PUC Minas
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Infeliz Carvalho Coxe

FUNÇÕES RACIONAIS NA INTEGRAÇÃO:
da técnica e tecnologia à discussão de conteúdos básicos em um curso de licenciatura em matemática.

Belo Horizonte
2013

Infeliz Carvalho Coxe

FUNÇÕES RACIONAIS NA INTEGRAÇÃO:
da técnica e tecnologia à discussão de conteúdos básicos em um curso de licenciatura em matemática.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda

Belo Horizonte
2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

C879i
Coxe, Infeliz Carvalho
Funções racionais na integração: da técnica e tecnologia à discussão de conteúdos básicos em um curso de licenciatura em matemática / Infeliz Carvalho Coxe . Belo Horizonte, 2013.
169 f.: il.

Orientador: Dimas Felipe de Miranda
Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Integrais (Matemática). 2. Funções (Matemática). 3. Aprendizagem por atividades.4. MAPLE (Programa de computador) I. Miranda, Dimas Felipe de. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 517.2

Aos

Meus Pais Freitas Coxe e Maria Carvalho (em memória).

Com eles iniciei a aventura de apreender... entre tantas outras coisas, aprender a ser feliz.

Com eles aprendi que só conseguimos o que queremos lutando integralmente por aquilo que se quer.

Para

António do Rosário Mario (em memória).

Pela tua grande batalha! É hoje para mi, o Mestrado uma realidade.

AGRADECIMENTOS

Uma pesquisa quando concluída, é o resultado de um trabalho de equipe, uns mais outros menos, mas todos pelo mesmo objetivo, chegar a bom porto. Por vezes no anonimato determinadas pessoas e instituições, são por demais importantes na sua construção, sendo por vezes fator determinante para o sucesso dos trabalhos.

Assim, em primeiro lugar queria agradecer à Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais pela possibilidade que me deu em poder concretizar este objetivo. Em particular ao Professor Doutor Dimas Filipe de Miranda, orientador e colaborador deste trabalho. Sem as suas preciosas coordenadas, seria impossível termos concluído este projeto.

Em segundo lugar, agradecer O Ministério dos Petróleos da República de Angola, pela aposta feita.

Em Terceiro lugar, agradecer a Universidade Lueji A`Nkonde bem como a colaboração dos vários colegas, eu agradeço e espero vir a conseguir retribuir, de forma a ajudar os Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação, a se transformar como um epicentro do saber de eleição.

Em quarto lugar, uma palavra amiga para os colegas de mestrado, foi muito importante toda a amizade e colaboração demonstrada. Sem aquela força, sem aquela entre ajuda, seria muito difícil de superar os momentos menos bons pela qual todos passámos. Vocês foram os melhores colegas que podia ter encontrado, obrigado.

Por último, mas sempre os primeiros, a toda minha família, pela força dada, que em determinados momentos foi determinante para seguir em frente.

RESUMO

A presente pesquisa analisou a Integração de Funções Racionais no Curso de Licenciatura em Matemática na Província de Malanje (Angola) com a ajuda do Software Maple. A proposta consistiu na elaboração de uma sequência didática, composta por atividades investigativas estruturadas, em que o aluno, através da resolução de integrais de funções racionais, fosse levado a discutir e resgatar conteúdos matemáticos básicos. Os dados foram levantados durante a aplicação da sequência de atividades, nos meses de Setembro e Outubro de 2012. As análises e interpretação dos dados foram qualitativas, e os resultados mostram possibilidades e contribuições do uso do software Maple ao ensino e aprendizagem deste tópico.

Palavras – chave: Integração de funções racionais, Conteúdos matemáticos básicos, software Maple.

ABSTRACT

The present search dealt with the rational function integrations in the Mathematic Graduation Course in Malanje Province (Angola) with the Software Maple help. The proposal consists of the elaboration of the didactic sequence, composed of structured researching activities, in which the student rough the integral rational functions resolution discusses basic contents. The data were taken during the application of the sequence of activities, the basic contents discussion during the months of September and October 2012. The data analyses and interpretations were qualitative, and the results show the possibilities and contributions of the Software Maple use to the teaching and learning of this topic.

Key –words: Basic contents, Rational functions, integration, Software Maple.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 O Interesse Pelo Tema

O interesse pelo tema "Funções Racionais na Integração" se deve à importância que ele pode assumir num Curso de Licenciatura em Matemática. Essa importância foi sendo percebida por esse pesquisador ao lecionar a disciplina de cálculo II, vislumbrando uma oportunidade de trabalhar e discutir conteúdos de matemática básica com futuros professores.

O Cálculo diferencial e integral é um ramo da Matemática, considerado como a linguagem por excelência do paradigma científico e como instrumento indispensável de pensamento para quase todas as áreas do conhecimento. Desde sua consolidação no final do século XVII com Newton e Leibniz, foi introduzida como disciplina básica e obrigatória em diversos cursos de graduação da área de ciências exatas.

Hoje, o homem por ser eminentemente social, precisa promover a sua capacidade de análise crítica, desenvolver o raciocínio lógico, criar habilidades através do processo de ensino – aprendizagem para a formação da prática sobre a vida numa sociedade que se encontra em constante transformação.

Nesta dissertação, um trabalho de caráter investigativo foi levado a cabo, tendo de antemão o propósito de facilitar aos jovens estudantes e docentes, as suas tarefas de ensino – aprendizagem do cálculo.

A proposta desta pesquisa é que o aluno trabalhe com integrais de funções racionais, desenvolvendo as atividades propostas e registrando os procedimentos e análises ao longo da execução das atividades, dentro de uma atitude reflexiva e crítica.

Segundo Lachini (2001) o ensino-aprendizagem de Cálculo pretende cumprir dois objetivos principais: um deles é habituar o estudante a pensar de maneira organizada e com mobilidade; o outro, é estabelecer condições para que o estudante aprenda a utilizar as ideias do Cálculo como regras e procedimentos na resolução de problemas em situações concretas.

Para Lachini (2001) o primeiro destes objetivos almeja que o estudante tenha contato com a matemática como tecnica de conhecer, de pensar e de organizar; é preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e numérico do que está fazendo, saiba avaliar e analisar dados, explique o significado de suas respostas. O segundo está orientado para que o aluno adquira compreensão e capacidade de aplicação prática dos conceitos e definições, estando atento para que o cálculo não se torne um mero receituário.

Para Melo (2002) atualmente, muitas formas de ensino e de aprendizagem, não se justificam mais, perde-se tempo demais, ensina-se e aprende-se muito pouco; tanto professores como alunos têm a clara sensação de que a maioria das aulas está ultrapassada.

Melo (2002) afirma que algumas pesquisas, em Educação matemática, têm sido desenvolvidas a fim de diagnosticar problemas no ensino do cálculo e propor novas metodologias de ensino e de aprendizagem. Em particular, o uso do computador poderá ser uma das soluções para a melhoria deste problema. Para o autor a maioria dos softwares atuais desempenha um papel de tecnologia intelectual: reorganizam a visão do mundo de usuários e modificam reflexos mentais.

Para Melo (2002), à medida que a informatização avança, certas funções são eliminadas, novas habilidades aparecem e o processo de ensino e de aprendizagem se transforma. O conhecimento não é mais fragmentado, torna-se interdependente, interligado e intersensorial.

Para Melo (2002) uma das tentativas de modificação desse quadro seria a utilização de novas tecnologias computacionais como ferramentas didáticas no Curso de Cálculo Diferencial e Integral.

O emprego do computador ajuda o aluno a libertar-se da execução de algoríitmos e procedimentos demorados, podendo este ultrapassar o papel passivo de escutar, ler, decorar e de repetir ensinamentos do professor e tornar-se criativo, crítico, pesquisador e atuante, para produzir o conhecimento. Seu uso pode permitir planejar atividades nas quais os alunos desenvolvam habilidades e práticas de visualização e simulação, explorando e controlando variáveis, fazendo conjecturas e testando hipóteses.

Daí nossa preocupação é focar o estudo de Integrais Indefinidas utilizando uma sequência didática, que possa mostrar o entendimento da conceituação das integrais de funções racionais, onde as atividades executadas tiveram a participação dos alunos do 1º ano da Opção de matemática dos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educaçãoa de Malanje - Angola.

Esta pesquisa tem a pretenção de contribuir para o desenvolvimento de uma prática pedagógica, utilizando o computador como ferramenta didática no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e refere-se, concretamente, à Integração de Funções Racionais, cuja abordagem levará em conta sua evolução histórica.

1.2 Justificativa e Relevância do Tema

Como professor de Cálculo I e II nos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação de Malanje, a situação de transmitir conhecimentos inquestionáveis e acabados e na necessidade de trabalhar os conteúdos básicos no ensino superior de forma recursiva dando espaço para que o aluno pense, reflita e compreenda a resolução de integrais de funções racionais, incomodaram-me e me motivou a procurar novos procedimentos que tratassem de reverter essa situação.

Segundo Frota, (2006) um dos grandes problemas do ensino de Cálculo tem suas raízes no tipo de aula de Matemática e no tipo de Matemática que o aluno vivencia na escola básica. A questão pode ser estendida ao Ensino Superior, onde os conteúdos do Cálculo muitas vezes são apresentados aos alunos de maneira isolada, limitados à repetição de exercícios, de modo que os estudantes memorizam técnicas de resolução sem significação do conceito e utilização dessas técnicas. Assim, o aluno desconhece o Cálculo no contexto da realidade com seus problemas fundamentais.

Durante essa busca, comecei a analisar vários softwares que fossem desenvolvidos por pesquisadores matemáticos e que pudessem ser usados no estudo em causa.

Segundo Allevato (2005) ao empreender atividades de ensino com os computadores, é preciso tentar compreender o papel desse recurso nos ambientes em que se insere e qual é sua relação com a atividade humana.

Optei por utilizar, no curso de Cálculo II, o software Maple. Trata-se de um software que tem muitas representações principalmente a algébrica e a geométrica, que permitem facilmente utilizar cada um deles no estudo de funções, limites, derivadas, integrais, entre outros tópicos de Cálculo.

Com a sua utilização, fundamentalmente na resolução de integrais de funções racionais, achei interessante a maneira como é apresentada a resolução da integral, dando espaço para o aluno indagar os passos que não lhe são apresentado, levando assim a discussão de conteúdos básicos no ensino superior.

Acredito que o uso do computador liberta o aluno da execução de algoritmos, técnicas e rotinas demoradas, como também ajuda o futuro professor a indagar acerca dos diferentes passos na resolução de integrais, que o Software Maple não apresenta.

Na minha experiência em sala de aula tenho notado que muitos alunos no ensino Superior não compreendem o conceito de integração de funções racionais, que é parte fundamental do Cálculo Diferencial e Integral. Tais dificuldades tal vez sejam devidas ao ensino que, na maioria das vezes, se restringe à aplicação de técnicas, de regras e de algoritmos, como é evidenciado nos resultados de muitas pesquisas em educação matemática.

O ensino de Cálculo tem sido tema de importantes trabalhos. Tradicionalmente ligado a um elevado número de reprovações, tem despertado o interesse de diversos pesquisadores, em nossa experiência como professor e também como aluno, pudemos atestar em grande parte, os problemas aqui levantados. Atuando na docência de Cálculo II, percebemos que os alunos têm realmente dificuldades nos conteúdos básicos.

Melo (2002) aponta que o aluno é treinado a utilizar formas, regras, aceitando e reproduzindo passivamente o que o professor “ transmite” não sendo portanto motivado a construir o conhecimento. Valoriza-se, com isso, a aprendizagem de técnicas e a memorização de fórmulas alheias à maneira de como esse tipo de conhecimento é construído. O autor afirma que esses fatores, aliados a uma formação deficiente no ensino médio determinam altos índices de repetência e evasão.

Villarreal (1999) afirma que o ensino de cálculo é assinalado como base da origem de algumas dificuldades dos estudantes, conduzindo a reprovação, repetição e abandono nos cursos. Para a Autora o uso da tecnologia na educação matemática como uma das possíveis propostas alternativas para superar estas dificuldades, visa uma transformação no ensino do cálculo, e é apresentada e analisada como proposta didática e como área de pesquisa.

ALLEVATO (2005) afirma que as observações, feitas nos estudos já realizados, geralmente indicam que o comportamento dos estudantes que usam tecnologia informática (TI) parecia diferente dos demais, ou seja, daqueles que não tinham contato com ela. Em linhas gerais, essas pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores nos ambientes de ensino de Matemática conduz os estudantes a modos de pensar e de construir conhecimento que são típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos.

A autora afirma ainda que as pesquisas destacam aspectos como o uso regular de representações múltiplas, a construção do conhecimento como rede de significados, as discussões desses significados com os colegas e com o professor, entre outros.

O exame de livros didáticos aliados à minha experiência de professor universitário aponta que o ensino atual da integral é centrado na resolução de exercícios lavando o aluno a resolver uma série deles para que possa assimilar.

Melo (2002) afirma que o ensino da integral é geralmente reduzido a “técnicas de integração”, tais como: Método de integração por Substituição e método de Integração por partes que são regras mecânicas para calcular uma primitiva que não está na tabela de integrais imediatas.

Acredito que o uso do computador liberta o aluno da execução de algoritmos, técnicas e rotinas demoradas, como também ajuda o futuro professor a indagar acerca dos diferentes passos na resolução de integrais que o Software Maple não apresenta.

O Computador será visto como uma das ferramentas de mediação pedagógica por meio da qual serão desenvolvidas as atividades pelo estudante, enquanto que o professor assumirá o papel de orientador, organizador e facilitador de ensino aprendizagem.

Nossa hipótese é a seguinte: Com a utilização do Software Maple, é possível fazer uma discussão dos conteúdos básicos no ensino superior na resolução de integrais de funções racionais. A utilização do software Maple poderá favorecer recursos visuais que de outra forma seriam inacessíveis.

Levando em conta a nossa realidade profissional de atuação, onde constam listas de disciplinas com carga horária a ser cumprida integralmente e a minha preocupação em discutir conteúdos básicos no ensino superior, decidimos construir uma sequencia de ensino com atividades definidas acerca de integração de funções racionais.

Na estruturação das atividades tivemos a preocupação de que no desenvolvimento os alunos sejam questionados e motivados a dar uma significação as integrais de funções racionais.

1.3 A Questão da Pesquisa e a Proposta do Trabalho

Através do foco dessa pesquisa pretende-se levar os alunos do Ensino Superior na opção de Matemática, a discutirem conteúdos básicos durante a resolução de integrais de funções racionais.

A questão principal da pesquisa é: Como discutir, através das Integrais de funções racionais, conteúdos básicos no curso de Licenciatura em Matemática usando técnicas e tecnologias de informação?

Foi feita uma revisão bibliográfica a partir de leitura de artigos publicados, dissertação e teses defendidas disponiveis, do estudo do assunto em livros didáticos, de softwares matemáticos sobre o tema e de como o conteúdo é trabalhado no ensino supeior.

Na Universidade, a Matemática adquire um caráter distinto. É cobrada dos alunos uma experiência anterior que eles em geral não têm. Os professores chegam à conclusão que o conhecimento matemático que os alunos trazem do ensino fundamental e médio, pouco tem contribuido para o aprendizado da matemática em nível superior. A falta de pré-requisitos é geralmente apontada como a causa importante do fracasso em disciplinas de matemática.

Pretendeu-se utilizar uma sequência didática (Zabala, 1998) a partir de diversos tipos de atividades aplicadas ao estudo de integração de funções racionais, que possibilitem a sua interpretação, que permitirá de maneira recursiva ajudar o aluno a aprender de maneira significativa os conteúdos básicos.

A sequência didática foi composta de três atividades para serem trabalhadas com os alunos em dupla, utilizando papel, lápis e computador⁄software como principal ferramenta didática visando dar significação na resolução de integrais de funções racionais.

1.4 Objetivos da Pesquisa

1.4.1 Objetivo Geral

Desenvolver Condições, para que os alunos do Iº ano do Curso de Licenciatura em Matemática através da resolução de integrais de funções racionais discutam conteúdos básicos.

1.4.2 Objetivos Específicos

Desenvolver, para os alunos desta turma, uma sequência de atividades planejadas sobre integrais de funções racionais.

Trabalhar com estes alunos de maneira recursiva conteúdos básicos durante a resolução de integrais de funções racionais.

Levar os estudantes a utilizar software Maple, facilitando o cálculo e proporcionando ao aluno um momento de reflexão.

1.5 Características da Pesquisa

Os sujeitos de estudos são estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática dos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação de Malanje da Universidade Lueji A`Nkonde na República de Angola, cuja matriz curricular inclui o conteúdo de Integração de funções racionais. A turma compoê-se de 50 estudantes, sendo 12 do sexo feminino e 38 do sexo masculino, a mesma foi dividido em 25 duplas, a faixa etária desta turma varia, de 24 a 54 anos.

A pesquisa é composta de três atividades que foram desenvolvidas pelos alunos, acompanhados e observados pelo professor⁄pesquisador, com os respetivos objetivos:

a) utilizar o Maple na resolução de integrais de funções racionais;
b) discutir conteúdos básicos durante a resolução de integrais de funções racionais.
c) levar os alunos a darem importância aos conteúdos básicos.

d) levar os alunos a relacionar todo o conteúdo estudado desde o ensino básico, médio até o superior.

A pesquisa foi realizada em sala de aula e no laboratório de informática, em três sessões de duas horas de duração cada uma, nos meses de Setembro e Outubro de 2012. Sendo apresentada uma maneira diferenciada para o ensino de integração de funções racionais, uma vez que, com ajuda do software Maple o aluno não só se restringe a realizar cálculos como também entra em um momento de desafio e descoberta dos passos omitidos pelo software.

1.6 Produto e Resultado

O produto dessa pesquisa constitui-se na aplicação de uma sequência didática, contextualizada através da qual os alunos terão oportunidades de desenvolver sua capacidade de interpretar os resultados.

Foram realizadas actividades contextualizadas, aplicadas ao estudo de integração de funções racionais, que com a ajuda do software Maple possiblitou a sua interpretação, o que poderá ajudar o aluno a aprender esse conteúdo de maneira significativa.

As atividades propostas foram desenvolvidas de maneira a articular o ensino tradicional com ferramentas informatizadas, utilizando o software Maple que permite trabalhar integrais de funções racionais e possiblita a transformação da função em funções parciais simples possiblitando uma análise das mudanças ocorridas a partir dessas alterações.

A análise dos resultados foi qualitativa (Fiorentini, 2006), após a aplicação de todas as atividades e das observações feitas pelo professor/ pesquisador durante a aplicação das atividades em sala de aula e no laboratório.

1.7 Estrutura do Trabalho

Este estudo foi dividido em sete capítulos, sendo o primeiro a **introdução.**

No Capítulo dois apresenta-se a **Fundamentação Teórica** é aqui onde buscamos abordar alguns pontos sobre o Cálculo Diferencial e Integral.

No Capítulo três, **História da Universidade Lueji A`Nkonde**, fez-se uma apresentação da mesma e dos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação onde se desenvolveu a pesquisa, bem como a relação do professor pesquisador com a Instituição.

No Capítulo quatro, **História da Integral**, estuda-se a origem e a evulução da Integral. Esse estudo contribuiu para a elaboração das atividades propostas aos alunos.

No Capítulo cinco, estuda-se **O Ensino de Integrais de Funções Racionais** apresenta-se, como é o ensino das integrais racionais e o softweare Maple.

No Capítulo seis, **Aplicação da Sequência Didática e Análise dos Resultados**, são apresentadas as atividades seguidas de análses prévias das questões e dos resultados de cada atividade bem como as conclusões da pesquisa. E como Capítulo sete a **Conclusão.**

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, buscamos abordar alguns pontos sobre o Cálculo diferencial e Integral, apresentando alguns autores e pesquisas referentes ao Cálculo Diferencial e Integral. Sob esse aspecto, propomo-nos a refletir sobre o contexto em que essa disciplina se situa na comunidade acadêmica das Ciências Exatas.

2.1 Evolução do Conceito da Matemática.

O cálculo diferencial e integral teve um grande desenvolvimento no final do século XVII com Isaac Newton(1756) e Gottfried Wilheln Leibniz(1756) entre outros. Seus principais objetos são as derivadas e a integral. Os trabalhos desenvolvidos, após o século XVII foram importantes para aprimoramento da matemática graças às novas áreas de pesquisa que nela se abrira. A derivada, sob o ponto de vista geométrico está ligada ao problema de traçar tangente a uma curva e a integral como problema de determinar a área de figuras.

Apostol (1996) destaca que o cáculo não é somente um instrumento técnico, mais uma seleção de ideias e conceitos fascinantes e atraentes que tem desafiado a mente humana durante os últimos séculos. As ideias e conceitos estão relacionados com velocidade, área, volume, razão de crescimento, tangente a uma curva entre outros.

Courant, (2000) afirma que se imaginava de maneira geral, que uma apresentação clara dos resultados do cálculo não só era desnecessária como impossível. Não tivesse a nova ciência, nas mãos de um pequeno grupo de homens, extremamente competentes, graves erros e ate mesmo um colapso poderia ter ocorrido.

> No entanto quando a revolução francesa abriu caminho para uma imensa aplicação dos conhecimentos avançados, quando um número cada vez maior de homens desejava participar da atividade cientifica, a revisão critica da nova análise não podia ser mais adiada. Este desafio foi, entretanto com êxito no século XIX e hoje o calculo pode ser ensinado sem um traço de mistério e com completo rigor. Não há mais nenhuma razão para que este instrumento básico das ciências não possa ser compreendido por todas as pessoas instruídas. (COURANT, 2000, p. 482)

Eves (1995) enfatiza que o desenvolvimento histórico do cálculo se da na ordem contrária daquele apresentado nos livros didáticos, ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito depois o cáculo diferencial. A noção de integral originou-se nos processos somatórios ligados ao cálculo de algumas áreas, volumes e cumprimentos. A diferenciação surgiu a partir dos problemas de tangentes e curvas e questões referentes a máximos e mínimos de uma função.

Apesar da maior parte do desenvolvimento histórico das integrais se situar no século XVII, sua origem é grega, encontram-se principalmente nos trabalhos de Eudoxo e Arquimedes. O conceito foi formalizado por Couchy, Rieman, Lesbegue entre outros no século XIX.

2.2 Pesquisadores do Ensino da Matemática

Vários pesquisadores da atualidade vêm fazendo pesquisa acerca do ensino das integrais.

Caraça (2000) comenta a respeito da diferença que há entre um conhecimento em produção e um conhecimento já transposto para o livro didático. Ele aborda esse aspecto interessante, enfatizando que se costuma trabalhar somente o conteúdo conforme está no livro didático esquecendo-se da forma ou dos problemas e etapas envolvidas na construção do conhecimento.

> Os conhecimentos estão encadeados nos livros de forma harmoniosa e quase sempre não são questionados. Deve-se estar atento, pois na construção da ciência há toda uma influência da vida social, das condições de produção e isto é que faz dela um organismo vivo e interessante para ser estudado. (CARAÇA, 2000, p. 82)

Dada a influência que os livros didáticos exercem no processo escolar eles poderiam (ou não) favorecer uma visão do real significado da integral mostrando a dinâmica da sua estrutura e a história dos seus sujeitos e objetos.

Caraça (2002) afirma, para que os resultados das atividades realizadas em sala de aula se aproximam da ciência e possa proporcionar ao aluno uma visão mais autêntica, é preciso que o professor observe toda essa complexidade. Esse resultado pode depender mais do trabalho do professor de como ele se apropriou desse conhecimento do que dos livros didáticos e currículos, das peculiaridades de sua formação científica, o que ressalta a atenção especial para a formação do educador.

A exigência de pré-requisitos esbarra na questão da diversidade da natureza da matemática no ensino superior. O que era exigido do aluno no ensino secundário era uma habilidade mais operacional da matemática, e menos uma abordagem conceitual.

A própria natureza da matemática muda na passagem para o ensino superior. Os resultados apresentados na universidade são em geral fruto de motivações internas da própria construção matemática. Trata-se de uma nova cultura, em que as ideias prévias têm que ser necessariamente revisitadas.

D'Ambrósio (2007) enfatiza, entende-se que a consciência é o impulsionador da ação do homem em direção à sua sobrevivência e transcendência ao se saber que vai por sua vez ser decisivo para a ação e, por conseguinte é no comportamento, na prática, no fazer que se avalia, redefine e reconstrói o conhecimento.

Campos (1999) afirma que o professor Piaget, havia demonstrado em sua Gênese do número que existe no entendimento humano, toda uma organização mental previa acerca do cálculo e que se esta organização falta torna-se dificil prosseguir, pois ele será o mesmo que edificar uma obra sobre areia.

2.3 Dissertações Sobre o Cálculo.

Segundo alguns pesquisadores, a disciplina cálculo diferencial e integral, presentes em vários cursos de nível superior, tem como objetivo servir de base na formação em diversas carreiras, devido à sua grande aplicabilidade, entre outras coisas, desempenhando na representação dos fenômenos e como instrumento para a resolução de problemas, no entanto sabe-se que a maneira como é desenvolvida é alvo de críticas e preocupação de alunos e professores dos mais diversos grupos de graduação, seja da área de exatas, biológicas ou humanas (Catapani, 2001; in Bolema nº16, p. 48).

Oliveira (2004), após analisar 2 livros, de cálculo concluiu que bons livros sempre existiram e que se a maioria deles focalizaram as ideias mais importantes do cálculo através de problemas motivadores. Outros, mesmo não partindo de situações problema, conseguiram mostrar diversas aplicações do cálculo.

Nos resultados de suas pesquisas concluiu: os livros analisados explicitaram fortemente as ideias fundamentais do cálculo historicamente proporcionaram seu desenvolvimento ou que são importantes por suas atividades. Observou que eles apresentam problemas importantes para motivar a introdução dos conceitos.

Reis (2009) destaca a importância por parte do professor, de uma reflexão sobre o papel do Cálculo na formação do estudante, levando em consideração o curso em que esse aluno está inserido. Destaca que uma mesma disciplina deve ser trabalhada de maneira diferente, levando em consideração as especificidades de cada curso e a importância dos conceitos do Cálculo para esse estudante.

Para Reis (2009) no ensino de Cálculo devem ser utilizadas metodologias diferenciadas para cada curso de graduação, de modo a garantir que a produção de significado das idéias do Cálculo esteja em estreita relação com o contexto profissional do curso.

Gonçalves e Reis (2001) afirmam que outro fator muito discutido que pode influenciar a aprendizagem dos alunos que estudam Cálculo está relacionado à forma como esses conteúdos são trabalhados em diferentes cursos universitários.

Para os Autores, em uma aula de Matemática, o professor pode levar o aluno a ter um papel ativo no seu aprendizado, uma vez que é preciso formar no estudante, senso crítico para que ele possa desenvolver a capacidade de questionar, relacionar ideias e investigar.

Segundo Gravina e Santarosa (1998), um ambiente educacional informatizado possibilita ao aluno a construção do seu conhecimento, pois com auxílio de um recurso computacional o estudante pode modelar problemas e fazer simulações, além de visualizar uma situação que muitas vezes não seria possível sem essa ferramenta.

Para os autores, ambientes informatizados proporcionam um conhecimento matemático dinâmico, contribuindo para a apreensão do significado dos conteúdos; permitem maior interação do aluno com o conhecimento que está sendo construído e favorecem a simulação, permitindo ao educando criar seus próprios modelos para expressar seus pensamentos e ideias.

Melo (2002) em seu trabalho, conceito de integral: uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem, comenta que os conceitos de cálculo diferencial e integral na maioria das vezes têm sido “ensinados e aprendidos” por meio de aulas que valorizam a memorização, a aplicação de técnicas, regras e algoritmos.

Silva (2004) afirma que no processo de organização e comunicação de saberes pela escola, é importante considerar a natureza conflituosa tanto da construção do conhecimento como, da sua transmissão, sendo que nesta última, entre a concepção teórica e organizacional nos conteúdos a serem ensinados e a sua viabilização pelo esquema escolar e apresentação em sala de aula, existe uma distância considerável.

> No ensino de integral é dada ênfase aos algoritmos, privilegiando-se as regras que são tratadas isoladamente e depois são feitas aplicações em cálculo de área, volumes, deslocamento, espaços percorridos, centro de gravidade... (SILVA, 2004, p.17)

Para ele qualquer que seja o processo utilizado para alcançar sucesso na aprendizagem ele se apoia em algum tipo de representação ums mais sofisticados com representações dinâmicas (Softwares) outros mais simples (usando papel e lápis). Pode-se observar que essas tais representações são importantes, pois o aluno na tentativa de resolver qualquer questão procura representá-lo de alguma forma como meio de auxiliar o entendimento.

Dietrich (2009) afirma que no processo de ensinar e aprender, as relações entre professor e aluno, embora muitas vezes complexas, são peças fundamentais para que a aprendizagem ocorra efetivamente. Essas relações envolvem interesses, motivações, comportamentos pessoais de cada sujeito, mas também se caracteriza pela seleção de conteúdos, organização, sistematização didática, a fim de facilitar a aprendizagem dos alunos.

Para Dietrich, (2009) dessa forma, o ensino deve ser voltado à interação entre o saber matemático e o sujeito. É importante que o aluno esteja ciente de que a matemática não se resume apenas em resolver problemas, mas sim, saber que este é só parte da tarefa. Encontrar a solução pode ser menos importante do que buscar questões a serem resolvidas.

Segundo Dietrich (2009) o professor precisa estimular a criatividade do aluno na busca de novos problemas e de soluções. Entre o momento em que o aluno recebe o problema e o momento em que ele produz sua resposta, o professor deve evitar intervir, para que não atrapalhe o aluno na construção do conhecimento referente à situação.

Quando o aluno atinge esse estágio, pode ocorrer que ele construa o conhecimento sem fazer o uso de lógicas didáticas. Dessa forma, o aluno passa a ser capaz de aplicar esse conhecimento em situações com as quais venha a se deparar fora do contexto do ensino.

Para Dietrich (2009) o computador permite ao aluno a possibilidade de expandir seus conhecimentos, pois fornece inúmeros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem, os quais estão nas diversas páginas apresentados na forma de hipertextos.

O conhecimento matemático não deve ser visto e trabalhado em sala de aula pelo professor como algo pronto e acabado. Aprender Matemática significa mais do que se apropriar do conhecimento desenvolvido ao longo dos séculos, significa ser capaz de fazer descobertas que possibilitem a construção do seu próprio conhecimento matemático.

3 HISTÓRICO DA UNIVERSIDADE LUEJI A´NKONDE

Neste capítulo é apresentado, o início do professor pesquisador no ramo da educação, o surgimento da Universidade Lueji A`Nkonde e a criação dos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação.

3.1 Relação do Professor Pesquisador com a Universidade

Minha carreira como professor é construída desde o ensino médio. Após ter terminado o ensino básico, decidi fazer o ensino médio no Instituto Médio Normal de Educação. Atual, Escola de Formação de Professores, Instituição encarregada de formar professores de nível médio para atuarem como professor nos níveis básicos surgiu daí minha grande paixão pela profissão e pela matemática chegando a finalizar o ensino médio na opção de Matemática e Física. Em 2001 fiz o concurso público para lecionar matemática na Escola do II nível Amílcar Cabral sendo aprovado, lecionei a 5ª e 6ª classe, mas as minhas ambições sempre foram maiores, e não estando satisfeito com o nível acadêmico, em 2004 já com a paz no País, decidi partir para a parte Sul de Angola, concretamente na província do Huambo para dar continuidade aos estudos. Lá fiz a inscrição no Instituto Superior de Ciências da Educação do Huambo da Universidade Agostinho Neto, na Opção de Matemática, onde dois anos depois comecei, como professor monitor a lecionar a cadeira de àlgebra Línear. Em 2007, consegui uma vaga na Comissão Instaladora para a criação da Faculdade de Medicina do Huambo como Chefe de patrimônio e em 2008 tendo terminado a Licenciatura regresso à minha terra natal Malanje onde o Vice- Governador para o sector Económico e Social apercebendo-se do meu regresso a Malanje indica-me como Coordenador Adjunto da Comissão Instaladora para a Abertura da Faculdade de Medicina de Malanje. Nesta altura se começa o redimensionamento do ensino Superior no País. A Universidade Agostinho Neto, que até então foi a única, deixa de ser, e abre-se mais regiões acadêmicas onde a província de Malanje fica a pertencer à região acadêmica IV englobando três províncias do país, e a Universidade recebe o nome da Rainha Lueji A`Nkonde. Em 2010 com a nomeação do corpo diretivo da Faculdade de Medicina e por indicação do Decano da Faculdade, desempenhei a função de Chefe de Departamento dos Assuntos Científicos e neste mesmo ano através de uma Bolsa cedida pelo

Ministério dos Petróleos da República de Angola me desloquei para o Brasil com o objetivo de fazer o Mestrado, mas exercendo sempre a minha função mesmo à distância na Faculdade de Medicina. Tendo terminado os créditos de mestrado regresso para Angola e em Abril de 2012, nomeado como Coordenador Adjunto para os Assuntos Científicos dos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação de Malanje instituição na qual fizemos o nosso trabalho de pesquisa.

3.2 Universidade Lueji A`Nkonde

A Universidade Lueji A`nkonde foi criada pelo decreto Lei nº 7/09 de 12 de Maio, a mesma surgiu em detrimento das linhas mestras para a melhoria da gestão do subsistema do ensino superior, no País com o objectivo de manter sólidas, eficientes e com elevada qualidade pedagógica, científica e tecnológica, a rede de instituições de ensino superior públicas, com vistas à sua adequação aos objectivos estratégicos do desenvolvimento. E assim sendo o artigo 12º cria na região académica IV, a » Universidade Lueji A`Nkonde« com sede na província da Lunda Norte e constituídas pelas seguintes unidades orgânicas:

Província da Lunda Norte: Faculdade de Direito, Faculdade de Economia, Escola Superior Politécnica e Escola Superior Pedagógica.

Província da Lunda Sul: Escola Superior Politécnica

Província de Malanje: Faculdade de Agronomia, Faculdade de Medicina e Faculdade de Medicina Veterinária.

Sua finalidade é formar e qualificar profissionais nos vários níveis e modalidades de ensino para os diversos sectores e realizar pesquisa e desenvolvimento tecnológico de novos processos, produtos e serviços em estreita articulação com os sectores produtivos e a sociedade, oferecendo mecanismos de educação continuada.

No dia 17 de Janeiro de 2011 a Reitoria da Universidade Lueji A`Nkonde deliberou a abertura dos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação com sede em Malanje, a mesma é uma instituição pública criada como uma das Unidades Orgânicas da Universidade Lueji A`Nkonde e está vocacionada para a formação de professores de nível superior (Licenciados).

3.3 Licenciatura em Ciências da Educação – Criação, Desenvolvimento e Avaliação.

O Curso de Licenciatura em Ciências da Educação da Universidade Lueji A`Nkonde, foi implantado no ano de 2011, o mesmo funciona provisoriamente nas instalações da Escola Amilcar Cabral, oferecendo 100 vagas, no período noturno e o mesmo conta com quatro professores efetivos e 30 colaboradores.

De modo a atender as necessidades Provincial e Regional e as novas exigências sociais, o curso formará professores de Matemática e Pedagogia para o ensino fundamental e médio, sem esquecer os alunos interessados em prosseguir estudos em nível de pós-graduação, que têm oportunidade de complementar sua formação através de disciplinas optativas, oferecidas regularmente, cursos de extensão universitária, estágios de iniciação científica e participação em eventos científicos, em outras instituições de ensino superior.

A estrutura curricular vigente vem descrita abaixo:

PLANO CURRICULAR PARA A LICENCIATURA OPÇÃO DE ENSINO DA MATEMÁTICA.

Código: LI-ENMAT

1.Grau conferido pelo curso: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

2.Duração normal do curso: 4 Anos Letivos mais 1 Semestre para o Trabalho de fim de curso.

3. Áreas científicas do curso, sua distribuição percentual.

3.1 Área científica principal: Matemática = 50.80%

3.2 Áreas científicas Complementares: Básicas: 18.40% , Genéricas: 23.60%. e trabalho de fim de curso 7.20%

Grelha curricular:

10. Disciplinas de Curso

Ano	Disciplinas	Cód	Regime			Horas Lect.Sem			Total de Horas			U.C
			A	1ºS	2ºS	T	TP	P	T.H	S	A	
1º												
	Pedagogia Geral			x		1	1		2/2		60	4
	Psicologia Geral			x		2	1	1	4/0	60		4
	Didatica				x	1	1	1	3/0	45		4
	Língua Estrangeira		x			1		2	3/3		90	4
	Língua Portuguesa I		x			1	1	1	3/3		90	5
	Informática		x				1	1	2/2		60	5
	Educação Física		x					2	2/2		60	3
	Psicologia do Desenvolvimento e Aprendizagem				x	2	1	1	0/4	60		4
	Análise Matemática I (Cálculo I)			x		1	1	4	6/0	90		6
	Análise Matemática II (Cálculo II)				x	1	1	4	0/6	90		6
	Álgebra linear		x				1	2	3/3		90	5
	Geometria Analítica		x			1	1	2	4/4		120	5
	Probabilidades e Estatística				x	1	2		0/3	45		5
	Total Geral					12	12	21	32/32	390	570	60

2º												
	Língua Portuguesa II		x			1	1	1	3/3		90	4
	Didáctica Geral			x		2	1	1	4/0	60		4
	Metodologia de Investigação Científica				x	1	1		0/2	30		3
	Sociologia da Educação			x		1	1		2/0	30		3
	Didáctica de Matemática I				x	1	1	1	0/3	45		4
	Análise Matemática III (Cálculo III)			x		2	1	1	4/0	60		4
	Álgebra Superior			x		2	1	1	4/0	60		4
	Geometria Descritiva e Desenho de Projecções			x		1	1	1	3/0	45		4
	Programação de Computadores I			x		1	1	2	4/0	60		4
	Programação de Computadores II				x	1	1	2	0/4	60		4
	Geometria Superior				x	1	1	2	0/4	60		4
	Análise Complexa				x	2	1	2	0/5	75		4
	Aritmética e Teoria dos Números				x	1	1	1	0/3	45		4

	Equações Diferenciais e Integrais				x	2	2	2	0/6	90		5
	Estatística Aplicada			x		2	2	2	6/0	90		5
	Total Geral					21	17	19	30/30	810	90	60
3º												
	Gestão e Inspecção em Educação			x		1	2		3/0	45		4
	Prática Pedagógica I		x					6	6/6		180	7
	Metodologia de Investigação em Educação			x		1	1		2/0	30		3
	Desenvolvimento Curricular				x	2	-	1	0/3	45		4
	Seminário de Trabalho do fim de Curso I				x	1	1		0/2	30		3
	Equações Diferenciais com Derivadas Parciais			x		1	1	2	4/0	60		6
	Didáctica da Matemática II			x		1	1	1	3/0	45		4
	Análise Numérica		x				2	2	4/4		120	7
	Geometria Diferencial			x		2	1	1	4/0	60		6
	Física Geral		x			2	1	1	4/4		120	7
	História da Matemática				x	1	2		0/3	45		4
	Programação matemática				x	1	1	4	0/6	90		5
	Total Geral					13	13	18	30/28	450	420	60
4º												
	Prática Pedagógica II		x					6	6/6		180	8
	Seminário de Trabalho do fim de Curso II			x		1	1		2/0	30		6
	Computadores no Ensino				x	2	2	2	0/6	90		8
	Teoria das Funções				x	2	1	1	0/4	60		8
	Análise Funcional		x			2	2	4	8/8		240	12
	Física Moderna			x		2	2	2	6/0	90		8
	Pesquisa Operacional			x		2	1	1	4/0	60		10
	Total Geral					11	9	16	26/24	330	420	60
5º												
	Trabalho de Fim de Curso			x				18	18	270		60
	Total Geral						18	18	270			60

3.3.1. Condições à concessão do grau:

Aprovação em todas as cadeiras curriculares que integram o plano de estudo, ou seja, aprovação nas disciplinas das áreas científicas previstas no plano curricular.

-Defesa, com aproveitamento, do trabalho do fim de curso.

3.3.2. Objetivos e perfil profissional:

O curso de Ensino da Matemática tem como objetivo formar professores de Matemática para o Ensino Secundário, Ensino Técnico Profissional e para as Escolas de Formação de Professores.

3.3.3. Saídas Profissionais:

Leccionar Matemática em Instituições Públicas e/ou Privadas do Ensino Geral e Secundário.

3.4 Situação dos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação

Os Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação de Malanje da Universidade Lueji A`Nkonde se constituem em uma das mais altas relevâncias para a Província de Malanje. Surgiu em momento oportuno. O mesmo contribuiu para o absentismo dos professores nas escolas, já que até 2010 os Malanjinos eram obrigados a ir fazer Faculdade em outras províncias do país abandonando a família e seus postos de trabalho, e que hoje surge uma nova realidade. Vem contribuir para a formação de recursos humanos qualificados, onde a opção de matemática ganha maturidade e respeito e traz investimentos para a região na forma de projetos de pesquisa e de extensão universitária.

3.5 Profissão e mercado de trabalho do licenciado em Matemática

O licenciado em Matemática pode atuar nas escolas de nível fundamental e médio, bem como continuar seus estudos na direção da pesquisa ou da Educação Matemática.

As perspectivas do mercado de trabalho para o professor de Matemática são relativamente amplas, podendo atuar nas escolas públicas e privadas, em cursinhos preparatórios para concursos e no ensino superior. Outra possibilidade está nas universidades, públicas ou privadas, onde podem fazer cursos de pós-graduação em áreas correlatas, como Matemática Aplicada, Estatística, Ciência da Computação, e diferentes ramos da Engenharia. Atualmente também estão sendo abertos espaços em instituições públicas, bancos, corretoras de mercado financeiro ou de seguros. Nessas empresas, o matemático pode atuar como consultor, analista de dados, analista de tendências de mercado e de riscos de investimentos.

Na área de ensino, principalmente na rede pública, há uma grande carência de professores de matemática. Angola tem um deficit significante de professores de matemática.

Assim, enquanto tantas profissões vivem o fantasma do desemprego, a procura por docentes só aumenta. Há expansão do mercado de trabalho na área com vagas nas capitais e nas cidades do Interior.

Na sociedade atual, cada dia mais complexa e tecnológica, a Matemática se encontra presente nos mais diversos setores. Nesse sentido, o mercado de trabalho para o licenciado em Matemática é bastante promissor.

3.5.1 Série histórica da procura pelo curso

Apresentamos a seguir a relação candidato/vaga para o curso, no ano 2011.
Resumo dos Exames de Acesso Curso de Matemática

Quadro 1: Relação candidato/vaga do curso de Licenciatura em Matemática

Disciplina	N° de candidatos inscritos			N° de candida tos admitidos			N° de Candidato Matriculados		
	M	F	Total	M	F	Total	M	F	Total
Matemática	244	48	292	147	23	170	160	10	170

3.6 Perfil do Aluno Ingressante

A Coordenação dos cursos é responsável pelo processo seletivo para ingresso nas duas opções existentes. As Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio são usadas como balizadoras para o diagnóstico das dificuldades dos ingressantes no que se refere à formação matemática básica. Tanto o diagnóstico quanto as experiências reais desses alunos irão subsidiar o planejamento das ações de forma a suprir as eventuais deficiências de escolarização básica dos alunos e as demais atividades desenvolvidas na disciplina.

No período noturno, percebe-se que o número de alunos do sexo masculino é maior que de alunos do sexo feminino. A faixa etária está entre 20 e 55 anos. O percentual de alunos (24%) com idade acima de 20 anos, e isto ocorre por muitos deles trabalham durante o dia. A maioria dos alunos (90%) é casado.

Analisando a trajetória escolar, observa-se que em torno de 85% dos alunos fizeram o ensino médio há 10 anos e que devido à guerra civil que assolou o País e a falta de uma Instituição de ensino Superior na Província, não foi possível dar continuidade aos estudos.

4 HISTÓRIA DA INTEGRAL

Neste capítulo apresentamos a gênese da integral e seus principais autores, fizemos menção ao surgimento das integrais de funções racionais, e a decomposição da mesma em frações elementares. O texto a seguir baseu-se nos autores: *ZUFFI, E. M*. (2002), BOYER, C. B. (1985), BARON, M. E. (1993), e HOFFMANN, L. D. (2002)

4.1 Integral

O cálculo integral se originou com problemas de quadratura e curvatura. Resolver um problema de quadratura significa encontrar o valor exato da área de uma região bidimensional cuja fronteira consiste de uma ou mais curvas, ou de uma superfície tridimensional, cuja fronteira também consiste de pelo menos uma curva. Para um problema de curvatura, queremos determinar o volume exato de um sólido tridimensional limitado, pelo menos em parte, por superfícies curvas. Hoje, o uso do termo quadratura não mudou muito: matemáticos, cientístas e engenheiros comumente dizem que "reduziram um problema a uma quadratura", o que significa que tinham um problema complicado, o simplificaram de várias maneiras e agora o problema pode ser resolvido avaliando uma integral.

Historicamente, Hipócrates de Chios (cerca de 440 A.C.) executou as primeiras quadraturas quando encontrou a área de certas lúnulas, regiões que se parecem com a lua próxima do seu quarto crescente. Antiphon (cerca de 430 A.C.) alegou que poderia "quadrar o círculo" (isto é, encontrar a área de um círculo) com uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos: primeiro um quadrado; segundo um octógono, a seguir um hexadecaedro, etc.

Seu problema era o "etc.". Como a quadratura do círculo de Antiphon requeria um número infinito de polígonos, nunca poderia ser terminada. Ele teria que ter usado o conceito moderno de limite para finalizar seu processo com rigor matemático.

Mas Antiphon tinha o início de uma grande idéia agora chamado de método de exaustão. Mais de 2000 anos depois, acreditamos a Eudoxo (cerca de 370 A.C.) o desenvolvimento do método de exaustão: uma técnica de aproximação da área de uma região com um número crescente de polígonos, com aproximações melhorando a cada etapa e a área exata sendo obtida depois de um número infinito destas etapas; esta técnica foi modificada para atacar curvaturas também.

Arquimedes (287-212 a.c.), o maior matemático da antiguidade, usou o método de exaustão para encontrar a quadratura da parábola. Arquimedes aproximou a área com um número grande de triângulos construídos engenhosamente e então usou o argumento da redução ao absurdo dupla para provar o resultado rigorosamente e evitar qualquer metafísica do infinito. É de se verificar hoje em dia, uma vez que ambas as fórmulas dependem de p. Então Arquimedes aproximou a área. Para o círculo, Arquimedes primeiro mostrou que a área depende da circunferência; isto é fácis do círculo de raio unitário usando polígonos regulares de 96 lados inscritos e circunscritos! Seu famoso resultado foi $310/71 < p < 31/7$; mas como estas eram apenas aproximações, no sentido restrito, não eram quadraturas.

Esta técnica refinou o método de exaustão, assim quando existe um número infinito de aproximações poligonais, chamamos de método da compressão. O processo de Arquimedes para encontrar a área de um segmento de uma espiral era comprimir esta região entre setores de círculos inscritos e circunscritos: seu método de determinar o volume de um conóide (um sólido formado pela rotação de uma parábola ao redor de seu eixo) era comprimir este sólido entre cilindros inscritos e circunscritos. Em cada caso, a etapa final que estabelecia rigorosamente o resultado era o argumento da redução ao absurdo dupla.

No seu, possivelmente mais famoso trabalho de todos, um tratado combinado de matemática e física, Arquimedes empregou indivisíveis para estimar o centro de gravidade de certas regiões bidimensionais e de certos sólidos tridimensionais. (Arquimedes reconheceu que, por um lado, seu trabalho sugeria a verdade de seus resultados, e por outro faltava um rigor lógico completo). Se considerarmos uma destas regiões sendo composta de um número infinito de retas, de comprimentos variados, então estas retas são chamadas de indivisíveis. Similarmente, quando a composição de um sólido tridimensional é pensada como um número infinito de discos circulares, de raios variados, mas com espessura zero, então estes discos são conhecidos como indivisíveis.

Matemáticos muçulmanos dos séculos IX a XIII foram grandes estudiosos de Arquimedes, mas nunca souberam da determinação de Arquimedes do volume de um conóide. Assim, um dos mais notáveis de todos matemáticos árabes, Thabit ibn

Qurrah (826-901) desenvolveu sua própria curvatura, um tanto complicada, deste sólido; e então o cientista persa Abu Sahl al-Kuhi (século X) simplificou consideravelmente o processo de Thabit. Ibn al-Haytham (965 -1039), conhecido no ocidente como Alhazen e famoso por seu trabalho em ótica, usou o método de compressão para encontrar o volume do sólido formado pela rotação da parábola ao redor de uma reta perpendicular ao eixo da curva.

Durante o período medieval no ocidente, muito progresso foi obtido aplicando as ideias de cálculo a problemas de movimento. William Heytesbury (1335), um membro do notável grupo de estudiosos do Merton College, em Oxford, foi o primeiro a vislumbrar métodos para a determinação da velocidade e a distância percorrida por um corpo supostamente sob "aceleração uniforme". Hoje, podemos obter estes resultados encontrando duas integrais indefinidas ou antiderivadas, sucessivamente. Notícias deste trabalho de Heytesbury e seus colegas de Merton alcançaram Paris posteriormente no século XIV, onde Nicole Oresme (1320 -1382) representou ambas as velocidades e o tempo como segmentos de reta de comprimentos variáveis. Oresme colocou as retas de velocidade de um corpo juntas verticalmente, como os indivisíveis de Arquimedes, sobre uma reta base horizontal, e a configuração total, como ele a chamou, representava a distância total coberta pelo corpo. Em particular, a área desta configuração era chamada de "quantidade total de movimento" do corpo.

A medida que os europeus começaram a explorar o globo, tornou-se necessário ter um mapa do mundo no qual certas retas representassem rumos sobre a superfície da Terra. Houve diversas soluções para este problema, mas a solução mais famosa foi a projeção de Mercator, embora Gerard Mercator (1512 - 1594) não tenha explicado seus princípios geométricos. Aquela tarefa foi assumida por Edward Wright (1561-1615) que, além disso, providenciou uma tabela que mostrava que as distâncias ao longo das retas de rumo seriam bem aproximadas somando os produtos (sec f D f), onde f é a latitude; isto é, aproximando a integral de sec f.

Em seu New Stereometry of Wine Barrels (Nova Estereometria de Barris de Vinho) (1615), o famoso astrônomo Johannes Kepler (1571-1630) aproximou os volumes de vários sólidos tridimensionais, cada qual era formado girando uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para cada um destes volumes de revolução, subdividiu o sólido em várias fatias muito finas ou discos chamados de infinitésimos (note a diferença entre infinitésimos e os indivisíveis de Arquimedes). Então, em cada caso, a soma destes infinitésimos aproximava o volume desejado. A segunda lei de Kepler do movimento planetário requeria quadraturas de segmentos de uma elipse, e para aproximar estas áreas, somou triângulos infinitesimais.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), um estudante de Galileu, desenvolveu uma teoria de indivisíveis. Para uma região bidimensional, Cavalieri considerou a coleção de "todas as retas" como sendo um único número, a área da região. Christiaan Huygens (1629-1695) criticou, "Sobre os métodos de Cavalieri: alguém se engana se aceitar seu uso como uma demonstração mas são úteis como um meio de descoberta anterior à demonstração... isto é o que vem primeiro..." Evangelista Torricelli (1608-1648), outro discípulo de Galileu e amigo de Cavalieri, tentou resolver algumas das dificuldades com indivisíveis ao afirmar que as retas poderiam ter algum tipo de espessura. Foi cuidadoso para usar argumentos de redução ao absurdo para provar quadraturas que obteve por indivisíveis. O "Chifre de Gabriel" é uma curvatura "incrível" descoberta por Torricelli.

Pierre Fermat (1601-1665) desenvolveu uma técnica para encontrar as áreas sob cada uma das "parábolas de ordem superior" (y = kxn, onde k > 0 é constante e n = 2, 3, 4, …) usando retângulos estreitos inscritos e circunscritos para levar ao método de compressão. Então empregou uma série geométrica para fazer o mesmo para cada uma das curvas y = kxn, para n = -2, -3, -4, …. Mas, para sua decepção, nunca foi capaz de estender estes processos para "hipérboles de ordem superior", ym = kxn. Por volta da década de 1640, a fórmula geral para a integral de parábolas de ordem superior era conhecida de Fermat, Blaise Pascal (1623-1662), Gilles Personne de Roberval (1602-1675), René Descartes (1596-1650), Torricelli, Marin Mersenne (1588-1648) e provavelmente outros.

John Wallis (1616-1703) estava fortemente comprometido com a relativamente nova notação algébrica cujo desenvolvimento era uma característica dos matemáticos do século XVII. Por exemplo, ele tratou a parábola, a elipse e a hipérbole como curvas planas definidas por equações em duas variáveis em vez de seções de um cone. Também inventou o símbolo ¥ para infinito e, ao usar isto, obscureceu lugares onde agora sabemos que deveria ter usado o limite. Estendeu a fórmula de quadratura para y = kxn para casos quando n era um número racional positivo usando indivisíveis, razões inteligentes e apelos ao raciocínio por analogia. A dependência de Wallis em fórmulas o levou a várias quadraturas interessantes.

Roberval explorou o Princípio de Cavalieri para encontrar a área sob um arco da ciclóide. Roberval e Pascal foram os primeiros a plotar as funções seno e co-seno e a encontrar as quadraturas destas curvas (para o primeiro quadrante). Pascal aproximou integrais duplas e triplas usando somas triangulares e piramidais. Estas não eram curvaturas, mas eram etapas em seu esforço para calcular os momentos de certos sólidos, para cada um dos quais ele então determinou o centro de gravidade.

Finalmente, Gregory St. Vincent (1584-1667) determinou a área sob a hipérbole xy = 1, usando retângulos estreitos inscritos e circunscritos de larguras diferentes especialmente desenhados e o método de compressão. St. Vincent estendeu esta e outras quadraturas para encontrar várias curvaturas. Logo depois disto, seu aluno, Alfonso Antonio de Sarasa (1618-1667) reconheceu que a quadratura da hipérbole está intimamente ligada à propriedade do produto do logaritmo!

Seguindo uma sugestão de Wallis, em 1657, William Neile (1637-1670) determinou o comprimento de uma seção arbitrária da parábola semicúbica, $y^2 = x^3$, e em 1658, Christopher Wren (1632-1723), o famoso arquiteto, encontrou o comprimento de um arco da ciclóide. Em 1659, Hendrick van Heuraet (1634-cerca de 1660) generalizou seu trabalho somando tangentes infinitesimais a uma curva, portanto desenvolveu a essência do nosso método moderno de retificação - usando uma integral para encontrar o comprimento de um arco.

Na forma geométrica, muito do cálculo nos primeiros dois terços do século XVII culminaram no The Geometrical Lectures (1670) de Isaac Barrow (1630-1677). Barrow deixou sua cadeira de Professor Lucasiano em Cambridge em favor de se ex-aluno Isaac Newton (1642-1727). Newton seguiu James Gregory (1638-1675) ao pensar na área da região entre uma curva e o eixo horizontal como uma variável; o extremo esquerdo era fixo, mas o extremo direito podia variar. Este truque lhe permitiu estender algumas fórmulas de quadratura de Wallis e o levou ao Teorema Fundamental do Cálculo. O último trabalho de Newton sobre cálculo, e também o primeiro a ser publicado, foi seu ensaio, "On the Quadrature of Curves" (Sobre Quadratura de Curvas), escrito entre 1691 e 1693 e publicado como um apêndice na edição de 1704 do seu Opticks. Neste, ele montou uma tabela extensa de integrais de funções algébricas um tanto complicadas, e para curvas as quais não podia desenvolver fórmulas de integração, inventou técnicas geométricas de quadratura.

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, Newton desenvolveu as técnicas básicas para avaliar integrais usadas hoje em dia, incluindo os métodos de substituição e integração por partes.

Para Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), uma curva era um polígono com um número infinito de lados. Leibniz (1686) fez y representar uma ordenada da curva e dx a distância infinitesimal de uma abscissa para a próxima, isto é, a diferença entre abscissas "sucessivas". Então disse, "represento a área de uma figura pela soma de todos os retângulos [infinitesimais] limitados pelas ordenadas e diferenças das abscissas... e assim represento em meu cálculo a área da figura por ò y dx". Leibniz tomou o "S" alongado para a integral do latim summa e d do latim differentia, e estas têm permanecido nossas notações de cálculo mais básicas desde então. Ele considerava as contas de cálculo como o meio de abreviar de algum modo o clássico método grego de exaustão. Leibniz era ambivalente sobre infinitesimais, mas acreditava que contas formais de cálculo poderiam ser confiáveis porque levavam a resultados corretos.

O termo integral, como usamos em cálculo, foi cunhado por Johann Bernoulli (1667-1748) e publicado primeiramente por seu irmão mais velho Jakob Bernoulli (1654-1705). Principalmente como uma consequência do poder do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton e Leibniz, integrais eram consideradas simplesmente como derivadas "inversas". A área era uma noção intuitiva, quadraturas que não podiam ser encontradas usando o Teorema Fundamental do Cálculo eram aproximadas. Embora Newton tenha desferido um golpe muito imperfeito sobre a idéia de limite, ninguém nos séculos XVIII e XIX teve a visão de combinar limites e áreas para definir a integral matematicamente. Em vez disso, com grande engenhosidade, muitas fórmulas de integração inteligentes foram desenvolvidas.

4.2 Integração de Funções Racionais

Aproximadamente ao mesmo tempo em que a tabela de integrais de Newton tinha sido publicada, Johann Bernoulli desenvolveu procedimentos matemáticos para a integração de todas as funções racionais, o qual chamamos agora de método das frações parciais. Estas regras foram resumidas elegantemente por Leonhard Euler (1707-1783) em seu trabalho enciclopédico de três volumes sobre cálculo

(1768-1770). Incidentalmente, estes esforços estimularam o aumento do interesse durante o século XVIII na fatoração e resolução de equações polinomiais de graus elevados.

Enquanto descrevia as trajetórias dos cometas no Principia Mathematica (1687), Newton propôs um problema com implicações importantes para o cálculo: "Para encontrar uma curva do tipo parabólico [isto é, um polinômio] a qual deve passar por qualquer número de pontos dados", Newton redescobriu a fórmula de interpolação de James Gregory (1638-1675); hoje, é chamada de fórmula de Gregory-Newton, e em 1711, ele ressaltou sua importância: "Assim as áreas de todas as curvas podem ser aproximadas... à área da parábola [polinômio] será quase igual à área da figura curvilínea... a parábola [polinômio] pode sempre ser quadrada geometricamente por métodos conhecidos em geral [isto é, usando o Teorema Fundamental do Cálculo]". O trabalho de interpolação de Newton foi estendido em épocas distintas por Roger Cotes (1682-1716), James Stirling (1692-1770), Colin Maclaurin (1698-1746), Leonhard Euler e outros. Em 1743, o matemático autodidata Thomas Simpson (1710-1761) encontrou o que se tornou um caso especial, popular e útil das formulas de Newton-Cotes para aproximar uma integral, a Regra de Simpson.

Embora Euler tenha feito cálculos mais analíticos que geométricos, com ênfase em funções (1748; 1755; 1768), houve vários mal-entendidos sobre o conceito de função, propriamente dito, no século XVII. Certos problemas de física, como o problema da corda vibrante, contribuíram para esta confusão. Euler identificou tanto funções com expressão analítica, que pensou em uma função contínua como sendo definida apenas por uma única fórmula em todo seu domínio. A idéia moderna de uma função contínua, independente de qualquer fórmula, foi iniciada em 1791 por Louis-François Arbogast (1759-1803): "A lei de continuidade consiste em que uma quantidade não pode passar de um estado [valor] para outro [valor] sem passar por todos os estados intermediários [valores] ...". Esta idéia tornou-se rigorosa em um panfleto de 1817 por Bernhard Bolzano (1781-1848) e é conhecida agora como o Teorema do Valor Intermediário. Funções descontínuas (no sentido moderno) foram forçadas na comunidade matemática e científica por Joseph Fourier (1768-1830) no seu famoso Analytical Theory of Heat (Teoria Analítica do Calor,1822).

Quando Augustin Louis Cauchy (1789-1857) assumiu a reforma total do cálculo para seus alunos de engenharia na École Polytechnique na década de 1820, a integral era uma de suas pedras fundamentais.

4.3 Funções Racionais

O texto a seguir originou-se de estudos realizados nos autores: Frank Ayres Jr. Stewart, James. HOFFMANN, L. D.(2002) e LEITHOLD, L. (1994)

Sejam

$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_m \neq 0$

e $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_{0,}$ $b_n \neq 0$ polinômios de variável real com coeficientes reais.

Definição: Função racional é qualquer função $f(x)$ representável por um quociente dos polinômios, isto é, $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

Consideramos sem restringir a generalidade, que estes polinômios não tem raízes comuns.

Se a ordem do polinômio ao numerador é inferior ao do denominador, m$< n$, diz-se que a função racional $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ é regular.

Se a ordem do polinômio ao numerador é superior ou igual ao do denominador, m$\geq n$, diz-se que a função racional $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ é irregular.

Exemplos de funções racionais:

$f(x) = \dfrac{4x^5-3x^4+7x^2-2}{x^3-4x \quad +1}$ Função racional irregular

$f(x) = \dfrac{x^5-x^3+2x^2}{x^5+3x^3-x+1}$ Função racional irregular

$f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-2}{x^4-x^2+1}$ Função racional regular

$f(x) = \dfrac{3}{x^3-4x+1}$ Função racional regular

Se a função racional $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ é irregular, dividindo o polinômio do numerador pelo polinómio do denominador (segundo a regra de divisão de polinómio) podemos representar a função inicial (irregular) como soma de um polinómio e uma função regular.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

Em que Q(x) é um polinómio e representa o quociente da divisão do polinómio do numerador pelo polinómio do denominador e

$\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ uma fração regular onde R(x) é o resto da divisão.

Regras de divisão de polinómios

Para dividir o polinómio do numerador pelo polinómio do denominador aplicamos um algoritmo da divisão utilizado na aritmética.

Denotamos :

Dividendo: $P_m(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \quad a_m\neq 0$

Divisor: $Q_n(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_{0,} \quad b_n\neq 0$

Quociente: Q(x)

Resto: R(x)

Passo 1. Escrevemos os polinômios $P_m(x)$ e $Q_n(x)$ na ordem decrescente dos expoentes dos seus termos e completamo-los com os termos de coeficientes zero.

Passo 2 . Dividimos o termo de maior grau do dividendo $P_m(x)$ pelo termo de maior grau do divisor $Q_n(x)$. Obtém-se desta forma, o primeiro termo do quociente $Q(x)$.

A seguir, multiplicamos o termo obtido pelo divisor e subtraímos o produto obtido do dividendo.

Caso o polinômio que representa a diferença obtida tenha grau maior ou igual ao do divisor, ele passa a ser um novo dividendo e repete-se o algoritmo a partir do 2º passo.

Caso o polinômio que representa a diferença obtida tenha grau inferior ao do divisor ele representa o resto R(x) e, portanto obtemos a representação.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

Exemplos de divisão de polinômios.

Exemplo 1. Sejam $P_5(x) = 4x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 2$ e $Q_3(x) = x^3 + 4x + 1$

Passo 1.

$P_5(x) = 4x^5 - 3x^4 + 0.x^3 + 7x^2 + 0.x - 2$ e $Q_3(x) = x^3 + 0.x^2 - 4x + 1$

Passo 2 :

$$\begin{array}{l|l}
4x^5 - 3x^4 + 0.x^3 + 7x^2 + 0.x - 2 & x^3 + 0.x^2 - 4x + 1 \\ \cline{2-2}
-4x^5 - 0.x^4 + 16x^3 - 4x^2 & \quad 4x^2 \\ \cline{1-1}
-3x^4 + 16x^3 + 3x^2 + 0.x - 2 &
\end{array}$$

O polinómio que representa a diferença obtida tem grau maior do que o do divisor e repetimos o passo 2.

Repetição do Passo 2

$$\begin{array}{l|l}
-3x^4 + 16x^3 + 3x^2 + 0.x - 2 & x^3 + 0.x^2 - 4x + 1 \\ \cline{2-2}
3x^4 + 0.x^3 - 12x^2 + 3x & 4x^2 - 3x + 16 \\ \cline{1-1}
16x^3 - 9x^2 + 3x - 2 & \\
-16x^3 - 0.x^2 + 84x - 16 & \\ \cline{1-1}
-9x^2 + 87x - 18 &
\end{array}$$

O polinômio que representa a diferença obtida tem grau inferior ao do divisor e, portanto temos:

$R(x) = -9x^2 + 87x - 18$, $Q(x) = 4x^2 - 3x + 16$ e

$$\frac{4x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 2}{x^3 - 4x + 1} = 4x^2 - 3x + 16 - \frac{9x^2 - 87x + 18}{x^3 - 4x + 1}$$

Exemplo 2. Sejam $P_4(x) = x^4 - 3$ e $Q_2(x) = x^2 + 1$.

Passo 1.

$P_4(x) = x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x - 3$ e $Q_2(x) = x^2 + 0.x + 1$.

Passo 2.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x - 3 & x^2 + 0.x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 0.x^3 - x^2 & x^2 \\ \hline
\qquad -x^2 + 0.x - 3 &
\end{array}$$

O polinômio que representa a diferença obtida tem grau igual ao do divisor e repetimos o passo 2.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x - 3 & x^2 + 0.x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 0.x^3 - x^2 & x^2 - 1 \\ \hline
\quad -x^2 + 0.x - 3 & \\
\qquad\quad x^2 + 0.x + 1 & \\ \hline
\quad -2 &
\end{array}$$

O polinômio que representa a diferença obtida tem grau inferior ao do divisor e portanto temos:

$R(x) = -2$, $Q(x) = x^2 - 1$ e $\dfrac{x^4 - 3}{x^2 + 1} = x^2 - 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$

Por conseguinte a integração de uma função racional irregular reduz-se à integração de um polinômio e uma função racional regular. Como a integração de um polinômio não representa dificuldades o trabalho consiste em integrar as funções racionais regulares.

4.4 Decomposição das funções racionais regulares em fracções elementares

Na álgebra demonstram-se:

Teorema 1. Qualquer polinômio, cujos coeficientes são números reais, pode ser representado na forma.

$$Q_n(x) = A(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}\left(x^2+p_1(x)+q_1\right)^{t_1}\cdots\left(x^2+p_s(x)+q_s\right)^{t_s} \quad \textbf{(1)}$$

onde:

a) $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ são as raízes reais, respectivamente, de multiplicidades $r_1, r_2, \dots r_k$ do polinômio $Q_n(x)$;

b) Os polinômios quadráticos $.\left(x^2+p_j(x)+q_j\right)$.j=1 não têm raízes reais e na factorização de $Q_n(x)$; têm, respectivamente, as multiplicidades t_j. $j=1,\dots s$;

$c)\, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s \in R\;\; r_1, \dots, r_k, t_1, \dots, t_s \in N$ e $r_1+\dots+r_k+2t_1+\dots+2t_s=n$;

A expressão (4) diz-se decomposição do polinómio $Q_n(x)$; em factores do primeiro ou segundo grau .

Teorema 2. Se a função racional $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ é regular e o polinómio $Q_n(x)$ é na forma (1) e verifica as condições a), b) e c), então a função pode ser representada num modo unívoco na forma

$$\frac{R(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1}+\dots+\frac{A_{r1}}{(x-\alpha_1)^{n}}+\dots+\frac{B_1}{x-\alpha_i}+\dots+\frac{B_{ri}}{(x-\alpha_i)^{ri}}+\dots+\frac{C_1}{x-\alpha_k}+\dots+$$

$$\frac{C_{rk}}{(x-\alpha\;)^{rk}}+\dots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\dots+\frac{M_{t1}x+N_{t1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{t1}}+\dots+\frac{U_1x+V_1}{x^2+p_s+q_s}+$$ Com

$$+\frac{U_{ts}x+V_{ts}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{t_s}};(2)$$

$x^2+p_j(x)+q_j \neq 0$, $\qquad \forall x \in R$ e

$A_1,\dots,B_1,\dots,M_1,N_1,\dots,U_{t_s},V_{t_s},p_1,q_1,\dots,p_s,q_s,\alpha_i \in R$ para todos i= 1,2,...,k; j=1,2,...,s.

A expressão (2) representa o desenvolvimento de uma função racional regular $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ em fracções elementares e tem significado para todos $x \neq \alpha_i$, i=1,...,k.

Os coeficientes $A_1, A_2,\dots,V_{t_s}$ calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

Nota:

a) Se $x=\alpha_i$ é uma raiz real de multiplicidade um do polinômio $Q_n(x)$ da função racional regular $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ então a essa raiz no desenvolvimento da função em fracções elementares corresponde a fracção elementar $\frac{A}{x-\alpha_i}$;

b) Se $x=\alpha_i$ é uma raiz real de multiplicidade $r_i > 1$ do polinômio $Q_n(x)$ da função racional regular $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ então a essa raiz no desenvolvimento da função em fracções elementares corresponde a seguinte soma de r_i fracções elementares:

$$\underbrace{\frac{A_1}{x-\alpha_i}+\frac{A_2}{(x-\alpha_i)^2}+\dots+\frac{A_n}{(x-\alpha_i)^{r_i}}}_{soma,\, de\, r_i\, termos}$$

c) Se o polinômio quadrático $x^2+p_j(x)+q_j$, não têm raízes reais e na factorização de $Q_n(x)$ têm a multiplicidade 1 então a esse polinomio quadrático no desenvolvimento da função em fracções elementares corresponde a fracção elementar $\frac{Ax+B}{x^2+p_j(x)+q}$;

d) Se o polinômio quadrático $x^2 + p_j x + q_j$, não têm raízes reais e na factorização de $Q_n(x)$ têm a multiplicidade t_i então a esse polinômio quadrático no desenvolvimento da função em fracções elementares corresponde a seguinte soma de t_i fracções elementares:

$$\underbrace{\frac{A_1 x + B}{x^2 + p_j x + q} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(x^2 + p_j x + q\right)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_{t_i} x + B_{t_1}}{\left(x^2 + p_j x + q\right)^{t_i}}}_{Soma, de\, t_i\, termos} S$$

Exemplos de decomposição das funções racionais regulares em fracções elementares.

Exemplo 3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)(x+2)^3}$

A função é regular e o polinômio do denominador é representado em produto de factores de primeiro grau: o factor $x-1$ tem a multiplicidade 1 e o factor $x+2$ tem à multiplicidade 3. Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares ao factor $x-1$ corresponde à fracção elementar $\dfrac{A}{x-1}$ e ao factor $x+2$ corresponde a soma de três fracções elementares $\dfrac{B_1}{x+2} + \dfrac{B_2}{(x+2)^2} + \dfrac{B_3}{(x+2)^3}$ Portanto,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)(x+2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{(x+2)^3}$$

Os coeficientes A, B_1, B_2, B_3 calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 4. $f(x) = \dfrac{4x^3 + 2x^2 - x - 1}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}$

A função é regular e o polinómio do denominador é o produto do factor de primeiro grau $x+1$de multiplicidade 1 com o factor de segundo grau sem raízes reais x^2+1 de multiplicidade 2. Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares ao factor $x+1$ corresponde à fração elementar $\frac{A}{x+1}$e ao factor x^2+1corresponde a soma de duas fracções elementares $\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2(x)+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}$

Portanto,

$$f(x)=\frac{4x^3+2x^2-x-1}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Os elementos A, B_1, C_1, B_2, C_2 calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 5. $f(x)=\frac{x^3+2x^2-1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4x+5\right)}$

A função é regular e o polinômio do denominador é o produto de 3 factores:

a) do factor de primeiro grau $x+1$ de multiplicidade 2;

b) do factor de segundo grau sem raizes reais x^2+1 de multiplicidade 2;

c) do factor de segundo grau sem raizes reais x^2+4x+5 de multiplicidade 1;

Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares temos: ao factor $x+1$ corresponde a soma de duas fracções elementares $\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}$; ao factor x^2+1 corresponde a soma de duas fracções elementares $\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}$ ao factor x^2+4x+5corresponde a fracção elementar $\frac{Dx+E}{x^2+4x+5}$ Portanto

$$\frac{x^3+2x^2-1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4x+5\right)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+4x+5}$$

Os coeficientes A_1, A_2, B_1, C_2, D, E calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 6. $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+4)^2(x^2+9)}$

A função é regular e o polinômio do denominador é o produto de 2 factores:

a) do factor de segundo grau sem raízes reais x^2+4 de multiplicidade 2;

b) do factor de segundo grau sem raizes reais x^2+9 de multiplicidade 1;

Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares temos:

a) ao fator x^2+4 corresponde a soma de duas fracções elementares $\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+4}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+4)^2}$; ao fator x^2+9 corresponde a fração elementar $\dfrac{Dx+E}{x^2+9}$.

Portanto

$$f(x)=\frac{x}{(x^2+4)^2(x^2+9)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+4}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+4)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+9}$$

Os coeficientes $A_1, A_2, B_1, C_1 B_2, C_2, D, E$ calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

4.5 Método dos Coeficientes Indeterminados.

Passo 1. Multiplicamos ambas partes da expressão (2) por $Q_n(x)$ e fazemos as operações de multiplicação e redução na parte direita obtendo uma igualdade entre dois polinômios;

Passo 2. Igualamos os coeficientes dos termos de mesmo grau de x e obtemos um sistema de equações lineares com as incógnitas $A_1, A_2, \ldots, V_t$

Passo 3. Resolvendo o sistema obtemos os valores dos coeficientes $A_1, A_2, \ldots, V_t$

Exemplos de aplicação do método dos coeficientes indeterminados

Exemplo 7. Desenvolver a função racional regular $f(x)=\dfrac{8x^3-12}{x^5+4x^3+4x}$ **em** frações elementares.

Resolução:

A função $f(x)=\dfrac{8x^3-12}{x^5+4x^3+4x}$ é regular.

Representemos o denominador em produto de fatores de primeiro ou segundo grau.

$x^5+4x^3 4x = x(x^4+4^2+4 = x\left((x^2)^2+4x^2+4\right) = x(x^2+2)^2$ Portanto

$$f(x)=\frac{8x^3-12}{x^5+4x^3+4x}=\frac{8x^3-12}{x(x^2+2)^2}$$

O polinômio do denominador é o produto do fator de primeiro grau x de multiplicidade 1 com o fator de segundo grau sem raizes reais x^2+2 de multiplicidade 2.

Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares ao fator x corresponde a fracção elementar $\dfrac{A}{x}$ e o fator x^2+2 corresponde a soma de duas fracções elementares $\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+2}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}$, isto é,

$$f(x)=\frac{8x^3-12}{x^5+4x^3+4x}=\frac{8x^3-12}{x(x^2+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+2}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}$$

Na continuação aplicamos o método dos coeficientes indeterminados para calcular os coeficientes A, B_1, C_1, B_2, C_2 Multiplicando as partes da expressão

$\dfrac{8x^3-12}{x(x^2+2)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+2}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}$ por $x(x^2+2)^2$ obtemos:

$$\frac{8x^3-12}{x(x^2+2)^2}x(x^2+2)^2=\frac{A}{x}x(x^2+2)^2+\frac{B_1x+C_1}{x^2+2}x(x^2+2)^2+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}x(x^2+2)^2\Rightarrow$$

$$8x^3-12=A(x^2+2)^2+(B_1x+C_1)x.\,(x^2+2)+(B_2x+C_2)x\Rightarrow$$

$$8x^3-12=A(x^4+4x^2+4)+(B_1x+C_1)(x^3+2x)+(B_2x^2+C_2x)\Rightarrow$$

$$8x^3-12=A\left(x^4+4x^2+4\right)+\left(B_1x^4+2B_1x^2+C_1x+2C_1x^3\right)+\left(B_2x^2+C_2x\right)\Rightarrow$$
$$8x^3-12=\left(A+B_1\right)x^4+C_1x^3+\left(4A+2B_1+B_2\right)x^2+\left(2C_1+C_2\right)x\ .$$

Igualando os coeficientes de $x^4, x^3, x^2, x^1 x^0$ obtemos o sistema:

$$\begin{cases} A+B_1=0 \\ C_1=8 \\ 4A+2B_1+B_2=0 \\ 2C_1+C_2=0 \\ 4A=-12 \end{cases}$$

Da quinta equação do sistema obtemos A =-3 e substituindo na primeira equação temos $B_1=-A=3$. Da segunda equação temos $C_1=8$ e da quarta $C_2=2C_1=-16$ Da terceira equação obtemos. $B_2=-4A-2B_1=6$

Portanto o desenvolvimento da função racional regular em frações elementares é :

$$\frac{8x^3-12}{x^5+4x^3+4x}=-\frac{3}{x}+\frac{3x+8}{x^2+2}+\frac{6x+16}{\left(x^2+2\right)^2}$$

4.6 Integração de Frações Racionais Elementares.

Na decomposição de funções racionais em fracções elementares obtemos (ver (2)) quatro tipos de frações elementares:

a) T1. $\dfrac{A}{x-\alpha}$

b) T2. $\dfrac{A}{(x-\alpha)^r}, \left(r>1, r\in N\right)$

c) T3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}, \left(x^2+px+q\neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{p^2}{4}-q<0\right);$

d) T4. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^r}, \left(x^2 + px + q \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{p^2}{4} - q < 0 \right), r > 1, r \in N$

Os integrais das frações elementares de tipos T1 e T2 são imediatos.

T1: $\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A.\int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = A.\ln|x-\alpha| + c$

T2: $\int \frac{A}{(x-\alpha)^r} dx = A.\int (x-\alpha)^{-r} d(x-\alpha) = A.\frac{(x-\alpha)^{-r+1}}{-r+1} = -\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{-r+1}}$

T3: Para integrar uma fracção de terceiro tipo separamos o quadrado perfeito em denominador:

$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$ substituindo $x + \frac{p}{2} = t$ e $\frac{p^2}{4} - q = -a^2$ vem $x = t - \frac{p}{2}$ e $dx = dt$ por conseguinte

$$\int \frac{Ax+B}{x^2 + px = q} dx = \int \frac{At - \frac{Ap}{2} + B}{t^2 + a^2} dt = A.\int \frac{tdt}{t^2 + a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right).\int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$\frac{A}{2}.\int \frac{2tdt}{t^2 + a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right).\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{A}{2}.\int \frac{d\left(t^2 + a^2\right)}{t^2 + a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right).\int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$\frac{A}{2}.\ln\left|t^2 + a^2\right| + \left(B - \frac{Ap}{2} \right).\frac{1}{a}.arctg\left(\frac{t}{a} \right) + c =$$

$$\frac{A}{2}\ln\left|x^2 + px + q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2} \right).\frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a} + \frac{p}{2a} \right) + c$$

T4: Calculemos o integral de uma fração de quarto tipo. Analogamente como acima.

$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$ $\quad x + \frac{p}{2} = t$ e $\frac{p^2}{4} - q = -a^2$ $\quad x = t - \frac{p}{2}$

$dx = dt$ por conseguinte

$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2 + px + q\right)^r} dx = \int \frac{At - \frac{Ap}{2} + B}{\left(t^2 + a^2\right)^r} dt = A\int \frac{tdt}{\left(t^2 + a^2\right)^r} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right).\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^r}.$ Para calcular o primeiro integral fazemos a substituição $tdt = \frac{1}{2}.d\left(t^2 + a^2\right)$. Então

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-r} d\left(t^2+a^2\right) = \frac{1}{2(r-1)\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}.+c$$

Calculemos o segundo integral $\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r}$. Escrevemos o segundo integral na forma $\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^r}$.

Na continuação fazendo em numerador a substituição $a^2 = t^2 + a^2 - t^2$ obtemos:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^r}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2}{\left(t^2+a^2\right)^r}dt - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^r}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}dt - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^r}dt = (*)$$

Calculemos o segundo integral aplicando a integração por partes:

Fazendo $\int U.dV = U.V - \int V.dU$ obtemos $U = t, dV = \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r}, dU = dt,$

$$V = \int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t)^2}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2(1-r)}.\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}$$

Portanto na continuação temos:

$$(*) = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}dt - \frac{1}{a^2}\left[\frac{t}{(2-2r)\left(t^2+a^2\right)^{r-1}} - \frac{1}{2-2r}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{t}{(2r-2)\left(t^2+a^2\right)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2r-2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}\right] + c.$$

Obtemos a fórmula de recorrência

$\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{t}{(2r-2)\left(t^2+a^2\right)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2r-2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}\right] + c.$ que permite diminuir o grau da expressão do denominador no integral $\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r}$.

Exemplos de cálculo de integrais indefinidos. Integração de funções racionais.

►**1)** $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$

A função integrada é função racional regular.

Determinamos as raízes do polinômio do denominador.

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow x=1 \vee x=2$$

Portanto o polinômio do denominador tem duas raizes reais de multiplicidade um e a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Determinemos os valores dos coeficientes A e B utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow 2x+1=Ax-2A+Bx-B \Rightarrow$$
$$2x+1=(A+B)x+(-2A-2B).$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=1 \end{cases}$

Determinemos a solução do sistema :

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B+(A+B)=1+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -A=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=5 \end{cases}$$

Portanto $\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}$. e

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right).dx = \int\frac{-3}{x-1}.dx + \int\frac{5}{x-2}.dx =$$
$$-3\int\frac{1}{x-1}dx + 5\int\frac{1}{x-2}dx = -3\int\frac{1}{x-1}d(x-1) + 5\int\frac{1}{x-2}d(x-2) =$$
$$= -3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + c$$

►2) $\int \frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}.dx$

A função integranda é função racional regular $\left(f(x) = \frac{p_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}\right)$

O polinômio do denominador, $Q_3(x) = (x+2)^2(x-1)$, tem três raízes reais: $x = -2$ de multiplicidade 2 e $x = 1$ de multiplicidade 1.

Portanto a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Determinemos os valores dos coeficientes A , B e C utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow$$
$$3x^2-4x+2 = A(x+2)(x-1) + B(x-1) + C(x+2)^2 \Rightarrow$$
$$3x^2-4x+2 = A(x^2+x-2) + B(x-1) + C(x^2+4x+4) \Rightarrow$$
$$3x^2-4x+2 = Ax^2 + Ax - 2A + Bx - B + Cx^2 + 4Cx + 4C \Rightarrow$$
$$3x^2-4x+2 = (A+C)x^2 + (A+B+4C)x + (-2A-B+4C)$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases} A+C=3 \\ A+B+4C=-4 \\ -2A-B+4C=2 \end{cases}$

Determinemos a solução do sistema :

$$\begin{cases} A+C=3 \\ A+B+4C=-4 \\ -2A-B+4C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C+3 \\ -C+3+B+4C=-4 \\ -2(-C+3)-B+4C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C+3 \\ B+3C=-7 \\ -B+6C=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A=-C+3 \\ B=-7-3C \\ -(-7-3C)+6C=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C+\# \\ B=-7-3C \\ 9C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{26}{9} \\ B=-\frac{22}{3} \\ C=\frac{1}{9} \end{cases}$$

Portanto

$$\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{\frac{26}{9}}{x+2}+\frac{-\frac{22}{3}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{1}{9}}{x-1}$$ e

$$\int\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}.dx=\int\left(\frac{\frac{26}{9}}{x+2}+\frac{-\frac{22}{3}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{1}{9}}{x-1}\right).dx=$$

$$\frac{26}{9}\int\frac{1}{x+2}dx-\frac{22}{3}\int\frac{1}{(x+2)^2}dx+\frac{1}{9}\int\frac{1}{x-1}dx=$$

$$\frac{26}{9}\int\frac{1}{x+2}d(x+2)-\frac{22}{3}\int\frac{1}{(x=2)^2}d(x+2)+\frac{1}{9}\int\frac{1}{x-1}d(x-1)=$$

$$\frac{26}{9}.\ln|x+2|-\frac{22}{3}.\frac{(x+2)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{9}.\ln|x-1|+C$$

$$\frac{26}{9}\ln|x+2|+\frac{22}{3}.\frac{2}{x+2}+\frac{1}{9}\ln|x-1|+C$$

►3) $\int\frac{2x^3-5x+2}{x^2-2x-3}.dx$

A função integrada é função racional irregular. Dividimos o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador e representamos a função integranda como a soma de um polinômio e uma função racional regular:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x+2 & x^2-2x-3 \\ \hline -2x^3+4x^2+6x & \text{2x+4} \\ \hline \quad 4x^2+x+2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x^2+8x+12 \\ \hline 9x+14 \end{array}$$

Daqui resulta que a representação da função racional irregular como a soma de um polinômio e uma função racional regular é:

$$\frac{2x^3-5x+2}{x^2-2x-3}=2x+4+\frac{9x+14}{x^2-2x-3}$$

Portanto

$$\int\frac{2x^3-5x+2}{x^2-2x-3}.dx=\int\left(2x+4+\frac{9x+14}{x^2-2x-3}\right).dx$$

$$=2\int x.dx+4\int dx+\int\frac{9x+14}{x^2-2x-3}.dx=2.\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{9x+14}{x^2-2x-3}.dx=(*)$$

No integral obtido a função integranda, $f(x)=\dfrac{9x+14}{x^2-2x-3}$ é racional regular.

Determinamos as raízes do polinômio do denominador.

$$x^2-2x-3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}\Rightarrow x=1\vee x=3$$

Portanto o polinômio do denominador tem duas raizes reais de multiplicidade um e a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{9x+14}{x^2-2x-3}=\frac{9x+14}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}\Rightarrow 9x+14=Ax-3A+Bx+B\Rightarrow$$

$$9x+14=(A+B)x+(-3A+B)$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases} A+B=9 \\ -3A+B=14 \end{cases}$

Determinemos a solução do sistema :

$$\begin{cases} A+B=9 \\ -3A+B=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=9-B \\ -3(9-B)+B=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=9-B \\ -27+4B=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=9-B \\ B=\dfrac{41}{4} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=-\dfrac{5}{4} \\ B=\dfrac{41}{4} \end{cases}$$

Portanto

$$\frac{9x+14}{x^2-2x-3}=\frac{9x+14}{(x+1)(x-3)}=\frac{-\frac{5}{4}}{x+1}+\frac{\frac{41}{4}}{x-3}$$ e na continuação obtemos

$$(*)=x^2+4x+\int\left[\frac{-\frac{5}{4}}{x+1}+\frac{\frac{41}{4}}{x-3}\right].dx=x^2=4x-\frac{5}{4}\int\frac{1}{x+1}.dx+\frac{41}{4}\int\frac{1}{x-3}.dx=$$

$$x^2+4x-\frac{5}{4}.\ln|x+1|+\frac{41}{4}.\ln|x-3|+C$$

►4) $\int\frac{3x^6-x^4+1}{x^4-1}.dx$

A função integranda é função racional irregular. Dividimos o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador e representamos a função integranda como a soma de um polinômio e uma função racional regular:

$$\begin{array}{l|l}
3x^6+x^4+1 & x^4-1 \\ \cline{2-2}
-3x^6+3x^2 & 3x^2+1 \\ \cline{1-1}
\quad x^4+3x^2+1 & \\
\quad -x^4+1 & \\ \hline
\qquad 3x^2+2 &
\end{array}$$

Daqui resulta que a representação da função racional irregular como a soma de um polinômio e uma função racional regular é:

$$\frac{3x^6+x^4+1}{x^4-1}=3x^2+1+\frac{3x^2+2}{x^4+1}.$$

Portanto

$$\int \frac{3x^6 + x^4 + 1}{x^4 - 1}.dx = \int \left(3x^2 + 1 + \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1} \right).dx =$$
$$= 3\int x^2.dx + \int dx + \int \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1}.dx = 3.\frac{x^3}{3} + x + \int \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1}.dx = (*)$$

No integral obtido a função integranda $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1}$ é racional regular.

Determinamos a representação do polinômio do denominador em produto de factores de primeira e segunda ordem.

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Na representação do polinômio do denominador em produto de factores de primeira e segunda ordem temos dois fatores de primeiro grau e um fator de segundo grau todos de multiplicidade um. Portanto a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1} = \frac{3x^2 + 2}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Determinemos os valores dos coeficientes A , B , C e D utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1} = \frac{3x^2 + 2}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$3x^2 + 2 = A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)(x + 1) \Rightarrow$$
$$3x^2 + 2 = A(x^3 + x^2 + x + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + (Cx^3 + Dx^2 - Cx - D) \Rightarrow$$
$$3x^2 + 2 = (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D)$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=3 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=2 \end{cases}$

Determinemos a solução do sistema aplicando o método de condensação:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=3 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \text{operações} \begin{pmatrix} L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \text{operação } (L_4 = L_4 - L_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Então $D = \frac{1}{2}.C = 0, B = -\frac{5}{4}, A = \frac{5}{4}$

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1} = \frac{3x^2+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{\frac{5}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{5}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}$$ e na continuação obtemos

$$(*) = x^3 + x + \int \left(\frac{\frac{5}{4}}{x-1} - \frac{\frac{5}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} \right).dx = x^3 + x + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{5}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= x^3 + x + \frac{5}{4}.\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}arctg + C$$

►5) $\int \frac{x^5}{x^4 - x}.dx$

A função integranda é função racional irregular. Representamos a função integranda como a soma de um polinómio e uma função racional regular:

$$\frac{x^5}{x^4-x} = \frac{x^5}{x.(x^3-1)} = \frac{x^5 - x^2 + x^2}{x.(x^3-1)} = \frac{x^5 - x^2}{x.(x^3-1)} + \frac{x^2}{x.(x^3-1)} = x + \frac{3}{x^3-1}$$

Portanto

$$\int \frac{x^5}{x^4 - x}.dx = \int \left(x + \frac{3}{x^3 - 1} \right).dx = \int xdx + \int \frac{x}{x^3 - 1}dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^3 - 1}.dx = (*)$$

No integral obtido a função integranda $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$ é racional

Regular. O trinômio $x^2 + x + 1$ não tem raízes reais e portanto

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Determinemos os valores dos coeficientes A , B e C utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \Rightarrow$$

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) \Rightarrow$$

$$x = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C \Rightarrow x = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C)$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases}$

Determinemos a solução do sistema aplicando o método de substituição:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ A + A + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2A + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ C = 1 - 2A \\ A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ C = 1 - 2A \\ A - 1 + 2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Então

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\Rightarrow=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}-\frac{\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}$$ e na continuação

obtemos

$$(*)=\frac{x^2}{2}+\int\frac{x}{x^3-1}.dx=\frac{x^2}{2}+\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}-\frac{\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\right).dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}.dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}.dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x-1}{x^2+x+1}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x-1}{x^2+2.\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}.\int\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.d\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}.\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.d\left(x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}.\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}.\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.d\left(x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}.\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|+\frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.arctg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}.\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}.arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

►6) $\int\frac{x^5}{(x+1)^3}.dx$

A função integranda é função racional irregular. Dividimos o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador e representamos a função integranda como a soma de um polinômio e uma função racional regular.

Porque $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$ temos:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & x^3+3x^2+3x+1 \\
\hline
-x^5-3x^4-3x^3-x^2 & x^2-3x+6 \\
-3x^4-3x^3-x^2 & \\
\quad 3x^4+9x^3+9x^2+3x & \\
\quad 6x^3+8x^2+3x & \\
-6x^3-18x^2-18x+6 & \\
-10x^2-15x-6 &
\end{array}$$

Daqui resulta que a representação da função racional irregular como a soma de um polinômio e uma função racional regular é:

$\frac{x^5}{(x+1)^3}=x^2-3x+6-\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}$. Portanto

$$\int\frac{x^5}{(x+1)^3}.dx=\int\left(x^2-3x+6-\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}\right).dx=$$

$$\int x^2dx-3\int xdx+6\int dx-\int\frac{10x^2+15x+6}{(x+1)^3}.dx=$$

$$\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+6x-\int\frac{10x^2+15x+6}{(x+1)^3}dx=(*)$$

No integral obtido a função integranda $f(x)=\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}.$ é racional regular e o polinômio de primeiro grau $x+1$ na fatoração do denominador tem multiplicidade três. Portanto a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}.=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

Determinemos os valores dos coeficientes A , B e C utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}.=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}\Rightarrow$$

$$10x^2+15x+6=A(x+1)^2+B(x+1)+C$$

$$10x^2+15x+6=Ax^2+Ax+A+Bx+B+C=Ax^2+(A+B)x+(A+B+C)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A=10 \\ A+B=15 \\ A+B+C=6 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=10 \\ B=5 \\ C=-9 \end{cases}$$

Portanto

$\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}.=\frac{10}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{9}{(x+1)^3}$ e na continuação temos:

$$\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+6x-10\int\frac{1}{x+1}dx-5\int\frac{1}{(x+1)^2}dx+9\int\frac{1}{(x+1)^3}dx$$

$$\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+6x-10\int\frac{d(x+1)}{x+1}-5\int(x+1)^{-2}d(x=1)+9\int(x+1)^{-3}d(x+1)=$$

$$\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+6x-10\ln|x+1|-5\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1}+9\frac{(x+1)^{-3+1}}{-3+1}+C$$

$$\frac{x^3}{3} - 3.\frac{x^2}{2} + 6x - 10\ln|x+1| + 5\frac{1}{x+1} - \frac{9}{2}.\frac{1}{(x+1)^2} + C$$

A situação acima serviu para apresentar o estudo das integrais de funções racionais levantando conteúdos matemáticos basícos, que serão explorados nas atividades a serem desenvolvidas pelos sujeitos dessa pesquisa.

5 O ENSINO DE INTEGRAIS DE FUNÇÕES RACIONAIS: DIFICULDADES DE NATUREZA EPISTEMOLÓGICA

Neste capítulo destacam-se as dualidades discreto/contínuo e a sistematição construção, fala-se ainda da informática no ensino da matemática e do software Maple.

5.1 Dificuldades de Natureza Epistemológica

Um dos grandes desafios no ensino superior de matemática ainda é, sem dúvida, o tão propalado "fracasso no ensino de Integrais de funções racionais". Creio que, se investigarmos a origem histórica de tal "fracasso", verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar funções racionais. Mas é neste momento que de maneira recursiva surge a oportunidade de resgatarmos a matemática elementar que é tida como responsável pelo fracasso em cálculo Superior.

Oliveira (1997) afirma que muitos alunos, quando chegam à Universidade encontram dificuldades no estudo do Cálculo Diferencial e Integral I e II, que fazem parte dos currículos dos cursos da área de Exactas. No entanto muitos dos problemas apresentados por eles ao estudar Limites Derivadas e Integrais, centram-se nas funções.

Oliveira (1997) diante da complexidade do problema julgue–se, no entanto, que o problema é de natureza simples: as dificuldades de aprendizagem são decorrentes do processo didáctico, isto é, a solução reside em se encontrar uma forma apropriada para se ensinar a disciplina de Cálculo.

Não obstante, pensamos de forma diferente: acreditamos que grande parte das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo (Integrais de funções racionais) é essencialmente de natureza epistemológica. Pode-se dizer ainda mais: as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local oriundos de classes anteriores.

De fato, os resultados da tese de doutorado Rezende, (2003) ratificam este nosso pensamento. Na referida tese foi elaborado, a partir do entrelaçamento dos fatos históricos e pedagógicos, um mapeamento das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo. Tendo como pano de fundo as dualidades essenciais e os mapas históricos conceituais do Cálculo, foram consolidados e consubstanciados pelo autor da tese cinco macro-espaços de dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo. Os macro-espaços aqui determinados foram identificados pelas cinco dualidades fundamentais do Cálculo e do seu ensino: discreto/contínuo; variabilidade/permanência; finito/infinito; local/global; sistematização/construção.

Nosso trabalho procura esclarecer dois macro-espaços de dificuldades de aprendizagem, do cálculo. A dualidade discreto\contínuo e a Sistematização\construção.

A Dualidade discreto/contínuo

Segundo Rezende(2003) O que se percebe tanto pelas atitudes dos nossos alunos de Cálculo quanto pela forma como o conteúdo matemático do ensino básico de matemática está estruturado é uma total ignorância das idéias do campo semântico desta dualidade.

Para Rezende (2003) dois elementos caracterizam bem esta “cegueira”: o hiato entre os campos da aritmética e da geometria no ensino básico de matemática e o círculo vicioso presente na significação de número real realizada pelos nossos alunos (a idéia de número irracional é definido como sendo o número real que não é racional, mas, por outro lado, o conjunto dos números reais é obtido pela reunião dos conjuntos dos números racionais e irracionais).

Ainda para esse autor, pode-se dizer que o domínio numérico da quase totalidade de nossos alunos (mesmo aqueles que já tenham feito um curso de Cálculo ou Análise) se restringe aos racionais. Não sabem responder o que um número real é, não conhecem o reagente básico (o conceito de continuidade) de seu processo de construção.

A Dualidade sistematização/construção

Para Rezende (2003) pode-se afirmar que o par sistematização/construção não constitui propriamente uma dualidade no sentido filosófico: não existe sistematização sem construção, nem construção sem sistematização. Para o autor, as interpretações relativas ao processo de “construção” do conhecimento continuam sendo diferenciadas pelo termômetro ideológico.

Pala ele a realização didática do ensino de Cálculo e os seus livros-texto seguem basicamente o princípio e o padrão de sistematização propostos por Cauchy e Weierstrass (limite – continuidade – derivada – diferencial – integral) para a organização das idéias e dos resultados do Cálculo. Em ambos os níveis, por exemplo, os conceitos são definidos formalmente e os resultados são demonstrados passo a passo segundo um modelo axiomático que parte da definição formal de limite e de alguns “postulados fundamentais” oriundos da Álgebra Moderna e da Análise Matemática, tais como: o conjunto dos números reais ser um corpo ordenado, propriedades relativas à ordem de R, o postulado de continuidade de Dedekind-Cantor, etc.. Cabem ressaltar, entretanto, que outros resultados são acrescidos e assumidos tacitamente como “postulados” durante o processo de execução do modelo.

Exercícios de cálculos e fixação são acrescentados ao final de cada tópico do conteúdo programático para que o treinamento possa ser realizado. Nesta etapa, a influência das técnicas algébricas é facilmente evidenciada: fatorar polinômios, por exemplo, torna-se imprescindível para que se efectuem cálculos envolvendo Funções racionais.

Rezende (2003) afirma que assim, com essa sistematização exacerbada, surge um dos grandes obstáculos de natureza epistemológica do ensino normal de Cálculo: a “desmaterialização” dos seus resultados e conceitos básicos.

Para se recuperar o “real” nível de significação dos conceitos e resultados do Cálculo é preciso que se inverta a polaridade da dualidade sistematização/construção; isto é, ao invés de se construir as significações no nível do conhecimento já sistematizado deveriam é construir os campos de significações dos resultados e ideias básicas do Cálculo para, num momento posterior, buscar a sistematização desses elementos. Rezende (2003).

No entanto, para que se inicie a inversão de tal polaridade é preciso trazer à tona essa discussão fundamental acerca da oposição entre o “conhecimento sistematizado” (o dos livros didácticos e notas de aulas do professor) e o “conhecimento real” (o que traz consigo a sua história e o seu campo de significações) do Cálculo, sem o receio ou timidez de explicitar o que se pensa e pretende com um par sistematização/construção. Rezende (2003)

O autor afirma que é precisamente essa diferenciação das atitudes epistemológicas balizadas pelo termômetro ideológico sistematização/ construção que constitui o cerne da dualidade que dá sustentação à dificuldade de aprendizagem de natureza epistemológica do Cálculo, onde o Software MAPLE joga um papel importante.

5.2 A Informática na Aprendizagem do Cálculo

Segundo Junior (2006) ao contrário dos estudos envolvendo a escrita, a quantidade de pesquisas envolvendo a informática na aprendizagem do Cálculo é substancialmente maior. No entanto, elas têm obedecido a orientações próprias em boa parte de suas características, tais como referencial teórico, objetivos, metodologia, perfil da população pesquisada, conteúdos específicos abordados e tipo de tecnologia informática utilizada.

Ainda assim, se restringirmos os resultados de pesquisas aos contextos nacionais, constataremos, novamente, grandes lacunas a serem exploradas. Isto, no entanto, deve ser encarado com naturalidade: a utilização sistemática de sistemas de computação algébrica nas aulas de Cálculo em Angola é fenômeno raro mesmo em países ricos, tendo ganhado impulso apenas a partir da década de 90, com o início da popularização da plataforma Windows para as mais variadas aplicações em Educação e em outros setores da sociedade em geral.

Uma abordagem típica nessas pesquisas tem sido a utilização de um determinado software na exploração de determinados conteúdos. Entretanto, os trabalhos que elegem especificamente os Sistemas de Computação Algébrica comerciais mais importantes (dentre estes o MAPLE) como uma das tecnologias a serem investigadas e bem mais restritas.

A razão para isso é óbvia: as licenças ainda são relativamente caras para a aquisição individual. Assim sendo, o pesquisador depende de que a instituição onde ele fará o trabalho de campo disponibilize os sistemas. Embora pareça paradoxal, há um número crescente de novos livros-textos de Cálculo concebidos de maneira a integrar a informática a seu conteúdo justamente por meio desses sistemas comerciais, particularmente do MAPLE .

A boa notícia é que seus preços têm caído e as instituições de ensino têm cada vez mais se sensibilizadas para a necessidade de integrarem essas novas tecnologias a seus projetos pedagógicos.

Considerando que o sistema acima é o que maioritariamente têm ocupado os espaços educacionais da matemática universitária, o presente trabalho destacará apenas o uso do MAPLE para a aprendizagem das integrais de funções racionais.

5.3 O Software MAPLE.

O contexto contemporâneo da educação matemática vem sendo marcado pela crescente necessidade de utilização das tecnologias da informática. O uso destes recursos tem facilitado a apreensão do saber matemático ao permitir o desenvolvimento das habilidades de visualização, manipulação e reflexão, frequentemente ausentes nas aulas tradicionais.

O Softeware Maple é um programa de Computação Algébrica de uso geral que vem sendo desenvolvido desde 1981 na Universidade de Waterloo, no Canadá. Associar o Maple em aulas práticas pode tornar certos conceitos bem mais claros e atrativos, sendo grande a variedade de temas que podem ser explorados com tais recursos. Além de ser uma atividade prazerosa e criativa, o uso da informática permite o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, bem como de organização, atenção e concentração, tão necessárias a pesquisa.

Junior (2006) afirma que as possibilidades e as potencialidades das interações humanas com as tecnologias informáticas têm, de forma inquestionável, ganhado espaço no conjunto das práticas da sociedade. Imersa neste conjunto, a área educacional, em sentido amplo, exerce e recebe, de forma mais ou menos ostensiva, as mais variadas formas de influência neste mesmo conjunto de práticas.

Ainda segundo o autor, esta constatação, é curioso notar que quando recortamos os cenários especificamente desenhados para as práticas educacionais e os comparamos com outros cenários sociais, surjam diferenças significativas de visões, percepções, atitudes, objetivos e resultados no que concernem às relações seres humanos e tecnologias informáticas.

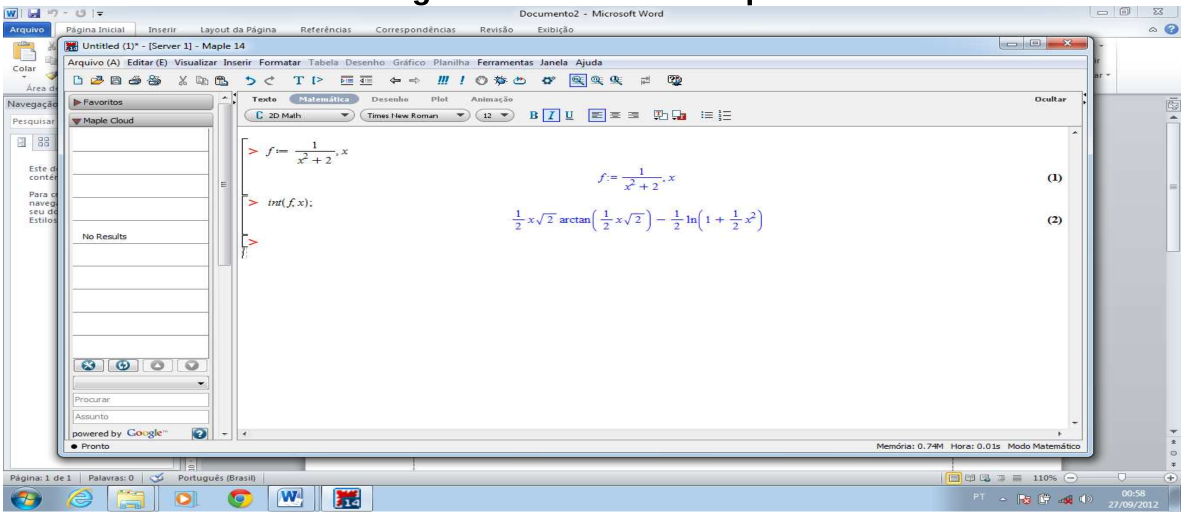
Junior (2006) destaca que, a princípio poder-se-ia conjecturar que tais diferenças somente são perceptíveis em países periféricos, onde os substanciais desníveis sociais e econômicos da população inviabilizam a emergência de uma visão mais homogênea e articulada sobre o papel das tecnologias informáticas no contexto social geral e nos contextos educacionais específicos.

O Maple possui inúmeros recursos numéricos e gráficos, além de também funcionar como uma linguagem de programação. Ele vem sendo desenvolvido pela Waterloo Maple para vários sistemas operacionais. Com ele é possível realizar cálculos que contenham símbolos, como $\pi, \infty, \sqrt{2}$ sem a necessidade de fazer aproximações numéricas ou realizar simplificações e cálculos com expressões algébricas, como $ax^2 + bx$ ou $x^3 + log(x)$, sem ser preciso atribuir valores numéricos às variáveis ou constantes. Devido a essas propriedades, é possível encontrar soluções exatas para problemas práticos que envolvam Cálculo Diferencial e Integral tais como:

- operações básicas de matemática;
- limite e continuidade;
- derivada;
- integral; integração por substituição, por partes, frações parciais e múltiplas;
- gráficos bidimensionais em coordenadas especiais: polar, paramétrica, implíctas, etc;
- gráficos tridimencionais em coordenadas cilíndricas, esfericas, paramétricas, etc;
- aplicações na Matemática: cálculo de comprimento de arco, área de uma região limitada, área e volume de um sólido, sólido de revolução, etc.

Abaixo apresento a área de trabalho onde são digitados os comandos e visualizados as respostas apresentadas pelo softewerae Maple. Para exemplificar calcularei a integral de $f(x) = \frac{1}{x^2+2}dx$.

Figura nº1: Interface Maple.



Fonte: Maple

O Maple possui amplos recursos para o cálculo de integrais definidas, indefinidas ou impróprias. Ele conhece as regras de integração usuais e os valores de muitas integrais em casos particulares.

A utilização do software permitirá que o aluno não continue passivo no processo de construção do conhecimento independente do recurso que se usará. Poder-se-á, a partir das soluções apresentadas pelo mesmo, criar situações de aprendizagem para que o aluno na interação e manipulação do softeware indaga os passos omitidos e construa o seu conhecimento.

5.4 Integração de Funções Racionais Usando o Maple.

A integral (primitiva) de uma função definida por uma expressão algébrica f(x) na variável x é calculada com um comando int(f(x),x).

Esse comando também possui uma forma inercial: int(f(x),x). A forma inercial não efetua cálculos, apenas mostra a integral no formato usual e é útil na apresentação de fórmulas. Seu valor pode ser calculado aplicando-lhe um comando de valor.

As regras básicas de integração, como por substituição, frações parciais e integração por partes, são bem conhecidas pelo programa.

- Integrais indefinidas

>with(student):

>f:=expressão que define a função;

>Int(f,x); apresenta a integral indefinida a ser calculada.

>int(f,x); calcula a integral indefinida.

>Int(f,x)=int(f,x); apresenta a integral indefinida com a resposta- Integrais indefinidas.

Exemplo: Calcule a integral $\int (x^3+5)dx$

Solução:

>with(josegerbasi.caf):

>Int(x^3+5,x)=int(x^3+5,x);

$$\int (x^3+5)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 5x$$

Integrais por frações parciais.

Para a resolução de integrais por frações parciais são utilizados os seguintes comandos:

>with(student):

>f:=expressão que define a função;

>convert(f,parfrac,x); escreve a expressão que define a função como soma de frações parciais.

>Int(f,x)=Int(“,x); apresenta a integral da soma de frações parciais.

>expand(rhs(“)); apresenta a soma das integrais das frações parciais do lado direito do item anterior (rhs(“)).

>value(“); calcula as integrais.

>Int(f,x)=int(f,x); apresenta a integral com a resposta.

Exemplos:

►7) $\int \frac{(-2x+4)}{(x^2+1)(x-1)^2}.dx$

Solução:

>with(student):

>f:=(-2*x+4)/((x^2+1)*(x-1)^2);

$$f := \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{-2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{1}{(x-2)^2}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int \frac{(-2x+4)}{(x^2+1)(x-1)^2}.dx = \int \left(\frac{-2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)dx$$

>expand(rhs("));

$$\int \frac{(-2x+4)}{(x^2+1)(x-1)^2}.dx = \int \left(\frac{-2}{x-1}dx+\int \frac{2x+1}{x^2+1}dx+\int \frac{1}{(x-2)^2}\right)dx$$

>value(");

$$\frac{-1}{x-1}-2\ln(x-1)+\arctan(x)+\ln(x^2+1)$$

►8) $\int \frac{(x^2-2x)}{(x-1)^2(x+2)}.dx$

Solução:

>with(student):

>f:=(x^2-2*x)/((x-1)^2*(x+2));

$$f := \frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x+2)}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{x-1}+\frac{8}{9}\frac{1}{x+2}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int \frac{(x^2-2x)}{(x-1)^2(x+2)}.dx = \int \left(-\frac{1}{3(x-1)^2}+\frac{1}{9(x-1)}+\frac{8}{9(x+2)}\right)dx$$

>expand(rhs("));

$$-\frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{1}{9}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{8}{9}\int \frac{1}{x+2}dx$$

>value(");

$$\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{9}\ln(x-1)+\frac{8}{9}\ln(x+2)$$

>Int(f,x)=int(f,x);

►9) $\int \frac{1}{9x^4+x^2}.dx$

Solução:

>with(student):

>f:=(1/(9*x^4+x^2));

$$f := \frac{1}{9x^2+x^2}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{1}{x^2} - \frac{9}{9x^2+1}$$

>Int(f,x)=Int('',x);

$$\int \frac{1}{9x^2+x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{9}{9x^2+1}dx$$

>Int(f,x)=int(f,x);

$$\int \frac{1}{9x^2+x^2}dx = -\frac{1}{x} - 3arcotan(3x)$$

►10) $\int \frac{9}{8x^3+1}dx$

Solução:

>with(student):

>f:=9/(8*x^3+1);

$$f := \frac{9}{8x^3+1}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{3}{1-2x} - 6\frac{x-1}{4x^2-2x+1}$$

>Int(f,x)=Int('',x=);

$$\int \frac{9}{8x^3+1}dx = \int \left(\frac{3}{1-2x} - 6\frac{x-1}{4x^2-2x+1}\right)dx$$

>expand(rhs(''));

$$3\int \frac{1}{1-2x}dx - 6\int \frac{x}{4x^2-2x+1}dx + 6\int \frac{1}{4x^2-2x+1}dx$$

>value('');

$$-\frac{3}{4}\ln(4x^2-2x+1) + \frac{3}{2}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{6}(8x-2)\sqrt{3}\right) + \frac{3}{2}\ln(2x+1)$$

►11) $\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx$

Solução:

>with(student):

>f:=(2*x^2+3*x+2)/(x^3+4*x^2+6*x+4);

$$f := \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}\right) dx$$

>value(");

$$2\ln(x+2) - \arctan(1+x)$$

O Maple resolve ainda a integral de maneira imediata sem transformarmos a função em funções parciais aplicando diretamente os comandos de integração ele nos dá o resultado da integral.

►12) $\int \frac{x}{x^2+1}.dx$

Para a integral do exemplo acima no Maple fizemos:

$$> int\left(x/(x^2+1), x\right) = int\left(x/(x^2+1), x\right);$$

E como resultado temos: $\int \frac{x}{x^2+1}.dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$

►13) $\int \frac{1}{x^4+1}.dx$

Para a integral acima no Maple fizemos:

$$> int\left(1/(x^4+1), x\right) = int(1/(x^4+1), x);$$

E como resultado temos:

$$\int \frac{1}{x^4+1}.dx = \frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\left(x\sqrt{2}-1\right)$$

Os exrcícios que acabamos de apresentar objetivam mostrar os comandos do software Maple, que serão utilizados pelos sujeitos da pesquisa nas atividades a serem desenvolvidas por eles.

6 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS E ANÁLISE DOS RESULTADOS.

Neste capítulo, é apresentada a metodologia usada para a consecução deste trabalho, uma análise de uma amostra das respostas das duplas de alunos, assim como protocolos e discussões feitas durante a aplicação das atividades.

6.1 Caracterização da Pesquisa

A sequência didática, foi aplicada aos 50 alunos do 1º ano do curso de Matemática dos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação de Malanje, no período noturno, divididos em 25 duplas nos meses de Setembro e Outubro de 2012. A turma é formada por 12 alunos do sexo feminino e 38 alunos de sexo masculino. A aplicação foi no período normal de aulas de Cálculo II. A opção de trabalhar com todos os alunos da classe enriqueceu os resultados da pesquisa e deu uma maior confiabilidade na análise dos resultados.

Trabalhar com os estudantes deste curso baseou-se em um critério:

a) trata-se do curso no qual o professor pesquisador leciona a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e II e Coordenador Adjunto para os Assuntos Científicos. Assim, os resultados da pesquisa poderão subsidiar também o professor pesquisador na atuação pedagógica neste curso.

O curso de Licenciatura em Matemática prepara o aluno para o mercado de trabalho como professor, dos ensinos fundamental e médio, conforme os objetivos do plano curricular para a licenciatura, opção de ensino de matemática.

O conteúdo de integração de funções racionais na grade curricular é ministrada no segundo semestre do 1º ano, na cadeira de Análise matemática II. O conteúdo, em causa, obriga os alunos a conhecerem conteúdos basicos para que consigam resolver as integrais.

Os dados da pesquisa foram coletados com base no método da Observação Participante definida por Fiorentini e Lorenzato (2007) como sendo a observação realizada a partir do comportamento dos alunos no ambiente da sala de aula, quando estão estudando, principalmente em grupo. Utiliza-se o termo “participante” com o significado de participação no registro das observações, tomando-se o cuidado de interferir no ambiente escolar quando os alunos ou a situação solicitar. O papel do professor pesquisador passa a ser de mediador e questionador.

Segundo Florentini e Lorenzato (2007), a “observação participante” envolve, além da observação direta, um conjunto de técnicas metodológicas que pressupõe envolvimento do pesquisador na situação estudada.

A participação dos alunos foi espontânea e não houve interferência na formação das duplas. Na realização das atividades participaram 25 duplas. Os alunos trabalhavam sempre em grupos na execução dessas atividades. Foram desenvolvidas as seguntes atividades.

Quadro nº 2 – Resumo das atividades didáticas.

ATIVIDADE	ASSUNTO	DURAÇÃO / AULAS
01	Atividade didática sobre a resolução de Integrais utilizando os métodos de integração	02 horas
02	Atividade didática sobre a resolução de integrais de funções racionais usando o software Maple	02 horas
03	Atividade didática que visa completar os passos omitidos pelo software maple.	02 horas

Fonte: Dados da Pesquisa

6.2 Aplicação das Atividades Didaticas

Durante as atividades, os alunos eram desafiados e questionados sobre suas certezas e dúvidas, com a finalidade de verificar se eles estavam recorrendo corretamente aos conteúdos básicos necessários para a resolução das questões.

A sequência de ensino foi formulada e aplicada de maneira a permitir discussões entre os estudantes e também com o professor pesquisador. Desta forma, as duplas poderiam chegar às conclusões por conjecturas diferentes, dependendo tanto do envolvimento, questionamentos, dúvidas e expectativas deles, geradas a partir da sequência de ensino e da utilização do computador.

A fim de testar nossa hipótese de que existe, sim, métodos que facilitam a aprendizagem de Integração de Função Racional, elaborei uma sequência de ensino para ser resolvida com o auxilio do software Maple.

Na prática educativa a unidade mais elementar que constitui o processo educativo é definida por Zabala (1998) como atividade ou tarefa, e pode-se considerar uma atividade como uma exposição, um debate, uma pesquisa, uma observação, um exercício, um estudo, etc. A maneira como as atividades são desenvolvidas, a ordem como são apresentadas, as relações que se estabelece entre essas atividades, determinam o tipo e as caracteristicas do ensino.

Dependendo do valor que as atividades adiquirem quando são colocados numa série ou sequência, é necessário ampliar ou modificar as atividades para se alcançar o objetivo proposto no processo de ensino. As atividades palanejadas propiciam o estudo e a avaliação do processo de ensino.

A aplicação da sequência das atividades, se fez em três sessões de duas horas de duração. Os alunos trabalharam em duplas e durante a realização das atividades foram observados. Houve uma tentativa de gravar as discussões dos alunos, mas devido às características do laboratório de informática não foi possível, as dúvidas importantes dos alunos foram anotadas pelo pesquisador.

A primeira sessão e a terceira, foram realizadas na sala de aula sem o uso do software e a segunda foi realizada no laboratório de Informática dos Cursos de Licenciatura em Ciências da Educação de Malanje, durante o período normal de aulas. A sequência compõe-se de três atividades.

A 1ª atividade – realizada na sala de aula usando lapis e papel, teve por objetivo explorar o conhecimento dos estudantes com relação ao uso da tabela de integração e das técnicas de integração. As duas primeiras questões (a, b) foram elaboradas para que os alunos alunos explorassem a tabela de regras de integração. As outras duas questões (c, d) visavam discutir conteúdos básicos de matemática com os alunos, futuros professores dessa disciplina.

Primeira atividade.

Quadro nº 3: Questões da 1ª Atividade.

Dada a integral $\int \frac{dx}{x-4}$

a) Calcular o valor da integral acima usando as regras de integração aprendidas

b) Diga se com a mesma regra é possível resolver a $\int \frac{dx}{x^2-4}$ fundamenta sua resposta, e diga que tipo de integral se trata.

c) Calcular $\int \frac{(x+1)}{x^3+x^2-6x}dx$

d) Calcular $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$

Com esta atividade esperava-se que uma parte dos alunos, não apresentassem dificuldades em responder as questões apresentadas, pois na turma havia 14 estudantes que estavam repetindo a disciplina de cálculo II e isto os levaria a socializar o conhecimento, favorecendo a discussão dos conteúdos básicos na matéria de integração de funções racionais .

A 2ª atividade – realizada no laboratório de informática para resolver os itens a) e b) da 2ª atividade, usando o Maple, para, em seguida, confrotar essa solução com a solução encontrada por eles nos itens c) e d) da 1ª atividade, quando usaram lapís e papel. E na 2ª atividade também foram acrescidas mais três questões novas, (c, d, e) criando condições para a exploração de conteúdos básicos necessários à resolução de integrais de funções racionais.

Segunda atividade.

Quadro nº 4: Questões da 2ª atividade.

Com ajuda do software Maple determina a solução das integrais abaixo:

$$a)\int \frac{(x+1)}{x^3+x^2-6x}dx$$

$$b)\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$$

$$c)\int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{x^3+x^2-2x}dx$$

$$d)\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$$

$$e)\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$$

Fonte: Dados da Pesquisa

Seu objetivo é que o aluno como futuro professor de matemática desse importância ao software e percebesse que o mesmo apresenta a solução da integral, mas não fornece os passos detalhados até encontrar a resposta final. Esperávamos que a maioria dos alunos percebessem que: para o software chegar até ao resultado fez-se uma série de operações usando conteúdos básicos.

A 3ª atividade – A primeira questão (a) tem como objetivo levar os alunos a completar, algébricamente, com lápis e papel os passos omitidos pelo software Maple nas questões (a, b, c, d, e) resolvidas da 2ª atividade. E a segunda questão (b) tem como objetivo levar os alunos a identificar e nomear os conteúdos básicos utilizados ao completar os passos omitidos pelo Maple. **Terceira Atividade.**

Quadro nº 5: Questões da 3ª Atividade.

a) Para cada uma das integrais da segunda atividade e como futuro professor de matemática complete os passos omitidos pelo software Maple.

b) Descreva os conteúdos básicos usados por você para encontrar as soluções apresentada pelo software Maple.

Fonte: Dados da Pesquisa

Essas três atividades da sequência didática foram pensadas e idealizadas para introduzir a resolução de integrais de funções racionais e contribuir na discussão de conteúdos básicos de matemática com os alunos da área.

Toda a aprendizagem pretendida na sequência didática está baseada na sistematização/construção, as questões foram elaboradas com a preocupação de desequilibrar, motivar e manter interesse dos alunos,(Rezende. 2003). Elas foram desenvolvidas com a preocupação de ter uma abordagem construcionista, com predominância do aspecto das regras de integração, habilidades algébricas, computacionais e técnicas de cálculos.

O envolvimento do aluno nas atividades da sequência foi de ultrapassar o papel passivo. De um estudante que escuta, lê, decora e de repete fielmente os ensinamentos do professor, tornou-se criativo, critico, pesquisador atuante, para produzir o seu conhecimento.

No desenvolvimento das atividades surgiram algumas dificuldades referente ao conteúdo e uso do computador. E Estas dificuldades foram tratadas pelo professor pesquisador, juntamente com os alunos.

A utilização do computador, na segunda atividade, foi um fator de inovação na realização do trabalho. Os alunos apesar de usar computador acessando internet, não têm familiaridade com os comandos do software matemático e isto levou o professor pesquisador, antes de aplicar a atividade, a dar uma aula acerca dos comandos do software. Após a aula e, no decorrer da atividade, os alunos foram interagindo com o software e dominando os comandos básicos.

Numa análise global, as atividades foram bem aceitas pelos alunos. Eles as consideraram interessantes, inovadoras, motivadoras, desafiadoras despertando o desejo de estudar mais os conteúdos básicos para da melhor maneira aprender a resolver integrais de funções racionais. Também extremamente motivador, eles saberem da existência de software matemáticos que podem auxiliar na sua aprendizagem.

As socializações realizadas no final de cada atividade favoreceu a conscientização da aprendizagem realizada.

Nas falas apresentadas a seguir observamos que o significado atribuído pelos alunos às atividades, com a ajuda do software, é de inovação e de descoberta. São ressaltados os aspectos importantes de aprender com o software, a possibilidade de ter a solução e ir à busca dos passos para se chegar a solução, possibilita a compreensão dos resultados e a construção do conhecimento.

A socialização que encerrava cada atividade, concluía e formalizava o conhecimento desenvolvido. Ela era um instrumento norteador para um repensar do professor sobre o desenvolvimento da atividade, sua postura de professor pesquisador e sobre a aprendizagem dos alunos.

Após uma observação minunciosa e profunda nas atividades feitas pelas 25 duplas, procuramos tornar o processo de análise da pesquisa menos trabalhosa, e evitando descrever a fala de todas as duplas, para tal nos limitamos a considerar três, como amostra.

O ponto principal, que a aplicação da sequência didática procurou modificar, foi de passar de um ensino que privilegia técnicas e formulas (algoritmos) que valoriza conteúdos, para um ensino focado na compreensão e significação dos conceitos. Esta mudança de foco fica evidenciada nas considerações dos alunos citados e na análise dos resultados apresentados nos demais itens deste capítulo.

QUADRO RESUMO: descritor das questões analisadas nas três atividades desenvolvidas pela amostra da pesquisa.

Quadro nº 6: Resumo das Questões.

Act.	**QUESTÕES**	**TÉCNICA DE RESOLUÇÇÃ**	**SOLICITAÇÃO AS 25 DUPLAS DOS ALUNOS**	**PERFORMANCE DAS TRÊS DUPLAS(AMOSTRA)**		
				GRUPO Nº1	**GRUPO Nº2**	**GRUPO Nº3**
1ª	I $\int \frac{dx}{x-4}$	Substituição de variável, e uso imediato da tabela.	Resolver, usando lapis e papel e tabela de integração	Solução manual correta	Solução manual correta	Solução manual correta
1ª	II $\int \frac{dx}{x^2-4}$	Funções parciais: fatores distintos do 1º grau, uso imediata de tabela	Reolver, ssando lapis e papel, discutir se o método usado na primeira serve para esta.	Solução manual correta	Solução I correta	Solução não correta
1ª,2ª e 3ª	III $\int \frac{(x+1)}{x^3+x^2-6x}dx$	Funções parciais: fatores distintos do 1º grau, uso do computador, papel e lapis.	Tentar resolver a mão, na 1ª atividade. Resolver usando Maple na 2ª atividade e completar os passos omitidos pelo Maple 3ª atividade	Solução manual correta	Solução correta	Solução não correta 1ª atividade
1ª, 2ª e 3ª	IV $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$	Funções parciais: fatores repetidos do 1º grau, uso do computador, papel e lapis.	Tentar resolver a mão, na 1ª atividade Resolver usando Maple na 2ª atividades e completar os passos omitidos pelo Maple 3ª atividades	Solução correta	Solução correta	Solução não correta 1ª atividae
2ª e 3ª	V $\int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+}{x^3+x^2-2x}$	Funções parciais: fatores repetidos do 1º grau, uso do computador, papel e lapis.	Resolver usando Maple na 2ª atividades e completar os passos omitidos pelo Maple 3ª atividades	Solução correta	Solução correta	Solução correta

2ª e 3ª	VI $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}$	Funções parciais: fatores distintos do 2º grau, uso do computador, papel e lapis.	Resolver usando Maple na 2ª atividades e completar os passos omitidos pelo Maple 3ª atividades	Solução correta	Solução correta	Solução correta
2ª e 3ª	VII $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x -}{(x^2+2)^3}$	Funções Racionais: fatores repetidos do 2º grau, uso do computador, papel e lapis.	Resolver usando Maple na 2ª atividades e completar os passos omitidos pelo Maple 3ª atividades	Solução correta	Solução correta	Solução correta

Fonte: Dados da pesquisa

Para acompanharmos o desenvolvimento e a significação das atividades desenvolvidas, analisaremos, separadamente as respostas das duplas 1, 2 e 3 (amostra do nosso trabalho). Estas duplas foram escolhidas, por representarem os três níveis de conhecimento: Bom, Médio e Regular percebidos em sala de aula durante a pesquisa. Os nomes usados nas duplas são fictícios: El –Ed dupla 1(bom), Jo – Ra dupla 2(mádio) e Fran – Sam dupla 3(regular).

Por meio desta amostra, teremos uma visão global das concepções, conjecturas, validações, desenvolvimento do pensamento matemático, aplicação dos conteúdos básicos em situações problema e o surgimento de redes de conhecimento favorecido pela utilização do computador no ensino e aprendizagem que pode ser estendida a todos os sujeitos da pesquisa.

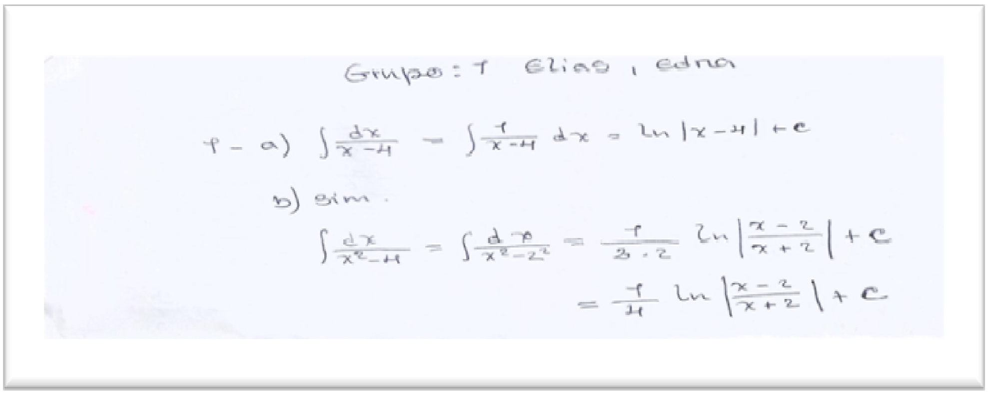
6.3 Descrição e Análise dos Resultados

A proposta dessa pesquisa: discutir conteúdos básicos de matemática a partir da solução sintética de integrais de frações racionais apresentadas na tela do computador para as atividades organizadas nessa pesquisa nos permitirá realizar uma descrição e análise, não sequencial das questões conforme a seguir.

ATIVIDADE 1 – questão I e II,(Quadro nº5) o objetivo destas questões era ambientar e familiarizar os alunos quanto às regras diretas, tabela de integração e os métodos de integração por substituição e por partes. A totalidade das duplas respondeu corretamente a questão I: validando o conhecimento de integração por substituição simples. Na questão II, o grupo nº 3 não conseguiu resolver. A seguir, a solução dos grupos.

El – Ed: A dupla acertou a questão I e II. Mas o grupo não respondeu à pergunta formulada: se seria possivel usar a mesma regra do item anterior. Valeram-se de uma tabela de integração e mostraram, capacidade algoritimica.

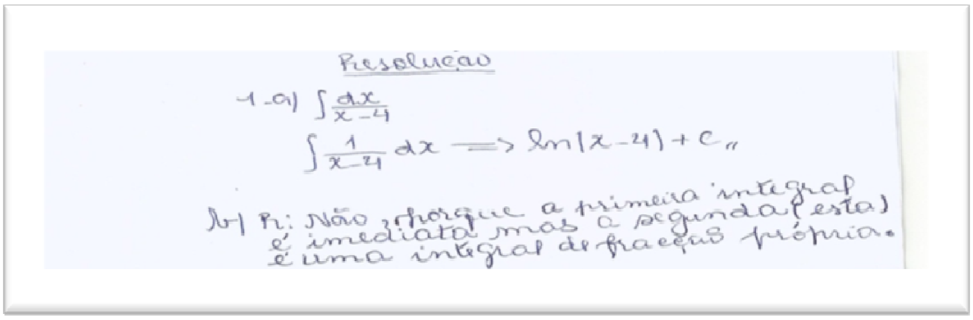
Figura nº 2: Protocolo da resolução da primeira atividade questão I e II pela dupla El – Ed.



Fonte: Dados da Pesquisa

Jo – Ra: A dupla acertou a questão I e descobriu que não é possível resolver a queatão II com a mesma regra. Esta dupla demonstrou estar atenta aos diferentes padrões de um integrando e à concepção da técnica de substituição de variáveis na resolução de integrais.

Figura nº 3: Protocolo de resolução da primeira atividade questão I e II pela dupla Jo – Ra

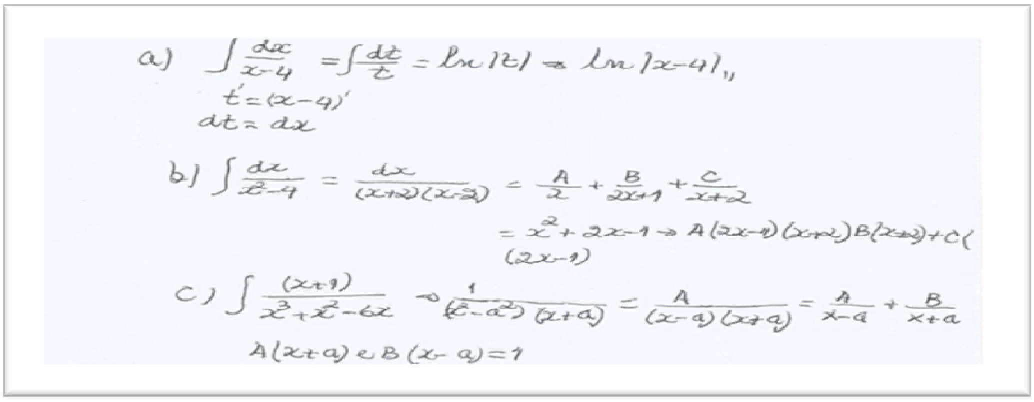


Fonte: Dados da Pesquisa

Valendo-se da tabela de integrais onde a integral de $\int \frac{dx}{u} = \ln|u| + c$ a dupla resolveu considerando x-4 =u, e por se tratar de uma dupla, formada por uma estudante repetente, não teve dificuldade em identificar que a questão II era uma integral de fração própria.

Fran – Sam: A dupla acertou a questão I tentou resolver a questão II usando o conteúdo de decomposição em frações parciais, mas faltou à dupla domínio desse tópico da matemática básica, que exige raciocínio algorítimico e habilidade algébrica.

Figura nº 4: Protocolo de resolução da primeira atividade questão I e II pela dupla Fran – Sam



a) $\int \frac{dx}{x-4} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| = ln|x-4|$

$t' = (x-4)'$

$dt = dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{dx}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{x+2}$

$= x^2+2x-1 \to A(2x-1)(x+2)B(x+2)+C($

$(2x-1)$

c) $\int \frac{(x+1)}{x^3+x^2-6x} \to \frac{1}{(x^2-a^2)(x+a)} = \frac{A}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$

$A(x+a)$ e $B(x-a)=1$

Fonte: Dados da Pesquisa

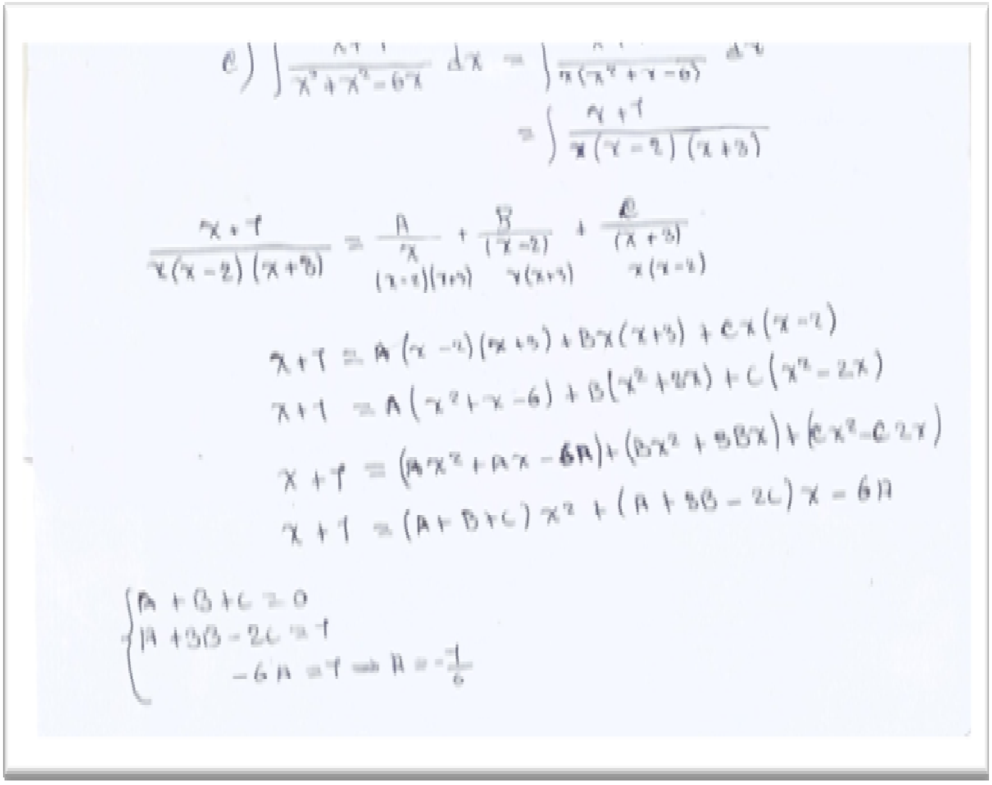
O Protocolo da dupla acima, nos mostra que na questão I os mesmos usaram o método de substituição, e acertaram. Na questão II a dupla, conseguiu decompor denominador, ja que se trata de diferença de quadrados, mas o não conseguiu fazer a decomposição, achando o mÍnimo multiplu comum das frações parciais.

Com a questão III e IV, (Quadro nº 5) pretendiamos provocar discussões e a reflexão dos alunos sobre as técnicas a usar para a resolução dessas questões, uma vez que nem a tabela de integração nem os métodos de substituição nem por partes nos levam à solução. Estas duas questões resolvidads manualmente serão analisadas em conjunto com as resolvidas usando o software maple.

Análise da questão III pela dupla El e Ed.

El – Ed: A dupla acertou a questão III, trabalhou de maneira a encontrar integrais imediatas. A seguir, o protocolo da resolução da dupla, usando papel e lápis, e a solução apresentada usando o software maple.

Figura nº 5: Protocolo de resolução da primeira atividade questão III pela dupla El – Ed



$$e)\ \int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = \int \frac{x+1}{x(x^2+x-6)}\,dx$$

$$= \int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+3)}$$

$$(x-2)(x+3) \quad x(x+3) \quad x(x-2)$$

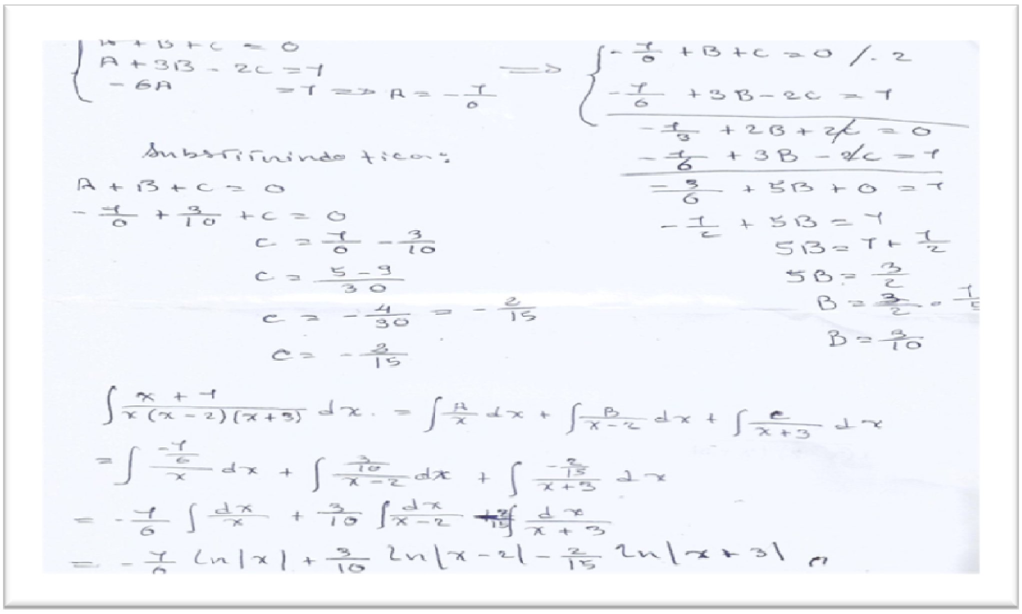
$$x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

$$x+1 = A(x^2+x-6) + B(x^2+3x) + C(x^2-2x)$$

$$x+1 = (Ax^2+Ax-6A)+(Bx^2+3Bx)+(Cx^2-C2x)$$

$$x+1 = (A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A$$

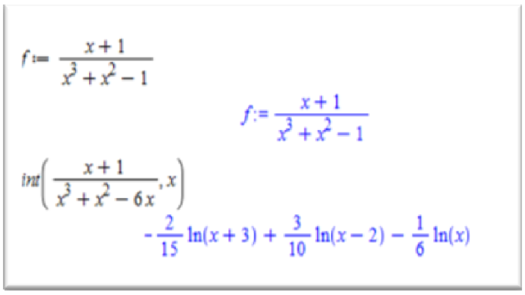
$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+3B-2C=1 \\ -6A=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{6} \end{cases}$$



Fonte: Dados da Pesquisa

No protocolo acima, a dupla resolveu a integral e discutiu conteúdos básicos, fez a decomposição do denominador, da soma em produtos, encontrou o sistema de equações e trabalhou o mesmo usando o método de substituição para encontrar os valores dos parametros A, B e C. Finalmente determinou o valor da integral apresentada. E esta coincidiu com o valor da integral resolvida com o software maple, como se vê a seguir.

Figura nº 6: Protocolo de resolução da questão III usando o software Maple pela dupla El – Ed

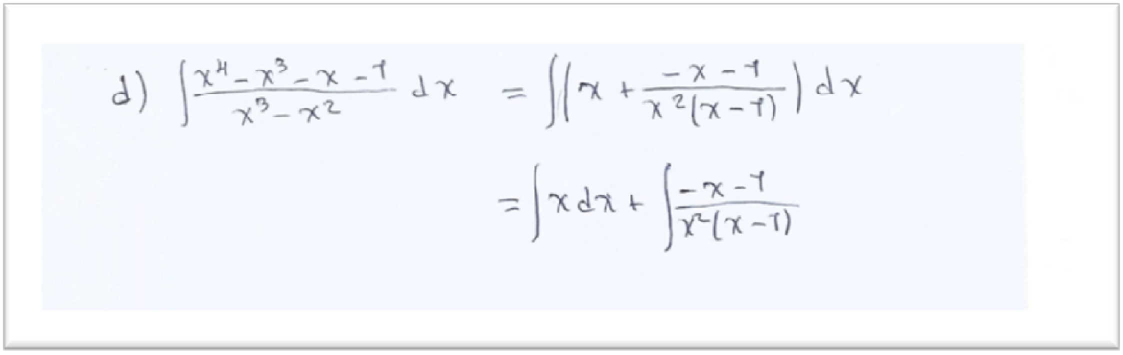


Fonte: Dados da Pesquisa

Análise da questão IV resolvida pela dupla El e Ed.

Na resolução da questão IV, a dupla não resolveu usando papel e lápis alegando que o tempo ja não os permitia. No uso do maple, a dupla foi muito bem, resolveu sem problemas e depois de converter a função em frações parciais não foi preciso calcular a integral com o Maple pois as fracões apresentadas davam integrais emediatas. Comforme destaca Melo (2002) “o emprego do computador ajuda o aluno a libertar-se da execução de algoritmos e procedimentos demorados, podendo este tornar-se criativo, critico, pesquisador e atuante”.

Figura nº 7: Protocolo de resolução da questão IV usando lapis e papel pela dupla El – Ed

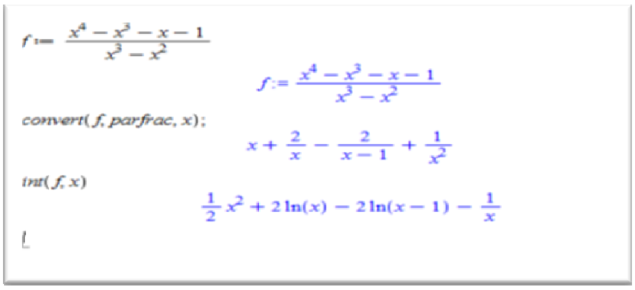


Fonte: Dados da Pesquisa

Acima temos o protocolo da dupla, a mesma conseguiu fazer a divisão do pólinômio, separou convenientemente a integral mas não deu continuidade, apresentando debilidades no conhecimemto das frações parciais repitidos do 1º grau.

A seguir apresentamos, a resolução feita pelo computador, usando o software mwple.

Figura nº 8: Protocolo de resolução da questão IV usando o software Maple pela dupla El – Ed

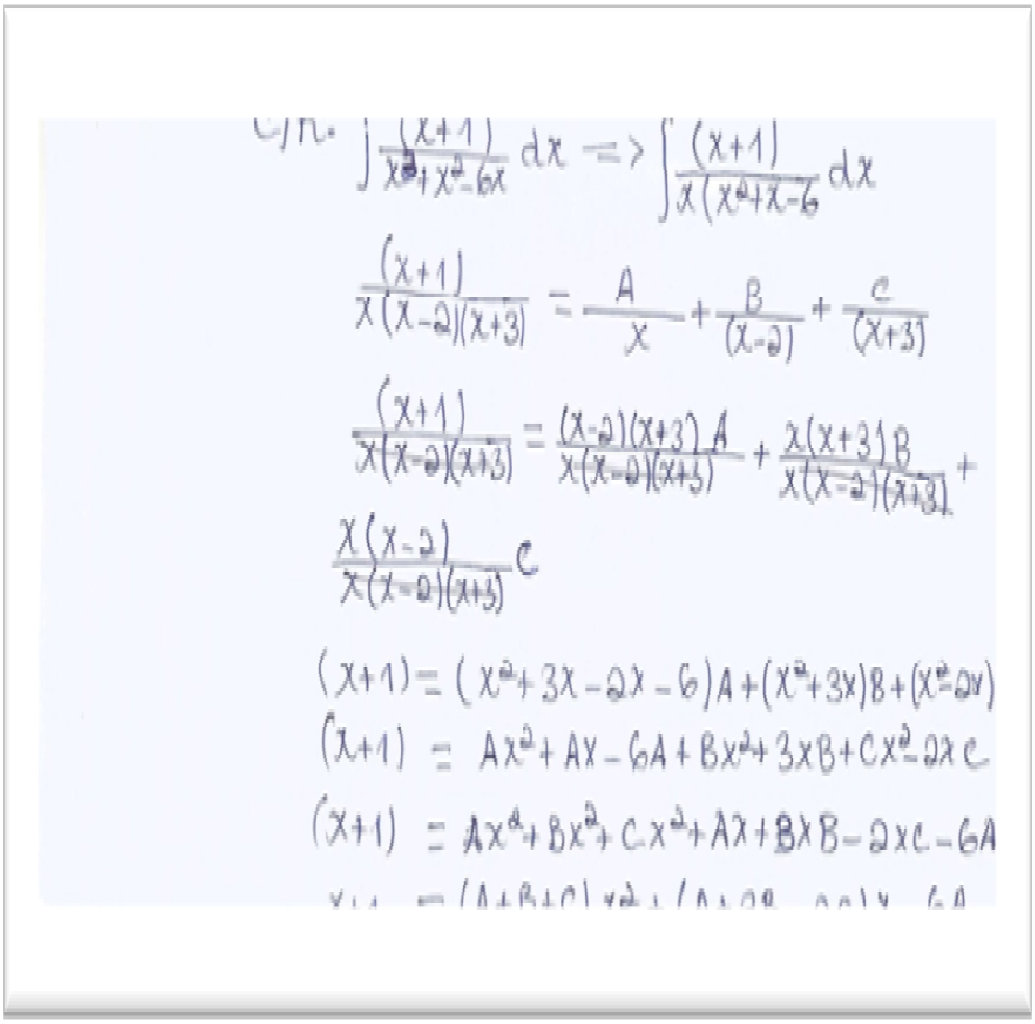


Fonte: dados da Pesquisa

Análise da questão III resolvida pela dupla Jo e Ra.

Jo – Ra: A dupla não teve dificuldade no começo da resolução da questão III, mas no final equivocou-se e errou por não aplicar a propriedade da integração da constante pela variável. Após resolverem utilizando o maple, confrontaram as soluções e se aperceberam do erro. Conforme define D`Ambrósio (2007) “é no comportamento, na prática, no fazer que se avalia, redefine e se reconstroi o conhecimento”. E aqui deu para perceber que a dupla reconstruiu o connhecimento.

Figura nº 9: protocolo de resolução da questão III pela dupla Jo – Ra



$$\int \frac{(x+1)}{x^3+x^2-6x}dx \Rightarrow \int \frac{(x+1)}{x(x^2+x-6}dx$$

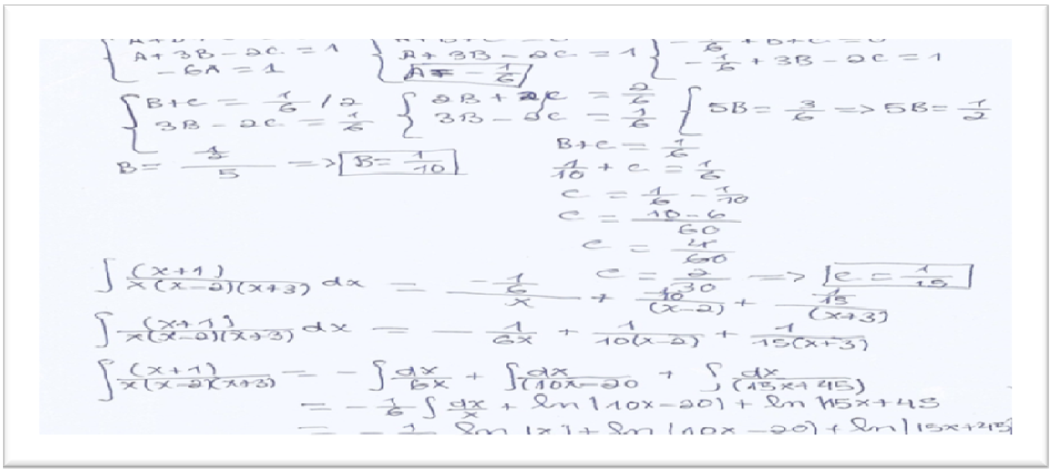
$$\frac{(x+1)}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+3)}$$

$$\frac{(x+1)}{x(x-2)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+3)A}{x(x-2)(x+3)} + \frac{x(x+3)B}{x(x-2)(x+3)} + \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+3)}C$$

$$(x+1) = (x^2+3x-2x-6)A+(x^2+3x)B+(x^2-2x)$$

$$(x+1) = Ax^2+Ax-6A+Bx^2+3xB+Cx^2-2xC$$

$$(x+1) = Ax^2+Bx^2+Cx^2+Ax+BxB-2xC-6A$$



$$\begin{cases} A+3B-2C=1 \\ -6A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A+3B-2C=1 \\ \boxed{A=-\frac{1}{6}} \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{6}+3B-2C=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B+C=\frac{1}{6} \;/2 \\ 3B-2C=\frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} 2B+2C=\frac{2}{6} \\ 3B-2C=\frac{1}{6} \end{cases} \quad 5B=\frac{3}{6} \Rightarrow 5B=\frac{1}{2}$$

$$B=\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{10}}$$

$$B+C=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{10}+C=\frac{1}{6}$$

$$C=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$$

$$C=\frac{10-6}{60}$$

$$C=\frac{4}{60}$$

$$C=\frac{2}{30} \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{15}}$$

$$\int \frac{(x+1)}{x(x-2)(x+3)}dx = \frac{-\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{1}{10}}{(x-2)} + \frac{\frac{1}{15}}{(x+3)}$$

$$\int \frac{(x+1)}{x(x-2)(x+3)}dx = -\frac{1}{6x} + \frac{1}{10(x-2)} + \frac{1}{15(x+3)}$$

$$\int \frac{(x+1)}{x(x-2)(x+3)} = -\int \frac{dx}{6x} + \int \frac{dx}{(10x-20} + \int \frac{dx}{(15x+45)}$$

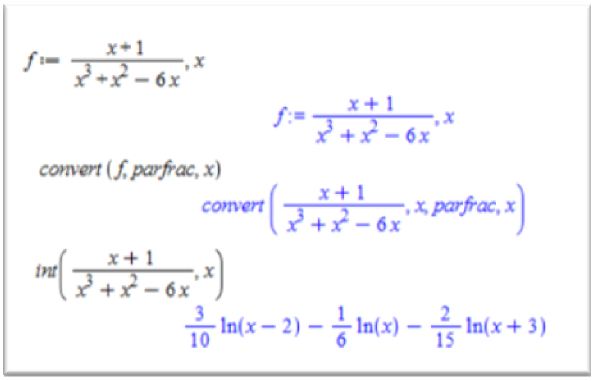
$$= -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} + \ln|10x-20| + \ln|15x+45$$

Fonte: Dados da Pesquisa

Na resolução da questão III a dupla acima, demonstrou conhecimento e domínio dos conteúdos básicos, converteu a função em frações parciais de fator linear do primeiro grau não repetidos, transformou em sistema de equações e resolveu, para encontrar o valor dos parâmetros A, B, e C. Mas ao determinar as integrais esqueceu-se da seguinte propriedade: $\int c dx = c \int dx = cx$ e isto levou no final o grupo a errar.

Na resolução usando o software meple, o grupo fez sem nenhum problema e isto os possibilitou na comparação dos resultados a reverem o erro cometido na resolução feita com lápis e papel. A seguir a resolução feita com o software meple.

Figura nº 10: protocolo de resolução da questão III usando o software Maple pela dupla Jo – Ra

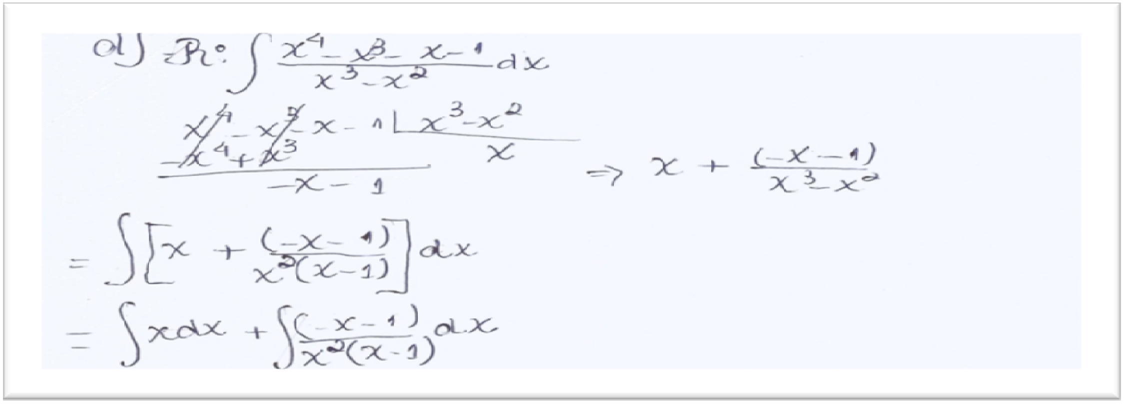


Fonte: Dados da Pesquisa

Análise da questão IV resolvida pela dupla Jo e Ra.

No questão IV, a dupla recorreu a conteúdos básicos fez a divisão do polinômio mas não deu continuidade.“alegando que se esqueceu dos procedimentos de decomposição de frações de exercícios com as características da encontrada”.

Figura nº 11: Protocolo de rsolução da questão IV usando lapis e papel pela dupla Jo – Ra

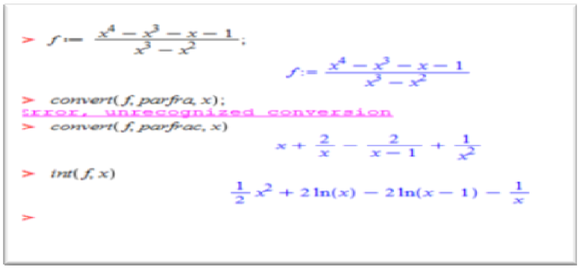


Fonte: Dados da Pesquisa

Como podemos observar, a dupla fez a divisão de polinômio, demonstrando domínio nos conteúdos básicos, mas não deu continuidade.

Na resolução usando o computador, após o maple converter a função dada em funções parciais a dupla se apercebeu logo da solução da integral, mas uma vez concordamos com Melo (2002) “o emprego do computador ajuda o aluno a libertar-se da execução de algoritimos e procedimentos demorados, podendo este tornar-se criativo, crítico, pesquisador e atuante”. A seguir a resolução usando o maple.

Figura nº 12: Protocolo da resolução da questão IV, usando o software Maple pela dupla Jo – Ra



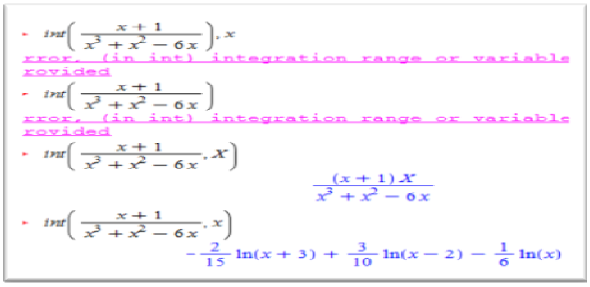
Fonte: Dados da Pesquisa

Análise da III e IV questão pela dupla Fran e Sam.

Fran – Sam: A dupla não resolveu as questões III e IV usando lápis e papel, nesta pediram que lhes fosse permitido usar o livro de cálculo para poderem encontrar exercícios semelhantes, que os pudesse guiar. O que não foi permitido porque o objetivo naquele momento era provocar a curiosidade e discussão.

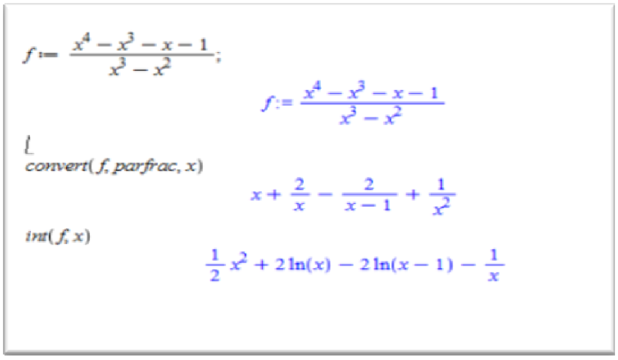
Na resolução usando o software maple tiveram algumas dificuldades com a entrada dos comandos, na questão III, mas com a ajuda do professor pesquisador, superaram a dificuldade, ja na questão IV não tiveram qualquer problema. Concordamos com Dietrich (2009) “O professor precisa estimular a criatividade do aluno na busca de novos problemas e de soluções”. A seguir a solução usando o maple das questões III e IV.

Figura nº 13: Protocolo de resolução da questão III usando o software Maple pela dupla Fran – Sam



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura nº 14: Protocolo de resolução da questão IV usando o software Maple pela dupla Fran – Sam



Fonte: Dados da Pesquisa

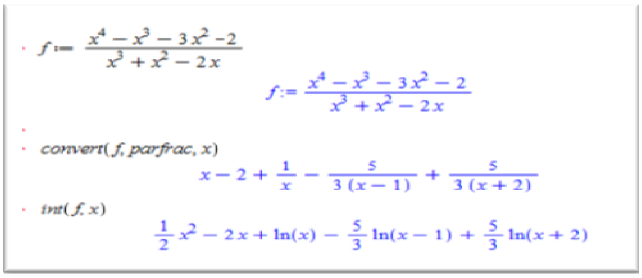
Segunda Atividade.

Nesta inserimos as questões III, IV,V, VI e VII (Quadro nº 5) e cada uma com o seu grau de dificuldade a questão III e IV serviu para que as duplas comparassem os resultados encontrado na resolução com lápis e papel e a encontrada usando o software maple. As questões V, VI e VII tinham como objetivo levar o aluno a endagar acerca dos passos omitidos pelo software maple e que regras seguir para encontrar a mesma solução. Estes itens serão analizados com a primeira questão da terceira atividade.

Análise das questões V, VI e VII e da primeira questão da terceira atividade, pela dupla El e Ed.

El –Ed: A dupla não teve problema na resolução das questões V, VI e VII pois já estavam familiarizados com os comandos achando fácil e divertido o aprendizado com o software. A seguir a solução da dupla usando o software.

Figura nº 15: Protocolo de resolução da questão V usando o software Maple pela dupla El – Ed



$f := \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

$$f := \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$$

convert(*f*, *parfrac*, *x*)

$$x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{3(x-1)} + \frac{5}{3(x+2)}$$

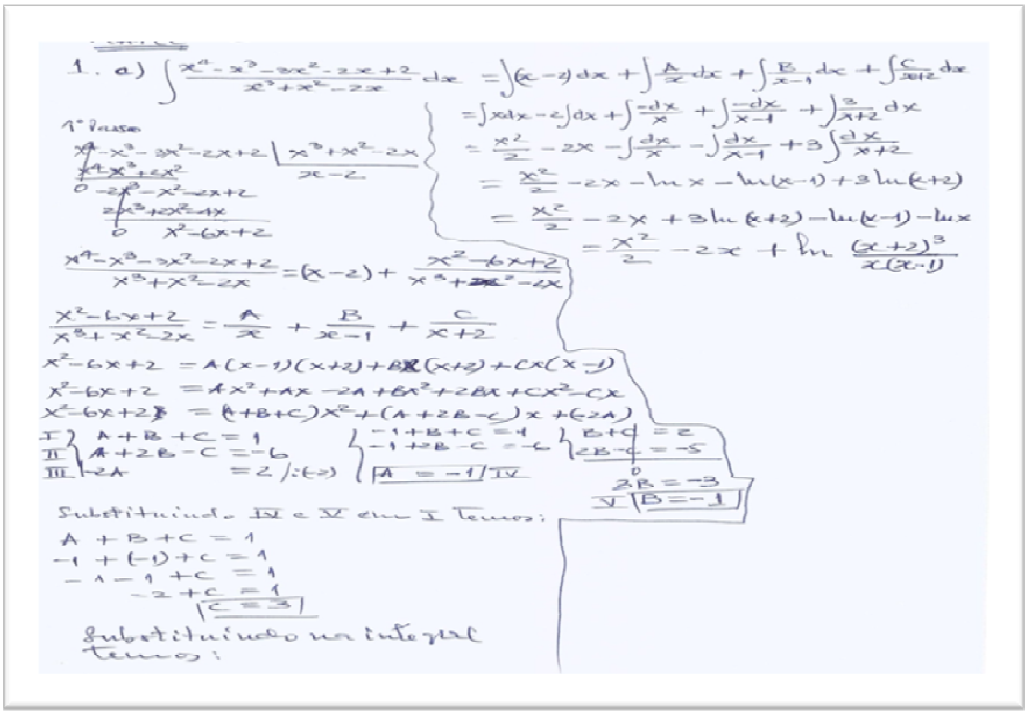
int(*f*, *x*)

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x) - \frac{5}{3}\ln(x-1) + \frac{5}{3}\ln(x+2)$$

Fonte: Dados da Pesquisa

Na resolução que se segue, apresentamos a discução de conteúdos básicos mediante a resolução das integrais completando os passos omitidos pelo software maple.

Figura nº 16: protocolo completando os passos omitidos pelo maple da questão V pela dupla El – Ed



1. a) $\int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int (x-2)dx + \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-1}dx + \int \frac{C}{x+2}dx$

$= \int x dx - 2\int dx + \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{-dx}{x-1} + \int \frac{3}{x+2}dx$

$= \frac{x^2}{2} - 2x - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2}$

$= \frac{x^2}{2} - 2x - \ln x - \ln(x-1) + 3\ln(x+2)$

$= \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln(x+2) - \ln(x-1) - \ln x$

$= \frac{x^2}{2} - 2x + \ln \frac{(x+2)^3}{x(x-1)}$

1º Passo

$\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = (x-2) + \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

$\frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$x^2 - 6x + 2 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$

$x^2 - 6x + 2 = Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx$

$x^2 - 6x + 2 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x + (-2A)$

I) $A + B + C = 1$
II) $A + 2B - C = -6$
III) $-2A = 2 \; /:(-2)$ $\boxed{A = -1}$ IV

$-1 + B + C = 1$, $-1 + 2B - C = -6$; $B + C = 2$, $2B - C = -5$; $3B = -3$; V $\boxed{B = -1}$

Substituindo IV e V em I Temos:

$A + B + C = 1$
$-1 + (-1) + C = 1$
$-1 - 1 + C = 1$
$-2 + C = 1$
$\boxed{C = 3}$

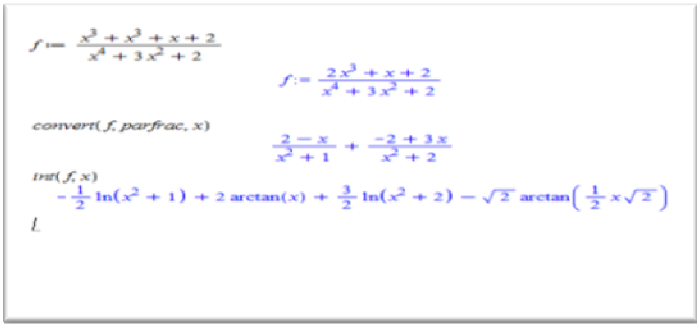
Substituindo na integral temos:

Fonte: Dados da Pèsquisa

A dupla ao completar os passos omitidos pelo maple começou pela divisão de polinômios, transformando a função inicial em soma de um polinômio e uma fração parcial própria. Resolveram o sistema de equações encontrando o valor dos parâmetros e apresentaram a solução da integral.

Na questão VI, usando Maple a dupla escreveu a função, converteu a função em funções parciais e finalmente determinou a solução da integral, como se vê a seguir.

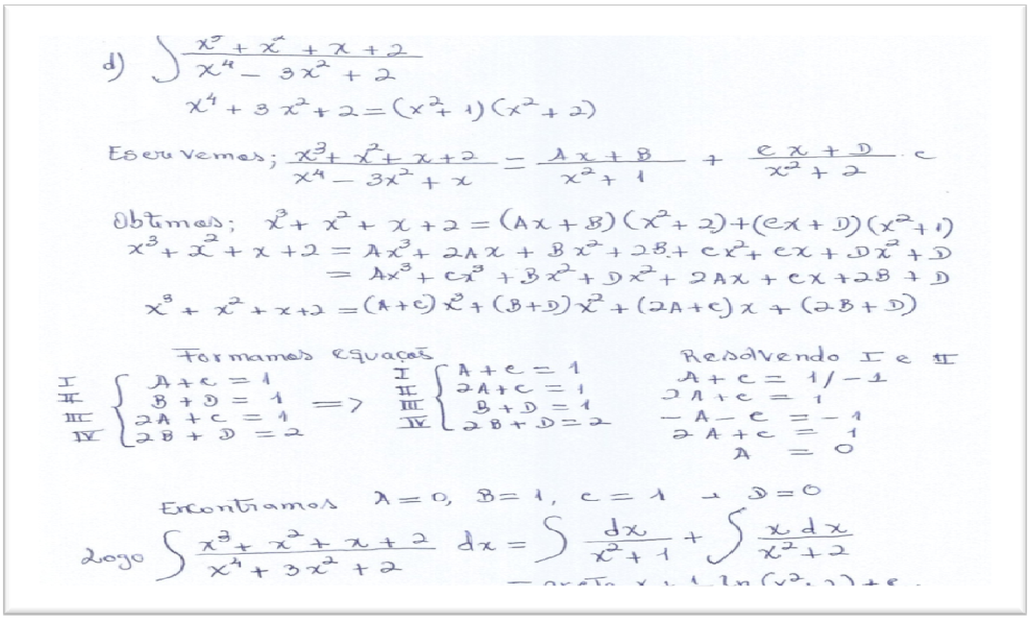
Figura nº 17: Protocolo de resolução da questão VI usando o software Maple pela dupla EI– Ed



Fonte: Dados da Pesquisa

A resolução, completando os passos omitidos pelo software, nos é apresentada a seguir.

Figura nº 18: protocolo, completando os passos omitidos pelo maple da questão VI pela dupla EI – Ed

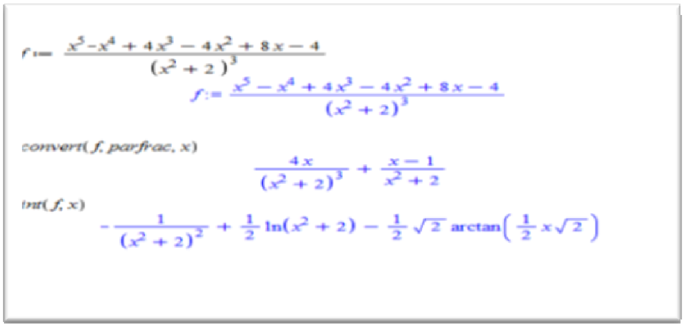


Fonte: Dados da Pesquisa

A resolução que a dupla apresenta completa os passos omitidos pelo software, para se chegar à solução da integral, nesta a dupla começa a decompor a soma em produtos, que faz parte de conteúdos básicos determina o mínimo múltiplo comum realiza operações algébricas para determinar o valor das variáveis e finalmente apresenta a integral.

Na questão VII a dupla El e Ed, por se tratar de uma função racional de fatores do segundo grau distintos a dupla primeiro determinou com o software as funções fraccionárias parciais e só em seguida determinou a integral, como se observa a seguir.

Figura nº 19: Protocolo de resolução da questão VII usando o software Maple pela dupla El –Ed



$f := \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$

$$f := \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$$

convert(*f*, *parfrac*, *x*)

$$\frac{4x}{(x^2+2)^3} + \frac{x-1}{x^2+2}$$

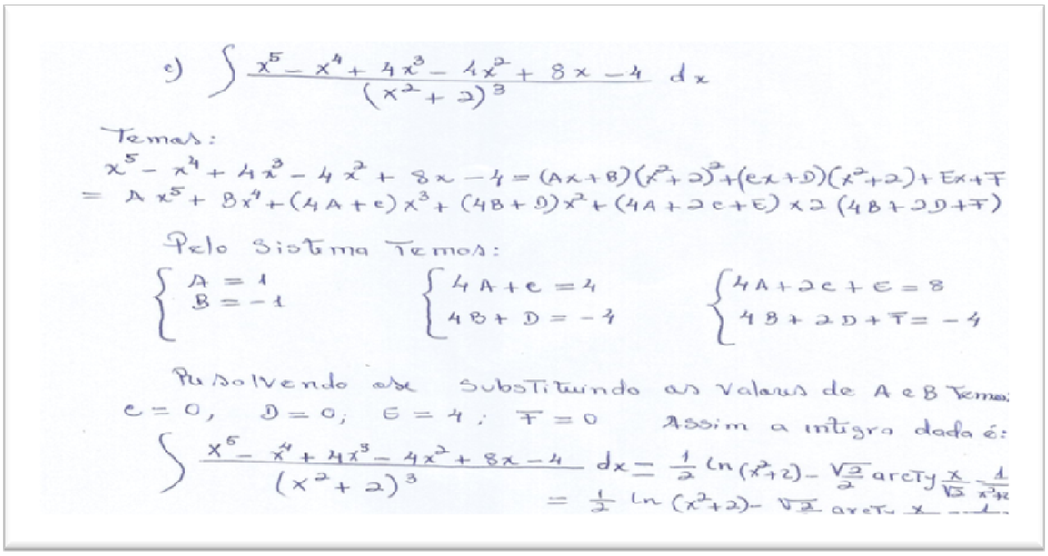
int(*f*, *x*)

$$-\frac{1}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right)$$

Fonte: dados da Pesquisa

A seguir observamos a resolução da dupla usando lápis e papel.

Figura nº 20: Protocolo completando os passos omitidos pelo maple da questão VII pela dupla El – Ed



c) $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}\,dx$

Temos:

$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax+B)(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2) + Ex+F$

$= Ax^5 + Bx^4 + (4A+C)x^3 + (4B+D)x^2 + (4A+2C+E)x + 2(4B+2D+F)$

Pelo Sistema Temos:

$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4A + C = 4 \\ 4B + D = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} 4A + 2C + E = 8 \\ 4B + 2D + F = -4 \end{cases}$

Resolvendo e substituindo os valores de A e B Temos:

$C = 0, \quad D = 0; \quad E = 4; \quad F = 0$ Assim a integra dada é:

$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcTg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x^2+2}$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \sqrt{2}\operatorname{arcTg} x \ldots$

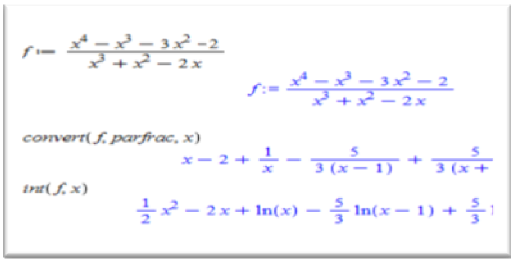
Fonte: Dados da Pesquisa

A dupla El e Ed na questão VII mostraram domínio das regras de resolução de integrais de funções racionais e domínio dos conteúdos básicos, apresentaram diretamente a função simplificada. Isto é não apresentaram a decomposição, diretamente colocaram o numerador da função no membro esquerdo e as variáveis no membro direito a multiplicar os valores achados mediante a determinação do mínimo múltiplo comum.

Análise das questões V, VI e VII e da primeira questão da terceira atividade, pela dupla Jo e Ra.

Jo – Ra: Assim como a outra dupla, esta também não teve problemas na resolução das questões V,VI e VII usando o software maple, comentando que “se as provas fossem assim todos os alunos aprovariam”, mas ao completarem os passos da Questão V a dupla não fez a divisão do polinômio já que se trata de uma Fração parcial impópria, e por esta falha não encontrou a solução apresentada pelo software.

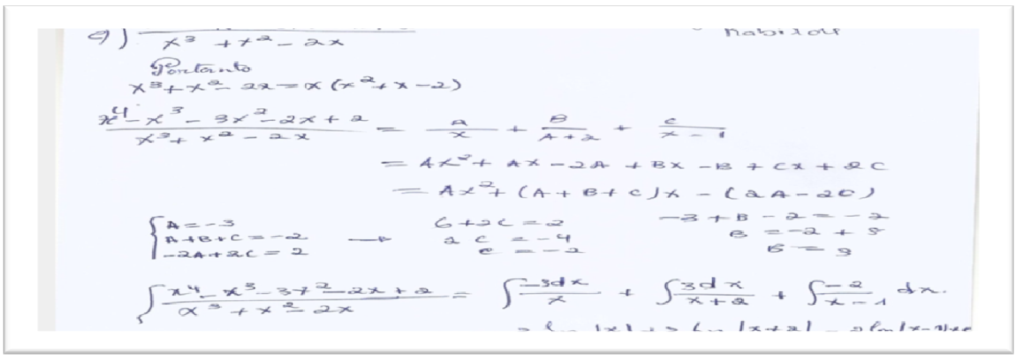
Figura nº 21: Protocolo de resolução da questão V usando o software Maple pela dupla Jo – Ra



Fonte: Dados da Pesquisa

A seguir o protocolo da dupla feita com lápis e papel.

Figura nº 22: Protocolo, completando os passos omitidos pelo maple da questão V pela dupla Jo – Ra



Fonte : Dados da Pesquisa

A dupla começou, pela fatoração do polinômio do denominador, que está certo esqueceu-se que se tratava de uma fração cujo grau do numerador é maior que do denominador, na qual teria que efetuar a divisão do polinômio. Esta distração da dupla os levou, à solução errada ao completarem os passos omitidos pelo maple.

Na resolução da questão VI, usando o maple a dupla não teve problemas, começou pela conversão da função em frações parciais, e em seguida achou o valor da integral da função parcial. Como se observa a seguir.

Figura nº 23: Protocolo de resolução da questão VI usando o software Maple pela dupla Jo – Ra

$f := \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$

$$f := \frac{2x^3+x+2}{x^4+3x^2+2}$$

convert(f, parfrac, x)

$$\frac{2-x}{x^2+1}+\frac{-2+3x}{x^2+2}$$

int(f, x)

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\arctan(x)+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right)$$

Fonte: Dados da Pesquisa

A seguir segue-se a questao da dupla completando com lápis os passos omitidos pelo software.

Figura nº 24: Protocolo, completando os passos omitidos pelo maple do a questão VI pela dupla Jo – Ra

d) $\frac{x+x^{\sim}+x+2}{x^4+3x^2-2}dx$

$x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$ Logo $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=$

$\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$ Donde $x^3+x^2+x+2=(Ax+B)(x^2+2)+$

$(Cx+O)(x^2+1)=(A+C)x^3+(B+O)x^2+(2A+C)x+2B+D$

Pelo sistema vem

$$\begin{cases}A+C=1\\B+D=1\\2A+C=1\\2B+D=2\end{cases}\qquad\begin{cases}A+C=1\\2A+C=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}B+D=1\\2B+D=2\end{cases}$$

Resolvendo os dois sistemas obtemos

$A=0$ $B=1$ $C=1$ e $D=0$ quer dizer

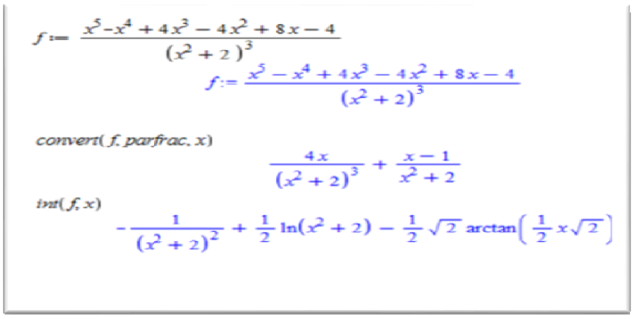
$\int\frac{x^3+x^2x-2}{x^4+3x^2+2}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{xdx}{x^2+2}=$ arctag$x-\frac{1}{2}\ln$

$(x^2+2)+c.$

Fonte: Dados da Pesquisa

Na resolução da questão VII usando o Maple, a dupla foi muito bem, como se observa a solução a seguir.

Figura nº 25: Protocolo de resolução da questão VII usando o software Maple pela dupla Jo– Ra



$f := \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$

$$f := \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$$

convert(f, parfrac, x)

$$\frac{4x}{(x^2+2)^3} + \frac{x-1}{x^2+2}$$

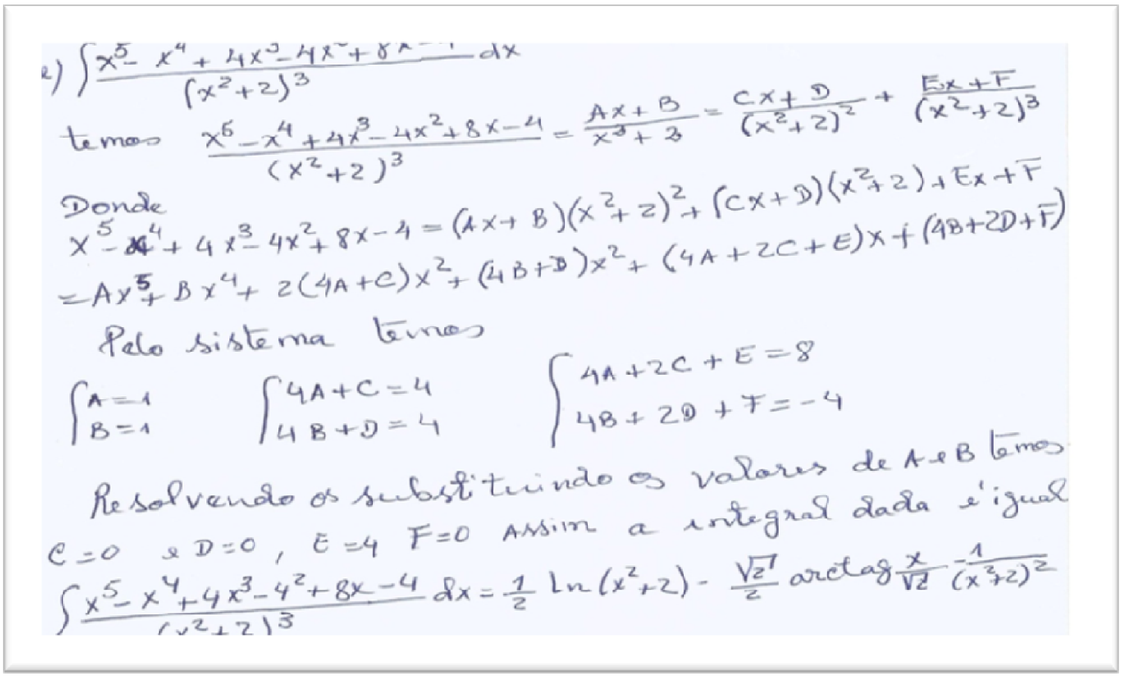
int(f, x)

$$-\frac{1}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right)$$

Fonte: Dados da Pesquisa

A seguir observamos a resolução completando os passos omitidos pelo maple.

Figura nº 26: Protocolo, completando os passos omitidos pelo maple da questão VII pela dupla Jo – Ra



2) $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}dx$

temos $\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} = \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$

Donde

$x^5 - \cancel{x}^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax+B)(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2) + Ex + F$

$= Ax^5 + Bx^4 + 2(4A+C)x^2 + (4B+D)x^2 + (4A+2C+E)x + (4B+2D+F)$

Pelo sistema temos

$\begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4A+C=4 \\ 4B+D=4 \end{cases}$ $\begin{cases} 4A+2C+E=8 \\ 4B+2D+F=-4 \end{cases}$

Resolvendo os substituindo os valores de A e B temos

$C=0$ e $D=0$, $E=4$ $F=0$ Assim a integral dada é igual

$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctag}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2}$

Fonte: Dados da Pesquisa

O objetivo da questão acima é discutir conteúdos básicos completando os passos omitidos pelo software maple, para o efeito a dupla apercebeu-se que se tratava de uma fração com fatores repitidos do 2º grau, fez a decomposição e achou o mínimo múltiplo comum dos denominadores, efetuou operações algébricas para encontrar o sistema de equação linear, resolveu o sistema de equação linear para encontrar o valores dos parametros A, B, C, D e E , no final apresentou o valor correto da integral.

Análise das questões V, VI e VII e da primeira questão da terceira atividade, pela dupla Fran e Sam.

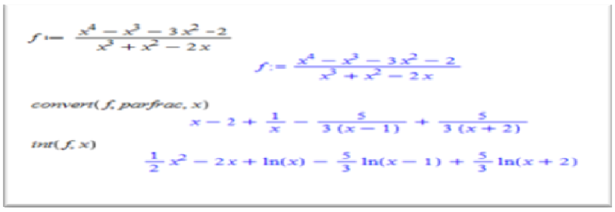
Fran – Sam: A dupla também não teve problema na resolução das questões V,VI e VII usando o software Maple, perguntando ao professor investigador "o porque de tanto trabalho ao exigirem dos mesmos a resolução de tantas integrais se já existem softwares que resolvem os exercícios" nesta fase o professor investigador teve de responder a pergunta da dupla e levou a turma como futuros professores de matemática, a compreenderem a importância de saberem resolver, "manualmente" aquilo que os softwares resolvem.

A dupla resolveu as questões V, VI e VII completando os passos omitidos pelo software, nesta parte o professor investigador ficou surpreso pelo desempenho das duplas e perguntando o que se passava visto que a dupla nunca havia visto integração de funções racionais. E esta dupla informou que depois da segunda atividade com o software, as mesmas criaram grupos de estudos para resolver integrais primeiro usando o software, e em seguida, com lápis e papel foram a busca dos passos omitidos, pelo software e isto os ajudou bastante.

Estamos de acordo com Gravina e Santarosa (1998) " Ambientes informatizados proporcionam um conhecimento matemático dinâmico, contribuindo para a aprensão do significado dos conteúdos; permitem maior interação do aluno com o conhecimento que está sendo construido e favorecem a simulação, permitindo ao educando criar seus próprios modelos para expressar seus pensamentos e ideias"

A seguir a solução da dupla usando o software maple da questão V.

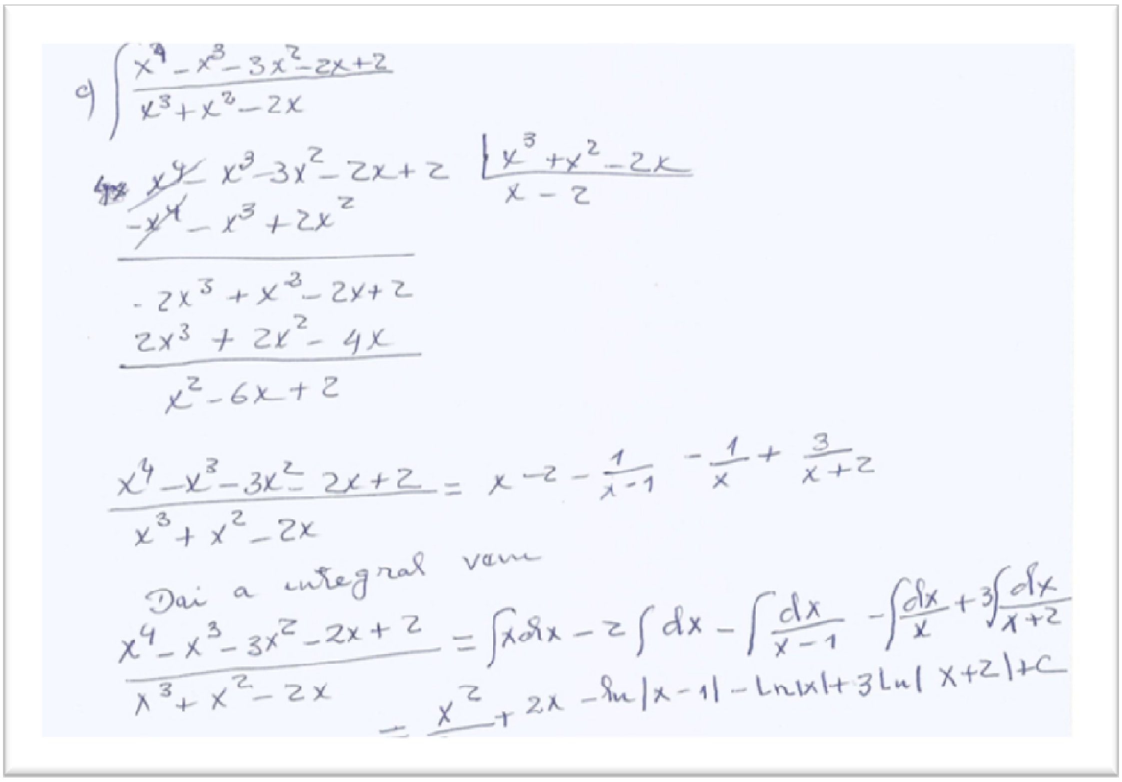
Figura nº 27: Protocolo de resolução da questão V usando o software Maple pela dupla Fran – Sam



Fonte: Dados da Pesquisa

A seguir apresentamos o protocolo da dupla usando lápis e papel.

Figura nº 28: Protocolo, completando os passos omitidos pelo maple da questão V pela dupla Fran – Sam

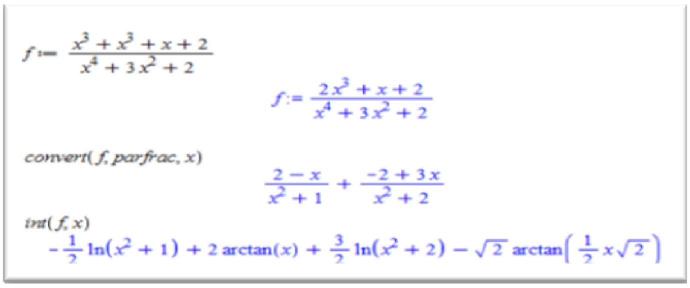


Fonte: dados da Pesquisa

O protocolo apresentado acima mostra a discução de conteúdos básicos omitidos pelo software ao dar a sulução da integral, para o efeito a dupla ao completar os passos omitidos realizou a divisão de polinômio. Com a divisão de polinômio reduziu a função inicial em frações parciais simples. Não nos apresentou a solução do sistema de equação mas para encontrar os valores do numerador das frações parciais teve de achar resolvendo um sistema de equação. E finalmente apresenta a solução da integral apresentada inicialmente pelo software.

Adiante mostramos a solução da questão VI resolvida pela dupla Fran e Sam usando o computador da qual, não encontrou problemas.

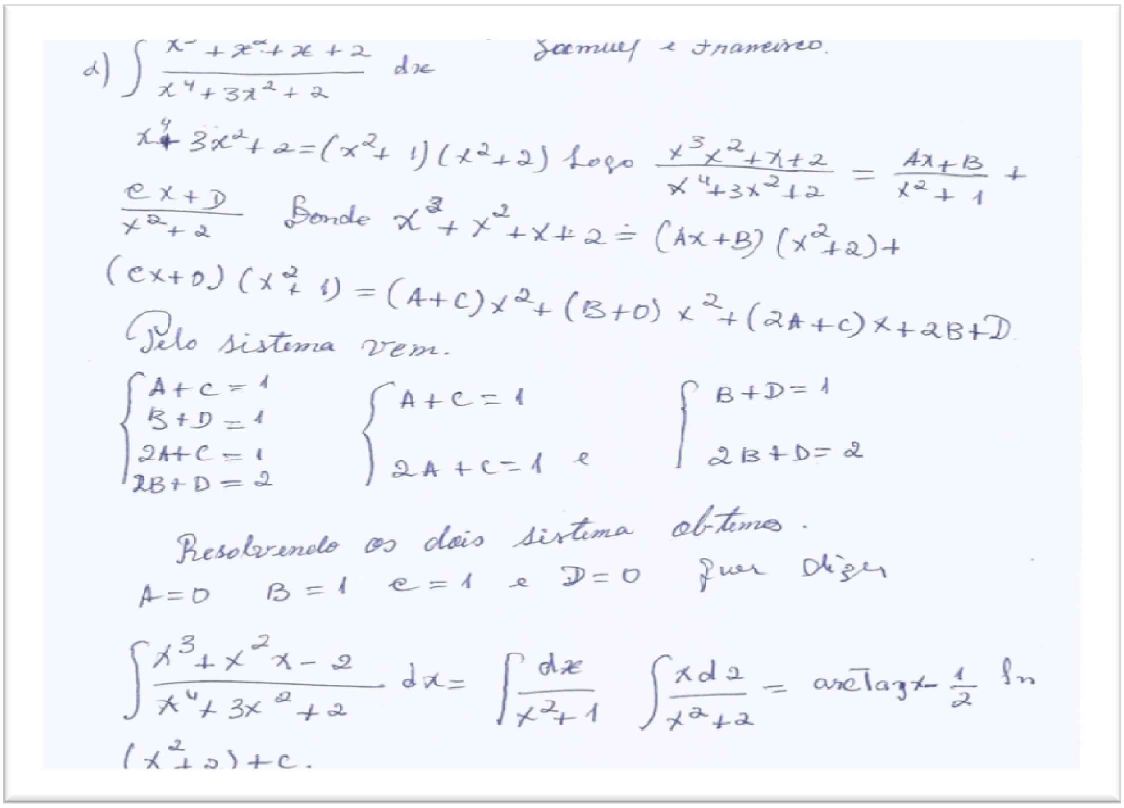
Figura nº 29: Protocolo de resolução da questão VI usando o software Maple pela dupla Fran – Sam



Fonte: Dados da Pesquisa

A seguir temos o protocolo usando lápis e papel.

Figura nº 30: Protocolo, completando os passos omitidos pelo maple da questão VI pela dupla Fran – Sam

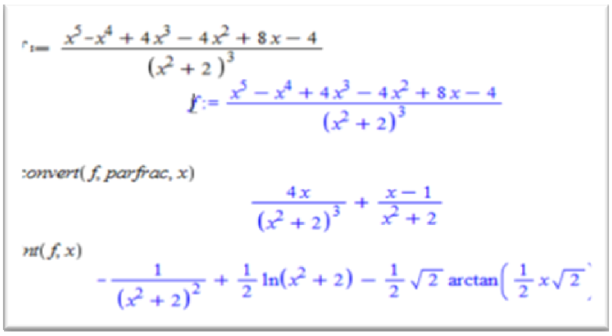


Fonte: Dados da Pesquisa

O protocolo acima nos mostra a discussão dos conteúdos básicos na resolução de integrais de funções racionais, nela aparece a transformação de somas em produtos, resolução de sistema de equação linear, e o domínio do mínimo múltiplo comum que fazem parte de conteúdos básicos.

A seguir a resolução da questão VII usando o computador pela dupla Francisco e samuel que mais uma vez demonstraram dominio dos comandos do software e apresentaram a solução da integral. Como se observa a baixo.

Figura nº 31: Protocolo de resolução da questão VII usando o software Maple pela dupla Fran– Sam



$$f := \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$$

$$f := \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$$

convert(f, parfrac, x)

$$\frac{4x}{(x^2+2)^3} + \frac{x-1}{x^2+2}$$

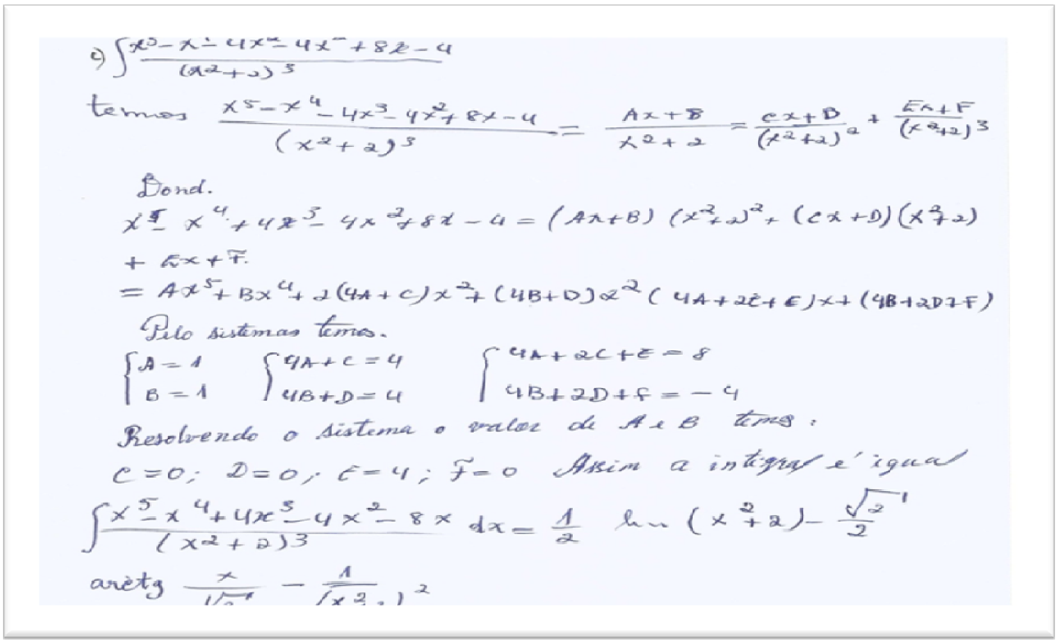
nt(f, x)

$$-\frac{1}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right)$$

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir o protocolo da dupla usando lápis e papel.

Figura nº 32: Protocolo, completando os passos omitidos pelo maple da questão VII pela dupla Fran – Sam



9) $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$

temos $\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} = \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$

Dond.

$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax+B)(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2) + Ex + F.$

$= Ax^5 + Bx^4 + 2(4A+C)x^3 + (4B+D)x^2 (4A+2C+E)x + (4B+2D+F)$

Pelo sistemas temos.

$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4A + C = 4 \\ 4B + D = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 4A + 2C + E = 8 \\ 4B + 2D + F = -4 \end{cases}$

Resolvendo o sistema o valor de A e B temos:

$C = 0$; $D = 0$; $E = 4$; $F = 0$ Assim a integral é igual

$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 8x}{(x^2+2)^3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ arctg $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2}$

Fonte: Dados da Pesquisa

Mas uma vez a dupla completa os passos omitidos pelo software, fazendo discussão de conteúdos básicos. A mesma demosntra ter conhecimento algébrico e algoritmos, trabalha os conteúdos básicos que fazem parte dos passos omitidos pelo software e encontra a solução.

Terceira Atividade.

O objetivo desta atividade é o de levar o aluno como futuro professor de matemática a valorizar o software bem como a importância de conhecer as técnicas de resolução das integrais. Outro ponto importante nesta atividade foi o de levar o aluno a compreender que os conteúdos básicos aparecem na resolução das mesmas. A análise da primeira questão foi feita nos itens acima, nesta analizaremos a segunda questão.

El – Ed: para a questão, Descreve os conteúdos básicos usados por você para encontrares a solução apresentada pelo software Maple, a dupla respondeu: " Para dar solução nas integrais da terceira atividade tivemos que recorrer a conteúdos básicos tais como: Divisão de polinômios e Sistemas de Equações Lineares que são conteúdos ensinados na 8ª e 9ª Classe do Iº Ciclo do ensino Fundamental."

Jo – Ra: para a questão, Descreve os conteúdos básicos usados por você para encontrares a solução apresentada pelo software Maple, a dupla respondeu: " Os conteúdos básicos usado por nós para encontrar a solução apresentada pelo software maple são os seguintes: transformação de uma função racional em soma de um polinômio e uma fracção própria, divisão de polinômio, resolução de sistemas de Equações Lineares e transformação de uma soma em produto."

Fran – Sam: para a questão, Descreve os conteúdos básicos usados por você para encontrares a solução apresentada pelo software Maple, a dupla respondeu: " Para encontrarmos a solução apresentada pelo software maple, usamos conteúdos básicos tais como: Fracções racionais aquelas que o aluno tem que saber quando é imprópria e própria, depois de vermos as funções e identificarmos nas próprias usamos a decomposição do denominador em produtos, achamos os denominadores comuns e nas impróprias usamos a divisão do polinômio para transformar na soma de um polinômio por uma fracção própria, em segunda para cada uma delas resolvemos o sistema de Equações Lineares que são todos conteúdos básicos."

A socialização das atividades feitas pelo estudante e a interação criada durante a realização das mesmas leva-nos a concordar com Dietrich (2009) “O professor precisa estimular a criatividade do aluno na busca de novos problemas e de soluções. Entre o momento em que o aluno recebe o problema e o momento em que ele produz sua resposta, o professor deve evitar intervir, para que não atrapalhe o aluno na construção do conhecimento referente à situação”.

Este trabalho teve por objetivo dar significado a integração de funções racionais bem com a importância do software em cursos de Cálculo Diferencial e Integral, como ferramenta de apoio ao processo de ensino aprendizagem. Levaram-se em consideração, para isso, as dificuldades levantadas sobre o ensino de integração de funções Racionais.

Fez-se então, uma sequência didática, baseada em simulações, e visualizações composta de três atividades. Utilizou-se uma metodologia baseada no uso do Computador/ software, caderno e lápis como meios de ensino.

Pela descrição da aplicação e dos resultados da sequência de ensino, observou-se alguns destaques que se referem às concepções dos estudantes sobre o pensamento matemático aliado ao computador. Eles se mostraram estáveis e se repetiram nas diferentes duplas.

Um deles é o que se refere à solução apresentada pelo software. Outro é a conversão que o software apresenta, neste trabalho em particular a apresentação da função em soma de funções parciais. Estas concepções poderão estar relacionadas ao processo de aprendizagem do “ensino tradicional” descrito anteriormente. Elas poderão ser questionadas quando utilizamos o computador como ferramenta de aprendizagem.

Durante a aplicação das atividades, o computador foi incorporado pelos estudantes em estágios diferentes. A utilização do mesmo favoreceu o surgimento de um processo recursivo aos conteúdos básicos, bem como o aprofundamento do pensamento matemático, as conjecturas, as refutações e validações. Em todas as questões o software foi utilizado como elemento impulsionador do processo docente educativo.

O sistema “aluno - computador” na segunda atividade apresentou, principalmente, uma característica. Ele se mostrou totalmente integrado como um instrumento para determinar a solução da questão proposta, levando o aluno a uma reflexão dos passos omitidos pelo software.

De acordo com as características da sequência de ensino, descritas anteriormente, surgiram alguns processos de construção do conhecimento, na realização das atividades, tais como:

As afirmações dos alunos durante as atividades, sob o ponto de vista do rigor matemático, foram consideradas imprecisas, e o professor pesquisador teve a oportunidade de levantar discussões a respeito da necessidade de um professor de matemática apromorar-se na linguagem da área.

Uma situação, merecedora de destaque, que caracteriza as dificuldades e insegurança dos alunos foram relatadas em relação as questões V, VI e VII. (Quadro nº 5)

> “ Nesta integral tenho a solução apresentada pelo maple mas não é a mesma que eu encontro”
>
> “ Como fazer a decomposição desta função se o denominador é maior que o numerador, ademais é a quarta potência o polinômio?”
>
> “Essa integral está a dar um sistema de quatro equações a duas incógnitas, como fazer?”

A não linearidade dos processos utilizados pelos alunos na resolução das atividades, mostrou que eles estabeleceram conexões diferentes das esperadas. Este tipo de construção de conhecimento constitui uma rede, e é favorecido pela utilização do computador.

Este processo foi descrito por Lévy(1999). Reconhecer que as maneiras de pensar, de conhecer e relacionar são condicionadas por instrumentos, nos leva a considerar as modificações geradas pela integração do computador no colectivo pensante. Durante as actividades houve uma alternância entre as mídias: lápis, papel e computador. Na supremacia da escrita ficou evidenciado que o lápis e o papel eram necessários para o registo da solução apresentada pelo software, para pensar os passos omitidos. Estas observações mostraram uma possível relação existente entre as mídias e o pensar matemático.

Na aplicação da sequência nota-se a importância da mídia no processo de pensamento. A utilização do computador requer outra forma de pensar, diferente da utilizada com lápis e papel. Algumas observações dos alunos que ocorreram nas socializações:

> “ As provas também deveriam ser feitas com o software. No caderno é difícil”
>
> “ No papel é muito complicado, no computador basta conhecer os comandos e tudo é fácil”
>
> “ Por que os outros professores não usam o computador para dar aula.”

Nas falas destacadas também nota-se que os alunos explicam a importância de se trabalhar as integrais sob uma nova metodologia.

As atividades da sequência didática tinham como finalidade principal trabalhar conteúdos básicos no curso superior de matemática bem como a importância do professor de matemática valorizar de maneira recursiva os conteúdos básicos.

No ambiente composto pelo computador – software –Aluno -professor foram evidenciados vários aspectos, tais como diálogo, parceria, estimulo, competências e respeito aos pontos de vista dos colegas. Neste ambiente o professor pesquisador pôde ter uma postura de mediador do processo ensino e aprendizagem.

As atividades desenvolvidas exigiram dos alunos o uso de conhecimentos matemáticos já conhecidos, desde o ensino básico e isso os levou a fazer relações e chegarem a novas conclusões. Desta forma, as atividades evidenciaram as dificuldades e/ou problemas de aprendizagem de conceitos matemáticos básicos e suas relações com novas situações problema. Elas proporcionaram aos alunos a tomada de consciência das suas dificuldades e um pensar sobre elas, levando-os a busca da suplantação dos obstáculos encontrados.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As respostas das duplas e as discussões durante a aplicação das atividades e as socializações permitiram tirar algumas conclusões que serão apresentadas a seguir.

No primeiro momento, houve uma insegurança/medo dos alunos diante das questões e, principalmente, em relação à utilização do computador/software. Entretanto, ao explicar que as atividades não tinham por objetivo a atribuição de nota, os alunos tornaram-se participativos e motivados, fazendo questionamento e buscando a resolução das questões colocadas.

Um dos aspectos fundamentais que ocorreu, durante a realização das atividades, foi a predominância da fala, cuja importância foi verificada na elaboração de hipóteses a conclusões entre os elementos das duplas. As atividades foram compostas de questões que possibilitaram aos alunos, maior interação. Houve possibilidade de acompanhar a evolução deles na construção do conceito de integração de funções racionais.

Constatamos que os alunos possuem procedimentos/racionais firmemente sedimentados; um deles é a tendência de estender uma conclusão válida num caso a outros em que elas podem não ser válidas. Durante as plenárias discutiu-se sobre o prejuízo que isso pode causar na construção do conhecimento.

Nas socializações ocorreram diálogos durante as atividades que fovoreceram aos alunos a adquirir novas concepções e minimizar o desequilílrio. Ao nosso ver houve um grande ganho com a sequência didática aplicada, isto é, o aluno pensou, raciocinou, atuou, agiu, refletiu, trocou ideias com os colegas e construiu um conhecimento que passou a ter significado para ele.

Durante as atividades os alunos providenciaram a instalação do software Maple, em seus Note Book.

Verificou-se, no final, que as atividades proporcionaram condições de responder à questão formulada na problemática. Os alunos são capazes de construir o conhecimento através de abordagens didáticas metodológicas planejadas, que levem em conta sua gênese e seu desenvolvimento histórico, utilizando um software matemático como ferramenta. Mostrar-se-ão a seguir algumas dificuldades apresentadas pelos alunos nas atividades desenvolvidas:

a) Ao comparar as respostas escritas das duplas com os comentarios, constatou-se que eles apresentam dificuldades em expressar-se por escrito utilizando a linguagem matemática.
b) Dificuldades na identificação dos factores liniares distintos, iguais, factores quadráticos distintos e iguais nas várias situações apresentadas.
c) Dificuldade em desenvolver cálculos que necessitam transformar frações parcias improprias como soma de um polinômio e uma fracção propria.
d) A maioria dos alunos tem dificuldade em trabalhar com fatores quadráticos repetidos.
e) Alguns alunos não distinguem fatores quadráticos iguais de fatores quadráticos distintos.
f) Alguns alunos apresentaram dificuldade na divisão do polinômio, bem como na resolução de sistemas de equações lineares.

Concluimos que o sucesso da aplicação de uma sequência de ensino que utilize o computador- software para resolver exercícios matemáticos, de forma mais significativa, necessita do envolvimento dos alunos e do professor, respeitando os limites e o ritimo de cada um deles. Como ja foi citado anteriormente o papel do professor muda radicalmente. Durante a aplicação das atividades notou-se que o seu sucesso estava alicerçado na postura de:

a) Resolver um exercício partindo de conteúdos básicos que os alunos ja sabem;
b) Despertar no aluno confiança em suas habilidades e potencialidades;
c) Não banalizar o erro dos alunos, procurando perceber o que eles não entendem;
d) Ter claro que os desafios são fontes de motivação para a elaboração do conhecimento;
e) Ter consciência que o conhecimento não se acumula, não se decora, mas passa de um estágio de organização de equilibrio para um de desequilibrio e daí para um novo equilibrio.
f) Ter que saber que a aprendizagem é mais significativa e motivante quando o aluno se envolve na resolução de uma situação problema;
g) Não dar “respostas”, incentivar os alunos a procurarem suas soluções;
h) Dar “feedback” a todas as atividades desenvolvidas pelos alunos;

i) Ter claro que os conceitos matemáticos não estão isolados entre si e que eles estão interligados por meio de uma evolução histórica, continua e permanente;

Assim, almejamos que esta pesquisa sirva para reflexão inicial dos professores de matemática, principalmente os de cálculo, para que reflitam sobre a possibilidade de desenvolver um ensino mais significativo e contextualizado. Desta forma, esperamos que com este trabalho possamos contribuir para uma mudança expressiva e permanente do processo de ensino aprendizagem do cálculo utilizando o software maple como ferramenta, transformando o aluno em um agente ativo de sua aprendizagem e o professor assumindo uma postura de facilitador da aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte**. 6. ed. v. 1. Porto Alegre: Bookmann, 2000.

ARAÚJO, J.; BORBA, M.C. Construindo Pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In BORBA, M.C.; ARAÚJO, J. (Org**.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

ARAÚJO. J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: As Discussões dos Alunos**. Tese de Doutorado. UNESP, Rio Claro, 2002

BICUDO, I. Peri Apodeixeos/De demonstratione. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.

BORBA, M. C. GPIMEM e Unesp: pesquisa, extensão e ensino em Informática e Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisa em **Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999ª

BARBOSA, M. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral**. PUCPR. (Dissertação de Mestrado), 2004.

BARTALO, L. **Mensuração de estratégias de estudo e aprendizagem de alunos universitários:** learning and study strategies inventory (LASSI) adaptação e validação para o Brasil. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Marília, 2006.

BARUFI, M. C. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e integral**. São Paulo, 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade do Estado de São Paulo.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G**. Informática e Educação Matemática,** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, C. B. **Cálculo. Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula**. Atual editora Ltd; São Paulo, SP – 1993. Tradução Higino H. Domingues

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo (Matemática Grega).** Brasilia: Editora UNB, 1985

CARAÇA, B. de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 9. Ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 2000.

COURANT, Richard. **O que é Matemática?:** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2000.

DOMENICO, L. C. A. **Aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de tecnologias de informação e comunicação.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Unicamp, 1995

FIORENTINI, D. ; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teoricos e metodologicos. Campinas: Autores associados, 2007.

HOFFMANN, L. D. **Cálculo um Curso Moderno e suas Aplicações**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra,1994.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência**: O futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1999.

LIMA, E. L, **Curso de Análise**, v 1 Rio de Janeiro, 1976.

MELO, J. M. R, **Conceito de Integral:** uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem, São Paulo, 2002. Dissertação (mestrado em educação matemática). Pontificia Universidade Católica de São Paulo.

OLIVEIRA, A, H, **A noção de Integral no contexto das concepções Operacionais e Estruturais.** São Paulo. 2004. Dissertação(Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** Tese de Doutorado. Faculdade de Educação, USP, 2003.

REIS, F. da S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Campinas, 2001. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas.

SILVA, A. C, **A noção de Integral em livros didáticos e os registros de representação Semiótica**. São Paulo. 2004. Dissertação(Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SOUZA JR., A.J. **Trabalho coletivo na universidade**: Trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

SILVA, A. et al.**Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte – MG : Editora Fumarc, 2001

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2. ed. vol. 1. São Paulo:Makron Books, 1994.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 20.ed. São Paulo: Cortez, 1996. 272p.

SILVA, M. D. F. **O computador na formação inicial do professor de Matemática: um estudo a partir das perspectivas de alunos - professores.** 1999. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

STEWART, J. **Cálculo** . 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2001. 579 p.

VILLARREAL, M. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. 1v. Tese (Doutorado em Educação Matemática)

VIDGAL, L. F, **Conhecimentos Mobilizados por alunos sobre a noção de Integral no centro das concepções Operacionais e Estruturais**. São Paulo. 2007. Dissertação(Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

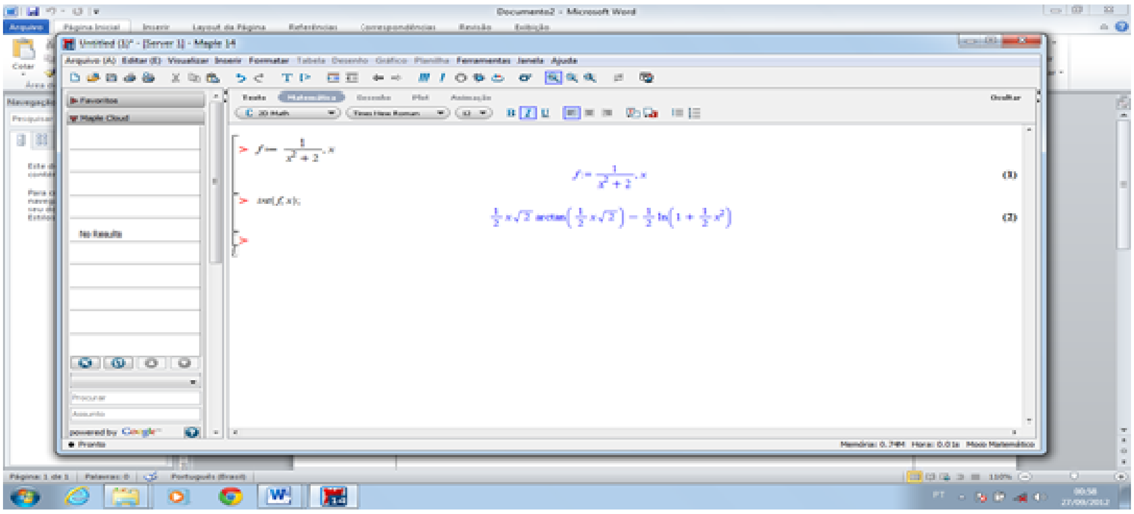
VILLARREAL, M. E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. Tese de Doutorado. UNESP, Rio Claro, 1999.

ZUFFI, E. M. O Conceito de Função e sua Linguagem para os Professores de Matemática e de Ciências. **Ciência e Educação,** v. 8, n.1, p. 1-12, 2002.

APÊNDICE A - PRODUTO

Infeliz Carvalho Coxe
Dimas Felipe de Miranda

FUNÇÕES RACIONAIS NA INTEGRAÇÃO



A Discussão de Conteúdos Básicos no Ensino Superior usando o Software Maple.

PREFÁCIO

Este produto é o resultado de uma pesquisa realizada no mestrado em Ensino de Ciências, área de concentração: Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC – Minas, como parte de exigência para obtenção do titulo de Mestre em Ensino de Matemática do professor Infeliz Carvalho Coxe, sob orientação do Professor Doutor. Dimas Filipe de Miranda.

Constitui-se em um caderno de atividades, para os alunos de cálculo II na no conteúdo Integração de funções racionais, destinado a alunos do curso de Licenciatura em matemática, cujas atividades propostas pretendem contribuir para a discussão de conteúdos básicos no curso superior de licenciatura em matemática.

As atividades foram organizadas de modo a discutir conteúdos matemáticos básicos necessários ao estudo de integrais de funções racionais, usando o software Maple como ferramenta auxiliar para o ensino e aprendizagem dessas funções racionais.

O objetivo deste trabalho é levar pofessores e estuudantes a discutirem conteúdos básicos no ensino de Integração de funções racionais, com ajuda do software maple. Para o efeito, preparamos um texto organizado didaticamente e de forma diferenciada, que possa se constituir em um instrumento descomplicado e facilitador desse programa.

Dessa forma, os objetivos das atividades se resumem, basicamente, em oferecer subsídios que levem alunos do curso de licenciatura em matemática a resgatar e discutir com a ajuda do software maple conteúdos matemáticos básicos ao resolverem integrais de funções racionais.

Durente a elaboração desse produto, em consonância com os objetivos descritos, nos referenciamos em alguns livros-textos de cálculo Diferencial e Integral, nos quais buscamos inicialmente fazer uma revisão dos principais conceitos desse conteúdo, fundamentais ao ensino/aprendizagem dessas integrais, bem como softwares matemáticos que ajudassem na compreensão e validação de atividades sequenciais.

A estrutura do texto apresenta, propositadamente, a conteúdos básicos com a pretenção de que os alunos recuperem conceitos importantes ao entendimento do conteúdo ao mesmo tempo em que formalizem as definições e conceitos referentes a Integração de funções racionais.

Apresentam-se o software Maple e os comandos necessários para o estudo do tema, bem como as atividades para que os alunos discutam conteúdos matemáticos básicos, ao mesmo tempo que resolvem integrais de funções racionais.

Os autores

1. Funções Racionais

O texto a seguir originou-se de estudos realizados nos autores: Frank Ayres Jr. e Stewart, James.

Sejam

$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_m \neq 0$

e $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_{0,}$ $b_n \neq 0$ polinômios de variável real com coeficientes reais.

Definição: Função racional é qualquer função $f(x)$ representável por um quociente dois polinômios, isto é, $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

Consideramos sem restringir a generalidade, que estes polinômios não têm raízes comuns.

Se a ordem do polinômio ao numerador é inferior ao do denominador, m$< n$, diz-se que a função racional $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ é regular.

Se a ordem do polinômio ao numerador é superior ou igual ao do denominador , m$\geq n$, diz-se que a função racional $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ é irregular.

Exemplos de funções racionais:

$f(x) = \dfrac{4x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 2}{x^3 - 4x + 1}$ Função racional irregular

$f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x^2}{x^5 + 3x^3 - x + 1}$ Função racional irregular

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^4 - x^2 + 1}$ Função racional regular

$f(x) = \dfrac{3}{x^3 - 4x + 1}$ Função racional regular

Se a função racional $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ é irregular, dividindo o polinômio do numerador pelo polinómio do denominador (segundo a regra de divisão de polinómio) podemos representar a função inicial (irregular) como soma de um polinómio e uma função regular.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

Em que Q(x) é um polinómio e representa o quociente da divisão do polinómio do numerador pelo polinómio do denominador e $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ uma fração regular onde R(x) é o resto da divisão.

Regras de divisão de polinómios

Para dividir o polinómio do numerador pelo polinómio do denominador aplicamos um algoritmo da divisão utilizado na aritmética.

Denotamos :

Dividendo: $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad a_m \neq 0$

Divisor: $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_{0,} \quad b_n \neq 0$

Quociente: Q(x)

Resto: R(x)

Passo 1. Escrevemos os polinômios $P_m(x)$ e $Q_n(x)$ na ordem decrescente dos expoentes dos seus termos e completamo-los com os termos de coeficientes zero.

Passo 2 . Dividimos o termo de maior grau do dividendo $P_m(x)$ pelo termo de maior grau do divisor $Q_n(x)$. Obtém-se desta forma , o primeiro termo do quociente $Q(x)$.

A seguir, multiplicamos o termo obtido pelo divisor e subtraímos o produto obtido do dividendo.

Caso o polinômio que representa a diferença obtida tenha grau maior ou igual ao do divisor, ele passa a ser um novo dividendo e repete-se o algoritmo a partir do 2º passo.

Caso o polinômio que representa a diferença obtida tenha grau inferior ao do divisor ele representa o resto R(x) e portanto obtemos a representação.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

Exemplos de divisão de polinômios.

Exemplo 1. Sejam $P_5(x) = 4x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 2$ e $Q_3(x) = x^3 + 4x + 1$

Passo 1.

$P_5(x) = 4x^5 - 3x^4 + 0.x^3 + 7x^2 + 0.x - 2$ e $Q_3(x) = x^3 + 0.x^2 - 4x + 1$

Passo 2 :

$$\begin{array}{l|l} 4x^5 - 3x^4 + 0.x^3 + 7x^2 + 0.x - 2 & x^3 + 0.x^2 - 4x + 1 \\ \cline{2-2} -4x^5 - 0.x^4 + 16x^3 - 4x^2 & \quad 4x^2 \\ \hline -3x^4 + 16x^3 + 3x^2 + 0.x - 2 & \end{array}$$

O polinómio que representa a diferença obtida tem grau maior do que o do divisor e repetimos o passo 2.

Repetição do Passo 2.

$$\begin{array}{l|l} -3x^4 + 16x^3 + 3x^2 + 0.x - 2 & x^3 + 0.x^2 - 4x + 1 \\ \cline{2-2} 3x^4 + 0.x^3 - 12x^2 + 3x & 4x^2 - 3x + 16 \\ \hline 16x^3 - 9x^2 + 3x - 2 & \\ -16x^3 - 0.x^2 + 84x - 16 & \\ \hline -9x^2 + 87x - 18 & \end{array}$$

O polinômio que representa a diferença obtida tem grau inferior ao do divisor e portanto temos:

$R(x) = -9x^2 + 87x - 18$, $Q(x) = 4x^2 - 3x + 16$ e

$$\frac{4x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 2}{x^3 - 4x + 1} = 4x^2 - 3x + 16 - \frac{9x^2 - 87x + 18}{x^3 - 4x + 1}$$

Exemplo 2. Sejam $P_4(x) = x^4 - 3$ e $Q_2(x) = x^2 + 1$.

Passo 1.

$P_4(x) = x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x - 3$ e $Q_2(x) = x^2 + 0.x + 1$.

Passo 2.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x - 3 & x^2 + 0.x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 0.x^3 - x^2 & x^2 \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -x^2 + 0.x - 3 &
\end{array}
$$

O polinômio que representa a diferença obtida tem grau igual ao do divisor e repetimos o passo 2.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x - 3 & x^2 + 0.x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 0.x^3 - x^2 & x^2 - 1 \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -x^2 + 0.x - 3 & \\
\qquad\qquad\ \ x^2 + 0.x + 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\quad -2 &
\end{array}
$$

O polinômio que representa a diferença obtida tem grau inferior ao do divisor e portanto temos:

$R(x) = -2$, $Q(x) = x^2 - 1$ e $\dfrac{x^4 - 3}{x^2 + 1} = x^2 - 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$

Por conseguinte a integração de uma função racional irregular reduz-se à integração de um polinômio e uma função racional regular. Como a integração de um polinômio não representa dificuldades o trabalho consiste em integrar as funções racionais regulares.

5.4 – Decomposição das funções racionais regulares em fracções elementares

Na álgebra demonstram-se :

Teorema 1. Qualquer polinômio, cujos coeficientes são números reais, pode ser representado na forma.

$$Q_n(x) = A\left(x-\alpha_1\right)^{r_1}\left(x-\alpha_2\right)^{r_2}\cdots\left(x-\alpha_k\right)^{r_k}\left(x^2+p_1(x)+q_1\right)^{t_1}\cdots\left(x^2+p_s(x)+q_s\right)^{t_s}$$

(1) onde:

a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k$ são as raízes reais, respectivamente, de multiplicidades $r_1,r_2,\cdots r_k$ do polinômio $Q_n(x)$;

b) Os polinômios quadráticos $\left(x^2+p_j(x)+q_j\right)$.j=1 não têm raízes reais e na factorização de $Q_n(x)$; têm, respectivamente, as multiplicidades t_j. $j=1,\ldots s$;

$c) p_1,q_1,\ldots,p_s,q_s\in R\ \ r_1,\ldots,r_k,t_1,\ldots,t_s\in N$ e $r_1+\ldots+r_k+2t_1+\ldots+2t_s=n$;

A expressão (4) diz-se decomposição do polinómio $Q_n(x)$; em factores do primeiro ou segundo grau .

Teorema 2. Se a função racional $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ é regular e o polinómio $Q_n(x)$ é na forma (1) e verifica as condições a), b) e c), então a função pode ser representada num modo unívoco na forma

$$\frac{R(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1}+\ldots+\frac{A_{r1}}{\left(x-\alpha_1\right)^{n}}+\ldots+\frac{B_1}{x-\alpha_i}+\ldots+\frac{B_{ri}}{\left(x-\alpha_i\right)^{ri}}+\ldots+\frac{C_1}{x-\alpha_k}+\ldots+$$
$$\frac{C_{rk}}{\left(x-\alpha\right)^{rk}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_{t1}x+N_{t1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{t1}}+\ldots+\frac{U_1x+V_1}{x^2+p_s+q_s}+$$
$$+\frac{U_{ts}x+V_{ts}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{t_s}};(2)$$

Com $x^2+p_j(x)+q_j\neq 0$, $\forall x\in R$ e $A_1,\ldots,B_1,\ldots,M_1,N_1,\ldots,U_{t_s},V_{t_s},p_1,q_1,\ldots,p_s,q_s,\alpha_i\in R$ para todos i= 1,2,...,k; j=1,2,...,s.

A expressão (2) representa o desenvolvimento de uma função racional regular $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ em fracções elementares e tem significado para todos $x \neq \alpha_i$, i=1,...,k.

Os coeficientes $A_1, A_2, ..., V_{t_s}$ calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

Nota:

► Se $x = \alpha_i$ é uma raiz real de multiplicidade um do polinômio $Q_n(x)$ da função racional regular $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ então a essa raiz no desenvolvimento da função em fracções elementares corresponde a fracção elementar $\frac{A}{x-\alpha_i}$.

► Se $x = \alpha_i$ é uma raiz real de multiplicidade $r_i > 1$ do polinômio $Q_n(x)$ da função racional regular $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ então a essa raiz no desenvolvimento da função em fracções elementares corresponde a seguinte soma de r_i fracções elementares:

$$.\underbrace{\frac{A_1}{x-\alpha_i} + \frac{A_2}{(x-\alpha_i)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-\alpha_i)^{r_i}}}_{soma, de\, r_i\, termos}$$

► Se o polinômio quadrático $x^2 + p_j(x) + q_j$, não têm raízes reais e na factorização de $Q_n(x)$ têm a multiplicidade 1 então a esse polinomio quadrático no desenvolvimento da função em fracções elementares corresponde a fracção elementar $\frac{Ax+B}{x^2+p_j(x)+q}$.

► Se o polinômio quadrático $x^2 + p_j x + q_j$, não têm raízes reais e na factorização de $Q_n(x)$ têm a multiplicidade t_i então a esse polinômio quadrático no desenvolvimento da função em fracções elementares corresponde a seguinte soma de t_i fracções elementares:

$$\underbrace{\frac{A_1x+B}{x^2+p_jx+q}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+p_jx+q\right)^2}+\ldots\ldots+\frac{A_{t_i}x+B_{t_1}}{\left(x^2+p_jx+q\right)^{t_i}}}_{Soma,de\,t_i\,termos}S$$

3. Exemplos de decomposição das funções racionais regulares em fracções elementares.

Exemplo 3. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{(x-1)(x+2)^3}$

A função é regular e o polinômio do denominador é representado em produto de factores de primeiro grau: o factor $x-1$ tem a multiplicidade 1 e o factor $x+2$ tem à multiplicidade 3. Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares ao factor $x-1$ corresponde à fracção elementar $\dfrac{A}{x-1}$ e ao factor $x+2$ corresponde a soma de três fracções elementares $\dfrac{B_1}{x+2}+\dfrac{B_2}{(x+2)^2}+\dfrac{B_3}{(x+2)^3}$ Portanto,

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{(x-1)(x+2)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+\frac{B_3}{(x+2)^3}$$

Os coeficientes A, B_1, B_2, B_3 calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 4. $f(x)=\dfrac{4x^3+2x^2-x-1}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}$

A função é regular e o polinómio do denominador é o produto do factor de primeiro grau $x+1$ de multiplicidade 1 com o factor de segundo grau sem raízes reais x^2+1 de multiplicidade 2. Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares ao factor $x+1$ corresponde à fração elementar $\dfrac{A}{x+1}$ e ao factor x^2+1 corresponde a soma de duas fracções elementares $\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\dfrac{B_2(x)+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}$ Portanto,

$$f(x)=\frac{4x^3+2x^2-x-1}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Os elementos A, B_1, C_1, B_2, C_2 calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 5. $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4x+5\right)}$

A função é regular e o polinômio do denominador é o produto de 3 factores:

do factor de primeiro grau $x+1$ de multiplicidade 2;

do factor de segundo grau sem raizes reais x^2+1 de multiplicidade 2;

do factor de segundo grau sem raizes reais x^2+4x+5 de multiplicidade 1;

Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares temos: ao factor $x+1$ corresponde a soma de duas fracções elementares $\dfrac{A_1}{x+1}+\dfrac{A_2}{(x+1)^2}$; ao factor x^2+1 corresponde a soma de duas fracções elementares $\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\dfrac{B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}$ ao factor x^2+4x+5 corresponde a fracção elementar $\dfrac{Dx+E}{x^2+4x+5}$ Portanto

$$\frac{x^3+2x^2-1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4x+5\right)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+4x+5}$$

Os coeficientes A_1, A_2, B_1, C_2, D, E calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 6. $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+9\right)}$

A função é regular e o polinômio do denominador é o produto de 2 factores:

do factor de segundo grau sem raízes reais x^2+4 de multiplicidade 2;

do factor de segundo grau sem raizes reais x^2+9 de multiplicidade 1;

Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares temos:

ao fator x^2+4 corresponde a soma de duas fracções elementares $\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+4}+\dfrac{B_2x+C_2}{\left(x^2+4\right)^2}$; ao fator x^2+9 corresponde a fração elementar $\dfrac{Dx+E}{x^2+9}$.

Portanto

$$f(x)=\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+9\right)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+4}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+9}$$

Os coeficientes $A_1, A_2, B_1, C_1 B_2, C_2, D, E$ calculam-se aplicando o método dos coeficientes indeterminados.

4. Método dos Coeficientes Indeterminados.

Passo 1. Multiplicamos ambas partes da expressão (2) por $Q_n(x)$ e fazemos as operações de multiplicação e redução na parte direita obtendo uma igualdade entre dois polinômios;

Passo 2. Igualamos os coeficientes dos termos de mesmo grau de x e obtemos um sistema de equações lineares com as incógnitas $A_1, A_2, ..., V_t$

Passo 3. Resolvendo o sistema obtemos os valores dos coeficientes $A_1, A_2, ..., V_t$

Exemplo 7. Desenvolver a função racional regular $f(x)=\dfrac{8x^3-12}{x^5+4x^3+4x}$ **em frações elementares.**

Resolução: A função $f(x)=\dfrac{8x^3-12}{x^5+4x^3+4x}$ é regular.

Representemos o denominador em produto de fatores de primeiro ou segundo grau. $x^5+4x^3 4x = x(x^4+4^2+4 = x\left(\left(x^2\right)^2+4x^2+4\right)=x\left(x^2+2\right)^2$ Portanto

$$f(x)=\frac{8x^3-12}{x^5+4x^3+4x}=\frac{8x^3-12}{x\left(x^2+2\right)^2}$$

O polinômio do denominador é o produto do fator de primeiro grau x de multiplicidade 1 com o fator de segundo grau sem raizes reais x^2+2 de multiplicidade 2.

Portanto na decomposição dessa função em fracções elementares ao fator x corresponde a fracção elementar $\frac{A}{x}$ e o fator x^2+2 corresponde a soma de duas fracções elementares $\frac{B_1 x + C_1}{x^2+2} + \frac{B_2 x + C_2}{\left(x^2+2\right)^2}$, isto é,

$$f(x) = \frac{8x^3 - 12}{x^5 + 4x^3 + 4x} = \frac{8x^3-12}{x\left(x^2+2\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+2} + \frac{B_2 x + C_2}{\left(x^2+2\right)^2}$$

Na continuação aplicamos o método dos coeficientes indeterminados para calcular os coeficientes A, B_1, C_1, B_2, C_2 Multiplicando as partes da expressão $\frac{8x^3-12}{x\left(x^2+2\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+2} + \frac{B_2 x + C_2}{\left(x^2+2\right)^2}$ por $x\left(x^2+2\right)^2$ obtemos:

$$\frac{8x^3-12}{x\left(x^2+2\right)^2} x\left(x^2+2\right)^2 = \frac{A}{x} x\left(x^2+2\right)^2 + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+2} x\left(x^2+2\right)^2 + \frac{B_2 x + C_2}{\left(x^2+2\right)^2} x\left(x^2+2\right)^2 \Rightarrow$$

$$8x^3 - 12 = A\left(x^2+2\right)^2 + \left(B_1 x + C_1\right)x.\left(x^2+2\right) + \left(B_2 x + C_2\right)x \Rightarrow$$

$$8x^3 - 12 = A\left(x^4+4x^2+4\right) + \left(B_1 x + C_1\right)\left(x^3+2x\right) + \left(B_2 x^2 + C_2 x\right) \Rightarrow$$

$$8x^3 - 12 = A\left(x^4+4x^2+4\right) + \left(B_1 x^4 + 2B_1 x^2 + C_1 x + 2C_1 x^3\right) + \left(B_2 x^2 + C_2 x\right) \Rightarrow$$

$$8x^3 - 12 = \left(A + B_1\right)x^4 + C_1 x^3 + \left(4A + 2B_1 + B_2\right)x^2 + \left(2C_1 + C_2\right)x \cdot$$

Igualando os coeficientes de $x^4, x^3, x^2, x^1 x^0$ obtemos o sistema:

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ C_1 = 8 \\ 4A + 2B_1 + B_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \\ 4A = -12 \end{cases}$$

Da quinta equação do sistema obtemos A =3 e substituindo na primeira equação temos $B_1 = -A = 3$. Da segunda equação temos $C_1 = 8$ e da quarta $C_2 = 2C_1 = -16$ Da terceira equação obtemos. $B_2 = -4A - 2B_1 = 6$. Portanto o desenvolvimento da função racional regular em frações elementares é :

$$\frac{8x^3-12}{x^5+4x^3+4x}=-\frac{3}{x}+\frac{3x+8}{x^2+2}+\frac{6x+16}{\left(x^2+2\right)^2}$$

5. Integração de Frações Racionais Elementares.

Na decomposição de funções racionais em fracções elementares obtemos (ver (2)) quatro tipos de frações elementares:

T1. $\frac{A}{x-\alpha}$

T2. $\frac{A}{(x-\alpha)^r},(r>1, r\in N)$

T3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q},\left(x^2+px+q\neq 0 \Leftrightarrow \frac{p^2}{4}-q<0\right);$

T4. $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^r},\left(x^2+px+q\neq 0 \Leftrightarrow \frac{p^2}{4}-q<0\right), r>1, r\in N$

Os integrais das frações elementares de tipos T1 e T2 são imediatos:

T1: $\int\frac{A}{x-\alpha}dx=A.\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha}=A.\ln|x-\alpha|+c$

T2: $\int\frac{A}{(x-\alpha)^r}dx=A.\int(x-\alpha)^{-r}d(x-\alpha)=A.\frac{(x-\alpha)^{-r+1}}{-r+1}=-\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{-r+1}}$

T3: Para integrar uma fracção de terceiro tipo separamos o quadrado perfeito em denominador: $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$ substituindo $x+\frac{p}{2}=t$ e $\frac{p^2}{4}-q=-a^2$ vem $x=t-\frac{p}{2}$ e $dx=dt$ por conseguinte

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px=q}dx=\int\frac{At-\frac{Ap}{2}+B}{t^2+a^2}dt=A.\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right).\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$\frac{A}{2}.\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right).\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{A}{2}.\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right).\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$\frac{A}{2}.\ln\left|t^2+a^2\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right).\frac{1}{a}.arctg\left(\frac{t}{a}\right)+c=$$

$$\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right).\frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}+\frac{p}{2a}\right)+c$$

T4: Calculemos o integral de uma fração de quarto tipo. Analogamente como acima.

$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \qquad x + \frac{p}{2} = t$ e $\frac{p^2}{4} - q = -a^2 \quad x = t - \frac{p}{2}$

$dx = dt$ por conseguinte

$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^r}dx = \int \frac{At - \frac{Ap}{2} + B}{\left(t^2+a^2\right)^r}dt = A\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right).\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^r}$. Para calcular o primeiro integral fazemos a substituição $tdt = \frac{1}{2}.d\left(t^2+a^2\right)$. Então

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-r} d\left(t^2+a^2\right) = \frac{1}{2(r-1)\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}. + c$$

Calculemos o segundo integral $\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r}$. Escrevemos o segundo integral na forma $\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^r}$.

Na continuação fazendo em numerador a substituição $a^2 = t^2 + a^2 - t^2$ obtemos:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^r}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2}{\left(t^2+a^2\right)^r}dt - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^r}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}dt - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^r}dt = (*)$$

Calculemos o segundo integral aplicando a integração por partes:

Fazendo $\int U.dV = U.V - \int V.dU$ obtemos $U = t, dV = \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r}, dU = dt,$

$$V = \int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t)^2}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^r} = \frac{1}{2(1-r)}.\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}$$

Portanto na continuação temos:

$$(*)=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}dt-\frac{1}{a^2}\left[\frac{t}{(2-2r)\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}-\frac{1}{2-2r}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\frac{t}{(2r-2)\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}+\frac{2r-3}{2r-2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}\right]+c.$$

Obtemos a fórmula de recorrência $\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^{r}}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{t}{(2r-2)\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}+\frac{2r-3}{2r-2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{r-1}}\right]+c.$ que permite diminuir o grau da expressão do denominador no integral $\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^{r}}$.

6. Cálculo de integrais indefinidos:Integração de funções racionais.

►**1)** $\int\frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$

A função integrada é função racional regular. Determinamos as raízes do polinômio do denominador.

$$x^2-3x+2=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow x=1\vee x=2$$

Portanto o polinômio do denominador tem duas raizes reais de multiplicidade um e a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Determinemos os valores dos coeficientes A e B utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\Rightarrow 2x+1=Ax-2A+Bx-B\Rightarrow$$
$$2x+1=(A+B)x+(-2A-2B).$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases}A+B=2\\-2A-B=1\end{cases}$

Determinemos a solução do sistema :

$$\begin{cases}A+B=2\\-2A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=2\\-2A-B+(A+B)=1+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=2\\-A=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-3\\B=5\end{cases}$$

Portanto $\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}$. e

$$\int\frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right).dx=\int\frac{-3}{x-1}.dx+\int\frac{5}{x-2}.dx=$$

$$-3\int\frac{1}{x-1}dx+5\int\frac{1}{x-2}dx=-3\int\frac{1}{x-1}d(x-1)+5\int\frac{1}{x-2}d(x-2)=$$

$$=-3\ln|x-1|+5\ln|x-2|+c$$

►2) $\int\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}.dx$

A função integranda é função racional regular $\left(f(x)=\frac{p_2(x)}{Q_3(x)}=\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}\right)$

O polinômio do denominador, $Q_3(x)=(x+2)^2(x-1)$, tem três raízes reais: $x=-2$ de multiplicidade 2 e $x=1$ de multiplicidade 1.

Portanto a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

Determinemos os valores dos coeficientes A , B e C utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x-1}\Rightarrow$$

$$3x^2-4x+2=A(x+2)(x-1)+B(x-1)+C(x+2)^2\Rightarrow$$

$$3x^2-4x+2=A(x^2+x-2)+B(x-1)+C(x^2+4x+4)\Rightarrow$$

$$3x^2-4x+2=Ax^2+Ax-2A+Bx-B+Cx^2+4Cx+4C\Rightarrow$$

$$3x^2-4x+2=(A+C)x^2+(A+B+4C)x+(-2A-B+4C)$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases} A+C=3 \\ A+B+4C=-4 \\ -2A-B+4C=2 \end{cases}$

Determinemos a solução do sistema :

$$\begin{cases} A+C=3 \\ A+B+4C=-4 \\ -2A-B+4C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C+3 \\ -C+3+B+4C=-4 \\ -2(-C+3)-B+4C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C+3 \\ B+3C=-7 \\ -B+6C=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A=-C+3 \\ B=-7-3C \\ -(-7-3C)+6C=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C+\# \\ B=-7-3C \\ 9C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{26}{9} \\ B=-\frac{22}{3} \\ C=\frac{1}{9} \end{cases}$$

Portanto

$$\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{\frac{26}{9}}{x+2}+\frac{-\frac{22}{3}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{1}{9}}{x-1}$$ e

$$\int\frac{3x^2-4x+2}{(x+2)^2(x-1)}.dx=\int\left(\frac{\frac{26}{9}}{x+2}+\frac{-\frac{22}{3}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{1}{9}}{x-1}\right).dx=$$

$$\frac{26}{9}\int\frac{1}{x+2}dx-\frac{22}{3}\int\frac{1}{(x+2)^2}dx+\frac{1}{9}\int\frac{1}{x-1}dx=$$

$$\frac{26}{9}\int\frac{1}{x+2}d(x+2)-\frac{22}{3}\int\frac{1}{(x=2)^2}d(x+2)+\frac{1}{9}\int\frac{1}{x-1}d(x-1)=$$

$$\frac{26}{9}.\ln|x+2|-\frac{22}{3}.\frac{(x+2)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{9}.\ln|x-1|+C$$

$$\frac{26}{9}\ln|x+2|+\frac{22}{3}.\frac{2}{x+2}+\frac{1}{9}\ln|x-1|+C$$

►3) $\int\frac{2x^3-5x+2}{x^2-2x-3}.dx$

A função integranda é função racional irregular. Dividimos o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador e representamos a função integranda como a soma de um polinômio e uma função racional regular:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x+2 & x^2-2x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+4x^2+6x & 2x+4 \\ \cline{1-1} \quad 4x^2+x+2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -4x^2+8x+12 \\ \hline 9x+14 \end{array}$$

Daqui resulta que a representação da função racional irregular como a soma de um polinômio e uma função racional regular é:

$\dfrac{2x^3-5x+2}{x^2-2x-3}=2x+4+\dfrac{9x+14}{x^2-2x-3}$ Portanto:

$$\int \frac{2x^3-5x+2}{x^2-2x-3}.dx=\int\left(2x+4+\frac{9x+14}{x^2-2x-3}\right).dx$$

$$=2\int x.dx+4\int dx+\int\frac{9x+14}{x^2-2x-3}.dx=2.\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{9x+14}{x^2-2x-3}.dx=(*)$$

No integral obtido a função integranda, $f(x)=\dfrac{9x+14}{x^2-2x-3}$ é racional regular.

Determinamos as raízes do polinômio do denominador.

$$x^2-2x-3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}\Rightarrow x=1\vee x=3$$

Portanto o polinômio do denominador tem duas raizes reais de multiplicidade um e a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{9x+14}{x^2-2x-3}=\frac{9x+14}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}\Rightarrow 9x+14=Ax-3A+Bx+B\Rightarrow$$
$$9x+14=(A+B)x+(-3A+B)$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases} A+B=9 \\ -3A+B=14 \end{cases}$

Determinemos a solução do sistema :

$$\begin{cases} A+B=9 \\ -3A+B=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=9-B \\ -3(9-B)+B=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=9-B \\ -27+4B=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=9-B \\ B=\dfrac{41}{4} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=-\dfrac{5}{4} \\ B=\dfrac{41}{4} \end{cases}$$

Portanto

$\dfrac{9x+14}{x^2-2x-3}=\dfrac{9x+14}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{-\frac{5}{4}}{x+1}+\dfrac{\frac{41}{4}}{x-3}$ e na continuação obtemos

$$(*) = x^2 + 4x + \int \left[\frac{-\frac{5}{4}}{x+1} + \frac{\frac{41}{4}}{x-3} \right].dx = x^2 = 4x - \frac{5}{4}\int \frac{1}{x+1}.dx + \frac{41}{4}\int \frac{1}{x-3}.dx =$$

$$x^2 + 4x - \frac{5}{4}.\ln|x+1| + \frac{41}{4}.\ln|x-3| + C$$

►4) $\displaystyle\int \frac{3x^6 - x^4 + 1}{x^4 - 1}.dx$

A função integranda é função racional irregular. Dividimos o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador e representamos a função integranda como a soma de um polinômio e uma função racional regular:

$$\begin{array}{l|l}
3x^6 + x^4 + 1 & x^4 - 1 \\
\cline{2-2}
-3x^6 + 3x^2 & 3x^2 + 1 \\
\cline{1-1}
\quad x^4 + 3x^2 + 1 & \\
\quad -x^4 + 1 & \\
\cline{1-1}
\qquad 3x^2 + 2 &
\end{array}$$

Daqui resulta que a representação da função racional irregular como a soma de um polinômio e uma função racional regular é:

$\displaystyle\frac{3x^6 + x^4 + 1}{x^4 - 1} = 3x^2 + 1 + \frac{3x^2 + 2}{x^4 + 1}$. Portanto:

$$\int \frac{3x^6 + x^4 + 1}{x^4 - 1}.dx = \int \left(3x^2 + 1 + \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1} \right).dx =$$

$$= 3\int x^2.dx + \int dx + \int \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1}.dx = 3.\frac{x^3}{3} + x + \int \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1}.dx = (*)$$

No integral obtido a função integranda $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x^4 - 1}$ é racional regular.

Determinamos a representação do polinômio do denominador em produto de factores de primeira e segunda ordem.

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Na representação do polinômio do denominador em produto de factores de primeira e segunda ordem temos dois fatores de primeiro grau e um fator de segundo grau todos de multiplicidade um. Portanto a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1}=\frac{3x^2+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Determinemos os valores dos coeficientes A , B , C e D utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1}=\frac{3x^2+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$3x^2+2=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)\Rightarrow$$
$$3x^2+2=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+(Cx^3+Dx^2-Cx-D)\Rightarrow$$
$$3x^2+2=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=3 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=2 \end{cases}$

Determinemos a solução do sistema aplicando o método de condensação:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=3 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=2 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]\text{operações}\begin{pmatrix} L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1 \\ L_4=L_4-L_1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]\text{operação }(L_4=L_4-L_2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Então $D=\frac{1}{2}.C=0,B=-\frac{5}{4},A=\frac{5}{4}$

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1}=\frac{3x^2+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{\frac{5}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{5}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}$$ e na continuação obtemos

$$(*)=x^3+x+\int\left(\frac{\frac{5}{4}}{x-1}-\frac{\frac{5}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}\right).dx=x^3+x+\frac{5}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{5}{4}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=x^3+x+\frac{5}{4}.\ln|x-1|-\frac{5}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2}arctg+C$$

►5) $\int \frac{x^5}{x^4 - x}.dx$

A função integranda é função racional irregular. Representamos a função integranda como a soma de um polinómio e uma função racional regular:

$\frac{x^5}{x^4 - x} = \frac{x^5}{x.(x^3 - 1)} = \frac{x^5 - x^2 + x^2}{x.(x^3 - 1)} = \frac{x^5 - x^2}{x.(x^3 - 1)} + \frac{x^2}{x.(x^3 - 1)} = x + \frac{3}{x^3 - 1}$ Portanto:

$$\int \frac{x^5}{x^4 - x}.dx = \int \left(x + \frac{3}{x^3 - 1} \right).dx = \int x dx + \int \frac{x}{x^3 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^3 - 1}.dx = (*)$$

No integral obtido a função integranda $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$ é racional Regular. O trinômio $x^2 + x + 1$ não tem raízes reais e portanto

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Determinemos os valores dos coeficientes A , B e C utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \Rightarrow$$

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) \Rightarrow$$

$$x = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C \Rightarrow x = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C)$$

Obtemos o sistema de equações lineares: $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases}$

Determinemos a solução do sistema aplicando o método de substituição:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ A + A + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2A + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ C = 1 - 2A \\ A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ C = 1 - 2A \\ A - 1 + 2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Então

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\Rightarrow=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}-\frac{\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}$$ e na continuação

obtemos

$$(*)=\frac{x^2}{2}+\int\frac{x}{x^3-1}.dx=\frac{x^2}{2}+\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}-\frac{\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\right).dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}.dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}.dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x-1}{x^2+x+1}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x-1}{x^2+2.\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}.\int\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.d\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}.\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.d\left(x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}.\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}.\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.d\left(x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}.\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|+\frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.arctg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}.\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}.arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

►6) $\int\frac{x^5}{(x+1)^3}.dx$

A função integranda é função racional irregular. Dividimos o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador e representamos a função integranda como a soma de um polinômio e uma função racional regular.

Porque $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$ temos:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & x^3+3x^2+3x+1 \\ \cline{2-2}
-x^5-3x^4-3x^3-x^2 & x^2-3x+6 \\ \cline{1-1}
-3x^4-3x^3-x^2 & \\
\quad 3x^4+9x^3+9x^2+3x & \\ \cline{1-1}
\quad 6x^3+8x^2+3x & \\
-6x^3-18x^2-18x+6 & \\ \cline{1-1}
-10x^2-15x-6 &
\end{array}$$

Daqui resulta que a representação da função racional irregular como a soma de um polinômio e uma função racional regular é:

$\frac{x^5}{(x+1)^3}=x^2-3x+6-\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}$. Portanto

$$\int\frac{x^5}{(x+1)^3}.dx=\int\left(x^2-3x+6-\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}\right).dx=$$

$$\int x^2dx-3\int xdx+6\int dx-\int\frac{10x^2+15x+6}{(x+1)^3}.dx=$$

$$\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+6x-\int\frac{10x^2+15x+6}{(x+1)^3}dx=(*)$$

No integral obtido a função integranda $f(x)=\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}$. é racional regular e o polinômio de primeiro grau $x+1$ na fatoração do denominador tem multiplicidade três. Portanto a representação da função integranda como soma de frações elementares é:

$$\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}.=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

Determinemos os valores dos coeficientes A , B e C utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}.=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}\Rightarrow$$

$$10x^2+15x+6=A(x+1)^2+B(x+1)+C$$

$$10x^2+15x+6=Ax^2+Ax+A+Bx+B+C=Ax^2+(A+B)x+(A+B+C)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A=10 \\ A+B=15 \\ A+B+C=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=10 \\ B=5 \\ C=-9 \end{cases}$$

Portanto:

$\dfrac{10x^2+15x+6}{x^3+3x^2+3x+1}.=\dfrac{10}{x+1}+\dfrac{5}{(x+1)^2}-\dfrac{9}{(x+1)^3}$ e na continuação temos:

$$\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+6x-10\int\frac{1}{x+1}dx-5\int\frac{1}{(x+1)^2}dx+9\int\frac{1}{(x+1)^3}dx$$

$$\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+6x-10\int\frac{d(x+1)}{x+1}-5\int(x+1)^{-2}d(x=1)+9\int(x+1)^{-3}d(x+1)=$$

$$\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+6x-10\ln|x+1|-5\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1}+9\frac{(x+1)^{-3+1}}{-3+1}+C$$

$$\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+6x-10\ln|x+1|+5\frac{1}{x+1}-\frac{9}{2}.\frac{1}{(x+1)^2}+C$$

A situação acima serviu para apresentar o estudo das integrais de funções racionais levantando conteúdos matemáticos basícos, que serão explorados nas atividades a serem desenvolvidas pelos sujeitos dessa pesquisa.

7. O software Maple.

O Softeware Maple é um programa de Computação Algébrica de uso geral que vem sendo desenvolvido desde 1981 na Universidade de Waterloo, no Canadá. Associar o Maple em aulas práticas pode tornar certos conceitos bem mais claros e atrativos, sendo grande a variedade de temas que podem ser explorados com tais recursos. Além de ser uma atividade prazerosa e criativa, o uso da informática permite o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, bem como de organização, atenção e concentração, tão necessárias a pesquisa

O Maple possui inúmeros recursos munéricos e gráficos, além de também funcionar como uma linguagem de programação. Ele vem sendo desenvolvido pela Waterloo Maple para vários sistemas operacionais. Com ele é possível realizar cálculos que contenham símbolos, como $\pi, \infty, \sqrt{2}$ sem a necessidade de fazer aproximações numéricas ou realizar simplificações e cálculos com expressões algébricas, como $ax^2 + bx$ ou$x^3 + log(x)$, sem ser preciso atribuir valores numéricos às variáveis ou constantes. Devido a essas propriedades, é possível encontrar soluções exatas para problemas práticos que envolvam Cálculo Diferencial e Integral.

Abaixo apresento a área de trabalho onde são digitados os comandos e visualizados as respostas apresentadas pelo softewae Maple. Para exemplificar calcularei a integral de $f(x) = \frac{1}{x^2+2} dx$

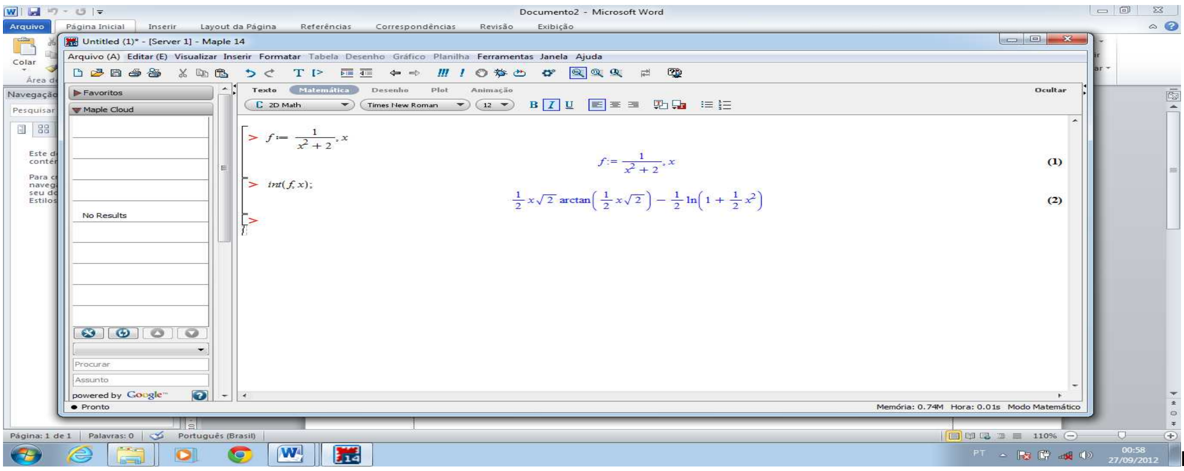


Figura nº1: Interface Maple.

Fonte: Maple

O Maple possui amplos recursos para o cálculo de integrais definidas, indefinidas ou improprias. Ele conhece as regras de integração usuais e os valores de muitas integrais em casos particulares.

A utilização do software permitirá que o aluno não continue passivo no processo de construção do conhecimento independente do recurso que se usará. Poder-se-á a partir das soluções apresentadas pelo mesmo criar situações de aprendizagem para que o aluno na interação e manipulação do softeware indaga os passos omitidos e construa o seu conhecimento.

8. Integração de Funções racionais usando o Maple.

A integral (primitiva) de uma função definida por uma expressão algébrica f(x) na variável x é calculada com um comando int(f(x),x).

Esse comando também possui uma forma inercial: int(f(x),x). A forma inercial não efectua cálculos, apenas mostra a integral no formato usual e é útil na apresentação de fórmulas. Seu valor pode ser calculado aplicando-lhe um comando value.

As regras básicas de integração, como por substituição, frações parciais e integração por partes, são bem conhecidas pelo programa.

8.1 **Integrais indefinidas**.

>with(student):

>f:=expressão que define a função;

>Int(f,x); apresenta a integral indefinida a ser calculada.

>int(f,x); calcula a integral indefinida.

>Int(f,x)=int(f,x); apresenta a integral indefinida com a resposta- Integrais indefinidas

Exemplo: Calcule a integral $\int (x^3 + 5)dx$

Solução:

>with(sutdent):

>Int(x^3+5,x)=int(x^3+5,x);

$$\int (x^3 + 5)dx = \frac{1}{4}x^4 + 5x$$

8.2 Integrais por frações parciais

Para a resolução de integrais por frações parciais são utilizados os seguintes comandos:

>with(student):

>f:=expressão que define a função;

>convert(f,parfrac,x); escreve a expressão que define a função como soma de

frações parciais.

>Int(f,x)=Int(“,x); apresenta a integral da soma de frações parciais.

>expand(rhs(“)); apresenta a soma das integrais das frações parciais do lado direito do item anterior (rhs(“)).

>value(“); calcula as integrais.

>Int(f,x)=int(f,x); apresenta a integral com a resposta.

Exemplos:

►7) $\int \frac{(-2x+4)}{(x^2+1)(x-1)^2}.dx$

Solução:

>with(student):

>f:=(-2*x+4)/((x^2+1)*(x-1)^2);

$$f := \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{-2}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int \frac{(-2x+4)}{(x^2+1)(x-1)^2}.dx = \int \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)dx$$

>expand(rhs("));

$$\int \frac{(-2x+4)}{(x^2+1)(x-1)^2}.dx = \int \left(\frac{-2}{x-1}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\right)dx$$

>value(");

$$\frac{-1}{x-1} - 2\ln(x-1) + \arctan(x) + \ln(x^2+1)$$

►8) $\int \frac{(x^2-2x)}{(x-1)^2(x+2)}.dx$

Solução:

>with(student):

>f:=(x^2-2*x)/((x-1)^2*(x+2));

$$f := \frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x+2)}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{x-1}+\frac{8}{9}\frac{1}{x+2}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int\frac{(x^2-2x)}{(x-1)^2(x+2)}.dx=\int(-\frac{1}{3(x-1)^2}+\frac{1}{9(x-1)}+\frac{8}{9(x+2)})dx$$

>expand(rhs("));

$$-\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{1}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{8}{9}\int\frac{1}{x+2}dx$$

>value(");

$$\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{9}\ln(x-1)+\frac{8}{9}\ln(x+2)$$

>Int(f,x)=int(f,x);

►9) $\int\frac{1}{9x^4+x^2}.dx$

Solução:

>with(student):

>f:=(1/(9*x^4+x^2));

$$f := \frac{1}{9x^2+x^2}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{1}{x^2}-\frac{9}{9x^2+1}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int\frac{1}{9x^2+x^2}dx=\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{9}{9x^2+1}dx$$

>Int(f,x)=int(f,x);

$$\int\frac{1}{9x^2+x^2}dx=-\frac{1}{x}-3arcotan(3x)$$

►10) $\int\frac{9}{8x^3+1}dx$

Solução:

>with(student):

>f:=9/(8*x^3+1);

$$f := \frac{9}{8x^3+1}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{3}{1-2x}-6\frac{x-1}{4x^2-2x+1}$$

>Int(f,x)=Int(",x=);

$$\int\frac{9}{8x^3+1}dx=\int\left(\frac{3}{1-2x}-6\frac{x-1}{4x^2-2x+1}\right)dx$$

>expand(rhs("));

$$3\int\frac{1}{1-2x}dx-6\int\frac{x}{4x^2-2x+1}dx+6\int\frac{1}{4x^2-2x+1}dx$$

>value(");

$$-\frac{3}{4}\ln(4x^2-2x+1)+\frac{3}{2}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{6}(8x-2)\sqrt{3}\right)+\frac{3}{2}\ln(2x+1)$$

►11) $\int\frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx$

Solução:

>with(student):

>f:=(2*x^2+3*x+2)/(x^3+4*x^2+6*x+4);

$$f:=\frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}$$

>convert(f,parfrac,x);

$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x^2+2x+2}$$

>Int(f,x)=Int(",x);

$$\int\frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx=\int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx$$

>value(");

$$2\ln(x+2)-\arctan(1+x)$$

O Maple resolve ainda a integral de maneira imediata sem transformarmos a função em funções parciais aplicando diretamente os comandos de integração ele nos dá o resultado da integral.

►12) $\int\frac{x}{x^2+1}.dx$

Para a integral do exemplo acima no Maple fizemos:

$$> int\left(x/(x^2+1),x\right)=int\left(x/(x^2+1),x\right);$$

E como resultado temos: $\int\frac{x}{x^2+1}.dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$

►13) $\int \frac{1}{x^4+1}.dx$

Para a integral acima no Maple fizemos:

$> int\left(1/(x^4+1), x\right) = int(1/(x^4+1), x);$

E como resultado temos:

$$\int \frac{1}{x^4+1}.dx = \frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\left(x\sqrt{2}-1\right)$$

9. Atividades

Atividade I

Agora que você conhece um pouco da história e da finalidade do Software Maple, quais suas expectativas quanto ao desenvolvimento de nossas proximas aulas de Cálculo II?

____

____

____

____

____

____

____

____

Atividade II

As integrais que se apresentam a seguir foram resolvidas usando o software Maple, e como futoro professor de matemática completa os passos omitidos pelo software Maple para chegar a mesma solução.

$$a)\int \frac{(x+1)}{x^3+x^2-6x}dx =$$

Esta integral foi resolvida utizando o software Maple, a chagou-se ao resultado que apresentamos abaixo, para o efeito solicitamos que completes os passos omitidos pelo Software para se chegar a mesma solução.

$$-\frac{2}{15}\ln(x+3)+\frac{3}{10}\ln(x-2)-\frac{1}{6}\ln(x)$$

$$b)\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$$

A integral acima contém fatores lineares repetidos é foi resolvida utizando o software Maple, a chagou-se ao resultado que apresentamos abaixo, para o efeito e como futuro professor de matemática solicitamos que completes os passos omitidos pelo Software para se chegar a mesma solução.

$$\frac{1}{2}x^2+2\ln(x)-2\ln(x-1)-\frac{1}{x}$$

$$c)\int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{x^3+x^2-2x}dx$$

A integral acima contém fatores lineares repetidos é foi resolvida utizando o software Maple, a chagou-se ao resultado que apresentamos abaixo, para o efeito e como futuro professor de matemática solicitamos que completes os passos omitidos pelo Software para se chegar a mesma solução

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln(x+2) - \ln(x) - \ln(x-1)$$

$$d)\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}dx$$

A integral acima contém fatores distintos do segundo grau é foi resolvida utizando o software Maple, a chagou-se ao resultado que apresentamos abaixo, para o efeito e como futuro professor de matemática solicitamos que completes os passos omitidos pelo Software para se chegar a mesma solução

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) + \arctan(x)$$

$$e)\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{\left(x^2+2\right)^3}dx$$

A integral acima contém fatores repetidos do segundo grau é foi resolvida utizando o software Maple, a chagou-se ao resultado que apresentamos abaixo, para o efeito e como futuro professor de matemática solicitamos que completes os passos omitidos pelo Software para se chegar a mesma solução

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right) - \frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}$$

Atividade III

Usando os comandos do Software Maple, converte as funções a seguir em frações parciais.

As questões abaixo têm como objetivo levar o aluno a revisitar conteúdos básicos na medida em que o software converte as funções em frações parciais

$$a)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$$

$$b)\ f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 9}{x^2 - 6}$$

$$c)\ f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 9}{\left(x^2 + 3\right)^3}$$

$$d)\ f(x) = \frac{x^2 - 16}{\left(x^3 - 1\right)}$$

$$e)\ f(x) = \frac{x^9 - x^8 - x^2 - 3}{x^3 - 2x^2 + x - 1}$$

Atividade IV

Usando lapís, transforma as funções que se seguem em soma de um polinómio e uma fração própria.

$$a)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$$

$$b)\ f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 9}{x^2 - 6}$$

$$c)\ f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 9}{\left(x^2 + 3\right)^3}$$

$$d)\ f(x) = \frac{x^2 - 16}{\left(x^3 - 1\right)}$$

$$e)\ f(x) = \frac{x^9 - x^8 - x^2 - 3}{x^3 - 2x^2 + x - 1}$$

9.1 RELATÓRIO FINAL

Elabore um relatório abordando os seguintes tópicos:

A importancia do trabalho com o Maple;

O que o uso do maple auxiliou em sua aprendizagem no Cálculo II;

Os conteúdos básicos revisitados por você;

A importância do uso do computador na aula;

Se gostou ou não da realização desta atividade e possiveis sugestões;

Principais conclusões da atividade.

Obs.: o relatório deverá ser produzido em texto único ou em forma de redação.