PONTIFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

DESAFIOS NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO ALGORITMO DA DIVISÃO: um trabalho com alunos do 7º ano de uma escola da rede municipal de ensino de Belo Horizonte

Fernanda da Costa Diniz

Belo Horizonte
2015

Fernanda da Costa Diniz

DESAFIOS NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO ALGORITMO DA DIVISÃO: um trabalho com alunos do 7º ano de uma escola da rede municipal de ensino de Belo Horizonte

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª Drª. Eliane Scheid Gazire

Belo Horizonte
2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Diniz, Fernanda da Costa
D585d Desafios no processo ensino-aprendizagem do algoritmo da divisão: um trabalho com alunos do 7° ano de uma escola da rede municipal de ensino de Belo Horizonte / Fernanda da Costa Diniz. Belo Horizonte, 2015.
271 f.: il.

Orientadora: Eliane Scheid Gazire
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Algoritmos. 3. Problemas, questões, exercícios. 4. Ensino-aprendizagem. 5. Prática de ensino. I. Gazire, Eliane Scheid. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 51:373

Fernanda da Costa Diniz

DESAFIOS NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO ALGORITMO DA DIVISÃO: um trabalho com alunos do 7º ano de uma escola da rede municipal de ensino de Belo Horizonte

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

____

Profª Drª Eliane Scheid Gazire (Orientadora) – PUC Minas
Doutorado em Educação (UNICAMP)

____

Profª. Drª. Maria do Carmo Vila (UFOP)
Doutorado em Educação (Université Laval/Canadá)

____

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda (PUC Minas)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial (PUC Minas)

Belo Horizonte, 07 de agosto de 2015.

A Deus, por me sustentar nos momentos mais difíceis da minha caminhada.

Ao meu pai, José Vitorino Diniz, por orientar o meu caminhar, feito de lutas e incertezas, mas também de sonhos e muitas esperanças.

Aos meus filhos, Gabriel e Maria Clara (*in memoriam*), anjos que me ensinaram o verdadeiro sentido do amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho:

- A Deus, pela realização deste sonho;

- Aos meus pais, por estarem sempre ao meu lado e torcendo pelo meu sucesso; sem vocês nada seria possível;

- Ao meu amor Diego, pelo companheirismo nos momentos difíceis durante essa trajetória;

- Às minha irmãs, Cristina e Luciana, pelo apoio sempre;

- A todos os colegas que participaram da minha vida acadêmica e contribuíram para a minha formação profissional;

- À professora Drª Eliane Scheid Gazire, pela paciência, preocupação, apoio e carinho comigo, durante esses anos de pesquisa;

- A todos os professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, por todo conhecimento transmitido;

- Aos alunos que participaram da pesquisa, sempre com boa vontade e espírito cooperativo, contribuíram muito para a realização deste trabalho;

- À amiga Gislaine Diniz, companheira de profissão, que sempre se dispôs a ler e me ceder minutos de seu tempo para colaborar com meu trabalho.

“A persistência é o menor caminho do êxito”

Charles Chaplin

RESUMO

Esta pesquisa procura investigar as dificuldades que os alunos do 7° ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de Belo Horizonte têm no algoritmo da divisão, tendo a intenção de contribuir para uma aprendizagem significativa desse algoritmo a partir da construção de situações-problemas envolvendo conceitos relacionados à divisão, buscando uma ressignificação destes pelos alunos. Para tanto, inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica buscando entender a construção do conceito de número, tanto historicamente como pela criança, e o seu significado e das operações, compreendendo a importância desses conceitos e ideias na construção dos processos algorítmicos. Essas leituras iniciais deram embasamento para a elaboração de testes diagnósticos, a fim de identificar e categorizar os erros cometidos por aqueles alunos. Outros procedimentos de coleta de dados utilizados, no decorrer desta pesquisa foram o grupo focal, conversas individuais com os alunos sobre a divisão e a aplicação de um questionário descritivo. O produto desta pesquisa foi estruturado em um caderno, voltado àquele público e organizado em unidades que abordam conceitos que são a base para a construção e o entendimento do processo algorítmico da divisão. Para tanto, as atividades foram elaboradas com o intuito de permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos anteriores e amplie-os, fazendo com que questionem e elaborem novas situações. Conclui-se, a partir deste trabalho, que o ensino da divisão e do seu algoritmo para alunos do Ensino Fundamental pode ser fortalecido e favorecido, se houver um material de apoio ao professor que o ajude a trabalhar as dificuldades elencadas na pesquisa, motivando e contribuindo no processo ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Processos algorítmicos. Algoritmo da divisão. Erros na divisão. Situações-problemas.

ABSTRACT

This research investigates the difficulties that students of the 7th grade of elementary school of a public school of Belo Horizonte have the division algorithm, intending to contribute to a meaningful learning of this algorithm from the construction of situations-problems involving concepts related to the division, seeking a redefinition of these pupils. Therefore, a literature review was initially carried out in order to understand the construction of the concept of number, both historically and for the child, and their meaning and operations, understanding the importance of these concepts and ideas in the construction of algorithmic processes. These initial readings gave basis for the development of diagnostic tests in order to identify and categorize the mistakes made by those students. Other data collection procedures used in the course of this research were the focus group, individual conversations with students about the division and applying a descriptive questionnaire. The product of this research was structured in a notebook, returned to that public and organized into units that address concepts that are the basis for the construction and understanding of the algorithmic process of division. Therefore, the activities have been prepared in order to allow students to use their prior knowledge and expand them, causing to question and develop new situations. It follows from this work, the school division and its algorithm for elementary school students can be strengthened and encouraged if there is a collateral to the teacher to help you work out the difficulties listed in the survey, motivating and contributing to the teaching-learning process.

Keywords: Algorithmic processes. Division algorithm. Errors in the division. Situations-problems.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina que desafia discentes e docentes, seja pela dificuldade em compreender sua teoria e aplicá-la no cotidiano; seja pela busca por métodos que auxiliem no processo ensino-aprendizagem, mas foi a disciplina que despertou meu interesse, pela grande afinidade, aliado ao sonho de ser professora.

Por três anos e meio, cursei licenciatura plena em Matemática acreditando que todo conhecimento adquirido na graduação seria suficiente para ensinar meus futuros alunos. Concluída essa etapa da minha formação acadêmica, em dezembro de 2004, iniciei minha especialização em cálculo na UFMG e comecei meu trabalho na docência, lecionando a disciplina de Matemática na rede estadual para turmas do Ensino Fundamental. Nessa época, fui constatando as dificuldades que os estudantes apresentavam nas aulas de Matemática e percebendo que o conhecimento adquirido na graduação não seria suficiente para ajudá-los: precisaria, então, entender o que estava acontecendo no processo ensino-aprendizagem, as lacunas existentes.

Por quatro anos estive lecionando na rede estadual, mudando para a rede municipal em abril de 2009, onde continuei ensinando em turmas do Ensino Fundamental. As experiências adquiridas nas duas redes de ensino me fizeram perceber que algo impedia que os discentes, com os quais trabalhei, resolvessem as operações corretamente usando os seus algoritmos, principalmente o da divisão.

Ao se ensinar Matemática, uma das habilidades que se espera dos estudantes nos anos finais do Ensino Fundamental, é que saibam efetuar as quatro operações básicas corretamente, usando seus respectivos algoritmos. Entretanto, minha experiência em sala de aula mostrou que muitos alunos chegam ao 7º ano sem saber realizar corretamente as operações, ou, então, as resolvem, porém, não conseguem compreender o que estão fazendo, não entendendo a lógica do processo algorítmico.

Pude perceber que os obstáculos vividos pelos discentes, ao resolverem as operações, muitas vezes os levavam a desistir, por mais que eu resolvesse vários exercícios no quadro. A frustração que eu sentia era enorme. Desejava, diante disso, elaborar uma maneira de ensinar os algoritmos das operações, especialmente o da divisão, que tivesse sentido e significado para os alunos, porém, não estava conseguindo construir essa forma de trabalho.

Os bloqueios vivenciados pelos estudantes e os desafios que enfrentei em sala de aula, ao ensinar o algoritmo da divisão, motivaram a busca pelo mestrado em ensino.

Assim, no final de 2010, prestei a seleção para o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática ofertada pela PUC Minas. A ideia era pesquisar as dificuldades dos alunos no processo algorítmico da divisão e compreender como eles o aplicam na resolução de situações-problemas.

Para tanto, ao iniciar a pesquisa, muitas questões foram levantadas, como, por exemplo: Quais os erros cometidos pelos alunos quando estão resolvendo uma divisão usando seu algoritmo? Quais os fatores que levam os discentes a cometerem tais erros? O entendimento do sistema de numeração decimal é determinante para que haja a compreensão do processo algorítmico? Como os estudantes aplicam o algoritmo da divisão quando estão resolvendo uma situação-problema? Quais estratégias o professor pode usar para amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos na construção do processo algorítmico?

Partindo dos questionamentos levantados, decidiu-se investigar quais eram as dificuldades que os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental encontravam ao resolver o algoritmo da divisão.

Refletindo sobre o objetivo geral da pesquisa surgiram objetivos específicos, sendo eles:

- Identificar como os alunos aplicam o algoritmo da divisão quando estão resolvendo situações-problemas;
- Identificar estratégias, partindo dos resultados da pesquisa, para que o professor possa amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos na construção do processo algorítmico.

Para tanto, o trabalho de pesquisa foi estruturado em seis capítulos assim distribuídos:

No primeiro capítulo, é feita uma breve introdução sobre o tema abordado na pesquisa, discorrendo sobre a experiência inicial em sala de aula e as razões que levaram a pesquisar sobre esse assunto.

No segundo capítulo, é apresentada a metodologia utilizada para a execução da pesquisa e o caminho trilhado, além dos instrumentos que foram utilizados na coleta de dados.

Já o terceiro capítulo traz a fundamentação teórica da pesquisa, as ideias da divisão, a construção dos algoritmos das operações e a teoria dos campos conceituais de Vergnaud.

No quarto capítulo, por sua vez, são descritos e analisados os resultados obtidos durante a coleta de dados.

No quinto capítulo é descrito e comentado o material didático elaborado como desdobramento da pesquisa, a fim de procurar contribuir para a construção do processo algorítmico da divisão, sendo esta uma construção carregada de sentido e significado para o aluno.

As considerações finais são postas no sexto capítulo, seguido das referências e do apêndice, onde se encontra, na íntegra, o produto deste trabalho.

2 PERCURSO DA PESQUISA

Essa pesquisa adotou uma abordagem qualitativa, permitindo a obtenção dos dados pelo contato direto do pesquisador com o seu objeto de estudo. Segundo Neves (1996, p.1), esse tipo de investigação "compreende um conjunto de diferentes técnicas interpretativas que visam a descrever e a decodificar os componentes de um sistema complexo de significados".

Durante a pesquisa, diferentes momentos ocorreram: a revisão bibliográfica, a escolha da escola, a escolha dos sujeitos da pesquisa, a coleta e a análise dos dados e a elaboração de um material didático que pudesse contribuir no processo ensino-aprendizado do algoritmo da divisão. A seguir, será descrita cada uma dessas etapas.

2.1 1º Momento: revisão bibliográfica

O primeiro passo no desenvolvimento desse trabalho foi pesquisar em Boyer (1996) e Imenes e Lelis (1999) sobre como o conceito de número surgiu historicamente e foi organizado nos diversos sistemas de numeração até o surgimento do nosso sistema decimal. Aprofundou-se sobre o sistema de numeração em Pires (2013) e Toledo e Toledo (2009), que sustentam suas propostas em uma retrospectiva histórica da construção desses conceitos.

Em seguida, pesquisou-se em Kamii (2012) sobre a natureza do número e como esse conceito é desenvolvido pela criança, proporcionando uma fundamentação da teoria de Piaget. Estudou-se também Vergnaud (2009), buscando-se entender a teoria dos campos conceituais que explica a conceitualização humana em sua aplicação no terreno do ensino e da aprendizagem de conceitos matemáticos fundamentais.

Em Mandarino (2010), Toledo e Toledo (2009) e Bigode e Gimenez (2009) estudaram-se os significados dos números e das operações e a importância da compreensão desses significados na construção dos algoritmos. Em Nunes *et al* (2009) buscou-se mais sobre as estruturas aditivas e multiplicativas, e em Saiz (2008) sobre as dificuldades de dividir e também sobre os problemas no sistema da numeração decimal.

As leituras iniciais feitas para fundamentar teoricamente a pesquisa conduziram a um aprofundamento sobre a construção dos algoritmos das operações, além de mostrar caminhos que revelam a riqueza de possibilidades no processo de aprender e ensinar Matemática e as condições didáticas necessárias para uma aprendizagem significativa.

2.2 2º Momento: a escolha da escola

A escola escolhida como campo de pesquisa está localizada em uma região da periferia de Belo Horizonte e compõe o quadro de escolas da rede municipal de ensino. A inauguração da escola deu-se em meados dos anos 70, durante a urbanização ocorrida na região.

A área total da escola é de, aproximadamente, 10 000 m², distribuídos da seguinte forma: dezessete salas de aula, dois laboratórios de informática, um laboratório de ciências, uma biblioteca, uma sala-cozinha para oficina de culinária, uma sala com dois ambientes para o Projeto de Intervenção Pedagógica, uma sala para a escola integrada, um refeitório, uma sala multiuso com computador, aparelho de data-show e DVD, duas quadras cobertas, além de salas para a secretaria escolar, para a coordenação pedagógica, direção, fotocópias e almoxarifado. Existe, ainda, um prédio separado para as crianças da Educação Infantil.

A escola possui 1288 alunos distribuídos em três turnos. No turno da manhã, são 4 turmas de Educação Infantil, 6 turmas de segundo ciclo, 9 turmas do terceiro ciclo, 1 turma do Projeto PAE / Floração e 1 turma do Entrelaçando[1]. No turno da tarde, há 4 turmas de Educação Infantil, 12 turmas de primeiro ciclo, 3 turmas do segundo ciclo e 1 turma do Entrelaçando. No turno da noite, funciona a Educação de Jovens e Adultos (EJA), sendo 9 turmas.

A escolha pela escola justifica-se pela familiaridade da pesquisadora com o ambiente, professores, gestores e alunos, já que, por cinco anos, ela lecionou na escola.

2.3 3º Momento: a escolha dos sujeitos da pesquisa

Na época da escolha dos sujeitos da pesquisa, a pesquisadora encontrava-se ensinando em turmas de 7º ano do Ensino Fundamental que apresentavam dificuldades na resolução do algoritmo da divisão, optando-se, dessa forma, em trabalhar com esses alunos.

A escola possuía quatro turmas de 7º ano (7º A, 7º B, 7º C e 7º D). Porém, como a pesquisadora lecionava em três (7º A, 7º B, 7º D), decidiu-se selecionar 30 alunos, sendo 10 de cada uma dessas três turmas. A seleção aconteceu da seguinte forma: houve uma conversa inicial com as turmas, explicou-se que seria realizada uma pesquisa e

[1] PAE/Floração e Entrelaçando são projetos da PBH para estudantes do 2º ciclo do Ensino Fundamental e jovens de 15 a 19 anos que não concluíram o Ensino Fundamental, respectivamente, que apresentam defasagem entre idade e escolaridade.

seria feita a escolha de dez alunos em cada turma. Deixou-se claro a todos que a participação na pesquisa era uma decisão do aluno e que, caso alguém não desejasse participar, poderia sentir-se à vontade para dizer não, o que, surpreendentemente, não ocorreu. Assim, após a conversa, todos estudantes se dispuseram a participar, sendo selecionados dez alunos aleatoriamente em cada turma.

O objetivo da pesquisa foi, então, explicado ao grupo selecionado. Percebeu-se grande interesse dos participantes, sendo que muitos relataram que sentiam dificuldades na divisão. Foi esclarecido a todos que os testes realizados não seriam transformados em notas para avaliá-los e que o objetivo da pesquisa era compreender as dificuldades dos alunos diante de uma divisão quando usavam o algoritmo ou quando estavam aplicando-os em situações-problemas.

Além disso, dos selecionados para os testes diagnósticos, 10 alunos foram escolhidos aleatoriamente para participar do grupo focal, sendo: 4 alunos do 7º A, 4 alunos do 7º B e 2 alunos do 7º D.

2.4 4º Momento: etapas da coleta de dados

A coleta de dados nessa pesquisa foi dividida em quatro etapas: a confecção e a aplicação dos testes diagnósticos, encontros com o grupo focal, conversas individuais com os alunos sobre a divisão e a aplicação de um questionário descritivo. Além desses procedimentos de coletas de dados, houve, ainda, a aplicação de questionários iniciais, sendo um direcionado a professores do segundo ciclo e outro para alunos do sétimo ano, que não foram os sujeitos desta pesquisa, servindo para que a pesquisadora tivesse um maior aprofundamento em relação ao tema e pudesse dar melhor direcionamento aos trabalhos no decorrer da pesquisa. Estes questionários estão descritos no capítulo 4, no subtítulo de "levantamentos iniciais". A escolha por mais de um instrumento ocorreu com a intenção de contribuir na análise dos dados. A seguir é relatada cada etapa da coleta de dados descrita anteriormente.

2.4.1 Testes Diagnósticos

Os testes diagnósticos foram elaborados segundo categorias e sua aplicação ocorreu em dois momentos, sendo realizados em dois dias consecutivos. Foi o segundo instrumento de coleta de dados utilizado, e através deles teve-se uma visão geral do problema a ser pesquisado. Neles foram inseridas quinze divisões e seis situações-problemas.

O uso de provas ou testes pode ser considerado como uma pesquisa “Histórico-Bibliográfica”, já que ocorre sobre documentos escritos. Fiorentini e Lorenzato (2009, p.103) relatam que “essa pode ser uma técnica útil de investigação se o pesquisador conseguir construir categorias de análise, constituídas pelos itens principais, mais frequentes e diferentes que surgem nos dados. As categorias devem refletir os propósitos da pesquisa”.

As divisões, então, foram apresentadas segundo graduações de dificuldades. Essa ideia para a elaboração do teste, de acordo com as graduações, ocorreu após análise da publicação da Amae Educando (CASTILHO, 1970), uma revista do segmento educacional que, em meados dos anos 70, publicou cadernos onde, de maneira minuciosa, relacionou as dificuldades encontradas em cada uma das quatro operações básicas. Nesse sentido, de acordo com Castilho (1970):

> Cada um dos processos fundamentais – adição, subtração, multiplicação e divisão – possui uma escala de dificuldades. São degraus a serem transpostos, são obstáculos a serem vencidos. E o trabalho deverá ser feito cautelosamente, cada passo por sua vez, cada dificuldade preparando para a seguinte. (CASTILHO, 1970, p.43).

Assim, o Quadro 1 relaciona cada divisão apresentada no primeiro teste, com a sua descrição.

QUADRO 1 – Descrição das divisões no primeiro teste diagnóstico (Continua)

OPERAÇÃO	DESCRIÇÃO
84: 4	Divisão, sem reagrupamento e com resto zero, de um número representado por 2 ou 3 algarismos, por outro representado por um só algarismo.
485: 5	O primeiro dividendo parcial é formado de dois algarismos.
68: 3	O primeiro dividendo é exato, mas a divisão deixa resto.
52: 2	O primeiro dividendo deixa resto, mas a divisão final é exata.
57: 2	Os dividendos parciais deixam resto e a divisão final também.
265: 3	O primeiro dividendo parcial é formado de dois algarismos e a divisão deixa resto.
415: 2	Aparece um zero intermediário no quociente.
841: 2	Zero final no quociente.
540: 6	Zero no dividendo.
902: 3	Zero intermediário no dividendo e zero final no quociente.
95: 30	O dividendo não é múltiplo do divisor, mas o quociente resulta de um fato fundamental de divisão exata.

(Conclusão)

73: 20	O dividendo não é múltiplo do divisor, nem o quociente resulta de um fato fundamental de divisão.
65: 21	O dividendo não é múltiplo do divisor, o quociente resulta de um fato fundamental de divisão exata.
58: 31	O dividendo não é múltiplo do divisor, nem o quociente resulta de fato fundamental.
1472: 32	O quociente tem dois e três algarismos, com e sem aplicação de fatos fundamentais.

Fonte: Adaptado de CASTILHO (1971)

Após a aplicação do primeiro teste diagnóstico, um segundo teste foi aplicado contendo seis situações-problemas envolvendo as ideias da divisão. O objetivo era entender como os alunos aplicam o algoritmo da divisão quando estão resolvendo uma situação-problema e se compreendem as ideias envolvidas na operação de divisão. As situações apresentadas no segundo teste foram (QUADRO 2):

QUADRO 2 – As situações-problemas e suas ideias no segundo teste diagnóstico

IDEIA	SITUAÇÃO-PROBLEMA
PARTIÇÃO	Pedro possui R$ 286,00 e deseja dividir igualmente essa quantia entre seus dois filhos. Quanto cada filho de Pedro irá receber?
MEDIDA	Carol tem 126 livros e deseja guardá-los nas prateleiras de sua estante. Em cada prateleira cabem 42 livros. Quantas prateleiras serão necessárias para acomodar todos os livros?
MEDIDA	Bianca tem 45 brigadeiros e vai distribuí-los em caixas. Cada caixa deverá ter 15 brigadeiros. Quantas caixas Bianca precisará para guardar todos os brigadeiros?
PARTIÇÃO	João Pedro possui 68 figurinhas repetidas e deseja dividi-las igualmente entre 5 amigos. O desejo de João Pedro poderá ser realizado? Quantas figurinhas cada amigo irá receber? Sobrará figurinhas? Quantas?
MEDIDA	Rafael comprou um celular por R$ 624,00. Vai pagar em parcelas de R$ 208,00. Quantas parcelas serão necessárias para que Rafael pague a dívida?
PARTIÇÃO	Raquel tem 45 blusas, ela vai organizá-las em 3 gavetas. Cada gaveta terá a mesma quantidade de blusas. Quantas blusas haverá em cada gaveta?

Fonte: Elaborado pela autora

2.4.2 Grupo Focal

O trabalho com o grupo focal foi realizado logo após a aplicação dos testes diagnósticos, tendo como objetivo entender como os alunos pensam a divisão e compreender melhor os erros que eles cometem quando usam o algoritmo. Segundo Oliveira *et al* (2008, p.1) "o grupo focal é uma técnica de coleta de dados qualitativos que se dá por meio de entrevistas grupais, apropriada para estudos que buscam entender atitudes, preferências, necessidades e sentimentos*".*

Esse instrumento de coleta de dados vem sendo bastante utilizado nas pesquisas qualitativas e torna-se muito interessante pelas possibilidades que essas reuniões grupais têm de trazer informações que outras formas de coleta não trariam. De acordo com Backes *et al* (2011, p.439) "o grupo focal pode atingir um nível reflexivo que outras técnicas não conseguem alcançar, revelando dimensões de entendimento que, frequentemente, permanecem inexploradas pelas técnicas convencionais de coleta de dados".

Foi um desafio utilizar com dez pré-adolescentes essa técnica, pois como se trata de uma conversa em grupo, a interação é fundamental; entretanto, no primeiro encontro, percebeu-se uma timidez dos participantes, que talvez tenham se sentido mais retraídos, ficando mais calados, diante da situação nova para eles. A todo instante buscava-se a participação de todos os envolvidos, poucos interagiam mais livremente, o que não ocorreu no segundo encontro, onde os mesmos alunos pareciam estar mais a vontade para falar sobre o tema, sobre o que estavam pensando, talvez isso tenha ocorrido, como nos diz Backes *et al* (2011), pelo fato de os participantes mais extrovertidos, geralmente, conseguirem envolver e estimular os demais.

Foi uma experiência que acrescentou informações à pesquisa pela capacidade de interação entre os participantes, envolvendo-os em situações de análises que contribuíram para o repensar das práticas pedagógicas. Backes *et al* (2011, p.442) diz que "o grupo focal representa uma conquista e um desafio para os pesquisadores, pela possibilidade de instigar novos saberes, de ressignificar posturas profissionais e aproximar a pesquisa dos cenários de prática e vice-versa".

2.4.3 Entrevistas individuais

Após os dois encontros do grupo focal, houve uma conversa individual com cada aluno, na expectativa de elucidar o que os impedia de realizar corretamente o algoritmo da divisão. O objetivo era coletar mais informações que pudessem acrescentar na análise dos testes diagnósticos e dos grupos focais.

A entrevista ocorreu da seguinte forma: cada aluno deveria resolver em uma folha em branco uma divisão escolhida pela pesquisadora, de acordo com o teste diagnóstico realizado por ele. A escolha da divisão foi feita sem que o aluno soubesse que aquela divisão foi resolvida por ele de maneira incorreta no teste diagnóstico.

Foi solicitado, então, um relato em voz alta no momento da resolução da operação proposta, por meio do qual o aluno deveria ir explicando tudo o que estava fazendo ou pensando. As colocações dos estudantes foram gravadas em áudio.

A fundamentação para a entrevista com os alunos está em Lüdke e André (1986), já que, segundo as autoras, nesse processo tem-se a possibilidade de interação, de capacitação imediata e da corrente de informações desejada. Esse instrumento de coleta permite correções, esclarecimentos e adaptações, o que o tornam eficaz na busca pelas informações.

2.4.4 Questionário descritivo

Após a realização da conversa com os alunos sobre a divisão, decidiu-se aplicar um questionário descritivo individual. Nesse instrumento de coleta de dados, foram postas duas perguntas, além de uma operação de divisão.

Na primeira pergunta, fez-se o seguinte questionamento: “Você considera a divisão uma operação difícil? Por quê?”. Na segunda, perguntou-se o que achava que facilitaria a compreensão desta operação, já que ela é vista como um “bicho de sete cabeças” por boa parte dos alunos do Ensino Fundamental.

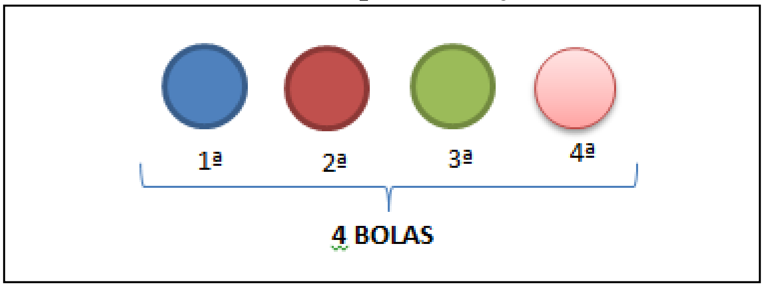
Além das duas perguntas iniciais, havia uma divisão que deveria ser resolvida pelo aluno através do algoritmo; contudo, não bastava apenas resolver a divisão. Ele deveria registrar o passo a passo da resolução, ou seja, deveria descrever tudo que fizesse até chegar ao resultado final.

3 CONSTRUINDO AS IDEIAS E OS ALGORITMOS DAS OPERAÇÕES

Os números estão em toda parte: na localização geográfica, no tempo de vida que temos, na altura, no peso, no salário que recebemos ao fim do mês trabalhado, enfim, inúmeras situações envolvem o número e sua função é muito ampla. Eles são utilizados com diferentes finalidades e significados, vejamos:

- Quando se conta objetos usa-se a função **cardinal** do número, que é a de responder à pergunta "quantos".

FIGURA 1 – Exemplo de função cardinal



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

No caso da imagem acima, o número 4 descreve a quantidade de bolas do conjunto. É o **sentido cardinal** do número que está sendo usado.

- Quando ordena-se objetos, usa-se a função **ordinal** do número, que é a de descrever a posição do objeto no conjunto. Nesse caso, cada objeto mantém uma relação com todos os demais. Exemplo: A 3ª bola é a de cor verde.
- Os números são usados para **medir**, ou seja, para expressar quantas vezes a unidade de medida se repete. Exemplo: o comprimento, a largura, a altura, a superfície, o volume, o tempo etc.
- Em algumas situações os números são utilizados sem que eles apareçam para quantificar, ordenar ou medir. Nesses casos, eles são usados como **códigos**, e servem para identificar e distinguir pessoas ou objetos. Exemplo: Número de telefone, CEP, número de placas de veículos, CPF, senhas etc...
- Os números também podem ser usados como **operador funcional**. Nesse caso, o número indica uma ação sobre um estado inicial: dobro, triplo, quádruplo, metade etc...

O uso dos números não é um privilégio do homem moderno, sua origem é bem mais antiga e está ligada às necessidades do homem pré-histórico de contar e medir. Há registros que mostram que, já na pré-história, o homem fazia contagens. Boyer (1996) relata que descobertas arqueológicas fornecem provas de que a ideia de número é muito mais antiga, sendo proveniente de um período de cerca de trinta mil anos atrás.

3.1 A origem dos números e dos sistemas de numeração

O homem primitivo era nômade e, portanto, não plantava, não criava animais e vivia da caça. A necessidade do número que esse homem possuía era diferente do uso que se faz hoje. O próprio ambiente lhe fornecia noções primitivas do número. Segundo Boyer (1996):

> As próprias diferenças parecem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta, sugerem que um lobo, um carneiro e uma árvore têm algo em comum – sua unicidade. Do mesmo modo se observaria que certos grupos, como os pares, podem ser postos em correspondência um a um. As mãos podem ser relacionadas com os pés, os olhos e as orelhas ou as narinas. Essa percepção de uma propriedade abstrata que certos grupos têm em comum e que nós chamamos número, representa um grande passo no caminho para a Matemática moderna. (BOYER, 1996, p.1).

Porém, com o passar do tempo, o homem começou a se fixar em determinadas regiões e, assim, passou a plantar, a criar animais. As mudanças no seu estilo de viver levaram à necessidade de controlar o que possuía, fazendo com que a contagem se tornasse importante: o homem precisava controlar seu rebanho, saber a época certa para plantar e colher, por exemplo. Segundo Imenes e Lelis (1999, p.8), “todas as coisas que deram origem à civilização levaram também à criação dos números”.

Berton e Itacarambi (2009, 27) dizem que "o número é um conceito matemático produto da criação do ser humano. É uma invenção, um conhecimento construído socialmente" e resultado da troca de ideias, de experiências realizadas ao longo de milhares de anos, entre pessoas de diferentes épocas e lugares. O primeiro passo para essa criação deve ter sido, segundo o autor, a capacidade que homens e alguns animais têm para perceber pequenas quantidades, chamada senso numérico. Boyer (1996, p.1) diz que “experiências com corvos, mostraram que pelo menos alguns pássaros podem distinguir conjuntos contendo até quatro elementos”. Complementando essa citação, tem-se, em Imenes e Lelis (1999), a história “O agricultor, o corvo e o senso numérico”. De acordo com o autor:

> Em certo lugar da Europa, o dono de uma plantação queria matar um corvo que havia feito um ninho na torre de sua mansão. Mas a ave era muito esperta. Se alguém se aproximasse da torre, ela logo voava e ficava observando de uma árvore distante. Só voltava se o perigo se afastasse. Um dia, o agricultor tentou um truque. Dois homens entraram no galpão vizinho à torre e o pássaro fugiu. Pouco depois, um dos homens saiu de lá, mas o pássaro não voltou para o ninho. Percebeu que ainda havia outro esperando por ele. O truque foi repetido no dia seguinte com três homens, dois deles saindo logo depois do galpão. Mas o corvo também percebeu que ainda restava um terceiro! No outro dia tentou-se o mesmo com quatro homens, sem que fosse possível enganar a ave. Finalmente, foram usados cinco homens. Um deles permaneceu no galpão, enquanto os outros saíram. Dessa vez, foi demais para o pássaro e ele perdeu a conta. Incapaz de perceber a diferença entre quatro e cinco, ele voltou ao ninho. Pobre corvo! (IMENES; LELIS, 1999, p.10).

Essa história contada pelo autor indica que o corvo apresenta senso numérico que dá uma noção limitada de quantidade. A partir dela, o homem primitivo fez as suas primeiras contagens, e, para isso, usava alguns objetos como: pedras, marcas em ossos, bastões, sementes, grãos e nós em cordões. Os pastores passaram, então, a controlar seu rebanho através da correspondência um a um, onde, para cada ovelha era associada uma pedrinha. Se ao final do dia sobrassem pedrinhas, ele sabia que ovelhas haviam se perdido, da mesma forma que se o número de ovelhas fosse maior que o de pedras era sinal de que alguma ovelha havia se juntado ao rebanho. Portanto, os objetos usados para a contagem foram importantes no processo de construção dos números.

Dessa forma, como visto, a agricultura e o pastoreio modificaram a vida dos homens dando inicio às primeiras aldeias que cresceram e tornaram-se os centros das primeiras grandes civilizações, entre elas os egípcios, os mesopotâmios, os chineses e os indianos. A agricultura foi a principal forma de sustento dessas civilizações e a confecção de calendários era essencial para essa atividade, pois o homem necessitava saber a época certa para plantar e colher. O comércio também teve inicio com o desenvolvimento das civilizações, sendo preciso, nessa atividade econômica, medir a massa dos produtos, pagar e receber troco. Além disso, existia uma organização político-social formada por um rei, por sacerdotes e por nobres. Todo esse grupo era sustentado por impostos pagos pela população.

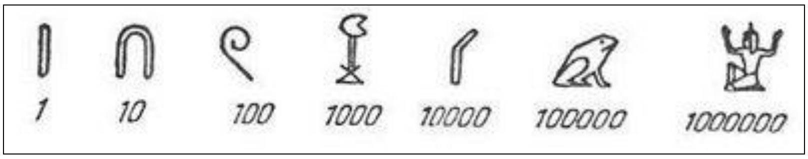
Essa estrutura formada ao longo do desenvolvimento das civilizações fez da criação dos números uma necessidade. Imenes e Lelis (1999, p.11) ainda relata que “os números foram essenciais para as primeiras civilizações. Por essa razão, em cada uma delas inventou-se um sistema de numeração, ou seja, uma maneira de escrever e nomear os números”.

Dessa forma, a necessidade de realizar contagens e medidas levou à criação de formas mais elaboradas de registros do que meros traços em ossos ou nós em cordões, fazendo com que os sistemas de numeração surgissem em cada civilização como uma forma de melhorar os registros. Segundo Pires (2013, p.11), o sistema de numeração é "um conjunto de símbolos usados para representar números, com base em uma série de regras para combinar esses símbolos". Portanto, diante de toda essa importância já mencionada, faz-se mister falar um pouco sobre os sistemas que surgiram ao longo das civilizações.

3.1.1 O Sistema de Numeração Egípcio

De acordo com Pires (2013, p.12), "tudo indica que os antigos egípcios eram muito precisos no contar e no medir, haja vista a construção das famosas pirâmides que marcam sua civilização". Através dos papiros[2] foi possível conhecer o sistema de numeração usado por eles: era um sistema de base 10, onde a cada dez símbolos I substituíam-se pelo símbolo ∩, um calcanhar invertido e assim sucessivamente, como demonstrado na figura 2:

FIGURA 2 - Sistema de Numeração Egípcio



Fonte: UFBA, 2014, s.p.

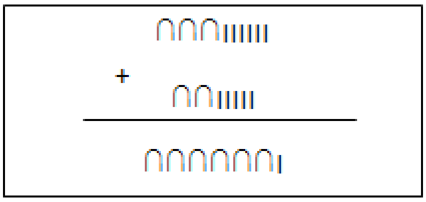
Como visto na figura anterior, outros números ainda se faziam presentes nesse sistema de numeração. O número 100 era representado por um pedaço de corda enrolado, o 1 000 a flor de lótus, o 10 000 era um dedo, o 100 000 era um girino e 1 000 000 era a figura de um Deus.

---

[2] Foi por volta de 2500 a.C. que os egípcios desenvolveram a técnica de fabricar folhas de papiro, considerado o precursor do papel. Para confeccionar o papiro, corta-se o miolo esbranquiçado e poroso do talo em finas lâminas. Depois de secas, estas lâminas são mergulhadas em água com vinagre para ali permanecerem por seis dias, com propósito de eliminar o açúcar. Outra vez secas, as lâminas são ajeitadas em fileiras horizontais e verticais, sobrepostas umas às outras. A sequência do processo exige que as lâminas sejam colocadas entre dois pedaços de tecido de algodão, sendo então mantidas e prensadas por seis dias. E é com o peso da prensa que as finas lâminas se misturam homogeneamente para formar o papel amarelado, pronto para ser usado. O papiro pronto era, então, enrolado a uma vareta de madeira ou marfim para criar o rolo que seria usado na escrita. (WIKIPÉDIA. Papiro. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro.. Acesso em 17 ago. 2013).

Observe, a seguir, uma operação de adição feita no sistema de numeração egípcio (FIG. 3):

FIGURA 3 – Adição no sistema de numeração egípcio

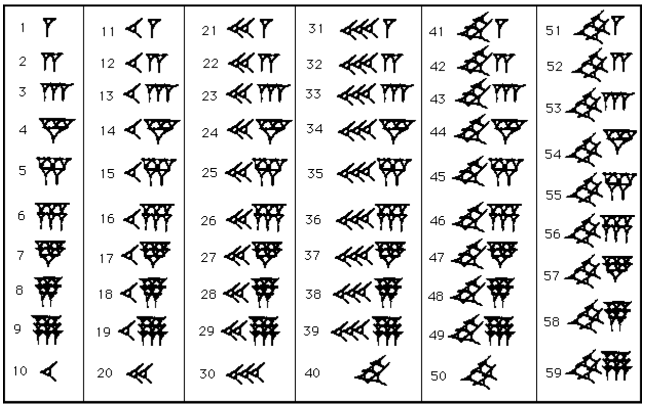


Fonte: Elaborado pela pesquisadora

3.1.2 O Sistema de Numeração Mesopotâmico

Além da civilização egípcia, outras civilizações desenvolveram suas formas de registros próprias. Através da escrita cuneiforme[3] foi possível conhecer o sistema de numeração usado pelos Mesopotâmicos. A base usada nesse sistema era a sessenta e não existia um símbolo para representar o nada, como pode ser verificado na figura 4.

FIGURA 4 - Sistema de Numeração Mesopotâmico



Fonte: PIRES, 2013, p.14.

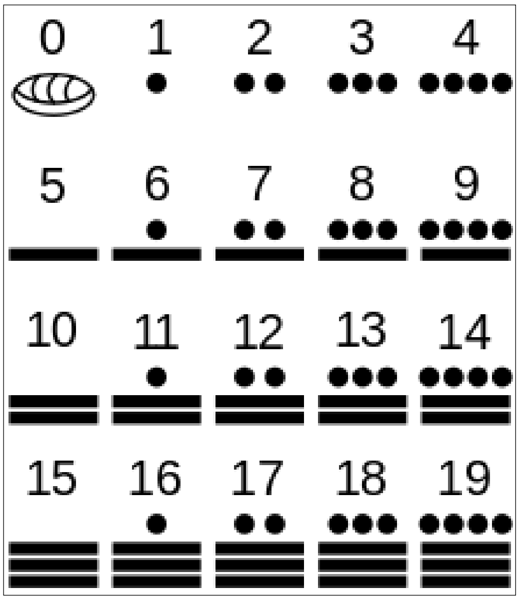
---

[3] A escrita cuneiforme foi criada pelos sumérios. Os sumérios utilizavam a argila para escrever, e quando queria que seus registros fossem permanentes, as tabuletas cuneiformes eram colocadas em um forno, ou poderiam ser reaproveitadas quando seus registros não fossem tão importantes que precisariam ser lembrados sempre. (INFOESCOLA. Escrita cuneiforme. Disponível em: http://www.infoescola.com/civilizacoes-antigas/escrita-cuneiforme/. Acesso em: 26 ago. 2013).

3.1.3 O Sistema de Numeração Maia

Segundo Berton e Itacarambi (2009), os maias apresentavam um bom conhecimento Matemático e desenvolveram um sistema de numeração de base vinte simbolizado por pontos e barras. Apesar de muitos povos antigos não usarem um símbolo para representar o nada, pode ser encontrado, na numeração maia, um símbolo que representa o zero. Vale ressaltar que os maias desenvolveram um sistema de numeração que apresentava propósitos comerciais, cujos símbolos seguem abaixo (FIG. 5):

FIGURA 5 - Sistema de numeração Maia



Fonte: PIRES, 2013, p.15.

3.1.4 O Sistema de Numeração Romano

O sistema de numeração romano, por ser ensinado nas escolas, é o mais conhecido de todos os sistemas apresentados. Segundo Pires (2013, p.15) "é o sistema de numeração romano, que usava letras latinas para representar os números e uma série de regras para combinar esses símbolos numéricos". Os símbolos usados são indicados na figura 6:

FIGURA 6 – Sistema de Numeração Romano

I	1	XXI	21	XLI	41	LXI	61	LXXXI	81
II	2	XXII	22	XLII	42	LXII	62	LXXXII	82
III	3	XXIII	23	XLIII	43	LXIII	63	LXXXIII	83
IV	4	XXIV	24	XLIV	44	LXIV	64	LXXXIV	84
V	5	XXV	25	XLV	45	LXV	65	LXXXV	85
VI	6	XXVI	26	XLVI	46	LXVI	66	LXXXVI	86
VII	7	XXVII	27	XLVII	47	LXVII	67	LXXXVII	87
VIII	8	XXVIII	28	XLVIII	48	LXVIII	68	LXXXVIII	88
IX	9	XXIX	29	XLIX	49	LXIX	69	LXXXIX	89
X	10	XXX	30	L	50	LXX	70	XC	90
XI	11	XXXI	31	LI	51	LXXI	71	XCI	91
XII	12	XXXII	32	LII	52	LXXII	72	XCII	92
XIII	13	XXXIII	33	LIII	53	LXXIII	73	XCIII	93
XIV	14	XXXIV	34	LIV	54	LXXIV	74	XCIV	94
XV	15	XXXV	35	LV	55	LXXV	75	XCV	95
XVI	16	XXXVI	36	LVI	56	LXXVI	76	XCVI	96
XVII	17	XXXVII	37	LVII	57	LXXVII	77	XCVII	97
XVIII	18	XXXVIII	38	LVIII	58	LXXVIII	78	XCVIII	98
XIX	19	XXXIX	39	LIX	59	LXXIX	79	XCIX	99
XX	20	XL	40	LX	60	LXXX	80	C	100
								D	500
								M	1000

Fonte: MATEMÁTICA SUPER SIMPLES, 2014, s.p.

Assim funciona esse sistema:

I – 1

II – 2

III – 3

IV – 4 → O símbolo I representa o 1 e o símbolo V o 5, como o símbolo I está na frente do V, então efetua-se a subtração. V – I = 4

V – 5

VI → Como agora o símbolo I está após o V, então, soma-se V + I = 6

VII → V + I + I = 7

Entre todos os sistemas criados, não existia um que pudesse ser considerado o melhor de todos. Cada um atendeu às necessidades de sua civilização no período em que foram utilizados. Assim, apesar de vários sistemas terem sido inventados, Imenes (1999, p.13) diz que “todos os sistemas de numeração acabaram desaparecendo e foram substituídos pelo sistema que usamos e que o mundo usa: o sistema de numeração decimal”, proveniente do sistema indo-arábico.

3.1.5 O Sistema de Numeração Indo-Arábico

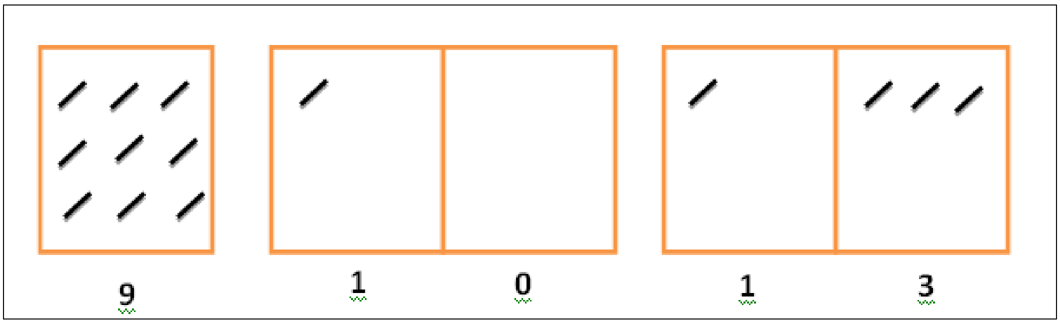
Segundo Imenes (1999), o sistema de numeração atual nasceu na antiga civilização da Índia e foi aperfeiçoado e difundido ao longo dos séculos, com a colaboração de vários povos, em especial dos árabes, por isso é chamado Indo-arábico e suas características foram incorporadas aos poucos. Imenes (1999) relata que:

> O princípio posicional já aparecia no sistema dos mesopotâmicos. A base dez era usada pelos egípcios e chineses. Quanto ao zero, existem indícios de que já era usado pelos mesopotâmicos na fase final de sua civilização. O grande mérito dos indianos foi o de reunir essas diferentes características num mesmo sistema numérico. Aos árabes é creditada a difusão do sistema indiano. (IMENES, 1999, p.37).

Ao atingir a Europa, esse sistema de numeração não foi aceito de imediato, pois, nessa época, os europeus usavam o sistema romano, e por muito tempo ele manteve-se. Foi apenas no século XVI que o sistema de numeração indo-arábico foi ganhando força na Europa graças à praticidade do sistema decimal. Pires (2013, p.19) diz que seu "sucesso deve-se ao fato de tornar os cálculos numéricos muito mais fáceis, provocando uma verdadeira revolução na aritmética".

Assim, os indianos faziam as contagens da seguinte forma: eram feitos sulcos na terra e neles colocavam-se gravetos ou pedras para representar a contagem de animais ou outra coisa que desejasse contabilizar. Quando atingisse a marca de dez gravetos (ou pedras), outro sulco à esquerda do primeiro era feito no solo, retiravam-se os dez gravetos do primeiro sulco, e um graveto era colocado no segundo, representando, assim, os dez gravetos (PIRES, 2013), como nos mostra a figura 7:

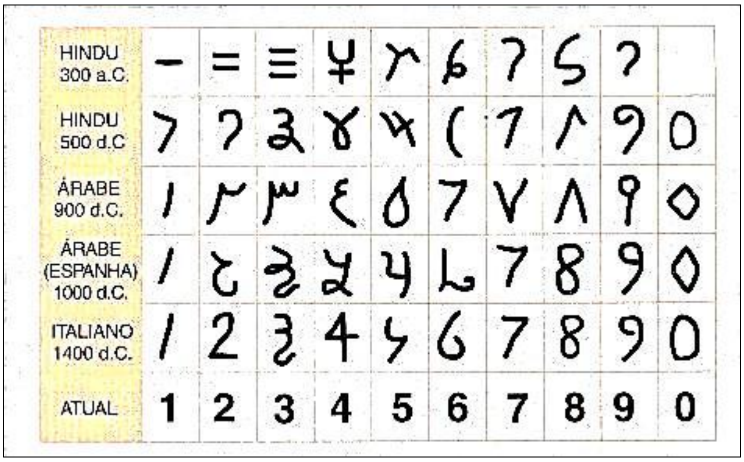
FIGURA 7 – Princípio do Sistema de Numeração Indo-arábico



Fonte: Adaptada de Pires (2013)

Os algarismos indo-arábicos são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, e através deles é possível escrever qualquer número conhecido. Segundo Imenes (1999, p.39) “como o sistema de numeração criado na Índia foi adotado pelos árabes e passado aos europeus, é natural que a forma de escrever os dez algarismos fosse sofrendo alterações”, conforme indicado na figura 8:

FIGURA 8 – Evolução dos algarismos indo-arábicos



Fonte: UFPB, 2014, s.p.

Conforme visto, o sistema indo-arábico trabalha com o conceito de agrupamento, portanto, a cada dez unidades tem-se uma unidade de ordem superior, ou seja, dez unidades correspondem a uma dezena, dez dezenas correspondem a uma centena, dez centenas correspondem a uma unidade de milhar e, assim sucessivamente. O número 356, por exemplo, é formado por 3 centenas, 5 dezenas e 6 unidades, podendo ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{356 = 300 + 50 + 6}$$

Esse sistema, como relata Boyer (1996), teve influência da primeira calculadora que o homem teve acesso: seus dedos das mãos. Para o autor:

> Usando os dedos das duas mãos podem ser representadas coleções contendo até dez elementos; combinando dedos das mãos e dos pés pode-se ir até vinte. Quando os dedos humanos eram inadequados, podiam ser usados montes de pedras para representar uma correspondência com elementos de um outro conjunto. Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele frequentemente amontoava as pedras em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observação da mão e pé humanos. Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso hoje difundido do sistema decimal é apenas o resultado anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés. (BOYER, 1996, p.2).

Porém, vale reafirmar que, além de decimal, o sistema de numeração é posicional, ou seja, o valor de um algarismo depende da posição ocupada por ele no número, conforme pode ser verificado a seguir:

- 234 - O algarismo 4 representa 4 unidades
- 145 - O algarismo 4 representa 40 unidades ou 4 dezenas
- 439 - O algarismo 4 representa 400 unidades ou 4 centenas

Portanto, a mudança na posição de um algarismo modifica o número, assim, 32 e 23 são números distintos, apesar de serem formados pelos mesmos algarismos. Esse é um sistema organizado em classes e ordens. A primeira classe é chamada classe das **unidades simples** e é formada pelas unidades, dezenas e centenas. A primeira ordem dessa classe é formada pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; a segunda ordem dessa mesma classe é formada pelos números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, números esses dez vezes maiores do que o número correspondente na ordem anterior. A terceira e última ordem dessa classe é formada pelos números 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, e, da mesma forma, os números são dez vezes maiores do que o número correspondente na ordem anterior. A classe seguinte ou segunda classe é chamada classe dos **Milhares**, e nela são encontradas a quarta, a quinta e a sexta ordens sendo elas unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar. De forma análoga, a cada ordem existirá um número dez vezes maior do que o número correspondente na ordem anterior. Cada classe, então, é formada por três ordens, como poderá ser observado no quadro de valor posicional representado na tabela 1.

TABELA 1 – Quadro de Valor Posicional

CLASSE DOS MILHÕES			CLASSE DOS MILHARES			CLASSE DAS UNIDADES SIMPLES		
9 ª	**8 ª**	**7 ª**	**6 ª**	**5 ª**	**4 ª**	**3 ª**	**2 ª**	**1ª**
CM	**DM**	**UM**	**Cm**	**Dm**	**Um**	**C**	**D**	**U**
						1	2	3
				2	3	1	4	5
3	2	1	4	5	8	8	3	7

Fonte: Elaborado pela autora

Diante do que está representado no QVP acima, tem-se que:

- O número **123** é formado por 1 centena, 2 dezenas e 3 unidades e é um número que possui três ordens;
- O número **23 145** é formado por 2 dezenas de milhar, 3 unidades de milhar, 1 centena, 4 dezenas e 5 unidades e é um número que possui cinco ordens;
- O número **321 458 837** é formado por 3 centenas de milhão, 2 dezenas de milhão, 1 unidade de milhão, 4 centenas de milhar, 5 dezenas de milhar, 8 unidades de milhar, 8 centenas, 3 dezenas e 7 unidades e é um número formado por 9 ordens.

Outra particularidade desse sistema de numeração é a existência de um símbolo para representar a ausência de qualquer quantidade, ou seja, para representar o “nada”. Pires (2013) relata que:

> Referências diversas a nove símbolos, em vez de dez, significam que, a princípio, os indianos ainda não tinham dado o segundo passo na transcrição para o moderno sistema de numeração. Esse passo seria a introdução de uma notação para a posição vazia, isto é, um símbolo zero. A história da matemática contém muitas anomalias e uma delas é a de que a mais antiga ocorrência indubitável de um zero na Índia se acha em uma inscrição de 876 anos atrás, isto é, mais de dois séculos depois da primeira referência aos nove símbolos. Não se sabe sequer se o número zero surgiu em conjunção com os outros nove símbolos numéricos indianos. É bem possível que o zero seja originário do mundo grego, talvez da Alexandria, e que tenha sido transmitido à Índia depois que o sistema decimal posicional já estava estabelecido. (PIRES, 2013, p.20).

Dessa forma, os algarismos, tal qual são conhecidos, ficaram denominados da seguinte maneira:

0 → Zero

1 → Um

2 → Dois

3 → Três

4 → Quatro

5 → Cinco

6 → Seis

7 → Sete

8 → Oito

9 → Nove

Porém, sabe-se que introduzir e desenvolver o sistema de numeração decimal em sala de aula não é tarefa fácil, sendo necessário um trabalho árduo que vise o entendimento dos alunos diante de todas as particularidades do nosso sistema. Nesse sentido, segundo Toledo e Toledo (2009):

> Para introduzir o Sistema de Numeração Decimal aos alunos, é aconselhável que o professor realize um trabalho mais prolongado, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, com atividades diversificadas sobre agrupamentos e trocas, além da familiarização com o valor posicional dos algarismos. (TOLEDO; TOLEDO, 2009, p.65).

Tem-se, portanto, que a compreensão do sistema de numeração decimal é importante e será a base para a construção dos algoritmos, podendo minimizar inúmeros problemas que o professor poderá enfrentar futuramente. Toledo e Toledo (2009, p.67) dizem que "o tempo dedicado ao sistema de numeração não é um tempo "perdido" e, com certeza será recuperado na etapa de construção dos algoritmos".

3.2 A Construção do conceito de número e dos campos conceituais pelas crianças

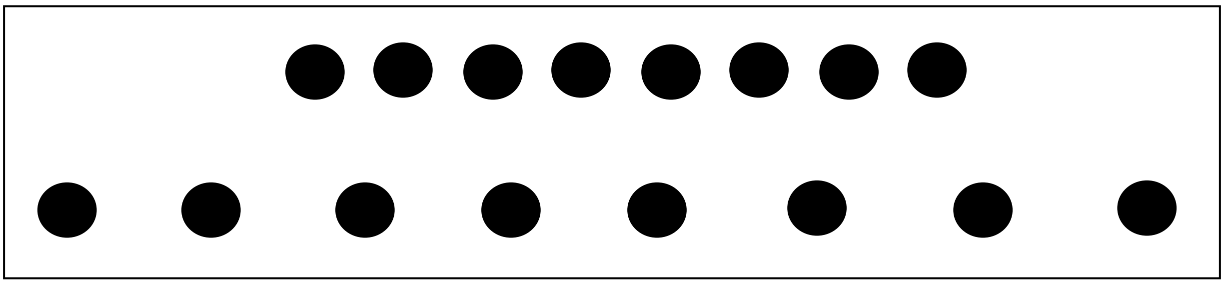
A criação dos números e a sua organização em um sistema de numeração ocorreu ao longo do tempo, com o desenvolvimento das civilizações. Mas como esses conceitos devem ser ensinados? Como a criança constrói o conceito de número? Essas são questões importantes a serem pensadas.

Inicialmente, ao ter o primeiro contato com o número, a criança não consegue conservar a quantidade. Ela imagina que se a organização espacial dos objetos for modificada, a quantidade também mudará. De acordo com Vergnaud (2009):

> [...] a equivalência quantitativa de dois conjuntos com o mesmo número de elementos, não é na criança, um fato pronto sobre o qual o pedagogo poderia apoiar-se sem problema, mas constrói-se progressivamente em função do desenvolvimento da atividade da criança. (VERGNAUD, 2009, p.128).

Assim, tem-se a figura 9:

FIGURA 9 – Estrutura da conservação de objetos



Fonte: Adaptado de Kamii (2012)

É muito provável que uma criança de quatro anos, ao observar a figura acima, imagine que a segunda linha possui mais bolinhas do que a primeira, devido apenas à sua disposição espacial modificada. De acordo com Kamii (2012, p.14) “Quando as crianças não construíram o inicio da estrutura mental do número, elas usam o que lhes parece ser o melhor critério, ou seja, neste caso, os limites espaciais dos conjuntos”.

Vale ainda ressaltar que existem níveis de desenvolvimento que a criança vai atingindo. Quando ela não consegue montar um conjunto com o mesmo número de elementos de outro, ela ainda não dá conta da igualdade e menos ainda da conservação. Nesse estágio, a criança encontra-se no **nível I**. Quando a criança consegue montar o conjunto com o mesmo número de elementos de outro, porém não consegue conservar a quantidade, diz-se que ela encontra-se no **nível II**. A criança conservadora, porém, já está no **nível III**, pois consegue entender a igualdade e a conservação, como mostra a figura 10.

FIGURA 10 - Estágios da criança

Fonte: Adaptado de Kamii (2012)

Ainda segundo Kamii (2012, p.16), “O número é construído por cada criança a partir de todos os tipos de relações que ela cria entre os objetos”.

Kamii (2012) também afirma que Piaget estabeleceu uma distinção entre três tipos de conhecimento: social, físico e lógico-matemático. O conhecimento social relaciona-se com as convenções desenvolvidas em diferentes culturas e sua principal característica é sua natureza amplamente arbitrária. Por exemplo, a mandioca é assim chamada no sul e no sudeste, já no norte e nordeste é conhecida como macaxeira podendo ser chamada de aipim. Do mesmo modo, segundo Kamii (2012, p. 26) “para que a criança adquira o conhecimento social é indispensável a interferência de outras pessoas”. Já o conhecimento físico encontra-se na realidade externa, podendo ser adquirido pela observação. O formato e a cor de uma bola de basquete são exemplos de conhecimento físico. Ao se olhar para uma bola de basquete e uma bola de futebol, percebem-se as diferenças que existem entre elas em tamanho, forma e cor. Essa diferença está no conhecimento lógico-matemático. De acordo com a autora, "A diferença é uma relação criada mentalmente pelo indivíduo que relaciona dois objetos." (KAMII, 2012, p.18). Assim, a diferença não está na bola de basquete ou na bola de futebol. Ela só existe quando se coloca esses objetos dentro de uma relação. Kamii (2012) diz ainda que:

> O número é a relação criada mentalmente por cada indivíduo. O conhecimento lógico-matemático consiste na coordenação de relações. Por exemplo, ao coordenar as relações de igual, diferente e mais, a criança se torna apta a deduzir que há mais contas no mundo que contas vermelhas e que há mais animais do que vacas. Da mesma forma é coordenando a relação entre "dois" e "dois" que ela deduz que 2+2 = 4 e que 2x2 = 4. (KAMII, 2012, p.19).

Portanto, os estudos de Piaget, de acordo com sua discípula, reconheciam duas fontes para o conhecimento: **uma fonte externa e uma fonte interna**. O conhecimento físico possui fonte parcialmente externa, já o conhecimento lógico-matemático apresenta fonte interna. Piaget chamou de **abstração empírica** a que ocorre a partir das propriedades dos objetos, através dos sentidos (audição, visão, paladar, tato, olfato) e por meio dos quais percebem-se essas características. Berton e Itacarambi (2009, p.28) dizem que "o sujeito atua sobre os objetos e vai comprovando, de diferentes maneiras, suas propriedades". Assim, "é com a manipulação concreta e reflexiva dos objetos que as crianças vão construindo as noções de: duro, elástico, madeira, plástico, entre outras". Já a **abstração reflexiva,** assim denominada por Piaget, envolve as relações criadas mentalmente pelos indivíduos quando observam o objeto em questão. Berton e Itacarambi (2009, p.28) exemplificam que "se observamos em um papel cinco quadrados, o cinco não é uma propriedade dos quadrados. Se acrescentamos mais um quadrado teremos seis, se retirarmos um quadrado teremos quatro. Não existe nada nos quadrados que os façam serem 4, 5 ou 6" .

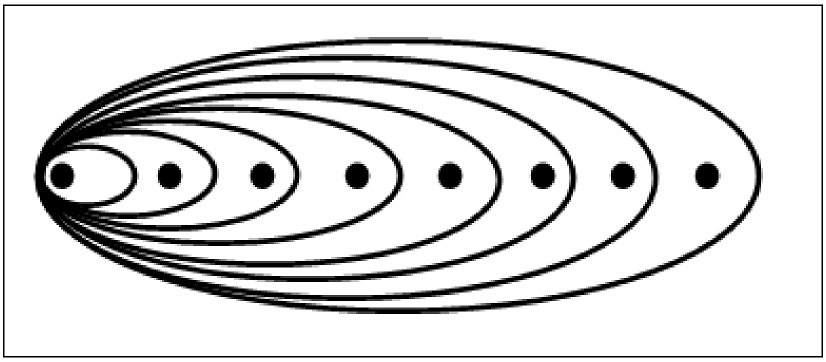
Dessa forma, nenhum tipo de abstração existe sem a presença da outra, de acordo com a teoria de Piaget. Não se podendo construir a relação de diferença se não se observar as diferenças entre os objetos, o que há a necessidade tanto da abstração empírica quanto da abstração reflexiva. Dessa forma, pode-se afirmar que o sistema lógico-matemático é importante na abstração empírica, pois os fatos da realidade externa não podem ser lidos isoladamente, pois eles se relacionam com os conhecimentos já construídos anteriormente. Segundo Kamii (2012):

> Se a criança já construiu o número (por abstração reflexiva) ela será capaz de operar sobre os números e fazer 5+5 e 5x2 (por abstração reflexiva). O fato de que a abstração reflexiva não pode ocorrer independentemente das primeiras construções de relações feitas pelas crianças tem implicações importantes para o ensino do número. Este princípio implica que a criança deve colocar todos os tipos de conteúdo (objetos, eventos e ações) dentro de todos os tipos de relações para chegar a construir o número. (KAMII, 2012, p.21).

Diante do exposto, portanto, entende-se ainda que a criança constrói o número a partir de duas relações que ela elabora com os objetos, sendo elas: **a ordem e a inclusão hierárquica**. Quando uma criança consegue contar um grupo de objetos sem deixar nenhum para trás ou contar duas vezes o mesmo objeto, é sinal de que ela consegue ordenar esses objetos mentalmente. Kamii (2012, p.22) diz que “não é necessário que a criança coloque os objetos literalmente numa ordem espacial para arranjá-los numa relação organizada. O importante é que possa ordená-los mentalmente”.

A ordenação, porém, não é a única operação mental que a criança constrói, pois, se assim fosse, ela não conseguiria quantificar os objetos do grupo. Para isso, é necessário que a criança coloque os objetos em uma relação hierárquica. Ao contar um grupo com dez objetos, a criança que consegue incluir os objetos numa relação hierárquica consegue incluir mentalmente um em dois, dois em três, três em quatro e assim por diante, como é indicado na figura 11, a seguir. Nesse sentido, Kamii (2012, p.23) diz que “quando lhe apresenta oito objetos, ela só consegue quantificar o conjunto numericamente se puder colocá-los todos numa única relação que sintetiza ordem e inclusão hierárquica”.

FIGURA 11 - Estrutura da Inclusão Hierárquica



Fonte: Adaptado de Kamii (2012)

O processo de construção da inclusão hierárquica pela criança é um processo difícil. Por exemplo, ao mostrar-lhe um grupo de objetos composto por 3 lápis e 2 canetas e perguntar-lhe se existem mais lápis ou mais objetos, a resposta da criança, muito provavelmente, será a de que existem mais lápis. Nesse caso, segundo Kamii (2012):

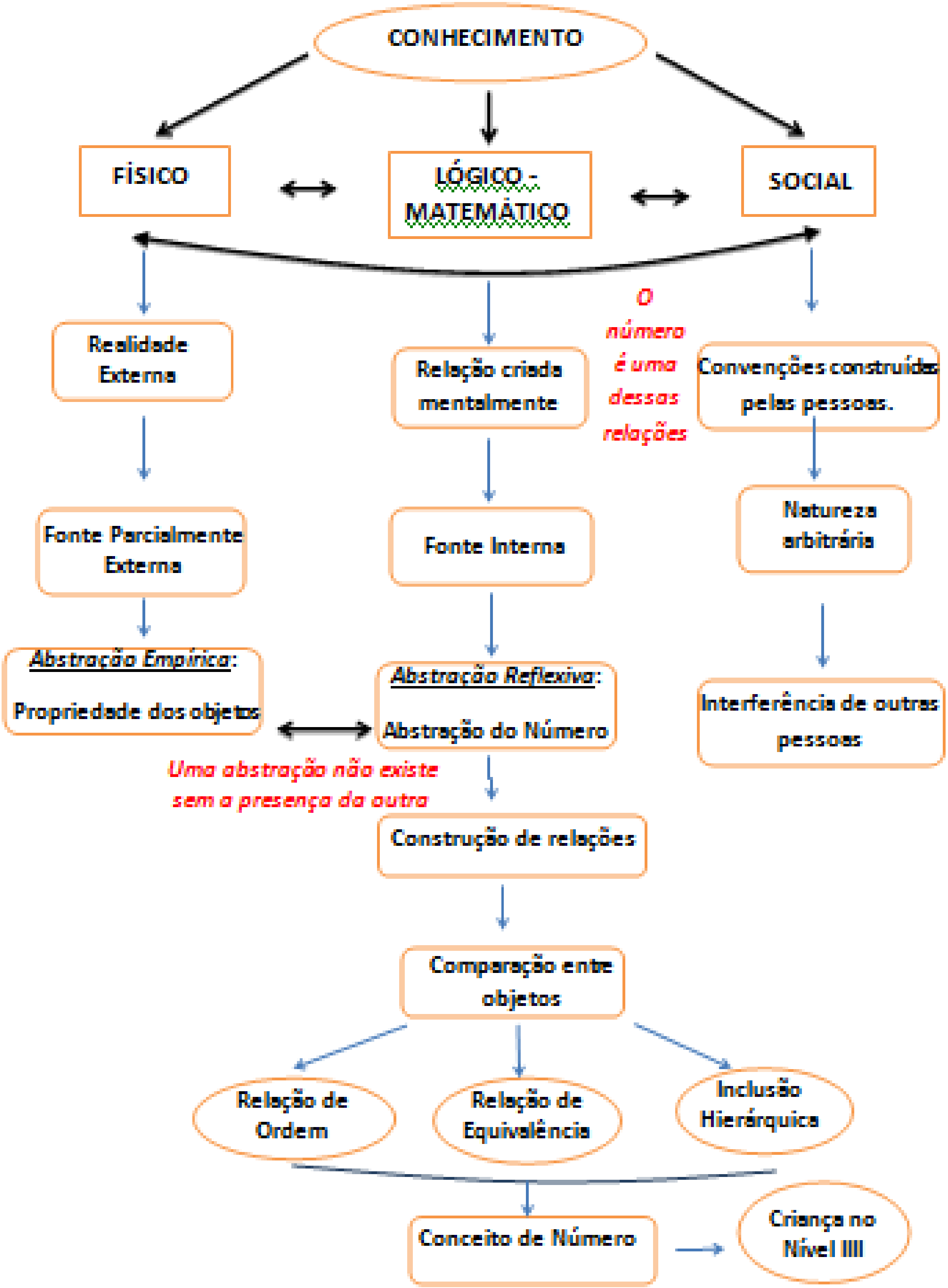
> As crianças pequenas ouvem uma pergunta diferente daquela que o adulto fez porque, uma vez que elas seccionaram mentalmente o todo em duas partes, a única coisa sobre as quais podem pensar são as duas partes. Para elas, naquele momento, o todo não existe mais. Elas conseguem pensar sobre o todo, mas não estão pensando sobre as partes. Para comparar o todo, com uma parte, a criança tem que realizar duas operações mentais ao mesmo tempo, cortar o todo em duas partes e recolocar as partes juntas formando um todo. Isto, de acordo com Piaget, é precisamente o que as crianças de quatro anos não conseguem fazer. A reversibilidade se refere à habilidade de realizar mentalmente ações opostas simultaneamente, neste caso, cortar todo em duas partes e reunir as partes num todo. (KAMII, 2012, p.24-25).

Em contrapartida, quando a criança consegue adquirir essa mobilidade no pensamento, um dos resultados é a construção da estrutura lógico-matemática do número, pois, ao contrário do que se imagina, o número não pode ser conhecido por intuição ou observação. Esse processo de construção leva tempo para ser construído pela criança. A teoria de Piaget diz, nesse sentido, que “o número é alguma coisa que cada ser humano constrói através da criação e coordenação de relações”. (KAMII, 2012, p.26). Por isso, como visto acima, existem níveis que a criança vai atingindo à medida que vai construindo a sua estrutura lógico-matemática do número e essa estrutura está fortemente construída quando a criança encontra-se no nível III. Kamii (2012) reforça que:

> Se a criança construir a estrutura lógico-matemática de maneira sólida, tornar-se-á capaz de raciocinar logicamente numa ampla variedade de tarefas mais difíceis do que a da conservação. Contudo, se ela for ensinada a dar meramente respostas corretas à tarefa de conservação, não se pode esperar que prossiga em direção a raciocínios matemáticos de nível mais alto. (KAMII, 2012, p.31).

Portanto, como se pode entender, o processo de construção do conceito de número pela criança ocorrerá de maneira gradual, como pode ser verificado no fluxograma da figura 12, abaixo. Porém, nesse processo é importante que todos os tipos de conhecimento se relacionem: social, físico e lógico-matemático. Além disso, é importante que a criança pense ativamente sobre todos os tipos de situações.

FIGURA 12 - Construção do conceito de número pela criança



Fonte: Elaborado pela autora

Gérard Vergnaud (2009, p.129), psicólogo francês que idealizou a Teoria dos Campos Conceituais, diz que “As relações entre números apoiam-se em relações entre objetos. A atividade de comparação entre objetos está, evidentemente, na origem do desenvolvimento das noções de equivalência e de ordem, as quais são necessárias ao desenvolvimento da noção de número”.

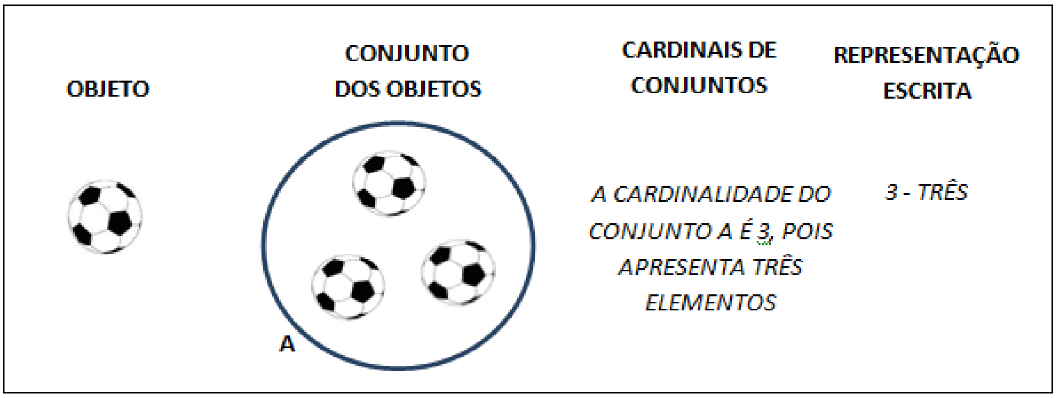
Portanto, de acordo com o pesquisador francês, quando a criança compara dois conjuntos e percebe que eles apresentam o mesmo número de elementos, ou que dois objetos possuem a mesma cor, é sinal de que a criança consegue estabelecer uma **relação de equivalência**. Da mesma forma, quando a criança olha para dois conjuntos e percebe que um deles tem mais elementos do que o outro, ou que um objeto está posicionado na frente de outro é porque ela consegue estabelecer uma **relação de ordem**.

Vergnaud (2009, p.167) diz que “o número é um conceito do qual existem vários sistemas de escrita possíveis. A numeração de posição de base dez é um desses sistemas”. Os sistemas de numeração servem para dar suporte para a aquisição, pela criança, do conceito de número, pois seria extremamente difícil ensinar números com muitas classes sem o suporte dos sistemas de numeração.

Corroborando com as palavras de Vergnaud, Berton e Itacarambi (2009, p.85) relatam que, "assim como o número está presente no cotidiano das crianças, o mesmo acontece com o cálculo, particularmente para responder questões simples de adição e subtração". Vergnaud (2009) ainda distingue quatro planos para a aquisição da adição de números inteiros, sendo eles:

- O plano dos objetos;
- O plano do conjunto dos objetos;
- O plano dos cardinais de conjuntos;
- O plano das representações escritas desses números, como é demonstrado na figura 13.

FIGURA 13 – Planos para aquisição da adição de números inteiros



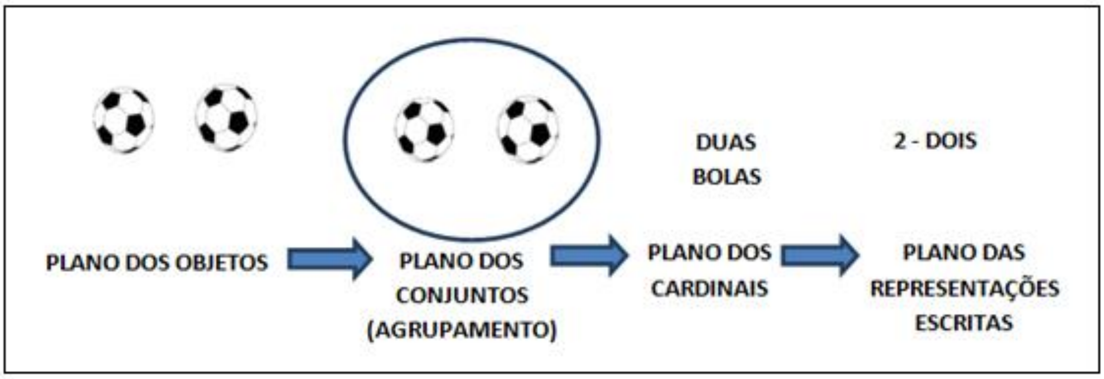
Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Então, segundo Vergnaud (2009, p.168) “em cada um desses planos encontram-se não somente elementos (objetos, conjuntos, cardinais), mas também relações e operações envolvendo esses elementos”. Assim, a regra da adição está, ao mesmo tempo, apoiada em:

- Operações internas a cada um dos planos identificados acima:
- ✓ Ao plano dos cardinais, a soma;
- ✓ Ao plano dos conjuntos, a união disjunta.

- Operações que permitem passar de um plano ao outro (FIG. 14).
- ✓ Do plano dos objetos àquele dos conjuntos – agrupamento;
- ✓ Do plano dos conjuntos àquele dos cardinais – medida ou contagem;
- ✓ Do plano dos cardinais àquele das representações escritas – a escrita.

FIGURA 14 – Operações que permitem passar de um plano ao outro



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Vale ressaltar, porém, que no plano das representações escritas, um problema é a relação que há entre o número escrito e a quantidade que esse número representa. Já na regra de adição, o problema reside na relação entre a regra e as operações que ela representa sobre os cardinais e sobre os conjuntos. É importante, então, a busca por diversas técnicas para que haja a compreensão da relação entre as operações sobre os objetos e os conjuntos, como, por exemplo, o uso de várias bases, que pode ajudar na compreensão dos sistemas de numeração, como diz Vergnaud (2009):

> A utilização de diversas bases para o ensino da numeração e da adição está no fato de que as regras essenciais são as mesmas em todas as bases, assim, elas aparecem, sobretudo, como regras do sistema da numeração de posição, independentes do conteúdo ao qual elas se aplicam. (VERGNAUD, 2009, p.173).

Dessa forma, em sua Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (2009) diz que a criança não aprende de forma linear; ao contrário, a aprendizagem ocorre a partir de um emaranhado de conceitos que são adquiridos no cotidiano. De acordo com a sua teoria, um conceito não se forma a partir de um só tipo de situação. Por mais simples que uma situação possa parecer, ela envolve vários conceitos. Assim como, por mais simples que um conceito seja, ele constrói várias situações.

Assim, tem-se que a formação de um campo conceitual é o conjunto de situações e, portanto, trabalhar com ele é bem mais amplo do que trabalhar com um conceito específico, pois inclui todos os problemas e significados que se relacionam com o conceito em questão, não se podendo analisá-lo individualmente.

Além disso, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, o processo de desenvolvimento cognitivo depende das situações a serem enfrentadas pelo sujeito, objetivando a construção dos conceitos, sendo o processo de conceitualização longo e que requer uma diversidade de situações para ser construído.

Portanto, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 2009), há três conjuntos a se considerar, sendo eles:

1) **Conjunto das situações que dão sentido ao conceito (S):** as situações são portas de entrada para o trabalho nos campos conceituais. Elas dão significado ao conceito: quanto mais situações relacionadas, mais amplo o significado do conceito estudado. Um conceito só terá significado a partir de uma variedade de situações.

2) **Conjunto das invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade dos conceitos (I):** As invariantes são as propriedades que definem os objetos e a forma usada pelos alunos para resolver a situação proposta.

3) **Conjunto das representações simbólicas (R):** Permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento. Através das representações simbólicas, o aluno consegue relacionar o significado com as propriedades do objeto.

3.2.1 O Campo Conceitual Aditivo

Segundo Vergnaud (2009, p.138): "O que dá aos números sua característica essencial é a possibilidade que temos de adicioná-los e de atribuir um sentido a essa adição". Nesse campo, portanto, são encontradas situações que tratam da relação parte e todo e que envolvem a adição e a subtração organizadas em categorias: **composição, transformação, comparação ou a combinação de duas delas** e que são descritas abaixo:

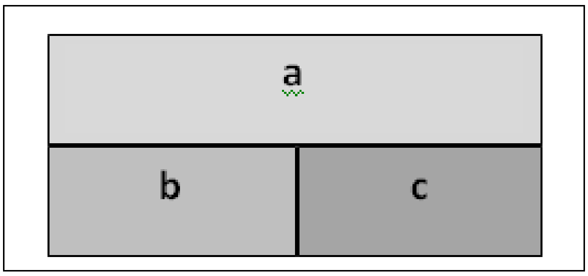
Composição: abrange problemas simples de relação entre o todo e suas partes e corresponde à ideia de juntar, em uma situação já dada.

Transformação: Envolve temporalidade, mudança de uma situação inicial em uma situação final.

Comparação: Compreende problemas comparativos que envolvem equiparações entre quantidades do tipo: a mais, a menos, quantos faltam.

Portanto, a adição e a subtração devem ser trabalhadas ao mesmo tempo e as ideias relacionadas ao campo aditivo são: **acrescentar/retirar, juntar, comparar**, como ocorre na relação: **a = b + c.** Dessa relação tem-se outras duas, sendo: **b = a – c** e **c = a – b** (FIG.15).

FIGURA 15 – Relação a = b + c



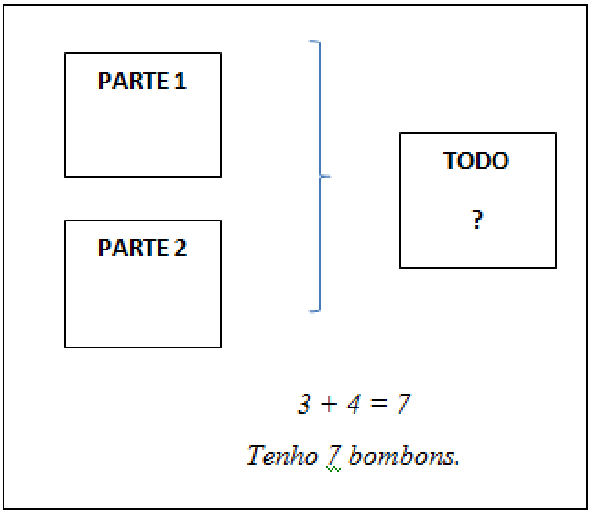
Fonte: Elaborado pela autora

A seguir, exemplos de situações-problemas que trazem cada uma das ideias do campo aditivo.

Juntar: Para essa ideia ser trabalhada, parte-se de dois estados iniciais, buscando encontrar um terceiro. Exemplo1:

Tenho 3 bombons na minha mão direita e 4 bombons na minha mão esquerda. Quantos bombons tenho ao todo? (FIG. 16)

FIGURA 16 – Resolução exemplo 1

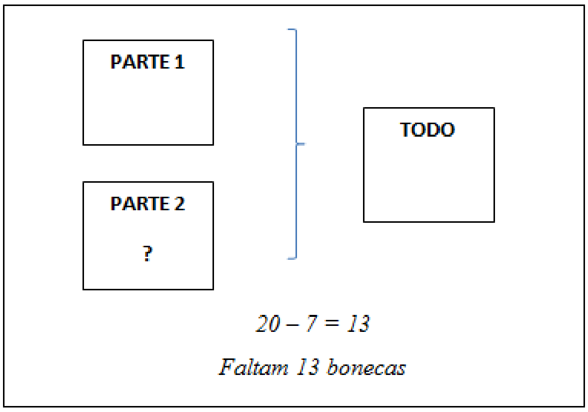


Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Exemplo 2:

Bia tem uma coleção de 20 bonecas. Ela decidiu lavar suas bonecas em dois dias, pois estão muito empoeiradas. No primeiro dia, ela lavou 7 bonecas. Quantas bonecas ficaram para Bia lavar no segundo dia? (FIG. 17).

FIGURA 17 – Resolução exemplo 2

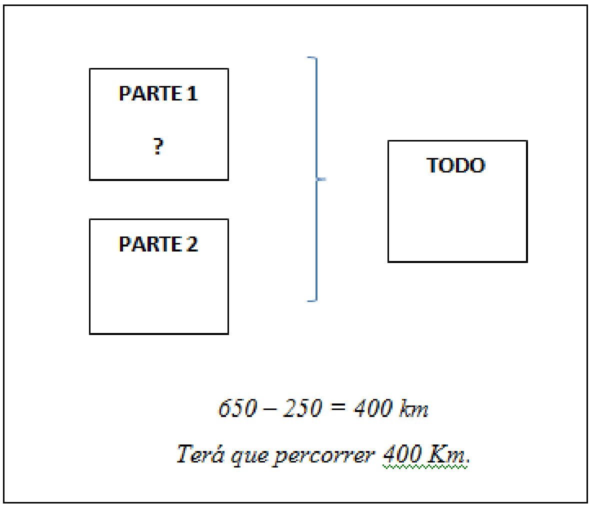


Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Exemplo 3:

João vai realizar uma viagem de 650 km. Ele decidiu que fará a viagem em dois dias. Se no segundo dia ele percorrer 250 km, quantos quilômetros terá que ter percorrido no primeiro dia para atingir sua meta? (FIG. 18)

FIGURA 18 – Resolução exemplo 3

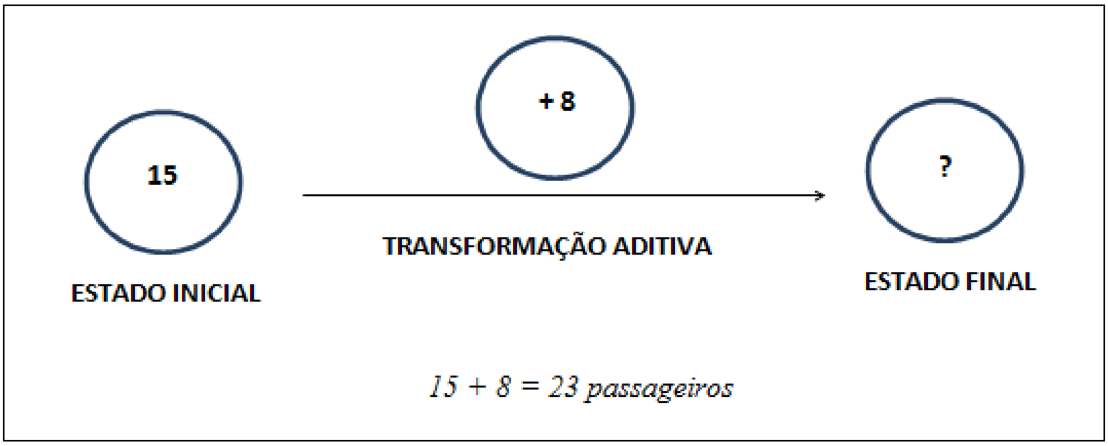


Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Acrescentar/ Tirar: Nessas situações tem-se uma mudança no estado inicial, que pode ser positiva ou negativa. Exemplo 1:

Num ônibus estão 15 passageiros. Subiram 8 passageiros. Quantos passageiros temos agora no ônibus? (FIG. 19)

FIGURA 19 – Resolução exemplo 1

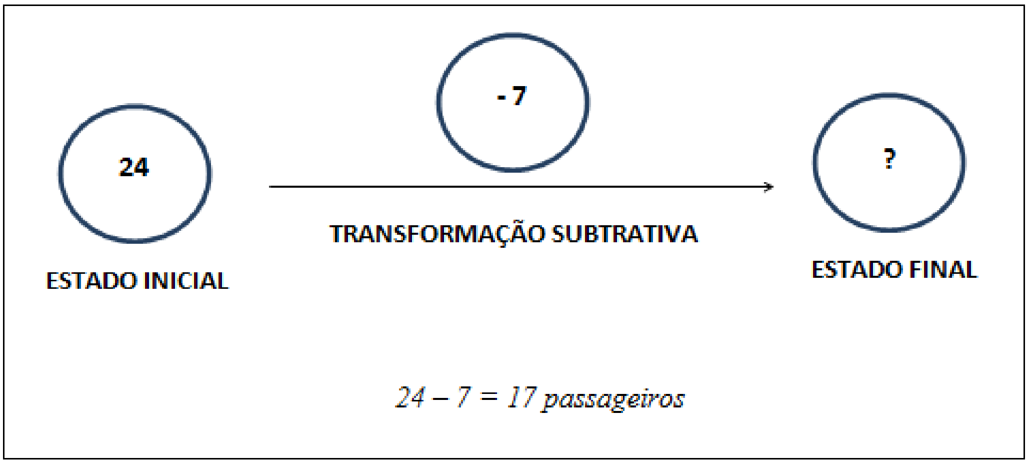


Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Exemplo 2:

Num ônibus estão 24 passageiros. Desceram 7 passageiros. Quantos passageiros temos agora no ônibus? (FIG. 20)

FIGURA 20 – Resolução exemplo 2



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Comparar: Nesse tipo de situação, a ideia é completar para obter uma igualdade, ou encontrar a diferença numa situação onde haja uma desigualdade.

Exemplo1:

Pedro tem 12 figurinhas e Jonas 8 figurinhas a mais do que Pedro. Quantas figurinhas Jonas tem? (FIG. 21)

FIGURA 21 – Resolução exemplo 1

12	**12 + 8 = 20**

Jonas tem 20 figurinhas

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

3.2.2 O Campo conceitual Multiplicativo

Assim como a adição e a subtração, a multiplicação e a divisão também devem ser trabalhadas em conjunto. As ideias no campo multiplicativo são: **soma de parcelas iguais, ideia de combinatória, proporcionalidade, configuração retangular, partição e medida**, a serem descritas a seguir.

Soma de parcelas iguais: A ideia mais trabalhada da multiplicação é a soma de parcelas iguais.

Exemplo:

Uma cômoda possui 5 gavetas. Qual o total de gavetas se tivermos 3 cômodas como esta?

Resolução: **5 + 5 + 5 = 3 x 5 = 15**

Portanto, teremos 15 gavetas.

Nessa resolução há, então, 3 parcelas iguais a 5. 3 é o multiplicador, ou seja, indica o número de vezes que o multiplicando repete, que neste exemplo é 5.

Ideia combinatória: Apesar de ser menos trabalhada do que a soma de parcelas iguais, a ideia combinatória já vem sendo bastante estudada em sala de aula. Esses problemas podem ser acompanhados por tabelas e diagramas para que o aluno entenda a ideia envolvida.

Exemplo:

Em uma lanchonete o cliente pode montar seu sanduíche escolhendo entre 3 pães diferentes e 4 recheios diferentes. De quantas formas diferentes um cliente pode comer seu sanduíche?

3 x 4 = 12

Portanto, o cliente poderá comer 12 sanduíches diferentes.

Apesar das duas situações terem sidos resolvidas por meio de uma multiplicação, existem diferenças nas duas ideias apresentadas. No primeiro exemplo, multiplicam-se cômodas e gavetas e obtendo 15 gavetas como resultado. No segundo, multiplicam-se pães e recheios, encontrando sanduíches.

Proporcionalidade: Os problemas de proporcionalidade envolvem a relação entre duas variáveis.

Exemplo:

João comprou 6 caixas de bombom por 72 reais. Se ele tivesse comprado 9 caixas quanto pagaria?

72: 6 = 12 e 12 x 9 = 108

Portanto, João pagaria 108 reais pelas 9 caixas de bombom.

Configuração Retangular: Nesses problemas a multiplicação é trabalhada através da ideia de configuração retangular.

Exemplo:

No auditório da escola, as cadeiras estão dispostas em 20 fileiras com 30 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há no auditório?

20 x 30 = 600

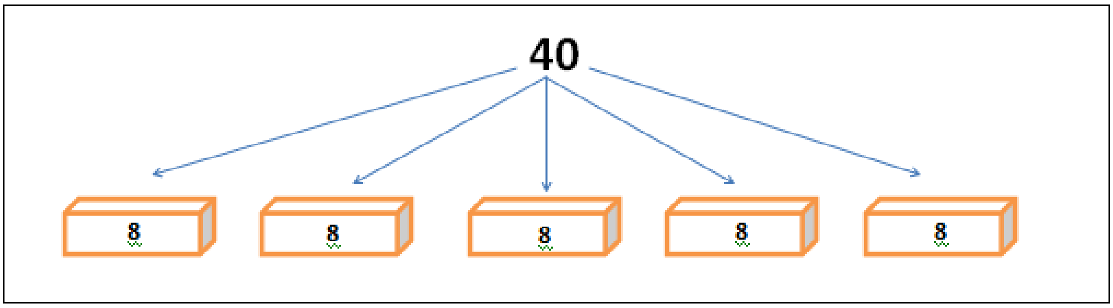
Portanto, há 600 cadeiras no auditório.

Ideia de partição: Neste tipo de problema, se conhece o total de elementos que será dividido em partes iguais, desejando saber o tamanho de cada parte.

Exemplo:

Luciana tem 40 brigadeiros para dividir em 5 caixas. Quantos brigadeiros terão em cada caixa? (FIG. 22)

FIGURA 22 – Resolução de problema de partição



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

As estratégias de resolução usadas pelas crianças podem ser inúmeras, pode-se distribuir de um em um brigadeiro, assim a criança poderá perceber que na primeira rodada 5 brigadeiros já foram distribuídos, logo restam 35 brigadeiros. Como 5 cabe 7 vezes dentro de 35, então cada caixa receberá mais 7 brigadeiros, além do primeiro já distribuído. Portanto, cada caixa terá 8 brigadeiros.

Ideia de medida: Neste tipo de situação, busca-se responder a pergunta "quantos cabem".

Exemplo:

Tenho 48 livros e desejo guardá-los em uma estante. Em cada prateleira cabem 12 livros. Se todos os livros possuem a mesma espessura, quantas prateleiras serão necessárias para acomodar todos os livros?

Resolução:

48: 12 = 4

Serão necessárias 4 prateleiras.

Portanto, diante do exposto, entender os significados de cada uma das operações básicas é fundamental, pois pode amenizar as dificuldades nos cálculos. Hoje já existe uma preocupação maior com o uso de situações-problemas que valorizam os diversos significados das operações. Nesse sentido, segundo Mandarino (2010):

> Explorar os diversos significados das operações fundamentais tem sido considerado essencial para a boa compreensão dessas operações. Tal exploração vai contribuir para que o aluno adquira a capacidade de decidir que operação deve mobilizar, pelo conhecimento das relações entre os elementos da situação. Isto vai além de levar o aluno apenas a aprender a fazer cálculos envolvendo os números que aparecem em uma dada situação. (MANDARINO, 2010, p.119).

Vale ressaltar, porém, que o trabalho com diferentes significados é longo e não se esgota facilmente, sendo preciso insistir com enunciados que envolvam diversos significados. Mandarino (2010, p.120) diz que "esta preocupação não pode ser abandonada ao longo dos anos, conforme o campo numérico se amplia, e a preocupação se volta para a introdução de novas dificuldades no uso dos algoritmos".

3. 3 Construindo os algoritmos das operações

Para alguns docentes, o ensino das operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) está intimamente relacionado ao ensino dos algoritmos das operações. Afinal, ensinar regras é mais fácil do que ensinar os alunos a desenvolver suas ideias e a compreender os significados das operações. Segundo Bigode e Gimenez (2009, p.26) "o algoritmo é uma sequência finita e ordenada de passos (regras) com um esquema de processamento que permite a realização de uma tarefa (resolução de problemas, cálculos, etc.).". Pode-se afirmar, portanto, que um algoritmo é um dispositivo prático, que auxilia na execução de determinada tarefa quando é compreendido.

A expressão **Algoritmo** trata-se de uma palavra latinizada, derivada do nome de **al-Khowarizmi**, matemático árabe do século 19 que entendeu a necessidade de fazer cálculos sem o auxílio de ábacos, dedos e outros recursos. Até então, a estrutura dos cálculos esteve associada às ferramentas que havia à mão: pedras sobre o chão, varetas de bambu, com o desenvolvimento das civilizações outros instrumentos foram sendo utilizados como a calculadora de manivela, a régua de cálculo e, por fim, a calculadora.

Os algoritmos são resultados de técnicas de cálculo que levaram anos para se desenvolver e que também são usados no desenvolvimento de programas computacionais. Portanto, convém ressaltar que o desenvolvimento tecnológico está intimamente ligado ao estudo e à construção de algoritmos. De acordo com Bigode e Gimenez (2009, p.32), "uma aproximação informal da definição de algoritmos é a noção de receita", podendo dizer que um algoritmo segue uma rotina de procedimentos que auxilia a encontrar o resultado da operação em questão, sendo estes automatismos que levam ao resultado. Para tanto, enfatiza-se que o domínio do sistema de numeração decimal é muito importante nesse momento, segundo Loureiro (2004), quando coloca que:

> O reflexo do sistema de numeração decimal num algoritmo evidencia-se na decomposição dos números que nele intervêm, na obrigação de trabalhar ordem a ordem e na recomposição ou reagrupamento das unidades de uma determinada ordem quando o seu número é, ou precisamos que passe a ser, igual ou superior a 10. Esta ação matemática de reagrupamento é informalmente reconhecida como o transporte e algoritmo sem transporte. É comum ouvirmos os professores fazerem distinção entre algoritmo com transporte e algoritmo sem transporte. O algoritmo é o mesmo; os números envolvidos em cada situação é que podem exigir, ou não, a necessidade de reagrupamento. As propriedades das operações permitem justificar muitos dos procedimentos que constituem um algoritmo. (LOUREIRO, 2004, p.1).

Além disso, é importante ter mente que os algoritmos não descrevem as operações aritméticas e que seu ensino fora de um contexto e de forma mecânica pode levar os alunos a cometerem erros. A seguir serão descritos os algoritmos das quatro operações.

3.3.1 O Algoritmo da Adição

Desde muito cedo, as crianças começam a lidar com situações como "juntar" e "acrescentar", o que remete à adição; porém, em qual momento o professor deve iniciar o trabalho com o algoritmo da adição? Segundo Toledo e Toledo (2009, p.68) "convém iniciar o trabalho com o algoritmo da adição apenas quando o professor tiver certeza de que os alunos já dominam o processo de agrupamento e trocas e a representação simbólica dos números no sistema de numeração decimal". Porém, a habilidade para lidar com o algoritmo da adição não é automática, sendo adquirida pelo aluno após tempo e prática. De acordo com Belfort e Mandarino (2008):

> No processo de construção do algoritmo da adição, é recomendável que os primeiros exemplos já envolvam adições com reservas, ou seja, aquelas em que a soma das unidades isoladas é maior do que nove, sendo necessário fazer um agrupamento para a casa das dezenas. Trabalhando com reserva desde o inicio, o aluno compreende porque é necessário começar a operar pelas unidades, isto é, da direita para a esquerda, o que contraria seus hábitos de leitura. Por outro lado, ao trabalharmos os primeiros exemplos sem reservas, o resultado da operação será o mesmo se operarmos da esquerda para a direita ou vice-versa. Tal estratégia não permite ao aluno perceber que, na utilização do algoritmo, há uma nítida vantagem em se iniciar pela ordem das unidades. (BELFORT; MANDARINO, 2008, p.8).

No exemplo a seguir, o algoritmo da adição é trabalhado fazendo uso da reserva no quadro de valor posicional, como demonstrado na figura 23:

FIGURA 23 – Exemplo de algoritmo da adição no QVP

C	D	U
3 + 4	5 6	9 3

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Assim, para somar os números acima, os alunos devem somar cada ordem. Para tanto, o professor deverá trabalhar primeiro, a ideia de juntar as ordens, como segue na figura 24, abaixo:

FIGURA 24 – Soma de ordens no QVP

C	D	U
3 + 4	5 6	9 3
7	11	12

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Dessa forma, somando 9 unidades com 3 unidades obtém-se 12 unidades, que equivalem a 1 dezena e 2 unidades. Assim, acrescentando 1 dezena na ordem das dezenas, ficam 12 dezenas, restando 2 unidades na ordem das unidades (FIG. 25).

FIGURA 25 – Agrupamento na ordem das unidades no QVP

	C	D	U
	3	5	9
+	4	6	3
	7	12	2

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Da mesma forma, 12 dezenas equivalem a 1 centena e 2 dezenas, logo acrescentamos 1 centena na ordem das centenas, ficando com 8 centenas e 2 dezenas na ordem das dezenas.

FIGURA 26 – Agrupamento final no QVP

	C	D	U
	3	5	9
+	4	6	3
	8	2	2

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Portanto, no caso exemplificado acima, tem-se que: **7C, 11D, 12U** correspondem a **8C, 2D, 2U**

Outra informação que vale destacar é que, também, a utilização do ábaco inicialmente pode contribuir significativamente na aprendizagem dos alunos. Segundo Toledo e Toledo (2009), o professor deve observar alguns aspectos importantes no trabalho em sala de aula com o algoritmo da adição. Para os autores:

> Se o algoritmo é construído para facilitar os cálculos, não tem sentido armar contas do tipo 3 + 4, pois nessas operações ele em nada contribui para encontrar o resultado. Também merece destaque o fato de que, quando os alunos realizam os cálculos no ábaco para depois representá-los no caderno, desaparecem totalmente algumas dificuldades muito comuns. Uma delas é a compreensão de que unidade deve ser colocada embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, e assim por diante. (TOLEDO; TOLEDO, 2009, p.109).

3.3.2 O Algoritmo da subtração

A finalidade ao apresentar o algoritmo da subtração para as crianças é de sistematizar e facilitar o processo dos cálculos. Contudo, muitos fatores fazem da subtração uma operação mais difícil de ser trabalhada do que a adição, pois, de acordo com Toledo e Toledo (2009):

> O raciocínio das crianças se concentra em aspectos positivos da ação, percepção e cognição. Os aspectos negativos, como inverso e recíproco, são construídos apenas mais tarde. Além disso, a subtração envolve ideias bastante diferentes entre si, como tirar, comparar, completar. (TOLEDO; TOLEDO, 2009, p.110).

Portanto, ao iniciar o trabalho com o algoritmo da subtração, o uso de materiais concretos e do QVP é muito bem vindo. Segundo Belfort e Mandarino (2008, p.6) "o uso de material concreto facilita bastante a compreensão dos algoritmos e ajuda a consolidar a aprendizagem das características de nosso sistema de numeração decimal". Através deles, então, é possível propor diversas situações para os alunos, ajudando, assim, a percepção das sequências de ações envolvidas no algoritmo, conforme é demonstrado no exemplo abaixo (FIG. 27).

FIGURA 27 – Exemplo do algoritmo da subtração no QVP

	C	D	U
	3	2	8
-	1	4	9

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

No caso do exemplo acima, o aluno deve perceber que não pode tirar 9 unidades de 8 unidades. Assim, precisa visualizar que 2 dezenas equivalem a 20 unidades, podendo usar 10 unidades a favor, na ordem das unidades. Costuma-se usar a expressão “pedir emprestado” ou “pegar emprestado”. Porém, de acordo com Toledo e Toledo (2009):

> Esse termo é inadequado, pois se pede emprestado, mas não se paga o empréstimo feito. Além disso, o aluno que não compreende bem o processo de agrupamentos e trocas e só faz contas com lápis e papel, sem agir sobre materiais de contagem, não entende por que pede 1 emprestado e recebe 10. Quando se usa o termo “trocar”, no entanto, fica claro que sempre se troca uma nota de dinheiro por outras que, somadas, representam o mesmo valor da primeira. (TOLEDO; TOLEDO, 2009, p.117).

Assim, continuando a resolução, tem-se, de acordo com a figura 28:

FIGURA 28 – Ação de troca no exemplo do algoritmo da subtração no QVP

C	D	U
3	1	8 + 10 = 18
- 1	4	9
		9

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Dessa forma, como foi usada 1 dezena = 10 unidades, restou, na ordem das dezenas, 1 dezena, ficando com 18 unidades na ordem das unidades. Da mesma forma, sabe-se que 3 centenas equivalem a 30 dezenas e que, logo, podem ser usadas 10 dezenas. Assim, tem-se, na figura 29, que:

FIGURA 29 – Ação de troca no exemplo do algoritmo da subtração no QVP

C	D	U
2	1+ 10 = 11	18
- 1	4	9
1	7	9

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Assim, como foi utilizada 1 centena = 10 dezenas, restou, na ordem das centenas, 2 centenas, ficando com 11 dezenas na ordem das dezenas. Assim, o resultado final da operação será 179, pois se tornou possível, agora, tirar 9 unidades das 18 unidades, 4 dezenas das 11 dezenas e, também, 1 centena das 2 centenas.

3.3.3 O Algoritmo da Multiplicação

Se uma criança não compreende o conceito envolvido na operação de multiplicação, muito provavelmente irá memorizar os fatos básicos e resolver mecanicamente seu algoritmo. Porém, há de se deixar claro que quando se trabalha o algoritmo da multiplicação, se está trabalhando com a propriedade distributiva. De acordo com Vergnaud (2009, p.58) “a distributividade da multiplicação em relação à adição deve necessariamente ser explicada às crianças, no caso de se querer que elas compreendam a regra operatória da multiplicação”. Abaixo, na figura 30, pode ser observado um exemplo envolvendo o algoritmo da multiplicação no QVP:

FIGURA 30 – Algoritmo da multiplicação no QVP

C	D	U
1 x	3 1	5 4

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Portanto: **135 x 14 = 135 x (10 + 4)**

Para tanto, multiplica-se 135 por 10 e 135 por 4 e, somente após esses produtos efetuados, é que se adiciona os resultados, obtendo o produto final, conforme indicado na figura 31, a seguir:

FIGURA 31 – Algoritmo da multiplicação na ordem das unidades no QVP

	C	D	U
	1	3	5
x		1	4
			20

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

A ideia de agrupamento utilizada no algoritmo da adição volta a aparecer aqui, já que 20 unidades correspondem a 2 dezenas e, portanto, haverá 2 dezenas a serem somadas na ordem das dezenas, como é mostrado na figura 32, abaixo:

$$3 \times 4 = 12 \rightarrow 12 + 2 = 14 \text{ dezenas}$$

FIGURA 32 – Algoritmo da multiplicação na ordem das dezenas no QVP

	C	D	U
	1	3	5
x		1	4
		14	0

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Da mesma forma, tem-se que 14 dezenas correspondem a 1 centena e 4 dezenas, ficando assim o QVP (FIG. 33):

FIGURA 33 – Algoritmo da multiplicação na ordem das dezenas no QVP

	C	D	U
	1	3	5
x		1	4
	5	4	0

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Tem-se, portanto que: **4 x 1 = 4 → 4 + 1 = 5** centenas

Multiplicou-se, antes, 135 por 4, agora, passa-se à multiplicação de 135 por 10 para que sejam adicionados os produtos, como indicado na figura 34, abaixo:

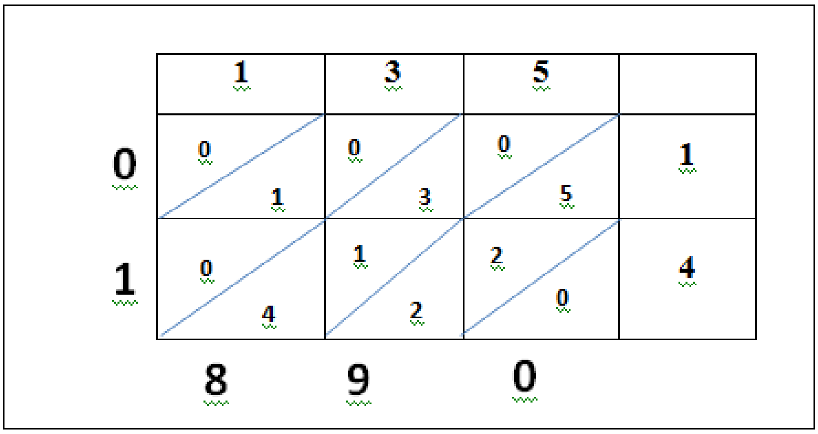
FIGURA 34 – Algoritmo da multiplicação finalizado no QVP

	Um	C	D	U
		1	3	5
		x	1	4
		5	4	0
+	1	3	5	0
	1	8	9	0

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Vale destacar que outros algoritmos não convencionais podem ser usados na resolução de multiplicações. O método da gelosia é um deles. Segundo Bigode e Gimenez (2009, p.112) "o método da gelosia tem esse nome pela aparência de uma janela. De origem indo-árabe, foi utilizado pelo matemático al-Karaji, no final do século IX, e utilizado na Europa durante a Idade Média". A seguir, na figura 35, o funcionamento deste método:

FIGURA 35 – Funcionamento do Método da gelosia



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Esse método funciona da seguinte forma: em cada quadradinho registra-se o produto dos números das linhas e colunas correspondentes, dividindo cada espaço em dois, como nos mostra a figura acima. Depois de efetuados os produtos, somam-se os números de cada diagonal formada. Portanto, o resultado da multiplicação acima será 1890. Nota-se, pelo exemplo acima, que, com esse método, evita-se, em grande parte, erros no “vai um” muito cometido pelos alunos. Os egípcios também apresentavam um algoritmo próprio para a multiplicação. Para multiplicar 135 x 14, eles usavam uma tabela com sucessivas duplicações. Como segue na figura 36, abaixo:

FIGURA 36 – Funcionamento do Método egípcio

1	**14**
2	**28**
4	**56**
8	**112**
16	**224**
32	**448**
64	**896**
128	**1792**

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

De acordo com o método egípcio, os números da segunda coluna correspondem às potências de 2 que compõem o número 14. Assim, como 135 = 128 + 4 + 2 + 1, então, 1792 + 56 + 28 + 14 = 1890.

Outro algoritmo também utilizado é o dos **produtos parciais**, como verificado abaixo na figura 37:

FIGURA 37 – Método dos produtos parciais

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ & \mathbf{X} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \end{array}$$

135 = 100 + 30 + 5

14 = 10 + 4

100 x 10 = 1000

100 x 4 = 400

30 x 10 = 300

30 x 4 = 120

5 x 10 = 50

5 x 4 = 20

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Portanto: 1000 + 400 + 300 + 120 + 50 + 20 = 1890, já que esse algoritmo utiliza a decomposição dos fatores envolvidos.

3.3.4 O algoritmo da divisão

Talvez esse seja o algoritmo cujas crianças apresentem maior dificuldade. As **subtrações sucessivas** são uma boa opção para iniciar o trabalho com a divisão, tendo, como ponto de partida, a relação entre a subtração e a divisão. Belfort e Mandarino (2008) dizem que:

> Este algoritmo é uma boa opção para os alunos que tenham dificuldades na compreensão e utilização do algoritmo da divisão, apresentado através dos processos longo e abreviado. Quando o processo das subtrações sucessivas é bem explorado, a criança consegue efetuar as etapas necessárias com segurança e estabelece mais facilmente relações com o algoritmo longo da divisão, o que contribui para a compreensão de todo o processo. (BELFORT; MANDARINO, 2008, p.21).

Observe, na figura a seguir, a divisão entre 17 e 4 através de subtrações sucessivas:

FIGURA 38 – Método de subtrações sucessivas

17	**4**
- 4	**1**
13	
- 4	**1**
9	
- 4	**1**
5	
- 4	**1**
1	

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Tem-se, no exemplo acima, 4 grupos de 4 restando 1. Esse método é importante e pode contribuir em uma dificuldade recorrente nas crianças, a de que o resto não pode ser maior do que o divisor. Segundo Belfort e Mandarino (2008, p.23) “pelo processo de subtrações sucessivas também fica fácil convencer seu aluno que o resto de uma divisão nunca pode ser igual ou maior que o divisor, pois, caso contrário, ainda seria possível fazer mais uma subtração".

Observe o exemplo envolvendo o **algoritmo da divisão**, buscando dividir 71 por 4. Primeiro o aluno precisa compreender que o número 71 é composto de 7 dezenas e 1 unidade. Assim, ao separar o 7 do 1, está sendo efetuada a divisão das dezenas (FIG. 39).

FIGURA 39 – Algoritmo da divisão

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{7`\,1} & \mathbf{4} \\ \hline & \mathbf{1} \end{array}$$

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

A resposta 1 no quociente indica que ao dividir 7 dezenas em 4 grupos, haverá 1 dezena em cada grupo. Quando se multiplica 1 x 4, obtém-se a quantidade de dezenas que foram distribuídas, nesse caso, 4 dezenas. Dessa forma, ao subtrair, extrai-se das dezenas a quantidade já distribuída (FIG. 40).

FIGURA 40 – Algoritmo da divisão

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{7`\,1} & \mathbf{4} \\ \cline{2-2} \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \cline{1-1} \mathbf{3} & \end{array}$$

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Portanto ainda há 3 dezenas a serem distribuídas. Como elas equivalem a 30 unidades, então tem-se ainda para distribuir 31 unidades em 4 grupos, conforme é demonstrado na figura 41, a seguir:

FIGURA 40 – Algoritmo da divisão

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{7`\,1`} & \mathbf{4} \\ \cline{2-2} \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \cline{1-1} \mathbf{3\,1} & \end{array}$$

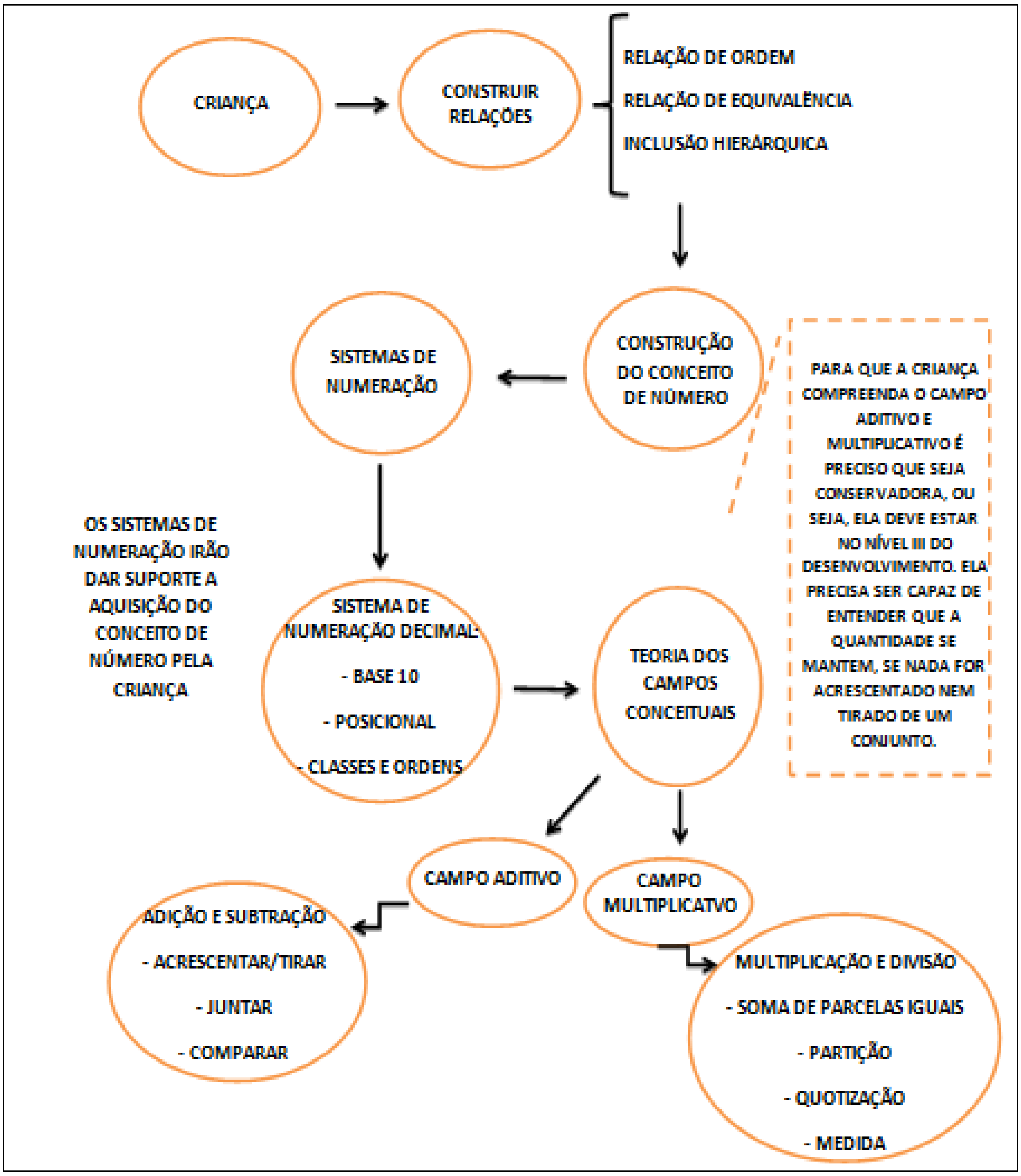
Fonte: Elaborado pela pesquisadora

O aluno, então, nesse caso, precisa pensar qual número que multiplicado por 4 resultará em 31 ou em um número mais próximo de 31. Então, tem-se que 7 x 4 = 28.

Logo, das 31 unidades, é possível distribuir 28 em 4 grupos, ficando 7 unidades em cada grupo e ainda restando 3 unidades que não foram divididas.

Diante do exposto, pode-se resumir o que foi dito neste capítulo em um esquema como segue abaixo, na figura 42:

FIGURA 42 – Fluxograma da construção dos campos conceituais



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

4 ANALISE DOS DADOS

A partir dos dados coletados, torna-se necessário analisar os erros cometidos pelos estudantes durante a aplicação dos testes diagnósticos, das sessões do grupo focal, das entrevistas e dos questionários descritivos, sempre buscando interpretá-los sob a luz das ideias dos autores que fundamentam teoricamente esse trabalho. De acordo com Zatti, Agranionih e Euricone (2010):

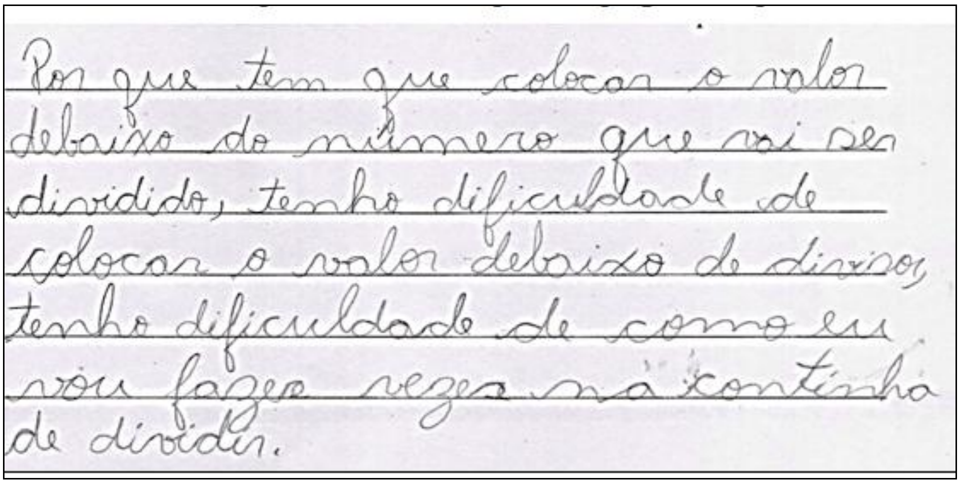
> [...] ao analisar as respostas dos alunos, o fundamental não é o acerto ou o erro em si, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que podem indicar dificuldades de aprendizagem. Nesse sentido, a análise dos erros é uma alternativa que pode contribuir no estudo das dificuldades encontradas na aprendizagem da Matemática, buscando-se conhecer as dificuldades para então criar alternativas que visem à sua superação. (ZATTI; AGRANIONIH; EURICONE, 2010, p.117).

4.1 Levantamentos Iniciais

Quando a pesquisa teve inicio, antes de qualquer etapa da coleta de dados, fez-se um levantamento inicial com alguns alunos que não eram os participantes da pesquisa, sem que eles se identificassem, e com professoras do 2° ciclo que lecionam na escola escolhida como campo de pesquisa.

No questionário aplicado aos alunos do 7° ano constavam duas perguntas: o primeiro questionamento feito aos estudantes foi: "**Você sente dificuldade ao resolver uma conta de divisão? Por quê?**". A seguir são apresentadas algumas respostas dadas pelos discentes (FIG. 43). Optou-se pela inserção de letras no lugar dos nomes dos sujeitos dessa pesquisa a fim de resguardá-los.

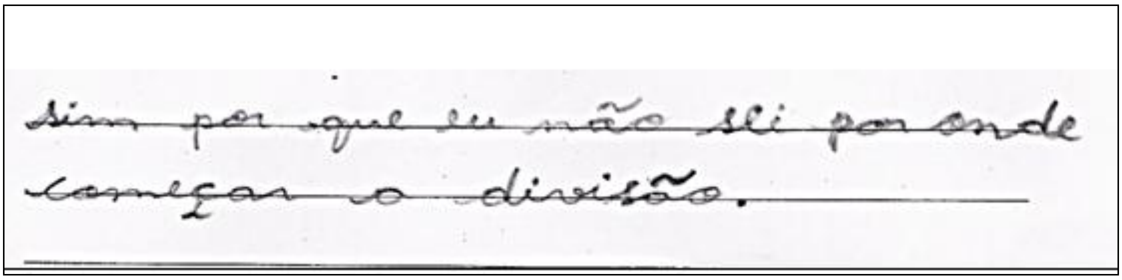
FIGURA 43- Resposta do aluno X à primeira pergunta do questionário


Por que tem que colocar o valor debaixo do número que vai ser dividido, tenho dificuldade de colocar o valor debaixo do divisor, tenho dificuldade de como eu vou fazer vezes na contínha de dividir.

Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se notar que a dificuldade que o aluno X sente ao resolver uma divisão está ligada à escolha do produto a ser utilizado, o que pode ser percebido pela resposta dada: ”[...] tenho dificuldade de colocar o valor debaixo do divisor [...]”, ou seja, o aluno indicou a dificuldade a respeito de qual número deve-se colocar no quociente que, ao ser multiplicado pelo divisor, resultará no dividendo ou em um valor mais próximo.

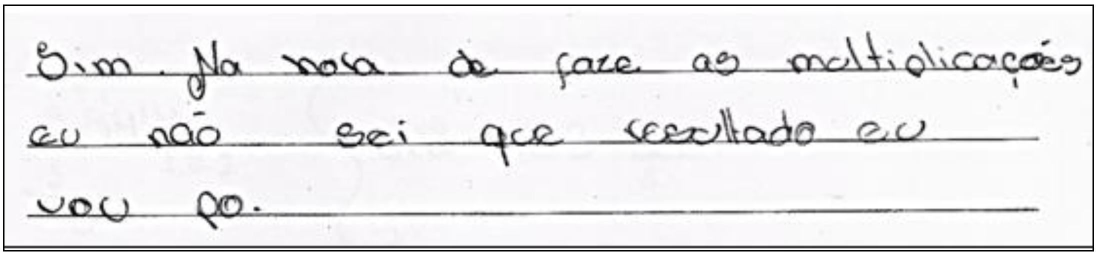
FIGURA 44 - Resposta do aluno Y à primeira pergunta do questionário



Fonte: Dados da pesquisa

Quando o aluno Y afirma que não sabe por onde começar, como mostra a figura 44, acima, ele está informando que não possui domínio do processo algorítmico, não compreendendo a lógica desse processo e assim, sente-se “perdido” quando se depara com o algoritmo da divisão pela frente.

FIGURA 45 - Resposta do aluno Z à primeira pergunta do questionário

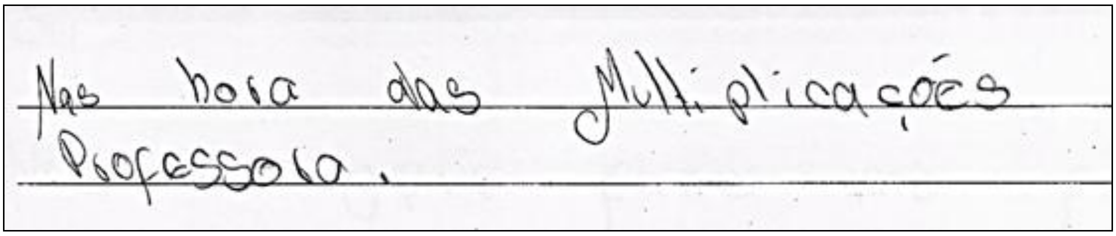


Fonte: Dados da pesquisa

O aluno Z, na figura 45, está dizendo que não sabe o resultado que irá colocar na hora de resolver as multiplicações, portanto, sua dificuldade não está ligada à escolha do produto a ser utilizado, mas no resultado desse produto, indicando que ele sente dificuldade nos fatos da multiplicação.

O segundo questionamento feito aos alunos dizia: **“Para você o que é mais difícil na operação de divisão?”**, sendo essas algumas respostas dadas pelos alunos:

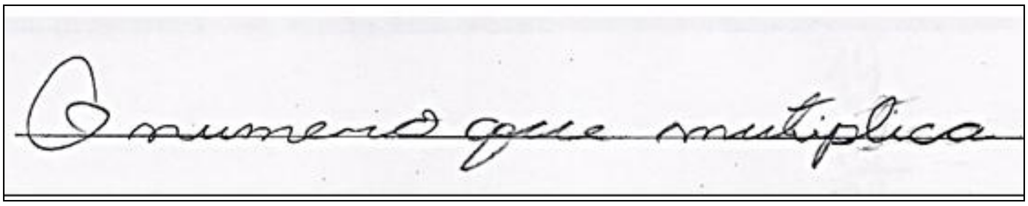
FIGURA 46 - Resposta do aluno B à segunda pergunta do questionário



Fonte: Dados da pesquisa

A figura 46 indica, como visto, que o aluno B ressalta que sua dúvida acontece no momento em que necessita utilizar a multiplicação durante a resolução do algoritmo da divisão.

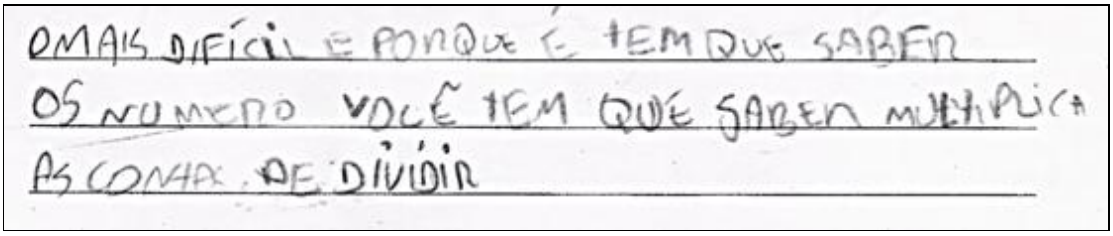
FIGURA 47 - Resposta do aluno C à segunda pergunta do questionário



Fonte: Dados da pesquisa

O mesmo ocorre com o aluno C, porém, esse foi mais especifico, já que sua dúvida ocorre no momento da escolha do produto que mais se aproxima ou será o próprio número a ser dividido.

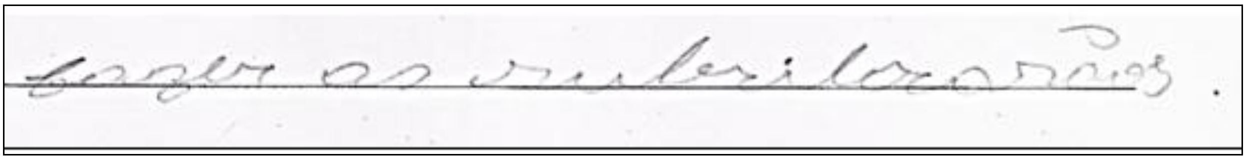
FIGURA 48 - Resposta do aluno D à segunda pergunta do questionário



Fonte: Dados da pesquisa

Como demonstrado na figura 48, o aluno D também sente dificuldades durante a resolução do algoritmo no momento que necessita utilizar a multiplicação.

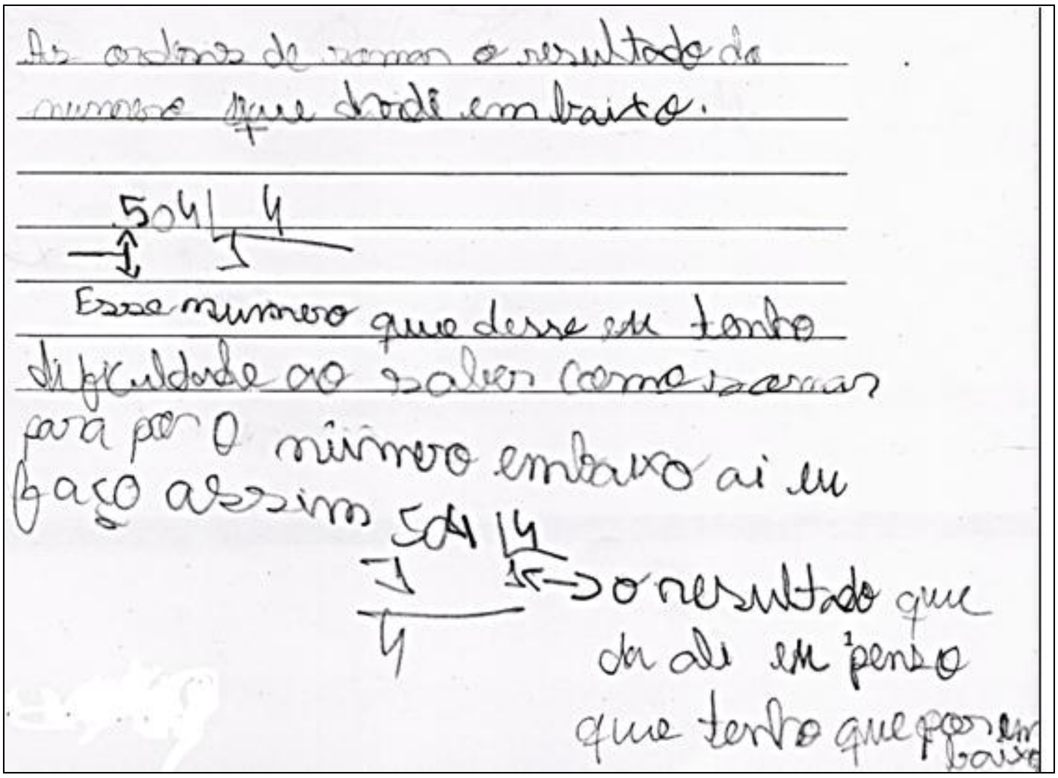
FIGURA 49 - Resposta do aluno E à segunda pergunta do questionário



Fonte: Dados da pesquisa

Como relatado pelo aluno E, sua dúvida difere dos alunos anteriores, já que ele afirmou que sente dificuldades nas subtrações que necessitará realizar.

FIGURA 50 - Resposta do aluno F à segunda pergunta do questionário



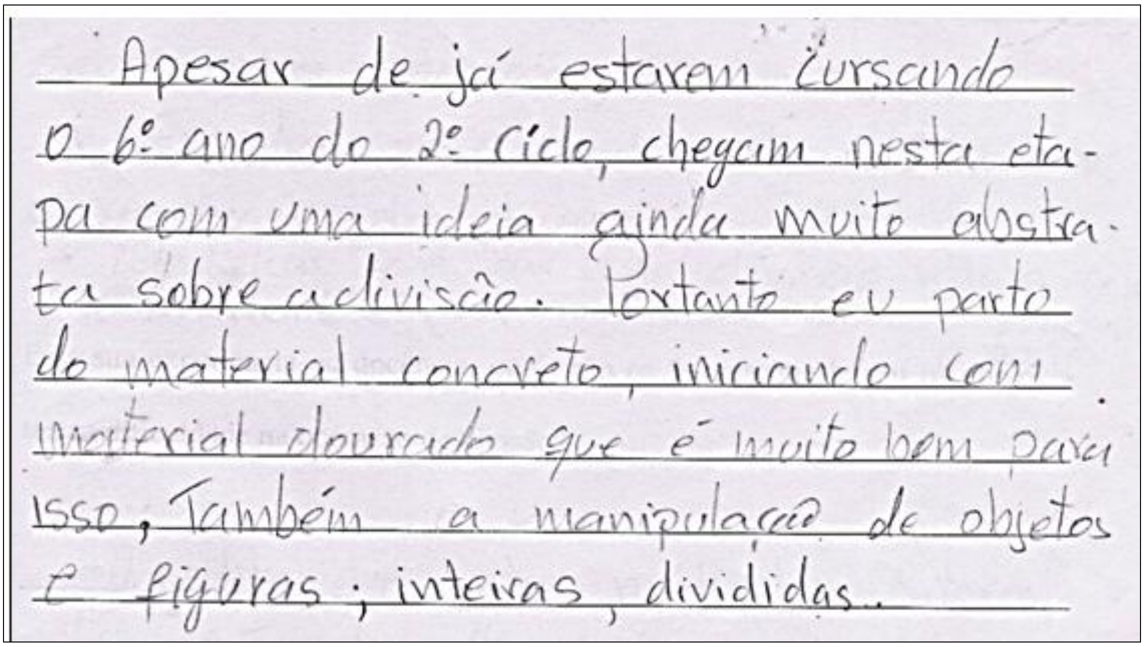
Fonte: Dados da pesquisa

Analisando as respostas dadas pelos alunos pode-se afirmar que o domínio dos fatos da multiplicação, a escolha do produto a ser usado e as subtrações a serem realizadas são pontos que os alunos sentem dificuldade na hora de resolver o algoritmo. Além disso, na última resposta apresentada, o aluno F diz que pensa que o resultado que coloca no quociente deve ser colocado também nos seus cálculos para efetuar a subtração, indicando que ele não tem domínio do processo algorítmico.

Além das perguntas colocadas ao grupo de alunos, foi pedido a duas professoras do 2º ciclo da escola pesquisada que respondessem alguns questionamentos. O questionário constava de quatro perguntas.

A primeira pergunta dizia o seguinte: “**Como você aborda a operação de divisão nas turmas que leciona?”**. Eis as respostas dadas pelas docentes à questão:

Figura 51 – Resposta da professora X à primeira pergunta do questionário

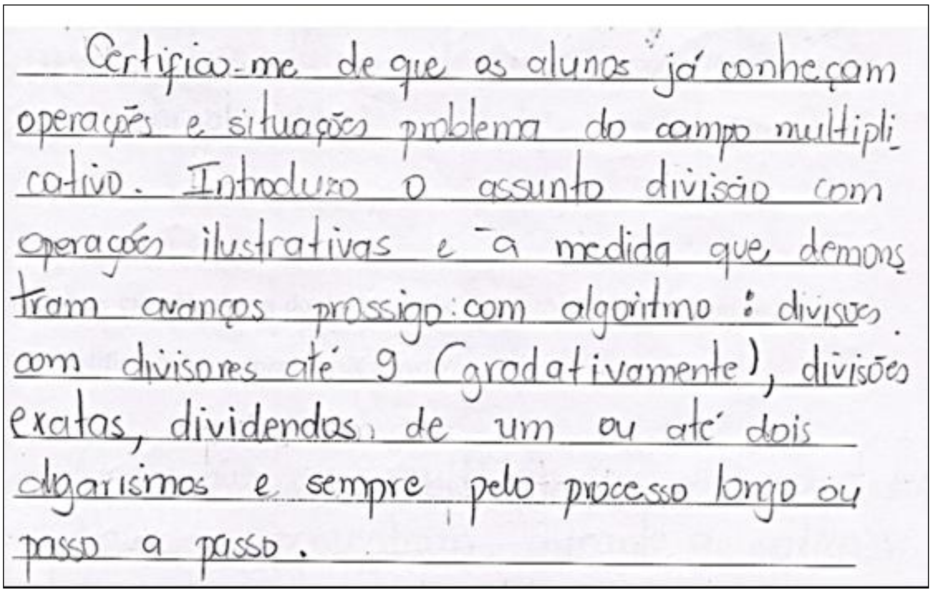


Apesar de já estarem cursando
o 6º ano do 2º Ciclo, chegam nesta eta-
pa com uma ideia ainda muito abstra-
ta sobre a divisão. Portanto eu parto
do material concreto, iniciando com
material dourado que é muito bem para
isso, Também a manipulação de objetos
e figuras; inteiras, divididas.

Fonte: Dados da pesquisa

Como visto acima, a professora X considera o material concreto como uma ferramenta para se ensinar a divisão, já que inicia partindo da manipulação com o material dourado. A professora Y (FIG. 52), por sua vez, utiliza uma outra metodologia, pois tenta identificar até que ponto os alunos conhecem as ideias do campo mutliplicativo, para, somente depois, introduzir a divisão com situações ilustrativas.

FIGURA 52 – Resposta da professora Y à primeira pergunta do questionário

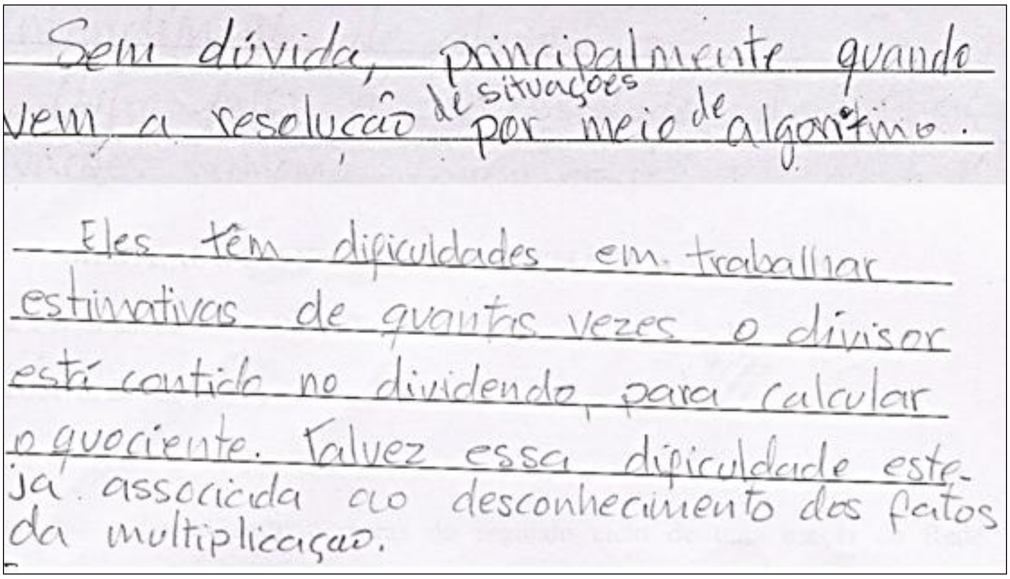

Certifico-me de que os alunos já conheçam
operações e situações problema do campo multipli-
cativo. Introduzo o assunto divisão com
operações ilustrativas e à medida que demons-
tram avanços prossigo: com algoritmo : divisões
com divisores até 9 (gradativamente), divisões
exatas, dividendos, de um ou até dois
algarismos e sempre pelo processo longo ou
passo a passo.

Fonte: Dados da pesquisa

As professoras relataram abordar a operação de divisão através de materiais manipulativos e ilustrações, até que os alunos demonstrem terem entendido a ideia da divisão. Uma das docentes coloca que o uso do material dourado é um bom aliado nesse momento, afirmando que o uso desse material facilita a visualização das relações numéricas abstratas dando a elas uma imagem concreta e, dessa forma, facilitando a compreensão dos algoritmos e dando significado a eles, já que auxilia no ensino e na aprendizagem do sistema de numeração decimal. É possível, portanto, afirmar que trabalhar com os alunos as trocas de dezena para unidades ou centenas para dezenas e vice-versa, ajuda na percepção dos agrupamentos e trocas próprios das operações aritméticas.

A pergunta seguinte feita às docentes foi: **“Você considera a operação de divisão a mais difícil de ser ensinada e aprendida? Justifique”.** Seguem as respostas dadas pelas professoras.

FIGURA 53 – Resposta da professora X à segunda pergunta do questionário

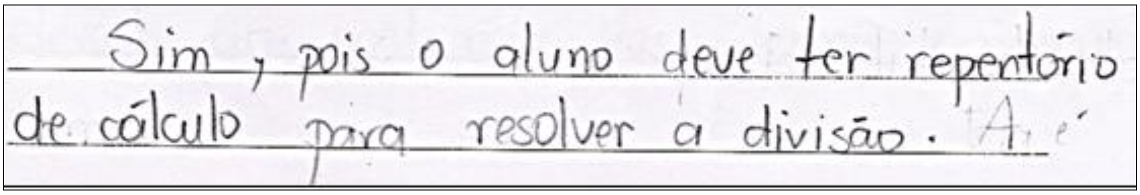

Sem dúvida, principalmente quando vem a resolução de situações por meio de algoritmo.

Eles têm dificuldades em trabalhar estimativas de quantas vezes o divisor está contido no dividendo, para calcular o quociente. Talvez essa dificuldade esteja associada ao desconhecimento dos fatos da multiplicação.

Fonte: Dados da pesquisa

No segundo questionamento feito às docentes, a professora X afirma que a divisão é a operação mais difícil a ser ensinada e ressalta que essa dificuldade se acentua quando se trabalha com situações-problemas, cuja resolução apresentará um algoritmo. A professora Y (FIG. 54) também afirma ser a operação mais difícil, pontuando apenas que o aluno precisa de um repertorio de cálculo.

FIGURA 54 – Resposta da professora Y à segunda pergunta do questionário

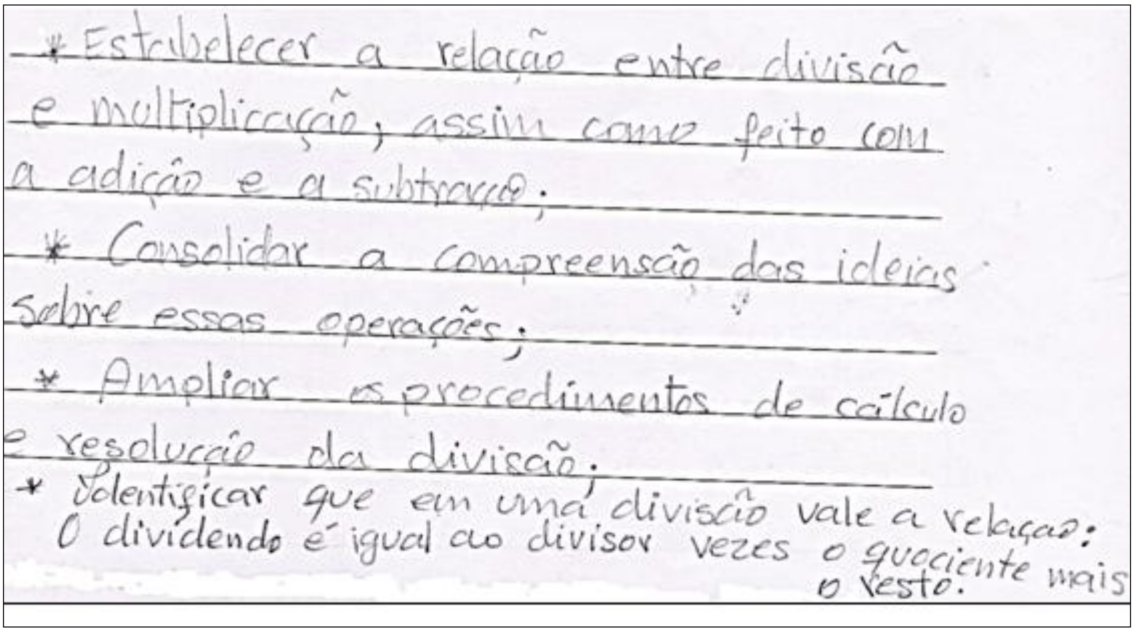

Sim, pois o aluno deve ter repertório de cálculo para resolver a divisão.

Fonte: Dados da pesquisa

Como pode ser observado, as professoras afirmam que a divisão é a operação mais difícil de ser ensinada e aprendida pela dificuldade que os alunos sentem de fazer as escolhas dos produtos a serem usados, pela falta de domínio nos fatos da multiplicação e, principalmente, quando há resolução de uma situação-problema que envolve o uso do algoritmo.

A terceira pergunta pedia que: **“Enumere as dificuldades mais frequentes que os alunos demonstram ter ao resolverem uma divisão”.**

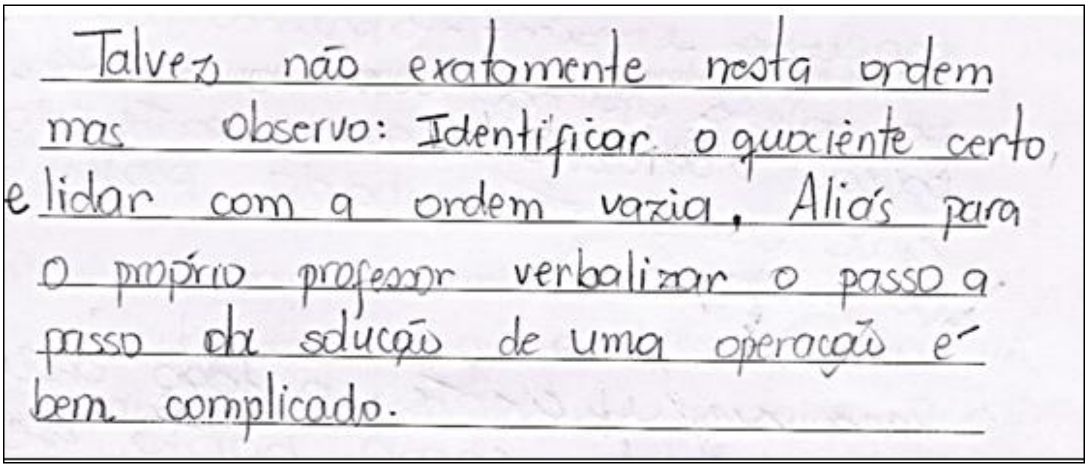
FIGURA 55 – Resposta da professora X à terceira pergunta do questionário


* Estabelecer a relação entre divisão e multiplicação, assim como feito com a adição e a subtração;
* Consolidar a compreensão das ideias sobre essas operações;
* Ampliar os procedimentos de cálculo e resolução da divisão.
* Identificar que em uma divisão vale a relação: O dividendo é igual ao divisor vezes o quociente mais o resto.

Fonte: Dados da pesquisa

Ao pedir para enumerar as dificuldades mais frequentes dos alunos durante a resolução de uma divisão, a professora X relata que os alunos não têm domínio das ideias do campo multiplicativo, já que não conseguem estabelecer a relação entre as operações desse campo e não compreendem as suas ideias. Além disso, ela pontua que os alunos não conseguem entender a relação que há entre o dividendo, o divisor, o quociente e o resto.

FIGURA 56 – Resposta da professora Y à terceira pergunta do questionário


Talvez não exatamente nesta ordem mas observo: Identificar o quociente certo e lidar com a ordem vazia. Aliás para o próprio professor verbalizar o passo a passo da solução de uma operação é bem complicado.

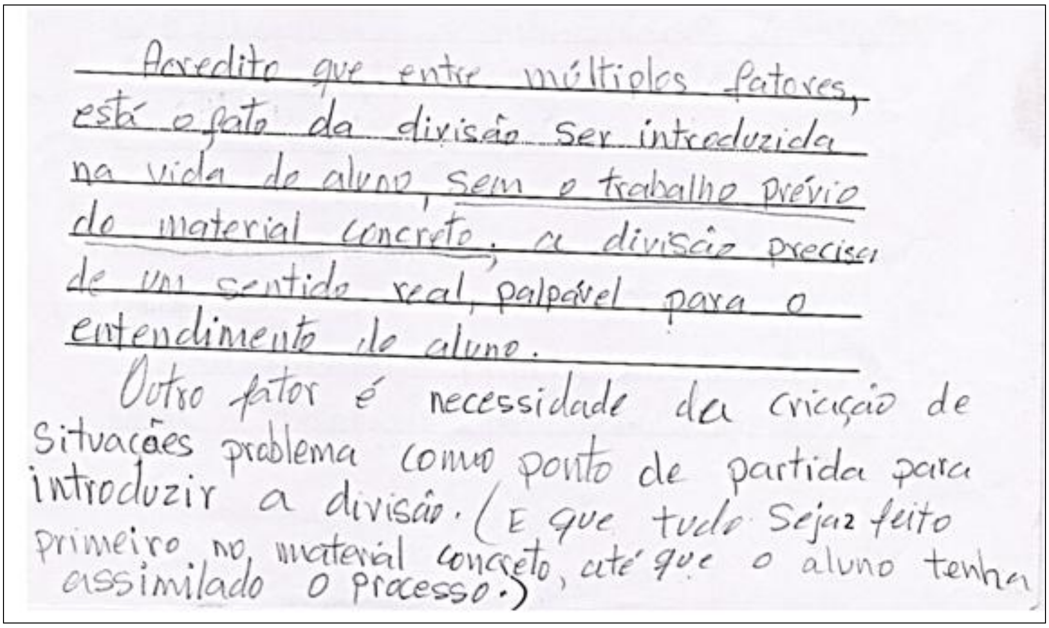
Fonte: Dados da pesquisa

A professora Y, por sua vez, já considera que lidar com a ordem vazia é um problema, tanto para o aluno como, também, para o próprio professor.

Portanto, como pode ser verificado nas respostas dadas, as professoras relataram, de acordo com a experiência de cada uma, as dificuldades dos alunos na operação de divisão, sendo elas: compreender a relação entre a divisão e a multiplicação; compreender a ideia da divisão; identificar a relação entre o dividendo, o divisor, o quociente e o resto; além de lidar com a ordem vazia, que acaba sendo um problema para o próprio professor no momento de ensinar.

A quarta e última pergunta feita às professoras dizia que: **"Pela sua experiência na docência, quais são os fatores que levam os alunos a terem dificuldade na operação de divisão?".** A professora X respondeu como mostra a figura 57, abaixo:

FIGURA 57 – Resposta da professora X à quarta pergunta do questionário

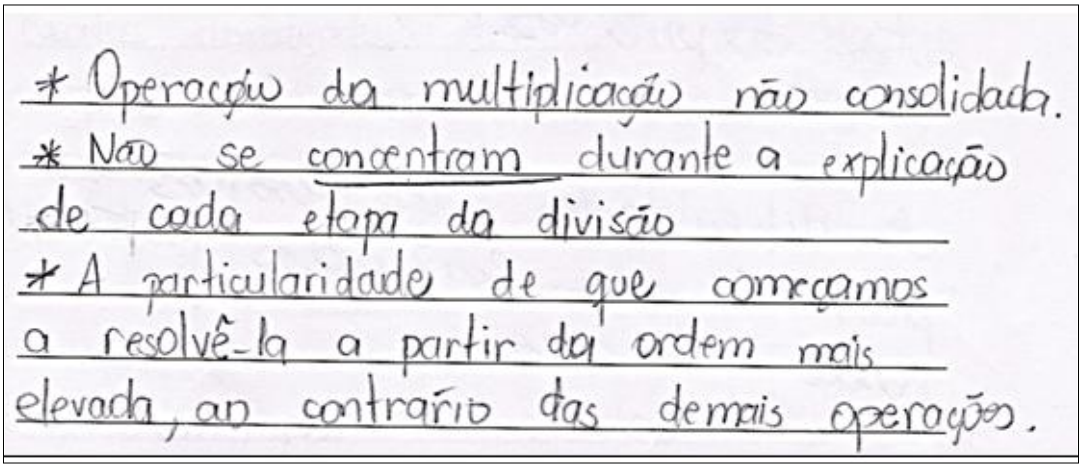


Acredito que entre múltiplos fatores,
está o fato da divisão ser introduzida
na vida do aluno, sem o trabalho prévio
do material concreto, a divisão precisa
de um sentido real, palpável para o
entendimento do aluno.
Outro fator é necessidade da criação de
situações problema como ponto de partida para
introduzir a divisão. (E que tudo seja feito
primeiro no material concreto, até que o aluno tenha
assimilado o processo.)

Fonte: Dados da pesquisa

Como pode se perceber, de acordo com a professora X (FIG. 57), vários fatores influenciam para a dificuldade dos alunos nessa operação, entre eles: o fato de a operação de multiplicação não estar consolidada para o aluno, a introdução da operação de divisão ser feita sem o uso de materiais manipulativos para que haja, assim, um sentido real na construção da ideia dessa operação. Já a professora Y afirma, como principais fatores, a falta de atenção e interesse dos alunos também é um fator que atrapalha na aprendizagem, além de ser uma operação cujo algoritmo é iniciado pela maior ordem indo contra os outros algoritmos estudados pelos alunos, como é colocado na figura 58:

Figura 58 – Resposta da professora Y à quarta pergunta do questionário


* Operação da multiplicação não consolidada.
* Não se concentram durante a explicação de cada etapa da divisão
* A particularidade de que começamos a resolvê-la a partir da ordem mais elevada, ao contrário das demais operações.

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, serão apresentados os resultados obtidos na aplicação dos testes diagnósticos seguidos de suas análises.

4.2 Os Testes Diagnósticos: resultados e análise

Como relatado anteriormente, o segundo instrumento de coleta de dados diz respeito aos testes diagnósticos, cujos resultados obtidos acompanhados de suas respectivas análises serão apresentados nos próximos subitens.

4.2.1 O primeiro teste diagnóstico e seus resultados

Após a aplicação e correção dos testes diagnósticos foi feita a tabulação dos erros e acertos. Vale ressaltar que para cada divisão foi inserida em uma letra a fim de facilitar a tabulação dos dados. A seguir, portanto, seguem-se as porcentagens dos acertos, erros e ausência de respostas de cada divisão, como indicado na Tabela 2:

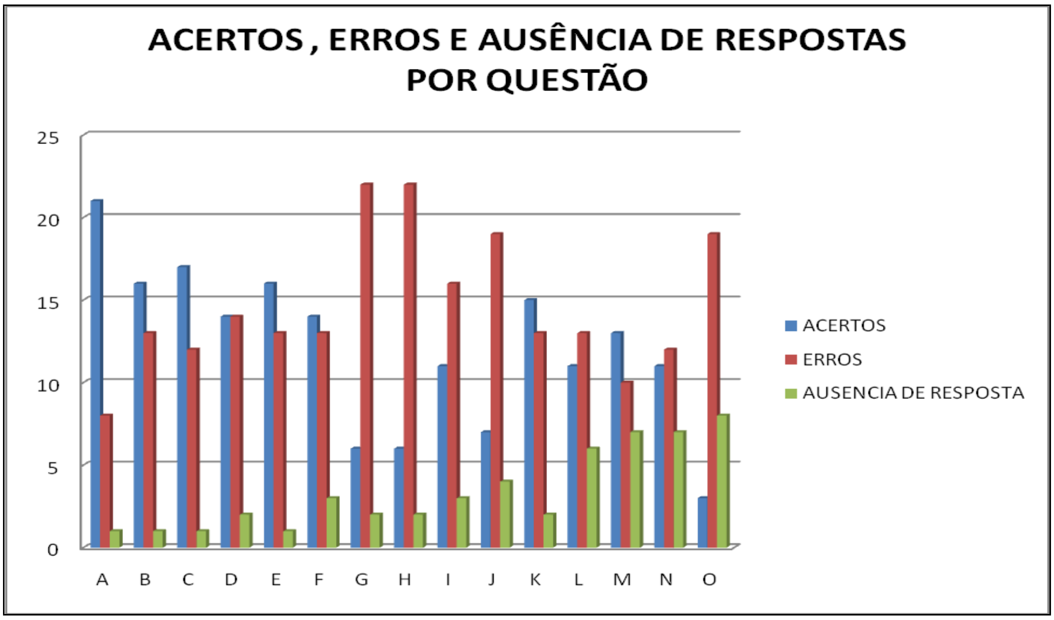
TABELA 2 – Acertos e erros de cada divisão do teste diagnóstico

DIVISÕES	ACERTOS	ERROS	AUSENCIA DE RESPOSTAS	(%) Acertos	(%) Erros	(%) AUSENCIA DE RESPOSTA
A	21	8	1	70	27	3
B	16	13	1	54	43	3
C	17	12	1	57	40	3
D	14	14	2	47	47	6
E	16	13	1	54	43	3
F	14	13	3	47	43	10
G	6	22	2	20	74	6
H	6	22	2	20	74	6
I	11	16	3	37	53	10
J	7	19	4	23	64	13
K	15	13	2	50	44	6
L	11	13	6	37	43	20
M	13	10	7	43	34	23
N	11	12	7	37	40	23
O	3	19	8	10	63	27

Fonte: Dados da pesquisa

Portanto, verificando esses dados tem-se graficamente que:

GRÁFICO 1 - Acertos e erros de cada divisão do teste diagnóstico



Fonte: Dados da pesquisa

A tabela e o gráfico trazem as porcentagens de acertos e erros de cada uma das divisões do primeiro teste diagnóstico. Através da leitura desses instrumentos de análise, percebe-se que a primeira divisão foi a que apresentou o maior número de acertos, enquanto a última foi a de maior ausência de respostas. As divisões representadas no gráfico pelas letras G e H foram as que apresentaram o maior número de erros, tais divisões apresentavam um zero intermediário no quociente e um zero ao final do quociente, respectivamente. A seguir, serão apresentados os erros cometidos pelos alunos em cada uma dessas divisões do primeiro teste diagnóstico.

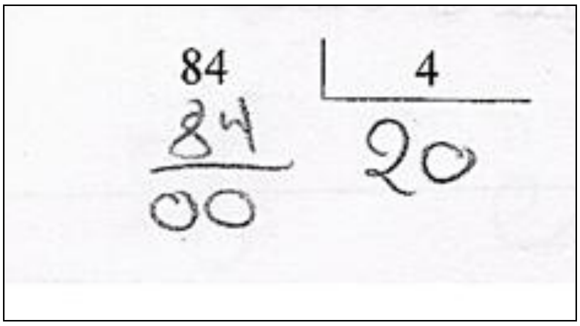
4.2.1.1 A Primeira Divisão

A primeira divisão do teste trazia no dividendo um número de dois algarismos dividido por outro número de apenas um algarismo, sem que houvesse reagrupamento e com o resto da divisão zero. A divisão proposta ao grupo foi:

$$84 \enspace \underline{|\; 4 \quad}$$

Dos 30 alunos que realizaram os testes, 21 realizaram corretamente a primeira divisão e 8 cometeram erros durante sua resolução, havendo apenas uma ausência de resposta. Assim como ocorrera anteriormente nesse trabalho, a fim de resguardar os sujeitos dessa pesquisa serão utilizados nomes fictícios para sua identificação. A seguir, os erros cometidos pelos alunos nessa divisão:

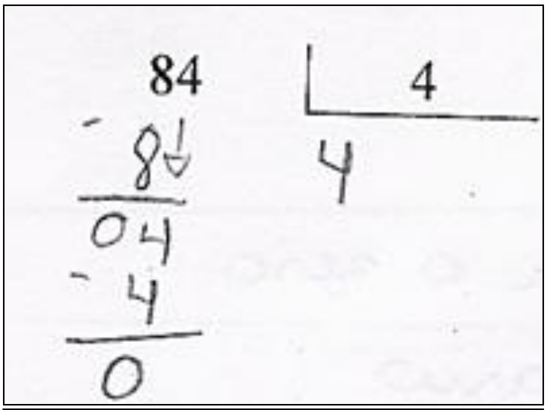
FIGURA 59 – Resolução da aluna Maria na primeira divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Ao dividir o número 84 em grupos de 4, como mostra a figura 59, Maria pôs no quociente o número 20, multiplicou 20 por 4, encontrando 84 e obtendo resto zero, indicando que houve um **erro na multiplicação**. Se Maria tivesse multiplicado corretamente 20 por 4 perceberia que ainda restariam 4 unidades a serem divididas, já que o resultado correto para esse produto é 80. Portanto, o quociente na primeira divisão seria 21 e não 20, que foi o resultado encontrado pela aluna.

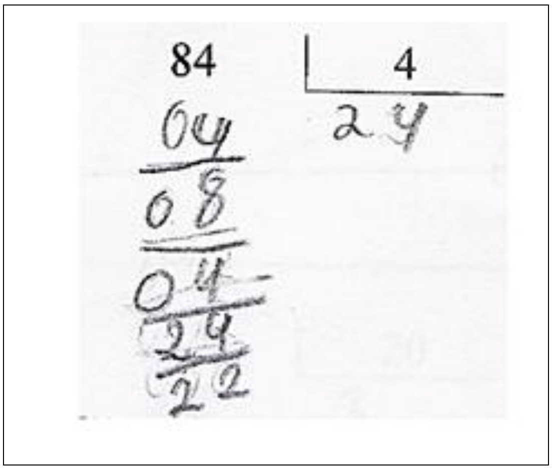
FIGURA 60 – Resolução da aluna Ana na primeira divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Nesse caso, ao dividir 84 por 4, Ana pôs o número 4 no quociente e realizou uma adição, ou seja, 4 + 4 = 8, subtraiu o número 8 das dezenas e desceu o 4 . A seguir, Ana não pôs nada no quociente e subtraiu novamente o número 4 nas unidades, obtendo resto zero. Pela resolução da aluna percebe-se que há uma **falta de domínio no processo algorítmico**.

FIGURA 61 – Resolução do aluno João na primeira divisão



Fonte: Dados da pesquisa

João, como é demonstrado na figura 61, iniciou sua resolução dividindo 8 por 4 e obtendo corretamente o número 2, porém, como não houve dezenas restantes para serem divididas, desceu o número 4 que estava nas unidades, colocando-o no quociente e fez cálculos estranhos[4], na visão da pesquisadora. Acrescentou o número 8 e o número 4 em um cálculo sem sentido para a pesquisadora. O número 24 que estava no quociente apareceu em seus cálculos também. Dessa forma, pela resolução do aluno percebe-se que **não há domínio do processo algorítmico** por parte do aluno.

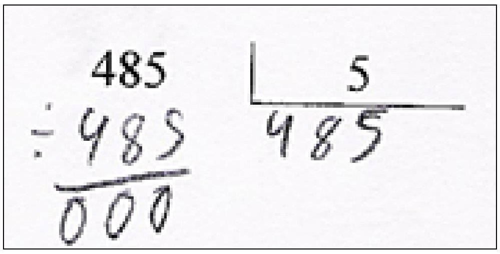
4.2.1.2 A Segunda Divisão

Na segunda operação do teste, os alunos deveriam resolver uma divisão que apresentava o primeiro dividendo parcial formado por dois algarismos e resto zero. A divisão proposta foi:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{485} & \mathbf{5} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Dos alunos que participaram da pesquisa, 16 tiveram êxito na resolução da segunda divisão e 13 cometeram erros, havendo apenas uma ausência de resposta. Seguem os erros cometidos pelos alunos nessa divisão:

FIGURA 62 – Resolução do aluno João na segunda divisão

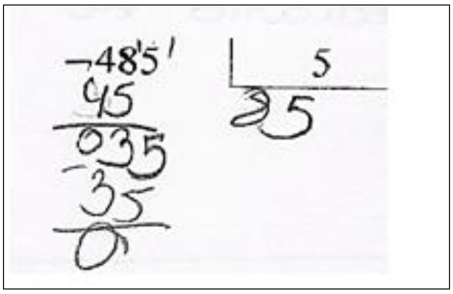


Fonte: Dados da pesquisa

João, na resolução do problema colocado na figura 62, repetiu o dividendo no quociente e o subtraiu nos cálculos, encontrando resto zero, dessa forma, o aluno demonstra **não compreender a ideia da divisão**, pois, ao dividir o número 485 em grupos de 5, ele encontra os mesmos 485. João não consegue perceber que não há um raciocínio lógico na conta realizada por ele.

[4] A pesquisadora chama de "estranhos" os cálculos realizados pelo aluno os quais, na visão da pesquisadora, não pode ser percebida a intenção do aluno ao efetuá-los.

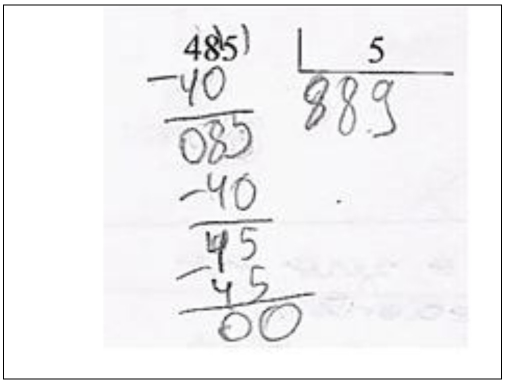
FIGURA 63– Resolução da aluna Bia na segunda divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 63, pode-se entender que Bia, ao dividir 48 por 5, obtêm 8, contudo 8 vezes 5 resulta em 40, e a aluna pôs nos seus cálculos 45. Nesse momento, percebe-se que houve um erro da aluna na multiplicação. Em seguida, Bia subtrai 45 de 48 encontrando 3, desce o 5, e fica com o número 35 para dividir por 5. Novamente, a aluna comete um erro de multiplicação, pois coloca no quociente o número 5 e multiplica 5 por 5 encontrando 35. Se for realizada uma análise dos procedimentos feitos pela aluna, poderá ser percebido que ela domina o processo de resolução do algoritmo, e que o erro no quociente ocorreu devido aos **erros nas multiplicações**.

FIGURA 64 – Resolução da aluna Joana na segunda divisão

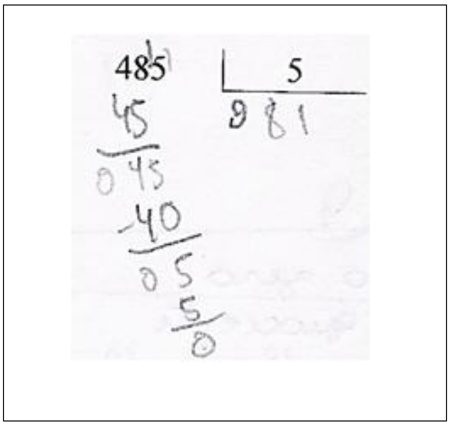


Fonte: Dados da pesquisa

A aluna Joana, como indicado na figura 64, ao dividir o número 485 por 5 põe no quociente o número 8 e multiplica 8 por 5 obtendo 40, a multiplicação feita pela aluna está correta. Porém, o erro de Joana está na escolha equivocada do produto a ser usado na divisão, ou seja, qual número que multiplicado por 5 mais se aproximaria de 48. Esse erro da aluna leva a uma resolução incorreta. Joana efetua a subtração de 40 por 48 obtendo 8, desce o algarismo 5, ficando desta forma com o número 85 para ser dividido por 5. Novamente a aluna põe o número 8 no quociente, multiplicando 8 por 5 e subtraindo 40 de 85, encontrando como resultado 45. Nesse momento, como não havia mais nenhum número para a aluna descer, então ela acrescentou o 9 no quociente, ficando, assim, com 889 e multiplica 9 por 5 obtendo 45, subtrai 45 de 45 encontrando resto zero.

O quociente que Joana obteve foi maior do que o valor que estava sendo dividido. Assim, pode-se inferir que as escolhas equivocadas dos produtos levaram a aluna a encontrar um resto errado. Ela continuou a divisão até que o resto fosse nulo, gerando, dessa forma, um quociente maior do que o dividendo. Analisando a resolução de Joana, percebe-se que além das **escolhas erradas dos produtos** houve também **falta de domínio da ideia da divisão**, a aluna não percebeu que havia uma incoerência naquilo que estava fazendo, pois dividiu 485 por 5 e encontrou um resultado maior do que o dividendo. Além disso, mostrou que **não domina o processo algorítmico**, já que, ao encontrar o resto 45, continuou a dividir mesmo já tendo efetuado a divisão de todas as ordens do dividendo.

FIGURA 65 – Resolução do aluno Pedro na segunda divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Como mostra a figura 65, Pedro, ao dividir 485 em grupos de 5, encontrou um quociente maior do que o dividendo. Ele efetuou corretamente a primeira multiplicação, colocou 9 no quociente e 45 nos seus cálculos, porém, errou a subtração de 45 por 48, encontrando como resultado 4. Assim, o aluno desceu o número 5 e ficou com 45, ao invés de 35. Dessa forma, Pedro pôs 8 no quociente e multiplica 8 por 5 obtendo 40. Subtrai 40 de 45, encontrando 5, que seria, então, o resto de sua divisão. Contudo, Pedro continua dividindo o resto 5 pelo divisor 5, encontrando 1. Assim, seu quociente foi 981, maior do que o seu dividendo.

Analisando a resolução de Pedro, percebe-se que além do **erro na subtração**, o aluno faz uma **escolha errada no produto a ser usado**, pois, ao invés de usar 9 x 5, Pedro utiliza 8 x 5, gerando um resto que o aluno ainda divide, levando-o a encontrar um quociente maior do que o dividendo, mostrando, assim, que o aluno **não domina a ideia da divisão**.

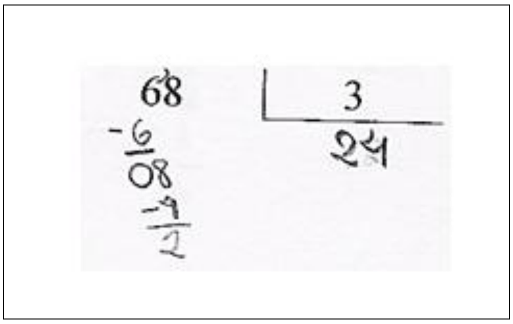
4.2.1.3 A Terceira Divisão

O objetivo da terceira divisão do teste diagnóstico era trabalhar uma conta onde o primeiro dividendo seria exato, porém, a divisão deixaria um resto diferente de zero. A divisão proposta no trabalho foi:

68 | 3

Na terceira divisão do teste foram obtidos 17 acertos e 12 erros e as ausências de respostas totalizaram em apenas 1. Seguem os erros cometidos pelos alunos nessa divisão:

FIGURA 66 – Resolução da aluna Carla na terceira divisão

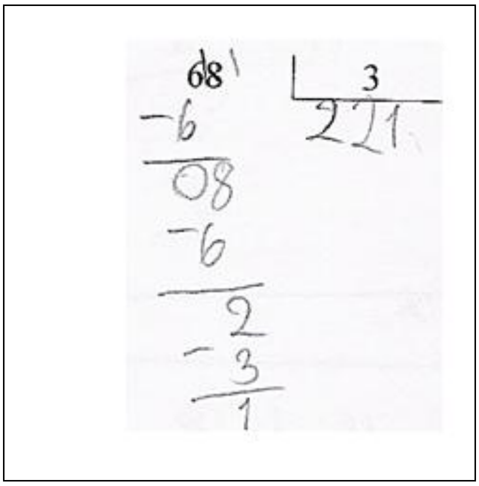


Fonte: Dados da pesquisa

Carla, como mostra a figura 66, começou a dividir corretamente, dividiu 6 por 3, colocando 2 no quociente. Multiplicou 2 por 3 e subtraiu 6 de 6 encontrando 0. Desceu o 8 e continuou a dividir. Nesse momento, a aluna cometeu seu erro, já que, ao dividir 8 por 3, ela pôs no quociente 4, porém, 4 x 3 = 12. Carla põe 4 nos seus cálculos e subtraiu 8 – 4 encontrando 2. Assim, ela errou na escolha do número (4), errou a multiplicação (4 x 3) e errou a subtração (8 – 4).

Dessa forma, pela resolução da aluna, percebe-se que ela tem domínio do processo algorítmico, e que seu erro, ao final da divisão, foi acarretado pelo **erro na multiplicação** e **na subtração**.

FIGURA 67 – Resolução da aluna Joana na terceira divisão

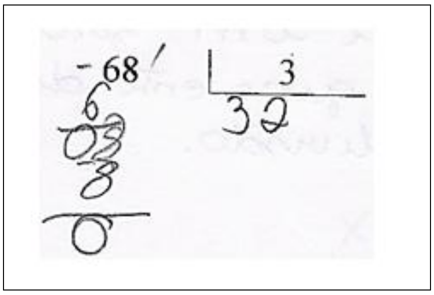


Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 67, nota-se que Joana começou a dividir corretamente, dividiu 6 por 3 encontrando 2, fez a multiplicação correta de 2 por 3 obtendo 6, subtraiu corretamente e desceu o número 8. Novamente pôs 2 no quociente e fez os cálculos corretos, multiplicação e subtração. Nesse momento, a aluna deveria ter parado a divisão, pois com um resto 2 e um divisor 3, não poderia mais dividir no conjunto dos números naturais. Porém, Joana pôs 1 no quociente e efetuou o produto 1 x 3 obtendo 3, pôs o número 3 embaixo do resto 2 e subtraiu, encontrando 1. Dessa forma, a aluna dividiu 68 por 3 e encontrou no quociente 221, ou seja, um número maior do que ela estava dividindo.

Analisando a resolução de Joana, entende-se que a ideia da divisão não está clara para a aluna, já que ela encontrou um valor no quociente maior do que estava dividindo e não percebeu que havia uma incoerência em sua resolução. Além disso, esse é um indicador de que ela não possui domínio sobre o processo algorítmico da divisão, pois continua a operação mesmo chegando a um resto menor que o seu divisor.

FIGURA 68 – Resolução da aluna Bia na terceira divisão

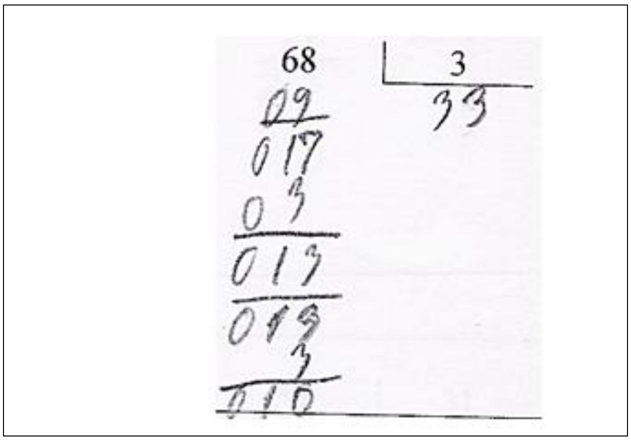


Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 68 verificar que Bia, ao dividir 68 por 3, começou a dividir 6 por 3 corretamente, porém, encontrou como resultado 3 e efetuou a subtração de 6 por 6, como se 3 vezes 3 resultasse em 6. Desceu o número 8 e acertou o valor 2 no quociente da divisão de 8 por 3, entretanto, novamente efetuou errada a multiplicação de 2 por 3 dizendo ser 8 o resultado desse produto e terminou fazendo a subtração de 8 por 8 obtendo resto zero.

Analisando a resolução de Bia, percebe-se que ela errou a multiplicação duas vezes: na primeira, colocou que 3 vezes 3 seria 6 e, depois, que 2 vezes 3 seria 8. Ela demonstra compreender a lógica do processo algorítmico, porém, comete erros na multiplicação que a levam a um resultado insatisfatório.

FIGURA 69 – Resolução do aluno João na terceira divisão



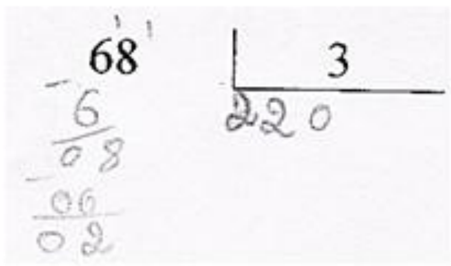
Fonte: Dados da pesquisa

João, como demonstrado na figura 69, começou a dividir 6 por 3 e encontrou 3, ao invés de 2, efetuou corretamente a multiplicação de 3 por 3, encontrando 9. O primeiro erro de João foi na escolha do produto a ser usado, ao invés de utilizar 3 vezes 3 deveria usar 3 vezes 2. Com o resultado 9, João somou com o número 8 encontrando

17, depois acrescentou o divisor em seus cálculos e parece efetuar uma subtração, porém, encontrou um resultado incorreto.

João faz contas estranhas à pesquisadora e demonstra, portanto, **não dominar o processo algorítmico**, além de ter dificuldades na **escolha do produto** a ser usado na divisão.

FIGURA 70 – Resolução da aluna Carol na terceira divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Carol, como visto, efetuou corretamente a divisão até certo momento, dividiu 6 por 3 e encontrou 2, efetuou a subtração de 6 por 6 encontrando zero, desceu o número 8 e fez corretamente 8 dividido por 3, pôs 2 no quociente e subtraiu corretamente encontrando 2. Nesse momento, a aluna deveria ter parado a sua divisão, porém acrescentou um zero no final do quociente dando como resposta 220, ou seja, dividiu 68 por 3 e encontrou 220, um quociente maior do que o dividendo.

Carol **não domina por completo o processo algorítmico**, pois, se o dominasse, ao encontrar o resto 2 teria terminado a divisão, o que não ocorreu. Além disso, a aluna **não tem clareza sobre a ideia da divisão**, pois encontrou no quociente um valor bem maior do que aquele estava dividindo.

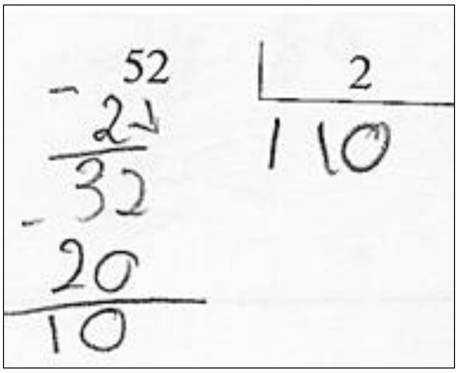
4.2.1.4 A Quarta Divisão

Na quarta operação do teste, os alunos deveriam resolver uma divisão onde o primeiro dividendo parcial deixaria resto diferente de zero, havendo, assim reagrupamento, porém, ao final, a divisão deixaria resto zero. A divisão proposta foi:

52 | 2

Nessa operação houve 14 erros e 14 acertos, totalizando 2 as ausências de respostas. Seguem os erros cometidos pelos alunos nessa divisão:

FIGURA 71 – Resolução da aluna Ana na quarta divisão



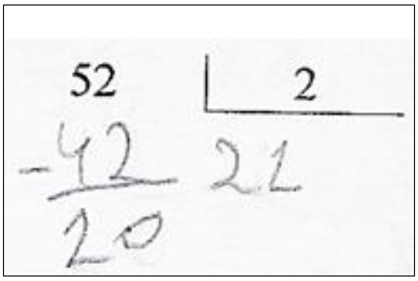
Fonte: Dados da pesquisa

A aluna Ana, como pode ser visto na figura 71, iniciou sua resolução dividindo 5 por 2 colocando 1 no quociente como resultado dessa divisão. Em seguida, Ana subtraiu 2 de 5 obtendo 3, desceu o número 2, ficando com 32 para dividir por 2. Como resultado dessa divisão, Ana pôs 10 no quociente e efetuou a subtração de 20 por 32 encontrando 10 como resto da sua divisão.

Pode-se verificar no exemplo acima que a **escolha equivocada do produto** a ser usado inicialmente leva Ana a um **reagrupamento incorreto**, já que, se a aluna tivesse escolhido o produto 2 x 2, ao invés, de 1 x 2, encontraria o número 12 e não o número 32. Após esse primeiro erro, Ana cometeu um novo equívoco ao dividir 32 por 2. Os erros da aluna a levam a um quociente maior do que o número que estava dividindo, o que foi uma incoerência.

Já a aluna Renata, como demonstrado na figura 72, começou a dividir 5 por 2, colocando 2 no quociente e efetuando corretamente a multiplicação de 2 por 2, porém, antes de efetuar a subtração das dezenas que não foram divididas, a aluna desceu o número 2 das unidades, ficando, assim, com 42. Dessa forma, Renata efetuou a subtração de 42 por 52 obtendo 10. A aluna ainda acrescentou 1 no quociente obtendo 21 como resultado da divisão e resto 10. Porém, conforme apontado na descrição da pesquisa, como os alunos não foram chamados para discorrer sobre os caminhos seguidos para a execução do algoritmo nesse momento, tem-se, ainda, outra possibilidade de execução da aluna, que pode ter realizado a divisão a seguir dividindo diretamente 52 por 2, fazendo a multiplicação correta; no entanto, não percebendo que o resto ainda era maior que o divisor.

FIGURA 72 – Resolução da aluna Renata na quarta divisão

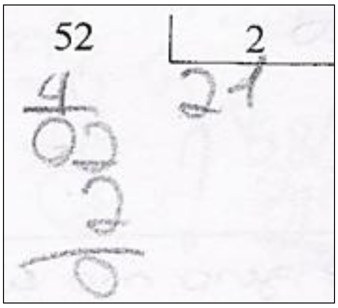


Fonte: Dados da pesquisa

O erro de Renata, então, está relacionado com a **formação do número e a lógica do processo algorítmico da divisão**. A aluna deveria ter encontrado quantas dezenas que não conseguiu dividir, para somente então, saber quantas unidades que deveria dividir por 2 e continuar a divisão.

O aluno Lucas, como pode ser notado na figura 73, efetuou a divisão das 5 dezenas por 2, colocando 2 no quociente e multiplicando 2 por 2 e obtendo 4. Porém, errou a subtração de 4 por 5, já que deu como resultado dessa operação 0. Lucas, então, desceu as 2 unidades e dividiu por 2 obtendo 1 como resultado. O quociente correto para essa divisão de 52 por 2 seria 26, ao invés de 21.

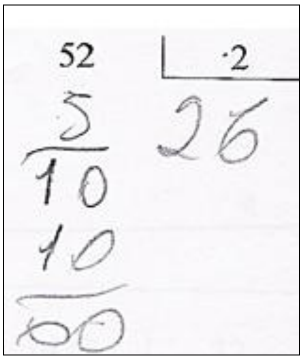
FIGURA 73 – Resolução do aluno Lucas na quarta divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Lucas, então, errou o quociente da divisão devido ao ***erro na subtração***, já que, se tivesse subtraído corretamente, encontraria 12 e, consequentemente, ao dividir 12 por 2 encontraria 6.

FIGURA 74 – Resolução do aluno Felipe na quarta divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Já o aluno Felipe acertou o quociente, porém, errou nos cálculos que realizou. Cometeu erros estranhos na visão da pesquisadora, já que os cálculos que o aluno realizou não têm ligação com o quociente encontrado por ele.

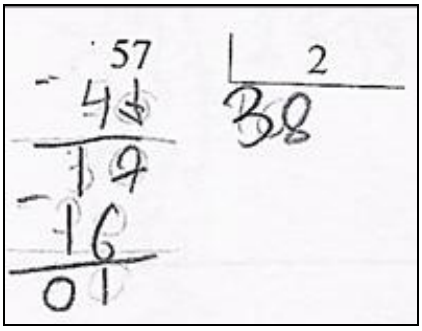
4.2.1.5 A Quinta Divisão

A quinta divisão do teste apresentava reagrupamento do dividendo e a divisão final apresentava resto diferente de zero. A divisão feita pelos alunos foi:

57 | 2

Dos 30 participantes, 16 acertaram, 13 erraram e houve uma única ausência de resposta. A seguir, os erros cometidos pelos alunos nessa divisão:

FIGURA 75– Resolução da aluna Ana na quinta divisão

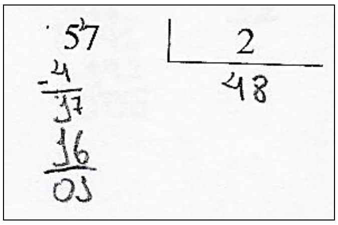


Fonte: Dados da pesquisa

Ana encontrou 3 como resultado da divisão de 5 por 2, colocou 4 nos cálculos e efetuou a subtração de 4 por 5, encontrando 1. Desceu o 7, ficando com 17 para dividir, pôs 8 no quociente e multiplicou corretamente 8 por 2 obtendo 16. Depois, efetuou a subtração de 16 por 17 encontrando resto 1.

Ana errou, portanto, o quociente, devido o erro inicial, já que, ao invés de colocar 2 como resultado da divisão de 5 por 2, a aluna pôs 3 no quociente, encontrando 38 ao invés de 28, que seria o resultado correto.

FIGURA 76 – Resolução da aluna Carla na quinta divisão

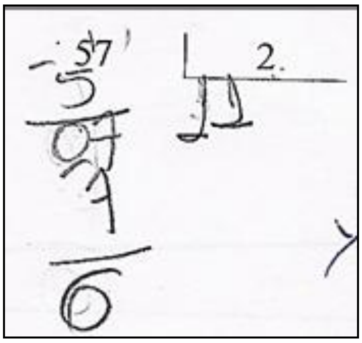


Fonte: Dados da pesquisa

Carla, como indicado na figura 76, cometeu um erro semelhante ao de Ana, já que, ao dividir 5 por 2, a aluna colocou 4 no quociente ao invés de 2. Fez a subtração de forma correta e, desceu o 7. Ao dividir 17 por 2, colocou no quociente corretamente o número 8 e efetuou a multiplicação de 8 por 2 obtendo 16. Dessa forma, encontrou resto 1 como resultado da subtração de 16 por 17. Portanto, o erro de Carla no quociente ocorreu devido ao erro inicial.

A aluna Bia, por sua vez, ao efetuar a divisão de 5 por 2, colocou 1 no quociente e subtraiu 5 de 5 encontrando 0 e descendo as 7 unidades do número 57. Novamente a aluna colocou 1 no quociente e efetuou a subtração de 7 por 7 encontrando resto que deixa dúvidas entre o 0 e o 6. (FIG. 77).

FIGURA 77 – Resolução da aluna Bia na quinta divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Assim, Bia **errou na escolha do número que ao ser multiplicado por 2 mais se aproximaria de 5**, o mesmo erro foi cometido pela aluna quando estava dividindo 7 por 2.

4.2.1.6 A Sexta Divisão

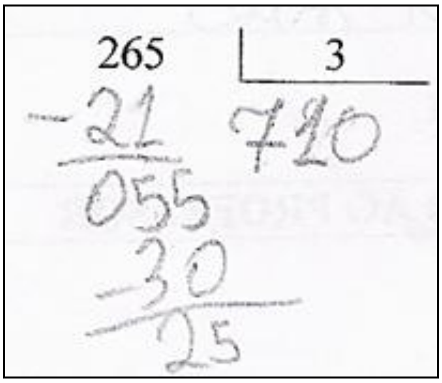
Na sexta operação proposta no teste, os alunos deveriam resolver uma divisão onde o primeiro dividendo parcial é formado de dois algarismos e o resto da divisão é diferente de zero. A divisão proposta ao grupo foi:

265	**3**

Nessa divisão, 13 alunos cometeram erros, enquanto 14 acertaram e 3 dos alunos que participaram deixaram em branco a questão. Eis os erros cometidos pelos alunos nessa divisão:

Como mostra a figura 78, ao dividir 26 por 3, Renata colocou 7 no quociente e efetuou a multiplicação de 7 por 3. Em seguida, Renata efetuou a subtração de 21 por 26 encontrando 5. A aluna desceu o 5 das unidades e ficou com 55 para dividir por 3; pôs 10 no quociente e nos cálculos 30, resultado do produto de 10 por 3. Efetuou a subtração de 30 por 55, encontrando 25, e terminando, assim, a divisão.

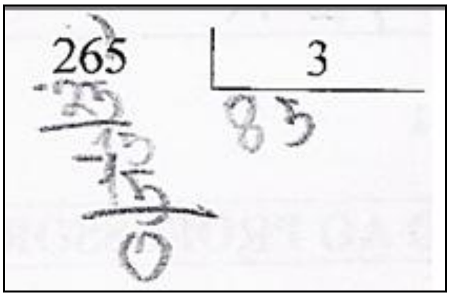
FIGURA 78 – Resolução da aluna Renata na sexta divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Diante do exposto, conclui-se que Renata **errou na escolha do produto inicial**, já que, ao invés de 7, a aluna deveria ter colocado 8 no quociente. Além disso, ela também errou quando colocou 10 no quociente, deixando um resto maior do que o divisor e encontrando um quociente maior do que o dividendo. Isso mostra que a aluna também **não compreende a lógica do algoritmo da divisão e a ideia da divisão.**

FIGURA 79 – Resolução do aluno José na sexta divisão

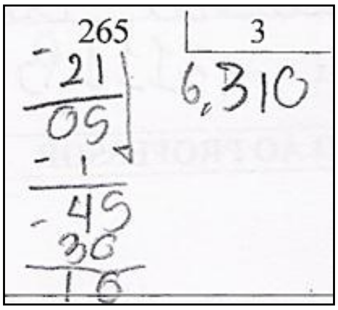


Fonte: Dados da pesquisa

Já o aluno José, como pode ser notado na figura 79, ao dividir 26 por 3 ele escolheu corretamente o número 8, porém, ao multiplicar 8 por 3, encontrou 25 e assim, subtraiu-o, encontrando 1. Depois, desceu o 5 e ficou com 15 para dividir por 3, colocando 5 no quociente e encontrando resto zero. O erro de José ocorreu devido ao **erro na multiplicação**, e, por isso, encontrou um resultado diferente na subtração, levando-o ao erro no quociente.

Já Juliana começou a dividir 26 por 3 e colocou 6 no quociente. Porém, pode-se notar que ela não só errou na escolha do número, como também na multiplicação, pois 6 multiplicado por 3 resulta em 18 e não 21 como colocou em seus cálculos (FIG. 80). A aluna efetuou a subtração de 21 por 26, encontrando 5 e, ao invés de descer o 5, dividiu o resultado da subtração por 3 e colocou 3 no quociente e 1 em seus cálculos. Efetuou novamente uma subtração de 1 por 5 encontrando 4 e, somente depois desceu o 5, ficando com 45. Juliana, então, colocou 10 no quociente e multiplicou 10 por 3 encontrando 30, efetuando a subtração de 45 por 30, encontrando 15. Dessa forma, **encontrou um quociente maior do que o dividendo**.

FIGURA 80 – Resolução da aluna Juliana na sexta divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Juliana cometeu uma série de erros em sua resolução: **errou a escolha do produto**, **errou a multiplicação**, demonstrando, portanto, que **não tem domínio do processo algorítmico e da ideia da divisão**.

4.2.1.7 A Sétima Divisão

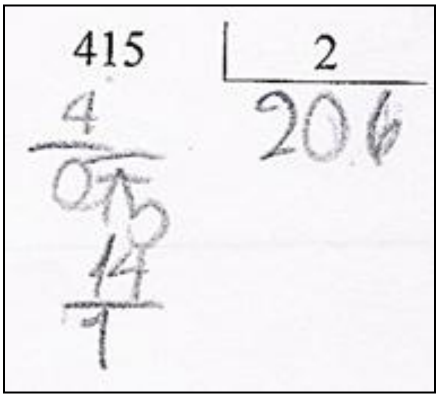
A sétima divisão apresentava um zero intermediário no quociente e pelos resultados obtidos no teste, percebe-se que a maioria dos alunos não compreende divisões onde aparece o zero intermediário, já que essa foi a divisão com maior número de erros, assim como aconteceu com a oitava divisão apresentada aos discentes.

$$\mathbf{415}\ \underline{|\ \mathbf{2}\quad}$$

Dos 30 participantes, 22 erraram, apenas 6 acertos e houve 2 ausências de respostas. A seguir, os erros cometidos pelos alunos nessa divisão:

Ao dividir 415 por 2, o aluno Vinicius começou a dividir 4 por 2, colocando 2 no quociente. Desceu o 1 e pôs o zero intermediário no quociente e desceu o 5. Porém, ao dividir 15 por 2, colocou 6 no quociente, mas em seus cálculos pôs 14 (FIG.81).

FIGURA 81 – Resolução do aluno Vinicius na sétima divisão

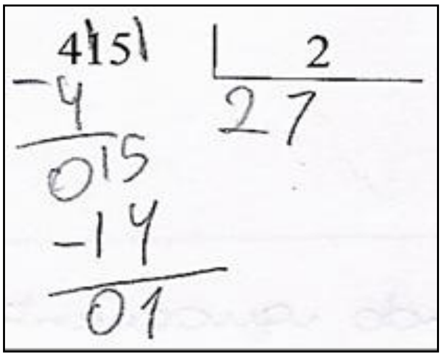


Fonte: Dados da pesquisa

Dessa forma, pode-se inferir que Vinicius fez o mais difícil nessa divisão, que era perceber o zero intermediário no quociente, porém, **errou a multiplicação**.

Joana, por sua vez, como mostra a figura 82, dividiu 4 por 2, colocando 2 no quociente; desceu o 15 e dividiu por 2 encontrando quociente 7 e resto 1.

FIGURA 82 – Resolução da aluna Joana na sétima divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Vale a pena ressaltar que o erro de Joana foi o que a maioria dos alunos que cometeram erros nessa divisão cometeram, ou seja, encontraram quociente 27, ao invés de 207, que seria o correto.

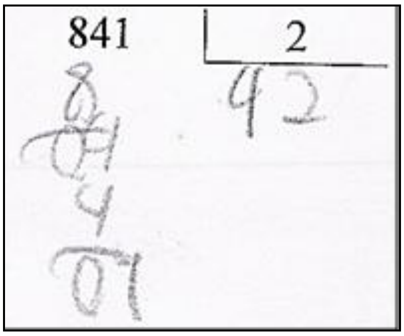
4.2.1.8 A Oitava Divisão

A oitava divisão do teste apresentava um zero no final do quociente e a divisão proposta ao grupo foi:

841 | 2

A seguir, serão discutidos alguns erros cometidos pelos alunos, tentando compreender a lógica de resolução usada. A maioria dos alunos (24 discentes) deu como resposta 42, ao invés de 420. Houve, ainda 4 que não responderam e dois que acertaram a divisão.

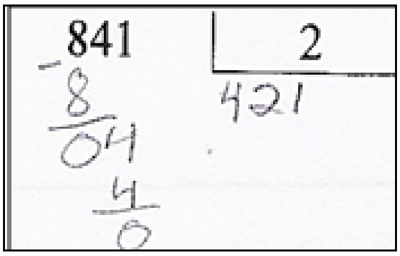
FIGURA 83 – Resolução do aluno Lucas na oitava divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Como pode ser visto na figuras 83, acima, a maior parte dos alunos efetuou corretamente a divisão até o momento de descer o número 1, porém, não acrescentaram o zero no final do quociente.

FIGURA 84 – Resolução do aluno Paulo na oitava divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Já no caso específico da divisão feita pelo aluno Paulo (FIG.84), pode-se perceber que ele efetuou a divisão corretamente até o momento que deveria descer o número 1, para, então, dividi-lo pelo 2. Porém, ao invés de descer o número 1, Paulo acrescentou o 1 no quociente, encontrando, assim, 421 como resultado da divisão e resto 0.

4.2.1.9 A Nona Divisão

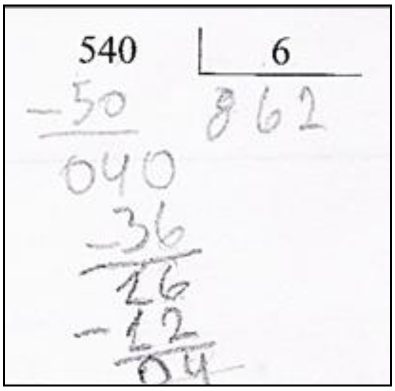
A nona divisão proposta no teste foi:

540 | 6

Nessa divisão houve 16 resoluções incorretas e 11 acertos, além de 3 ausências de respostas.

Nessa divisão, como mostra a figura 85, a seguir, a aluna Renata colocou 8 no quociente e 50 em seus cálculos, como se 6 multiplicado por 8 resultasse em 50, portanto **errou a multiplicação**. Efetuou a subtração de 50 por 54 encontrando 4, desceu o 0 e ficou com 40 para dividir por 6, pôs 6 no quociente e 36 em seus cálculos. Porém, ao invés de encontrar 4 na subtração de 36 por 40, a aluna encontrou 16, **errando a subtração.** Ela continuou a divisão, pôs 2 no quociente e 12 em seus cálculos, deixando resto 4. Dessa forma, a aluna encontrou um quociente maior do que o dividendo.

FIGURA 85 – Resolução da aluna Renata na nona divisão

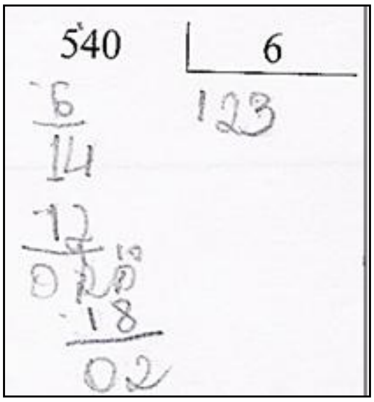


Fonte: Dados da pesquisa

Portanto, Renata **errou a multiplicação**, **errou na subtração** e mostrou que **não dominava a ideia da divisão**, pois dividiu 540 por 6 e obteve um número maior do que o que estava dividindo.

Já o erro de Ricardo foi causado pela escolha equivocada do dividendo parcial (FIG. 86).

FIGURA 86 – Resolução do aluno Ricardo na nona divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Ricardo, conforme mostrado, considerou o dividendo parcial 5, ao invés de 54. Dessa forma, pôs 1 no quociente e 6 em seus cálculos, efetuou 5 – 6 achando 1 como resposta, desceu o número 4 e dividiu 14 por 6, colocando 2 no quociente. Ele, então, efetuou a subtração de 14 por 12 e desceu o zero restante do dividendo, ficando, assim, com 20 para dividir por 6; pôs 3 no quociente e efetuou a subtração de 20 por 18 ficando com resto 2.

4.2.1.10 A Décima Divisão

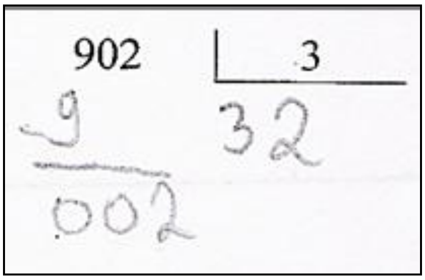
Na décima divisão, aparecia um zero intermediário no dividendo e um zero final no quociente. A operação proposta ao grupo foi:

$$902 \,\underline{|\; 3 \quad}$$

Dos 30 participantes, apenas 7 alunos acertaram a resolução enquanto 19 cometeram erros e 4 deixaram a divisão em branco.

A aluna Renata começou a dividir corretamente: dividiu 9 por 3 e encontrou 3, subtraiu 9 de 9 encontrando 0. Porém, ela desceu o 0 e o 2 ao mesmo tempo, e acrescentou o resto 2 no quociente, obtendo, assim, 32 como resultado da divisão (FIG. 87).

FIGURA 87 – Resolução da aluna Renata na décima divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Vale ressaltar que os alunos que participaram da pesquisa e cometeram erros na resolução dessa divisão disseram ser 30 o resultado do quociente. Isso permite inferir que eles não conseguiram pensar que 30 multiplicado por 3 resulta em 90; logo, não poderia ser o resultado da divisão de 902 por 3, havendo mais um zero nesse quociente. Isso permite concluir que os alunos não conseguiram ver na multiplicação, portanto, uma forma de verificar se o resultado encontrado no quociente está correto ou não.

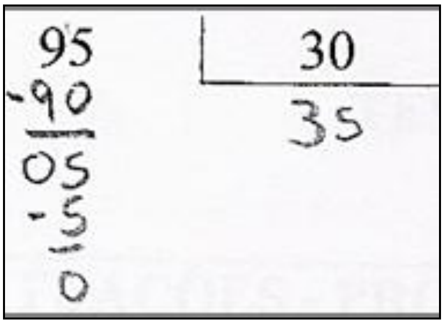
4.2.1.11 A Décima Primeira Divisão

Na décima primeira operação do teste, os alunos deveriam resolver uma divisão onde o dividendo não era um múltiplo do divisor, porém, o quociente poderia ser obtido por um fato de divisão exata. A operação proposta foi:

95	**30**

Nessa divisão, 15 alunos acertaram a questão e os outros 15 alunos estão divididos entre erros e ausência de respostas, sendo 13 e 2, respectivamente. Seguem os erros cometidos pelos alunos nessa divisão:

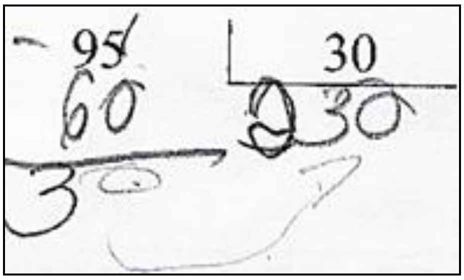
FIGURA 88 – Resolução da aluna Carla na décima primeira divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Carla, como indicado na figura 88, começou a dividir 95 por 30, colocando o número 3 no quociente e 90 em seus cálculos. Subtraiu corretamente, encontrando 5 como resultado, porém, acrescentou o resto da divisão no final do quociente e tornou a colocar o 5 em seus cálculos, encontrando, assim, resto 0.

FIGURA 89 – Resolução da aluna Bia na décima primeira divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Bia, por sua vez, conforme pode ser visto na imagem acima, começou a dividir de forma errada, pois cometeu um erro na escolha do produto, já que ela pôs 2 no quociente e 60 em seus cálculos, como resultado de 30 vezes 2, Contudo, sabe-se que o certo seria 3 no quociente e 90 em seus cálculos. Ela, então, efetuou a subtração de 60 por 95 e errou, pois encontrou 30 ao invés de 35. No final de sua resolução, a aluna acrescentou o 30 no quociente, ficando, assim, com 230 como resultado da divisão de 95 por 30.

Analisando a resolução de Bia, percebe-se, portanto, que ela **errou ao escolher o produto inicial**, **errou na subtração** e, também, **ao acrescentar o que seria o resto de sua divisão ao final do quociente**.

4.2.1.12 A Décima Segunda Divisão

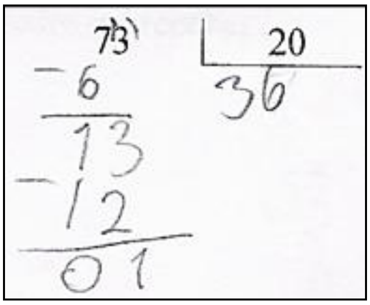
Na décima segunda divisão, o dividendo não era múltiplo do divisor e o quociente não resultava de um fato de divisão exata. A operação proposta no teste foi:

$$\mathbf{73} \;\; \big|\underline{\;\mathbf{20}\;\;}$$

Dos 30 participantes, 13 cometeram erros na resolução dessa divisão, 11 acertaram e 6 deixaram em branco. Eis os erros cometidos pelos alunos.

Na figura 90, pode-se perceber que Joana começou a dividir o 7 pelo 2, colocando 3 no quociente e 6 em seus cálculos. Subtraiu 6 de 7 e encontrou 1; desceu o número 3, dividiu 13 por 2, pôs 6 no quociente e 12 em seus cálculos; subtraiu 12 de 13 e encontrou resto 1. Isso indica que Joana efetuou a divisão como se o divisor fosse 2 e não 20. Nesse caso, pode-se, portanto, perceber que se o divisor realmente fosse 2, sua divisão estaria correta.

FIGURA 90 – Resolução da aluna Joana na décima segunda divisão

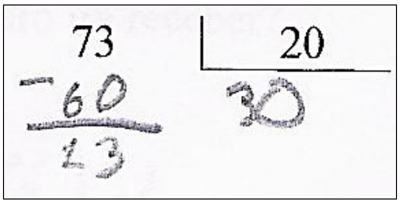


Fonte: Dados da pesquisa

Portanto, o erro de Joana foi **considerar o divisor um número diferente do que realmente ele era**.

Já em outro caso (FIG. 91), ao dividir 73 por 20, a aluna Camila pôs 3 no quociente e subtraiu 60 de 73, encontrando 13. Nesse momento, a discente **acrescentou o zero no final do quociente**, devido à divisão deixar resto 13.

FIGURA 91 – Resolução da aluna Camila na décima segunda divisão



Fonte: Dados da pesquisa

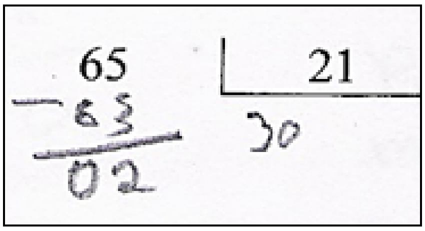
4.2.1.13 A Décima Terceira Divisão

A décima terceira divisão proposta ao grupo foi:

65 | **21**

Nessa divisão, houve 7 ausências de respostas, 10 erros e 13 respostas corretas. A seguir, os erros cometidos:

FIGURA 92 – Resolução da aluna Camila na décima terceira divisão

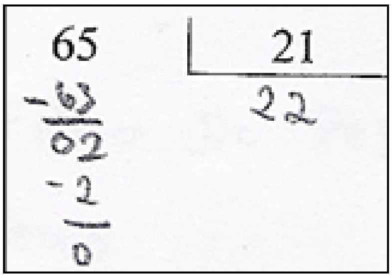


Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 92, é demonstrado que Camila dividiu 65 por 21, encontrando 3, subtraiu corretamente 63 de 65, obtendo 2, mas deveria ter terminado a divisão nesse momento. Porém, ela **acrescentou o zero no final do quociente**. Vale ressaltar que na divisão anteriormente mostrada, Camila cometeu o mesmo erro.

Já na figura 93, pode ser notado que a aluna Carla começou a dividir 65 por 21, porém, errou a multiplicação, já que 2 vezes 21 resulta em 42 e não 63 como a aluna colocou em seus cálculos. Carla subtraiu 63 de 65 e encontrou resto 2, porém, a aluna continuou a divisão, **acrescentando o resto no final do quociente** e subtraindo 2 em seus cálculos, deixando resto 0 na divisão.

FIGURA 93 – Resolução da aluna Carla na décima terceira divisão



Fonte: Dados da pesquisa

<u>4.2.1.14 A Décima Quarta Divisão</u>

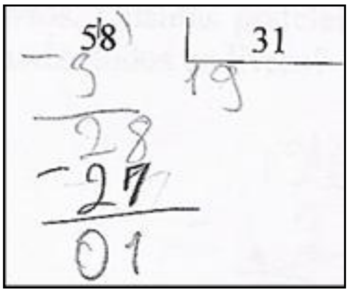
Nessa penúltima operação, o grupo tinha que resolver uma divisão onde o dividendo não era múltiplo do divisor e o quociente não resultava de um fato fundamental. Assim, a divisão proposta no teste diagnóstico foi:

58 | 31

Nessa operação, 12 participantes cometeram erros, 7 deixaram em branco a questão e apenas 11 realizaram corretamente a divisão. A seguir, os erros cometidos pelos alunos:

A aluna Joana, como pode ser visto na Figura 94, começou a resolução dividindo 5 por 3, colocou 1 no quociente e 3 nos cálculos. Subtraiu 3 de 5, encontrando 2, e desceu o 8. Ao dividir 28, porém, considerou o divisor 3, ao invés de 31. Pôs 9 no quociente e 27 em seus cálculos, subtraiu e encontrou resto 1.

FIGURA 94 – Resolução da aluna Joana na décima quarta divisão



Fonte: Dados da pesquisa

Joana, portanto, efetuou a divisão toda considerando o divisor 3 ao invés de 31, tanto que, caso o divisor fosse, de fato, 3, a divisão de Joana estaria correta.

<u>4.2.1.15 A Décima Quinta Divisão</u>

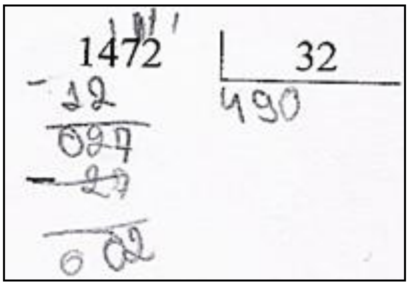
A última divisão proposta ao grupo foi:

1472 | 32

A última divisão do teste foi a que apresentou maior número de ausências, sendo 19 no total. Houve, ainda, 8 erros e apenas 3 dos participantes realizaram corretamente essa divisão. Essa, portanto, foi a divisão que teve, também, o menor número de acertos.

Carol, como mostra a figura 95, a seguir, considerou o divisor 3, ao invés de 32. Assim, ela começou a dividir 14 por 3 e colocou 4 no quociente, subtraiu 12 de 14 e encontrou 2, descendo o 7 e ficando, portanto, com 27. Dividiu 27 por 3 e pôs 9 no quociente, subtraiu 27 de 27 e encontrou 0 na subtração. Em seguida, Carol desceu o número 2 e, não conseguindo mais dividir, acrescentou o zero no final do quociente. Se o divisor fosse 3, a divisão de Carol estaria correta, pois teríamos quociente 490 e resto 2. A aluna, portanto, considerou o divisor 3 ao invés de 32.

FIGURA 95 – Resolução da aluna Carol na décima quinta divisão



Fonte: Dados da pesquisa

4.2.1.16 Resumo geral do primeiro teste diagnóstico

A seguir, a fim de indicar os erros cometidos por cada aluno no primeiro teste diagnóstico, foi montada a seguinte tabela:

TABELA 3 – Dificuldades por aluno no primeiro teste diagnóstico (Continua)

ALUNO	DIFICULDADE APRESENTADA NO PRIMEIRO TESTE
BIA	• Cometeu dois **erros de multiplicação** na divisão de 485 por 5: disse ser 45 o resultado de 8 x 5 e 35 o resultado de 5 x 5; • Na divisão de 68 por 3, cometeu novamente **erros de multiplicação:** disse ser 6 o resultado de 3 x 3 e 8 o resultado de 2 x 3; • Na divisão de 57 por 2, cometeu **erros de multiplicação** também; • Na divisão de 95 por 30, fez uma **escolha equivocada do produto**, **errou a subtração** e **acrescentou o resto que encontrou no final do quociente**.
JOANA	• Fez uma **escolha equivocada do produto** na divisão de 485 por 5, levando a aluna a encontrar um resto errado e um quociente maior do que o dividendo, mostrando que a ideia de divisão não está clara para a aluna; • Na divisão de 68 por 3, deveria ter finalizado seus cálculos quando encontrou resto 2, porém, mesmo tendo resto 2 e divisor 3, a aluna continuou a divisão; • Na divisão de 415 por 2, ela não colocou o zero intermediário no quociente; • Na divisão de 73 por 20, a aluna efetuou o cálculo como se o seu divisor fosse 2, ao invés de 20; • Na divisão de 58 por 31, Joana novamente considerou o divisor sendo 3, ao invés de 31.
PEDRO	• Na divisão de 485 por 5, cometeu um **erro de subtração** que o levou a um quociente maior do que o dividendo.
MARIA	• Na divisão de 84 por 4, cometeu um **erro de multiplicação**.
ANA	• Na divisão de 52 por 2, fez uma **escolha equivocada do produto** a ser usado;

(Continua)

	• Na divisão de 57 por 2, cometeu um **erro de multiplicação**.
JOÃO	• Nas divisões de 84 por 4 e 68 por 3, o aluno fez **cálculos estranhos para a pesquisadora**; • **Demonstrou não compreender a ideia de divisão**, pois ao dividir 485 em grupos de 5, o aluno encontrou os mesmos 485 do dividendo.
CARLA	• Na divisão de 68 por 3, a aluna fez uma **escolha equivocada do produto.** Além disso, cometeu **erros de multiplicação e subtração**; • Na divisão de 57 por 2, a aluna errou ao colocar 4 no quociente. Toda a estrutura do algoritmo está correta, porém, errou o quociente devido ao erro inicial; • A aluna efetuou corretamente a divisão de 95 por 30 até o momento que encontrou resto 5, momento em que deveria ter finalizado sua divisão, porém, a aluna **acrescentou o resto** 5 **no final do quociente**; • Na divisão de 65 por 21, a aluna cometeu um **erro de multiplicação** e acrescentou o resto no final do quociente.
CAROL	• Efetuou a divisão de 68 por 3 corretamente até o momento em que encontrou resto 2,. Porém, ao invés de finalizar a divisão, a aluna **acrescentou um zero no final do quociente**; • Na divisão de 1472 por 32, a aluna não considerou o divisor sendo 32 e sim 3. Assim, a conta que Carol fez foi 1472 dividido por 3.
RENATA	• Demonstrou não dominar o processo algorítmico; • Fez uma **escolha equivocada do produto** na divisão de 265 por 3; • Cometeu **erros de multiplicação e subtração** na divisão de 540 por 6.
LUCAS	• Na divisão de 52 por 2, cometeu um **erro de subtração**, o que o levou a um quociente errado; • Na divisão de 841 por 2, não **acrescentou o zero no final do quociente.**
FELIPE	• Cometeu **erros estranhos, na visão da pesquisadora, em seus cálculos**, porém, apesar disso, acertou o quociente da divisão.
JOSÉ	• Cometeu um **erro de multiplicação** na divisão de 265 por 3.
JULIANA	• **Errou a multiplicação** e **fez cálculos estranhos**.
VINICIUS	• Na divisão de 415 por 2, o mais difícil era perceber o zero

(Conclusão)

	intermediário no quociente, o que foi feito pelo aluno. Contudo, **errou no final uma multiplicação**, dizendo ser 14 o resultado de 6 por 2.
PAULO	• Na divisão de 841 por 2, o aluno acrescentou 1 no final do quociente.
RICARDO	• Ao dividir 540 por 6, considerou o dividendo parcial como 5, ao invés de 54.
CAMILA	• Efetuou corretamente a divisão de 73 por 20, até o momento em que encontrou o resto 13. Porém, ao invés de finalizar seu cálculo, a aluna **acrescentou um zero ao final do quociente**; • A aluna dividiu corretamente 65 por 21, até o momento em que encontrou resto 2, após, ela **acrescentou um zero no final do quociente**.

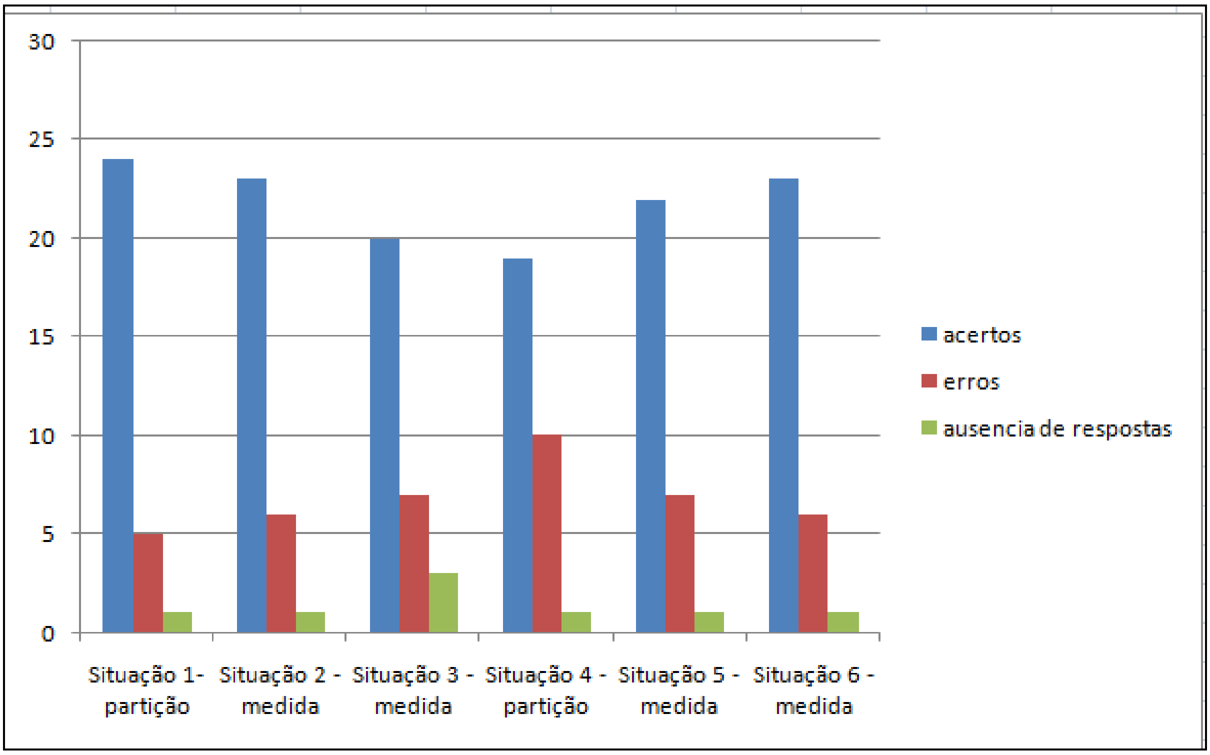
Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2 O Segundo teste Diagnóstico e seus resultados

O segundo teste diagnóstico foi realizado com o mesmo grupo de alunos que fez o primeiro teste diagnóstico, já descrito, e sua aplicação ocorreu no dia seguinte ao primeiro teste. Neste segundo momento, o objetivo era perceber a dificuldade dos alunos ao resolver situações-problemas envolvendo as ideias da divisão. Dessa forma, foram elaboradas seis situações-problemas, envolvendo as ideias de partição e medida, que foram discutidas no capítulo 3 deste trabalho.

O gráfico seguinte (GRAF.2) compara os erros e acertos de cada situação-problema proposta aos alunos no segundo teste diagnóstico.

GRÁFICO 2 – Erros e acertos de cada situação-problema no segundo teste



Fonte: Dados da pesquisa

A tabela 4, apresentada a seguir, quantifica a abordagem de resolução utilizada pelos alunos nas situações-problemas, indicando quem utilizou o algoritmo da divisão para solucioná-los, os que optaram por outras operações, ou, ainda, os que não fizeram uso de nenhuma delas.

TABELA 4 – Abordagem utilizada pelos alunos nas resoluções das situações-problemas

SITUAÇÃO-PROBLEMA	USOU O ALGORITO DA DIVISÃO	USOU OUTRA OPERAÇÃO	NÃO USOU NENHUMA OPERAÇÃO	NÃO RESOLVEU A SITUAÇÃO-PROBLEMA
1	25	1	3	1
2	18	10	1	1
3	18	9	1	2
4	26	1	2	1
5	16	11	2	1
6	23	3	2	2

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir a descrição de cada uma das situações-problema inseridas no segundo teste diagnóstico:

4.2.2.1 Primeira Situação-Problema

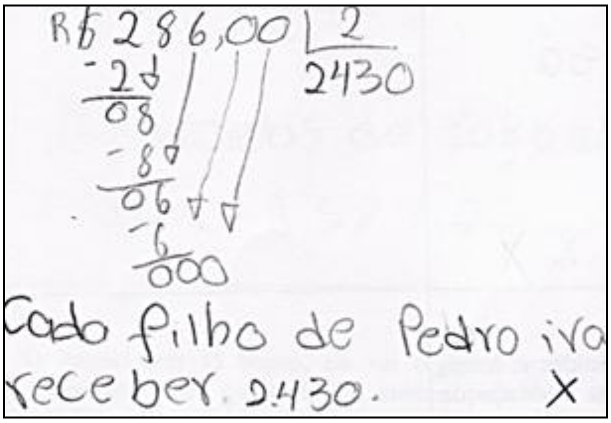
A primeira situação apresentada no teste trazia a **ideia de partição** e dizia o seguinte:

"Pedro possui R$ 286,00 e deseja dividir igualmente essa quantia entre seus dois filhos. Quanto cada filho de Pedro irá receber?"

Dos 30 alunos que realizaram os testes, 24 acertaram o problema, 5 erraram e houve 1 ausência de resposta. A seguir, os erros cometidos pelos alunos nessa primeira situação-problema:

Como mostrado na figura 96, Ana montou a operação corretamente, já que percebeu que, para resolver o problema, deveria dividir 286 por 2. Contudo, não resolveu o algoritmo de forma correta. A aluna iniciou a resolução dividindo 2 por 2, colocou 2 no quociente, ao invés de 1, desceu o número 8, dividiu corretamente 8 por 2, pondo 4 no quociente e 8 nos cálculos, desceu o 6 e dividiu 6 por 2, colocando 3 no quociente. Desceu os zeros dos centavos e colocou apenas um zero no quociente.

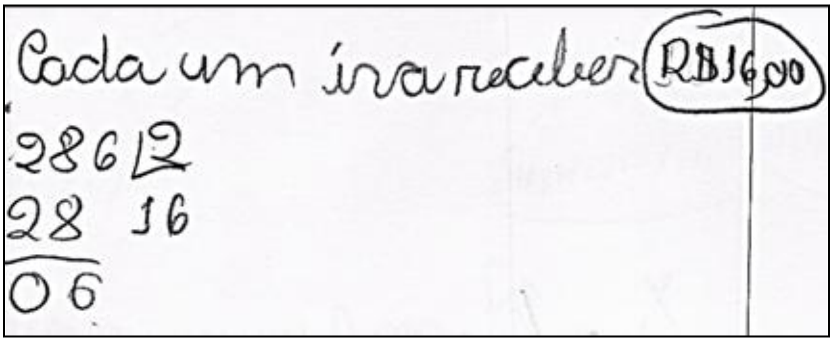
FIGURA 96 – Resolução da aluna Ana na primeira situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Ana cometeu, portanto, dois erros na divisão: o primeiro, ao dividir 2 por 2 e o último, ao acrescentar um zero no final do quociente. A aluna encontrou um valor maior do que estava dividindo, porém, não percebeu que havia uma incoerência na sua resposta nesse sentido.

FIGURA 97 – Resolução da aluna Maria na primeira situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

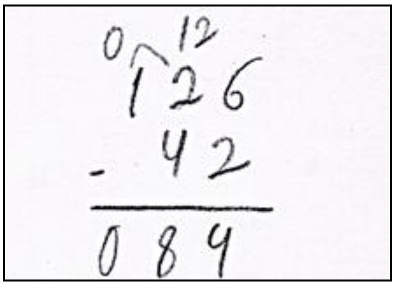
Também a aluna Maria montou a operação corretamente, porém a efetuou de forma errada. Dividiu 28 por 2 e pôs no quociente 16 (FIG.97). Em seguida, desceu o número 6 e não efetuou mais a divisão, deixando o resto 6. A aluna dividiu 286 por 2 e encontrou 16, não percebendo que 16 multiplicado por 2 resultaria em 32, um valor bem abaixo do que estava dividindo no problema.

4.2.2.2 Segunda Situação-Problema

A segunda situação-problema trazia a **ideia de medida**. Dos 30 participantes que realizaram os testes, 22 acertaram o problema, enquanto 7 erraram, havendo 1 ausência de resposta. O problema dizia o seguinte:

“**Carol tem 126 livros e deseja guardá-los nas prateleiras de sua estante. Em cada prateleira cabem 42 livros. Quantas prateleiras serão necessárias para acomodar todos os livros?”**

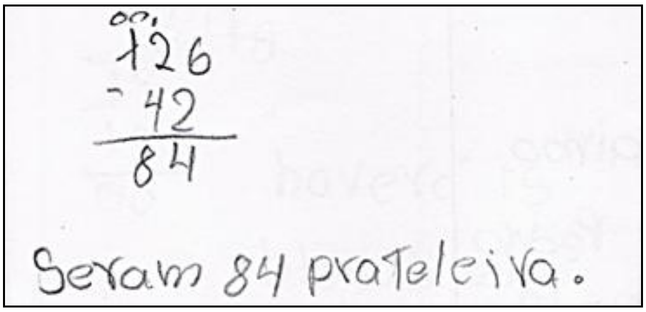
FIGURA 98 – Resolução do aluno João na segunda situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Já o aluno João, como indicado na figura 99, ao ler a segunda situação-problema achou que, para solucioná-la, deveria efetuar uma subtração. Assim, ao invés de dividir 126 por 42, João subtraiu 42 de 126 encontrando 84. Indicando, provavelmente, que o aluno não entendeu o que propunha a situação-problema.

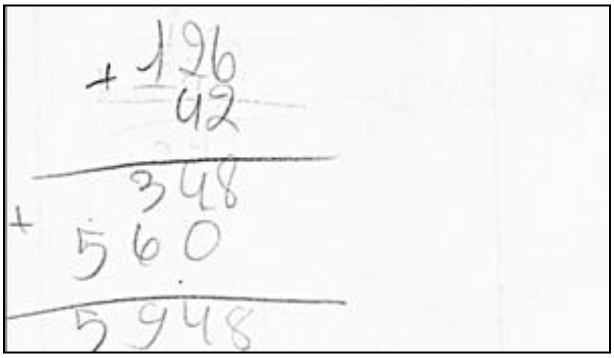
Figura 99 – Resolução da aluna Ana na segunda situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Ana, por sua vez e da mesma forma que João, ao invés de dividir, subtraiu, cometendo o mesmo erro (FIG. 100).

FIGURA 100 – Resolução da aluna Cristina na segunda situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Cristina, como indicado acima, ao invés de dividir, somou 126 por 42 e, ainda, efetuou a soma de maneira errada.

Nessa situação-problema o divisor era um número formado por dois algarismos, o que talvez possa ter gerado dúvidas nos alunos quanto à operação que iriam utilizar. Além disso, as situações que envolvem a ideia de medida, como já explicitado na capítulo 3 deste trabalho, geram maiores dúvidas do que as que envolvem a ideia de partição.

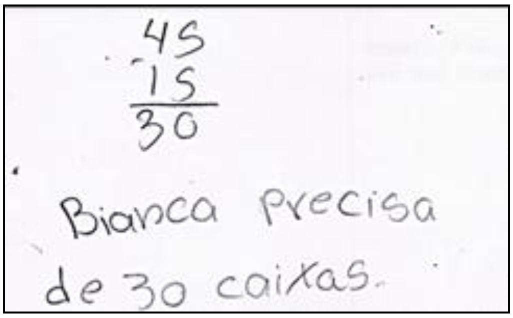
4.2.2.3 Terceira Situação-Problema

A terceira situação-problema também apresentava a **ideia de medida** e dizia o seguinte:

"Bianca tem 45 brigadeiros e vai distribuí-los em caixas. Cada caixa deverá ter 15 brigadeiros. Quantas caixas Bianca precisará para guardar todos os brigadeiros?".

Nesse problema 20 alunos acertaram a resolução, enquanto 8 erraram, havendo 2 ausências de respostas. A seguir, algumas respostas de alunos para essa situação-problema:

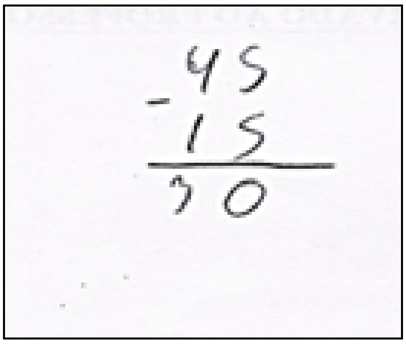
FIGURA 101 – Resolução da aluna Ana na terceira situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Como a figura 101 mostra, ao invés de dividir, a aluna subtraiu os valores do problema e disse que Bianca precisaria de 30 caixas para guardar os brigadeiros. Pode-se entender, portanto, que Ana não percebeu que havia uma incoerência na resposta dada por ela, já que, se possuía 45 brigadeiros e em cada caixa deveriam ser colocados 15, o número de caixas não poderia ser 30 como ela afirmou em sua resolução.

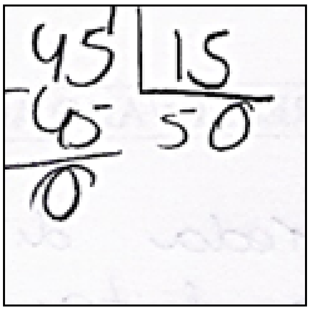
FIGURA 102 – Resolução do aluno João na terceira situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Como demonstrado na figura 102, João cometeu o mesmo erro de Ana, subtraindo 15 de 45 e dizendo que a solução para o problema seria 30 caixas. Isso indica que, da mesma forma que a aluna anterior, ele não associou o resultado obtido com o que estava sendo pedido na situação-problema.

FIGURA 103 – Resolução da aluna Bia na terceira situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Bia, por sua vez, dividiu 45 por 15, porém, encontrou um valor maior no quociente, provavelmente não pensando na incoerência do que estava propondo como solução para o problema.

<u>4.2.2.4 Quarta Situação-Problema</u>

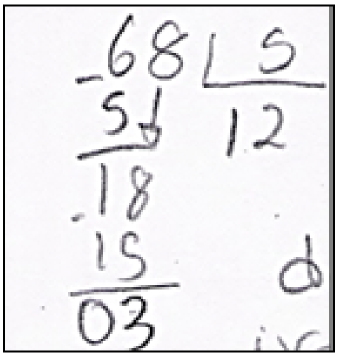
Já a quarta situação-problema trazia a **ideia de partição**, porém, a divisão que os alunos deveriam realizar, nesse momento, deixaria um resto diferente de zero. A situação proposta ao grupo dizia o seguinte:

> **“João Pedro possui 68 figurinhas repetidas e deseja dividi-las igualmente entre 5 amigos. O desejo de João Pedro poderá ser realizado? Quantas figurinhas cada amigo irá receber? Sobrará figurinhas? Quantas?”**

Nessa situação-problema, 19 alunos acertaram, 10 erraram e houve 1 ausência de resposta. Esses foram alguns dos erros encontrados:

A aluna Ana, como mostra a figura 104, abaixo, montou corretamente a operação, dividindo 68 por 5. Dividiu o primeiro dividendo parcial corretamente, pôs 1 no quociente e 5 nos cálculos, desceu o 8 e dividiu 18 por 5. Contudo, ela pôs 2 no quociente e 15 nos cálculos, errando, portanto, a multiplicação.

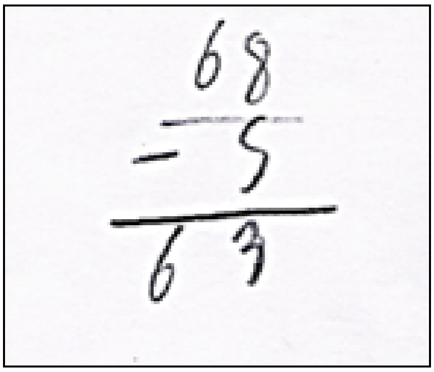
Figura 104 – Resolução da aluna Ana na quarta situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Já o aluno João, ao invés de dividir, subtraiu. Vale ressaltar que ele havia cometido esse mesmo erro anteriormente, indicando, possivelmente, que da mesma forma que ocorrera na terceira situação-problema, nessa, também, João pode não ter entendido o que se pedia. (FIG. 105).

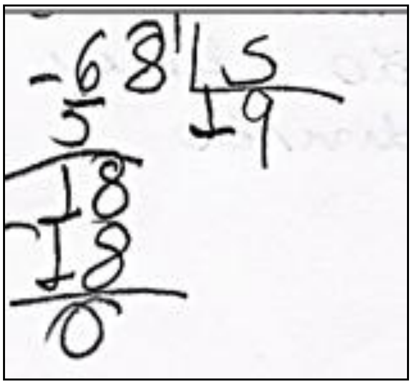
FIGURA 105 – Resolução do aluno João na quarta situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Já a aluna Bia, como é demonstrado na figura 106, montou a operação corretamente, começou a dividir 6 por 5 colocando 1 no quociente e 5 nos cálculos, encontrou 1 e desceu o número 8 e dividiu 18 por 5. Porém, nesse momento, Bia colocou 9 no quociente e 18 nos cálculos, indicando erro na multiplicação.

FIGURA 106 – Resolução da aluna Bia na quarta situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2.5 Quinta Situação-Problema

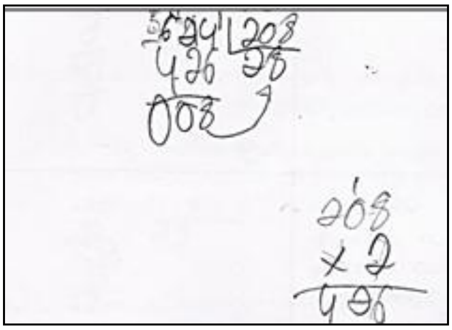
A penúltima situação proposta no teste trazia novamente a **ideia de medida** e dizia:

"Rafael comprou um celular por R$ 624,00. Vai pagar em parcelas de R$ 208,00. Quantas parcelas serão necessárias para que Rafael pague a dívida?".

Dos alunos que participaram da pesquisa, 21 acertaram a resolução do problema, 8 alunos erraram e houve 1 ausência de resposta.

Bia, conforme indicado na figura 107, dividiu 624 por 208, efetuou no rascunho a conta 208 x 2 e encontrou 426 (errou a multiplicação). Então, ela colocou 2 no quociente e 426 nos cálculos. Subtraiu 624 – 426, porém, também resolveu de forma errada a subtração, encontrando 8 como resultado dessa operação. Para terminar, ela ainda acrescentou o resto 8 no final do quociente.

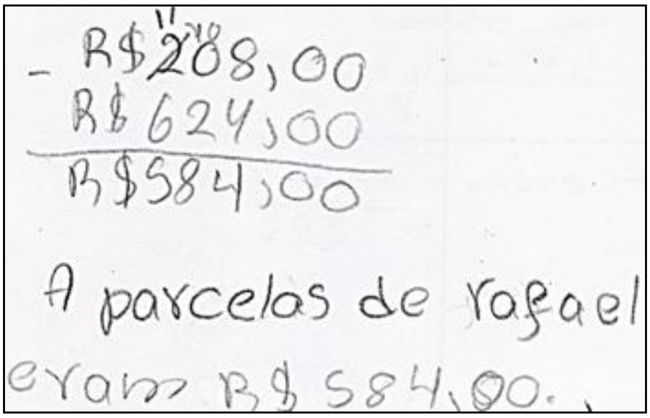
FIGURA 107 – Resolução da aluna Bia na quinta situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Bia, portanto, cometeu três erros: errou a multiplicação, a subtração e, também, ao acrescentar o que acreditava ser o resto da divisão no final quociente.

FIGURA 108 – Resolução da aluna Ana na quinta situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

A aluna Ana, conforme é visto na figura 108, errou na escolha da operação que resolveria a situação-problema e, além disso, armou a subtração de forma errada, tirando de 208 o valor 624, ao invés de fazer o contrário.

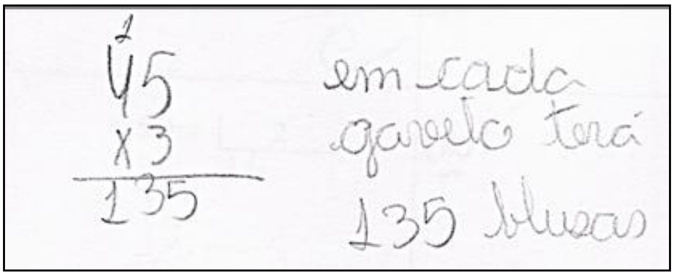
4.2.2.6 Sexta Situação-Problema

A última situação-problema trazia a **ideia de partição** e dizia o seguinte:

"Raquel tem 45 blusas, ela vai organizá-las em 3 gavetas. Cada gaveta terá a mesma quantidade de blusas. Quantas blusas haverá em cada gaveta?".

Dos 30 alunos, 22 acertaram, 7 erraram e houve 1 ausência de resposta.

FIGURA 109 – Resolução da aluna Márcia na sexta situação-problema

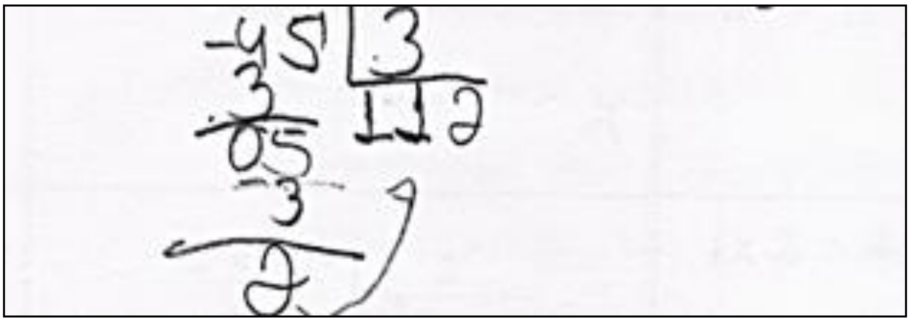


Fonte: Dados da pesquisa

Ao invés de dividir, conforme é mostrado na figura 109, a aluna Márcia multiplicou os valores envolvidos. No problema proposto, Raquel possuía 45 blusas que deveria dividir em 3 gavetas colocando a mesma quantidade de blusas em cada uma, porém, pela resolução de Márcia, haverá 135 blusas em cada gaveta, um número bem maior do que o total a ser dividido.

Márcia, portanto, não percebeu que havia uma incoerência na resolução que estava propondo em contraposição ao que o problema pedia.

Figura 110 – Resolução da aluna Bia na sexta situação-problema



Fonte: Dados da pesquisa

Ao dividir 45 por 3, Bia começou a dividir 4 por 3 encontrando 1 e colocando 3 nos cálculos, desceu o número 5 e dividiu por 3 colocando 1 no quociente e 3 nos cálculos, efetuou a subtração e encontrou 2 como resto, que acrescentou no final do quociente (FIG. 110).

Contudo, a aluna errou a subtração de 3 por 4 e, ainda, ao acrescentar o que ela achou como resto ao final do quociente.

4.2.3 As categorias de análise

Durante a análise dos testes diagnósticos, foram identificados alguns erros cometidos pelos alunos, entendendo que tais erros são elementos naturais no processo de conhecer e necessitam ser mais bem compreendidos para que se tornem instrumentos de superação, tanto para os alunos quanto para os professores.

Na perspectiva de Luz (2008), a análise dos erros cometidos pelos alunos é uma estratégia poderosa para a prática docente, pois, uma vez identificado fica mais fácil conduzir os alunos ao sucesso na aprendizagem almejada.

Saiz (2008, p.183) diz que "as dificuldades dos alunos com os algoritmos, frequentemente constatadas, deveriam obrigar os professores a enfrentá-las na aula, analisá-las e corrigi-las". Segundo a autora, "os erros que aparecem, como "reduzir a um algarismo", "dividir novamente o resto" etc, devem ser rejeitados pelos alunos explicitamente, e esta rejeição incluída dentro de seus conhecimentos".

Partindo da análise feita, portanto, os erros cometidos pelos alunos que participaram da pesquisa foram inseridos em categorias descritas a seguir, sendo elas:

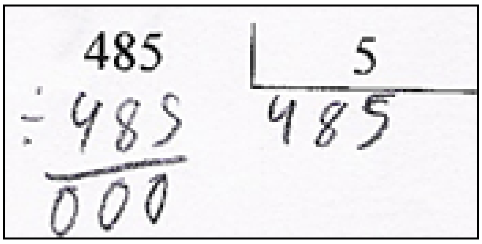
- ✓ Não dominam a ideia da divisão;
- ✓ Cometem erros nos fatos da multiplicação;
- ✓ Cometem erros de subtração durante os cálculos;
- ✓ Fazem escolhas equivocadas do produto a ser utilizado durante a resolução do algoritmo;
- ✓ Acrescentam o resto da divisão no final do quociente;
- ✓ Acrescentam zero no quociente quando a divisão deixa um resto diferente de zero;
- ✓ Consideram o divisor sendo outro número diferente do que realmente é;
- ✓ Realizam cálculos sem explicação para a pesquisadora;
- ✓ Fazem cálculo mental;
- ✓ Ausência de resposta.

Assim, diante do exposto, serão apresentadas cada uma das categorias identificadas nos testes diagnósticos, explicando e exemplificando cada uma delas.

4.2.3.1 Não dominam a ideia de divisão

Nessa categoria foram considerados todos os alunos que não compreendem a ideia de divisão. Na figura 111, por exemplo, o aluno deveria dividir 485 em grupos de 5, porém, o resultado dado por ele é igual ao dividendo. Isso permite inferir que, mesmo o divisor sendo 5, o aluno não compreende a ideia de partição, já que quando se conhece o total de elementos que será dividido em partes iguais encontra-se o tamanho de cada parte, que será um tamanho menor do que o total que está sendo dividido.

FIGURA 111 – Resolução de João na segunda divisão do primeiro teste



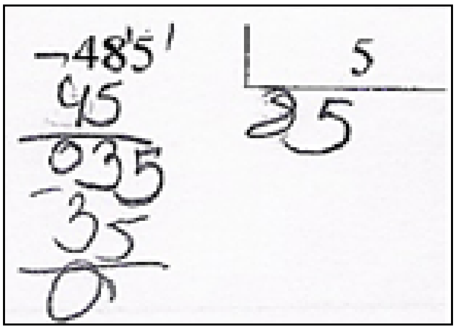
Fonte: Dados da pesquisa

Assim, diante do exposto, entende-se que o aluno João resolveu o algoritmo, mas não percebeu que existia uma incoerência no resultado dado, pois ele não compreendeu a ideia envolvida na operação que acabou de realizar. Segundo Saiz (2008), quando os alunos não atribuem significado ao algoritmo que aplicam, eles não conseguem verificar as diferentes etapas do cálculo, em termos do problema formulado, sendo incapaz, naquele momento, de perceber alguma incoerência na resposta obtida.

4.2.3.2 Erros nos fatos de multiplicação

Nessa categoria foram considerados os erros de tabuada cometidos pelos alunos durante a realização do teste, o que foi bastante recorrente. A seguir, a resolução de Bia na segunda divisão do primeiro teste (FIG. 112):

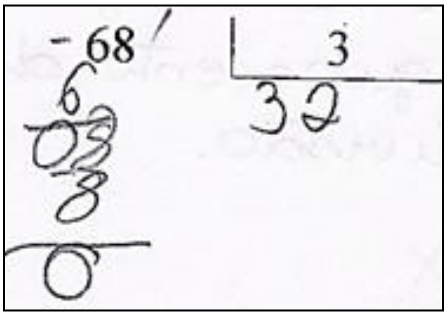
FIGURA 112 - Resolução de Bia na segunda divisão do primeiro teste



Fonte: Dados da pesquisa

A aluna Bia, como demonstrado na Figura 112, fez corretamente a escolha do primeiro dividendo parcial, porém, ao dividir 48 por 5 colocou no quociente o número 8 e nos cálculos 45, como se 8 x 5 fosse 45, errando a multiplicação. Ela continuou a dividir e encontrou 5 como resultado da divisão de 35 por 5, nos cálculos a aluna colocou 35 como se esse fosse o resultado da multiplicação 5 x 5, o que fez com que ela errasse duas vezes a tabuada. Já na figura 113, abaixo, outro exemplo da mesma aluna cometendo o mesmo erro que no exemplo anterior:

FIGURA 113 – Resolução de Bia na terceira divisão do primeiro teste



Fonte: Dados da pesquisa

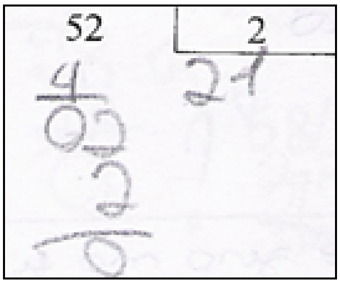
Ao dividir 6 por 3, a aluna colocou 3 no quociente e nos cálculos pôs 6, como se 3 x 3 resultasse em 6, errando a multiplicação. Ela, então, desceu o 8, e ao dividir 8 por 3, pôs 2 no quociente e 8 nos cálculos auxiliares, como se 2 x 3 resultasse em 8.

No decorrer da pesquisa, pode-se verificar que muitos alunos que cometeram erros na resolução dos algoritmos erraram a tabuada. Nesse sentido, Bigode e Frant (2011) falam sobre a importância da tabuada para uma aprendizagem mais sólida de outros conceitos e técnicas aritméticas, como os algoritmos da multiplicação e da divisão. Ele ressalta que há uma diferença entre memorizar e decorar a tabuada e, que para ter um ensino bem sucedido é preciso que os alunos memorizem os fatos, sendo necessário usar situações significativas que partam do cotidiano do aluno.

4.2.3.3 Erro de subtração durante o cálculo

Foram considerados nessa categoria os alunos que apresentaram o domínio do algoritmo, porém erram na subtração, como no exemplo abaixo (FIG. 114):

FIGURA 114 – Resolução de Lucas na quarta divisão do primeiro teste



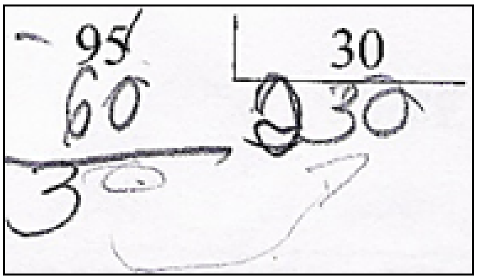
Fonte: Dados da pesquisa

No exemplo acima, Lucas dividiu 5 por 2 e encontrou 2, pôs 4 nos cálculos e ao efetuar 5 – 4 deu como resposta 0, ao invés de 1. Depois, ele desceu o 2 e continuou a divisão, dividiu 2 por 2 e pôs 1 no quociente, encontrando resto zero. Essas ações realizadas pelo aluno indicam que ele compreende a lógica envolvida no algoritmo da divisão, porém, errou o resultado devido ao erro na subtração durante a resolução do algoritmo.

4.2.3.4 Escolhas equivocadas do produto a ser usado

Nessa categoria foram consideradas as situações onde o aluno apresenta dificuldade para escolher o produto correto, ou seja, ele não tem problemas com os fatos da multiplicação, mas possui dificuldade para pensar no número que multiplicado pelo divisor mais se aproxima do dividendo total ou parcial, como demonstrado no exemplo a seguir (FIG. 115):

FIGURA 115 – Resolução de Bia na décima primeira divisão do primeiro teste



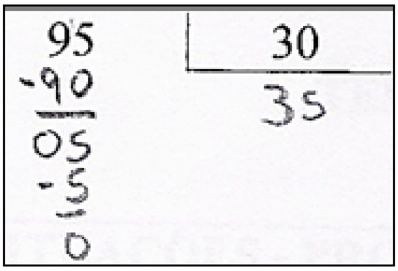
Fonte: Dados da pesquisa

Nesse exemplo acima, a aluna coloca 2 no quociente e 60 nos cálculos, demonstrando que sabe que 2 x 30 = 60, porém, ela fez uma escolha equivocada do produto que deveria utilizar. Além disso, ela fez uma subtração incorreta 95 – 60 = 30. Vale ressaltar, ainda, que além de fazer uma escolha equivocada, Bia também acrescentou o que seria o resto ao quociente.

4.2.3.6 Acrescentar o resto no quociente

Nessa categoria foram consideradas as situações onde o aluno resolve corretamente a divisão, porém, ao final, acrescenta o resto encontrado no final do quociente, como indica a figura 116:

FIGURA 116 – Resolução de Carla na décima primeira divisão do primeiro teste

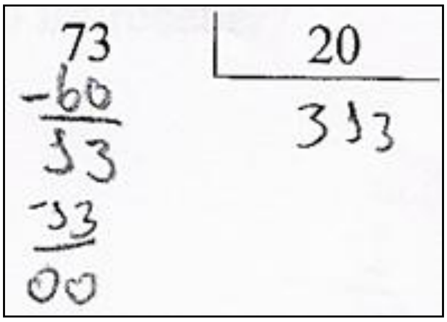


Fonte: Dados da pesquisa

Vale observar na imagem acima que a aluna resolve corretamente a divisão de 95 por 30, colocando 3 no quociente e 90 nos cálculos como resultado do produto 3 x 30, e efetua a subtração corretamente, encontrando 5. Porém, apesar de que nesse momento a aluna deveria parar a divisão, ela continuou, acrescentando o resto 5 no final do quociente e efetuando, nos cálculos, a subtração de 5 por 5, encontrando resto zero.

Já no exemplo mostrado na figura 117, a aluna divide 73 por 20 e encontra 3, já que 3 x 20 resulta em 60, efetuando corretamente a subtração, encontrando 13. Porém, ela não parou a divisão e acrescentou o resto 13 no final do quociente e efetuou a subtração nos cálculos, encontrando resto zero. Agindo dessa forma, o erro que a aluna cometeu a levou a um quociente maior do que o dividendo, porém, ela não percebeu a incoerência da resolução efetuada por ela.

FIGURA 117 – Resolução de Janaina na décima segunda divisão do primeiro teste

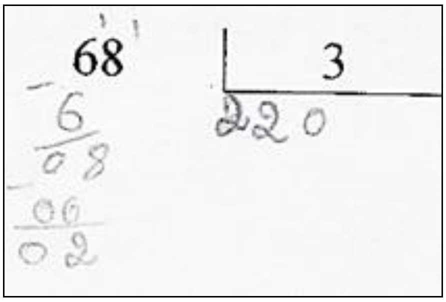


Fonte: Dados da pesquisa

<u>4.2.3.7 Acrescentar zero no quociente quando a divisão deixa resto diferente de zero</u>

Nessa categoria foram considerados os alunos que, ao efetuarem uma divisão cujo resto é diferente de zero, acrescentaram no final do quociente o zero. Na perspectiva de Saiz (2008), a falta de controle sobre o algoritmo provoca uma grande dúvida nos cálculos intermediários: saber se a quantidade a ser dividida é menor que o divisor e então se acrescenta 0 no quociente ou se se trata do resto, que é, necessariamente, menor que o divisor. Eis alguns exemplos:

Figura 118 – Resolução de Carol na terceira divisão do primeiro teste



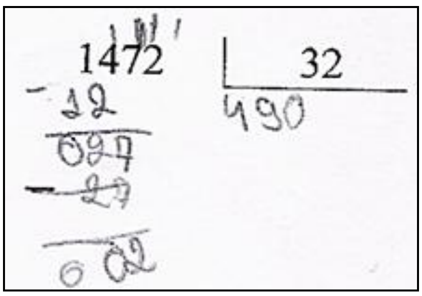
Fonte: Dados da pesquisa

Conforme é mostrado na figura 118, ao dividir 6 por 3 Carol pôs 2 no quociente e 6 nos cálculos, subtraiu corretamente e desceu o número 8. Ao dividir 8 por 3 a aluna colocou 2 no quociente e 6 nos cálculos, novamente subtraiu corretamente encontrando 2 como resto da divisão. Diante disso, sabe-se que ela deveria ter parado nesse momento, onde o quociente seria 22 e o resto 2, porém, a aluna acrescentou um zero no final do quociente, errando.

<u>4.2.3.8 Consideram o divisor sendo outro número</u>

Nessa categoria foram inseridas as situações onde o aluno modifica o divisor por sua conta e efetua a operação com o divisor que ele mesmo determinou. Saiz (2008) diz que frequentemente uma divisão de 2 ou 3 algarismos é resolvida erroneamente, utilizando um algoritmo "inventado" que a reduz a uma divisão de um algarismo. A seguir um exemplo (FIG. 119):

FIGURA 119 – Resolução de Carol na décima quinta divisão do primeiro teste



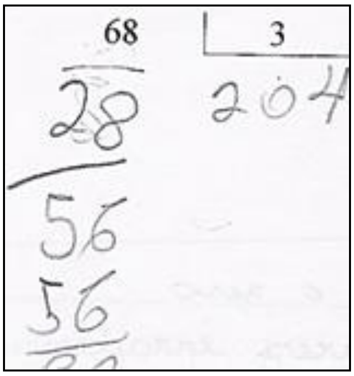
Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se notar que, no exemplo acima, a aluna fez a divisão toda considerando que o divisor era 3 ao invés de 32.

4.2.3.9 Outros

Nessa categoria estão contemplados os erros os quais não foi possível a categorização, já que o procedimento utilizado pelo aluno, ao desenvolver o cálculo, não foi presumível o que, consequentemente, impossibilitou a compreensão da origem do seu erro, como exemplificado na figura 120, a seguir:

FIGURA 120 – Resolução de Fábio na terceira divisão do primeiro teste

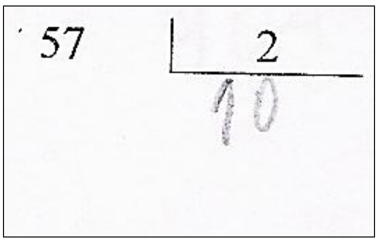


Fonte: Dados da pesquisa

4.2.3.10 Cálculo mental

Consideraram-se, nessa categoria, os alunos que desenvolveram o cálculo do algoritmo mentalmente, sem registrar nenhuma passagem da operação.

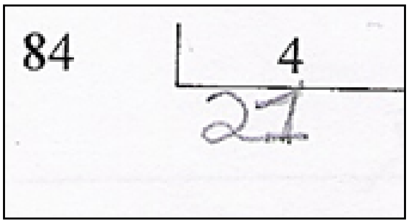
FIGURA 121 – Resolução de João na quinta divisão do primeiro teste



Fonte: Dados da pesquisa

Vale ressaltar que nem sempre o aluno obtém sucesso nesse tipo de cálculo, como ocorreu na figura 121. Porém, pode-se notar que, nos dois exemplos colocados, os alunos realizaram o cálculo mental, porém, enquanto o primeiro aluno (FIG. 121) não encontrou o resultado correto, o segundo aluno (FIG. 122) deu a resposta certa à divisão proposta.

Figura 122 – Resolução de Arthur na primeira divisão do primeiro teste



Fonte: Dados da pesquisa

<u>4.2.3.11 Ausência de respostas</u>

Esta categoria engloba todas as divisões que foram deixadas “em branco” pelos alunos. A porcentagem de ausência de respostas foi maior na divisão de 1472 por 32. Acredita-se que isso possa ter ocorrido devido a essa divisão trazer um número maior no dividendo, o qual os alunos possam ter imaginado ser mais difícil realizar a operação deixando-a em branco. De acordo com Zatti, Agranionih e Euricone (2009), quando os alunos se deparam com uma operação muito difícil ou que consideram que a possibilidade de fracassarem é grande, recorrem à desistência.

4.3 O Grupo Focal e suas contribuições

A principal forma de coleta dos dados utilizada na pesquisa foram os testes diagnósticos, contudo, outras técnicas foram incorporadas à pesquisa, a fim de elucidar e colaborar na análise. Dessa forma, a decisão de trabalhar com o grupo focal veio ao encontro da necessidade de buscar respostas para ajudar na compreensão das dificuldades apresentadas pelos estudantes.

A seguir, é apresentado um trecho da conversa com o grupo de alunos, que ocorreu alguns dias após a aplicação dos testes diagnósticos. Os participantes do grupo foram alguns alunos que realizaram os testes e a escolha desses estudantes foi feita aleatoriamente, como já explicitado no capítulo metodológico.

Professora: "Bom, então a gente dividiu 232 por 6. Vocês falaram que o 23 dividido por 6 dava 3, multiplicamos deu 18 e o resultado da subtração foi 5 e agora o que eu faço?"

Alunos: ”Desce o dois"

Alunos: "52 dividido por 6"

Professora: "52 dividido por 6 vai dar quanto?"

Silêncio

Professora: "E aí, quanto dá essa divisão?"

Alunos: "Oito"

Professora: ″E seis vezes oito dá quanto?"

Alunos: "Quarenta e oito".

Professora: "E agora?"

Alunos: "Passa um para o dois, fica quatro".

Professora: "O resto é quatro? Tem como dividir mais?"

Alunos: "Não, o resto é quatro".

Professora: "Ok. E como eu faço agora para dividir 1237 por 20?"

Aluna2: "Põe 123 dividido por 20"

Professora: Eu vou dividir 123 por 20?

Aluna: "Isso".

Professora: "E aí?"

Aluno: "Vai dar 6".

Professora: "Vai dar quanto?"

Alunos: "6"

Professora: "E agora?"

Aluna2: "120."

Professora: "E aí?"

Alunos: "Sobra 3"

Professora: "O que eu faço agora?"

Alunos: "Desce o sete."

Professora: "E como que eu faço, então, ali?"

Alunos: "37 dividido por 20"

Professora: "Quanto que dá?"

Aluna1: "Três."

Professora: "Vai dar três?"

Aluna2: ″Não, dá um".

Aluna1: ″37 dividido por 20..."

Aluna3: "20 mais 20 é 40, minha filha!"

Aluna1: "Ah, é mesmo!"

Aluna 2: **"**Vai dar um."

Professora: **"**E agora?"

Alunos: "17."

Professora: **"**Como é que eu faço ali?"

Aluna2: "Põe o zero ali, oh!"

Aluno: "Não, agora deixa."

Professora: "Coloco ou não coloco o zero?"

Aluna2: **"**Coloca!"

Aluna3: "Não coloca!"

Aluna2: **"**Coloca o zero!"

Aluna 1: "Porque na hora que for tirar a prova real..."

Professora: "Você acha que eu coloco o zero?"

Aluna2: "Acho."

Professora: "Por quê?"

Aluna2: **"**Porque ali já tem dois números, então, tem que subir o zero."

Professora: **"**Quem acha que eu não devo colocar o zero que acaba ali?"

Aluna3: **"**Eu acho. Porque na hora de fazer a prova real, vai dar um número maior."

Na primeira divisão proposta naquele grupo focal, os alunos não apresentaram dúvidas, porém, através do diálogo estabelecido com o grupo, percebeu-se um aspecto já observado nos testes diagnósticos durante a resolução da segunda divisão: no momento em que foi proposta a divisão de 1237 por 20, o grupo relatou oralmente a resolução, mas quando a discussão chegou ao resto 17, alguns alunos achavam que deveria ser colocado o zero no final do quociente, enquanto outros não.

A aluna que defendia o zero no final do quociente relatou que como já havia dois números no resto, teria que acrescentar o zero no quociente. Outra, todavia, afirmava que o zero não deveria ser colocado, pois se a prova real fosse tirada, encontraria um número maior do que o que estamos dividindo.

4.4 Conversando com os alunos

Após a aplicação dos testes diagnósticos e dos encontros do grupo focal, alguns alunos que haviam participado do grupo foram chamados, aleatoriamente, para uma conversa individual.

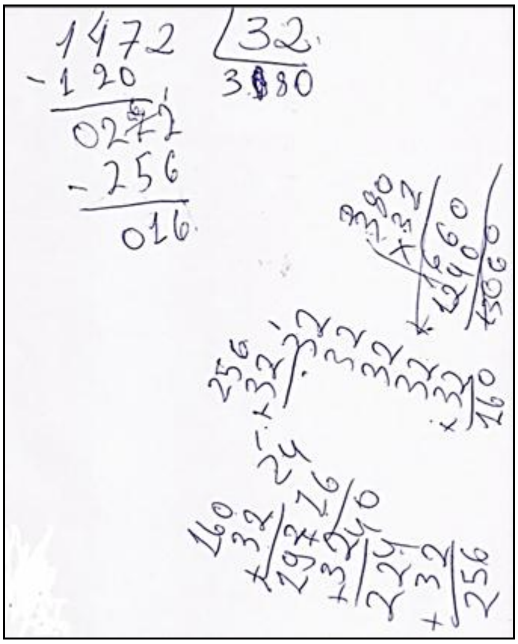
Para essa conversa, foi selecionada, no teste diagnóstico de cada um dos participantes, uma divisão que aquele aluno havia feito de forma errada. Essa escolha, porém, como já dito, ocorreu sem que o aluno soubesse que ele havia errado a divisão que estava sendo solicitado resolver.

Diferentemente do teste diagnóstico, foi pedido, dessa vez, aos alunos, que, ao resolverem a divisão, fossem relatando, em voz alta, aquilo que estavam fazendo. Foi informado, ainda, a cada aluno, que sua fala seria gravada. A seguir, o resultado de cada uma das conversas com os alunos selecionados.

4.4.1 Renata

Renata deveria resolver a divisão de 1472 por 32. Porém, durante a resolução, a aluna manteve-se calada, não fazendo o seu relato, conforme pedido anteriormente.

FIGURA 123 – Resolução da aluna Renata



Fonte: Dados da pesquisa

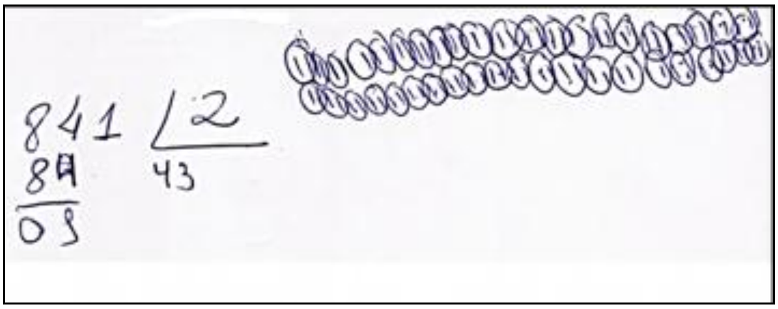
Como pode ser notado na figura 123, a aluna iniciou a resolução dividindo 147 por 32, colocando 3 no quociente e 120 em seus cálculos. Em seguida, Renata subtraiu 120 de 147 encontrando 27. Ela desceu o 2 e dividiu 272 por 32 encontrando 8. Renata colou 256 em seus cálculos, resultado da multiplicação de 32 por 8, e efetuou a subtração obtendo 16 como resto, porém, Renata não terminou a divisão e, ainda, acrescentou um zero no final do quociente.

Renata errou na escolha do produto que deveria utilizar na sua resolução e, também, acrescentou um zero ao final do quociente. Vale ressaltar que do lado da divisão, ela tira a prova real multiplicando 380 por 32, porém, mesmo fazendo essa conta de forma equivocada, Renata encontra um valor maior e ainda assim deixa sua resolução errada.

4.4.2 Maria

Maria deveria resolver a divisão de 841 por 2. Porém, ao invés de dividir 8 por 2, a aluna tomou como dividendo parcial o 84. Ela, então, dividiu 84 por 2 e resolveu a operação de maneira interessante, ela usou tracinhos para dividir 84 em grupos de 2, como identificado na figura 124, abaixo:

FIGURA 124 – Resolução da aluna Maria



Fonte: Dados da pesquisa

Ao ser questionada pela professora sobre essa ação, aconteceu o seguinte diálogo:

Professora: "Você fez quantos tracinhos aí?"

Aluna: "Oitenta e quatro dividindo por dois."

A aluna ficou em silêncio por um momento e, então, a professora questionou:

Professora: "Você acha que essa é a melhor maneira pra você resolver?"

Aluna: "Pra mim que não sei de cabeça, eu acho que sim."

Professora: "Quando você diz que você não sabe de cabeça o que você quer dizer com isso?"

Aluna: "Que eu não consigo resolver a conta rápido."

Professora: "Você não consegue pensar em que? Você consegue me explicar?

Aluna: "Eu não consigo, tipo: oitenta e quatro por dois... eu não consigo de cabeça. Agora eu já dividi e vou ver quantos grupinhos deu."

Professora: **"**Quantos grupinhos de dois?"

Silêncio

Aluna: "Deu quarenta e três."

Professora: "Deu quarenta e três? Então, esse vai ser o número que você vai colocar aonde?"

Aluna: "Aqui" (Nesse momento, a aluna apontou para o quociente na folha onde colocaria o resultado encontrado por ela)

Aluna: "É? É. (risos). Ai meu Deus tenho muita dificuldade em fazer isso daqui, em armar isso daqui."

Professora: "E agora?"

Aluna: "É eu não sei se eu desço, deixa eu ver, ah eu vou fazer o que eu acho aqui professora não sei se está certo ... (silêncio) é eu penso que é assim eu não sei se esta certo eu acho que não, mas é o único jeito que eu consigo fazer."

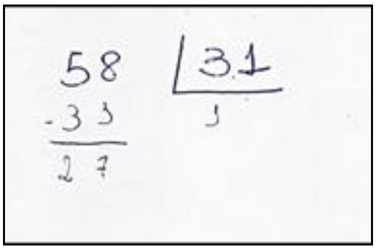
Professora: "Entendi. Ok!"

Pela fala de Maria, fica notável a dificuldade que a aluna sente ao realizar uma operação de divisão, mesmo utilizando os "tracinhos" como uma forma de visualizar o que está fazendo. Ela não encontra um valor correto, pois divide 84 por 2 e obtém 43. Além disso, ao final da sua resolução, a aluna fica com dúvidas no que deve fazer, o que pode ser constatado por meio da fala "eu não sei se eu desço, deixa eu ver ...". Assim, ao descer o número 1 das unidades, a aluna não acrescenta o zero no quociente, dando como resultado para a sua divisão 43.

4.4.3 Carla

Carla deveria dividir 58 por 31. A figura 125, mostra a resolução da aluna.

FIGURA 125 – Resolução da aluna Carla



Fonte: Dados da pesquisa

Eis o diálogo discorrido durante a execução da divisão

Professora: "Você vai dividir para mim 58 por 31. Você vai me falando o que você esta fazendo."

Silêncio

Professora: "E ai?"

Aluna: "Procuro sempre achar um número a partir do trinta e um que chegue perto do 58. No caso, se eu colocar 31 mais 31 daria 62, aí eu teria que passar aqui o 31 dividido por ele, mas não daria muito certo deixa eu ver, pensar..".(silêncio) "No caso, tem que dividir por trinta e um ... " (silêncio) "Seria um, no caso."

Silêncio

Professora: "Então você dividiu cinquenta e oito por trinta e um. Quanto que você achou até agora no quociente?"

Aluna: "Um."

Professora: "E quanto que você tem lá como resto?"

Aluna: "Vinte e sete."

Professora: "E ai?"

Aluna: "Se eu tivesse fazendo a conta no caderno estaria passando o zero aqui pra cima porque vinte e sete não tem como mais passar pra cá."

Professora: "Você acha que a divisão acabou ai? Você acha que tem jeito de continuar?"

Aluna: "Por enquanto, acho que acabou por aqui professora."

Professora: "Então, o quociente deu quanto e o resto deu quanto?"

Aluna: "O quociente deu um e restou vinte sete."

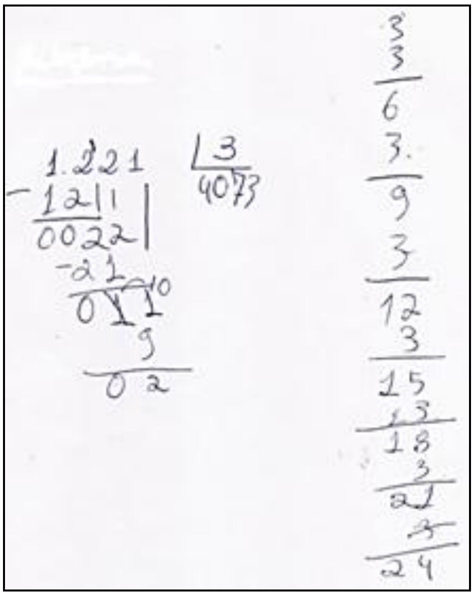
Professora: "Ok!"

Conforme visto, portanto, Carla inicia sua divisão pensando que precisava encontrar um número, partindo do 31, que mais se aproximasse do 58. A aluna pensa e chega à conclusão que esse número é 1. Quando encontra 27 como resultado da subtração de 31 por 58, Carla fica na dúvida se deve subir um zero no quociente ou se a divisão termina ali, podemos constatar sua dúvida pela fala “Se eu tivesse fazendo a conta no caderno estaria passando o zero aqui pra cima porque vinte e sete não tem como mais passar pra cá”.

4.4.3 Camila

Camila deveria resolver a divisão de 1221 por 3. A figura 126, a seguir, mostra a resolução de Camila.

FIGURA 126 – Resolução da aluna Camila



Fonte: Dados da Pesquisa

Esse foi o diálogo entre a professora e a aluna durante a execução da divisão:

Professora: "Pode começar. Como é que eu faço essa divisão?"

Aluna: "Tenho mil duzentos e vinte e um dividido por três. Eu vou separar os números: doze dividido por três. Acha um número mais fácil, né?"

Silêncio

Aluna: Eu fiz uma conta de três mais três até dar o número doze, então deu quatro; quatro vezes três doze. Desci o dois. Dois não dá para dividir por três, então, põe o zero do lado do quatro. Desço o outro dois: vinte e dois dividido por três, aí eu continuo a mesma conta."

Silêncio

Aluna: "Vinte e dois não dá para dividir por três, então dá vinte e um."

Aluna: **"**Sete."

Professora: "Sete?"

Aluna: "Acho que sim."

Aluna: **"**Um. Deu um. Então, eu desço o outro um. Onze dividido por três, também não dá, então vai dar três. Dá nove. Sobrou dois a conta. Então, deu quatro mil setecentos e trinta e três o resultado de mil duzentos e vinte e um dividido por 3. O resultado é quatro mil setecentos e setenta e três.

Professora: **"**E o resto?"

Aluna: **"**O resto é dois."

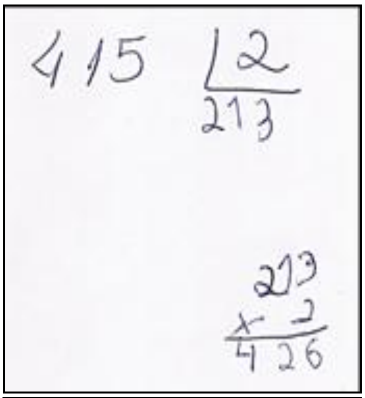
Professora: "Ok!"

Como observado, Camila inicia sua resolução de forma correta, dividindo 12 por 3 e obtém 4 como resultado. Ela coloca 12 em seus cálculos, efetua a subtração e desce o número 2. Divide 2 por 3 e, percebendo não ser possível, acrescenta o zero no quociente. Nesse momento, a aluna comete seu erro, já que, ao invés de descer o próximo número, que seria o 1, ela desce novamente o número 2, como indica a fala da discente quando diz que: "desci o dois, dois não dá para dividir por três então põe o zero do lado do quatro, **desço o outro dois**, vinte e dois dividido por três. Aí eu continuo a mesma conta". Porém, não havia outro 2 para descer, e com esse erro, Camila encontrou como resultado 4073. A aluna não percebeu que estava dividindo 1221 por 3 e obteve como resultado para essa divisão um quociente maior do que o dividendo.

4.4.4 João

João deveria resolver a divisão de 415 por 2. A figura, a seguir, mostra sua resolução.

FIGURA 127– Resolução do aluno João



Fonte: Dados da Pesquisa

Essa foi a conversa entre a docente e o discente sobre o passo a passo realizado:

Aluno: "Igual aqui: eu vou dividir quatro por dois. É dividir quatro por dois. Como é quatro um número par, quer dizer que... aqui oh, quer ver? Eu tenho quatro balas e eu vou dividir pra duas pessoas, da duas pra cada. Aí vamos lá pro um: um pra duas pessoas sempre que o um é... por exemplo... um vez três ai vai dar... sempre vai dar uma bala, exemplo. Aí... tipo assim. Eu acho, tipo... número ímpar é bem mais difícil pra dividir do que o número par, que normalmente quando a gente vai dividir número ímpar tem que... às vezes sobra, aí fica mais difícil."

Professora: "Qual foi o resultado da sua divisão, quatrocentos e quinze dividido por dois? Você encontrou quanto?"

Aluno: "Duzentos e treze."

Professora: "Quando você foi dividir o quatrocentos e quinze por dois, você dividiu o quatro primeiro, depois você pensou no um, e depois você pensou no cinco. Porque você fez assim? Você sabe me dizer o por quê?"

Aluno: "Porque eu pensei naquele negócio da dezena, centena e unidade. Aí eu comecei daqui."

Professora: "Então, você começou por que ordem?"

Aluno: "Pela dezena."

Professora: "Pela dezena? E depois?"

Aluno: "Centena e unidade."

Pode-se perceber que João inicia sua resolução corretamente, começando a dividir 4 por 2, obtendo 2 como resultado. Porém, quando vai dividir 1, João sente dificuldade e, ao invés de acrescentar um zero no quociente, ele acrescenta o 1. João divide, então, 5 por 2 e obtém 3 como resultado. O aluno não faz registros de cálculos, apenas coloca no quociente o valor que acredita ser o resultado da divisão e, ao final, tira a prova real, porém, ele encontra 426 como resultado e, mesmo assim, finaliza sua resolução.

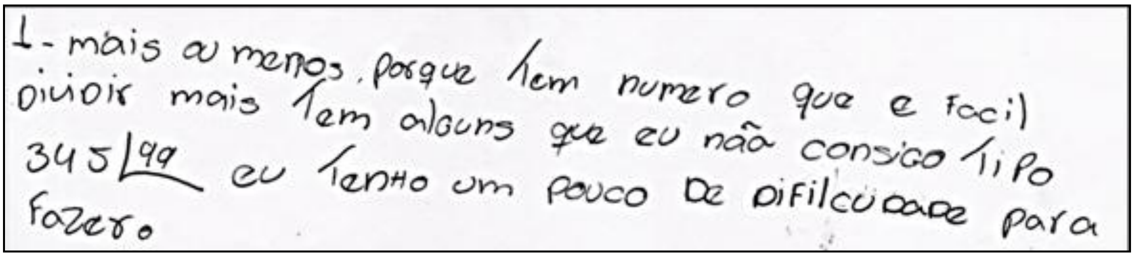
Durante a conversa individual com os alunos, alguns aspectos que já haviam sido identificados durante a análise dos testes diagnósticos foram reforçados.

4.5 Questionário Descritivo

A fim de enriquecer mais as informações obtidas nos testes diagnósticos, aplicou-se um pequeno questionário a alguns alunos que participaram do grupo focal, sendo a escolha aleatória, assim como ocorrera nos demais procedimentos de coletas de dados. Esse questionário continha perguntas cujo objetivo era uma maior compreensão acerca do problema pesquisado.

Foi então perguntado ao grupo de alunos: **“Você considera a divisão uma operação difícil?”** Uma das respostas dadas é a da aluna Bianca, como mostra a figura 128, a seguir:

FIGURA 128 – Resposta da aluna Bianca à primeira pergunta do questionário

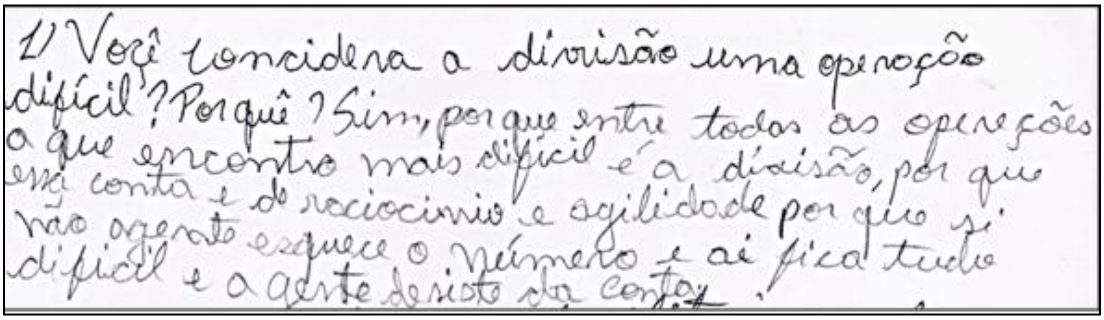


1- mais ou menos, porque tem numero que e facil
dividir mais tem alguns que eu não consigo tipo
345 |99 eu tenho um pouco de dificuldade para
fazero

Fonte: Dados da Pesquisa

Pode-se verificar que os alunos, no geral, apresentam facilidade em repartir pequenas quantidades em grupos usando palitinhos, porém, mesmo compreendendo que a divisão implica na separação em grupos de quantidades iguais, muitos não conseguem usar o algoritmo da divisão. Outro aluno respondeu, conforme é apontado abaixo (FIG. 129):

FIGURA 129 – Resposta da aluna Renata à primeira pergunta do questionário

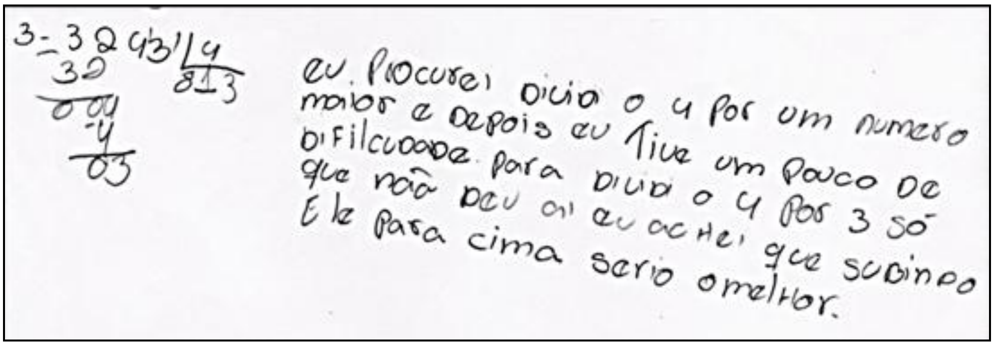


1/ Você concidera a divisão uma operação
difícil? Porquê? Sim, porque entre todas as operações
a que encontro mais difícil é a divisão, por que
essa conta é de raciocínio e agilidade porque se
não agente esquece o número e aí fica tudo
difícil e a gente desiste da conta.

Fonte: Dados da Pesquisa

Foi pedido, então, aos alunos que resolvessem a divisão 3243: 4 usando o algoritmo da divisão e que relatassem o passo a passo da resolução, como mostra a figura 130, abaixo:

FIGURA 130 – Resolução da aluna Bianca



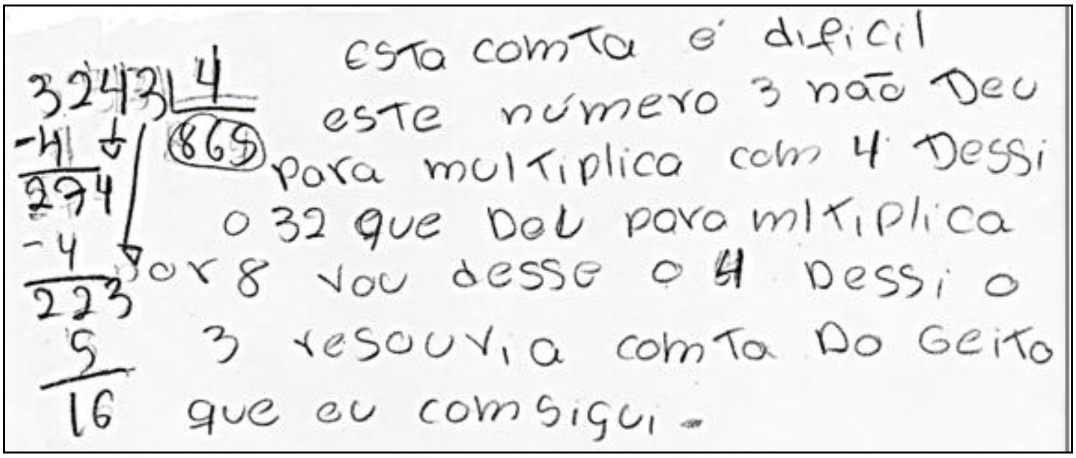
3- 3243 |4
32 813
004
-4
03

eu. Procurei divio o 4 por um numero
maior e depois eu Tive um pouco de
dificuldade para divio o 4 por 3 só
que não deu ai eu achei que subindo
Ele para cima serio o melhor.

Fonte: Dados da Pesquisa

Conforme visto, a aluna iniciou corretamente a resolução do algoritmo, porém, quando desceu o 3 e se deparou com 3 dividido por 4, ela teve dúvida e, por isso, achou que o correto seria colocar o 3 no final do quociente.

FIGURA 131 – Resolução da aluna Renata



Fonte: Dados da Pesquisa

Já a figura 131, acima, mostra que a aluna começou a dividir corretamente. Ela percebeu que não poderia dividir o 3 pelo 4 e, portanto, desceu o 32 para ser dividido pelo 4. Renata efetuou corretamente o produto, colocando 8 no quociente. Nesse momento, a aluna começou a cometer equívocos, pois colocou o 4 em seus cálculos, efetuando de forma errada a subtração (32 – 4), e descendo o 4. Nota-se que ela pensou no produto 6 x 4 = 24, pois colocou o 6 no quociente. Novamente, coloca o 4 nos cálculos e erra a subtração (27 – 4). Desce, então, o 3, pensando no produto 5 x 4 = 20, colocando, depois, o 5 nos cálculos e, de novo, errou a subtração (22 – 5).

5 RESSIGNIFICANDO O ALGORITMO DA DIVISÃO: UMA PROPOSTA DE ENSINO

A proposta de ensino apresentada nesse trabalho foi estruturada em um caderno, sendo as ideias de atividades pensadas para alunos do Ensino Fundamental e organizadas em unidades que abordam conceitos que são a base para a construção e o entendimento do processo algorítmico da divisão. Para tanto, as atividades foram elaboradas com o intuito de permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos anteriores e amplie-os, fazendo com que questionem e elaborem novas situações.

O caderno, portanto, está organizado da seguinte forma: primeiro, é apresentada uma síntese das dificuldades dos alunos levantadas com essa pesquisa. Em seguida, são abordadas as ideias que fundamentam a proposta de ensino e seu objetivo. Posteriormente, é apresentada uma tabela com a descrição das atividades em cada uma das unidades que compõem o caderno e finalmente, as atividades com as orientações para os professores.

5.1 O ponto de partida

Conforme visto, durante a análise dos dados coletados na pesquisa, foram percebidos alguns erros recorrentes pelos alunos ao efetuarem a divisão, deparando com casos onde os alunos demonstraram não compreender as ideias da divisão, tão pouco seu processo algorítmico.

Sendo assim, percebeu-se que esses erros eram gerados devido a uma dificuldade ou falta de embasamento teórico em outros conceitos e ideias que precisavam ser trabalhados previamente com os alunos, antes de se iniciar a construção do processo algorítmico da divisão.

Assim, tomando como ponto de partida as dificuldades elencadas na pesquisa, procurou-se elaborar uma proposta de ensino com o objetivo de possibilitar a construção ou ressignificação do algoritmo da divisão. Na perspectiva de Centurión (2008):

> [...] ao ressignificar os algoritmos, a partir da construção de novos procedimentos, o aluno faz conjecturas, pode avançar ou recuar ao longo das etapas, mudar o percurso, criar atalhos, detectar isomorfismos entre algoritmos diversos, passando de mero espectador, ao papel de ator. (CENTURIÓN, 2008, p.2).

Centurión (2008) diz, portanto, que levar os alunos a construir estratégias pessoais de cálculo pode ser um procedimento didático competente e um recurso fecundo. Bigode e Frant (2011) e Mandarino (2010) também ressaltam a importância de se valorizar as estratégias usadas pelos alunos na resolução dos algoritmos, sendo, dessa forma, possível compreender seu pensamento e valorizá-lo quando se mostrar eficaz ou contribuir para a aprendizagem de outros conteúdos.

As unidades com suas respectivas propostas de trabalho que compõem o caderno de atividades foram pensadas e inspiradas, portanto, nas dificuldades elencadas, nas leituras realizadas e na própria prática docente da pesquisadora, buscando, dessa forma, estarem coerentes com os pressupostos teóricos dessa pesquisa.

As atividades propostas em cada unidade do caderno foram pensadas tendo como fio condutor situações-problemas. De acordo com Centurión (2008):

> [...] uma situação-problema é algo que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho conhecido, rápido e direto que o leve à solução. É necessário, portanto, um processo de reflexão ou tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. (CENTURIÓN, 2008, p.1).

O objetivo ao utilizar situações-problemas para construir o algoritmo da divisão é de ordem “cognitiva” como nos mostra Charnay (2008), que, por meio da atividade de resolução de problemas aponta-se para a direção do conhecimento, que pode ser uma noção ou um algoritmo. Segundo o autor, nesses tipos de situações pode-se distinguir entre os problemas que são usados como fonte para uma nova aprendizagem e aqueles que são utilizados para ressignificar um conteúdo ou conceito.

Nessa abordagem, propõe-se a utilização de materiais concretos durante a resolução das situações-problemas, acreditando que o uso desses materiais pode ser um facilitador para que o aluno compreenda o conteúdo que se deseja ensinar ou ressignificar. É importante ressaltar, porém, que essa construção não ocorrerá simplesmente entregando para os alunos um material e deixando que eles quebrem a cabeça sozinhos. O material concreto é uma excelente ferramenta pedagógica, desde que haja a intervenção do professor, estimulando, questionando, promovendo um ambiente propício à aprendizagem.

Segundo Fiorentini (1997), a médica e educadora italiana Maria Montessori desenvolveu vários materiais manipulativos destinados à aprendizagem da Matemática. De acordo com o autor, a educadora acreditava que não poderia haver aprendizado sem ação. Fiorentini (1997) conta, ainda, que Montessori acreditava que nada deveria ser dado ao aluno, no campo da Matemática, sem que primeiro fosse lhes apresentado uma situação concreta que o possibilitasse agir, pensar, experimentar, descobrir, para então, mergulhar na abstração.

5.2 O caderno

O caderno é composto por quatro unidades, sendo que, em cada uma delas, é apresentada uma proposta de trabalho que visa o desenvolvimento de conceitos para que ocorra uma construção significativa do algoritmo da divisão. A tabela, a seguir, traz cada uma das unidades do caderno com suas respectivas propostas de trabalho.

TABELA 5 - Descrição das unidades do Caderno (Continua)

O caderno: uma proposta de ensino para o algoritmo da divisão		
Unidade I	O sistema de numeração decimal	**Proposta 1**: Construindo a base decimal com situações-problemas e o QVP.
		Proposta 2: Construindo o sistema posicional pela comparação de números
		Proposta 3: Compondo e decompondo números por adições, consolidando as características do sistema de numeração decimal.
		Proposta 4: O material dourado e o sistema de numeração decimal.
		Proposta 5: O jogo como forma de consolidar as características do sistema de numeração decimal.
Unidade II	As ideias do campo multiplicativo	**Proposta 1**: Situações-problemas envolvendo as ideias de combinatória e configuração retangular.
		Proposta 2: Situações-problemas envolvendo a ideia de proporcionalidade.
		Proposta 3: Situações-problemas envolvendo as ideias de partição e medida.
		Proposta 4: Construindo situações-problemas a partir de frases embaralhadas.
		Proposta 5: Construindo situações-problemas a

(Conclusão)

		partir de perguntas previamente estabelecidas.
Unidade III	Os fatos da multiplicação	**Proposta 1**: Situações-problemas envolvendo unidades compostas.
		Proposta 2: Construindo os fatos com o uso de material concreto.
		Proposta 3: Construindo os fatos com o uso de papel quadriculado.
		Proposta 4: Construindo a tabela de dupla entrada.
		Proposta 5: Consolidando os fatos pelo uso de jogos.
Unidade IV	Construindo o algoritmo da divisão	**Proposta 1**: Dividindo com o material dourado.
		Proposta 2: Dividindo com o QVP.
		Proposta 3: Relacionando o algoritmo da divisão com o material dourado e o QVP.
		Proposta 4: Compreendendo o algoritmo da divisão
		Proposta 5: Analisando divisões com auxilio da calculadora.

A seguir, apresentaremos as propostas de cada uma das unidades do caderno.

5.2.1 O sistema de numeração decimal

Um dos aspectos mais importantes da Matemática é a compreensão do sistema de numeração decimal, visto que essa compreensão possibilita um entendimento, por exemplo, dos processos algorítmicos das operações.

As crianças podem errar ou acertar ao resolverem os algoritmos das operações, porém, nem sempre as que acertam conseguem perceber que há um vínculo das “unidades, dezenas, centenas” com os famosos “vai um” e o “pedir emprestado”, por exemplo. Lerner e Sadovsky (2008) dizem que, para ensinar e aprender o sistema de numeração decimal, é preciso criar situações que permitam mostrar a sua organização, quais são as propriedades da estrutura numérica que esse sistema representa.

Portanto, o objetivo, ao elaborar essa unidade, foi propor atividades de reflexão sobre as características desse sistema, mostrando a lógica decimal e posicional nessa organização numérica. A seguir, discorreremos sobre cada uma das propostas pensadas para essa unidade.

TABELA 6 - Proposta 1: construindo a base decimal com situações-problemas e o QVP

Proposta 1 e objetivo do trabalho com o sistema de numeração decimal	
Objetivo	Utilizar uma situação-problema para construir a base decimal do nosso sistema de numeração utilizando o QVP como ferramenta.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar a base decimal do nosso sistema de numeração.

Fonte: Elaborado pela autora

Ao final dessa proposta, espera-se que os alunos percebam que a cada agrupamento de 10 unidades, 10 dezenas, 10 centenas e assim, sucessivamente, haverá uma troca do algarismo na ordem que houve o agrupamento e na ordem seguinte. Segundo a diretoria de apoio à gestão educacional, responsável pela confecção do caderno “construção do sistema de numeração decimal” do programa PNAIC (BRASIL, 2014a):

> O desenvolvimento de atividades de agrupamentos e trocas possibilita à criança perceber semelhanças e diferenças envolvidas nas situações de contagem, favorecendo a abstração e a compreensão do sistema de numeração. Não basta a criança decorar os termos unidade, dezena, centena, é preciso que ela entenda o que é essa base (dez) e para que serve. (BRASIL, 2014a, p.36).

TABELA 7 - Proposta 2: construindo o sistema posicional pela comparação de números

Proposta 2 e objetivo do trabalho com o sistema de numeração decimal	
Objetivo	Utilizar uma situação-problema para construir o sistema posicional utilizando a comparação entre números e o QVP como ferramenta.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar o sistema posicional.

Fonte: Elaborado pela autora

Nessa proposta propõe-se o trabalho com o valor posicional dos algarismos através das comparações entre números. O foco nessa proposta é o aluno compreender a importância da posição que o algarismo ocupa no número, deixando para trás a decoreba dos termos unidade, dezena, centena, sem, de fato, ter a compreensão do que realmente significam. Segundo a diretoria de apoio à gestão educacional do programa PNAIC (BRASIL, 2014a):

> A construção do SND passa por várias etapas e não importa o contexto de trabalho pedagógico, se no campo ou na cidade, se com turmas maiores ou menores, se com turmas com mais ou menos dificuldades de aprendizagem, é necessário passar pelas etapas da contagem, do agrupamento e das trocas e, finalmente, colocar ênfase no aspecto posicional do sistema. (BRASIL, 2014a, p.37).

TABELA 8 - Proposta 3: compondo e decompondo números por adições, consolidando as características do sistema de numeração decimal

Proposta 3 e objetivo do trabalho com o sistema de numeração decimal	
Objetivo	Utilizar uma situação-problema para compor e decompor um número de diferentes formas, utilizando dinheiro de papel e o QVP como ferramenta.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar a composição e decomposição

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo das situações apresentadas nessa proposta é fazer com que os alunos compreendam que um número pode ser representado pela composição e decomposição numérica através de adições, pois acredita-se que quando o aluno consegue assimilar essa característica do sistema de numeração decimal, ele dá conta, por exemplo, do cálculo mental por composição e decomposição dos números.

TABELA 9 - Proposta 4: o material dourado e o sistema de numeração decimal

Proposta 4 e objetivo do trabalho com o sistema de numeração decimal	
Objetivo	Utilizar o material dourado para trabalhar as características do sistema de numeração decimal.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar os agrupamentos e trocas, o sistema posicional e a composição e decomposição dos números.

Fonte: Elaborado pela autora

Sendo essa a quarta proposta de trabalho, e já tendo explorado outros materiais manipuláveis, sugere-se, aqui, o uso do material dourado, criado por Maria Montessori e composto por cubinhos, barras, placas e um cubo grande. O material dourado auxilia no ensino e aprendizagem do sistema de numeração decimal, contudo, é aconselhável que a turma já tenha um conhecimento sobre esse material, pois caso isso não ocorra, o aluno vê a barra que representa a dezena como algo não muito diferente do cubinho que representa a unidade.

TABELA 10 - Proposta 5: o jogo como forma de consolidar as características do sistema de numeração decimal

Proposta 5 e objetivo do trabalho com o sistema de numeração decimal	
Objetivo	Através dos jogos consolidar as características do sistema de numeração decimal.
Conceitos ou propriedades abordados	Consolidar os agrupamentos e trocas, o sistema posicional e a composição e decomposição dos números.

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo, nessa última proposta dessa primeira unidade do caderno, é ampliar e/ou consolidar os conhecimentos sobre o sistema de numeração decimal. Para tanto, optou-se pelo trabalho com jogos. O objetivo, então, é que o aluno realize uma atividade matemática enquanto está interagindo com o jogo, cujas regras devem possibilitar uma aprendizagem matemática.

De acordo com a diretoria de apoio à gestão educacional, responsável pela confecção do caderno 3 - "Construção do sistema de numeração decimal" do PNAIC (BRASIL, 2014a), existem muitas possibilidades de a utilização dos jogos favorecer a aprendizagem da Matemática, que pode ocorrer:

- Pelo livre brincar, onde se acredita que o ato de brincar já garante o desenvolvimento do raciocínio lógico;
- Pela observação dos jogos, para conhecimento da mobilização e construção de conceitos matemáticos;
- Pela transformação de jogos tradicionais da infância

5.2.2 As ideias do campo multiplicativo

Nessa unidade, estudar-se-á o segundo fator que irá determinar o sucesso para a aprendizagem dos algoritmos, nesse caso, da divisão, que são as ideias do campo multiplicativo.

O objetivo, ao propor essa unidade, é trabalhar as ideias do campo multiplicativo, a fim de tornar os alunos aptos a resolverem diferentes situações com sentido e significado, de modo que, eles desenvolvam diferentes estratégias de cálculo, raciocinando sobre aquilo que estão resolvendo, ao invés de utilizarem o algoritmo de forma mecânica.

A ideia é buscar cada vez mais evidenciar as relações existentes entre a multiplicação e a divisão, mesmo antes da sistematização de seus algoritmos. Assim, pensa-se que quanto mais tipos de problemas os alunos conhecerem, mais eles ampliarão a compreensão das operações e aumentarão o repertório de estratégias.

As ideias do campo multiplicativo são: raciocínio combinatório, configuração retangular, proporcionalidade, partição e medida.

TABELA 11 – Proposta 1: situações-problemas envolvendo as ideias de combinatória e configuração retangular

Proposta 1 e objetivo do trabalho com as ideias do campo multiplicativo	
Objetivo	Utilizar situações - problemas para construir as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar as ideias de combinatória e configuração retangular.

Fonte: Elaborado pela autora

Nessa segunda unidade do caderno, o objetivo é trabalhar as ideias do campo multiplicativo, conforme já exposto. Nesse sentido, segundo Berton e Itacarambi (2009), ensinar um algoritmo de uma operação a um aluno que ainda não compreendeu o significado dessa operação não tem sentido algum. De acordo com o autor, os algoritmos permitem tratar as operações de uma forma mecanizada, onde não é necessário pensar muito sobre o assunto, basta seguir os passos definidos. No entanto, calcular com sentido do número significa que cada um deve olhar primeiramente para os números e depois decidir por uma estratégia adequada à situação.

Mesmo que o aluno não domine as ideias do campo multiplicativo de imediato, ele gradualmente irá tecer as relações entre os conceitos das operações e assim, posteriormente o aprendizado do algoritmo ganhará significado. A compreensão do problema vem antes da sistematização de um procedimento para solucioná-lo.

TABELA 12 - Proposta 2: situações-problemas envolvendo a ideia de proporcionalidade

Proposta 2 e objetivo do trabalho com as ideias do campo multiplicativo	
Objetivo	Utilizar situações - problemas para construir as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar a ideia de proporcionalidade.

Fonte: Elaborado pela autora

Nas três primeiras propostas dessa unidade sugere-se abordar as ideias do campo multiplicativo partindo de situações-problemas e disponibilizando materiais concretos para que os alunos possam ter mais facilidade para compreender cada uma delas. Restringir o ensino da multiplicação a situações que envolvem a soma de parcelas iguais e o ensino da divisão a situações que envolvem apenas a ideia de partição podem empobrecer a aprendizagem. Assim, convém explorar uma diversidade de ideias, representações e contextos de natureza multiplicativa.

TABELA 13 - Proposta 3: situações-problemas envolvendo as ideias de partição e medida

Proposta 3 e objetivo do trabalho com as ideias do campo multiplicativo	
Objetivo	Utilizar situações-problemas para construir as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar as ideias de partição e medida.

Fonte: Elaborado pela autora

Nas duas últimas propostas dessa unidade, o objetivo é proporcionar aos alunos uma prática educativa instigante, contextualizada e reflexiva, estimulando o aluno a organizar e também a criar situações que abordem as ideias do campo multiplicativo buscando, assim, um entendimento maior dessas ideias.

TABELA 14 - Proposta 4: construindo situações-problemas a partir de frases embaralhadas

Proposta 4 e objetivo do trabalho com as ideias do campo multiplicativo	
Objetivo	Utilizar frases embaralhadas para construir situações - problemas que abordam as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar as ideias do campo multiplicativo.

Fonte: Elaborado pela autora

Após trabalhar as ideias de combinatória e configuração retangular na primeira proposta e, as ideias de proporcionalidade, partição e medida na segunda e terceira, propõe-se explorar, novamente, as cinco ideias do campo multiplicativo. Pires (2013) destaca a importância de um trabalho conjunto de problemas que explorem a multiplicação e a divisão, uma vez que há estreitas conexões entre as situações que as envolvem e a necessidade de trabalhar essas operações com base em um campo mais amplo de significados do que tem sido usualmente realizado.

Nessa proposta, esperamos que os alunos vivenciem as situações-problemas do campo multiplicativo que irão resolver, compreendendo os conceitos por trás das operações e assim, dando condições para que os alunos ampliem sua visão desse campo.

TABELA 15 - Proposta 5: construindo situações-problemas a partir de perguntas previamente estabelecidas

– Proposta 5 e objetivo do trabalho com as ideias do campo multiplicativo	
Objetivo	Utilizar perguntas previamente estabelecidas para construir situações - problemas que trazem as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar as ideias do campo multiplicativo.

Fonte: Elaborado pela autora

5.2.3 Os fatos da multiplicação

O terceiro fator importante para a construção do algoritmo da divisão é a aprendizagem dos fatos da multiplicação. Nesse sentido, segundo Bigode e Frant (2011, p.25), "a tabuada é importante para uma aprendizagem mais sólida de outros conceitos e técnicas aritméticas, como os algoritmos da multiplicação e da divisão".

A terceira unidade do caderno visa aparar as arestas quanto aos fatos numéricos da multiplicação. Segundo Bigode e Frant (2011) é importante incentivar os alunos a demonstrar suas habilidades no cálculo mental para que eles sintam que a multiplicação não é mais um obstáculo para a resolução de problemas. Além disso, um bom trabalho de desenvolvimento do cálculo mental ajuda no estudo dos algoritmos convencionais da multiplicação e da divisão.

O objetivo, portanto, ao elaborar essa unidade, é propor atividades que visam à construção dos fatos carregada de significado, possibilitando aos alunos sua memorização. De acordo com Berton e Itacarambi (2009):

> Uma discussão muito frequente entre pais e educadores que utilizam matemática e se há necessidade de memorizar ou não a tabuada na sociedade da informatização. Algumas razões parecem justificar a necessidade de seu domínio, entre elas, a aprendizagem do algoritmo convencional da divisão, cujo foco no ensino desse está na compreensão dos procedimentos que se apoiam nos fatos fundamentais. (BERTON; ITACARAMBI, 2009, p.152).

TABELA 16 - Proposta 1: situações-problemas envolvendo unidades compostas

Proposta 1 e objetivo do trabalho com os fatos da multiplicação	
Objetivo	Construir os fatos da multiplicação a partir de situações-problemas que envolvem a contagem por unidades composta.
Conceitos ou propriedades abordados	Tabuada da multiplicação de 2 à 10.

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo, nessa primeira proposta, é trabalhar situações-problemas que levem os alunos à construção dos fatos da multiplicação usando a contagem por unidades compostas. Sugere-se, para a resolução das situações apresentadas, o uso de material concreto, como: tampinhas de garrafa, canudinhos ou o próprio material dourado.

Nessa primeira proposta da unidade III, parte-se da ideia de memorizar os fatos da multiplicação, segundo seu uso e aplicação, de modo que, a ideia principal é de que a compreensão é fundamental, sendo inconcebível exigir dos alunos que recitem os fatos sem que haja o entendimento do significado de sua fala. A multiplicação precisa ser construída e compreendida, e essa construção é resultado de um trabalho mental por parte dos alunos.

Na primeira proposta, portanto, o objetivo é a construção dos fatos da multiplicação partindo de situações que envolvam a contagem por unidades compostas utilizando materiais concretos, com a intenção de que os alunos possam inicialmente apoiarem-se na visualização das quantidades. Na perspectiva de Bigode e Frant (2011), quando se recorre a imagens, se contribui para a criação de uma memória visual, levando a uma memorização mais sólida da tabuada.

TABELA 17 – Proposta 2: construindo os fatos com o uso de material concreto

Proposta 2 e objetivo do trabalho com os fatos da multiplicação	
Objetivo	Construir os fatos da multiplicação a partir de objetos.
Conceitos ou propriedades abordados	Tabuada da multiplicação de 2 a 10.

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo, nessa segunda proposta de trabalho, é a construção dos fatos através de materiais concretos como: tampinha de garrafa, palito de picolé, canudinho, papel colorido ou outros tipos de materiais que desempenhem a mesma função, pois acredita-se que o recurso visual que o material concreto proporciona auxilia o aluno a compreender a propriedade e a conta passa a fazer sentido para ele, pois consegue construir uma ideia visual para ela. Ou seja, os alunos conseguem estabelecer uma conexão entre o conceito e a conta armada, pois há uma base criada pelo visual para que haja a abstração.

TABELA 18 - Proposta 3: construindo os fatos com o uso de papel quadriculado

Proposta 3 e objetivo do trabalho com os fatos da multiplicação	
Objetivo	Construir os fatos da multiplicação usando o papel quadriculado.
Conceitos ou propriedades abordados	Tabuada da multiplicação de 2 a 10.

Fonte: Elaborado pela autora

Nessa proposta, a ideia é construir os fatos usando o papel quadriculado como material de apoio. A malha quadriculada é um recurso pedagógico cuja função é ajudar os alunos na compreensão das formas geométricas e suas propriedades, no estudo da área e do perímetro, além de contribuir nas operações, especialmente na multiplicação, para a compreensão de suas propriedades.

TABELA 19 – Proposta 4: construindo a tabela de dupla entrada

Proposta 4 e objetivo do trabalho com os fatos da multiplicação	
Objetivo	Explorar regularidades nas multiplicações com fatores até 10, desenvolver o cálculo mental, favorecer a memorização dos fatos básicos da multiplicação.
Conceitos ou propriedades abordados	Tabuada de multiplicação do 2 ao 10.

Fonte: Elaborado pela autora

Nessa quarta proposta, após os alunos já terem trabalhado com situações de construção da tabuada envolvendo materiais concretos, sugere-se a construção da tábua de Pitágoras, que é uma tabela de dupla entrada, na qual são registrados os resultados da multiplicação dos números que ocupam a linha e a coluna principais.

Essa atividade visa à possibilidade de exploração das regularidades que aparecem na construção da tabela. A percepção dessas regularidades e das relações é o que ajuda os alunos a memorizar os fatos sem a necessidade de decorar.

TABELA 20 – Proposta 5: consolidando os fatos pelo uso de jogos

Proposta 5 e objetivo do trabalho com os fatos da multiplicação	
Objetivo	Consolidar os fatos numéricos da multiplicação através de jogos.
Conceitos ou propriedades abordados	As tabuadas da multiplicação de 2 ao 10.

Fonte: Elaborado pela autora

Outro recurso que também contribui para a memorização dos fatos numéricos da multiplicação são os jogos. Na perspectiva de Bigode e Frant (2011), eles são uma forma interessante de propor problemas, pois favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução.

Através do lúdico, portanto, os alunos terão possibilidade para “memorizar” os fatos multiplicativos, além de entender a relação da multiplicação e da divisão como operações inversas. Pitombeira (2010) faz uma reflexão sobre o uso dos jogos, dizendo que eles têm um papel importante na integração da criança ao contexto escolar, podendo auxiliar o aluno, com a ajuda do professor a construir o conhecimento matemático em grupo, entendendo e discutindo as suas regras, além de desenvolver comunicações matemáticas e validá-las.

Existem muitos jogos que abordam os fatos numéricos da multiplicação, iremos propor alguns, como: bingo da tabuada, dominó da tabuada e adivinhe a multiplicação.

Após finalizarem as três primeiras unidades que fornecem a base para a construção do algoritmo tradicional da divisão, almeja-se que os alunos possam construí-lo de maneira que essa construção esteja repleta de sentido e significado.

5.2.4 Construindo o algoritmo da divisão

O objetivo, conforme já exposto, ao apresentar as três primeiras unidades do caderno (sistema de numeração decimal, as ideias do campo multiplicativo e os fatos da multiplicação), é construir uma base sólida para que haja a aprendizagem do algoritmo da divisão com sentido e significado para o aluno. Segundo Saiz (2008), a atribuição de um significado a cada uma das etapas do cálculo, em termos da situação de referência, lhes permitirá resolver os problemas com o controle suficiente para determinar sua validade.

TABELA 21 – Proposta 1: dividindo com o material dourado

Proposta 1 e objetivo do trabalho com o algoritmo da divisão	
Objetivo	Efetuar divisões com o uso do material dourado, a fim de construir o algoritmo da divisão.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

Fonte: Elaborado pela autora

Nessa proposta, pretende-se trabalhar com situações que abordam a divisão, disponibilizando o material dourado como ferramenta para a resolução. O objetivo é, a partir de o concreto, buscar a compreensão das etapas do algoritmo da divisão visando conferir significado a essas etapas através da associação de seus diversos passos com os procedimentos utilizados para efetuar a operação com o material dourado.

TABELA 22 – Proposta 2: dividindo com o QVP

Proposta 2 e objetivo do trabalho com o algoritmo da divisão	
Objetivo	Com o uso do QVP, efetuar divisões a fim de construir o algoritmo da divisão.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

Fonte: Elaborado pela autora

O QVP é outro recurso que pode ser explorado favorecendo a compreensão do algoritmo tradicional da divisão, sendo este um instrumento de aprendizagem que contribui no processo de contagem, na formação dos números e nas operações matemáticas. Ao final dessa proposta, almeja-se que os alunos estejam preparados para relacionar o realizado até aqui com o passo a passo do algoritmo da divisão.

TABELA 23 – Proposta 3: relacionando o algoritmo da divisão com o material dourado e o QVP

Proposta 3 e objetivo do trabalho com o algoritmo da divisão	
Objetivo	Relacionar os trabalhos anteriores feitos com o material dourado e o QVP com o algoritmo da divisão.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

Fonte: Elaborado pela autora

Após trabalhar nas três primeiras propostas da unidade com o auxílio do material concreto, visando à compreensão das etapas envolvidas na resolução do algoritmo da divisão, busca-se, nessa quarta proposta, explorar uma atividade voltada para a abstração.

TABELA 24 – Proposta 4: entendendo o algoritmo da divisão

Proposta 4 e objetivo do trabalho com o algoritmo da divisão	
Objetivo	Compreender a lógica do algoritmo tradicional da divisão.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

Fonte: Elaborado pela autora

Atualmente, as calculadoras já fazem parte do universo escolar, tendo discussões atuais permeando o seu modo de uso para que desenvolvam as competências de cálculo nos alunos. Bigode e Frant (2011) fazem uma reflexão sobre o uso dessa ferramenta didática, dizendo que as atividades com calculadoras potencializam a capacidade dos alunos de fazer, mais e melhor, ajudando a compreender o que estão fazendo no cálculo escrito.

TABELA 25 – Proposta 5: analisando divisões com auxilio da calculadora

Proposta 5 e objetivo do trabalho com o algoritmo da divisão	
Objetivo	Consolidar o que foi estudado na unidade sobre o algoritmo da divisão, analisando a resolução de algumas divisões usando como ferramenta de auxílio à calculadora.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

Fonte: Elaborado pela autora

A última atividade do caderno, portanto, visa o uso dessa ferramenta, com o objetivo de fazer com que os alunos compreendam a lógica do algoritmo convencional da divisão durante a análise de alguns erros, utilizando, para isso, a calculadora. De acordo com Bigode e Frant (2011), o uso dessa ferramenta nos anos finais do Ensino Fundamental deve visar um aprofundamento dos conhecimentos sobre os algoritmos e, também, no desenvolvimento das capacidades do cálculo mental e das estimativas. Os autores afirmam que um bom uso desse instrumento didático pode contribuir para que os alunos desenvolvam suas estruturas cognitivas de mais alto nível.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa buscou investigar as dificuldades que os alunos têm no algoritmo da divisão e teve a intenção de contribuir para uma aprendizagem significativa desse algoritmo a partir da construção de situações-problemas envolvendo conceitos relacionados à divisão, buscando uma ressignificação e uma melhora dos mesmos.

Inicialmente, foi realizada uma revisão bibliográfica buscando entender a construção do conceito de número, tanto historicamente como pela criança, e o seu significado e das operações, compreendendo a importância desses conceitos e ideias na construção dos processos algorítmicos.

A partir das leituras iniciais, foram elaborados testes que foram aplicados aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de Belo Horizonte, sujeitos dessa pesquisa.

A análise dos dados coletados permitiu identificar e categorizar os erros, cometidos por aqueles alunos e, portanto identificar as dificuldades por eles enfrentadas. Dessa forma, tomou-se, como ponto de partida, as dificuldades elencadas na pesquisa, o que possibilitou o traçamento de estratégias para uma aprendizagem significativa do processo algorítmico da divisão.

Concluí-se, diante dos dados coletados, que para haver sentido na construção desse algoritmo, deve-se trabalhar primeiro as bases que darão suporte ao seu ensino, partindo de situações-problemas que possibilitem essa construção com o aporte de materiais concretos que serão facilitadores nesse processo de significação. Somente após essa base ser construída pelos alunos é que haverá sentido na aprendizagem do algoritmo da divisão.

Ao analisar o material coletado e categorizar os erros constatou-se que:

- O algoritmo da divisão se baseia em regras do sistema de numeração decimal, e, portanto, seu ensino só deve ser iniciado quando os alunos já estiverem dominando os processos de agrupamentos e trocas e, a representação simbólica dos números nesse sistema. Ou seja, o primeiro passo para um ensino bem sucedido do algoritmo da divisão é o domínio das características do sistema de numeração decimal pelos alunos, visto que seu entendimento é determinante para a compreensão do processo algorítmico;

- Outros aspectos que necessitam ser trabalhados são as ideias do campo multiplicativo, pois os alunos precisam compreender o significado e as ideias que permeiam as operações desse campo, antes de estudar seus algoritmos;
- O terceiro fator importante para que haja uma construção do algoritmo da divisão com sentido e significado é o domínio dos fatos da multiplicação. Esse domínio consiste no entendimento conceitual da multiplicação a partir de situações-problemas, ou seja, a multiplicação precisa ser construída e compreendida e essa construção é resultado de um trabalho mental por parte dos alunos;

A proposta de ensino apresentada nesse trabalho foi estruturada em um caderno, sendo as ideias de atividades pensadas para alunos do Ensino Fundamental e organizadas em unidades que abordam conceitos que são a base para a construção e o entendimento do processo algorítmico da divisão. As atividades foram elaboradas com o intuito de permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos anteriores e amplie-os, fazendo com que questionem e elaborem novas situações.

Ao trabalhar cada unidade do caderno, os professores deverão, porém, estar atentos ao desenvolvimento da turma, pois o processo de ensino-aprendizagem não é uma transferência de conhecimento e sim um processo que cria possibilidades para que o aluno seja capaz de compreender e dar significado aos conceitos matemáticos.

Para que a aprendizagem de todos os conceitos envolvidos no processo de construção do algoritmo da divisão ocorra, é importante o trabalho com materiais manipulativos. A utilização desses materiais oferece vantagens, pois cria um ambiente favorável à aprendizagem, além de despertar o interesse dos alunos e facilitar as descobertas das relações matemáticas que desejamos ensinar.

O estudo e as reflexões sobre o processo ensino-aprendizagem do algoritmo da divisão, bem como a elaboração do caderno de atividades, contribuíram para a formação pessoal e profissional da pesquisadora, despertando um interesse em buscar seu aperfeiçoamento e levando para sua sala de aula uma nova abordagem para o ensino da Matemática. Além disso, há um desejo de continuar a estudar e a pesquisar sobre o ensino da Matemática, visando, dessa forma, um possível trabalho com formação de professores.

Nesse sentido, os resultados apontados por esta pesquisa mostram que o ensino do algoritmo da divisão, no contexto da sala de aula, se constitui em um desafio e que as dificuldades vivenciadas hoje, tanto para quem ensina quanto para quem aprende, podem ser superadas mediante um trabalho de ressignificação do algoritmo da divisão.

Além disso, entende-se que essa pesquisa não possui um fim em si mesma, mas abre espaços para novas indagações, visões e levantamentos de novas hipóteses acerca do tema em questão, necessitando, cada vez mais, de aprofundamentos e pesquisas referentes a ele.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACKES, Dirce Stein; COLOMÉ, Juliana Silveira; ERDMANN, Rolf Herdmann; LUNARDI, Valéria Lerch. **Grupo focal como técnica de coleta e análise de dados em pesquisas qualitativas**. Artigo de revisão. O mundo da saúde, São Paulo: 2011.

BATISTA, Cecilia Guarnieri. Fracasso escolar: análise de erros em operações matemáticas. **Zetetiké**, Campinas, ano 3, n.4, p.61-73, 1995.

BELFORT, Elizabeth; MANDARINO, Mônica. Números naturais. In: **Pró-Letramento**: Programa de formação continuada de professores dos Anos/Séries iniciais do Ensino Fundamental: Matemática. Ed. rev. e ampl. MEC, Secretaria de Educação Básica, 2008.

BELO HORIZONTE. Prefeitura de Belo Horizonte. Secretaria Municipal de Educação. Gerência de coordenação da política pedagógica e de formação. **Cadernos de Educação Matemática:** E por falar em tabuada... Secretaria Municipal de Educação, Gerência de coordenação da política pedagógica e de formação. Belo Horizonte: PBH, 2008.

BERTON, Ivani da Cunha Borges; ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Números Brincadeiras e Jogos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Educação e linguagem matemática II:** Numerização. Brasília: Universidade de Brasília, 2007.

BIGODE, Antônio José Lopes; FRANT, Janete Bolite. **Matemática:** soluções para dez desafios do professor. 1° ao 3° ano do ensino fundamental. São Paulo: Ática Educadores, 2011.

BIGODE, Antônio José Lopes; GIMENEZ, Joaquim. **Metodologia para o ensino da Aritmética: competência numérica no cotidiano.** São Paulo: FTD, 2009.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 2.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Construção do Sistema de Numeração Decimal.** Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio á Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014a.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Operações na resolução de problemas** / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio á Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014b.

CASTILHO, Sônia Fiuza da Rocha. Graduação de dificuldades: adição, subtração, multiplicação e divisão. **Revista AMAE EDUCANDO**. Nov., 1970.

CASTILHO, Sônia Fiuza da Rocha. Graduação de dificuldades: adição e subtração. **Revista AMAE EDUCANDO**. Ago., 1987.

CASTILHO, Sônia Fiuza da Rocha. Graduação de dificuldades: multiplicação e divisão. **Revista AMAE EDUCANDO**. Set., 1991.

CENTURIÓN, Marília. **Algoritmos e resolução de problemas**. Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação. Seminários de Ensino de Matemática. Coordenador: Nilson José Machado. São Paulo: novembro, 2008.

CHARNAY, Roland. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. (Orgs.) **Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2008.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática:** Percursos Teóricos e Metodológicos. Campinas, SP: 2009.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. **Boletim SBEM**, ano 4, n.7, 1997.

IMENES, Luiz Márcio. **Vivendo a Matemática:** A Numeração Indo-arábica. São Paulo: Scipione, 1999.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Vivendo a Matemática:** Os números na história da civilização. 12. ed. São Paulo: Scipione, 1999.

INFOESCOLA. **Escrita cuneiforme**. Disponível em: http://www.infoescola.com/civilizacoes-antigas/escrita-cuneiforme/. Acesso em: 26 ago. 2014.

KAMII, Constance. **A criança e o número:** Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos**.** 39. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

LERNER, Delia; SADOVSKY, Patrícia. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. (Orgs.) **Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LOUREIRO, Cristina. Algoritmos para as quatro operações. Adaptação do texto: Em defesa da utilização da calculadora: algoritmos com sentido numérico. **Educação Matemática,** n.77, p. 22-29, Lisboa, 2004.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1986.

LUZ, Marilei Aparecida Biscaia. **Caderno pedagógico de análise de erros**. Estado do Paraná. Secretaria de Estado da Educação. Programa de desenvolvimento educacional. Paraná, 2008

MANDARINO, Mônica Cerbella Freire. Número e operações. In: PITOMBEIRA, João Bosco. **Matemática:** Ensino Fundamental**.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. v.17. (Coleção Explorando o ensino)

MATEMÁTICA SIMPLES. **História dos números**. Disponível em: http://matematicasupersimples.blogspot.com.br/p/historia-dos-numeros.html. Acesso em: 15 abr. 2014.

NEVES, José Luis. Pesquisa qualitativa: características, usos e possibilidades. **Caderno de pesquisas em administração.** São Paulo, v.1, n.03, 1996.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação Matemática 1:** Números e Operações Numéricas. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

OLIVEIRA, Naiana Alves; PORTO, Adrize Rutz; PALMA, Josiane Santos; CALCAGNO, Neizy Gabrielle da Silva; FEHN, Licelma Amanda Cavada; THOFEHRN, Maira Buss. Contextualizando o grupo focal: técnica de coleta de dados em pesquisa qualitativa. Conhecimento sem fronteiras. 17, **Anais...** XVII Congresso de iniciação científica, nov., 2008.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Números Naturais e Operações.** São Paulo: Editora Melhoramentos, 2013.

PITOMBEIRA, João Bosco. **Matemática:** Ensino Fundamental**.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, v.17, 2010. (Coleção Explorando o ensino)

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Tendências em Educação Matemática: Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SAIZ, Irma**.** Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. (Orgs.) **Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SANTOS, José Elyton Batista. **O algoritmo da divisão, suas representações e os campos conceituais**. Universidade Federal de Alagoas. Centro de Educação. Semana de pedagogia. Gestão da educação em Alagoas: ameaças e desafios. Alagoas, 2013.

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho. **A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de Matemática**. Universidade Federal do Piauí, 2007.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. **Cadernos do Mathema** – Ensino Fundamental: Jogos de Matemática de 1° ao 5° ano. Porto Alegre: Editora Penso, 2007.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. T**eoria e Prática de Matemática:** como dois e dois. São Paulo: FTD, 2009.

UFBA. **Sistema de numeração egípcia**. Disponível em: http://www.moodle.ufba.br/mod/book/view.php?id=20486&chapterid=12637. Acesso em 17 ago. 2013.

UFPB. **Algarismos indo-arábicos**. Disponível em: http://producao.virtual.ufpb.br/books/camyle/introducao-a-computacao-livro/livro/livro.chunked/ch03s01.html. Acesso em: 2 abr. 2014

VERNAUD, Gérard. **A Criança, a Matemática e a Realidade:** problemas do ensino da Matemática na escola elementar. Trad. Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

WIKIPÉDIA. **Papiro**. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro.. Acesso em 17 ago. 2013

ZATTI, F; AGRANIONIH, N.T; ENRICONE, J.R.B. Aprendizagem Matemática: desvendando dificuldades de cálculos dos alunos. **Perspectiva Erechim**, v.34, n.128, p. 115-132, dez., 2010.

ZATTI, F; AGRANIONIH, N.T; ENRICONE, J.R.B. **Dificuldades no cálculo de divisão na 5ª série do ensino fundamental.** X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Ijuí, RS. Junho, 2009.

ZUNINO, Delia Lerner. **A Matemática na escola:** aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

APÊNDICES

Apêndice A - Caderno de Atividades

Caderno de Atividades

Organização: Fernanda da Costa Diniz

Orientação: Eliane Scheid Gazire

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este caderno de atividades foi elaborado como desdobramento da dissertação de mestrado **DESAFIOS NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO ALGORITMO DA DIVISÃO: um trabalho com alunos do 7° ano de uma escola da rede municipal de ensino de Belo Horizonte**. Para desenvolvê-lo realizou-se uma pesquisa com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Belo Horizonte.

O caderno está organizado da seguinte forma: primeiro, apresentamos uma síntese das dificuldades dos alunos levantadas com a pesquisa que nortearam a construção desse caderno. Em seguida, abordamos as ideias que fundamentam a proposta de ensino e seu objetivo. Mais à frente, apresentamos uma tabela com a descrição das atividades em cada uma das unidades que compõem este caderno e, finalmente, é apresentada cada uma das atividades com as orientações para os professores.

O PONTO DE PARTIDA

Durante a análise dos dados coletados na pesquisa, percebemos que alguns erros eram recorrentes, como, por exemplo, efetuar incorretamente a divisão devido a erros nos fatos da multiplicação, ou, ainda, escolher produtos equivocadamente para realizar os cálculos. Deparamo-nos com casos onde os alunos demonstraram não compreender as ideias da divisão, tão pouco seu processo algorítmico.

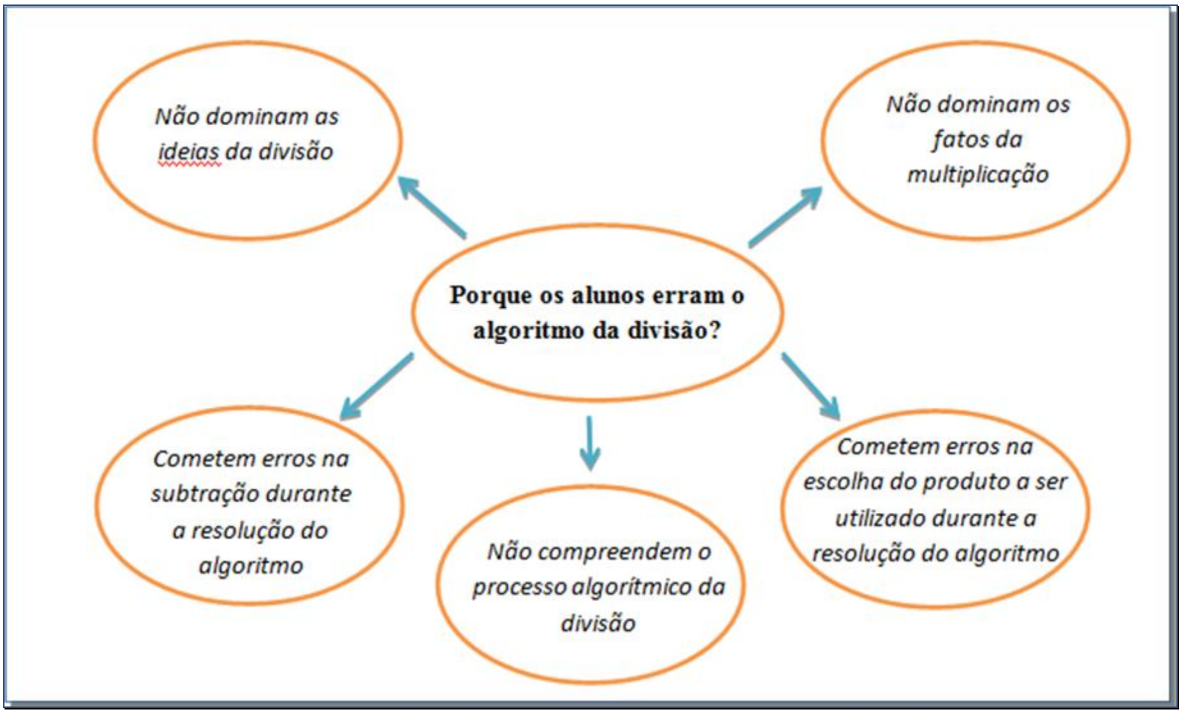
Sendo assim, percebemos que esses erros eram gerados devido a uma dificuldade ou falta de embasamento teórico em outros conceitos e ideias que precisam ser trabalhados previamente com os alunos, antes de iniciarmos a construção do processo algorítmico da divisão.

Tomando como ponto de partida as dificuldades elencadas na pesquisa, procuramos elaborar uma proposta de ensino com o objetivo de possibilitar a construção ou ressignificação do algoritmo da divisão.

Na perspectiva de Centurión (2008, p.2): "[...] ao ressignificar os algoritmos, a partir da construção de novos procedimentos, o aluno faz conjecturas, pode avançar ou recuar ao longo das etapas, mudar o percurso, criar atalhos, detectar isomorfismos entre algoritmos diversos, passando de mero espectador, ao papel de ator” (CENTURIÓN, p.2, 2008).

O esquema, a seguir, nos fornece uma visão desses erros cometidos pelos alunos, ao resolverem o algoritmo da divisão.

Categorias dos erros cometidos pelos alunos



Portanto, diante do exposto, entende-se que devemos deixar de lado os automatismos e as rotinas aprendidas por repetição no ensino dos algoritmos, cedendo espaço para um trabalho de construção de significado. Centurión (2008) diz, ainda, que levar os alunos a construir estratégias pessoais de cálculo pode ser um procedimento didático competente e um recurso fecundo. Bigode e Frant (2011) e Mandarino (2010) também ressaltam a importância de valorizar as estratégias usadas pelos alunos na resolução dos algoritmos, sendo, dessa forma, possível compreender seu pensamento e valorizá-lo quando se mostrar eficaz ou contribuir para a aprendizagem de outros conteúdos.

Assim, as unidades com suas respectivas propostas de trabalho que compõem este caderno de atividades foram pensadas e inspiradas nas dificuldades elencadas, nas leituras realizadas e em nossa própria prática docente, buscando, dessa forma, estarem coerentes com os pressupostos teóricos dessa pesquisa.

A PROPOSTA DE ENSINO E SEU OBJETIVO

A resolução do algoritmo da divisão é um processo constituído por etapas e cada uma delas é fundamental para que haja a compreensão do processo algorítmico como um todo.

Para que essa compreensão ocorra, o aluno deve conhecer e compreender o sistema de numeração decimal e as ideias do campo multiplicativo, além de dominar os fatos da multiplicação, para, então, relacioná-los com a construção do algoritmo da divisão compreendendo, assim, a lógica desse processo.

Mandarino (2010) faz uma reflexão sobre o ensino dos algoritmos. Ela diz que eles se baseiam em regras do sistema de numeração decimal e, portanto, faz diferença a organização dos números antes de iniciar o seu ensino. Ainda de acordo com a autora, as características do sistema de numeração decimal devem ser sempre trabalhadas para justificar cada passo dos processos algorítmicos convencionais.

Toledo e Toledo (2009) também afirmam que o trabalho com os algoritmos deve ser feito quando os alunos dominam os processos de agrupamentos e trocas e a representação simbólica dos números no sistema de numeração decimal. Segundo o autor, é preciso que os alunos compreendam o que estão fazendo, ao invés de memorizar um procedimento totalmente sem sentido para eles.

Com relação às ideias do campo multiplicativo, Saiz (2008) diz que o ensino das operações está baseado na comunicação de um procedimento de cálculo associado posteriormente a um pequeno universo de problemas que, supõe-se, "darão conta" do significado do conceito. Na perspectiva da autora, os algoritmos são aprendidos sabendo-se que vão servir para resolver problemas, porém, se desconhece de que problemas se tratam. Berton e Itacarambi (2009) afirmam que, ao iniciar o ensino do algoritmo da divisão, é fundamental constatar se houve avanços na compreensão de situações de divisão e do significado dessas operações.

Já no que diz respeito aos fatos da multiplicação, Bigode e Frant (2011) defendem a memorização da tabuada. Na perspectiva desses autores, enquanto os alunos não tiverem memorizado as tabuadas da multiplicação, todo plano de ensino deverá prever uma etapa de construção ou consulta da tabuada. Ele também ressalta as diferenças entre memorizar e decorar. Ainda segundo Bigode e Frant (2011), para que o ensino da tabuada seja bem-sucedido, o aluno precisa memorizá-la, ou seja, aprendê-la por meio do uso em situações significativas que partam do seu universo.

Diante disso, as atividades propostas em cada unidade do caderno foram pensadas tendo como fio condutor situações-problemas. De acordo com Centurión (2008, p.01), "[...] uma situação problema é algo que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho conhecido, rápido e direto que o leve à solução. É necessário, portanto, um processo de reflexão ou tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos".

Nosso objetivo ao utilizar situações-problemas para construir o algoritmo da divisão é de ordem "cognitiva", como nos mostra Charnay (2008), e, através da atividade de resolução de problemas, dirigimo-nos a um conhecimento, que pode ser uma noção ou um algoritmo. Assim, segundo o autor, nesses tipos de situações podemos distinguir entre os problemas que são usados como fonte para uma nova aprendizagem e aqueles que são utilizados para ressignificar um conteúdo ou conceito.

O importante, então, é o que está sendo ensinado para os alunos ter sentido. As atividades devem permitir que eles utilizem seus conhecimentos anteriores e amplie-os, fazendo com que questionem e elaborem novas situações. Também de acordo com Charnay (2008), quando o aluno é capaz não só de repetir ou refazer, mas também de ressignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas, então o conhecimento ensinado tem sentido para o aluno.

Para tanto, nessa abordagem, propomos a utilização de materiais concretos durante a resolução das situações-problemas. O uso desses materiais pode ser um facilitador para que o aluno compreenda o conteúdo que se deseja ensinar ou ressignificar. Assim, uma aula que dispõe de materiais manipulativos tem grandes chances de sucesso, existindo possibilidades reais de os alunos desenvolverem, nessa aula, ações que vão lhes permitir a construção de um saber consistente e significativo. É importante ressaltar, porém, que essa construção não ocorrerá simplesmente entregando para os alunos um material e deixando que eles quebrem a cabeça sozinhos, pois essa atitude não garante a aprendizagem. O material concreto é uma excelente ferramenta pedagógica, mas desde que haja a intervenção do professor, estimulando, questionando, promovendo um ambiente propício à aprendizagem.

Segundo Fiorentini (1997), a médica e educadora italiana Maria Montessori desenvolveu vários materiais manipulativos destinados à aprendizagem da Matemática. De acordo com o autor, a educadora acreditava que não poderia haver aprendizado sem ação. Fiorentini (1997) conta que Montessori acreditava que nada deveria ser dado ao aluno, no campo da Matemática, sem que, primeiro, fosse lhes apresentada uma situação concreta que o possibilitasse agir, pensar, experimentar, descobrir, para, então, mergulhar na abstração.

Portanto, a utilização de materiais manipulativos oferece vantagens durante o processo de aprendizagem do aluno, pois cria um ambiente favorável à aprendizagem despertando o seu interesse, facilitando as descobertas das relações matemáticas que se deseja ensinar.

Ao propormos essa abordagem para o ensino do algoritmo da divisão, então, tomamos como ponto norteador os erros elencados na pesquisa, visando, assim, construir as bases que darão suporte ao ensino do algoritmo, sempre partindo de situações-problemas que possibilitem essa construção com o aporte de materiais concretos que serão facilitadores nesse processo de significação.

O CADERNO

O caderno é composto por quatro unidades, sendo que, em cada uma delas, é apresentada uma proposta de trabalho que visa o desenvolvimento de conceitos importantes para que ocorra uma construção significativa do algoritmo da divisão. A tabela, a seguir, traz cada uma das unidades do caderno com suas respectivas propostas de trabalho.

O CADERNO: UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O ALGORITMO DA DIVISÃO		
Unidade I	O sistema de numeração decimal	**Proposta 1**: *Construindo a base decimal com situações-problemas e o QVP*.
		Proposta 2: *Construindo o sistema posicional pela comparação de números*
		Proposta 3: *Compondo e decompondo números por adições, consolidando as características do sistema de numeração decimal.*
		Proposta 4: *O material dourado e o sistema de numeração decimal.*
		Proposta 5: *O jogo como forma de consolidar as características do sistema de numeração decimal.*
Unidade II	As ideias do campo multiplicativo	**Proposta 1**: *Situações-problemas envolvendo as ideias de combinatória e configuração retangular.*
		Proposta 2: *Situações-problemas envolvendo a ideia de proporcionalidade.*
		Proposta 3: *Situações-problemas envolvendo as ideias de partição e medida.*
		Proposta 4: *Construindo situações-problemas a partir de frases embaralhadas.*
		Proposta 5: *Construindo situações-problemas a partir de perguntas previamente estabelecidas.*
Unidade III	Os fatos da multiplicação	**Proposta 1**: *Situações-problemas envolvendo unidades compostas.*
		Proposta 2: *Construindo os fatos com o uso de material concreto.*
		Proposta 3: *Construindo os fatos com o uso de papel quadriculado.*
		Proposta 4: *Construindo a tabela de dupla entrada.*
		Proposta 5: *Consolidando os fatos pelo uso de jogos.*
Unidade IV	Construindo o algoritmo da divisão	**Proposta 1**: *Dividindo com o material dourado.*
		Proposta 2: *Dividindo com o QVP.*
		Proposta 3: *Relacionando o algoritmo da divisão com o material dourado e o QVP.*
		Proposta 4: *Compreendendo o algoritmo da divisão*
		Proposta 5: *Analisando divisões com auxilio da calculadora.*

A seguir, apresentaremos as propostas de cada uma das unidades do caderno.

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL - UNIDADE I

Um dos aspectos mais importantes da Matemática é a compreensão do sistema de numeração decimal, visto que essa compreensão possibilita um entendimento, por exemplo, dos processos algorítmicos das operações.

As crianças, ao resolverem os algoritmos das operações, podem errar ou acertar, porém, nem sempre as que acertam conseguem perceber que há um vínculo das "unidades, dezenas, centenas" com os famosos "vai um" e o "pedir emprestado", por exemplo. Lerner e Sadovsky (2008) dizem que para ensinar e aprender o sistema de numeração decimal é preciso criar situações que permitam mostrar a sua organização, quais são as propriedades da estrutura numérica que esse sistema representa.

Nosso objetivo, portanto, ao elaborarmos essa unidade foi propor atividades de reflexão sobre as características desse sistema, mostrando a lógica decimal e posicional nessa organização numérica. A seguir, discorreremos sobre cada uma das propostas pensadas para essa unidade.

Proposta 1 : Construindo a base decimal com situações-problemas e o QVP

PROPOSTA 1 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL	
Objetivo	Utilizar situações-problemas para trabalhar a base decimal do nosso sistema de numeração utilizando o QVP como ferramenta.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar a base decimal do nosso sistema de numeração.

Situação-problema 1:

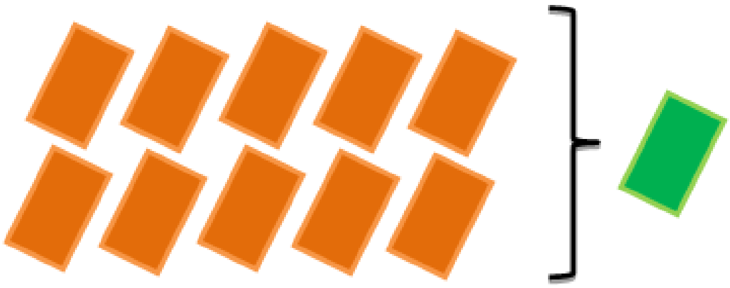
Segundo a ANEEL, Agência Nacional de Energia Elétrica, a concessionária Cemig responsável pelo abastecimento de energia elétrica em Minas Gerais cobra, atualmente, o valor de R$ 1,00 por quilowatts/hora.

Pedro, desejando reduzir o consumo de energia em sua residência, fez um acordo com seu filho Arthur que sempre esquecia luzes acessas pela casa, televisão ligada e passava horas à frente da geladeira decidindo o que iria comer.

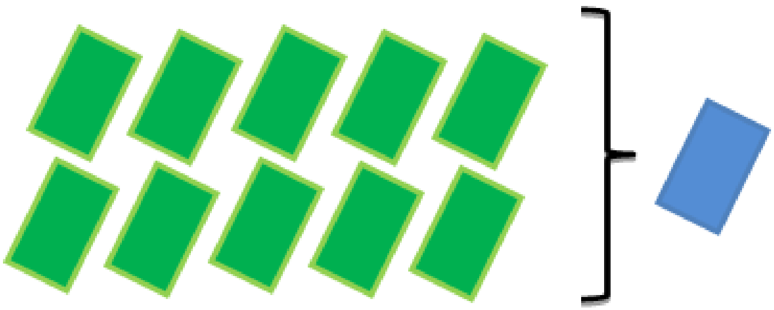
Pedro, então, fez a seguinte proposta a Arthur: A cada quilowatts/hora economizado ao final do mês, ele iria dar ao seu filho fichas laranjas, para que guardasse, por exemplo:

3 quilowatts/hora = 3 fichinhas laranjas

Sempre que Arthur completasse 10 fichinhas laranja, seu pai as trocaria por 1 fichinha verde e ao juntar 10 fichas verdes, Pedro as trocaria por 1 ficha azul.



10 fichas laranja = 1 ficha verde



10 fichas verde = 1 ficha azul

Depois de seis meses, Pedro iria verificar a economia que havia feito e a cada 100 quilowatts/hora economizados Arthur receberia R$ 50,00 do pai. Ao final do tempo estipulado, já contando com as fichas do mês corrente que havia dado a seu filho, Pedro foi verificar quantas fichas de cada cor Arthur possuía, e constatou que havia 4 fichas azuis, 9 fichas verdes e 18 fichas laranjas. Pedro, então, falou para o filho:

- *Arthur, vamos calcular quantos quilowatts/hora nós economizamos nesses seis meses.*

Agora, vamos ajudar Pedro e Arthur nos cálculos:

a) Quantos quilowatts/hora eles economizaram nesses seis meses?

b) Qual foi a economia em reais de Pedro?

c) Quanto Arthur ganhou de seu pai após a economia de energia?

d) Suponha que, ao final de seis meses, Arthur tivesse economizado 3 fichas azuis, 37 fichas verdes e 28 fichas laranjas. Qual teria sido a economia de Pedro? Teria sido maior ou menor da que realmente ocorreu?

Sugere-se, para a resolução desse problema, a construção de um QVP que pode ser feito com folha de cartolina, papelão ou EVA, tendo, ao menos, três divisões como segue o modelo:

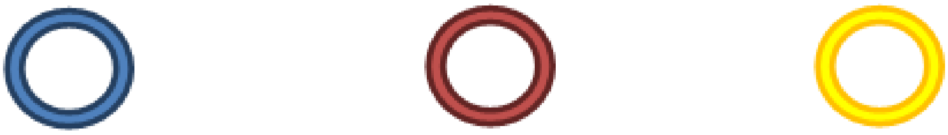
Centena	**Dezena**	**Unidade**

Para representar as fichas, podem ser disponibilizados para os alunos cartolinas nas cores citadas no problema ou outros tipos de materiais como: palitos de picolé ou canudinhos. O importante é que os alunos tenham disponível um material que possam manipular e representar aquilo que foi proposto no problema.

OBS: O valor utilizado no quilowatts/hora é um valor fictício, à medida que os alunos forem avançando em sua aprendizagem pode-se introduzir o valor real do quilowatts/hora que, na execução deste caderno custava R$ 0,48. O ideal, porém, é trabalhar primeiro com valores inteiros e, somente depois, introduzir valores com decimais.

Situação-problema 2:

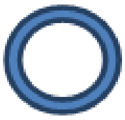
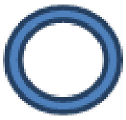
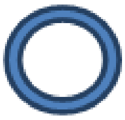
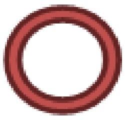
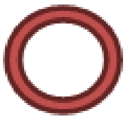
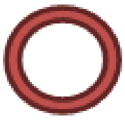
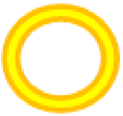
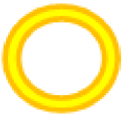
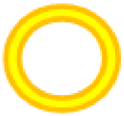
Na festa junina da *Escola Conhecer*, uma das barraquinhas de brincadeiras utilizava argolas coloridas para marcar a pontuação. Três jogadores recebiam argolas, sendo 20 de cada cor, as quais deveriam ser arremessadas em cones durante 2 minutos. Assim, aqueles que pontuassem mais levariam o brinde. As argolas tinham a seguinte pontuação:



AZUL – 100 Pontos VERMELHA – 10 Pontos AMARELA – 1 Ponto

Caso ocorressem empates, o que tivesse mais argolas azuis ganharia, caso o empate permanecesse seriam verificadas as argolas vermelhas e assim sucessivamente. Os amigos Diego, Rafael e Vinicius decidiram brincar na barraca das argolas e, ao final de dois minutos, cada um havia acertado as seguintes quantidades de argolas com suas respectivas cores, como mostra a tabela a seguir:

Pontuação jogo argolas

DIEGO	RAFAEL	VINICIUS
3 	4 	6 
17 	20 	0 
18 	19 	19 

a) Qual foi o total de pontos de cada um?
b) Quem ganhou o brinde dos três amigos?
c) Se Diego tivesse acertado 5 argolas azuis, 10 argolas vermelhas e 19 argolas amarelas, quantos pontos ele teria feito? O que ocorreria?

Nas situações apresentadas acima é importante que a turma explore o material que será utilizado antes de iniciar a atividade. Dessa forma, o ideal é que cada aluno tenha o seu, porém, caso não seja possível o professor pode formar duplas. É importante que o professor perceba o raciocínio de cada aluno, ajudando-o a pensar no que está fazendo, porém, é necessário tomar cuidado com o tom e a intenção da pergunta, pois pode induzir os alunos nas respostas que darão. Segundo Bertoni (2007, p.27), quando isso ocorre, “o contrato didático cede um espaço exorbitante ao professor e a autonomia do aluno fica comprometida. Ao invés disso, o professor dever estar atento às respostas fisionômicas e às decisões dos alunos, e não tomar decisões por si”.

Para saber se os alunos estão, de fato, aprendendo, o professor pode pedir um registro das atividades, seja através de um desenho, seja através da própria linguagem matemática. O importante é que, nesse momento, o aluno organize as suas ideias, reflita sobre a atividade que realizou e o professor avalie a aprendizagem dos seus alunos. É fundamental garantir momentos de debate para que o processo de aprendizagem traga bons resultados, pois através dos debates os alunos têm a possibilidade de justificar seus registros e confrontá-los com o de seus colegas.

Ao final dessa proposta espera-se que os alunos percebam que a cada agrupamento de 10 unidades, 10 dezenas, 10 centenas e assim, sucessivamente, haverá uma troca do algarismo na ordem que houve o agrupamento e na ordem seguinte.

Segundo a diretoria de apoio à gestão educacional, responsável pela confecção do caderno “*construção do sistema de numeração decimal*” do programa PNAIC (BRASIL, 2014a):

> O desenvolvimento de atividades de agrupamentos e trocas possibilita à criança perceber semelhanças e diferenças envolvidas nas situações de contagem, favorecendo a abstração e a compreensão do sistema de numeração. Não basta a criança decorar os termos unidade, dezena, centena, é preciso que ela entenda o que é essa base (dez) e para que serve. (BRASIL, 2014a, p.36).

Outras situações-problemas podem e devem ser trabalhadas em sala, a fim de consolidar a construção da base dez do nosso sistema de numeração.

Proposta 2: Construindo o sistema posicional pela comparação de números

PROPOSTA 2 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL	
Objetivo	Utilizar uma situação - problema para construir o sistema posicional utilizando a comparação entre números e o QVP como ferramenta.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar o sistema posicional.

Situação-problema 1:

Cinco amigos: Pedro, Luan, Ricardo, Marcelo e Felipe fizeram uma aposta e decidiram participar de uma corrida de rua. Aquele que fosse mais bem classificado no percurso de 5 km, receberia dos outros quatro um presente.

Ao final da corrida, a classificação de cada amigo foi a seguinte:

Registro para obter a classificação de cada amigo	
Pedro	32 unidades
Luan	2 dezenas e 3 unidades
Ricardo	12 dezenas e 28 unidades
Marcelo	18 dezenas e 4 unidades
Felipe	31 dezenas

a) Qual foi a classificação de cada um dos amigos?

b) Quem chegou em primeiro lugar?

c) Quem foi o terceiro colocado entre os amigos?

d) E o último lugar entre os amigos?

e) Se a classificação de Pedro fosse de 23 unidades o que aconteceria?

Na situação apresentada será trabalhada a ordenação, sendo importante que os alunos tenham um QVP para que possam manipulá-lo e chegarem à classificação de cada um dos amigos que participaram da corrida.

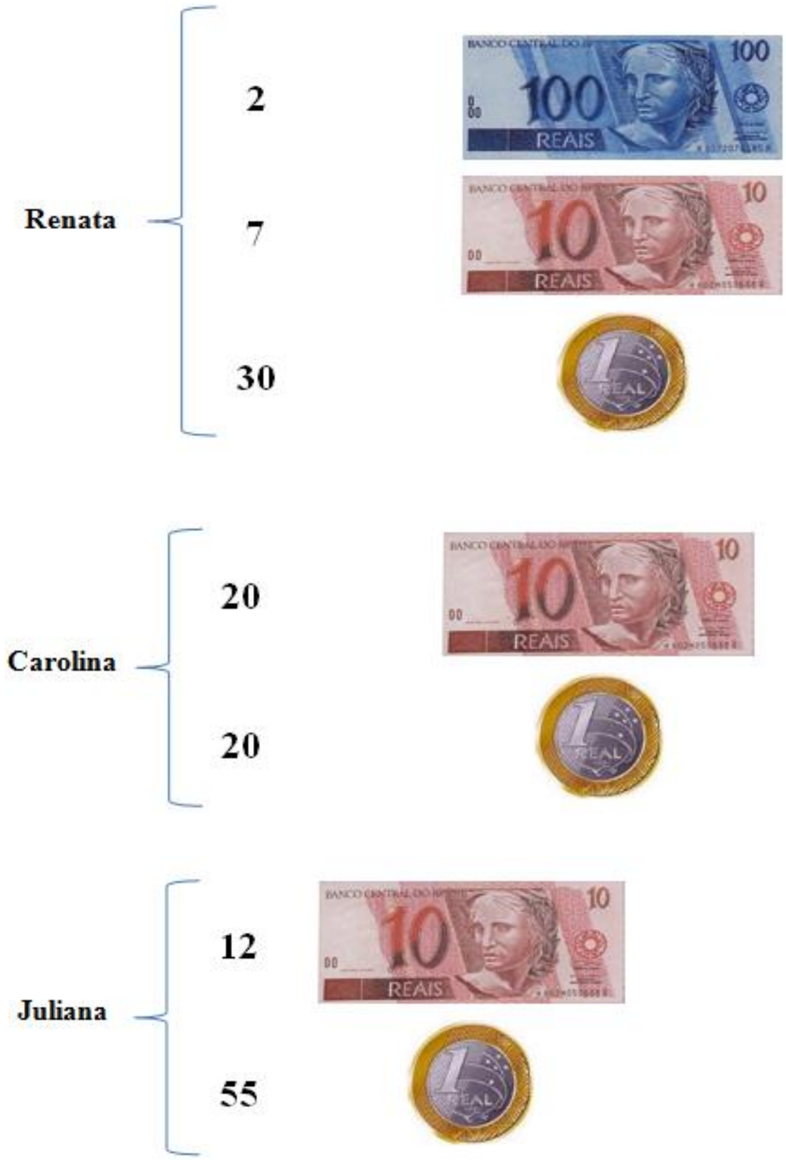
Saber qual foi a estratégia que cada um dos alunos utilizou para chegar às suas conclusões é um dos momentos mais importantes da aula, já que isso possibilitará ao professor se deparar com uma diversidade de caminhos traçados pelos alunos. Nesse sentido, segundo Lerner e Sadovsky (2008):

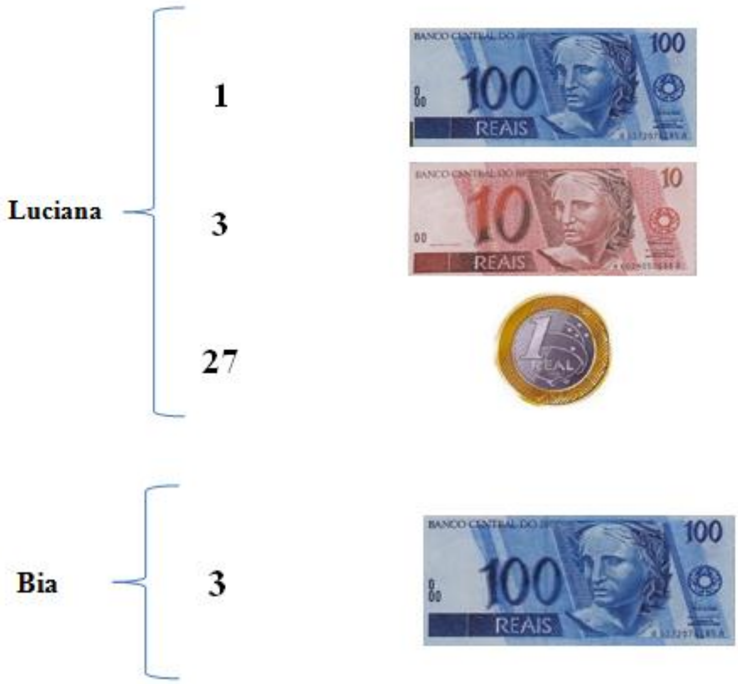
> Para as crianças que realizam o ordenamento sem esforço, o momento da discussão é também o momento da aprendizagem: por um lado, a necessidade de fundamentar sua produção os levará a conceitualizar aquilo que até o momento era um simples recurso que utilizavam, porém sobre o qual seguramente ainda não tinham refletido; por outro lado, a elaboração de argumentos para apoiar as produções de seus colegas enriquecerá sua conceitualização. (LERNER; SADOVSKY, 2008, p.120).

Vale ressaltar que o professor poderá, ainda, propor outras classificações para os amigos ou solicitar que os alunos sugiram classificações e discutir novas ordenações. O problema deve ser explorado e bem trabalhado, de forma que os alunos enquanto ordenam, pensem e formulem argumentos para o porquê de certo número ser considerado maior do que outro, verificando em quais argumentos eles fazem suas afirmações. Ainda na perspectiva de Lerner e Sadovsky (2008), durante a discussão, as argumentações de seus colegas abrirão o caminho até a sua resposta. Segundo as autoras, escutar as respostas que as outras crianças dão a essa pergunta sempre torna possível algum progresso.

Situação- problema 2:

No inicio do mês, as primas Renata, Carolina, Juliana, Luciana e Beatriz receberam de seus pais mesadas. Renata recebeu 2 notas de 100 reais, 7 notas de 10 reais e 30 moedas de 1 real. Carolina recebeu 20 notas de 10 reais e 20 moedas de 1 real. Juliana recebeu 12 notas de 10 reais e 55 moedas de 1 real. Luciana recebeu 1 nota de 100 reais, 3 notas de 10 reais e 27 moedas de 1 real. Bia recebeu 3 notas de 100 reais, como mostra a figura a seguir:





Utilizando o QVP e o dinheiro de papel, represente as mesadas de cada uma das primas. Faça trocas, caso seja necessário, e responda as perguntas a seguir:

a) Qual o valor da mesada que cada uma das primas recebeu?
b) Qual das primas ganhou uma mesada maior dos pais?
c) Quem ganhou a mesada menor?
d) Ordene os nomes da maior para a menor mesada recebida.

Nessa situação, além do QVP, sugere-se utilizar dinheirinho de papel para que os alunos possam representar aquilo que está sendo proposto no problema. Segundo Bigode e Frant (2011), quando os alunos já estão familiarizados com os agrupamentos é hora de falar sobre o dinheiro e, geralmente, os alunos já têm uma noção sobre esse assunto, aprendida com os familiares e com os próprios meios de comunicação. Lerner e Sadovsky (2008) dizem que utilizar o número em uma situação cotidiana funciona como uma faísca a partir da qual os alunos estabelecem discussões muito produtivas.

Outras situações-problemas podem e devem ser utilizadas. O que se espera, ao final dessa proposta de trabalho, é que os alunos saibam, além dos agrupamentos e trocas, compreender o valor posicional dos números sabendo recitá-los, escrevê-los e compará-los.

Proposta 3: Compondo e decompondo números por adições, consolidando as características do sistema de numeração decimal

PROPOSTA 3 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL	
Objetivo	Utilizar uma situação-problema para compor e decompor um número de diferentes formas, utilizando dinheiro de papel e o QVP como ferramenta.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar a composição e decomposição

Situação-problema 1:

Nessa atividade será necessário o QVP e o dinheiro de papel representando os valores de 100, 10 e 1 real. A turma poderá ser dividida em grupos ou duplas.

Para iniciar, o professor deverá propor uma quantia em reais, por exemplo: **R$ 534,00**

Em seguida, os alunos devem separar essa quantia utilizando o dinheiro de papel. O professor deverá observar as duplas, porém, sem fazer nenhuma interferência, deixando que cada uma utilize a sua estratégia para juntar a quantia solicitada. Podem acontecer situações, entre outras, como:

- 5 notas de 100, 3 notas de 10 e 4 moedas de 1.
- 4 notas de 100, 13 notas de 10 e 4 moedas de 1.
- 4 notas de 100, 12 notas de 10 e 14 moedas de 1 real.

Assim, várias configurações podem surgir durante a socialização, sendo esse um momento no qual o professor deve explorar todas as formas que surgirem de representação para o 534, aconselhando-se que faça o registro no quadro.

O professor deverá fazer indagações ao grupo, sendo algumas questões, como:

a) Qual a diferença entre cada uma das formas que apareceram para representarmos o valor 534?

b) Porque apesar das diferentes formas de representação, se fizermos os cálculos o total em todas elas será de 534?

c) Como que, partindo de uma representação, podemos chegar em outra? Quais trocas podemos fazer?

Por exemplo:

- 4 notas de 100;
- 12 notas de 10;
- 14 moedas de 1.

Representação inicial do R$ 534,00

- 5 notas de 100;
- 3 notas de 10;
- 4 moedas de 1.

Representação final do R$ 534,00

OU

- 5 notas de 100;
- 3 notas de 10;
- 4 moedas de 1.

Representação inicial do R$ 534,00

- 3 notas de 100;
- 21 notas de 10;
- 24 moedas de 1.

Representação final do R$ 534,00

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, o professor poderá dar uma representação inicial para o número 534 e fixar para a representação final a quantidade de notas de 10, por exemplo. Assim, os alunos terão que pensar quantas notas de 100 e moedas de 1 real deverão ter para completar o 534, como sugere o modelo abaixo:

- 5 notas de 100;
- 2 notas de 10;
- 14 moedas de 1.

Representação inicial do R$ 534,00

- ? notas de 100;
- 6 notas de 10;
- ? moedas de 1.

Representação final do R$ 534,00

Após explorar as possíveis formas de representação do número solicitado utilizando o dinheiro de papel e o QVP, o professor poderá solicitar à turma que pense em somas cujo resultado seja 534, por exemplo:

- 400 + 120 + 14
- 500 + 30 + 4
- 300 + 210 + 24

Vale lembrar que o professor deve prever um tempo para a discussão e que, ao final da atividade, os alunos deverão expor suas ideias. Nesse momento, o professor deverá relacionar as hipóteses apresentadas pelo grupo e problematizar a situação, ajudando, assim, os alunos a analisarem e a validarem as melhores teses apresentadas.

Situação-problema 2:

Na gincana da *Escola Conhecer*, uma das tarefas era a arrecadação de materiais recicláveis que seriam vendidos e cuja renda revertida em material para a obra do telhado da escola.

Os materiais pedidos foram:

Material	Pontuação
Garrafa Pet	100 pontos por unidade
Latinha	10 pontos por unidades
Papel	1 ponto por quilo

Quatro equipes estavam participando da gincana:

EQUIPES
#Campeões
Internautas.com
Os anormais
Juntos e misturados

Após o prazo estipulado pelos organizadores da gincana, cada equipe deveria entregar os materiais que haviam arrecadado. O resultado dessa arrecadação foi o seguinte:

MATERIAIS RECICLÁVEIS			
Equipes	**Garrafa Pet (unidade)**	**Latinha (unidade)**	**Papel (quilo)**
#Campeões	**23**	**15**	**82**
Internautas.com	**12**	**64**	**76**
Os anormais	**15**	**78**	**72**
Juntos e misturados	**27**	**5**	**92**

Responda, agora, as perguntas de acordo com as informações registradas na tabela:

a) Quantos pontos cada equipe marcou com a arrecadação feita?

b) É possível escrever uma adição para representar a pontuação de cada equipe? Caso seja possível, escreva as adições para cada equipe.

c) Qual equipe marcou mais pontos nessa tarefa?

d) E qual marcou menos pontos?

e) Ordene o nome das equipes segundo a pontuação que obtiveram na tarefa, do maior para o menor.

f) Observe a pontuação das equipes #campeões e os anormais. Entre as duas equipes citadas, quem marcou mais pontos? Justifique sua resposta.

Na primeira situação-problema propusemos a decomposição do número, no exemplo dado, o 534, por meio do qual cada dupla deveria utilizar a sua estratégia com o auxilio do dinheiro de papel e do QVP. Nessa mesma situação, ainda foi proposto, em seguida, a representação do número 534 por somas.

Já nessa segunda situação-problema os alunos devem compor o número, dado em uma tabela, que representaria a pontuação final de cada uma das equipes.

O objetivo das situações apresentadas é fazer com que os alunos compreendam que um número pode ser representado pela composição e decomposição numérica através de adições. Entender que o 534 é formado por 500 + 30 + 4, que o 500 = 100 + 100 + 100 + 100 + 100, e assim por diante, ajuda o aluno a raciocinar matematicamente e a compreender o sentido da conta armada.

Acredita-se, assim, que quando o aluno consegue assimilar essa característica do nosso sistema de numeração decimal, ele dá conta, por exemplo, do cálculo mental por composição e decomposição dos números.

Proposta 4: O material dourado e o sistema de numeração decimal.

PROPOSTA 4 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL	
Objetivo	Utilizar o material dourado para trabalhar as características do sistema de numeração decimal.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar os agrupamentos e trocas, o sistema posicional e a composição e decomposição dos números.

Sendo essa a quarta proposta de trabalho e, já tendo explorado outros materiais manipuláveis, sugerimos o uso do material dourado, criado por Maria Montessori e composto por cubinhos, barras, placas e um cubo grande. O material dourado auxilia no ensino e aprendizagem do sistema de numeração decimal, contudo é aconselhável que a turma já tenha um conhecimento sobre esse material, pois caso isso não ocorra o aluno vê a barra que representa a dezena como algo não muito diferente do cubinho que representa a unidade.

Situação-problema 1:

Nessa primeira situação-problema apresentada na quarta proposta, temos como objetivo explorar as características do sistema de numeração decimal: agrupamentos e trocas, o sistema posicional, a composição e decomposição usando o material dourado como ferramenta.

Inicialmente, o professor deverá separar a turma em duplas, onde cada uma receberá um material dourado e uma tabela como o modelo, a seguir:

NÚMERO	PLACA	BARRA	CUBINHO

O professor deverá ditar um número e cada dupla deverá pensar em três composições diferentes com o auxílio do material dourado. Por exemplo:

375

- **3 placas, 7 barras, 5 cubinhos;**
- **2 placas, 15 barras, 25 cubinhos;**
- **1 placa, 24 barras, 35 cubinhos.**

O professor poderá ditar de 3 a 5 números. Os alunos devem sempre pensar na composição para o número solicitado manipulando primeiro o material dourado e somente depois deverá efetuar o registro na tabela.

Após ditar todos os números, o professor poderá, com o auxílio de uma tabela no quadro, pedir que cada dupla registre as composições feitas. Em seguida, poderá fazer as seguintes indagações a turma:

a) Todas as composições apresentadas estão representando o número 375? Como podemos verificar?
b) Como isso é possível?
c) Quais conclusões podemos chegar então?

Terminada a etapa da socialização e o debate de todas as ideias envolvidas, o professor poderá propor o seguinte para as duplas:

Se eu tenho um número representado por:

- **3 placas, 17 barras, 32 cubinhos;**

E tenho outro número representado por:

- **2 placas, 47 barras, 5 cubinhos**

Qual dos dois números é maior?

Em um primeiro momento, o professor poderá trabalhar as várias formas que temos para compor um número e, depois, partindo de uma decomposição, poderá trabalhar os agrupamentos e trocas na base 10, o valor posicional e a ordenação de um número. Voltamos nesse problema em características já trabalhadas anteriormente, porém, nesse momento temos o material dourado como ferramenta de apoio, sendo essa uma forma de consolidarmos as características do nosso sistema de numeração decimal.

Situação-problema 2:

Economizar água é um dever de todo cidadão. Tudo porque esse recurso essencial à vida, apesar de renovável, é também finito.

- Se uma pessoa escova os dentes em 5 minutos com a torneira meio aberta, gasta 80 litros de água. No entanto, se molhar a escova e fechar a torneira enquanto escova os dentes e, ainda, enxaguar a boca com um copo de água, consegue economizar mais de 79 litros de água. Se isso for multiplicado pelo número de pessoas da residência e, depois, por 30 dias, pode-se ter uma ideia da economia de água.
- Banho de ducha por 15 minutos com o registro meio aberto consome 243 litros de água. Se o tempo de banho for reduzido para 5 minutos fechando a ducha ao ensaboar-se, o consumo cai para 81 litros. No caso de banho com chuveiro elétrico, também em 15 minutos com registro meio aberto, são gastos 144 litros. Com os mesmos cuidados tomados com a ducha, o consumo cai para 48 litros.
- Lavar a louça com a torneira meio aberta durante 15 minutos gasta 243 litros de água. Medidas práticas podem ser usadas para que o consumo se reduza a apenas 20 litros.

Tomando como base as informações retiradas do site ABRACOND – Associação Brasileira de Condomínios, síndicos, condôminos e empresas afins e, utilizando o material dourado, responda as perguntas a seguir:

a) Se em uma residência mora um casal que escova os dentes fechando a torneira e enxaguando a boca com um copo de água. Qual será a economia diária em uma escovação do casal, considerando que o casal escova os dentes três vezes ao dia?
b) Qual será a economia de água quando tomamos banho de ducha por 5 minutos fechando o registro, ao invés de 15 minutos com o registro meio aberto?
c) Qual será a economia de água quando tomamos banho de chuveiro elétrico por 5 minutos fechando o registro, ao invés, de 15 minutos com o registro meio aberto?
d) Se uma pessoa lava louça três vezes ao dia tomando medidas práticas de economia de água, qual será, ao final do dia a economia feita por essa pessoa em relação à outra que também lava louça três vezes ao dia, porém com a torneira meio aberta durante 15 minutos?

Nessa situação, nosso objetivo é trabalhar as operações do campo aditivo com o auxílio do material dourado, sem mencionar o uso de algoritmos para resolver as situações apresentadas. Os alunos devem, portanto, através da manipulação do material, chegar às repostas das perguntas.

Através dessa ferramenta pedagógica, então, os alunos podem chegar a conclusões sobre as operações de adição e subtração e seus algoritmos. Para isso, é fundamental o debate de ideias ao final do tempo estipulado pelo professor para que as duplas realizem a atividade, pois, através desse diálogo, os alunos podem formular hipóteses, construir teses e, assim, chegar a conclusões que os levarão à aprendizagem.

Proposta 5: O jogo como forma de consolidar as características do sistema de numeração decimal

PROPOSTA 5 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL	
Objetivo	Através dos jogos consolidar as características do sistema de numeração decimal.
Conceitos ou propriedades abordados	Consolidar os agrupamentos e trocas, o sistema posicional e a composição e decomposição dos números.

Nosso objetivo, na última proposta dessa primeira unidade do caderno, é ampliar e/ou consolidar os conhecimentos sobre o sistema de numeração decimal. Assim, optamos em trabalhar com jogos. O objetivo é que o aluno realize uma atividade matemática enquanto está interagindo com o jogo, cujas regras devem possibilitar uma aprendizagem matemática.

De acordo com a diretoria de apoio a gestão educacional, responsável pela confecção do caderno 3 - "Construção do sistema de numeração decimal" do PNAIC (BRASIL,2014a), existem muitas possibilidades de a utilização dos jogos favorecer a aprendizagem da Matemática. Essa aprendizagem pode ocorrer:

- Pelo livre brincar, onde se acredita que o ato de brincar já garante o desenvolvimento do raciocínio lógico;
- Pela observação dos jogos, para conhecimento da mobilização e construção de conceitos matemáticos;
- Pela transformação de jogos tradicionais da infância

JOGO: Na trilha do decimal

Material Necessário:

- Tabuleiro;
- Dado;
- 4 Peões;
- Palitos de picolé e gominhas.

Objetivo Pedagógico:

Compreender o processo de agrupamento e desagrupamento.

Número de Jogadores:

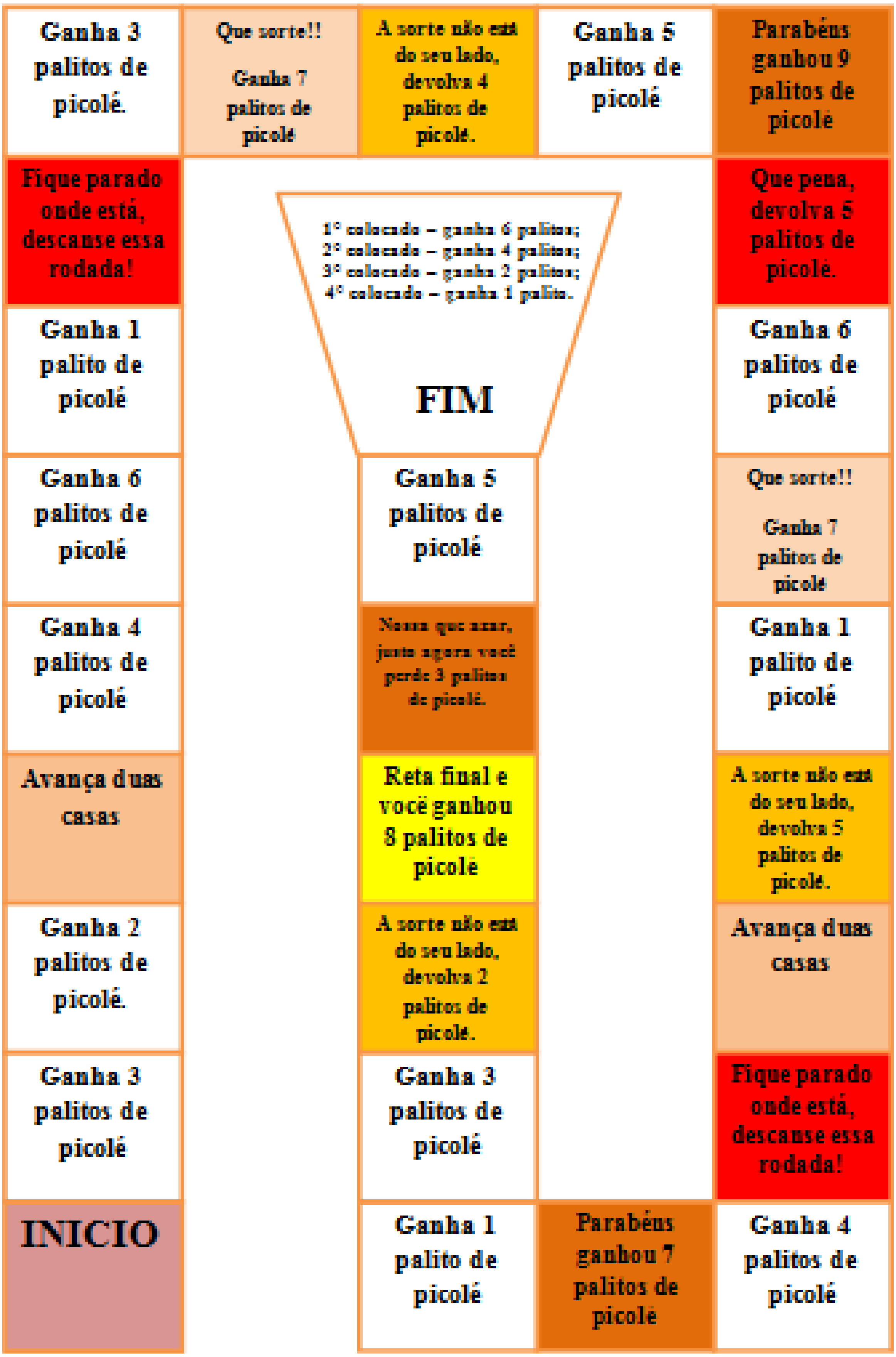
Entre dois e quatro alunos

Regra do Jogo:

- O foco do jogo é a formação de agrupamentos de 10 palitos. Não é quem termina o jogo primeiro quem ganha, e sim, quem tiver o maior número de agrupamentos de 10. A ordem de chegada será importante, pois, quem chega primeiro ganha mais palitos de picolé do que quem chega em quarto lugar;
- A cada 10 palitos, os alunos devem usar a gominha para formar os grupos;
- Para decidir a ordem de jogar, os alunos podem jogar o dado e o que tirar o maior número será o primeiro a jogar, o segundo maior número, o segundo a jogar e assim, sucessivamente;
- Cada jogador, na sua vez, lança o dado e anda no tabuleiro a quantidade de casas que estiver determinado no dado. Por exemplo, se tirou 4 no dado, ele deverá andar 4 casas no tabuleiro e ler a instrução da casa que chegou: se ganha palitos ou perde palitos ou avança casas;

- O jogo só termina quando todos os jogadores chegarem ao fim, cada um ganhando a quantidade de palitos relacionados com a sua colocação, como mostra o tabuleiro do jogo.
- Quando todos chegarem à última casa do tabuleiro, todos os participantes devem conferir a quantidade de agrupamentos de 10 que cada um conseguiu e, assim, estabelecer o ganhador daquela rodada.

TABULEIRO DO JOGO NA TRILHA DO DECIMAL



JOGO: Dominó decimal

Material Necessário:

28 peças confeccionadas pelo professor onde cada parte da peça constará de uma composição de um número. (Segue ideias de peças elaboradas pela autora, vide próxima página).

Objetivo Pedagógico:

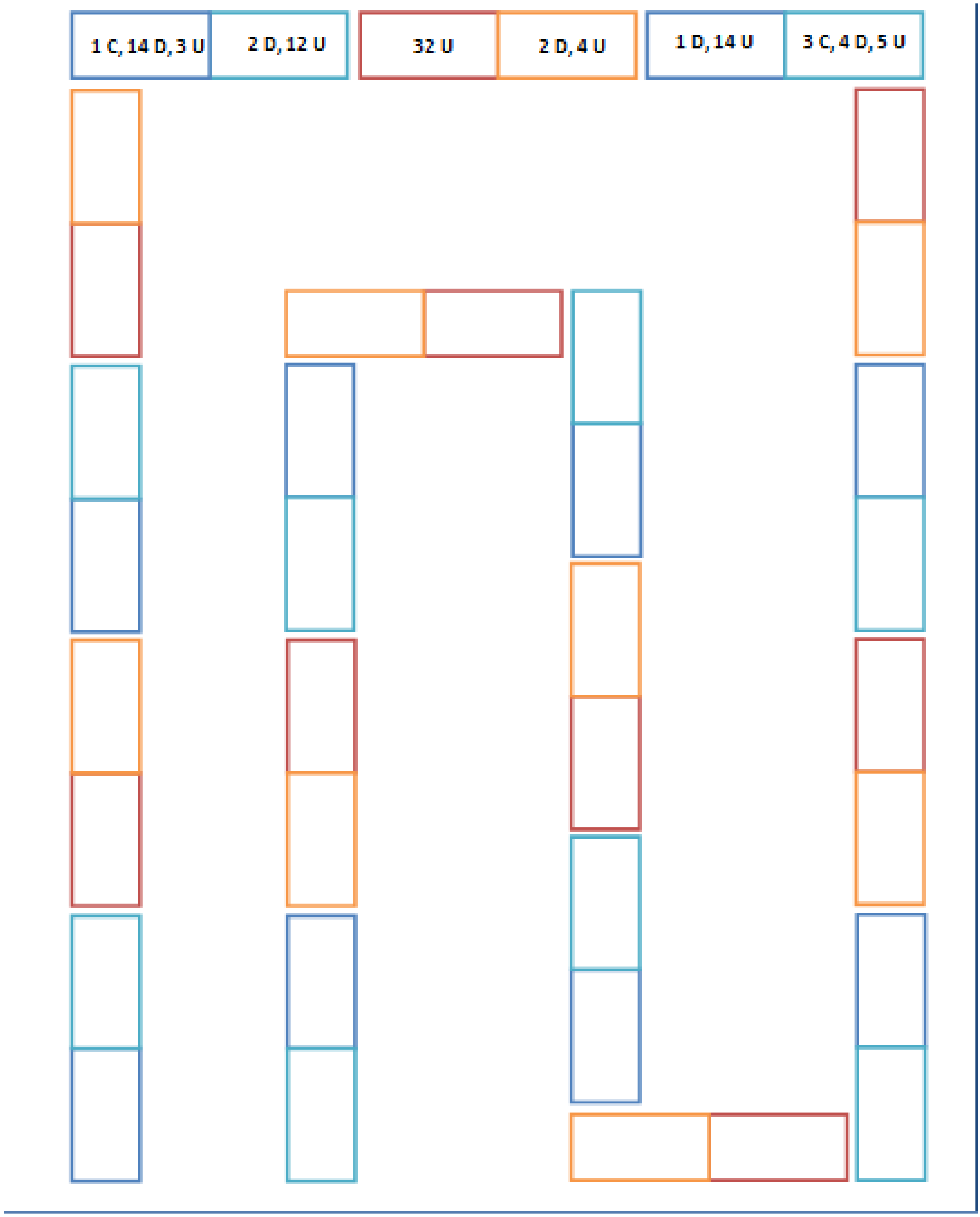
Trabalhar a composição e a decomposição dos números.

Número de Jogadores:

Entre dois e quatro alunos.

Regra do Jogo:

- As peças são “embaralhadas” na mesa, e cada jogador pega 7 peças para jogar.
- Os jogadores podem sortear quem irá começar o jogo. A pessoa escolhida inicia a partida colocando uma peça no centro da mesa. A partir daí, joga-se no sentido anti-horário.
- Cada jogador deve tentar encaixar alguma peça sua nas peças que estão na extremidade do jogo, uma por vez. Quando um jogador consegue encaixar uma peça, a vez é passada para o próximo jogador. Caso o jogador não tenha nenhuma peça que encaixe em qualquer lado, ele deve passar a vez, sem jogar peça nenhuma.
- A partida pode terminar de duas formas: quando um jogador consegue bater o jogo, ou quando o jogo fica trancado, não havendo mais jogadas a serem feitas por falta de peças.
- Ganha o jogo quem terminar com suas peças primeiro ou, no caso de o jogo ficar trancado, quem tiver o menor número de peças na mão.
- Os jogadores devem ficar atentos se a cada rodada todos estão encaixando as peças formando pares de composições de um mesmo número. Essa verificação é importante, pois através dele será reforçado o conteúdo já abordado com o grupo, porém, nesse momento, através do lúdico.


1 C, 14 D, 3 U
2 D, 12 U
32 U
2 D, 4 U
1 D, 14 U
3 C, 4 D, 5 U

Concluindo a unidade I

Nessa primeira unidade, o objetivo era trabalhar com o sistema de numeração decimal, que é a base para o entendimento de qualquer operação aritmética.

Iniciamos o trabalho propondo atividades que focam nos agrupamentos e trocas. Dessa forma, os alunos são capazes de perceber semelhanças e diferenças nos processos de contagem, favorecendo a abstração e a compreensão do sistema decimal.

Em seguida, propusemos o trabalho com o valor posicional dos algarismos através das comparações entre números. O foco nessa proposta era o aluno compreender a importância da posição que o algarismo ocupa no número, deixando para trás a decoreba dos termos unidade, dezena, centena, sem, de fato, a compreensão do que realmente significam. Segundo a diretoria de apoio à gestão educacional do programa PNAIC (BRASIL, 2014a):

> A construção do SND passa por várias etapas e não importa o contexto de trabalho pedagógico, se no campo ou na cidade, se com turmas maiores ou menores, se com turmas com mais ou menos dificuldades de aprendizagem, é necessário passar pelas etapas da contagem, do agrupamento e das trocas e, finalmente, colocar ênfase no aspecto posicional do sistema. (BRASIL, 2014a, p.37).

Já na terceira proposta, apresentamos um trabalho com a composição e decomposição dos números de diferentes formas, utilizando o QVP e o dinheiro de papel como ferramentas pedagógicas. O foco nessa proposta era desmistificar a ideia de que a composição e a decomposição de um número ocorrem de forma única.

Na quarta proposta, por sua vez, retomamos as características do sistema de numeração decimal, já trabalhadas, porém, adotando como ferramenta pedagógica o material dourado. Até esse momento havíamos proposto o trabalho com outros materiais manipulativos, como: palitos de picolé, canudinho, tampinhas, e o QVP, com o objetivo de o aluno se familiarizar com as características desse sistema, para, somente então, trabalharmos com o material dourado.

Na última proposta dessa unidade foram utilizados jogos, a fim de consolidar as características do sistema estudado, valendo ressaltar que a compreensão da estrutura do número no sistema de numeração decimal é fundamental para que haja a construção e o entendimento dos processos operatórios.

Ao final de cada proposta apresentada, o professor deve estar atento para saber se há necessidade de ressaltar alguma característica apresentada ou acrescentar alguma atividade para reforçar algum conceito que necessita de aprofundamento.

AS IDEIAS DO CAMPO MULTIPLICATIVO - UNIDADE II

Vimos que o primeiro fator importante à compreensão dos processos operatórios é o sistema de numeração decimal. Nessa unidade vamos estudar o segundo fator que irá determinar o sucesso para a aprendizagem dos algoritmos: nesse caso, da divisão, são as ideias do campo multiplicativo.

Nosso objetivo ao propor essa unidade, portanto, é trabalhar as ideias do campo multiplicativo, a fim de tornar os alunos aptos a resolverem diferentes situações com sentido e significado, de modo que eles desenvolvam diferentes estratégias de cálculo, raciocinando sobre aquilo que estão resolvendo, ao invés de utilizarem o algoritmo de forma mecânica.

A ideia é buscar, cada vez mais, evidenciar as relações existentes entre a multiplicação e a divisão, mesmo antes da sistematização de seus algoritmos. Assim, quanto mais tipos de problemas os alunos conhecerem, mais eles ampliarão a compreensão das operações e aumentarão o repertório de estratégias.

As ideias do campo multiplicativo são: raciocínio combinatório, configuração retangular, proporcionalidade, partição e medida. Não devemos descolar a multiplicação da divisão, assim como não podemos considerar uma única solução para uma situação-problema.

Proposta 1 : Situações-problemas envolvendo as ideias de combinatória e configuração retangular

PROPOSTA 1 E OBJETIVO DO TRABALHO COM AS IDEIAS DO CAMPO MULTIPLICATIVO	
Objetivo	Utilizar situações-problemas para construir as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar as ideias de combinatória e configuração retangular.

Ideia Combinatória

Nas situações propostas a seguir, vamos trabalhar a ideia de combinatória, pois, para verificarmos todas as possibilidades, teremos que combinar elementos de diferentes conjuntos. Nas perspectivas de Berton e Itacarambi (2009), essa ideia está muito presente no cotidiano das crianças, cabendo ao professor explorar estas situações e identificar o momento propício para introduzir o princípio multiplicativo e organizar as resoluções usando a árvore de possibilidades.

Situação-problema 1:

Jonas adora sanduíche, porém, não sabe qual é o seu predileto. Para descobrir, ele decidiu preparar todos e saboreá-los, para então, eleger o melhor, segundo o seu paladar. Para preparar os sanduíches, Jonas usará três tipos de pães, dois tipos de carne e três tipos de queijo. Em cada um dos sanduíches que irá fazer, haverá um tipo de pão, uma carne e um queijo. A tabela, a seguir, mostra os ingredientes que ele usará:

INGREDIENTES DO SANDUICHE	
Pão	**Francês**
	De forma
	De hambúrguer
Carne	**Frango**
	Boi
Queijo	**Prato**
	Cheddar
	Suíço

Vamos ajudar Jonas a pensar em todas as possibilidades de sanduíches? Será que ele vai conseguir comer todos e escolher o predileto?

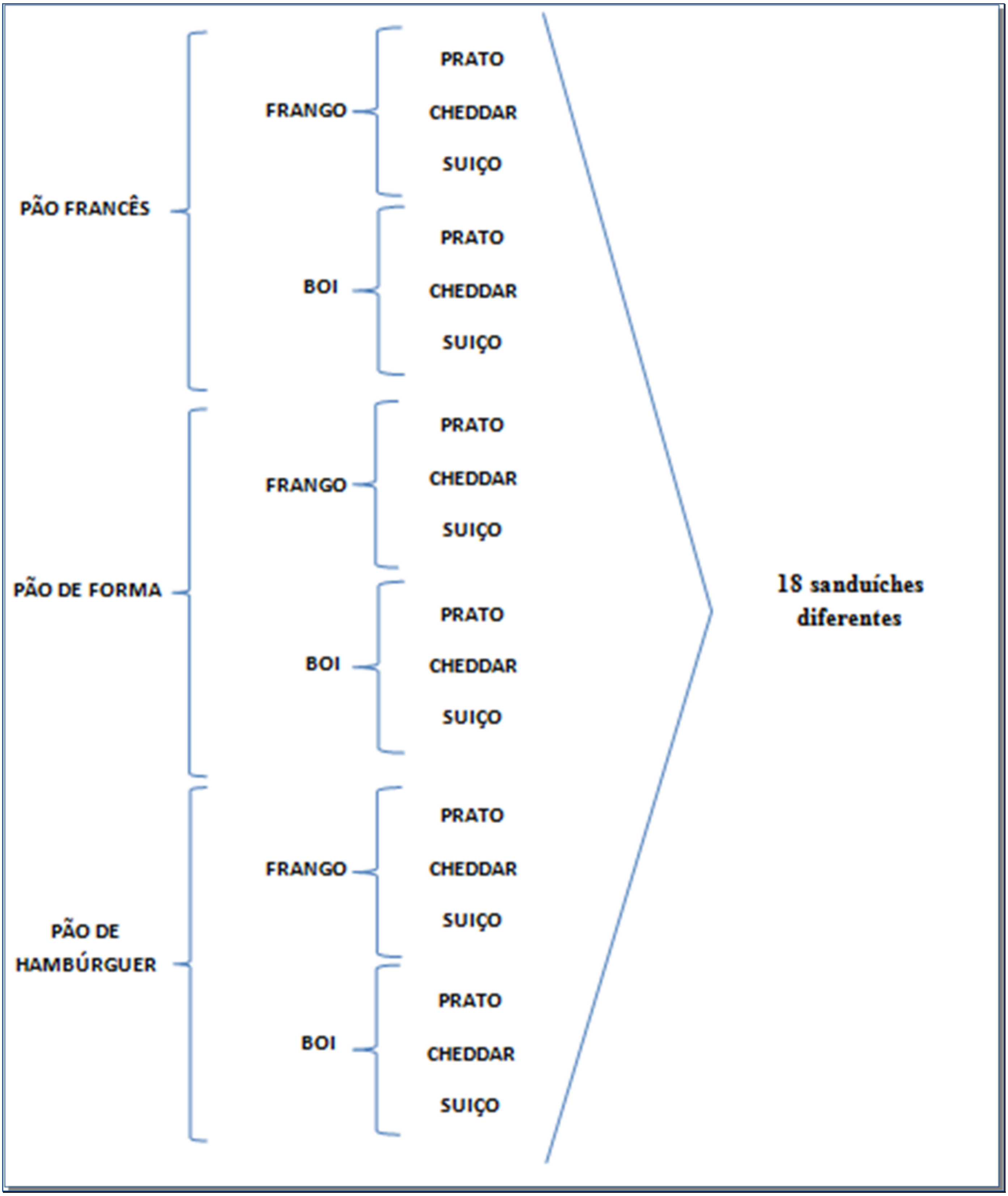
Inicialmente, o professor poderá formar pequenos grupos para que os alunos possam discutir as diferentes combinações. Eles devem ficar livres para pensar em quais estratégias irão utilizar, se desenhos, se algum tipo de material para representar os ingredientes ou outro tipo de estratégia que possa surgir.

Quando os grupos chegarem às conclusões, eles devem explicar como fizeram para garantir que todas as opções de ingredientes fossem utilizadas nos sanduíches. O professor poderá pedir aos grupos que registrem no quadro a sua estratégia e assim, confrontá-la com a dos outros grupos. O importante é que os alunos verifiquem a veracidade do raciocínio que estão tecendo juntos.

Quando a turma chegar à conclusão final, o professor poderá propor um novo desafio, por exemplo, se além dos ingredientes citados houvesse três tipos de molho, quantos seriam os sanduíches com esse novo ingrediente.

O diagrama que evidencia as possibilidades de combinações de sanduíches pode ser um recurso interessante para ser usado pelo professor, caso ainda não tenha aparecido durante as apresentações das estratégias:

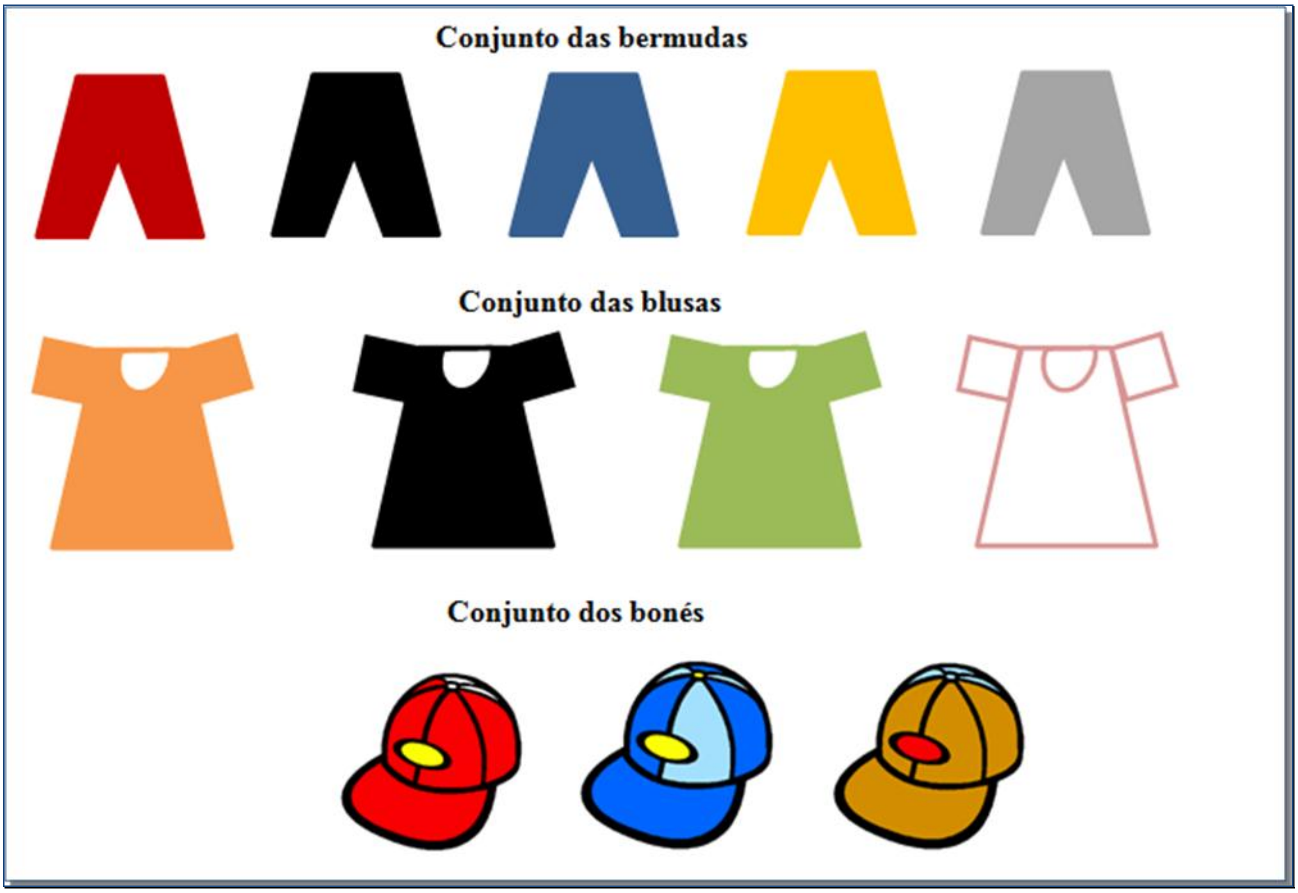
Diagrama de Possibilidades



Antes de apresentar situações-problemas envolvendo a ideia de configuração retangular, o professor poderá trabalhar mais uma ou duas situações envolvendo a ideia de combinatória. A seguir, apresentaremos mais uma situação que trabalha essa ideia.

Situação-problema 2:

Pedro vai ao aniversário de seu melhor amigo, porém não sabe qual roupa e boné deve usar. Ele dispõe de cinco bermudas (vermelha, preta, azul, amarela e cinza), quatro blusas (laranja, preta, verde e rosa) e três bonés (vermelho, azul e marrom). De quantas maneiras diferentes Pedro pode se arrumar para ir à festa de aniversário do seu melhor amigo?



Novamente propomos uma situação que envolve a combinação de elementos de diferentes conjuntos. A mesma orientação dada na situação anterior deve ser utilizada nesse novo problema, ou seja, os grupos devem discutir a melhor forma para resolver a situação e, depois, compartilhar com a turma a estratégia utilizada. O papel do professor é de mediador, não devendo induzir nenhum grupo a seguir estratégias pré-estabelecidas.

Os problemas de raciocínio combinatório podem apresentar inicialmente uma complexidade para os alunos, pois terão que fazer uma correspondência um a muitos. Dessa forma, o professor deverá apresentar diversas situações para que eles possam fazer reflexões sobre essa ideia e, assim, construírem novas aprendizagens ampliando suas redes de conhecimento. Segundo Bigode e Frant (2011), estudos mostram que os problemas combinatórios são mais complexos para os alunos. Logo, eles devem ser trabalhados, pois são fundamentais no estudo de tópicos de probabilidades, que fazem parte do currículo de Matemática.

Configuração Retangular

As situações que apresentaremos a seguir abordam a ideia de configuração retangular, que são aquelas que exploram a leitura de linha por coluna ou vice-versa. De acordo com Berton e Itacarambi (2009), a disposição retangular permite o estudo de propriedades como a comutativa e a distributiva. Bigode e Frant (2011) nos dizem, sobre o tema, que a configuração retangular é um recurso importante para representar multiplicações e, em alguns casos, contribui para a compreensão do algoritmo dessa operação.

Situação-problema 3:

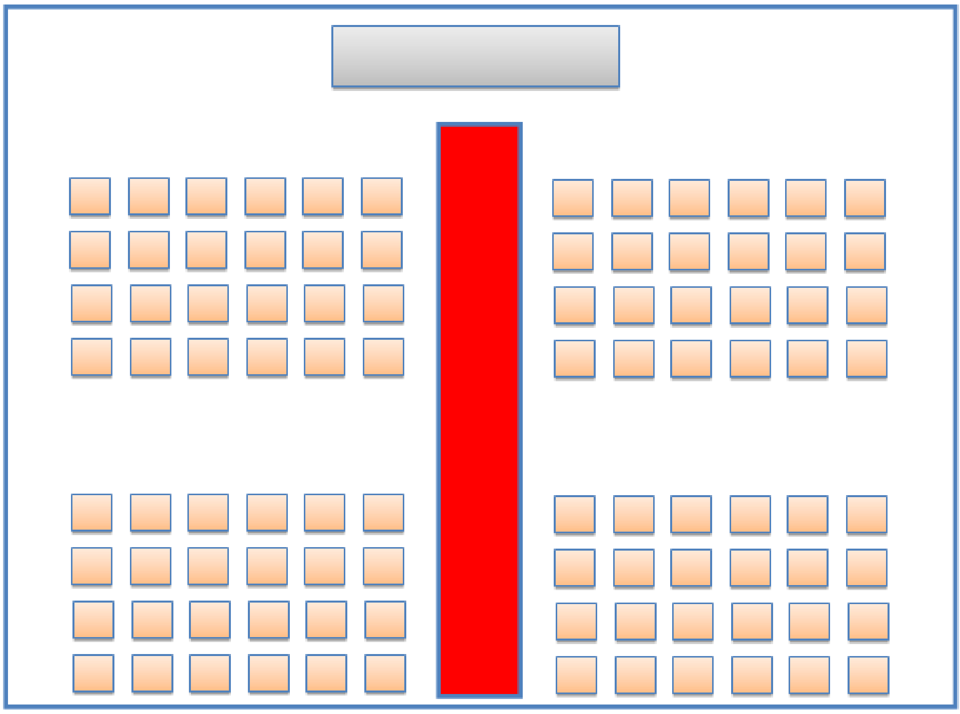
Ana Beatriz está organizando a cerimônia de seu casamento e a festa, que acontecerão em um sítio da família. Ela deseja que todos os convidados estejam bem acomodados durante a cerimônia religiosa, e, para isso, irá dispor de tantas cadeiras quantos forem os convidados. Dessa forma, ao terminar a lista dos convidados, Ana decidiu colocar 12 fileiras com 15 cadeiras em cada uma. Quantos serão os convidados para o casamento de Ana Beatriz?

O professor deverá, inicialmente, dividir a turma em grupos, sendo que, cada um deles deverá pensar na melhor forma de se chegar à resposta do problema, no caso, o número de convidados para o casamento de Ana Beatriz.

Recomenda-se que o professor disponibilize para os alunos papel quadriculado, visto que este é um recurso interessante para a compreensão da ideia que será trabalhada. O material dourado também deve ser levado para a sala de aula, pois poderá ser usado como apoio à malha quadriculada. Nesse sentido, segundo Bigode e Frant (2011), o papel quadriculado é um recurso didático excelente para trabalhar vários conceitos matemáticos, como a multiplicação. Ainda na perspectiva do autor, o material dourado pode ser utilizado como um complemento ao trabalho com a configuração retangular que se faz com o papel quadriculado.

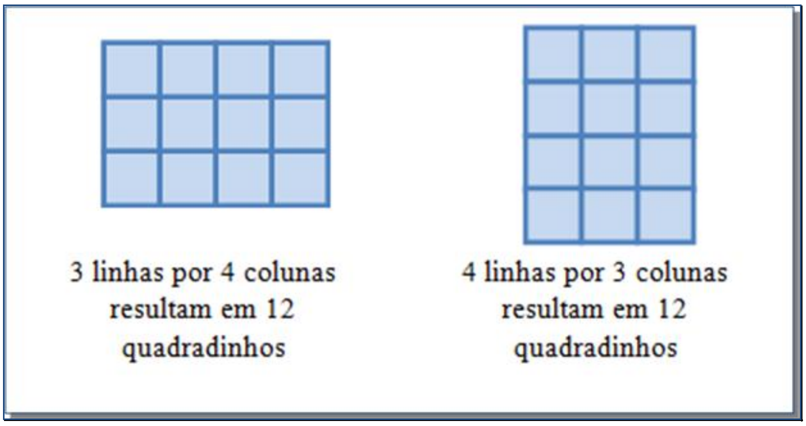
Após um tempo para que elaborem suas estratégias, cada grupo deverá apresentar à turma sua resolução.

Organização das cadeiras/ Casamento de Ana Beatriz



Ao abordar essa ideia, o professor terá a oportunidade de explorar vários conceitos durante as discussões, como, por exemplo, a propriedade comutativa, que poderá ser comprovada pelos alunos através do uso da malha quadriculada, sendo, dessa forma, possível representá-la geometricamente.

Representação geométrica da propriedade comutativa

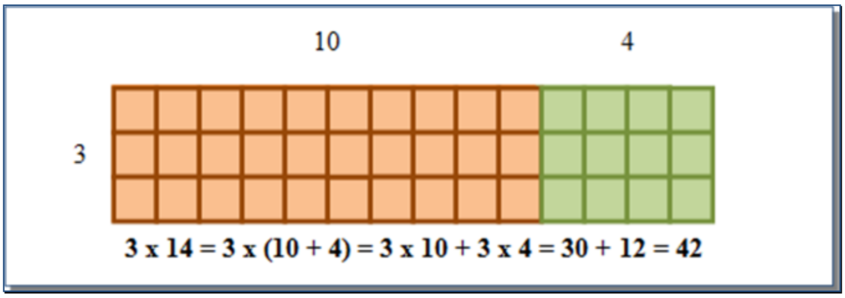


Fonte: Adaptado de Bigode e Frant (2011)

No exemplo dado, os alunos poderão constatar que 3 linhas por 4 colunas resultam na mesma quantidade de quadradinhos de 4 linhas por 3 colunas. Assim, o professor poderá ressaltar, também, que apesar do resultado de quadradinhos ser o mesmo, a disposição geométrica é diferente, se as figuras representassem, por exemplo, terrenos, eles teriam o mesmo espaço para construção, porém o primeiro seria mais largo que o segundo, sendo esse mais profundo que o primeiro.

Ainda utilizando o papel quadriculado, o professor poderá trabalhar a propriedade distributiva através da configuração retangular.

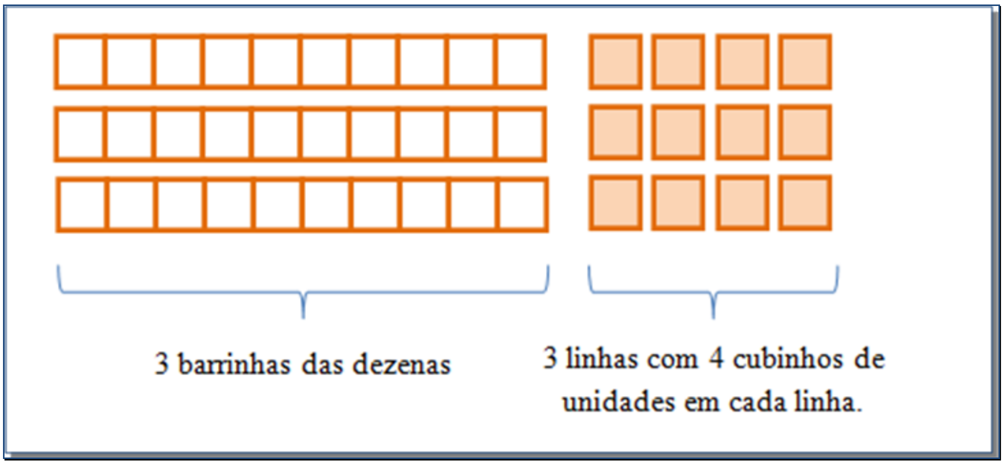
Representação geométrica da propriedade distributiva



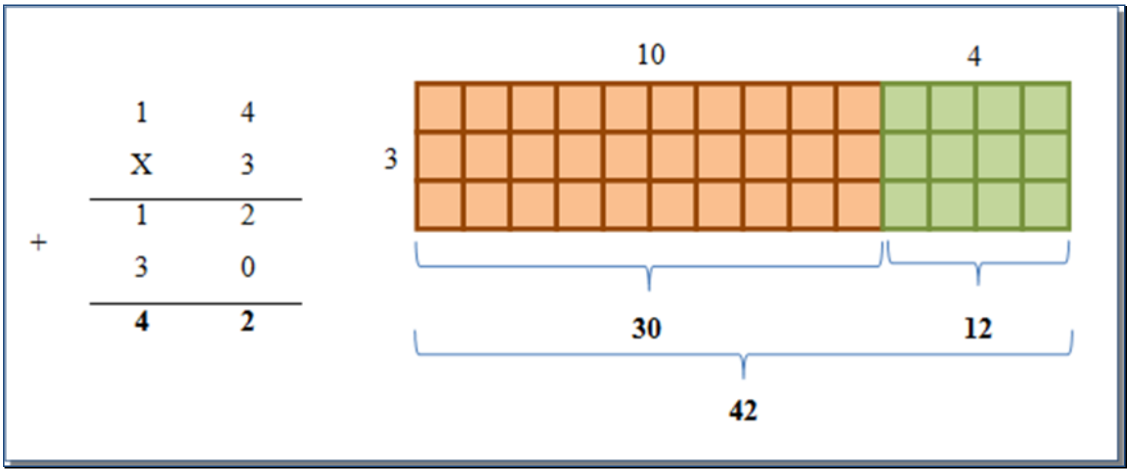
Fonte: Adaptado de Bigode e Frant (2011)

Assim, conforme observado, podemos representar o produto 3 x 14 decompondo o número 14 como a soma de 10 + 4 , assim, mostraremos a veracidade da propriedade distributiva para os alunos. Utilizando o exemplo anterior, os alunos poderiam representar o produto usando o material dourado da seguinte forma:

Material Dourado



Talvez com a visualização da propriedade distributiva através do papel quadriculado, os alunos sintam mais facilidade no momento em que forem trabalhar o algoritmo da multiplicação.



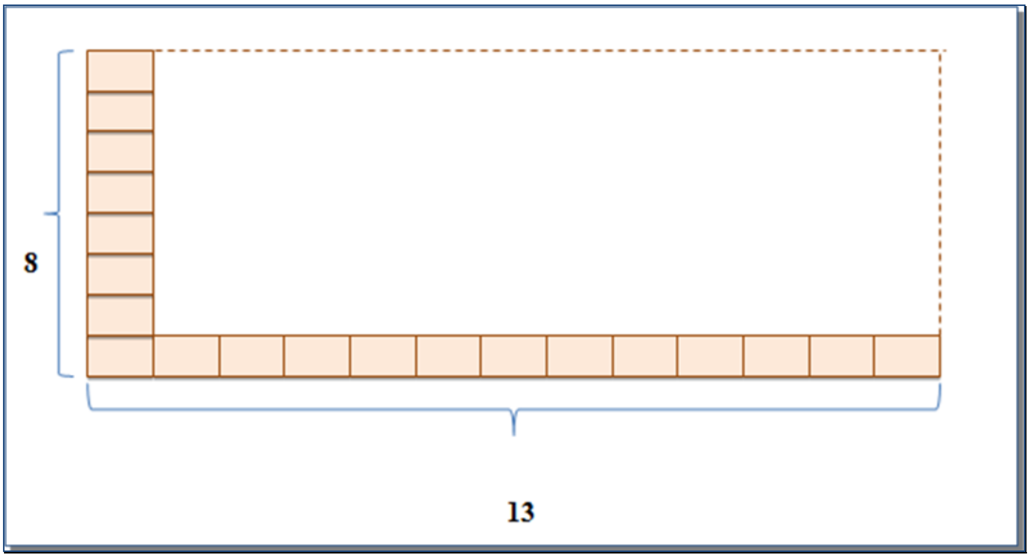
A ideia de configuração retangular, portanto, além de possibilitar um entendimento das propriedades comutativa e distributiva e contribuir para o trabalho com o algoritmo da multiplicação, também permite desenvolver o conceito de área. Assim, ao trabalhar com situações-problemas envolvendo essa ideia, o professor tem possibilidades para explorar propriedades e conceitos, não devendo ficar restrito apenas à resposta do problema.

Os alunos, a princípio, podem não perceber que as situações que estão resolvendo estão relacionadas com a multiplicação, por isso, é importante que, inicialmente, discutam a resolução no grupo e pensem em estratégias elementares para resolver as situações. A mediação do professor, no momento da socialização, ajudará a turma nessa percepção, caso nenhum grupo apresente essa estratégia durante o debate.

Após a situação apresentada ser trabalhada ao máximo, caberá ao professor propor um novo problema abordando essa ideia, para que os alunos possam, assim, consolidar os conhecimentos discutidos. A seguir, propomos uma nova situação que trabalha a ideia de configuração retangular.

Situação-problema 4:

Daniel decidiu trocar o piso de sua sala retangular por um porcelanato. O pedreiro, contratado por Daniel, verificou que serão gastas 13 peças de porcelanato no comprimento da sala e 8 peças na largura, como podemos verificar pela figura a seguir:



Quantas peças de porcelanato serão gastas pelo pedreiro para revestir a sala de Daniel?

A mesma orientação dada na situação anterior deve ser utilizada nesse novo problema, ou seja, os grupos devem discutir a melhor forma para resolvê-la e, depois, compartilhar com a turma a estratégia utilizada. O professor deverá explorar propriedades e conceitos, reforçando o que já foi discutido anteriormente. A diversidade de tipos de problemas ajudará na compreensão da ideia abordada.

Proposta 2 : Situações-problemas envolvendo a ideia de proporcionalidade

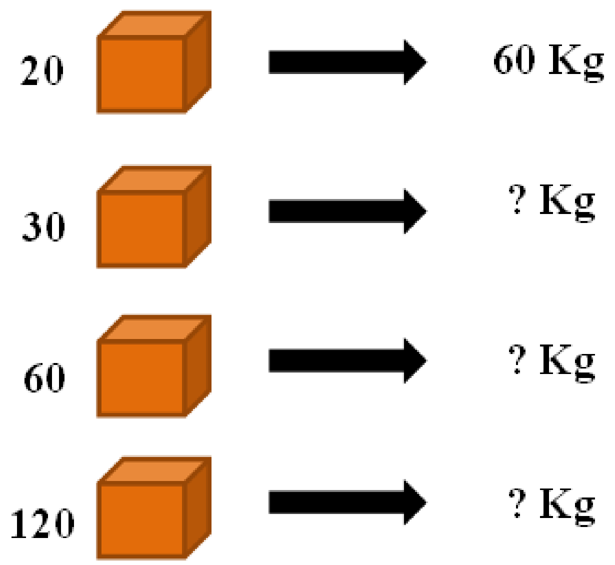
PROPOSTA 2 E OBJETIVO DO TRABALHO COM AS IDEIAS DO CAMPO MULTIPLICATIVO	
Objetivo	Utilizar situações - problemas para construir as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar a ideia de proporcionalidade.

Proporcionalidade

As situações-problemas a seguir, abordam a ideia de proporcionalidade, ou seja, envolvem a relação direta entre grandezas do tipo "*a está para b, assim como c está para d*". Segundo Berton e Itacarambi (2009), explorar a comparação de razões e desenvolver o raciocínio proporcional abrange uma parte significativa dos problemas do campo multiplicativo. Os problemas que envolvem essa ideia são mais frequentes no dia a dia das pessoas e, portanto, são mais facilmente compreendidos pelos alunos.

Situação-problema 1:

Todo mês, Pedro leva ao orfanato do seu bairro doações de alimentos que arrecada entre parentes, amigos e colegas de trabalho. No mês de Janeiro, Pedro arrecadou 20 caixas de alimentos que pesavam, juntas, 60 Kg. Em Fevereiro, Março e Abril, respectivamente, Pedro arrecadou 30, 60 e 120 caixas para o orfanato. Qual foi o peso do carregamento em cada um desses meses, sabendo que são proporcionais ao peso das caixas do mês de Janeiro?



Em grupo, os alunos devem pensar na solução para o problema proposto, colocando em jogo os conhecimentos de que eles dispõem. As estratégias pessoais são importantes, pois evidenciam que não há necessidade do uso de técnicas operatórias convencionais, sendo possível desenvolver caminhos próprios para se chegar ao resultado de uma operação e, que, em geral, costumam ser mais rápidas e eficientes para quem as utiliza. De acordo com a diretoria de apoio à gestão educacional (BRASIL, 2014b):

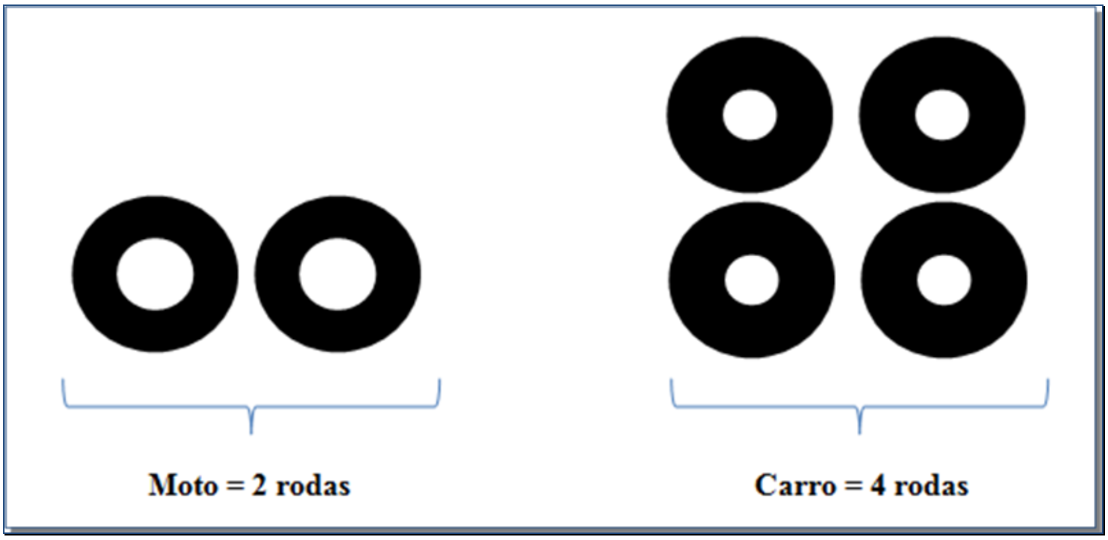
> As estratégias inventadas pelos alunos são métodos pessoais e flexíveis de calcular que são compreendidos pela pessoa que os usa. O desenvolvimento dessas estratégias, além de proporcionar fluência no cálculo e possibilitar que se tornem mais ágeis e cometam menos erros, expressa uma compreensão rica e profunda do sistema numérico, fornecendo uma base sólida para o cálculo mental e por estimativas e contribuem para o envolvimento num processo de fazer matemática. (BRASIL, 2014b, p.44).

Vale reafirmar que após um tempo para que os alunos busquem caminhos que os levem às soluções, deve haver a socialização daquilo que foi validado no grupo, pois as discussões são momentos importantes para confrontar, questionar e defender possibilidades de resolução, sempre utilizando argumentos vinculados aos conhecimentos matemáticos.

O professor deverá, portanto, questionar se a estratégia utilizada foi comum a todos os integrantes do grupo e se ela levou-os ao resultado correto para a situação proposta. Ele ainda poderá propor que cada grupo determine qual das estratégias analisadas é a mais eficaz. Após esgotar todas as possibilidades da situação apresentada, o professor deverá propor uma nova situação abordando a ideia de proporcionalidade.

Situação-problema 2:

No pátio do DETRAN ficam guardados os carros e as motos apreendidos devido a fatores como: documentação atrasada e roubo. Nesse mês, foram verificados que há 164 rodas no total, entre carros e motos, sendo que 44 rodas são de motos. Quantos foram os carros e as motos apreendidos no pátio do DETRAN nesse mês?



Primeiro, o professor irá apresentar a situação-problema para o aluno. Somente depois de ela ser elaborada por eles é que será possível começar a discussão sobre as possíveis estratégias para resolvê-la. O professor não deverá dar dicas para a resolução da situação, cabendo aos grupos pensarem no problema e na solução que darão para ele.

No momento da socialização, poderão aparecer diversos caminhos percorridos pelos grupos para se chegar ao resultado final e, através dos debates, os próprios alunos poderão perceber se o resultado encontrado por eles está correto ou não. Dessa forma, os alunos passam a compreender, de verdade, o que estão fazendo.

1 moto	→	**2 rodas**
? motos	→	**44 rodas**

1 carro	→	**4 rodas**
? carros	→	**120 rodas**

Proposta 3 : Situações-problemas envolvendo as ideias de partição e medida

PROPOSTA 3 E OBJETIVO DO TRABALHO COM AS IDEIAS DO CAMPO MULTIPLICATIVO	
Objetivo	Utilizar situações-problemas para construir as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar as ideias de partição e medida.

Partição

As situações-problemas, a seguir, abordam a ideia de partição, ou seja, a noção de repartir igualmente. Nessa noção, de acordo com Berton e Itacarambi (2009), encontram-se situações nas quais o número de agrupamentos a serem formados é conhecido e é preciso determinar o número de elementos de cada agrupamento. Ou, então, distribuir equitativamente certa quantidade de objetos entre um determinado número de grupos. Para isso, é preciso descobrir quantos objetos têm em cada grupo e quantos sobram.

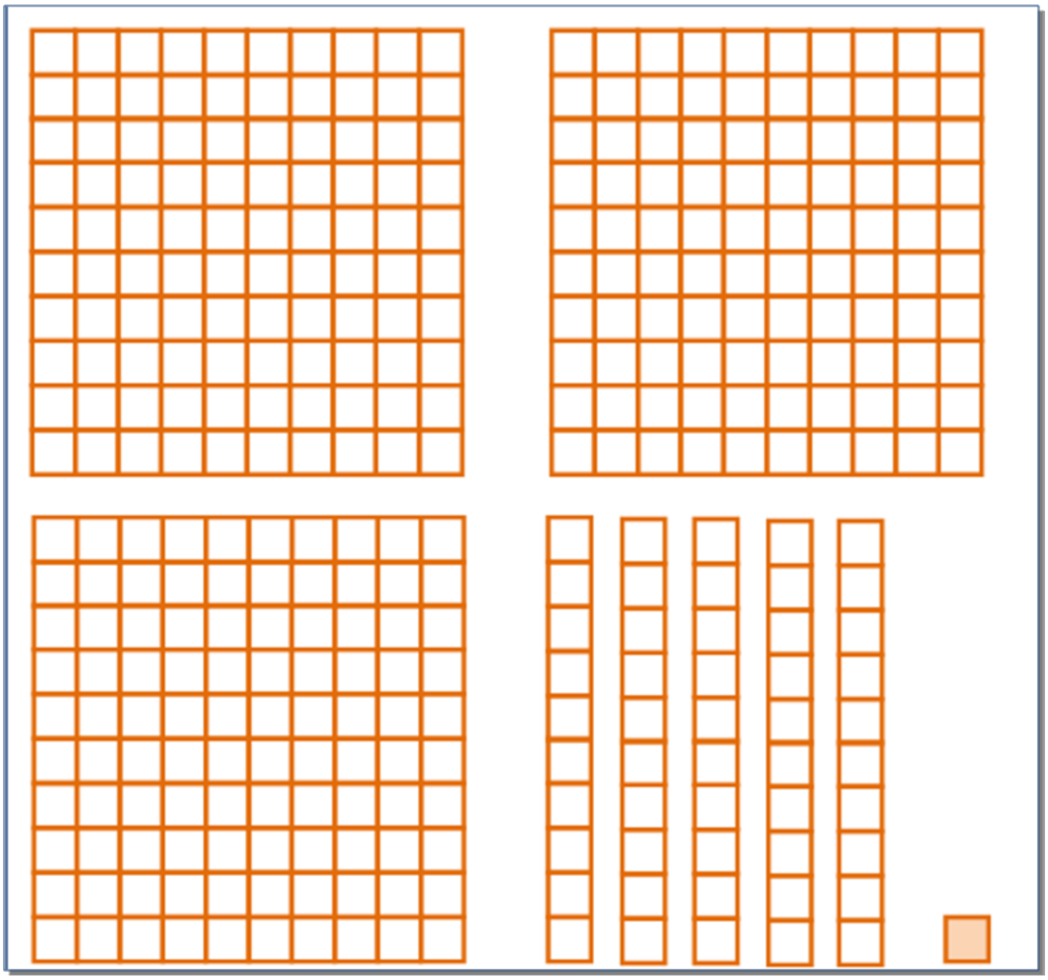
Situação-problema 1:

Todos os domingos, Rita e duas amigas vendem artesanato na feira *hippie*. Nesse domingo, elas arrecadaram 351 reais que dividirão igualmente entre as três. Vamos ajudar Rita e suas amigas a dividirem o dinheiro arrecadado?

Recomenda-se que o professor leve o material dourado para a sala de aula e disponibilize um para cada grupo. O material dourado poderá ser uma excelente ferramenta para auxiliar os alunos na resolução da situação, pois, através desse recurso, pode-se representar a quantia 351 e efetuar a divisão sem utilizar o algoritmo. Segundo a Diretoria de apoio à gestão educacional (BRASIL, 2014b):

> Quando afirmamos a importância do trabalho com cálculos, não estamos nos referindo apenas aos procedimentos de cálculo tradicionalmente ensinados na escola, que envolvem técnicas operatórias determinadas, tais como: “vai um”, “pede emprestado”, “deixar uma casa em branco”, “abaixar o número”, entre outros usados nos algoritmos tradicionais. Estamos nos referindo também a outros procedimentos de cálculo, como estratégias inventadas pelos alunos e o uso de recursos didáticos como o ábaco, material dourado e a calculadora.” (BRASIL, 2014b, p.43).

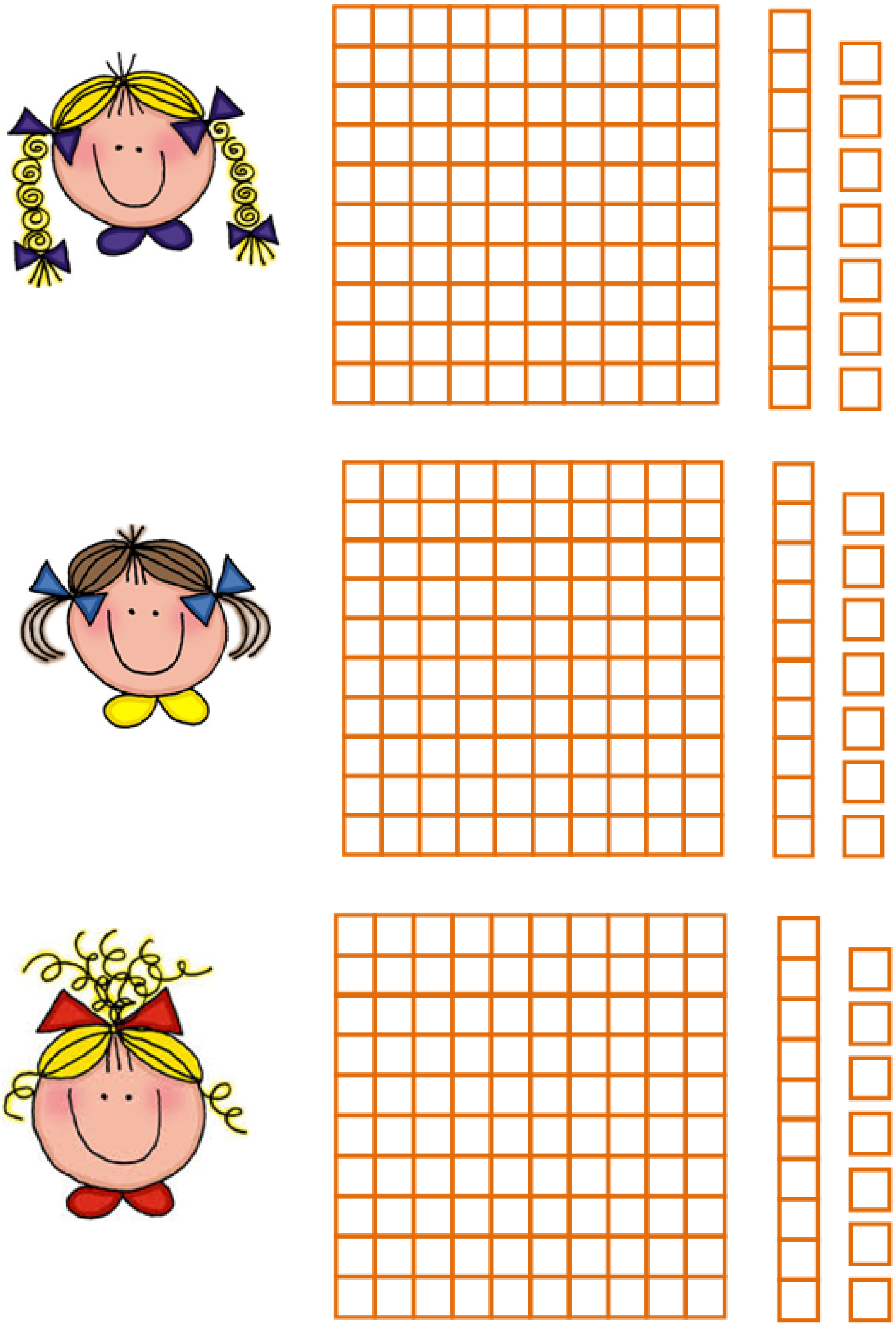
Representando 351 com o material dourado



3 placas, 5 barrinhas e 1 cubinho

Vale ressaltar que, com o material dourado e através de desenhos, é possível resolver a situação, de modo que tenha sentido e significado para os alunos e não será preciso utilizar e nem mesmo mencionar o algoritmo da divisão. O material dourado é, portanto, um recurso bastante recomendado para as aulas de Matemática, principalmente no Ensino Fundamental, pois, através dessa ferramenta pedagógica, os alunos podem colocar em prática suas hipóteses em relação aos procedimentos de cálculo, auxiliando futuramente os professores no trabalho com o algoritmo convencional.

Representando a divisão com o material dourado



Após o debate sobre as estratégias utilizadas, o professor poderá ainda com o auxílio do dinheiro de papel propor a seguinte situação para os alunos:

Se Rita e suas amigas receberam 1 nota de 100 reais, 3 notas de 50 reais, 8 notas de 10 reais, 3 notas de 5 reais e 3 notas de 2 reais. Como elas podem dividir o dinheiro igualmente com as notas que dispõem?

Utilizando as cédulas de dinheiro de brinquedo, os alunos terão a oportunidade de pensarem novamente na ideia de repartir igualmente, agora usando uma nova ferramenta pedagógica. Assim, antes de trabalhar com situações-problemas envolvendo a ideia de medida, sugerimos ao professor trabalhar com, pelo menos, mais uma situação envolvendo a ideia de partição como o problema que segue:

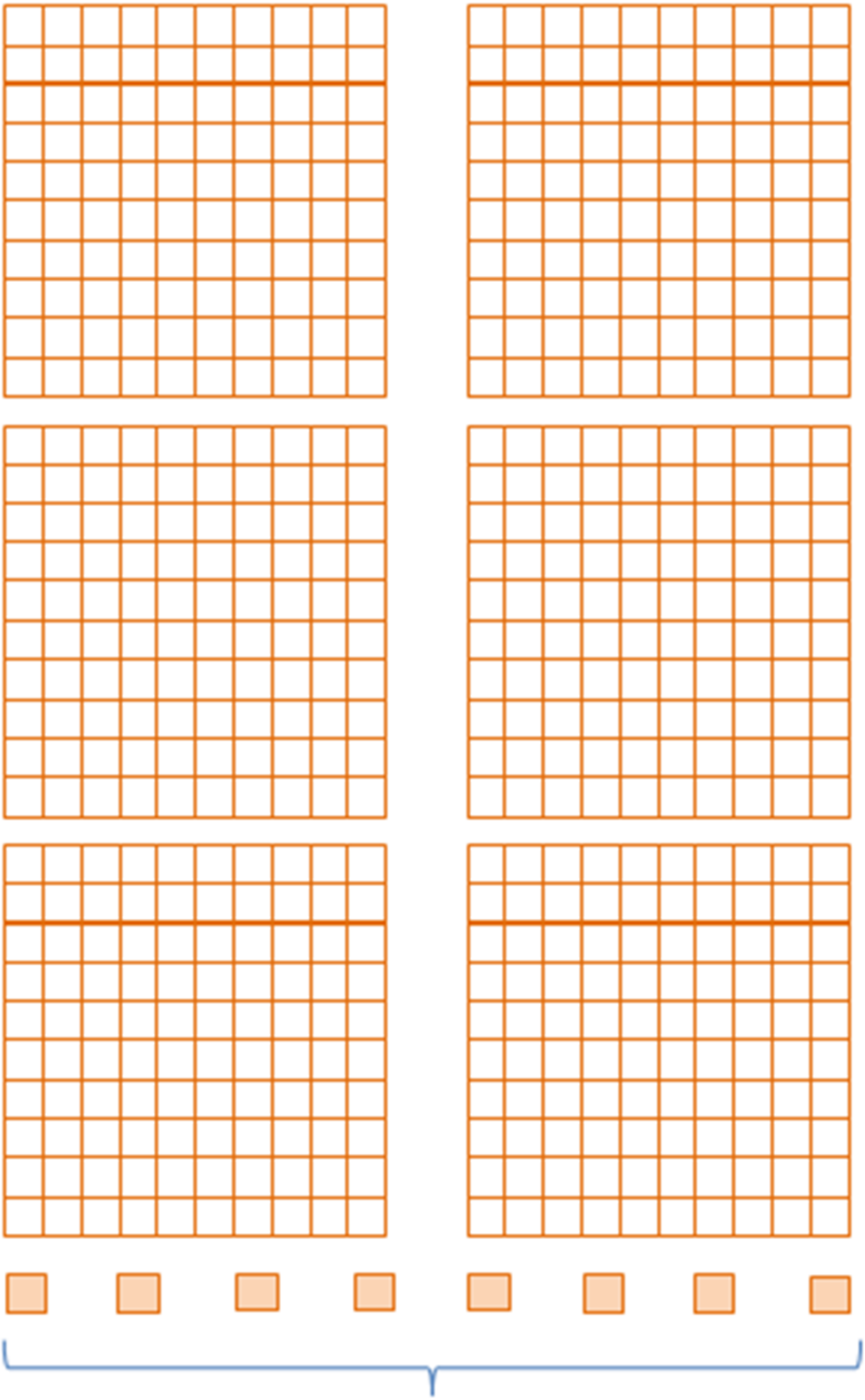
Situação-problema 2:

Joana está arrecadando blusas de frio para a campanha do agasalho deste ano. Ela já arrecadou 608 blusas que pretende doar para quatro instituições de caridade. Cada uma das instituições receberá a mesma quantidade de blusas. Quantas blusas cada instituição receberá?

Novamente aconselhamos que o material dourado seja disponibilizado aos grupos, pois, através dele, os alunos poderão representar a quantidade de agasalhos arrecadados e, pelo manuseio das peças, efetuarem a divisão entre as instituições de caridade fazendo as trocas quando necessário, sem que necessitem utilizar o algoritmo da divisão.

O uso de outra ferramenta pedagógica pelos grupos é livre, cabendo aos integrantes a decisão da melhor estratégia a ser utilizada na resolução da situação. No momento do debate, os grupos devem expor sua resolução e porque optaram por aquela estratégia. O professor poderá, ainda, questionar os grupos qual das estratégias apresentadas é a mais eficaz.

Representando 608 com o material dourado



6 placas e 8 cubinhos

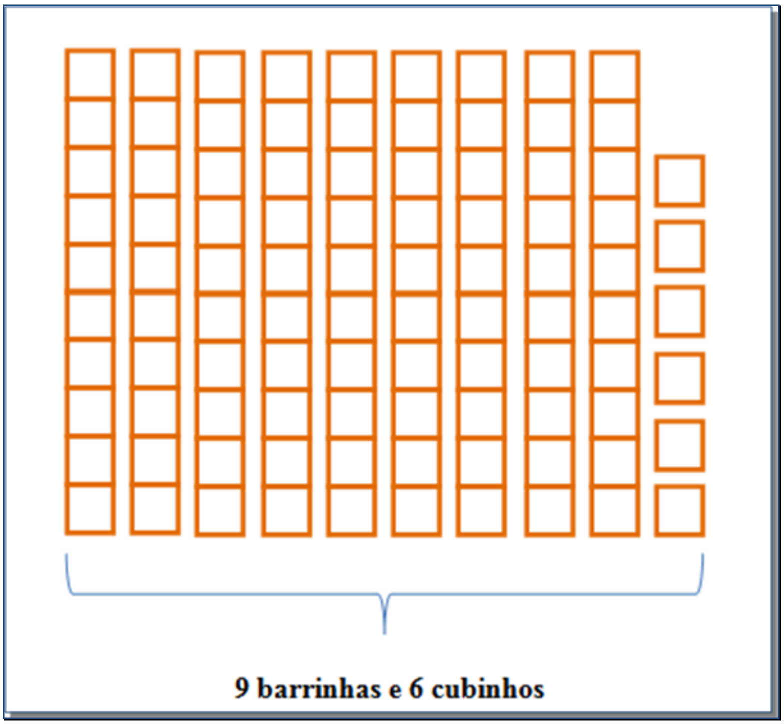
Medida

A noção de medida na divisão encontra-se em ações nas quais o tamanho de cada agrupamento a ser formado é conhecido, sendo preciso determinar quantos agrupamentos serão necessários. As situações a seguir, abordam essa ideia.

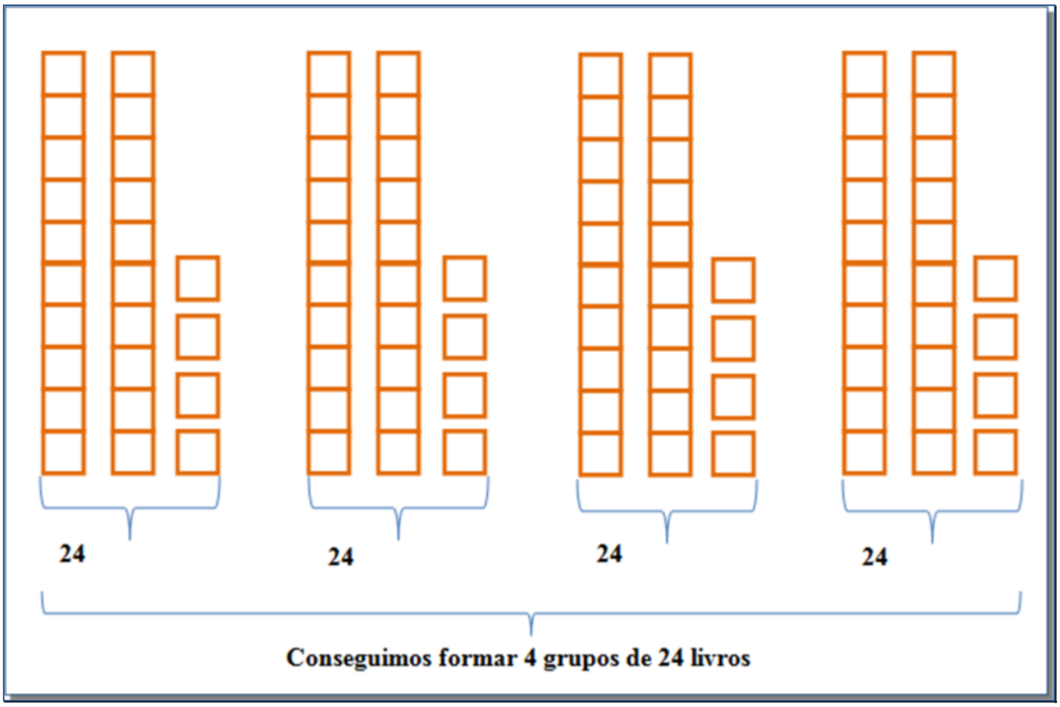
Situação-problema 3:

Luciana deseja organizar os 96 livros que possui em uma estante. Ela quer colocar em cada uma das prateleiras da estante 24 livros. Quantas prateleiras serão necessárias para organizar os livros de Luciana? Se a estante possui 7 prateleiras, faltará ou sobrará prateleiras depois que Luciana organizar seus livros?

Material dourado representando o número de livros de Luciana



Aconselhamos o uso do material dourado para que os alunos trabalhem com essa situação, para que possam representar a quantidade de livros. Após essa representação, os alunos podem ir formando grupos de 24 e, assim, chegar à resposta de quantos grupos será possível formar, ou seja, quantas prateleiras Luciana irá utilizar para organizar seus livros, como indicado a seguir:



É aconselhável, porém, trabalhar com mais de uma situação envolvendo a ideia de medida, como a que segue:

Situação-problema 4:

Carol é doceira. Ela recebeu uma encomenda de 216 brigadeiros e 144 beijinhos que irá organizar em caixas. Nas caixas azuis Carol colocará os brigadeiros e nas caixas vermelhas os beijinhos. Cada caixa azul terá 36 brigadeiros e cada caixa vermelha 24 beijinhos. Quantas serão as caixas azuis e vermelhas que Carol irá precisar?

O professor poderá disponibilizar tampinhas de refrigerante ou pedaços de canudinhos para os alunos representarem os docinhos de Carol, assim eles poderão representar a encomenda e descobrir a quantidade de caixas que serão necessárias.

Proposta 4 : Construindo situações-problemas a partir de frases embaralhadas

PROPOSTA 4 E OBJETIVO DO TRABALHO COM AS IDEIAS DO CAMPO MULTIPLICATIVO	
Objetivo	Utilizar frases embaralhadas para construir situações-problemas que abordam as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar as ideias do campo multiplicativo.

Após trabalhar as ideias de combinatória e configuração retangular, na primeira proposta, e as ideias de proporcionalidade, partição e medida, nas segunda e terceira, propomos explorar novamente as cinco ideias do campo multiplicativo. Pires (2013) destaca a importância de um trabalho conjunto de problemas que explorem a multiplicação e a divisão, uma vez que há estreitas conexões entre as situações que as envolvem e a necessidade de trabalhar essas operações com base em um campo mais amplo de significados do que tem sido usualmente realizado.

Nessa proposta, esperamos que os alunos vivenciem as situações-problemas do campo multiplicativo que irão resolver, compreendendo os conceitos por trás das operações e, assim, dando condições para que os alunos ampliem sua visão desse campo. A seguir, iremos propor três situações-problemas para cada ideia do campo multiplicativo.

Combinatória

1) Numa festa havia 4 meninos e 3 meninas. Quantos pares diferentes puderam se formar? **(*2 frases*)**

2) Quatro amigas se encontrarão no final de semana. Se cada uma delas der um único aperto de mão em cada uma das amigas, quantos apertos de mão serão dados ao todo? **(*3 frases*)**

3) Uma gincana esportiva está sendo realizada em duas fases. Cada participante deverá se inscrever em uma só modalidade esportiva para cada fase. Na 1ª fase, judô ou natação. Na 2ª fase, vôlei, futsal ou atletismo. Nelson gosta de todos os esportes oferecidos. Quantos tipos de escolhas diferentes ele poderá fazer para decidir em quais modalidades se inscreverá na gincana? **(*6 frases*)**

Configuração Retangular

1) Ana é professora. Ela guarda os cadernos dos seus alunos dento do armário da classe sempre do mesmo jeito. 6 pilhas com 12 cadernos em cada uma. Quantos cadernos Ana guarda? **(*4 frases*)**

2) Em um pequeno auditório, as cadeiras estão dispostas em 7 fileiras e 8 colunas. Quantas cadeiras há no auditório? **(*2 frases*)**

3) Um avião possui 6 fileiras de um lado com 2 poltronas em cada uma. Do outro lado, ele tem 7 fileiras com 2 poltronas em cada uma. Quantos passageiros cabem ao todo no avião? **(*3 frases*)**

Proporcionalidade

1) Jane é funcionária do posto de saúde. Ela visita 6 famílias por dia. Quantas famílias ela visitará em 4 dias? **(*3 frases*)**

2) Para fazer uma receita de bolo de chocolate, Dona Maria precisa de 3 ovos. De quantos ovos precisaria para dobrar a receita de bolo? **(*2 frases*)**
3) Dois melões custam R$ 4,50. Quanto pagarei por quatro desses melões? **(*2 frases*)**

Partição

1) Flávia tem três filhos. Ela resolveu presenteá-los dividindo a quantia de 315 reais entre eles. Todos receberão a mesma quantia. Quantos reais cada filho receberá? **(*4 frases*)**
2) Rita vai doar 572 reais para quatro instituições de caridade. Sabe-se que todas as instituições receberão o mesmo valor. Quantos reais serão doados a cada uma das instituições? **(*3 frases*)**
3) Bia está fazendo brigadeiros para a festa de seu afilhado. Ela fez 750 brigadeiros. Para transportar os brigadeiros Bia usará 6 caixas, todas com a mesma quantidade de docinhos. Quantos brigadeiros Bia colocará em cada caixa? **(*4 frases*)**

Medida

1) Cristina embalou 19 docinhos em caixas hexagonais. Sabe-se que ela fabricou 418 docinhos. Quantas caixas Cristina precisou usar para armazenar todos os doces? **(*3 frases*)**
2) Para o carnaval foram feitos colares de 17 contas cada um. Quantos colares iguais pode-se fazer com 221 contas? **(*2 frases*)**
3) O padeiro coloca pães no forno em tabuleiros de 24 pães cada um. Hoje amassou 293 pães. Quantos tabuleiros precisará para colocá-los todos no forno? **(*3 frases*)**

O professor deverá disponibilizar trechos de uma situação-problema na forma de frases que deverão estar misturadas com a de outras situações-problemas para os alunos, que não deverão ver os problemas como mostramos acima. Os alunos deverão receber as frases da seguinte forma:

Jane é funcionária do posto de saúde.

De quantos ovos precisarei para dobrar a receita de bolo?

6 pilhas com 12 cadernos em cada uma.

Quantas cadeiras há no auditório?

Se cada uma delas der um único aperto de mão em cada uma das amigas.

Do outro lado, ele tem 7 fileiras com 2 poltronas em cada uma.

Na 1ª fase, judô ou natação.

Todos receberão a mesma quantia.

Quantos reais serão doados a cada uma das instituições?

Sabe-se que ela fabricou 418 docinhos.

Para transportar os brigadeiros Bia usará 6 caixas, todas com a mesma quantidade de docinhos.

Quantos colares iguais pode-se fazer com 221 contas?

Hoje amassou 293 pães.

Ela visita 6 famílias por dia.

Ana é professora.

Quanto pagarei por quatro desses melões?

Um avião possui 6 fileiras de um lado com 2 poltronas em cada uma.

Quantos pares diferentes puderam se formar?

Quatro amigas se encontram no final de semana.

Quantos tipos de escolhas diferentes ele poderá fazer para decidir em quais modalidades se inscreverá na gincana?

Numa festa havia 4 meninos e 3 meninas.

O padeiro coloca os pães no forno em tabuleiros de 24 pães cada um.

Em um pequeno auditório, as cadeiras estão dispostas em 7 fileiras e 8 colunas.

Rita vai doar 572 reais para quatro instituições de caridade.

Flávia tem três filhos.

Cristina embalou 19 docinhos em caixas hexagonais.

Para o carnaval foram feitos colares de 17 contas cada um.

Quantas famílias ela visitará em 4 dias?

Dois melões custam R$ 4,50.

Uma gincana esportiva está sendo realizada em duas fases.

Quantos apertos de mão serão dados ao todo?

Na 2ª fase, vôlei, futsal ou atletismo.

Quantas caixas Cristina precisou usar para armazenar todos os doces?

Ela fez 750 brigadeiros.

Quantos reais cada filho receberá?
Quantos cadernos Ana guarda?
Para fazer uma receita de bolo de chocolate, Dona Maria precisa de 3 ovos.
Quantos passageiros cabem ao todo no avião?
Nelson gosta de todos os esportes oferecidos.
Quantos tabuleiros precisará para colocá-los todos no forno?
Bia está fazendo brigadeiros para a festa de seu afilhado.
Ela guarda os cadernos dos seus alunos dentro do armário da classe sempre do mesmo jeito.
Cada participante deverá se inscrever em uma só modalidade esportiva para cada fase.
Quantos brigadeiros Bia colocará em cada caixa?
Ela resolveu presenteá-los dividindo a quantia de 315 reais entre eles.
Sabe-se que todas as instituições receberão o mesmo valor.

Após receberem as frases embaralhadas, os alunos, em grupos, devem separá-las em tiras. O professor deverá disponibilizar para os grupos cartolinas para que montem as situações. No inicio da atividade talvez os grupos possam sentir dificuldades, porém, isso força a busca por soluções e resulta na produção de conhecimento e no enriquecimento do que já existe. O desafio de conseguir montar todas as situações-problemas estimula os alunos a tentar e a não desistir.

Nessa atividade, os alunos precisarão de um tempo maior para que consigam separar todas as tiras e montar as situações-problemas. Terminada essa primeira etapa, o professor deverá solicitar que os grupos exponham seus cartazes na lousa e um representante do grupo deverá ser selecionado para ler as situações elaboradas. Cada representante deverá ler a mesma situação até que todos os grupos terminem a sua leitura e discutam o texto final daquela situação-problema. Assim deverá ser feito com as 15 situações.

A segunda etapa da atividade deverá ser iniciada quando todos os grupos, através do debate e com a mediação do professor, concluírem o texto final de todas as situações. Nesse momento, os grupos deverão resolvê-las. Para isso, o professor deverá disponibilizar materiais como: canudinho, palito de picolé, material dourado, dinheiro de papel, entre outros. Cada grupo deverá utilizar as suas estratégias na resolução das situações. Porém, para que não fique cansativo, no momento da apresentação, o professor poderá sortear três situações para cada grupo apresentar, dependendo da quantidade de grupos formados na sala.

Durante a apresentação, os grupos deverão expor as estratégias que utilizaram durante a resolução. Os outros grupos poderão opinar e expor seu ponto de vista nas apresentações dos colegas, sempre com a mediação e supervisão do professor.

O mais importante, durante a realização dessa atividade, é saber que cada situação-problema desdobra-se em múltiplas possibilidades, que, para cada uma, os alunos deverão dispor de tempo para reflexões e formulação de estratégias e o professor, tempo para ouvir, argumentar, aceitar várias soluções, fazer comentários, ajudando os alunos a aprofundarem relações no que se refere às situações de multiplicação e divisão.

Proposta 5 : Construindo situações-problemas a partir de perguntas previamente estabelecidas

PROPOSTA 5 E OBJETIVO DO TRABALHO COM AS IDEIAS DO CAMPO MULTIPLICATIVO	
Objetivo	Utilizar perguntas previamente estabelecidas para construir situações - problemas que trazem as ideias do campo multiplicativo.
Conceitos ou propriedades abordados	Trabalhar as ideias do campo multiplicativo.

Fonte: Elaborado pela autora

Nessa proposta, os alunos deverão, a partir de perguntas previamente estabelecidas, construir situações-problemas. Cada grupo deverá receber do professor, mediante sorteio, uma pergunta que será o ponto de partida para o grupo elaborar um problema, sendo a finalização dele a pergunta sorteada.

Por exemplo:

Um dos grupos sorteou a seguinte pergunta: "***Quanto cada um irá pagar***?". Partindo dessa pergunta, o grupo deve elaborar um problema.

"Cláudio, Pedro e João saíram do trabalho e foram ao bar assistir ao jogo do campeonato mineiro. A conta deu R$ 120,00 e será dividida igualmente entre os amigos. ***Quanto cada um irá pagar***?"

Após o sorteio, os grupos devem elaborar a situação-problema partindo da pergunta que lhes cabe, o professor deverá prever um tempo da aula para que todos os grupos consigam elaborar seus problemas.

Terminada essa primeira etapa, o professor deverá recolher as situações elaboradas pelos grupos e, assim, deverá, em voz alta, ler, uma a uma, discutindo com a turma a coerência e o entendimento de cada uma das situações. Através da mediação do professor, acredita-se que a turma deverá estabelecer se cada uma das situações elaboradas está coerente ou se necessita de ajustes.

Feita a leitura e os ajustes nas situações elaboradas, se necessário, é hora de resolvê-las. Cada grupo, então, receberá uma situação que não foi a elaborada por ele, ou seja, resolverá uma situação que foi criada por outro grupo.

Depois de resolver a situação-problema que lhe coube, o grupo deverá apresentar para a turma e para o professor a resolução que chegaram, expondo a estratégia utilizada por eles.

A criação dos problemas pode permitir aos alunos ter um sentido de propriedade e ajudá-los a comunicarem as suas compreensões matemáticas ao professor e aos colegas. Esse tipo de atividade estimula a comunicação na turma e, através do envolvimento ativo dos alunos, favorece o entendimento das ideias do campo multiplicativo.

A seguir, sugestões de perguntas:

De quantas maneiras ela pode se arrumar?

Quantos são os sabores?

De quantos modos diferentes ele poderá escolher?

Quantas cadeiras há na sala?

Quantos azulejos serão gastos na parede do banheiro?

Se ela triplicar a receita quantos serão os ovos?

Em cada caixa haverá quantas garrafas?

Quantas caixas serão necessárias?

Qual a quantia que cada um receberá?

Qual a quantia que cada um irá pagar?

Quantas serão as parcelas a pagar?

Qual será o valor de cada parcela?

Quantos serão os convidados para o aniversário de Tati?

Concluindo a unidade II

Nessa segunda unidade do caderno o objetivo foi trabalhar as ideias do campo multiplicativo. Segundo Berton e Itacarambi (2009), ensinar um algoritmo de uma operação a um aluno que ainda não compreendeu o significado dessa operação não tem nexo algum. Ainda de acordo com os autores, os algoritmos permitem tratar as operações de uma forma mecanizada, onde não é necessário pensar muito sobre o assunto, basta seguir os passos definidos. No entanto, calcular com sentido do número significa que cada um deve olhar primeiramente para os números e depois decidir por uma estratégia adequada à situação.

Assim, mesmo que o aluno não domine as ideias do campo multiplicativo de imediato, ele, gradualmente, irá tecer as relações entre os conceitos das operações e, posteriormente, o aprendizado do algoritmo ganhará significado. Dessa forma, entende-se que a compreensão do problema vem antes da sistematização de um procedimento para solucioná-lo.

Nosso objetivo, portanto, ao elaborar as atividades dessa unidade foi proporcionar aos alunos a compreensão das situações-problemas e a elaboração de estratégias de resolução por eles. Segundo a Diretoria de apoio à gestão educacional (BRASIL, 2014b):

> É importante que as estratégias individuais sejam estimuladas. São elas que possibilitam aos alunos vivenciarem relações de naturezas diferentes e decidindo sobre a estratégia que desenvolverão. A socialização dessas estratégias com toda a turma amplia o repertório dos alunos e auxilia no desenvolvimento de uma atitude mais flexível frente à resolução de problemas. (BRASIL, 2014b, p.11).

Nas três primeiras propostas dessa unidade sugerimos abordar as ideias do campo multiplicativo partindo de situações-problemas e disponibilizando materiais concretos para que os alunos possam ter mais facilidade para compreender cada uma delas. Restringir o ensino da multiplicação a situações que envolvem a soma de parcelas iguais e o ensino da divisão a situações que envolvem apenas a ideia de partição podem empobrecer a aprendizagem. Dessa forma, convém explorar uma diversidade de ideias, representações e contextos de natureza multiplicativa.

Nas duas últimas propostas dessa unidade, o objetivo foi proporcionar aos alunos uma prática educativa instigante, contextualizada e reflexiva estimulando a turma a se organizar e, também, a criar situações que abordem as ideias do campo multiplicativo, buscando, assim, um entendimento maior dessas ideias.

OS FATOS DA MULTIPLICAÇÃO - UNIDADE III

O terceiro fator importante para a construção do algoritmo da divisão é a aprendizagem dos fatos da multiplicação. Segundo Bigode e Frant (2011, p.46), "[...] a tabuada é importante para uma aprendizagem mais sólida de outros conceitos e técnicas aritméticas, como os algoritmos da multiplicação e da divisão".

Nosso objetivo, ao elaborar essa unidade, é propor atividades que visam à construção dos fatos carregada de significados, possibilitando aos alunos sua memorização. De acordo com Berton e Itacarambi (2009):

> Uma discussão muito frequente entre pais e educadores que utilizam matemática é se há necessidade de memorizar ou não a tabuada na sociedade da informatização. Algumas razões parecem justificar a necessidade de seu domínio, entre elas, a aprendizagem do algoritmo convencional da divisão, cujo foco no ensino desse está na compreensão dos procedimentos que se apoiam nos fatos fundamentais. (BERTON; ITACARAMBI, 2009, p.152).

Não estamos propondo, aqui, portanto, a "decoreba", pois acreditamos que esse tipo de "estudo" não leva os alunos a atingir os objetivos de aprendizagem que almejamos. Entendemos, sim, que a memorização é uma consequência de estratégias que focam no entendimento conceitual da multiplicação, ou seja, na construção das regularidades entre os fatos numéricos. Na perspectiva de Bigode e Frant (2011), para que o ensino da tabuada seja bem sucedido, o aluno precisa memorizá-la, ou seja, aprendê-la através de situações significativas. Segundo os autores, ao memorizá-la, o aluno será capaz de resolver problemas mais facilmente, não só em sala de aula, mas também no cotidiano e nas atividades profissionais que venha a desempenhar.

Proposta 1: Situações-problemas envolvendo unidades compostas

PROPOSTA 1 E OBJETIVO DO TRABALHO COM OS FATOS DA MULTIPLICAÇÃO	
Objetivo	Construir os fatos da multiplicação a partir de situações-problemas que envolvem a contagem por unidades composta.
Conceitos ou propriedades abordados	Tabuada da multiplicação de 2 a 10.

Nosso objetivo nessa primeira proposta é trabalhar situações-problemas que levem os alunos a construção dos fatos da multiplicação, de forma clara e interessante, usando a contagem por unidades compostas. Por exemplo: par de sapato, roda de bicicleta, rodas de triciclo, patas de cachorro etc...

Sugerimos, então, para a resolução das situações, o uso de material concreto, como: tampinha de garrafa, canudinho ou o próprio material dourado. A manipulação de objetos na Matemática para alguns alunos é necessária, pois eles necessitam se apoiar na visualização das quantidades para, então, representá-las através de números.

É importante enfatizar que o professor deve solicitar aos alunos que registrem as estratégias utilizadas na resolução das situações, pois esse registro poderá ser usado na construção das outras tabuadas e, também, no momento da construção da tabela de dupla entrada.

Após os alunos pensarem na resolução da situação, o professor deverá pedir aos grupos que exponham as estratégias usadas para os colegas. É interessante estimular os alunos a fazerem perguntas aos grupos que estão apresentando, pois esses diálogos tornam a aula interativa, tornando possível, através deles, relembrar, a todo o momento, propriedades da multiplicação que ajudarão na memorização dos fatos pelos alunos.

Situação-problema 1:

a) Cláudia possui três pares de sapato de salto. Quantos sapatos de salto há em 3 pares?
b) Sabendo que Cláudia possui dois pares de tênis, quantos tênis há em 2 pares?
c) Se a quantidade de pares de sapatos de salto dobrar, quantos sapatos de salto haverá ao todo?
d) Se Cláudia possuísse 5 pares de tênis, quantos tênis haveria em 5 pares?

Nessa primeira situação, estamos abordando a tabuada do 2. Na perspectiva de Bigode e Frant (2011), essa tabuada é bem intuitiva, não sendo difícil para as crianças imaginarem ou representarem o dobro de quantidades e objetos. De acordo com o autor, o professor deve explorar a relação “dobro de” e mostrar que, cada vez que somamos duas vezes a mesma quantidade, nós a dobramos. Além de serem fáceis de memorizar, os dobros e as metades podem ser um recurso importante a ser usado na construção das outras tabuadas como a de 4, 6, 8, 10.

Situação-problema 2:

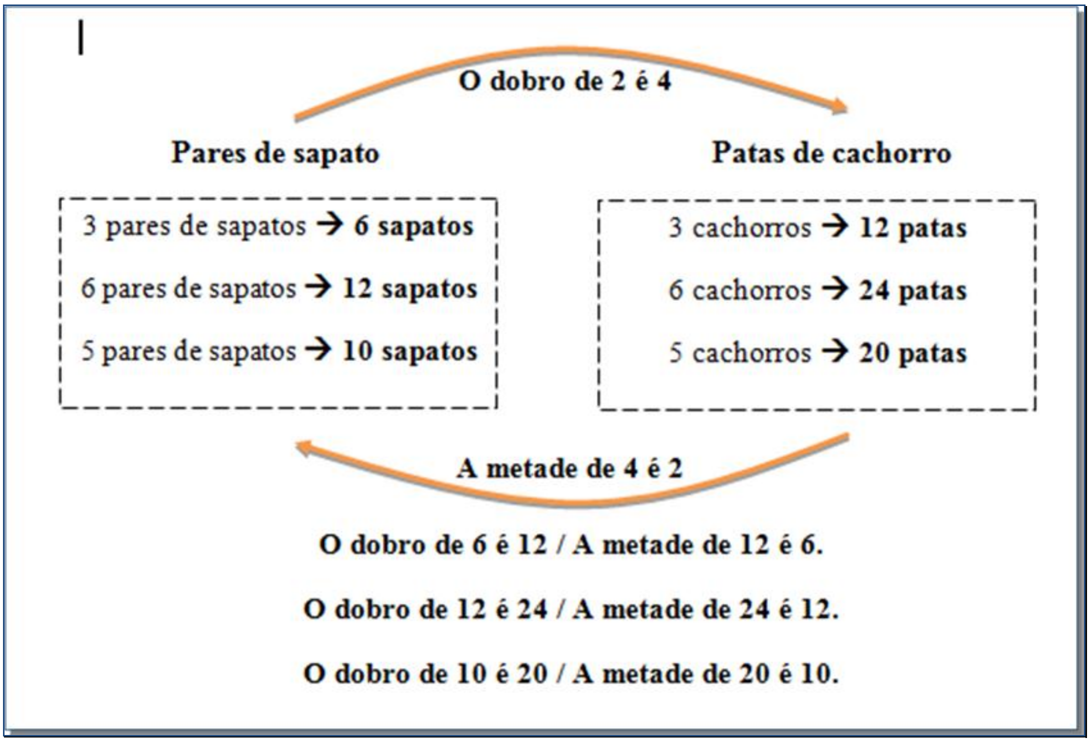
a) Sabendo que os triciclos possuem 3 rodas, então, quantas rodas há em 5 triciclos?
b) Quantas rodas há em 6 triciclos? E em 8?

Nessa situação, abordamos a tabuada do 3. É importante que o professor explore a ideia de triplo, já que, para os alunos, essa ideia não é algo difícil a ser construído, pois eles conseguem visualizar uma quantidade e repeti-la três vezes. As ideias de dobro e triplo são importantes e devem ser bem trabalhadas, pois dão suporte para a construção de outros fatos.

Situação-problema 3:

a) Luca possui três cachorrinhos. Sabendo que cada cachorrinho possui 4 patas, quantas patas há no total de 3 cachorrinhos?
b) E se ele possuísse 6 cachorrinhos, quantas patas seriam no total?
c) E em 5 cachorrinhos?

Sugerimos que o professor trabalhe a tabuada do 4 partindo da ideia de "dobro do dobro". Assim, após um tempo para que os alunos tracem suas estratégias de resolução e registre-as, o professor poderá pedir à turma que observe o resultado encontrado por eles nessa situação e, solicitar que voltem nos resultados obtidos na primeira situação onde abordamos a tabuada do 2, assim será possível construir com a turma a ideia de "dobro do dobro".



Depois de construir com a turma esse conceito, proponha aos alunos que pensem na quantidade de sapatos para 4, 7, 8, 9 e 10 pares e que verifiquem se a quantidade de patas irá dobrar se a quantidade de cachorrinhos também for 4, 7, 8, 9 e 10. Esse é um bom momento para o professor explorar, também, o conceito de metade, já que as ideias de dobro e metade estão correlacionadas, sendo uma ação a inversa da outra.

Situação- problema 4:

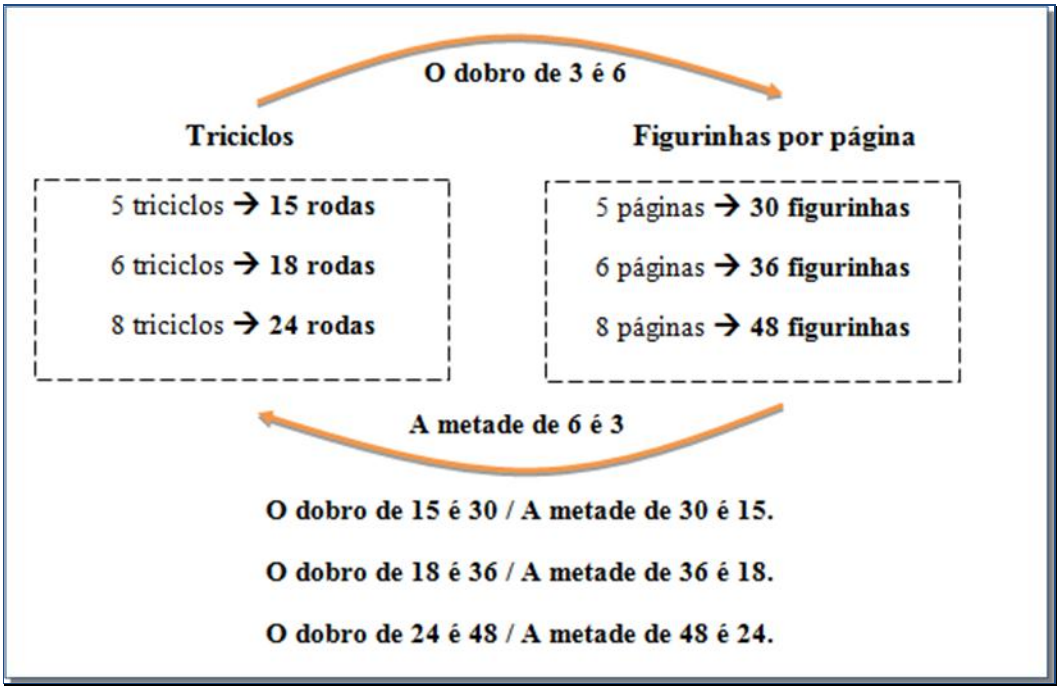
a) Jonas está ajudando o tio na organização do escritório dele. A cada hora trabalhada, Jonas ganha de seu tio R$ 5,00. Segunda-feira Jonas trabalhou 3 horas. Quanto ele ganhou do tio?
b) Na terça-feira, Jonas trabalhou 6 horas. Quanto ele ganhou do tio?
c) Isso significa que, na terça, Jonas ganhou quanto a mais?
d) Na quarta-feira, Jonas trabalhou 5 horas. Quanto ele ganhou do tio?
e) Na quarta, Jonas ganhou mais ou menos do que na terça? Qual foi a diferença?
f) Na quinta-feira, Jonas trabalhou 7 horas. Qual foi o seu ganho?
g) Na quinta, Jonas ganhou mais ou menos do que na terça? Qual foi a diferença?
h) Na sexta, Jonas só pode trabalhar 4 horas. Quanto ele ganhou?

Nessa situação estamos propondo a construção da tabuada de 5, em geral, os alunos apreciam a regularidade desse fato que alterna “zeros” e “cincos”. Além disso, pela formação anatômica das mãos e dos pés, que normalmente possuem 5 dedos, é mais fácil para os alunos visualizar e compreender essa tabuada, portanto, sua memorização geralmente é mais rápida.

A apresentação dos fatos da multiplicação não precisa ocorrer de forma sequenciada, caso o professor ache mais interessante, poderá trabalhar primeiro a tabuada de 10 e, então, introduzir a tabuada do 5 baseando-se na ideia de metade.

Situação-problema 5:

a) Pedro coleciona figurinhas do campeonato brasileiro de futebol. Cada página completa do álbum possui 6 figurinhas. Se ele já possui 5 páginas completas, quantas figurinhas Pedro já possui?
b) E se ele tivesse 6 páginas completas, quantas figurinhas ele teria?
c) E em 8 páginas, qual o total de figurinhas?



Nessa situação, desejamos construir a tabuada de 6. Após o debate sobre as estratégias utilizadas pelos grupos na resolução da situação, sugerimos que o professor mostre aos alunos a relação entre essa tabuada e a de 3, explorando, assim, as ideias de dobro e metade.

O professor poderá, ainda, propor aos alunos que pensem na quantidade de rodas para 2, 3, 4, 7, 9 e 10 triciclos, e que verifiquem se a quantidade de figurinhas irá dobrar caso a quantidade de páginas também seja 2, 3, 4, 7, 9 e 10. Essa construção pelos alunos e a comparação entre os fatos é importante para a memorização.

Situação-problema 6:

a) Na loja de roupa de Mariana, uma camiseta básica masculina custa R$ 7,00. Se João comprar 3 camisetas iguais a essa, quanto pagará?
b) E se João levar para casa 5 camisetas. Quanto pagará?
c) E se comprar 8 camisetas, qual será o total a pagar?

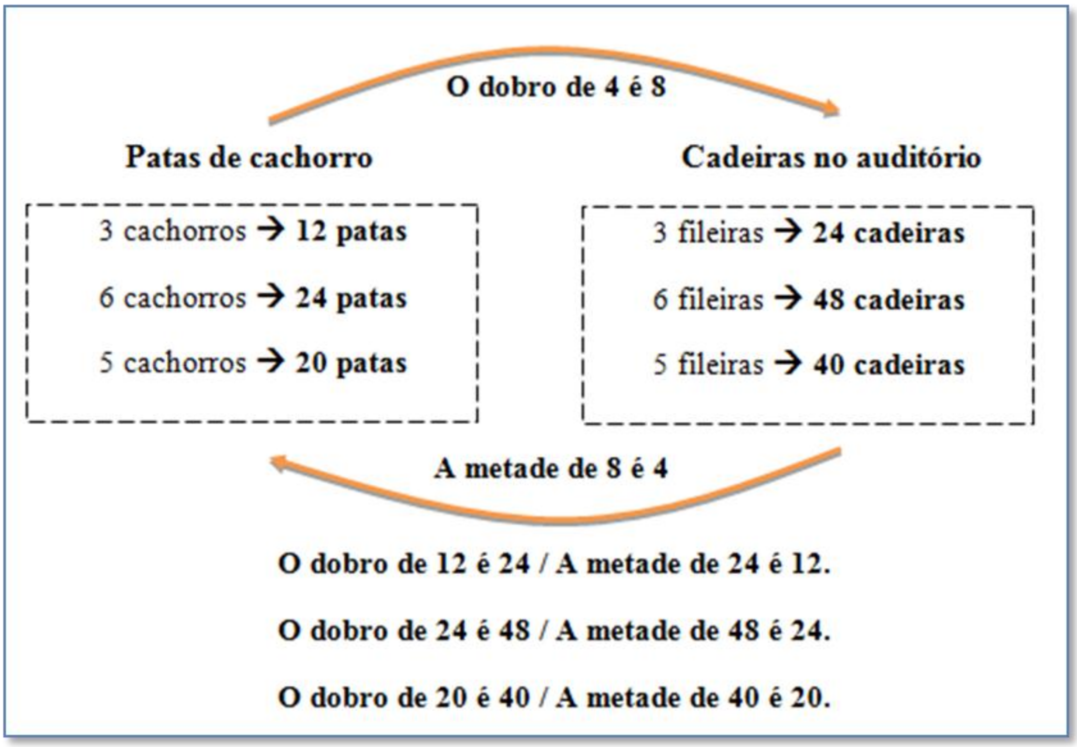
Caso o professor escolha trabalhar os fatos de forma não sequenciada, essa pode ser uma tabuada a ser construída ao final dessa primeira proposta. Sugerimos, portanto, que os alunos observem primeiro os fatos que são um o dobro do outro ou o triplo, para, somente então, perceber outras regularidades entre os fatos, como veremos mais adiante em outras propostas para a tabuada do 7.

Situação-problema 7:

a) Ricardo está ajudando na organização do auditório da escola. Ele colocou 8 cadeiras em cada fileira. Se ele colocar 3 fileiras, com quantas cadeiras o auditório ficará?

b) Se Ricardo colocar 6 fileiras, com quantas cadeiras o auditório ficará?

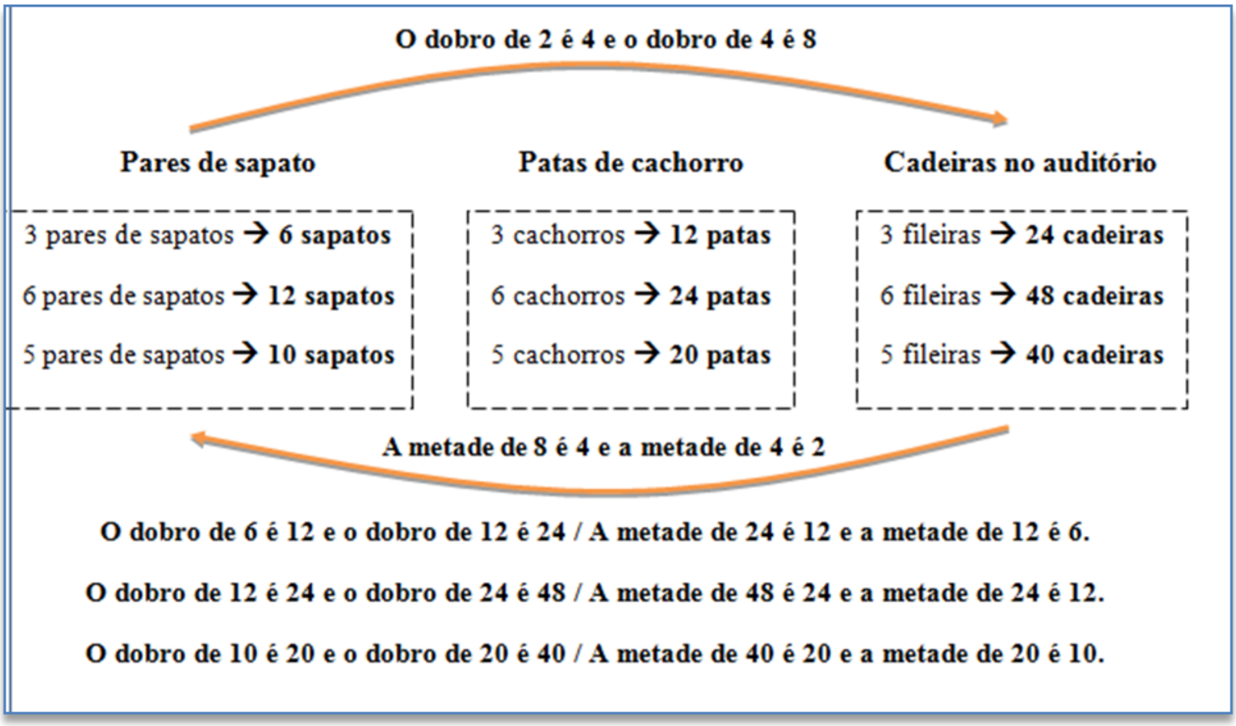
c) E em 5 fileiras, qual será o total de cadeiras no auditório?



Após as discussões sobre as resoluções para o problema proposto, o professor pode pedir ao grupo que pensem no número de patas para 2, 4, 7, 8, 9 e 10 cachorros e que verifiquem se a quantidade de cadeiras no auditório dobra também se a quantidade de fileiras for 2, 4, 7, 8, 9 e 10.

Ao construir a tabuada de 8, o professor poderá explorar as relações entre dobros e quádruplos pois, através da observação, os alunos serão capazes de concluir que os resultados dos fatos de 8 são o ***dobro*** dos resultados dos fatos de 4 e, ao comparar com os fatos de 2 verificarão que representam o ***quádruplo*** desses valores.

Esse conhecimento é útil e deve ser trabalhado, já que contribui no momento de os alunos resolverem situações-problemas. Além disso, é importante que os alunos aprendam a calcular tabuadas desconhecidas com base em tabuadas que dominam, o que ajuda na compreensão dos fatos e evita a decoreba.

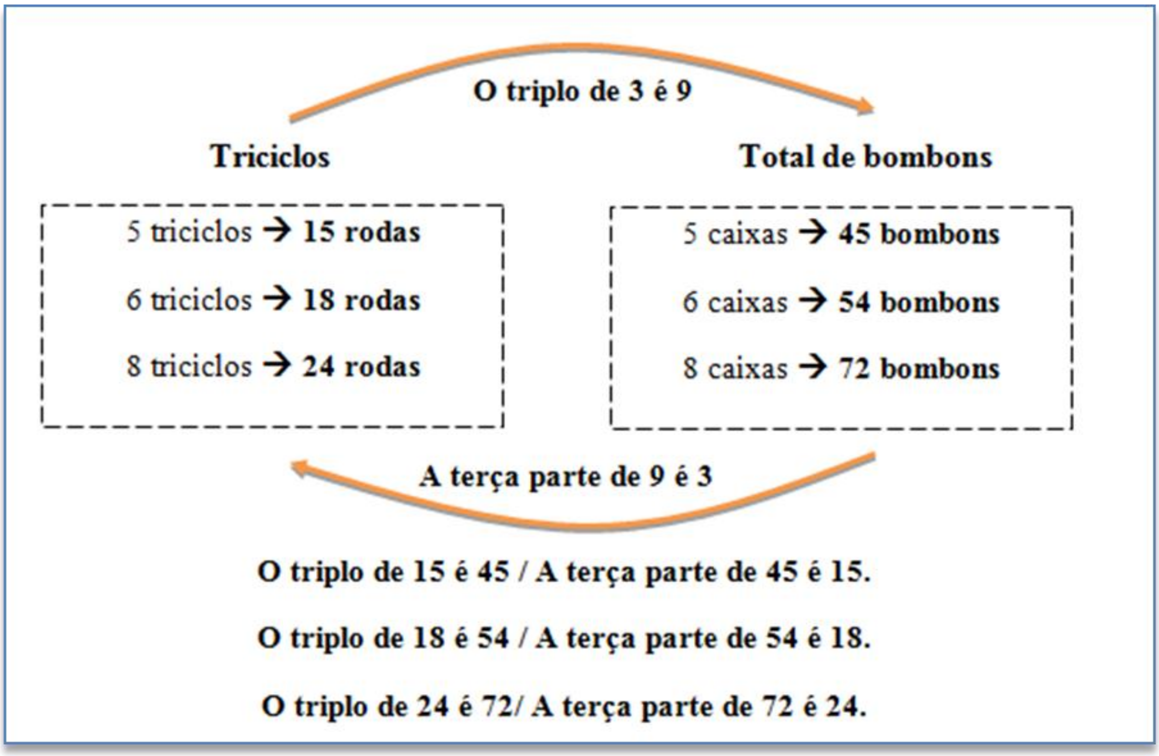


Situação-problema 8:

a) A loja de Ju vende deliciosos chocolates. Rosa é apaixonada pela caixa de bombons de cereja. Em cada caixa, há 9 bombons. Na última vez que Rosa foi a loja de Ju, ela comprou 5 caixas de bombons de cereja. Qual foi o total de bombons que Rosa comprou?

b) Se Rosa tivesse comprado 6 caixas, qual seria o total de bombons?

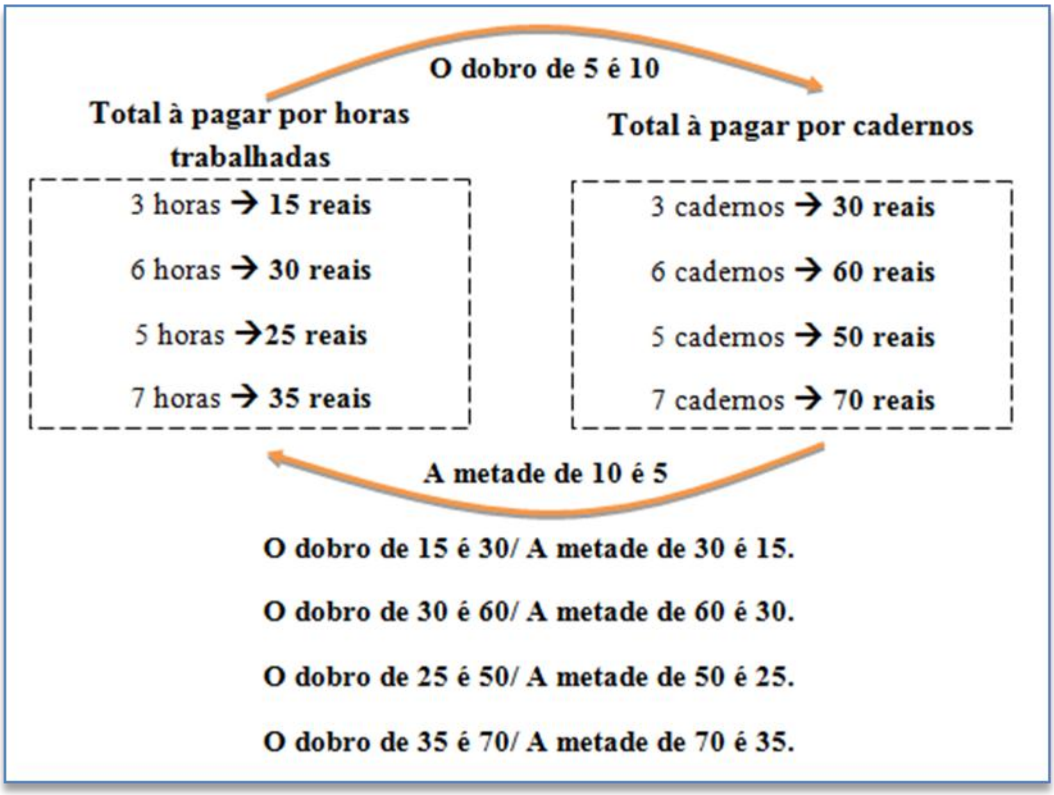
c) E se fossem 8 caixas, qual seria o total de bombons?



Nessa situação, desejamos construir com os alunos a tabuada do 9, que é considerada por muitos como a mais difícil de ser aprendida. Se deixarmos de lado os macetes que são ensinados para que os alunos "decorem" esse fato e pensarmos na sua compreensão, perceberemos a importância de explorar a relação que há entre a tabuada de 9 e a de 3, ou seja, se os alunos compreenderem que 9 é o triplo de 3, e, portanto, todos os resultados da tabuada de 9 são o triplo dos resultados da tabuada do 3, teremos um caminho para facilitar a compreensão dos alunos diante desse fato da multiplicação.

Situação-problema 9:

a) Sônia foi à papelaria comprar cadernos novos para seu filho. Cada caderno de 1 matéria custa R$10,00. Quanto Sônia pagou na compra de 3 cadernos?
b) E se Sônia comprasse 6 cadernos, quanto pagaria?
c) E se ela comprasse 5 cadernos, qual seria o total a pagar?
d) E em 7 cadernos. Quanto pagaria?



A tabuada de 10 é simples e intuitiva, já que, basta acrescentarmos um zero à direita do número, e teremos o resultado que procuramos. Contudo, para que seu ensino esteja carregado de sentido e significado para o aluno, sugerimos o uso do material dourado na sua construção.

Através das barrinhas das dezenas, podemos construir toda tabuada de 10, de modo que o aluno consiga visualizar essa construção. Outro ponto importante a ser considerado e explorado pelo professor é a relação entre essa tabuada e a do 5, novamente voltando às ideias de dobro e metade.

Considerações sobre a proposta

Nessa primeira proposta da unidade III, partimos da ideia de memorizar os fatos da multiplicação segundo seu uso e aplicação, de modo que a ideia principal foi de que a compreensão é fundamental, sendo inconcebível exigir dos alunos que recitem os fatos sem que haja o entendimento do significado de sua fala. A multiplicação precisa ser construída e compreendida, e essa construção é resultado de um trabalho mental por parte dos alunos.

A decoreba não dará uma aprendizagem significativa aos alunos, de modo que eles sejam capazes de levar esse conhecimento adiante em sua vida escolar. Antes de qualquer coisa, é preciso que haja a compreensão para que a tão temida tabuada torne-se uma aliada na caminhada matemática dos alunos.

Outro aspecto importante refere-se a sequência das construções das tabuadas em sala de aula, que não necessita ser sequenciada. O professor poderá, por exemplo, trabalhar primeiro a tabuada do 2, do 4 e do 8, mostrando as relações existente entre elas, depois, trabalhar a tabuada do 3, do 6 e do 9. Em seguida, construir a tabuada do 5 e do 10 e, por último, a tabuada do 7. Essa forma de trabalho quebra a regra de que a tabuada deva ser construída de forma sequenciada.

O importante, portanto, não é a sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 e sim o sentido que o aluno coloca na atividade que está realizando. Muitas vezes, essa quebra de paradigma acaba contribuindo para que os alunos consigam visualizar as relações existentes nos fatos da multiplicação.

Proposta 2: Construindo os fatos com o uso de material concreto

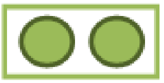
PROPOSTA 2 E OBJETIVO DO TRABALHO COM OS FATOS DA MULTIPLICAÇÃO	
Objetivo	Construir os fatos da multiplicação a partir de objetos.
Conceitos ou propriedades abordados	Tabuada da multiplicação de 2 a 10.

Nosso objetivo, nessa segunda proposta de trabalho, é a construção dos fatos através de materiais concretos como: tampinhas de garrafa, palitos de picolé, canudinhos, papeis coloridos ou outros tipos de materiais que desempenhem a mesma função.

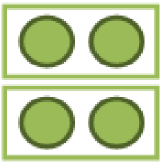
O importante é criar várias situações que levem os alunos à compreensão do significado de multiplicar. Segundo a gerência de coordenação de políticas pedagógicas e de formação da prefeitura municipal de Belo Horizonte (BELO HORIZONTE, 2008), a compreensão é um processo que leva mais tempo do que a memorização. O aluno precisa de tempo para pensar. Muitas vezes, a compreensão exigirá o auxílio de situações que salientem os aspectos a serem compreendidos, já que a compreensão exige que o aluno perceba as regularidades do sistema.

Dessa forma, os agrupamentos com o material concreto devem ser feitos de acordo com o fato que se deseja ensinar, como, por exemplo, se estamos trabalhando com tampinhas de garrafa e desejamos construir a tabuada de 2, como demonstrado a seguir:

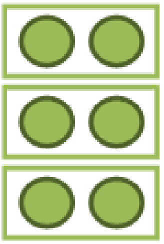
Construção da tabuada de 2 usando tampinha de garrafa



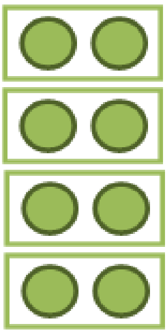
1 grupo com 2 tampinhas → Total: 2 tampinhas



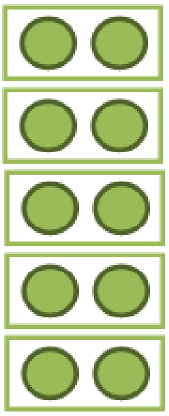
2 grupos com 2 tampinhas em cada um → Total: 4 tampinhas



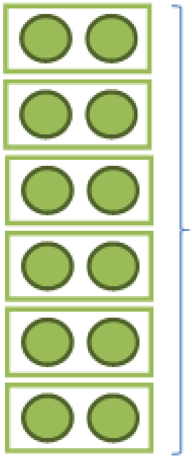
3 grupos com 2 tampinhas em cada um → Total: 6 tampinhas



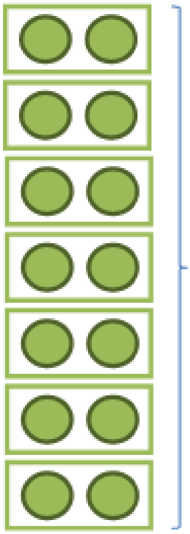
4 grupos com 2 tampinhas em cada um → Total: 8 tampinhas



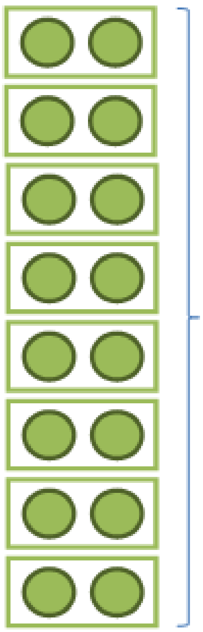
5 grupos com 2 tampinhas em cada um → Total: 10 tampinhas



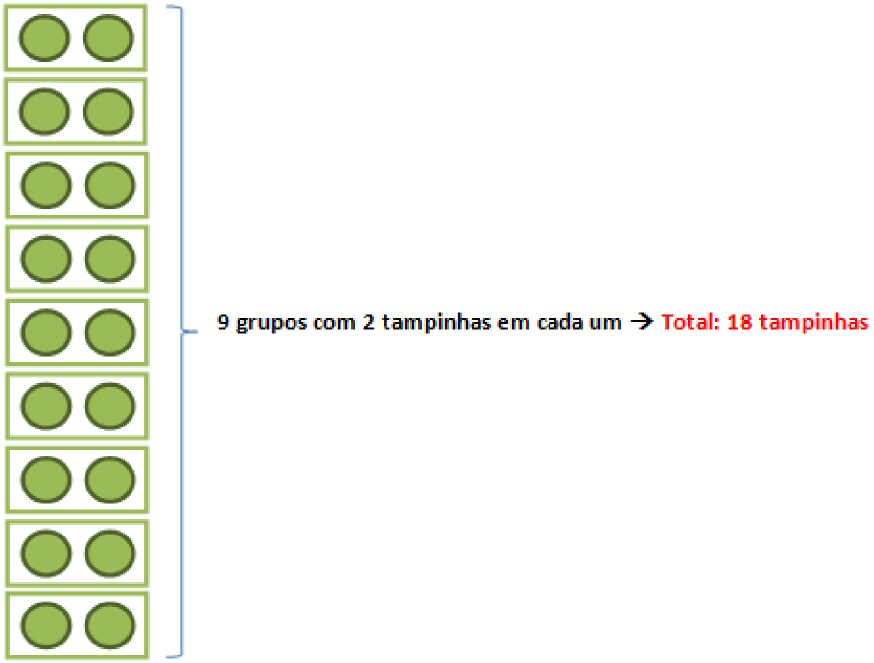
6 grupos com 2 tampinhas em cada um → Total: 12 tampinhas



7 grupos com 2 tampinhas em cada um → Total: 14 tampinhas



8 grupos com 2 tampinhas em cada um → Total: 16 tampinhas



Após a construção da tabuada, o professor poderá solicitar aos alunos que observem o que fizeram e se algo lhes chama a atenção. Se o aluno consegue perceber a relação entre a adição e a multiplicação, ele descobre que não é necessário decorar a tabuada, pois consegue, a partir de um resultado, gerar os outros. No nosso exemplo, fica fácil para o aluno perceber que a cada grupo com 2 tampinhas que adicionamos, há, no total, um acréscimo de 2 tampinhas. De acordo com a gerência de coordenação de políticas pedagógicas e de formação da prefeitura municipal de Belo Horizonte (BELO HORIZONTE, 2008):

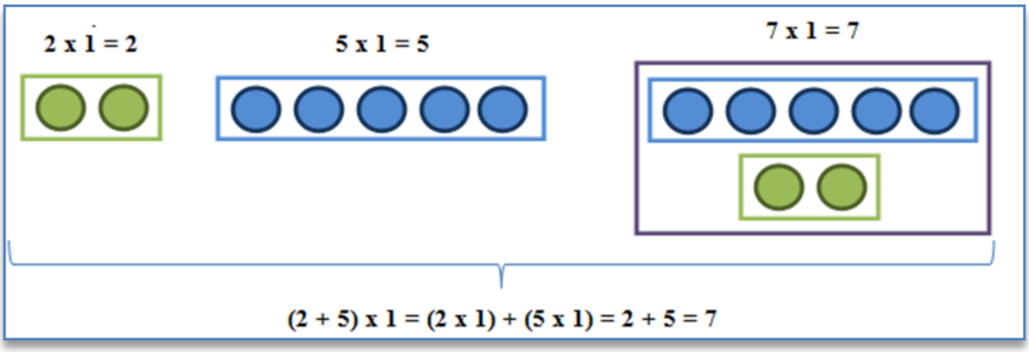
> Para o aluno que não compreende as relações entre a adição e a multiplicação, a tabuada é exclusivamente uma questão de decorar; o que foi aprendido, não pode se gerado. Para o aluno que compreende as relações entre adição e multiplicação, existe a possibilidade de maior flexibilidade; algumas coisas estão memorizadas, outras não, e estas últimas podem ser geradas, quando for necessário. (BELO HORIZONTE, 2008, p.13).

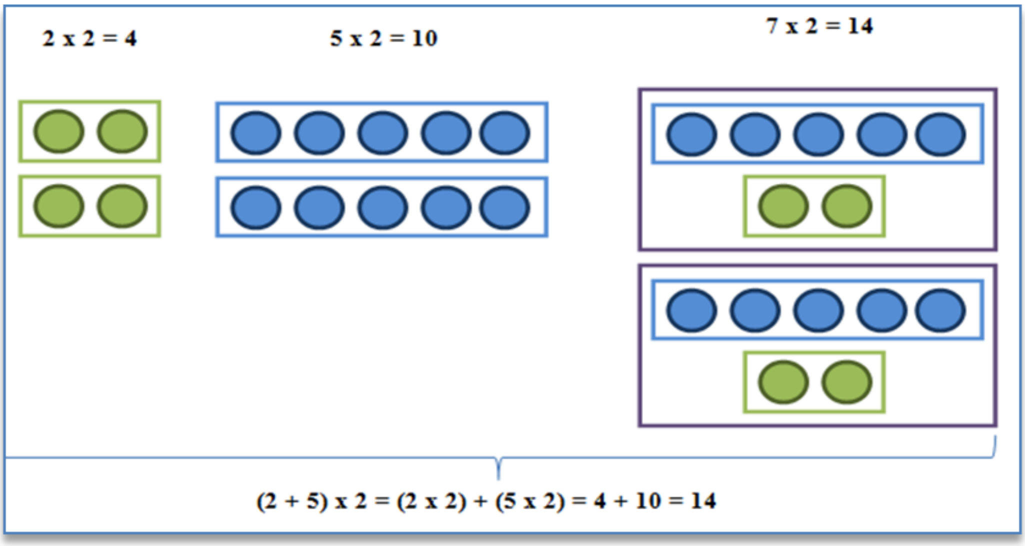
Ao final de cada fato, os alunos podem fazer cartazes para expor na escola ou na própria sala de aula. Para realizar a atividade, portanto, o professor poderá optar por dois caminhos: ou todos os alunos realizam a construção da mesma tabuada e a cada aula fazem a construção de um fato diferente, ou o professor sorteará para cada grupo a tabuada correspondente à sua construção, o que indica que, em uma mesma aula, é possível trabalhar da tabuada do 2 à tabuada do 10.

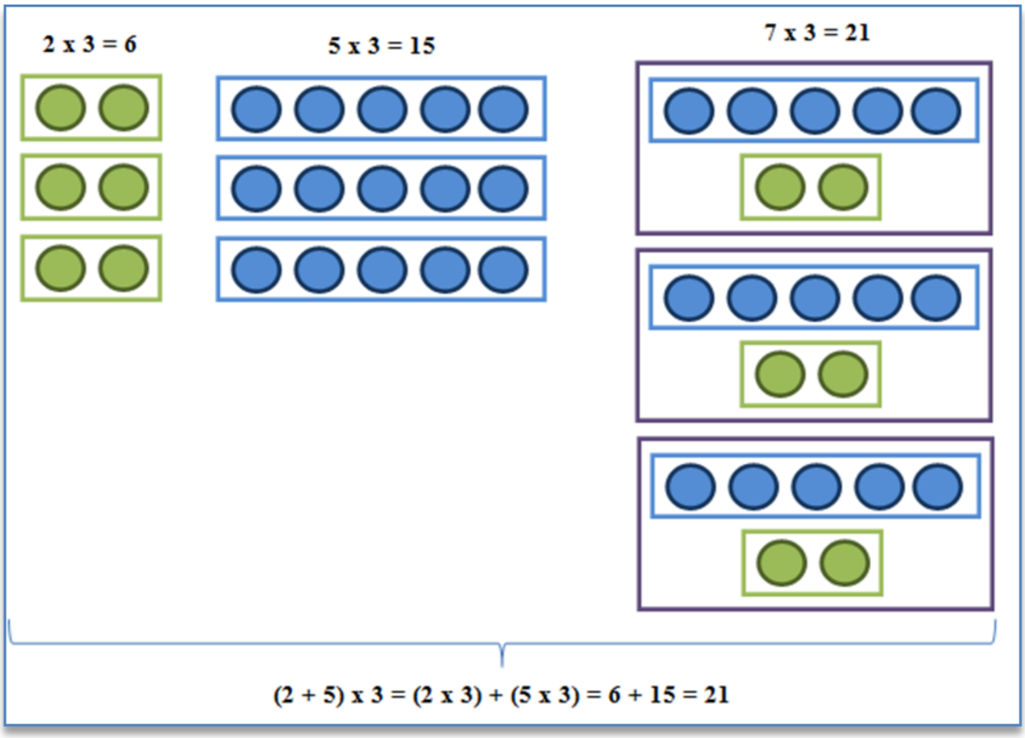
Essa escolha sobre como realizar a atividade deve ser feita com base no grau de desenvolvimento da turma, sendo essa uma escolha que somente o professor que conhece a turma poderá fazer. Caso a turma apresente dificuldades, caberá a todos a construção de cada um dos fatos, porém, se a turma apresentar um grau maior de desenvolvimento e maturidade sendo bastante observadora e participativa, será possível trabalhar todos os fatos em uma aula.

O mais importante nessa atividade é que, através da construção da tabuada, haja a compreensão pelo aluno. A construção e compreensão do conceito precisam ser formadas pelo aluno e o recurso visual poderá ser um grande aliado nessa construção, pois o professor poderá utilizá-lo para validar propriedades como, por exemplo, a distributiva.

Assim, através da propriedade distributiva, os alunos poderão aprender mais facilmente algumas tabuadas que são consideradas mais difíceis por eles, como, por exemplo, a tabuada de 7.







Portanto, diante do exposto, vale ressaltar que o recurso visual que o material concreto proporciona auxilia o aluno a compreender a propriedade, fazendo a conta passar a fazer sentido para ele, pois consegue construir uma ideia visual para ela. Dessa forma, os alunos conseguem estabelecer uma conexão entre o conceito e a conta armada, pois há uma base criada pelo visual para que haja a abstração.

Proposta 3: Construindo os fatos com o uso de papel quadriculado

PROPOSTA 3 E OBJETIVO DO TRABALHO COM OS FATOS DA MULTIPLICAÇÃO	
Objetivo	Construir os fatos da multiplicação usando o papel quadriculado.
Conceitos ou propriedades abordados	Tabuada da multiplicação de 2 a 10.

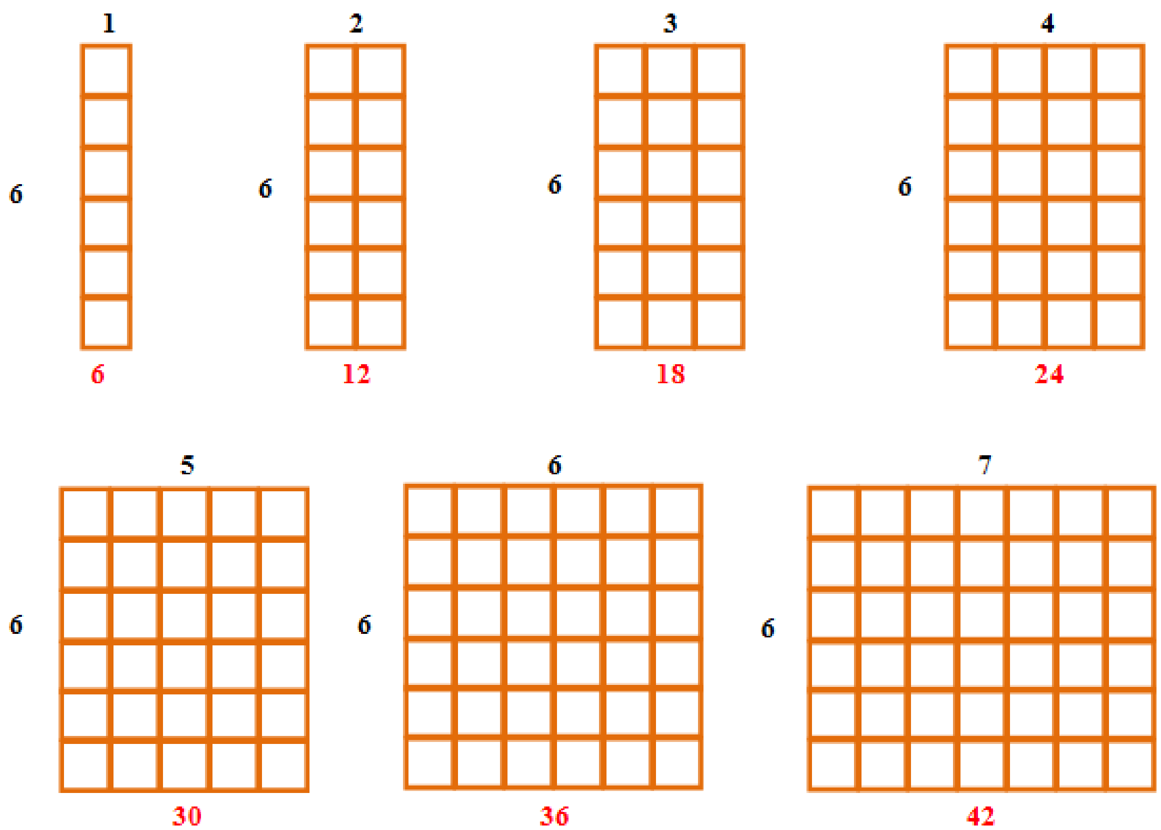
Como já visto, memorizar os fatos fundamentais é importante para que o aluno compreenda e tenha domínio de algumas técnicas de cálculo, já que a multiplicação aparece com frequência na exploração de novas ideias matemáticas; e, caso a criança não os tenha fixado, a cada instante irá “engasgar” na tabuada desviando, assim, sua atenção das novas ideias que o professor deseja trabalhar. Dessa forma, é importante levar para a sala de aula várias situações que cooperem para a compreensão e, consequentemente, sua memorização pelo aluno.

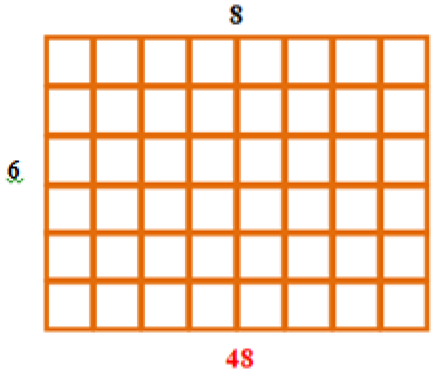
Nessa proposta, a ideia é construir os fatos usando o papel quadriculado como material de apoio. A malha quadriculada é um recurso pedagógico cuja função é ajudar os alunos na compreensão das formas geométricas e suas propriedades, no estudo da área e do perímetro, além de contribuir nas operações, especialmente na multiplicação, para a compreensão de suas propriedades. Na estatística, a malha quadriculada ajuda no esboço de gráficos, facilitando sua leitura.

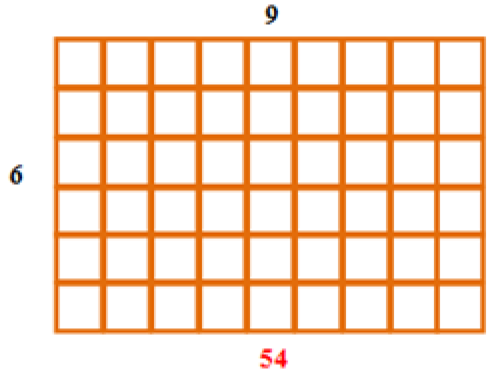
Para realizar a atividade que estamos propondo, cada aluno deverá receber do professor folhas do papel quadriculado para que possam construir as tabuadas. Caso a turma já tenha uma percepção mais avançada com relação aos fatos, já que essa é a terceira proposta de trabalho dessa unidade, o professor poderá optar pela construção apenas dos fatos que são considerados difíceis pelos alunos, como os do 6, 7, 8 e 9. Contudo, se o professor julgar necessário, poderá fazer a construção de todas as tabuadas, cabendo a ele a decisão sobre quais fatos a turma deverá fazer ou não.

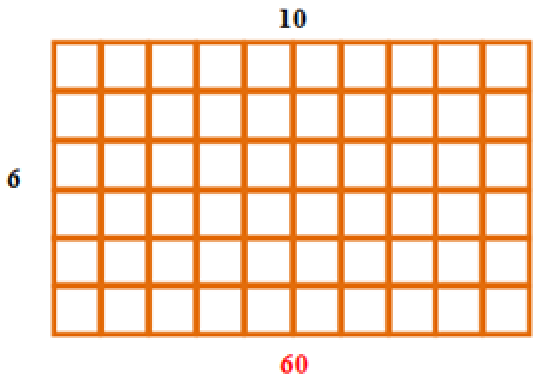
Após os alunos construírem os fatos, o professor poderá explorar as propriedades comutativa e distributiva, já que, pelo uso da malha, a visualização dessas é mais fácil para os alunos. O exemplo, a seguir, apresenta a construção da tabuada do 6 na malha quadriculada:

Construção da tabuada de 6 através da malha quadriculada

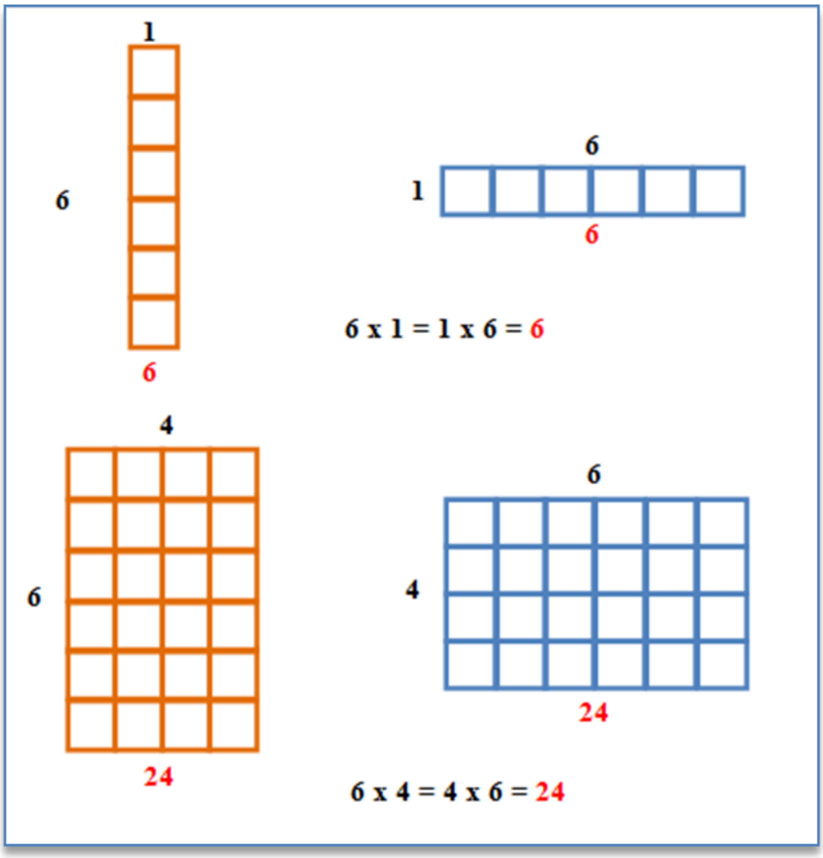








Assim, através dessa ferramenta pedagógica é possível explorar a propriedade comutativa da multiplicação.



Proposta 4: Construindo a tabela de dupla entrada

PROPOSTA 4 E OBJETIVO DO TRABALHO COM OS FATOS DA MULTIPLICAÇÃO	
Objetivo	Explorar regularidades nas multiplicações com fatores até 10, desenvolver o cálculo mental, favorecer a memorização dos fatos básicos da multiplicação.
Conceitos ou propriedades abordados	Tabuada de multiplicação do 2 ao 10.

Nessa quarta proposta, após os alunos já terem trabalhado com situações de construção da tabuada envolvendo materiais concretos, sugerimos a construção da tábua de Pitágoras, que é uma tabela de dupla entrada na qual são registrados os resultados da multiplicação dos números que ocupam a linha e a coluna principais.

Essa atividade visa a possibilidade de exploração das regularidades que aparecem na construção da tabela. A percepção dessas regularidades e das relações é o que ajuda os alunos a memorizar os fatos sem a necessidade de decorar. Sugerimos, portanto, que o professor disponibilize uma tábua de Pitágoras sem preenchimento para cada aluno e leve para a sala de aula uma cópia grande que pode ser um cartaz para colocar no quadro. A seguir, um modelo da tabela de dupla entrada:

Modelo da Tábua de Pitágoras

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

A ideia é que o professor desenvolva coletivamente com os alunos procedimentos para completar a tábua. Dessa forma, ele poderá chamar a atenção para as regularidades que irão surgindo no decorrer do preenchimento, ao invés de pedir apenas que preencham a tabela.

➔ Preenchendo a primeira linha e a primeira coluna

O professor poderá, inicialmente, pedir aos alunos que pensem nos resultados que ocuparão a primeira linha e a primeira coluna da tabela. O objetivo é fazer com que a turma pense o que acontece quando, na multiplicação, um dos fatores envolvidos é “1”, ou seja, a ideia é fazer com que eles percebam que o resultado será sempre o outro fator envolvido no produto, como indicado a seguir:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	**2**									
3	**3**									
4	**4**									
5	**5**									
6	**6**									
7	**7**									
8	**8**									
9	**9**									
10	**10**									

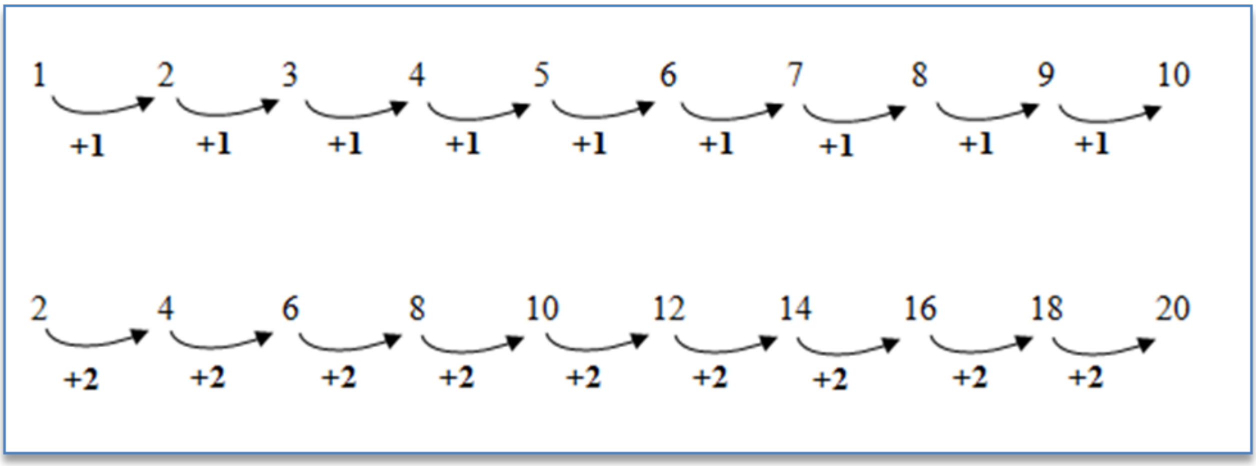
➔ O preenchimento da segunda linha e da segunda coluna, trabalhando a ideia de dobro

No preenchimento da segunda linha e da segunda coluna é importante que os alunos percebam a ideia de dobro, já trabalhada com eles nas atividades anteriores da unidade. Durante o preenchimento dessa linha e coluna, os alunos devem perceber que os resultados onde um dos fatores é “2” podem ser obtidos dobrando-se o valor do outro fator, por exemplo, em 2 x 5 o dobro de 5 é 10, logo o resultado desse produto é 10.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
3	3	**6**								
4	4	**8**								
5	5	**10**								
6	6	**12**								
7	7	**14**								
8	8	**16**								
9	9	**18**								
10	10	**20**								

Após o preenchimento das duas primeiras linhas e colunas, é importante que o professor faça uma pausa e questione os alunos, instigando-os a pensar e a verbalizar sobre a compreensão do que ocorreu nesse primeiro momento de preenchimento da tábua de Pitágoras.

Ao analisar os resultados da primeira linha e coluna, perceberão que aumentam de 1 em 1, assim como os da segunda linha e coluna aumentam de 2 em 2.



Através dessa análise, os alunos poderão perceber a relação entre a multiplicação e a adição, entendendo, assim, que cada resultado é obtido através de adições sucessivas. É fundamental, portanto, explorar essa regularidade na tábua, pois ela contribui para a memorização dos fatos.

Outro aspecto a ser explorado pelo professor, antes de prosseguir com o preenchimento da tabela, é a comutatividade da multiplicação. Peça aos alunos para observarem resultados como: 1 x 3 e 3 x 1, 1 x 4 e 4 x 1, 1 x 7 e 7 x 1 e assim por diante. Após essa observação, questione-os sobre quais conclusões chegaram. Peça que verifiquem se o mesmo ocorre na segunda linha e segunda coluna.

➔ Preenchendo a quarta e oitava linha e a quarta e oitava coluna, explorando ainda a ideia de dobro

No preenchimento da quarta linha e quarta coluna voltamos a explorar a ideia de dobro. É importante que os alunos consigam perceber que os resultados das multiplicações da quarta linha e coluna correspondem ao dobro dos resultados da segunda linha e coluna, respectivamente.

Usando o mesmo raciocínio, poderemos, então, trabalhar a oitava linha e coluna, já que os resultados serão o dobro dos que aparecem na quarta linha e coluna, como demonstrado a seguir:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10
2	2	4	6	**8**	10	12	14	**16**	18	20
3	3	6		**12**				**24**		
4	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**	**28**	**32**	**36**	**40**
5	5	10		**20**				**40**		
6	6	12		**24**				**48**		
7	7	14		**28**				**56**		
8	**8**	**16**	**24**	**32**	**40**	**48**	**56**	**64**	**72**	**80**
9	9	18		**36**				**72**		
10	10	20		**40**				**80**		

Questione os alunos e instigue-os a verificar se nos resultados da quarta linha e coluna, assim como da oitava linha e coluna, encontraremos adições sucessivas como constatamos nas duas primeiras linhas e colunas.

$$4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+4} 16 \xrightarrow{+4} 20 \xrightarrow{+4} 24 \xrightarrow{+4} 28 \xrightarrow{+4} 32 \xrightarrow{+4} 36 \xrightarrow{+4} 40$$

$$8 \xrightarrow{+8} 16 \xrightarrow{+8} 24 \xrightarrow{+8} 32 \xrightarrow{+8} 40 \xrightarrow{+8} 48 \xrightarrow{+8} 56 \xrightarrow{+8} 64 \xrightarrow{+8} 72 \xrightarrow{+8} 80$$

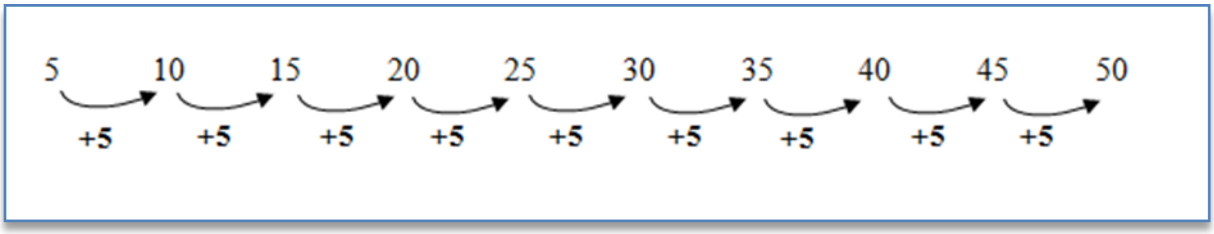
➔ Explorando as regularidades da quinta linha e quinta coluna

Após preenchermos quatro linhas e quatro colunas da tabela construindo algumas relações e ideias com os alunos, é possível desafiá-los solicitando que preencham a quinta linha e a quinta coluna.

Provavelmente os alunos perceberão que os resultados nessa linha e coluna sempre terminarão em zero ou cinco, acontecendo alternadamente. Ao final do preenchimento, solicite a turma que verbalize sobre os resultados encontrados, instigue-os a sintetizar uma ideia sobre a multiplicação de um número por 5.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	**10**	12	14	16	18	20
3	3	6		12	**15**			24		
4	4	8	12	16	**20**	24	28	32	36	40
5	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
6	6	12		24	**30**			48		
7	7	14		28	**35**			56		
8	8	16	24	32	**40**	48	56	64	72	80
9	9	18		36	**45**			72		
10	10	20		40	**50**			80		

O professor deverá chamar a atenção da turma para as adições sucessivas ao trabalhar com essa linha e coluna também.



É importante retomar o trabalho com a propriedade comutativa, questionando sobre o que acontece quando temos os produtos 4 x 5 e 5 x 4 ou 8 x 5 e 5 x 8, pesa para a turma pensar se isso sempre acontecerá e, em caso afirmativo, o que justifica esse fato. Assim, quanto mais os alunos compreenderem as propriedades da multiplicação, mais facilmente irão memorizar as tabuadas.

➔ Preenchendo a décima linha e a décima coluna, a ideia de dobro volta a aparecer na tábua de Pitágoras

Para o preenchimento da décima linha e décima coluna, é aconselhável que o professor peça aos alunos para refletirem sobre o que acham que acontecerá. Dê um tempo para a turma pensar e formular suas hipóteses.

No momento da socialização, caso nenhum aluno comente, instigue-os a pensar se há relação dessa linha e coluna com a quinta linha e quinta coluna.

Questione o grupo sobre as adições sucessivas, sobre a comutatividade e faça a turma verbalizar o conhecimento que estão construindo.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	**20**
3	3	6		12	15			24		**30**
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	**40**
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	**50**
6	6	12		24	30			48		**60**
7	7	14		28	35			56		**70**
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	**80**
9	9	18		36	45			72		**90**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**

➔ A terceira linha e a terceira coluna

Para o preenchimento da terceira linha e terceira coluna é possível solicitar aos alunos para observarem, na tabela, os valores que já se encontram preenchidos nelas e, dessa forma, pedir que expliquem a que conclusões chegaram sobre os valores que estão faltando.

É importante ressaltar a ideia de triplo no preenchimento dessa linha e coluna. Essa percepção poderá ajudar os alunos na memorização desse fato.

$\underbrace{3+3+3}_{\text{3 vezes}} = 3 \text{ x } 3 = 9$ $\underbrace{5+5+5}_{\text{3 vezes}} = 3 \text{ x } 5 = 15$ $\underbrace{8+8+8}_{\text{3 vezes}} = 3 \text{ x } 8 = 24$

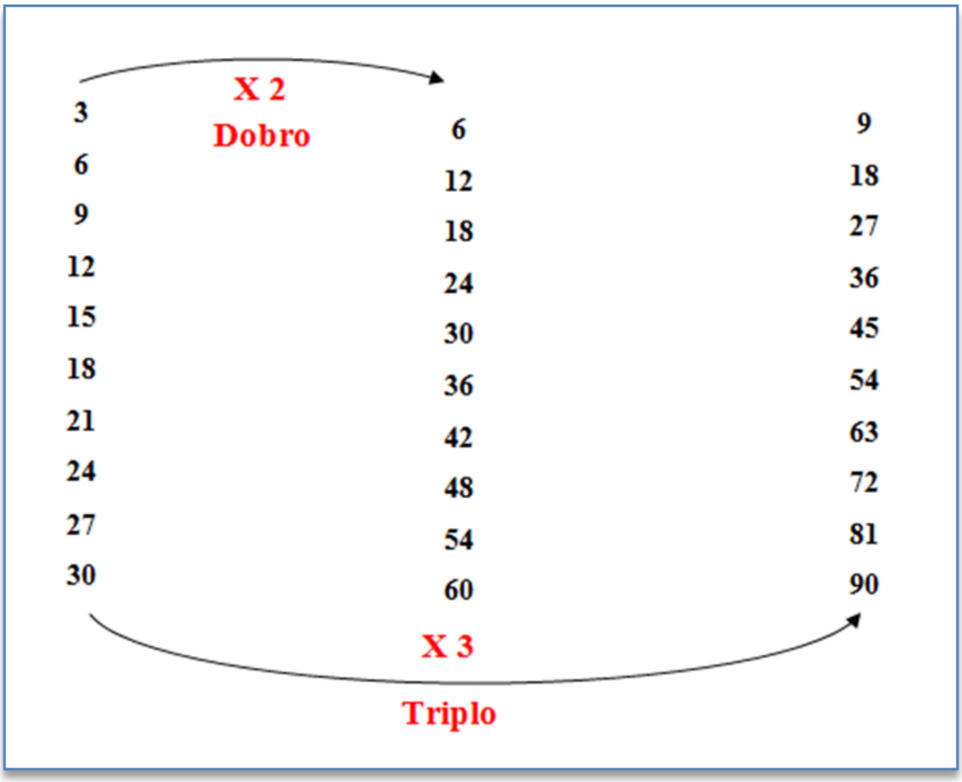
x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	**6**	8	10	12	14	16	18	20
3	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**	**24**	**27**	**30**
4	4	8	**12**	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	**15**	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	**18**	24	30			48		60
7	7	14	**21**	28	35			56		70
8	8	16	**24**	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	**27**	36	45			72		90
10	10	20	**30**	40	50	60	70	80	90	100

➔ **Preenchendo a sexta linha e a sexta coluna, trabalhando a ideia de dobro. Preenchendo a nona linha e nona coluna, trabalhando a ideia de triplo**

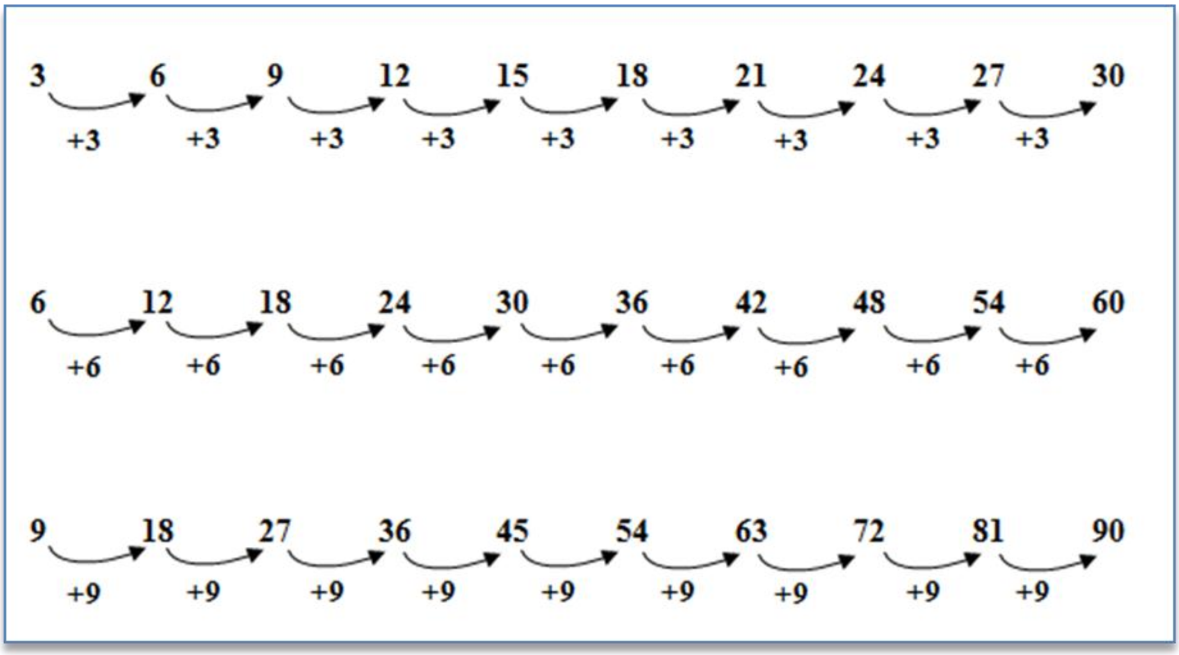
No preenchimento da sexta linha e coluna voltamos a explorar a ideia de dobro, o professor poderá discutir com a turma que multiplicar um número por 6 é o mesmo que dobrar o triplo desse número. Logo bastará dobrar os resultados da terceira linha e coluna que obteremos os resultados que procuramos.

Ainda explorando os resultados da terceira linha e coluna poderemos preencher a nona linha e a nona coluna, trabalhando a ideia de triplo com a turma.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	**6**	7	8	**9**	10
2	2	4	6	8	10	**12**	14	16	**18**	20
3	3	6	9	12	15	**18**	21	24	**27**	30
4	4	8	12	16	20	**24**	28	32	**36**	40
5	5	10	15	20	25	**30**	35	40	**45**	50
6	**6**	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**	**42**	**48**	**54**	**60**
7	7	14	21	28	35	**42**		56	**63**	70
8	8	16	24	32	40	**48**	56	64	**72**	80
9	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**90**
10	10	20	30	40	50	**60**	70	80	**90**	100



Recomenda-se que o professor trabalhe as adições sucessivas nos resultados dos fatos de 3, 6 e 9. Além disso, é interessante retomar a propriedade comutativa. Vale lembrar que, como já dito, ao reforçar ideias e conceitos já trabalhados, o professor estará contribuindo para reforçar a compreensão dos alunos mediante os fatos estudados e sua memorização.



➔ Completando a tábua de Pitágoras

A essa altura do preenchimento da tábua de Pitágoras, teremos um único valor restando para que a tabela fique totalmente preenchida.

O resultado que faltará será o de 7 x 7 que poderá ser obtido pelo grupo pela ideia das adições sucessivas, ou seja, ao somar 7 ao resultado 42 o aluno irá obter 49, que é o resultado procurado.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Após o preenchimento total da tábua de Pitágoras é hora, então, de explorarmos outras regularidades presentes nessa tabela. Porém, vale lembrar que durante o seu preenchimento, nada falamos sobre o fato de 7, ou seja, o preenchimento da sétima linha e coluna ter ocorrido gradativamente através dos outros resultados das linhas e colunas, contudo, poderemos chamar atenção dos alunos nesse momento para a propriedade distributiva, quer seja:

$$(3 + 4) \times 1 = (3 \times 1) + (4 \times 1)$$
$$= 3 + 4$$
$$7 \times 1 = 7$$

+ 7

$$(3 + 4) \times 2 = (3 \times 2) + (4 \times 2)$$
$$= 6 + 8$$
$$7 \times 2 = 14$$

$(3 + 4) \times 3 = (3 \times 3) + (4 \times 3)$
$= 9 + 12$
$7 \times 3 = 21$

$+ 7$

$(3 + 4) \times 4 = (3 \times 4) + (4 \times 4)$
$= 12 + 16$
$7 \times 4 = 28$

$+ 7$

$(3 + 4) \times 5 = (3 \times 5) + (4 \times 5)$
$= 15 + 20$
$7 \times 5 = 35$

$+ 7$

$(3 + 4) \times 6 = (3 \times 6) + (4 \times 6)$
$= 18 + 24$
$7 \times 6 = 42$

$+ 7$

$(3 + 4) \times 7 = (3 \times 7) + (4 \times 7)$
$= 21 + 28$
$7 \times 7 = 49$

$+ 7$

$(3 + 4) \times 8 = (3 \times 8) + (4 \times 8)$
$= 24 + 32$
$7 \times 8 = 56$

$+ 7$

$(3 + 4) \times 9 = (3 \times 9) + (4 \times 9)$
$= 27 + 36$
$7 \times 9 = 63$

O professor poderá instigar a turma a pensar se existem outras combinações de fatos que resultam na tabuada de 7. Além disso, poderá questioná-los se existem outras tabuadas onde o mesmo ocorre.

Tabuada de 3	Tabuada de 4	Tabuada de 5	Tabuada de 6
1 + 2	1 + 3	1 + 4	1 + 5
2 + 1	2 + 2	2 + 3	2 + 4
	3 + 1	3 + 2	3 + 3
		4 + 1	4 + 2
			5 + 1

Tabuada de 7	Tabuada de 8	Tabuada de 9	Tabuada de 10
1 + 6	1 + 7	1 + 8	1 + 9
2 + 5	2 + 6	2 + 7	2 + 8
3 + 4	3 + 5	3 + 6	3 + 7
4 + 3	4 + 4	4 + 5	4 + 6
5 + 2	5 + 3	5 + 4	5 + 5
6 + 1	6 + 2	6 + 3	6 + 4
	7 + 1	7 + 2	7 + 3
		8 + 1	8 + 2
			9 + 1

No momento em que estiver trabalhando a propriedade distributiva, é importante que o professor deixe a turma pensar, fazer conjecturas, verificar e validar as conclusões a que chegaram.

Junto com a distributiva, o professor poderá reforçar a comutatividade da multiplicação; além disso, poderá trabalhar outras regularidades, pedindo aos alunos, por exemplo, para observarem, na tábua de Pitágoras, quais multiplicações resultam em 12.

Após observarem a tabela, os alunos perceberão que os produtos 6 x 2, 4 x 3, 3 x 4 e 2 x 6 apresentam como resultado 12. Estimule, portanto, os alunos a partirem de um produto para chegarem a outro.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	**12**	14	16	18	20
3	3	6	9	**12**	15	18	21	24	27	30
4	4	8	**12**	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	**12**	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

6 x 2 = (3 x 2) x 2 = 3 x (2 x 2) = **3 x 4**

6 x 2 = (2 x 3) x 2 = 2 x (3 x 2) = **2 x 6**

2 x 6 = 2 x (3 x 2) = (2 x 3) x 2 = **6 x 2**

2 x 6 = 2 x (2 x 3) = (2 x 2) x 3 = **4 x 3**

Solicite, também, aos alunos que façam o mesmo com outros resultados, como, por exemplo, 16, 20, 15, 24 etc. O professor poderá, ainda, pedir à turma que marque na tabela os produtos cujo resultado será 24 e trabalhar junto com os produtos que o resultado será 12.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	**12**	14	16	18	20
3	3	6	9	**12**	15	18	21	**24**	27	30
4	4	8	**12**	16	20	**24**	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	**12**	18	**24**	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	**24**	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

8 x 3 = (2 x 4) x 3 = 2 x 4 x 3 = 2 x (4 x 3) = 2 x **12** = **24**

6 x 4 = (2 x 3) x 4 = 2 x 3 x 4 = 2 x (3 x 4) = 2 x **12** = **24**

4 x 6 = (2 x 2) x 6 = 2 x 2 x 6 = 2 x (2 x 6) = 2 x **12** = **24**

3 x 8 = 3 x (2 x 4) = 3 x 2 x (2 x 2) = 3 x 2 x 2 x 2 = (6 x 2) x 2 = 12 x 2 = 2 x **12** = **24**

24 é o dobro de 12

O professor poderá sugerir que os alunos verifiquem se o mesmo ocorre com outros valores, por exemplo, 21 e 42 ou 12 e 36. Poderá, também, solicitar aos alunos que pintem da mesma cor os valores nas linhas e colunas que são iguais, como segue abaixo.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

A tábua de Pitágoras deverá sempre estar junto com os alunos em sala de aula, pois todas as vezes que sentirem necessidade deverão consultá-la, até o momento que não será mais preciso, pois serão grandes as possibilidades de os alunos as memorizarem naturalmente, já que sua construção ocorreu cheia de sentido e significado para eles.

Existem inúmeras possibilidades para trabalhar as regularidades presentes na tábua de Pitágoras e caberá ao professor esgotá-las ao máximo, pois isso contribuirá para a construção de recursos cognitivos que auxiliarão na memorização dos fatos pelos alunos. Através dessas observações, eles terão a oportunidade de estabelecer relações e, assim, perceberem as regularidades via processos investigativos.

Proposta 5: Consolidando os fatos pelo uso de jogos

PROPOSTA 5 E OBJETIVO DO TRABALHO COM OS FATOS DA MULTIPLICAÇÃO	
Objetivo	Consolidar os fatos numéricos da multiplicação através de jogos.
Conceitos ou propriedades abordados	As tabuadas da multiplicação de 2 ao 10.

Outro recurso que também contribui para a memorização dos fatos numéricos da multiplicação são os jogos. Na perspectiva de Bigode e Frant (2011), eles são uma forma interessante de propor problemas, pois favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução.

Através do lúdico, portanto, os alunos terão possibilidade para "memorizar" os fatos multiplicativos, além de entender a relação da multiplicação e da divisão como operações inversas. Pitombeira (2010) faz uma reflexão sobre o uso dos jogos, afirmando que eles têm um papel importante na integração da criança ao contexto escolar, podendo auxiliar o aluno, com a ajuda do professor, a construir o conhecimento matemático em grupo, entendendo e discutindo as suas regras, além de desenvolver comunicações matemáticas e validá-las.

Existem muitos jogos que abordam os fatos numéricos da multiplicação, entre os quais serão propostos: o bingo da tabuada, o dominó da tabuada e o adivinhe a multiplicação. A seguir, falaremos sobre cada um deles.

Bingo da Tabuada

A regra para jogar o bingo da tabuada é a mesma do bingo tradicional. Assim, caso não tenha disponível na escola, o professor poderá facilmente produzi-lo.

O bingo da tabuada poderá ser jogado de duas maneiras: ou o professor sorteia as operações e as cartelas terão os resultados que irão sendo completados pelos alunos ou, o contrário, o professor sorteia o número e as cartelas terão as operações.

O professor deverá sortear uma a uma cada pedrinha e os alunos devem pensar no produto mentalmente para, então, marcar ou não em sua cartela. Para efetuarem a marcação na cartela, o professor poderá disponibilizar para os alunos tampinhas de garrafa, canudinhos cortados ou outro material similar.

A seguir, temos exemplos das cartelas das duas maneiras citadas anteriormente:

3		**21**	**32**		**54**		**80**
5			**35**			**63**	
	12	**25**		**42**		**64**	
9					**56**		**90**
	14	**28**	**36**	**45**		**72**	

2		**20**	**30**		**54**		**81**
7			**32**			**60**	
	16	**24**		**40**		**64**	
8					**56**		**100**
	18	**27**	**36**	**48**		**72**	

4 x 1		**3 x 7**	**4 x 8**		**6 x 10**		**10 x 9**
2 x 3			**9 x 4**			**10 x 7**	
	5 x 3	**5 x 5**		**7 x 6**		**8 x 9**	
1 x 7					**8 x 8**		**10 x 10**
	4 x 4	**9 x 3**	**8 x 5**	**9 x 5**		**9 x 9**	

1 x 2	**5 x 2**	**4 x 6**	**9 x 4**		**6 x 9**		**9 x 9**
3 x 1			**6 x 6**			**9 x 7**	
	2 x 6	**3 x 8**		**5 x 9**		**10 x 7**	
2 x 2					**7 x 8**		
	9 x 2	**6 x 5**	**8 x 5**	**10 x 5**		**8 x 10**	

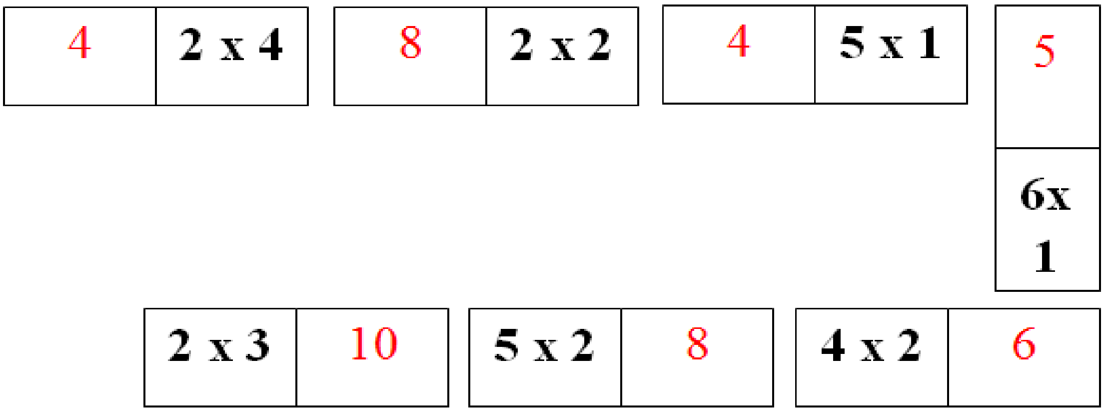
Nas duas primeiras cartelas, o professor sorteia a operação e o aluno verifica se possui o resultado em sua cartela. Por exemplo, o professor sorteia 3 x 5, o aluno, então, verifica se possui 15 e faz a marcação. Nas duas últimas cartelas, o professor sorteia o número e o aluno verifica se possui uma operação cujo resultado seja aquele falado. Por exemplo, o professor sorteia 20, os alunos que tiverem 2 x 10, 10 x 2, 4 x 5 ou 5 x 4 marcam em suas cartelas. Ganha o jogo o aluno que preencher sua cartela primeiro.

Dominó da Tabuada

O dominó da tabuada é formado por peças que apresentam produtos e resultados dos fatos numéricos da multiplicação, e, caso o professor não disponha desse jogo que é encontrado em loja de brinquedos educativos, poderá ele mesmo confeccionar as peças.

A regra para jogar o dominó é semelhante ao dominó tradicional: os alunos devem encostar a peça que possui a multiplicação na outra peça que apresenta o resultado. Ganha o jogo quem terminar com suas peças primeiro ou, no caso do jogar ficar trancado, quem tiver o menor número de peças na mão.

A seguir, exemplo de peças para o dominó da tabuada.



Adivinhe a Multiplicação

O jogo adivinhe a multiplicação encontra-se no caderno **Mathema de 1° ao 5°** ano, de Smole, Diniz e Cândido (2007). De acordo com as autoras, no jogo, os alunos aprendem a relacionar os fatos da multiplicação ao produto entre eles, desenvolvem estratégias de cálculo mental e podem refletir melhor a respeito do seu desempenho no conhecimento das tabuadas de multiplicação. A seguir, falaremos sobre as orientações e as regras do jogo[5].

<u>Organização da sala:</u>

Os alunos devem formar trios.

<u>Regras do Jogo:</u>

- Deve-se retirar do baralho ***as damas, reis e valetes***.
- O ***As*** tem valor 1 no jogo.
- Um dos participantes do trio deverá ser o juiz.

[5] As regras e as orientações do jogo adivinhe a multiplicação foram retiradas do caderno Mathema de 1° ao 5° ano de Kátia Stocco Smole (2007).

- Os oponentes devem sentar-se frente a frente.
- O juiz embaralha as cartas e divide entre os dois participantes, que não devem olhar as cartas que possuem.
- Cada um dos participantes retira uma carta do baralho e, sem olhar, mostra ao seu oponente dizendo "adivinhe".
- O juiz olha as duas cartas e fala para os participantes o resultado do produto entre as cartas retiradas por ambos.

  Por exemplo:

  Se um dos participantes retirou o 3 e o outro retirou o 9, o juiz deve dizer 27.
- **Ganha a rodada** o participante que adivinhar qual carta retirou. Esse deve ficar com as duas cartas que foram retiradas.
- **Ganha o jogo** quem tiver mais cartas no final.

Jogo da Conquista

O objetivo do jogo[6] é desenvolver o cálculo mental, favorecendo a memorização dos fatos básicos da multiplicação, além de evidenciar a relação entre a multiplicação e a organização retangular, a percepção geométrica e o raciocínio estratégico.

Organização da sala:

Os alunos devem formar duplas.

Regras do Jogo:

- Cada jogador da dupla deve receber uma cor de lápis diferente da cor do seu colega de dupla.
- Cada dupla receberá uma folha com o tabuleiro do jogo (como o modelo a seguir) e tira par ou ímpar para decidir quem inicia a jogada.

[6] O jogo da conquista foi retirado dos Cadernos de Educação Matemática – Ensino Fundamental, volume 3. E por falar em tabuada..., elaborado pela Prefeitura Municipal de Belo Horizonte, em 2008.

Tabuleiro para o jogo da conquista

- O primeiro jogador decidido no par ou ímpar, lança dois dados. Em seguida, deve colorir um retângulo que tenha área igual ao produto dos dois números tirados no dado.

Por exemplo:

Se o aluno tirar 6 e 4 nos dados, terá o direito a um retângulo de área igual a 24, logo irá colorir 24 quadradinhos. Dessa forma, ele pode definir quais serão as melhores medidas para os lados do seu retângulo: 2 por 12, 3 por 8, 4 por 6.

- O outro jogador deverá repetir o mesmo procedimento do primeiro.
- Eles devem ir alternando as jogadas até preencherem todo o tabuleiro.

OBS: À medida que o jogo for avançando, os espaços no tabuleiro irão reduzindo, dessa forma, se um jogador retirar 3 e 5 e não for possível colorir um retângulo de área 15, deverá diminuir um dos dois números obtidos e manter o outro. Portanto, deverá contentar-se com um retângulo ou quadrado de área menor. Assim:

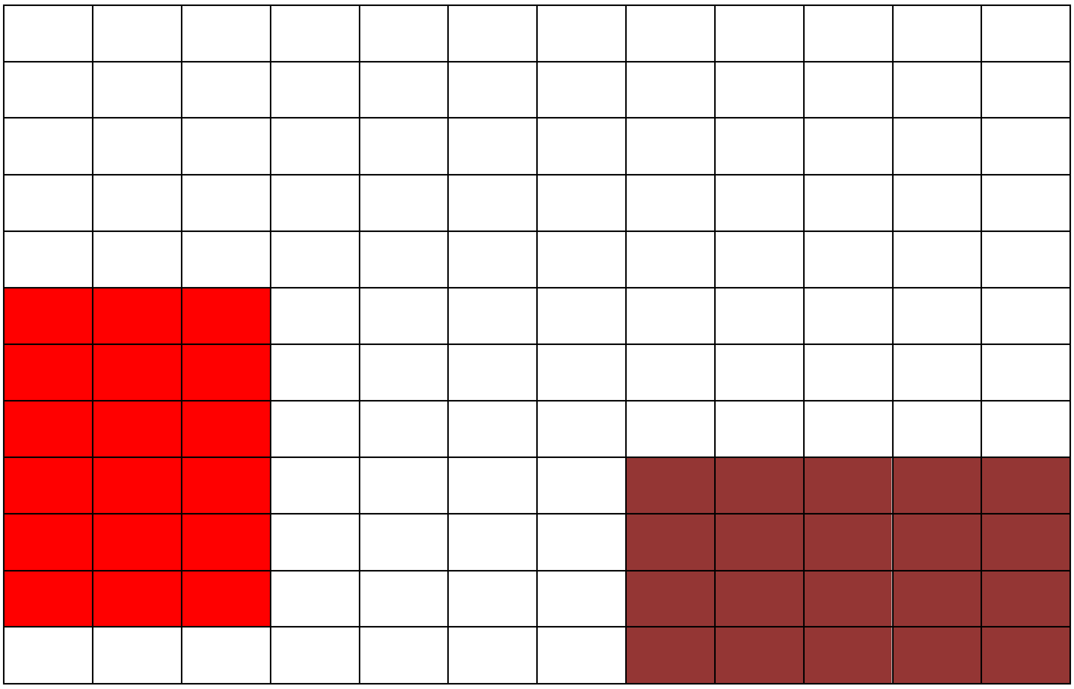
Diminuindo o 5 → 4 x 3 ou 3 x 3 ou 2 x 3 ou 1 x 3;

Diminuindo o 3 →2 x 5 ou 1 x 5.

- Ganha o jogo quem conquistar a maior área do tabuleiro, ou seja, quem tiver o maior número de quadradinhos.

1° jogador → dados 3 e 6 (por exemplo)

2° jogador → dados 4 e 5 (por exemplo)



Concluindo a unidade III

A terceira unidade do caderno visava aparar as arestas quanto aos fatos numéricos da multiplicação. Segundo Bigode e Frant (2011), é importante incentivar os alunos a demonstrarem suas habilidades no cálculo mental para que eles sintam que a multiplicação não é mais um obstáculo para a resolução de problemas. Além disso, um bom trabalho de desenvolvimento do cálculo mental ajuda no estudo dos algoritmos convencionais da multiplicação e da divisão.

Na primeira proposta dessa unidade nosso objetivo era a construção dos fatos da multiplicação partindo de situações que envolvessem a contagem por unidades compostas utilizando materiais concretos. Dessa forma, pretendíamos que os alunos pudessem, inicialmente, apoiar-se na visualização das quantidades. Ainda na perspectiva de Bigode e Frant (2011), quando recorremos a imagens, estamos contribuindo para a criação de uma memória visual, levando a uma memorização mais sólida da tabuada.

Em seguida, propusemos a construção dos fatos novamente através da manipulação de materiais concretos com o objetivo de levar os alunos à compreensão do significado de multiplicar e, também, ressaltando as propriedades comutativa e distributiva.

Na terceira proposta, o objetivo era reforçar os fatos numéricos da multiplicação usando o papel quadriculado, um recurso pedagógico que contribui para a compreensão da multiplicação e de suas propriedades.

Após a compreensão dos fatos através de situações-problemas e pelo uso de materiais concretos, propusemos, ainda, na quarta atividade, a construção da tábua de Pitágoras visando à exploração das regularidades e das relações presentes nessa tabela, procurando contribuir, assim, para a memorização das tabuadas.

Na última proposta dessa unidade, o objetivo era consolidar a construção feita, e, para que isso ocorresse, foi proposto o uso de jogos que abordavam os fatos da multiplicação. Segundo Bigode e Frant (2011), os desafios que os jogos proporcionam contribuem para que os alunos se familiarizem com as regularidades numéricas e para que ocorra a memorização da tabuada.

Após finalizamos as três primeiras unidades que nos fornecem a base para a construção do algoritmo tradicional da divisão, almejamos fazê-lo de maneira que essa construção esteja repleta de sentido e significado para os alunos.

CONSTRUINDO O ALGORITMO DA DIVISÃO - UNIDADE IV

Nosso objetivo, ao apresentar as três primeiras unidades do caderno (sistema de numeração decimal, as ideias do campo multiplicativo e os fatos da multiplicação), foi construir uma base sólida para que haja a aprendizagem do algoritmo da divisão com sentido e significado. Segundo Saiz (2008), a atribuição de um significado a cada uma das etapas do cálculo, em termos da situação de referência, lhes permitirá resolver os problemas com o controle suficiente para determinar sua validade.

É preciso, porém, que os alunos compreendam as etapas envolvidas durante a resolução do algoritmo, por isso, propomos as unidades anteriores antes de sua construção.

Nessa unidade desejamos construir o algoritmo da divisão, inicialmente com o auxílio do material dourado e do QVP e, em seguida, fazendo a relação do algoritmo com essas ferramentas, mas voltando, sempre que necessário, aos conhecimentos construídos anteriormente para que cada etapa desse processo seja compreendida pelos alunos.

Proposta 1: Dividindo com o material dourado

PROPOSTA 1 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O ALGORITMO DA DIVISÃO	
Objetivo	Efetuar divisões com o uso do material dourado, a fim de construir o algoritmo da divisão.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

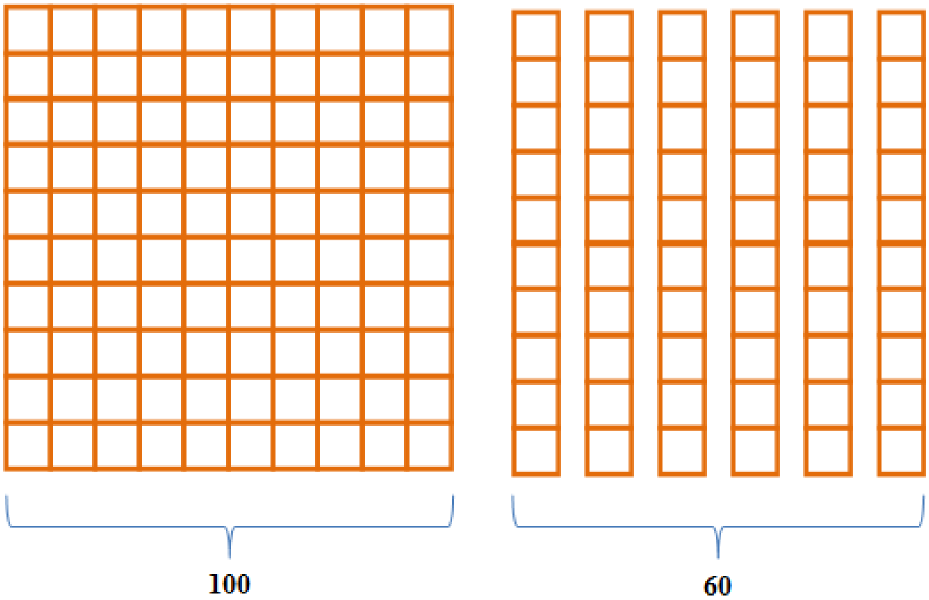
Nessa proposta, desejamos trabalhar com situações que abordem a divisão, disponibilizando o material dourado como ferramenta para a resolução. O objetivo é, a partir de o concreto, buscar a compreensão das etapas do algoritmo da divisão visando conferir significado a essas etapas através da associação de seus diversos passos com os procedimentos utilizados para efetuar a operação com o material dourado.

Situação-problema 1:

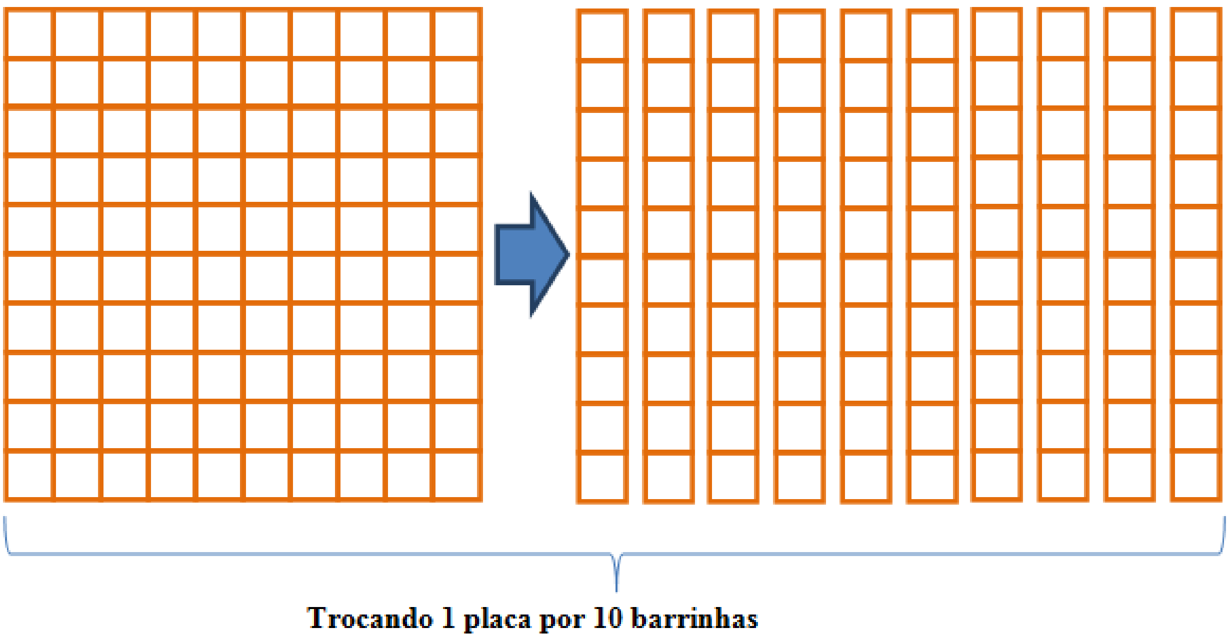
Dani é dona de uma loja de roupas. Ela recebeu uma encomenda de 160 camisas de malha masculina. Para enviar a encomenda, Dani deseja organizar as blusas em 4 caixas, sendo que em cada uma das caixas haverá a mesma quantidade de blusas. Quantas blusas Dani irá colocar em cada caixa?

Disponibilize, para cada dupla, um material dourado e peça aos alunos para representar a quantidade de camisas usando essa ferramenta.

Representando a quantidade de camisas

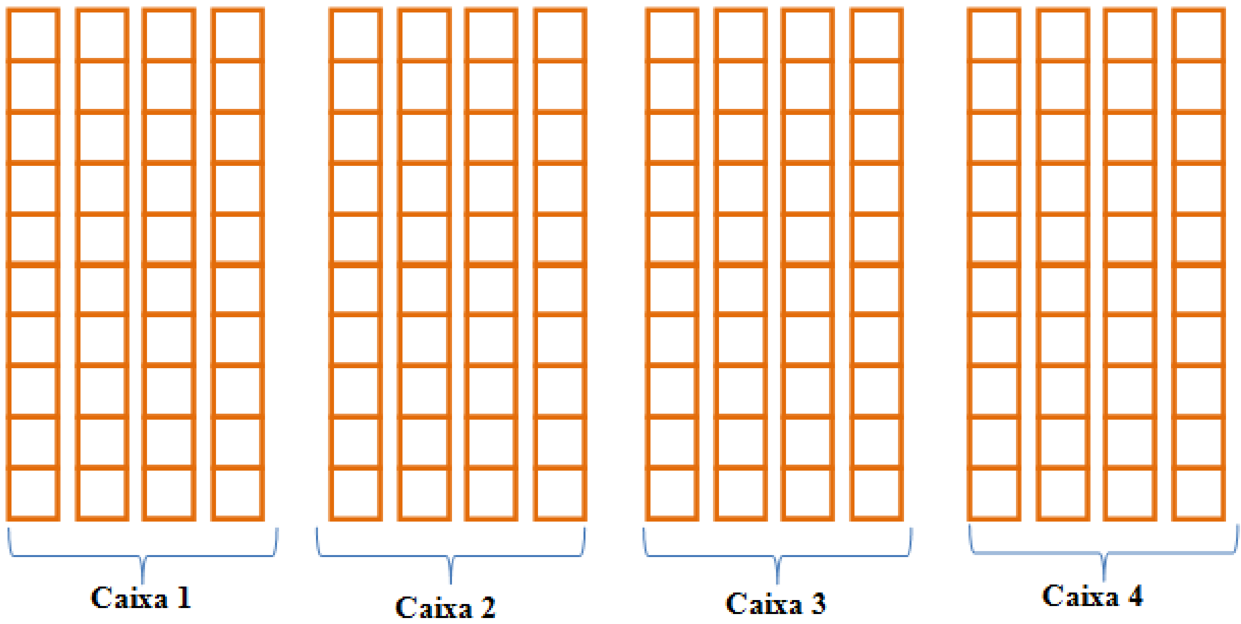


O professor deverá instigar a turma a refletir sobre como poderemos dividir as 160 camisas nas 4 caixas utilizando o material dourado, porém, ele deve deixar que os alunos busquem maneiras de executar a divisão. As duplas devem discutir em grupo as possibilidades que cada um encontrou.



A ideia, nessa primeira atividade, é que os alunos possam visualizar a composição do número e a divisão pela manipulação com o material dourado.

Representando a quantidade de camisas em cada caixa

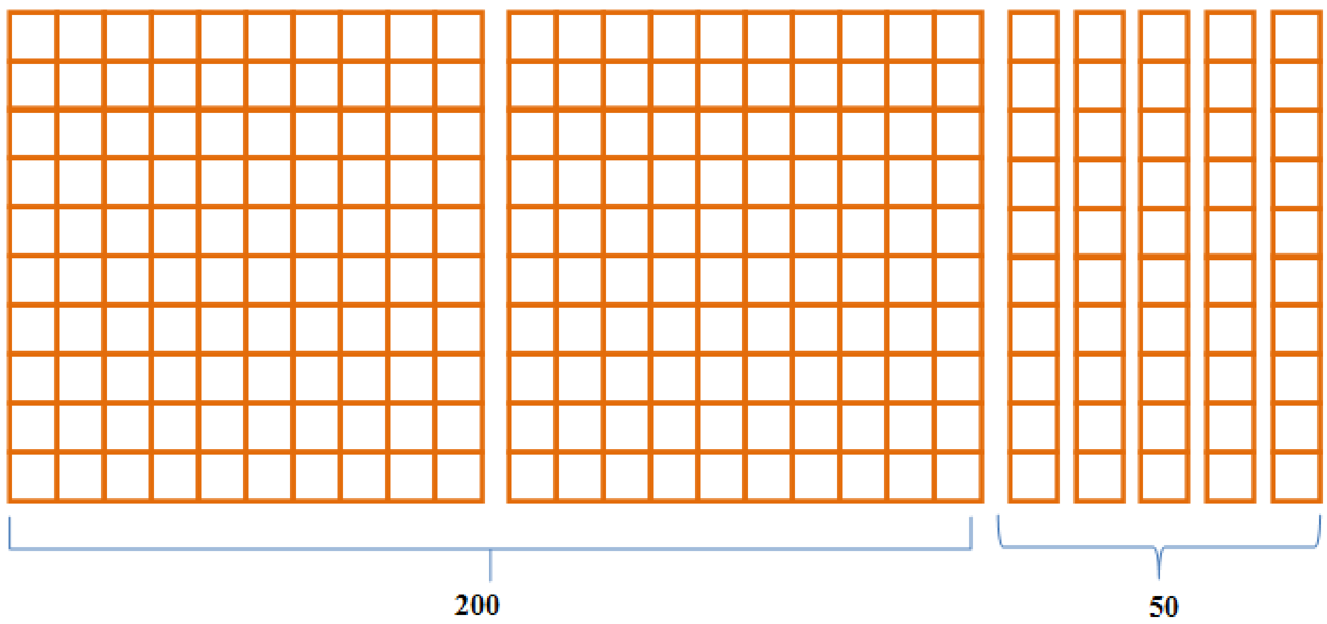


Após o debate e as conclusões da primeira situação, proponha um novo problema.

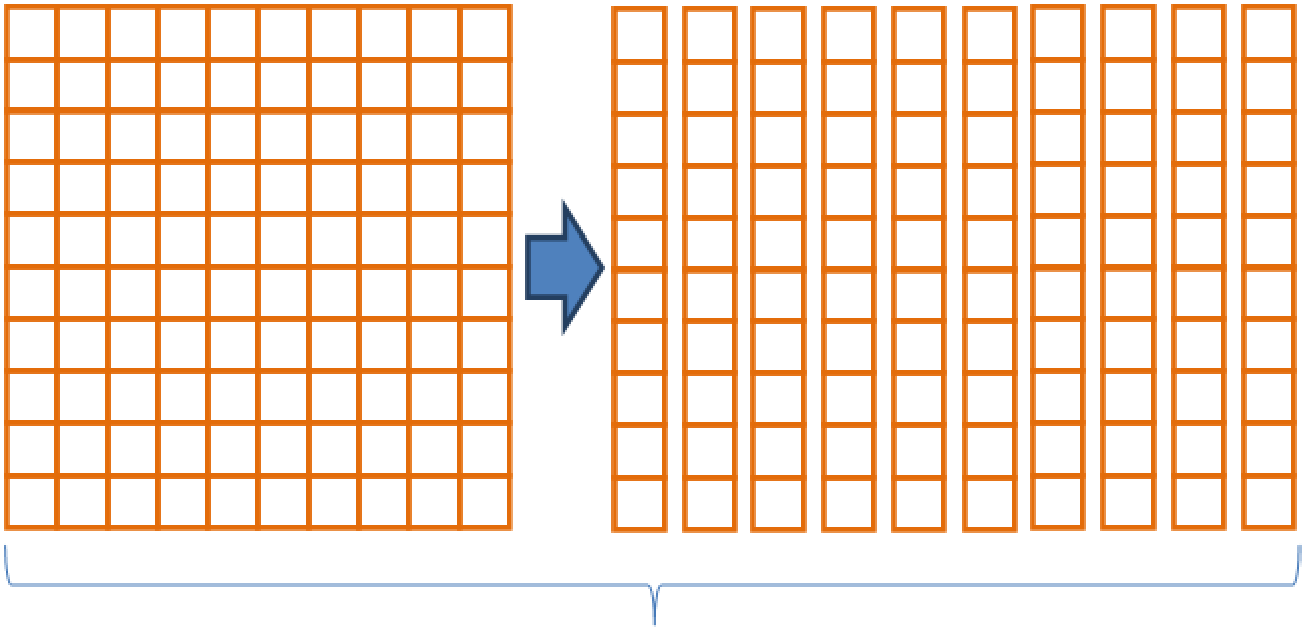
Situação-problema 2:

Carol vai organizar 250 brigadeiros em caixas. Sabendo que ela colocará 50 brigadeiros em cada caixa. Quantas caixas serão necessárias?

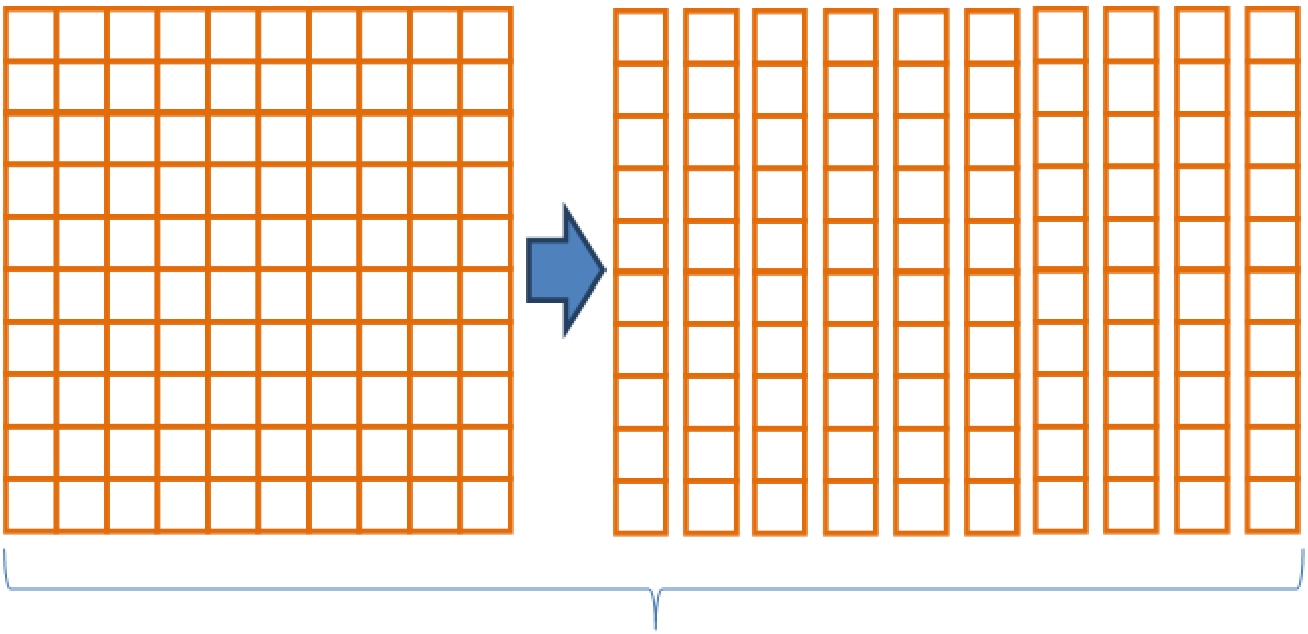
Representando a quantidade de brigadeiros



Deixe que as duplas resolvam livremente a situação e reserve um tempo da aula para o debate e a exposição das ideias.

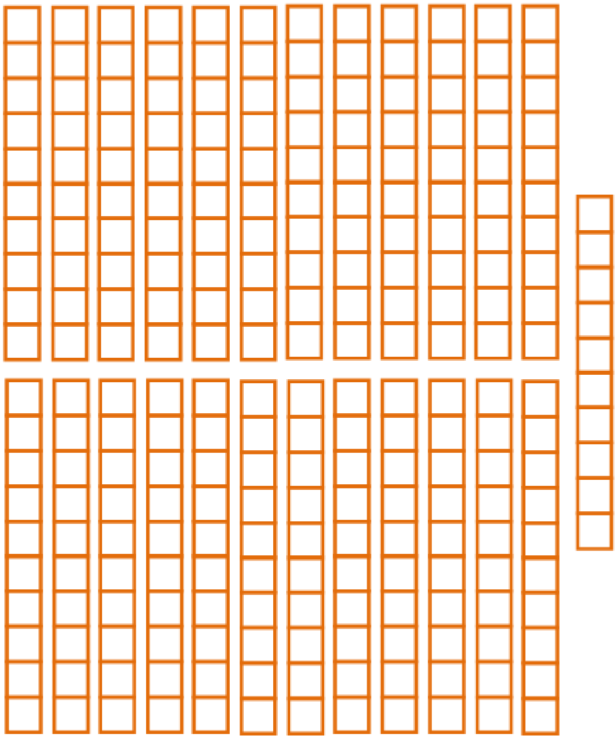


Trocando 1 placa por 10 barrinhas

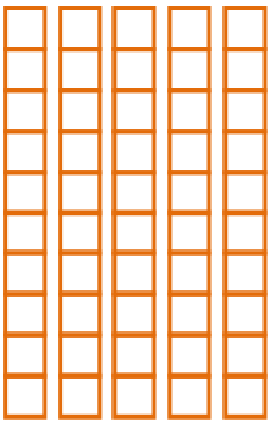


Trocando 1 placa por 10 barrinhas

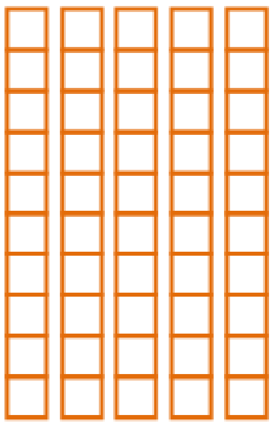
Representação da quantidade total de brigadeiros após as trocas



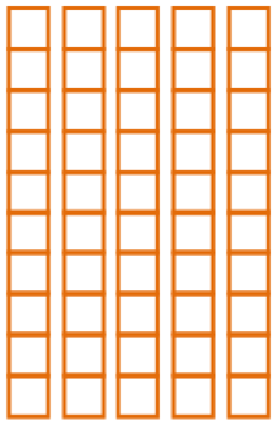
Representação da quantidade de brigadeiros em cada caixa



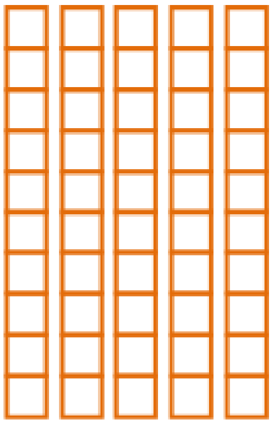
Caixa 1



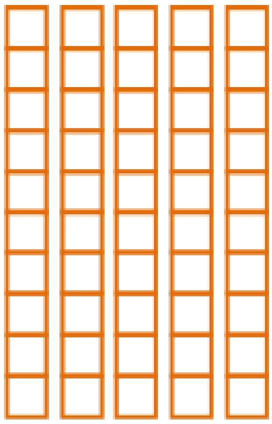
Caixa 2



Caixa 3



Caixa 4



Caixa 5

Nessa primeira atividade esperamos que, a partir da manipulação com o material dourado durante a resolução das situações e, pelos debates ocorridos ao final de cada uma delas, os alunos comecem a estabelecer uma relação entre o que foi realizado durante a atividade com o passo a passo do algoritmo.

Caso sinta necessidade durante a aplicação da atividade, o professor poderá apresentar novas situações-problemas antes de prosseguir com o trabalho na unidade.

É importante que, além de representar as resoluções das situações através do material dourado, os alunos registrem suas conclusões e como chegaram a elas, pois esses registros serão importantes nas próximas atividades.

Proposta 2: Dividindo com o QVP

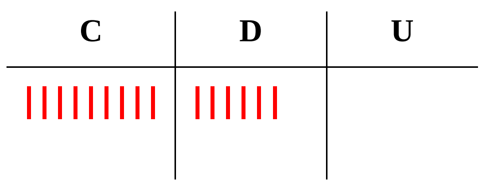
PROPOSTA 2 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O ALGORITMO DA DIVISÃO	
Objetivo	Com o uso do QVP efetuar divisões a fim de construir o algoritmo da divisão.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

O QVP é outro recurso que pode ser explorado favorecendo a compreensão do algoritmo tradicional da divisão. Para realizar a atividade, recomendamos que cada aluno tenha o seu QVP e palitos de picolé para representar as quantidades que surgirão nas situações-problemas.

Situação-problema 1:

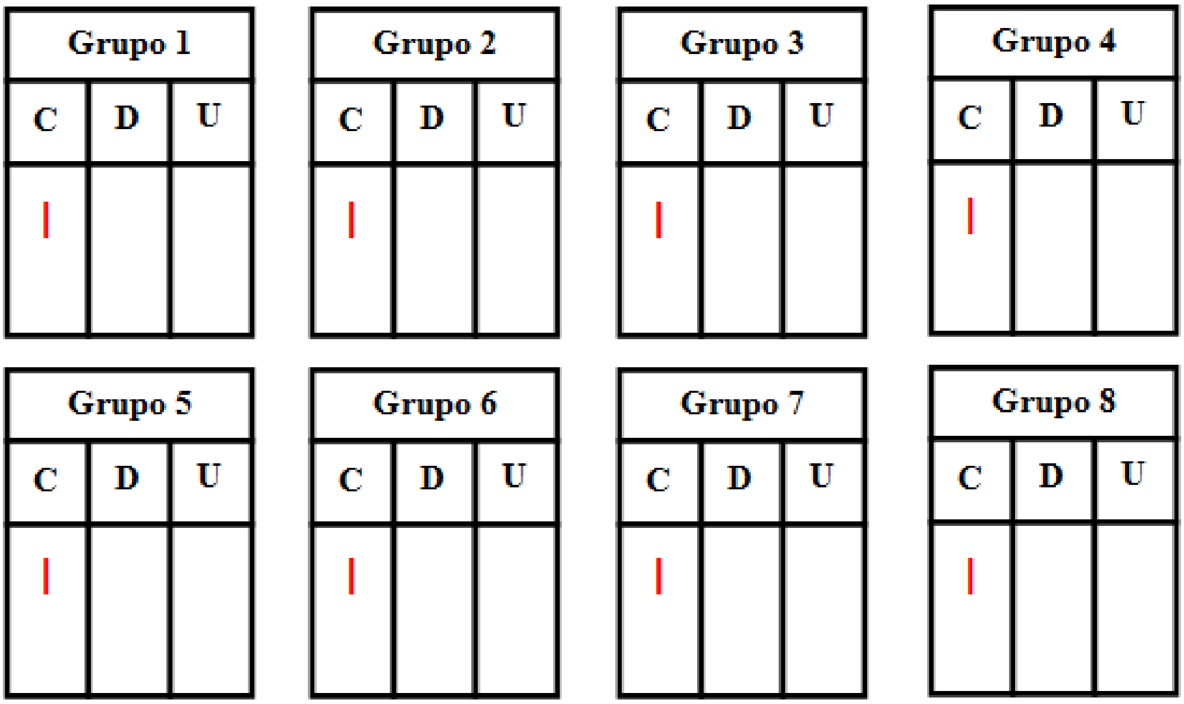
Em uma sexta-feira, a loja de conveniência vendeu 960 reais em lanches. Se cada lanche custa 8 reais, quantos lanches foram vendidos nesse dia?

Os alunos devem, primeiro, ler atentamente a situação e interpretar o que está sendo colocado no problema. Somente após o entendimento da turma sobre a situação que possuem em mãos é que os alunos devem representar o total vendido na loja de conveniência usando o QVP.

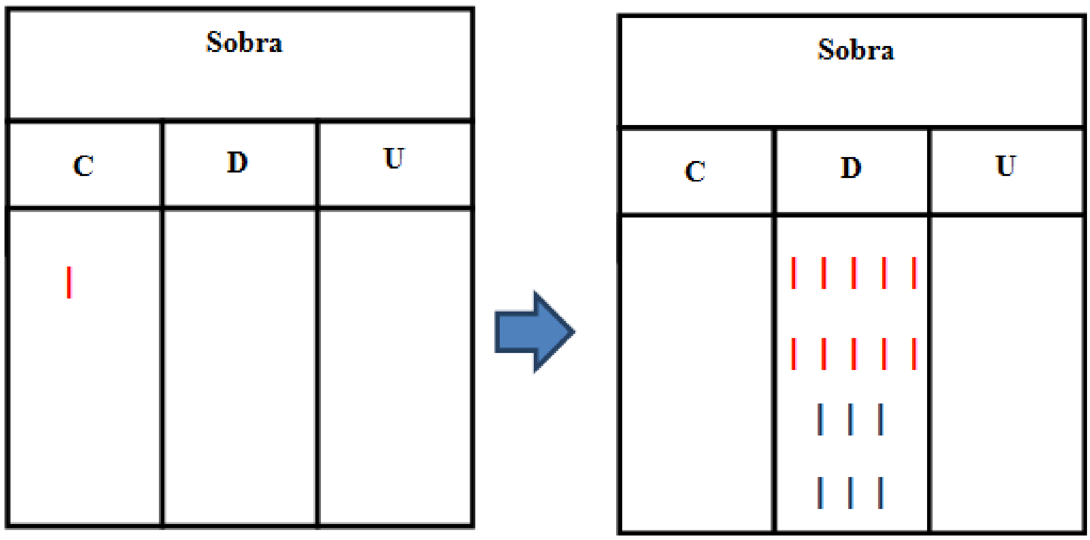


Após os alunos representarem a quantidade no QVP, instigue a turma a pensar em como podemos dividir essa quantidade em grupos de 8. Reserve tempo da aula para que a turma reflita sobre o melhor caminho a seguir, abra espaço para que os alunos falem e exponham suas ideias. Caso pensem em iniciar a divisão pela ordem das dezenas, instigue-os a refletir se é possível dividir 6 dezenas em 8 grupos.

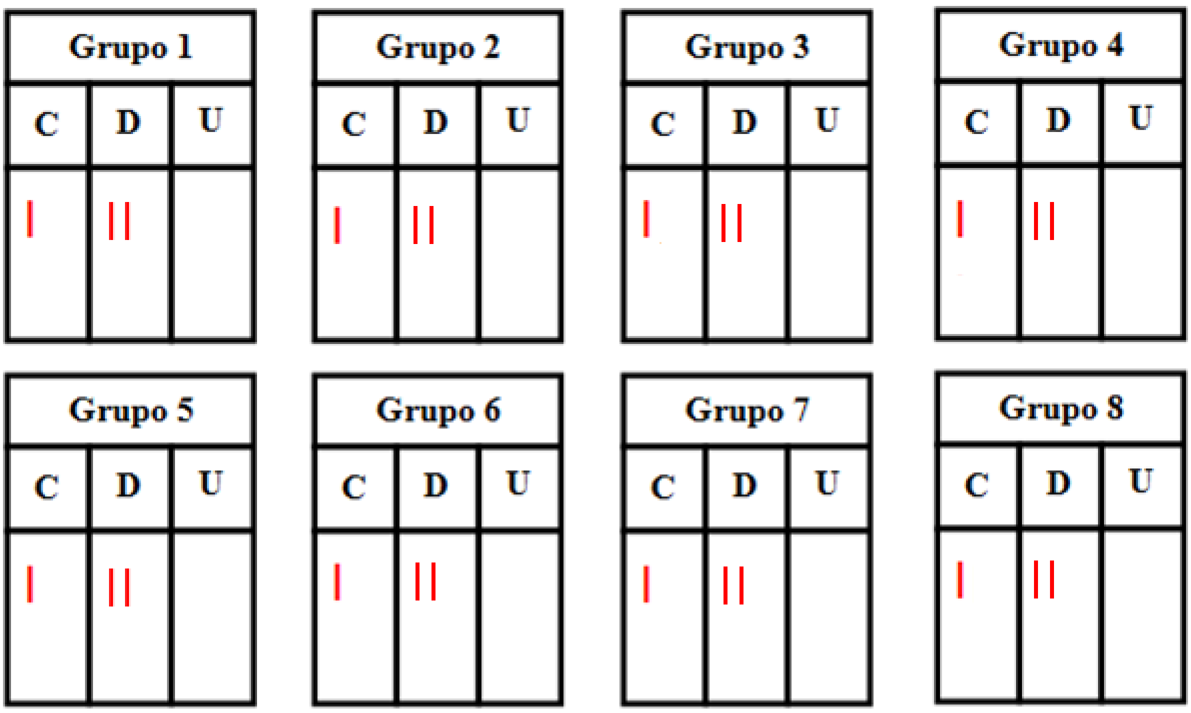
Depois de chegar com a turma a uma primeira conclusão sobre como iniciar a divisão, peça que representem a quantidade de centenas que haverá em cada grupo e se haverá sobras. Dê tempo para que a turma faça essa primeira divisão da ordem das centenas.



Solicite à turma para registrar o passo a passo que está sendo feito. Após a divisão das centenas, indague os alunos sobre o número de centenas em cada grupo e se houve sobras. Questione a turma sobre o procedimento que deve ser realizado, no caso de sobrar centenas. Deixe a turma refletir e elaborar seus argumentos. Após chegar à conclusão do que fazer com o que sobrou nas centenas, solicite à turma que finalize a divisão registrando o passo a passo.



Após transformar a centena que restou em dez unidades, os alunos perceberão que ainda possuem 16 dezenas para serem divididas em 8 grupos. Solicite à turma que efetue a divisão das dezenas nos 8 grupos.



Questione a turma sobre o valor que encontraram em cada grupo e se houveram sobras de dezenas. Instigue a turma a pensar como poderíamos verificar se o valor encontrado está correto e se está coerente com o problema inicial.

Após o debate e suas conclusões, solicite à turma que resolva mais uma situação-problema com o auxilio do QVP.

Situação-problema 2:

No inicio do ano, foram matriculados 480 alunos para as aulas de dança. A escola tem somente 15 turmas, sendo que todas têm que ter a mesma quantidade de alunos. Quantos alunos terá cada turma?

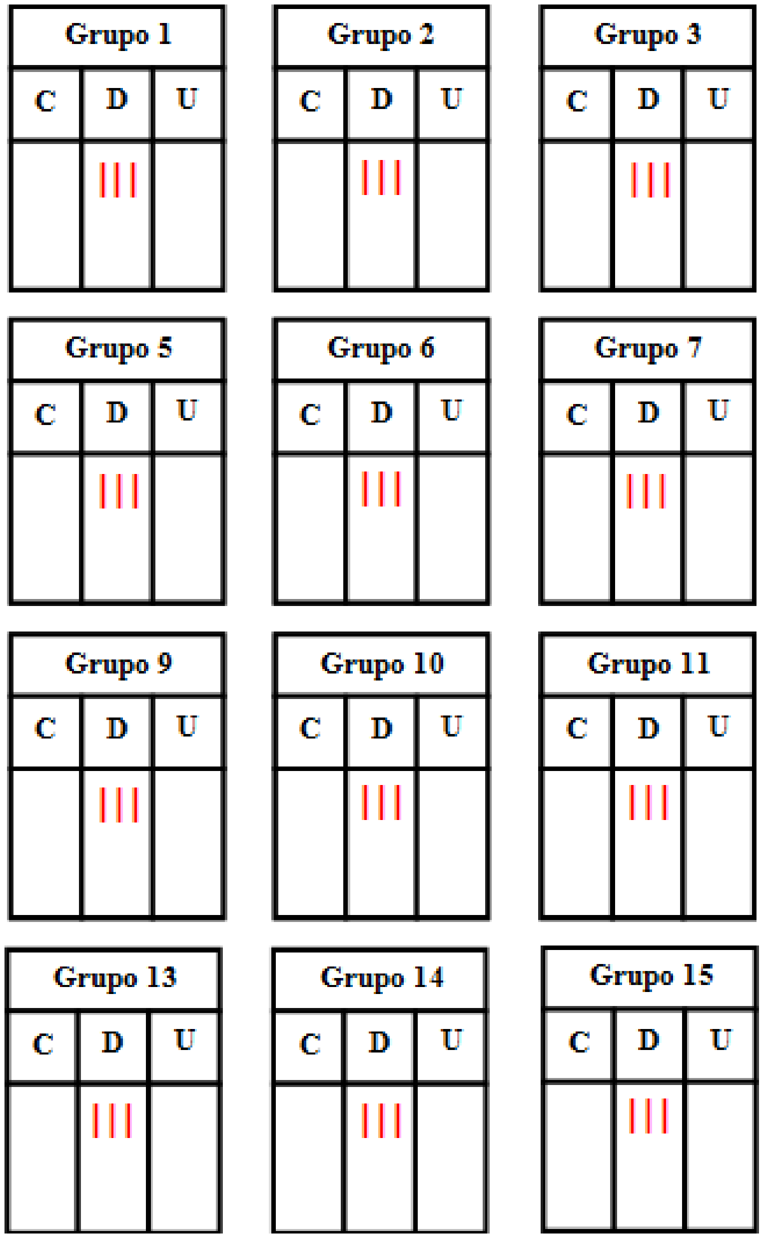
Novamente a turma deve ler, primeiro, a situação, buscando seu entendimento, somente depois deve representar a quantidade que será dividida usando o QVP.

<table>
<tr><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr>
<tr><td>||||</td><td>||||||||</td><td></td></tr>
</table>

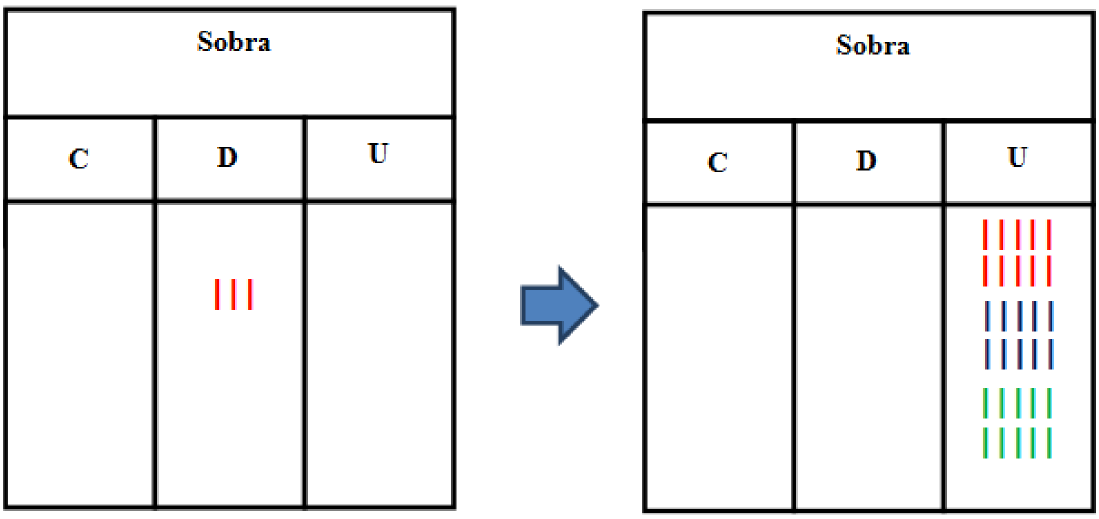
Após representarem no QVP a quantidade de alunos matriculados na escola de dança, solicite à turma que pense em como poderemos dividi-los em 15 turmas, de forma que, em cada turma haja a mesma quantidade de alunos. Dê tempo para a turma pensar em suas estratégias, abrindo espaço para que exponham suas ideias. Provavelmente os alunos perceberão que não será possível dividir 4 centenas em 15 grupos, e que, dessa forma, precisarão transformar as centenas em dezenas.

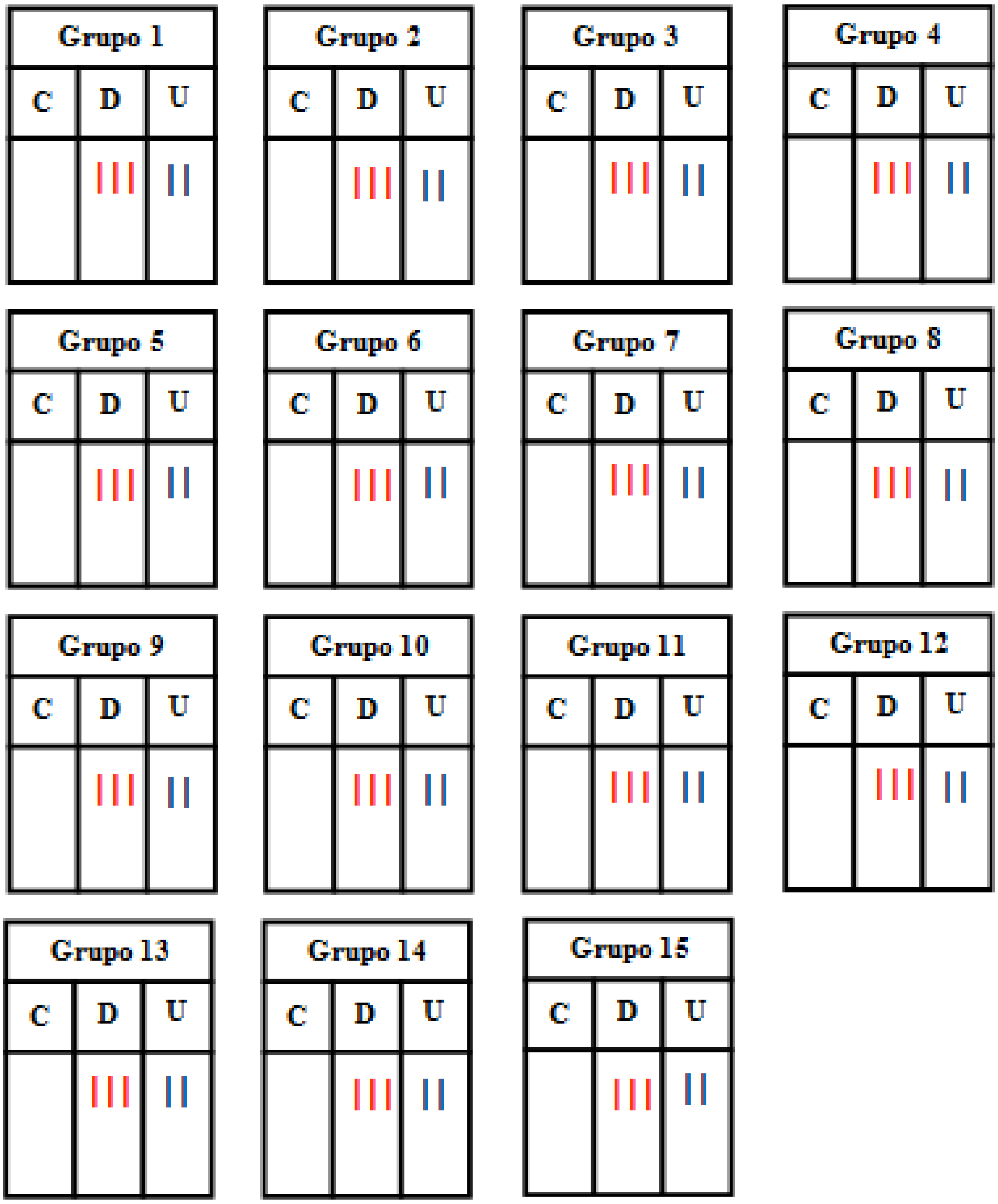
<table>
<tr><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr>
<tr><td></td><td>||||||||||||||||||||
||||||||||||||||||||
||||||||</td><td></td></tr>
</table>

Após efetuarem a transformação, solicite aos alunos que dividam as dezenas nos 15 grupos, questione a turma se acham que haverá sobras e, caso haja, qual o procedimento a ser feito. Dê tempo para que efetuem a divisão e pensem nas estratégias para as possíveis sobras de dezenas.



Após os alunos dividirem as dezenas, perceberão que não será possível dividir todas nos 15 grupos, portanto, terão que efetuar uma nova troca nas ordens, agora da dezena para unidade.





Os alunos, após a manipulação com o QVP, chegarão à conclusão de que haverá 32 alunos em cada uma das 15 turmas. O professor poderá instigar a turma a verificar a veracidade do resultado encontrado e se há lógica nesse valor com o que foi solicitado no problema.

Como já dito, o QVP é um instrumento de aprendizagem que contribui no processo de contagem, na formação dos números e nas operações matemáticas. Ao final dessa proposta, almejamos que os alunos estejam preparados para a próxima atividade onde iremos relacionar o que fizemos até o momento, com o passo a passo do algoritmo da divisão.

Proposta 3: Relacionando o algoritmo da divisão com o material dourado e o QVP

PROPOSTA 3 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O ALGORITMO DA DIVISÃO	
Objetivo	Relacionar os trabalhos anteriores feitos com o material dourado e o QVP com o algoritmo da divisão.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

Nessa proposta desejamos voltar ao material dourado e ao QVP, agora relacionando esses instrumentos de aprendizagem com o algoritmo da divisão. Nosso objetivo é de que haja a visualização do passo a passo desse processo através da associação do que foi feito anteriormente, gerando, assim, a compreensão e o entendimento do algoritmo da divisão.

Voltaremos nas situações-problemas trabalhadas anteriormente, por isso, os registros feitos pelos alunos nessas situações serão importantes, pois, iremos comparar o que foi feito com o passo a passo do algoritmo.

Situação-Problema 1:

Dani é dona de uma loja de roupas. Ela recebeu uma encomenda de 160 camisas de malha masculina. Para enviar a encomenda, Dani deseja organizar as blusas em 4 caixas, sendo que em cada uma das caixas haverá a mesma quantidade de blusas. Quantas blusas Dani irá colocar em cada caixa?

Essa foi a primeira situação apresentada na primeira proposta dessa unidade, portanto, peça aos alunos para voltarem nos registros feitos durante a resolução do problema. Solicite ao grupo que leia novamente o problema e relembre como fizeram para resolver a situação com o auxilio do material dourado. Separe um tempo da aula para esse debate inicial, onde os alunos irão relembrar e expor o que fizeram para resolver.

Após esse primeiro momento, peça a turma para pensar como poderíamos resolver a mesma situação usando agora, ao invés, do material dourado, o algoritmo da divisão. De tempo para que os grupos façam a resolução ou, pelo menos, tentem fazer.

Abra espaço para que os grupos falem sobre sua resolução usando o algoritmo, questione a turma a cada passo realizado para verificar se, de fato, compreendem o que estão fazendo.

***Resolução via algoritmo*:**

1’60 | 4

Não conseguimos dividir 1 centena em 4 grupos, logo, precisamos transformar 1 centena em 10 dezenas. Lembramos, aqui, da primeira unidade desse caderno, onde estudamos o ***sistema de numeração decimal*.**

1 centena → 10 dezenas

Como já tínhamos 6 dezenas, ficamos com 16 dezenas para serem divididas em 4 grupos.

16’0 | 4

Agora precisamos recorrer aos ***fatos da multiplicação*** que estudamos na unidade 3 desse caderno, ou seja, precisamos pensar em um número que multiplicado por 4 mais se aproxima ou será 16, nesse caso, será o 4 já que 4 x 4 resulta em 16.

16’0	4
16	4
00	

Como não haverá sobras de dezenas, descemos o zero da ordem das unidades. Zero dividido por qualquer número é zero, portanto, acrescentamos um zero ao quociente como resultado da divisão das unidades, obtendo, dessa forma, quociente 40 e resto zero. Portanto, em cada caixa haverá 40 camisas.

16’0	4
16	40
00	
00	

É importante que os alunos tenham em mãos, além de suas anotações, o material dourado, para que possam manipulá-lo caso sintam necessidade. A visualização do passo a passo do algoritmo é fundamental para que haja o seu entendimento.

Após trabalhar a primeira situação explorando-a no seu máximo, solicite à turma para voltarem na segunda situação-problema da primeira proposta, onde trabalhamos ainda com o material dourado. Peça ao grupo que resolva essa situação, agora usando o algoritmo. Dê tempo para que os alunos possam resolvê-la. Solicite que expliquem o que fizeram em cada etapa da resolução e como associaram com o que fizeram com o material dourado.

Situação-problema 2:

Em uma sexta-feira, a loja de conveniência vendeu 960 reais em lanches. Se cada lanche custa 8 reais, quantos lanches foram vendidos nesse dia?

Novamente, peça à turma para ler a situação-problema e voltar em suas anotações, dando tempo para relembrarem e para falarem sobre as estratégias usadas com o QVP nesse problema. Solicite à turma que o resolva, agora, usando o algoritmo da divisão.

No momento que cada grupo for explicar, questione-os sobre cada passo feito, pedindo que expliquem os porquês. Sempre que necessário, volte às unidades anteriores para justificar o passo a passo do algoritmo. Será nesse instante que os alunos começarão a passar as ideias visualizadas, através do material dourado e do QVP para o abstrato, portanto, essa associação é fundamental para a compreensão.

***Resolução via algoritmo*:**

$$\begin{array}{l|l} 9'60 & 8 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Vamos começar a dividir 9 centenas em 8 grupos, logo cada grupo terá 1 centena restando ainda 1 centena que devemos transformar em dezenas. Lembramos, aqui, da primeira unidade desse caderno, onde estudamos o ***sistema de numeração decimal***.

1 centena → 10 dezenas

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{9'}60 & 8 \\ \cline{2-2} 8 & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Teremos, então, 16 dezenas para dividirmos em 8 grupos, portanto, cada grupo terá 2 dezenas, já que, 8 x 2 é igual a 16.

9’6’0	8
8	12
16	
16	
00	

Como não haverá sobras de dezenas, descemos o zero da ordem das unidades. Zero dividido por qualquer número é zero, portanto, acrescentamos um zero ao quociente como resultado da divisão das unidades, obtendo, dessa forma, quociente 120 e resto zero. Portanto, foram vendidos nesse dia 120 lanches.

9’6’0’	8
8	120
16	
16	
00	
00	

Proposta 4: Entendendo o algoritmo da divisão

PROPOSTA 4 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O ALGORITMO DA DIVISÃO	
Objetivo	Compreender a lógica do algoritmo tradicional da divisão.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

Após trabalhar nas três primeiras propostas da unidade com o auxílio do material concreto, visando à compreensão das etapas envolvidas na resolução do algoritmo da divisão, buscamos, nessa quarta proposta, explorar uma atividade voltada para a abstração.

Dessa forma, os alunos terão divisões para resolverem, porém, essa resolução não deverá ocorrer no modo automático e, sim, com a explicação detalhada de cada passo executado pelo grupo. O objetivo é levar o conhecimento construído inicialmente, através do material concreto, para a abstração. Segundo Kamii (2012), a abstração é uma construção feita pela mente, que envolve a construção de relações entre os objetos.

Apresente para os grupos uma divisão, por exemplo 79 dividido por 6, e solicite à turma que divida utilizando o algoritmo da divisão.

79 | 6

Antes que os alunos iniciem a divisão, faça uns questionamentos ao grupo, como: o que significa dividir 79 por 6? O que eles entendem por dividendo e divisor? Dê tempo para que pensem nos questionamentos e peça que registrem todo o procedimento utilizado durante a resolução, explicando detalhadamente, incluindo os questionamentos feitos inicialmente.

7`9 | 6

Após dar um tempo para que os grupos resolvam a divisão, solicite que expliquem suas resoluções. Vale ressaltar que esse momento será muito importante, pois trará de volta todo conhecimento construído com a turma nas outras unidades do caderno.

Exemplo de uma resolução detalhada:

O número 79 é formado por 7 dezenas, portanto, começaremos dividindo as dezenas. Vamos dividir 7 dezenas em 6 grupos.

7 dezenas →	**7**`9	6
	6	1
	1	

Ao dividirmos 7 dezenas em 6 grupos, obtemos 1 dezena em cada um dos grupos, portanto, 6 dezenas foram distribuídas e 1 dezena restou.

Sabemos que 1 dezena equivale a 10 unidades, logo, teremos 10 unidades mais as 9 unidades do número 79, assim, temos um total de 19 unidades a serem divididas em 6 grupos.

	7`9`	6
	6	13
19 unidades →	1 9	
	1 8	
Unidades que não foram divididas, portanto resto da divisão. →	**0 1**	

Após a explicação da primeira divisão proposta, o professor deverá instigar a turma a pensar como poderíamos verificar se o resultado encontrado por eles está, de fato, correto ou não. Ouça as explicações dadas pelo grupo, solicite que verifiquem a veracidade daquilo que estão dizendo.

Pergunte ao grupo se eles têm conhecimento de alguma relação entre o dividendo, o divisor, o quociente e o resto da divisão e, caso tenham, solicite que expliquem essa relação.

Após explorar ao máximo a resolução da primeira divisão, seu passo a passo e todas as relações existentes, solicite ao grupo que realizem mais algumas divisões usando o algoritmo. A resolução deve constar do passo a passo detalhado e, durante a apresentação, os grupos devem explicá-lo, além de mostrar a veracidade do resultado encontrado. A seguir, temos alguns exemplos de divisões:

$$85 \;\underline{|\;7\quad}$$ $$126 \;\underline{|\;3\quad}$$ $$245 \;\underline{|\;13\quad}$$

Proposta 5: Analisando divisões com auxilio da calculadora

PROPOSTA 5 E OBJETIVO DO TRABALHO COM O ALGORITMO DA DIVISÃO	
Objetivo	Consolidar o que foi estudado na unidade sobre o algoritmo da divisão, analisando a resolução de algumas divisões usando como ferramenta de auxílio a calculadora.
Conceitos ou propriedades abordados	O algoritmo da divisão.

Atualmente as calculadoras já fazem parte do universo escolar e hoje as discussões giram em torno de como elas devem ser usadas, de forma que desenvolvam as competências de cálculo nos alunos. Bigode e Frant (2011) fazem uma reflexão sobre o uso dessa ferramenta didática, dizendo que as atividades com calculadoras potencializam a capacidade dos alunos de fazer, mais e melhor, ajudando a compreender o que estão fazendo no cálculo escrito.

A última atividade do caderno, portanto, visa o uso dessa ferramenta e nosso objetivo é fazer com que os alunos compreendam a lógica do algoritmo convencional da divisão durante a análise de alguns erros, utilizando, para isso, a calculadora. De acordo com Bigode e Frant (2011), o uso dessa ferramenta nos anos finais do Ensino Fundamental deve visar um aprofundamento dos conhecimentos sobre os algoritmos e, também, no desenvolvimento das capacidades do cálculo mental e das estimativas. O autor afirma, ainda, que um bom uso desse instrumento didático pode contribuir para que os alunos desenvolvam suas estruturas cognitivas de mais alto nível.

Nessa proposta, cada grupo deverá receber do professor uma divisão resolvida, contudo, cada uma dessas divisões apresenta um erro na sua resolução. O professor deverá solicitar aos grupos que, utilizando a calculadora, resolvam a divisão que lhes foi entregue e, caso haja algum erro, eles devem resolver o algoritmo explicando cada passo da resolução e retirando o erro inicial.

Após separar um tempo da aula para que os grupos analisem as divisões e corrijam o erro, os grupos devem apresentar para a turma a divisão que foi entregue ao seu grupo, mostrando o erro que ela possuía, resolvendo-a corretamente por meio do algoritmo da divisão, explicando à turma todo o passo a passo da resolução. A seguir, temos quatro divisões resolvidas que apresentam erros na sua resolução.

Na primeira divisão que estamos propondo, os alunos deverão perceber que falta um zero intermediário no quociente, pois, no momento que desceram o 2, não conseguindo dividi-lo por 4, não acrescentaram um zero no quociente, apenas desceram o 8 e efetuaram a divisão de 28 por 4.

4`2`8`	4
4	17
0 28	
- 28	
00	

Na segunda divisão proposta, existe um problema no momento que foram dividir as 3 unidades do número por 6, pois, não sendo possível efetuar essa divisão deveriam ter acrescentado um zero ao final do quociente, contudo, o resto da divisão é que foi acrescentado. Os alunos deverão perceber que o resultado correto para essa divisão é 40 e que haveria um resto de 3 unidades.

24`3`	6
24	43
00 3	

Na terceira divisão, o erro aparecerá no final, pois, ao dividir 87 por 12, o resultado será 7 e sobrará 3 unidades, contudo, foi acrescentado um zero ao final do quociente. Dessa forma, seu valor correto seria 47, ao invés de 470.

56`7`	12
48	470
87	
- 84	
03	

Na última divisão, o erro ocorre, pois o divisor é considerado 2 ao invés de 24. Llogo, toda divisão é feita como se estivéssemos dividindo por 2 e não por 24.

```
3`6`7` | 24
        -----
2        183
------
16
16
------
00 7
 -  6
------
    1
```

Ao final das apresentações dos grupos, o professor deverá questionar a turma sobre como podemos verificar cada resolução de divisão, se está correta ou não. Para tanto, os alunos devem perceber a relação existente entre o dividendo, o divisor, o quociente e o resto.

Concluindo a unidade IV

Na última unidade do caderno, o objetivo foi a construção do algoritmo da divisão carregada de sentido e significado, já que, trabalhamos nas unidades anteriores as bases que fundamentavam essa construção.

Nas três primeiras propostas, sugerimos a construção do algoritmo com o auxílio do material dourado e do QVP, acreditando que, dessa forma, a visualização do passo a passo tornou-se mais clara para o aluno.

Após trabalharmos com o material concreto relacionando-o com as etapas da resolução do algoritmo da divisão, propusemos, nas duas últimas atividades, um trabalho mais abstrato, por meio do qual os alunos, já tendo elaborado mentalmente toda estrutura do algoritmo, deveriam ser capazes de resolvê-lo e explicar cada etapa da resolução.

REFERÊNCIAS

BELO HORIZONTE. Prefeitura de Belo Horizonte. Secretaria Municipal de Educação. Gerência de coordenação da política pedagógica e de formação. **Cadernos de Educação Matemática:** E por falar em tabuada... Secretaria Municipal de Educação, Gerência de coordenação da política pedagógica e de formação. Belo Horizonte: PBH, 2008.

BERTON, Ivani da Cunha Borges; ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Números Brincadeiras e Jogos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Educação e linguagem matemática II:** Numerização. Brasília: Universidade de Brasília, 2007.

BIGODE, Antônio José Lopes; FRANT, Janete Bolite. **Matemática:** soluções para dez desafios do professor. 1° ao 3° ano do ensino fundamental. São Paulo: Ática Educadores, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Construção do Sistema de Numeração Decimal.** Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio á Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014a.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Operações na resolução de problemas** / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio á Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014b.

CENTURIÓN, Marília. **Algoritmos e resolução de problemas**. Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação. Seminários de Ensino de Matemática. Coordenador: Nilson José Machado. São Paulo: novembro, 2008.

KAMII, Constance. **A criança e o número:** Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos**.** 39. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

MANDARINO, Mônica Cerbella Freire. Número e operações. In: PITOMBEIRA, João Bosco. **Matemática:** Ensino Fundamental**.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. v.17. (Coleção Explorando o ensino)

PIRES, Célia Maria Carolino. **Números Naturais e Operações.** São Paulo: Editora Melhoramentos, 2013.

PITOMBEIRA, João Bosco. **Matemática:** Ensino Fundamental**.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, v.17, 2010. (Coleção Explorando o ensino)

SAIZ, Irma**.** Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. (Orgs.) **Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. **Cadernos do Mathema** – Ensino Fundamental: Jogos de Matemática de 1° ao 5° ano. Porto Alegre: Editora Penso, 2007.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. T**eoria e Prática de Matemática:** como dois e dois. São Paulo: FTD, 2009.