



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Allan Silva Ferreira

**DIFERENTES ABORDAGENS DO CONCEITO DE DERIVADA:
uma proposta de Investigação Matemática**

Belo Horizonte
2017

Allan Silva Ferreira

DIFERENTES ABORDAGENS DO CONCEITO DE DERIVADA:
uma proposta de Investigação Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Prof^a. Dra. Elenice de Souza Lodron Zuin

Coorientadora: Prof^a. Dra. Lúcia Maria Luz Paixão Ribeiro de Oliveira

Belo Horizonte
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

F383d Ferreira, Allan Silva
Diferentes abordagens do conceito de derivada: uma proposta de
Investigação Matemática / Allan Silva Ferreira. Belo Horizonte, 2017.
158 f. : il.

Orientadora: Elenice de Souza Lodron Zuin
Coorientadora: Lídia Maria Luz Paixão Ribeiro de Oliveira
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Cálculo - Matemática. 2. Tecnologia da informação. 3. Análise matemática.
4. Matemática - Estudo e ensino. 5. Tecnologia educacional. 6. Ensino auxiliado
por computador. I. Zuin, Elenice de Souza Lodron. II. Oliveira, Lídia Maria Luz
Paixão Ribeiro de. III. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. IV. Título.

CDU: 517



PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

ALLAN SILVA FERREIRA

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof.^a Dr.^a Elenice de Souza Lodron Zuin – Orientadora – (PUC Minas)
Doutorado em Educação Matemática – (PUC-SP)

Prof.^a Dr.^a Lúcia Maria L. P. Ribeiro de Oliveira – Coorientadora – (PUC Minas)
Doutorado em História, Filosofia e Educação – (UNICAMP)

Prof. Dr. Luiz Carlos Picoreli de Araújo – (CEFET)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial (PUC Minas)

Prof. Dr. João Bosco Laudares – (PUC Minas)
Doutorado em Educação: História, Política, Sociedade – (PUC-SP)

Belo Horizonte, 18 de dezembro de 2017.

Dedico esse trabalho:

À minha família maravilhosa, minha esposa Luciana Veloso Duarte do Nascimento, por sempre me apoiar, por estar sempre presente, mesmo nos momentos de ausência dedicados a essa pesquisa.

Aos meus filhos Júlia Duarte Ferreira e Lucas Duarte Ferreira, por toda inspiração; vivo por vocês.

Ao meu pai, Fernando Antônio Ferreira, pela educação recebida e por todo exemplo. Se cheguei até aqui hoje, foi porque sempre o senhor acreditou em mim.

AGRADECIMENTOS

A ilustre e querida professora Elenice de Souza Lodron Zuin, por acreditar em mim, por me incentivar sempre, pela orientação, pela amizade... pela paciência e dedicação para essa pesquisa.

À Prof^a. Dr^a Lúdia Maria Luz Paixão Ribeiro de Oliveira, por toda colaboração e apoio.

Aos professores do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-MINAS, pelos ensinamentos e, principalmente, por possibilitarem uma reviravolta em minha postura profissional - minhas aulas mudaram bastante. Obrigado, professores!

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-MINAS, pelos momentos de aprendizado e confraternização.

Aos meus filhos Lucas Duarte Ferreira e Júlia Duarte Ferreira por todo carinho e amor, por compreenderem os momentos de ausência.

Ao meu pai, Fernando Antônio Ferreira, por todo apoio.

À minha mãe, Jozélia Pires da Silva, pelos puxões de orelha.

Ao Instituto Cultural Newton Paiva, pelo Incentivo financeiro

Aos meus alunos, motivo principal de estar sempre buscando me aprimorar profissionalmente.

À banca examinadora por suas valiosas contribuições para este trabalho.

Em especial, à minha esposa Luciana, “Lu”, por toda compreensão, por todo estresse que passamos, pelo companheirismo e por sempre me fazer querer ser um homem melhor.

E a todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para esta pesquisa, o meu eterno agradecimento.

RESUMO

Esta investigação teve como ponto de partida diferentes maneiras de trabalhar o conceito de derivada, diante das dificuldades apresentadas pelos alunos iniciantes em cursos superiores de Ciências Exatas e também pelos altos índices de reprovação observados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo central desta pesquisa foi elaborar, aplicar e analisar uma proposta para se introduzir o conceito de derivada. Optamos por uma abordagem fundamentada na Investigação Matemática e em TICs - Tecnologias da Informação e Comunicação - especificamente, quanto ao uso de *Smartphones* por meio do aplicativo *Geogebra*, e o uso de vídeos, disponíveis em redes sociais como o *Youtube*. Como produto, foi elaborado um material para servir de apoio ao professor de Cálculo Diferencial e Integral para dar mais significado ao conceito de derivada. Com este material, pretende-se proporcionar ao aluno diferentes abordagens da derivada: algébrica, geométrica e histórica. Através de um curso de extensão, ministrado a alunos de graduação em Ciências Exatas, verificamos que, com a utilização do produto, foram alcançados os objetivos almejados, o que nos leva a inferir que este material contribui para que o entendimento do conceito de derivada seja mais efetivo.

Palavras-chave: Conceito de derivada. Tecnologia da Informação e Comunicação. Investigação Matemática. Educação Matemática

ABSTRACT

This research aims at different ways of working the concept of derivative, the difficulty of students in understanding this concept and the high failure rates in the discipline Differential and Integral Calculus. The objective of this research was to elaborate, apply and analyze a proposal for the introduction of the concept of derivative. The approach chosen was Mathematical Research and ICTs - Information and Communication Technologies - using Geogebra in Smartphones, as well as videos, available on Youtube. It was developed a material to support the teacher of Differential and Integral Calculus to give more meaning to the concept of derivative, aiming to provide the student with different approaches to the derivative: algebraic, geometric and historical. Through an extension course given to undergraduate students in Exact Sciences, we verified that, with the proposed activities, the desired objectives were reached, leading us to infer that the material contributes to the understanding of the concept of derivative is more effective.

Keywords: Derivative Concept. Information and Communication Technology. Mathematical Research. Mathematics Education

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geogebra-----	25
Figura 2 – Youtube (pesquisa por História do Cálculo) -----	27
Figura 3 – Programa de Álgebra da quinta série-----	37
Figura 4 – Capa do livro “O Cálculo Diferencial e Integral” -----	41
Figura 5 – Exemplo Resolvido/ Piskounov -----	42
Figura 6 – Exercícios propostos/ Piskounov -----	44
Figura 7 – Continuação exercícios propostos / Piskounov -----	44
Figura 8 – Capa do livro “ Cálculo com geometria analítica ”-----	45
Figura 9 – Exemplos Resolvido / Simmons-----	47
Figura 10 – Continuação Exercício Resolvido -----	47
Figura 11 – Exercícios Propostos - 1-Simmons-----	48
Figura 12 – Exercícios Propostos - 2 -/ Simmons-----	48
Figura 13 – Capa do livro “Cálculo com Geometria Analítica” -----	49
Figura 14 – Exemplos Resolvidos – 1 - / Leithold-----	50
Figura 15 – Exemplos Resolvidos – 2 - Livro de Cálculo-----	51
Figura 16 –Exercícios Resolvidos / Leithold-----	53
Figura 17 – Capa do Livro “Cálculo” -----	53
Figura 18 – Exemplos Resolvidos / Thomas -----	56
Figura 19 – Exercícios Propostos / Thomas-----	56
Figura 20 – Exemplos Resolvidos – 2 – / Thomas -----	57
Figura 21 – Exercícios Propostos – 2 – / Thomas-----	58
Figura 22 – Capa do livro “Cálculo” -----	58
Figura 23 – Exemplos Resolvidos / Stewart -----	60
Figura 24 – Exercícios Propostos - 1-----	62
Figura 25 – Exercício Proposto 1 / Stewart-----	63
Figura 26 – Ilustração da Atividade 1 -----	67
Figura 27 – Ilustração da Atividade 2-----	72
Figura 28 – Resultado esperado, TAREFA 1 -----	73
Figura 29 – Resultado esperado, TAREFA 2 -----	74
Figura 30 – Resultado esperado, TAREFA 3. -----	74

Figura 31 – Resultado esperado da TAREFA 6	75
Figura 32 – Zoom do aplicativo	76
Figura 33 – Vídeo da História do Cálculo	78
Figura 34 – Vídeo de Newton x Leibniz	78
Figura 35 – Vídeo sobre as Aplicações do Cálculo	79
Figura 36 – Grupo de Estudantes	81
Figura 37 – Resolução tarefa 1 da atividade 1- Aluno B	81
Figura 38 – Resolução tarefa 2 da atividade 1- Aluno E	82
Figura 39 – Resolução tarefa 7 da atividade 1- Aluno B	83
Figura 40 – Resolução tarefas 8, 9 e 10 da atividade 1- Aluno A	84
Figura 41 – Resolução tarefa 1, da atividade 2- Aluno A	88
Figura 42 – Resolução tarefa 2, da atividade 2- Aluno D	89
Figura 43 – Resolução tarefa 3, da atividade 2- Aluno C	89
Figura 44 – Aluno A dando apoio ao aluno B.	90
Figura 45 – Registros do aluno D.	91
Figura 46 – Registros do aluno C.	91
Figura 47 – Registros do aluno D.	92
Figura 48 – livro Cálculo, de Stewart	94
Figura 49 – 1 / 1º vídeo	95
Figura 50 – 2 / 1º vídeo	96
Figura 51 – 1 / 2º vídeo	96
Figura 52 – 2 / 2º vídeo	96
Figura 53 – 3º vídeo	97

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Decreto n. 21.241 - de 4 de abril de 1932 (*)	37
Quadro 2 – Tópicos de análise do conteúdo de derivada nos livro-textos pesquisados	63
Quadro 3– Grau de concordância	64
Quadro 4 – Quadro de análise do conteúdo de derivada	64
Quadro 5: Tarefa proposta 1	68
Quadro 6: Atividade 2	71
Quadro 7: Atividade 3	77

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
Justificativa	14
Objetivos	18
Objetivo Geral	18
Objetivos Específicos	18
Estrutura da Dissertação	19
1 – REFERENCIAL TEÓRICO	20
1.1 - Investigação Matemática	20
1.2 - Informática na Educação – uso de tecnologias Smartphones e vídeo.....	23
1.3 - Análise Textual Discursiva	28
2 – ASPECTOS HISTÓRICOS DO CÁLCULO	30
2.1 – Abordagem Histórica do Cálculo.....	30
2.2 – O Ensino de Cálculo no Brasil na escola secundária	35
2.3 – Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia.....	38
3 – A DERIVADA E SEU ENSINO	40
3.1 – Análise do ensino de Derivada segundo alguns livros-texto.....	41
4 – DO PRODUTO EDUCACIONAL E DA SUA APLICAÇÃO.....	66
4.1 – Construção e objetivos das atividades.....	66
4.1.1 – Atividade 1.....	66
4.1.2 – Atividade 2.....	71
4.1.3 – Atividade 3.....	77
4.2 – Da aplicação das atividades.	79
4.2.1– Aplicação e Análise da Atividade 1	80
4.2.2– Aplicação e análise da Atividade 2	87
4.3 – Aplicação do questionário sobre o curso.....	97
CONSIDERAÇÕES FINAIS	103
REFERÊNCIAS.....	105
Apêndice A	109
Apêndice B	111
Apêndice C	114

INTRODUÇÃO

Eu sinceramente imploro que o que eu fiz possa ser lido com paciência e o meu trabalho num assunto tão difícil possa ser examinado, não tanto com vista à censura como para corrigir seus defeitos.

Isaac Newton

Ao longo dos anos, ensinando derivada para alunos iniciantes nos cursos de Engenharia, venho observando dificuldades, por parte dos mesmos, quanto à compreensão do conceito de derivada. Este fato despertou meu interesse em me aprofundar no assunto e, por este motivo, iniciei, em 2015, o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUCMinas). Neste curso, tive a oportunidade conhecer novas práticas e novas metodologias de ensino, como por exemplo, a investigação matemática, metodologia adotada para esta presente pesquisa.

No mestrado, os professores foram responsáveis por me levarem a uma reflexão mais aprofundada sobre minha prática profissional. Comecei a me questionar constantemente, se minhas aulas eram produtivas para meus alunos, se meus alunos realmente aprendiam algo comigo. Esses questionamentos constantes me levaram a uma melhoria significativa em minha postura docente. Agora, procuro, a todo instante, fazer com que o aluno seja o centro das atenções, ou seja, me esforço para planejar aulas em que o aluno seja o construtor do seu próprio conhecimento. Deste modo, reduzi as aulas expositivas, investindo em novas metodologias para inserir o aluno na busca do conhecimento.

Sempre recebi muitos elogios em toda minha jornada como professor, isso me levou à acomodação. Eu entendia que não precisava buscar aprimoramentos, não precisava de metodologias diferenciadas ou aparatos tecnológicos, como diz o ditado popular, “*em time que está ganhando não se mexe*”, pois bem, isso me colocou na zona de conforto por muitos anos.

Agradeço ao programa de mestrado da PUC Minas por me fazer enxergar a imensa barreira entre a relação *ensino x aprendizagem*, tenho convicção de que meus alunos apenas reproduziam o que tinham “aprendido” comigo e, mesmo assim, por um curto período de tempo.

Iniciei minha carreira docente, em março de 2000, no Colégio Frederico Ozanam, trabalhando com turmas de 5ª série (6º ano) e 6ª série (7º ano). Em 2006, comecei a lecionar para turmas do Ensino Médio e, em 2007, tive a oportunidade de trabalhar no Ensino Superior como professor substituto na faculdade INCISA/IMAN¹, no curso de Ciências Biológicas, com a disciplina Bioestatística. Em 2010, fui contratado pelo Centro Universitário Newton Paiva, lecionando as disciplinas: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Equações Diferenciais, Estatística, Matemática Financeira e uma disciplina de nivelamento de Matemática intitulada Estudos Orientados Raciocínio Matemático.

Atualmente, sou professor no Unicentro Cultural Newton Paiva, atuando com turmas de Cálculo I, Estatística e diversos projetos voltados para o curso de Engenharia Civil, também leciono no Colégio Frederico Ozanam para turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, 1º e 3º séries do Ensino Médio. Nessa caminhada, são quase dezoito anos de docência, transitando nos ensinos Fundamental, Médio e Superior.

O mestrado me proporcionou uma visão diferente da sala de aula, me mostrou que o conhecimento não pode ser tratado como um objeto que se dá ou que se empresta, agora... graças aos professores do Programa e aos colegas mestrandos, pelas trocas de experiências, vejo uma sala de aula centrada mais no aluno, uma sala que está sempre disposta a experimentar coisas novas.

Justificativa

O Cálculo Diferencial e Integral é considerado um dos mais importantes conteúdos da Matemática devido à sua vasta aplicação. São vários os cursos que oferecem esta disciplina em seus currículos, principalmente cursos voltados para áreas de Engenharia

Geralmente, o tópico “derivada” é conduzido através de aulas expositivas, quase sempre em qualquer contextualização ou posicionamento histórico, o assunto é praticamente “solto” para os alunos. Na maioria das vezes, a derivada é introduzida por meio de definições formais, interpretação geométrica, não necessariamente nesta ordem, regras de derivação e, em seguida, aplica-se uma enorme lista de exercícios de fixação, de forma mecânica e tradicional.

Estudos recentes, como de Garzella (2013) e Wrobel, Zeferino e Carneiro (2013), mostram que o nível de reprovação e desistência nesta disciplina vem aumen-

¹ INCISA/IMAN: Instituto Superior de Ciências da Saúde/Instituto Mineiro de Acupuntura e Massagem/. Faculdade localizada em Belo Horizonte, MG.

tando ao longo dos anos. De fato, foi possível comprovar os resultados de tais estudos observando o que vem acontecendo nas turmas de Cálculo Diferencial, desde quando assumi esta disciplina na instituição, em 2010, até o momento em que ingressei no Mestrado, em 2015. Conversas informais com outros colegas que lecionam a disciplina também reforçaram o que as pesquisas demonstravam. A partir de então, comecei a ter uma maior preocupação em desenvolver alternativas de ensino e aprendizagem, que me foram despertadas pelos docentes do Mestrado.

Com a intenção de mensurar, tentar descobrir de alguma maneira o que meus alunos apreendiam sobre derivada, elaborei e apliquei um questionário (apêndice A) ao término da disciplina, no dia da última avaliação formal. A minha intenção era saber o que meus alunos aprenderam sobre derivada, durante as aulas de Cálculo Diferencial, ministradas no primeiro semestre de 2016, no UnicentroCultural Newton Paiva.² Nesta turma de Cálculo Diferencial, estavam matriculados 64 alunos, originados de diversos cursos de engenharia.

Analizando as respostas dos alunos constatei que poucos conseguiram assimilar o conceito de derivada de maneira correta, a maioria dos alunos associa a derivada a um algoritmo, a um processo algébrico. Verifiquei que não conseguiam dizer “o que é a derivada” ou “o que ela faz”. A seguir, destaco alguns relatos que comprovam estas considerações.

Sobre a primeira pergunta:

1- Quando você escuta a palavra *derivada* (No contexto do Cálculo Diferencial) Qual a primeira ideia que vem em sua mente?

“Que é um estudo muito difícil, e realmente é muito difícil ”.

“Dificuldade de desenvolver raciocínio do contexto pelas memorizações das regras ”

“Quando escuto a palavra derivada, a primeira coisa que vem na minha cabeça são as regras de derivação ”

“ $y = 2x^2 + 2x + 5$, $y' = 4x + 2 + 0$. Escrevi a primeira coisa que veio na minha mente pensando em derivada”

“Taxa de variação num certo instante em um ponto qualquer de uma função”

Sobre a segunda pergunta:

2- Como você explicaria o conceito de derivada para um amigo?

² Todos os participantes, voluntariamente, autorizaram a publicação das cópias de suas atividades escritas e fotos pessoais, para fins acadêmicos.

“Simplificar uma constante para o resultado ser diferente de zero”

“Derivar é simplificar uma função até achar um resultado satisfatório”

“Me confundo um pouco para explicar o conceito da derivada, mas, com exemplos como de variação de arrecadação de uma empresa, velocidade, aceleração, a explicação da derivada pode ser melhor compreendida.”

Sobre a terceira pergunta:

3- Em sua opinião em quais situações a derivada pode ser utilizada?

“Otimização de um projeto.”

“A derivada tem vasta aplicação, por exemplo, quando se quer uma situação ótima (otimização), utiliza-se a derivada.”

“Em todos os casos em que há uma função”

Os relatos dos alunos apontavam a necessidade de se repensar a prática docente quanto ao ensino de derivada, principalmente quanto ao seu aspecto conceitual.

Tal realidade, vivenciada no curso superior, me levou a seguinte inquietação:

Como eu poderia contribuir para que o conceito de derivada fosse abordado da melhor maneira possível e que tal abordagem fosse, de fato, significativa, levando meus alunos a construírem um conhecimento concreto referente ao estudo de derivada, bem como, entender sua funcionalidade, como e onde a aplicamos?

Nesse momento, me vieram as palavras de Chervel:

Ensinar (*enseigner*) é, etimologicamente, “fazer conhecer pelos sinais”. É fazer com que a disciplina se transforme, no ato pedagógico, em um conjunto significativo que terá como valor representá-la, e por função torná-la assimilável. (CHERVEL, 1990, p.192).

Para isso, fez-se necessário recorrer à História da Matemática, no que diz respeito ao Cálculo, norteando nos seguintes aspectos: como e quando surgiu o Cálculo? Quais questionamentos da época fizeram emergir essa invenção da Matemática, o que é o Cálculo? Quais foram as mentes que contribuíram para o Cálculo que conhecemos hoje? Relativamente à História da Educação Matemática, emergiu a questão: Em algum momento, no Brasil, a derivada começou a ser ensinada na educação básica?

Para direcionar a pesquisa, também, realizei entrevistas com professores de Cálculo objetivando-se entender como os mesmos iniciavam a derivada em suas aulas, quais livros-textos utilizavam ou quais eram seus preferidos, se utilizavam algum recurso pedagógico, ou algum recurso tecnológico, se utilizavam ou não algum posicionamento histórico. Os entrevistados tinham mais de 15 anos de sala de aula atuando com

alunos do Ensino Superior nas disciplinas de Cálculo. Durante estas entrevistas, constatamos que nem sempre é feita uma abordagem histórica, muitas vezes, devido ao extenso conteúdo da disciplina. Também não foi percebido o uso de vídeos ou aparatos tecnológicos como recurso pedagógico para introdução do conceito de derivada. Constatamos uma preocupação de todos os entrevistados em relação a contextualização, foi um ponto bastante positivo durante as entrevistas, e também foi verificado que eles trabalham tanto a abordagem algébrica quanto a geométrica.

Na revisão de literatura, encontramos alguns trabalhos sobre a temática desta pesquisa, apresentamos uma breve descrição sobre tais trabalhos.

Olímpio (2006), em sua tese de doutorado, “Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial no Primeiro ano de Matemática – uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática”, investigou compreensões emergentes sobre os conceitos de função, limite, continuidade e derivada produzidos por alunos iniciantes num curso de Matemática. A investigação, de caráter qualitativo, desenvolveu-se com a realização de experimentos com oito voluntários. O autor constatou que os conflitos emergentes poderiam ter suas raízes numa limitada compreensão do conceito de função. A pesquisa de Olímpio também sugere uma maior e mais intensiva exploração da natureza dinâmica do Cálculo Diferencial.

André (2008), em sua dissertação de mestrado intitulada “Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio”, teve a intenção desenvolver, nos alunos de Ensino Médio, a ideia inicial de variação de uma função, seguida dos conceitos de variação média, variação instantânea, chegando ao conceito de derivada. Os resultados obtidos sugerem que a abordagem pedagógica, utilizada na proposta apresentada, enriqueceu as imagens de conceito dos alunos tornando o estudo de derivada viável para estudantes do Ensino Médio, tendo como pré-requisito o estudo de função.

Bisognin & Bisognin (2011) recorrem a David Tall para assinalarem que as dificuldades apresentadas pelos estudantes, no tocante ao conceito de derivada, ocorrem porque os mesmos não estabelecem as devidas conexões entre as representações gráficas e analíticas.

Em sua dissertação de mestrado, “Introduzindo o conceito de Derivada a partir da ideia de variação”, Lima (2012) buscou elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que possibilitasse a construção do conceito de derivada. O autor concluiu que os resultados obtidos na pesquisa indicam essencialmente que a maior parte dos alunos

conseguiu conceituar adequadamente a derivada como uma medida de variação. O autor chama a atenção que o fato de não utilizar aulas expositivas incentivou os alunos a saírem de uma forma passiva para interagirem bastante, utilizando, para este fim, a teoria da Imagem de Conceito e Sequência Didática.

Os trabalhos mencionados apontam o fracasso do ensino tradicional; neste sentido, objetiva-se com esta pesquisa buscar metodologias diferenciadas de ensino de modo a proporcionar alternativas para a introdução do conceito de derivada.

Para efetivar nossa investigação, buscamos compreender como os autores dos principais livros-textos de Cálculo introduziam a derivada em suas obras. Em entrevistas com alguns professores de Cálculo (apêndice C) e em conversas informais com professores de Matemática e Física, de diversas áreas da Engenharia, constatamos que os mesmos utilizavam determinados livros-textos de Cálculo como estudante e/ou como docente. Baseando-nos nessas informações, elencamos cinco obras para a realização desta análise, as quais têm ou tiveram grande circulação nas principais universidades do Brasil. A escolha da análise de livros-texto se baseia no fato de serem as principais referências para professores e alunos. Nas obras, verificamos qual abordagem é utilizada pelo autor para introduzir o conceito de derivada.

Objetivos

Objetivo Geral

Elaborar um material de apoio para o professor para ser utilizado na introdução do estudo da Derivada, que auxilie na atuação didática do professor de Cálculo, com a finalidade de favorecer ao aluno uma melhor compreensão na construção do conceito de Derivada

Objetivos Específicos

- Entrevistar professores de Cálculo para verificar quais as abordagens que os mesmos utilizam para trabalhar o tópico derivada;
- Analisar como o conceito de Derivada é introduzido em livros-texto de Cálculo Diferencial e Integral;

- Definir uma atividade de Investigação Matemática para construção do conceito de Derivada;
- Identificar *softwares* ou aplicativos que poderiam ser utilizados na elaboração do material de apoio ao professor;
- Avaliar os resultados da aplicação das atividades e dos questionários e buscar aperfeiçoá-lo.

Estrutura da Dissertação

A dissertação está organizada em quatro capítulos, além da introdução e das considerações finais.

No capítulo I, apresentamos os pressupostos teóricos nos quais nossa pesquisa está fundamentada, tratando, portanto dos conceitos relativos a: Investigação Matemática; Informática na Educação e Análise Textual Discursiva.

Para tratar da Investigação Matemática, recorreremos aos seguintes autores: Brocardo (2012); Ponte (2003); Ponte, Brocardo, Oliveira (2013) e Frota (2005).

Para tratar do assunto de Informática na Educação, trazemos os autores: Fiorentini (2012) e Lorenzato (2012); Borba (2011); Frota (2013); Laudares (2001); Stewart (2014); Moran (1995) e Sousa & Serafim (2011).

Para discorrer sobre a Análise Textual Discursiva, recorreremos a Moraes & Galiazzi (2007).

O capítulo II trata dos aspectos históricos do Cálculo e o seu Ensino. Recorreremos à História da Matemática, norteando os principais aspectos relacionados ao Cálculo, bem como aos personagens que contribuíram para o seu desenvolvimento.

O capítulo III trata da Derivada e o seu ensino. Neste capítulo, fazemos uma análise de cinco livros-texto de Cálculo Diferencial e Integral, todos com grande circulação nas principais universidades do Brasil.

No capítulo IV, apresentamos um material de apoio destinado aos professores de Cálculo para introduzir o conceito de derivada, bem como sua aplicação e análise. O material foi aplicado em um Curso de Extensão promovido no Unicentro Cultural Newton Paiva. Este material pretendia oportunizar ao aluno experimentar três importantes abordagens da derivada: algébrica, geométrica e histórica.

No último item, trazemos as considerações finais sobre o desenvolvimento da pesquisa.

1 – REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresentamos uma síntese dos pressupostos teóricos nos quais nossa pesquisa está fundamentada.

1.1 - Investigação Matemática

Brocardo (2001), buscando clarificar o que é uma investigação matemática exemplificou da seguinte maneira, “*é mais fácil dizer aquilo que ela não é.*” Para esta autora, o conceito de investigação pode ser entendido a partir de um olhar focado num aspecto particular. Trata-se, segundo ela, de um conceito complexo e, por isso, é importante olhar para ele a partir de diferentes perspectivas. (BROCARD, 2001, p.103)

No entanto, em todas elas, se pode observar uma característica que é direta ou indiretamente referida: as investigações têm a ver com *processos*. [...] se consultarmos um dicionário podemos encontrar como significado do termo *processo*: acto de proceder; modo de fazer uma coisa; maneira de operar; método. Processo é uma forma de ação que importa perceber no que se traduz quando se pensa na Matemática. (BROCARD, 2001, p.103).

Tradicionalmente, as aulas de Matemática são centradas no professor, que expõe os conteúdos no quadro e dita as regras, cabendo aos alunos apenas aceitá-las. Em geral, nessas condições, o professor não oferece espaços para reflexão, discussão ou justificativas. Dessa forma, é legítimo surgirem dúvidas quanto as estratégias que devemos utilizar para que possamos aproveitar ao máximo as potencialidades do trabalho investigativo para realizar aulas de discussões extremamente produtivas.

Para Ponte (2003), existem muitas perspectivas sobre o que é investigar, mas em sua perspectiva, “*investigar*”, *não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com qual nos deparamos.* Trata-se, segundo ele, de uma capacidade de suma importância para todos e que deveria permear todo trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos. (PONTE, 2003, p.2).

Se se pretende que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas e assumam uma visão alargada da natureza desta ciência, então as tarefas de exploração e investigação têm de ter um papel importante na sala de aula (PONTE, 2003, p.12).

Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar com problemas difíceis. Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Com um significado muito parecido, temos em português os termos “pesquisar” e “inquirir”. (PONTE, BROCARD, OLIVEIRA, 2013).

Trabalhar com investigação matemática em ambientes escolares contribui para o processo de ensino-aprendizagem uma vez que, desperta no aluno, a curiosidade e interesse pelo objeto de estudo. (PONTE, BROCARD, OLIVEIRA, 2013).

Frota (2005), afirma que: *é mais fácil, talvez, relatar experiências matemáticas, do que definir o que seja uma, assim como na Matemática, é mais fácil exemplificar, do que definir.* (FROTA, 2005, p.2).

Na perspectiva desta autora,

uma experiência matemática é, por um lado, individual, personalizada e única, já que é história vivida. E, por outro lado, coletiva, cultural e política, uma vez que é vivenciada por pessoas com uma história, inseridas numa cultura, parte de uma comunidade. Para a autora, essa história possibilita experiências distintas e que para cada tipo de experiência matemática é possível atribuir valorações diferenciadas. (FROTA, 2005, p.2).

A investigação matemática já é uma realidade nas escolas portuguesas, Ponte (2003) afirma que vem aumentando, a cada dia, o número de professores que adotam essa metodologia. Alguns o fazem inseridos em programas de mestrado e doutorado. Ainda, segundo Ponte(2003), a investigação matemática não diz apenas respeito aos professores. Trata-se de uma atividade que interessa igualmente a todos aqueles envolvidos direta ou indiretamente na educação, como por exemplo, técnicos de orientação escolar, psicólogos, técnicos da administração educativa, formadores de professores e professores do ensino superior.

Na perspectiva desse autor são importantes não apenas a investigação em si, como também o trabalho de divulgação das suas experiências, através da elaboração de artigos, o que permite um olhar mais aprofundado sobre as mesmas. É ainda importante, em alguns casos, a apresentação oral das experiências em conferências e comunicações em encontros e congressos. Os professores que estão inseridos na investigação matemática desenvolvem-se profissionalmente

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), o *arranque* da aula é um dos pontos fundamentais, embora seja breve, esta fase é absolutamente crítica; cabe ao pro-

fessor garantir que todos os alunos tenham entendido o objetivo da tarefa proposta e também garantir aquilo que deles se esperam no decorrer da atividade, é importante que o professor faça uma pequena introdução oral da atividade. Além disso, o sucesso de uma investigação depende também, assim como em qualquer outra proposta de atividade, do ambiente de aprendizagem proporcionado na sala de aula. Para esses autores, o aluno deve sentir-se confortável em expor suas ideias, e que as mesmas possam ser valorizadas pelos colegas, criando desta forma, ricas discussões no grupo, não sendo necessária a validação constante do professor.

Tendo sido assegurada, mediante o momento inicial, a compreensão dos alunos acerca da atividade que se irá realizar, o professor passa a desempenhar um papel mais de retaguarda. Cabe-lhe então procurar compreender como o trabalho dos alunos se vai processando e prestar o apoio que for sendo necessário. No caso em que os alunos trabalham em grupo, as interações que se geram entre eles são determinantes no rumo que a investigação irá tomar. No entanto, há que ter em atenção que, se os alunos não estão acostumados nem a trabalhar em grupo nem a realizar investigações, fazer entrar na aula, simultaneamente, esses dois elementos novos pode trazer problemas de gestão ao professor (PONTE, BROCARD, OLIVEIRA, 2013, p.29).

Esses autores afirmam que, em uma atividade investigativa, o professor deve ficar atento com o desenvolvimento do trabalho dos alunos, é imprescindível, segundo eles, observar se os alunos entenderam bem a tarefa e como reagiram a ela, pois pode acontecer que os estudantes procurem apenas a resposta, como se fosse uma atividade qualquer, fugindo do caráter investigativo.

O sucesso de uma atividade investigativa está diretamente ligado às ações do professor durante a realização da atividade. Trata-se de um desafio para o docente perceber em que ponto os alunos querem chegar. Em geral, o professor encontrará várias adversidades durante uma tarefa investigativa; nem sempre poderá acompanhar todos os detalhes discutidos em cada grupo e, também, muitas vezes, os alunos não possuem um registro escrito organizado daquilo que fizeram e têm muitas limitações na comunicação matemática oral. Tal situação é desfavorável à avaliação do seu progresso. Cabe ao professor tentar minimizar este problema colocando boas perguntas, tendo paciência para escutar e fazendo um esforço sério para compreendê-los, evitando corrigir cada afirmação ou conceito matematicamente pouco correto (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2013).

Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou num conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito,

(ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos, ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2013, p. 25).

1.2 - Informática na Educação – uso de tecnologias Smartphones e vídeo

Para Fiorentini (2012) e Lorenzato (2012), a utilização de calculadoras e de audiovisuais, como recursos para o ensino e aprendizagem da Matemática, começou a atrair o interesse de pesquisadores em Educação Matemática com mais intensidade a partir dos anos de 1970. O aparecimento de novas tecnologias, como o computador, a televisão e a Internet têm levado os educadores matemáticos a tentar utilizar tais tecnologias em prol da educação. A partir da década de 1990, surge, segundo os autores, uma nova terminologia no meio educacional: TICs (Tecnologia da Informação e Comunicação) – estas resultam da fusão das tecnologias de informação, envolvem a aquisição, o armazenamento, o processamento e a distribuição da informação por meios eletrônicos e digitais.

Segundo Borba (2011), os ambientes computacionais condicionam as ações quando se tem que resolver um problema matemático. Os *softwares* educacionais têm a capacidade de realçar o componente visual da Matemática. Borba (2011) recorre a outros autores para trazer algumas particularidades do aspecto visual, em educação matemática, que são proporcionadas pelas TICs:

- Visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático;
- A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles;
- Visualização é a parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas.;
- Tecnologias com poderosas interfaces visuais estão presentes nas escolas, e a sua utilização para o ensino e aprendizagem da matemática exige a compreensão dos processos visuais;
- Se o conteúdo de matemática pode mudar devido aos computadores, (...) é claro neste ponto que a matemática nas escolas passarão por pelo menos algum tipo de mudança (...). (BORBA, 2011, p. 3).

Diante disso, Borba (2011) afirma que as possibilidades de investigação e experimentação, proporcionadas por essas mídias, podem levar estudantes a desenvolverem suas ideias a ponto de criarem conjecturas, validá-las e levantar subsídios para elaboração de uma demonstração matemática.

Segundo Frota (2013), os processos de visualização e de comunicação de ideias matemáticas têm sido destaque na pesquisa em Educação Matemática, recorrendo a Arcavi (2003) explicita o que se entende por visualização:

Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados. (FROTA, 2013, p.71).

Ainda, segundo esta autora, a tecnologia computacional pode mudar a forma de fazer matemática, no sentido de contribuir com a aprendizagem, colaborando para o processo de fazer conjecturas, interpretar soluções, estimular a investigação e a descoberta.

Para Laudares & Lachini (2001), a busca da produtividade em educação e da eficiência nos processos de ensino suscita a necessidade da utilização de uma pedagogia distinta da tradicional, “modelo este que privilegia a exposição verticalizada de um saber pronto e acabado”. Os autores afirmam ainda que, na mediação entre o saber e os métodos de estudo, estão os materiais e artefatos tecnológicos, utilizados pelos professores para viabilizar a didática.

Os meios, isto é, as ferramentas tecnológicas, nas mãos dos agentes, se tornam instrumentos para obtenção de resultados. A ferramenta – o computador – não tem inteligência, sensibilidade, emoção e nem intuição, características próprias dos sujeitos; somente quando usada por um sujeito é que a ferramenta se torna instrumento que pode explicitar as muitas qualidades de quem a usa. (LAUDARES & LACHINI, 2001, p.69).

De fato, o assunto abordado por Laudares e Lachini é bastante pertinente, devido ao fato de muitos professores utilizarem a tecnologia pela própria tecnologia, ou seja, uma aula com o uso de *slides*, através de um equipamento multimídia, pode continuar sendo uma aula expositiva tradicional verticalizada, onde a interação, os questionamentos e as descobertas não acontecem, pelo motivo do professor e/ou *slide* continuarem sendo os protagonistas da aula.

Stewart (2014) alerta para a utilização da tecnologia no ensino, afirmando que o uso da tecnologia aumenta a importância e a necessidade de se entender com clareza os conceitos que implicitamente estão na tela. Nesse sentido, quando utilizados apropriadamente, computadores, *smartphones* e calculadoras gráficas, estes podem potencializar a descoberta e a compreensão de tais conceitos pelos estudantes. As TICs permitem aos

discentes não apenas estudar temas tradicionais de maneira nova, mas, também explorar, ou experimentar tais temas.

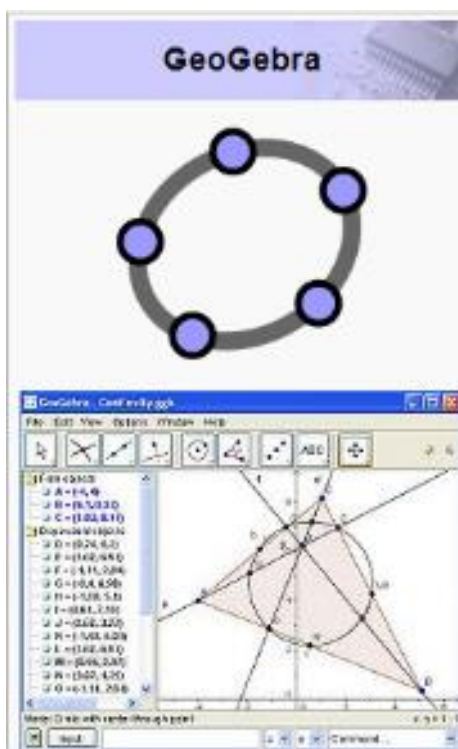
Ambientes informatizados podem contribuir para a visualização em Matemática. A cada dia, é lançado um novo aplicativo para fins educacionais no que diz respeito à Matemática; por exemplo, os aplicativos gratuitos como *Geogebra*, *Mathdraw*, *Winplot*, dentre outros.

O *Smartphone* já é uma realidade, muitos estudantes de cursos superiores o possuem e utilizam em demasia muitas de suas funcionalidades.

Nesta presente pesquisa, foi trabalhado o aplicativo *Geogebra*, devido a sua funcionalidade e também por ser bastante intuitivo.

O Geogebra é um software livre e pode ser usado facilmente como uma importante ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento matemático, principalmente com alunos dos ensinos fundamental e médio. Possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica, permitindo a abordagem de diversos conteúdos, especialmente os relacionados ao estudo da geometria e funções. (FANTI, 2010, p. 1)

Figura 1 –Geogebra



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geogebra>

Criado por Markus Hohenwarter, o projeto foi iniciado em 2001, na *Universität Salzburg*, e tem prosseguido em desenvolvimento na *Florida Atlantic University*.

O *Geogebra* é um *software* gratuito de matemática dinâmica, desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O *Geogebra* reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, este *software* tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.³

Atualmente, temos diversas opções tecnológicas utilizadas como ferramentas para o uso em sala de aula, como as redes sociais, por exemplo, o *YouTube*, o qual vem ganhando mais espaço na educação. Já existem vários canais voltados para este fim.

Segundo Almeida *et al.* (2015), o *Youtube* foi criado em junho de 2005, tendo como fundadores Steve Chen, Chad Hurley e Jawed Karim, a princípio tratava-se de um site de compartilhamento de vídeos que visava uma melhor qualidade neste serviço, atualmente é um site exclusivo presente em mais de 75 países, contando com mais de um bilhão de usuários.

No *YouTube*, encontramos milhares de vídeos sobre diversos temas e áreas de estudo, inclusive vídeos educacionais que podem ser utilizados em sala de aula tanto na Educação Básica como nos cursos de Nível Superior.

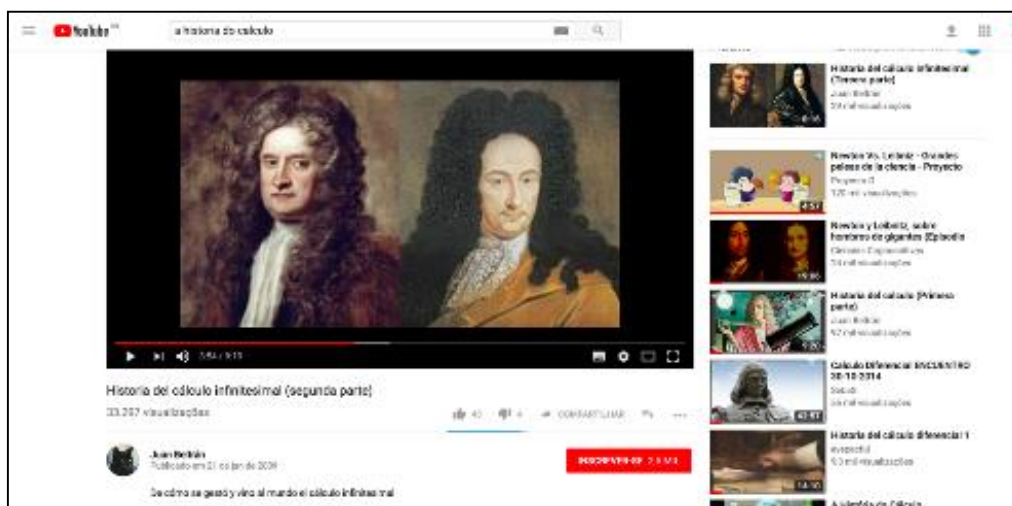
Para Moran (1995, p. 27) *o vídeo está umbilicalmente ligado à televisão, a um momento de lazer*. Para este autor, o uso de vídeo como recurso pedagógico traz, imperceptivelmente, um clima de entretenimento para sala de aula. Ele afirma que, vídeo, *na concepção dos alunos, significa descanso e não “aula”, o que modifica a postura e as expectativas em relação ao seu uso*. Nessa linha de raciocínio, Moran (1995) afirma que *é necessário aproveitar essa expectativa positiva para atrair o aluno para os assuntos do planejamento pedagógico do professor*.

O vídeo parte do concreto, do visível, do imediato, do próximo, que toca todos os sentidos. Mexe com o corpo, com a pele – nos toca e “tocamos” os outros, que estão ao nosso alcance, através dos recortes visuais, do close, do som estéreo envolvente. *Pelo vídeo sentimos, experiênciamos sensorialmente outro, o mundo, nós mesmos.* (MORAN, 1995, p. 28).

Nesse sentido, buscamos nessa metodologia, trazer o aluno para um ambiente mais atrativo, ambiente que despertará um maior interesse do aluno.

³Informações retiradas do site do Instituto do Geogebra do Rio de Janeiro, disponível em: <<http://www.Geogebra.im-uff.mat.br>>. Acesso em: 14 set. 2017.

Figura 2 – Youtube (pesquisa por História do Cálculo)



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=zFtw1-LUh60>

Para Sousa & Serafim (2011), a escola de hoje continua com traços da era industrial, criada para atender as demandas da indústria. Esses autores afirmam que, devido às novas exigências de formação de indivíduos, profissionais e cidadãos, muito diferentes daqueles que eram necessários na era industrial, a escola de hoje deve se “reinventar”, para isso, é fundamental que o professor se informe, e se aproprie de informações advindas da presença das tecnologias digitais da informação e comunicação, tal tecnologia deve ser sistematizada na prática pedagógica.

O que se vem afirmando, na literatura e na experiência até aqui construída, é que o cenário escolar, integrado com vivências em multimídia, estas geram: a dinamização e ampliação das habilidades cognitivas, devido à riqueza de objetos e sujeitos com os quais permitem interagir; a possibilidade de extensão da memória interagir; a extensão da memória e de atuação em rede; ocorre a democratização de espaços e ferramentas, pois estas facilitam o compartilhamento de saberes, a vivência colaborativa, a autoria, coautoria, edição e publicação de informações, mensagens, obras e produções culturais tanto de docentes como discentes. (SOUSA & SERAFIM, 2011, p. 22)

Além disso, Sousa & Serafim (2011) recorrem a outro autor para legitimar as afirmações acima:

O vídeo é sensorial, visual, linguagem falada, linguagem musical e escrita. Linguagens que interagem superpostas, interligadas, somadas, não separadas. Daí a sua força. Somos atingidos por todos os sentidos e de todas as maneiras. O vídeo nos seduz, informa, entretém, projeta em outras realidades (no espaço imaginário), em outros tempos e espaços. (MORAES, 1995, apud SOUSA & SERAFIM, 2011, p.30).

1.3 - Análise Textual Discursiva

Para Moraes & Galiazzi (2007), pesquisas qualitativas têm se utilizado, cada vez mais, de análise textuais, seja partindo de textos já existentes, seja produzindo o material de análise a partir de entrevistas e observações. Para estes autores, a pesquisa qualitativa pretende aprofundar a compreensão dos fenômenos que investiga a partir de uma análise rigorosa e criteriosa desse tipo de informação.

Ainda segundo Moraes & Galiazzi (2007), a *análise textual discursiva* pode ser examinada organizando argumentos em torno de quatro focos:

- *Desmontagem dos textos*: implica em examinar o texto em seus detalhes, fragmentando-os no sentido de atingir unidades constituintes, enunciados referentes aos fenômenos estudados.
- *Estabelecimento de relações*: este processo denominado de categorização envolve construir relações entre as unidades base, combinando-as e classificando-as, reunindo esses elementos unitários na formação de conjuntos que congregam elementos próximos, resultando daí sistemas de categorias.
- *Captando o novo emergente*: a intensa impregnação nos materiais da análise, desencadeada nos dois focos anteriores, possibilita a emergência de uma compreensão renovada do todo. O investimento na comunicação dessa nova compreensão, assim como de sua crítica e validação, constituem o último elemento do ciclo de análise proposto. O metatexto resultante desse processo representa um esforço de explicar a compreensão que se apresenta como produto de uma nova combinação dos elementos construídos ao longo dos passos anteriores.
- *Um processo auto-organizado*: o ciclo de análise, ainda que composto de elementos racionalizados e em certa medida planejados, em seu todo pode ser compreendido como um processo auto-organizado do qual emergem novas compreensões. Os resultados finais, criativos e originais, não podem ser previstos. Mesmo assim é essencial o esforço de preparação e impregnação para que a emergência do novo possa concretizar-se. (MORAES & GALIAZZI, 2007, p. 12).

Descrevendo este processo na seguinte maneira, temos que:

[...] no seu conjunto, as etapas desse ciclo podem ser definidas como um processo capaz de aproveitar o potencial dos sistemas caóticos no sentido da emergência de novos conhecimentos. Inicialmente, leva-se o sistema até o limite do caos, desorganizando e fragmentando os materiais textuais de análise. A partir disso, é possibilitada a formação de novas estruturas de compreensão dos fenômenos sob investigação, expressas então em forma de produções escritas. (MORAES & GALIAZZI, 2007, p. 46).

Objetivamos verificar como o conceito de derivada é apresentado nos livros (abordagem algébrica e/ou geométrica), se os autores incluem aspectos históricos e qual

é o teor dos exemplos e exercícios, verificando o enfoque dos enunciados, a sua contextualização e interdisciplinaridade.

Para seguir a metodologia da *análise textual discursiva*, proposta por Moraes e Galiazzi (2007), dentro dos quatro focos apresentados anteriormente, primeiramente, para cada um dos livros, na *desmontagem do texto*, fragmentamos os tópicos e fizemos uma análise separadamente, considerando a introdução ao tema, os exemplos e os exercícios propostos, além da presença/ausência de fatos históricos. Neste sentido, foi alvo da nossa análise verificar qual era a opção do autor: realizar uma abordagem algébrica e/ou geométrica do conceito de derivada.

A partir desse ponto, realizamos o *estabelecimento de relações*, procurando verificar a coerência entre a abordagem algébrica e/ou geométrica do conceito de derivada presente no texto, se o autor se preocupa com a transição ou ligação com as duas abordagens, bem como estas comparecem nos exemplos e exercícios.

Seguindo para o próximo passo, *captando o novo emergente*, procuramos compreender o todo, realizando uma combinação dos elementos construídos ao longo dos passos anteriores, atingindo um *processo auto-organizado*, não somente em relação a um livro específico, bem como uma análise global dos autores analisados.

2 – ASPECTOS HISTÓRICOS DO CÁLCULO

2.1– Abordagem Histórica do Cálculo

Iniciamos este capítulo recorrendo às palavras do físico John Desmond Bernal retiradas de sua obra *Historia Social de laCiencia*.

*Em realidad, sólo a partir de um examen detallado de la interacción ciencia y la sociedad a lo largo de la historia podemos empezar a comprender qué significa la ciencia y qué puede reservar nosso futuro*⁴. (BERNAL,1989, p. 366).

Bernal (1989) reforça a importância de se recorrer à História para compreender a Ciência do tempo presente, enfatizando sempre a interação entre a Ciência e Sociedade, para projeções futuras.

Calcular, segundo Boyer (1995), significou no passado “fazer contas por meio de seixos”. A palavra Cálculo é diminutivo de *calx*, que em latim, significa ‘pedra’. Verifica-se que, em Medicina, este significado ainda se faz valer, a expressão *cálculo renal* é utilizada para *pedras nos rins*. (BOYER, 1995, p. 1).

Courant & Robbins (2000) afirmam que, com absurdo simplismo, a “invenção” do Cálculo é, algumas vezes, atribuída a dois homens: ao inglês Isaac Newton (1642-1727) e ao alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). No entanto, para estes autores, o Cálculo é produto de uma longa evolução histórica, que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz, apesar de ambos desempenharem papel importante nesta história.

O Cálculo começa a ser moldado no século XVII, contudo, as questões inerentes ao seu surgimento apareceram há mais de dezessete séculos antes dessa época.

Papiros egípcios e tábuas cuneiformes babilônicas incluem problemas de mensuração retilínea e curvilínea que pertencem ao domínio do cálculo; mas ao tratamento pré-helênico desses problemas faltou o amadurecimento matemático em dois aspectos sérios: (1) não havia distinção definida entre resultados exatos e aqueles apenas aproximados, e (2) as relações com a lógica dedutiva não estavam explicitamente reveladas. (BOYER, 1996, p.1).

⁴Tradução: Na verdade, apenas a partir de um exame detalhado da interação entre ciência e sociedade ao longo da história, podemos começar a entender o que a ciência significa e o que pode ser reservado para seu futuro.

De acordo com Zuin (2001), se voltássemos um pouco na História da Matemática, encontraríamos diversos trabalhos de vários matemáticos, físicos e astrônomos, entre eles: René Descartes(1596-1650); Buonaventura Cavalieri (1598-1647); Pierre de Fermat(1601-1665); John Wallis (1616-1703); Blaise Pascal (1623-1662); Christian Huygens (1629-1695); o professor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), e James Gregory (1646-1716). Ainda segundo esta autora, Fermat e Pascal “redescobriram” Arquimedes, passando a usar o método da exaustão em seus trabalhos.

O próprio Newton escreveu que suas ideias preliminares para desenvolver o cálculo tinham como base a “maneira pela qual Fermat traçava tangentes”. As ideias de Fermat foram fundamentais para que Newton pudesse avançar nas suas teorias. Ele próprio admitiu: “Se eu pude ver mais longe é porque estava apoiado em ombros de gigantes”, reconhecendo o valor das contribuições dos que o precederam. (ZUIN, 2001, p.16).

Baron (1985) afirma que o trabalho de Arquimedes (287-212 a.C), segundo a maioria dos historiadores, deve-se a antecipação (ou até mesmo a invenção) do Cálculo Integral. “É mais fácil dizer o que o Cálculo faz do que dizer o que ele é”. (BARON, 1985, p.1).

Segundo Boyer (1996), o *Método* de Arquimedes teria uma importância maior no desenvolvimento do Cálculo se a imprensa fosse uma invenção dos tempos antigos e não do Renascimento.

Ninguém no mundo antigo igualou-se a Arquimedes, quanto à invenção e à demonstração, ao lidar com problemas relacionados ao Cálculo. No entanto, o teorema geral mais antigo em Cálculo não se deve a Arquimedes, mas a matemáticos gregos que viveram, provavelmente, meia dúzia de séculos mais tarde. (BOYER, 1996, p.7).

Na visão de Baron (1985), fora dos ambientes acadêmicos, àqueles que se preocupam com o Cálculo Infinitesimal, de alguma forma ou de outra, interessam apenas nas suas aplicações,

[...] em geral, a derivação está relacionada com a descrição e mensuração da maneira como as coisas variam, se movem e crescem; vamos utilizá-la para calcular razões de crescimento, decrescimento, assim como para prever desenvolvimentos futuros. A integração constitui uma ferramenta básica nos processos de somas; por exemplo, ela é usada para determinar a pressão total da água contra uma represa, para determinar a quantidade total de energia que flui através de um cabo elétrico num determinado tempo ou uma quantidade de terra a ser escavada de uma determinada região. (BARON, 1985, p.1).

De acordo com Bernal (1989), o instrumento utilizado por Newton, para investigar as forças da natureza, foi o Cálculo, que, na verdade, foi o ápice da obra de muitas

gerações de matemáticos, desde os predecessores babilônicos, como Eudóxio e Arquimedes. No século XVII, o Cálculo se desenvolveu muito rapidamente com os trabalhos de Fermat e Descartes. Entretanto, não há importância, do ponto de vista da História do Cálculo, se o mérito de sua construção corresponde a Newton ou a Leibniz. O que importa é que sua forma atual foi dada por Leibniz (1646-1716) e que Newton foi capaz de empregá-lo para resolução de questões vitais da Física, além de ter ensinado a outros, que puderam fazer o mesmo. O Cálculo, da forma como o desenvolveu Newton, pôde ser usado para resolver uma gama enorme de problemas mecânicos e hidrodinâmicos.

O Cálculo se desenvolveu conforme uma combinação de problemas e teorias. Os problemas fomentaram as formulações, que, por sua vez, geraram os conceitos, teorias e técnicas apropriadas para resolvê-los. Historicamente, o modelo geométrico teve influência direta no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Por um lado, a diferenciação, que foi desenvolvida paralelamente com problemas relacionados à construção de retas tangentes à uma determinada curva; de outro lado; a integração, que se desenvolveu a partir de problemas de *quadraturas de curvas*, ou seja, determinação de áreas de regiões limitadas por uma curva, eixos e ordenadas.

Os problemas da tangente e das quadraturas foram estudados separadamente durante séculos, antes de, finalmente, se tornarem relacionados no século XVII, através do que agora conhecemos por *teorema fundamental do cálculo* (BARON, 1985).

Eves (2004) afirma que é estranho que o desenvolvimento histórico do Cálculo aderiu o caminho contrário ao daquele seguido pelos livros-texto e cursos básicos atuais sobre o assunto, tal curiosidade se faz valer, devido ao fato de que as ideias associadas à integração surgiram bem antes das ideias associadas à diferenciação.

A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p. 417).

Como já mencionado anteriormente, o desenvolvimento do Cálculo foi atribuído ao inglês Isaac Newton e ao alemão Gottfried Wilhelm Leibniz. Embora não haja nenhuma importância para a História do Cálculo, o mérito de quem o teria desenvolvido primeiramente, a título de curiosidade, Jeremy Gray, afirma, em seu documentário inti-

tulado “*Topics in the History of Mathematics*”⁵, que Newton foi o primeiro a descobrir o Cálculo, isso haveria ocorrido em 1665 ou 1666, enquanto Leibniz fez sua descoberta independente cerca uma década depois. Porém, Newton só publicou sua descoberta anos depois. Os registros originais de ambas as descobertas ainda estão preservados. Os cadernos de Newton, de 1665 e 1667, podem ser encontrados na biblioteca da Universidade de Cambridge, Reino Unido e, as anotações de Leibniz, referentes ao ano de 1676, estão localizadas em Hannover, Alemanha.

Os Cálculos de Newton e Leibniz estão vinculados às propriedades geométricas de figuras, destacando-se o cálculo de área e o cálculo de tangentes, os dois grandes problemas daquela época. Ambos percorreram um longo caminho para conclusão dos seus estudos e definição de suas regras.

Para Maor (2008, p.103), apesar das semelhanças entre os trabalhos de Newton e Leibniz, é pertinente destacar algumas diferenças. Segundo este autor, Atribui-se a Leibniz o significado restrito da palavra *Cálculo* – ou seja, Cálculo Diferencial e Integral. Newton nunca utilizou essa palavra, preferindo chamar sua invenção de “*Método de Fluxões*”, visto que Newton estava muito preocupado em resolver, a partir desse poderoso instrumento, problemas da Física relacionados às necessidades do seu tempo.

O cálculo diferencial é o estudo das mudanças ou, mais especificamente, das *taxas de mudança* de uma quantidade variável. A maioria dos fenômenos físicos ao nosso redor envolve quantidades que mudam com o tempo, tais como a velocidade de um carro em movimento, as leituras de temperaturas de um termômetro ou a corrente elétrica fluindo em um circuito. Hoje nos chamamos tais quantidades de variáveis; Newton usava o termo *fluente*. O cálculo Diferencial está relacionado à descoberta da taxa de mudança de uma variável, ou, para usar a expressão de Newton, a *fluxão* de um determinado *fluente*. (MAOR, 2008, p. 103).

Ainda segundo Maor (2008), Newton era tanto físico quanto matemático, sua visão dinâmica de mundo nos mostra o funcionamento de sua mente; para ele, tudo se encontrava num estado contínuo de movimento. Leibniz, por outro lado, tinha uma visão mais voltada para filosofia, de um modo mais abstrato. Ele trabalhava com *diferenciais*, pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y .

O conhecimento do Cálculo ficou bastante tempo restrito a um pequeno grupo de matemáticos: o grupo de Newton, em seu ciclo na Inglaterra, e os irmãos Bernoulli, no continente europeu, compondo o time de Leibniz.

⁵ Documentário disponível no YouTube em: https://www.youtube.com/watch?v=P9_qaUfKKx8 acesso às 16:33 dia 10/01/17

Maor (2008) afirma que os irmãos Bernoulli propagaram por toda a Europa os ensinamentos de Leibniz para diversos matemáticos, dentre eles, o francês Guillaume François Antonie L'Hospital (1661-1704), responsável pela escrita do primeiro livro-texto sobre o assunto, *Analyse des infiniment petits* (1696). Outros matemáticos do continente o seguiram e logo o Cálculo era o assunto dominante na Matemática do século XVIII.

Uma grande vantagem do trabalho de Leibniz sobre o trabalho de Newton foi o sistema de notação que ele utilizava. Quando Newton criou seu “método de fluxões” colocou um ponto sobre a letra representando uma quantidade cuja fluxão (derivada) ele buscava.

Para encontrar a derivada de $y = x^2$ devemos primeiro obter uma relação entre as fluxões de x e de y em relação ao tempo (Newton pensava em cada variável como “fluindo” uniformemente com o tempo, daí o termo *fluxão*), neste caso $\dot{y} = 2x\dot{x}$. A derivada, ou taxa de mudança de y com relação a x , é a proporção entre as duas fluxões, ou seja, $\dot{y}/\dot{x} = 2x$. (MAOR, 2008, p. 127).

Esta notação dos pontos, utilizada por Newton – “letra pontuada” – mostrou-se bastante ineficiente, entretanto, sobreviveu na Inglaterra por mais de cem anos. Todavia, a Europa continental adotou a notação diferencial mais eficiente, a de Leibniz, dy/dx – onde dy e dx representam pequenos incrementos nas variáveis y e x . Sua proporção rendeu-lhe futuramente a concepção de taxa de variação de y em relação a x .

Outra notação, bastante eficiente, surgiu, em 1797, através de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), quando publica em seu tratado *Théorie des fonctions analytiques*, uma notação funcional da derivada, chamando de $f'x$ a função derivada de fx .

Para Bernal (1989), o método utilizado por Newton foi o *Cálculo Infinitesimal*, “método das fluxões” (o fluxo constante de uma função contínua). Bernal afirma que esta descoberta significou o auge do trabalho de muitas gerações de matemáticos, desde os predecessores da Babilônia, incluindo-se Eudoxo (sec. IV a.C.) e Arquimedes (sec. III a.C.).

Do ponto de vista da Ciência, como já enfatizamos, não é de grande importância saber se corresponde a Newton ou Leibniz o mérito de ser o pioneiro em aspectos que desenvolveram o Cálculo, uma questão, naquela época, de grande discussão. O importante é que Newton usou seu cálculo para resolver questões vitais da Física e ensinou outros a fazerem o mesmo. (BERNAL, 1989).

Courant & Robbins (2000), afirmam que, o grande mérito de Newton e Leibniz foi o de terem identificado claramente a estreita associação entre os dois grandes problemas daquela época, o problema da *tangente*, que cabia ao Cálculo Diferencial, e o problema das *quadraturas*, que cabia ao Cálculo Integral.

Nas mãos deles, os novos métodos unificados tornaram-se poderosos instrumentos da Ciência.[...] Newton, sem dúvida alguma o maior cientista, parece ter-se inspirado principalmente em Barrow (1630-1677), seu professor e predecessor em Cambridge. Leibniz aproximava-se mais de um diletante; brilhante advogado, diplomata e filósofo, uma das mentes mais ativas e versáteis de seu século. (COURANT, ROBBINS, 2000, p. 482).

Ainda segundo Courant (2000) e Robbins (2000), Leibniz havia aprendido a nova matemática num intervalo de tempo incrivelmente curto, com o físico holandês Christian Huygens (1629-1695), em uma visita a Paris, numa missão diplomática, publicando, em seguida, os resultados que continham o núcleo do Cálculo moderno. Por outro lado, Newton tinha feito suas descobertas muito antes, mas era avesso à publicação. Somente mais tarde, seus trabalhos sobre o método das fluxões foram publicados, levando seus admiradores a iniciarem uma disputa sobre a prioridade na descoberta do Cálculo junto aos amigos de Leibniz, acusando esse último de plágio. Para esses autores, esta disputa constituiu um exemplo infeliz de excesso de ênfase em questões de precedência e reivindicações quanto à propriedade intelectual, o que predisps ao envenenamento da atmosfera nos contatos científicos naturais. (COURANT, ROBBINS, 2000)

Nessa digressão histórica, buscamos apontar alguns dos principais elementos da temática a ser desenvolvida nesse trabalho.

2.2 – O Ensino de Cálculo no Brasil na escola secundária

Não é nosso propósito fazer uma discussão do Cálculo Diferencial e Integral ou mesmo do tópico derivada em uma perspectiva da história das disciplinas escolares (CHERVEL, 1990). No entanto, faz-se necessário pontuar alguns aspectos do ensino de derivada no Brasil, o qual, anteriormente, ocorria no ensino secundário.

Para Miorim (1998), no que diz respeito ao desenvolvimento da Matemática, o século XVIII pode ser encarado apenas como “interlúdio”, pois sucedeu o século em que a Matemática grega havia sido superada, particularmente pelo desenvolvimento da

Geometria Analítica e do cálculo infinitesimal. Ainda, segundo Miorim (1998), desde as últimas décadas do século XIX, começou a se manifestar em diferentes países uma preocupação em modernizar o ensino de Matemática desenvolvido nas escolas secundárias, especialmente por meio da introdução de novos conteúdos. Universidades de diferentes países passam, a partir deste momento, ter a responsabilidade formal em fornecer professores de Matemática para os cursos secundários.

Para D'Ambrósio (2003), o século XIX pode ser visto como o século da consolidação da Matemática Ocidental.

No Brasil, a introdução do cálculo infinitesimal na escola secundária foi um dos pontos defendidos pela proposta de Euclides Roxo, foi ele o maior responsável pela proposta modernizadora brasileira, unificando o estudo de Álgebra, Geometria e Aritmética (TORRES, 2009).

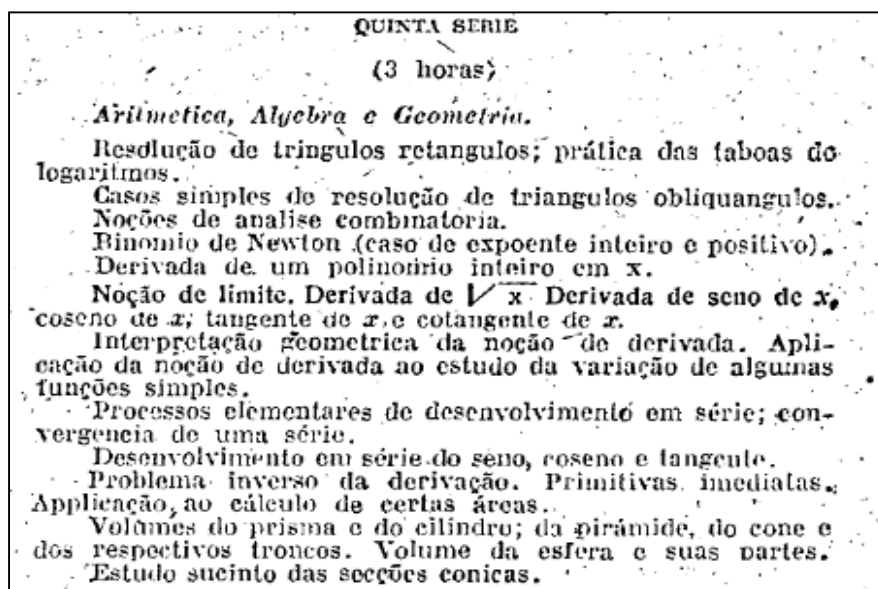
Miorim (1998) afirma que Roxo estava fundamentado nas ideias apresentadas pelo Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática, iniciado em 1908, com a criação da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática. Desta forma, o ensino secundário brasileiro percorreu um longo caminho até o ano de 1931, onde começa a se estruturar em nível nacional.

O decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931, expediu os programas do curso fundamental do ensino secundário. Destacam-se, neste decreto, as importantes e coesas instruções e orientações pedagógicas, percebe-se uma preocupação constante com a relação entre o ensino e a aprendizagem, além, é claro, da reestruturação do programa e inclusão de novos conteúdos.

Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se essa estreita correlação entre as diversas modalidades do pensamento matemático, será adotada como ideia central do ensino, a noção de função, apresentada a princípio, intuitivamente e desenvolvida nas séries sucessivas do curso, de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como a analítica. Com um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluído na 5ª série o ensino das noções fundamentais e iniciais do cálculo de derivadas, tendo-se não só em vista a sua aplicação a certas questões, geralmente tratadas em matemática elementar por processos artificiais, como ainda aos problemas elementares da mecânica e da física. Essas noções não serão ensinadas como matéria à parte, mas entrelaçadas ao corpo das demais disciplinas matemáticas. Este acréscimo de matéria será compensado com a exclusão de certos assuntos de interesse puramente formalístico, com abandono de construções de importância secundária e, ainda, de processos de cálculo desprovidos de interesse didático. (BRASIL, 1931, p.12413).

Em Brasil (1931) verifica-se que o conteúdo referente ao Cálculo foi introduzido na 5ª série do ensino secundário, com carga horária semanal de 3 horas, alocado junto ao programa de *Álgebra* (figura 3).

Figura 3 – Programa de Álgebra da quinta série



Fonte: Brasil (1931)

No decreto nº 19.890, da reforma Francisco Campos, afirma-se que a introdução do método infinitesimal teria “por fim fazer com que o aluno tomasse conhecimento do mais importante dos recursos matemáticos”. Além disso, a defesa pelo ensino da derivada comparece quando se postula que o ensino das noções do cálculo das derivadas procuraria “manter um meio termo, entre as razoáveis exigências do rigor matemático e a consideração das necessidades práticas, sem desprezar o auxílio da explicação geométrica e intuitiva.” (BRASIL, 1931).

Em 1932, o decreto 21.241 consolida a organização do ensino secundário:

Quadro 1 – Decreto n. 21.241 - de 4 de abril de 1932 (*)

DECRETO N. 21.241 - DE 4 DE ABRIL DE 1932 (*)

Ensino secundário

CAPÍTULO I

DOS CURSOS E DA SÉRIÇÃO

Art. 1º O ensino secundário, oficialmente reconhecido, será ministrado no Colégio Pedro II e em estabelecimentos sob o regime de inspeção oficial.

Art. 2º O ensino secundário compreenderá dois cursos seriados: fundamental e complementar.

Art. 3º Constituirão o curso fundamental as disciplinas abaixo indicadas, distribuídas em cinco anos, de acordo com a seguinte seriação:

1ª série: Português - Francês - História da Civilização - Geografia - Matemática - Ciências físicas e naturais - Desenho - Música (canto orfeônico).

2ª série: Português - Francês - Inglês - História da Civilização - Geografia - Matemática - Ciências físicas e naturais - Desenho - Música (canto orfeônico).

3ª série: Português - Francês - Inglês - História da Civilização - Geografia - Matemática - Física - Química - História Natural - Desenho - Música (canto orfeônico).

4ª série: Português - Francês - Inglês - Latim - Alemão (facultativo) - História da Civilização - Geografia - Matemática - Física - Química - História Natural - Desenho.

5ª série: Português - Latim - Alemão (facultativo) - História da Civilização - Geografia - Matemática - Física - Química - História Natural - Desenho.

Fonte: Brasil (1932).

De acordo com Geraldo Ávila (1991),

Se até 1960 o Cálculo era ensinado na escola secundária, por que então ele não foi incluído nos programas do novo sistema que criou o 2.º grau? De um lado, os reformistas valorizavam mais outros tópicos, que melhor se prestavam àquelas apresentações que eles consideravam modernas. De outro lado, não haveria mesmo espaço para tanta coisa nos programas, já que o rigor e o formalismo exigiam o ensino da *teoria dos conjuntos* (sic) e vários detalhamentos axiomáticos que tomam tempo. (ÁVILA, 1991, p.1)

O ensino de limite e derivada passa a não integrar os currículos do que hoje denominamos Ensino Médio, muito em função da retirada destes conteúdos dos vestibulares para ingresso nos cursos superiores da área de Ciências Exatas. Os autores de livros didáticos de Matemática, paulatinamente, também eliminaram estes tópicos das suas obras.

2.3 – Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia, publicadas em 2001, o desafio que se apresenta o ensino de engenharia no Brasil é um cenário mundial que demanda uso intensivo da ciência e tecnologia exigindo, desta forma, profissionais altamente qualificados. As diretrizes apontam que o novo engenheiro deve ser capaz de propor soluções que sejam não apenas tecnicamente corretas, ele deve ter a ambição de considerar os problemas em sua totalidade, sendo assim, as Instituições de Ensino Superior – IES – no Brasil, têm procurado, através de reformas curriculares, equacionar esses problemas (BRASIL, 2001, p.1).

O núcleo de conteúdos básicos corresponde a aproximadamente 30% da carga horária mínima nos cursos de Engenharia. Os currículos destes cursos deverão dar con-

dições a seus egressos para adquirirem competências e habilidades; destacamos algumas delas:

- aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;
- projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;
- identificar, formular e resolver problemas de engenharia;
- desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas;
- atuar em equipes multidisciplinares. (BRASIL, 2001).

Nessa perspectiva, cabem aos professores dos cursos de Engenharia, especificamente os professores de Cálculo, que busquem formas e metodologias que proporcionem aos alunos meios para desenvolverem tais competências.

A presente pesquisa teve a pretensão de trabalhar nessa linha de pensamento, no que diz respeito ao ensino de derivada. A *Investigação Matemática*, metodologia proposta e utilizada, pode contribuir para que o aluno seja cada vez mais autônomo em sua jornada acadêmica e profissional.

3 – A DERIVADA E SEU ENSINO

A palavra derivada surgiu através de Newton em seu *método das fluxões*. Do latim *de* (a partir do) + *rivus* (riacho) formam a palavra *derivus* ou *derive* que significa literalmente "aquele que flui"⁶.

Segundo Boyer (1996), atribui-se a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) a contribuição de dar ao Cálculo elementar o caráter que ele tem hoje.

No Cálculo de Cauchy os conceitos de função e limite de função eram fundamentais. Ao definir a derivada de $y = f(x)$ com relação a x ele dava à variável x um acréscimo $\Delta x = i$ formando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$. O limite desse quociente quando i se aproxima de zero ele definia como derivada $f'(x)$ de y em relação a x . Relegava a diferencial a papel subsidiário, embora percebesse suas vantagens operacionais. (BOYER, 1996, p.355).

Ferreira (2014), em seu artigo publicado na revista *Ciência e Natura*, traz uma discussão, assim como Eves (2004), já referenciado nesta pesquisa, sobre o ensino de Cálculo, no que diz respeito à organização do ensino dos conteúdos. Ferreira (2014) aponta que, uma das inconsistências mais graves na metodologia adotada, para o ensino de Cálculo, é a sua sistemática apresentação antes do conceito de integral, o que deveria, segundo ele, escandalizar a muitos quando sequer é notada.

Esse procedimento contraria totalmente a ordem do desenvolvimento histórico da matemática, o que por si só já deveria ser um estridente sinal de alerta. Estabelecendo a origem da integral de Eudoxus (390-338 a.C.) ("Método da exaustão") e, por outro lado, a origem do conceito de derivada nos trabalhos de Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716), o intervalo de tempo entre os dois eventos soma mais de 2000 anos de Matemática, período que pontificaram algumas das mentes mais brilhantes da humanidade, como foram as de Arquimedes (287-212 a.C.) e Galileo (1564-1642). (FERREIRA, 2014, p.109).

Ferreira (2014) defende a ideia de que o conceito de integral deve ser introduzido antes do conceito de derivada, assim como historicamente foi feito.⁷ As discussões relacionadas ao conceito de derivada, como a que acabamos de observar, tornam-se bastante pertinentes, uma vez que as pesquisas já citadas, como a de Garzella (2013) e Wrobel, Zeferino e Carneiro (2013) indicam a dificuldade de assimilação do conceito de derivada e integral pelos graduandos, o que mostroutambém essa presente pesquisa.

⁶ Dicionário Etimológico: <<https://www.dicionarioetimologico.com.br/derivada>>. Acesso em: 11 ago. 2017.

⁷ Não temos elementos para afirmar quando se houve/há algum livro, dedicado ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral, no qual a integral é apresentada antes da derivada. No entanto, defendemos que didaticamente o modelo que é desenvolvido nos cursos superiores é o mais adequado.

A derivada geralmente é introduzida através de sua definição formal por intermédio de um “*Limite singular*” (FERREIRA, 2014).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O problema é que, em muitos livros-texto, esse limite é introduzido de forma desconexa, ou seja, de forma isolada. Muitos autores abrem mão de uma forma mais intuitiva de abordagem.

3.1 – Análise do ensino de Derivada segundo alguns livros-texto

A fundamentação teórico-metodológica, para nosso estudo do conceito de derivada em livros-texto de Cálculo, concentra-se na *Análise Textual Discursiva* (MORAES & GALIAZZI, 2007). Nossa análise foi de cunho qualitativo e se baseou no método dedutivo, do geral para o particular, sendo construídas previamente as categorias de análise já mostradas em nosso referencial teórico.

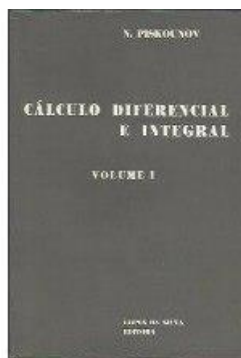
Apresentamos, a seguir, uma descrição e análise das seguintes obras:

- Livro 1: *Cálculo Diferencial e Integral*, Piskunov, publicado em 1977.
- Livro 2: *Cálculo com Geometria Analítica*, Simmons, publicado em 1987.
- Livro 3: *Cálculo com Geometria Analítica*, Leithold, publicado em 1994.
- Livro 4: *Cálculo*, Thomas, publicado em 2009.
- Livro 5: *Cálculo*, Stewart, publicado em 2014.

Livro 1 - Cálculo Diferencial e Integral, Piskounov.

O matemático soviético, Nikolai Semenovitch Piskounov (1908-1977) escreveu o livro *Cálculo Diferencial e Integral* que foi muito utilizado no Brasil nos cursos superiores de Ciências Exatas durante a década de 1980 -1990. Analisamos a quarta edição, do primeiro volume, publicada em 1977, pela Lopes da Silva Editora.

Figura 4 – Capa do livro “O Cálculo Diferencial e Integral”



Fonte: Piskounov (1977)

Em seu prefácio, o autor enfatiza uma reformulação em relação a edição anterior, em especial aqueles que tratam de certos ramos da matemática moderna, segundo ele, esses conhecimentos são indispensáveis para todo engenheiro. Não foi constatado, no prefácio, a proposta metodológica do autor.

Piskounov inicia o assunto de derivada no capítulo 3 de sua obra, intitulado: *Derivada e diferencial*. Começa o capítulo com o tópico *Velocidade dum movimento*. Inferimos que a ideia do autor foi de introduzir o assunto de forma contextualizada, contudo, sua abordagem foi muito superficial, o limite que representa a velocidade instantânea ficou bastante “solto” em seu texto.

Figura 5 – Exemplo Resolvido/ Piskounov

escolher um intervalo de tempo Δt mais pequeno. O limite para o qual tende a velocidade média, quando $\Delta t \rightarrow 0$, caracteriza o melhor possível a velocidade do movimento do móvel no instante t . Este limite chama-se *velocidade instantânea do movimento*:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (3)$$

Assim, chama-se *velocidade instantânea do movimento* ao limite do quociente do acréscimo do caminho percorrido Δs pelo acréscimo do tempo Δt , quando o acréscimo do tempo tende para zero.

Escrevamos a igualdade (3) sob uma forma mais explícita. Como:

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

temos:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (3')$$

Esta fórmula dá a velocidade dum movimento não uniforme. Vemos, então, que a noção de velocidade dum movimento não uniforme está infinitamente ligada à noção de limite. Só a noção de limite permite definir a velocidade de um movimento não uniforme.

Vê-se, da fórmula (3'), que v não depende do acréscimo do tempo, mas depende de t e da função $f(t)$.

Exemplo — Achar a velocidade do movimento uniformemente acelerado num instante qualquer t e no instante $t = 2s$, se a lei do movimento for

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Resolução — No instante t temos $s = \frac{1}{2} g t^2$, no instante $t + \Delta t$ teremos

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Calculemos Δs :

$$\Delta s = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2} g t^2 = g t \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2.$$

Formemos o quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g t \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2}{\Delta t} = g t + \frac{1}{2} g \Delta t;$$

temos por definição:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(g t + \frac{1}{2} g \Delta t \right) = g t.$$

Assim, a velocidade num instante qualquer t é igual a $v = g t$. Quando $t = 2$ temos $(v)_{t=2} = g \times 2 = 9,8 \times 2 = 19,6 \text{ m/s}$.

Fonte: Piskounov (1977, p.73)

Logo adiante, a derivada é definida formalmente:

Seja $y = f(x)$

Uma função definida num certo intervalo. Para cada valor da variável x deste intervalo a função $y = f(x)$ admite um valor bem definido.

Suponhamos que se dá à variável x um acréscimo Δx (positivo ou negativo, não importa). A função y recebe, então um acréscimo Δy . Assim, para os valores x e $x + \Delta x$ da variável temos respectivamente $y = f(x)$ e $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Calculemos o acréscimo Δy da função y :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Formemos o quociente do acréscimo da função e do acréscimo da variável independente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Calculemos o limite deste quociente quando Δx tende para zero. Se este limite existir, chama-se derivada da função $f(x)$ e, designa-se pela notação $f'(x)$. Assim por definição.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

(PISKOUNOV, 1977, p.74).

A seguir, são resolvidos dois exemplos utilizando a definição formal por intermédio de limites. Em sequência, o autor nos mostra a interpretação geométrica da derivada. Para isso, começa o assunto definindo a tangente a uma curva num dado ponto. Nesse momento, o autor relaciona a inclinação da reta tangente com a derivada de uma função, ou seja, ele nos mostra que o valor da derivada $f'(x)$ para um valor dado da variável x é igual à tangente do ângulo formado pelo eixo dos x positivos e a tangente à curva representada pela função: $y = f(x)$ no ponto correspondente; $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Logo em seguida, o autor parte para as derivadas das funções elementares, para as regras de derivação demonstrando-as uma a uma.

Constata-se que não houve uma preocupação do autor com a diversidade de exemplos resolvidos. No final deste capítulo, foram disponibilizados 236 exercícios, de cunho tradicional, sendo a maioria deles de cunho extremamente algébricos.

Selecionamos alguns destes exercícios (figuras 6 e 7).

Figura 6 – Exercícios propostos/ Piskounov

Exercícios

Encontrar a derivada das funções servindo-se da definição de derivada:

1. $y = x^3$. Resp. $3x^2$.	2. $y = \frac{1}{x}$. Resp. $-\frac{1}{x^2}$.
3. $y = \sqrt{x}$. Resp. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.	4. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Resp. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.
5. $y = \sin^2 x$. Resp. $2 \sin x \cos x$.	6. $y = 2x^2 - x$. Resp. $4x - 1$.

Fonte: Piskounov (1977, p.135)

Figura 7 – Continuação exercícios propostos / Piskounov

DERIVADA E DIFERENCIAL 143

159. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ para $t = \frac{\pi}{2}$. Fazer o desenho. Resp 1.

160. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ para $t = \frac{\pi}{4}$. Fazer o desenho. Resp - 1.

161. Um corpo lançado no vácuo sob um ângulo α com o horizonte descreve sob o efeito da gravidade uma trajectória (parábola) cujas equações paramétricas são: $x = (v_0 \cos \alpha)t$, $y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}$ ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$). Para $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 50 \text{ m/s}$, determinar a direcção do movimento nos instantes:
 1) $t = 2\text{s}$; 2) $t = 7\text{s}$. Fazer o desenho.
 Rép. 1) $\text{tg } \varphi_1 = 0,948$, $\varphi_1 = 43^\circ 30'$
 2) $\text{tg } \varphi_2 = -1,012$, $\varphi_2 = +134^\circ 7'$
 Calcular os diferenciais das funções seguintes:

162. $y = (a^2 - x^2)^5$. Resp. $dy = -10x(a^2 - x^2)^4 dx$.

163. $y = \sqrt{1+x^2}$. Resp. $dy = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

164. $y = \frac{1}{3} \text{tg}^3 x + \text{tg } x$. Resp. $dy = \sec^4 x dx$.

165. $y = \frac{x \text{Log } x}{1-x} + \text{Log}(1-x)$. Resp. $dy = \frac{\text{Log } x dx}{(1-x)^2}$.

Calcular os acréscimos e os diferenciais das funções:

166. $y = 2x^2 - x$ para $x = 1$, $\Delta x = 0,01$. Rép. $\Delta y = 0,0302$, $dy = 0,03$.

167. Seja $y = x^3 + 2x$. Calcular Δy e dy para $x = -1$, $\Delta x = 0,002$. Resp. $\Delta y = 0,098808$, $dy = 0,1$.

168. Seja $y = \sin x$. Calcular dy para $x = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{18}$. Resp. $dy = \frac{\pi}{36} = 0,00873$.

169. Conhecendo $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025$; $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, calcular o valor aproximado de $\sin 60^\circ 3'$ e $\sin 60^\circ 18'$. Comparar os resultados obtidos com os dados das tábuas. Resp. $\sin 60^\circ 3' \approx 0,866461$; $\sin 60^\circ 18' \approx 0,868643$.

170. Achar o valor aproximado de $\text{tg } 45^\circ 30'$. Resp. 1,00262.

171. Conhecendo $\log_{10} 200 = 2,30103$, calcular o valor aproximado de $\log_{10} 200,2$. Resp. 2,30146.

Fonte: Piskounov (1977, p.143)

Não foi constatado, neste capítulo, nenhum posicionamento histórico relacionado à derivada. Os assuntos são sempre introduzidos de modo bastante formal.

Livro 2 -Cálculo com Geometria Analítica,George F.Simmons.

O autor, matemático americano,George Finlay Simmons, nascido em 1925, escreveu *Cálculo com Geometria Analítica*, este livro, assim como o anterior, teve bastante circulação nas universidades brasileiras na década de 1990. Analisamos a primeira edição, do primeiro volume, publicada em 1987 pela McGraw-Hill do Brasil.

Figura 8 – Capa do livro “ Cálculo com geometria analítica ”



Fonte: Simmons (1987)

Já no prefácio, é possível identificar a proposta do autor: sua pretensão é que o livro seja um texto de Cálculo que pode ser utilizado em todos os cursos superiores, que tenham a disciplina, tendo como pré-requisitos conhecimentos de álgebra e geometria em nível do 2º grau, ou seja, o equivalente atualmente ao Ensino Médio.

Ainda no prefácio, o autor garante que foi dada grande ênfase à motivação e à compreensão intuitiva, sendo negligenciados os refinamentos da teoria. Segundo ele, a maioria dos alunos se revela impaciente quanto à parte teórica do assunto, e seu propósito maior foi o de apresentar o Cálculo como uma arte de resolver problemas.

O objetivo principal do texto é explorar assuntos para os quais o cálculo é útil – o que ele nos possibilita fazer e compreender – e não qual é sua natureza lógica, quando encarado do ponto de vista especializado (e limitado) do matemático puro moderno. (SIMMONS,1987, p. XVI).

O tópico sobre derivada é abordado no capítulo 2, intitulado: *A Derivada de uma Função*. O autor inicia a discussão com uma pergunta: *O que é Cálculo? O problema das tangentes*.

Simmons parte da premissa de que todas as ideias e aplicações do Cálculo giram em torno de dois grandes problemas geométricos que, segundo ele, são facilmente entendidos:

PROBLEMA 1: O problema básico do cálculo diferencial é o problema das tangentes: Calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num ponto dado P.

PROBLEMA 2: O problema básico do cálculo integral é o problema das áreas: Calcular a área debaixo do gráfico, entre os pontos $x = a$ e $x = b$. (SIMMONS, 1987, p. 70)

Inferimos que sua intenção foi estabelecer relações iniciais entre o Cálculo e a Geometria, pois, segundo ele, esse é o contexto em que as ideias do Cálculo são mais facilmente compreendidas. Logo em seguida, existe um posicionamento, baseado em fatos históricos, com a prerrogativa de que o Cálculo não foi “inventado” e, sim, que foi um produto de um longo processo evolutivo que teve início na Grécia Antiga e continuou no século XIX.

O autor cita, ainda, a grandeza e a importância de Newton e Leibniz e suas ricas contribuições para o Cálculo. A partir daí, concentra suas atenções no problema da reta tangente, desde sua definição até como calcular o coeficiente angular (inclinação) da mesma. Em relação aos exemplos apresentados, percebe-se um número insuficiente (apenas dois) para o entendimento de tal abordagem. Em seguida, são incluídos dez exercícios sobre retas tangentes; todos bem tradicionais e sem nenhuma ilustração gráfica. Em seguida, a derivada é formalmente definida como função:

Dada uma função $f(x)$ qualquer,
sua derivada $f'(x)$ é a nova função cujo valor num ponto x é definido por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{SIMMONS, 1987, p. 79}).$$

Simmons inclui dois exemplos utilizando a definição formal (resolução com limites); logo em seguida, chama a atenção quanto ao uso das diversas notações para a derivada – algo bastante pertinente – alegando que usar a notação correta pode suavizar o caminho e realizar boa parte do nosso trabalho, enquanto, notações equivocadas podem nos imobilizar, ficando quase impossível uma movimentação fácil. Uma notação adequada auxilia o entendimento e o raciocínio do aluno.

O autor finaliza a compreensão de derivada relacionando-a como taxa de variação no tópico intitulado: *Velocidade e taxa de variação*. Neste ponto, Simmons inicia o assunto com uma pincelada no passado, afirmando que, problemas envolvendo velocidade instantânea foram responsáveis por tornar o Cálculo um instrumento de pensamento essencial para Newton.

A abordagem do conceito de derivada, como taxa de variação instantânea é, sem dúvida alguma, bastante rica quanto à sua aplicabilidade. Segundo nosso ponto de vista, o autor não explorou tal riqueza. Verificam-se poucos exemplos de aplicação (apenas três), o mesmo pode-se dizer sobre os exercícios propostos relacionados a essa abordagem, somente treze exercícios propostos.

Figura 9 – Exemplos Resolvido / Simmons

Exemplo 2 Considere um projétil disparado para cima em linha reta, do solo, com velocidade inicial de 39,2 m/s. Esse projétil move-se para cima e depois para baixo ao longo de uma reta. Entretanto, as duas partes de seu percurso são mostradas separadas na Fig. 2.12, para maior clareza visual.

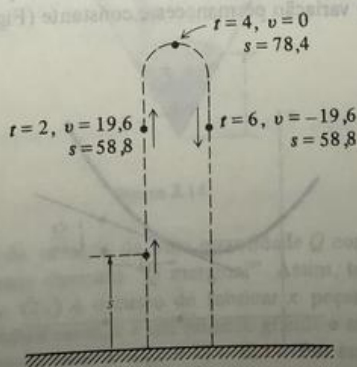


Figura 2.12

Fonte: Simmons (1987, p.89)

Figura 10 – Continuação Exercício Resolvido

90 Cálculo com Geometria Analítica

Seja $s = f(t)$ a altura em metros do projétil t segundos após o disparo. Se a força da gravidade estivesse ausente, o projétil continuaria se movendo para cima com velocidade constante de 39,2 m/s e teríamos $s = f(t) = 39,2t$. No entanto, a ação da gravidade provoca seu amortecimento e ele pára momentaneamente no topo de seu voo, e depois, cai com velocidade crescente. A evidência experimental sugere que a altura do projétil durante o seu voo é dada pela fórmula

$$s = f(t) = 39,2t - 4,9t^2. \quad (4)$$

Se escrevermos na forma fatorada $s = 4,9t(8-t)$, vemos que $s = 0$ quando $t = 0$ e quando $t = 8$. Logo, o projétil retorna ao solo 8 segundos após a partida e (4) é válida somente para $0 \leq t \leq 8$.

Para aprender mais sobre a natureza desse movimento é necessário conhecer a velocidade. Se a regra dos três passos para calcular derivadas é aplicada a (4), encontramos a velocidade no instante t :

$$v = \frac{ds}{dt} = 39,2 - 9,8t. \quad (5) \quad (5)$$

No topo de seu voo, o projétil está momentaneamente em repouso e portanto $v = 0$. Por (5), $t = 4$ quando $v = 0$, e por (4), $s = 78,4$ quando $t = 4$. Dessa maneira, achamos a altura máxima alcançada pelo projétil e o tempo exigido para alcançar essa altura (veja a Fig. 2.12). Quando t cresce de 0 a 8, é claro, a partir de (5), que v decresce de 39,2 m/s a -39,2 m/s. De fato, v decresce de 9,8 m/s durante cada segundo na subida e isto se expressa dizendo que a aceleração é -9,8 metros por segundo por segundo (m/s^2). Notamos explicitamente que a velocidade é positiva de $t = 0$ a $t = 4$, quando s é crescente; e é negativa de $t = 4$ a $t = 8$, quando s está decrescendo. Em particular, é fácil ver por (5) que $v = 19,6$ m/s quando $t = 2$ e $v = -19,6$ m/s quando $t = 6$.

Fonte: Simmons (1987, p.90)

Alguns exercícios propostos:

Figura 11 –Exercícios Propostos - 1-Simmons

12. Considere um quadrado de área A e lado s , de modo que $A = s^2$. Se $x = \frac{1}{2}s$, utilize a idéia do Exemplo 3d para fazer conjecturas acerca do valor de dA/dx . Verifique suas conjecturas por meio de cálculos.
13. Suponha que um balão de volume V e raio r esteja sendo inflado, de tal modo que V e r sejam ambas funções do tempo t . Se dV/dt é constante, o que pode ser dito (sem cálculos) acerca do comportamento de dr/dt quando r cresce?

Fonte: Simmons (1987, p.93)

Figura 12 –Exercícios Propostos - 2 -/ Simmons

- Cada uma das fórmulas dos Problemas 1 a 7 descreve o movimento de um ponto ao longo de uma reta horizontal cujo sentido é o da esquerda para a direita. Em cada caso, use o resultado do enunciado acima para escrever a velocidade $v = ds/dt$. Encontre, também, (a) os instantes em que a velocidade é nula, de modo que o ponto está momentaneamente em repouso; e (b) os instantes em que o ponto está se movendo para a direita.
1. $s = 3t^2 - 12t + 7$.
 2. $s = 1 - 6t - t^2$.
 3. $s = 2t^2 + 28t - 6$.
 4. $s = -19 + 10t - 5t^2$.
 5. $s = 7t^2 + 2$.
 6. $s = 2 + 7t$.
 7. $s = (2t - 6)^2$.
8. Dois pontos partem da origem do eixo s no instante $t = 0$ e movem-se ao longo desse eixo, de acordo com as fórmulas
- $$s_1 = t^2 - 6t \quad \text{e} \quad s_2 = 8t - t^2,$$
- onde s_1 e s_2 são medidos em metros e t , em segundos.
- (a) Quando é que os dois pontos têm a mesma velocidade?
 - (b) Quais são as velocidades dos dois pontos nos instantes em que eles têm a mesma posição?
9. Partindo do repouso, um certo carro move-se s metros em t segundos, onde $s = 1,34t^2$. Quanto tempo levará o carro para atingir a velocidade de 26,8 m/s?

Fonte: Simmons (1987, p.94)

É pertinente a discussão sobre a quantidade e a diversidade dos exemplos e exercícios de aplicação, é justamente neste momento que o leitor tem a oportunidade de experimentar e verificar a aplicabilidade do estudo de derivada como *Taxa de Variação Instantânea* nas mais diversas áreas e contextos. Inferimos que o autor poderia ter explorado essas áreas, como por exemplo: mostrar a aplicabilidade nos cursos Engenharia, Economia, Administração e outros.

O capítulo 2 desta obra não cumpre o objetivo da compreensão imediata do conceito de derivada. Os exemplos e exercícios, além de serem insuficientes, são bastante tradicionais, há pouca diversidade no quesito aplicação da derivada. Não percebemos,

por parte do autor, uma preocupação com a contextualização e, muito menos, com a interdisciplinaridade, também não houve uma exploração gráfica satisfatória que proporcionasse um maior auxílio à percepção geométrica da derivada.

A grande parte dos exercícios são de cunho algébrico e bastante repetitivos. Supomos que o autor não conseguiu atingir seu principal objetivo que era o entendimento do *conceito* de derivada e sua aplicabilidade.

Livro 3 –O Cálculo com Geometria Analítica, de Louis Leithold.

O matemático americano Louis Leithold (1924-2005) iniciou como autor de livro-texto de Cálculo em 1968. Analisamos o primeiro volume da terceira edição do seu livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, publicado em 1994, pela editora Harbra. Esta obra também com bastante circulação nas universidades brasileiras.

Figura 13–Capa do livro “Cálculo com Geometria Analítica”



Fonte: Leithold (1994)

Em seu prefácio, Leithold deixa claro que elaborou sua obra para o estudante, ou seja, preocupou-se bastante em manter uma apresentação de acordo com a experiência e a maturidade de um principiante. Ainda segundo ele, as explanações passo-a-passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos relevantes do livro nesta edição.

Leithold inicia o assunto de derivada no capítulo 3 de sua obra, intitulado: *A Derivada e Derivação*. O capítulo principia com uma abordagem geométrica da derivada. Para ele, muitos dos problemas importantes de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto dela.

A seguir, é definida formalmente a reta tangente:

Definição: Suponhamos que a função f seja contínua em x_1 . A **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é:

(i) a reta por P tendo inclinação $m(x_1)$, dada por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se o limite existir:

(ii) a reta $x = x_1$ se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

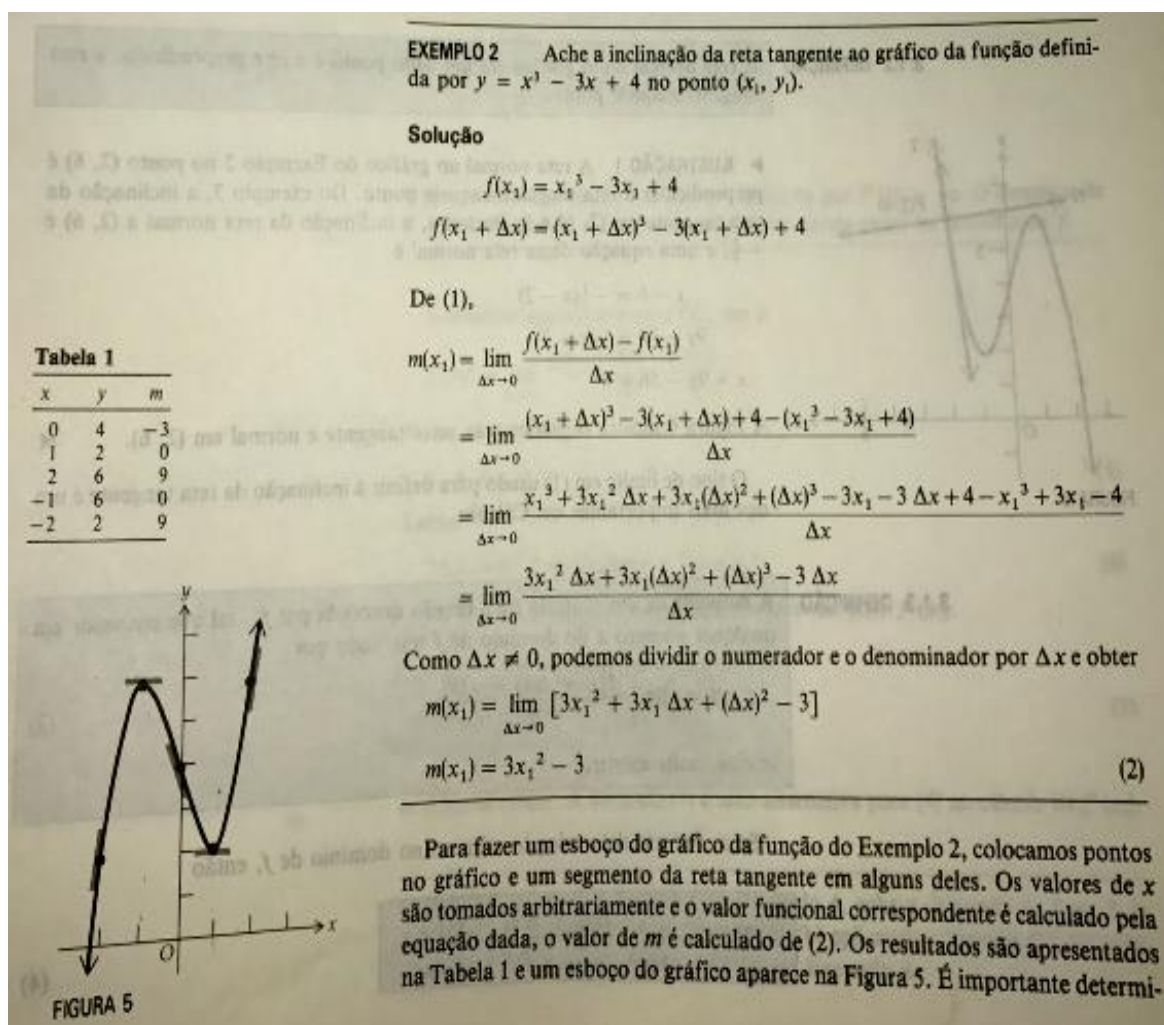
e

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

(LEITHOLD, 1994, p.141).

Três exemplos relacionados à inclinação de reta tangente são resolvidos imediatamente após a definição anterior, nos quais, observa-se uma preocupação com a ilustração. Dois destes exemplos são tratados geometricamente (figura 14).

Figura 14 – Exemplos Resolvidos – 1 - / Leithold



Fonte: Leithold (1994, p. 141)

Posteriormente, a derivada é definida como função:

Definição: A derivada de uma função f é a função denotada por f' , tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se este limite existir.

(LEITHOLD, 1994, p.142).

Não houve, por parte do autor, nenhuma preocupação em relacionar a inclinação da reta tangente com a derivada. Esta foi introduzida totalmente desconexa do assunto, contradizendo a afirmação de Leithold no prefácio, de que sua obra foi escrita para atender a experiência e a maturidade de um principiante. Após esta definição “solta” de derivada, o autor resolve dois exemplos utilizando a definição formal de derivada, ou seja, os exemplos são resolvidos por meio de um limite.

Figura 15 – Exemplos Resolvidos – 2 - Livro de Cálculo

EXEMPLO 4 Ache a derivada de f se

$$f(x) = 3x^2 + 12$$

Solução Se x for qualquer número do domínio de f , então de (3),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x \Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3 \Delta x) \\ &= 6x \end{aligned}$$

Logo, a derivada de f é a função f' , definida por $f'(x) = 6x$. O domínio de f' é o conjunto de todos os números reais, sendo igual ao domínio de f .

Fonte: Leithold (1994, p.143)

Dando continuidade ao assunto, o autor destaca as diferentes notações de derivada, informando ao leitor que o símbolo f' para derivada foi introduzida pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), no século XVIII. Já o símbolo $\frac{dy}{dx}$ para

notação de derivada, foi introduzido pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Consideramos que, neste ponto, o autor deveria ter explorado mais a parte histórica; apenas citou Newton, Leibniz e Lagrange devido às notações utilizadas, eximindo-se de tratar da importância de cada um deles para o desenvolvimento do Cálculo.

Após as definições, o autor dispõe uma lista com 64 exercícios, entre determinação da inclinação de reta tangente, derivada de funções utilizando a definição formal e alguns exercícios com abordagem numérica do limite que representa a derivada de uma função. Os exercícios mostram-se bem repetitivos, tradicionais.

Logo adiante, Leithold apresenta os *teoremas de derivação* (Regras de derivação). Em seguida, a derivada é abordada como *taxa de variação*. Para isso, inicia o assunto recorrendo à física (movimento retilíneo) com um problema contextualizado de velocidade média, após algumas considerações e análises é formalizada a velocidade instantânea:

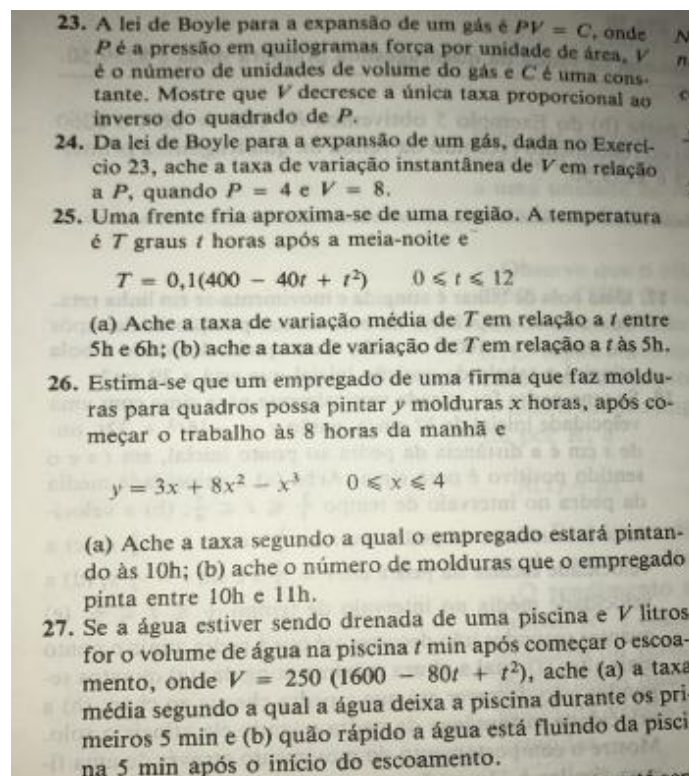
Definição: Se f for uma função dada pela equação $s = f(t)$ e uma partícula se mover ao longo de uma reta de tal forma que s seja o número de unidades da distância orientada da partícula a um ponto fixo na reta em t unidades de tempo, então a **velocidade instantânea** da partícula em t unidades de tempo será v unidades de velocidade, onde: $v = f'(t) \Leftrightarrow v = \frac{ds}{dt}$ se a derivada existir.

(LEITHOLD, 1994, p.165).

A *velocidade instantânea* logo se torna uma ponte para a derivada em sua abordagem como *taxa de variação instantânea* de uma função. Para que tal abordagem seja entendida, o autor aborda exemplos distintos de aplicação, tais como: a taxa de variação do volume de um cubo em relação a sua aresta; a taxa de variação da resistência em um circuito elétrico em relação a corrente e uma aplicação na área econômica, mostrando a variação do custo e da receita de uma empresa em função da quantidade produzida, intituladas *funções marginais*.

Encerrando este tópico, o autor disponibiliza uma lista de 38 exercícios relacionados à taxa de variação instantânea, sendo, a maioria deles, contextualizados, com gradação de nível de dificuldade (figura 16).

Figura 16 – Exercícios Resolvidos / Leithold

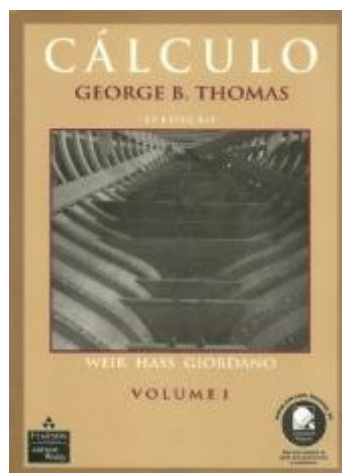


Fonte: Leithold (1994, p. 143)

Livro 4 -Cálculo,deGeorge B. Thomas

O matemático e professor George B. Thomas (1914-2006) escreveu o livro *Cálculo*, amplamente utilizado nas universidades do Brasil. Analisamos a 11ª edição, publicada em 2009, pela Pearson.

Figura 17 – Capa do Livro “Cálculo”



Fonte: Thomas (2009)

No segundo prefácio da obra, fica evidente que a intenção do autor foi buscar captar o estilo e os pontos fortes das edições anteriores. Seu objetivo esteve amparado em dois aspectos: recuperar as melhores características das edições clássicas da obra e, ao mesmo tempo, ouvir cuidadosamente as sugestões de inúmeros usuários e revisores, adequando-a para o currículo das universidades. O autor destaca que tentou escrever o livro da maneira mais clara e precisa possível.

Thomas inicia o tópico derivada no final do primeiro capítulo intitulado *Limites e Continuidade*, mais precisamente, em seu último tópico nomeado: *Reta tangente e derivadas*. O autor nos mostra o que é uma reta tangente a uma curva, derrubando alguns mitos sobre retas tangentes, chamando a atenção para o fato de que a maioria das curvas não tem centro; e uma reta, que talvez quiséssemos chamar de “tangente”, pode interceptar o gráfico de uma função em outros pontos ou apenas no ponto de tangência. Após a definição de tangência, passa-se ao estudo do coeficiente angular, através de definição, seguido de alguns exemplos.

Encerrando a unidade 2, destaca-se a razão incremental $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ vista no cálculo do coeficiente angular da reta tangente; argumenta-se que, se a razão incremental tem limite com h tendendo a zero, esse limite será denominado *derivada de f em x_0* . É aqui que a palavra *derivada* surge, pela primeira vez, na obra de George Thomas.

O capítulo 3, intitulado *Derivação*, inicia-se por um breve resumo do que será tratado no mesmo. O autor remete à vasta aplicabilidade das derivadas, destacando as diversas áreas de conhecimento em que as derivadas são utilizadas, por exemplo: para calcular as dimensões ideais de uma lata cilíndrica, estimar a taxa de disseminação de uma doença ou ainda determinar a idade de um artefato pré-histórico. É possível inferir que o propósito do autor, ao trazer as informações iniciais, seja despertar uma curiosidade pelo assunto.

O posicionamento histórico da derivada é disponibilizado como material adicional no site da editora, isso é mostrado apenas como um destaque no canto superior esquerdo da página, denominado: *Companion Website (Ensaio histórico)*. A análise desse material mostra que o mesmo é didaticamente organizado e estruturado. O fato de estar disponibilizado apenas como material adicional e na WEB, leva-nos a concluir que o mesmo pode não ser consultado por alguns estudantes, pois, apesar dos avanços tecnológicos, nem todos têm acesso à Internet.

Em seguida, a derivada é formalmente definida como função:

A derivada de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ desde que o limite exista. (THOMAS, 2009, p.145).

Thomas (2009, p.146) apresenta ainda seis exemplos resolvidos de derivadas a partir da definição formal, como o exemplo transcrito a seguir.

Exemplo 1 *Aplicando a definição derive $f(x) = \frac{x}{x-1}$*

SOLUÇÃO Aqui, temos $f(x) = \frac{x}{x-1}$ e $f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}$, logo

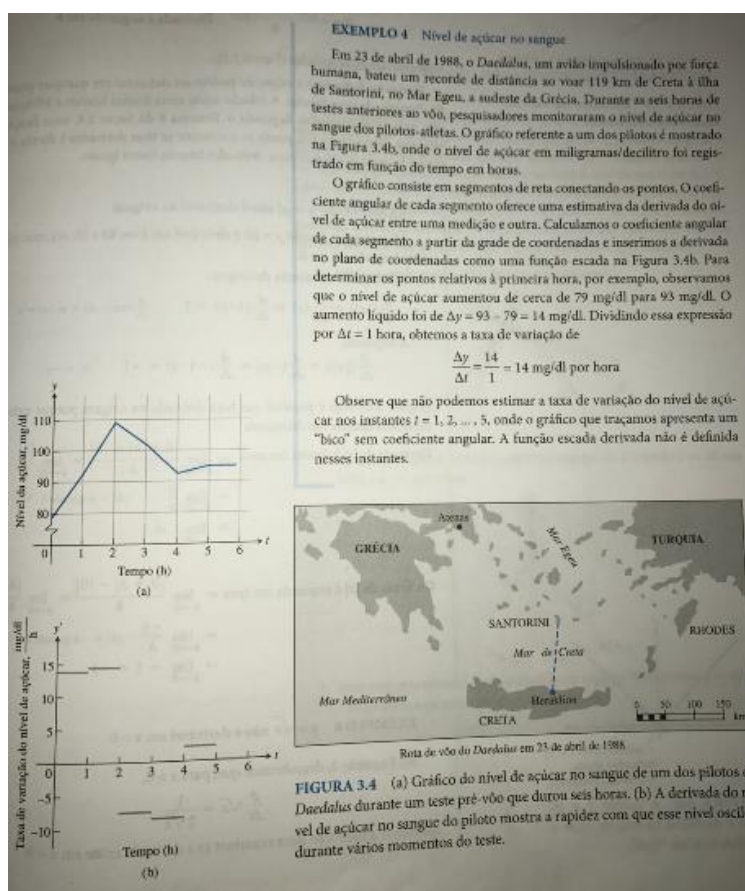
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

(THOMAS, 2009, p.146).

As diferentes notações de derivada são tratadas posteriormente, assim como a representação geométrica da derivada.

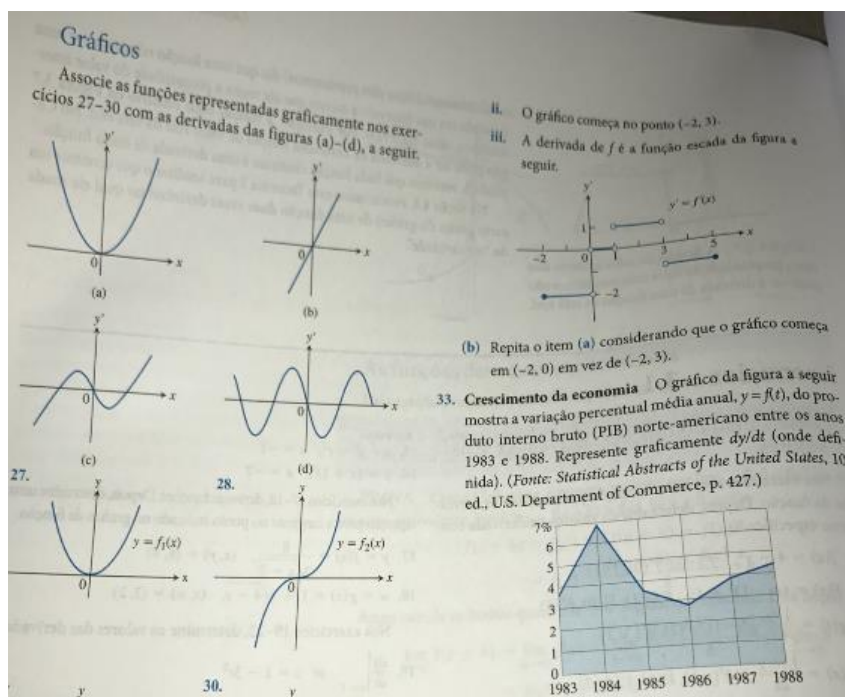
Percebe-se uma preocupação com a qualidade e diversidade dos exemplos, um cuidado com a contextualização pode ser constatado. Isso também é verificado nos exercícios propostos para este tópico, um total de 66 exercícios (figuras 18 e 19).

Figura 18 – Exemplos Resolvidos / Thomas



Fonte: Thomas (2009, p.149).

Figura 19 – Exercícios Propostos / Thomas

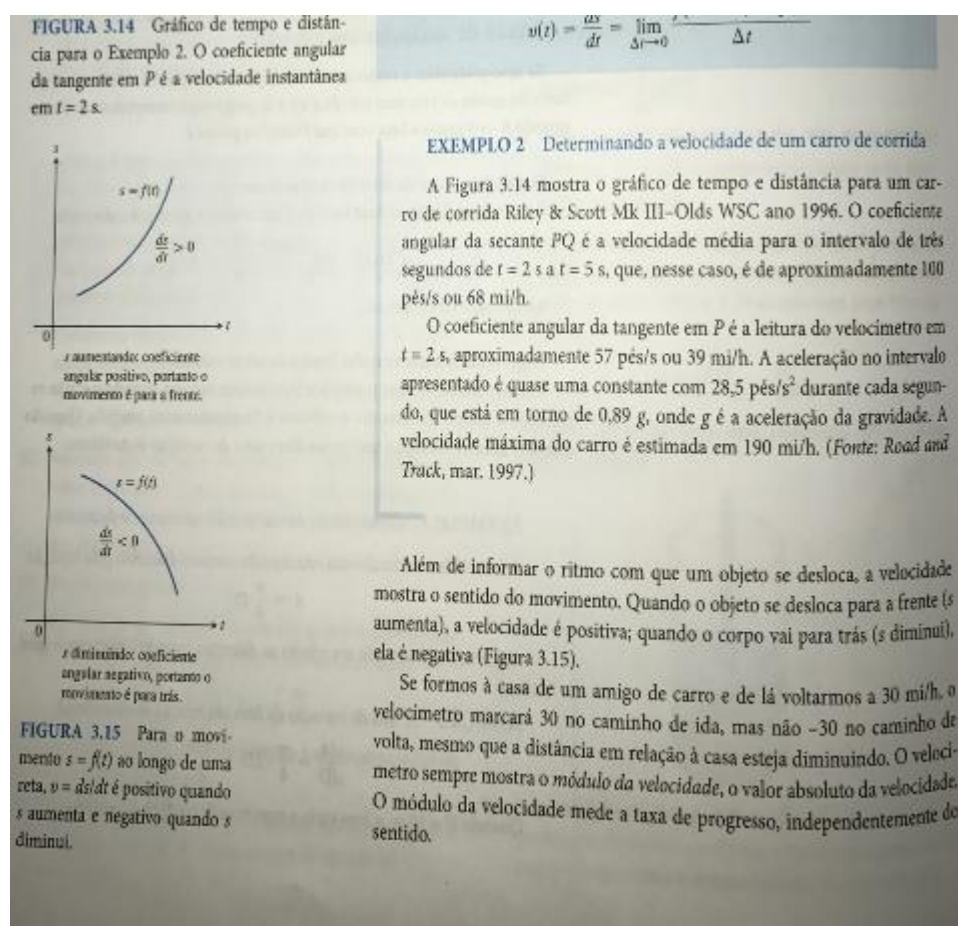


Fonte: Thomas (2009, p.154).

A partir daí, são tratadas as regras de derivação, constata-se certo rigor matemático, uma vez que todas as regras são demonstradas e existe uma quantidade satisfatória de exemplos resolvidos, graduados em diferentes níveis de dificuldade.

O tópico seguinte, intitulado *A derivada como taxa de variação*, contempla diferentes áreas de conhecimento em que as derivadas são aplicadas, começando pela Física, com o conceito de velocidade instantânea, em seguida, a aceleração. Outras áreas de conhecimento também são tratadas como, por exemplo, Ciências Econômicas, introduzindo o conceito de funções marginais e são apresentados diversos exemplos de aplicação, de diferentes níveis de dificuldade.

Figura 20 – Exemplos Resolvidos – 2 –/ Thomas

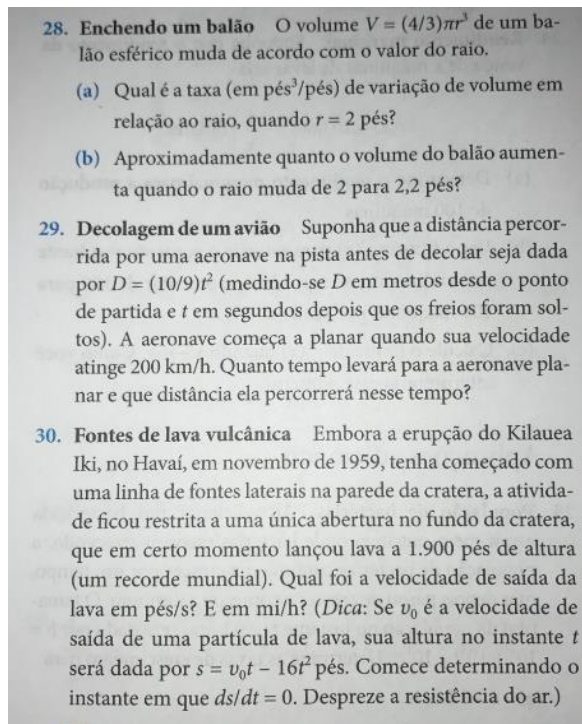


Fonte: Thomas (2009, p.170).

O mesmo pode-se dizer dos exercícios propostos ao final deste tópico. Uma lista considerável, 320 exercícios, é proposta ao final do capítulo, incluindo exercícios mecânicos, problemas contextualizados, interdisciplinares, com gradação de nível de dificuldade. Estes são relacionados a diversas áreas e trazem aplicações que podem despertar a curiosidade como, por exemplo: estimando altura de um prédio, estimando volumes de

sólidos geométricos, cunhando moedas, efeito das manobras de voo sobre o coração e medindo a aceleração da gravidade.

Figura 21 – Exercícios Propostos – 2 – / Thomas



Fonte: Thomas (2009, p.180).

Livro 5 – Cálculo, James Stewart.

O matemático e professor James Drewry Stewart (1941-2014) escreveu sua obra, ou melhor, seu *best-seller* em 1987. Analisamos a sétima edição de seu primeiro volume, publicado em 2014, pela Cengage Learning.

Figura 22 – Capa do livro “Cálculo”



Fonte: Stewart (2014).

Em seu prefácio, no tópico “filosofia” do livro, o autor destaca que tentou escrever o texto sempre com a preocupação de auxiliar o aluno a descobrir o Cálculo, tanto em seu poder prático quanto a sua surpreendente beleza; para isso, procurou manter, como nas edições anteriores, a intenção de transmitir ao estudante uma noção da utilidade do Cálculo e o desenvolvimento de uma competência técnica.

“Newton indubitavelmente experimentou uma sensação de triunfo quando fez suas grandes descobertas. Quero que os estudantes compartilhem um pouco deste entusiasmo. ” (STEWART, 2014, p.IX). A intenção do autor parece ser enfatizar a construção conceitual, a qual, segundo ele, há um consenso de que esse é um dos principais objetivos do ensino de Cálculo.

O assunto de derivada é introduzido no penúltimo tópico do capítulo 2, intitulado *Derivadas e Taxas de Variação*. O autor inicia este tópico retomando o problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto. É possível que o autor tenha a pretensão de fazer o leitor perceber que os problemas citados envolvem determinar um mesmo tipo de limite. Este tipo especial de limite, segundo Stewart, é chamado de *derivada*. A seguir, é definida a reta tangente à curva bem como a velocidade instantânea para averiguação da informação repassada no início do tópico quanto aos limites encontrados em ambos os casos:

Tangentes

Definição: A reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Desde que esse limite exista. (STEWART, 2014, p.131).

Velocidades

Definimos velocidade (ou velocidade instantânea) $v(a)$ no instante $t = a$ como o limite dessas velocidades médias:

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Isso significa que a velocidade no instante $t = a$ é igual à inclinação da reta tangente em P .

(STEWART, 2014, p.133).

Após a comparação dos limites encontrados nas duas situações mostradas anteriormente, o autor apresenta mais três exemplos sobre estes limites (figura 23). Recorrendo a Física num problema de velocidade instantânea.

Figura 23 – Exemplos Resolvidos / Stewart

EXEMPLO 3 Suponha que a bola foi deixada cair do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.

(a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?

(b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

SOLUÇÃO Precisaremos encontrar a velocidade tanto quando $t = 5$ quanto quando a bola atinge o solo, de modo que é eficiente começar encontrando a velocidade em um instante geral $t = a$. Usando a equação de movimento $s = f(t) = 4,9t^2$, temos

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(a+h)^2 - 4,9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4,9(2a + h) = 9,8a \end{aligned}$$

(a) A velocidade após 5 s é de $v(5) = (9,8)(5) = 49 \text{ m/s}$.

(b) Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em t_1 , quando $s(t_1) = 450$, isto é,

$$4,9t_1^2 = 450.$$

Isso fornece

$$t_1^2 = \frac{450}{4,9} \quad \text{e} \quad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4,9}} \approx 9,6 \text{ s}$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8 \sqrt{\frac{450}{4,9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

Fonte: Stewart (2014, p.133).

Posteriormente, o autor define formalmente a derivada.

Definição: A derivada de uma função f em um número a , denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

(STEWART, 2014, p.133).

Adiante, comparece uma segunda interpretação da derivada como *taxa de variação instantânea*. A conexão com a primeira interpretação, segundo o autor, é que se

esboçarmos a curva $y = f(x)$, então, a taxa instantânea de variação será a inclinação da reta tangente a essa curva no ponto onde $x = a$.

Para que esta abordagem seja bem compreendida, Stewart apresenta três exemplos de aplicação, mostrando ao leitor que: a *velocidade* de um objeto é a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo; o *custo marginal* é a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de itens produzidos; a taxa de variação do débito em relação ao tempo tem vasto interesse na economia. O autor cita, ainda, outras taxas de variação utilizadas em outras ciências, como por exemplo, na Física, afirmando que a taxa de variação do trabalho em relação ao tempo é chamada de *potência*.

Encerrando este tópico, são disponibilizados 54 exercícios relacionados à reta tangente e taxa de variação instantânea, incluindo exercícios mecânicos, problemas contextualizados, interdisciplinares, com gradação de nível de dificuldade.

Constata-se uma preocupação com a História da Matemática, ao final das atividades, o autor disponibiliza uma nota sobre os métodos iniciais para encontrar tangentes. Trazendo a informação que a primeira pessoa a formular as ideias de limite e derivada foi Isaac Newton, em 1660, dando continuidade aos trabalhos de Fermat e Barrow. Nesta nota o autor faz indicações de leituras de outros autores como Boyer, Edwards, Eves e Kline para aqueles leitores que se interessarem em um maior aprofundamento nos métodos de Newton.

A derivada é definida como função, logo após, no último tópico do capítulo 2 intitulado: *A derivada como uma função*, mostrando ao leitor que acontece quando o número fixo ‘ a ’ mostrado na seção anterior começa a variar:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

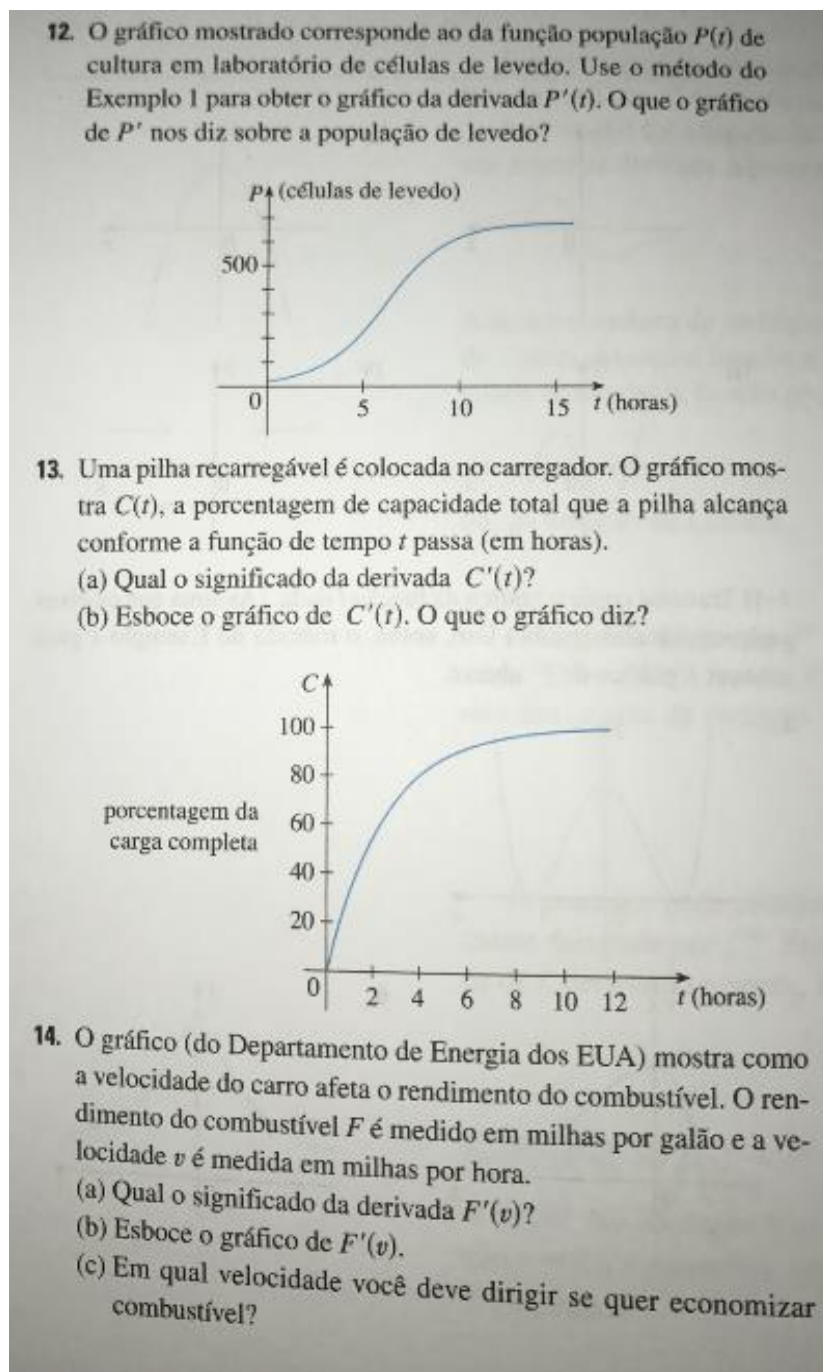
*Dado qualquer número x para qual esse limite exista, atribuímos a x o número $f'(x)$. Assim, podemos considerar f' como uma nova função, chamada **derivada de f** . (STEWART, 2014, p.140).*

Comprova-se, adiante, novamente uma referência histórica, neste ponto, sobre Leibniz, trazendo de forma bastante resumida, quem foi Gottfried Wilhelm Leibniz, bem como as suas principais contribuições para o Cálculo.

Ao final deste tópico, encerrando o capítulo 2, são disponibilizados 164 exercícios, explorando o tratamento numérico e o geométrico. Os exercícios são bem diferenciados, de cunho mecânico, problemas contextualizados, interdisciplinares, com grada-

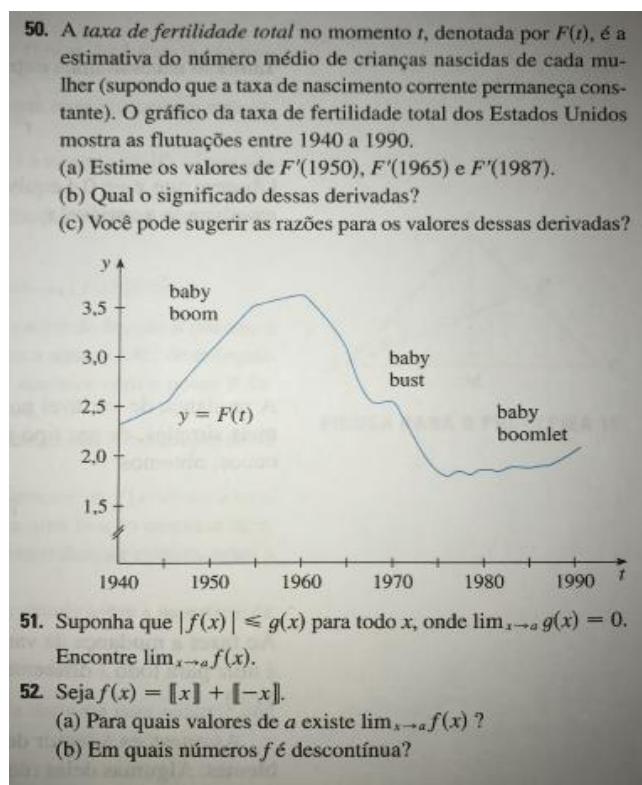
ção de nível de dificuldade. Incluem-se alguns exercícios de revisão como verificação de conceitos (figuras 24 e 25).

Figura 24 – Exercícios Propostos - 1



Fonte: Stewart (2014, p.148).

Figura 25 – Exercício Proposto 1 / Stewart



Fonte: Stewart (2014, p.153).

Destaca-se, na obra de Stewart, a sua preocupação com os conceitos, parece-nos que o autor pretende levar o leitor, a todo instante, a refletir sobre eles, antes de ser introduzida uma definição mais formal.

Quadro 2 – Tópicos de análise do conteúdo de derivada nos livro-textos pesquisados

Código	Tópicos para análise
T1	Apresentação de alguma abordagem histórica sobre o cálculo e/ou derivada no tópico analisado
T2	Introdução do conteúdo de derivada despertando o interesse de seu leitor para o conteúdo abordado
T3	Inclusão de situações reais ou cotidianas para o estudo de derivada
T4	Apresentação da abordagem geométrica da derivada
T5	Apresentação da abordagem algébrica da derivada
T6	Interrelação da abordagem algébrica com a geométrica, se essa transição é verificada na obra.
T7	Número total de exemplos resolvidos.
T8	Diversidade de aplicação da derivada nos exemplos resolvidos.
T9	Número total de exercícios propostos.
T10	Diversidade de aplicação da derivada nos exercícios propostos.
T11	Orientação de atividades a serem trabalhadas em ambiente informatizado.

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 3– Grau de concordância

Grau de concordância	
Não atende	1
Atende parcialmente	2
Atende satisfatoriamente	3

Fonte: Elaborado pelo autor

Para avaliar os livros analisados, estabelecemos graus de concordância (quadro 3),e avaliamos o conteúdo derivada nos livros analisados,tomando como referência, para análise, os tópicos apresentados no quadro 2, chegando aos resultados mostrados no quadro 4.

Quadro 4 – Quadro de análise do conteúdo de derivada

Livro-texto	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11
Livro 1 	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
Livro2 	2	2	2	3	1	1	2	1	2	1	1
Livro 3 	2	2	2	2	1	2	2	3	3	2	1
Livro 4 	2	3	2	2	1	2	3	3	3	3	3
Livro 5 	2	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Legenda: 1: não atende – 2: atende parcialmente – 3: atende satisfatoriamente

Sob determinados aspectos, pode-se dizer que alguns autores têm uma abordagem semelhante, o que se aproxima do conceito de *vulgata*, designado por Chervel (1990).

O estudo dos conteúdos beneficia-se de uma documentação abundante à base de cursos manuscritos, manuais e periódicos pedagógicos. Verifica-se aí um fenômeno de “*vulgata*”, o qual parece comum às diferentes disciplinas. Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados, ou tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas. (CHERVEL, 1990, p.203).

Em todas as obras analisadas, o estudo de derivada é abordado inicialmente pelo aspecto geométrico “reta tangente a uma curva”. Lembrando que a obra mais antiga, de Piskounov foi publicada em 1977 e, a mais recente, de Stewart, em 2014.

Verificamos, pela análise das obras, que elas se aproximam no que diz respeito à organização e sequência na introdução de derivada, bem como suas abordagens. No entanto, as obras se distanciam bastante no que diz respeito à contextualização, posicionamento histórico e à aplicação do estudo das derivadas.

Nas obras mais recentes, de Thomas (2009) e Stewart (2016), verifica-se alguns exercícios propostos a serem realizados utilizando-se recursos tecnológicos e/ou recursos gráficos, sugerindo-se calculadora gráfica ou computador. Não foi constatado, para a derivada, a indicação de um software específico. No caso de Thomas (2009), existe a indicação do *software Maple* em projetos tecnológicos sobre o estudo de limites.

4– DO PRODUTO EDUCACIONAL E DA SUA APLICAÇÃO

Como parte integrante desta pesquisa, foi elaborado o produto educacional “A Derivada e suas diferentes abordagens: uma proposta para a introdução do seu conceito” no sentido de auxiliar os professores das turmas iniciais dos cursos de Ciências Exatas a introduzirem o conceito de derivada, transitando nas abordagens: algébrica, geométrica e histórica.

4.1 – Construção e objetivos das atividades.

Foram planejadas duas atividades para introduzir o conceito de derivada, sendo que, para cada uma das atividades foi utilizado uma abordagem diferente. A seguir, descreveremos cada atividade, bem como os objetivos de cada uma delas.

4.1.1 – Atividade 1

Nesta atividade será trabalhada a abordagem numérica e algébrica da derivada, utilizando-se para este fim a investigação matemática. Esta Atividade é constituída de 13 tarefas, objetiva-se com a realização da presente atividade, que os alunos possam estabelecer relações com o estudo de limites, e que ao término da mesma, sejam capazes de calcular a velocidade num instante qualquer

Quadro 5: Atividade 1

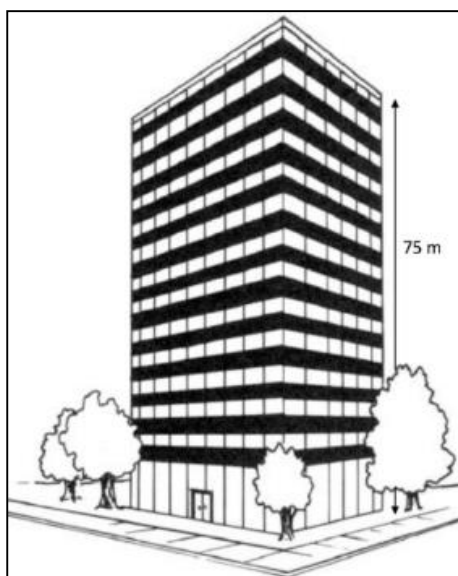
Atividade 1
Trabalho a ser realizado em grupo:(Sugestão: Máximo de 4 alunos por grupo)
Objetivo: Explorar a situação dada, do ponto de vista numérico e algébrico. Trabalhar conceitos da Física que são bastante utilizados no dia a dia, como, por exemplo, a <i>velocidademédia</i> . Nesta atividade, espera-se que o aluno estabeleça relações com o estudo de Limite e consiga desenvolver o raciocínio para generalizar o cálculo da <i>velocidade instantânea</i> .
Material: Calculadora, papel e lápis.

Consideremos a seguinte situação:

Um objeto é solto do topo de um prédio a 75 m de altura. Sabe-se que a altura **h** (em metros) do objeto em relação ao solo é dada em função do tempo **t** (em segundos) pela função:

$$h(t) = -3t^2 + 75$$

Figura 26 – Ilustração da Atividade 1



Fonte: <http://static.hsw.com.br/gif/how-to-draw-buildings-49.jpg>(adaptada)

Sabe-se que a *velocidade média* é obtida pela razão entre a distância percorrida e o tempo gasto em certo percurso, dada por:

$$V_{média} = \frac{d}{t} \Rightarrow V_{média} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_f - d_0}{t_f - t_0}$$

$$\text{Onde: } \begin{cases} \Delta d = \text{variação da distância} \\ \Delta t = \text{variação do tempo} \\ d_f = \text{distância final} \\ d_0 = \text{distância inicial} \\ t_f = \text{tempo final} \\ t_0 = \text{tempo inicial} \end{cases}$$

TAREFA1: Complete o quadro a seguir:

Quadro 5: Tarefa proposta 1

TEMPO t (segundos)	ALTURA h (metros)
0	75
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Fonte: Elaborado pelos autores

Quanto tempo leva até o objeto tocar o solo? Descreva como chegou a esta conclusão.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Neste tarefa, espera-se que os alunos completem a tabela, e por meio de discussões entre os componentes do grupo, os mesmos possam chegar a conclusão que o objeto leva 5 segundos para tocar o solo.

TAREFA 2: Calcule a velocidade média em todo percurso, ou seja, desde o instante em que o objeto é solto até o momento em que ele toca o solo.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem a fórmula fornecida para o cálculo da *Velocidade Média*, desde o instante $t = 0s$ até o instante $t = 5s$, chegando ao resultado de -15 m/s .

TAREFA 3: O que você poderia dizer em relação ao sinal encontrado na resposta anterior?

OBJETIVOS DA TAREFA:

O objetivo desta tarefa é gerar uma discussão quanto ao sinal encontrado na TAREFA 2. Trata-se de uma boa oportunidade para uma intervenção do professor! Explicando para os grupos que o sinal de negativo encontrado refere-se ao sentido contrário do movimento, ou seja, à medida em que o tempo passa estamos perdendo altura!

TAREFA 4: Seria possível encontrar/estimar a velocidade do objeto no instante $t = 3s$?

OBJETIVOS DA TAREFA:

O Objetivo desta tarefa é de fomentar uma inquietação por parte dos alunos. Espera-se que os integrantes do grupo promovam uma grande discussão neste ponto. Nesta tarefa, o professor não deverá intervir.

Observação: Inferimos que os alunos retomarão esta tarefa mais adiante, com mais propriedade.

TAREFA 5: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3 a 5 segundos.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem os dados encontrados na tabela e a fórmula fornecida para o cálculo da *Velocidade Média*, chegando ao resultado de -24 m/s .

TAREFA 6: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3 a 4 segundos.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem os dados encontrados na tabela e a fórmula fornecida para o cálculo da *Velocidade Média*, chegando ao resultado de -21 m/s .

TAREFA 7: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,5 a 3,0 segundos.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem a função $h(t) = -3t^2 + 75$, para encortar a altura do objeto no instante $t = 3,5$ s bem como, a fórmula fornecida para o cálculo da *Velocidade Média*, chegando ao resultado de $-19,5$ m/s.

TAREFA 8: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,0 a 3,1 segundos.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem a função $h(t) = -3t^2 + 75$, para encortar a altura do objeto no instante $t = 3,1$ s, bem como, a fórmula fornecida para o cálculo da *Velocidade Média*, chegando ao resultado de $-18,3$ m/s.

TAREFA 9: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,0 segundos a 3,01 segundos.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem a função $h(t) = -3t^2 + 75$, para encontrar a altura do objeto no instante $t = 3,01$ s bem como, a fórmula fornecida para o cálculo da *Velocidade Média*, chegando ao resultado de $-18,3$ m/s.

TAREFA 10: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,0s a 3,001 segundos.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem a função $h(t) = -3t^2 + 75$, para encortar a altura do objeto no instante $t = 3,001$ s bem como, a fórmula fornecida para o cálculo da *Velocidade Média*, chegando ao resultado de $-18,3$ m/s.

TAREFA 11: Você conseguiria responder à questão 4 agora? O que você observa nas tarefas anteriores, ou seja, da TAREFA 5 a TAREFA 10?

OBJETIVOS DA TAREFA:

Neste ponto, esperamos que os alunos promovam discussões sobre a TAREFA 4. É um momento especial para o professor instigar o grupo a estimar o resultado.

TAREFA 12: O que acontece com a velocidade média, quando a variação de tempo vai se aproximando de zero?

OBJETIVOS DA TAREFA:

Este é um importante momento desta atividade, neste ponto, esperamos que os alunos percebam que, à medida em que a variação de tempo vai se aproximando de zero, a velocidade média vai se aproximando a $-18,3 \text{ m/s}$.

TAREFA 13: Seria possível estabelecer aqui alguma relação com algum assunto trabalhado nas aulas anteriores?

OBJETIVOS DA TAREFA:

Espera-se, com essa tarefa, que os alunos relacionem a atividade proposta com o estudo de Limites. Após as discussões entre os grupos, é um momento ímpar para o professor, junto com os alunos, legitimar a velocidade instantânea por meio de um limite.

4.1.2 – Atividade 2

Nesta atividade, será trabalhada a abordagem geométrica da derivada, utilizando-se para este fim o aplicativo *Geogebra* instalado nos *Smartphones* dos alunos. Esta atividade é constituída de 9 tarefas. Objetiva-se, com a realização da presente atividade, que os alunos possam estabelecer relações com retas secantes e tangentes, assim como na primeira atividade, espera-se que o aluno possa relacioná-la ao estudo de limites.

Quadro 6: Atividade 2

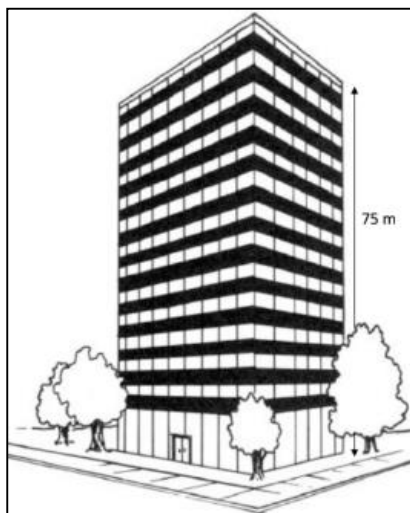
Atividade 2
Trabalho a ser realizado em grupo: (Sugestão: Máximo de 4 alunos por grupo)
Objetivo: Explorar a situação dada, do ponto de vista geométrico. Para isso, utilizaremos o aplicativo GEOGEBRA, já instalado nos <i>Smartphones</i> dos alunos. Nesta atividade, espera-se que o aluno estabeleça relações entre retas secantes e tangentes a uma curva. Observação: Muitos estudantes universitários possuem <i>Smartphones</i>, isso não será um empecilho para o desenvolvimento da atividade. Além disso, o trabalho será desenvolvido em grupo. Desta forma, o professor pode organizar os grupos de modo que o número de <i>Smartphones</i> com o aplicativo instalado seja distribuído de modo homogêneo.
Material: Smartphone, App GEOGEBRA, papel e lápis

Fonte: Elaborado pelos autores

Retomaremos a atividade anterior, mas desta vez, com as atenções voltadas para o tratamento geométrico.

Um objeto é solto do topo de um prédio a 75 m de altura. Sabe-se que a altura h (em metros) do objeto em relação ao solo é dada em função do tempo t (em segundos) pela função: $h(t) = -3t^2 + 75$

Figura 27 – Ilustração da Atividade 2



Fonte: <http://static.hsw.com.br/gif/how-to-draw-buildings-49.jpg>(adaptada)

IMPORTANTE! As tarefas 1, 2 e 3 devem ser guiadas pelo professor. Partimos da premissa de que os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com o aplicativo *Geogebra*.

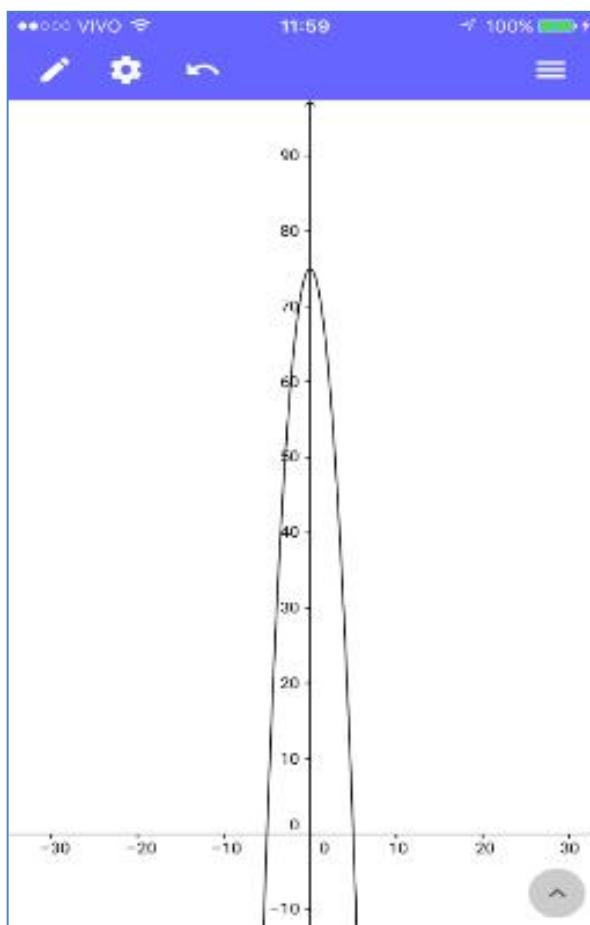
TAREFA 1: Construa o gráfico da função $h(t) = -3t^2 + 75$ utilizando o *Aplicativo Geogebra*.

OBJETIVOS DA TAREFA :

Nesta tarefa, espera-se que o aluno possa construir, junto com o professor, o gráfico de uma função utilizando o aplicativo *Geogebra*. (Para muitos alunos, será a primeira vez que utilizam o aplicativo, por este motivo, esta atividade também tem como objetivo um contato inicial com o *Geogebra*, ou seja, apresentar o aplicativo).

Junto como professor, espera-se que os alunos consigam chegar na figura 28 mostrada a seguir:

Figura 28 – Resultado esperado, TAREFA 1



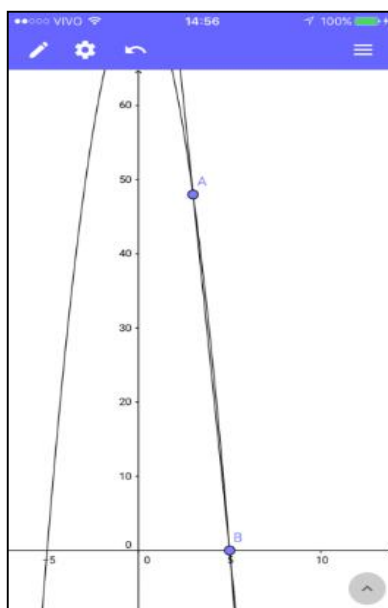
Fonte: Elaborado pelos autores

TAREFA2: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$ e o ponto B de abscissa $x = 5$. Traçar uma reta que passa por esses pontos, em seguida, registrar a equação da mesma.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Além de mostrar ao aluno a grande variedade de construções geométricas que podem ser realizadas com o uso do AppGeogebra, nessa tarefa iremos obter uma reta que passa por dois pontos distintos no plano, ambos pertencentes ao gráfico já obtido. Traçando, assim, uma reta secante à curva, registrando a equação da mesma.

Assim, como a tarefa anterior, espera-se, junto ao professor, que os alunos consigam chegar na imagem mostrada na figura 29.

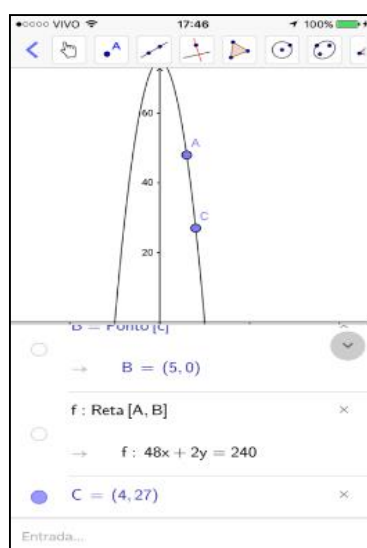
Figura 29 – Resultado esperado, TAREFA 2

Fonte: Elaborado pelos autores

TAREFA 3: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto C, de abscissa $x = 4$. Traçar uma reta que passa por esses pontos; em seguida, registrar a equação da mesma.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Assim como a tarefa anterior, iremos obter uma reta que passa por dois pontos distintos da função, os alunos repetirão os mesmos procedimentos realizados na tarefa 2. Obtendo o resultado previsto na figura 30: uma reta secante à curva.

Figura 30 – Resultado esperado, TAREFA 3.

Fonte: Elaborado pelos autores

TAREFA 4: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto D, de abscissax = 3,5. Traçar uma reta que passa por esses pontos, em seguida, registrar a equação da mesma.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Após desenvolver as tarefas 1, 2 e 3 com o auxílio do professor, espera-se, com a tarefa 4, que os alunos sejam capazes de repetir o procedimento sem a intervenção do professor, estimulando, desta maneira, a autonomia dos alunos.O professor deverá interceder apenas quando solicitado.

TAREFA 5: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto E, de abscissax = 3,1. Traçar uma reta que passa por esses pontos; em seguida, registrar a equação da mesma.

OBJETIVOS DA TAREFA:

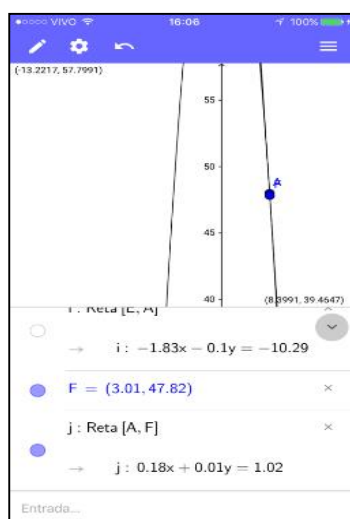
Assim como na tarefa 4, esta tem como objetivo traçar uma reta secante à curva e, em seguida, registrar sua equação.

TAREFA 6: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto F, de abscissa $x = 3,01$. Traçar uma reta que passa por esses pontos; em seguida, registrar a equação da mesma.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Espera-se que os alunos comecem a relacionar retas secantes com retas tangentes. Neste momento, o professor deverá instigar os alunos quanto à classificação desta reta, ou seja, trata-se de uma reta secante ou uma tangente à curva (figura 31).

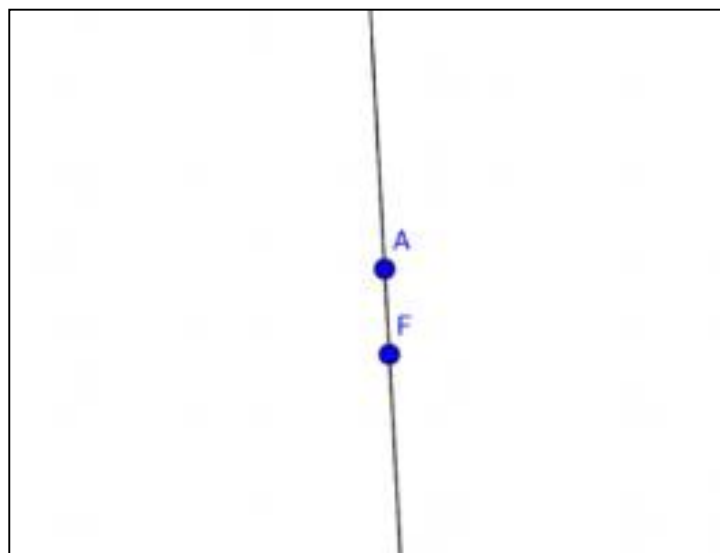
Figura 31 – Resultado esperado da tarefa 6



Fonte: Elaborado pelos autores.

É importante a intervenção do professor solicitando aos alunos que ampliem a imagem para comprovar visualmente que se trata de uma reta secante. O Aplicativo permite esta aproximação (figura 32).

Figura 32– Zoom do aplicativo



Fonte: Elaborado pelos autores

TAREFA 7: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto G, de abscissa $x = 3,001$. Traçar uma reta que passa por esses pontos; em seguida, registrar a equação da mesma.

OBJETIVOS DA TAREFA:

Assim como na tarefa 6, espera-se que os alunos explorem a situação, verificando que a reta continua secante à curva.

TAREFA 8: O que está acontecendo com a reta secante à curva quando a diferença entre as abscissas vai se aproximando de zero?

OBJETIVOS DA TAREFA:

Durante a execução desta tarefa, espera-se que os grupos percebam que, à medida que a diferença entre as abscissas dos pontos vai se aproximando de zero, a reta secante à curva vai se aproximando da reta **tangente** ao ponto A, justificando que a equação da reta $\overline{AG}$ é muito próxima da reta $\overline{AF}$.

Momento propício para o professor introduzir o conceito de reta tangente junto com os alunos.

TAREFA 9: Seria possível estabelecer, aqui, alguma relação com algum assunto trabalhados nas aulas anteriores?

OBJETIVOS DA TAREFA:

Espera-se, com esta pergunta, que os alunos percebam novamente a ideia de limite. Após as discussões entre os grupos, é um momento bastante oportuno para o professor, juntamente com os alunos, legitimar o coeficiente angular da reta tangente à curva por meio de um limite.

4.1.3 – Atividade 3

Quadro 7: Atividade 3

Atividade 3
Uso de vídeos do <i>Youtube</i> , para trabalhar a História da Matemática, no que diz respeito a origem do Cálculo Diferencial e Integral.
Objetivo: Explorar a situação dada, do ponto de vista histórico e atual. Para isso, utilizaremos a rede social <i>Youtube</i> . Nesta atividade, espera-se que o aluno possa fazer conexões entre o passado, o presente e o futuro.
Material: Recurso multimídia (com áudio), acesso à Internet.

Fonte: Elaborado pelos autores

Nesta atividade, será trabalhada a abordagem histórica da derivada, utilizando-se, para este fim, vídeos disponibilizados na rede social *Youtube*. Esta atividade é constituída de três vídeos e tem como principal objetivo legitimar as duas atividades anteriores, ou seja, fazer com que o aluno relacione, por meio dos vídeos apresentados, os problemas que originaram o Cálculo Diferencial, bem como, a aplicabilidade do mesmo.

– Vídeo1: A História do Cálculo

Figura 33 – Vídeo sobre a História do Cálculo

Fonte: Youtube⁸

O vídeo *A História do Cálculo* tem duração aproximada de 25 minutos, trata das ideias que desencadearam o surgimento do Cálculo, bem como, os personagens responsáveis por grandes avanços na Matemática.

– **Vídeo 2: Newton x Leibniz**

Figura 34 – Vídeo de Newton x Leibniz

Fonte: Youtube⁹

O vídeo *Newton x Leibniz* tem duração aproximada de 5 minutos, é uma animação que trata, de forma bastante divertida e descontraída, as “desavenças” entre Newton e Leibniz pelo reconhecimento da invenção do Cálculo.

Este vídeo, em especial, mostra a importância da visualização como ferramenta no ensino, o áudio está em outro idioma (espanhol), porém, mesmo assim, a mensagem passada pelo vídeo se faz entender.

⁸Link de acesso: <https://www.youtube.com/watch?v=6HI47rcOiAE>

⁹Link de acesso: <https://www.youtube.com/watch?v=foIPCSpCNVA>

– **Vídeo 3: O Cálculo Diferencial e Integral e suas Aplicações.**

Figura 35 – Vídeo sobre as Aplicações do Cálculo



Fonte: Youtube¹⁰

O vídeo tem duração aproximada de 4 minutos, foi produzido por alunos de Engenharia Civil da UNEMAT – Universidade do Estado de Mato Grosso.

Neste vídeo, os alunos fazem uma breve apresentação da História do Cálculo e, em seguida, algumas aplicações do Cálculo que são utilizadas atualmente. Nossa intenção, quanto ao uso deste vídeo, é trazer uma linguagem mais próxima dos alunos.

4.2 – Da aplicação das atividades.

O produto foi aplicado num curso de extensão promovido no Centro Universitário Newton Paiva destinado para os alunos dos cursos de Engenharia.

O curso de extensão intitulado “*Aprimoramento de Cálculo Diferencial: ressignificando o conceito de Derivada*”, com duração de 6 horas/aula de 50 minutos, sendo aplicado em três dias consecutivos, sempre no horário de 17:00h às 18:40h. O curso teve como principal objetivo experimentar as diferentes abordagens do conceito de Derivada, proporcionando aos alunos um melhor entendimento e apreensão deste tópico.

O curso foi dividido em três momentos, bastante dinâmicos e com diferentes metodologias.

Programação:

- Segunda-feira, dia 28/08/2017.
Abordagem numérica/algébrica da derivada/ com uso de calculadora
- Terça-feira, dia 29/08/2017.

¹⁰Link de acesso: <https://youtu.be/1wcAzH4H1Bw>

Abordagem geométrica da derivada/ com o uso do app *Geogebra* instalado nos *Smartphones* dos participantes.

- Quarta-feira, dia 30/08/2017.

Formalização da Derivada / Contexto Histórico/Aplicações/com uso de vídeos.

Foram realizadas 11 inscrições para o referido curso, contudo, no dia 28/08/2017 compareceram apenas 5 alunos. A seguir, faremos uma breve descrição de cada um deles.

- Aluno A: Matriculado regularmente no 4º período do curso de Engenharia Elétrica, tendo concluído as disciplinas de Cálculo Diferencial, Cálculo integral, Cálculo de Várias Variáveis. Atualmente está cursando a disciplina Cálculo Avançado.
- Aluno B: Aluno de Engenharia Civil, matriculado em disciplinas de diversos períodos, já concluiu a disciplina de Cálculo Diferencial. Atualmente está cursando a disciplina Cálculo Integral.
- Aluno C: Matriculado regularmente no 2º período do curso de Engenharia Mecânica, tendo concluído a disciplina de Cálculo Diferencial, atualmente cursando a disciplina de Cálculo Integral.
- Aluno D: Matriculado em algumas disciplinas do 2º, 3º e 4º períodos, tendo concluído a disciplina de Cálculo diferencial. Atualmente cursando a disciplina Cálculo Integral.
- Aluno E: Aluno de Engenharia Civil, ainda não concluiu a disciplina Cálculo Diferencial, atualmente está cursando a disciplina de Cálculo Diferencial pela segunda vez.

4.2.1 –Aplicação e Análise da Atividade 1

A atividade 1 foi aplicada no dia 28/08/2017, programada para iniciar às 17:00h e término previsto para 18:40h Compareceram, para esta atividade, 5 alunos dentre os 11 inscritos, alunos A, B, C, D e E.

Após as devidas apresentações, foi explicado aos alunos presentes que o curso fazia parte de uma pesquisa do programa de Mestrado em Educação Matemática, bem como, o objetivo central do curso que era uma melhor compreensão do conceito de derivada.

A atividade 1 foi distribuída para os 5 alunos e lhes foi sugerido que se dividissem em dois grupos, ficando uma dupla e um trio, contudo, como os alunos estavam bastante resistentes em separar, foi formado apenas um grupo (figura 36).

Figura 36 –Grupo de Estudantes

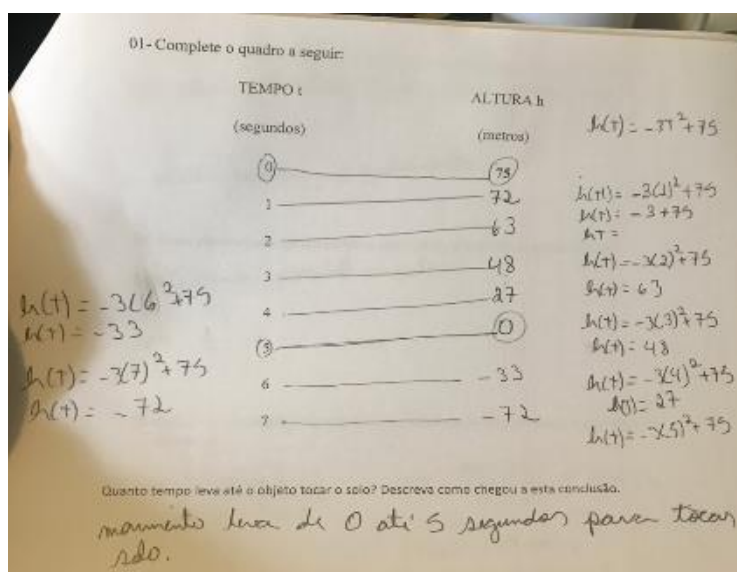


Fonte: acervo dos autores

Os alunos entenderam a proposta da atividade 1 e logo começaram a realização da mesma.

A tarefa 1 foi realizada tranquilamente, todos alunos preencheram a tabela e responderam à pergunta corretamente, como por exemplo, o aluno B (figura 37). Contudo, foi percebido que apenas um aluno descreveu como chegou a essa conclusão. Apenas o aluno D.

Figura 37 –Resolução tarefa 1 da atividade 1- Aluno B



Fonte: acervo dos autores

A tarefa 2 gerou algumas discussões no grupo, devido ao sinal da velocidade encontrado por cada um deles, como por exemplo, o aluno E (Figura 38), que encontrou um resultado positivo para a velocidade média, o aluno B também encontrou o mesmo resultado, enquanto os demais encontraram corretamente a velocidade média de -15m/s .

Figura 38 –Resolução tarefa 2 da atividade 1- Aluno E

02- Calcule a velocidade média em todo percurso, ou seja, desde o instante em que o objeto é solto até o momento em que ele toca o solo.

$$V_{m\text{ média}} = \frac{D}{T}$$

$$\frac{\Delta D}{\Delta T} = \frac{D_F - D_0}{T_F - T_0}$$

$$= \frac{75 - 0}{5 - 0} = \frac{75}{5} = 15$$

$T_0 = 0$
 $T_F = 5$
 $D_0 = 0$
 $D = 75$

Fonte: acervo dos autores

Tarefa 3: O que você poderia dizer em relação ao sinal encontrado na resposta anterior?

Foi observado uma discussão entre os integrantes; dois alunos afirmaram que a resposta anterior não fazia sentido.

“Negativo, sendo a velocidade incoerente com a realidade”. (aluno D)

“A velocidade é uma grandeza modular”. (Aluno B)

Como a discussão foi evoluindo, houve a necessidade fazer uma intervenção naquele instante, explicando-lhes que:

Professor - “o sinal encontrado era apenas em função do referencial, ou seja, que o objeto está indo no sentido contrário do movimento, a medida em que o tempo passa o objeto vai perdendo altura.”

A tarefa 4 atingiu o objetivo proposto. Neste ponto, os alunos discutiram bastante, após alguns “cálculos” e alguns minutos, perceberam, entre si, que não seria possível encontrar a velocidade no instante $t = 3\text{s}$ apenas com o uso da fórmula de velocidade média.

De mais relevante nesta tarefa salientamos que, durante a discussão no grupo, o aluno A chegou a falar sobre *limite* com os demais componentes do grupo.

As tarefas 5 e 6 foram realizados sem gerar dúvidas. Nestas tarefas, foi solicitado para calcular a velocidade média entre dois intervalos de tempo – para isso era só consultar a tabela já construída por eles na primeira tarefa, e substituir os valores na fórmula da velocidade média fornecida na atividade.

Tarefa 5: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3 a 5 segundos.

$$v_m = \frac{0 - 48}{2} = -24 \text{ m/s} \text{ (aluno C)}$$

Tarefa 6: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3 a 4 segundos.

$$v_m = \frac{27 - 48}{1} = \frac{-21}{1} = -21 \text{ m/s} \text{ (aluno C)}$$

Na tarefa 7 era necessário utilizar a função para encontrar a altura em que o objeto estava em relação ao solo. O aluno B não sabia como determinar a altura em que se encontrava o objeto no instante $t = 3,1$ s, mas foi prontamente ajudado pelo grupo. (Figura 39)

Figura 39 – Resolução tarefa 7 da atividade 1- Aluno B

07- Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,5 a 3 segundos.

$$v_m = \frac{DF - DU}{TF - TO}$$

$$v_m = \frac{48 - 38,25}{3 - 3,5}$$

$$v_m = \frac{9,75}{-0,5} = -19,5 \text{ m/s}$$

$h(t) = -2t^2 + 75$
 $h(3) = -2(3)^2 + 75$
 $h(3) = 39$

Fonte: acervo dos autores

Assim como a tarefa 7, as tarefas 8, 9 e 10 exigiam dos alunos conhecimentos semelhantes, ou seja, precisavam inicialmente encontrar a altura do objeto em relação ao solo, para, em seguida, utilizarem a fórmula da velocidade média. (Figura 40).

Figura 40 – Resolução das tarefas 8, 9 e 10 da atividade 1- Aluno A

08- Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,1 a 3 segundos.

$$h(3,1) = -3(3,1)^2 + 75$$

$$h(3,1) = 46,17$$

$$\Delta t = 3,1 - 3$$

$$\Delta t = 0,1$$

$$\Delta D = 46,17 - 48$$

$$\Delta D = -1,83$$

$$V_m = \frac{-1,83}{0,1} = -18,3 \text{ m/s}$$

09- Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,01 a 3 segundos.

$$h(3,01) = -3(3,01)^2 + 75$$

$$h(3,01) = 47,8387$$

$$\Delta t = 3,01 - 3$$

$$\Delta t = 0,01$$

$$\Delta D = 47,8387 - 48$$

$$\Delta D = -0,1613$$

$$V_m = \frac{-0,1613}{0,01} = -16,13 \text{ m/s}$$

10- Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,001 a 3 segundos.

$$h(3,001) = -3(3,001)^2 + 75$$

$$h(3,001) = 47,981987$$

$$\Delta t = 3,001 - 3$$

$$\Delta t = 0,001$$

$$\Delta D = 47,981987 - 48$$

$$\Delta D = -0,018013$$

$$V_m = \frac{-0,018013}{0,001} = -18,013 \text{ m/s}$$

Fonte: acervo dos autores

A tarefa 11 também cumpriu o objetivo investigativo, os alunos retomaram a tarefa 4 com bastante propriedade, com os dados encontrados nas tarefas de 5 a 10. Eles perceberam que, à medida em que o intervalo de tempo ficava cada vez menor, podiam fazer uma boa estimativa. Um deles, o aluno C, descreveu sua conclusão da forma transcrita a seguir.

Tarefa 11: Você conseguiria responder a questão 4 agora? O que você observa nas tarefas anteriores, ou seja, da 5ª a 10ª tarefa?

“Não, precisávamos de uma fórmula que dê uma precisão mais certa. Tentamos chegar mais próximo do instante 3 para achar a velocidade, então, como os cálculos de 8 a 10, estimamos que a velocidade no instante 3s é de aproximadamente - 18 m/s ”(aluno C)

A tarefa 12, assim como na tarefa 11, foi percebida a relação entre a variação de tempos se aproximar de zero segundos e, a velocidade média, se aproximar de -18m/s.

Tarefa 12: O que acontece com a velocidade média quando a variação de tempo vai se aproximando a zero?

“Cada vez que a medida do tempo vai se aproximando de zero a velocidade vai se estabilizando em -18m/s ”(aluno E)

Tarefa 13: Seria possível estabelecer aqui alguma relação com algum assunto trabalhado nas aulas anteriores?

A tarefa 13 alcançou o objetivo almejado para a proposta desta atividade. Todos os alunos lembraram do estudo de *Limites*, então, foi um momento bastante propício para generalizarmos, na atividade proposta, a velocidade num instante t qualquer. Assim, junto com os alunos, fomos construindo a função que nos fornecia a velocidade do objeto em função do tempo t em segundos:

A generalização foi feita da seguinte maneira:

Sabe-se que:

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_f - d_0}{t_f - t_0}$$

Adaptando a relação acima para a situação abordada, temos que:

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_f - h_0}{t_f - t_0}$$

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

Para que se verifique a relação acima, recorremos A tarefa 9 desta mesma atividade.

TAREFA 9: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,01 a 3 segundos.

$$\text{Neste caso, temos que: } \begin{cases} t = 3\text{s} \\ \Delta t = t_f - t_0 = 0,01 \end{cases}$$

Assim:

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(3 + 0,01) - h(3)}{0,01}$$

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(3,01) - h(3)}{0,01}$$

$$V_{média} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{47,8197 - 48}{0,01}$$

$$V_{média} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-0,1803}{0,01}$$

$$V_{média} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = -18,03 \text{ m/s}$$

Como podemos observar, nas tarefas realizadas nesta atividade – e constatado na pergunta 12 – quando a variação de tempo Δt vai se aproximando de zero a velocidade média vai se aproximando de -18 m/s.

Quando o intervalo de tempo é muito pequeno, ou seja, à medida que vai se aproximando de zero, já não temos mais a percepção de dois instantes (t_f e t_0). O que queremos dizer, é que o intervalo de tempo pode ser desprezado, sendo assim, temos a velocidade naquele momento, ou seja, naquele instante! A velocidade instantânea será dada pelo limite a seguir:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

Neste momento, foi solicitado aos alunos que encontrassem a velocidade instantânea na atividade proposta. Nossa intenção era que os alunos pudessem calcular o limite como o indicado a seguir:

Sabe-se que: $h(t) = -3t^2 + 75$

Deste modo,

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-3(t + \Delta t)^2 + 75 - (-3t^2 + 75)}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-3(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) + 75 + 3t^2 - 75}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-3t^2 - 6t\Delta t - 3\Delta t^2 + 75 + 3t^2 - 75}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-6t\Delta t - 3\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-3\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -3(2t + \Delta t)$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -6t + \Delta t = -6t + 0$$

$$\boxed{V(t) = -6t}$$

Com este desenvolvimento, legitimamos a velocidade instantânea recorrendo à TAREFA 4.

TAREFA 4: Seria possível encontrar/estimar a velocidade do objeto no instante $t = 3s$?

Sabe-se que a velocidade em função do tempo é dada por $V(t) = -6t$.

Assim:

$$V(t) = -6t$$

$$V(3) = -6(3)$$

$$\boxed{V(3) = -18m/s}$$

Ao terminar esta atividade, os alunos entenderam a diferença entre velocidade média e velocidade instantânea, bem como, a importância e aplicabilidade no estudo de limites. Foi a partir deste exercício, que foi possível encontrar a velocidade instantânea.

Em momento algum foi mencionada a palavra *derivada*, no decorrer desta atividade, nem pelo professor, nem pelos alunos.

4.2.2 – Aplicação e análise da Atividade 2

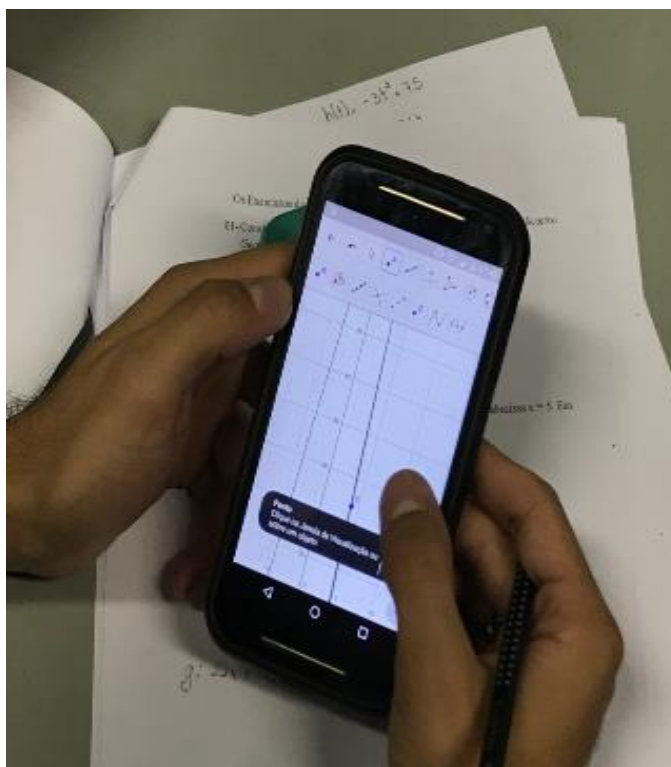
A atividade 2 foi aplicada no dia 29/08/2017, como a anterior, programada para iniciar às 17:00h e término previsto para 18:40 h. Compareceram para esta atividade 4 alunos, apenas os alunos A, B, C, e D. Então, a atividade 2 foi distribuída para os 4 alunos presentes.

Para esta atividade já estava acordado com os alunos que iríamos utilizar o Aplicativo *Geogebra* já instalado em seus respectivos *smartphones*.

Estava previsto que os alunos tinham pouco ou nenhum conhecimento com o aplicativo, por este motivo, os exercícios 1, 2 e 3 desta atividade foram realizados com a mediação do professor.

A primeira tarefa foi desenvolvida tranquilamente, todos os alunos conseguiram construir o gráfico da função $h(t) = -3t^2 + 75$. Isso pode ser atribuído a interface do aplicativo que é bastante simples e intuitiva. (Figura 41)

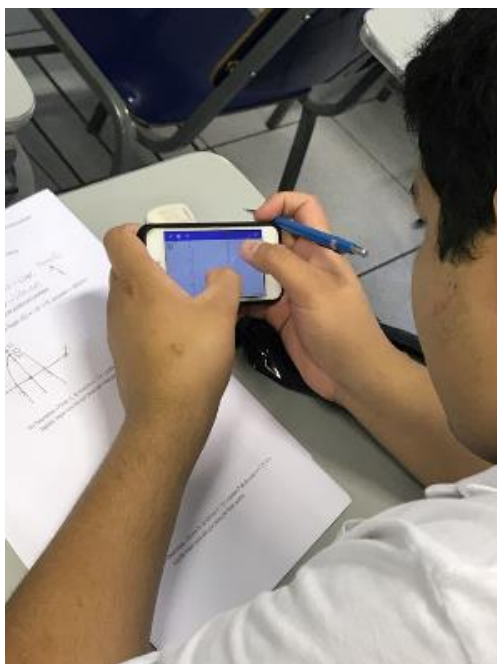
Figura 41 – Resolução tarefa 1, da atividade 2- Aluno A



Fonte: acervo dos autores

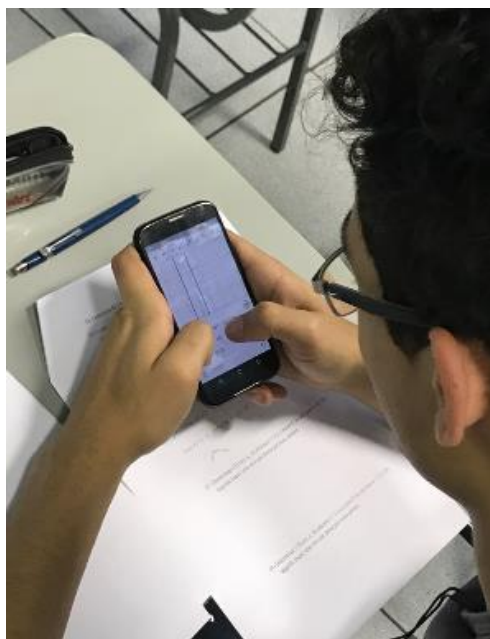
Para a realização das tarefas 2 e 3, os alunos tiveram mais dificuldade, pois eram mais complexos que o primeiro, exigiam mais comandos a serem executados, como, por exemplo, criar pontos sob a curva dada, e criar uma reta passando pelos pontos criados. Contudo, os alunos superaram nossas expectativas concluindo a tarefa perfeitamente. (Figuras 42, 43)

Figura 42 –Resolução tarefa 2, da atividade 2- Aluno D



Fonte: acervo dos autores

Figura 43 –Resolução tarefa 3, da atividade 2- Aluno C

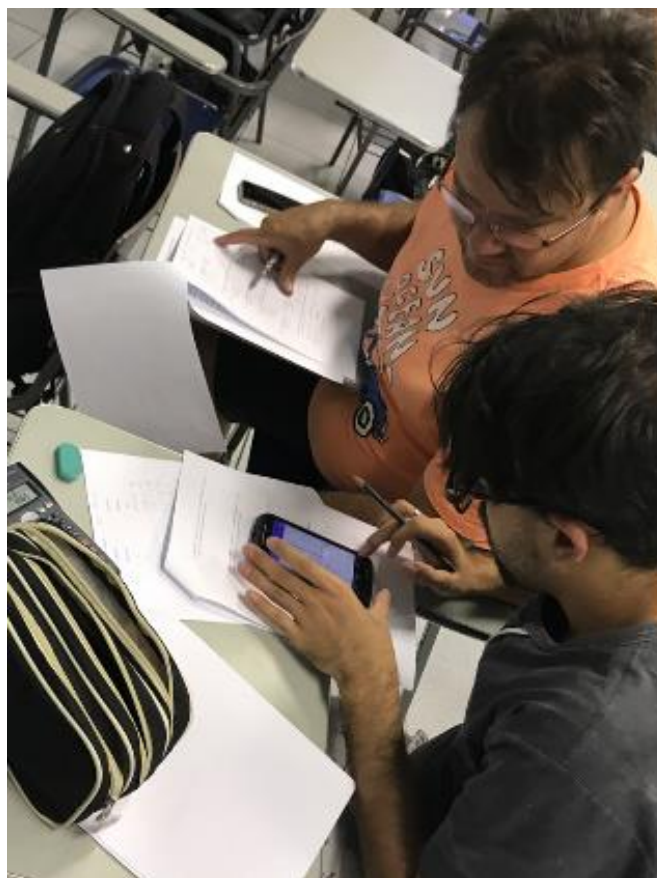


Fonte: acervo dos autores

As demais tarefas desta atividade, ou seja, a partir da terceira, foram realizadas apenas pelos alunos, não houve mediação do professor, apenas quando solicitado, o que aconteceu apenas em dois momentos: o primeiro, quando o aluno C não se lembrava de colocar o ponto sob a curva e, outro momento, quando o aluno D não recordava como

traçar uma reta passando por dois pontos dados no plano. Os alunos seguiram a atividade auxiliando uns aos outros. (Figura 44).

Figura 44 –Aluno A dando apoio ao aluno B.

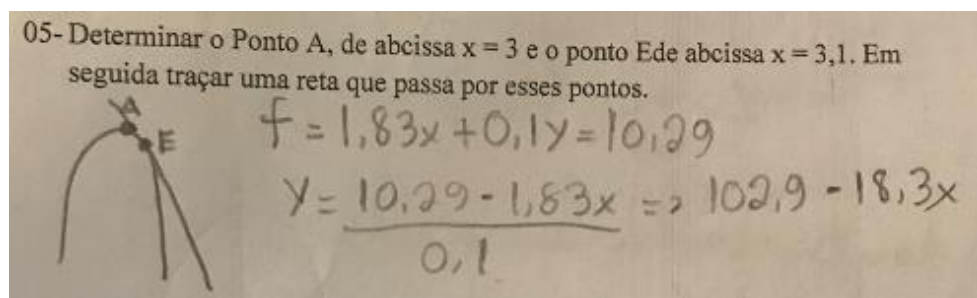


Fonte: Acervo dos autores

O aplicativo retorna à equação geral da reta $ax + by + c = 0$, contudo, foi pedido aos alunos que registrassem a equação da reta em sua forma reduzida, do tipo $y = ax + b$. O motivo dessa solicitação se concentrava no fato de, ao escrever a equação da reta em sua forma reduzida, evidenciamos o coeficiente angular ‘ a ’, propiciando a sua devida interpretação geométrica’.

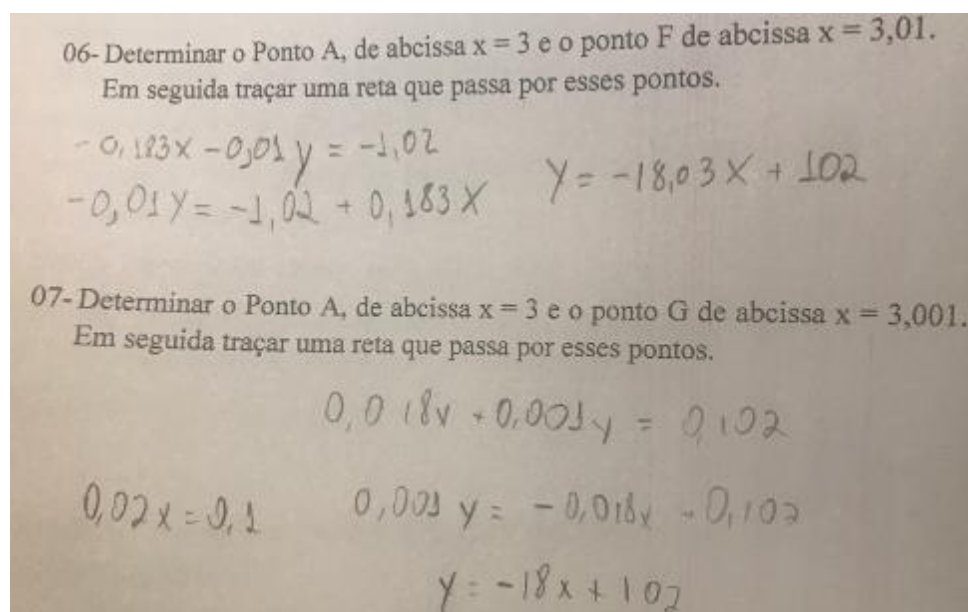
Também foi solicitado que os alunos registrassem tudo que julgassem importante. Os alunos seguiram realizando as atividades e realizando anotações diversas (figuras 45 e 46).

Figura 45 –Registros do aluno D.



Fonte: Acervo dos autores

Figura 46 –Registros do aluno C.



Fonte: Acervo dos autores

Neste ponto da atividade, os alunos começaram a estabelecer relações entre o coeficiente angular da reta e a velocidade média trabalhada na atividade 1. O *aluno A* percebeu que os coeficientes angulares das retas tinham os mesmos valores das velocidades médias encontradas na atividade 1.

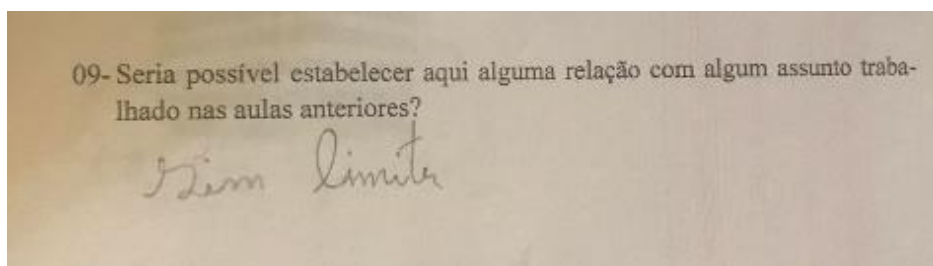
Então, a tarefa 8 foi respondida pelo grupo, sem qualquer dificuldade, uma vez que eles conseguiram associar as duas atividades. Perceberam que o coeficiente angular iria se aproximar de -18 e que já não havia diferença significativa entre os pontos, ou seja, a reta secante iria se tornando tangente à curva.

Foi um momento oportuno para conceituar formalmente uma reta tangente, nesse momento, recorreremos a Stewart:

A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa “tocando”. Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Em outros termos, uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato. (STEWART, 2016, p.66).

A tarefa 9, assim como a tarefa 13 da atividade 1, foi realizada sem qualquer problema pelos alunos. Todos associaram o estudo de limites. (Figura 47)

Figura 47 –Registros do aluno D.



Fonte: Acervo dos autores

De forma análoga à atividade 1, chegamos em um momento ideal para generalizarmos o problema, assim, juntamente com os alunos, fomos construindo a função que nos fornecia o coeficiente angular da reta para um valor de x qualquer pertencente ao seu domínio.

O coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função $f(x)$ passando pelo ponto A, de abscissa $x = x_A$ e pelo ponto B, de abscissa $x = x_B$, será dado por:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$a = \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

Para que se verificasse a relação acima, recorremos A tarefa 3 da atividade 2.

TAREFA 3: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto C, de abscissa $x = 4$. Em seguida, traçar uma reta que passa por esses pontos.

O coeficiente angular da reta que passa por esses pontos será dado por:

$$a = \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

Neste exercício temos que: $\begin{cases} f(x) = -3x^2 + 75 \\ \Delta x = x_C - x_A = 4 - 3 = 1 \end{cases}$

Logo:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x} \\
 a &= \frac{f(3 + 1) - f(3)}{1} \\
 a &= \frac{f(4) - f(3)}{1} \\
 a &= \frac{[-3(4)^2 + 75] - [-3(3)^2 + 75]}{1} \\
 a &= \frac{27 - 48}{1} \\
 \boxed{a = -21}
 \end{aligned}$$

Assim como feito para a velocidade instantânea, podemos generalizar, utilizando a ideia de Limites.

À medida que Δx vai se aproximando a zero, o coeficiente angular da reta, que é secante ao gráfico da função, vai se aproximando do coeficiente angular da reta que **tangencia** a função naquele ponto.

O coeficiente angular da reta que **tangencia** a curva, passando pelo ponto A, de abscissa $x = x_A$ será dado por:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

Legitimaremos a relação estabelecida acima finalizando esta atividade:

Descubra o coeficiente angular da reta que tangencia a função, representada por:

$f(x) = -3x^2 + 75$ no ponto A de abscissa $x = 3$.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x} \\
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3(x_A + \Delta x)^2 + 75 - [-3(x_A)^2 + 75]}{\Delta x} = \\
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3(x_A^2 + 2x_A\Delta x + \Delta x^2) + 75 - [-3(x_A)^2 + 75]}{\Delta x} = \\
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3x_A^2 - 6x_A\Delta x - 3\Delta x^2 + 75 + 3(x_A)^2 - 75}{\Delta x} = \\
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6x_A\Delta x - 3\Delta x^2}{\Delta x} =
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3\Delta x(2x_A - \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -3(2x_A - \Delta x) = -3(2x_A - 0) = -6x_A$$

O coeficiente angular da reta que tangencia a função $f(x) = -3x^2 + 75$ no ponto A de abscissa $x = 3$ é dado por $-6x_A$, então:

$$-6x_A = -6(3) = -18$$

Até o momento, não havia sido mencionada a palavra **derivada**, contudo, esperava-se que os alunos já estivessem familiarizados com o limite abaixo encontrado nas duas atividades:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Chega-se, então, a um momento oportuno para destacarmos o limite acima.

Recorremos novamente a Stewart (2016) para a formalização do conceito de derivada.

Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x . Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2 , então a variação em x (também chamada de **incremento** de x) será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

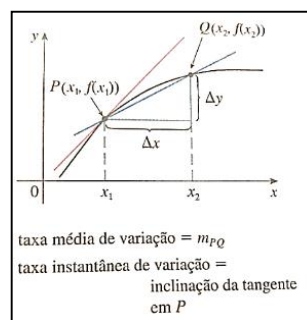
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado *taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$* e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ (figura 48).

Figura 48 – livro Cálculo, de Stewart



Fonte: Stewart (2016, p.125).

Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, teremos Δx tendendo a 0.

O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de y em relação a x** em $x = x_1$, a qual (como no caso da velocidade) é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{Taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconhecemos esse limite como a **derivada** $f'(x_1)$.

(STEWART, 2016, p.125).

Dois alunos, como, por exemplo, o aluno B, registraram no verso da folha da atividade 2 a definição formal de derivada.

– Aplicação e análise da atividade 3

A atividade 3 foi aplicada no dia 30/08/2017, também programada para se iniciar às 17:00h e término previsto para 18:40h. Compareceram para esta atividade 4 alunos – A, B C, e D – os mesmos presentes no dia anterior.

Para esta atividade, já estava acordado com os alunos que iríamos trabalhar o aspecto histórico da Derivada, e que isto seria feito por intermédio de vídeos. Contudo, foi elaborado um pequeno texto, recorte do capítulo histórico da presente pesquisa para ser distribuído aos alunos.

Foram escolhidos previamente 3 vídeos, cujos objetivos e finalidades já foram apresentados anteriormente. Os vídeos foram exibidos na ordem prevista. (Figuras 49, 50, 51, 52 e 53)

Figura 49 – 1 / 1º vídeo



Fonte: Acervo dos autores

Figura 50 – 2 /1º vídeo



Fonte: Acervo dos autores

Figura 51 – 1/ 2º vídeo



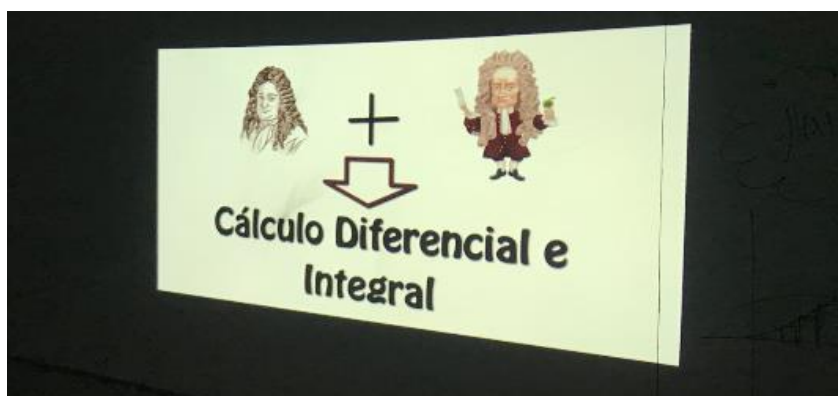
Fonte: Acervo dos autores

Figura 52 –2/ 2º vídeo



Fonte: Acervo dos autores

Figura 53 –3º vídeo



Fonte: Acervo dos autores

Constatamos que os vídeos demonstraram ser uma importante ferramenta na prática docente, os alunos apreciaram a sequência dos vídeos e os assuntos abordados.

Os vídeos legitimaram as duas atividades realizadas anteriormente. Após assistirem aos vídeos, os alunos perceberam que o Cálculo conhecido hoje surgiu de dois grandes problemas da época: o problema da reta tangente e o problema da área. Eles também tiveram a oportunidade de saber um pouco mais sobre os personagens que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo.

Desta forma, conseguiram correlacionar a *Atividade 1* com os problemas de Newton relativos à velocidade (método das fluxões). A *Atividade 2* foi relacionada com um dos grandes problemas do Cálculo Diferencial, o problema da reta tangente.

Verificamos que os vídeos ampliaram o conhecimento dos alunos, possibilitando uma ligação do que foi desenvolvido nos dois primeiros dias do curso.

4.3–Aplicação do questionário sobre o curso.

Com o objetivo de aprimorar o material de apoio ao professor para introduzir o conceito de derivada, foi elaborado um questionário para verificar a opinião dos alunos que participaram do referido curso. (apêndice A)

A seguir, uma breve descrição e análise das respostas.

Pergunta 1. Sobre o tempo estipulado para as aulas práticas e/ou exercícios.

Respostas:

Aluno A: Bom

Aluno B: Excelente

Aluno C: Médio

Aluno D: Fraco

Pergunta 2. Sobre o tempo disponível para estudo individual.

Respostas:

Aluno A: Bom

Aluno B: Bom

Aluno C: Bom

Aluno D: Médio

Pergunta 3. Sobre a sequência e organização do conteúdo ministrado.

Respostas:

Aluno A: Excelente

Aluno B: Excelente

Aluno C: Excelente

Aluno D: Bom

Pergunta 4. Sobre a programação do conteúdo.

Respostas:

Aluno A: Excelente

Aluno B: Excelente

Aluno C: Excelente

Aluno D: Bom

Pergunta 5. Sobre a distribuição adequada do tempo para os conteúdos.

Respostas:

Aluno A: Excelente

Aluno B: Bom

Aluno C: Excelente

Aluno D: Médio

Pergunta 6. Sobre o alcance dos objetivos propostos

Respostas:

Aluno A: Excelente

Aluno B: Bom

Aluno C: Bom

Aluno D: Médio

Pergunta 7. Sobre a capacidade do professor de auxiliar o aluno para atingir os objetivos.

Respostas:

Aluno A: Excelente

Aluno B: Excelente

Aluno C: Excelente

Aluno D: Excelente

Pergunta 8. Sobre a metodologia de ensino utilizada pelo professor

Respostas:

Aluno A: Excelente

Aluno B: Excelente

Aluno C: Excelente

Aluno D: Bom

Pergunta 9. Sobre a qualidade do material utilizado.

Respostas:

Aluno A: Bom

Aluno B: Excelente

Aluno C: Excelente

Aluno D: Bom

Pergunta 10. Sobre a relevância do uso do *AppGeogebra*.

Respostas:

Aluno A: Médio

Aluno B: Médio

Aluno C: Bom

Aluno D: Excelente

Pergunta 11. Sobre a capacidade do professor para transmitir conhecimentos de forma clara e objetiva.

Respostas:

Aluno A: Excelente

Aluno B: Excelente

Aluno C: Excelente

Aluno D: Bom

Pergunta 12. Sobre o domínio e atualização do conteúdo ministrado.

Respostas:

Aluno A: Excelente

Aluno B: Excelente

Aluno C: Bom

Aluno D: Bom

Analisando as respostas dadas pelos alunos participantes, o único quesito que recebeu uma avaliação ruim foi em relação ao tempo destinado para realização das atividades. Contudo, como o material foi desenvolvido para o professor de Cálculo, como apoio durante a introdução do conceito de derivada, o docente pode administrar o tempo das atividades com mais propriedade, entretanto, estimamos que 6 horas-aula são suficientes.

Como vimos, o desenvolvimento das atividades se deu em um curso de extensão em horários não habituais aos alunos, houve pequenos atrasos, por parte dos alunos, que podem ter contribuído para avaliação negativa sobre o tempo destinado para a realização das atividades.

As perguntas 13 a 17 eram abertas, a seguir, apresentamos algumas das respostas dadas pelos alunos participantes do curso.

13. Você já tinha conhecimento do conceito de Derivada, assim como as suas diferentes abordagens trabalhadas neste curso?

“Não, eu sabia o que era derivada, mas, de uma forma muito superficial. Depois do curso apresentado pelo professor, a ideia de derivada ficou muito mais clara e a forma de a utilizar em determinadas situações ficou muito mais prática, portanto, esse curso deu uma base suficiente não só para conseguir resolver, mas sim conseguir entender o conceito de derivada”. (Aluno C).

O relato deste aluno evidencia que as atividades realizadas cumpriram seus objetivos, o conceito de derivada fora assimilado.

“Não, estudo derivada, mas nunca tive acesso da história da matéria de integral, limite e derivada.” (Aluno B).

Os vídeos transmitidos aos alunos sobre as origens do Cálculo legitimaram as atividades realizadas, ou seja, a história ajudou a compreender o presente.

14. Em sua jornada acadêmica já houve situações, em sala de aula, que fosse feito o uso de *smartphones* como ferramenta de aprendizagem?

“Não, nem no Ensino Médio e nem no Ensino Fundamental, pois não é uma prática comum de professores que dão aula há muito tempo em escolas, tanto de ensino médio tanto como de ensino fundamental. No ensino técnico isso também não é uma prática comum, os professores preferem dar aula mais centrada na escrita e na fala.” (Aluno C).

Percebe-se, notoriamente, na caminhada escolar deste aluno, as marcas do ensino tradicional. Infelizmente, muitos professores ainda preferem ficar em seu “porto seguro”. É necessário pontuar também que, muitos docentes não acompanham as inovações tecnológicas e não realizam cursos de capacitação para integrar as TICs em suas aulas e acabam fixando-se apenas no livro-texto.

15. A parte sobre a História do Cálculo trabalhada em vídeos, teve alguma relevância, ou poderia ser dada por meio de um texto apenas?

“A ideia do vídeo foi fantástica. A história da criação dos cálculos deve ser colocada na sala de aula.” (Aluno A)

“Teve relevância sim, temos que fugir da rotina de só textos, vídeo tem o poder de segurar aluno, interpretação também é muito bacana.” (Aluno B).

16. Você indicaria o referido curso para outras pessoas? Justifique!

“O assunto abordado no curso é algo que acaba não sendo ministrado na sala de aula e acaba ajudando em uma melhor compreensão.” (Aluno A).

“O curso esclarece e reforça as aulas de Cálculo I.” (Aluno D).

“Porque o curso abre a mente para entender o real significado, não só do cálculo, mas sim o da matemática inteira. Esse curso abriu a minha visão sobre matemática como um todo. O mais legal e o mais interessante foi a proposta do uso de vídeos e o celular durante o curso, também ficamos vidrados e não dispersamos durante o curso.” (Aluno C).

17. Comentários opcionais (sugestões, pontos positivos e negativos)

“Muito bom, apenas o tempo que foi curto. Acredito que com mais tempo de curso o desenvolvimento seria ainda melhor.” (Aluno A).

“O curso apresentado poderia ser mais extenso (no sentido de tempo e profundidade) e também cobrir a matéria ou assunto de Cálculo Integral.” (Aluno A).

Analisando os relatos dos alunos, de uma maneira geral, percebemos que foi uma experiência nova para maioria deles, eles apreciaram a abordagem histórica através dos vídeos exibidos, assim como, o aplicativo *Geogebra* instalado em seu *smartphone*. A utilização do celular em sala de aula também foi uma novidade. Numa visão global, inferimos que conseguimos introduzir o conceito de derivada satisfatoriamente.

Ressaltamos que, neste curso, trabalhamos apenas com 4 alunos. No caso de um professor, que utilize do nosso material, a partir da metodologia proposta, trabalhando com uma turma grande, o tempo para realizar as atividades será maior. O fato de os alunos não estarem habituados com o *Geogebra*, também incidirá em um período mais longo para a execução das tarefas. Porém, ainda assim, consideramos que as atividades elaboradas são adequadas e podem propiciar um entendimento e fixação mais efetivos do conceito de derivada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, procuramos repensar a prática docente no que diz respeito à introdução do conceito de derivada. Para isso, buscamos metodologias e recursos que poderiam contribuir positivamente para este fim.

A *investigação matemática* mostrou-se uma metodologia eficaz para o ensino e aprendizagem; trata-se de um caminho, que consideramos sem volta, os resultados obtidos com uso desta metodologia são muito satisfatórios, assim com as TICs, que nos ajudam a aproximar o aluno do assunto a ser trabalhado, seja ele qual for. Constatamos que a utilização de *Smartphones* e o uso de vídeos realmente aproximam a aula a um momento de lazer, um momento de entretenimento como afirma Moran (1995). Verificamos que, nesse ambiente, os alunos estavam mais receptivos para novas instruções e novas informações.

As considerações que apresentaremos a seguir são fruto da análise dos dados obtidos durante a aplicação das atividades e das reflexões que fizemos durante toda a pesquisa.

Durante as entrevistas e conversas informais com alguns professores de Cálculo, buscamos compreender como o conceito de derivada era introduzido por estes professores em suas aulas, bem como quais livros-texto utilizavam e também quais eram os livros de sua preferência. Em seguida procuramos entender como o conceito de derivada era introduzido nos livros-textos de Cálculo Diferencial e Integral. Para isso, analisamos 5 livros, todos de grande circulação, selecionados segundo as entrevistas realizadas, e épocas distintas de publicação. Após a análise dessas cinco obras verificamos o que Chervel (1990) denomina de fenômeno da *vulgata*¹¹, ou seja, a derivada é iniciada praticamente da mesma maneira em todos os livros analisados, sempre começando pela abordagem geométrica, com a reta tangente, em seguida pela abordagem algébrica, com os problemas de variação.

¹¹ Fenômeno de “*vulgata*”, Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados, ou tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas. (CHERVEL, 1990, p.203).

Estudos de Almouloud *et al.* (2004), Oliveira Jr & Miziara (2014) e de Costa & Santos (2015) apontam problemas relacionados ao ensino e aprendizagem da geometria. É recorrente que a geometria vem sendo deixada de lado, principalmente na Educação Básica. Esta realidade já sinaliza que a abordagem inicial da derivada sendo geométrica, possivelmente não despertará interesse no aluno ou dificultará o entendimento da relação entre a geometria e o conceito de derivada num primeiro momento. Por este motivo, optamos acertadamente, em nosso entendimento, por fazer o caminho contrário, inferimos que a abordagem geométrica não despertaria no aluno uma curiosidade natural para iniciar o conceito de derivada. Diante disto, iniciamos o assunto de forma contextualizada, apropriando-nos da Investigação Matemática numa abordagem algébrica, recorrendo a uma situação envolvendo conceitos da Física, como a velocidade média e velocidade instantânea.

Os resultados da aplicação das atividades foram avaliados e discutidos no capítulo 4 da pesquisa realizada. De acordo com os relatos dos alunos, nossas observações e anotações, realizadas durante a aplicação, ficou bastante claro que, trabalhar em um ambiente diferente do tradicional, recorrendo a Investigação Matemática, ao uso do celular em sala de aula, explorando aplicativos destinados ao ensino de Matemática e trazendo a História da Matemática, por meio de vídeos disponíveis em redes sociais como o *Youtube*, é possível aproximar o aluno do conteúdo de forma mais efetiva, com sua participação e envolvimento nas atividades.

André Chervel alerta que:

A teoria, os exercícios se renovam: os novos métodos terão lugar mais ou menos no início do século XX; desde então eles não mudaram fundamentalmente. Nessas diversas evoluções, é a transformação do público escolar que obrigou a disciplina a se adaptar. (CHERVEL, 1990, p. 199).

Nessa perspectiva, como já foi apontado, o material de apoio ao professor elaborado nesta presente pesquisa pode contribuir positivamente para a introdução do conceito de derivada para os alunos iniciantes de vários cursos na área de Ciências Exatas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Ítalo D'Artagnan; SILVA, Jeissy Conceição B.; SILVA JUNIOR, Sandoval Artur; BORGES, Luzineide Miranda. Tecnologias e Educação: O uso do Youtube na Sala de aula. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. 2, 2015, Campina Grande. **Anais...** Disponível em: <www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV045_MD1_SA4_ID8097_06092015214629.pdf>. Acesso em: 03 dez. 2017.

ALMOULOUD, Saddo Ag; MARINQUE, Ana Lucia; SILVA, Maria José F.; CAMPOS, Tânia M. M. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, v. 27, p. 94-108, set/dez. 2004.

ANDRÉ, Selma Lopes da Costa. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio**. 2008. 232f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ÁVILA, Geraldo. **O ensino de Cálculo no 2º grau**. In: Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), n.18, P. 1-9, 1991.

BARON, Margareth E. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Matemática grega. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BERNAL, Jonh D. **Historia Social de la Ciencia**. La Ciência en la Historia. Barcelona: Ediciones Penínsulas, 1989.v.1

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 509-526, 2011.

BORBA, Marcelo Carvalho. Educação Matemática à distância online: balanço e perspectivas. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011. **Anais...** Recife: Brascolor Gráfica e Editora LTDA, 2011. p. 1-9.

BOYER, Carl B. **Cálculo** - tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Tradução de Hygino H. Domingues São Paulo: Atual Editora Ltda, 1995. v. 6.

BOYER, Carl B. **História da Matemática** Tradução de Elza F. Gomide. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Decreto nº. 19.890, de 18 de abril de 1931 – **Dispõe sobre a organização do ensino secundário**. Rio de Janeiro, 18 de abril de 1931.

BRASIL. Decreto nº. 21.241, de 4 de abril de 1932 – **Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências**. Rio de Janeiro, 4 de abril de 1932.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares para os cursos de graduação em engenharia**. Brasília, 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12991>. Acesso em: 12 ago. 2017.

BROCARD, Joana. **As investigações na aula de Matemática: um projecto curricular no 8º ano**. 2001. 621 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001.

CARVALHO, João Bitombeira. P. Euclides Roxo e as polémicas sobre a modernização do ensino de matemática. In: VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil**. Brasília: UnB, 2004. p. 86-158.

CHERVEL, André. Histórias das Disciplinas Escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria e Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

COSTA, André Pereira da; SANTOS, Marcelo Câmara. Aspectos do pensamento geométrico demonstrado por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14., 2015, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. **Memórias...** Disponível em: <xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/240>. Acesso em: 4 mar. 2016.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2000.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Um brasileiro no congresso internacional de matemáticos de 1900. **Revista brasileira de História da Matemática**, v. 3, p. 131-139, 2003.

Dicionário Etimológico. Disponível em: <<https://www.dicionarioetimologico.com.br/derivada>>. Acesso em: 11 ago. 2017.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FANTI, Ermínia de Lourdes Campello. **Utilizando o software Geogebra no ensino de certos conteúdos matemáticos**. Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias%20Apresentadas/C%203.pdf>> Acesso em: 12 jun. 2017.

FERREIRA JR, Wilson Castro. As múltiplas faces da derivada: Newton e Leibnz. **Ciência e Natura**, Ed. Especial, v. 36, p. 108-120, 2014.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. ver. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FROTA, Maria Clara Resende. Experiência matemática e Investigação Matemática. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto. **Actas...** Lisboa: APM. 2005.

FROTA, Maria Clara Resende. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em Cálculo. In: FROTA, Maria Clara R.; BIANCHINI, Barbara Lutaif Bianchini;

CARVALHO, Ana Márcia F. Tucci de Carvalho. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: Papirus, 2013, p. 61-88.

GARZELLA, Fabiana A. C. **A disciplina de cálculo I**: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos. 2013. 257f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. O uso do computador no ensino de matemática na graduação. In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas (orgs). **Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 68-88.

LIMA, Airlan Arnaldo Nascimento **Introduzindo o conceito de derivada a partir da ideia de variação**. 2012.111f. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências e de Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Campina Grande, 2012.

MAOR, Eli. **e**: a história de um número. Tradução de Jorge Calife. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MIORIM, Maria Angela. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual**: discursiva. Ijuí: Unijuí, 2007.

MORAN, José Manuel. Ovídeo na sala de aula. **Revista Comunicação e Educação**, n.2, p. 27-35, jan. /abr.1995.

OLIMPIO JUNIOR, Antonio. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática**: uma abordagem integrando a oralidade, escrita e informática. 2006. 264f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2006.

PONTE, João Pedro. Investigar, ensinar e aprender. In: PROFMAT, 16., 2003, Lisboa, Portugal. **Actas...** (CD Rom).Lisboa: APM, 2003. p. 25-39.

PONTE, João Pedro; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas nasala de aula**.Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

SCHUBRING, Gert. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino de matemática. In: VALENTE, Wagner Rodrigues. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil**. Brasília: Editora da UnB, 2004. p. 11-43.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução de Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SOUZA, Robson Pequeno de; SERAFIM, Maria Lúcia. Multimídia na Educação: o vídeo digital integrado ao contexto escolar. In: SOUZA, Robson Pequeno de; MOITA, Filomena; CARVALHO, Ana Beatriz Gomes. **Tecnologias Digitais na Educação**. Campina Grande: EDUEPB, 2011, p. 19-50.

STEWART, James. **Cálculo**. Tradução de EZ2 Translate. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v.1.

STEWART, James. **Cálculo**. Tradução de Helena Maria Ávila de Castro. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v.1.

THOMAS, George B. **Cálculo**. Tradução de Thelma Guimarães. 11. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009. v.1.

TORRES, Terezinha Ione Martins; GIRAFFA, Lucia Maria Martins. Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE. **REVEMAT- Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 1, p. 1-8, 2009.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares? **Diálogo Educacional**, v.11, n.34, p.645-662, set./dez. 2011.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino de matemática. In: VALENTE, Wagner Rodrigues. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil**. Brasília: Editora da UnB, 2004. p. 45-83.

WROBEL, Julia Schaetzle; ZEFERINO, Marcus Vinicius Casoto; CARNEIRO Teresa Cristina Janes. Um mapa do ensino de cálculo nos últimos 10 anos do COBENGE. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 41, 2013, Gramado. **Anais...** Gramado: UFRGS, 2013. Disponível em: <http://www.fadep.br/engenharia-eletrica/congresso/pdf/117437_1.pdf>. Acesso em: 4 fev. 2017.

ZUIN, Elenice de Souza. Cálculo: uma abordagem histórica. In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas (orgs). **Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 13-38.

Apêndice A

QUESTIONÁRIO

NOME: _____

Registro Acadêmico: _____

Prezado(a) aluno(a),

Este questionário faz parte de minha pesquisa de mestrado e tem por objetivo a coleta de informações acerca dos diferentes aspectos/abordagens no que diz respeito ao ensino de derivada.

Responda cuidadosamente às questões abaixo e não hesite em fazer os comentários que julgar necessários à melhoria do ensino do conceito de derivada.

1- Quando você escuta a palavra **DERIVADA** (no contexto do Cálculo Diferencial), qual a primeira ideia que vem à sua mente?

2- Como você explicaria o **conceito** de derivada para um amigo?

3- Em sua opinião, em quais situações a derivada pode ser aplicada?

Apêndice B

Título do Curso de Extensão:

CURSO DE APRIMORAMENTO DE CÁLCULO DIFERENCIAL:

Ressignificando o conceito de derivada.

Esta avaliação objetiva coletar informações, sugestões e opiniões dos participantes no sentido de buscar, nos próximos cursos, as adequações necessárias às ações planejadas. Não é necessário identificar-se.

Para cada item, assinale a opção que melhor reflete sua opinião.

	Péssimo	Fraço	Médio	Bom	Excelente	Não se aplica
1. Tempo estipulado para as aulas práticas e/ou exercícios						
2. Tempo disponível para o estudo individual						
3. Sequência e organização do conteúdo ministrado						
4. Programação do conteúdo						
5. Distribuição adequada do tempo para os conteúdos						
6. Alcance dos objetivos propostos						
7. Capacidade do professor de auxiliar o aluno para atingir os objetivos						
8. Metodologia de ensino utilizada pelo professor						
9. Qualidade do material utilizado						
10. Relevância do uso do appGeogebra						
11. Capacidade do professor para transmitir conhecimentos de forma clara e objetiva						
12. Domínio e atualização do conteúdo ministrado						

13. Você já tinha conhecimento do conceito de Derivada, assim como as suas diferentes abordagens trabalhadas neste curso?

14. Em sua jornada acadêmica, já houve situações, em sala de aula, nas quais houve o uso de Smartphones como ferramenta de aprendizagem?

15. A História do Cálculo, que foi exibida através dos vídeos, teve alguma relevância? Ou poderia ser dada por meio de um texto apenas?

16. Você indicaria o referido curso para outras pessoas?
Justifique.

Sim ()

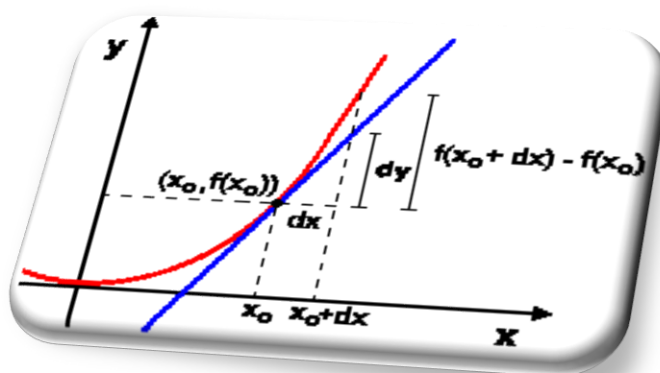
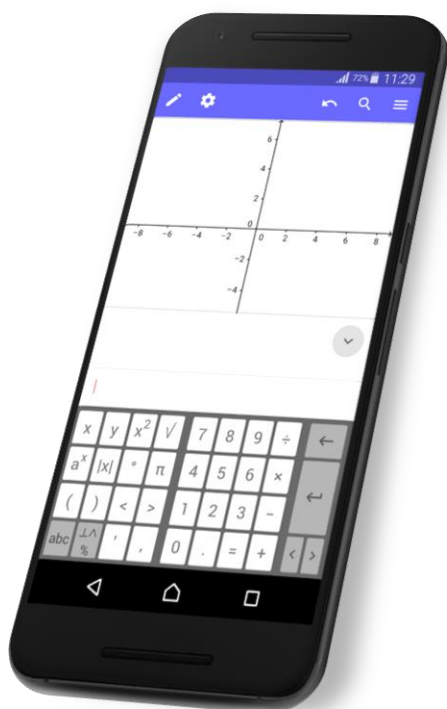
Não ()

17. Comentários opcionais (sugestões, pontos positivos e negativos)

Apêndice C

A DERIVADA E SUAS DIFERENTES ABORDAGENS: UMA PROPOSTA PARA INTRODUÇÃO DO SEU CONCEITO.

GUIA PARA O PROFESSOR DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL



ALLAN SILVA FERREIRA

ELENICE DE SOUZA LODRON ZUIN

LÍDIA MARIA LUZ PAIXÃO RIBEIRO DE OLIVEIRA

**Allan Silva Ferreira
Elenice de Souza Lodron Zuin
Lídia Maria Luz Paixão Ribeiro de Oliveira**

A DERIVADA E SUAS DIFERENTES ABORDAGENS:

Um proposta para introdução do seu conceito.

PUC/MINAS
Belo Horizonte
2017

Este material foi elaborado como parte integrante da pesquisa de dissertação do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, intitulada “**Diferentes abordagens do conceito de derivada: uma proposta de investigação matemática**”.

Nosso propósito foi construir um material para ser utilizado nas aulas Cálculo Diferencial e Integral como apoio para a disciplina no que diz respeito à introdução do conceito de Derivada.

Apresentamos um breve panorama histórico do Cálculo Diferencial, bem como as diferentes abordagens do conceito de Derivada. Propusemos algumas atividades seguindo uma proposta de investigação matemática; uso do Geogebra através de *Smartphones* e, para complementar, recorremos a vídeos, com um viés histórico e também com o objetivo de legitimar o conceito de derivada desenvolvido nas atividades propostas.

O nosso intuito, com este trabalho, é de promover um ensino-aprendizagem mais efetivo do conceito de derivada.

Os autores

Sumário

1-ASPECTOS HISTÓRICOS: Cálculo Diferencial e Integral	119
2-METODOLOGIAS: Investigação matemática e uso de tecnologia	123
2.1 Investigação Matemática.....	123
2.1.1 O papel do professor em uma aula investigativa.....	124
2.2 Uso da Tecnologia	125
3-PROPOSTAS DE ATIVIDADE.....	130
REFERÊNCIAS.....	158

1-ASPECTOS HISTÓRICOS: Cálculo Diferencial e Integral

Calcular, segundo Boyer (1995), significou no passado “fazer contas por meio de seixos”. A palavra Cálculo é diminutivo de *calx*, que em latim, significa ‘pedra’. Verifica-se que em medicina este significado ainda se faz valer, a expressão *cálculo renal* é utilizada para *pedras nos rins*. (BOYER, 1995, p.1).

O Cálculo começa a ser moldado no século XVII, contudo, as questões inerentes ao seu surgimento apareceram há mais de dezessete séculos antes dessa época.

Papiros egípcios e tábuas cuneiformes babilônicas incluem problemas de mensuração retilínea e curvilínea que pertencem ao domínio do Cálculo; mas ao tratamento pré-helênico desses problemas faltou o amadurecimento matemático em dois aspectos sérios: (1) não havia distinção definida entre resultados exatos e aqueles apenas aproximados, e (2) as relações com a lógica dedutiva não estavam explicitamente reveladas. (BOYER, 1996, p.1).

De acordo com Zuin (2001), se voltássemos um pouco na História da Matemática encontraríamos diversos trabalhos de vários matemáticos, físicos e astrônomos, entre eles: René Descartes (1596-1650); Buonaventura Cavalieri (1598-1647); Pierre de Fermat (1601-1665); John Wallis (1616-1703); Blaise Pascal (1623-1662); Christian Huygens (1629-1695); o professor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677) e James Gregory (1646-1716). Ainda segundo esta autora, Fermat e Pascal “redescobriram” Arquimedes, passando a usar o método da exaustão em seus trabalhos.

O próprio Newton escreveu que suas ideias preliminares para desenvolver o Cálculo tinham como base a “maneira pela qual Fermat traçava tangentes”. As ideias de Fermat foram fundamentais para que Newton pudesse avançar nas suas teorias. Ele próprio admitiu: “Se eu pude ver mais longe é porque estava apoiado em ombros de gigantes”, reconhecendo o valor das contribuições dos que o precederam. (ZUIN, 2001, p.16).

Baron (1985) afirma que o trabalho de Arquimedes (287-212 a.C), segundo a maioria dos historiadores, deve-se a antecipação (ou até mesmo a invenção) do Cálculo Integral. “É mais fácil dizer o que o cálculo faz do que dizer o que ele é”. (BARON, 1985, p.1).

De acordo com Boyer (1996), o *Método* de Arquimedes teria uma importância maior no desenvolvimento do Cálculo se a imprensa fosse uma invenção dos tempos antigos e não do Renascimento.

Ninguém no mundo antigo igualou-se a Arquimedes, quanto à invenção e à demonstração, ao lidar com problemas relacionados ao Cálculo. No entanto, o teorema geral mais antigo em Cálculo não se deve a Arquimedes, mas a matemáticos gregos que viveram, provavelmente, meia dúzia de séculos mais tarde. (BOYER, 1996, p.7).

Na visão de Baron (1985), fora dos ambientes acadêmicos, àqueles que se preocupam com o Cálculo Infinitesimal, de alguma forma ou de outra, interessam apenas nas suas aplicações,

... em geral, a derivação está relacionada com a descrição e mensuração da maneira como as coisas variam, se movem e crescem; vamos utilizá-la para calcular razões de crescimento, decrescimento, assim como para prever desenvolvimentos futuros. A integração constitui uma ferramenta básica nos processos de somas; por exemplo, ela é usada para determinar a pressão total da água contra uma represa, para determinar a quantidade total de energia que flui através de um cabo elétrico num determinado tempo ou uma quantidade de terra a ser escavada de uma determinada região. (BARON, 1985, p.1).

O Cálculo se desenvolveu conforme uma combinação de problemas e teorias. Os problemas fomentaram as formulações, que, por sua vez, geraram os conceitos, teorias e técnicas apropriadas para resolvê-los. Historicamente, o modelo geométrico teve influência direta no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Por um lado, a diferenciação, que foi desenvolvida paralelamente com problemas relacionados à construção de retas tangentes à uma determinada curva; de outro lado; a integração, que se desenvolveu a partir de problemas de *quadraturas de curvas*, ou seja, determinação de áreas de regiões limitadas por uma curva, eixos e ordenadas.

Os problemas da tangente e das quadraturas foram estudados separadamente durante séculos, antes de, finalmente, se tornarem relacionados no século XVII, através do que agora conhecemos por *teorema fundamental do cálculo* (BARON, 1985).

Eves (2004) afirma que é estranho que o desenvolvimento histórico do Cálculo seguiu o caminho contrário à daquele seguido pelos livros-texto e cursos básicos atuais sobre o assunto, tal curiosidade se faz valer, devido ao fato de que as ideias associadas a integração surgiram bem antes das ideias associadas à diferenciação.

A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a cur-

vas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p.417).

Como já mencionado anteriormente, o desenvolvimento do Cálculo foi atribuído ao inglês Isaac Newton e ao alemão Gottfried Wilhelm Leibniz. Embora não haja nenhuma importância para a História do Cálculo o mérito de quem o teria desenvolvido primeiramente, a título de curiosidade, Jeremy Gray, afirma, em seu documentário intitulado “*Topics in the History of Mathematics*”¹², que Newton foi o primeiro a descobrir o Cálculo, isso haveria ocorrido em 1665 ou 1666, enquanto Leibniz fez sua descoberta independente cerca uma década depois. Porém, Newton só publicou sua descoberta anos depois. Os registros originais de ambas as descobertas ainda estão preservados. Os cadernos de Newton, de 1665 e 1667, podem ser encontrados na biblioteca da Universidade de Cambridge, Reino Unido, e, as anotações de Leibniz, referentes ao ano de 1676, estão localizadas em Hannover, Alemanha.

Os Cálculos de Newton e Leibniz estão vinculados às propriedades geométricas de figuras, destacando-se o cálculo de área e o cálculo de tangentes, os dois grandes problemas daquela época. Ambos percorreram um longo caminho para conclusão dos seus estudos e definição de suas regras.

Para Maor (2008, p.103), apesar das semelhanças entre os trabalhos de Newton e Leibniz é pertinente destacar algumas diferenças. Segundo este autor, Atribui-se a Leibniz o significado restrito da palavra *Cálculo* – ou seja, Cálculo Diferencial e Integral. Newton nunca utilizou essa palavra, preferindo chamar sua invenção de “*Método de Fluxões*”, visto que Newton estava muito preocupado em resolver, a partir desse poderoso instrumento, problemas da Física relacionados às necessidades do seu tempo.

O cálculo diferencial é o estudo das mudanças ou, mais especificamente, das *taxas de mudança* de uma quantidade variável. A maioria dos fenômenos físicos ao nosso redor envolve quantidades que mudam com o tempo, tais como a velocidade de um carro em movimento, as leituras de temperaturas de um termômetro ou a corrente elétrica fluindo em um circuito. Hoje nós chamamos tais quantidades de variáveis; Newton usava o termo *fluente*. O Cálculo Diferencial está relacionado à descoberta da taxa de mudança de uma variável, ou, para usar a expressão de Newton, a *fluxão* de um determinado *fluente*. (MAOR, 2008, p.103).

¹² Documentário disponível no YouTube em: https://www.youtube.com/watch?v=P9_qaUfKKx8. Acesso em 10 jan. 2017.- às 16:33h

Maor (2008) também destaca que Newton era tanto físico quanto matemático, sua visão dinâmica de mundo nos mostra o funcionamento de sua mente; para ele, tudo se encontrava num estado contínuo de movimento. Leibniz, por outro lado, tinha uma visão mais voltada para filosofia, de um modo mais abstrato. Ele trabalhava com *diferenciais*, pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y .

O conhecimento do Cálculo ficou bastante tempo restrito a um pequeno grupo de matemáticos: o grupo de Newton, em seu ciclo na Inglaterra e os irmãos Bernoulli no continente europeu compondo o time de Leibniz.

Maor (2008) afirma que os irmãos Bernoulli propagaram por toda a Europa os ensinamentos de Leibniz para diversos matemáticos, dentre eles, o francês Guillaume François Antonie L'Hospital (1661-1704), responsável pela escrita do primeiro livro-texto sobre o assunto, *Analysedesinfinimentpetits* (1696). Outros matemáticos do continente o seguiram e logo o Cálculo era o assunto dominante na matemática do século XVIII.

Uma grande vantagem do trabalho de Leibniz sobre o trabalho de Newton foi o sistema de notação que ele utilizava. Quando Newton criou seu “método de fluxões” colocou um ponto sobre a letra representando uma quantidade cuja fluxão (derivada) ele buscava.

Para encontrar a derivada de $y = x^2$ devemos primeiro obter uma relação entre as fluxões de x e de y em relação ao tempo (Newton pensava em cada variável como “fluindo” uniformemente com o tempo, daí o termo *fluxão*), neste caso $\dot{y} = 2x\dot{x}$. A derivada, ou taxa de mudança de y com relação a x , é a proporção entre as duas fluxões, ou seja, $\dot{y}/\dot{x} = 2x$. (MAOR, 2008, p.127).

Esta notação dos pontos, utilizada por Newton – “letra pontuada” – mostrou-se bastante ineficiente, entretanto, sobreviveu na Inglaterra por mais de cem anos. Todavia, a Europa continental adotou a notação diferencial mais eficiente, a de Leibniz, dy/dx – onde dy e dx representam pequenos incrementos nas variáveis y e x . Sua proporção rendeu-lhe futuramente a concepção de taxa de variação de y em relação a x . Outra notação, bastante eficiente, surgiu, em 1797, através de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) em seu tratado *Théorie des fonctions analytiques*, uma notação funcional da derivada, chamando de $f'x$ a função derivada de fx .

Depois de Newton e Leibniz, outros personagens foram responsáveis por continuar os trabalhos e promover novos avanços na Matemática.

2- METODOLOGIAS: Investigação matemática e uso de tecnologia

2.1 Investigação Matemática

Tradicionalmente, as aulas de Matemática são centradas no professor, que expõe os conteúdos no quadro e dita as regras, cabendo aos alunos apenas aceitá-las. Em geral, o docente não oferece espaços para reflexão, discussão ou justificativas. Nessa perspectiva, é legítimo surgirem dúvidas quanto às estratégias que devemos utilizar para que possamos aproveitar ao máximo as potencialidades do trabalho investigativo, realizando, desta forma, aulas de discussões extremamente produtivas.

Para Ponte (2003), existem muitas perspectivas sobre o que é investigar, mas em sua perspectiva, *“investigar”, não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com qual nos deparamos*. Trata-se, segundo ele, de uma capacidade de suma importância para todos e que deveria permear todo trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos.(PONTE, 2003, p.2).

Se se pretende que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas e assumam uma visão alargada da natureza desta ciência, então as tarefas de exploração e investigação têm de ter um papel importante na sala de aula. (PONTE, 2003, p.12).

Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar com problemas difíceis. Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Com um significado muito semelhante, senão equivalente, temos em português os termos “pesquisar” e “inquirir”. (PONTE, BROCARD, OLIVEIRA, 2013).

Trabalhar com investigação matemática em ambientes escolares contribui para o processo de ensino-aprendizagem dos mesmos, uma vez que, desperta no aluno, a curiosidade e interesse pelo objeto de estudo. (PONTE, BROCARD, OLIVEIRA, 2013).

Frota (2005), afirma que: *é mais fácil, talvez, relatar experiências matemáticas, do que definir o que seja uma, assim como na Matemática, é mais fácil exemplificar, do que definir*. (FROTA, 2005, p.2).

Na perspectiva desta autora,

uma experiência matemática é, por um lado, individual, personalizada e única, já que é história vivida. E, por outro lado, coletiva, cultural e política, uma vez que é vivenciada por pessoas com uma história, inseridas numa cultura, parte de uma comunidade. Para a autora, essa história possibilita experiências distintas e que para cada tipo de experiência matemática é possível atribuir valorações diferenciadas. (FROTA, 2005, p.2).

2.1.1 O papel do professor em uma aula investigativa

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), o *arranque* da aula é um dos pontos fundamentais, embora seja breve, esta fase é absolutamente crítica; cabe ao professor garantir que todos os alunos tenham entendido o objetivo da tarefa proposta e também garantir aquilo que deles se esperam no decorrer da atividade, é importante que o professor faça uma pequena introdução oral da atividade. Além disso, o sucesso de uma investigação depende também, assim como em qualquer outra proposta de atividade, do ambiente de aprendizagem proporcionado na sala de aula. Para esses autores, o aluno deve sentir-se confortável em expor suas ideias, e que as mesmas possam ser valorizadas pelos colegas, criando ricas discussões no grupo, não sendo necessária a validação constante do professor.

Tendo sido assegurada, mediante o momento inicial, a compreensão dos alunos acerca da atividade que se irá realizar, o professor passa a desempenhar um papel mais de retaguarda. Cabe-lhe então procurar compreender como o trabalho dos alunos se vai processando e prestar o apoio que for sendo necessário. No caso em que os alunos trabalham em grupo, as interações que se geram entre eles são determinantes no rumo que a investigação irá tomar. No entanto, há que ter em atenção que, se os alunos não estão acostumados nem a trabalhar em grupo nem a realizar investigações, fazer entrar na aula, simultaneamente, esses dois elementos novos pode trazer problemas de gestão ao professor (PONTE, BROCARD, OLIVEIRA, 2013, p.29).

Esses autores afirmam que, em uma atividade investigativa, o professor deve ficar atento com o desenvolvimento do trabalho dos alunos, é imprescindível, segundo eles, observar se os alunos entenderam bem a tarefa e como reagiram a ela, pois pode acontecer que os estudantes procurem apenas a resposta, como se fosse uma atividade qualquer, fugindo do caráter investigativo.

O sucesso de uma atividade investigativa está diretamente ligado às ações do professor durante a realização da atividade. Esta constitui-se um desafio para o docente perceber em que ponto os alunos querem chegar. Em geral, o professor encontrará vá-

rias adversidades durante uma tarefa investigativa; nem sempre poderá acompanhar todos os detalhes discutidos em cada grupo e, também, muitas vezes, os alunos não possuem um registro escrito organizado daquilo que fizeram e têm muitas limitações na comunicação matemática oral. Tal situação é desfavorável à avaliação do seu progresso. Cabe ao professor tentar minimizar este problema colocando boas perguntas, tendo paciência para escutar e fazendo um esforço sério para compreendê-los, evitando corrigir cada afirmação ou conceito matematicamente pouco correto (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2013).

Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou num conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos, ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2013, p. 25).

2.2 Uso da Tecnologia

Para Borba (2011), os ambientes computacionais condicionam as ações quando se tem que resolver um problema matemático. Os *softwares* educacionais tem a capacidade de realçar o componente visual da matemática. Borba (2011) recorre a outros autores para trazer algumas particularidades do aspecto visual, em educação matemática, que são proporcionadas pelas TICs (Tecnologia da Informação e Comunicação):

- Visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático.
- A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles.
- Visualização é a parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas.
- Tecnologias com poderosas interfaces visuais estão presentes nas escolas, e a sua utilização para o ensino e aprendizagem da matemática exige a compreensão dos processos visuais.
- Se o conteúdo de matemática pode mudar devido aos computadores, (...) é claro neste ponto que a matemática nas escolas passarão por pelo menos algum tipo de mudança (...). (BORBA, 2011, p.3).

Diante disso, Borba (2011) afirma que as possibilidades de investigação e experimentação, proporcionadas por essas mídias, podem levar estudantes a desenvolverem suas ideias a ponto de criarem conjecturas, validá-las e levantar subsídios para elaboração de uma demonstração matemática.

Frota (2013) assinala que os processos de visualização e de comunicação de ideias matemáticas têm sido destaque na pesquisa em Educação Matemática, recorrendo a Arcavi (2003) explicita o que se entende por visualização:

Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados. (FROTA, 2013, p.71).

Além disso, segundo esta autora, a tecnologia computacional pode mudar a forma de fazer matemática, no sentido de contribuir com a aprendizagem, colaborando para o processo de fazer conjecturas, interpretar soluções, estimular a investigação e a descoberta.

Para Laudares & Lachini (2001), a busca da produtividade em educação e da eficiência nos processos de ensino suscita a necessidade da utilização de uma pedagogia distinta da tradicional, “modelo este que privilegia a exposição verticalizada de um saber pronto e acabado”. Os autores afirmam ainda que, na mediação entre o saber e os métodos de estudo, estão os materiais e artefatos tecnológicos, utilizados pelos professores para viabilizar a didática.

Os meios, isto é, as ferramentas tecnológicas, nas mãos dos agentes, se tornam instrumentos para obtenção de resultados. A ferramenta – o computador – não tem inteligência, sensibilidade, emoção e nem intuição, características próprias dos sujeitos; somente quando usada por um sujeito é que a ferramenta se torna instrumento que pode explicitar as muitas qualidades de quem a usa. (LAUDARES & LACHINI 2001, p.69).

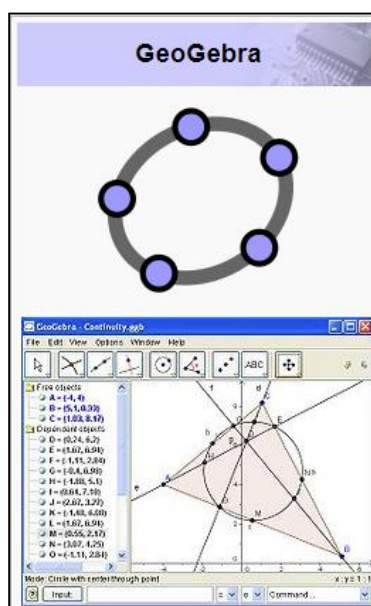
De fato, o assunto abordado por Laudares e Lachini é bastante pertinente, devido ao fato de muitos professores utilizarem a tecnologia pela própria tecnologia, ou seja, uma aula com o uso de *slides*, através de um equipamento multimídia, pode continuar sendo uma aula expositiva tradicional verticalizada, onde a interação, os questionamentos e as descobertas não acontecem, pelo motivo do professor e/ou *slide* continuarem sendo os protagonistas da aula.

Stewart (2014) alerta para a utilização da tecnologia no ensino, afirmando que o uso da tecnologia aumenta a importância e a necessidade de se entender com clareza os conceitos que implicitamente estão na tela. Nesse sentido, quando utilizados apropriadamente, computadores, *smartphones* e calculadoras gráficas, estes podem potencializar a descoberta e a compreensão de tais conceitos pelos estudantes. As TICs (Tecnologia da

Informação e Comunicação) permitem aos discentes não apenas estudar temas tradicionais de maneira nova, mas, também explorar, ou experimentar tais temas.

Ambientes informatizados podem contribuir para a visualização em Matemática. A cada dia, é lançado um novo aplicativo para fins educacionais no que diz respeito à Matemática; por exemplo, os aplicativos gratuitos como *Geogebra*, *Mathdraw*, *Winplot*, dentre outros. O *Smartphone* já é uma realidade, muitos estudantes de cursos superiores o possuem e utilizam em demasia muitas de suas funcionalidades.

Figura 1 – Geogebra



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>

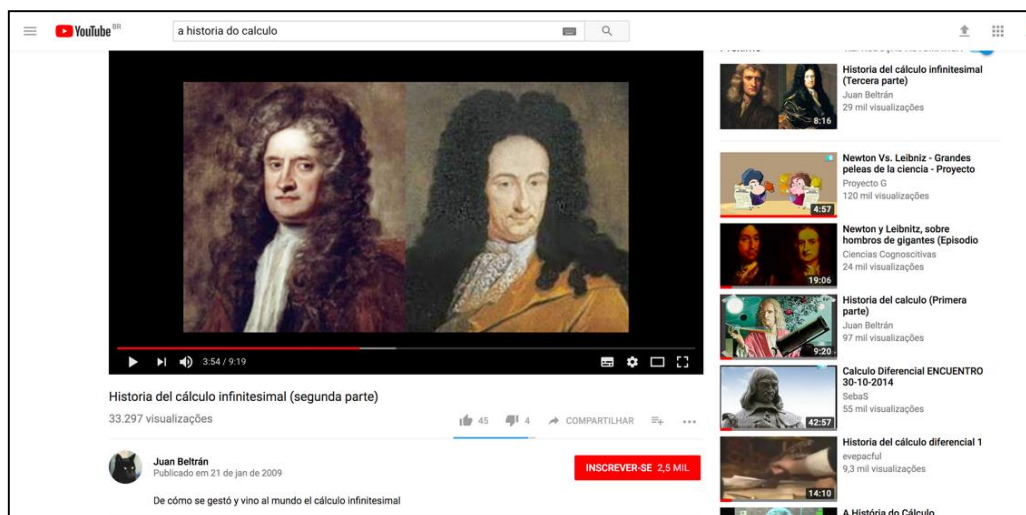
Criado por Markus Hohenwarter, o projeto foi iniciado em 2001, na *Universität Salzburg*, e tem prosseguido em desenvolvimento na *Florida Atlantic University*. O *GeoGebra* é um *software* gratuito de matemática dinâmica, desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O *GeoGebra* reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, este *software* tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.¹³

Atualmente, temos diversas opções tecnológicas como ferramentas para o uso em sala de aula, como as redes sociais, por exemplo, o *YouTube*, o qual vem ganhando

¹³Informações retiradas do site do Instituto do Geogebra do Rio de Janeiro, disponível em: <<http://www.geogebra.im-uff.mat.br>>. Acesso em: 14 set. 2017.

mais espaço na educação. Existem vários canais direcionados para o ensino de Matemática. Trata-se de uma ferramenta para relação *Ensino x Aprendizagem*. No *YouTube*, encontramos milhares de vídeos sobre diversos temas e áreas de estudo, inclusive vídeos educacionais que podem ser utilizados em sala de aula tanto na Educação Básica como nos cursos de Nível Superior. Se planejado com antecedência, os vídeos podem legitimar determinado conteúdo a trabalhar ou já trabalhado em sala de aula.

Figura 2 – Youtube (pesquisa por História do Cálculo)



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=zFtw1-LUh60>

O *YouTube* é uma plataforma de distribuição digital de vídeos. Foi fundada em fevereiro de 2005 por três pioneiros do *Paypal*, um famoso serviço da internet ligado a gerenciamento de fundos *Jawed Karim*, *Chad Hurley* e *Steve Chen*.¹⁴

Para Sousa & Serafim (2011), a escola de hoje continua com traços da era industrial, criada para atender as demandas da indústria. Esses autores afirmam que devido às novas exigências de formação de indivíduos, profissionais e cidadãos, muito diferentes daqueles que eram necessários na era industrial, a escola de hoje deve se “reinventar”, para isso, é fundamental que o professor se informe, e que se aproprie de informações advindas da presença das tecnologias digitais da informação e comunicação, de acordo com esses autores, tal tecnologia deve ser sistematizada na prática pedagógica dos professores.

O que se vem afirmando, na literatura e na experiência até aqui construída, é que o cenário escolar, integrado com vivências em multimídia, estas geram: a dinamização e ampliação das habilidades cognitivas, devido à

¹⁴ Informações retiradas do Wikipédia, acessado em 19/09/17 às 16h21min. <https://pt.wikipedia.org/wiki/YouTube>

riqueza de objetos e sujeitos com os quais permitem interagir; a possibilidade de extensão da memória interagir; a extensão da memória e de atuação em rede; ocorre a democratização de espaços e ferramentas, pois estas facilitam o compartilhamento de saberes, a vivência colaborativa, a autoria, coautoria, edição e publicação de informações, mensagens, obras e produções culturais tanto de docentes como discentes. (SOUZA & SERAFIM, 2011, p. 22)

Além disso, Sousa & Serafim (2011) recorrem a outro autor para legitimar as afirmações acima:

O vídeo é sensorial, visual, linguagem falada, linguagem musical e escrita. Linguagens que interagem superpostas, interligadas, somadas, não separadas. Daí a sua força. Somos atingidos por todos os sentidos e de todas as maneiras. O vídeo nos seduz, informa, entretém, projeta em outras realidades (no espaço imaginário), em outros tempos e espaços. (MORAES, 1995, apud SOUSA & SERAFIM, 2011, p.30).

Para Moran (1995, p. 27), *o vídeo está umbilicalmente ligado à televisão, a um momento de lazer*. Para este autor, o uso de vídeo como recurso pedagógico traz, imperceptivelmente, um clima de entretenimento para sala de aula. Ele afirma que, vídeo, *na concepção dos alunos, significa descanso e não “aula”, o que modifica a postura e as expectativas em relação ao seu uso*. Nessa linha de raciocínio, Moran (1995) afirma que *é necessário aproveitar essa expectativa positiva para atrair o aluno para os assuntos do planejamento pedagógico do professor*.

O vídeo parte do concreto, do visível, do imediato, do próximo, que toca todos os sentidos. Mexe com o corpo, com a pele – nos toca e “tocamos” os outros, que estão ao nosso alcance, através dos recortes visuais, do *close*, do som estéreo envolvente. *Pelo vídeo sentimos, experiênciamos sensorialmente o outro, o mundo, nós mesmos*. (MORAN, 1995, p. 28).

3- PROPOSTAS DE ATIVIDADE

As atividades propostas a seguir estão organizadas em três momentos, na *Atividade 1*, trabalharemos a abordagem algébrica da derivada, utilizando-se da investigação matemática. Na *Atividade 2*, trabalharemos a abordagem geométrica da derivada, para isso iremos introduzir o aplicativo *Geogebra*, enfim, na terceira e última atividade, será enfatizada História da Matemática através do uso de vídeos. Nossa intenção, com esta última atividade, é trazer aspectos históricos sobre a introdução do Cálculo, de forma a contribuir um outro olhar para a temática abordada.

É importante que seja respeitada a ordem das atividades, pois, nosso objetivo é fazer com que o estudante seja levado a experimentar primeiro a abordagem algébrica antes da abordagem geométrica, diferentemente de como é proposto na maioria dos livros-textos de Cálculo Diferencial e Integral. As atividades foram elaboradas de modo que o aluno possa estabelecer relações entre as diferentes abordagens, bem como através da História da Matemática, perceber as origens e motivações para o desenvolvimento do Cálculo que conhecemos hoje.

Quadro 1: Atividade 1

Atividade 1
Trabalho a ser realizado em grupo: (Sugestão: Máximo de 4 alunos por grupo)
Objetivo: Explorar a situação dada, do ponto de vista numérico e algébrico. Trabalhar conceitos da Física que são bastante utilizados no dia a dia, como, por exemplo, a <i>velocidade média</i>. Nesta atividade, espera-se que o aluno estabeleça relações com o estudo de Limite e consiga desenvolver o raciocínio para generalizar o cálculo da <i>velocidade instantânea</i>.
Material: Calculadora, papel e lápis.

Fonte: Elaborado pelos autores

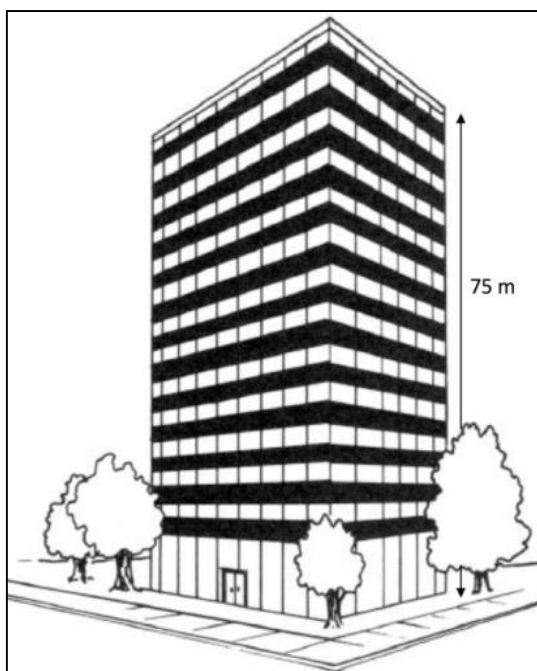
ATENÇÃO! Para cada tarefa propostaremos elencar seus objetivos, bem como, sugerir as devidas intervenções, quando for o caso.

Consideremos a situação abaixo:

Um objeto é solto do topo de um prédio a 75 m de altura. Sabe-se que a altura h (em metros) do objeto em relação ao solo é dada em função do tempo t (em segundos) pela função:

$$h(t) = -3t^2 + 75$$

Figura 3 – Ilustração da Atividade 1



Fonte: <http://static.hsw.com.br/gif/how-to-draw-buildings-49.jpg>(adaptada)

A *velocidade média* é obtida pela razão entre a distância percorrida e o tempo gasto em certo percurso, dada por:

$$V_{média} = \frac{d}{t} \Rightarrow V_{média} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_f - d_0}{t_f - t_0}$$

$$\text{Onde: } \begin{cases} \Delta d = \text{variação da distância} \\ \Delta t = \text{variação do tempo} \\ d_f = \text{distância final} \\ d_0 = \text{distância inicial} \\ t_f = \text{tempo final} \\ t_0 = \text{tempo inicial} \end{cases}$$

TAREFA 1: Complete o quadro a seguir:

Quadro 2: 1ª tarefa proposta

TEMPO t (segundos)	ALTURA h (metros)
0	75
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Fonte: Elaborado pelos autores

Quanto tempo leva até o objeto tocar o solo? Descreva como chegou a esta conclusão.

Nesta tarefa, espera-se que os alunos completem a tabela e, por meio de discussões entre os componentes grupo, cheguem à conclusão que o objeto leva 5 segundos para tocar o solo.

TAREFA 2: Calcule a velocidade média em todo percurso, ou seja, desde o instante em que o objeto é solto até o momento em que ele toca o solo.

*Nesta tarefa, espera-se que os **alunos** utilizem a fórmula fornecida para o cálculo da Velocidade Média, chegando ao resultado de - 15 m/s.*

TAREFA 3: O que você poderia dizer em relação ao sinal encontrado na resposta anterior?

O objetivo desta tarefa é gerar uma discussão quanto ao sinal encontrado na tarefa 2. Trata-se de uma boa oportunidade para uma intervenção do professor! Explicar para os grupos que o sinal negativo encontrado refere-se ao sentido contrário do movimento, ou seja, à medida em que o tempo passa estamos perdendo altura!

TAREFA 4: Seria possível encontrar/estimar a velocidade do objeto no instante $t = 3s$?

O Objetivo desta atividade é de fomentar uma inquietação por parte dos alunos. Espera-se que os integrantes do grupo promovam uma discussão neste ponto. O professor não deverá intervir.

OBS: Inferimos que os alunos retomarão esta tarefa mais adiante com mais propriedade.

TAREFA 5: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 5 a 3 segundos.

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem os dados encontrados na tabela e a fórmula fornecida para o cálculo da Velocidade Média, chegando ao resultado de -24 m/s

TAREFA 6: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 4 a 3 segundos.

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem os dados encontrados na tabela e a fórmula fornecida para o cálculo da Velocidade Média, chegando ao resultado de -21 m/s.

TAREFA 7: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,5 a 3 segundos.

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem a função $h(t) = -3t^2 + 75$, para encortar a altura do objeto no instante $t = 3,5$ s, bem como a fórmula fornecida para o cálculo da Velocidade Média, chegando ao resultado de -19,5 m/s.

TAREFA 8: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,1 a 3 segundos.

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem a função $h(t) = -3t^2 + 75$ para encortar a altura do objeto no instante $t = 3,1$ s, bem como a fórmula fornecida para o cálculo da Velocidade Média, chegando ao resultado de -18,3 m/s.

TAREFA 9: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,01 a 3 segundos.

Nesta tarefa, espera-se que os alunos utilizem a função $h(t) = -3t^2 + 75$, para encortar a altura do objeto no instante $t = 3,01$ s e também a fórmula fornecida para o cálculo da Velocidade Média, chegando ao resultado de -18,03 m/s.

TAREFA 10: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,001 a 3 segundos.

Nesta tarefa espera-se que os alunos utilizem a função $h(t) = -3t^2 + 75$, para encortar a altura do objeto no instante $t = 3,001s$ e a fórmula fornecida para o cálculo da Velocidade Média, chegando ao resultado de $-18,003 \text{ m/s}$

TAREFA 11: Você conseguiria responder à questão 4 agora? O que você observa nas tarefas anteriores, ou seja, da TAREFA 5 A tarefa 10?

Neste ponto, esperamos que os alunos promovão discussões sobre a TAREFA 4. É um momento oportuno para o professor instigar os grupos a estimarem o resultado!

TAREFA 12: O que acontece com a velocidade média, quando a variação de tempo vai se aproximando a zero?

*Este é um momento importante desta atividade.
Neste ponto, esperamos que os alunos percebam que à medida que a variação de tempo vai se aproximando de zero, a velocidade média vai se aproximando a -18 m/s .*

ATENÇÃO! *O professor deve apenas instigar os alunos.
A conclusão acima deve ser construída pelo grupo.*

TAREFA 13: Seria possível estabelecer aqui alguma relação com algum assunto trabalhado nas aulas anteriores?

Espera-se, com esse exercício, que os alunos relacionem a atividade proposta com o estudo de Limites.

Este é um momento oportuno para generalizar, junto com os alunos, uma situação que contemple a velocidade instantânea e que a mesma se faça valer para qualquer instante, levando-se em consideração os dados do problema.

Utilizando o Estudo dos Limites, podemos encontrar a velocidade instantânea de um objeto num instante t qualquer.

Veja como isso pode ser generalizado:

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta D}{\Delta T} = \frac{D_f - D_0}{T_f - T_0}$$

Adaptando a relação acima para a situação abordada, temos que:

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_f - h_0}{t_f - t_0}$$

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

Para que se verifique a relação acima, recorremos a TAREFA 9 desta atividade.

TAREFA 9: Calcule a velocidade média do objeto considerando o intervalo de tempo de 3,01 a 3 segundos.

$$\text{Neste caso, temos que: } \begin{cases} t = 3s \\ \Delta t = t_f - t_0 = 0,01 \end{cases}$$

Assim:

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(3 + 0,01) - h(3)}{0,01}$$

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(3,01) - h(3)}{0,01}$$

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{47,8197 - 48}{0,01}$$

$$V_{\text{média}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-0,1803}{0,01}$$

$$V_{média} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = -18,03 \text{ m/s}$$

Como podemos observar, nas tarefas realizadas nesta atividade – e constatado na TAREFA 12 – quando a variação de tempo Δt vai se aproximando de zero, a velocidade média vai se aproximando de -18 m/s .

Quando o intervalo de tempo é muito pequeno, ou seja, à medida que vai se aproximando de zero, já não temos mais a percepção de dois instantes (t_f e t_0). Queremos dizer que o intervalo de tempo pode ser desprezado, sendo assim, temos a velocidade naquele momento, ou seja, naquele instante! A velocidade instantânea será dada pelo limite a seguir:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

IMPORTANTE! Neste momento o professor deve solicitar aos grupos que encontrem a velocidade instantânea na atividade proposta! A ideia é que os alunos possam calcular o limite a seguir:

Sabe-se que : $h(t) = -3t^2 + 75$

Deste modo,

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-3(t + \Delta t)^2 + 75 - (-3t^2 + 75)}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-3(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) + 75 + 3t^2 - 75}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-3t^2 - 6t\Delta t - 3\Delta t^2 + 75 + 3t^2 - 75}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-6t\Delta t - 3\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-3\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -3(2t + \Delta t)$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -6t + \Delta t = -6t + 0$$

$$\boxed{V(t) = -6t}$$

Dentro deste desenvolvimento, legitimamos a velocidade instantânea recorrendo a TAREFA 4.

TAREFA 4: Seria possível encontrar/estimar a velocidade do objeto no instante $t = 3s$?

Sabe-se que a velocidade em função do tempo é dada por $V(t) = -6t$.

Assim:

$$V(t) = -6t$$

$$V(3) = -6(3)$$

$$\boxed{V(3) = -18m/s}$$

Esperamos que ao término desta atividade os alunos tenham entendido a diferença entre velocidade média e velocidade instantânea, bem como, compreender a importância e aplicabilidade no estudo de limites. Foi, a partir dele, que foi possível encontrar a velocidade instantânea.

Quadro 3: Atividade 02

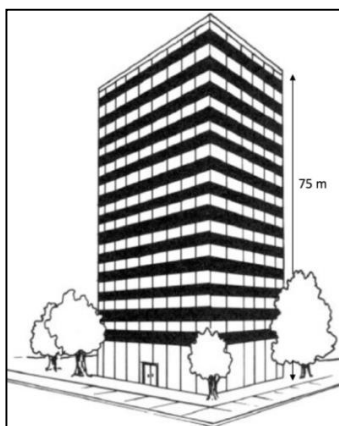
Atividade 2
Trabalho a ser realizado em grupo: (Sugestão: Máximo de 4 alunos por grupo)
Objetivo: Explorar a situação dada, do ponto de vista geométrico. Para isso, utilizaremos o aplicativo GEOGEBRA, já instalado nos <i>Smartphones</i> dos alunos. Nesta atividade, espera-se que o aluno estabeleça relações entre retas secantes e tangentes a uma curva. Observação: Muitos estudantes universitários possuem <i>Smartphones</i>, isso não será um empecilho para o desenvolvimento da atividade. Além disso, o trabalho será desenvolvido em grupo. Desta forma, o professor pode organizar os grupos de modo que o número de <i>Smartphones</i> com o aplicativo instalado seja distribuído de modo homogêneo.
Material: Smartphone, App GEOGEBRA, papel e lápis

Fonte: Elaborado pelos autores

Retomaremos a atividade anterior, mas, desta vez, com as atenções voltadas para o tratamento geométrico.

Um objeto é solto do topo de um prédio a 75 m de altura. Sabe-se que a altura h (em metros) do objeto em relação ao solo é dada em função do tempo t (em segundos) pela função:

$$\boxed{h(t) = -3t^2 + 75}$$

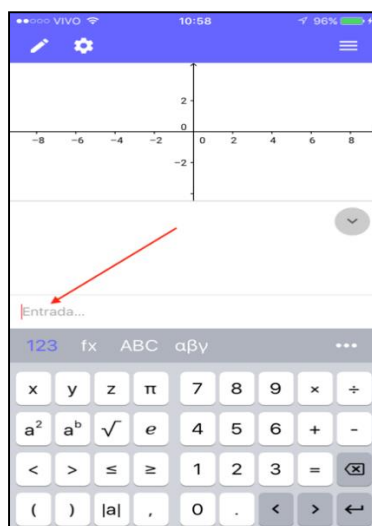
Figura 4 – Ilustração da Atividade 02

Fonte: <http://static.hsw.com.br/gif/how-to-draw-buildings-49.jpg>(adaptada)

IMPORTANTE! As TAREFAS de 1 a 3 devem ser guiadas pelo professor. Partimos da premissa que os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com o aplicativo Geogebra.

TAREFA 1: Construa o gráfico da função $h(t) = -3t^2 + 75$ utilizando o *Aplicativo Geogebra*.

Solicitar aos alunos que abram o aplicativo e, em seguida, digitar a função $y = -3x^2 + 75$ no campo de entrada indicado na figura 5. Para isso, basta realizar os comandos mostrados na figura 6.

Figura 5 – Campo de entrada

Fonte: Elaborado pelos autore

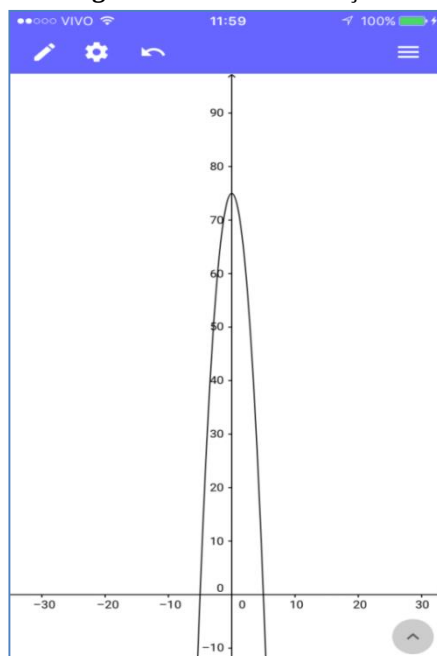
Entrar com o comando a seguir:

Figura 6– Comandos

Fonte: Elaborado pelos autores

IMPORTANTE! Pedir aos alunos que explorem o gráfico construído clicando na janela onde o mesmo se encontra, como mostrado na figura 7.

Figura 7 – Gráfico da função



Fonte: Elaborado pelos autores

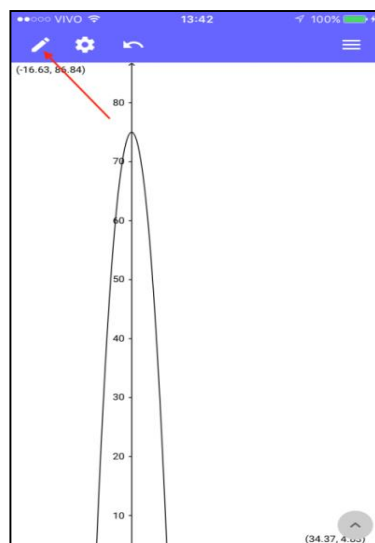
TAREFA 2: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto B, de abscissa $x = 5$. Traçar uma reta que passa por esses pontos, em seguida, registrar a equação da mesma.

1º passo: Clicar no ícone



indicado na figura 8.

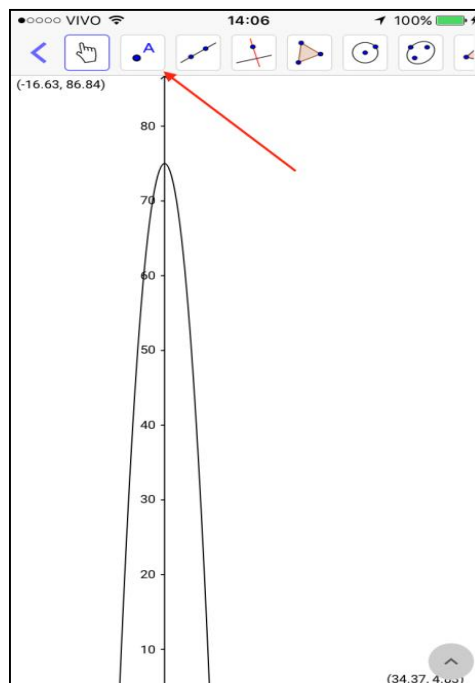
Figura 8 – Comando 1, TAREFA 2



Fonte: Elaborado pelos autores

2º passo: Clicar no ícone  indicado na figura 9.

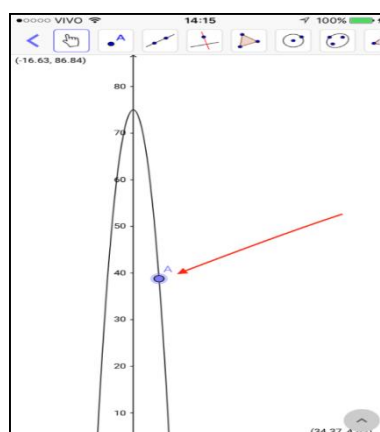
Figura 9 – Comando 2, TAREFA 2



Fonte: Elaborado pelos autores

3º passo: Clicar em cima da parábola criando, dessa forma, o ponto A que, por sua vez, pertencerá a função $y = -3x^2 + 75$

Figura 10 – Comando 3, TAREFA 2



Fonte: Elaborado pelos autores

IMPORTANTE! Solicitar ao aluno para explorar a situação acima deslocando o ponto sob a curva.

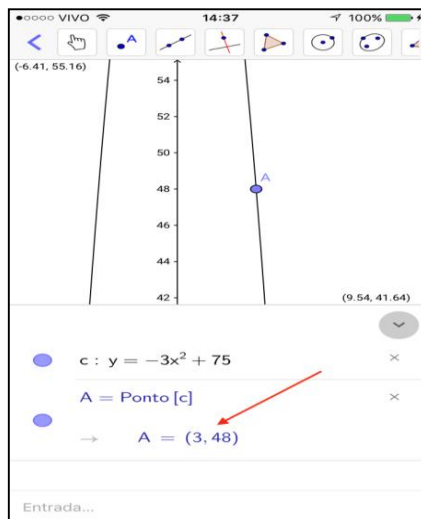
A ideia é deslocar o ponto sob a curva até obter o ponto A de abscissa $x = 3$

Existe a opção de criar o ponto **A** editando o ponto – para isso, basta clicar no ponto e inserir as coordenadas do par ordenado. Observe:

Para $x = 3$, temos $y = -3x^2 + 75 = y = -3(9) + 75 = 48$.

Obtendo, assim, o ponto A (3, 48).

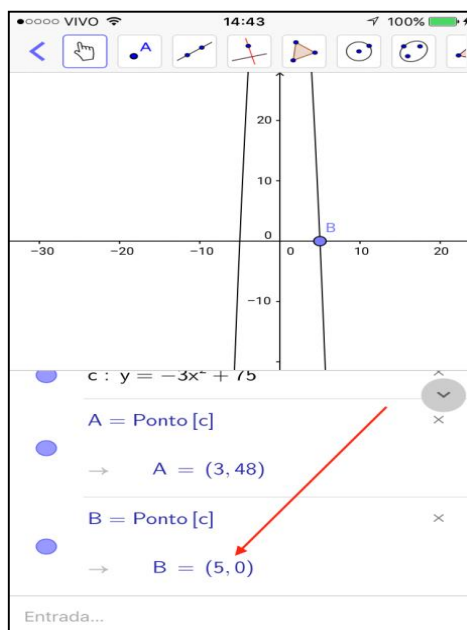
Figura 11 – Comando 4, TAREFA 2



Fonte: Elaborado pelos autores

4º passo: Criar o ponto B, de abscissa $x = 5$, para isso, utilizar os mesmos procedimentos utilizados na criação do ponto A.

Figura 12– Comando 5, TAREFA 2

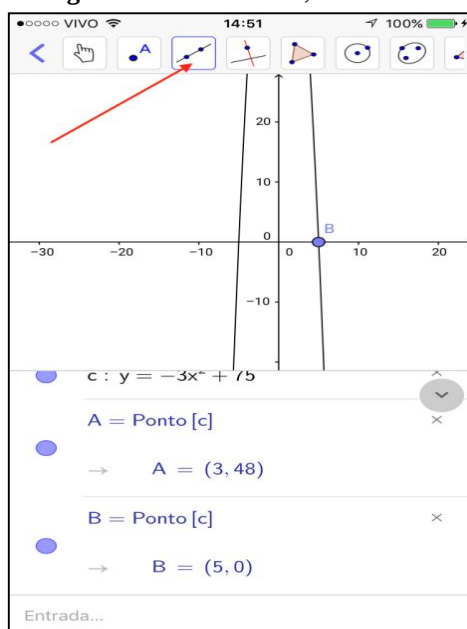


Fonte: Elaborado pelos autores

5º passo: Traçar uma reta passando pelos pontos A e B, para isso, iremos clicar no ícone mostrado na figura 13.



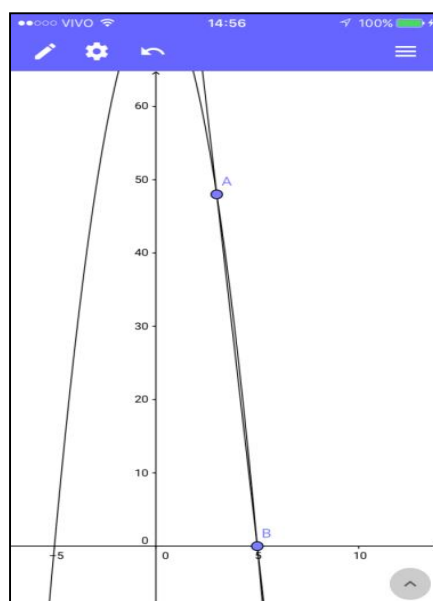
Figura 13 – Comando 6, TAREFA 2



Fonte: Elaborado pelos autores

Clica-se no Ponto A, em seguida, no Ponto B, traçando-se a reta que passa por esses pontos, conforme mostrado na figura 14.

Figura 14 – Comando 7, TAREFA 2



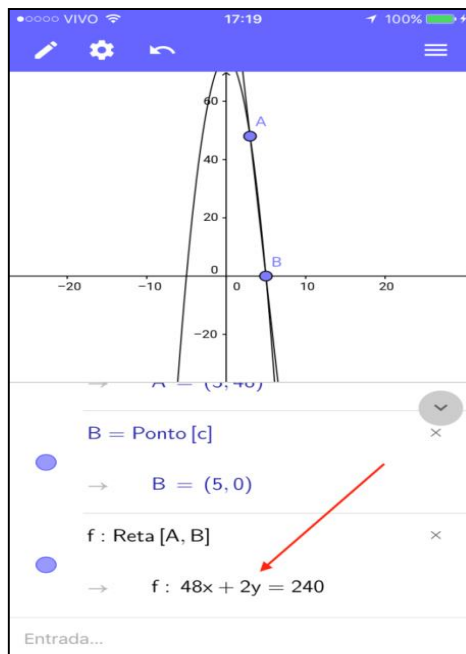
Fonte: Elaborado pelos autores

O *Geogebra* nos retorna a equação da reta que passa por esses pontos.

Para isso, basta clicar no ícone



Figura 15 – Comando 8, TAREFA 2



Fonte: Elaborado pelos autores

A equação geral da reta que passa por A e B é dada por $48x + 2y = 240$, podendo ser escrita em sua forma reduzida, para isso, basta isolarmos o y. Encontrando a seguinte equação:

$$48x + 2y = 240$$

$$2y = -48x + 240$$

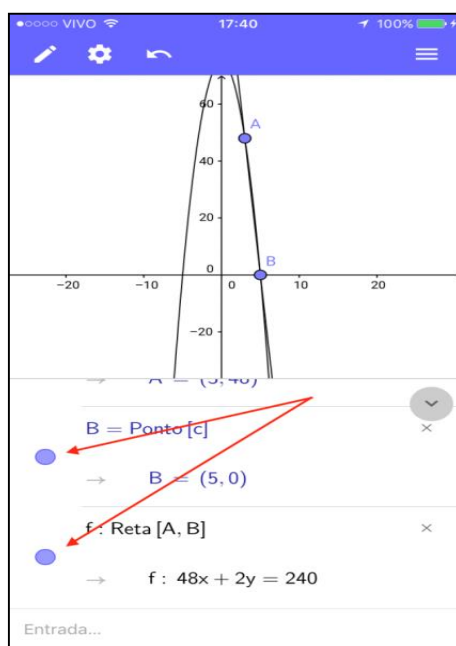
$$\boxed{y = -24x + 120}$$

Como a reta toca a função em dois pontos distintos, dizemos que esta reta é **secante** à parábola, ou seja, a reta é secante à função.

TAREFA 3: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e, o ponto C, de abscissa $x = 4$. Traçar uma reta que passa por esses pontos, em seguida, registrar a equação da mesma.

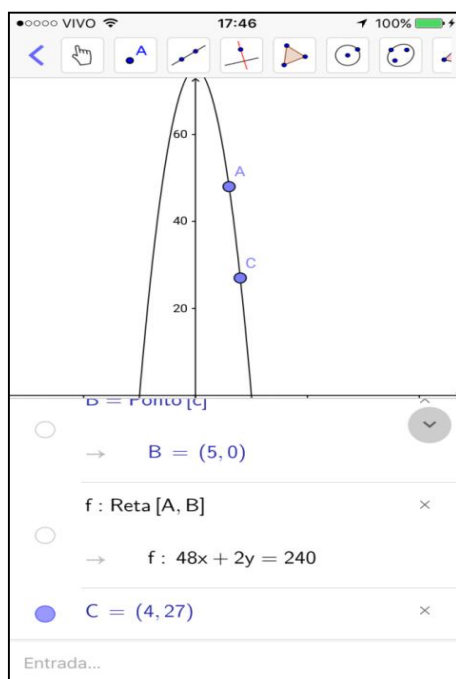
O ponto A já foi criado, desta forma, precisamos criar apenas o ponto C.

Para trabalharmos em um ambiente com menos elementos, iremos ocultar o ponto B e a reta $\overline{AB}$; para isso, basta clicar no círculo em frente ao ponto B e a reta $\overline{AB}$ (figura 16).

Figura 16 – Comando 1, TAREFA 3

Fonte: Elaborado pelos autores

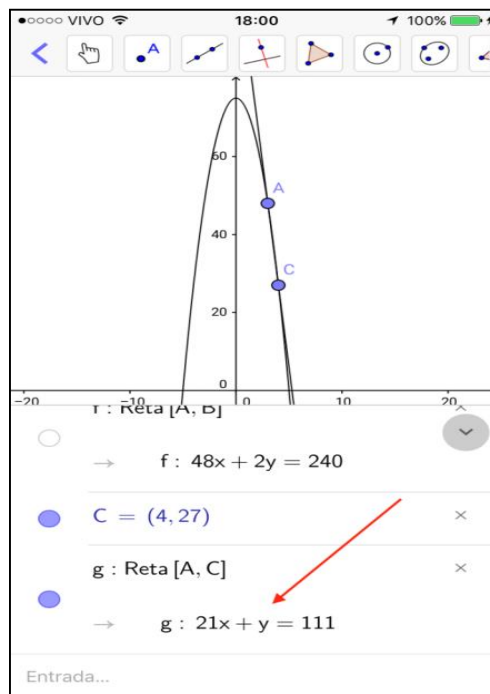
Agora, criaremos o ponto C, de abscissa $x = 4$, da mesma maneira que fizemos na tarefa anterior.

Figura 17 – Comando 2, TAREFA 3

Fonte: Elaborado pelos autores

Em seguida, criaremos a reta $\overline{AC}$, para isso, basta clicar no ícone , do mesmo modo como foi feito para reta $\overline{AB}$ no tarefa anterior (figura 18).

Figura 18 – Comando 3, TAREFA 3



Fonte: Elaborado pelos autores

A equação geral da reta que passa por A e C é dada por $21x + y = 111$, podendo ser escrita em sua forma reduzida.

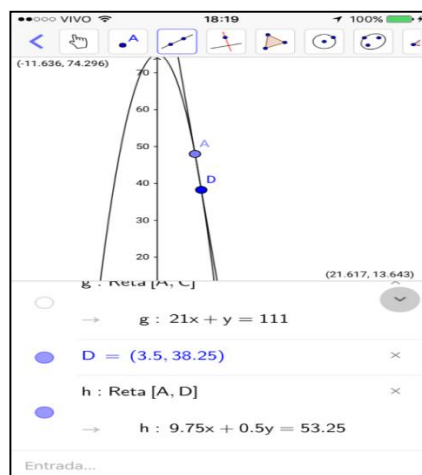
$$21x + y = 111$$

$$\boxed{y = -21x + 111}$$

A reta $\overline{AC}$ é **secante** é secante à função.

ATENÇÃO! Os exercícios 4, 5 e 6 serão propostos para os grupos realizarem sem o apoio do professor! O professor deverá intervir apenas quando solicitado.

TAREFA 4: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto D, de abscissa $x = 3,5$. Traçar uma reta que passa por esses pontos, em seguida, registrar a equação da mesma. Espera-se que os grupos cheguem no gráfico representado na figura 19.

Figura 19 – Resultado esperado do TAREFA 4

Fonte: Elaborado pelos autores

A equação geral da reta que passa por A e D é dada por $9,75x + 0,5y = 53,25$, podendo ser escrita em sua forma reduzida.

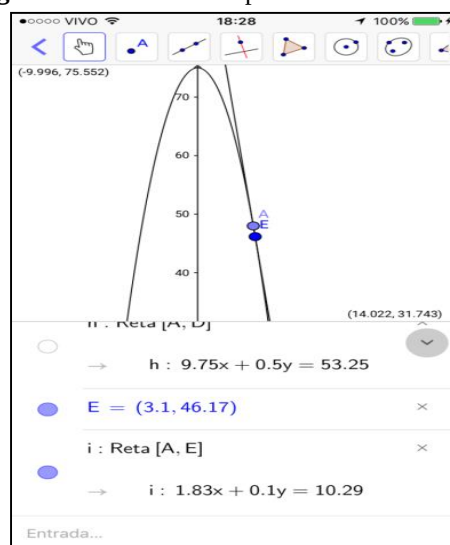
$$9,75x + 0,5y = 53,25$$

$$y = -19,5x + 106,5$$

A reta $\overline{AD}$ é **secante** à função.

TAREFA 5: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto E, de abscissa $x = 3,1$. Traçar uma reta que passa por esses pontos, em seguida, registrar a equação da mesma.

Espera-se que os grupos cheguem na seguinte resposta (figura 20):

Figura 20 – Resultado esperado do TAREFA 05

Fonte: Elaborado pelos autores

A equação geral da reta que passa por A e E é dada por $1,83x + 0,1y = 10,29$ podendo ser escrita em sua forma reduzida.

$$1,83x + 0,1y = 10,29$$

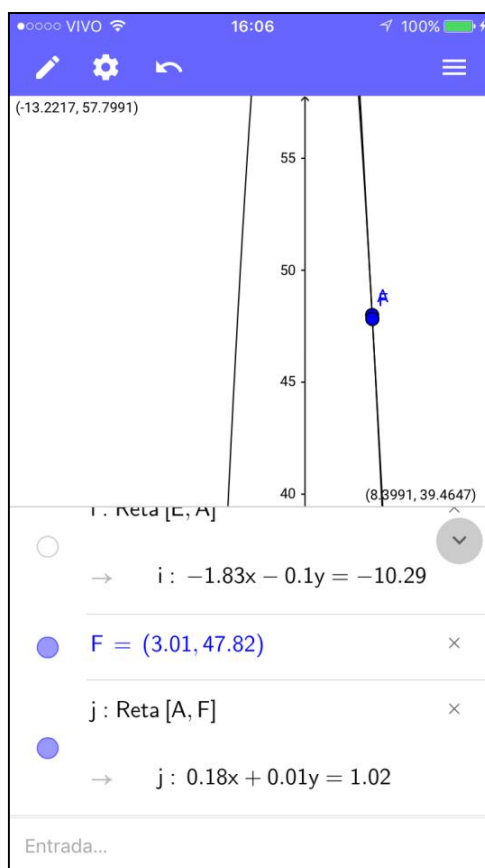
$$\boxed{y = -18,3x + 102,9}$$

A reta $\overline{AE}$ é **secante** à função.

TAREFA 6: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$ e o ponto F de abscissa $x = 3,01$. Traçar uma reta que passa por esses pontos, em seguida, registrar a equação da mesma.

Espera-se que os grupos cheguem na seguinte resposta (figura 21):

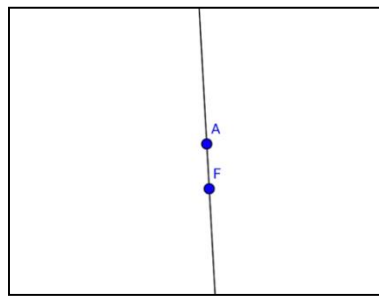
Figura 21 – Resultado esperado do TAREFA 06



Fonte: Elaborado pelos autores

Neste momento, é importante a intervenção do professor solicitando aos alunos que ampliem a imagem para comprovar visualmente que se trata de uma reta secante. O Aplicativo permite esta aproximação (figura 22).

Figura 22 – Zoom do aplicativo



Fonte: Elaborado pelos autores

A equação geral da reta que passa por A e F é dada por $0,18x + 0,01y = 1,02$ podendo ser escrita em sua forma reduzida, para isso, basta isolar o y.

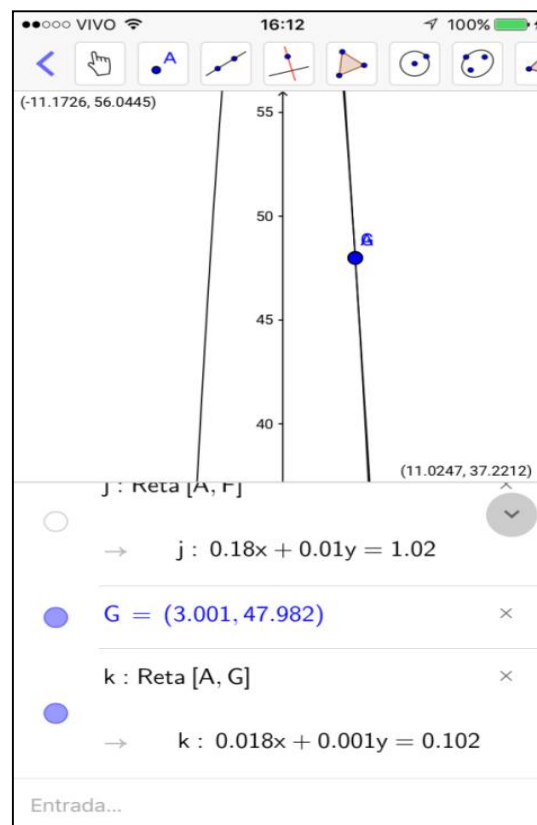
$$0,18x + 0,01y = 1,02$$

$$y = -18x + 102$$

A reta $\overline{AF}$ é **secante** à função, mesmo que, visualmente seja imperceptível

TAREFA 7: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$ e o ponto G de abscissa $x = 3,001$. Traçar uma reta que passa por esses pontos, em seguida, registrar a equação da mesma.

Figura 23 – Resultado esperado da TAREFA 7



Fonte: Elaborado pelos autores

A equação geral da reta que passa por A e G é dada por

$$0,018x + 0,001y = 0,102$$

podendo ser escrita em sua forma reduzida, para isso, basta isolar o y.

$$0,018x + 0,001y = 0,102$$

$$\boxed{y = -18x + 102}$$

TAREFA 8: O que está acontecendo com a reta secante à curva quando a diferença entre as abscissas vai se aproximando de zero?

OBS: É provável que os alunos questionem: porquê a equação da reta $\overline{AG}$ é a mesma da reta $\overline{AF}$? Isso se deve a questões de arredondamentos! Neste caso, foram utilizadas 3 casas decimais¹⁵.

Durante esta TAREFA espera-se que os grupos percebam que, à medida que a diferença entre as abscissas dos pontos vai se aproximando de zero, a reta secante vai se aproximando da reta **tangente** ao ponto A, justificando que a equação da reta $\overline{AG}$ é muito próxima da reta $\overline{AF}$.

Momento propício para se introduzir o conceito de reta tangente:

A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa “tocando”.

Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca esta curva. Uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato.

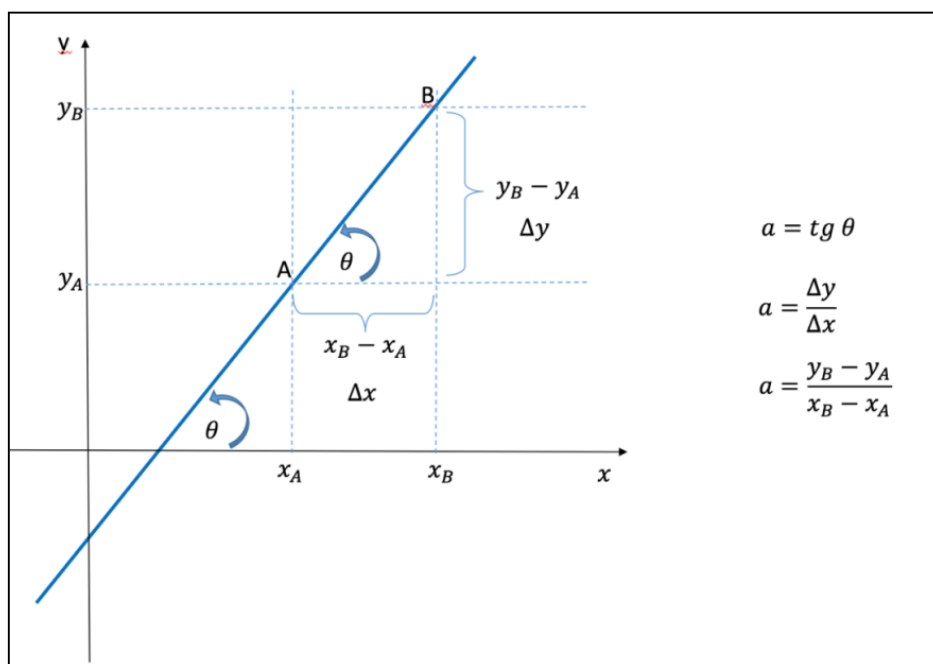
(STEWART, 2016, p. 66).

Sabe-se que a equação reduzida de uma reta é dada por $y = ax + b$, onde a é o coeficiente angular da mesma. O coeficiente angular de uma reta está relacionado com a sua inclinação. É obtido calculando-se a tangente do ângulo formado pela reta e o eixo x no sentido anti-horário. Seria inte-

¹⁵O aplicativo pode ser configurado para arredondamentos, para isto, basta acessar: configurações/arredondamento/selecionar quantas casas decimais desejar .

ressante mostrar, graficamente e algebricamente, a inclinação de uma reta, instigando os grupos a estabelecerem relações entre a atividade anterior e o coeficiente angular mostrado na figura 24.

Figura 24 – Representação geométrica da inclinação de uma reta



Fonte: Elaborado pelos autores

TAREFA 9: Seria possível estabelecer aqui alguma relação com algum assunto trabalhados nas aulas anteriores?

Espera-se, com esta pergunta, que os alunos percebam novamente a ideia de limite.

O coeficiente angular da reta secante à função $f(x)$ passando pelo ponto A, de abscissa $x = x_A$, e pelo ponto B, de abscissa $x = x_B$, será dado por:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$a = \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

Para que se verifique a relação acima, recorreremos a tarefa 3 da atividade 2.

TAREFA 3: Determinar o Ponto A, de abscissa $x = 3$, e o ponto C, de abscissa $x = 4$. Em seguida, traçar uma reta que passa por esses pontos.

O coeficiente angular da reta que passa por esses pontos será dado por

$$a = \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

Neste exercício temos que: $\begin{cases} f(x) = -3x^2 + 75 \\ \Delta x = x_C - x_A = 4 - 3 = 1 \end{cases}$

Logo:

$$a = \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

$$a = \frac{f(3 + 1) - f(3)}{1}$$

$$a = \frac{f(4) - f(3)}{1}$$

$$a = \frac{[-3(4)^2 + 75] - [-3(3)^2 + 75]}{1}$$

$$a = \frac{27 - 48}{1}$$

$$\boxed{a = -21}$$

Anteriormente, vimos que:

Figura 25 – Print da Tarefa 3 da atividade 2

A equação geral da reta que passa por A e C é dada por $21x + y = 111$, podendo ser escrita em sua forma reduzida, para isso, basta isolarmos o y.

$$21x + y = 111$$

$$\boxed{y = -21x + 111}$$

A reta $\overline{AC}$ é **secante** é secante a função.

|

Fonte: Elaborado pelos autores

Assim como feito para a velocidade instantânea, podemos generalizar, utilizando a ideia de Limites.

À medida que Δx vai se aproximando a zero, o coeficiente angular da reta, que é secante à curva, vai se aproximando do coeficiente da reta que **tangencia** o gráfico da função naquele ponto.

O coeficiente angular da reta que **tangencia** o gráfico da função $f(x)$, passando pelo ponto A, de abscissa $x = x_A$ será dado por:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

Legitimaremos a relação estabelecida acima finalizando esta atividade:

Descubra o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico da função $f(x) = -3x^2 + 75$ no ponto A, de abscissa $x = 3$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3(x_A + \Delta x)^2 + 75 - [-3(x_A)^2 + 75]}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3(x_A^2 + 2x_A\Delta x + \Delta x^2) + 75 - [-3(x_A)^2 + 75]}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3x_A^2 - 6x_A\Delta x - 3\Delta x^2 + 75 + 3(x_A)^2 - 75}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6x_A\Delta x - 3\Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3\Delta x(2x_A - \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -3(2x_A - \Delta x) = -3(2x_A - 0)$$

$$= -6x_A$$

O coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico da função $f(x) = -3x^2 + 75$ no ponto A, de abscissa $x = 3$, é dado por $-6x_A$, então:

$$-6x_A = -6(3) = -18$$

IMPORTANTE!

Até agora, não foi mencionada a palavra *derivada*, contudo, espera-se que os alunos já estejam familiarizados com o limite abaixo encontrado nas duas atividades:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Este é um momento oportuno para destacarmos tal limite!

Recorremos, então, a Stewart (2016), para a **formalização** do conceito de derivada.

Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x . Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2 , então a variação em x (também chamada de **incremento** de x) será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

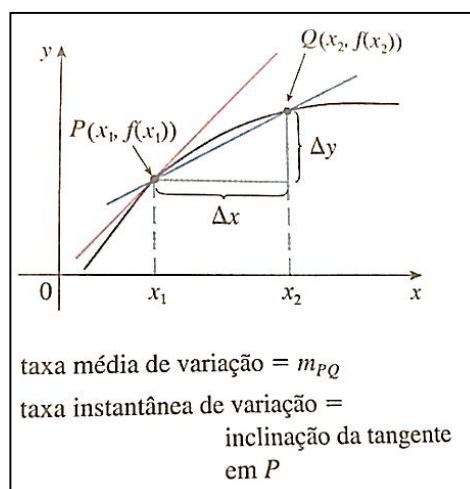
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado *taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$* e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ (figura 26)

Figura 26 – Ilustração geométrica da derivada



Fonte: Stewart(2014)

Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, teremos Δx tendendo a 0.

O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de y em relação a x** em $x = x_1$, a qual (como no caso da velocidade) é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{Taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconhecemos esse limite como a **derivada** $f'(x_1)$. (STEWART, 2016, p.125).

Quadro 3: Atividade 3

Atividade 3
Uso de vídeos do <i>Youtube</i> , para trabalhar a História da Matemática, no que diz respeito a origem do Cálculo Diferencial e Integral.
Objetivo: Explorar a situação dada, do ponto de vista histórico e atual. Para isso, utilizaremos a rede social <i>Youtube</i> . Nesta atividade, espera-se que o aluno possa fazer conexões entre o passado, o presente e o futuro.
Material: Recurso multimídia (com áudio), acesso a internet.

Fonte: Elaborado pelos autores

Para esta atividade, foram escolhidos 3 vídeos, contudo, existem muitos outros que podem ser utilizados para este fim. Dentre os vários vídeos pesquisados, elegemos os que mais se ajustaram à nossa proposta de trabalho.

– Vídeo1: A História do Cálculo

Figura 27 – Vídeo sobre a História do Cálculo



Fonte: Youtube

Link de acesso: <https://www.youtube.com/watch?v=6HI47rcOiAE>

O vídeo, do qual uma cena está representada na figura 27, tem duração aproximada de 25 minutos, trata das ideias que desencadearam o surgimento do Cálculo, bem como, os personagens que contribuíram para o seu desenvolvimento.

– Vídeo 2: Newton x Leibniz

Figura 28 – Vídeo de Newton x Leibniz



Fonte: Youtube

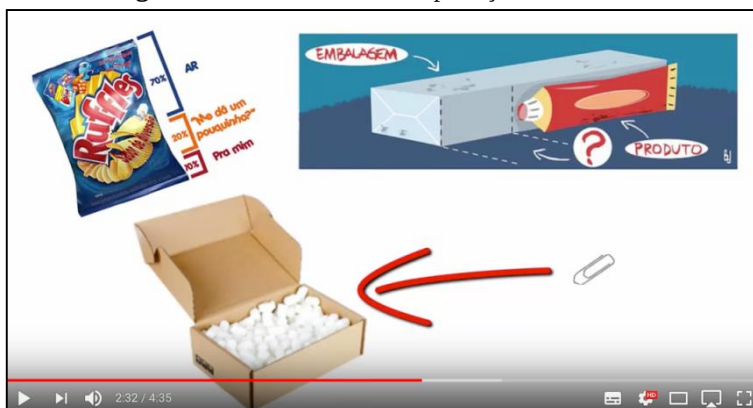
Link de acesso: <https://www.youtube.com/watch?v=fOIPCSpCNVA>

O vídeo *Newton x Leibniz* tem duração aproximada de 5 minutos, é uma animação que trata de forma bastante divertida e descontraída as “desavenças” entre Newton e Leibniz pelo reconhecimento da invenção do Cálculo.

Este vídeo, em especial, mostra a importância da visualização como ferramenta no ensino, o áudio está em outro idioma (espanhol), porém, mesmo assim, a mensagem passada pelo vídeo se faz entender.

– Vídeo 3: O Cálculo Diferencial e Integral e suas Aplicações.

Figura 29 – Vídeo sobre as Aplicações do Cálculo



Fonte: Youtube

Link de acesso: <https://youtu.be/1wcAzH4H1Bw>

O vídeo, do qual uma cena está representada na figura 29, tem duração aproximada de 4 minutos, foi produzido por alunos de Engenharia Civil da UNEMAT – Universidade do Estado do Mato Gros-

so. Neste vídeo, os alunos fazem uma breve apresentação da História do Cálculo e, em seguida, algumas aplicações do Cálculo que são utilizadas atualmente. Nossa intenção, quanto ao uso deste vídeo, é trazer uma linguagem mais próxima dos estudantes.

A ideia de pedir aos alunos para apresentar um trabalho por meio de uma produção de vídeo, como mostrado no vídeo 3, é bastante interessante. Não pretendemos, com esse produto, trabalhar com a “criação” de vídeos como instrumento de aprendizagem, queremos apenas chamar a atenção de que isso pode ser possível, caso o professor tenha interesse em desenvolver esse tipo de atividade.

Finalizando, gostaríamos de deixar sinalizadas outras sugestões de vídeo que podem ser exploradas nas aulas de Cálculo, de modo a atender as expectativas do professor.

Sugestões de vídeos para serem trabalhados em sala de aula

➤ História do Cálculo

<https://www.youtube.com/watch?v=q9ywLsY36dg>
<https://www.youtube.com/watch?v=7wX5mya9wWw>
<https://www.youtube.com/watch?v=yHzQt21WlXo&t=15s>

➤ Sobre Newton

<https://www.youtube.com/watch?v=JOfs6K4sFac>

➤ Sobre Leibniz

<https://youtu.be/-Gk3VvVefVo>

➤ Aplicações do Cálculo

https://www.youtube.com/watch?v=YWnKt6V_63Q
<https://www.youtube.com/watch?v=hZHRwb9GE74>

Caro colega professor, esperamos que este material tenha contribuído positivamente em sua prática docente. Sua elaboração sempre levou em consideração uma melhor compreensão e um ensino-aprendizagem mais efetivo do conceito de derivada.

REFERÊNCIAS

- BARON, Margareth E. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo. Matemática grega. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.
- BORBA, Marcelo Carvalho. Educação Ma temática à distância online: balanço e perspectivas. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011. **Anais...** Recife: Brascolor Gráfica e Editora LTDA, 2011. p. 1-9.
- BOYER, Carl B. **Cálculo** - tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Tradução de Hygino H. Domingues São Paulo: Atual Editora Ltda, 1995. v. 6.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2.ed. São Paulo: Edgard-Blücher, 1996.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- FROTA, Maria Clara Resende. Experiência matemática e Investigação Matemática. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto. **Actas...** Lisboa: APM. 2005.
- FROTA, Maria Clara Resende. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em Cálculo. In: FROTA Maria Clara Resende; BIANCHINI, Barbára Lutaif; CARVALHO, Ana Márcia F. Tucci. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: Papirus, 2013, p. 61-88.
- LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. O uso do computador no ensino de matemática na graduação. In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas (orgs). **Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 68-88.
- MAOR, Eli. **e**: a história de um número. Tradução de Jorge Calife. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- MORAN, José Manuel. O vídeo na sala de aula. **Revista Comunicação e Educação**, n.2, p. 27-35, jan. /abr.1995.
- PONTE, João Pedro. **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat, Lisboa: APM, 2003.
- PONTE, João Pedro; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
- SOUZA, Robson Pequeno de; SERAFIM, Maria Lúcia. Multimídia na Educação: o vídeo digital integrado ao contexto escolar. In: SOUZA, Robson Pequeno de; MOITA, Filomena; CARVALHO, Ana Beatriz Gomes. **Tecnologias Digitais na Educação**. Campina Grande: EDUEPB, 2011, p. 19-50.
- STEWART, James. **Cálculo**. Tradução de EZ2 Translate. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v.1.
- STEWART, James. **Cálculo**. Tradução de Helena Maria Ávila de Castro. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v.1.
- ZUIN, Elenice de Souza. Cálculo: uma abordagem histórica. In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas (orgs). **Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 13-38.