunos, com o intuito de facilitar a aprendizagem, utilizar estes recursos de maneira proveitosa é uma opção acertada do professor. Stewart (2013) destaca que a disponibilidade de tecnologia não diminui, pelo contrário, aumenta a importância de se entenderem, com clareza, os conceitos através das imagens na tela. Quando utilizados apropriadamente, computadores e calculadoras gráficas são ferramentas úteis para a descoberta e compreensão de tais conceitos.

2.2.5 O software Maple

Optamos pela utilização do *software Maple*, um dos instrumentos mais poderosos de que dispõem os diversos campos da engenharia, tanto nas disciplinas básicas, Calculo diferencial e Integral, Geometria Analítica, Equações diferenciais, como em várias áreas de conhecimentos específicos como a Mecatrônica, Mecânica Elétrica, Automação, Civil, Produção, Metalúrgica, cursos mantidos na maioria das Universidades.

Desenvolvido a partir de 1981 pelos pesquisadores Gaston Gonnet e Keith Geddes, do Grupo Simbólica da Universidade Waterloo, no Canadá e comercializado pela *Maplesoft*, companhia canadense.

A estrutura interna do Maple consiste de três componentes: Núcleo, Biblioteca e Interface. O Núcleo (kernel) é a máquina matemática que faz os cálculos, interpreta os comandos inseridos pelo usuário e mostra os resultados. O restante do programa é um conjunto de bibliotecas que se acessa, quando se trabalha com conteúdo específico. A Interface é a aparência do Maple que gera a interação entre o usuário e os comandos.

O *Maple* é um *software* matemático que permite trabalhar com informações na forma algébrica, possibilitando resolver soluções analíticas e exatas, em diversas áreas da matemática, destacando-se, entre elas, o cálculo diferencial e integral. Ele possui ferramentas gráficas que facilitam a visualização de resultados, plotando gráficos em 2 ou 3 dimensões e, também, gráficos animados. Possui algoritmos numéricos para a resolução de equações algébricas ou diferenciais nas quais não é possível obter uma solução analítica. O programa disponibiliza ao usuário diversos pacotes de comandos para aplicações específicas. Possui uma linguagem de programação própria que permite utilizar os comandos do programa para a elaboração de novos comandos, pacotes e procedimentos. (MUNIZ; MARCZAK 2001). É utilizado para resolver problemas matemáticos diversos, dos simples aos complexos e possibilita criar documentos e apresentações com qualidade profissional. Enquanto ele trabalha, pode-se documentar o processo descrevendo-o no próprio arquivo.

O programa apresenta dois modos de trabalho: o texto e o matemático. O primeiro executa cálculos rápidos, sem se preocupar com qualquer tipo de sintaxe. O modo matemático é projetado para o uso interativo dos comandos do *software* que oferece funcionalidade avançada e controle personalizado.

A grande vantagem do *software* sobre *Maple,* em relação aos demais simuladores, se posta na possibilidade de se acompanhar o processo de solução passo a passo, com uma visão crítica e de forma participativa, o que justifica sua aplicação como meio didático. (ROCHA et al., 2004).

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Sabemos que metodologia é o estudo dos métodos reconhecidos pela ciência como os mais adequados para a execução de uma investigação científica. Todas elas possuem elementos necessários e essenciais. Para lidar com eles, faz-se necessária a exploração que parte da existência de um problema e utiliza métodos científicos para chegar a uma solução/conclusão para ele. Acreditamos que, se, pelo menos, um desses elementos faltar, não haverá exploração científica, mas, tão somente, uma simples redação.

Assim sendo, nosso trabalho, como qualquer outro texto acadêmico, demandou a explicitação de critérios relativos aos seus elementos essenciais, ou seja, finalidade, objetivos, abordagem, método e procedimentos.

Quanto ao elemento Finalidade, nesta investigação, lançamos mão da pesquisa aplicada, através da qual buscamos fazer um estudo científico voltado para a solução de um problema já conhecido e descrito no texto do trabalho. Porém, ela não serve apenas para gerar um novo conhecimento, ampliando o já disponível, mas, também, para aplicá-lo na prática, intervindo, assim, no mundo real.

Quanto aos Objetivos, da pesquisa descritiva que retrata as características do objeto estudado, expõe fatos e fenômenos com acuidade, para estabelecer a natureza das relações entre as variáveis delimitadas no tema.

Nesta abordagem, postamo-nos como observador, já que não nos cabe interferir na análise dos resultados, mas, apenas constatá-la. Tal tarefa é, normalmente, realizada por planilhas e sistemas de computador, dada a complexidade dos números. Para este tipo de pesquisa, na nossa investigação a população estudada contou com o concurso de vinte e dois (22) acadêmicos do Curso de Engenharia Mecânica do terceiro período de 2018, da PUC Minas Unidade Contagem.

Quanto ao método, utilizamos os elementos essenciais e os complementares. Os essenciais, os elementos mínimos, deram suporte para a completa descrição do trabalho, e auxiliaram na identificação de sua finalidade e abordagem, de seus procedimentos e objetivos e de seu método. Por sua vez, com os elementos complementares acrescentamos detalhes e esclarecimentos aos elementos essenciais, esclarecendo sobre unidades de análise, instrumentos de coleta de dados, variáveis, dimensões consideradas e etapas desenvolvidas.

Finalmente, quanto aos Procedimentos, neste trabalho, optamos pelas pesquisas de campo, por via a pesquisa-ação, e, obviamente, ainda, a bibliográfica.

Na pesquisa ação, o investigador se envolve, pessoalmente, agindo efetivamente sobre o mundo natural, sendo, pois, sua característica principal a interferência para a mudança dos fenômenos. Para isso, ele deve ser proativo na investigação e propor ações e, depois, avaliar seus resultados na população envolvida. Para realizar uma pesquisa-ação é preciso identificar um problema de dada uma comunidade, ou grupo e, a seguir, elaborar um projeto com ações para a solução desse problema. Finalmente, deve avaliar as mudanças ocorridas. Com a pesquisa ação, procedemos à elaboração e aplicação das sequências didáticas como estratégias de ensino do conteúdo em pauta nesta dissertação. A partir disto, comparamos os resultados, levantamos os dados, fizemos interpretações e construímos conclusões.

A pesquisa bibliográfica, procedimento mais comum, se encontra em, provavelmente, 100% dos trabalhos científicos, visto que não se redige um trabalho acadêmico sem a leitura da literatura pertinente ao tema, ou seja, fontes como livros, artigos e outros textos de caráter científico publicados. Com esse tipo de investigação, buscamos, especialmente, desvendar relacionamentos entre conceitos, ideias e características de um objeto, confrontamos as várias posições sobre o problema tratado, para reunimos o maior número de informações sobre aquele assunto.

Esses tipos de metodologias de investigação nortearam este trabalho de pesquisa e orientaram a elaboração e aplicação das sequências didáticas propostas cujos passos, assim como seus objetivos, são minuciosamente descritos no capítulo 5, no qual deixamos claras, mediante exemplos consistentes, as orientações sobre as etapas a serem seguidas para se trabalhar o problema com o *soft Maple*.

4 ANÁLISE DO RECONHECIMENTO DE LIMITES DE INTEGRAÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

O propósito deste capítulo é examinar o modo como três livros didáticos de Cálculo abordam o reconhecimento dos limites de integração da integral definida, um dos conceitos básicos do Cálculo Integral que, juntamente com a derivada, constituem o foco do Cálculo Diferencial. Enquanto a derivada cuida da taxa de variação das funções, o que implica captar e descrever o movimento, a integral definida se ocupa a soma de infinitas pequenas variações.

A estreita conexão entre o cálculo integral e o Cálculo Diferencial é objeto do Teorema Fundamental do Cálculo que, por relacionar a integral com a derivada, simplifica bastante a solução de inúmeros problemas nos vários campos do saber.

A análise desses livros toma por base os pressupostos utilizados para a técnica de sequências didáticas, conforme a metodologia descrita para esta dissertação. Aqui, trabalhamos sob a perspectiva da disciplina curricular Cálculo como recorte de uma ciência, cujo estudo requer a orientação de um professor. Em outras palavras, levamos em conta que, para chegar à escola, o saber científico sofre transformações que o simplificam, a fim de convertê-lo em objeto de estudo escolar palatável. Desse modo, temos nessa transposição um movimento que parte de mudanças no “saber científico” e se institui como “textos de saberes escolares” – propostas curriculares e livros didáticos –, exigindo, na sala de aula, o tratamento de novos conteúdos, com a adoção de novas práticas.

Dentre essas novas práticas de ensino, elegemos, nesta dissertação como já mencionado, a técnica sequências didáticas. Ela requer que o professor – como mediador entre o conhecimento matemático e o aluno – tenha sólido conhecimento sobre os conceitos e procedimentos básicos sobre o assunto em tela, e perceba a Matemática como ciência infalível, mas, como ciência dinâmica, sempre em construção e aberta à incorporação de tecnologias e conhecimentos novos. Cabe ao docente propor sequências didáticas, orientar e avaliar o percurso das sequências didáticas junto com o aluno. Por parte do estudante, sujeito do processo de aprendizagem, e sempre sob a orientação do professor, a sequência didática requer que ele se poste como construtor do seu próprio conhecimento, que busca desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos, sempre compreendendo e atribuindo significado a quaisquer de suas ações, evitando a simples memorização e mecanização.

Na análise e avaliação desses três livros didáticos, estão presentes tanto as interações entre professor e aluno, quanto as que ocorrem entre esta dupla e o conteúdo, isto é, a matéria-prima utilizada para a elaboração das sequências didáticas.

Além disso, acreditamos ser papel desses compêndios:

a) favorecer o trabalho pedagógico realizado pela dupla professor/aluno, quanto à linguagem científica adequada à graduação;
b) sugerir atividades integradas para o ensino dos conteúdos, com o intuito de prover o aprendizado da leitura e da escrita na linguagem matemática;
c) indicar questões de estudo e pesquisa, mobilizando a capacidade investigativa dos alunos, de modo a facilitar a incorporação do método matemático, método científico por excelência;
d) identificar os conceitos e reconstrui-los, por meio de interlocução, observação, investigação, análise, síntese e avaliação.

Esses aspectos foram examinados nos compêndios e serviram como critérios de avaliação dos seguintes livros didáticos:

a) *cálculo de uma variável,* Deborah Hughes-Hallet (2008);
b) *cálculo*, George Brinton Thomas (2012);
c) *cálculo,* James Stewart (2013).

4.1 A integral definida em Cálculo de uma variável, por Deborah Hughes-Hallet

O assunto é tratado com mais detalhes, no Capítulo 5 do livro, sob o título *Conceito Chave: a integral definida*. Uma breve introdução estabelece a associação entre conceito de integral definida, que calcula a variação total de uma função, a partir de sua taxa de variação, com o de derivada ou taxa de variação apresentado no Capítulo 2, intitulado *Conceito Chave: a derivada*. Esta conexão permite que o professor e o aluno se perguntem, desde o início, sobre a relação existente entre a derivada e a integral definida. O capítulo termina com o Teorema Fundamental do

Cálculo que pode usar a Integral Definida, para obter informação sobre uma função, a partir de sua derivada.

O capítulo é dividido em quatro subseções, cada uma delas elaborada de acordo com a *Regra de Quatro*: todo assunto deve ser apresentado de forma geométrica, numérica, algébrica e verbo-descritiva. Além disso, os autores da *Regra* se orientaram pelo *Modo de Arquimedes*: definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos. Esta visão busca o equilíbrio entre conceitos, modelagem e habilidades, e permite que os professores possam dar atenção a todos os aspectos do aprendizado.

A subseção 5.1 parte da pergunta: como medir velocidade? A resposta é buscada por meio de um experimento: um carro se move com velocidade crescente. Sua velocidade é medida em intervalos cada vez menores e os dados são dispostos em tabelas numéricas *velocidade versus tempo*. Correspondendo a cada tabela, é esboçado um gráfico que permite visualizar a distância total como soma das distâncias percorridas, em cada intervalo de tempo. A subseção termina, mostrando como a distância total percorrida pode ser aproximada por somas de *n* parcelas e é representada exatamente como o limite de uma soma cujo número de parcelas se torna arbitrariamente grande.

Na subseção 5.2, são construídas somas similares às obtidas no experimento anterior para uma função qualquer, independente de ela representar ou não uma velocidade. A partir da visualização gráfica, escrevem-se as somas à direita e as somas à esquerda, usando a notação de somatório. De maneira análoga ao que foi discutido na subseção 5.1, o limite da soma à direita e o limite da soma à esquerda existem e são iguais para a maioria das funções encontradas no Cálculo. Nesses casos, a *integral definida* é o valor do limite dessas somas. A subseção termina, olhando a integral definida como medida de área e generalizando a ideia de uma soma de Riemann.

A subseção 5.3 apresenta interpretações da integral definida. Primeiramente, o texto afirma que a integral definida da função velocidade (uma taxa de variação) pode ser interpretada como a distância total percorrida. Ao generalizar esta ideia para uma função qualquer, conclui que a integral definida da taxa de variação de qualquer quantidade é igual à variação total desta quantidade. Na esteira dessa interpretação, a integral definida é vista como medida de uma grandeza física resultante do produto de duas outras grandezas, o que evidencia a ideia de unidades de medida para a integral definida. A subseção termina indicando, por meio de exemplos, algumas aplicações da integral definida.

A subseção 5.4 traz alguns teoremas sobre integrais definidas. O Teorema Fundamental do Cálculo, um dos resultados mais importantes em Cálculo, faz a ligação entre a derivada e a integral definida: a integral definida de uma taxa de variação fornece a variação total. O texto cuida, com detalhes, o que aparece na demonstração do teorema, mostra o uso desse teorema para calcular integrais e explora o uso de simetrias com o mesmo intuito. Um segundo teorema estabelece as propriedades dos limites de integração. Há um teorema que apresenta as propriedades de somas e de múltiplos constantes do integrando. Em um quarto teorema o texto aborda como se comparam integrais definidas.

O exame desse capítulo 4 aponta que o texto favorece o trabalho pedagógico, que a dupla professor/aluno pode empreender: a linguagem científica utilizada é adequada a um curso de graduação. É possível construir uma sequência didática com o material disponibilizado pelo texto dos autores, com foco na incorporação de seus conceitos. Seguindo a proposta do livro, é importante que o professor oriente o aluno para que se habitue a perceber os conceitos sob os aspectos geométrico (gráficos), numérico (tabelas), algébrico (equações) e verbo-descritivo (em palavras).

O texto sugere inúmeras atividades integradas aos conteúdos. Uma escolha criteriosa por parte do professor, de algumas dessas atividades, e sua feitura pelo estudante é estratégia adequada ao aprendizado da leitura e da escrita na linguagem matemática. Talvez, seja este o principal ganho e também o mais importante objetivo do estudo de Cálculo: aprender ler e fazer matemática. É o melhor método de se ir construindo a própria teoria vista como a maneira de os sujeitos construírem sua maneira de olhar. Os autores insistem na necessidade de o aluno estudar os conceitos no texto, antes de se dedicarem à resolução de problemas, procedimento comumente adotado pelos acadêmicos.

O texto indica muitas questões de estudo e pesquisa. Nesse sentido, sugere que, quando se considera que o estudo é, em si, uma tarefa investigativa, cabe ao professor orientar o aluno para mobilizar suas capacidades investigativas. É a maneira de abrir possibilidades para que o estudante incorpore o método matemático, método científico por excelência. Os problemas propostos exigem que o estudante investigue possíveis soluções, desafiam a criatividade de alunos e professores, alterando o procedimento de buscar exemplos resolvidos que sirvam de espelho no encaminhamento de soluções.

O texto do livro possibilita identificar os conceitos e construi-los, por meio de interlocução, observação, investigação, análise, síntese e avaliação. O material nele disponibilizado é rico em exemplos e exercícios de aplicação, seguindo o princípio de Arquimedes, segundo o qual conceitos e procedimentos formais são mais bem compreendidos, por meio do estudo de problemas práticos. Existem poucos exemplos no texto que sejam exatamente iguais aos problemas propostos, de modo que estes não podem ser resolvidos, procurando-se um exemplo resolvido que pareça semelhante. O sucesso na resolução dos problemas propostos acontece com o domínio das ideias discutidas no capítulo.

4.2 A integral definida em Cálculo, volume1/George T. Thomas

A integral definida é abordada no capítulo 4, que vem com o título *Integração* e está dividido em seções. Na subseção 4.1, são apresentadas as integrais indefinidas, vistas como antiderivadas. O cálculo de integrais indefinidas é feito sob a perspectiva de operação inversa da derivação, assunto tratado em capítulos anteriores. O texto ressalta a importância da antidiferenciação na resolução de equações diferenciais elementares, modelos matemáticos que descrevem fenômenos e situações, por meio de suas respectivas taxas de variação. Com base nas regras de diferenciação, deduzem-se fórmulas para encontrar funções primitivas. O processo tem como objetivo determinar as possíveis funções que têm como derivada a função integrada.

A subseção 4.2 traz as propriedades das integrais indefinidas e discute o método de integração por substituição de variável, considerado como operação inversa da regra da cadeia, procedimento utilizado na derivação de funções compostas. A lista de funções integráveis inclui funções exponenciais e funções que levam a funções logarítmicas e funções trigonométricas inversas.

As estimativas feitas com somas finitas em várias aplicações, tratadas na subseção 4.3, levam às ideias das somas de Riemann, constituídas por parcelas que são o produto de dois valores: o valor da função escolhida e o do comprimento do intervalo considerado. Tais somas finitas são utilizadas para estimar diversas grandezas como, por exemplo, áreas entre curvas, débito cardíaco, distâncias e volumes.

A subseção 4.4 vai além das somas finitas, para verificar o que acontece no limite, quando os comprimentos dos intervalos tornam-se infinitamente pequenos e seu número infinitamente grande. As integrais definidas são caracterizadas como limites de somas de *Riemann* nas quais o número de parcelas se torna arbitrariamente grande.

A subseção 4.5 apresenta dois dos mais importantes teoremas do cálculo integral. O primeiro é o Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas, segundo o qual uma função contínua em um intervalo fechado, assume seu valor médio, ao menos uma vez nesse intervalo. O segundo é o Teorema Fundamental do Cálculo que relaciona integração e derivação, sendo dividido em duas partes. Sua demonstração, feita independentemente por Leibniz e Newton, deu início aos avanços da Matemática que alimentaram a revolução científica durante anos, nos séculos XVIII e XIX e nos subsequentes, constituindo o que, ainda hoje, é considerada a descoberta mais importante do Cálculo, na história da humanidade.

A subseção 4.6 discute dois métodos para calcular uma integral definida por substituição e afirma que ambos funcionam bem. Um desses métodos consiste em encontrar por substituição a integral definida correspondente e usar uma das primitivas para calcular a integral definida, de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo. No outro, aplica-se a fórmula

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,, \qquad (1)$$

fazendo a troca $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,dx$. Por meio de exemplos, a subseção utiliza esses métodos para o cálculo de áreas entre curvas e sinaliza como determinar os limites de integração em mudanças de fórmulas.

O capítulo termina com a subseção 4.7, que trata da integração numérica. O modo ideal para calcular o valor exato de uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é encontrar uma fórmula para $F(x)$, uma das primitivas de $f(x)$ e calcular o número $F(b)-F(a)$. Acontece que algumas primitivas são difíceis de serem encontradas e o texto demonstra que muitas funções integradas não têm fórmulas elementares para suas primitivas como, por exemplo, $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $f(x)=\sqrt{1+x^4}$. Nessas duas situações, usam-se métodos numéricos como os descritos na subseção: a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson. Tais métodos calculam valores aproximados de integrais definidas.

Ao examinar o capítulo 4, pudemos notar que o material disponibilizado permite que o professor construa uma boa sequência didática para a abordagem da integral definida. Na proposição dessa sequência, é oportuno que o professor perceba o livro Cálculo de George B. Thomas como compêndio que, no século passado, serviu de base para inúmeros cursos e métodos de ensino, dos mais tradicionais aos mais modernos e completamente experimentais. A décima segunda edição aqui analisada, e feita com o suporte da tecnologia de base computacional, é uma revisão profunda executada por Finney, Weir e Giordano. O texto consegue ser atual e moderno, podendo ser usado em diversos cursos existentes, e ainda manter seus pontos fortes tradicionais como, por exemplo, rigor matemático, excelentes exercício e aplicações relevantes para as ciências e a engenharia.

É desejável que a sequência didática proporcione ao aluno a oportunidade de fazer matemática, e não apenas aprender a aplicar algoritmos e memorizar operações, por meio de exercícios repetitivos. Vale considerar que uma sequência didática não é feita por um livro, mas por professores e alunos, e é para apoiar o percurso dessa dupla que existe o livro didático. Os recursos adicionados a esta nova edição tornam o livro ainda mais flexível e útil para a efetivação do processo de ensino e aprendizagem. Observemos, ainda, que o livro coloca ênfase na modelagem e nas aplicações do Cálculo, por meio de dados reais e busca dar maior equilíbrio aos métodos gráfico, numérico e analítico, sem comprometer o rigor matemático na abordagem de conceitos.

Após feita a análise, a título de crítica construtiva, é nosso ponto de vista que seria razoável que certas partes do texto apresentassem uma linguagem científica menos formal, de modo a facilitar o melhor entendimento de conceitos construídos a partir de problemas ou situações, sem prejuízo do rigor matemático. Tal procedimento ajudaria, sensivelmente, a professores e alunos a percepção da Matemática como ciência dinâmica, em permanente processo de construção e não como coletânea de certezas prontas e exatas, e não sujeitas a novas maneiras de ver e pensar.

O texto sugere atividades integradas aos conteúdos, que podem ajudar no aprendizado da leitura e da escrita em linguagem matemática. Quase todos os exercícios pedem ao aluno que gere e interprete gráficos de maneira que ele possa entender as relações entre a matemática e o mundo real. Dentre as várias seções de exercícios, há os com problemas de fixação e aplicados, os que instigam o pensamento crítico e questões desafiadoras que solicitam que o aluno escreva sobre conceitos de cálculo.

Outro aspecto observado no livro é que o texto propõe ao aluno explorar e explicar vários conceitos e aplicações do Cálculo em questões dissertativas postas ao término do capítulo. Os autores defendem que o aluno aprende melhor, quando as técnicas são explicadas de maneira clara e simples. Para isso, a solução dos problemas é apresentada passo a passo, especialmente quando envolve procedimentos complexos; cada uma dessas soluções é ilustrada por meio de exemplos.

O texto também apresenta questões de estudo e pesquisa que mobilizam a capacidade investigativa do aluno, de modo a facilitar a incorporação do método matemático, método científico por excelência. São apresentadas atividades que desafiam o aluno a identificar conceitos e reconstrui-los, por meio de interlocução, observação, investigação, análise, síntese e avaliação. São atividades que, em geral, requerem o uso de algum aplicativo de base computacional e incentivam o trabalho em grupo. Esses problemas se prestam a explorar os conceitos presentes nas integrais definidas, incentivam o aluno a propor diferentes abordagens de uma situação – resolução numérica, geométrica e algébrica – e, ainda permitem perceber a aplicação prática do estudo de Matemática.

4.3 A integral definida em Cálculo, volume 1/James Stewart

O livro aborda as integrais definidas no capítulo 5, que vem com o título *Integrais* e está dividido em seis (06) subseções. Nas preliminares do capítulo, é feita uma associação deste assunto com o cálculo de áreas, problema que remonta à Grécia antiga, há mais de 2500 anos, quando foram encontradas áreas, por meio do chamado *método da exaustão*.

Partindo da área de um retângulo, os gregos já sabiam calcular a área de um triângulo e de um polígono qualquer, dividindo este em triângulos e somando suas áreas. No cálculo da área de uma figura curva, o método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever ou circunscrever a figura com polígonos e, então, aumentar o número de lados destes polígonos. Ainda nas preliminares, o texto enfatiza a relação entre os problemas da tangente e da velocidade usados para introduzir a derivada – a ideia central do cálculo diferencial – e os problemas da área e da distância, que servem para tratar da integral definida – conceito básico do Cálculo Integral.

A subseção 5.1 apresenta a resolução de dois problemas: o cálculo de áreas e o cálculo da distância. No cálculo de áreas, uma região S é aproximada por meio de retângulos menores ou maiores (conforme apareçam abaixo ou acima da curva considerada); a seguir, toma-se o limite da soma das áreas desses retângulos, chamados de retângulos aproximantes, quando suas larguras ficam cada vez menores e seu número cada vez maior. O procedimento é ilustrado por meio de exemplos. Correspondendo a cada exemplo, é elaborado um gráfico e feita uma tabela numérica. A argumentação do texto leva a perceber que a aproximação da medida da área de S é cada vez melhor, à medida que o número de retângulos aumenta. A partir dessa percepção, define-se a área A da região S, que está sob o gráfico de uma função contínua f, como o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes. Em símbolos matemáticos, escreve-se:

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \right] = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad (2)$$

O segundo problema consiste em achar a distância percorrida por um objeto durante certo período de tempo, sendo conhecida a velocidade do objeto em todos os instantes. Se a velocidade do objeto é constante, o problema é de fácil solução: basta aplicar a fórmula *distância = velocidade x tempo*. A questão fica mais complexa, quando a velocidade do objeto é variável. O texto discute esse caso por meio de um exemplo no qual é apresentada uma tabela *tempo x velocidade*. A ideia explorada consiste em pensar que os intervalos são paulatinamente reduzidos, de modo que, em cada intervalo considerado, é plausível considerar a velocidade como constante. O texto faz uma representação gráfica da situação e a relaciona com o problema do

cálculo de áreas. Neste caso, a altura de cada retângulo é o valor da velocidade e a largura, o intervalo de tempo. Assim, por exemplo, se a velocidade é dada em metros por segundo e o tempo em segundos, tem-se $\text{velocidade}\left(\frac{m}{s}\right) x\ \text{tempo}(s) = \text{distância}(m)$
O texto retoma a ideia de que a distância percorrida pelo objeto é, aproximadamente, a soma das distâncias percorridas em cada intervalo. Tal procedimento leva à afirmativa de que, quanto maior o número de intervalos considerados, melhor ou mais aproximada será a estimativa do valor da distância percorrida pelo objeto. A distância exata é dada pelo limite:

$$d = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t \qquad (3)$$

O texto sugere que a distância percorrida é igual à área sob o gráfico da função velocidade. A subseção termina observando que, ao computar áreas, é preciso ter em mente que elas podem ser interpretadas de várias formas práticas.

A subseção 5.2 trabalha com os limites encontrados na subseção 5.1 e, com base nesses limites, apresenta a definição de integral definida:

> Se f é uma função contínua definida para $a \le x \le b$, dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$ os extremos desses subintervalos e vamos escolher os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \cdots, x_n^*$ desses subintervalos de tal forma que x_i^* está no i-ésimo subintervalo $\left[x_{i-1}^*, x_i^*\right]$.
> Então, **a integral definida de f é** $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$.

Depois de apresentar essa definição, o texto apresenta cinco notas que detalham os símbolos que nela aparecem e indicam, por meio de exemplos, os múltiplos significados da integral definida.

A subseção traz, também, a Regra do Ponto Médio que possibilita o cálculo aproximado do valor da integral considerada. Por fim, a subseção lista e explica as propriedades da integral definida.

A subseção 5.3 faz um estudo detalhado do Teorema Fundamental do Cálculo, visto como o método matemático sistemático que estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o integral. A demonstração, feita em duas partes, usa uma prova algébrica, sempre apoiada na ideia geométrica. Na primeira parte, o texto demonstra que se f for contínua em um intervalo $[a,b]$, então a função g definida por $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, com $a \le x \le b$, é contínua em $[a,b]$, é diferenciável em (a,b) e $g'(x)=f(x)$. A segunda parte afirma que se f for contínua em um intervalo $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$, onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F'(x)=f(x)$.

A subseção 5.4 visita a integral indefinida, introduz uma notação para antiderivadas, revê as fórmulas para antiderivadas e indica o uso de antidiferenciais para calcular integrais definidas. Tendo em vista tornar o Teorema Fundamental do Cálculo de mais fácil memorização e de melhor aplicação prática para o cômputo da integral definida, o autor sugere a fórmula $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$. O texto sublinha, ainda, a diferença entre a integral definida, que é um número real, e a integral indefinida, dada pela fórmula $\int F'(x)\,dx = F(x)+C$, uma família de funções que têm a mesma derivada.

A subseção 5.4 termina apresentando o Teorema da Variação Total, de acordo com o qual, a integral de uma taxa de variação é a variação total. Na fórmula apresentada anteriormente, $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$, $F'(x)$ é a taxa de variação de $F(x)$ no intervalo $[a,\, b]$, enquanto a integral $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$ é a soma de infinitas pequenas taxas de variação.

A subseção 5.5 apresenta a regra de substituição de variável, o que aumenta de modo expressivo o leque de possibilidades de cálculo de antiderivadas. A subseção termina indicando como funciona a regra de substituição para as integrais definidas.

A subseção 5.6 define o logaritmo como uma integral: a função logaritmo natural é uma função definida por $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt,\ x > 0$. Para $x = 1$, temos $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$. Para $0 < x < 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$. A partir da definição do logaritmo natural, a subseção define o número *e*. Também são definidas as funções exponenciais e as logarítmicas de base qualquer.

No exame das várias subseções deste capítulo 5, é possível perceber que professores e alunos têm excelente material para produzirem uma sequência didática. A linguagem utilizada é adequada a um curso de graduação. O capítulo traz muitas aplicações práticas integradas ao conteúdo, o que permite mobilizar a capacidade investigativa do estudante e facilita a incorporação do método matemático de abordagem de problemas.

As diferentes atividades sugeridas pelo texto permitem que o aluno identifique conceitos e os reconstrua por meio de interlocução, observação, investigação, análise, síntese e avaliação.

São muitos e de boa qualidade os livros à disposição no mercado nacional para o estudo de Cálculo, entre os quais selecionamos três para analisar. Esses livros de Cálculo que analisamos, e indicados como livros-texto em cursos da área de Ciências Exatas, apresentam algumas características comuns. A principal delas é a ênfase nos exemplos, nas aplicações e nos problemas relacionados a fatos físicos ou geométricos, que servem tanto para elucidar o desenvolvimento de conceitos teóricos, quanto para evidenciar a notável versatilidade do Cálculo, na pesquisa de importantes questões científicas. Outra característica é o cuidado para usar clareza de linguagem, exposição direta, intuitiva e precisa das ideias do Cálculo, que tem como pressuposto tornar a matemática mais acessível e, assim, mais fácil de aprender, sem perda do rigor.

A exposição de assuntos, em geral, gira em torno de exemplos da utilização do Cálculo, para resolver problemas reais de interesse das pessoas. Ao selecionar tais problemas para exemplos e exercícios, os autores parecem ter como pressuposto que a estimulação do interesse e a motivação para um estudo efetivo caminham de mãos dadas. As diversas aplicações do Cálculo são o que deve atrair estudantes para o assunto e servem de apoio para uma abordagem intuitiva que dá ênfase tanto à parte conceitual como ao rigor na formulação de definições e conceitos-chave da disciplina.

É comum, nos livros de Cálculo, a inserção de muitos exercícios operatórios, antes da abordagem de conjuntos de problemas conceituais e de aplicação; tal procedimento tem como finalidade, de acordo com os autores, assegurar que o estudante adquira suficiente domínio em manipulações algébricas, o que é visto como instrumental indispensável para resolver problemas conceituais e questões práticas que exijam análise de situações concretas.

Encontra-se, também, nos livros? a sugestão do uso de calculadora gráfica ou de *softwares* que possibilitem cálculos matemáticos, o traçado de gráficos de funções, o desenvolvimento de algoritmos, a modelagem de problemas, bem como a análise, a exploração e a visualização de dados. São numerosos os problemas baseados em gráficos que enfatizam o entendimento de conceitos e familiarizam o estudante com o uso da microeletrônica, não somente para obter respostas, mas, especialmente, para entender o processo utilizado para a sua obtenção. Além de contribuir para a revitalização do Cálculo, essa estratégia visa a contribuir para evitar que os cálculos (os algoritmos) tornem-se uma barreira para o bom entendimento conceitual ou, em sentido contrário, se tornem o escopo principal, quando se estuda esta matéria.

Os autores citados deixam transparecer, nos textos que escreveram, o próprio entusiasmo pela Matemática, dissertam sobre o fascínio do Cálculo e o apontam como um eficiente método científico para a abordagem de inúmeros problemas, nos diferentes campos do saber. A profusão de notas histórico-biográficas lembra ao estudante que os responsáveis pelo desenvolvimento do assunto são seres humanos e que o conhecimento é uma construção social.

Estas observações, colhidas nos prefácios de livros de Cálculo caracterizam um discurso institucional que faz do Cálculo uma disciplina básica, ou seja, aquela que favorece o aprendizado de um modo de descrever e abordar fenômenos e situações. Conforme defendido por Platão, o verdadeiro valor pedagógico da Matemática e, por inclusão, do Cálculo, não está em seu conteúdo, mas em seu método, uma vez que somente essa forma rigorosa e perfeita de se raciocinar pode constituir-se em prelúdio à dialética, à ciência das ideias.

Cabe, pois, aos professores, em maior grau, e aos alunos, em menor, fazer do estudo de Cálculo uma construção de sequências didáticas que sirvam à incorporação da Matemática como arte e técnica de organizar, conhecer e pensar. Para que isso aconteça, é necessário que se passe da desgastada expressão *dar e assistir aula* para ‘o *fazer aula’*, como utilizado em uma academia de ginástica.

5 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS COMO ESTRUTURA METODOLÓGICA DA PESQUISA

Sequência didática é uma nomenclatura que fala por si, mas, não é comum paramos para pensar no que, de fato, significa. Como o vocábulo sequência significa “ação de seguir”, podemos dizer que sequências didáticas são etapas continuadas ou conjuntos de atividades escolares de um tema que tem como objetivo ensinar um conteúdo, etapa por etapa. É um sintagma, uma expressão usada para definir um contíguo de atividades escolares de maneira sistemática, de acordo com objetivos definidos pelo professor, e encadeado de passos e etapas interligadas, para tornar mais eficiente o processo de aprendizado. É, também, definida por Zabala (1998, p. 18) como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos, tanto pelos professores como pelos alunos.” Pontua ainda que “satisfaz de maneira adequada muitas das condições que fazem com que a aprendizagem possa ser a mais significativa possível” (ZABALA, 1998, p. 69).

O desenvolvimento de sequências didáticas no ensino de Cálculo desperta o interesse do aluno, tornando-o mais participativo, uma vez que ele interage com o professor e os demais alunos, opina, sugere e faz descobertas próprias. Para Zabala (1998), ao pensar a configuração das sequências didáticas, o professor se coloca em um dos caminhos eficientes para melhorar a prática educativa, uma vez que pode ser planejada de forma a garantir muitas das condições que fazem com que a aprendizagem possa ser o mais significativa possível, permitindo prestar notável atenção às características diferenciais dos alunos, favorecendo seu protagonismo.

As sequências didáticas que buscam temas motivadores favorecem a aprendizagem e o envolvimento do aluno, pois, com sua utilização, ele ganha voz na sala de aula, podendo trocar opiniões e refletir sobre o conteúdo abordado.

Nesta proposta, para o desenvolvimento das sequências didáticas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, em particular nas aplicações que envolvem a Integral, pretendemos, além de compor uma sequência didática, através da resolução de problemas, utilizando um *software* matemático, buscar encontrar uma maneira dinâmica de promover a interação entre o estudante com o objeto estudado, sob a perspectiva de uma sequência didática com foco em resolução de problemas que propiciam a construção do conhecimento, ao mesmo tempo em que permite a experimentação, generalização, abstração e formação de significados.

5.1 A construção das sequências didáticas

As sequências didáticas elaboradas para a presente pesquisa tiveram como intuito a construção dos gráficos, a partir de problemas propostos, visando obter as interseções entre as curvas e estabelecer os intervalos de integração para o cálculo das áreas e volumes. Elas foram divididas em duas etapas agrupadas em um caderno de atividades.

Este caderno de atividade é parte fundamental de uma pesquisa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas. Tem como objetivo geral trazer uma contribuição para o docente que atua com o ensino de cálculo em cursos de Engenharia, a partir de um instrumento que auxilie o reconhecimento dos Intervalos de Integração com aplicações no cálculo de áreas e volumes, usando sequências didáticas com resolução de problemas e visualização no Maple.

O *Maple* é um *software* matemático que dispõe, dentre outras possibilidades, de ferramentas gráficas que facilitam a visualização de resultados, plotando gráficos em 2 ou 3 dimensões.

Este caderno é composto por duas etapas de atividades que serão desenvolvidas em duplas, na sala de aula, sob a orientação do professor

Para se familiarizar com a sintaxe do *software Maple*, primeiramente, é importante que cada dupla acompanhe os exemplos dados pelo professor e, após esta etapa, resolva os problemas propostos e responda ao questionário de avaliação da presente proposta de trabalho.

No decorrer das atividades anote as observações. Após o término das sequências, responda ao questionário.

A primeira etapa do caderno sob o título *Utilização do software Maple para o cálculo de áreas e volumes*, foi composta por duas atividades:

Para atividade 1, “Integral simples para o cálculo de área plana limitada entre curvas” foram definidos os seguintes objetivos:

a) introduzir os comandos básicos e as bibliotecas do Maple necessários para resolver o problema proposto;
b) traçar gráficos de cada uma das funções, utilizando o *software* Maple;
c) determinar as interseções de duas curvas;
d) Identificar os intervalos de integração;
e) plotar a região hachurada delimitada pelas curvas;
f) estabelecer a Integral Simples, a partir de retângulos infinitesimais;
g) calcular a Integral que nos fornece o valor da érea da região limitada por duas curvas.

A metodologia orienta uma sequência didática, a partir de problemas para a construção dos gráficos, utilizando o *software Maple* e visa a obter as interseções entre as curvas e estabelecer os intervalos de integração para o cálculo das áreas, envolvendo duas funções.

Esta atividade foi organizada a partir de três problemas, o primeiro resolvido passo a passo e, os demais propostos para que os acadêmicos os resolvessem.

PROBLEMA 1

Calcule a área da região plana de R^2 limitada pelos gráficos de
$f(x) = 9 - x^2$ e $g(x) = 3 - 2x$.

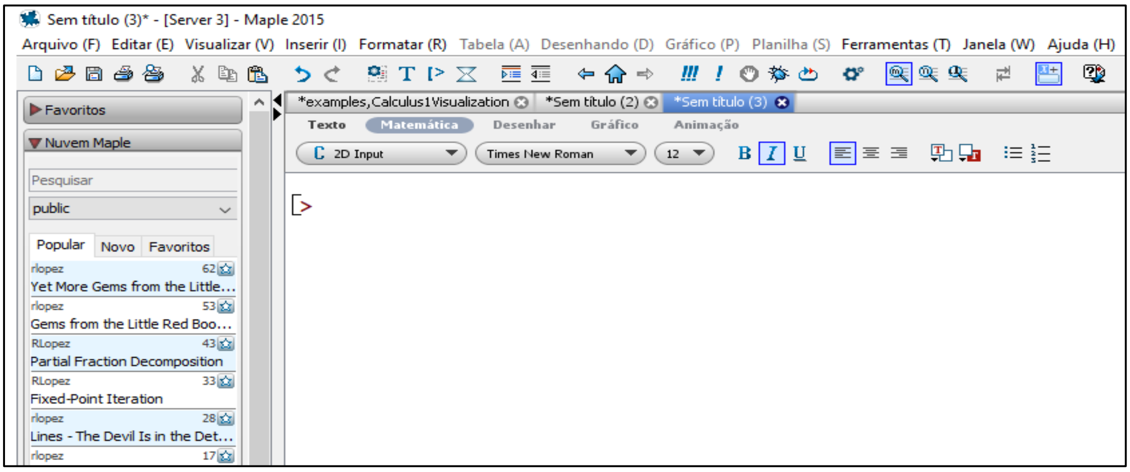
Para plotar o gráfico de cada uma das curvas, seguiremos os seguintes passos:

Passo 1

Plotando o gráfico de $f(x) = 9 - x^2$.

1. Abrir o *software Maple;*
2. Digitar os comandos no *prompt* (símbolo >) e a tecla enter*;*

Figura 1: Tela inicial do *software Maple*



Fonte: Dados da pesquisa

3. Digitar $> restart$ para iniciar a atividade;
4. Utilizar as bibliotecas gráficas;

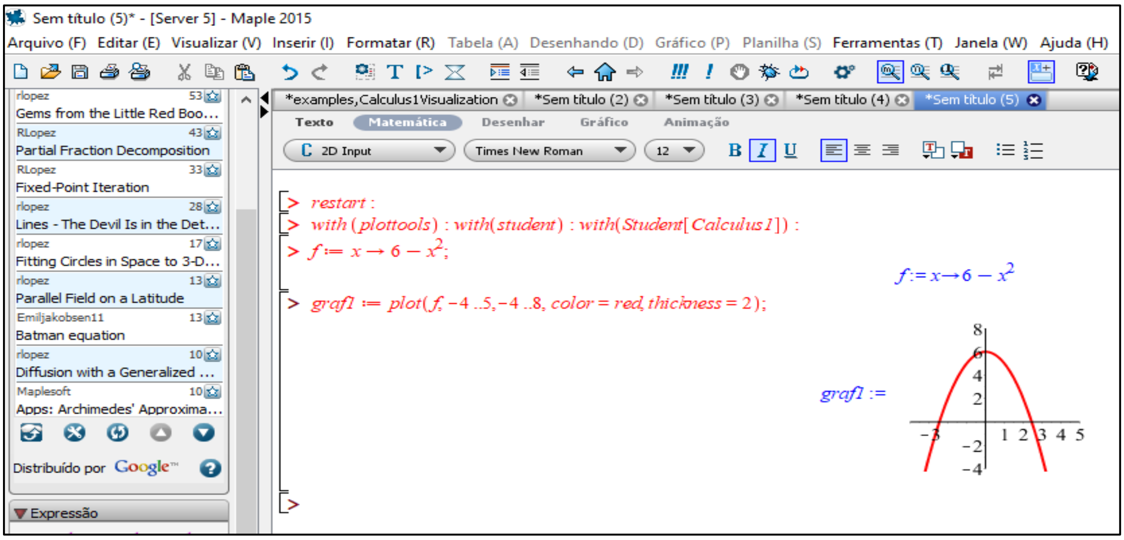
$$> with(plottools): with(student): with(Student[Calculus1]:$$

5. Apertar “Enter”;
6. Digitar a função dada no problema. $f := x \rightarrow 6 - x^\wedge 2;$
7. Apertar “Enter”;
8. Utilizar as bibliotecas gráficas para o esboço do gráfico:

$$graf1 := plot(f, -4..5, -4..8, color = red, thickness = 2;$$

9. Apertar “Enter”.

Figura 2: Gráfico da função $f(x) = 9 - x^2$.



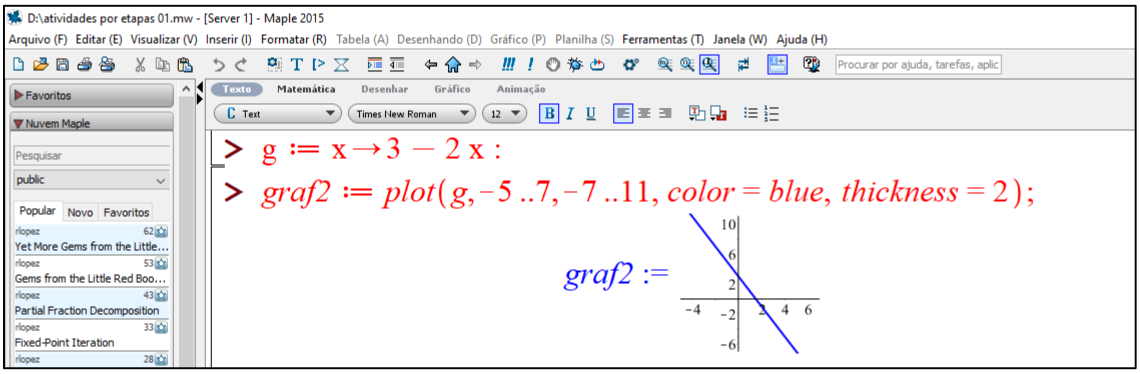
Fonte: Dados da pesquisa

Passo 2

Plotando o gráfico de $g(x) = 3 - 2x$.

1. Abrir o *software Maple;*
2. Digitar os comandos no prompt (símbolo >) e a tecla enter*;*
3. Digitar $> restart$ para iniciar a atividade*;*
4. Utilizar as bibliotecas gráficas, conforme a Figura 3.

Figura 3: Gráfico da função $g(x) = 3 - 2x$.



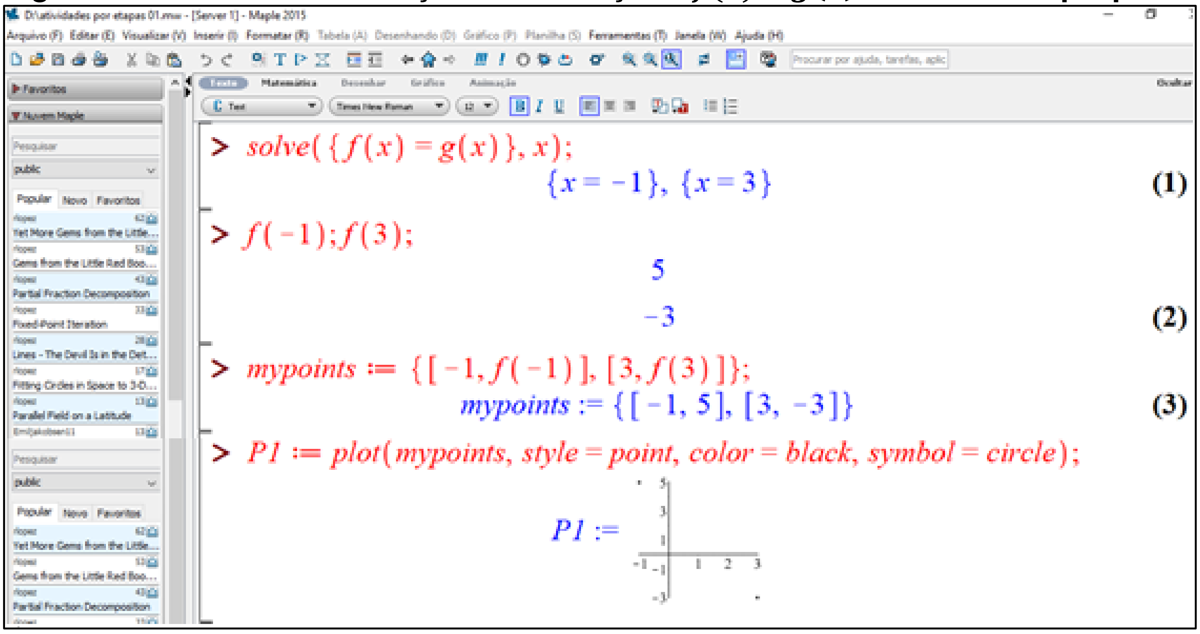
Fonte: Dados da pesquisa

Passo 3

Determinando a interseção da reta com a parábola.

1. Utilize o comando “solve” que nos permite determinar os pontos de intersecções das curvas dadas, conforme a Figura 4:

Figura 4: Pontos de interseções das funções $f(x)$ e $g(x)$ da atividade proposta



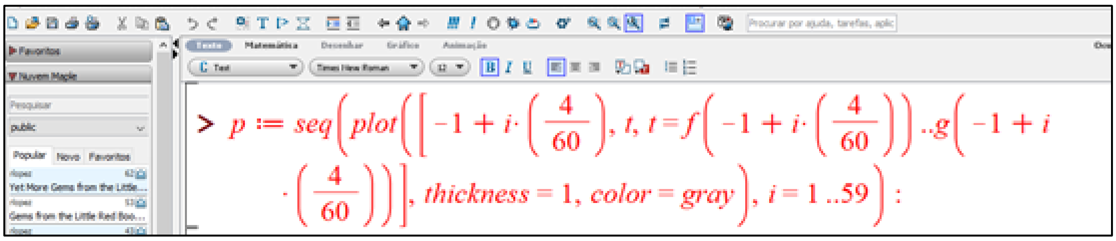
Fonte: Dados da pesquisa

Passo 4

Definindo e plotando a região hachurada delimitada pelas curvas “f” e “g”.

1. Utilizar as bibliotecas gráficas, conforme a Figura 5.

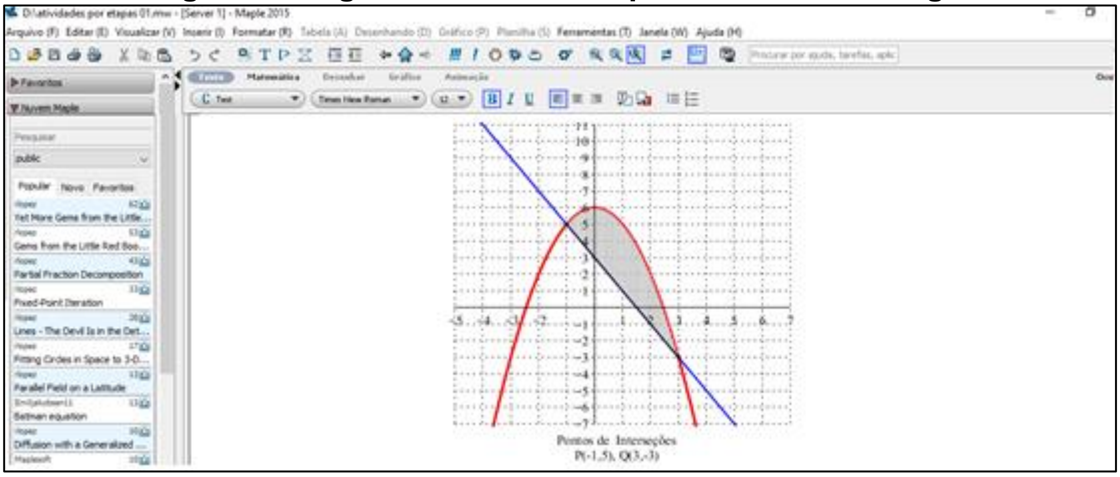
Figura 5: Comandos para as regiões hachuradas.



Fonte: Dados da pesquisa

2. Utilizar o comando $> display(graf1, graf2, p, P1)$; para plotar o gráfico.

Figura 6: Região determinadas pelas curvas “f” e “g”.



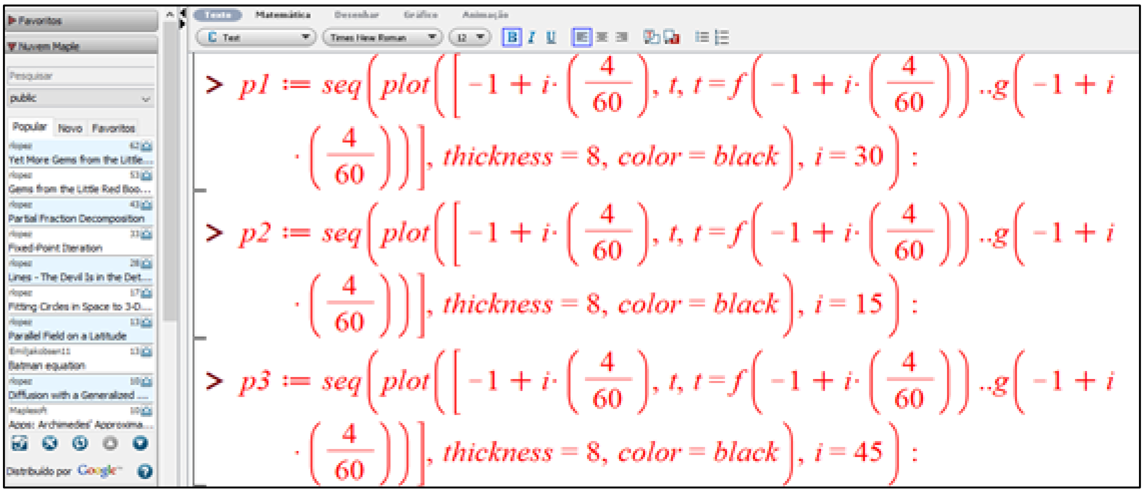
Fonte: Dados da pesquisa

Passo 5

Plotando alguns retângulos infinitesimais que representam uma parte da área a ser determinada.

1. Utilizar as bibliotecas gráficas, conforme a Figura 7:

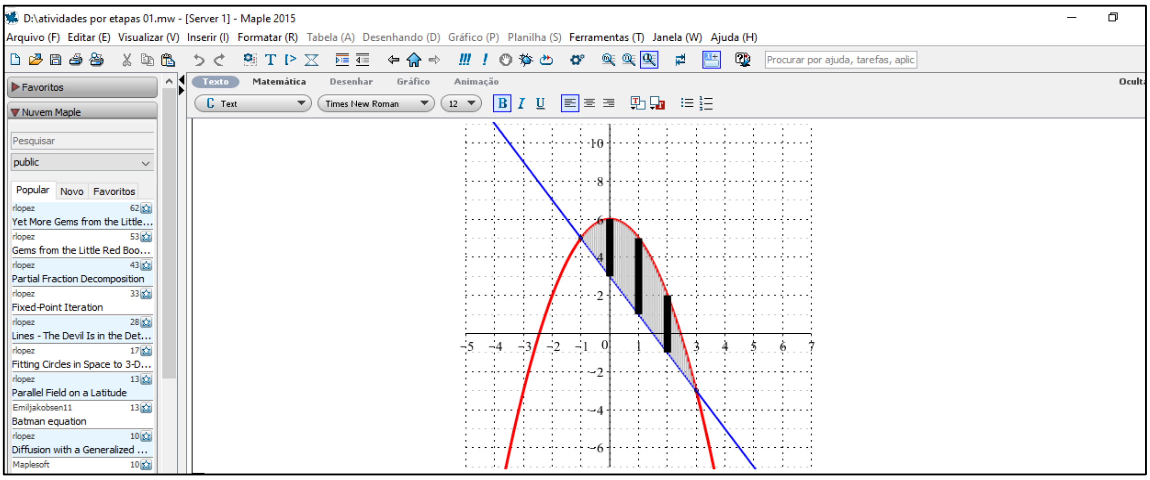
Figura 7: Comandos para os retângulos infinitesimais.



Fonte: Dados da pesquisa

2. Utilizar o comando $> display(graf1, graf2, p, p1, p2, p3, P1)$; para plotar o gráfico.

Figura 8: Retângulos infinitesimais.



Fonte: Dados da pesquisa

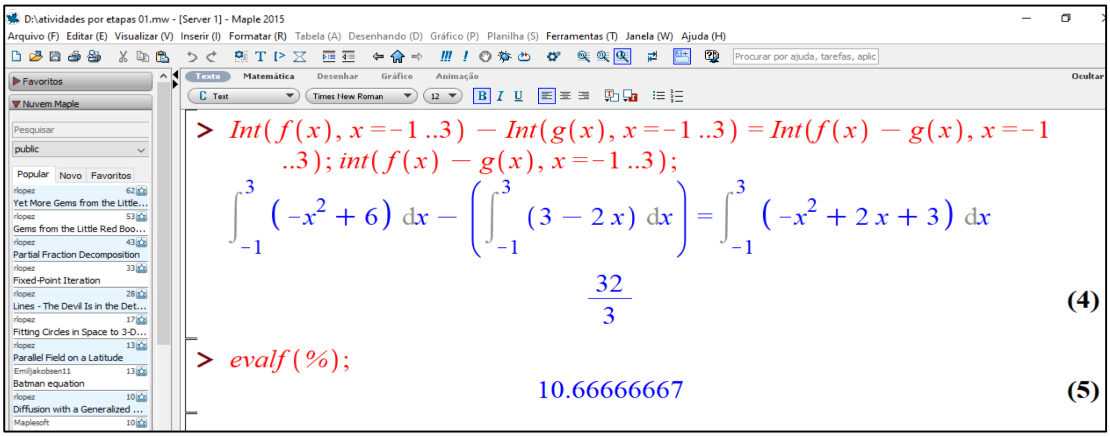
Passo 6

Verifique o retângulo infinitesimal varrendo a área hachuradas no intervalo $x = -1$ a $x = 3$, estabeleça e calcule a Integral.

Assim, teremos o respectivo intervalo de integração, ou seja, $[-1,3]$ que nos permite estabelecer a Integral para o cálculo da área.

1. Utilizar as bibliotecas gráficas conforme a Figura 9:

Figura 9: Comandos para cálculo da Integral da atividade proposta.



Fonte: Dados da pesquisa

Seguindo os passos do problema 1, determine agora, outras áreas compreendidas entre a parábola e reta nas seguintes situações.

PROBLEMA 2

Calcule a área da região plana de R^2 limitada pelos gráficos de $f(x) = x^2 - 8$ e $g(x) = 2$.

a) Passo 1:
- Plote o gráfico de $f(x) = x^2 - 8$.

b) Passo 2:
- Plote o gráfico de $g(x) = 2$.

c) Passo 3:
- Determine a intersecção da reta com a parábola.

d) Passo 4:
- Defina e plote a região hachurada delimitada pelas curvas “f” e “g”.

e) Passo 5:
- Plote alguns retângulos infinitesimais que representam uma parte da área a ser determinada.

f) Passo 6:
- Verifique o retângulo infinitesimal varrendo a área da região hachurada no intervalo $x = -1$ a $x = 3$, estabeleça e calcule a Integral.

PROBLEMA 3

Calcule a área da região plana de R^2 limitada pelos gráficos de $f(x) = -\,x^2 + 4$ e $g(x) = -x + 1$

a) Passo 1:
   - Plote o gráfico $f(x) = -\,x^2 + 4$.

b) Passo 2:
   - Plote o gráfico de $g(x) = -x + 1$

c) Passo 3:
   - Determine a intersecção da reta com a parábola.

d) Passo 4:
   - Defina e plote a região hachurada delimitada pelas curvas “f” e “g”.

e) Passo 5:
   - Plote alguns retângulos infinitesimais que representam uma parte da área a ser determinada.

f) Passo 6:
   - Verifique o retângulo infinitesimal varrendo a área da região hachurada no intervalo $x = -1$ a $x = 3$.

Para a atividade 2, Integral simples para o cálculo de área plana em regiões limitadas por mais de uma curva, foram definidos os seguintes objetivos:

a) introduzir os comandos básicos e as bibliotecas do Maple necessários para resolver o problema proposto;
b) traçar gráficos de cada uma das funções, utilizando o *software Maple*;
c) determinar as interseções das três curvas;
d) identificar os intervalos de integração;
e) plotar a região hachurada delimitada pelas curvas;

f) estabelecer a Integral Simples a partir de retângulos infinitesimais;

g) calcular a Integral que nos fornece o valor da área da região limitada por três curvas.

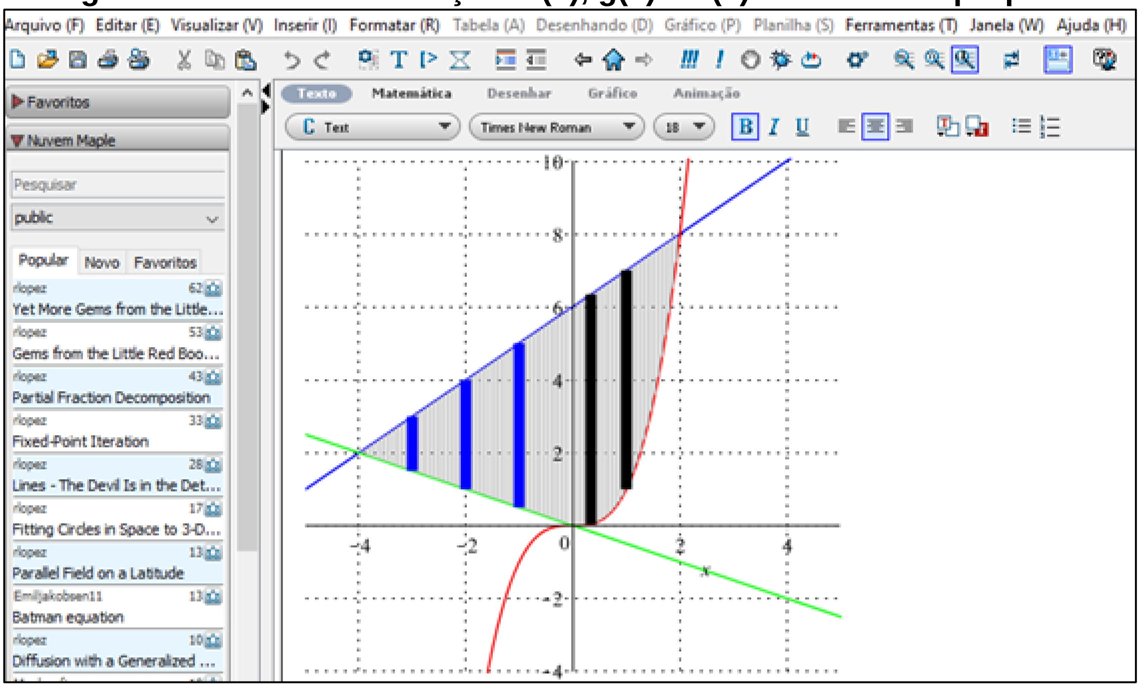
Utilizamos a atividade sequência didática com problemas para a construção dos gráficos, utilizando o *software Maple* e visou obter as interseções entre as curvas e estabelecer os intervalos de integração para o cálculo das áreas, envolvendo três funções.

Esta atividade foi organizada, a partir de três problemas, o primeiro resolvido passo a passo e, os demais propostos para que os acadêmicos os resolvessem.

PROBLEMA 1

Calcule a área da região R limitada pelos gráficos $f(x) = 6 + x$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = -\frac{x}{2}$.

Figura 10: Gráfico das funções f(x), g(x) e h(x) da atividade proposta



Fonte: Dados da pesquisa

Passo 1

Nesta atividade, podemos observar que os retângulos estão limitados superiormente e inferiormente, por curvas distintas. Nesse caso, subdividimos as regiões em duas, como na Figura acima.

Passo 2

Plote cada curva num sistema de eixos:

- f(x) e g(x); (4)
- f(x) e h(x) ;
- h(x) e g(x).

Passo 3

Determinar os interceptos das curvas:

$$6 + x = -\frac{x}{2} \to x = -4 \ (reta\ com\ reta)$$
$$-\frac{x}{2} = x^3 \ \to x = 0, [-4,0] \ (para\ a\ região\ à\ esquerda) \quad (5)$$
$$6 + x = x^3 \to x = 2, [0,2](\ para\ a\ região\ à\ direita)$$

Logo, podemos estabelecer as Integrais para o cálculo da área das regiões descritas, ou seja,

A área do intervalo de x variando de -4 a 0 é dada por

$$\int_{-4}^{0} \left[(x+6) - \left(-\frac{x}{2}\right)\right] dx = 12 \quad (6)$$

A área do intervalo de x variando de 0 a 2 é dada por:

$$\int_0^2 [(x+6) - (x^3)]dx = 10 \qquad (7)$$

A área de toda a região hachurada é, pois, $12 + 10 = 22$ unidades de área.

Seguindo os passos do problema 1, simule agora, outras áreas compreendidas entre as curvas, nas seguintes situações.

Seguindo os passos do problema 1, determine agora, outras áreas compreendidas entre a parábola e reta nas seguintes situações.

PROBLEMA 2

Calcule a área da região R limitada pelos gráficos $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ e $h(x) = 4$.

Passo 1:

Nesta atividade, podemos observar que os retângulos estão limitados superiormente e inferiormente, por curvas distintas. Nesse caso, subdividimos as regiões em duas, como na Figura 9.

Passo 2:

Plotar cada curva num sistema de eixos:

- f(x) e g(x);
- f(x) e h(x); (8)
- h(x) e g(x).

Passo 3:

Determinar os interceptos das curvas, estabelecer as Integrais para o cálculo da área das regiões descritas e determinar a área total hachurada.

PROBLEMA 3

Calcule a área da região R limitada pelos gráficos $f(x) = cosx$, $g(x) = senx$ e $h(x) = \frac{\pi}{2}$.

Passo 1:

Nesta atividade, também podemos observar que os retângulos estão limitados superiormente e inferiormente, por curvas distintas. Nesse caso, subdividimos as regiões em duas, como na Figura 9.

Passo 2:

Plote cada curva num sistema de eixos:

- f(x) e g(x);
- f(x) e h(x) ; (9)
- h(x) e g(x).

Passo 3:

Determinar os interceptos das curvas, estabelecer as Integrais para o cálculo da área das regiões descritas e determinar a área total hachurada.

A segunda etapa do caderno sob o título “Determinação dos Limites de Integração do cálculo de volumes com Integrais duplas”, foi composta por uma atividade: a atividade 1, “Integral dupla para o cálculo de volume”, que teve como objetivos:

a) introduzir os comandos básicos e as bibliotecas do Maple necessários para resolver o problema proposto;
b) utilizar o *software Maple* para plotagem em R^3;
c) identificar os intervalos de integração;
d) estabelecer a Integral Dupla, a partir de retângulos infinitesimais;
e) calcular o volume de um sólido.

Como metodologia, em relação aos procedimentos, aplicamos uma sequência didática com problemas para a construção dos gráficos, utilizando o *software Maple,* visando a obter as interseções entre as curvas e estabelecer os intervalos de integração para o cálculo do volume.

Esta atividade foi organizada, a partir de três problemas; o primeiro resolvido passo a passo e, os demais propostos para que os acadêmicos os resolvessem.

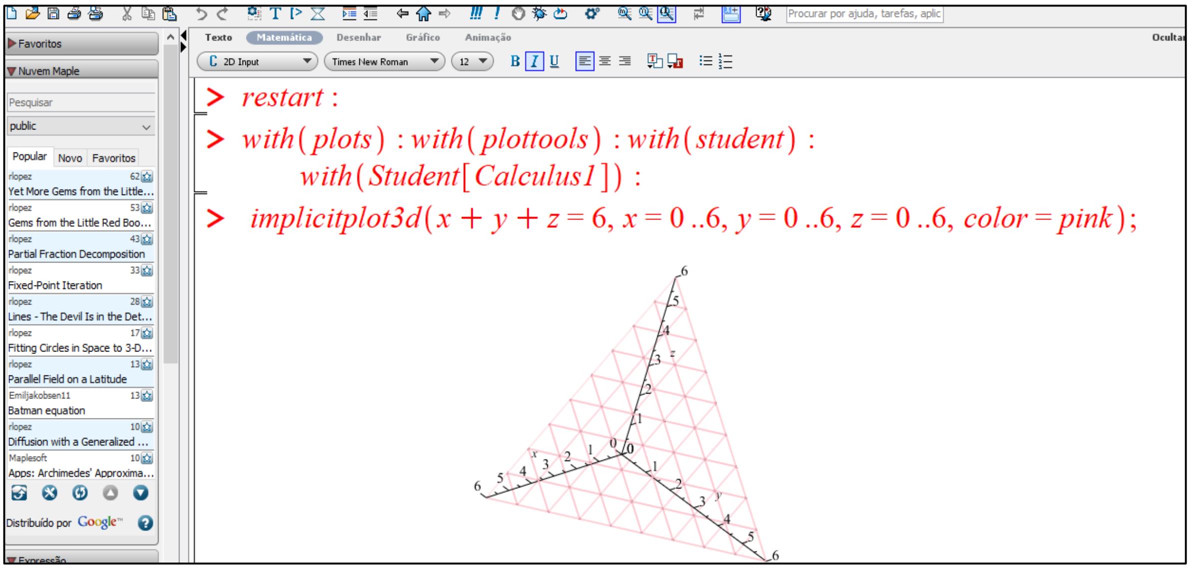
PROBLEMA 1

Calcule o volume do tetraedro de $x + y + z = 6$ no primeiro octante.

Passo 1

Plotar o sólido:

Figura 11: Gráfico do tetraedro

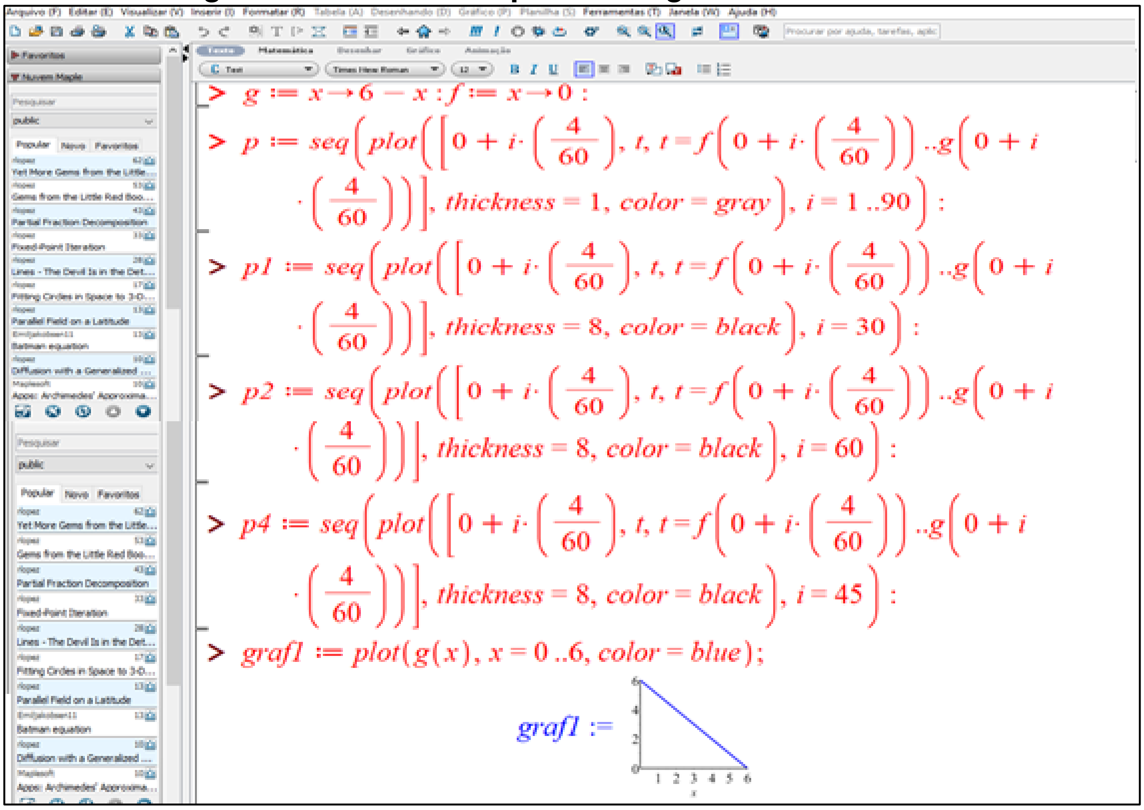


Fonte: Dados da pesquisa

Passo 2

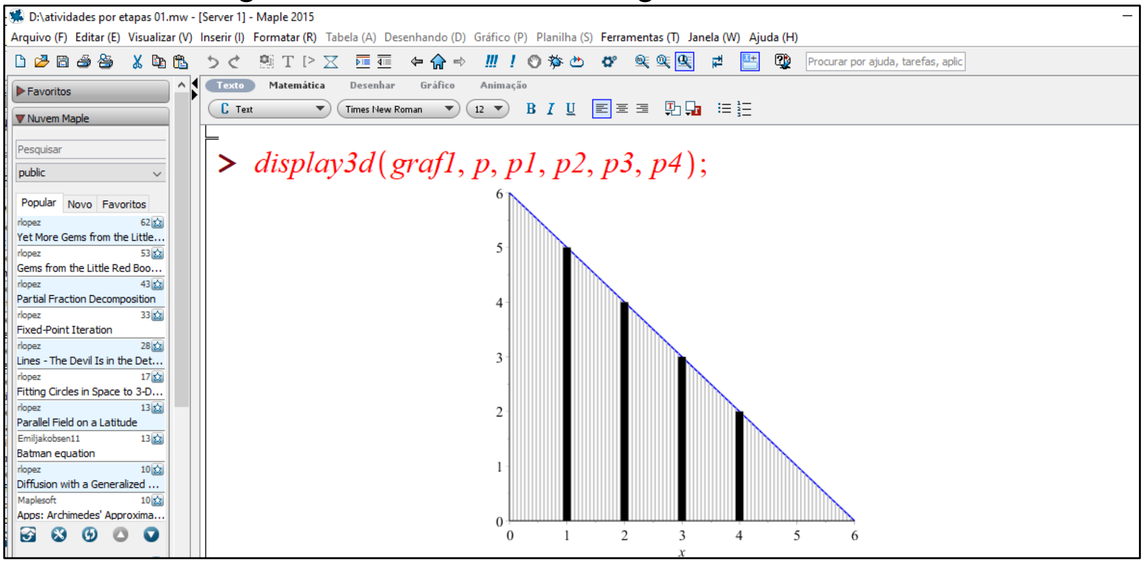
1. Plotar a região de integração no plano xy e alguns retângulos infinitesimais que representam uma parte da área da região a ser determinada, a partir dos comandos da Figura 11.
2. Utilizando o comando $> \ display3d(graf1, p, p1, p2, p3, p4)$; traçar o gráfico que apresenta os retângulos infinitesimais (Figura 12).

Figura 12: Comandos para retângulos infinitesimais.



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 13: Gráfico dos retângulos infinitesimais



Fonte: Dados da pesquisa

Passo 3:

Verificar os retângulos infinitesimais, varrendo a área hachurada no intervalo $x = 0$ a $x = 6$.

Assim, teremos o respectivo intervalo de integração em relação à variável x e os extremos dos retângulos infinitesimais nos fornece a variação de y que vai $y = 0$ até a reta $y = 6 - x$.

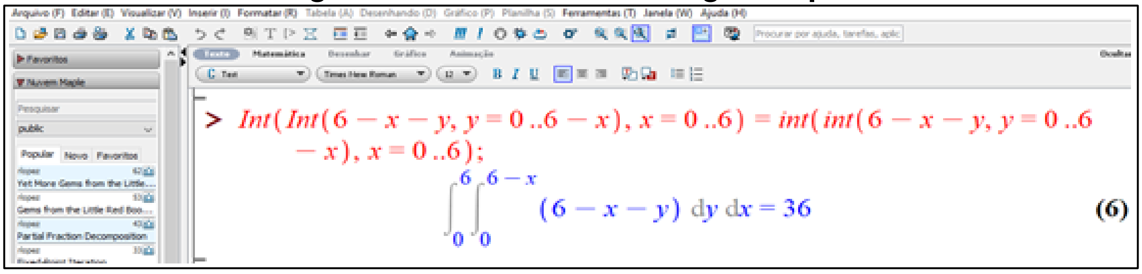
Esta reta $y = 6 - x$ é obtida fazendo $z = 0$ na equação, pois se trata das interseções do plano $z = 0$ e o plano $x + y + z = 6$, isto é $y = 0 \rightarrow x + z = 6 \rightarrow z = 6 - x$

$$\Re = \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 6 - x \end{cases} \tag{10}$$

Passo 4:

Para estabelecer a integral dupla que resulta no valor numérico, na ordem de integração, a externa figura sempre os valores constantes de integração, que representa o volume do sólido limitado acima do plano $z = 0$.

Figura 14: Comando da Integral dupla.



Fonte: Dados da pesquisa

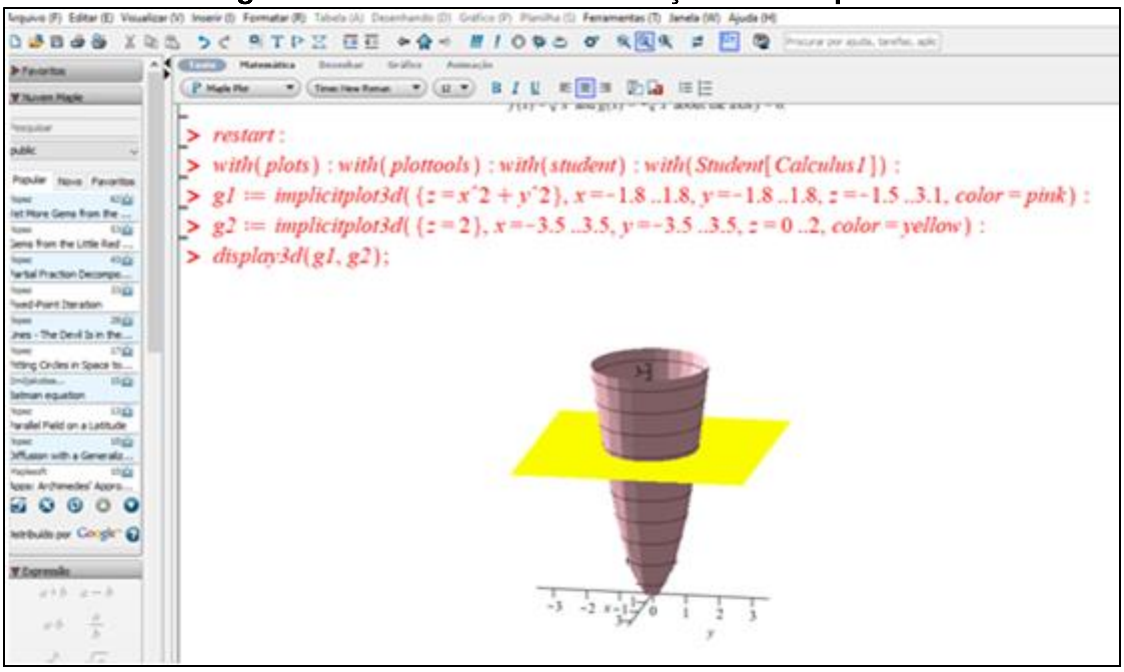
PROBLEMA 2

Volume do sólido limitado pelo plano $z = 2$ e pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$

Passo 1

Plotar o parabolóide e o plano.

Figura 15: Paraboloide interseção com o plano



Fonte: Dados da pesquisa

Passo 2

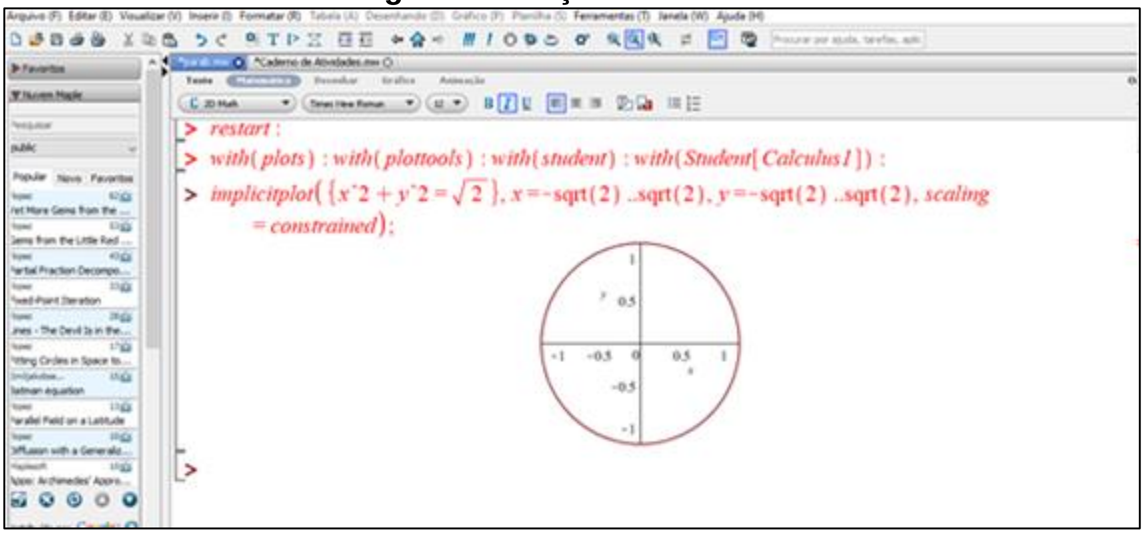
Plotar a região de integração $\Re$ do plano $z = 2$ sobre xy.

Para calcular os limites de integração no plano xy obtemos obtivemos? as interseções do paraboloide com plano $z = 2$, fazendo: $z = 2 \rightarrow 2 = x^2 + y^2$ ou $x^2 + y^2 = 2$.

Verifique que a integração é realizada no círculo de raio $\sqrt{2}$. Tomamos a variação do x numérica, e a variação do y no seu círculo superior

$(y = \sqrt{2 - x^2})$ e $(y = -\sqrt{2 - x^2})$.

Figura 16: Seção transversal



Fonte: Dados da pesquisa

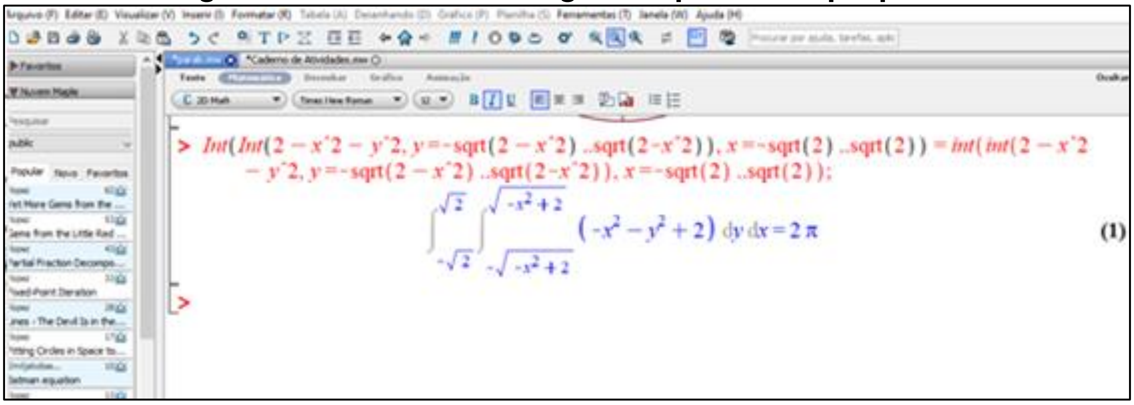
$$\Re = \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \end{cases} \tag{11}$$

Passo 3

Estabelecer a integral e calcular o volume.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2 - x^2}}^{\sqrt{2 - x^2}} (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx = 2\pi \tag{12}$$

Figura 17: Cálculo da Integral do problema proposto



Fonte: Dados da pesquisa

Seguindo os passos do problema 2, determine agora, o volume de outro sólido.

Problema 3

Calcule o volume do sólido limitado superiormente pelo paraboloide $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$ e pelo plano $z - 3 = 0$.

a) **Passo 1:**
   - Plotar o sólido;

b) **Passo 2:**
   - Plotar a região de integração $\mathfrak{R}$ do plano xy.;

c) **Passo 3:**
   - Estabelecer a integral e calcular o volume.

Após as etapas de atividades, o caderno trouxe o questionário que deveria se respondido pelos acadêmicos.

QUESTIONÁRIO

SOFTWARE MAPLE

a) você conhecia o *software Maple*?

☐ SIM ☐ NÃO

b) quais foram as dificuldades de manipulação dos *softwares*?

____
____
____
____
____
____
____
____
____

c) quais foram as dificuldades para o uso do *software* nas atividades?

____
____
____
____
____
____
____
____
____

CONTEÚDO

a) você já dominava o conteúdo trabalhado de cálculo de área e volume?

☐ SIM ☐ NÃO

b) houve facilidade para a compreensão do conteúdo?

COMPREENSÃO DOS LIMITES DE INTEGRAÇÃO

a) o *Maple* trouxe facilidade para a montagem da integral definida com seus limites?

b) em relação ao tipo de integral simples e dupla, a determinação dos limites de integração teve o mesmo nível de dificuldade?

SUGESTÕES OU OBSERVAÇÕES DAS ATIVIDADES

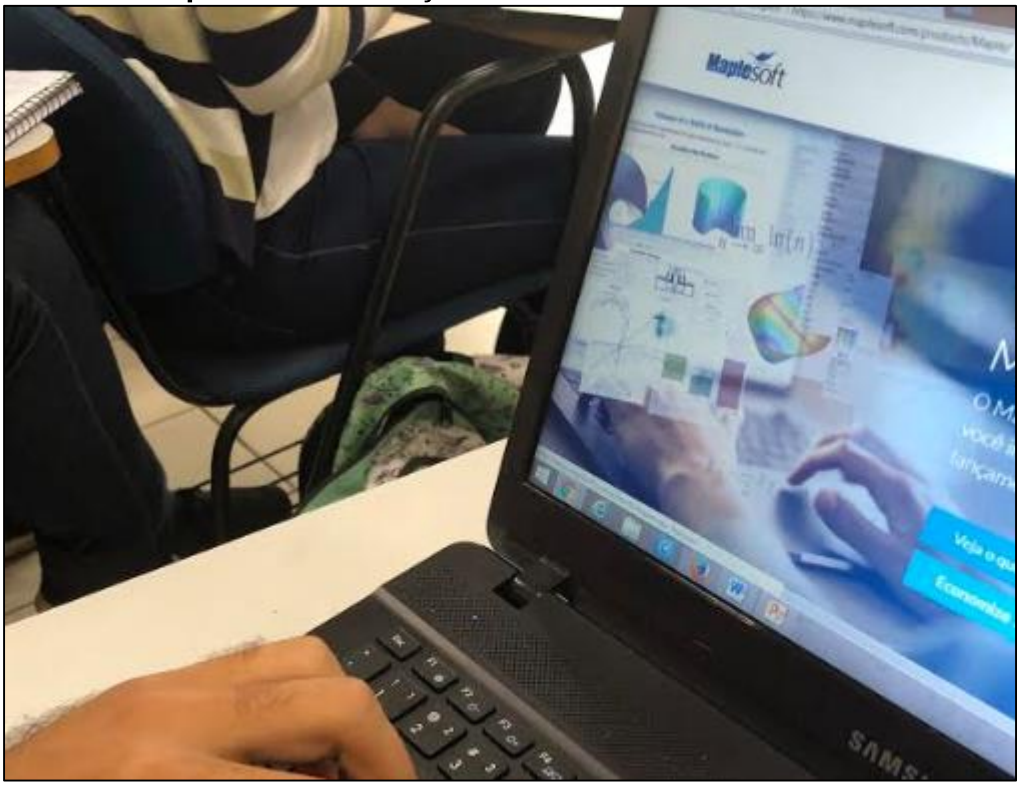
6 APLICAÇÕES E ANÁLISE DOS DADOS

Aplicamos as atividades em sala de aula, com os 22 alunos matriculados na disciplina de Cálculo III, do curso de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, unidade Contagem, e teve duração de 200 minutos, (quatro horas/aula).

Os alunos foram organizados em duplas, e cada uma delas utilizou seu próprio *notebook* com o *software Maple* previamente instalado na versão teste.

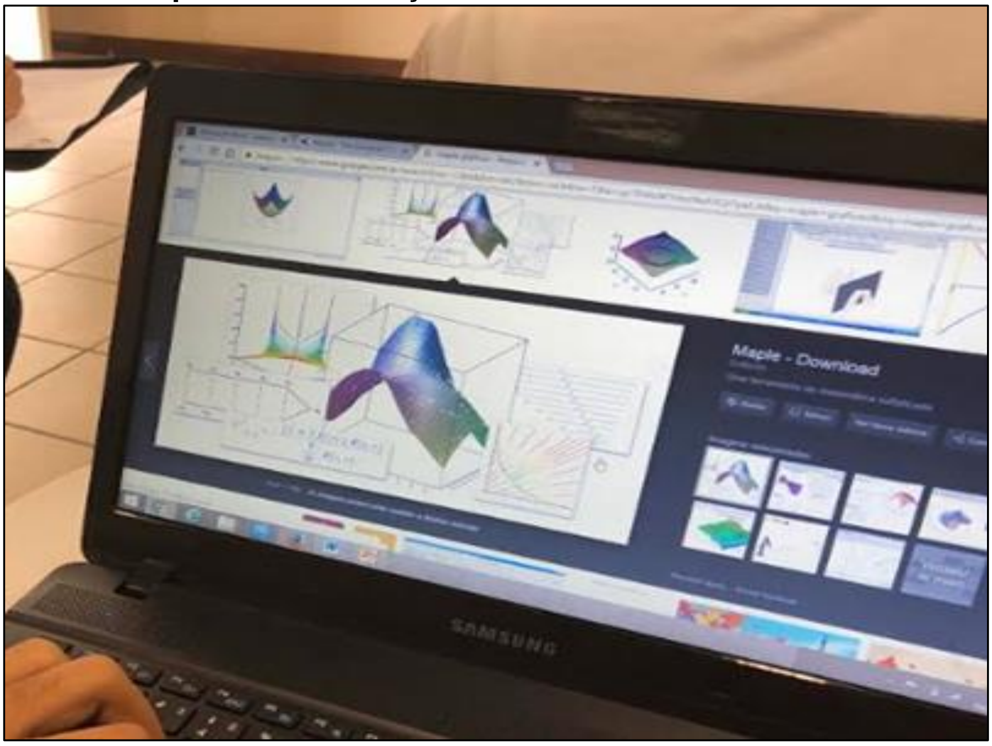
Nas duas primeiras aulas, apresentamos os objetivos definidos para a presente pesquisa, destacando a importância da utilização das sequências didáticas, demos as orientações para a execução das atividades que seriam aplicadas e fizemos a apresentação do *software Maple*. Para tanto, utilizamos *slides,* com o intuito de familiarizar o aluno com as sintaxes do *software*.

Figura 18 - Aula para familiarização com o *software utilizado nas atividades*



Fonte: Arquivo do autor

Figura 19 - Aula para familiarização com o *software utilizado nas atividades*



Fonte: Arquivo do autor

Nas aulas seguintes, as sequências didáticas de atividades foram aplicadas.

Primeiramente, distribuímos os cadernos de atividades, um para cada dupla, e fizemos uma leitura comentada da apresentação do caderno.

Em seguida, apresentamos o questionário que deveria ser respondido pelos acadêmicos, após concluídas as atividades. Salientamos que as observações deveriam ser anotadas no decorrer do processo de realização das sequências.

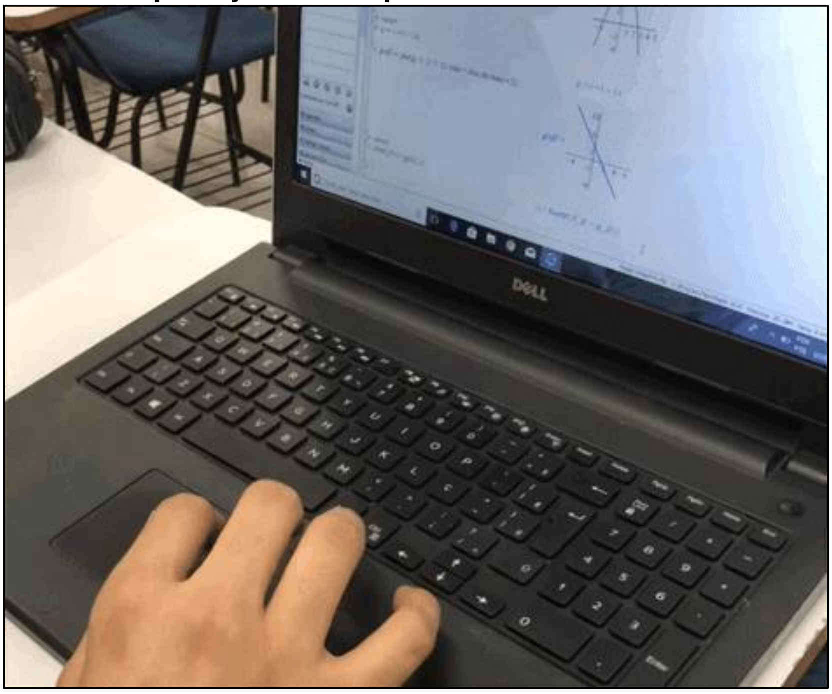
Após esta introdução, os alunos deram início às atividades que foram divididas em duas etapas:

a) Primeira etapa:
   - determinação dos Limites de Integração do cálculo de áreas com Integral Simples:
     - ✓ Integral Simples para o cálculo de área limitada entre duas curvas.
     - ✓ Integral Simples para o cálculo de área plana em regiões limitadas.

b) Segunda etapa:
   - determinação dos Limites de Integração do cálculo de volumes com Integrais Duplas.

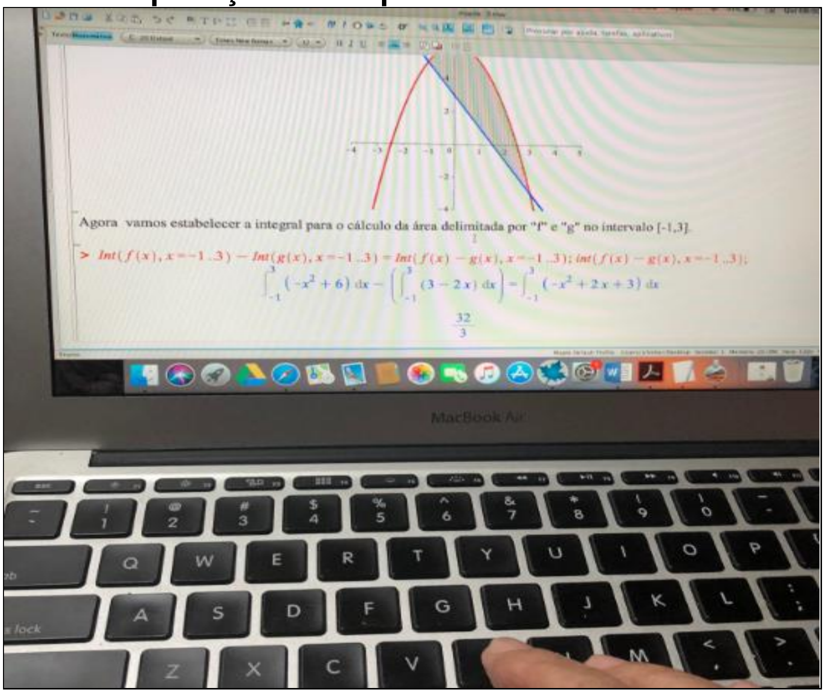
Cada uma, dessas unidades apresentavam situações problematizadas, resolvidas passo a passo, e exercícios propostos que deveriam ser executados pelas duplas.

Figura 20 - Aula de aplicação da sequência didática utilizado nas atividades



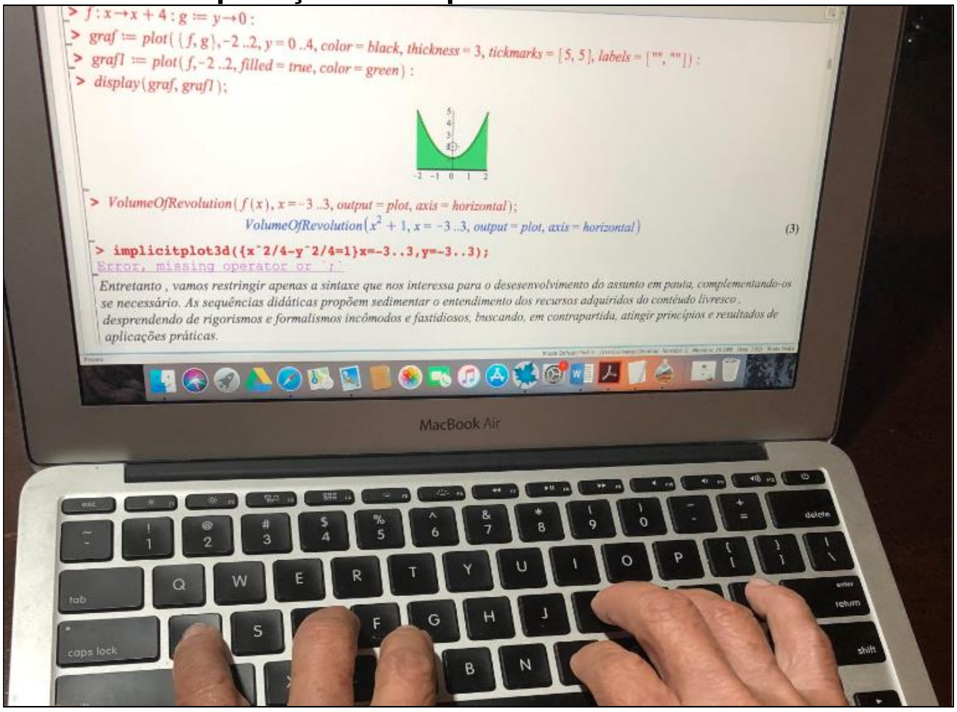
Fonte: Arquivo do autor

Figura 21 - Aula de aplicação da sequência didática utilizado nas atividades



Fonte: Arquivo do autor

Figura 22 - Aula de aplicação da sequência didática utilizado nas atividades



Fonte: arquivo do autor

Observamos que aquele era o primeiro contato dos acadêmicos com o *software,* na aula de apresentação do *Maple*.

Durante a aplicação das atividades, as dificuldades relatadas inicialmente, destacavam a utilização de outra língua, o inglês e a manipulação do *software Maple* em relação à sintaxe. Observemos seus depoimentos sobre o uso do *Maple.*

> Diferente da linguagem em C, a qual temos mais familiaridade, a linguagem, ou mais especificamente os comandos, expressões o que torna um pouco mais difícil (Dupla 10).
>
> A falta de familiaridades com a sintaxe utilizada no *software*, algumas expressões em inglês que não costumamos utilizar, acabávamos escrevendo errado. Mas o próprio *software* acusava o erro! (Dupla 10).
>
> O Uso do *software* foi muito complicado, devido aos diversos comandos que são intolerantes a qualquer erro de digitação (Dupla 8)
>
> Falta de experiência com o programa e falta de conhecimento sobre sua linguagem. (Dupla 6)
>
> Dificuldade na sintaxe de comandos, sendo necessário um grande tempo para entendimento das ferramentas deste, dificultando sua aplicação (Dupla 4)
>
> A sintaxe de difícil compreensão. (Dupla 3)

No decorrer da primeira etapa de resolução das atividades, as dificuldades foram superadas, visto que cada sequência indicava, passo a passo, a execução da tarefa, evidenciando e comentando os comandos que deveriam ser aplicados, a atividade a ser realizada em dupla e a postura do professor que atuou como mediador, conduzindo o acadêmico neste processo. Vejamos algumas de dificuldades que expuseram:

> As maiores dificuldades se encontraram na parte da linguagem de programação, porém após explicações do professor e trabalho em equipe, a tarefa se tornou mais fácil. (Dupla 7)
>
> "Inicialmente, as dificuldades estiveram relacionadas à sintaxe dos exemplos propostos. Na medida que essa foi esclarecida pelo professor, a manipulação tornou-se mais fácil. (Dupla 5)

As demais etapas transcorreram com mais desenvoltura e os acadêmicos demostraram muito interesse e empenho durante a realização das sequências didáticas. Alguns deles confirmam nossas assertivas. Vejamos.

> Superadas as dificuldades, as atividades tornaram-se bastante atrativas. Quando se memorizavam os comandos fica bastante agradável manipular o *software*. (Dupla 9)
>
> Uma vez compreendido como o *software* funciona, conseguimos compreender todas as atividades (Dupla 6)

As sequências didáticas proporcionaram maior facilidade na determinação dos intervalos de integração, na montagem das integrais. É o que comprovam as afirmativas de alguns alunos.

> A atividade nos trouxe uma melhor percepção das integrais, além de ganharmos experiência com um tipo de *software* que não conhecíamos. (Dupla 6)
>
> A atividades ajudou a consolidar o conteúdo trabalhado na disciplina de cálculo.
>
> Percebe-se, claramente, o passo-à-passo da resolução da integral, facilitando assim, o entendimento dos cálculos. Após a execução da integral simples foi de fácil entendimento a integral dupla. (Dupla 3)

As atividades propunham fixar o conteúdo já previamente estudado e permitir a visualização gráfica dos conceitos de área e volume, enfatizando, de maneira relevante, os intervalos de integração na manipulação das integrais simples e duplas. Vejamos como os alunos se postaram quanto a isso.

> O cálculo apresentado nos problemas propostos é estudado no curso de Engenharia e o *software* deixa mais claro a visão espacial da teoria. (Dupla 10)
>
> Como já conhecia já conhecia o conteúdo, tendo assimilado a dinâmica do *software*, foi muito agradável adquirir essa nova ferramenta. (Dupla 9)
>
> A atividade ajudou a consolidar o conteúdo trabalhado na disciplina de Cálculo. (Dupla 5)
>
> A atividade ajudou a consolidar o conteúdo trabalhado na disciplina de Cálculo. (Dupla 5)
>
> Ainda que tivemos dificuldade na sintaxe, após a plotagem do gráfico, o conteúdo ficou de fácil entendimento. (Dupla 3)

Apesar da maior complexidade para se determinar os limites de integração a visualização no *software* possibilitou melhor compreensão. Nesse sentido, observaram os alunos:

> O programa soube facilitar a compreensão de todas as atividades de forma clara e sucinta. (Dupla 6)
>
> O Maple trouxe facilidades para a montagem das integrais simples e duplas através dos gráficos apresentados como resultados. (Dupla 4)
>
> O *software* trouxe facilidades pois explicita a expressão e sua resolução. (Dupla 10)
>
> O *software* facilitou a compreensão dos cálculos mais avançados (Dupla 8)

Os acadêmicos reconheceram a utilização do *software* como uma importante ferramenta didática para o ensino de Cálculo. Vejamos seus depoimentos sobre o assunto.

> Após a digitação da questão o *software* disponibiliza o gráfico facilitando o aprendizado. (Dupla 1)
>
> O auxílio do *software* computacional o entendimento das equações, seus gráficos e características ficam mais didáticos. (Dupla 7)
>
> O *software* poderia ser utilizado em sala, facilitando a compreensão e o aprendizado dos alunos. (Dupla 1)
>
> É uma excelente ferramenta, pois permite visualizar, de forma objetiva, os volumes e formas geométricas propostas nos cursos de cálculo. (Dupla 10)

> O *software* pode ser muito bem utilizado se houver maior tempo para o entendimento e familiarização com o programa. A nível de primeiro contato, percebe-se um grande campo de aplicações do mesmo. (Dupla 2)
>
> O *software* é uma excelente ferramenta que deveria ser trabalhado em todos os cursos de Cálculo. (Dupla 9)

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, nos propusemos a investigar, a partir da utilização de sequências didáticas e com auxílio das tecnologias digitais nas aplicações da Integral Definida no cálculo de áreas e volumes, um instrumental de auxílio gráfico para a determinação dos intervalos de Integração, buscando trazer uma contribuição para o docente que atua com o ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

Para a construção das atividades, como embasamento metodológico, pautamo-nos pela utilização das tecnologias para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, nas sequências didáticas e na resolução de problemas.

Como fundamentação da sequência didática, procuramos suporte em Zabala (1998) que evidencia a ordenação articulada das atividades como um fator diferenciador das metodologias, destacando que o primeiro aspecto característico de um método seria o tipo de ordem em que se propõem as atividades, ressaltando a importância das intenções educacionais para a definição dos conteúdos de aprendizagem e o papel das atividades propostas.

Como ponto de partida da sequência didática, utilizamos a resolução de problemas, estratégia de ensino e aprendizagem como descrita por Polya (2006), na qual ele destaca a importância de se fazer o aluno pensar por meio da resolução de problemas.

Para dar suporte à sequência didática, no que compete ao uso das tecnologias no ensino de Cálculo, destacamos a utilização de atividades com as quais os alunos pudessem trabalhar diferentes representações algébricas e gráficas, de forma rápida e articulada. Sob esta perspectiva, optamos por explorar as ferramentas disponibilizadas pelo *software Maple* que permitiram identificar, graficamente, o modo como se constroem os Limites de Integração em problemas de aplicações no cálculo de áreas e volumes.

As dificuldades apresentadas na execução das sequências foram, incialmente, a manipulação do *software*, no tocante à sintaxe, porquanto muitos dos alunos o estavam usando pela primeira vez. Mas, aos poucos, as dificuldades foram sendo sanadas, uma vez que construímos as atividades com eles, passo a passo, evidenciando e comentando sobre a execução de cada comando utilizado.

No decorrer da aplicação das sequências didáticas, detectamos um grande interesse dos acadêmicos, por elas incluírem uma tecnologia prática de aprendizagem que colaborava para a fixação dos conceitos teóricos abordados e explanados anteriormente, em aulas expositivas.

Durante a aplicação das sequências didáticas, percebemos o interesse, a motivação e o envolvimento dos acadêmicos pelo processo, a curiosidade e a busca pelo produto final, como explicitado no capítulo anterior. A ênfase dada aos conteúdos, nos livros-textos analisados, contribuiu, sobremaneira, para que a criação e o desenvolvimento das atividades atendessem aos objetivos propostos.

A tecnologia está, portanto, posta, e se coloca como ferramenta que traz grandes benefícios e desperta o interesse e possibilita o envolvimento do acadêmico. Assim, devemos desfrutá-la com o alunado de hoje que a tem à mão em seu cotidiano.

Verificamos, nitidamente, que a metodologia proposta nesta pesquisa quebra a monotonia das estafantes aulas expositivas e colabora, de maneira relevante, para o processo de ensino e aprendizagem dos diversos conteúdos curriculares, e, notadamente, para os matemáticos em tela. Além disto, recebeu o apoio dos acadêmicos envolvidos na pesquisa.

Os alunos tinham conhecimento do conteúdo. A metodologia que se constituiu caracteriza apenas na pesquisa do uso do Software Maple.

Porque estivemos apresentando e discutindo em nosso texto uma “nova” proposta de ensino, podemos afirmar que não há nele argumentos exaustivos, nem conclusões de caráter definitivo. Admitimos, por isso, que nossa sugestão e análise encerram em si mesmas uma minúscula partícula de conhecimento no vastíssimo universo que a Matemática e o Cálculo descortinam e desafiam. Porém, se nosso trabalho, que inclui análises, reflexões teóricas e as sequências didáticas propostas, vier, pelo menos, a instigar um ponto de partida para a formação de profissionais capacitados e alertas, principalmente no sentido de auxiliá-los em seus cursos de Matemática em geral, e no de Cálculo especificamente, já terá cumprido honestamente seu papel.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; FATORI, Luci Harue; SOUZA, Luciana Gastalfi Sardinha. Ensino de cálculo: uma abordagem usando modelagem matemática**. Revista Ciência e Tecnologia**, São Paulo, v. 10, n. 16, 2007. <http://www.revista.unisal.br/sj/index.php/123/article/ view/17>. Acesso em: 30 abr. 2018.

AMORIM, Ivair Fernandes de. **Reflexões críticas sobre os sistemas apostilados de ensino**. 2008. 195f. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-Graduação em Educação Escolar, Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Ciências e Letras, Araraquara, 2008. Disponível em: < http://wwws.fclar.unesp.br/agenda-pos/educacao_escolar/1584.pdf> Acesso em: 10 maio. 2018.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loyola (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.) **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

BIEMBENGUT, Maria Salete. O cálculo no contexto da cultura acadêmica francesa. In: Fonseca, Laerte (Org.). **Didática do cálculo**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knop. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

COUY, Lais. **Pensamento visual no estudo da variação de funções**. 2008. 160f. Dissertação (Mestrado)- Programa Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

D´AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. 9. ed. Campinas, SP: Papirus, 2002.

D´AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loyola (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2012.

D'AMORE, Bruno. Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino = Epistemology, didactics of mathematics, and teaching practices. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, v. 20, n. 28, p. 179-205, 2007. Disponível em: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/635% 20%20Epistemologia%20Didattica.pdf> Acesso em: 23 jan. 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 2000.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação matemática**: representação e construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 53. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra. 2016.

FROTA, Maria Clara Rezende. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em Cálculo. In: BIANCHINI, Barbara Lutaif; FROTA, Maria Clara Rezende; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de Org.). **Marcas na educação matemática no ensino superior**. São Paulo: Papirus, 2013.

GAZIRE, Eliane Scheid. **Perspectivas da resolução de problemas em educação matemática**. 1988. 207f. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1988.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, maio/jun. 1995. Disponível em: << http://www.rae.com.br/rerect.cmf/ID=4611&gt> Acesso em: 02 set. 2016.

GODOY,Luiz, Felipe Simões de; FARIA, Wellington Cássio. O cálculo diferencial e integral e suas aplicações no ensino de engenharia: uma análise de currículo. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO INATEL (INCITEL), 2012. Santa Rita do Sapucaí. **Anais**... Santa Rita do Sapucaí (MG): Instituto Nacional de Telecomunicações (INATEL), 2012.

GOMES, Eloiza. Ensino e aprendizagem de cálculo na engenharia: um mapeamento das publicações nos COBENGEs. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS - GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2012. Canoas. **Anais**... Canoas: ULBRA, 2012.

GRAVINA, Maria Alice, SANTAROSA, Lucila Maria. A aprendizagem de matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO REDE IBEROAMERICANA DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 4., 1998. Brasília. **Anais**... Brasília: RIBIE, 1999.

GUIMARÃES, Ângelo de Moura; DIAS, Reinildes. Ambientes de Aprendizagem: reengenharia da sala de aula. In: COSCARELLI, Carla Viana. (Org**.). Novas tecnologias, novos textos, novas formas de pensar.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 23-42.

HUGHES-HALLETT, Deborah; BRETSCHER, Otto K. **Cálculo de uma variável**. Tradução de Rafael José Iorio Júnior e Valéria de Magalhães Iorio. Coordenação de Elliot J. Marks. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

KENSKI, Vani Moreira. O papel do Professor na Sociedade Digital. In: CASTRO, Amélia Domingues de; CARVALHO, Anna Maria Pessoa de (Org.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Ed. Pioneira Thompson Learning, 2001.

LACHINI, Jonas. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo. In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas (Org.). **A prática educativa sob o olhar dos professores de cálculo.** Belo Horizonte: Fumarc, 2001, p 146-189.

LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. Introdução. In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas (Org.). **Educação matemática:** a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 9-12.

MAGDALENA, Beatriz Corso; COSTA, Íris Elizabeth Tempel. **Internet em sala de aula**: com a palavra, os professores. Porto Alegre: Artmed, 2003.

MUNIZ, A. R.; MARCZAK, L. D. F. **Uso do software MAPLE no ensino de Transferência de Calor**. Porto Alegre: ABNEGE, 2001.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

ROCHA, A. A. et al. O ensino da transferência de calor em um ambiente computacional interativo integrado utilizando o MAPLE. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 32., 2004. Brasília. **Anais**...Brasília: COBENGE, 2004.

SANTAROSA, Maria Cecilia Pereira; MOREIRA, Marco Antonio. O cálculo nas aulas de física da UFRGS: um estudo e exploratório. **Revista Investigações em Ensino de Ciências**, v. 16, n. 2, p. 317-351, 2011. Disponível em: < file:///C:/Users/Vanessa/Downloads/232-454-1-SM.pdf > Acesso em: 20 nov. 2017.

STEWART, James. **Cálculo.** São Paulo: Thompson Learning, 2011. v.1.

STEWART, James. **Cálculo.** Tradução da Ez2 Translate. 10. ed. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2013. v.1.

STOCHIERO, Arnaldo. **Cálculo diferencial e integral III:** noções gerais e aplicações. 2. ed. Belo Horizonte: FUMARC, 2007.

THOMAS, George Brinton. **Cálculo**. Kleber Pedroso e Regina Simille de Macedo; revisão técnica de Claudio Hiurofome Asanouma. 12 ed. Rio de Janeiro: editora Pearson Education do Brasil, 2012. v.1.

VALENTE, José Armando (Org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

ZABALZA, Miguel. A. **O ensino universitário**: seu cenário e seus protagonistas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2004.