PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
PREPES – MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PENSAMENTO VISUAL NO ESTUDO DA VARIAÇÃO DE FUNÇÕES

Lais Couy

Belo Horizonte
2008

LAIS COUY

PENSAMENTO VISUAL NO ESTUDO DA VARIAÇÃO DE FUNÇOES

Dissertação apresentada ao Programa De Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Maria Clara Rezende Frota

Belo Horizonte
2008

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Couy, Lais
C872p Pensamento visual no estudo da variação de funções / Laís Couy. – Belo Horizonte, 2008.
160 f. : il.

Orientadora: Maria Clara Rezende Frota
Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.
Bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Cálculo – Estudo e ensino. 3. Percepção visual. 4. Funções (Matemática). I. Frota, Maria Clara Resende. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 517

PUC Minas

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

"PENSAMENTO VISUAL NO ESTUDO DA VARIAÇÃO DE FUNÇÕES"

LAIS COUY

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Maria Clara R. Frota

Profª. Drª. Maria Clara Rezende Frota – Orientadora (PUC Minas)
Doutorado em Educação (UFMG)

Márcia Maria Fusaro Pinto

Profª. Drª. Márcia Maria Fusaro Pinto
Doutorado em Educação Matemática (University Of Warwick)

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial (PUC Minas)

Belo Horizonte, 29 de fevereiro de 2008.

A meu filho Pedro, por ter-me abdicado diversas vezes da sua convivência, em função da dedicação ao curso de mestrado.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado força e perseverança para concluir este trabalho. Só Ele que conhece o íntimo do coração humano, sabe quais e quantos foram os sacrifícios e renúncias necessários à realização deste sonho.

À orientadora Maria Clara Rezende Frota por ter me auxiliado, através da sua orientação, a refletir o meu papel como professora e ter me conduzido pelas veredas da pesquisa.

A meu filho Pedro e a meu sobrinho Gustavo, por terem me inspirado, principalmente nos momentos mais difíceis, a perseguir meus objetivos.

A meu Pai (in memorian), por ter me ensinado, através do exemplo, o valor da honestidade e da retidão de caráter.

A minha mãe, pela dedicação incondicional.

A meu marido Júnior, pelo companheirismo e apoio.

A Adriane, pelas correções do português.

A Niracema, pelas dicas na construção do texto.

A Helane, pela ajuda nas normas técnicas.

A Imaculada, Eugênia e Milza, pela amizade leal.

A Geraldina, pelo compromisso em cuidar da minha casa.

A Adriana, Cecília, Júnior e Maurílio, pela acolhida calorosa nas viagens à Belo Horizonte.

Aos alunos participantes da pesquisa, por deixarem revelar não só os conhecimentos matemáticos, mas também suas experiências de vida.

A todos os familiares e amigos, por estarem ao meu lado e torcerem sempre pelo meu sucesso e, principalmente, pela minha felicidade.

Aos colegas de trabalho do Curso de Matemática e da Superintendência Regional de Ensino, pelo incentivo e apoio.

Ao Instituto de Ensino Superior de Ensino Integrado de Teófilo Otoni/FENORD por ter-me oportunizado a construção da trajetória como formadora de professores.

À Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais, por ter-me concedido o afastamento das atividades, sem o qual não seria possível concluir este trabalho.

“Para tudo há um tempo, para cada coisa há um momento debaixo dos céus: [...] tempo para plantar e colher o que se plantou.” (Ecle, 3, 1-2)

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo investigar o uso do pensamento visual no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, indagando sobre como as estratégias gráficas e a interlocução dessa forma de representação com as linguagens algébrica e textual, podem contribuir para o entendimento dos conceitos relativos à variação de funções reais de uma variável real. Na tentativa de responder à questão de pesquisa, foram desenvolvidos estudos teóricos e uma pesquisa empírica, na qual foram aplicadas seqüências de atividades que privilegiaram as diversas formas do pensamento visual, numa abordagem a partir dos métodos intuitivos, para num momento posterior, proceder à formalização dos conceitos. Os dados foram interpretados, principalmente, a partir do modelo teórico proposto por Maria da Conceição Monteiro da Costa em sua tese de doutorado, sobre os diversos processos mentais relacionados a vários modos de pensamento visual-espacial. Os resultados evidenciaram que os alunos participantes da pesquisa têm dificuldades em lançar mão das estratégias gráficas nas tarefas matemáticas, bem como em mobilizar simultaneamente dois ou mais tipos de representação de um mesmo conceito. No entanto, percebeu-se, no decorrer do trabalho, um crescimento em relação à apropriação dessas várias formas de representação em matemática. Essa constatação sinalizou que, se devidamente estimulados, os alunos podem, através de atividades que incentivem o pensamento visual e a transição entre os vários registros de representação, compreender os vários aspectos relativos a um mesmo conceito, não se limitando apenas à aplicação das regras e mecanismos algébricos no estudo do Cálculo.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Ensino de Cálculo; Pensamento visual; Variação de funções.

ABSTRACT

The main purpose of this research was to investigate the use of visual thinking on teaching Differential and Integral Calculus. The research inquired about the way graphic strategies integrated with algebraic and textual languages could improve the understanding of the concepts related to the variation of real functions of one real variable. Theoretical studies and an empirical research were developed, in attempt to answer the research question. Sequences of activities favoring the various forms of visual thinking were applied. An intuitive method approach was first adopted, and a formal conceptualization was conducted in a second moment. Data were interpreted from the perspective proposed by Maria da Conceição Monteiro da Costa, in her doctoral dissertation, which presents a theoretical model of different mental processes related with different kinds of visual-spacial thinking. Results highlighted that the students who participated of the research found it difficult to use graphical strategies when they do mathematics tasks. Students also demonstrated difficulties making use of two or more then two types of representations of a same concept. However, during the process it was noted that students did an appropriation of these different ways of representation in mathematics. This evidence could be interpreted as a sign that, if stimulated to deal with tasks that promote visual thinking and the transition among different representation registers, students could understand the various aspects related to a same concept, avoiding the restrictive use of rules and algebraic procedures on studying Calculus.

Key words: Teaching of Mathematics; Teaching of Calculus; Visual-thinking; Variation of functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos EUA)

MPVE – Modos de pensamento visual-espacial

PVE – Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento

PVP - Pensamento visual-espacial resultante da percepção

PVMM - Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens mentais

PVR - Pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 A questão de pesquisa

O trabalho aqui apresentado é fruto de uma pesquisa cujo foco foi a utilização do pensamento visual no ensino de Cálculo no contexto de um curso de formação de professores.

Em 17 anos como professora de um curso de licenciatura em Matemática, doze deles na disciplina Cálculo I[1], a pesquisadora acompanhou a dificuldade de diversos alunos iniciantes no estudo do Cálculo Diferencial. Tais dificuldades, muitas vezes, são justificadas pela "*falta de base*" com relação ao estudo de polinômios, funções e trigonometria, pré-requisitos clássicos para o estudo do Cálculo. Verifica-se, no entanto, que mesmo alunos com relativa facilidade nesses conteúdos são tomados por sentimentos de estranheza e até de rejeição em relação aos conceitos introdutórios do Cálculo. A justificativa para isso pode estar na especificidade dessa disciplina quanto à terminologia, notação e forma de raciocínio.

> O cálculo é usualmente dividido em duas partes principais – cálculo diferencial e cálculo integral -, sendo que cada uma tem sua própria terminologia não-familiar, notação enigmática e métodos computacionais especializados. Acostumar-se a tudo isso exige tempo e prática, processo semelhante ao de aprender uma nova língua. (SIMMONS, 1987, p. 69).

A identificação dessas dificuldades iniciais traz questionamentos sobre qual seria a metodologia mais adequada para iniciar este estudo. A consulta aos livros-texto de Cálculo poderia ser um caminho para encontrar respostas, mas autores de livros de ensino superior costumam se limitar à apresentação do conteúdo, ficando as escolhas metodológicas muitas vezes a cargo do professor. Possivelmente, por não "enxergar" outra opção, o professor pode optar pela condução do seu curso no modelo tradicional, que se caracteriza pela manipulação excessiva de fórmulas e técnicas algébricas. E talvez essa seja uma abordagem que não oportunize o desenvolvimento de um entendimento real dos conceitos e que poderia justificar em parte as dificuldades enfrentadas pelos alunos.

No entanto, os professores de Cálculo dos dias atuais já dispõem de algumas obras que, além de orientar metodologicamente o professor, valorizam o estudo de uma mesma idéia matemática, sob diferentes perspectivas. Dentre essas, destacam-se: Cálculo de George B. Thomas (FINNEY, GIORDANO e WEIR, 2003), Cálculo (STEWART, 2001) e Cálculo com Geometria Analítica (SIMMONS, 1987).

Segundo Finney, Giordano e Weir (2003, p.ix), "...um curso não é feito por um livro, mas por professores e alunos" e "os recursos adicionados [...] [à décima] edição tornaram o livro ainda mais flexível e útil, tanto para o ensino quanto para o aprendizado de Cálculo". A flexibilidade citada pelo autor é confirmada na consulta ao texto: os conceitos são abordados, equilibrando-se os métodos gráfico, numérico e analítico; há indicações de atividades a serem desenvolvidas em calculadoras gráficas e computadores; além de apresentar exercícios que enfatizam os procedimentos e técnicas algébricas, tem-se exercícios teóricos e uma diversidade de problemas aplicados às diversas áreas do conhecimento.

Como diferencial em relação às outras obras ainda indica a consulta "on line" à biografia de diversos matemáticos e à história do Cálculo, bem como materiais complementares para alunos e professores, manuais de tecnologia, tutorial interativo de Cálculo e o *Syllabus Manager*^{MT} [2]. O material complementar do aluno contém ensaios e biografias históricas e exercícios "on-line". Já o do professor traz manual de soluções de todos os problemas propostos e transparências em português com as principais ilustrações do livro.

O autor do livro Cálculo (STEWART, 2001) esclarece que a ênfase do seu texto está na compreensão dos conceitos e na utilização da *Regra de Quatro*, na qual os conceitos devem ser abordados por meio das abordagens numérica, geométrica, algébrica e do ponto de vista verbal e descritivo. Assim como a obra anterior, também estimula o uso dos recursos tecnológicos, como as calculadoras gráficas e os sistemas algébricos computacionais. Apresenta problemas de aplicação às várias áreas do conhecimento, utilizando dados do mundo real, que permitem mais de uma estratégia para se chegar ao resultado. Como diferencial em

---

[1] Será utilizado o termo genérico "Cálculo" para expressar o campo de conhecimento matemático que inclui o Cálculo Diferencial e Integral.

[2] "O gerenciador de conteúdo Syllabus Manager^{MT} é uma ferramenta on-line, em inglês, de criação e gerenciamento de conteúdo para professores e alunos que utilizam [...] [esse] livro. Ele pode ser utilizado por qualquer pessoa para criar e manter um ou vários conteúdos programáticos na rede. Os alunos podem 'ativar' um determinado conteúdo de um professor a partir do site." (FINNEY, GIORDANO e WEIR, 2003, p.xiv)

relação a outras obras, sugere diversos projetos de extensão a serem desenvolvidos pelos alunos, numa intenção de que se tornem aprendizes ativos.

Apesar do livro Cálculo com Geometria Analítica (SIMMONS, 1987) não enfatizar, comparativamente aos dois primeiros, de forma constante o pensamento visual na abordagem dos conceitos, optou-se por também destacá-lo, por apresentar uma linguagem textual rica, abordando os conceitos do Cálculo quase como um texto literário, como quem conta uma história, sem deixar de primar pelo rigor. No endereço eletrônico da editora responsável pela publicação do livro no Brasil, sugere-se ao professor solicitar um material de ajuda, contendo as respostas aos exercícios pares, não apresentadas no livro.

As mudanças verificadas nos textos didáticos, no entanto, não garantem mudanças efetivas na forma como os assuntos do Cálculo são ensinados e aprendidos em sala de aula. Talvez isso possa ocorrer porque os professores, não apenas os de ensino superior, prefiram não correr riscos com abordagens inovadoras, fundamentando sua prática a partir da reprodução dos modelos vivenciados ao longo da sua vida escolar.

> Todos precisamos estar cientes do papel desempenhado por aqueles que ensinam em universidades de artes e ciências, preparando professores de todos os níveis.[...] Os estudantes tiveram 12 ou mais anos de aprendizado de ciências apresentadas a partir do paradigma transmissionista/ realista[...].[...] Infelizmente, eles provavelmente farão como foram ensinados, não como foram ensinados a ensinar[...]. (DEWEY e e DYKSTRA, 1998, p.221)

O estímulo para o desenvolvimento do trabalho aqui apresentado veio não só das vivências pessoais, mas também das discussões e leituras realizadas na disciplina Tópicos de Cálculo do Curso de Mestrado. Tais estudos despertaram e motivaram a questão de pesquisa com o foco no uso das estratégias visuais para o entendimento dos conceitos de Cálculo.

As motivações pessoais e os questionamentos levantados permitiram que fosse formulada a questão de pesquisa: como a utilização dos processos visuais, numa abordagem que permite a interlocução entre as várias formas de representação em matemática, pode contribuir para o entendimento do estudo da variação de funções[3].

---

[3] O termo genérico funções será usado em todo o texto para designar “funções reais de uma variável real”.

A partir da questão principal de pesquisa enunciada, outras foram elaboradas no intuito de problematizar o objeto de pesquisa:

- Quais aspectos pedagógicos são significativos para promover o uso do pensamento visual na aprendizagem da Matemática?
- Como os professores podem auxiliar os estudantes a fazer conexões entre as representações visuais e simbólicas das mesmas noções matemáticas?
- Qual a importância da utilização das estratégias gráficas como recurso metodológico num curso de licenciatura em Matemática?
- Como a visualização pode ser utilizada para promover a abstração e a generalização matemática?

1.2 Desenvolvimento da pesquisa

Na tentativa de responder a esse conjunto de questionamentos foram realizados estudos teóricos, bem como uma pesquisa empírica, através da aplicação de seqüências de atividades que estimulassem o pensamento visual e a comunicação entre as várias formas de linguagem, gráfica, algébrica e textual. As atividades privilegiaram, num primeiro momento, a investigação, por meio dos métodos intuitivos, para só num momento posterior proceder à formalização dos conceitos.

A fundamentação teórica da pesquisa demandou o estudo de diversos trabalhos, destacando-se alguns, sobre:

- os processos visuais e as várias formas de representação em matemática: Presmeg (2006), Costa (2002, 2005), Arcavi (2003), Guzmán (1996) e Dreyfus (1991);
- o pensamento visual e o ensino de Cálculo: Berry e Nyman(2003), Tall (1991); Frota (2004, 2002) e Rezende (2003);

Também foram realizados alguns estudos sobre a formação de professores, considerando que a pesquisa empírica foi desenvolvida nesse contexto: Fiorentini (2003), Ferreira (2003), Barufi (2002), Sztajn (2002) e Schön (1997).

A pesquisa empírica foi desenvolvida em três etapas: na primeira e segunda foram realizados dois estudos exploratórios e na terceira foi desenvolvido o estudo considerado como principal. O primeiro estudo exploratório foi realizado em uma turma de Cálculo I de um curso de Licenciatura em Matemática e o segundo junto a alunos de um curso de especialização em Educação Matemática. O estudo principal foi desenvolvido com estudantes de Cálculo de um curso de formação inicial de professores de matemática.

O processo de elaboração das seqüências de atividades revelou-se dinâmico, pois as atividades foram testadas nos estudos exploratórios, possibilitando construções e reconstruções. Os resultados obtidos através dos estudos exploratórios e as leituras teóricas concederam maior eficácia aos instrumentos utilizados, à condução do estudo principal e à análise dos dados, que levou em conta, de modo especial, os trabalhos de Costa (2002, 2005).

Considerando-se a opção adotada, de desenvolver estudos exploratórios e um estudo principal, decidiu-se por não descrever a metodologia em um único capítulo, pois isso dificultaria a explicitação do caminho trilhado durante a pesquisa, num movimento de constantes reflexões da pesquisadora a partir da própria prática e dos estudos teóricos realizados. Assim, cada estudo exploratório, bem como o estudo principal, foi apresentado detalhando-se o percurso metodológico, incluindo a elaboração dos instrumentos de coleta dos dados, no caso as seqüências de atividades, a caracterização dos alunos colaboradores, os processos de análise dos dados e os resultados principais.

1.3 Estrutura do relato de pesquisa

O relato da pesquisa desenvolvida é estruturado, objetivando que o leitor possa perceber um pouco da trajetória da professora e o movimento por ela realizado no sentido de se tornar professora-pesquisadora.

No capítulo 2, apresentam-se as principais interlocuções teóricas feitas a partir da consulta a diversos estudos e pesquisas realizados sobre o processo de visualização, as várias classificações dos modos de pensamento visual e o ensino de Cálculo.

O capítulo 3 traz a descrição das atividades, os resultados e a análise dos estudos exploratórios, detalhando-se a metodologia utilizada.

As questões metodológicas, a descrição das atividades, bem como a análise e categorização dos dados do estudo principal, estão reunidos no capítulo 4.

Nas considerações finais, capítulo 5, sintetizam-se os principais resultados, buscando-se através deles destacar as implicações educacionais decorrentes da pesquisa e apresentar novas questões que surgiram no decorrer do trabalho.

A partir dos resultados dessa pesquisa constituiu-se uma proposta para o estudo da variação de funções, com ênfase no pensamento visual e buscando a interlocução entre as várias linguagens matemáticas. Foi organizado de forma independente da dissertação para facilitar consultas e leituras. Essa proposta é apresentada no Apêndice C.

2 REPRESENTAÇÃO E VISUALIZAÇÃO NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

2.1 Significados da palavra visualização e termos associados

Esta pesquisa aborda o uso da visualização, numa perspectiva que permita uma interlocução com as várias formas de representação em Matemática, no ensino de Cálculo Diferencial e mais especificamente no estudo da variação das funções reais de uma variável real, nas análises de crescimento, decrescimento, concavidade e comportamento no infinito.

Antes de iniciar uma discussão sobre o papel da visualização na aprendizagem matemática, faz-se necessário, esclarecer os vários modos como o termo "visualização" vem sendo utilizado. Num primeiro momento, a abordagem é feita de forma geral, analisando-se posteriormente o significado do termo e de alguns outros termos correlatos, na literatura da pesquisa em Educação Matemática.

"Visualizar" é a ação de *"transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis: visualizar o irreal"* (HOUAISS e KOOGAN, 1995, p.883). Essa definição, retirada de um dicionário, mostra que o processo de visualização compreende dois momentos: no primeiro, algo é construído apenas mentalmente, no seguinte, representa-se o que se pensou. Apesar de não ser direcionada para a matemática, essa conceituação, ao citar a abstração como elemento necessário à ação de visualizar, já sinaliza que, mesmo nas tarefas mais simples de se representar de forma concreta aquilo que está somente na imaginação, processos mentais relacionados ao raciocínio matemático estão presentes.

De acordo com Dreyfus (1991), visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham vida. O autor especifica dois tipos de representação: simbólica e mental. A primeira é externamente escrita ou falada, no sentido de simplificar a comunicação de um conceito e a segunda se refere ao esquema interno, ou quadro de referência que uma pessoa usa para interagir com o mundo externo. A representação mental compreende "…o que ocorre na mente quando pensamos sobre determinada parte do mundo externo, podendo diferir de pessoa para pessoa".(DREYFUS,1991, p. 31, tradução nossa[4])

Presmeg (2006), fundamentando-se em Piaget e Inhelder (1971) também considera que a visualização inclui "[...] processos de construção e transformação de ambas as imagens, visual e mental, e todas as inscrições de natureza espacial que podem estar implicadas no fazer matemático." (PRESMEG, 2006, p.206, tradução nossa)[5]. Presmeg utiliza o termo "inscrições" ao invés de representações como uma forma de evitar o problema dos vários significados e conotações atribuídas ao termo representação, em função das mudanças de paradigmas do final do século XX. O termo inscrições é usado por Presmeg (2006, p.206, tradução nossa)[6] no sentido de Roth, como segue: "Representações gráficas, que na sociologia da ciência e no discurso pós-moderno ficaram conhecidas como inscrições, tornaram-se essenciais para a prática científica."

Duval (2003, p. 14) nomeia os diferentes tipos de representações semióticas, ou seja, as várias representações de um objeto em estudo, de "registros de representação". Segundo ele, os sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, representações gráficas e a língua natural são exemplos desses tipos de registro.

Ligada ao termo "visualização", pode vir também "pensamento visual-espacial", definido como

> [...] o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objetos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas. (COSTA, 2002, p.263).

O termo também pode compreender a representação espacial, através da manipulação de símbolos, de algo que a princípio não possuiria uma representação espacial, como, por exemplo, os diagramas utilizados para tratar os conceitos algébricos.

---

[4] [...]what occurs in the mind when thinking of that particular part of the external world and may differ from person to person.

[5] […] processes of constructing and transforming both visual mental imagery and all of the inscriptions of a spatial nature that may be implicated in doing mathematics.

[6] Graphical representations, which in the sociology of science and in postmodern discourse have come to be known as *inscriptions* , are central to scientific practice.

Apesar de serem mais facilmente reconhecidas no estudo dos conceitos geométricos, as representações visuais estão presentes nos mais diversos assuntos matemáticos. Diagramas são usados em álgebra, dados estatísticos são organizados em tabelas e gráficos para possibilitar uma análise mais clara dos resultados e algoritmos convenientes auxiliam na compreensão dos processos utilizados nas operações matemáticas.

Arcavi (2003), com o propósito de descrever os vários papéis da visualização no ensino-aprendizagem da matemática, esclarece quais elementos podem estar envolvidos nesse processo que, segundo ele, oferece um método de “ver” o “não visto”.

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver idéias previamente desconhecidas e entendimentos avançados. (ARCAVI, 2003, p.217, tradução nossa)[7]

Numa tentativa de incluir, numa mesma descrição, todos os elementos citados nas definições apresentadas, pode-se dizer que a visualização compreende criação, construção, interpretação, comunicação e transformação de imagens, aqui entendidas num sentido atribuído pela psicologia, como representações ou reproduções mentais de percepções ou sensações, ou ainda representações mentais de abstrações.

2.2 Importância atribuída à visualização para conhecer e aprender matemática

A matemática se fez presente ao longo da evolução histórica da humanidade, organizando, polindo e dando rigor aos métodos quantitativos que foram surgindo a partir das necessidades da convivência humana. Acredita-se que o processo de representar situações e acontecimentos através de figuras surgiu juntamente com a

[7] Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.

necessidade do homem de se comunicar. Encontram-se diversos desenhos em cavernas, comprovando a utilização das representações gráficas para comunicar fatos e idéias desde os primeiros tempos. Dessa forma, percebe-se que a visão sempre exerceu função central tanto biológica como sócio-cultural para o ser humano.

Adams e Victor citados por Arcavi (2003, p.15, tradução nossa)[8] afirmam:

> "A faculdade da visão é para nós a mais importante fonte de informação sobre o mundo. A maior parte do cérebro é envolvida na visão e no controle visual dos movimentos, na percepção e elaboração das palavras, na forma e cor dos objetos. O nervo ótico contém cerca de 1 milhão de fibras, comparando-se com as 50.000 do nervo auditivo. O estudo do sistema visual proporcionou grande conhecimento do sistema nervoso. De fato, nós sabemos mais sobre a visão do que sobre qualquer outro sistema sensório".

Arcavi (2003 , p.15) destaca ainda que é trivial o fato que vivemos num mundo onde a informação é transmitida principalmente de forma visual, o que é fortemente encorajado pelas tecnologias.

Cruz (2000, p. 30, tradução nossa)[9], num trabalho que objetivou analisar o papel das imagens na atividade matemática, também considera a importância dos diversos estudos realizados, ao longo da história, sobre as imagens mentais.

> As imagens mentais constituem um fenômeno que apareceu cedo na história e seu estudo tem sido realizado por diferentes pessoas ao longo dos tempos. Pensadores, filósofos, poetas, oradores, frades, psicólogos e educadores matemáticos têm sido alguns dos que tem se dedicado a seu estudo e investigação. Nos primeiros escritos gregos, já aparecem referências às imagens no estudo dos fenômenos como a memória, nas situações em que se requer a lembrança de algo ou nos fenômenos que tratam de encontrar significado e sentido para os problemas que ocorrem ao nosso redor.

---

[8] "The faculty of vision is our most important source of information about the world. The largest part of the cerebrum is involved in vision and in the visual control of movement, the perception and the elaboration of words, and the form and color of objects. The optic nerve contains over 1 million fibers, compared to 50.000 in the auditory nerve. The study of the visual system has greatly advanced our knowledge of the nervous system. Indeed, we know more about vision than about any other sensory system".

[9] Las imágenes mentales constituyen un fenómeno que apareció tempranamente en la historia y su estudio ha sido realizado por diferentes personas a lo largo de los tiempos. Pensadores, filósofos, poetas, oradores, frailes, psicólogos y educadores matemáticos, han sido algunos de los que se han dedicado a su estudio e investigación. En los primeros escritos griegos ya aparecen referencias a las imágenes en el estudio de fenómenos como la memoria, en las situaciones donde se quiere hacer uso del recuerdo, o en fenómenos donde se trata de encontrar significado y sentido a los problemas que ocurren a nuestro alrededor.

Se a visão cumpre uma função tão importante para o homem, não é de se estranhar que a matemática tenha se apoiado, ao longo da história, nos métodos visuais. Para os *pitagóricos*, por exemplo, a tarefa de visualizar constituía uma ferramenta específica da atividade matemática. Eles utilizavam estruturas feitas com pedras (cálculos) para conceber e manipular números. A obra *Os Elementos de Euclides* que, à sua época, teve o mérito de organizar o conhecimento matemático existente, faz referências contínuas às imagens. No século XVII, através da Geometria Analítica, *Descartes* combinou representação gráfica, geometria e álgebra, estabelecendo conexões importantes sobre as várias formas de se abordar um conceito. No final do século XVII surgiu o Cálculo, apoiando-se em elementos visuais e intuitivos.

> A visualização foi a tônica geral do trabalho criativo dos matemáticos de todos os tempos. Um ou outro tipo de imagem acompanha constantemente suas especulações, [...].. A visualização, [...], tem ocupado um importante papel no desenvolvimento do pensamento matemático, como tinha que ser, dada à natureza cognitiva do homem, tão condicionada pelos elementos visuais, intuitivos, simbólicos, representativos, correspondendo à natureza da matemática e a seus propósitos. (GUZMÁN, 1996, p.13, tradução nossa)[10]

Apesar da constatação de que a visualização sempre fez parte do fazer matemático de todos os tempos, surgiu, na primeira metade do século XX, "[...] uma corrente formalista, que a rejeitava como ferramenta de demonstração e análise" (GUTIÉRREZ, 2002, p.59, tradução nossa)[11], desvalorizando sua contribuição na comunicação e compreensão dos conceitos matemáticos. Essa corrente ficou conhecida como movimento da "Matemática Moderna".

> As conseqüências foram muito sérias no que se refere à visualização. Criou-se um ambiente de desconfiança com respeito a ela. Alguns propunham de forma militante que se prescindisse dela totalmente. A influência do formalismo na apresentação dos resultados da investigação se fez a norma inevitável. A estrutura dos livros-textos tendia a conformar-se com os imperativos desta mesma corrente, não só no ensino superior, senão, o que

[10] La visualización ha sido la tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos. Uno u otro tipo de imagen acompaña constantemente sus especulaciones, probablemente aun las más abstractas, aunque la naturaleza de esta imagen presenta una variedad de individuo a individuo mucho mayor de lo que sospechamos. La visualización, como vemos por estas muestras, ha jugado un importante papel en el desarrollo del pensamiento matemático. Como tenía que ser, dada la naturaleza cognoscitiva del hombre, tan condicionada por los elementos visuales, intuitivos, simbólicos, representativos, y como corresponde a la naturaleza de la matemática y a sus propósitos.

[11] [...] que rechazaba la visualización como herramienta de demostración y análisis

> é pior, em muitos países também nos níveis fundamental e médio ("Matemática Moderna"). (GUZMÁN, 1996, p.14, tradução nossa)[12]

De acordo com Gutiérrez (2002, p.59) algumas circunstâncias foram determinantes para tal rejeição. Do século XVII até o final do século XIX, por exemplo, demonstrações convincentes do Cálculo só foram obtidas através da aritmetização da análise, desenvolvida por Weiertrass. Em meados do século XIX, resultados incompatíveis da Geometria de Riemann com a Geometria Euclidiana fizeram criar uma atmosfera de desconfiança com relação aos processos intuitivos e visuais; a teoria de Conjuntos de Cantor e os paradoxos em torno dos fundamentos da matemática conduziram os matemáticos a empenhar-se nos aspectos formais.

Segundo Presmeg (2006, p.205), a pesquisa sobre imagens mentais em todas as modalidades dos sentidos (visão, audição, olfato, paladar e tato) e suas interconecções eram prevalecentes dentro da psicologia no século XIX, mas devido à elevação do *behaviorismo* na primeira metade do século XX, tais estudos foram descontinuados de forma substancial, criando um "período de dormência" que durou até meados da oitava década do século XX.

Indícios de mudança nesse quadro começariam a surgir por volta da década de 70, vindo a ganhar maior concretude na década de 90, quando a pesquisa sobre visualização ganhou força e reconhecimento como um campo significativo de pesquisa, sendo tema de diversas publicações e apresentações de artigos, relatos de experiência e pôsteres em encontros de educadores matemáticos de todo o mundo. Presmeg (2006) considera que, isso se deu, em grande parte, pelo crescimento da *Teoria Construtivista*, assumindo uma posição contrária à *behaviorista*.

> A década de 80 foi um período especialmente fértil: o construtivismo estava em alta, enquanto opositor à influência do behaviorismo, e as metodologias qualitativas de pesquisa estavam começando a ser aceitas, como úteis para lidar com questões complexas na educação matemática. O período era propício para um interesse renovado sobre o papel do pensamento visual no ensino e aprendizagem da matemática, e a pesquisa qualitativa era um veículo satisfatório para investigar o caso de diferentes processos de

---

[12] Las consecuencias fueron muy serias en lo que se refiere a la visualización. Se creó un ambiente de desconfianza respecto a ella. Algunos propugnaron de forma militante que se prescindiera de ella totalmente. La influencia del formalismo en la presentación de los resultados de la investigación se hizo la norma ineludible. La estructura de los libros de texto tendía a conformarse con los imperativos de esta misma corriente, no sólo a nivel de la enseñanza superior, sino lo que es peor, en muchos países también a nivel secundario e incluso primario ("matemática moderna").

> pensamento inacessíveis associados ao uso de imagens mentais e formas associadas de expressão na aprendizagem da matemática. A importância do processo visual e as manifestações externas dessa cognição em matemática eram crescentemente reconhecidas. (PRESMEG, 2006, p.206, tradução nossa)[13]

Esse contexto também contribuiu para que nesse período se formasse uma comunidade organizada por psicólogos, pedagogos, professores e matemáticos de várias nacionalidades, com o intuito de aprofundar os estudos sobre as questões inerentes à aprendizagem da matemática. Com essa organização, tornou-se constante o uso da expressão “Educação Matemática”, definida como a “[...] área de conhecimento teórico-prática, [...] que se institui no instante mesmo em que algo a que chamamos matemática ocorre num contexto de ensino e aprendizagem” (Garnica, 2002, p.91).

A partir desse movimento vieram à tona discussões mais abrangentes sobre o papel das estratégias visuais e muitos estudos têm sido realizados nesse sentido. “O tema visualização em matemática preocupa matemáticos, psicólogos, professores e educadores matemáticos e tem sido o cerne de muitos trabalhos, desenvolvidos a partir de enfoques variados” (FROTA, 2004, p.7). Em muitos desses trabalhos, os obstáculos inerentes aos processos visuais, levantados pelo Movimento de Matemática Moderna, continuam sendo discutidos, mas verifica-se um certo consenso da comunidade matemática em afirmar a importância dos processos de visualização na aprendizagem dessa disciplina.

> [...] a possibilidade de que a visualização possa conduzir a um erro não invalida sua eficácia e sua potência nos diferentes processos do fazer matemático, tanto no trabalho criativo como nos processos de comunicação e transmissão. Inclusive as técnicas mais formais conduzem a erros, raciocínios incompletos, falácias, etc. (GUZMÁN, 1996, p.18, tradução nossa)[14]

---

[13] The decade of the 1980s was an important watershed: constructivism was on the rise, countering the influence of behaviorism; and qualitative research methodologies were beginning to be accepted as valuable for addressing complex questions in mathematics education. The period was ripe for a renewed interest in the role of visual thinking in the teaching and learning of mathematics, and qualitative research was a suitable vehicle for investigating the otherwise inaccessible thought processes associated with the use of mental imagery an associated forms of expression in learning mathematics. The importance of visual processing and external manifestations of this cognition in mathematics was increasingly recognized.

[14] Pero la posibilidad de que la visualización pueda conducir a error no invalida su eficacia y su potencia en los diferentes procesos del quehacer matemático, tanto en el trabajo creativo como en los procesos de comunicación y transmisión. Incluso las técnicas más formales conducen a veces a errores, razonamientos incompletos, falacias, etc

> Hoje em dia, a visualização, como ponto central do aprendizado e do fazer matemático, parece ser reconhecida amplamente. A visualização não é mais relacionada simplesmente a propósitos ilustrativos, mas é também reconhecida como um componente fundamental na argumentação (relacionada profundamente com conceitual e não somente o perceptual), resolução de problemas e até mesmo em demonstrações. (ARCAVI, 2003, p.235, tradução nossa)[15]

> [...] o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, análise e de visualização. (DUVAL, 2003, p.11)

O desenvolvimento tecnológico e a inserção das calculadoras e computadores no ensino de matemática, nas duas últimas décadas, realimentou o debate acerca da visualização e as mídias na educação matemática. “A tecnologia computacional enfatiza a componente visual da matemática, mudando o status da visualização na educação matemática.” (BORBA e VILLARREAL, 2006, p.96, tradução nossa[16]).

Borba e Villarreal (2006) destacam que o uso da mídia para comunicar, representar e produzir idéias matemáticas altera o tipo de matemática a ser desenvolvida e a maneira como é feita. Concomitantemente, a visualização alcança uma nova dimensão, decorrente de se considerar um ambiente computacional de aprendizagem, como uma forma particular de pensamento coletivo que integra aluno, professor-pesquisador, mídia e conteúdos matemáticos.

A literatura em Educação Matemática também enfatiza a valorização das várias formas de representação matemática, numa abordagem que permita, o quanto possível, a comunicação entre elas. Dreyfus (1991) indica, como um caminho para obter sucesso em matemática, o uso flexível dos vários aspectos ligados a um determinado conceito.

> Em muitos casos, favoravelmente, várias representações de um mesmo conceito podem se complementar e eventualmente podem se integrar em uma representação única desse conceito. [...] Como resultado desse processo, tem-se disponível o que é melhor descrito como múltiplas representações ligadas, condição que permite usá-las simultaneamente,

---

[15] Nowadays, the centrality of visualization in learning and doing mathematics seems to become widely acknowledged. Visualization is no longer related to the illustrative purposes only, but is also being recognized as a key component of reasoning (deeply engaging with the conceptual and not the merely perpeptual), problem solving, and even proving.

[16] Computer technology stresses the visual component of mathematics, changing the status of visualization in mathematics education.

> realizar trocas eficientes entre elas, conforme a necessidade do problema ou situação sobre a qual se pensou.(DREYFUS, 1991,p.32, tradução nossa)[17]

> É desejável que se tenha, para obter sucesso em matemática, representações mentais ricas dos conceitos. Uma representação é rica se contém muitos aspectos ligados ao conceito e é pobre se tem poucos elementos para permitir flexibilizações na solução de um problema. (DREYFUS, 1991, p.32, tradução nossa)[18]

Duval (2003, p. 14) destaca a troca entre os vários "registros de representação" como um diferencial da atividade matemática em relação às demais ciências: "A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento o registro de representação.".

Para Duval (2003, p. 14), a atividade cognitiva desenvolvida nessas trocas contribui para um melhor entendimento dos conceitos. O autor discriminou dois tipos de transformação de representações semióticas: os tratamentos, quando ocorrem transformações de representações dentro de um mesmo registro, e as conversões, quando há conservação do objeto, mas ocorre mudança do registro. Dentro do tema funções, apresentado neste trabalho, o tratamento poderia ocorrer, por exemplo, quando se obtém, por simetria, o gráfico da inversa, a partir do gráfico de uma função, pois não há mudança de registro. Já a obtenção de uma expressão algébrica de uma função, a partir dos dados numéricos de duas grandezas, organizados em uma tabela, seria uma conversão. De acordo com o autor, como a conversão não tem papel intrínseco nos processos de justificação ou de prova, o tratamento é mais valorizado nas atividades matemáticas, mas caso queira "[...] analisar as dificuldades de aprendizagem em matemática, é preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos". (DUVAL, 2003, p.30).

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos,

---

[17] In more favorable cases, several mental representations for the same concept maycomplement each other and eventually may be integrated into a single representation of that concept.[...] As a result of this process, on has available what is best described as miltiple linked representations, a state that allows one to use several of them simultaneously, and efficiently swith between them at appropriate moments as required by the problem or situation on thinks about.
[18] To be successful in mathematics, it is desirable to have rich mental representations of concepts. A representation is rich if it contains many linked aspects of that concept. A representations is poor if it has too few elements to allow for flexibility in problem solving.

> mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro.[..] Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL, 2003, p. 16)

Documentos como o "Principles and Standards for Schools Mathematics[19] (NCTM,2007), nos Estados Unidos, e os "Parâmetros Curriculares Nacionais" (BRASIL, 2007), referências para determinação de quais e como os conteúdos matemáticos devem ser trabalhados, recomendam que os conceitos devam ser estudados estimulando a passagem de um tipo de linguagem à outra, o que, segundo Duval, diz respeito a transformações do tipo conversão de um registro semiótico em outro. Esses documentos apontam essa forma de abordagem como um dos caminhos para que os estudantes adquiram melhor compreensão das idéias matemáticas e, por conseqüência, apliquem com maior eficácia esse conhecimento em problemas reais.

> Algumas formas de representação, tais como diagramas, exposições gráficas e expressões simbólicas têm sido por muito tempo parte da matemática da escola. Infelizmente, essas representações e outras freqüentemente foram ensinadas e aprendidas como se fossem fim em si mesmas. Essa abordagem limita o poder e a utilidade das representações como ferramentas para aprender e fazer a matemática. (NCTM, 2007, tradução nossa)[20]
>
> [Os alunos devem] traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva, em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas, umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações. (BRASIL, 2002, p.114)

Na condução deste trabalho, tais recomendações serão consideradas, buscando-se discutir como a visualização gráfica pode contribuir para o "pensar matemático", numa perspectiva que permita uma interlocução constante com as outras formas de representar os conceitos relacionados à variação de funções.

[19] Princípios e padrões para a matemática escolar: publicação do NCTM - National Council Of Teachers Of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos EUA)

[20] Some forms of representation such as diagrams, graphical displays, and symbolic expressions--have long been part of school mathematics. Unfortunately, these representations and others have often been taught and learned as if they were ends in themselves. This approach limits the power and utility of representations as tools for learning and doing mathematics.

2.3 Diferentes modos do pensamento visual

Diversos pesquisadores têm se dedicado a estudar o pensamento visual (BISHOP, 1989; PRESMEG, 2006; DÖRFLER *apud* PRESMEG, 2006; COSTA, 2002, 2005). Desses estudos, resultaram classificações para os tipos de imagem, processos e capacidades mentais associados a esse pensamento.

Bishop (1989, p.11, tradução nossa)[21] define dois tipos de capacidades espaciais: a habilidade para interpretar informações figurais (IFI) e o processamento visual de figuras (VP), que "[...] envolve visualização e tradução de ligações abstratas e informações não-figurais em termos visuais, incluindo também a manipulação e transformação de representações visuais e imagens visuais".

Dörfler, citado em Presmeg (2006) e em Costa (2005), propôs quatro tipos de esquema de imagem mental: figurativo, operativo, simbólico e relacional. Na descrição da sua teoria, ele utilizou a terminologia "portadores concretos", que pode ser entendida como o modelo de um determinado esquema, como por exemplo os diagramas de Venn usados para o estudo de conjuntos ou o esquema geométrico da regra de Sarrus para o cálculo de determinantes. Presmeg (2006) por sua vez, identificou, através de pesquisa com 54 alunos do ensino secundário, cinco tipos de imagens mentais[22] presentes no raciocínio matemático: concreta, sinestésica, de memória por fórmulas, dinâmica e padrão. Posteriormente, serão fornecidos, através de exemplos, maiores esclarecimentos sobre essas classificações.

Ao estudar os modos de pensamento geométrico, associados à visualização, Costa (2002) classificou-os, num primeiro momento, em três categorias: pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relações entre imagens (PVM/PVR) e pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE). Num estudo posterior (COSTA, 2005), quando da análise de dados, a autora percebeu a necessidade de dividir a categoria anteriormente

[21] [...]involves visualization and the translation of abstract relationships and non-figural information into visual terms. It also includes the manipulation and transformation of visual representations and visual imagery.

[22] Optou-se por traduzir o termo inglês "imagery" como "imagens mentais", considerando os significados da palavra segundo o dicionário Merriam Webster, ao invés de adotar a palavra imagética, usada como tradução portuguesa por Costa (2002).

codificada como - PVM/PVR - em duas outras nomeadas como: pensamento-visual resultante da manipulação mental de imagens (PVMM) e pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens (PVR). A seu ver, essa subdivisão melhoraria o poder explicativo do seu modelo. Costa estabelece uma relação entre as categorias que propõe e as categorias de Dörfler e as de Presmeg, esclarecendo:

> Um *esquema imagético* é para Dörfler, uma estrutura esquemática que duma forma altamente estilizada descreve ou exibe as características principais e relações de situações e processos aos quais potencialmente a palavra se refere. [...] Acresce que os esquemas imagéticos são usados para construir relações cognitivamente manipuláveis e compreensíveis. Dörfler vê então um *esquema imagético* como a interacção*(sic)* cognitiva e ou perceptiva *com* e manipulação *de* alguma espécie de modelo (esquema geométrico) como objecto *(sic)*, seja ele um material, um desenho ou seja só imaginado. Chamou ao modelo o *portador* (concreto) do esquema imagético. Muitas (mas não todas) das bem conhecidas assim chamadas representações para conceitos matemáticos podem servir potencialmente como portador de um esquema imagético relacionado. (COSTA, 2005, p. 32)

> Presmeg (1992), relativamente à imagética visual, inclui não só aquela imagética que alcança a vivacidade e a transparência de uma figura como também outros tipos de imagética que ilustram formas, configurações e padrões. A sua definição de imagem visual *esquema mental que ilustra informação visual ou espacial,* não especifica se é exigida a presença mental de um objecto*(sic)*. A imagética é então definida como uma colecção*(sic)* de imagens. (COSTA, 2005, p.35)

Costa (2005, p.108) relaciona seus modos de pensamento visual-espacial aos tipos de “imagéticas” de Presmeg (2006), aos esquemas imagéticos de Dörfler (*apud* PRESMEG, 2006) e às idéias de Piaget (PIAGET, INHELDER, 1977). O Quadro 1 foi extraído do quadro encontrado em Costa (2005, p.108), visando correlacionar as categorias de pensamento visual usadas por Costa com as categorias ou os esquemas de imagens mentais de Presmeg e Dörfler.

O pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP) é um modo inicial, primário, mais próximo das sensações, relacionando-se a operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial, de memória. Dessa forma, pode englobar o tipo de imagens *concretas*, que pode ser entendido como “figura na mente”, mas não a mesma para todos e de *memória por fórmulas*, identificados por Presmeg (2006). Esses dois tipos de imagens mentais podem corresponder ao esquema de imagens mentais *figurativo* de Dörfler, que depende unicamente da percepção.

Modos de pensamento visual-espacial propostos por Costa	Tipos de imagens mentais de Presmeg	Tipos de esquemas de imagens de Dörfler
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), pensamento global	Imagens mentais concreta Imagens mentais de memória	Figurativo
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens mentais e da construção mental de relações entre imagens mentais (PVMM/ PVR)	Imagens mentais dinâmica Imagens mentais padrão	Relacional
Pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE)	Imagens mentais concretas Imagens mentais sinestésicas Imagens mentais dinâmicas Imagens mentais padrão Imagens mentais de memória	Simbólico Operacional Relacional Figurativo

Quadro 1: Modos de pensamento visual-espacial de Costa e categorias de imagens mentais de Presmeg e Dörfler (Extraído de Costa(2005, p.108)).

O pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens mentais e da construção mental de relações entre imagens mentais (PVMM/PVR) está ligado às operações intelectuais relacionadas com manipulação, transformações de idéias, conceitos e modelos. Corresponde, portanto, mais diretamente às imagens mentais *dinâmicas* e imagens *padrão* identificadas por Presmeg (2006). Imagens mentais *dinâmicas* envolvem o movimento e a transformação de imagens mentais. Na construção de imagens *padrão*, pode-se desprezar detalhes, para que sejam estabelecidas relações puras em um esquema visual-espacial, como por exemplo a percepção, a partir da representação gráfica, em um determinado intervalo, de uma função real contínua e crescente, de que todas as retas tangentes têm coeficientes angulares positivos. Pode-se dizer também que as imagens mentais *dinâmica* e *padrão* encontram correspondentes no esquema de imagens mentais relacional proposto por Döfler(apud Presmeg, 2006), pois envolve a transformação dos portadores concretos.

O pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE) fundamenta-se essencialmente na linguagem, estando ligado ao processo pelo qual as representações mentais se exteriorizam, à comunicação e disseminação de idéias, à construção de argumentação e à descrição da dinâmica mental. Engloba os tipos de imagens mentais *concreta*, *dinâmica*, *padrão*, *de memória* e *sinestésica* (PRESMEG, 2006), que envolvem atividade física de algum tipo, bem como os esquemas *relacional*, *figurativo*, *simbólico*, ligado às fórmulas com símbolos e relações espaciais e *operacional*, relacionado com quem opera, sugeridos por Dörfler(*apud* Presmeg, 2006).

A comparação apresentada no Quadro 1 e justificada nos parágrafos anteriores permite verificar que não se pode estabelecer divisões bem definidas entre as categorias, pois uma categoria pode envolver elementos de outra. As classificações também não sugerem que, nas tarefas matemáticas, os tipos de imagens mentais ou os modos de pensamento visual-espacial se sucedem de forma linear.

Uma situação de aprendizagem matemática, dentro do tema deste trabalho, é descrita a seguir para ilustrar o fato da divisão entre categorias não ser exata e a sucessão dessas categorias ser não-linear: várias são as possíveis formas de raciocínio de um estudante ao executar a tarefa de, a partir de um gráfico conhecido, como o da função $y = x^2$, obter, por translações, os gráficos das funções $y = x^2 + c$ ou $y = (x + c)^2$,sendo $c \in \Re$.

Nos tipos de esquema de imagem de Dörfler o aluno poderia ir do *figurativo* (puramente perceptivo, sem transformações), ao reconhecer o gráfico da função $y = x^2$, para o *relacional*, quando obtém os outros gráficos. Nesse raciocínio poderiam também estar incluídos elementos do esquema *simbólico*, que envolve fórmulas com símbolos e relações espaciais.

O modo de raciocinar do aluno também poderia, seguindo a classificação de Presmeg (2006), seguir a seqüência *imagem mental concreta* $\rightarrow$ *imagem mental padrão* $\rightarrow$ *imagem mental dinâmica*, quando, respectivamente: 1) executa o reconhecimento visual do gráfico da função $y = x^2$; 2) identifica elementos importantes como as coordenadas do vértice, a simetria do gráfico, a concavidade e os intervalos de crescimento e decrescimento; 3) transforma mentalmente a imagem do gráfico dado para obter a representação do gráfico da função $y = x^2 + c$ ou $y = (x + c)^2$.

Uma terceira possibilidade seria, seguindo desta vez os modos de pensamento visual-espacial propostos por Costa (2005, p.188), o aluno estabelecer ligações entre as representações algébrica e gráfica da função $y = x^2$ (PVE), interpretar e apreender globalmente a representação geométrica dessa função (PVP), prever como ficará o gráfico(PVR) da função $y = x^2 + c$ ou $y = (x + c)^2$, reconstruindo mentalmente (PVMM) o gráfico de $y = x^2$ e descrever o processo pelo qual chegou ao resultado(PVE).

Os modos de pensamento visual-espacial sugeridos por Costa (2002, p.263; 2005, p.188) serão tomados, como referencial teórico central do presente trabalho, considerando-se o seu potencial explicativo mais adequado para o tipo de atividade empírica desenvolvida.

2.3.1 Processos mentais associados aos Modos de Pensamento Visual-Espacial propostos por Costa (2002,2005)

A pesquisadora associou a cada um dos modos de pensamento visual-espacial diversos processos mentais. O segundo modelo (COSTA, 2005, p.188) representa uma evolução em relação ao primeiro (COSTA, 2002, p.263). Como esses dois modelos foram utilizados na elaboração e na análise dos dados, de acordo com as etapas de desenvolvimento da pesquisa aqui apresentada, faz-se necessário estudar, mais detalhadamente, cada um deles.

O Quadro 2 mostra os processos mentais associados ao pensamento visual resultante da percepção (PVP) nos dois modelos. Segundo Costa (2005, p.92) as *intuições primárias* são "[...] aquisições cognitivas que se desenvolvem nos seres humanos duma forma natural, antes e independente do ensino sistemático" e a inferência intuitiva ocorre quando, por exemplo, ao correr atrás de uma bola "[...]uma criança não só vê bola mover-se, mas também espera que continue a mover-se, que continue a existir, que preserve a sua forma e outras propriedades*". "Avaliar uma imagem* consiste no apresentar novamente a imagem" [...] [e essa avaliação][...] "resulta do confronto entre a imagem mental e a imagem real".

De acordo com a pesquisadora, a percepção do que chega até nossos olhos envolve duas fases: *informação visual,* que consiste no registrar as informações, a partir das sensações, e o *reconhecimento do padrão visual*, que envolve a interpretação das formas e dos objetos. Na fase do *reconhecimento*, ela cita os princípios da *gestalt*[23] de organização dos objetos: proximidade (os elementos juntos tendem a organizar-se em unidades); semelhança (objetos que se assemelham tendem a ser agrupados juntos); continuidade (percebe-se melhor linhas que mudam

---

[23] Gestalt:: teoria pela qual "[...]todo conhecimento é fruto do exercício de estruturas racionais, pré-formadas pelo sujeito (GIUSTA, 2003, p. 4).

continuamente do que linhas com mudanças bruscas); fecho e forma (tendência de ver melhor formas fechadas ao invés de abertas, forma regular a irregular). Dessa forma, na *formação da gestalt*, deve-se saber "*o que está relacionado com o quê"* (COSTA, 2005, p.93). Os processos mentais de *reconhecimentos visuais, identificação de objetos, modelos, formação de um gestalt, apreensão global de uma configuração geométrica* são apontados como pertencentes à segunda fase da percepção visual. Apesar de ser um processo mais elaborado, a *abstração perceptual* é incluída no segundo modelo, pois a partir da experiência ou do reconhecimento visual é possível identificar, compreender e reconhecer padrões. A geração de conceitos ocorre quando surgem idéias a partir da percepção de relações.

Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP)	
Primeiro modelo (COSTA, 2002, p.264)	Segundo modelo (COSTA, 2005, p.92)
Intuições primárias Construção de imagens mentais Re-apresentação de imagens mentais Reconhecimentos visuais Interpretação Identificação de objetos, modelos e formação de um "gestalt", Apreensão global de uma representação geométrica Memorização de uma exposição lógica Geração de conceitos Iterações Primeiras inferências intuitivas.	Intuições primárias, inferências intuitivas Construção visual Re-apresentação e avaliação de imagens mentais Reconhecimentos visuais Interpretação Identificação de objetos, modelos e formação de um "gestalt", apreensão global de uma configuração geométrica Abstração perceptual e abstração ligada ao reconhecimento Geração de conceitos

Quadro 2: Modelos teóricos de Costa dos processos mentais associados ao PVP

No Quadro 3, são apresentados os processos mentais associados ao pensamentos visuais-espaciais resultantes da manipulação mental de imagens mentais ou da construção mental de relações entre imagens mentais (PVMM/ PVR) em três momentos: no modelo inicial (COSTA, 2002, p. 263), no modelo revisto (COSTA, 2005, p. 98) e após a divisão em PVMM e PVR (COSTA, 2005, p. 188).

Nos modos PVMM e PVR, "[...] as imagens mentais são mentalmente previstas ou antecipadas, transformadas e comparadas, e ainda planeamentos mentais, construção entre imagens mentais e fatos, propriedades sobre representações mentais podem também vir a ser desencadeados por vezes como iluminações súbitas" (COSTA, 2005, p. 94).

A pesquisadora optou pela separação dos modos PVMM e PVR por perceber que os alunos participantes da pesquisa empírica utilizavam distintamente os processos mentais relacionados ora à manipulação mental de imagens, ora à construção mental de relação entre imagens, indicando uma certa independência entre estes dois modos. Ela também considerou que "os processos mentais associados ao modo PVR são cognitivamente de ordem mais elevada que os processos mentais associados ao modo PVMM" (COSTA, 2005, p.185).

No primeiro modelo, a pesquisadora usa o termo anglo-saxônico *unitizing*, para designar a operação mental identificada como base de muita atividade matemática tanto geométrica como numérica. Esse processo consiste em construir e coordenar unidades abstratas. No modelo reconstruído, ela prefere substituí-lo pelo termo da língua portuguesa *unificação*. Também há a adoção do termo *Construção visual* para designar o processo relativo à antecipação e à organização lógica.

<table>
<tr><td colspan="3">Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de mental de imagens mentais ou da construção mental de relações entre imagens mentais(PVMM/PVR)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Primeiro modelo: PVM/ PVR (COSTA, 2002,p.265)</td><td colspan="2">Segundo modelo</td></tr>
<tr><td>Antes da divisão PVMM/PVR (COSTA, 2005, p.98)</td><td>Divisão do modo PVMM/PVR em PVMM e PVR(COSTA, 2005, p.188)</td></tr>
<tr><td>Abstração reflexiva
Intuições secundárias
Descoberta de relações entre imagens mentais, propriedades e fatos
Transformações mentais
"Unitizing"
Planificações mentais
Verificação
Comparação
Criação de modelos
Reconstrução mental da visão de um objeto
Generalizações
Transferência,
Previsão mental[24]</td><td>Intuições secundárias e intuições antecipatórias
Transformações mentais (mudanças de posição e mudanças de forma)
Unificação
Modelos mentais, comparações, descoberta de relações entre imagens mentais, de propriedades e de fatos.
Abstração reflexiva, generalização reconstrutiva
Estruturação espacial
Coordenação
Construção visual</td><td>PVMM
Intuições secundárias
Transformações mentais
Unificações
Abstração reflexiva
Coordenação
Generalização construtiva
Estruturação espacial
Construção visual
PVR
Intuições antecipatórias
Descoberta de relações entre imagens mentais, entre propriedades e de fatos.
Abstração reflexiva
Meta cognição</td></tr>
</table>

Quadro 3: Modelos teóricos de Costa dos processos mentais associados ao PVMM/PVR

As *intuições secundárias* são "[...] produtos desenvolvidos como resultado de uma formação intelectual sistemática (intuições afirmativas) e são interpretações de vários fatos aceitos como certos" , [enquanto] que "[...] *intuições antecipatórias* são o efeito de uma atividade criativa em matemática, de um processo construtivo no qual procedimentos indutivos, analogias e suposições plausíveis jogam um papel

[24] É a tradução de *mental enactment*, expressão usada por Simon (1996) referindo-se a um conjunto de operações mentais que permitem antecipar as transformações dos objetos e o conjunto dos resultados dessas operações. (Costa, 2002)

fundamental" (COSTA, 2005, p. 97). A *transformação mental* se refere ao deslocamento e à transformação de imagens mentais. A *abstração reflexiva* é um processo no qual "[...] são construídos objetos mentais e ações entre objetos" (COSTA, 2005, p. 99).

A *generalização construtiva*, ligada diretamente à *abstração reflexiva*, leva a uma nova organização estrutural, criando novas formas, modelos e conteúdos. A *estruturação espacial* é um processo pelo qual se organiza um objeto ou um conjunto de objetos e a *capacidade de coordenação*, considerado pela pesquisadora como um processo cognitivo fundamental para a compreensão do PVMM/PVR, relaciona-se com a capacidade de usar estruturas como meio de organizar o pensamento.

O processo de *metacognição* é usado conforme caracterizado por Schoenfeld (apud COSTA 2005, p.132), "[...] como regulação da cognição que inclui o planeamento *(sic)* antes de começar a resolver um problema, e avaliação contínua durante a resolução do problema".

Para exemplificar como alguns dos processos mentais relativos ao modos PVMM e PVR poderiam ocorrer no estudo das relações entre uma função e suas derivadas, objeto deste trabalho, pode-se citar a forma de raciocínio de um estudante quando, fundamentando-se em suas experiências escolares anteriores sobre funções e estudo de retas, percebe as relações entre os pontos de máximo e mínimo locais de uma função e os coeficientes angulares nulos ou não existentes das retas tangentes a esses pontos (*Intuições secundárias/ PVMM*) ou constrói mentalmente as imagens do gráfico da função e das retas tangentes, chegando à *descoberta das relações e propriedades* entre estas imagens e obtém, por conseqüência, a generalização dessas relações e propriedades (*generalização construtiva/ PVR*).

A *abstração reflexiva* poderia estar presente no raciocínio desse aluno quando visualiza a reta tangente girando em torno de uma porção do gráfico de uma função com concavidade voltada para baixo no sentido horário (Figura 1), percebendo ações entre esses objetos.

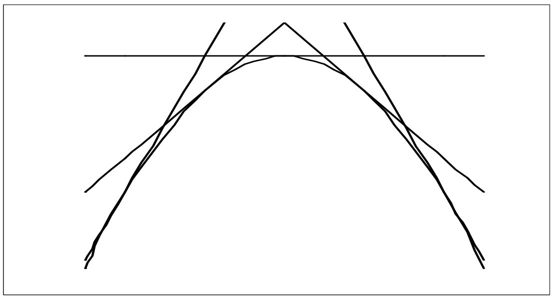


Figura 1: porção do gráfico de uma função com concavidade voltada para baixo

No Quadro 4, têm-se os processos mentais relativos ao Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE). Costa aponta que este modo se apóia fundamentalmente nas linguagens visual, gestual e verbal, sendo uma espécie de condutor dos outros modos.

Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE)	
Primeiro modelo (COSTA, 2002, p.266)	Segundo modelo (COSTA, 2005, p.101)
Ações, representação, ligações entre representações(desenhos, esboços, construções) Codificação e decodificação, por exemplo, tradução em informação de imagens mentais visuais o que dado de forma simbólica. Descrição da dinâmica mental Construção de argumentação Construção de conjecturas Discussão de argumentação visual	Representações externas, tradução Descrição da dinâmica mental Construção de argumentação, de conjecturas Uso de analogias

Quadro 4: Modelos teóricos de Costa dos processos mentais associados ao PVE

No tema funções, abordado neste trabalho, o processo de *tradução* ocorreria, por exemplo, na decodificação da linguagem algébrica para uma recodificação na linguagem gráfica. Se um aluno descrevesse as estratégias utilizadas nesse processo de *tradução,* através da linguagem oral e/ou em gestos, já ocorreria a *descrição da dinâmica mental*. O *uso de analogia* ficaria evidente se, nessa *descrição*, ele fizesse algum tipo de comparação, como, por exemplo, intervalos de crescimento e decrescimento de uma função polinomial com o subir e descer de uma montanha. Na medida em que comunica suas idéias, os processos relativos à *construção de argumentações e conjecturas* também podem estar presentes.

Com o objetivo de diferenciar a natureza dos modos de pensamento visual-espacial, a autora sugere um modelo de organização(Figura 2). Nesse esquema, ela representa esses modos em dois planos.

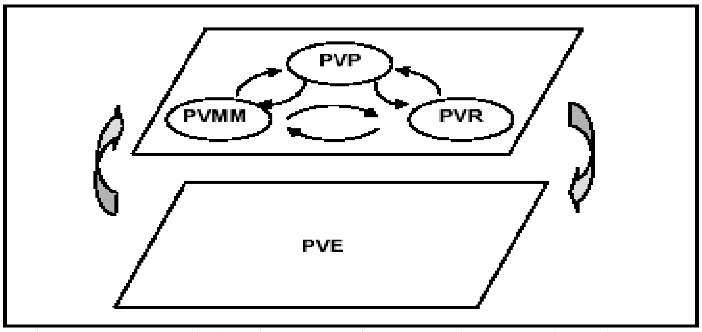


Figura 2: Modelo de organização dos modos de pensamento visual-espacial proposto por Costa (2005)

No primeiro, chamado de "cognitivo", estão o PVP, o PVMMM e o PVR e, no segundo, nomeado de "plano de comunicação", está o PVE. Essa separação se justifica, pois o PVE é "[...] uma espécie de condutor do pensamento visual-espacial, na medida em que é por seu intermédio que podemos conhecer os outros três modos" (COSTA, 2005, p. 189).

As discussões precedentes sobre os vários esquemas, tipos de imagem e modos do pensamento visual-espacial pretenderam fornecer uma maior fundamentação à pesquisa. Os resultados levantados, a partir da pesquisa empírica, são sistematizados de acordo com os referenciais teóricos citados, em especial de Costa (2002, 2005).

2.4 Dificuldades e contribuições do processo de visualização

As pesquisas indicam que alunos e professores de matemática são resistentes em utilizar os processos visuais para a resolução de problemas matemáticos. Apesar da visualização nos dias atuais ser reconhecida como um processo importante para o aprendizado matemático, a sua utilização ainda se mostra tímida nas salas de aula em todos os níveis de ensino.

Frota (2002), por exemplo, realizou uma investigação sobre as estratégias de aprendizagem de Cálculo de alunos de engenharia, constatando que as "*estratégias grafico-numéricas*" são pouco utilizadas pelos estudantes: apenas um percentual entre 12,9% e 19,2% de uma população de 885 alunos de Cálculo dos cursos de engenharia da instituição onde desenvolveu sua pesquisa, *"mostrava-se favorável* *ao emprego de estratégias de representação gráfica, ou ao uso de especulações numéricas, ao lidar com questões matemáticas que apresentam um certo grau de novidade, ou dificuldade"* (FROTA, 2004, p.9). Em um estudo mais aprofundado, acompanhando 19 alunos, a pesquisadora pôde constatar que os alunos quase nunca lançavam mão de estratégias gráficas na solução de questões de integral; o esboço do gráfico era feito, segundo eles, apenas quando seu emprego era naturalmente sugerido, por exemplo, quando se pedia para calcular uma área ou um volume.

Na tentativa de esclarecer quais os motivos que influenciam a utilização ou não das representações visuais, Arcavi (2003, p.235) propõe que as dificuldades em relação à visualização podem ser classificadas em três categorias: cultural, cognitiva e sociológica. A dificuldade cultural refere-se às convicções e valores da própria comunidade matemática, a cognitiva às limitações individuais e a sociológica relaciona-se aos processos de ensino-aprendizagem dos conceitos.

As dificuldades culturais podem ser justificadas, pois ainda é bastante recente o período em que os processos visuais foram totalmente desvalorizados e mudanças em relação ao que está arraigado às crenças e práticas de uma determinada comunidade acontecem sempre de forma lenta e demorada.

> Apesar da importância óbvia das imagens mentais visuais, nas atividades cognitivas humanas, a representação visual permanece uma cidadã de segunda-classe, tanto na teoria quanto na prática de matemática. Em particular, somos ensinados a olhar desconfiadamente para provas que fazem uso crucial de diagramas, gráficos, ou outras formas de representação não lingüística e passamos este desprezo aos estudantes. (Barwise e Etchemendy *apud* ARCAVI, 2003, p. 226, tradução nossa)[25]

Os professores de matemática, atuantes nos dias de hoje, foram fortemente influenciados por essa vertente, pois certamente seus professores da educação básica e superior foram formados nessa escola (Matemática Moderna) e conduziram os estudos de matemática baseando-se em livros-textos que não apresentavam nenhum estímulo em relação a esses processos. Um tópico como a geometria, por exemplo, que se apóia fundamentalmente nas representações visuais, era abordado

[25] But despite obvious importance of visual images in human cognitive activities, visual representation remains a second-class citizen in both the theory and practice of mathematics. In particular, we are all taught to look askance at proofs that make crucial use of diagrams, graphs, or other non-linguistic forms of representation, and we pass on this disdain to students.

nos capítulos finais dos livros textos do ensino fundamental e quase nunca era ensinado.

> Há controvérsias dentro da comunidade matemática e declarações como “isto não é matemática” (SFARD, 1998) por seus representantes mais proeminentes, provavelmente penetram a sala de aula, através de materiais curriculares, formação de professores, etc., moldando sua ênfase e seu espírito. (ARCAVI, 2003, p.235, tradução nossa)[26]

Mudanças efetivas em relação ao material didático, com respeito a uma maior valorização desses processos, só foram verificadas no Brasil nos anos finais da década de 90. Quanto à educação superior, alguns livros-textos utilizados ainda hoje nos cursos de formação de professores de matemática, são por vezes aqueles tradicionais, adotados há décadas.

> “Uma mudança, a meu ver, ainda lenta, começa a acontecer, induzida principalmente pelo próprio livro texto, que se beneficia dos recursos computacionais para trazer para o leitor um maior número de gráficos e problemas de análises gráficas, bem como exercícios para serem resolvidos utilizando recursos gráfico-numéricos.” (FROTA, 2004, p.11)

Verificam-se algumas publicações recentes de Cálculo Diferencial e Integral com um tipo de abordagem que busca integrar as várias linguagens matemáticas, de modo particular as representações gráficas e visuais (por ex. FINNEY, GIORDANO e WEIR, 2003; STEWART, 2001; FLEMMING e GONÇALVES, 1992; SANTOS e BIANCHINI, 2002).

Com relação às dificuldades cognitivas, Arcavi (2003) afirma que a utilização de imagens mentais no raciocínio matemático implica em não estabelecer procedimentos rotineiros, sendo um caminho que pode se revelar como “escorregadio”, “arriscado” e “inexato”. Além disso, desenvolver a habilidade de realizar transições entre representações visuais e analíticas requer um aprendizado matemático mais aprofundado, podendo ser encarado por estudantes e professores como cansativo e demorado, pois exige maior esforço cognitivo do que as formas seqüenciais de raciocinar.

Quanto às dificuldades sociológicas, Arcavi (2003) destaca as questões de ensino apontadas por Eisenberg e Dreyfus. Segundo esses autores, as representações analíticas, seqüenciais por natureza, costumam ser consideradas pelos professores como mais apropriadas e eficazes pedagogicamente, mas limitam a riqueza de um processo que se mostra propício ao estabelecimento de relações. Incluem-se também como sociológicas as dificuldades que podem surgir da reunião, em uma mesma sala de aula, de estudantes de origens culturais diversas, pois, de acordo com a vivência de cada um, podem valorizar de forma diferenciada os processos visuais.

A consideração de todos esses obstáculos relativos a um enfoque de ensino nos processos de visualização, no entanto, não deve ser impedimento para se buscar no ensino de matemática a valorização dos mesmos, numa perspectiva que permita, o tanto quanto possível, a passagem de um tipo de linguagem à outra. Essa metodologia de trabalho pode contribuir, de forma substancial, para que os alunos estabeleçam conexões entre os vários processos do pensamento matemático, podendo evoluir do pensamento matemático elementar para o avançado (Costa,2002).

De acordo com Dreyfus (1991), no desenvolvimento do pensamento matemático vários processos devem interagir, como: representar, visualizar, generalizar, e também classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair e formalizar.

> Em outras palavras, o pensamento matemático avançado consiste em um conjunto amplo de componentes processuais interativos. É importante que o professor de matemática esteja consciente desses processos de modo a compreender algumas das dificuldades que seus estudantes enfrentam. (DREYFUS, 1991, p.30, tradução nossa)[27]

> Uma característica distintiva entre pensamento elementar e o avançado é a complexidade e como lidar com ela [...] A distinção está em como essa complexidade é gerenciada. Os processos poderosos são os que permitem a alguém fazer isso, em particular, abstraindo e representando. Por meio da abstração e representação, alguém pode ir de um nível de detalhes para outro e, desse modo, gerenciar a complexidade. (DREYFUS, 1991, p.26, tradução nossa)[28]

---

[26] Controversy within the mathematics community, and statements such as “this is not mathematics” (Sfard, 1998, p. 454) by its most prominent representatives, are likely to permeate through to the classtroom, via curriculum materials, teacher education, etc. and shape their emphasis and spirit.

[27] In other words, advanced mathematical thinking consists of a large array of interacting component processes. It is important for the teacher of mathematics to be conscious of these processes in order to comprehend some of the difficulties which their students face.

[28] One distinctive feature between advanced and elementary thinking is complexity and how it is dealt with.[[...]]The distinction is in how this complexity is managed. The powerful processes are those that

Os estudos evidenciam que não se pode estabelecer uma dicotomia entre o pensamento matemático elementar e o avançado, pois muitos dos processos utilizados em matemática avançada também estão presentes na forma de raciocinar dos iniciantes em matemática. No entanto, quando ocorre a interação entre vários processos e *"todas as características* [processos] *são tomados em conjunto, há uma mudança quantitativa* [...] [que gera] *uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento avançado "* (COSTA, 2002, p.261).

> Mais conceitos a ensinar em menos tempo, necessidade cada vez maior de capacidade de reflexão, maior capacidade de abstração, menos problemas significativos, mais ênfase na prova, necessidade cada vez maior de uma aprendizagem versátil, maior necessidade de um controlo *(sic)* pessoal sobre a aprendizagem. (COSTA, 2002, 261)

Como a matemática é componente curricular obrigatório da educação básica, espera-se que os estudantes se familiarizem, desde cedo, com os processos próprios do raciocínio matemático, chegando ao ensino superior transitando com destreza entre as várias representações, capacidade necessária ao pensamento matemático avançado. No entanto, não é essa a realidade vista no ensino brasileiro nos cursos em que a matemática é disciplina obrigatória. Constata-se, com freqüência, que esses estudantes não dominam conhecimentos matemáticos básicos, considerados pré-requisitos mínimos para um desempenho satisfatório na nova fase de estudo. Na tentativa de "resgatar" conceitos e estimular os alunos a prosseguir, não é raro encontrar instituições que oferecem aos iniciantes aulas de "nivelamento".

Estimular a interação entre os vários processos matemáticos nessa fase, principalmente os processos de visualização, pode auxiliar os alunos a desenvolver o pensamento matemático, desenvolver o seu próprio estilo de aprendizagem, num momento em que obrigatoriamente devem assumir uma maior autonomia em relação à própria aprendizagem.

No desenvolvimento desse trabalho, as variáveis relativas às dificuldades e contribuições dos processos visuais para o "pensar matemático" serão consideradas, numa tentativa de trazer elementos que subsidiem o trabalho de professores e alunos nas salas de aula de matemática dos vários níveis de ensino.

---

allow on to do this, in particular abstracting and representing. By means of abstracting and representing, on can move from on level of detail to another and thus manage the complexity.

2.5 Pensamento visual e aprendizagem de cálculo

A aprendizagem dos conceitos matemáticos do Cálculo tem sido o foco de diversas pesquisas nacionais e internacionais. Os diversos trabalhos apresentam subsídios importantes para se repensar o ensino dessa disciplina nos cursos, de forma a mobilizar também a continuidade dos estudos mais avançados de Análise. (Por exemplo: Rezende(2003), Nasser(2003), Berry e Nyman(2003), Frota(2002), Pinto(2001) e Tall(1991).

Em 1986, impulsionado pela "Conferência de Tulane", surgiu um movimento conhecido como "Calculus Reform" (Reforma do Cálculo), que abriu discussões sobre quais poderiam ser as mudanças na forma como o assunto era ensinado. Num primeiro momento, tais discussões sinalizaram a aplicação da *"Regra de Três"* que estimulava a interlocução das várias representações matemáticas. Mais tarde essa regra seria estendida, sendo então chamada de *"Regra de Quatro"*.

> [...] R*egra de três*: tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente. [...] Mais recentemente, a regra de Três foi expandida, tornando-se *Regra de Quatro*, com o acréscimo do ponto de vista verbal ou descritivo. (STEWART, 2001, p.vii)

Tradicionalmente, o método de estudo dos conceitos de Cálculo caracteriza-se pela manipulação excessiva de fórmulas e técnicas algébricas. Com isso, os estudantes calculam limites, derivadas e integrais, mas frequentemente não desenvolvem um real entendimento dos conceitos. Berry e Nyman (2003, p.482, tradução nossa)[29] constataram tal fato através do trabalho como docentes em cursos de formação de professores.

> [...] nossa experiência durante vários anos trabalhando com estudantes de graduação e de pós-graduação que se preparam para ser professores (tendo pelo menos 3 anos de estudo de Cálculo em universidades ou faculdades) é que sua compreensão dos conceitos básicos de Cálculo é bastante similar. O conhecimento demonstrado por esses estudantes é um conjunto de ações aproximadamente conectadas a partir de um conjunto de regras algébricas, que podem ser aplicadas em situações algébricas restritas e geralmente artificiais (BERRY e NYMAN, 2003, p. 482)

---

[29] …our experience over a number of years of working with undergraduate students and post graduate studentes who are training to be teachers (and therebefore have at least 3 years of university or college calculus) is that their understanding of basic calculus concepts is often similar.The understanding being demonstrated by these students is a set of loosely connected actions based on a set of algebraic rules that can be applied in restricted, often artificial, algebraic situations.

Berry e Nyman (2003, p. 484), fundamentando-se em Koirala e Skemp, afirmam que um ensino de cálculo, baseado em regras de diferenciação e integração e aplicação desses conceitos na resolução de problemas rotineiros, resulta num entendimento "instrumental", que pode até capacitar o estudante para obter bom desempenho em provas e exames, mas não estimula o "pensar criativo", no qual é possível construir conceitos e habilidades adicionais. Segundo eles, o professor deve proporcionar aos estudantes não só o fazer, mas como fazer e, além disso, explicar como se faz e por quê. Essa forma de trabalho conduziria a uma compreensão não limitada aos procedimentos algébricos, mas a um entendimento "relacional". Koirala (1997 *apud* BERRY e NYMAN, 2003), numa abordagem similar, cita que, ao aplicar as regras, o aluno tem uma compreensão "processual" e se, de uma forma mais ampla, entender os conceitos subjacentes às regras, adquire uma compreensão "conceitual".

As pesquisas citadas diferenciam-se por vezes quanto aos tópicos de cálculo estudados e à forma de abordagem, mas são unânimes em indicar a valorização das várias linguagens matemáticas, o entendimento das relações entre elas e a utilização do método descritivo, no qual o aluno relata verbal ou por escrito como se chega a um determinado resultado ou como entende um conceito, como caminhos para promover uma aprendizagem significativa dos conceitos de cálculo, não limitado à manipulação de regras algébricas. Essas recomendações podem ser resumidas na *Regra de Quatro*, citada anteriormente.

Dreyfus (1991, p.32, tradução nossa)[30] também chama a atenção para a necessidade de compreender as conexões entre essas várias representações.

> Embora seja importante ter várias representações de um mesmo conceito, a existência delas por si só não é suficiente para permitir o uso flexível de um conceito na solução de problemas. Não se consegue o suporte necessário para gerenciar com sucesso as informações a serem usadas na solução de um problema, a não ser que as várias representações estejam correta e fortemente ligadas. É preciso haver a possibilidade de trocar de uma representação para outra, sempre que se perceber que a outra é mais eficiente para o próximo passo do problema. O processo de trocar de representações é associado então de perto com o de representar. (DREYFUS, 1991, p.32, tradução nossa)

[30] Although it is important to have many representations of a concept, their existence by itself is not sufficient to allow flexible use of the concept in problem solvin. One does not get the support that is need to successfully manage the information used in solving a problem, unless the various representations are correctly and strongly linked. One needs the possibility to switch from one representation to another one, whenever the other one is more efficient for the next step on wants to take. The process of switching representations is thus closely associated with that of representing.

Dentre as várias representações, a linguagem visual no estudo de cálculo revela-se de extrema importância, pois historicamente muitos dos conceitos foram desenvolvidos e chegaram à forma como são ensinados hoje, apoiados nos métodos intuitivos e visuais. Tall (1991) destaca a relevância dos processos de pensamento visual no ensino de cálculo.

> Negar a visualização é negar as raízes de muitas de nossas mais profundas idéias matemáticas. Nas fases iniciais do desenvolvimento da teoria de funções, limites e continuidade, etc, a visualização provou ser uma fonte fundamental de idéias. Negar essas idéias a estudantes é impedir-lhes o acesso às raízes históricas do assunto. (TAll, 1991, p.1, tradução nossa)[31]

> Ao introduzir visualizações adequadamente complexas de idéias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de apreender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma abordagem tradicional. (TAll, 1991, p.20, tradução nossa)[32]

O "estudo da variação das funções", tema do trabalho abordado nesta pesquisa, é propício à aplicação da *Regra de Quatro*, pois possibilita a utilização simultânea de várias representações. No entanto, essa forma de abordagem nem sempre é simples, exigindo maior esforço tanto de professores como de alunos, do que o modo mais seqüencial e previsível de ensinar, proporcionado pelo método analítico.

> Função é um conceito abstrato com o qual trabalhamos adotando uma das várias representações, ou preferencialmente várias delas ao mesmo tempo; freqüentemente estas incluem representações gráficas e algébricas. O ensino e a aprendizagem desse processo de troca não é fácil, pois a estrutura é muito complexa. (DREYFUS, 1991, p.32, tradução nossa) [33]

> [...] o sucesso para grande parte dos alunos em matemática ocorre no caso dos monorregistros. Existe um "enclausuramento" de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade

---

[31] Yet to deny visualization is to deny the roots of many of our most profound mathematical ideas. In the early stages of development of the theory of functions, limits, continuity & c, visualization proved to be a fundamental source of ideas. To deny these ideas to students is to cut them off from the historical roots of the subject.

[32] By introducing *suitably complicated* visualizations of mathematical ideas it is possible to give a much broader picture of the possible ways in which concepts may be realized, thus giving much more powerful intuitions than in a tradicional approach.

[33] A function is an abstract concept with we usually work in one of several representations, or preferably in several representations at once; often these include the graphical and the algebraic representation. Teaching and learning this process of switching is not easy because the structure is a very complex one.

> dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. (Duval, 2003, p.21)

Apesar das possíveis dificuldades enfrentadas na implementação de uma abordagem do estudo de Cálculo que utiliza a Regra de Quatro, o professor não deve se isentar do dever de fazê-lo, como forma, inclusive, de valorizar as diferenças individuais de estilos de aprendizagem e métodos de estudo dos alunos, dando atenção à sociologia da sala de aula.

O estabelecimento de relações entre uma função e suas derivadas, por exemplo, encontra na visualização um apoio fundamental. Através de uma representação gráfica que apresente a curva de uma função com algumas de suas retas tangentes, é possível ter uma visão geral dos aspectos mais importantes dessa função, como: raízes, crescimento, decrescimento, pontos de máximo ou mínimo, sentido da concavidade, valores para os quais não é definida, e possivelmente perceber como esses elementos se relacionam com os coeficientes angulares das tangentes. A não ser que se faça cálculos adicionais, tais aspectos não são imediatamente perceptíveis apenas pela sentença algébrica ou por uma tabela de pares ordenados.

> [...] as funções e as idéias a elas associadas não são concebidas visualmente, e essa abordagem não visual obstrui o desenvolvimento da atribuição de significado às funções. Os estudantes parecem pensar nas idéias de função somente de um modo representativo simbólico. (EISENBERG, 1991, p.152, tradução nossa)[34]

Apesar de existir um certo consenso de que a abordagem visual contribui na construção do significado dos conceitos relativos ao estudo das funções, verifica-se, através dos resultados de algumas pesquisas (NASSER, 2006; CURY, 2006; BERRY e NYMANN, 2003), que os alunos apresentam dificuldades no traçado de gráficos. Essas dificuldades podem impedir que os alunos lancem mão das estratégias gráficas na resolução de problemas.

Várias das pesquisas citadas recomendam aos professores lançar mão das ferramentas disponíveis para tentar minimizar essas dificuldades, fazendo uso das construções através de calculadoras gráficas e computadores. Na atualidade, é

---

[34] [...] functions and their associated notions are not conceived visually, and that this non-visual approach hinders one's development of having a sense for functions. Students seem to think of function concepts in only a symbolic representational mode.

possível encontrar com relativa facilidade diversos *softwares* de distribuição livre, que permitem um melhor aproveitamento do tempo em sala de aula para as análises e discussões conceituais, agilizando a construção de gráficos de funções.

Ferramentas tecnológicas, se utilizadas de forma adequada, podem potencializar o uso dos recursos gráficos no ensino de Cálculo, estimulando a observação, a busca de regularidades e padrões e possibilitando, através da comparação com as outras formas de se representar uma função, o entendimento das ligações entre elas. O trabalho desenvolvido com a utilização desses recursos também pode contribuir para que os alunos apurem a percepção e, por conseqüência, desenvolvam habilidades que facilitem a construção gráfica por meio dos instrumentos tradicionais: lápis, papel e régua.

A pesquisa aqui relatada, ao analisar os resultados da aplicação de diversas atividades envolvendo as relações entre uma função e suas derivadas à luz dos modos de pensamento-visual-espacial propostos por Costa (2002, 2005), propõe-se a incentivar o uso de uma abordagem visual dos conceitos, numa interlocução com as demais formas de representação em matemática. Essa abordagem do ensino de Cálculo torna-se relevante na medida em que o contexto em que o trabalho se desenvolve é o da formação de professores.

2.6 O ensino de Cálculo na Licenciatura em Matemática

Pelas suas múltiplas aplicações, o Cálculo figura como disciplina obrigatória nas estruturas curriculares de diversos cursos superiores como as engenharias, a física, a química, etc. No entanto, alunos dos cursos de licenciatura em matemática, numa visão imediatista, muitas vezes estranham ou até mesmo rejeitam o estudo dessa disciplina, por entenderem que deveriam estudar apenas os conteúdos a serem ensinados na educação básica. Essa situação pode ser uma oportunidade para se discutir o papel do ensino de cálculo num curso de formação inicial de professores.

Barufi (2002), citando Bressoud, expõe dois motivos para se ensinar cálculo: o primeiro diz respeito à sua aplicabilidade aos diversos contextos e disciplinas, afirmando que, se matemáticos não realizarem esse estudo, correm o risco de ficar de fora das discussões sobre o assunto, pois os profissionais de outras áreas o farão; o segundo motivo, apontado como mais forte, é que o desenvolvimento do cálculo formou o pensamento científico do mundo moderno e, portanto, da própria matemática. Apesar de não citados pela autora, podem ser incluídos nesse segundo motivo os métodos intuitivos e visuais, pois, conforme os registros históricos, estes foram fundamentais para a construção dos conceitos do cálculo.

Ao se considerar os métodos de desenvolvimento dos conceitos do cálculo como estruturantes para a visão científica moderna e também o pensamento visual como fundamental nessa estruturação, pode-se pensar que o ensino de cálculo na licenciatura transcende aos objetivos específicos da própria disciplina, assumindo um papel abrangente e integrador. Se um aluno consegue desenvolver nessa disciplina *representações ricas* (DREYFUS, 1991, p.32) dos conceitos, ele será capaz de raciocinar dessa forma não só no cálculo, mas em outras disciplinas nas quais o pensamento visual também se mostra importante, como geometria, álgebra, análise, etc. e poderá, por conseqüência, influenciar positivamente a forma de pensar de seus futuros alunos.

Pelos motivos expostos, um professor de cálculo de um curso de licenciatura não deveria apenas se limitar a expor o conteúdo e apresentar aos alunos suas aplicações às várias ciências, apesar dessa perspectiva interdisciplinar ser um importante aspecto a ser explorado, para dar significado ao seu estudo. Deve mostrá-la como uma disciplina "[...] **em construção**, apresentando sua potência e a sua contemporaneidade e não apenas fazer uma **revelação**" (BARUFI, 2002, p.72).

> [...] o saber matemático do professor [...] precisa envolver uma linguagem apropriada, capaz de "falar" Matemática para além da repetição de expressões ou teoremas, expressando as relações que formam a estrutura dessa disciplina (Sztajn, 2002,p.21).

Também é importante que os professores desses cursos proporcionem aos seus alunos experiências colaborativas através de trabalhos em grupos, discussões e atividades investigativas, bem como reflexões sobre os processos cognitivos relacionados ao ensinar e ao aprender. Os estudos realizados nesse contexto indicam ser esse um caminho para se formar "o professor de matemática como sujeito capaz de produzir e resignificar, a partir da prática, saberes da atividade profissional e seu próprio desenvolvimento profissional" (FIORENTINI, 2003, p.8).

> Nos últimos anos, os pesquisadores têm procurado compreender o tema – a licenciatura, uma determinada disciplina ou ainda uma estratégia ou tecnologia – a partir da visão, da opinião, das concepções, das crenças e das representações dos licenciandos e dos professores envolvidos. [...] As pesquisas apontam a reflexão, o trabalho colaborativo e uma relação mais equilibrada e harmoniosa entre teoria e prática – na qual ambas se tornem aliadas, dialogando dialeticamente – como pontos fundamentais para as diversas mudanças que se tornam necessárias (FERREIRA, 2003,p.32).

Ao longo da pesquisa aqui relatada, buscou-se considerar os resultados de estudos já realizados no ensino de cálculo[35], procurando-se vivenciar algumas das recomendações, como a investigação e o trabalho colaborativo entre os alunos. Por ter sido realizada no contexto dos cursos de formação de professores (inicial ou continuada), espera-se que os resultados do trabalho empírico possam levantar questões relevantes sobre o ensino de cálculo, contribuindo para uma reflexão dos professores dessa disciplina nos cursos de licenciatura em matemática.

[35] Referenciados na página 43.

3 OS ESTUDOS EXPLORATÓRIOS

3.1 Introdução

Conforme anteriormente exposto, o presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de responder à seguinte questão: como a utilização dos processos visuais, numa dinâmica que permita uma interlocução entre as várias formas de representação em matemática, pode contribuir para o entendimento do estudo da variação de funções?

A pesquisa foi concebida com o intuito de ampliar o conjunto de estudos já desenvolvidos sobre os processos visuais, buscando verificar a utilização desses processos na aprendizagem matemática e discutir alternativas metodológicas para o estudo do Cálculo Diferencial, tendo como ênfase um entendimento *conceitual.*

O trabalho empírico foi realizado em três etapas. A primeira e a segunda consistiram em estudos exploratórios, desenvolvidos respectivamente junto a uma turma de Cálculo I de um Curso de Licenciatura em Matemática (formação inicial) e a uma turma de Especialização em Educação Matemática (formação continuada). Nessas duas fases, as atividades foram testadas, possibilitando construções e reconstruções que concederam maior eficácia e melhor fundamentação teórica ao estudo principal, que constituiu a terceira etapa, desenvolvida com estudantes de Cálculo de um curso de formação inicial de professores de matemática e relatada no Capítulo 4.

Buscou-se, numa perspectiva investigativa, estimular, por um lado, a interpretação das representações gráficas, a partir das noções intuitivas trazidas pelos alunos, e a posterior síntese dos resultados numa linguagem verbal-algébrica, por outro lado, o processo inverso, em que, a partir da linguagem textual, fosse construída uma representação gráfica, enfatizando de forma constante a comunicação entre as várias formas de representação em matemática. Em todas as fases da pesquisa, percorreu-se sempre o objetivo de, a partir da investigação inicial, incentivar a busca de generalizações, teoricamente sustentadas, para que os resultados não se restringissem a exemplos estudados, induzindo a conclusões não necessariamente adequadas.

O desenvolvimento desses estudos, a avaliação de seus resultados, a construção e reconstrução das seqüências de atividades aplicadas aos alunos influenciaram de forma efetiva a trajetória docente da pesquisadora, pois apontaram para uma necessidade cada vez maior de sustentar teoricamente a prática de sala de aula. Apesar da pesquisadora já ter conduzido com os alunos atividades experimentais de investigação, estas se perderam, por carência metodológica, como, por exemplo, um registro sistematizado dos dados, além da falta de uma análise e reflexão fundamentadas nas diversas pesquisas e estudos em Educação Matemática.

Considerando-se que a trajetória metodológica foi dinâmica, com ajustes no decorrer da pesquisa, optou-se por relatar cada estudo exploratório separadamente, destacando-se as questões metodológicas específicas e os principais resultados.

3.2 Primeiro estudo exploratório

3.2.1 Questões metodológicas

O primeiro estudo exploratório foi realizado em outubro de 2005 com 18 alunos de uma turma de Cálculo I de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição particular do estado de Minas Gerais. A escolha dos sujeitos se justifica, pois nesse estudo pretendeu-se trabalhar com uma turma de formação inicial de professores, alunos da pesquisadora, principiantes no estudo dos conceitos e procedimentos de cálculo.

A seqüência de atividades aplicadas (Apêndice A, Seqüência 1) constituiu-se de um conjunto de exercícios investigativos, envolvendo os conceitos de crescimento, decrescimento e concavidade de funções de uma variável real. A partir de representações gráficas fornecidas ou construídas, os alunos deveriam estabelecer relações entre a variação de cada função e suas retas tangentes. Para dinamizar a aplicação, essas construções iniciais foram realizadas através de um *software*. O *Maple*[36] foi escolhido por se mostrar adequado ao tipo de atividade. Além disso, os alunos possuíam uma relativa familiaridade com seus comandos, pois o mesmo já havia sido usado no estudo do Cálculo e em outras disciplinas do curso como Geometria Analítica e Informática na Educação.

Foram utilizados como instrumentos de coleta de dados os registros escritos contendo comentários e respostas dos alunos às questões. Além disso, as aulas foram filmadas, sendo transcritas posteriormente as gravações em aúdio.

Após o estabelecimento de todas as relações através do trabalho investigativo, foi realizada uma discussão final, em que foram sintetizadas, organizadas e generalizadas as principais relações entre uma função contínua de uma variável real e suas derivadas. Em seguida, os alunos foram solicitados a construir diversos gráficos de funções, por meio dos instrumentos tradicionais (régua, lápis e papel).

Nesse momento, os alunos deveriam representar as funções utilizando todas as informações obtidas, através do estudo algébrico dos sinais das derivadas primeira e segunda, pesquisa de raízes e comportamento da função no infinito. O objetivo foi sempre incentivar a interpretação gráfica intuitiva, indagando acerca das idéias e conexões estabelecidas pelos alunos entre as várias formas de representação em matemática.

O primeiro estudo exploratório, conduzido de forma bem embrionária, a partir apenas da experiência docente da pesquisadora, foi uma tentativa de investigar as possibilidades de incentivar os processos de visualização no entendimento da variação de funções, bem como verificar se os estudantes apresentavam dificuldades em correlacionar as várias formas de representação em matemática.

3.2.2 Principais resultados

Para a análise dos dados, as filmagens foram editadas, realizando-se a seleção e transcrição das discussões mais relevantes. As atividades geradoras

[36] Foi utilizada a versão 6.0 do software.

dessas discussões foram identificadas, e os registros escritos foram confrontados com as transcrições.

Uma comparação entre os registros escritos e a fase de discussão evidenciou entre os estudantes uma maior facilidade de argumentação oral do que escrita. Como exemplo, podem ser citadas as respostas de um dos alunos sobre o procedimento necessário para estabelecer as abscissas dos pontos de máximo e mínimo locais das funções $y = x^2 - 4x$ e $y = x^3 - 3x$. No registro escrito, ele apresenta uma anotação confusa: *"Através do y, e do x, na equação do 2º grau e na de 3º grau é necessário derivar e depois achar o x, e o y."*. Quando solicitado a expressar oralmente seu raciocínio, ele faz um primeiro relato: *"As raízes da equação do coeficiente angular, que vai ser do segundo grau, vão ser os pontos"*. Questionado pelos colegas no sentido de esclarecer melhor o procedimento, ele reelabora a fala: *"Você vai derivar a função, encontrar as raízes da função derivada e substituir na função primitiva para encontrar os valores da função"*. Esse fato, além de sinalizar que existe uma deficiência em relação ao trabalho com a linguagem verbal-algébrica no ensino básico e também nos cursos de Licenciatura em Matemática, aponta que, em um ambiente interativo, a linguagem oral agregada à gestual pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa dos conceitos.

Um dos momentos em que essa constatação se tornou evidente foi quando um dos alunos, atento à fala de dois outros colegas sobre as relações entre as retas tangentes e a concavidade de uma função, "gira" o lápis para ilustrar a variação das retas. A Figura 3 mostra o gesto realizado pelo aluno para mostrar a variação quando o sentido da concavidade é para baixo. Naquele momento, esse foi o elemento que faltava para que os outros alunos entendessem a relação.

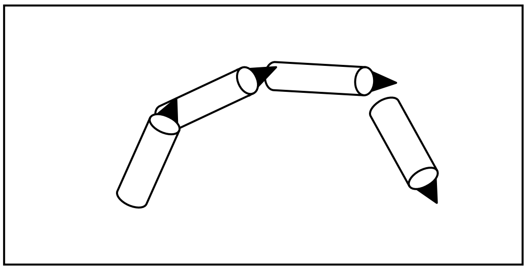


Figura 3: Figura representativa do gesto de um aluno para mostrar a variação das retas tangentes, numa curva com concavidade voltada para baixo.

Nesse momento, a percepção da linguagem gestual como facilitador da aprendizagem ocorreu quase que por acaso. Uma maior consciência da sua importância no processo ensino-aprendizagem, por parte da pesquisadora, só veio a se concretizar quando do estudo de alguns teóricos que tratam o assunto, como por exemplo, Presmeg (2006) e Costa(2002, 2005).

No desenvolvimento do trabalho, foi possível para os alunos, através da utilização de estratégias gráficas, entender os aspectos mais importantes da variação das funções. Isso se evidenciou na fase de discussão quando, estimulados pela pesquisadora, os alunos apontaram, demonstrando compreender as principais relações entre uma função e suas derivadas, estabelecidas através do trabalho investigativo.

A construção rápida dos gráficos, através do *software*, permitiu que o tempo fosse melhor aproveitado e utilizado nas observações, busca de regularidades e registros. Apesar disso, as dificuldades relativas à construção gráfica, utilizando-se o cálculo algébrico das raízes e limites, o estudo do sinal das funções derivada primeira e segunda de uma função, não foram resolvidas. Os dados revelaram problemas por parte dos alunos em coordenar todas as informações num mesmo gráfico cartesiano.

Essa situação faz remeter à afirmativa de Dreyfus (1991, p.32) de que o ensino e a aprendizagem do processo de trocas entre representações não é uma tarefa fácil e também à citação de Duval (2003, p.21) sobre o "enclausuramento" que impede os alunos de reconhecerem representações diferentes de um mesmo objeto matemático.

3.3 Segundo estudo exploratório

3.3.1 Questões metodológicas

O segundo estudo exploratório foi conduzido em Janeiro de 2007, junto a uma turma de 19 alunos de um curso de especialização em Educação Matemática de uma instituição particular de ensino de Minas Gerais. Como no primeiro estudo, o trabalho foi realizado junto a alunos de um curso de formação inicial, optou-se nessa fase por aplicar as atividades numa turma de formação continuada, envolvendo alunos licenciados em Matemática, advindos de diversas localidades. Essa opção se justifica, pois apesar do trabalho ter o foco na Licenciatura em Matemática, o levantamento dos dados junto a alunos que já tinham feito um primeiro curso de Cálculo, poderia contribuir na verificação das dificuldades dos alunos com relação a um trabalho com o foco no pensamento visual, oferecer possibilidades para uma abordagem alternativa no estudo dos conceitos e subsídios para uma melhor compreensão de como o cálculo é ensinado na licenciatura.

A pesquisadora teve como colaboradora a professora da disciplina de Introdução ao Cálculo e Geometria Analítica. A disciplina integra a grade horária do programa de especialização, visando que os professores alunos possam revisitar determinados conteúdos de matemática, além de experimentar e discutir novas metodologias de ensino.

Nessa etapa as atividades do primeiro estudo exploratório (Apêndice A) foram revistas e reelaboradas, de modo a privilegiar categorias distintas de pensamento visual-espacial, tendo como referencial o primeiro modelo proposto por Costa(2002, p.263), discutido no Capítulo 2. Quando da realização desse segundo estudo, a pesquisadora ainda não tivera acesso ao modelo refinado da autora (COSTA, 2005, p.188).

Foram abordados apenas os conceitos de crescimento, decrescimento e limites de funções de uma variável real, pois as atividades foram aplicadas como introdução aos estudos de cálculo. As atividades do segundo estudo exploratório integram o Apêndice A, Seqüência 2.

Foram utilizados como instrumentos de coleta de dados os registros escritos contendo comentários e respostas dos alunos às questões e gravações de áudio das aulas relativas à aplicação das atividades. Nesse estudo a gravação em vídeo foi suprimida, pois observou-se no primeiro estudo, que esse procedimento, por vezes, inibe a comunicação espontânea entre alunos e professores, o que poderia prejudicar os resultados da pesquisa.

Ao todo, foram aplicadas 4 atividades que abordaram tanto a interpretação simbólica e textual, a partir da representação gráfica, como o processo inverso, em que, a partir da linguagem textual e simbólica, solicitava-se uma representação gráfica. O alunos realizaram o trabalho em grupos, sendo um total de 9 equipes.

A primeira atividade teve como objetivo diagnosticar as idéias dos alunos sobre os intervalos de crescimento e decrescimento de funções, fornecendo para isso exemplos com as representações gráficas de quatro funções. Devido à limitação de tempo, optou-se por não utilizar o ambiente computacional para essas construções.

Pretendeu-se, inicialmente, uma abordagem intuitiva, com foco nas percepções dos alunos acerca do aspecto global das funções e sua variação quanto ao crescimento e decrescimento, a partir de uma análise da representação gráfica das mesmas. Essa atividade caracteriza-se como relacionada ao pensamento visual-espacial decorrente da percepção (PVP).

A seguir buscou-se incentivar os alunos a formalizar e generalizar o conceito. Para isso foi proposta a questão: *"Seja f(x) definida no intervalo* $[x_1,x_2]$*. O que significa dizer que f(x) é crescente em* $[x_1,x_2]$*? Você é capaz de expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?".* A questão posterior apresentou a mesma forma, mas se referia a uma função decrescente no intervalo $[x_1,x_2]$. A atividade pretendeu incentivar o pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE), conduzindo o aluno a utilizar diferentes formas de representação da função.

As atividades 2 e 3 abordaram o tema "limites" de uma forma intuitiva, sem utilização da simbologia formal. A expressão "*...o que acontece com a função à medida que x se aproxima de..."* retrata que a atividade foi pensada de forma a assumir um caráter investigativo. Foram apresentadas questões que abordavam limites de forma variada, limites no infinito e limites laterais infinitos. Mais uma vez o objetivo da atividade era incentivar o pensamento visual-espacial decorrente da percepção (PVP).

A última atividade diferenciou-se das outras, pois, enquanto as anteriores buscaram principalmente uma interpretação a partir da representação gráfica, nessa, buscou-se o processo inverso: a partir de informações dadas de uma função em linguagem textual e simbólica, obter um gráfico da função.

Essa atividade também teve seu foco no desenvolvimento do pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE), incentivando ligações entre representações. Alguns processos mentais referentes ao pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relação entre imagens (PVM/PVR) poderiam surgir, se, a partir de uma primeira representação incorreta, os alunos pudessem obter um resultado satisfatório, através da modificação dessa primeira imagem. Dessa forma, uma mesma atividade poderia suscitar processos relacionados aos diferentes modos de pensamento visual-espacial, reafirmando que esses modos não acontecem de forma estanque, nem linear.

3.3.2 Principais Resultados

A análise dos dados foi realizada, verificando o registro de todos os grupos em relação a cada uma das atividades. Esse procedimento foi adotado pois não se pretendia avaliar o desempenho do grupo, mas analisar qualitativamente as respostas. As gravações de áudio foram transcritas e evidenciaram que as discussões ficaram limitadas aos grupos. Devido à limitação de tempo, não foi realizada nessa turma a fase de discussão.

De modo geral os alunos não tiveram dificuldades em identificar os intervalos de crescimento e decrescimento das funções, apresentadas na primeira atividade. As dúvidas foram com relação à inclusão ou não, nos intervalos, dos pontos em que se muda o crescimento e decrescimento. Seis dos 9 grupos participantes interpretaram erroneamente tal fato. A resposta do grupo 2 para o gráfico da Figura 4 (Atividade 1a) sintetiza as respostas dos outros 5 grupos e ilustra a constatação: "*a função é crescente para* $\{x \in \Re / x \geq 3\}$ *e é decrescente para* $\{x \in \Re / x \leq 3\}$ ".

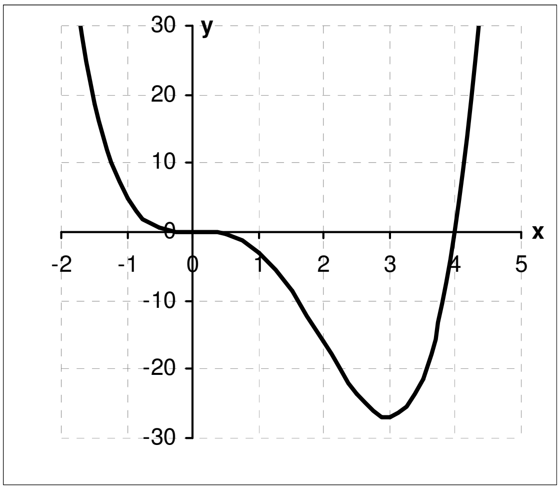


Figura 4: Gráfico de uma função contínua em R
(Apêndice A, Seqüência 2, Atividade 1a)

Essa atividade envolveu intuição, interpretação, reconhecimento visual e utilização da memória (vivências anteriores), processos mentais associados ao pensamento visual-espacial decorrente da percepção (PVP).

Quanto à atividade que solicitava mais de uma representação da função para caracterizar se era crescente ou decrescente num intervalo, 3 grupos não conseguiram expressar de forma clara o significado de uma função $f(x)$ ser crescente ou decrescente num intervalo $[x_1,x_2]$. Foram observadas deficiências, tais como: representação gráfica divergente da linguagem matemática e linguagem textual confusa, sem a presença da representação gráfica e simbólica.

O maior insucesso observado em tais questões se justifica, pois os processos mentais associados ao pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE), estimulados nessa atividade, são mais elaborados que os do PVP, envolvendo, nesse caso específico, ligações entre representações, codificação e decodificação .

As questões que tratavam do conceito intuitivo de limites infinitos foram acertadas por 7 grupos, quando os itens envolviam limites no infinito, mas apenas 2 grupos forneceram os resultados corretos quando os itens exigiam a análise dos limites laterais. Apesar da atividade explorar principalmente o PVP, percebeu-se menor índice de acertos nessas questões do que na primeira. Isso se justifica, pois o PVP se apóia nas experiências vivenciadas pelo sujeito, que certamente foram maiores em relação aos conceitos de crescimento e decrescimento de funções do que em relação às noções sobre limites.

Na atividade 4 (Quadro 5), que solicitava a representação gráfica de uma função a partir de condições determinadas, 5 grupos conseguiram fornecer uma representação gráfica que atendesse às condições citadas. Os outros 4 não conseguiram sintetizar todos os dados numa mesma representação. Três deles forneceram gráficos que satisfaziam apenas parte das condições e 1 grupo não conseguiu fornecer nenhum esboço . Dentre os processos mentais associados ao PVE, destaca-se nessa atividade a codificação e decodificação, ações, representação e ligações entre representações.

Esboce o gráfico de uma função definida no intervalo]-∞,∞[com as seguintes condições:
1)Crescente no intervalo]- ∞,1[
2)Decrescente no intervalo]1, ∞[
3)f(1)= 5
4)à medida que x se aproxima de 1 por valores menores que 1, os valores da função se aproximam de 4
5)à medida que x se aproxima de 1 por valores maiores que 1, os valores da função se aproximam de 3
6)à medida que x cresce infinitamente, os valores da função se aproximam de zero.
7)à medida que x decresce infinitamente, os valores da função decrescem infinitamente.

Quadro 5: Atividade 4 (Apêndice A, Seqüência 2)

A Figura 5 mostra dois gráficos representativos das variações apresentadas nos registros pelos 5 grupos que obtiveram resultados satisfatórios. Verifica-se, por esses exemplos, que os alunos conseguiram traduzir, em informação visual, o que foi dado de forma textual e simbólica, estabelecendo ligação entre as formas de representação.

Na Figura 6 é apresentado um gráfico, obtido pelo grupo 5, que atende às três primeiras condições; na Figura 7, outro, construído pelo grupo 7 que atende apenas à primeira. Esses resultados demonstram uma maior limitação em relação aos processos mentais ligados ao PVE e ao PVM/ PVR. O gráfico da Figura 6 retrata que os alunos conseguem estabelecer de forma limitada os processos mentais relativos ao PVE, pois codificam, decodificam e estabelecem algumas ligações entre as representações simbólica e gráfica. No entanto, não foram capazes, a partir de uma primeira construção, de estabelecer novas investigações para se chegar ao resultado pretendido. Isso evidencia as dificuldades em se apropriar dos processos mentais de reconstrução mental da visão do objeto(gráfico) e de previsão mental, processos associados ao PVM/ PVR.

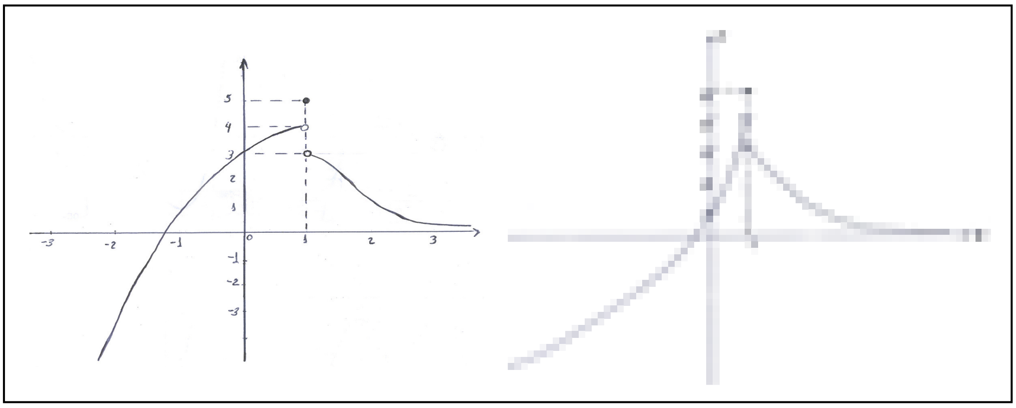


Figura 5: Gráficos representativos das variações de respostas corretas à Atividade 4 (Apêndice A, Seqüência 2)

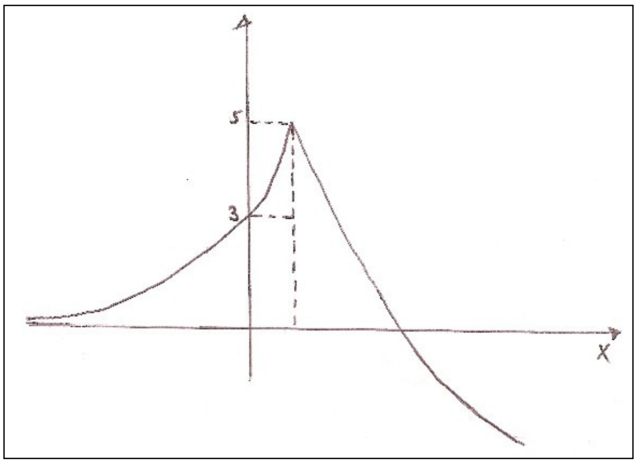


Figura 6: Gráfico que atende apenas a três condições da Atividade 4 (Apêndice A, Seqüência 2)

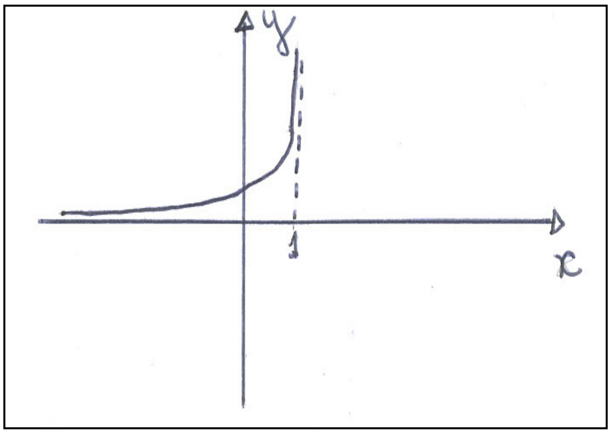


Figura 7: Gráfico que atende apenas à primeira condição da Atividade 4 (Apêndice A, Seqüência 2)

O levantamento de dados junto a alunos de especialização evidenciou que, mesmo após a conclusão de um Curso de Licenciatura em Matemática e havendo freqüentado um curso de cálculo, os alunos ainda apresentam dificuldades em se apropriar da linguagem matemática formal, representar graficamente e mobilizar simultaneamente vários registros de representação. Comparativamente ao primeiro estudo, não se percebeu diferenças substanciais em relação ao desempenho dos dois grupos pesquisados.

3.4 Considerações sobre os estudos exploratórios

Os resultados dos estudos exploratórios revelaram uma certa dificuldade dos alunos em “pensar graficamente” e em estabelecer conexões entre os vários tipos de representações de uma função.

A análise dos dados também evidenciou um tipo de aprendizagem e estudo mais focado nas bases práticas que teóricas. O fato de não apresentarem dificuldades em responder às questões, compostas por exemplos, poderia, através de uma interpretação superficial, indicar que os alunos conseguiriam formalizar e generalizar o conceito de função crescente e decrescente tanto gráfica como simbolicamente com facilidade, o que não ocorreu. Tal situação era de se esperar, pois, no ensino da matemática, freqüentemente as atividades são resolvidas de forma mecânica, não sendo, portanto, instrumentos de diálogo com a teoria.

O uso de gestos se evidenciou apenas no primeiro estudo, no qual os alunos foram estimulados, na fase de discussão, a comunicar suas idéias e conclusões. A não ocorrência no segundo estudo pode ser justificada pela ausência da fase de discussão. Essa constatação se mostrou relevante, apontando para a importância de se estimular o uso da linguagem gestual aliada à oral para facilitar a compreensão dos conceitos. Tal fato encontra fundamentação nos estudos de Costa (2005) e Presmeg (2006). Segundo Costa (2005), “os gestos são centrais para cognição humana” e “os professores devem decifrar os gestos dos alunos e interpretar por exemplo as imagens cinestésicas por estes gestos” (2005, p.55). Presmeg (2006, p.8), ao acompanhar por um ano escolar completo, através de gravações de áudio e vídeo, as lições de 13 professores de matemática de escolas secundárias da Inglaterra, considerou o uso de gestos um indicador poderoso das tentativas conscientes dos professores de facilitar a construção e o uso de imagens pelos alunos.

Do primeiro para o segundo estudo, houve uma evolução no trabalho da pesquisadora. As experiências vivenciadas no momento de aplicação das atividades e o estudo dos dados, a partir da memória, dos registros escritos e das gravações, proporcionou uma reflexão continuada, permitindo uma reconstrução e resignificação de sua prática docente.

Para Shön (1997, p.83), no ato de pensar sobre a prática pode ocorrer tanto o processo de “reflexão-na-ação”, como o de “refletir sobre a reflexão-na-ação”. No primeiro, não há exigência de palavras, enquanto o segundo é ação, observação e descrição, exigindo portanto o uso de palavras. Para ele, no processo de reflexão-na-ação o professor ”[...] permite-se ser surpreendido pelo que o aluno faz [...], reflecte *(sic)* sobre esse fato [...] e simultaneamente procura compreender a razão por que foi surpreendido [...], reformula o problema suscitado pela situação [e por último], efectua *(sic)* uma experiência para testar sua nova hipótese” (Shön,1997, p.83). No processo de “refletir sobre a relexão-na-ação”, “é possível olhar retrospectivamente [...], [podendo o professor] [...] pensar sobre o que aconteceu, no que observou, no significado que lhe deu e na eventual adopção *(sic)* de outros sentidos”.

Uma análise geral do trabalho desenvolvido permite considerar que a pesquisadora experimentou em sua prática tanto o processo de “reflexão-na-ação”, como o de “refletir sobre a reflexão-na-ação”, o que possibilitou a reformulação mais conscienciosa das atividades para a condução do estudo principal.

4 O ESTUDO PRINCIPAL

4.1 Introdução

O desenvolvimento de dois estudos exploratórios, envolvendo tanto alunos da formação inicial para a docência em matemática quanto da formação continuada, foram importantes na condução do estudo principal, terceira etapa da pesquisa empírica. As dificuldades verificadas na especulação gráfica e na formalização dos conceitos no estudo da variação de funções reais de uma variável real apontaram para a necessidade de reestruturar e inserir novos elementos à seqüência de atividades. Buscou-se enfatizar as construções gráficas desde o início, ao longo de todo o trabalho, além de incluir atividades de revisão, bem como um estudo dirigido, desenvolvido com o apoio de um livro texto de cálculo, numa tentativa de que os alunos pudessem agregar às idéias intuitivas a linguagem formal e simbólica.

Como o estudo principal foi desenvolvido junto a alunos da pesquisadora, o processo metodológico foi construído ao longo da aplicação das atividades como resultado de um processo de constante reflexão sustentado tanto pela prática como pelos estudos teóricos.

Essa reformulação resultou em alterações que possibilitaram atender de forma mais consistente ao objetivo da pesquisa, além de incentivar o pensamento visual, promover a interlocução entre os vários registros de representação matemática. Assim, além de estimular os processos mentais associados à percepção (PVP), no momento em que se conclui algo a partir da observação gráfica, ou os processos associados à exteriorização do pensamento (PVE), delegou-se uma maior atenção também ao incentivo das formas de pensamento dinâmico (PVMM e PVR). Procurou-se criar oportunidades para o aluno expressar-se oral, escrita e graficamente, numa tentativa de que ele apreendesse os conceitos sob diferentes perspectivas, propiciando uma maior conexão entre as várias formas de representação de idéias matemáticas e dinamizando os processos em que foram necessárias as passagens de um tipo de linguagem à outra.

4.2 Questões metodológicas

A terceira etapa da pesquisa foi realizada numa turma de um curso presencial noturno de licenciatura em matemática de uma instituição particular de ensino superior do Estado de Minas Gerais. Os alunos desse curso caracterizam-se por serem trabalhadores, muitas vezes oriundos de cidades circunvizinhas à da instituição. Sendo assim, além da jornada de trabalho, alguns deles enfrentam viagens todos os dias para assistir às aulas.

A região onde a instituição está localizada assistiu nos últimos anos a um crescimento rápido da oferta de vagas e cursos para ingresso no ensino superior. Com isso, houve uma sensível diminuição da procura pelos cursos de licenciatura. Nessa instituição, apesar do curso de licenciatura em Matemática já existir há 33 anos e ser reconhecido pela comunidade como um dos melhores do estado, devido aos resultados conquistados em avaliações sistêmicas[37], não se formam turmas novas desde 2006.

De acordo com os professores, os índices de bom desempenho dos alunos foram alcançados por um esforço conjunto da equipe docente e administrativa no sentido de tentar fazer com que os alunos vencessem suas próprias dificuldades, pois muitos deles chegam sem o conhecimento mínimo da matemática básica para prosseguir seus estudos no ensino superior. Além disso, as limitações de tempo, por serem trabalhadores e/ou residirem em outras cidades, influenciam fortemente seu desempenho escolar. Em especial, a turma junto à qual foi desenvolvida a pesquisa apresenta séries lacunas de formação matemática, além de dificuldades na compreensão de conceitos e utilização da linguagem simbólica e formal, bem como uma certa resistência aos estudos teóricos. Vale ressaltar, no entanto, o forte laço de amizade e companheirismo entre os alunos, que pode ser evidenciado através da formação de grupos de estudo e compartilhamento de materiais. Tal fato tem sido determinante para a não desistência de alguns.

Essa realidade influenciou fortemente o instrumento de pesquisa. A partir dos resultados dos estudos exploratórios, as seqüências de atividades envolvendo o estudo da variação de funções de uma variável real foram reelaboradas, sempre

[37] Conceito A nos provões 2002 e 2003 - colocação entre os dez melhores resultados do estado de Minas Gerais no ENADE 2005

enfatizando uma abordagem intuitiva, para, num momento posterior, proceder à formalização e ao estudo teórico. Além disso, novas seqüências foram desenhadas, de modo a atender o cotidiano dinâmico da sala de aula.

As seqüências de atividades (Apêndice B) foram aplicadas em alguns momentos, como parte integrante de um curso de Cálculo Diferencial e Integral. Quando isso não era possível, devido à escassez de tempo, eram desenvolvidas como atividades de *formação prática*[38] . O trabalho deu seqüência ao estudo inicial de limites e derivadas, e pretendia introduzir o estudo de aplicação das derivadas à variação de funções.

A pesquisadora é professora de cálculo do curso de licenciatura em matemática dessa instituição há 13 anos, sendo, portanto, professora da turma. Conduzir a pesquisa permitiu-lhe desenvolver uma série de reflexões acerca de sua prática e da eficácia das estratégias didáticas no contexto de um curso de licenciatura. Conforme observa Frota (2002, p. 105):

> Ao interagirem pesquisador e pesquisado fazem trocas e reconstruções e assim, trabalham juntos, contribuindo cada um com elementos subjetivos e pessoais. A pesquisa empírica em educação carrega implícita essa intervenção e, talvez, seja essa uma de suas riquezas.

A aplicação das atividades iniciou-se em novembro de 2006 e finalizou no 2º semestre de 2007, com participação, em média, de 10 alunos. Após cada aplicação, as folhas de registro foram recolhidas para que a pesquisadora fizesse cópias xerografadas, devolvendo os originais para os alunos na oportunidade seguinte. Dessa forma, seriam evitadas alterações que pudessem prejudicar a observação dos resultados. Para a realização do trabalho, os alunos se agruparam "livremente" em duplas ou trios, quando o propósito da atividade era suscitar discussões. Porém, cada estudante entregou a sua folha de registro, pois não era necessário que as respostas representassem um consenso. Quando, em decorrência da percepção da pesquisadora, ou por solicitação dos alunos, o tipo de atividade exigia uma confirmação ou um confronto das próprias concepções sobre um determinado conceito, o trabalho foi desenvolvido individualmente.

---

[38] A partir da resolução CNE/CP2, de 19 de fevereiro de 2002, os alunos dos cursos de licenciatura devem cumprir 400 horas de prática de formação. Essa carga horária pode ou não ser cumprida na instituição onde o licenciando faz o curso.

As atividades foram planejadas e os resultados analisados a partir dos quatro modos de Pensamento visual-espacial (PVP, PVMM, PVR e PVE) do segundo modelo proposto por Costa (2005, p.188), discutidos no Capítulo 2.

4.3 Descrição das atividades

Para facilitar a compreensão do leitor, as atividades foram descritas de acordo com as seqüências aplicadas (Apêndice B). As atividades nomeadas como iniciais compreendem as seqüências 1 e 2, enquanto translações e rebatimentos de gráficos compõem a seqüência 3, e as atividades desenvolvidas individualmente estão nas seqüências 4 e 5.

O processo de construção das atividades revelou-se dinâmico, com constantes modificações e extensões. Isso ocorreu no decorrer do trabalho, às vezes pela solicitação dos alunos e outras devido às adaptações que foram se tornando necessárias, pela visão da professora-pesquisadora, na condução de um curso de cálculo.

4.3.1 Atividades iniciais

Inicialmente foram elaboradas duas seqüências, aqui apresentadas, compreendendo a primeira 3 e a segunda 18 atividades (Apêndice B)

Na primeira atividade da Seqüência 1 (Apêndice B), foram apresentados vários gráficos de funções contínuas, com domínio em R, para que os alunos identificassem os intervalos de crescimento e decrescimento. Além dos registros escritos, eles teriam que explicitar oralmente o critério utilizado para se chegar à resposta.

A segunda atividade foi elaborada para estimular a formalização e generalização do conceito de função crescente e decrescente em um intervalo, fazendo uma interlocução entre as várias linguagens matemáticas.

Na terceira atividade, os alunos foram convidados a investigar relações possíveis entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento ou decrescimento, os pontos de máximo e mínimo locais e as retas tangentes às curvas nesses pontos. Foi solicitado que representassem graficamente, através do *software Maple*, as funções $y = x^2 - 4x$ e $y = x^3 - 3x$, exibindo algumas de suas retas tangentes. Como no primeiro estudo exploratório, esse *software* foi escolhido por ser disponibilizado nos laboratórios de informática da instituição onde foi realizada a pesquisa e os alunos já possuírem uma relativa familiaridade com seus comandos.

A primeira atividade caracterizou-se como relacionada ao pensamento visual-espacial decorrente da percepção (PVP), ressaltando-se os processos mentais associados: intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), inferências intuitivas e interpretação. No momento em que é solicitada a exposição oral do critério utilizado para se chegar à resposta, os processos mentais de descrição da dinâmica mental e construção de argumentação e de conjecturas, relativos ao pensamento visual-espacial decorrente da exteriorização do pensamento (PVE) também são trabalhados.

A segunda atividade pretendia incentivar os processos mentais de representações externas e tradução, associados ao pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE). A terceira foi idealizada de forma a estimular a utilização dos processos mentais da abstração reflexiva, intuições secundárias, generalização construtiva e coordenação, ligados ao pensamento visual resultante da manipulação de imagens (PVMM), além da descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, relativos ao modo de pensamento visual espacial da construção mental de relações entre imagens (PVR)..

Na retomada dos trabalhos em fevereiro de 2007 optou-se por refazer, de uma forma mais rápida, as atividades realizadas anteriormente (Apêndice B, seqüência 1), pois o tempo decorrido desde a primeira aplicação foi demasiado longo (2 meses) para esse tipo de trabalho.

Elas foram incluídas como atividades 1, 2, 5 e 6 da Seqüência 2 (Apêndice B). Nessa retomada, para agilizar o processo de revisão, os gráficos foram fornecidos prontos, em vez de serem construídos através do *software*. Intercaladas a essas atividades, foram reaplicados exercícios envolvendo limites, elaborados para o segundo estudo exploratório (Atividade 3, Seqüência 2, Apêndice B).

Na atividade 7 (Seqüência 2, Apêndice B), foram propostas, a partir da observação já realizadas sobre as funções $y = x^2 - 4x$ e $y = x^3 - 3x$, as questões apresentadas no Quadro 6. Para que os conceitos estudados não ficassem limitados a exemplos e objetivando uma generalização do procedimento, outras funções contínuas foram estudadas.

1)Quais são a(s) abscissa(s) dos pontos em que a função muda o crescimento/decrescimento? 2)O que você observa com relação às retas tangentes a esses pontos? 3)É possível estabelecer algum tipo de procedimento algébrico para a determinação desses pontos? Se sim, teste esse procedimento para cada uma das funções.

Quadro 6: Questões da atividade 7(Apêndice B, Seqüência 2)

Além de realizar o teste para essas 2 funções, foram fornecidas, com seus respectivos gráficos, expressões algébricas de mais 8 funções, perseguindo o objetivo de obter um procedimento generalizado. Vale ressaltar que as 6 primeiras envolviam funções reais contínuas e deriváveis em todos os pontos e as 2 últimas funções contínuas, mas não deriváveis em um determinado ponto. Os alunos deveriam prever os resultados através da observação gráfica e, em seguida, proceder à resolução algébrica, de forma a confrontar os resultados.

Na atividade anterior, o foco havia sido a investigação dos pontos críticos de uma função real; na atividade 8, buscou-se estabelecer os procedimentos algébricos necessários para a determinação dos intervalos de crescimento e decrescimento. Para isso, os alunos foram solicitados a responder as questões presentes no Quadro 7.

a) Observe os gráficos das funções $y = -x^2 + 4x - 4$ e $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ e dê os intervalos de crescimento e decrescimento de cada uma delas. b) Construa os gráficos das funções derivadas dessas funções. c) Para cada uma das funções derivadas representadas graficamente dê os intervalo(s) em que $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$. d) Existe alguma relação entre os resultados obtidos em b e c? e) É possível estabelecer algum tipo de procedimento algébrico para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função? f) Se sim, teste esse procedimento para essas funções.

Quadro 7: Questões da atividade 8 (Apêndice B, Seqüência 2)

As atividades 4,10 e11 diferenciaram-se das anteriores, pois, enquanto as primeiras buscaram estabelecer procedimentos algébricos a partir da interpretação gráfica, nessa buscou-se o processo inverso: a partir da linguagem textual e simbólica, obter o gráfico de uma função. No quadro 8, apresenta-se a atividade 11a para exemplificar a forma de abordagem dessas questões. Os alunos, além de construírem os gráficos, deveriam apresentá-los aos demais colegas. Buscou-se na elaboração dessas atividades retomar todos os conceitos trabalhados nas atividades anteriores e propor condições que permitiam a construção de esboços gráficos diferenciados.

ATIVIDADE 11a Esboce o gráfico de uma função *f(x)* que atenda todas as condições citadas: $f(-3)=2$, $f'(x)>0$ para $x<-3$, $f'(x)<0$ para $x>-3$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

Quadro 8: Exemplo de atividade de construção gráfica a partir da linguagem textual e simbólica (Apêndice B, Seqüência 2)

Nas atividades 12, 13, e 14 os alunos foram convidados a verificar quais relações poderiam ser estabelecidas entre as retas tangentes e a concavidade do gráfico de uma função. Para isso, deveriam responder o que observavam quanto à posição e variação dos coeficientes angulares das retas tangentes em relação ao gráfico. A partir das observações, deveriam construir um quadro resumo com as principais conclusões (Atividade 15). Utilizaram-se para essa observação as funções $y=-x^2+4x$, $y=x^2-4x$, e $y=x^3-3x$. Para as duas primeiras funções, os alunos deveriam responder às questões presentes no Quadro 9.

a)O que você observa quanto à concavidade do gráfico da função? b)Observe a posição relativa dessas retas tangentes quanto ao gráfico da função. Registre suas observações. c)O que você observa quanto à variação dos coeficientes angulares das retas tangentes?

Quadro 9: Questões da atividade 15 (Apêndice B, Seqüência 2)

Após responderem e discutirem essas questões, os alunos deveriam analisar o gráfico da função $y=x^3-3x$ do ponto de vista da concavidade, tentando verificar as observações registradas para as duas primeiras.

Além das folhas impressas para cada um dos estudantes, a pesquisadora, utilizou como recurso lâminas de retroprojetor com as mesmas representações gráficas. Isso aconteceu nos momentos em que as discussões envolviam todos os presentes, sendo conveniente uma mesma referência de observação.

Nas atividades 16 e 17, foram retomadas construções gráficas de funções a partir de condições pré-determinadas através das linguagens simbólica e textual, acrescentando-se informações sobre os sinais da derivada segunda. No Quadro 10 apresenta-se, como exemplo, a atividade 16. Novamente, cada dupla deveria apresentar sua construção para o restante da turma, argumentando acerca dos motivos que os levaram a obter o desenho e justificando por que ele atendia às condições estabelecidas. Nesse momento foram rediscutidos todos os conceitos trabalhados em todas as etapas. Como última atividade(18), foram fornecidas, num mesmo sistema cartesiano, representações gráficas de 4 funções e de suas respectivas funções derivadas primeira e segunda, para que os alunos pudessem refletir sobre as relações estabelecidas nas atividades anteriores.

ATIVIDADE 16

Os dados abaixo se referem às propriedades de uma função contínua em R.

- f(2)=4 , f(1)=2, f(3)=2
- f ´(x) >0 para x<2, f ´(x)<0 para x>2
- f ´´ (x)>0 para x<1 e x>3, f ´´ (x)<0 para 1<1x<3
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

a) A partir dos dados, complete a tabela abaixo.

Raízes da função	Ponto(s) crítico(s)	Ponto(s) de inflexão	Intervalos de crescimento	Intervalos de decréscimo	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para cima	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para baixo

b) Esboce o gráfico de uma função que atenda todas as condições citadas.

Quadro 10: Exemplo de atividade de construção gráfica (Apêndice B, Seqüência 2)

As atividades 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14 e 18 (Apêndice B) procuraram estimular os processos mentais relativos ao desenvolvimento do pensamento visual resultante da percepção (PVP), pois os alunos deveriam obter informações a partir de representações gráficas fornecidas ou construídas por eles. Dentre essas, as atividades 7, 8 e 18 também envolviam intuições secundárias, coordenação, generalização construtiva, unificações, generalizações, ligados ao PVMM, descoberta de relações entre imagens, propriedades, fatos, relativos ao PVR e representações e tradução, processos mentais associados à exteriorização do pensamento (PVE).

Os processos mentais de coordenação, intuições secundárias, transformações mentais e unificações, associados ao PVMM, bem como intuições antecipatórias relativas ao PVR, foram principalmente estimulados nas atividades 4, 10, 11, 16 e 17. Também se estimulou nessas atividades a construção visual, a apreensão global de uma representação geométrica, processos ligados ao PVP e as representações externas e tradução, relativos ao PVE. No momento em que tinham de expor para os colegas o próprio desenho, justificando a forma do gráfico, a partir das condições pré-estabelecidas, os processos de construção de conjecturas, argumentação e descrição da dinâmica mental, também associados ao PVE, foram trabalhados.

Com os procedimentos estabelecidos para determinar os pontos críticos e as variações de uma função quanto ao crescimento, decrescimento e concavidade, a pesquisadora procedeu, através de uma aula expositiva, à construção do gráfico de uma função, a partir de sua expressão algébrica, por meio da pesquisa de raízes e estudo dos sinais das derivadas primeira e segunda. Após a exposição da professora-pesquisadora, foram fornecidas expressões de outras funções para que os alunos realizassem a construção gráfica.

4.3.2 Translações e rebatimentos de gráficos de funções

Essa seqüência de exercícios foi elaborada para que os alunos percebessem quais as mudanças que ocorrem no gráfico de uma função $y = f(x)$ quando $f(x)$ é substituído por $f(x) \pm c$ ou por $f(x \pm c)$ ou ainda por $-f(x)$, sendo c uma constante real positiva. A pesquisadora optou pelo acréscimo dessa seqüência, apesar de não envolver a aplicação de derivadas, por entender ser esse um assunto propício à estimulação dos processos relativos ao pensamento dinâmico, ou seja, aos modos PVMM e PVR e que se adequaria à proposta do trabalho. Além disso, o estudo da matemática exige, por vezes, a adoção pelo professor de um currículo recursivo, no qual os conceitos devem ser retomados, permitindo a reconstrução de idéias sob uma nova perspectiva.

Para dinamizar o processo de construção, foi utilizado o *software Geogebra.* Esse programa foi escolhido, dentre os diversos *softwares* gráficos existentes, por ser de distribuição gratuita e integrar de forma simplificada as linguagens gráfica e algébrica. É um software de *geometria dinâmica* que permite as mais diversas construções geométricas. Além de utilizar princípios da Geometria Analítica relacionando cada objeto construído à sua expressão algébrica, permite o processo inverso, retornando a construção gráfica ou geométrica a partir da entrada de dados algébricos ou simbólicos. Possui uma interface *amigável*, apresentando do lado esquerdo a janela algébrica e do lado direito a janela gráfica(ou geométrica). É possível, a qualquer momento, mesmo após várias construções em um mesmo sistema cartesiano, relacionar de forma imediata o gráfico à sua expressão algébrica.

Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter do Department of Mathematical Sciences da Flórida Atlantic University, sendo premiado por diversas instituições em vários países como Alemanha, Áustria e França pela sua aplicabilidade educacional. Apesar da entrada de alguns dados como operadores matemáticos ser feita por uma simbologia computacional específica, a visualização desses dados na janela algébrica é aquela encontrada nos livros-textos de matemática. Um exemplo que ilustra essa afirmativa seria a entrada de dados para a construção do gráfico da função $y = x^2 e^x$. O comando a ser digitado seria (x^2)*exp(x), mas, após essa digitação, a expressão apresentada na janela algébrica seria a forma padronizada ou seja $y = x^2 e^x$.

Nas atividades aplicadas, buscou-se integrar as linguagens algébrica, numérica e gráfica de uma função. Na primeira atividade (Seqüência 3, Apêndice B), os alunos foram distribuídos em duplas, sendo-lhes solicitado construir, num mesmo sistema cartesiano, gráficos das funções $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen} x + 2$ e $y = \operatorname{sen} x - 3$, respondendo, se observavam alguma relação entre o gráfico da primeira função e os outros dois. No passo seguinte, uma tabela de pares ordenados deveria ser completada, a partir de valores fornecidos para a variável independente. A questão final estimulava a formalização do conceito de *translação do gráfico de uma função*, através da seguinte pergunta: *A partir do gráfico de uma função real $f(x)$, seria possível prever a forma do gráfico de uma função $f(x) \pm c$?.*

Com o objetivo de verificar experimentalmente o que ocorre com o gráfico de uma função quando $f(x)$ é substituído por $f(x \pm c)$ ou por $-f(x)$ foram propostas as atividades 2 e 3 (Seqüência 3, Apêndice B), seguindo a mesma estrutura da atividade 1. Solicitou-se a construção dos gráficos das funções $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = (x+3)^2$ na segunda atividade e de $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = (x+1)^3$, $y = -(x+1)^3$ na terceira.

Na atividade final, os alunos foram convidados a construir da forma tradicional (com régua, lápis e papel), o gráfico da função $y = (x-2)^3 + 8$, a partir do gráfico de $y = x^3$, e, em seguida, realizar a mesma construção no *software Geogebra*, comparando os resultados.

Procurou-se estimular, nessa seqüência, os processos mentais de intuições antecipatórias, descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, associados ao PVR, transformações mentais e generalização construtiva, relativos ao PVMM e construção de argumentação e conjecturas pertencentes ao PVE.

4.3.3 Atividades individuais

As seqüências descritas anteriormente foram desenvolvidas pelos alunos trabalhando em duplas ou trios. No sentido de permitir aos alunos uma auto-regulação da própria compreensão em relação aos conceitos estudados, a pesquisadora criou um novo conjunto de atividades, constituindo as Seqüências 4 e 5 (Apêndice B), para serem realizadas individualmente. Como o propósito não era de simplesmente resolver as questões, mas desenvolver uma maior consciência em relação ao próprio aprendizado, essas atividades buscaram estimular o processo mental da *metacognição*, relativo ao PVR.

A seqüência 4 compreendia 3 atividades. A primeira delas solicitava que fossem relacionados gráficos de funções derivadas com os gráficos de suas primitivas; a segunda apresentava expressões algébricas de funções derivadas para que, após o estudo do sinal, fossem relacionadas com gráficos de funções primitivas. A última teve um caráter de fixação, sendo retomadas as construções de gráficos a partir de critérios pré-estabelecidos. A tarefa foi elaborada em etapas em que se aumentava o nível de condições a serem satisfeitas para uma mesma função.

Na tentativa de que os alunos pudessem melhor apreender e compreender a linguagem formal e simbólica dos conceitos do cálculo, foi realizado ainda um estudo dirigido (Sequência 5, Apêndice B), tendo por base um livro didático. Nessa atividade buscou-se incentivar a autonomia e o desenvolvimento de *estratégias metacognitivas*. Segundo Frota (2002, p.49) essas estratégias podem ser estimuladas quando o trabalho em sala de aula for pensado "...com vistas à autonomia, favorecendo que [...] [o aluno] se torne [...] capaz de ter iniciativas próprias".

Para o desenvolvimento dessa tarefa, utilizou-se como referência o texto "Aplicações de derivadas", do livro Cálculo com Geometria Analítica, de George F. Simmons (1987, p. 149 a 151). Esse texto foi escolhido por estar em sintonia com a proposta das atividades, integrando as linguagens visual, simbólica e textual. Além disso, a obra é bem aceita no meio acadêmico pelos professores de Cálculo, sendo seu texto valorizado por apresentar uma abordagem teórica rica e rigorosa, sem deixar de ser acessível.

No entanto, a experiência da pesquisadora como professora de Cálculo permite afirmar que os alunos, em sua maioria, não compartilham com essa opinião, pois, acostumados a uma ênfase mais prática e procedimental do ensino de cálculo, resistem a um texto teórico mais aprofundado. Em particular, o grupo de alunos participantes da pesquisa, já havia se mostrado resistente à utilização de textos, inclusive o citado, em assuntos estudados anteriormente.

Os alunos foram orientados, num primeiro momento, a realizar um estudo geral do texto, assinalando as partes mais importantes. Em seguida, deveriam responder às questões, sem consulta ao texto, acerca da importância de estudos teóricos e das dificuldades ou não encontradas, bem como elaborar explicações para indagações acerca do conteúdo de Cálculo abordado, no caso: crescimento e decrescimento de funções, pontos críticos, concavidade.

4.4 Resultados e Análise

Conforme exposto anteriormente, as seqüências propostas e aplicadas objetivaram o desenvolvimento dos vários modos de pensamento visual e os processos mentais a eles associados, segundo as categorias de Costa (2005). Essas categorias fundamentaram as análises.

Os nomes reais foram substituídos por fictícios, no intuito de preservar a identidade dos participantes.

Para possibilitar uma visão geral dos resultados, foi realizado um agrupamento de algumas atividades de acordo com os modos de pensamento visual estimulados em cada uma delas. Após essa categorização, uma verificação individual de respostas satisfatórias às questões foi efetuada. Para cada uma das respostas corretas atribuiu-se um (1,0) ponto. Os pontos de todos os alunos foram somados e calculou-se a porcentagem de desempenho final em relação ao total de alunos participantes, em cada questão. Essa metodologia possibilita uma leitura dos dados de forma específica, por avaliar o resultado de cada aluno, e global, por sintetizar os resultados gerais de todo o grupo de alunos.

Esse levantamento permite afirmar que os alunos tiveram uma relativa facilidade nas questões que enfatizavam predominantemente os processos mentais associados ao modo de pensamento (PVP) decorrente da percepção (Apêndice B: Seqüência 1, atividade 1; Seqüência 2, atividades 1 e 3). Essa situação já era esperada, pois o PVP é o modo mais próximo das sensações, apoiando-se na memória e nas experiências vivenciadas pelo sujeito. Essas atividades envolveram conceitos de crescimento, decrescimento e limites, conceitos já estudados pelos alunos em séries anteriores e que integram o currículo do Ensino Médio. O Quadro 11 mostra o desempenho nessas questões.

Seqüência 1- atividade 1	Seqüência 2-atividade 1	Seqüência 2-atividade 3
100%	100%	81%

Quadro 11: Índice de desempenho nas questões com ênfase no PVP

A reestruturação das atividades dos estudos exploratórios para o estudo final, intercalando representações gráficas, a partir de condições pré-determinadas, nos vários momentos da aplicação, revelou resultados não observados nos estudos exploratórios. Embora as atividades tenham sido pensadas para exigir um nível crescente de dificuldades, o índice de desempenho dos alunos permaneceu relativamente estável, à medida que se avançava para exercícios mais elaborados e com maior número de informações. O Quadro 12 mostra a variação de desempenho dos alunos nessas questões. Para apuração desse índice não foram considerados aqueles gráficos que satisfaziam parte das condições, mas apenas os que atenderam a todas elas.

4a	4b	4c	10a	10b	11a	11b	11c	16	17
100%	88,9%	66,7%	88,9%	88,9%	66,7%	88,9%	77,8%	88,9%	72%

Quadro 12: Desempenho dos alunos nas questões envolvendo construções gráficas a partir de condições pré-determinadas (Apêndice B, Seqüência 2)

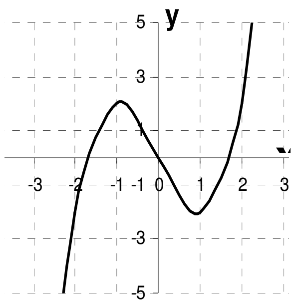
O tratamento global dado anteriormente ficou limitado a algumas atividades. Nas atividades 5, 6, 7 ,8, 12, 13 e 14 (Seqüência 2, Apêndice B), em que se objetivava estabelecer as relações da função com sua primeira derivada (5, 6, 7 e 8) e com segunda derivada (12,13 e 14) não foi possível fazer uma apuração de desempenho individual, pois o que mais se destacou no desenvolvimento dessas atividades foram as discussões ocorridas, representando consenso entre os participantes. Da mesma forma, as construções de quadros-resumo (atividades 9 e 15) exigiam momentos de socialização dos resultados para a continuidade do trabalho.

Para o tratamento dos dados foi desenvolvida uma metodologia que levasse em conta um estudo qualitativo, especificando evidências de utilização dos processos relativos aos vários modos de pensamento visual-espacial.

4.4.1 Evidências de utilização do modo PVP

Uma observação geral dos registros e das transcrições das gravações de áudio evidencia que as atividades foram respondidas a partir, principalmente, de um raciocínio intuitivo. Isso foi verificado em duas situações diferentes: nas respostas às questões que enfatizavam predominantemente os processos mentais associados ao PVP (Apêndice B: Seqüência 1, atividade 1; Seqüência 2, atividades 1 e 3) e na forma de raciocínio utilizada para responder às questões que buscaram estimular os outros modos de pensamento (PVMM, PVR e/ou PVE). Apesar de verificar uma maior apropriação por parte desses alunos, dos processos mentais associados aos PVMM, PVR e PVE, comparativamente aos dos estudos exploratórios, o ponto de partida para resolução das questões foi sempre intuitivo, relativo aos processos associados ao PVP.

Os diálogos apresentados nos quadros 13 e 14 ilustram a afirmativa acima e retratam a utilização da linguagem informal e de um raciocínio sustentado pela intuição.

<table>
<tr><th>Assunto</th><th>Falas ou diálogos</th><th>MPVE[39]</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Sobre os critérios para a determinação dos intervalos de crescimento e decrescimento da função $y = x^3 - 3x$ representada graficamente na figura abaixo.
</td><td>Tarcísio: você pegaria como referência o eixo x, por exemplo –2, e acompanharia no gráfico até onde está subindo que seria até o –1. Aí você nota que de –1 até o 1 o gráfico está descendo, depois você nota que do 1 até o 2 o gráfico volta a subir.
Pesquisadora: A função está limitada ao intervalo [-2,2]?
Tarcísio: não
Pesquisadora: A partir dessa observação, você mudaria algo nos intervalos?

Os alunos respondem positivamente, mas segue-se uma breve discussão antes de se chegar ao consenso.

Tarcísio: de $-\infty$ até -1 é crescente, de –1 até 1 é decrescente, e de 1 a $+\infty$ é crescente.</td><td rowspan="2">PVP</td></tr>
<tr><td>Júlia: Nós não temos nenhum ponto de vista matemático, foi tudo no “olhômetro”.
Pesquisadora: Mas o “olhômetro” tem critérios?
Júlia: Não, a gente olhou e colocou a resposta, os intervalos. Nada de matemática.
Pesquisadora: Mas deve ter algum critério...
Júlia: Pelo desenho do gráfico: olha o x, se a curva está apontando para cima é crescente. Se o coeficiente angular dela é positivo é crescente, se é negativo é decrescente.</td></tr>
<tr><td>Taís: Eu analiso por duas formas, uma é mais fácil. Primeiro: eu sei que quando uma reta está assim (colocando a mão com os dedos apontados para cima), ela é crescente, quando está assim (colocando a mão com os dedos apontados para baixo) ela é decrescente. Mas também quanto menores os valores de y, maiores os valores de x, isso numa função decrescente.</td><td>PVP e PVE</td></tr>
</table>

Quadro 13: Diálogos representativos da utilização dos métodos intuitivos relacionados ao PVP

Nos diálogos do Quadro 13 ficaram evidenciados os processos mentais de intuições primárias, reconhecimentos visuais, interpretação, identificação de objetos e utilização da memória, relacionados ao PVP. Na fala da aluna Taís também se evidenciaram a abstração perceptual e abstração ligada ao reconhecimento, associados ao PVP e o uso de analogias, ligado ao PVE, no momento em que a aluna utiliza o movimento com a mão para simular o crescimento e decrescimento de uma função.

Assunto	Falas, diálogos ou registros	MPVE
Atividade 7, seqüência 2 Sobre os critérios para determinação dos pontos críticos da função, dada a sentença algébrica.	Marina: *na função de 2º grau, basta calcular o x do vértice.* Taís: *poderíamos jogar valores...* Pesquisadora: *O que podemos dizer sobre as retas tangentes a esses pontos* Júlia: *retas paralelas ao eixo x$\Rightarrow$ coeficiente angular igual a zero* Liz: *deriva a função, iguala a função derivada a zero e acha os valores de x"*	PVP
Atividade 3, seqüência 1 Sobre a relação entre a variação de uma função quanto ao crescimento e decrescimento e suas retas tangentes, função $y = x^2 - 4x$)	Liz: *a reta azul tangenciou no 0, a reta verde tangenciou no 1, a reta amarela tangenciou no 2 e reta lilás tangenciou no três.*	PVP
	Taís: *à medida que o x das tangentes é menor do que 2, as retas tangentes assim como a parábola são decrescentes, quando x é igual a 2, a reta tangente pertence a uma função constante e se o x das tangentes é maior que 2, as retas tangentes assim como a parábola são crescentes.*	PVP
Atividade 6f, seqüência 2 Sobre a determinação de critérios, a partir da estimulação gráfica, para calcular algebricamente um ponto crítico em que não existe $f'(x)$.	O aluno Dener compara o desenho do gráfico para os valores próximos de x=5, valor para o qual não existe $f'(x)$ com o "quicar" de uma bola lançada ao chão numa trajetória parabólica.	PVP e PVE

Quadro 14: Registros ou diálogos representativos da utilização dos métodos intuitivos relacionados ao PVP (Apêndice B)

Nas falas do Quadro 14 ficaram evidenciados os processos mentais de intuições primárias, reconhecimentos visuais e identificação de objetos, relacionados ao PVP. Além desses, a utilização de outros processos foram percebidos: interpretação, ligada ao PVP, pelos alunos Dener e Taís; utilização da memória pelas alunas Marina, Taís, Júlia e Liz, e o uso de analogias, associado ao PVE, pelo aluno Dener.

No momento de formalizar o conceito de função crescente e decrescente em um intervalo $[x_1,x_2]$ gráfica e simbolicamente (Apêndice B, Sequências 1 e 2,

[39] Modos de pensamento visual-espacial

Atividade 2), quando se procurou estimular os processos mentais relativos à exteriorização do pensamento(PVE), também se verificou que os processos associados ao PVP funcionaram como ponto de partida para os processos mais elaborados do PVE. Como essa atividade foi aplicada tanto na primeira etapa do Estudo Principal, em novembro de 2006 (Seqüência 1, Atividade 2), como na retomada dos trabalhos em fevereiro de 2007 (Seqüência 2, Atividade 2), foi possível realizar uma comparação das respostas registradas nas duas ocasiões.

Observou-se nos registros relativos a novembro de 2006, que as 4 duplas participantes fizeram a representação gráfica solicitada utilizando retas, apontando para a pesquisadora que ocorreria uma limitação do conceito às funções de primeiro grau. Na representação através da linguagem simbólica, essa impressão se confirma, pois três duplas expressaram a idéia, citando no texto ora a expressão $y = ax + b$ ou um exemplo específico como $y = -2x + 2$, ora expressões como *"... a medida que a reta aumenta de x_1 em direção ao x_2..."*. Apenas uma dupla apresentou a resposta simbólica sem essa limitação.

Esse fato sinaliza que os alunos tentaram representar, traduzir e construir sua argumentação, processos relativos ao PVE, apoiados na memória e nas vivências anteriores (PVP), mas não conseguiram usar esse apoio de forma satisfatória.

Esse insucesso pode ter origem em experiências anteriores, pois freqüentemente, os professores da educação básica enfatizam o estudo de funções polinomiais de 1º e 2º graus. Para as funções do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$, o conceito de crescimento e decrescimento fica mais claro quando se fazem as relações $a > 0 \Rightarrow$ *reta ascendente* e $a < 0 \Rightarrow$ *reta descendente*. No entanto, para as funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, um estudo similar do sinal de *a* fornece informações quanto à concavidade e não sobre o crescimento e decrescimento. Tal fato talvez possa explicar a forma de raciocínio expressa por Júlia (Quadro 13), que parece criar uma imagem mental segmentada da curva "suave", relacionando as porções ascendentes a um coeficiente angular positivo e as porções descendentes ao coeficiente angular negativo para analisar a variação da função. Os pontos acima destacados encontram fundamentação na afirmativa de Rezende (2003, p.6) de que o sucesso do ensino superior de cálculo está condicionado a uma preparação das idéias no ensino básico de matemática.

> [...] O gráfico de uma função é, em geral, "plotado" através de uma tabela em que os valores "notáveis" são escolhidos pelo professor. A curvatura das curvas compõem o gráfico da função é, em geral, induzida pelo professor que tenta convencer o aluno, pelo acréscimo de mais pontos, ou mesmo através de um sofisticado programa computacional, que a única possibilidade é a dele-professor. Isto posto, procura-se estudar em seguida as propriedades algébricas do conceito construído. Fala-se, por exemplo, em injetividade ou sobrejetividade, mas não em crescimento ou decrescimento da função, ou melhor, em quanto e como cresce/ decresce o valor de uma função em relação à sua variável independente. Discutem-se (caso existam) os zeros e o período da função, mas não os seus pontos críticos, que são, em verdade, os elementos da articulação do esboço gráfico de uma função real de uma variável (também real).

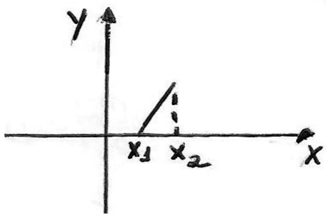
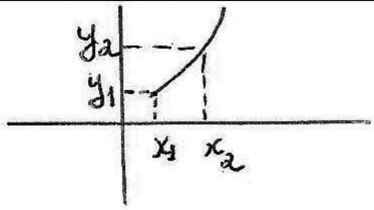
Na retomada dos trabalhos em fevereiro de 2007, verificou-se respostas mais bem elaboradas e a utilização mais consciente da linguagem formal e simbólica. Todos os 9 alunos participantes expressaram corretamente os conceitos de função crescente e decrescente num intervalo em linguagem simbólica. Apenas quatro deles fizeram a representação gráfica limitada a uma porção de reta. À medida do desenvolvimento das atividades, percebeu-se que os alunos caminharam com vistas à utilização de outros modos de pensamento, fazendo uma matemática mais significativa do ponto de vista conceitual.

4.4.2 Evidências de utilização dos modos PVE, PVMM E PVR

Embora o ponto de partida dos alunos tenha sido predominantemente o modo PVP e os processos mentais a ele associados, os alunos realizaram movimentos que evidenciam uma apropriação dos demais modos de pensamento visual.

Um dos sinais desse desenvolvimento foram os registros referentes à formalização do conceito de função crescente e decrescente em um intervalo na retomada dos trabalhos em fevereiro de 2007. Uma comparação entre a primeira aplicação (Apêndice B, Seqüência 1, atividade 2) e a segunda (Apêndice B, Seqüência 2, atividade 2) evidencia uma maior capacidade na exteriorização do pensamento, retratada por uma forma de exposição mais lógica e objetiva.

Os registros apresentados pela aluna Sara sobre o conceito de função crescente, nos dois momentos, exemplificam essa constatação (Quadro 15). Na tentativa de construir sua argumentação, processo ligado ao PVE, ficaram evidenciados no primeiro registro, construção visual, identificação de objetos e inferências intuitivas. No entanto, no segundo registro, a aluna constrói sua argumentação, realiza representações externas e tradução, processos associados ao PVE, evidenciando, além dos processos relacionados ao PVP citados anteriormente a geração de conceitos, abstração perceptual e ligada ao reconhecimento, reapresentação e avaliação de imagens mentais.

Questão	1º registro – Novembro 2006	2º registro – Fevereiro 2007
O que significa dizer que *f(x)* é crescente em $[x_1,x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática	 *Suponhamos que f(x)=2x+2. Assim para qualquer valor positivo para x, teremos y>0, ou seja, se x tende a crescer y também. Assim teremos uma função crescente.*	 *Significa que $f(x_1)$ é menor que $f(x_2)$. Para um valor x_1 temos um valor y_1 e para x_2 temos um y_2 (maior que x_1). Quanto maiores os valores de x, teremos maiores valores de y associados a eles.*

Quadro 15: Registros representativos da utilização dos processos relacionados ao PVE

A passagem de um tipo de linguagem a outra, estimuladas de modo especial nas atividades 4, 10, 11, 16 e 17, que solicitaram construções gráficas, a partir da linguagem textual e simbólica, contribuiu para uma aprendizagem mais significativa dos conceitos matemáticos, proporcionando uma interação entre vários processos matemáticos, apontada por educadores matemáticos como um importante passo para se transitar do pensamento matemático elementar para o avançado.

> [...} quando construímos um gráfico de uma função, nós executamos um processo matemático, seguindo certas regras que podem ser postas em linguagem matemática; ao mesmo tempo estamos provavelmente a gerar uma imagem mental visual desse gráfico, isto é, nós estamos a visualizar a função duma forma que mais tarde nos ajudará a raciocinar sobre a função. As imagens mentais e as imagens matemáticas estão intimamente ligadas aqui. Nenhuma pode surgir sem a outra, e elas são de fato geradas pelos mesmos vários processos; elas constituem, respectivamente os aspectos matemáticos e psicológicos deste processo. (DREYFUS,1991, p.26, tradução nossa)[40]

[40] ...when you build a graph of a function, you are executing a mathematical process, following certain rules wich can be stated in mathematical language; at the same time, however, you are very likely generating a visual mental image of that graph; in other words, you are visualizing the function in a way that can later help you reason about the function. The mental and the mathematical and the psychological aspects of this process.

Conforme exposto anteriormente, na realização dessas atividades, ocorreu um momento de socialização em que cada dupla apresentou suas construções para os demais colegas, explicando os motivos que levaram a obter o desenho e justificando porque ele atendia às condições estabelecidas. Esses foram momentos especialmente importantes no desenvolvimento da pesquisa. A pesquisadora percebeu uma preocupação maior, por parte dos alunos, em organizar a apresentação, para facilitar a compreensão dos colegas. Isso resultou na utilização de uma linguagem mais elaborada, nos momentos em que tentavam explicar as idéias.

Dessa forma, os processos mentais de construção de argumentações e conjecturas, descrição da dinâmica mental, relativos ao PVE, evidenciaram-se. Nesse momento alguns processos associados ao PVMM e PVR também foram percebidos: unificações, pois os alunos construíram gráficos e coordenaram unidades abstratas tanto numéricas como simbólicas, nos momentos em que justificaram a ligação entre as duas representações; operações mentais que abrangem capacidades como antecipação e organização (construção visual), no momento em que, na busca dessa justificativa, os alunos percebiam a não correspondência entre as representações e eram capazes de prever, a partir desse esboço, um outro que satisfizesse em todos os quesitos a ligação entre as representações.

Os debates gerados enriqueceram o processo de aprendizagem, pois foi possível rediscutir todos os conceitos trabalhados.

> Quando uma sala de aula é considerada como um micro-cosmo, como uma comunidade de prática, o aprender já não é visto apenas como instrução e exercício, mas se torna também uma forma de participação em uma prática disciplinar. [...]. A visualização por meio de gráficos, diagrama, modelos é um tema central "que desenvolve e estabiliza... numa interação entre as pessoas e objetos". Maneiras de ver emergem em uma prática social à medica que essa evolui.(ARCAVI, 2003, p 237, tradução nossa)[41]

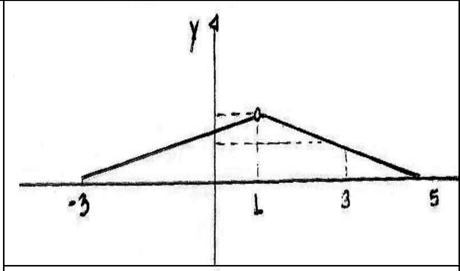
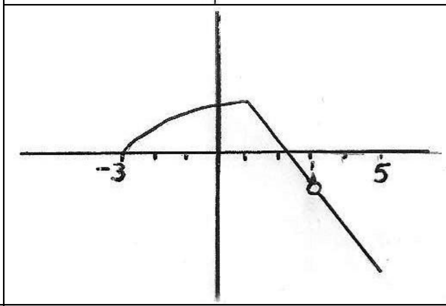
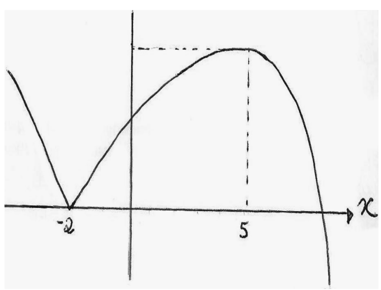
> A fase de discussão, é pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro , desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir

---

[41] When a classroom is considered as a micro-cosmos, as a community of practice, learning is no longer viewed only as instruction and exercising., but also becomes a form of participation in a disciplinary practice. […] Visualization by means of graphs, diagrams and models is a central theme "develop and stabilize… in interaction between people and things". Ways of seeing emerge in a social practice as it evolves.

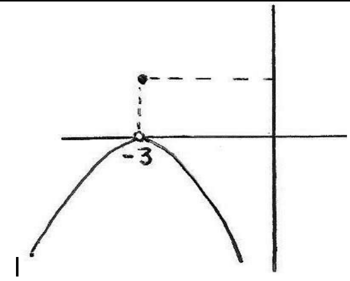
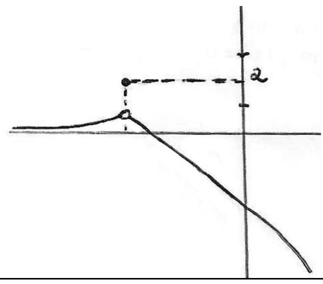
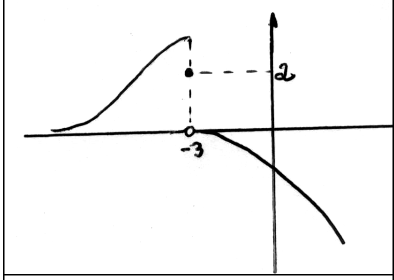
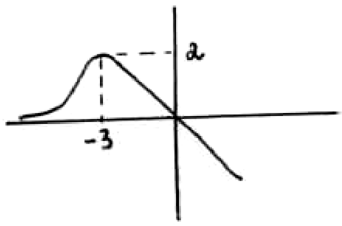
> sobre os seus trabalhos e o seu poder de argumentação. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003, p.41)

No Quadro 16 faz-se uma análise dos registros representativos dos processos relacionados ao PVE, PVMM e PVR, estimulados nas atividades 4, 10, 11, 16 e 17 (Seqüência 2). Como citado, algumas delas permitiam a construção de gráficos diferenciados e isso foi verificado nos registros. Essa diversificação enriqueceu o trabalho, pois permitiu uma discussão mais abrangente, com retomada dos conceitos relativos à variação de funções, envolvendo: zeros de funções, pontos em que a derivada é zero ou não é definida, crescimento ou decrescimento, limites no infinito.

Atividades	Registros	Observações	MPVE
Atividade 4a Esboce o gráfico de uma função definida no intervalo]-3,5[com as seguintes características: • crescente no intervalo]-3,1[• decrescente no intervalo]1,5[• não existe f(3)		Este gráfico representa o padrão de resposta de 8 dos 9 alunos presentes à atividade.	PVE e PVMM
		Apenas um aluno não se prendeu ao modelo anterior, esboçando porções do gráfico abaixo do eixo x.	
Atividade 4b Esboce o gráfico de uma função definida em]-∞,∞[com as seguintes características: • decrescente no intervalo]-∞,-2[• crescente no intervalo]-2,5[• decrescente intervalo]5,∞[		Representa o padrão de respostas de 8 dos 9 alunos. Um deles não conseguiu construir o gráfico.	

Quadro 16: Registros representativos da utilização dos processos relacionados ao PVMM, PVR e PVE (Apêndice B, Seqüência 2)

Os dados apresentados no Quadro 16, relativos à questão 4a, revelaram uma tendência, por parte desses alunos, de representar, sempre que as condições permitiram, um desenho do gráfico de uma função sempre positiva (acima do eixo *x*). Na questão 4*b* isso se confirma. No entanto, as discussões geradas nos momentos de apresentação permitiram, em construções posteriores, uma maior diversidade de desenhos gráficos, retratando um raciocínio mais aberto e elaborado. Nesses registros foram evidenciados representação e tradução, processos relacionados ao PVE e transformações metais, unificações e construção visual, relativos ao PVMM.

<table>
<tr><th>Atividades</th><th>Registros</th><th>Observações</th><th>MPVE</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Esboce o gráfico de uma função f(x) que atenda todas as condições citadas:
• $f(-3)=2$
• $f'(x)>0$ para $x<-3$
• $f'(x)<0$ para $x>-3$
• $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$
• $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$</td><td>
</td><td>Não atende a 4ª condição</td><td rowspan="4">PVE, PVMM e PVR</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Atende a todas as condições (função descontínua para x=-3)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Atende a todas as condições (função descontínua para x=-3)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Atende a todas as condições (função contínua para x=-3)</td></tr>
</table>

Quadro 17: Registros representativos da utilização dos processos relacionados ao PVMM, PVR e PVE (Apêndice B, Seqüência 2)

Nos registros apresentados no Quadro 17, evidenciaram-se, além dos processos referentes ao PVP, outros como representações externas e tradução, ligados ao PVE, transformações mentais, unificações, intuições secundárias e construção mental, associados ao PVMM e os processos de intuições antecipatórias e abstração reflexiva, relacionados ao PVR.

4.4.3 Evidências de utilização dos vários modos de pensamento visual-espacial em uma mesma atividade

As evidências apresentadas anteriormente não pretendem sugerir que os vários modos de pensamento visual-espacial ocorrem de forma dicotômica e linear, podendo os diversos processos mentais interagir numa mesma atividade.

As atividades em que foram estabelecidas as relações da função com suas derivadas primeira e segunda (Atividades 5, 6, 7, 8, 12, 13 e 14, Seqüência 2, Apêndice B) envolveram processos mentais associados aos quatro modos de pensamento visual-espacial (PVP, PVMM, PVR e PVE).

Conforme já ressaltado, não foi possível apurar para estas questões um índice de desempenho geral, a partir dos resultados individuais, pois os registros, apesar de se diferenciarem do ponto de vista textual, foram resultados de discussões entre as duplas ou trios. Optou-se, então, por relatar alguns fatos ou apresentar registros representativos da utilização dos vários modos de pensamento visual-espacial.

O Quadro 18 retrata o registro de uma das duplas e ilustra como os vários modos de pensamento visual-espacial interagem no desenvolvimento da atividade. Para as atividades 6a, 6b e 7c evidenciaram-se intuições primárias, reconhecimentos visuais, interpretação e identificação de objetos, ligados ao PVP. Verificou-se também nas atividades 6b e 7c geração de conceitos, associado ao PVP, intuições secundárias e coordenação, relacionados ao PVMM e descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, ligados ao PVR. Os processos de abstração reflexiva e generalização construtiva, ligados ao PVMM, tradução e construção de argumentação e conjecturas, relacionados ao PVE foram mais presentes na atividade 7d.

Além das observações registradas no Quadro 18, outras situações relativas a essas atividades merecem ser destacadas. Nas questões 7e e 7f, da mesma seqüência, os alunos deveriam prever, através da observação gráfica, os possíveis pontos de máximo e mínimo de 8 funções e, em seguida, verificar a eficácia do teste algébrico para a função estabelecida na questão 7d. A pesquisadora percebeu uma certa satisfação dos alunos na realização da tarefa, pois o procedimento “dava certo” para as seis primeiras funções. Sendo contínuas e deriváveis para todos os valores reais, os resultados previstos através da observação gráfica coincidiam com aqueles obtidos através da procura das raízes de $f'(x)$. Na sexta função, $y = x^4 - 4x^3$, o fato de encontrarem o valor *0*, através da resolução algébrica, não chegou a causar estranheza, pois, apesar de não ser máximo nem mínimo local, acarretava uma depressão no gráfico e foi intuído pelos alunos que, naquele ponto, $f'(x)$ era igual a zero. Eles perceberam que nem todo ponto em que $f'(x) = 0$ é ponto de máximo ou mínimo local.

Atividades	Registros	MPVE
Atividade 6a O que você observa quanto ao crescimento/ decrescimento da função $y = x^3 - 3x$?	*“crescente de* $]-\infty,-1[$ *e de* $]1,+\infty[$, *decrescente* de $]-1,1[$, *ponto de máximo local* $(-1,2)$ *e ponto de mínimo local* $(1,-4)$*.”*	PVP
Atividade 6b Você observa alguma relação entre o comportamento da função $y = x^3 - 3x$ do ponto de vista do crescimento/ decrescimento e as tangentes à curva? Registre suas idéias.	*“Quando a função é crescente, a reta tangente é crescente. Quando a função é decrescente a reta tangente é decrescente. No ponto de máximo local , x=-1, a reta tangente é paralela ao eixo x. No ponto de mínimo local, x=1, a reta tangente é paralela ao eixo x.*	PVP, PVMM e PVR
Atividade 7c O que você observa com relação às retas tangentes aos pontos em que a função muda o crescimento/decrescimento?	*“São paralelas ao eixo x.”*	
Atividade 7d É possível estabelecer algum tipo de procedimento algébrico para a determinação desses pontos? Se sim, teste esse procedimento para cada uma das funções.	*“Sim, derivar a função, igualar a função derivada a zero e obter os pontos.”*	PVMM e PVE

Quadro 18: Registros representativos da utilização dos vários modos de pensamento visual-espacial (Apêndice B, Seqüência 2)

O conflito surgiu no estudo das funções $y = x(x-5)^{2/3}$ e $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$, contínuas, mas não deriváveis para *x=5* e *x=0*, respectivamente. Esses valores foram estimados através da observação gráfica, pois pela avaliação dos alunos *f(5)* e *f(0)* eram, respectivamente, mínimo e máximo, em relação aos outros valores da função próximos de *x=5* e *x*=0. No entanto, estes não se confirmaram na resolução algébrica. Os alunos perceberam que o procedimento para a determinação dos pontos críticos teria que ser repensado, pois não atendia a todo tipo de função. As discussões surgiram, mas nenhum dos alunos foi capaz de verbalizar a não "suavidade" e a não-existência de $f'(x)$ para esses pontos. Foi necessário que a pesquisadora intervisse, estimulando-os a observar no gráfico da função $y = x(x-5)^{2/3}$ (figura 2), as diferenças em relação à forma do gráfico nos pontos de abscissas *3* e *5*, respectivamente, pontos de máximo e mínimo locais. O Quadro19 busca retratar parte da discussão gerada.

Assunto	Diálogo
Determinação dos pontos críticos da função $y = x(x-5)^{2/3}$ através da pesquisa das raízes $y' = \frac{5x-15}{(x-5)^{1/3}}$	Dener: *No x= 5 o desenho do gráfico lembra uma bola quicando no chão.* Júlia: *x=5 zero o denominador.* Sara: *Então pega só o que está no parêntese do denominador e iguala a zero.* (Referindo-se à derivada $y' = \frac{5x-15}{(x-5)^{1/3}}$). Pesquisadora: *Por esse caminho indicado por Sara seria possível encontrar 5?* Alunos: *Sim* Pesquisadora: *Mas esse procedimento equivale a encontrar as raízes de* $f'(x)$? Alunos: *Não* Pesquisadora: *Mas o que esse valor x=5 tem de especial (de diferente) para a derivada* $y' = \frac{5x-15}{(x-5)^{1/3}}$ *?* *Silêncio.....ninguém se manifesta* Pesquisadora: *Observem que a função é definida para todo x real, mas* $f'(x)$ *não está definida para x=5.*

Quadro 19: Diálogo sobre a determinação dos valores em que não existe $f'(x)$

A partir do diálogo retratado no Quadro 19, os alunos reconstruíram o procedimento algébrico para a determinação dos pontos críticos de funções contínuas em R, de forma a generalizá-lo. Após uma breve discussão, eles chegaram ao consenso de que para a determinação desses pontos, deveriam, além de pesquisar os zeros de $f'(x)$, verificar os valores para os quais $f'(x)$ não está definida.

Na atividade 8 (Seqüência 2), os alunos concluíram com relativa facilidade que o bastante para se determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função, seria estudar o sinal da função derivada, podendo se fazer esse estudo tanto gráfica como analiticamente. Nesse momento, foram convidados a elaborar um quadro resumo (Atividade 9, Seqüência 2) com as principais conclusões estabelecidas, até então, nessa etapa. Todos os alunos preencheram esse quadro, correlacionando os sinais da derivada e sua inexistência ao crescimento e decrescimento da função.

Para as atividades 12, 13, 14 e 15 que buscavam estabelecer as relações entre a função e sua derivada segunda, os alunos observaram sem dificuldades o sentido da concavidade das curvas. Pelos registros, nenhum aluno percebeu que as retas tangentes se posicionam acima ou abaixo da curva conforme a curva é côncava para baixo ou para cima, tampouco chegou às conclusões de que sendo $f'(x)$ crescente ou decrescente, implica $f''(x)$ ser positiva ou negativa e o bastante para determinar o sentido da concavidade da função seria o estudo do sinal de $f''(x)$. Tais relações só foram estabelecidas quando a pesquisadora apresentou os gráficos na projeção, conduzindo a discussão a partir das observações já registradas. Os alunos foram novamente convidados a anotar os principais resultados num quadro resumo (Atividade 15). Todos os alunos realizaram o preenchimento do quadro correlacionando os sinais da segunda derivada à concavidade da função.

Na seqüência de atividades que envolviam translações e rebatimentos de gráficos (Seqüência 3, Apêndice B), novamente se verificou carência de linguagem formal e uma forma de raciocinar sustentada pela intuição. Embora as discussões orais entre as duplas revelassem que os alunos perceberam as relações, os registros escritos se mostraram incompletos e, às vezes, confusos. Apesar disso, todas as duplas conseguiram esboçar o gráfico da função $y=(x-2)^3+8$ a partir do gráfico de $y=x^3$. Os registros transcritos no Quadro 20 ilustram essas constatações.

Os registros evidenciam que na atividade 1e os estudantes se apoiaram na intuição, através de intuições primárias, reconhecimentos visuais, interpretação, e identificação de objetos. Já nas atividades 2e, 3c e 4, os alunos, além de se apropriarem dos processos anteriores, conseguiram gerar conceitos(PVP) e fazer uso dos processos de intuições secundárias e coordenação, relacionados ao PVMM e abstração reflexiva, descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, associados ao PVR. Esses processos se evidenciam quando os alunos constroem suas argumentações e conjecturas (PVE).

<table>
<tr><th>Atividades</th><th>Registros</th><th>MPVE</th></tr>
<tr><td>Atividade 1e
A partir do gráfico de uma função $f(x)$ é possível prever a forma do gráfico $f(x) \pm c$?</td><td>Marina: “O gráfico nos três casos são iguais, o que diferencia é o eixo y.”
Karine: “É possível, a partir da função $f(x)$ determina-se outra função $f(x) \pm c$ porque só vai variar o termo c.”
Dener: “Sim, o posicionamento vertical do gráfico varia de acordo com os valores de c.”
Tarcísio: “É possível, porque aumentando ou diminuindo o c, o gráfico fical igual, só variando no eixo y.</td><td>PVP</td></tr>
<tr><td>Atividade 2e
A partir do gráfico de uma função $f(x)$ é possível prever a forma do gráfico $f(x \pm c)$?</td><td>Marina: “O gráfico permaneceu da mesma forma e variou o x.”
Dener: “Sim, os gráficos possuem o mesmo formato, mas estão em posições diferentes.”
Tarcísio: “É possível, porque aumentando ou diminuindo o c, o gráfico fica igual, só variando no eixo x.</td><td rowspan="3">PVP,
PVMM
e PVR</td></tr>
<tr><td>Atividade 3c
A partir do gráfico de uma função $f(x)$ é possível prever a forma do gráfico $-f(x)$?</td><td>Marina: “Sim, é só inverter o gráfico.”
Dener: “Sim, basta fazer um gráfico simétrico em relação ao eixo x.”</td></tr>
<tr><td>Atividade 4
Sobre os passos para a construção do gráfico da função $y = (x-2)^3 + 8$, a partir do gráfico da função $y = x^3$</td><td>Marina:
$y = (x-2)^3 \Rightarrow$ deslocou para a direita
$y = (x-2)^3 + 8 \Rightarrow$ o gráfico subiu</td></tr>
</table>

Quadro 20: Registros representativos da utilização dos vários modos de pensamento visual-espacial: translação e rebatimentos de gráficos de funções reais (Apêndice B, Seqüência 3)

4.4.4 Evidências do desenvolvimento de estratégias metacognitivas

Embora o processo mental da metacognição, relativo ao PVR, tenha sido estimulado também em outras atividades, ele se evidenciou principalmente no estudo teórico dos conceitos. Conforme exposto na descrição da atividade, essa fase consistiu numa retomada dos conceitos relativos à variação de funções, através do texto “Aplicações de derivadas” do livro Cálculo I de George F. Simmons (1987, p. 149 a 151).

Dessa etapa participaram 8 alunos, que responderam individualmente às questões constantes do Apêndice B, seqüência 5. Como descrito anteriormente, os alunos fizeram o estudo do texto destacando os pontos mais importantes e, num segundo momento, responderam às questões sem consultarem o texto. Esse procedimento foi adotado para evitar que os alunos se limitassem a transcrever as respostas do livro-texto.

Percebeu-se, pelos resultados apresentados a seguir, que essa seqüência favoreceu o desenvolvimento de *estratégias metaconigitivas* (Frota, 2002, p. 49). Os registros evidenciaram uma maior consciência, por parte dos alunos, em avaliar a importância de saber quais conceitos haviam compreendido, qual o caminho trilhado nessa aprendizagem e como esse processo de avaliação poderia contribuir para a apreensão dos conceitos ainda não bem entendidos. Os registros da aluna Liz ilustram essa afirmativa. Apesar de não apresentar respostas satisfatórias às questões 3a, 3b, 3c e 3d, que solicitavam explicações sobre as relações entre os sinais das funções derivadas primeira e segunda e a função primitiva, pontos críticos e de inflexão, ela registra o seguinte comentário: *"Quando o aluno tem domínio da teoria, ele pode ir por caminhos diferentes e chegar ao mesmo resultado obtido pelo professor, sem necessariamente decorar os passos utilizados pelo professor".*

Os oito alunos participantes dessa etapa responderam positivamente à primeira questão, que solicitava a confirmação ou não, com a devida justificativa, da importância do estudo teórico dos conceitos matemáticos e como esse estudo poderia desenvolver uma maior autonomia em relação ao próprio processo de aprendizagem. Essa constatação sinaliza para a pesquisadora uma mudança de postura, pois esse grupo de alunos caracteriza-se por apresentar estratégias de aprendizagem, sustentadas por um estilo de aprendizagem com *ênfase prática* (FROTA, 2002), privilegiando a resolução de exercícios e apresentando forte resistência à pesquisa e ao estudo teórico nos livros didáticos. A transcrição de alguns comentários sintetiza as idéias expressas pelos alunos:

> *"...a teoria oferece ao aluno uma melhor fundamentação em torno da matéria estudada, pois tendo conhecimento da teoria o aluno tem uma visão mais ampla do conteúdo"* (Tarcísio).

> *"...através do estudo teórico, obtém-se maior autonomia sobre os conceitos estudados, habilitando o estudante a superar obstáculos que talvez não*

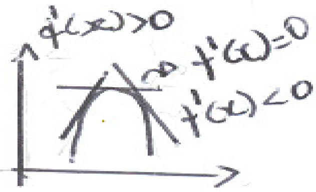
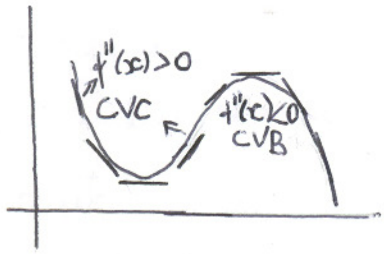
> *seriam alcançados com a prática exaustiva de exercícios, num tempo relativamente menor"*(Dener),
>
> *"...quando você estuda os conceitos de forma teórica, consegue enxergar com maior clareza e adquire o hábito de interpretar as questões"*(Marina).

Os alunos não manifestaram maiores dificuldades no estudo do texto, apenas 1 dos 8 alunos presentes respondeu negativamente à questão: *Você encontrou dificuldades na leitura do texto? Justifique*. Os outros 7 apontaram que a linguagem utilizada pelo autor estava clara e de fácil entendimento. Tal fato contrariou, em parte, as expectativas da pesquisadora, pois esses alunos já tinham considerado, em estudos anteriores como introdução às derivadas, o texto do autor (SIMMONS, 1987) extenso e de difícil compreensão.

Porém, uma maior facilidade de leitura e compreensão do texto teórico era esperada, pois todos os conceitos constantes do texto já haviam sido trabalhados ao longo do curso, através de uma abordagem intuitiva. Dois dos alunos participantes mostraram ter consciência disso, manifestando, através da resposta à segunda questão, as seguintes opiniões: *"Não. Porque já vínhamos estudando os conceitos com os gráficos há algum tempo*" (Marina), *"Não. Como foi um assunto que já tinha sido discutido e já conhecemos na prática, a teoria nos ajudou a entender melhor o assunto"* (Ana).

Percebeu-se, assim, que a prévia "descoberta" dos conceitos e procedimentos através da investigação lançou luz ao estudo teórico, pois as idéias discutidas não pareciam, naquele momento, sem sentido, surgidas da cabeça de algum matemático "superdotado", mas algo palpável, cujos resultados eles mesmos tinham sido capazes de concluir através da experimentação e observação. Tal fato faz remeter à recomendação de Koirala (1997 apud BERRY e NYMANN, 2003) de que a condução de um curso inicial de cálculo deva ser informal, intuitiva e conceitual, baseada em gráficos e funções, para só num momento posterior proceder à dedução de fórmulas e regras. Constatou-se que as estratégias adotadas contribuíram para que os alunos atribuíssem maior significado aos conceitos estudados.

Para as questões seguintes, esperava-se que os alunos utilizassem representações gráficas para melhor expor as idéias. Na questão 3a, que solicitava explicações acerca dos sinais da derivada primeira de uma função no estudo de crescimento ou decrescimento da mesma, eles se limitaram a uma repetição da relação sistematizada no texto didático, sem qualquer tentativa de argumentar com as próprias palavras ou graficamente. Apenas o aluno Dener utilizou esboços gráficos nas respostas. O Quadro 21 mostra as respostas desse aluno às questões 3a e 3c (Seqüência 2). Os registros apontam que ele conseguiu apropriar-se de alguns processos relativos ao PVE como representações externas, tradução e construção de argumentações.

Atividades	Registros
Atividade 3a Explique por que os sinais da derivada à primeira são usados para determinar crescimento e decrescimento de uma função.	 *O crescimento, decrescimento de uma função acompanha os valores dos coeficientes angulares de suas retas tangentes. Logo, quando $f'(x) > 0$, ou seja positivo, $f(x)$ será crescente e quando $f'(x) < 0$, negativo, $f(x)$ será decrescente.*
Atividade 3c Explique por que os sinais da derivada à segunda são usados para determinar o sentido da concavidade de uma função.	 *Assim como a primeira derivada, a segunda também está ligada à função primitiva. Onde $f''(x) > 0$, $f'(x)$ é crescente, logo as retas tangentes a $f(x)$ giram em sentido anti-horário, o que determina concavidade para cima. E onde $f''(x) < 0$, $f'(x)$ é decrescente, logo as retas tangentes a $f(x)$ giram em sentido horário, determinando a concavidade para baixo.*

Quadro 21: Registros representativos da utilização dos processos relacionados ao PVE (Apêndice B, Seqüência 3)

Cinco alunos revelaram um entendimento claro do que são pontos críticos e como se procede para determiná-los, citando os procedimentos gráfico e algébrico, quando responderam a questão 3b. Os outros três mencionaram apenas o procedimento algébrico e um deles não registrou que, além de calcular os valores para os quais $f'(x)=0$, os valores em que $f'(x)$ não existe também deveriam ser pesquisados.

Quanto à questão 3c, três alunos fizeram representações gráficas para ilustrar a reta tangente girando acima ou abaixo da curva nos sentidos anti-horário e horário quando a concavidade é voltada para cima e para baixo, respectivamente.

O recurso gráfico revelou ser um apoio importante, pois esses alunos conseguiram explicar com clareza os conceitos envolvidos na questão, enquanto que os outros cinco se limitaram apenas a citar a relação entre os sinais da derivada segunda e o sentido da concavidade da função, expressa no livro-texto. Na última questão, 3d, todos os 8 alunos mencionaram ser o ponto de inflexão, o ponto no qual o gráfico da função muda de concavidade e o bastante para determiná-los seria encontrar os zeros de $f''(x)$. Nenhum deles, entretanto, observou que, para se certificar acerca da existência de ponto de inflexão, deve-se verificar se ocorre mudança de sinal da segunda derivada para o(s) valor(es) encontrado(s).

4.5 Considerações sobre o estudo principal

Conforme já constatado nos estudos exploratórios, os resultados do estudo principal também mostraram uma relativa dificuldade dos alunos em pensar graficamente e em estabelecer conexões entre as várias formas de representação de uma função. Essas dificuldades se evidenciaram tanto na análise dos registros como pelas manifestações espontâneas de alguns alunos, demonstrando uma certa resistência em relação a um trabalho com essa abordagem: "C*onstruir gráficos cansa, faz a gente ter que pensar muito, eu prefiro calcular, aplicar fórmulas, etc."* (Júlia).; "*Eu até compreendi bem a construção de gráficos a partir do estudo de derivadas, mas achei o processo muito complexo e trabalhoso"* (Tarcísio).

As manifestações desses alunos podem ser fundamentadas nos estudos de Dreyfus e Duval. A fala da aluna Júlia remete à afirmativa de Dreyfus de que o sucesso para grande parte dos alunos ocorre no caso dos monorregistros, ocorrendo um "enclausuramento" quando têm de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações. Já a fala do aluno Tarcísio encontra sustentação nas palavras de Duval, sobre a dificuldade, por se tratar de uma estrutura muito complexa, de se ensinar e aprender o processo de trocas entre representações.

Uma análise geral das dificuldades vivenciadas pelos alunos permite levantar uma hipótese, segundo a classificação de Arcavi (2003), de que elas tenham sido de ordem *cultural* e *cognitiva*. As dificuldades culturais podem ser justificadas, pois esses alunos sofreram influências, através de seus professores, influenciados pelo Movimento de Matemática Moderna. Como as atividades fugiram do padrão seqüencial freqüentemente adotado no ensino de matemática, exigindo portanto maior esforço cognitivo, as dificuldades *cognitivas* também podem ser percebidas.

Não se pode afirmar que não ocorreram dificuldades *sociológicas*, mas essas não se destacaram. Uma justificativa para isso poderia estar no fato de que os estudantes pesquisados vivenciaram um processo coletivo, no qual a professora-pesquisadora estimulou a utilização do pensamento visual, e advêm de uma mesma região geográfica, o que poderia sugerir o compartilhamento das mesmas influências culturais.

Percebeu-se, na medida em que os trabalhos avançaram, uma maior apropriação das estratégias gráficas, revelando um tipo de raciocínio mais elaborado e amadurecido com utilização dos diversos processos associados ao pensamento visual.

Outro aspecto a considerar é que o acompanhamento desse grupo ocorreu por cerca de 8 meses, sendo possível analisar de forma individualizada o desenvolvimento dos alunos. Optou-se por destacar aqui alguns aspectos do desenvolvimento do aluno Tarcísio por ter sido o que mais “surpreendeu” a pesquisadora durante o processo de aplicação das atividades. Ele, além de não demonstrar confiança em seu próprio potencial, apresentava desempenho insatisfatório, por possuir sérias lacunas em relação à formação matemática básica e não dispor de tempo, devido à profissão autônoma de técnico em eletrodomésticos que exerce, de dedicar-se aos estudos. No entanto, ele se destacou em vários momentos. Foi o único a representar de forma diferenciada, mas correta, com porções abaixo do eixo x, o gráfico da Atividade 4a, Seqüência 2 (Quadro 16, p.85). Fez parte da única dupla a não se limitar, no momento da formalização do conceito de função crescente e decrescente em um determinado intervalo, às funções de primeiro grau. Além disso, apresentou relativa desenvoltura na construção de outros gráficos, relatando para os colegas, quando necessário, a forma de raciocínio utilizada para chegar aos resultados.

Esses fatos revelaram que um trabalho com incentivo ao uso das diversas representações contribuiu para que ele desenvolvesse confiança em relação ao próprio aprendizado e se destacasse junto ao grupo. Também foi observado não só pela pesquisadora, mas também pelos outros professores do curso, uma melhoria substancial desse aluno nos resultados das avaliações oficiais da instituição.

Os resultados apresentados pelo aluno Tarcísio (Quadro 16, p.85) e também os registros do aluno Dener, na atividade que solicitava a explicação dos motivos para a utilização dos sinais das derivadas primeira e segunda, para determinar, respectivamente, crescimento/ decrescimento e concavidade de uma função (Quadro 21, p.93), evidenciam que o uso das estratégias gráficas contribui para um melhor entendimento do estudo da variação de funções. Percebe-se que aluno Dener utiliza-se do esboço gráfico para melhor expressar suas idéias através das linguagens textual e algébrica, enquanto os registros do aluno Tarcísio sugerem que o uso de estratégias gráficas favorece o seu estilo de aprendizagem.

Outro aspecto também importante a ser questionado é se a aplicação dessas atividades contribuiu para que os alunos conseguissem transitar do pensamento matemático elementar para o avançado. Não se pode afirmar que isso tenha ocorrido, pois esse não era o foco do trabalho. Os referenciais teóricos e o tipo de trabalho desenvolvido indicam que não existe uma dicotomia entre esses pensamentos. No entanto em várias das atividades aplicadas, percebeu-se que os alunos realizaram, às vezes de forma coletiva, uma integração entre vários dos processos matemáticos, apontada por alguns teóricos como um caracterizador do pensamento matemático avançado.

Uma exemplificação dessa integração foram as discussões e registros da atividade 7. Nessa atividade que buscava determinar o procedimento algébrico para determinar os pontos críticos de uma função, os alunos visualizaram através de representações gráficas os possíveis pontos críticos, conjecturaram sobre como determiná-los através de um procedimento algébrico, analisaram se esse procedimento era eficaz, fizeram novas conjecturas e, por último, generalizaram e formalizaram o procedimento.

Evidenciou-se também no estudo desenvolvido, comparativamente aos estudos exploratórios, o uso muito mais abrangente dos processos mentais relacionados aos modos de pensamento visual PVE, PVMM e PVR. Além disso, nos momentos de socialização, o PVE realmente funcionou como "[...] uma espécie de fio condutor do pensamento visual-espacial" (COSTA, 2005, p. 189), permitindo, através das *descrições*, *analogias*, *conjecturas* e *argumentações* realizadas pelos alunos verificar a utilização dos outros três modos (PVP, PVMM e PVR).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa objetivou investigar, no contexto de um curso de formação de professores, como a utilização dos processos visuais, numa abordagem que permitisse a interlocução entre as várias formas de representação em matemática, poderia contribuir para o entendimento do estudo da variação de funções. Ao incentivar o uso do pensamento visual no ensino de cálculo em um curso de licenciatura em matemática, buscou-se apresentar uma visão diferenciada dessa disciplina. O curso de cálculo sob esse enfoque pode assumir um papel abrangente e integrador, transcendendo os objetivos específicos da própria disciplina.

Os resultados apontaram que os alunos do curso de Licenciatura, junto aos quais foi desenvolvida a pesquisa, não têm o hábito de lançar mão das estratégias gráficas para pensar matematicamente, mesmo após terem estudado matemática por, no mínimo, 11 anos. Os alunos enfrentaram dificuldades principalmente no momento em que deviam mobilizar simultaneamente dois ou mais tipos de representação. Verificou-se também um certo estranhamento desses alunos com um tipo de trabalho que iniciasse com a investigação, por meio dos métodos intuitivos, para só, num momento posterior, proceder à formalização. Tal fato poderia ser um indicador de que um trabalho com essa abordagem ainda representa uma novidade no curso, contrastante com uma metodologia de exposição dos temas matemáticos de forma analítica e seqüencial.

Atualmente existe um certo consenso dentro da comunidade de educadores matemáticos de que a inserção de atividades com estímulo aos métodos intuitivos e visuais e uma posterior formalização dos conceitos poderia trazer contribuições significativas para o aprendizado e por conseqüência melhorar a forma como a matemática é ensinada em todos os níveis de ensino.

Entretanto, apesar desse consenso, parece haver ainda uma resistência na adoção de uma abordagem de ensino de matemática com uma ênfase mais investigativa. O maior tempo gasto tanto na preparação como na aplicação dessas atividades, e talvez a crença de que em matemática uma aula na qual os conceitos são abordados já com a linearidade e o rigor apresentados nos livros-textos seria pedagogicamente mais apropriada e eficaz, justificariam em parte o fato dos professores não adotarem essa abordagem.

Percebeu-se que os alunos participantes do estudo principal iniciaram os trabalhos usando predominantemente os processos mentais associados ao modo de pensamento visual-espacial resultante da percepção, mas aos poucos evoluíram passando a utilizar processos mais avançados relacionados à exteriorização do pensamento (PVE), à manipulação de imagens mentais (PVMM) e à construção mental de relações entre imagens (PVR).

Essa evolução na utilização dos diversos processos, evidenciada tanto nos registros escritos como na forma de expor as idéias para os demais colegas, sinaliza que a oportunidade de vivenciar de experiências, onde os processos visuais e a conversão entre os vários registros de representação sejam valorizados possibilita um entendimento mais abrangente dos conceitos relativos à variação de funções.

Esses resultados também podem oferecer subsídios para o trabalho dos formadores de professores dos cursos de licenciatura, de forma a permitir aos seus alunos, futuros educadores matemáticos, experimentar situações de aprendizagem como essa. Preparar os futuros professores nesta perspectiva pode ser um caminho para que os alunos não passem por vários anos da matemática escolar sem ter desenvolvido as capacidades ligadas ao pensamento-visual-espacial, úteis não só à matemática, mas também à vida prática e às outras ciências.

Os estudos também apontaram que um ambiente de aprendizagem aberto, onde a discussão é valorizada pode revelar situações não necessariamente perceptíveis numa aula expositiva tradicional. As observações proporcionadas pela aplicação desse tipo de atividade podem permitir ao professor conhecer mais de perto as estratégias de aprendizagem dos alunos e muitas vezes, se surpreender com a forma de raciocínio de alguns deles.

Os alunos, por sua vez, ao serem estimulados a fazer conjecturas e levantar dúvidas, podem se sentir à vontade para fazer suas colocações, e por vezes, contribuir de forma efetiva para o aprendizado de todo o grupo, criando um ambiente onde todos ensinam e todos aprendem. Dessa forma, é possível desenvolver um ambiente colaborativo de aprendizagem, onde não se destacam apenas o desempenho de alguns poucos, mas todos se sintam capazes de contribuir com o processo ensino-aprendizagem.

Na intenção de estudar e incentivar o uso do pensamento visual no estudo da variação de funções, pode ser relevante a utilização de *softwares* de construção gráfica. A tecnologia, apesar de ter sido usada de forma pontual (*Maple* no primeiro estudo exploratório e *Geogebra* no estudo principal) mostrou-se uma ferramenta adequada ao desenvolvimento do trabalho, proporcionando que o tempo fosse melhor aproveitado na observação, busca de padrões, regularidades e relações entre imagens.

Na condução do trabalho verificou-se que não só a multiplicidade de representações matemáticas, mas também a diversificação de instrumentos possibilita o desenvolvimento do pensamento visual-espacial. Se em alguns momentos as ferramentas tecnológicas se mostraram mais adequadas, em outros o trabalho conduzido com instrumentos tradicionais como lápis, papel e régua foram mais convenientes para estimular o uso dos diversos processos mentais associados aos modos de pensamento visual-espacial.

Adotou-se, na redação do texto a terceira pessoa do singular. Como serão feitas a partir de agora considerações pessoais da professora-pesquisadora em relação a sua trajetória de desenvolvimento ao longo do desenrolar da pesquisa, optou-se, a partir deste momento, por usar a primeira pessoa do singular.

Um olhar retrospectivo sobre todo o desenvolvimento deste trabalho, permitiu-me vivenciar uma prática docente continuamente alimentada pelos estudos teóricos e vice-versa. Por ter ocorrido *ação*, *observação* e *descrição* considero ter experimentado nessa trajetória o processo de "*refletir sobre a reflexão na ação*" (Schön, 1997).

O caminho trilhado foi de fundamental importância para minha prática como professora de cálculo da licenciatura. Apesar de em diversos momentos, anteriores ao início deste trabalho, ter realizado algumas iniciativas, no sentido de trazer para a sala de aula não só os conceitos do cálculo, mas discussões sobre os processos inerentes à aprendizagem da disciplina, estes foram desenvolvidos a partir da prática. A ausência de uma fundamentação teórica, por vezes, dificultou uma argumentação mais consistente frente à posição divergente de alguns colegas de curso, responsáveis pelas disciplinas de conteúdo matemático específico como álgebra, geometria analítica e análise.

O processo de amadurecimento vivenciado possibilitou um rico aprendizado sobre o ensino de cálculo na licenciatura. Por esse motivo e também por acreditar que a experiência possa ser útil a outros professores, o Apêndice C traz uma sistematização das atividades aplicadas no estudo principal na forma de uma proposta de abordagem para o estudo da variação de funções. Para facilitar consultas e leituras foi organizado de forma a assumir um caráter independente em relação à dissertação.

Nesta proposta apresentam-se várias das atividades desenvolvidas, mostrando-se de que forma o pensamento pode ser estimulado em cada uma delas. A seqüência de atividades constantes do Apêndice C não pretende esgotar as possibilidades de uma abordagem visual no ensino de cálculo, mas apresentar algumas pistas para fundamentar o trabalho de um professor atuante num curso de licenciatura que queira enfatizar o pensamento visual e a interlocução entre os vários registros de representação no ensino-aprendizagem da variação de funções reais de uma variável real. A partir das orientações presentes em cada uma das atividades espera-se que outras possam ser criadas.

Promover o estudo de cálculo na perspectiva apresentada pode contribuir para que o cálculo assuma num curso de licenciatura um papel abrangente e integrador. Os professores, muitas vezes, engessados pelas "grades" curriculares, apressam-se em introduzir o instrumental simbólico, não dedicando o tempo necessário às reflexões que podem suscitar das conexões entre as várias representações matemáticas e que certamente poderiam contribuir para um entendimento "relacional" dos conceitos de cálculo.

No decorrer do trabalho algumas questões de destacaram, delineando-se como novas possibilidades de investigação.

- A forma como o cálculo vem sendo ensinado na licenciatura em matemática possibilita que o aluno se aproprie dos métodos de raciocínio de uma disciplina que estruturou o pensamento científico do mundo moderno? Essa apropriação contribui para ampliar sua visão sobre a própria matemática?
- As disciplinas dos cursos de licenciatura em matemática que abordam os conteúdos matemáticos específicos, proporcionam aos seus alunos, futuros educadores matemáticos, a vivência de estratégias de aprendizagem diferenciadas, para que num momento posterior também possam proporcionar isso a seus alunos?

Os questionamentos citados estarão, sem dúvida, orientando a minha ação docente e motivando a continuidade de novos estudos teóricos e pesquisas empíricas, num processo continuado de reflexão sobre a prática de uma formadora de outros professores.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, Abraham, **The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics**. Educational Studies in Mathematics, n. 52, p. 215-241, 2003.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. O Cálculo no Curso de Licenciatura em Matemática. **Educação Matemática em Revista**: Licenciatura em Matemática um curso em discussão, São Paulo, Ano 9, Edição especial, p.69-72, mar. 2002.

BERRY, John S., NYMAN, Melvin A., **Promoting students' graphical understanding of the calculus**. Journal of Mathematical Behavior , n. 22, p. 481-497, 2003.

BISHOP, Alan J., Review of Research on Visualization in Mathematics Education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Cambridge, Winter Edition, V.11, n.1 p.7-16, 1989.

BORBA, Marcelo C., VILLARREAL, Mónica E., Visualization, mathematics education and computer environments, In: **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Techonologies, Modeling, Visualization and Experimentation**, BORBA, Marcelo C., VILLARREAL, Mónica E. (Orgs), Mathematics Education Library, v. 39, Melbourne: Springer, p.79-97, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas** tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002. 144p.

COSTA, Maria da Conceição Monteiro da. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In: **Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. João Pedro da Ponte(Org.) Escola Superior de Educação de Coimbra, p.257-274, 2002.

COSTA, Maria da Conceição Monteiro da. **Modelo do pensamento visual-espacial: tranformações geométricas no início da escolaridade.** 2005. 314 f. Tese (Doutorado) - Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2005.

CRUZ, Inés Del Carmen Plasencia. **Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos**. 318 f. Tese (Doutorado) - Universidad De La Laguna, La Laguna, 2000. Cap. 1.

CURY, Helena N. Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores.In:**Seminário Internacional de Pesquisa em Educação**, III, Águas de Lindóia, SP, 2006**.** SBEM, Anais do III SIPEM, 2006. (CD-ROM, arquivo: ISBN: 85-89799-09-3,G07, p.1-17).

DEWEY,I. e DYKSTRA,J. Ensinando introdução á física para estudantes universitários. In: **Construtivismo: teoria, perspectiva e prática,** Fosnot,T,C.(Org.)**.** Porto Alegre: ArtMed.1998.p.203- 226. 1998.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. **Advanced Mathematical Thinking**. TALL, F(ed.), Kluwer Academic, 1991.

DUVAL, Raymond, Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**, MACHADO, Silvia D. A. (org.), 2003.

EISENBERG, Theodore. Functions and associated learning difficulties. In: **Advanced Mathematical Thinking**. TALL, F(ed.), Kluwer Academic, 1991.

FERREIRA, Ana Cristina, Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: **Formação de Professores de Matemática**, FIORENTINI, Dario (org.), Campinas, Mercado de Letras, 2003.

FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R.. **Cálculo George B. Thomas.** 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.

FIORENTINI, Dario, Apresentação – Em busca de novos caminhos e de outros olhares na formação de professores de matemática. In: **Formação de Professores de Matemática**, FIORENTINI, Dario (org.), Campinas, Mercado de Letras, 2003.

FLEMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**. São Paulo: Makron Books, 1992.

FROTA, Maria Clara Rezende. **Estratégias gráficas na aprendizagem de Cálculo**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, p.7-19, 2004.

FROTA, Maria Clara Rezende. **O Pensar Matemático no Ensino Superior: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos.** 2002. 287 f. Tese (Mestrado) - UfMG, Belo Horizonte, 2002.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. As Demonstrações em Educação Matemática, **Boletim de Educação Matemática**, São Paulo, Ano 15, n.18, p.91-122, 2002.

GIUSTA, Agnela da S. **Concepções do processo ensino-aprendizagem.** In: Giusta, Agnela da S & Franco, Iara M. Educação a Distância: Uma articulação entre a teoria e a prática. Belo Horizonte: Editora PUCMinas, 2003.

GUTIÉRREZ, Rosa Maria Afonso. **Problemas de convergencia en un contexto de software educativo.** 2002. 357 f. Tese(doutorado) - Universidad de La Laguna, La Laguna, 2002. Cap. 1.

GÚZMAN, Miguel de. **El Rincón de la Pizarra: El Papel de La Visualizacion**. 25 f., Pirámide, Madrid, 1996. Cap. 0.

KOOGAN, Abrahão; HOUAISS, Antônio. **Enciclopédia e Dicionário ilustrado.** Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1995. 1 v.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (Eua). **Principles e Standards for Schools Mathematics.** Disponível em: <http://standards.nctm.org/document/index.htm>. Acesso em: 22 ago. 2007.

NASSER, Lilian. Aprimorando o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos.In:**Seminário Internacional de Pesquisa em Educação**, III, Águas de Lindóia, SP, 2006. SBEM, Anais do III SIPEM, 2006. (CD-ROM, arquivo: ISBN: 85-89799-09-3,G07, p.1-17).

PINTO, Márcia Maria Fusaro, Discutindo a transição dos cálculos para a análise real. In: **Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar dos professores de cálculo**, LACHINI, Jonas, LAUDARES, João Bosco (Orgs.), Belo Horizonte, Mercado de Letras, 2003.

PONTE, João P.; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PRESMEG, Norma, Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics, In: **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future**, BOERO, Paolo; GUTIÉRREZ; Angel (Eds.), The Netherlands, Sense Publishers, 2006

REZENDE, Wanderley. O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** II, Santos, 2003, Anais do II SIPEM, 2003 (CD-Rom, GT04).

SANTOS, Angela Rocha Dos; BIANCHINI, Waldecir. **Aprendendo Cálculo com o Maple: Cálculo de uma variável.** Rio de Janeiro: Ltc, 2002. 428 p.

SCHIFER, Deborah, **Uma abordagem construtivista do Ensino e da aprendizagem da Matemática**, Construtivismo: teoria, perspectivas e prática/ Catherine Twomey; trad. Sandra Costa. - Porto Alegre: ArtMed, 1998

SCHÖN, Donald A., Formar professores como profissionais reflexivos, In: **O professores e sua formação**, NÓVOA, Antônio (Org.), Lisboa: Publicações Dom Quixote Ltda, 1997

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, v.1, 1987.

STAJN, Paola. O que precisa saber um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. **Educação Matemática em Revista**: Licenciatura em Matemática um curso em discussão, São Paulo, Ano 9, Edição especial, p.17-28, mar. 2002.

STEWART, James. **Cálculo 1.** 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

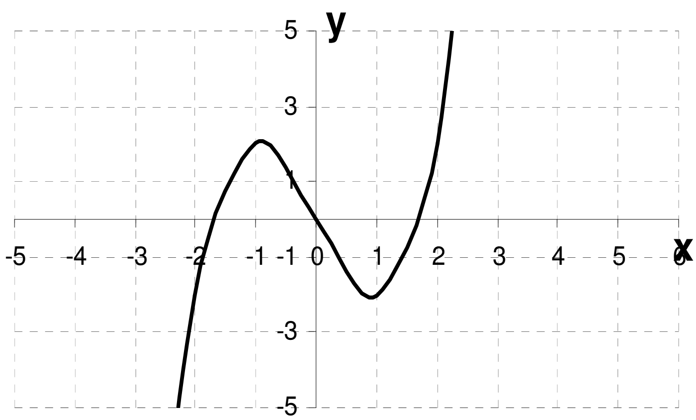
TALL, David, **Intuiton and rigour: the role of visualization in the calculus**, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, U.K., 1991.

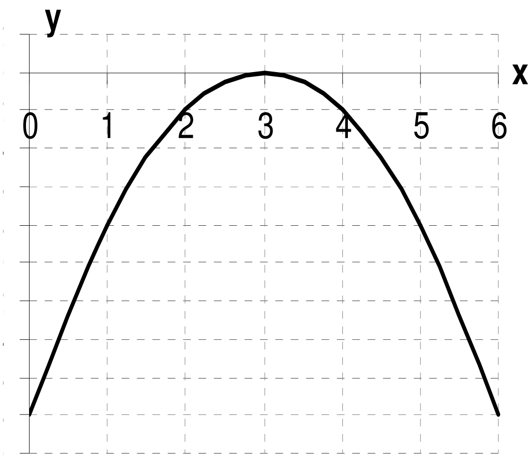
APÊNDICE A

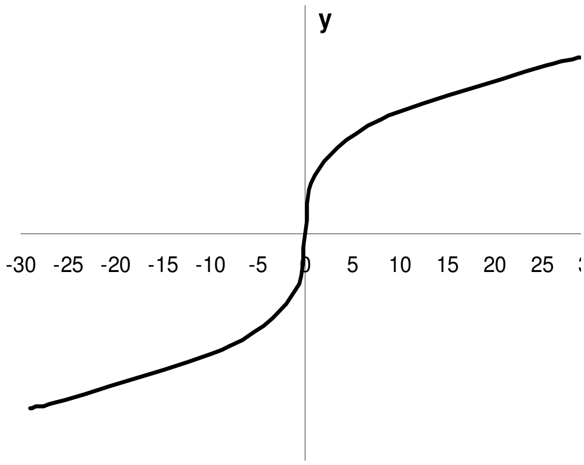
ESTUDOS EXPLORATÓRIOS – Seqüência 1

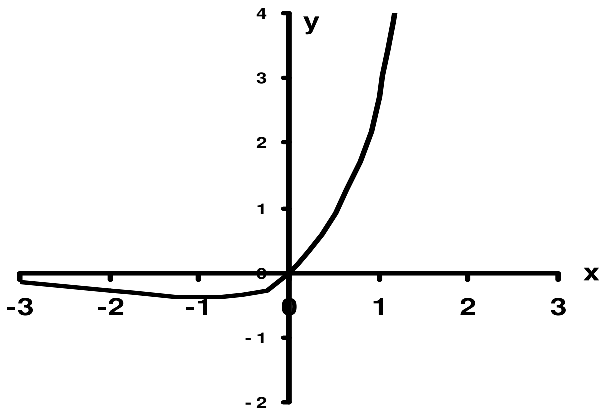
ATIVIDADE 1

O esboço gráfico de algumas funções é apresentado abaixo. Considerando que todas elas estão definidas no intervalo]-∞,∞[e as variações mais importantes estão mostradas no esboço dado, indique os intervalos de crescimento e decrescimento.









ATIVIDADE 2

Seja $f(x)$ definida no intervalo $[x_1, x_2]$

a) O que significa dizer que $f(x)$ é crescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?
b) O que significa dizer que $f(x)$ é decrescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?

ATIVIDADE 3

Exercício 1

a) Dada a função $y = x^2 - 4x$, obtenha as equações das retas tangentes aos pontos de abscissas x=1, x=2, x=0, x=3.
b) Construa no *Maple* o gráfico da função $y = x^2 - 4x$ e de suas retas tangentes
c) O que você observa quanto ao crescimento/ decrescimento da função? Registre suas idéias.
d) Você observa alguma relação entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento/ decrescimento e as tangentes à curva? Registre suas idéias.

Exercício 2

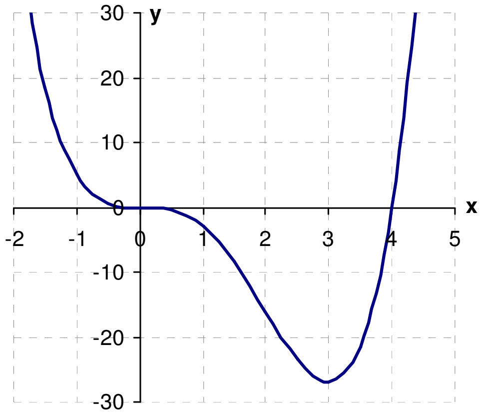
a) Dada a função $y = x^3 - 3x$, obtenha as equações das retas tangentes aos pontos de abscissas $x = -\frac{3}{2}$, x=-1, x=0, x=1, $x = \frac{3}{2}$.
b) Construa no *Maple* o gráfico da função $y = x^3 - 3x$ e de suas retas tangentes
c) O que você observa quanto ao crescimento/ decrescimento da função? Registre suas idéias.
d) Você observa alguma relação entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento/ decrescimento e as tangentes à curva? Registre suas idéias.

ESTUDOS EXPLORATÓRIOS – Seqüência 2

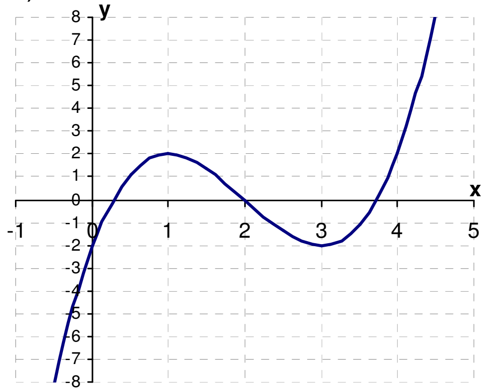
ATIVIDADE 1

Para cada uma das funções representadas graficamente abaixo indique os intervalos de crescimento e decrescimento.

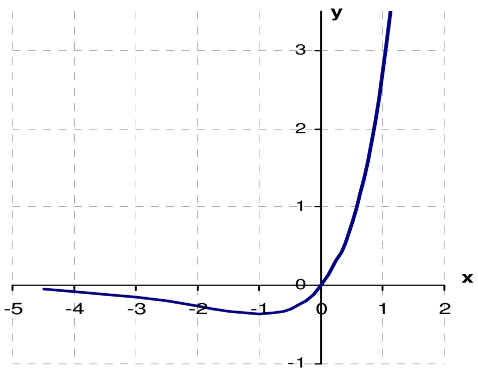
a)



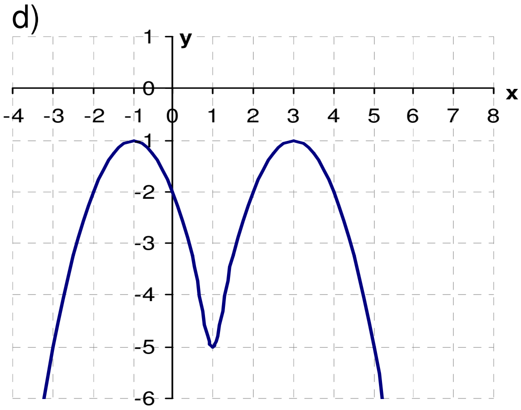
b)



c)



d)



b) Seja $f(x)$ definida no intervalo $[x_1, x_2]$

O que significa dizer que $f(x)$ é crescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?

c) O que significa dizer que $f(x)$ é decrescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?

ATIVIDADE 2

a) Observe o gráfico do exercício *1 b.*

O que acontece com os valores da função à medida que *x* cresce infinitamente?

O que acontece com os valores da função à medida que x decresce infinitamente?

b) Observe o gráfico do exercício *1 c*.

O que acontece com os valores da função à medida que x cresce infinitamente?

O que acontece com os valores da função à medida que x decresce infinitamente?

ATIVIDADE 3

a) Observe o gráfico do exercício *1 e*.

O que acontece com os valores da função à medida que x se aproxima de 1 por valores menores que 1?

b) O que acontece com os valores da função à medida que x se aproxima de 1 por valores maiores que 1?

c) O que acontece com os valores da função à medida que x decresce infinitamente?

ATIVIDADE 4

Esboce o gráfico de uma função definida no intervalo $]-\infty,\infty[$ com as seguintes características:

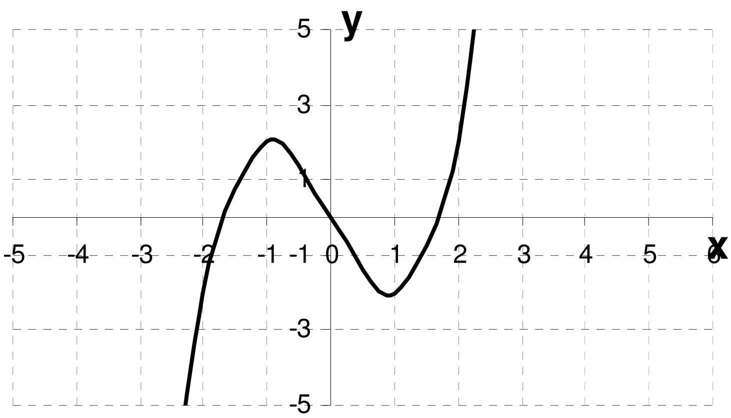
- crescente no intervalo $]-\infty,1[$
- decrescente no intervalo $]1,\infty[$
- $f(1)= 5$
- à medida que x se aproxima de 1 por valores menores que 1, os valores da função se aproximam de 4
- à medida que x se aproxima de 1 por valores maiores que 1, os valores da função se aproximam de 3
- à medida que x cresce infinitamente, os valores da função se aproximam de zero.
- à medida que x decresce infinitamente, os valores da função decrescem infinitamente.

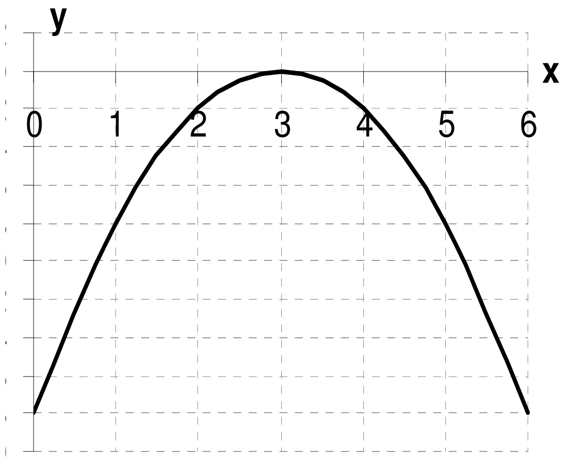
APÊNDICE B

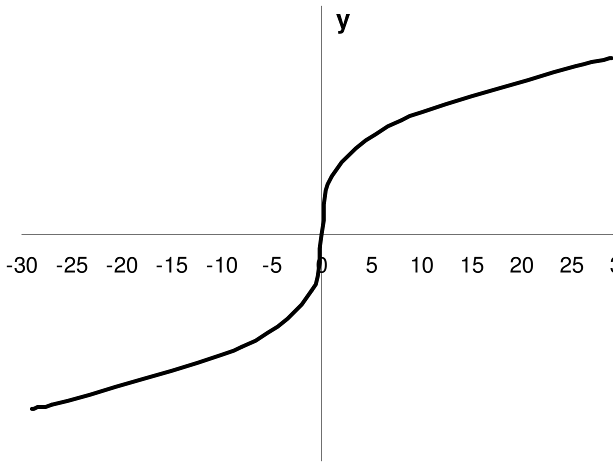
ESTUDO PRINCIPAL - Seqüência 1

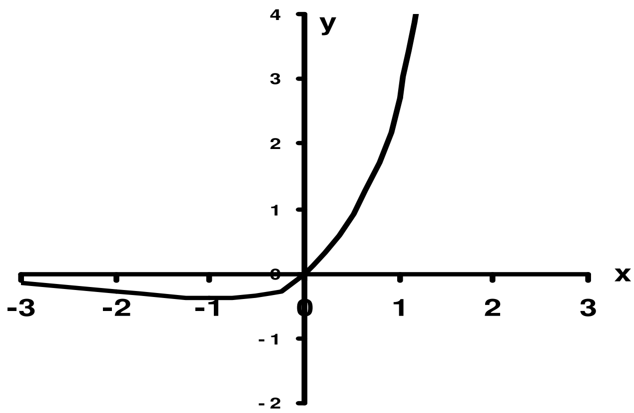
ATIVIDADE 1

O esboço gráfico de algumas funções é apresentado abaixo. Considerando que todas elas estão definidas no intervalo]-∞,∞[e as variações mais importantes estão mostradas no esboço dado, indique os intervalos de crescimento e decrescimento.









ATIVIDADE 2

Seja $f(x)$ definida no intervalo $[x_1, x_2]$

a) O que significa dizer que $f(x)$ é crescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?
b) O que significa dizer que $f(x)$ é decrescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?

ATIVIDADE 3

a) Dada a função $y = x^2 - 4x$, obtenha as equações das retas tangentes aos pontos de abscissas x=1, x=2, x=0, x=3.
b) Construa no *Maple* o gráfico da função $y = x^2 - 4x$ e de suas retas tangentes.
c) O que você observa quanto ao crescimento/ decrescimento da função? Registre suas idéias.
d) Você observa alguma relação entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento/ decrescimento e as tangentes à curva? Registre suas idéias.

ATIVIDADE 4

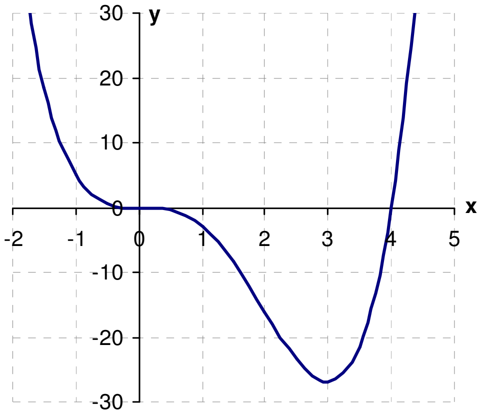
a) Dada a função $y = x^3 - 3x$, obtenha as equações das retas tangentes aos pontos de abscissas $x = -\frac{3}{2}$, x=-1, x=0, x=1, $x = \frac{3}{2}$.
b) Construa no *Maple* o gráfico da função $y = x^3 - 3x$ e de suas retas tangentes.
c) O que você observa quanto ao crescimento/ decrescimento da função? Registre suas idéias.
d) Você observa alguma relação entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento/ decrescimento e as tangentes à curva? Registre suas idéias.

ESTUDO PRINCIPAL - Seqüência 2

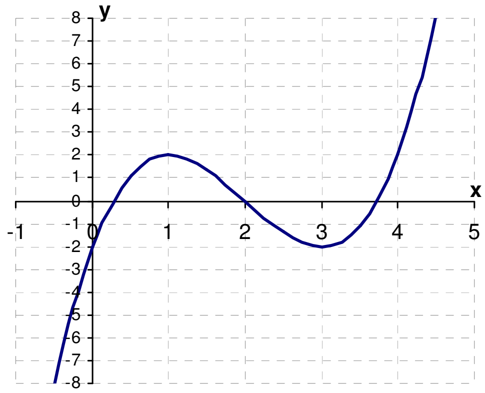
ATIVIDADE 1

O esboço gráfico de algumas funções é apresentado abaixo. Considerando que todas elas estão definidas no intervalo]-∞,∞[e as variações mais importantes estão mostradas no esboço dado, indique os intervalos de crescimento e decrescimento.

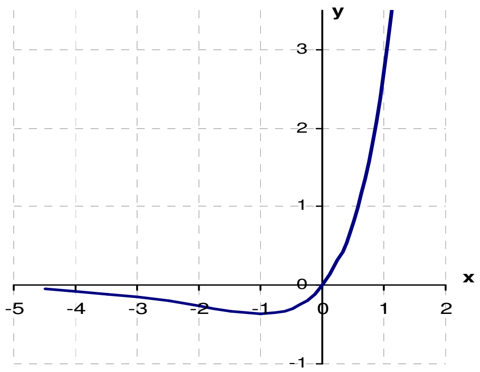
a)



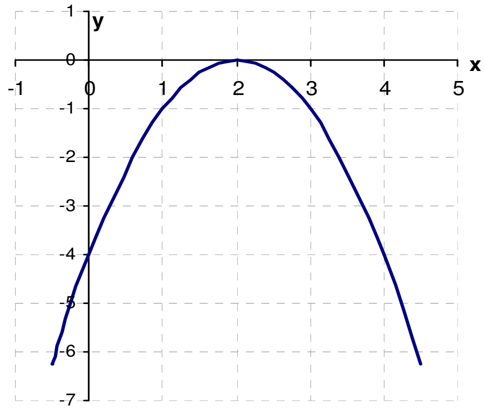
b)



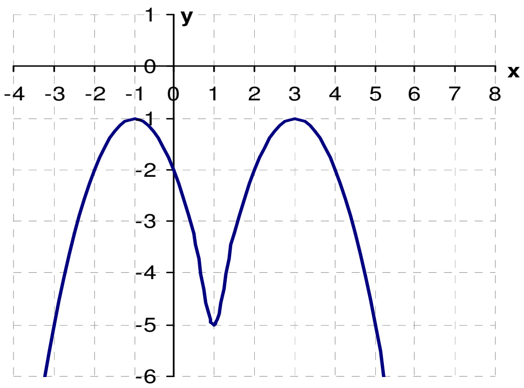
c)



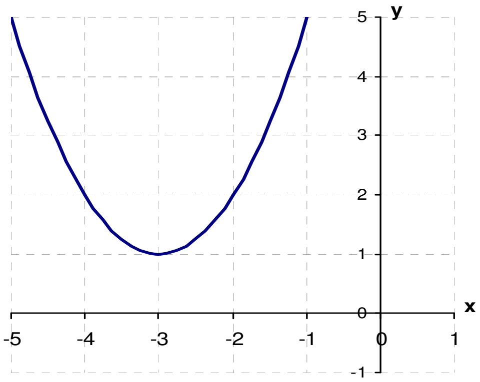
d)



e)



f)



ATIVIDADE 2

Seja $f(x)$ definida no intervalo $[x_1, x_2]$

a) O que significa dizer que $f(x)$ é crescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?

b) O que significa dizer que $f(x)$ é decrescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?

ATIVIDADE 3

a)Observe o gráfico do exercício *1 b*.
O que acontece com os valores da função à medida que *x* cresce infinitamente?

O que acontece com os valores da função à medida que *x* decresce infinitamente?

b) Observe o gráfico do exercício *1 c*.
O que acontece com os valores da função à medida que *x* cresce infinitamente?

O que acontece com os valores da função à medida que *x* decresce infinitamente?

c) Observe o gráfico do exercício *1 e*.
O que acontece com os valores da função à medida que *x* se aproxima de 1 por valores menores que 1?

O que acontece com os valores da função à medida que *x* se aproxima de 1 por valores maiores que 1?

O que acontece com os valores da função à medida que *x* decresce infinitamente?

ATIVIDADE 4

a) Esboce o gráfico de uma função definida no intervalo]-3,5[com as seguintes características:

- crescente no intervalo]-3,1[
- decrescente no intervalo]1,5[
- não existe f(3)

b) Esboce o gráfico de uma função definida em]-∞,∞[com as seguintes características:

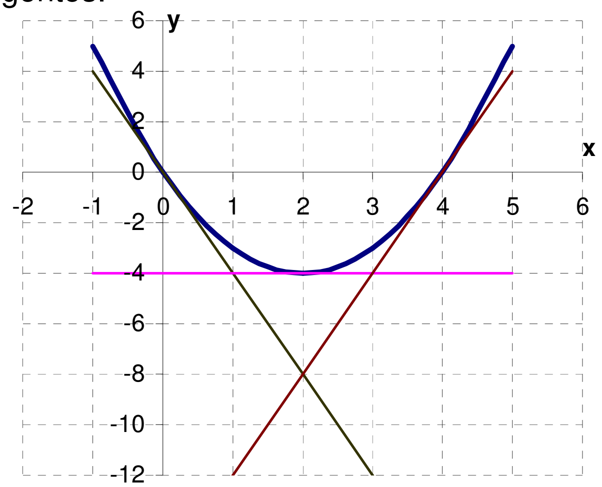
- decrescente no intervalo]-∞,-2[
- crescente no intervalo]-2,5[
- decrescente intervalo]5,∞[

c) Esboce o gráfico de uma função definida no intervalo]-∞,∞[com as seguintes características:

- crescente no intervalo]- ∞,1[
- decrescente no intervalo]1, ∞[
- f(1)= 5
- à medida que x se aproxima de 1 por valores menores que 1, os valores da função se aproximam de 4
- à medida que x se aproxima de 1 por valores maiores que 1, os valores da função se aproximam de 3
- à medida que x cresce infinitamente, os valores da função se aproximam de zero.
- à medida que x decresce infinitamente, os valores da função decrescem infinitamente.

ATIVIDADE 5

A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = x^2 - 4x$ com algumas de suas retas tangentes.

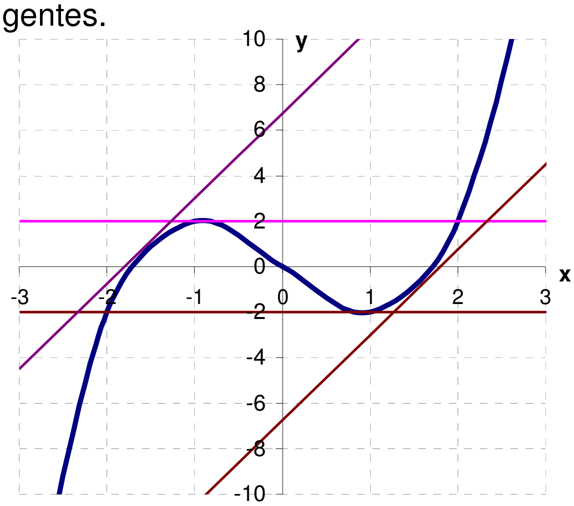


a) O que você observa quanto ao crescimento/ decrescimento da função? Registre suas idéias.

b) Você observa alguma relação entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento/ decrescimento e as tangentes à curva? Registre suas idéias.

ATIVIDADE 6

A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = x^3 - 3x$ com algumas de suas retas tangentes.



a) O que você observa quanto ao crescimento/ decrescimento da função? Registre suas idéias.

b) Você observa alguma relação entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento/ decrescimento e as tangentes à curva? Registre suas idéias.

ATIVIDADE 7

a) Observe o gráfico da função $y = x^2 - 4x$. Quais são a(s) abscissa(s) dos pontos em que a função muda o crescimento/decrescimento?

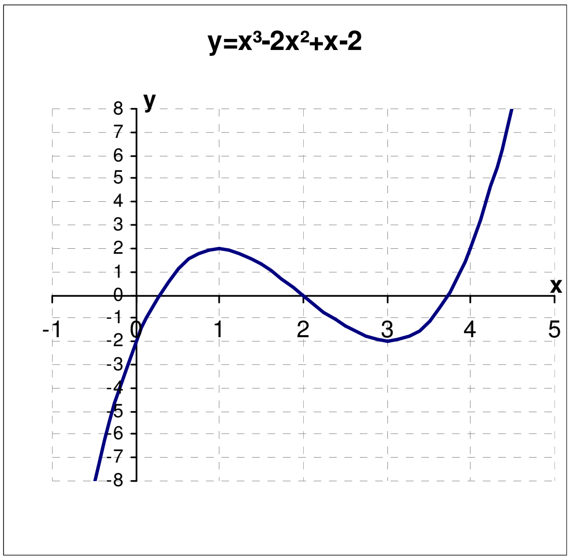
b) Observe o gráfico da função $y = x^3 - 3x$. Quais são a(s) abscissa(s) dos pontos em que a função muda o crescimento/decrescimento?

c) O que você observa com relação às retas tangentes a esses pontos?

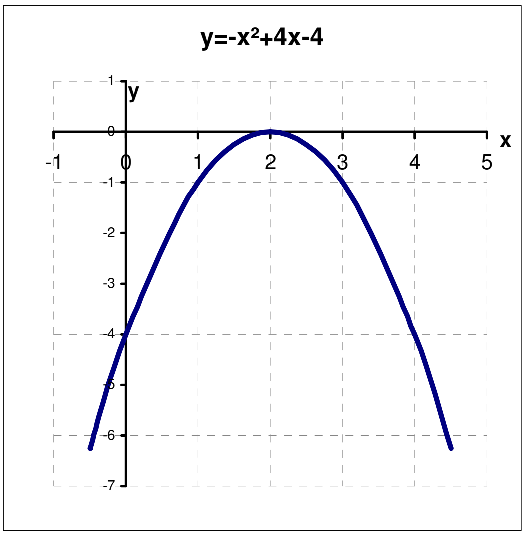
d) É possível estabelecer algum tipo de procedimento algébrico para a determinação desses pontos? Se sim, teste esse procedimento para cada uma das funções.

e) Continue testando o procedimento para cada uma das funções a seguir, sempre tomando o cuidado de observar no gráfico os pontos encontrados.

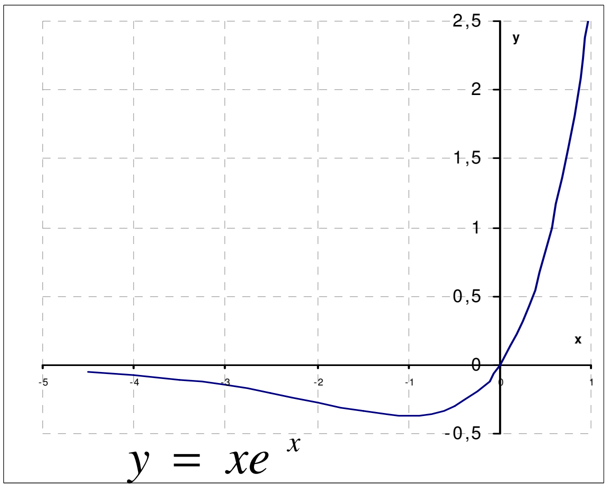
I)



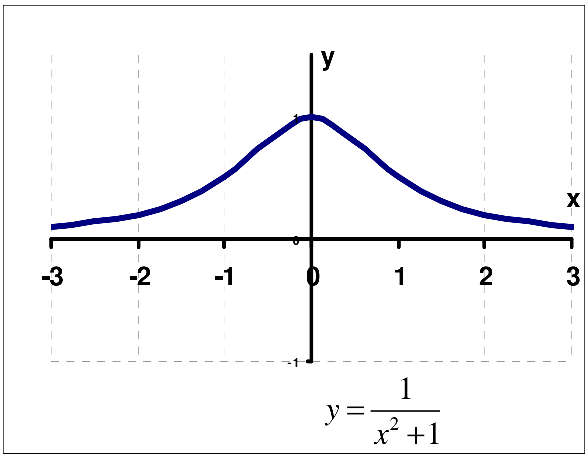
II)



III)

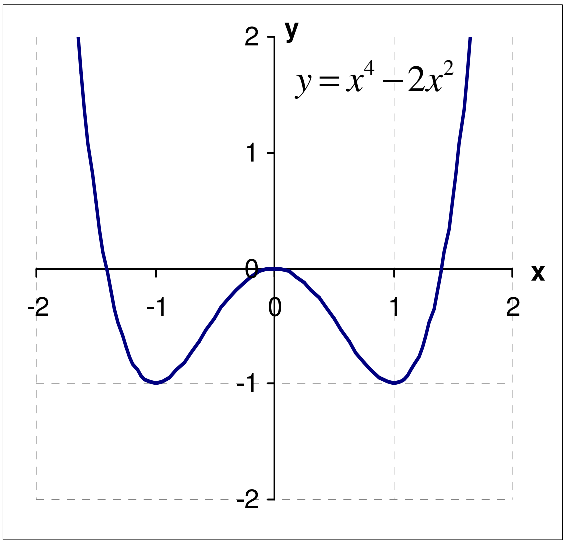


IV)

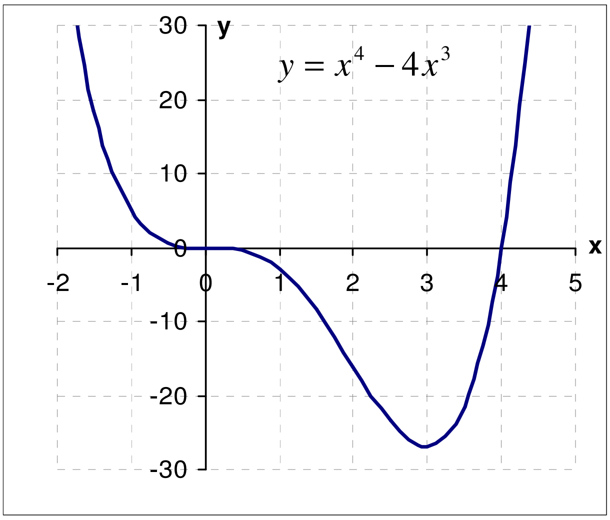


f) Para cada um das funções representadas graficamente abaixo, dê o(s) valor(es) para os quais, na sua opinião, $f'(x) = 0$

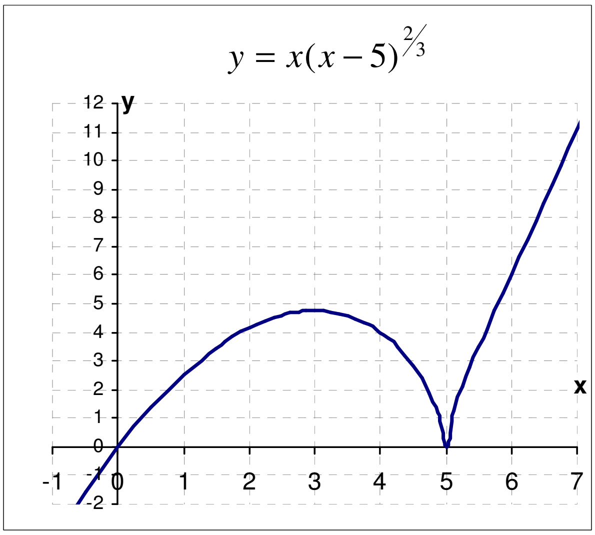
I)



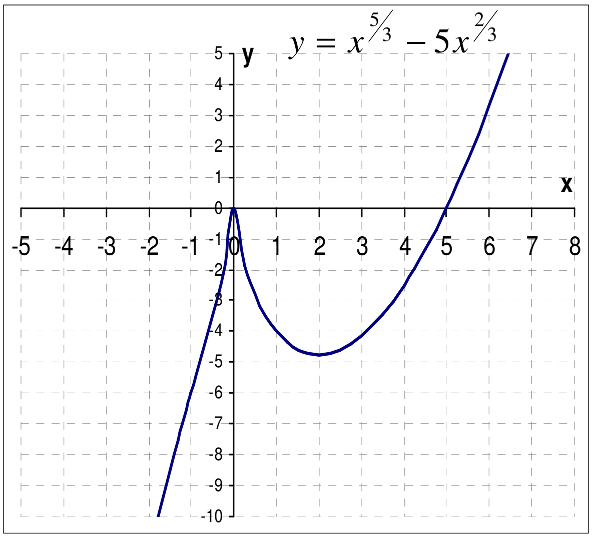
II)



III)



IV)



g) Através do procedimento algébrico estabelecido no *exercício 1d*, determine o(s) valor(es) de *x* para os quais $f'(x) = 0$?

h) Compare os resultados obtidos com os valores apontados por você na questão *f* para $f'(x) = 0$? Os resultados coincidem? Se aparecerem valores que não coincidem, tente encontrar justificativas para o fato deles aparecerem.

ATIVIDADE 8

a) Observe os gráficos I e II da questão *1e* e dê os intervalos de crescimento e decrescimento de cada uma das funções.

b) Construa os gráficos das funções derivadas obtidas a partir das funções I e II da questão *1e*.

c) Para cada uma das funções derivadas representadas graficamente dê os intervalo(s) em que $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$.

d) Existe alguma relação entre os resultados obtidos em *b* e *c?*

e) É possível estabelecer algum tipo de procedimento algébrico para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função? Se sim, teste esse procedimento para essas funções.

ATIVIDADE 9

Elabore um resumo escrevendo as principais conclusões obtidas a partir das atividades anteriores:

Sobre os intervalos(ou valores) em que derivada $f'(x)$	Sobre a função $f(x)$
$f'(x) > 0$	
$f'(x) < 0$	
$f'(x) = 0$	
Não existe $f'(x)$	

ATIVIDADE 10

Esboce o gráfico de uma função *f(x)* com as propriedades $f'(x) < 0$ para $x < 3$ e $f'(x) > 0$ para $x > 3$:

a) se $f'(x)$ é contínua em $x = 3$ e $f(3) = -5$

b) Se $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -4$ e $\lim_{x \to 3+} f(x) = -1$ e $f(3) = 2$

ATIVIDADE 11

Em cada caso, esboce o gráfico de uma função *f(x)* que atenda todas as condições citadas:

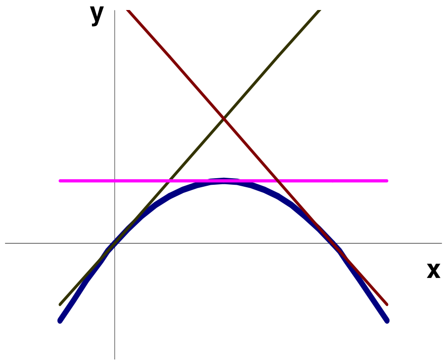
a) $f(-3) = 2$, $f'(x) > 0$ para $x < -3$, $f'(x) < 0$ para $x > -3$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

b) $f(-1) = -2$ e $f(1) = 3$, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0$ para $x < -1$ e $x > 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

c) $f(0) = 1$ e $f(-3) = 4$, $\nexists f'(-3)$, $f'(x) < 0$ para $-3 < x < 0$, $f'(x) > 0$ para $x < -3$ e $x > 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

ATIVIDADE 12

A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = -x^2 + 4x$ com algumas de suas retas tangentes.



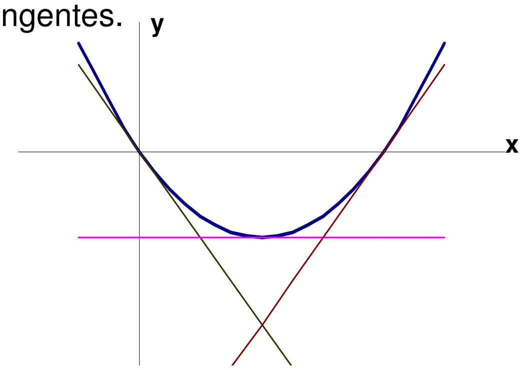
a) O que você observa quanto à concavidade do gráfico da função?

b) Observe a posição relativa dessas retas tangentes quanto ao gráfico da função. Registre suas observações.

c) O que você observa quanto à variação dos coeficientes angulares das retas tangentes?

ATIVIDADE 13

A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = x^2 - 4x$ com algumas de suas retas tangentes.



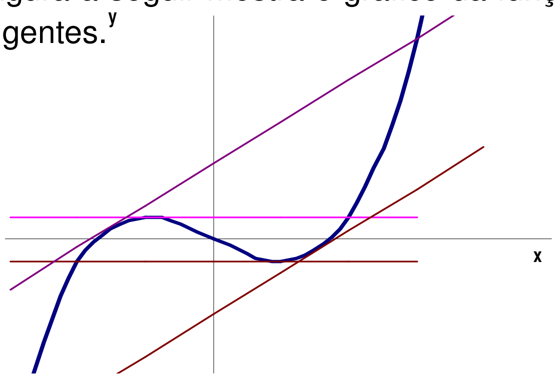
a) O que você observa quanto à concavidade do gráfico da função?

b) Observe a posição relativa dessas retas tangentes quanto ao gráfico da função. Registre suas observações.

c) O que você observa quanto à variação dos coeficientes angulares das retas tangentes?

ATIVIDADE 14

A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = x^3 - 3x$ com algumas de suas retas tangentes.



a) O que você observa quanto à concavidade do gráfico da função?

b) Verifique se as relações registradas nos exercícios 1 e 2 se confirmam para a função $y = x^3 - 3x$. Registre suas observações.

c) Você observa alguma relação entre a concavidade do gráfico de uma função e suas retas tangentes?

ATIVIDADE 15

Elabore um resumo escrevendo as principais conclusões obtidas a partir das atividades anteriores:

Sobre os intervalos (ou valores) em que gráfico de $f(x)$ é:	Coeficientes angulares ($f'(x)$)	Outras observações
Côncavo para cima		
Côncavo para baixo		

ATIVIDADE 16

Os dados abaixo se referem às propriedades de uma função contínua em R.

- f(2)=4 , f(1)=2, f(3)=2
- f ´(x) >0 para x<2, f ´(x)<0 para x>2
- f ´´ (x)>0 para x<1 e x>3, f ´´ (x)<0 para 1<1x<3
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

a) A partir dos dados, complete a tabela abaixo.

Raízes da função	Ponto(s) crítico(s)	Ponto(s) de inflexão	Intervalos de crescimento	Intervalos de decrescimento	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para cima	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para baixo

b) Esboce o gráfico de uma função que atenda todas as condições citadas:

ATIVIDADE 17

Os dados abaixo se referem às propriedades de uma função contínua em R.

- f(0)=0, f(-$\sqrt{3}$)=0, f($\sqrt{3}$)=0, f(-1)=-2, f(1)=2
- f ´(x) <0 para x< -1e x>1, f ´(x)>0 para -1<x<1
- f ´´ (x)>0 para x<0, f ´´ (x)<0 para x> 0
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

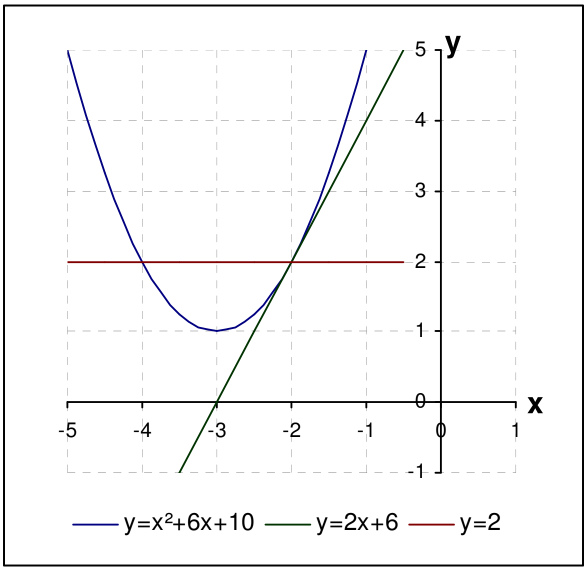
a) A partir dos dados, complete a tabela abaixo:

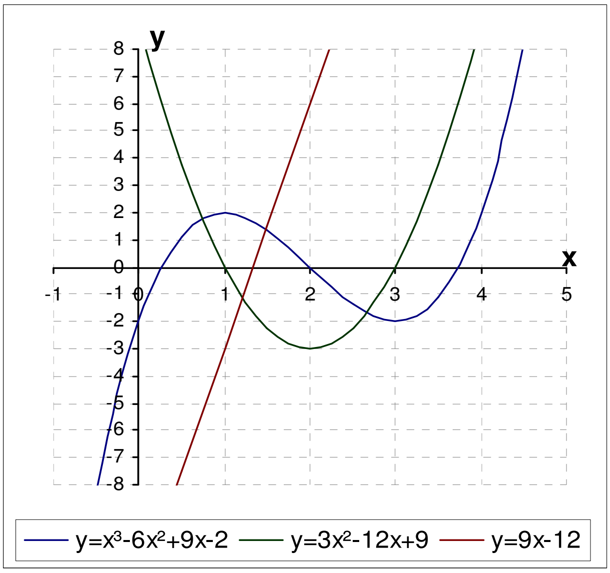
Raízes da função	Ponto(s) crítico(s)	Ponto(s) de inflexão	Intervalos de crescimento	Intervalos de decrescimento	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para cima	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para baixo

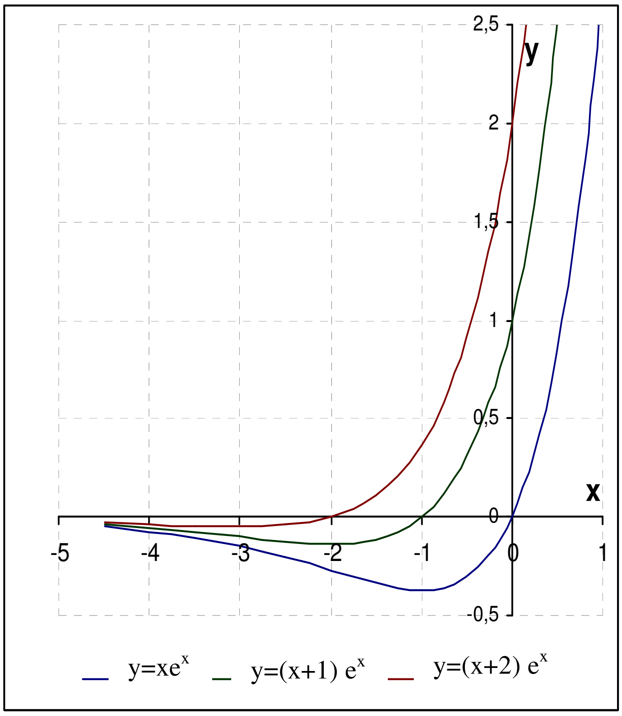
c) Esboce o gráfico de uma função que atenda todas as condições citadas:

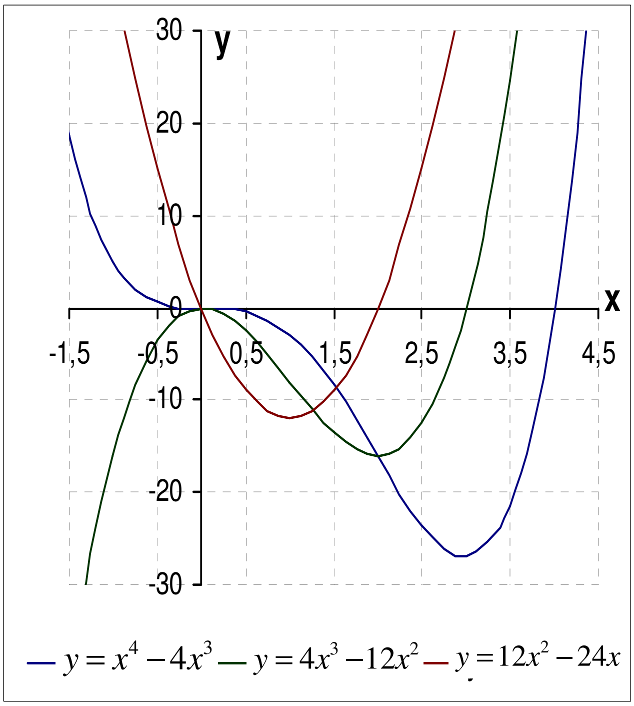
ATIVIDADE 18

Cada uma das figuras abaixo apresenta representações gráficas de três funções:









a) Quais são as relações entre as funções representadas graficamente em cada sistema cartesiano?
b) Para o sistema cartesiano I estude o sinal das funções representadas em verde e vermelho. O que dizer a respeito das funções representadas em azul a partir desse estudo.

c) Proceda da mesma forma com as outras representações.

ESTUDO PRINCIPAL - Seqüência 3

ATIVIDADE 1

a) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função y=senx
b) Construa em seguida os gráficos das funções y=senx+2, y=senx-3
c) Você observa alguma relação entre o gráfico da função y=senx e os gráficos construídos na questão 1b?
d) A partir dos gráficos, complete a tabela seguinte com os valores das funções:

x	$y = \text{sen}\, x$	$y = \text{sen}\, x + 2$	$y = \text{sen}\, x - 2$
0			
$\pi/2$			
π			
$3\pi/2$			
2π			

e) A partir do gráfico de uma função real $f(x)$ é possível prever o gráfico de uma função $f(x) \pm C$?

ATIVIDADE 2

a) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função $y = x^2$

b) Construa em seguida os gráficos das funções $y = (x-2)^2$ e $y = (x+3)^2$

c) Você observa alguma relação entre o gráfico da função $y = x^2$ e os gráficos construídos na questão 1b?
d) A partir dos gráficos, complete a tabela seguinte com os valores das funções:

x	$y = x^2$	$y = (x-2)^2$	$y = (x+3)^2$
-2			
-1			
0			
1			
2			

e) A partir do gráfico de uma função real $f(x)$ é possível prever o gráfico de uma função $f(x \pm C)$?

ATIVIDADE 3

a) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função $y = e^x$ e, em seguida, o gráfico da função $y = -e^x$.

b) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função $y = (x+1)^3$ e, em seguida, o gráfico da função $y = -(x+1)^3$.

c) A partir do gráfico de uma função real $f(x)$, é possível prever o gráfico de uma função $-f(x)$?

ATIVIDADE 4

a) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função $y = x^3$

b) A partir do gráfico, complete a tabela seguinte. Em seguida preencha os valores seguintes da segunda coluna.

x	$y = x^3$	$y = (x-2)^2$	$y = (x-2)^3 + 8$
-2			
-1			
0			
1			
2			

c) Construa o gráfico da função $y = (x-2)^3 + 8$ num sistema de coordenadas cartesianas.

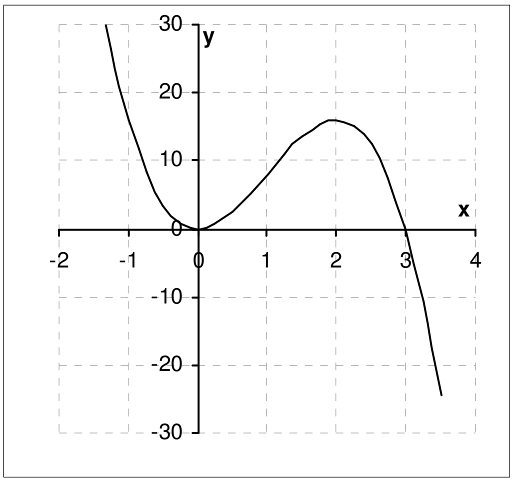
d) Construa novamente o gráfico no *sofware GeoGebra* e compare os resultados.

ESTUDO PRINCIPAL - Seqüência 4

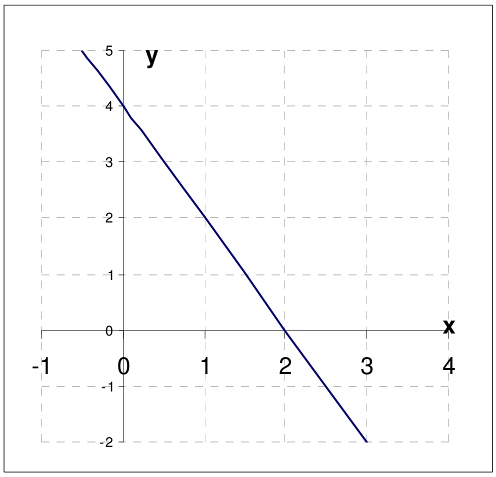
ATIVIDADE 1

A seguir são apresentados gráficos de funções derivadas *f '(x)*:

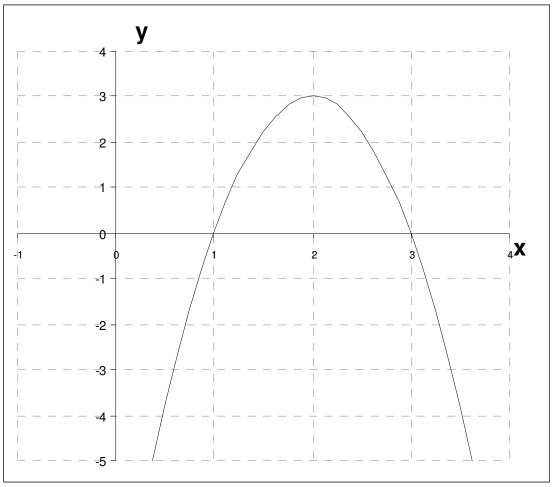
I)



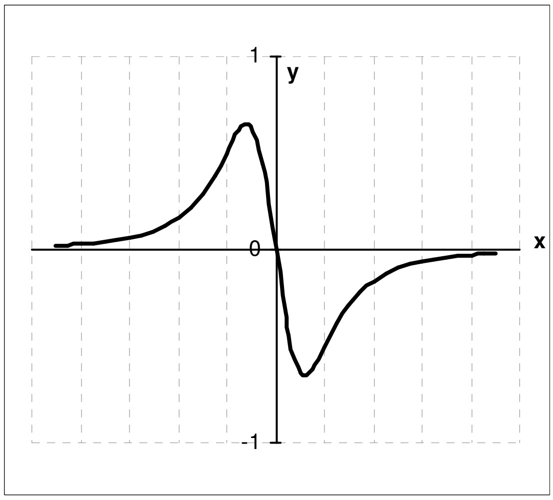
II)



III)



IV)



a) O que essas funções podem nos dizer a respeito da função primitiva *f(x)*?

f '(x)	*f (x)*

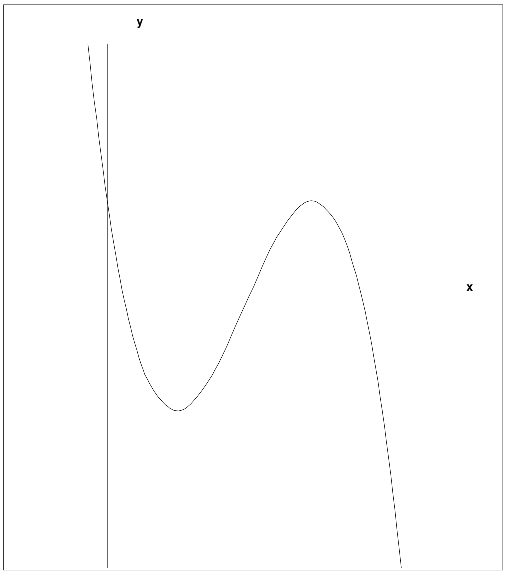
f '(x)	*f (x)*

f '(x)	*f (x)*

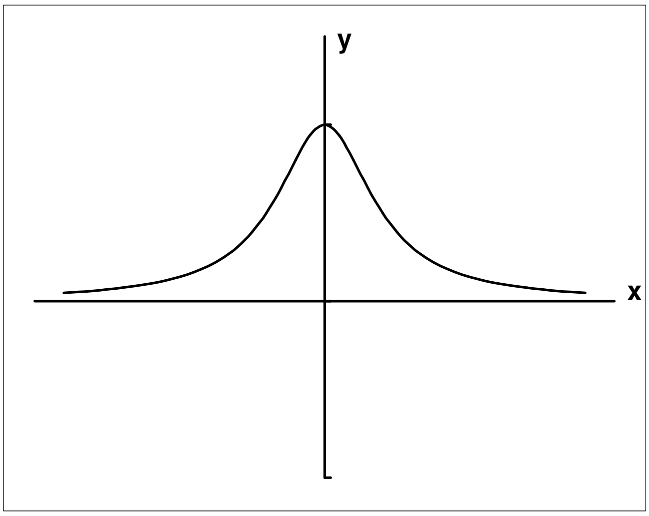
f '(x)	*f (x)*

b) A partir do estudo feito na questão *a* enumere cada gráfico a seguir, verificando qual deles melhor corresponde a cada uma das primitivas *f(x).*

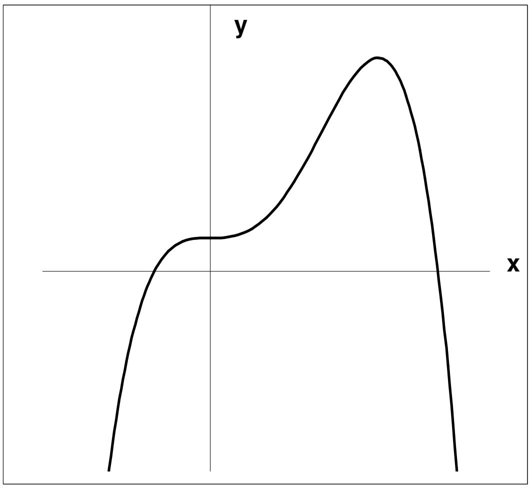
( )



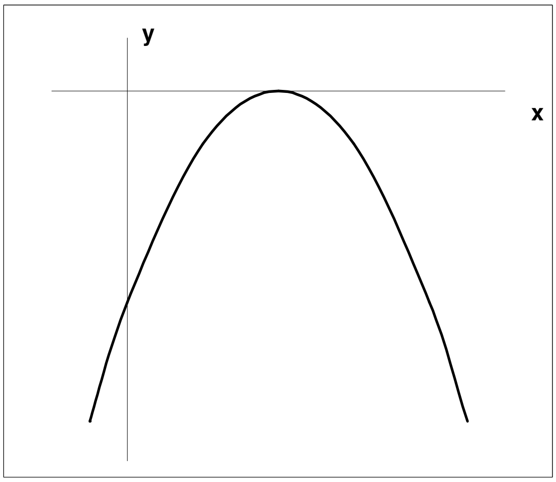
( )



( )



( )



ATIVIDADE 2

A seguir são fornecidas as derivadas de algumas funções.

I) $f'(x) = -6x + 12$ II) $f'(x) = -3x^2 + 3$

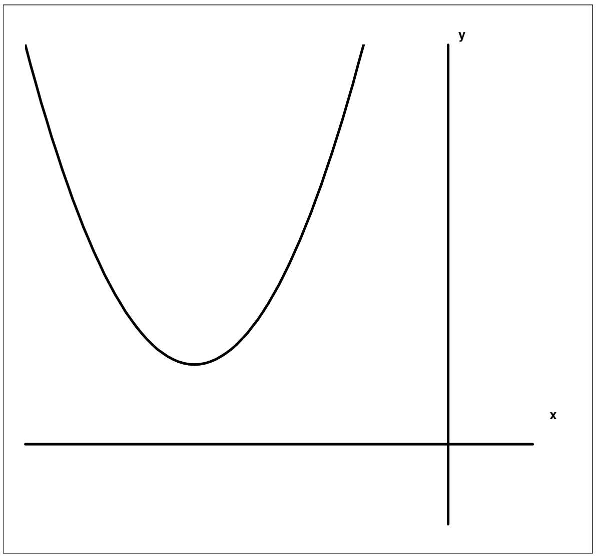
III) $f'(x) = 2x + 6$ IV) $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

a) Para cada uma das funções derivadas, faça o procedimento algébrico necessário para obter informações sobre a primitiva $f'(x)$.

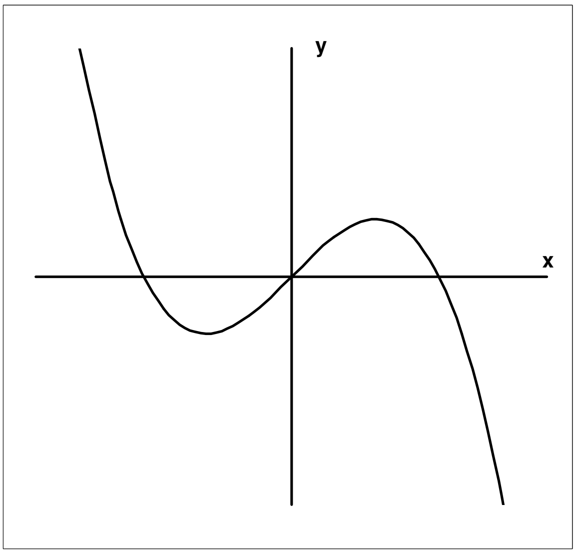
I	II	III	IV

b) A partir do estudo feito na questão *b* faça a correspondência de cada função derivada com um dos gráficos de *f(x)* dados a seguir.

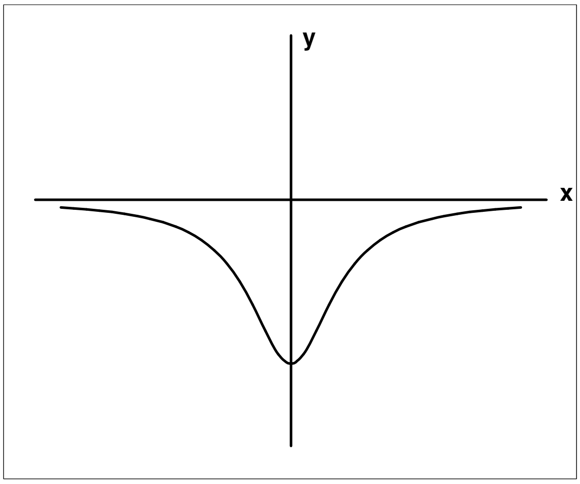
( )



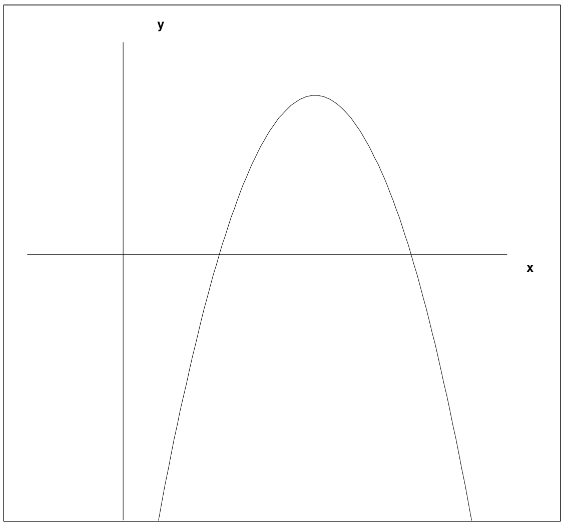
( )



( )



( )



ATIVIDADE 3

Em cada caso, esboce o gráfico de uma função *f(x)* que atenda todas as condições citadas:

a)

- $f(0) = 0$
- $f'(x) > 0$ para $\forall x$

- $f''(x) > 0$ para $x > 0$, $f''(x) < 0$ para $x < 0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

b)
- $f(-2) = 0$, $f(1/2) = 0$, $f(0) = -1/2$,
  $f(-1) = -2$, $f(-1/2) = -3/2$
- $f'(x) < 0$ para $x < -1$,
  $f'(x) > 0$ para $x > -1$
- $f''(x) > 0$ para $x < -1/2$ e $x > 0$
  $f''(x) < 0$ para $-1/2 < x < 0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

c)
- $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$
  $f(-1/2) = f(-3/2) = 2$
- $f'(x) < 0$ para $x < -1$
  $f'(x) > 0$ para $x > -1$
- $f''(x) > 0$ para $x < -3/2$ e $x > -1/2$
  $f''(x) < 0$ para $-3/2 < x < -1/2$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

d)
- $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$,
  $f(6) = 0$, $f(4) = -3/2$
- $f'(x) < 0$ para $1 < x < 4$
  $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $x > 4$
- $f''(x) > 0$ para $x < 0$ e $x > 2$
  $f''(x) < 0$ para $0 < x < 2$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

e)
- $f(0) = -2$ e $f(1) = 5$,
  $f(-1) = f(3) = -1$, $\nexists f'(1)$
- $f'(x) > 0$ para $x < -1$ e $1 < x < 3$
  $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 1$ e $x > 3$
- $f''(x) < 0$ para $x < -1$ e $x > 1$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

ESTUDO PRINCIPAL - Seqüência 5

1) Pesquisas acadêmicas indicam que alunos dispostos a estudar teoricamente os conceitos matemáticos adquirem uma maior autonomia em relação ao seu processo de aprendizagem, obtendo por conseqüência melhores resultados em provas e exames. Você concorda com isso? Justifique.

2)Você encontrou dificuldades na compreensão do texto? Justifique.

3) a) Explique por que os sinais da derivada à primeira são usados para determinar crescimento e decrescimento de uma função

b) Explique o que são pontos críticos e como se procede para determiná-los?

c) Explique por que os sinais da derivada à segunda são usados para determinar o sentido da concavidade de uma função.

d) Explique o que são pontos de inflexão e como se procede para determiná-los?

APÊNDICE C:
PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ESTUDO DA VARIAÇÃO DE FUNÇÕES

1 INTRODUÇÃO

O material apresentado nesta proposta constitui-se um extrato da dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática intitulada “Pensamento visual no estudo da variação de funções”. Foi desenvolvido por Lais Couy, sob orientação da Profª. Dra. Maria Clara Rezende Frota. Para facilitar consultas e leituras a “Proposta de abordagem para o estudo da variação de funções” foi organizada de forma a assumir um caráter independente em relação à dissertação.

Foi realizada uma pesquisa qualitativa, junto a professores de matemática em formação, com aplicação de diversas atividades para estudo da variação de funções de uma variável real, utilizando as derivadas para investigar crescimento, decrescimento e concavidade. Buscou-se na análise dessas atividades, compreender como o pensamento visual pode contribuir para um aprendizado mais significativo das idéias do cálculo, numa dinâmica que permitisse a interlocução entre a linguagem visual e as outras formas de representação em matemática.

O processo de construção desta proposta ocorreu durante todo o desenvolvimento do trabalho, não constituindo, portanto, apenas um produto final**.** Os vários momentos de reflexão provocados pela aplicação das atividades, o constante retorno ao referencial teórico e as discussões com a orientadora permitiram que o material fosse refinado chegando ao resultado aqui apresentado.

O processo vivenciado pela professora-pesquisadora durante a pesquisa possibilitou um rico aprendizado sobre o ensino de cálculo na licenciatura. Por esse motivo e também por acreditarmos que a experiência possa ser útil a outros professores, várias das atividades desenvolvidas foram sistematizadas, mostrando-se de que forma os modos de pensamento visual podem ser estimulados em cada uma delas.

A seqüência de atividades apresentada não pretende esgotar as possibilidades de uma abordagem visual no ensino de Cálculo[42], mas apresentar algumas pistas para fundamentar o trabalho de um professor atuante num curso de licenciatura, que queira enfatizar o pensamento visual e a interlocução entre os vários registros de representação no ensino e aprendizagem da variação de funções

[42] Será utilizado o termo genérico “Cálculo” para expressar o campo de conhecimento matemático que inclui o Cálculo Diferencial e Integral.

reais de uma variável real. A partir das orientações presentes em cada uma das atividades, esperamos, que outras atividades, envolvendo este e outros assuntos do Cálculo, possam ser criadas.

Porém, gostaríamos de salientar a importância, seja para a aplicação desta Proposta ou para a criação de novas atividades, de se conhecer os diversos processos mentais ligados ao pensamento-visual-espacial. As atividades foram sistematizadas, levando-se em conta, o modelo teórico proposto pela autora portuguesa Maria da Conceição Monteiro da Costa, em sua tese de doutorado.

A autora, através de tarefas geométricas aplicadas junto a alunos da educação infantil, identificou quatro formas diferentes de pensamento visual-espacial: pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens (PVMM), pensamento visual-espacial resultante da construção de relações entre imagens (PVR) e pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE). Um estudo mais detalhado de sua tese nos permitiu considerar que seu modelo teórico também poderia ser utilizado para estudar o pensamento visual no ensino de cálculo.

O PVP é um modo inicial, primário, mais próximo das sensações, relacionando-se a operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial, de memória. O PVMM refere-se às operações intelectuais relacionadas com manipulação e transformação de imagens e o PVR à construção mental de relações entre imagens, a comparação de idéias, conceitos e modelos. Já o PVE se apóia fundamentalmente nas linguagens visual, gestual e verbal referindo-se às operações intelectuais relacionadas com representação, tradução e comunicação de idéias, conceitos e métodos.

A cada um dos modos de pensamento visual-espacial estão associados diversos processos mentais[43]. Intuições primárias, inferências intuitivas, construção visual, re-apresentação e avaliação de imagens mentais, reconhecimentos visuais, interpretação, identificação de objetos, apreensão global de uma configuração geométrica, abstração perceptual, abstração ligada ao reconhecimento e geração de conceitos, por exemplo, são associados ao *pensamento visual-espacial resultante da percepção* (PVP).

[43] Maiores detalhes sobre os processos mentais podem ser encontrados no texto da dissertação ou em Costa (2005).

Intuições secundárias, transformações mentais, unificações, abstração reflexiva, coordenação, generalização construtiva, estruturação espacial e construção visual são processos mentais associados ao *pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens* (PVMM). Intuições antecipatórias, metacognição, abstração reflexiva, descoberta de relações entre imagens mentais, entre propriedades e de fatos estão relacionados ao *pensamento visual-espacial resultante da construção de relações entre* imagens.

Ao quarto modo, nomeado como *pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento* (PVE) estão associados os processos mentais de: representações externas, tradução, descrição da dinâmica mental, uso de analogias, construção de argumentação e de conjecturas.

Com a classificação apresentada, a autora não pretende sugerir que os quatro modos ocorrem de forma estanque e linear, pois os diversos processos mentais podem interagir numa tarefa matemática. Também, na tentativa de resolver um problema matemático que estimule o pensamento visual, alunos podem seguir caminhos diferenciados e, portanto não evidenciarem, na sua forma de raciocinar, a utilização dos mesmos processos mentais.

A seguir, apresentamos, como exemplo, uma situação de aprendizagem matemática para ilustrar a afirmativa anterior: várias poderiam ser as formas de raciocínio de um aluno, ao tentar obter, por translações, o gráfico da função $y = x^2 + 5$, a partir do gráfico da função $y = x^2$.

O aluno poderia *apreender globalmente a configuração geométrica* (PVP) da função $y = x^2$ e, em seguida, *intuir antecipatoriamente* (PVR) como ficará o gráfico da função $y = x^2 + 5$ e por último, *traduzir*(PVE) a figura existente na mente no desenho do gráfico de $y = x^2 + 5$ em uma folha de papel.

O modo de raciocinar do aluno também poderia seguir o caminho: 1) executa o *reconhecimento visual*(PVP) do gráfico da função $y = x^2$; 2) *identifica elementos* ou *objetos*(PVP) importantes como as coordenadas do vértice, a simetria do gráfico, a concavidade e os intervalos de crescimento e decrescimento; 3) *transforma mentalmente*(PVMM) a imagem do gráfico dado para obter a representação do gráfico da função $y = x^2 + 5$.

Uma terceira possibilidade seria, o aluno estabelecer *ligações entre as representações algébrica e gráfica* da função $y = x^2$ (PVE), *interpretar e apreender globalmente a representação geométrica* dessa função (PVP), *intuir antecipadamente* como ficará o gráfico(PVR) da função $y = x^2 + 5$ ou $y = (x + 5)^2$, *transformar mentalmente* (PVMM) o gráfico de $y = x^2$ e *descrever o processo* pelo qual chegou ao resultado(PVE).

Com o objetivo de diferenciar a natureza dos modos de pensamento visual-espacial a autora sugere um modelo de organização (Figura 1). Nesse esquema ela representa esses modos em dois planos. No primeiro, chamado de "cognitivo" estão o PVP, o PVMMM e o PVR e no segundo, nomeado de "plano de comunicação" está o PVE. Essa separação se justifica, pois o PVE é "[..] uma espécie de condutor do pensamento visual-espacial, na medida em que é por seu intermédio que podemos conhecer os outros três modos" (COSTA, 2005, p. 189).

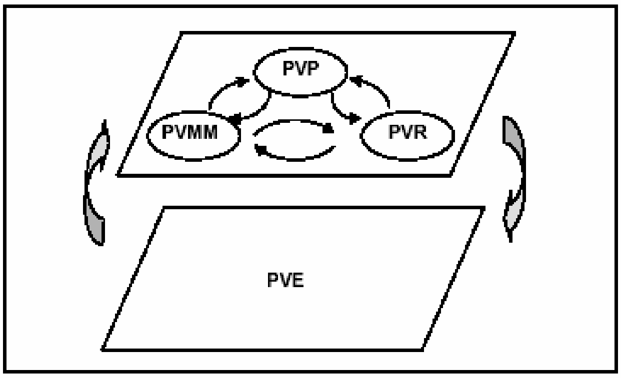


Figura 1: Modelo de organização dos modos de pensamento visual-espacial proposto por Costa (2005)

Esperamos com a exposição anterior, sobre os diversos processos mentais envolvidos numa tarefa, como a construção do gráfico de uma função, despertar para a importância de se estimular o pensamento visual no ensino de cálculo. Essa foi a ênfase adotada nas seqüências de atividades apresentadas a seguir.

2 SEQÜÊNCIAS DE ATIVIDADES

SEQÜÊNCIA 1

ATIVIDADE 1

Objetivos:

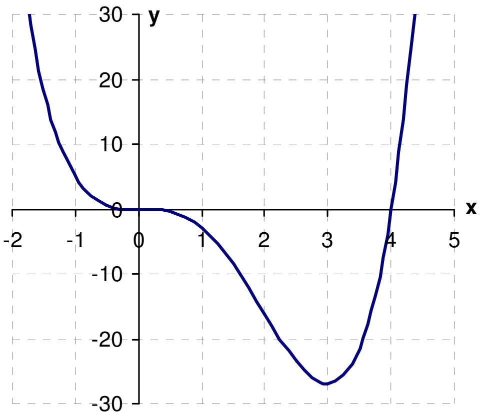
⇒ *Diagnosticar as idéias dos alunos sobre os intervalos de crescimento e decrescimento de funções.*

⇒ *Estimular a utilização dos processos mentais relacionados ao PVP: intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), inferências intuitivas e interpretação.*

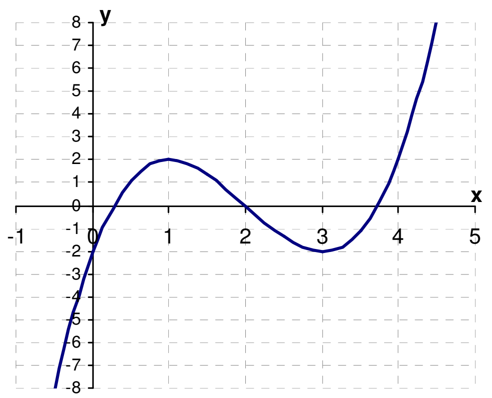
⇒ *Incentivar o uso dos processos mentais relacionados ao PVE: descrição da dinâmica mental e construção de argumentação e de conjecturas. (Caso o professor decida-se por solicitar aos alunos a exposição oral dos critérios utilizados para se chegar à resposta).*

O esboço gráfico de algumas funções é apresentado abaixo. Considerando que todas elas estão definidas e são contínuas no intervalo]-∞,∞[e que as variações mais importantes estão mostradas no esboço dado, indique os intervalos de crescimento e decrescimento.

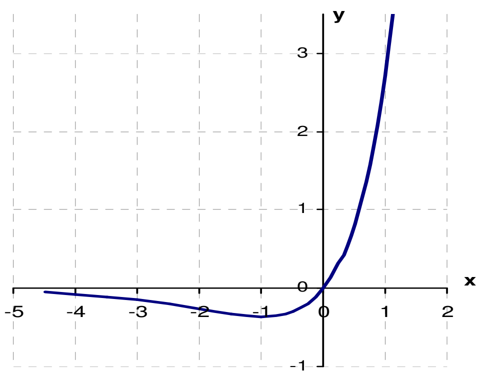
a)



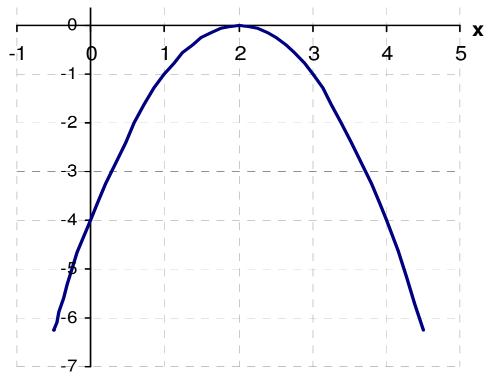
b)



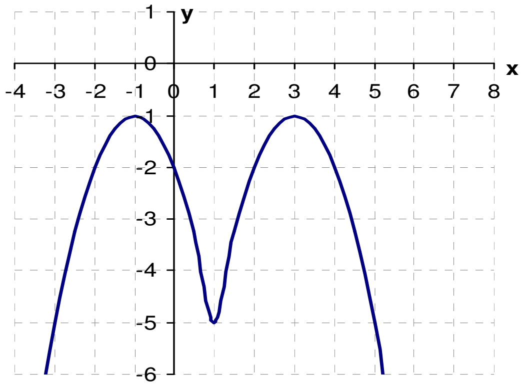
c)



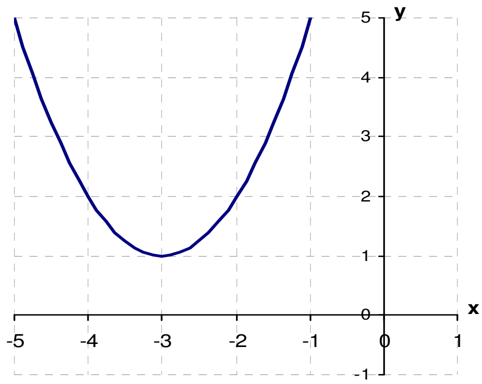
d)



e)



f)



ATIVIDADE 2

Objetivos:

⇒ *Estimular a formalização e generalização do conceito de função crescente e decrescente em um intervalo, buscando uma interlocução entre as linguagens gráfica, textual e algébrica.*

⇒ *Estimular o uso dos processos mentais de representações externas e tradução, associados ao PVE.*

Seja $f(x)$ definida no intervalo $[x_1, x_2]$

a) O que significa dizer que $f(x)$ é crescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?

b) O que significa dizer que $f(x)$ é decrescente em $[x_1, x_2]$? Como poderíamos expressar essa idéia graficamente? E usando a linguagem matemática?

ATIVIDADE 3

Esta atividade aborda o tema "limites" de forma intuitiva, sem a utilização da simbologia formal, podendo ser aplicada a alunos que já fizeram estudos anteriores ou não sobre o tema. No entanto, se forem aplicadas a alunos que já fizeram o estudo do tema, a linguagem formal pode aparecer nas respostas, de uma forma espontânea.

Objetivos:

⇒ *Compreender a idéia intuitiva de limites (para introdução do tema a alunos que ainda não realizaram esse estudo).*

⇒ *Retomar a idéia intuitiva de limites (para alunos que já fizeram estudos anteriores sobre o tema)*

⇒ *Estimular a utilização dos processos mentais relacionados ao PVP: intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), inferências intuitivas e interpretação*

a)Observe o gráfico do exercício *1 b*.
O que acontece com os valores da função à medida que *x* cresce infinitamente?
O que acontece com os valores da função à medida que *x* decresce infinitamente?

b) Observe o gráfico do exercício *1 c*.
O que acontece com os valores da função à medida que *x* cresce infinitamente?
O que acontece com os valores da função à medida que *x* decresce infinitamente?

c) Observe o gráfico do exercício *1 e*.
O que acontece com os valores da função à medida que *x* se aproxima de 1 por valores menores que 1?
O que acontece com os valores da função à medida que *x* se aproxima de 1 por valores maiores que 1?
O que acontece com os valores da função à medida que *x* decresce infinitamente?

ATIVIDADE 4

Objetivos:

⇒ *Obter, a partir da linguagem textual e simbólica, o gráfico de uma função.*

⇒ *Estimular os processos mentais de coordenação, intuições secundárias, transformações mentais e unificações, relativos ao PVMM e intuições antecipatórias associado ao PVR:*

⇒ *Estimular os processos mentais de construção visual e apreensão global de uma representação geométrica, relativos ao PVP e representações externas e tradução, associados ao PVE.*

⇒ *Incentivar o uso dos processos mentais relacionados ao PVE: construção de conjecturas, argumentação e descrição da dinâmica mental. (Caso o professor decida-se por solicitar aos alunos a exposição para os colegas do desenho obtido, justificando a forma do gráfico, a partir das condições pré-estabelecidas na atividade).*

a) Esboce o gráfico de uma função definida no intervalo]-3,5[com as seguintes características:

- crescente no intervalo]-3,1[
- decrescente no intervalo]1,5[
- não existe f(3)

b) Esboce o gráfico de uma função definida em]-∞,∞[com as seguintes características:

- decrescente no intervalo]-∞,-2[
- crescente no intervalo]-2,5[
- decrescente intervalo]5,∞[

c) Esboce o gráfico de uma função definida no intervalo]-∞,∞[com as seguintes características:

- crescente no intervalo]- ∞,1[
- decrescente no intervalo]1, ∞[
- f(1)= 5
- à medida que x se aproxima de 1 por valores menores que 1, os valores da função se aproximam de 4
- à medida que x se aproxima de 1 por valores maiores que 1, os valores da função se aproximam de 3
- à medida que x cresce infinitamente, os valores da função se aproximam de zero.
- à medida que x decresce infinitamente, os valores da função decrescem infinitamente.

ATIVIDADE 5

Objetivos:

⇒ *Investigar relações possíveis entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento ou decrescimento, os pontos de máximo e mínimo locais e as retas tangentes às curvas nesses pontos.*

⇒ *Estimular a utilização dos processos mentais da abstração reflexiva, intuições secundárias, generalização construtiva e coordenação, ligados ao pensamento visual resultante da manipulação de imagens (PVMM).*

⇒ *Estimular os processos mentais de descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, relativos ao PVR.*

a) Dada a função $y = x^2 - 4x$, obtenha as equações das retas tangentes aos pontos de abscissas x=1, x=2, x=0, x=3.

b) Construa, utilizando os recursos computacionais de um *software* de construção gráfica, o gráfico da função $y = x^2 - 4x$ e de suas retas tangentes

c) O que você observa quanto ao crescimento/ decrescimento da função? Registre suas idéias.

d) Você observa alguma relação entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento/ decrescimento e as tangentes à curva? Registre suas idéias.

ATIVIDADE 6

Objetivos: idênticos à atividade 5.

a) Dada a função $y = x^3 - 3x$, obtenha as equações das retas tangentes aos pontos de abscissas $x = -\frac{3}{2}$, x=-1, x=0, x=1, $x = \frac{3}{2}$.
b) Construa no *software Maple* o gráfico da função $y = x^3 - 3x$ e de suas retas tangentes
c) O que você observa quanto ao crescimento/ decrescimento da função? Registre suas idéias.
d) Você observa alguma relação entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento/ decrescimento e as tangentes à curva? Registre suas idéias.

ATIVIDADE 7

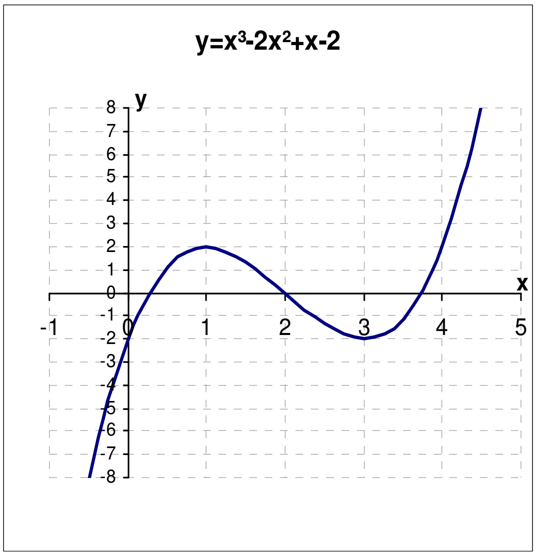
Esta atividade tem como objetivo final estabelecer um procedimento algébrico para a determinação dos pontos críticos de uma função.

Objetivos:

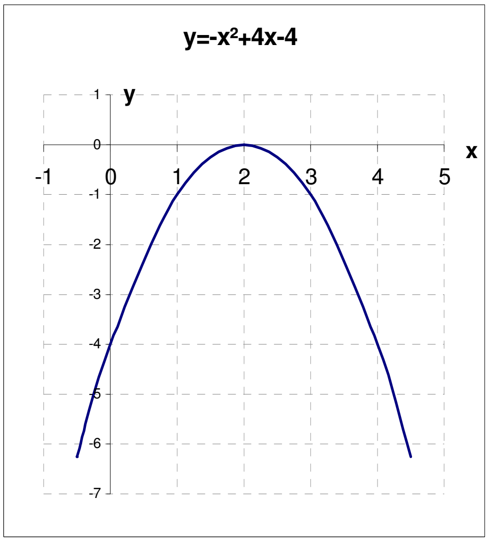
- ⇒ *Estabelecer critérios algébricos para determinar os pontos de máximo e mínimo locais de uma função (questões a a d), a partir das observações já realizadas nos gráficos das funções $y = x^2 - 4x$ e $y = x^3 - 3x$ (Atividades 5 e 6).*
- ⇒ *Verificar a eficácia do procedimento algébrico para outras funções contínuas (questão e).*
- ⇒ *Estimar pontos de máximo e mínimo locais através da observação gráfica, verificando se os valores estimados se confirmam pela aplicação do procedimento algébrico estabelecido questão d (f)*
- ⇒ *Estimular a utilização dos processos mentais relacionados ao PVP: intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), inferências intuitivas e interpretação*
- ⇒ *Estimular os processos mentais de descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, relativos ao PVR e representações e tradução, processos mentais associados à exteriorização do pensamento PVE.*

a) Observe o gráfico da função $y = x^2 - 4x$. Quais são a(s) abscissa(s) dos pontos em que a função muda o crescimento/decrescimento?
b) Observe o gráfico da função $y = x^3 - 3x$. Quais são a(s) abscissa(s) dos pontos em que a função muda o crescimento/decrescimento?
c) O que você observa com relação às retas tangentes a esses pontos?
d) É possível estabelecer algum tipo de procedimento algébrico para a determinação desses pontos? Se sim, teste esse procedimento para cada uma das funções.
e) Continue testando o procedimento para cada uma das funções a seguir, sempre tomando o cuidado de observar no gráfico os pontos encontrados.

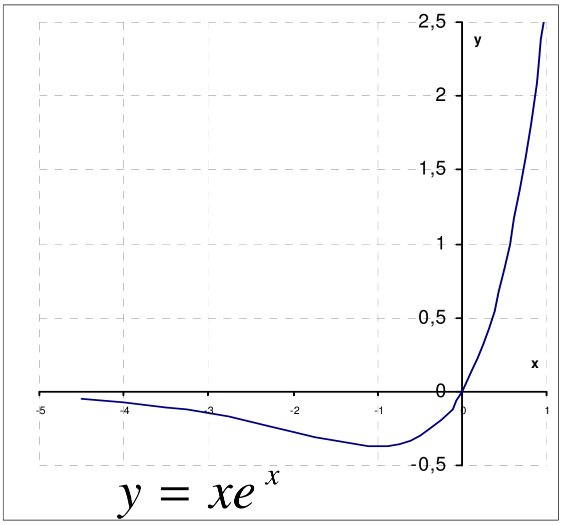
I)



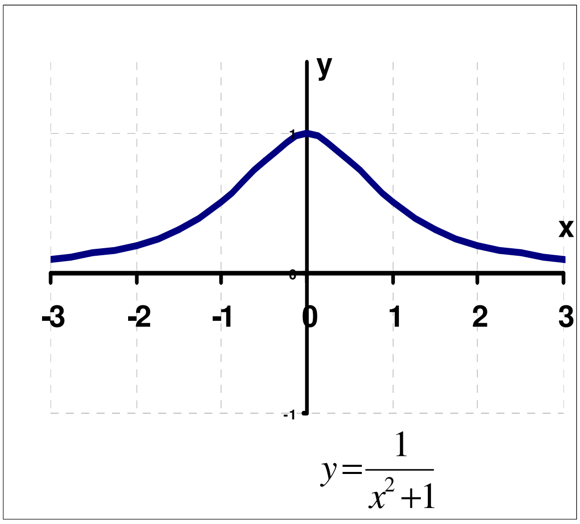
II)



III)

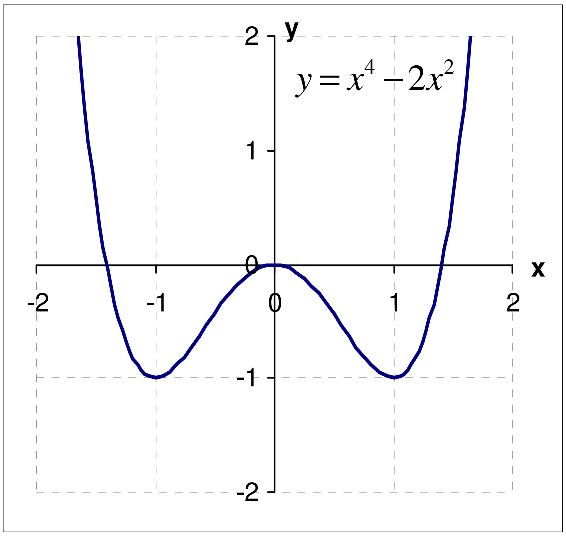


IV)

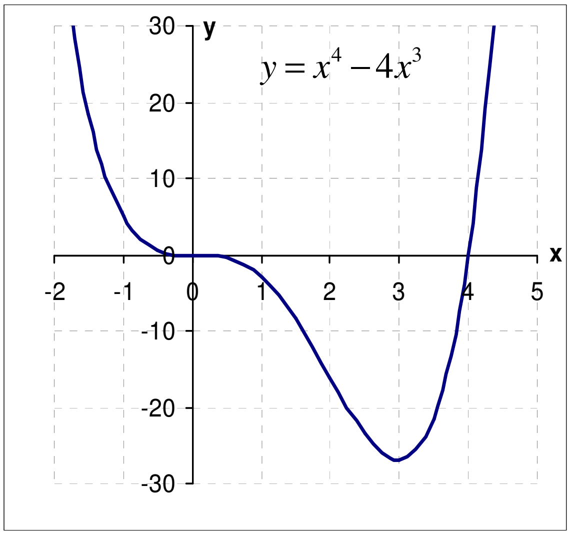


e) Para cada um das funções representadas graficamente abaixo, dê o(s) valor(es) para os quais, na sua opinião, $f'(x) = 0$

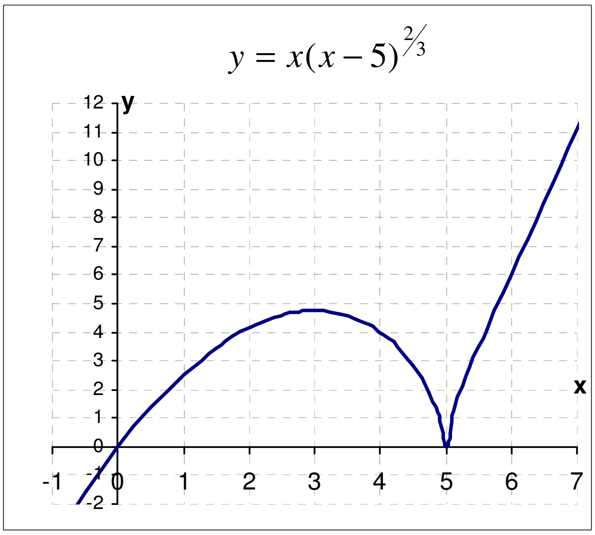
I



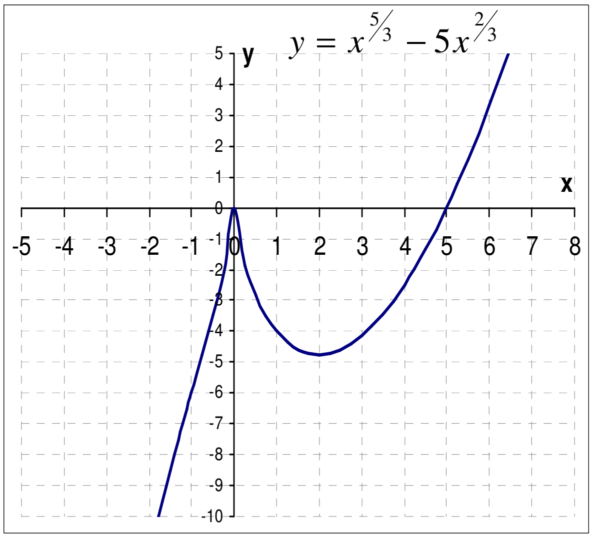
II



III



IV



f) Através do procedimento algébrico estabelecido no *exercício 1d*, determine o(s) valor(es) de *x* para os quais $f'(x) = 0$?

g) Compare os resultados obtidos com os valores apontados por você na questão *f* para $f'(x) = 0$? Os resultados coincidem? Se aparecerem valores que não coincidem, tente encontrar justificativas para o fato deles aparecerem.

ATIVIDADE 8

Objetivos:

⇒ *Estabelecer os procedimentos algébricos necessários para a determinação dos intervalos de crescimento e decrescimento de uma função.*

⇒ *Estimular a utilização dos processos mentais relacionados ao PVP: intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), inferências intuitivas e interpretação.*

⇒ *Estimular os processos mentais de descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, relativos ao PVR e representações e tradução, processos mentais associados à exteriorização do pensamento PVE.*

a) Observe os gráficos I e II da questão *1e* e dê os intervalos de crescimento e decrescimento de cada uma das funções.

b) Construa os gráficos das funções derivadas obtidas a partir das funções I e II da questão *1e*.

c) Para cada uma das funções derivadas representadas graficamente, dê os intervalo(s) em que $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$.

d) Existe alguma relação entre os resultados obtidos em *b* e *c?*

e) É possível estabelecer algum tipo de procedimento algébrico para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função? Se sim, teste esse procedimento para essas funções.

ATIVIDADE 9

Objetivos:

⇒ *Discutir as relações entre uma função e sua primeira derivada.*

⇒ *Elaborar um quadro resumo com uma síntese dos resultados.*

Elabore um resumo, escrevendo as principais conclusões obtidas a partir das atividades anteriores:

Sobre os intervalos(ou valores) em que derivada $f'(x)$	Sobre a função $f(x)$
$f'(x) > 0$	
$f'(x) < 0$	
$f'(x) = 0$	
não existe	

ATIVIDADE 10

Objetivos:

⇒ *Obter, a partir da linguagem textual e simbólica, o gráfico de uma função.*

⇒ *Estimular os processos mentais de coordenação, intuições secundárias, transformações mentais e unificações, relativos ao PVMM e intuições antecipatórias associado ao PVR:*

⇒ *Estimular os processos mentais de construção visual e apreensão global de uma representação geométrica. relativos ao PVP e representações externas e tradução, associados ao PVE.*

⇒ *Incentivar o uso dos processos mentais relacionados ao PVE: construção de conjecturas, argumentação e descrição da dinâmica mental. (Caso o professor decida-se por solicitar aos alunos a exposição para os colegas do desenho obtido, justificando a forma do gráfico, a partir das condições pré-estabelecidas na atividade).*

Esboce o gráfico de uma função *f(x)* com as propriedades $f'(x) < 0$ para $x < 3$ e $f'(x) > 0$ para $x > 3$:

a) se $f'(x)$ é contínua em $x = 3$ e $f(3) = -5$

b) Se $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -4$ e $\lim_{x \to 3+} f(x) = -1$ e $f(3) = 2$

ATIVIDADE 11

Embora esta atividade tenha os mesmos objetivos das atividades 4 e 11, o número de informações a serem coordenadas numa mesma representação gráfica é maior, exigindo um maior esforço cognitivo na sua realização.

Em cada caso, esboce o gráfico de uma função *f(x)* que atenda todas as condições citadas:

a) $f(-3) = 2$, $f'(x) > 0$ para $x < -3$, $f'(x) < 0$ para $x > -3$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

b) $f(-1) = -2$ e $f(1) = 3$, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0$ para $x < -1$ e $x > 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

c) $f(0) = 1$ e $f(-3) = 4$, $\nexists f'(-3)$, $f'(x) < 0$ para $-3 < x < 0$, $f'(x) > 0$ para $x < -3$ e $x > 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

ATIVIDADE 12

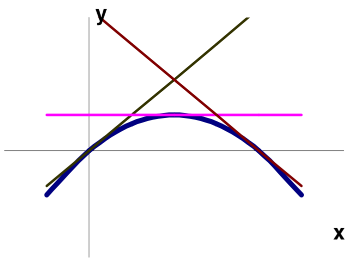
Objetivos:

⇒ *Investigar relações possíveis entre o comportamento da função do ponto de da concavidade e as retas tangentes ao gráfico da função* $y = -x^2 + 4x$ *.*

⇒ *Estimular a utilização dos processos mentais relacionados ao PVP: intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), inferências intuitivas e interpretação*

⇒ *Estimular os processos mentais de descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, relativos ao PVR.*

A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = -x^2 + 4x$ com algumas de suas retas tangentes.



a) O que você observa quanto à concavidade do gráfico da função?
b) Observe a posição relativa dessas retas tangentes quanto ao gráfico da função. Registre suas observações.
c) O que você observa quanto à variação dos coeficientes angulares das retas tangentes?

ATIVIDADE 13

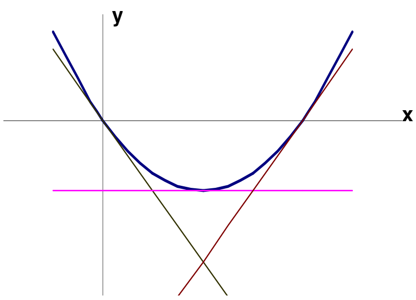
Objetivos:

⇒ *Investigar relações possíveis entre o comportamento da função do ponto de da concavidade e as retas tangentes ao gráfico da função* $y = x^2 - 4x$.

⇒ *Estimular a utilização dos processos mentais relacionados ao PVP: intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), inferências intuitivas e interpretação*

⇒ *Estimular os processos mentais de descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, relativos ao PVR.*

A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = x^2 - 4x$ com algumas de suas retas tangentes.



a) O que você observa quanto à concavidade do gráfico da função?
b) Observe a posição relativa dessas retas tangentes quanto ao gráfico da função. Registre suas observações.
c) O que você observa quanto à variação dos coeficientes angulares das retas tangentes?

ATIVIDADE 14

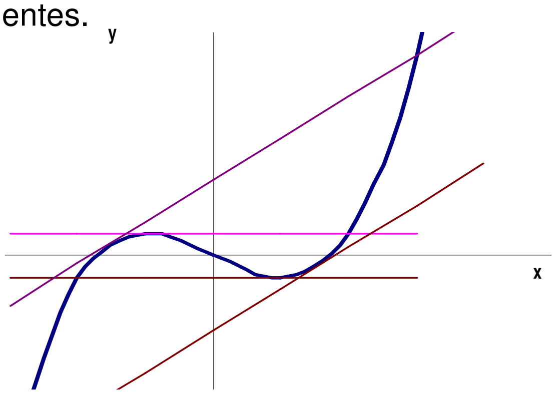
Objetivos:

⇒ *Investigar relações possíveis entre o comportamento da função do ponto de da concavidade e as retas tangentes ao gráfico da função* $y = x^3 - 3x$.

⇒ *Estimular a utilização dos processos mentais relacionados ao PVP: intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), inferências intuitivas e interpretação*

⇒ *Estimular os processos mentais de descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, relativos ao PVR.*

A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = x^3 - 3x$ com algumas de suas retas tangentes.



a) O que você observa quanto à concavidade do gráfico da função?

b) Verifique se as relações registradas nos exercícios 1 e 2 se confirmam para a função $y = x^3 - 3x$. Registre suas observações.

c) Você observa alguma relação entre a concavidade do gráfico de uma função e suas retas tangentes?

ATIVIDADE 15

Objetivos:

⇒ *Discutir as relações entre uma função e sua segunda derivada.*

⇒ *Elaborar um quadro resumo com uma síntese dos resultados.*

Elabore um resumo, escrevendo as principais conclusões obtidas a partir das atividades anteriores:

Sobre os intervalos (ou valores) em que gráfico de $f(x)$ é:	Coeficientes angulares ($f'(x)$)	Outras observações
Côncavo para cima		
Côncavo para baixo		

ATIVIDADE 16

Embora as atividades 16 e 17 estimulem os mesmos processos mentais associados ao pensamento visual-espacial das atividades 11 e 12, nestas se acrescentam informações sobre os sinais da segunda derivada, exigindo do aluno uma raciocínio mais elaborado na coordenação de todas as informações numa mesma representação gráfica.

Os dados abaixo se referem às propriedades de uma função contínua em R.

- f(2)=4 , f(1)=2, f(3)=2
- f ´(x) >0 para x<2, f ´(x)<0 para x>2
- f ´´ (x)>0 para x<1 e x>3, f ´´ (x)<0 para 1<1x<3
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim f(x)_{x\to-\infty} = 0$

a) A partir dos dados, complete a tabela abaixo.

Raízes da função	Ponto(s) crítico(s)	Ponto(s) de inflexão	Intervalos de crescimento	Intervalos de decrescimento	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para cima	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para baixo

b) Esboce o gráfico de uma função que atenda todas as condições citadas:

ATIVIDADE 17

Objetivos: consultar atividade anterior

Os dados abaixo se referem às propriedades de uma função contínua em R.

- f(0)=0, f(-$\sqrt{3}$)=0, f($\sqrt{3}$)=0, f(-1)=-2, f(1)=2
- f ´(x) <0 para x< -1e x>1, f ´(x)>0 para -1<x<1
- f ´´ (x)>0 para x<0, f ´´ (x)<0 para x> 0
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$r

a) A partir dos dados, complete a tabela abaixo:

Raízes da função	Ponto(s) crítico(s)	Ponto(s) de inflexão	Intervalos de crescimento	Intervalos de decrescimento	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para cima	Intervalos em que o gráfico de f(x) é côncavo para baixo

b) Esboce o gráfico de uma função que atenda todas as condições citadas:

ATIVIDADE 18

Objetivos:

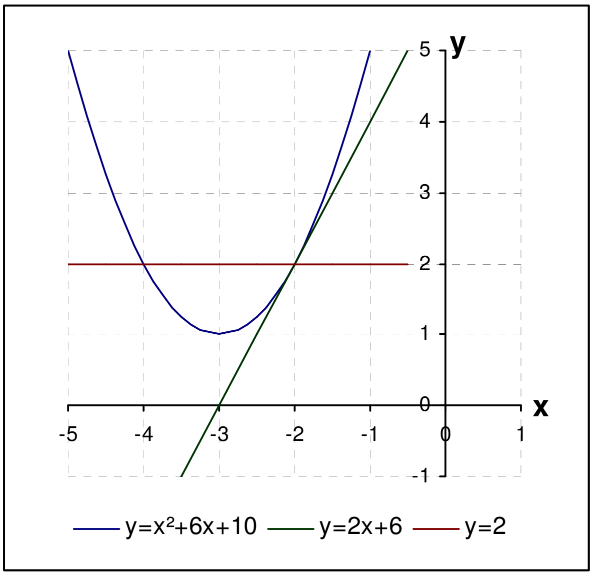
$\Rightarrow$ *Discutir as relações estabelecidas nas atividades anteriores*

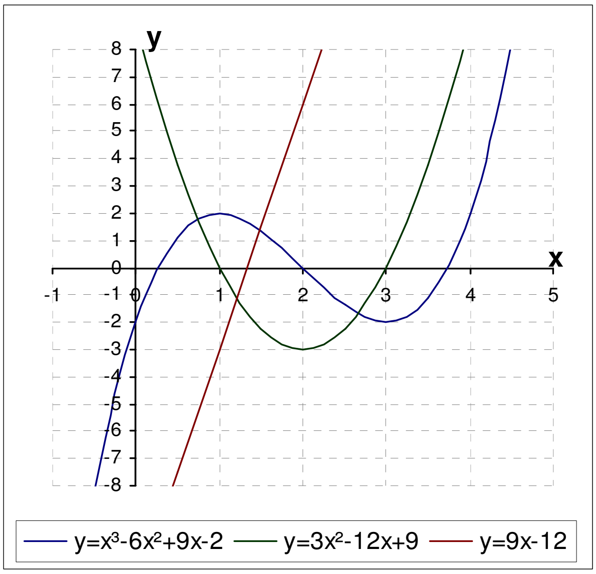
$\Rightarrow$ *Promover a interlocução entre as linguagens gráficas e algébrica*

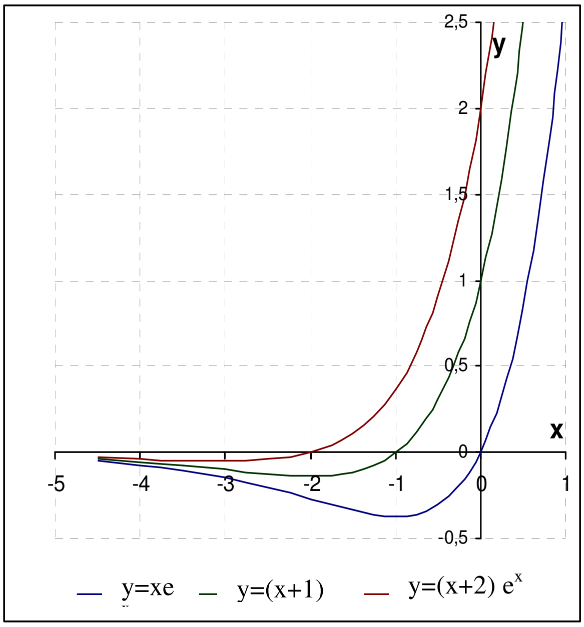
$\Rightarrow$ *Estimular a utilização dos processos mentais relacionados ao PVP: intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), inferências intuitivas e interpretação.*

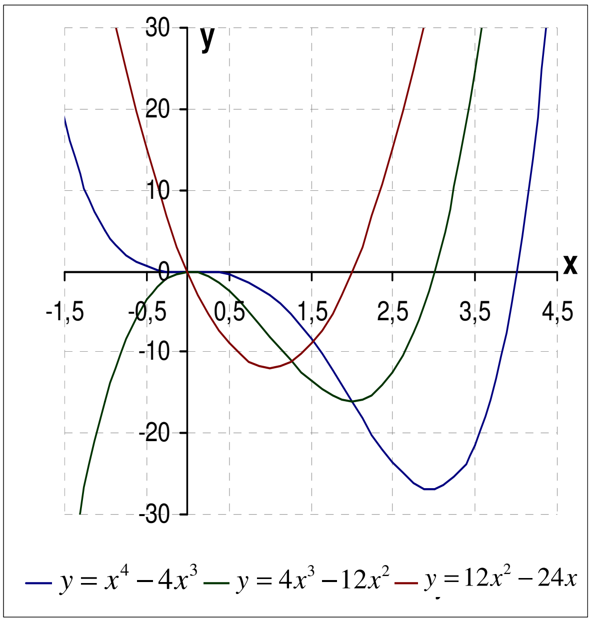
⇒ *Estimular os processos mentais de descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, relativos ao PVR e representações e tradução, processos mentais associados à exteriorização do pensamento PVE.*

Cada uma das figuras abaixo apresenta representações gráficas de três funções:









a) Qual é a relação entre as funções representadas graficamente em cada sistema cartesiano?
b) Para o sistema cartesiano I estude o sinal das funções representadas em verde e vermelho. O que dizer a respeito das funções representadas em azul a partir desse estudo.
c) Proceda da mesma forma com as outras representações.

SEQÜÊNCIA 2

Observações:
Embora as atividades desta seqüência também estimulem vários dos processos mentais associados aos 4 modos de pensamento visual-espacial, elas foram criadas, principalmente, para incentivar a metacognição. Sugeriu-se, na primeira seqüência, que as atividades fossem desenvolvidas em grupo, já nesta sugere-se que seja individualmente, pois dessa forma os alunos podem ter a oportunidade de auto-regular a própria compreensão dos conceitos estudados e podem, por conseqüência, desenvolver estratégias metacognitivas.

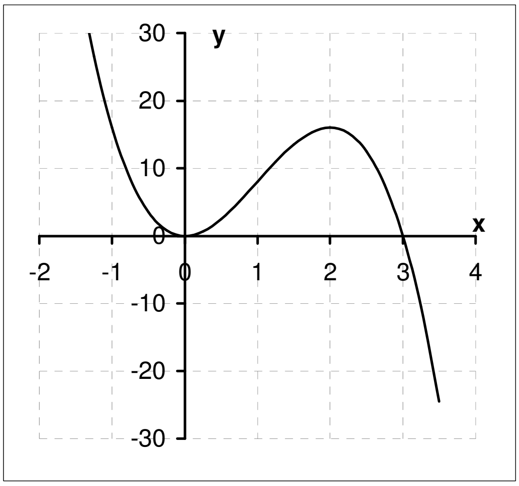
Objetivo da seqüência:

$\Rightarrow$ *Estimular o processo mental da metacognição, relativo ao PVR.*

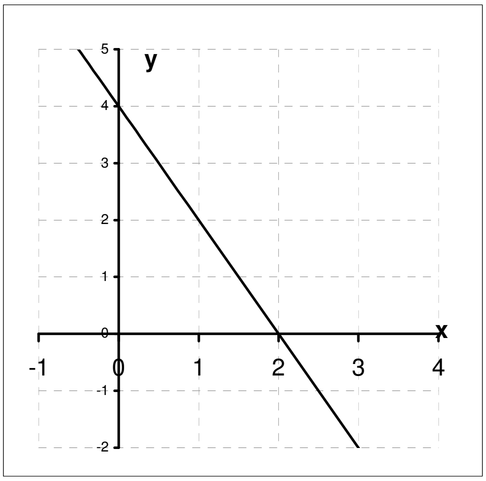
ATIVIDADE 1

A seguir são apresentados gráficos de funções derivadas *f '(x)*:

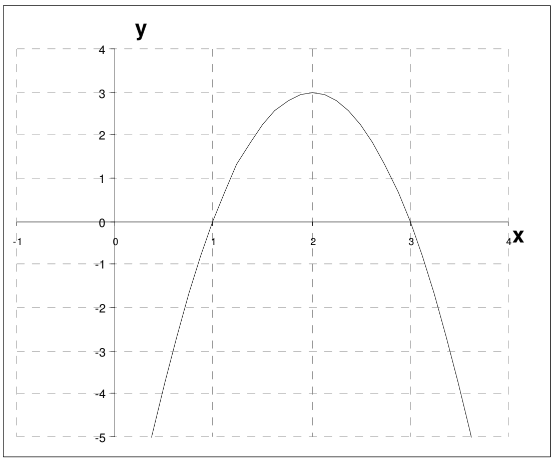
I)



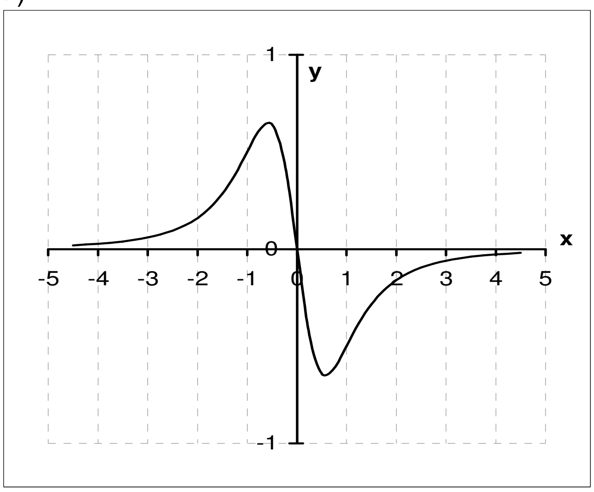
II)



III)



IV)



a) Anote nos quadros a seguir, o que os gráficos das funções derivadas dados, podem nos dizer a respeito da função primitiva *f(x)*?

I	
f '(x)	*f (x)*

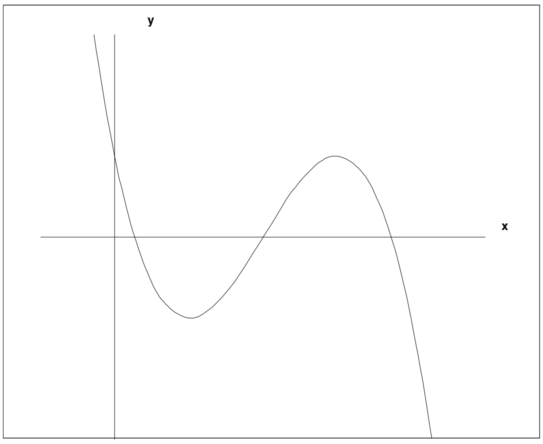
II	
f '(x)	*f (x)*

III	
f '(x)	*f (x)*

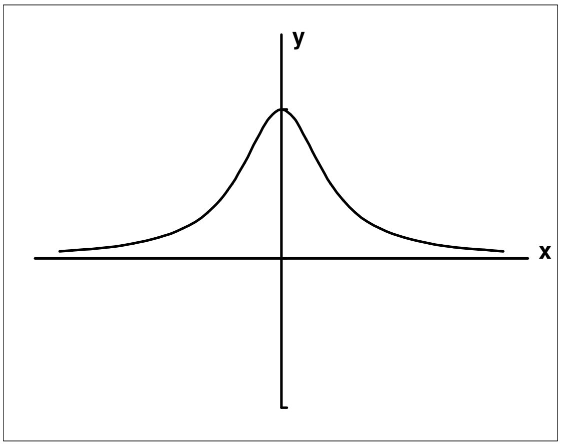
IV	
f '(x)	*f (x)*

b) A partir do estudo feito na questão *a* relacione cada gráfico de *f '(x)* dado aos gráficos a seguir, verificando qual deles melhor corresponde a cada uma das primitivas *f(x).*

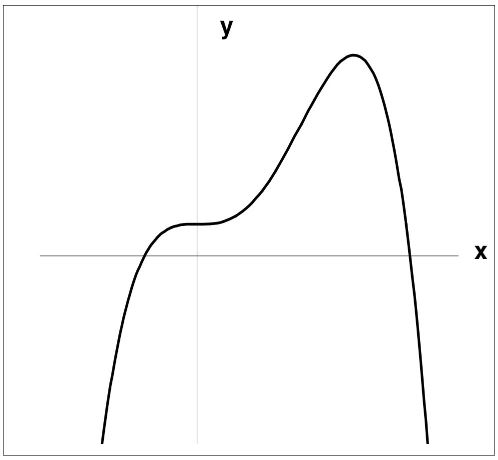
(   )



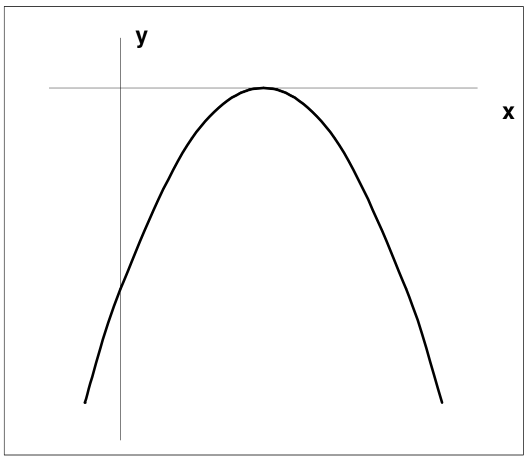
(   )



(   )



(   )



ATIVIDADE 2

A seguir são fornecidas as derivadas de algumas funções.

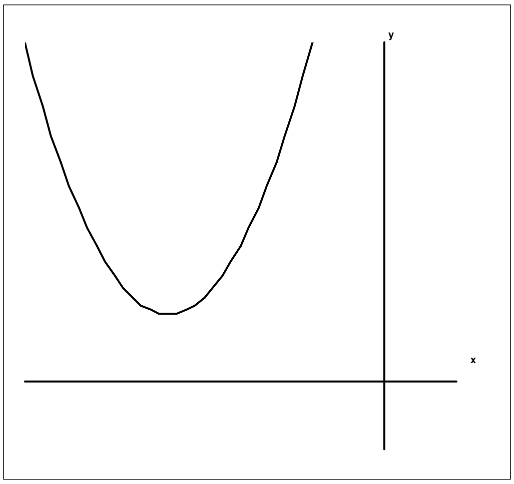
I) $f'(x) = -6x + 12$ II) $f'(x) = -3x^2 + 3$ III) $f'(x) = 2x + 6$ IV) $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

a) Para cada uma das funções derivadas, desenvolva os procedimentos algébricos necessários, de modo a obter informações sobre a primitiva $f(x)$.

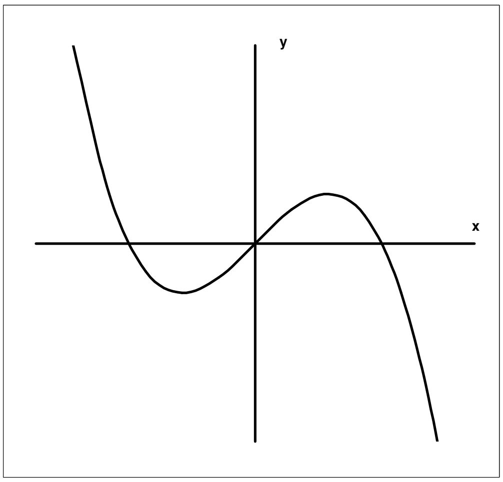
I	II	III	IV

c) A partir do estudo feito na questão *b* faça a correspondência de cada função derivada com um dos gráficos de *f(x)* dados a seguir.

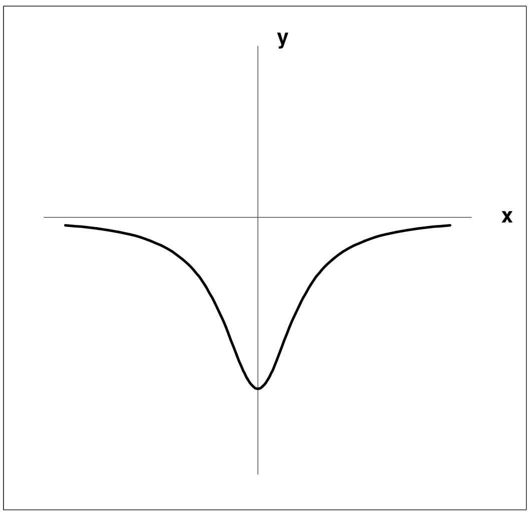
(   )



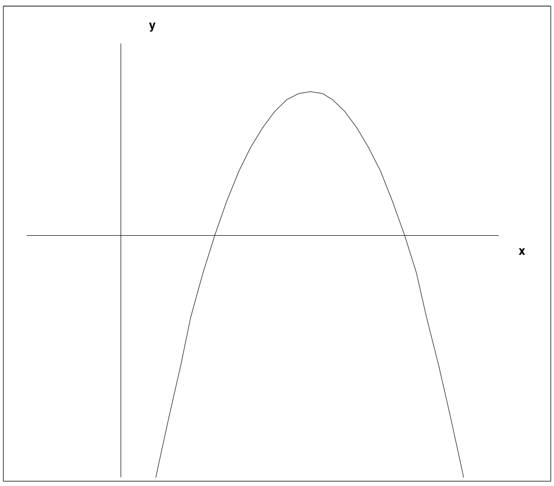
(   )



(   )



(   )



ATIVIDADE 3

Em cada caso, esboce o gráfico de uma função *f(x)* que atenda todas as condições citadas:

a)

- $f(0) = 0$
- $f'(x) > 0$ para $\forall x$
- $f''(x) > 0$ para $x > 0$, $f''(x) < 0$ para $x < 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

b)

- $f(-2) = 0$, $f(1/2) = 0$, $f(0) = -1/2$,
  $f(-1) = -2$, $f(-1/2) = -3/2$
- $f'(x) < 0$ para $x < -1$,
  $f'(x) > 0$ para $x > -1$
- $f''(x) > 0$ para $x < -1/2$ e $x > 0$
  $f''(x) < 0$ para $-1/2 < x < 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

c)

- $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$
  $f(-1/2) = f(-3/2) = 2$
- $f'(x) < 0$ para $x < -1$
  $f'(x) > 0$ para $x > -1$
- $f''(x) > 0$ para $x < -3/2$ e $x > -1/2$
  $f''(x) < 0$ para $-3/2 < x < -1/2$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

d)

- $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$,
  $f(6) = 0$, $f(4) = -3/2$
- $f'(x) < 0$ para $1 < x < 4$
  $f'(x) > 0$ para $x < 1 \; e \; x > 4$
- $f''(x) > 0$ para $x < 0$ e $x > 2$
  $f''(x) < 0$ para $0 < x < 2$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

e)

- $f(0) = -2$ e $f(1) = 5$,

$f(-1) = f(3) = -1$, $\nexists f'(1)$

- $f'(x) > 0$ para $x < -1$ e $1 < x < 3$

$f'(x) < 0$ para $-1 < x < 1$ e $x > 3$

- $f''(x) < 0$ para $x < -1$ e $x > 1$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

SEQÜÊNCIA 3

Observações: sugere-se que os alunos sejam orientados a realizar, num primeiro momento, um estudo geral do texto, assinalando as partes mais importantes. Apenas no momento seguinte,devem responder às questões, de preferência, sem consulta ao texto.
Texto sugerido para consulta: "Aplicações de derivadas" do livro Cálculo com Geometria Analítica (Vol.1) de George F. Simmons (1987, p. 149 a 151).

Objetivos da seqüência:

⇒ *Incentivar a autonomia e o desenvolvimento de estratégias metacognitivas.*

⇒ *Estimular os alunos a apreender e compreender a linguagem formal e simbólica dos conceitos relativos à variação de funções.*

1)Pesquisas acadêmicas indicam que alunos dispostos a estudar teoricamente os conceitos matemáticos adquirem uma maior autonomia em relação ao seu processo de aprendizagem, obtendo por conseqüência melhores resultados em provas e exames. Você concorda com isso? Justifique

2)Você encontrou dificuldades na compreensão do texto? Justifique

3) a) Explique por que os sinais da derivada primeira são usados para determinar crescimento e decrescimento de uma função.

b) Explique o que são pontos críticos e como se procede para determiná-los?

c) Explique por que os sinais da derivada segunda são usados para determinar o sentido da concavidade de uma função.

d) Explique o que são pontos de inflexão e como se procede para determiná-los.

SEQÜÊNCIA 4

Objetivos da seqüência:

- ⇒ *Possibilitar a revisão e sistematização das transformações de funções, por translações e rotações.*
- ⇒ *Estimular os processos mentais de intuições antecipatórias, descoberta de relações entre imagens, propriedades e fatos, associados ao PVR.*
- ⇒ *Incentivar o uso dos processos de transformações mentais e generalização construtiva relativos ao PVMM e à construção de argumentação e conjecturas, pertencentes ao PVE.*

ATIVIDADE 1

Objetivo:

- ⇒ *Verificar experimentalmente o que ocorre com o gráfico de uma função quando $f(x)$ é substituído por $f(x) \pm c$.*

a) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função y=senx
b) Construa em seguida os gráficos das funções y=senx+2,   y=senx-3
c) Você observa alguma relação entre o gráfico da função y=senx e os gráficos construídos na questão 1b?
d) A partir dos gráficos, complete a tabela seguinte com os valores das funções:

x	$y = \text{sen}\, x$	$y = \text{sen}\, x + 2$	$y = \text{sen}\, x - 2$
0			
$\pi/2$			
π			
$3\pi/2$			
2π			

e) A partir do gráfico de uma função real $f(x)$ é possível prever o gráfico de uma função $f(x) \pm C$?

ATIVIDADE 2

Objetivo:

$\Rightarrow$ *Verificar experimentalmente o que ocorre com o gráfico de uma função quando* $f(x)$ *é substituído por* $f(x \pm c)$.

a) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função $y = x^2$

b) Construa em seguida os gráficos das funções $y = (x-2)^2$ e $y = (x+3)^2$

c) Você observa alguma relação entre o gráfico da função $y = x^2$ e os gráficos construídos na questão 1b?

d) A partir dos gráficos, complete a tabela seguinte com os valores das funções:

x	$y = x^2$	$y = (x-2)^2$	$y = (x+3)^2$
-2			
-1			
0			
1			
2			

e) A partir do gráfico de uma função real $f(x)$ é possível prever o gráfico de uma função $f(x \pm C)$?

ATIVIDADE 3

Objetivo:

$\Rightarrow$ *Verificar experimentalmente o que ocorre com o gráfico de uma função quando* $f(x)$ *é substituído por* $-f(x)$.

a) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função $y = e^x$ e, em seguida, o gráfico da função $y = -e^x$.

b) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função $y = (x+1)^3$ e, em seguida, o gráfico da função $y = -(x+1)^3$.

c) A partir do gráfico de uma função real $f(x)$, é possível prever o gráfico de uma função $-f(x)$?

ATIVIDADE 4

Objetivo:

⇒ *Construir, da forma tradicional (com régua, lápis e papel), o gráfico da função $y=(x-2)^3+8$, a partir do gráfico de $y=x^3$*

⇒ *Construir o gráfico da função $y=(x-2)^3+8$ no software Geogebra e comparar os resultados com a construção tradicional.*

a) Construa no software *GeoGebra* o gráfico da função $y=x^3$

b) A partir do gráfico, complete a tabela seguinte. Em seguida preencha os valores seguintes da segunda coluna.

x	$y=x^3$	$y=(x-2)^2$	$y=(x-2)^3+8$
-2			
-1			
0			
1			
2			

c) Construa o gráfico da função $y=(x-2)^3+8$ num sistema de coordenadas cartesianas.

d) Construa novamente o gráfico no *sofware GeoGebra* e compare os resultados.

3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE LIVROS-TEXTOS DE CÁLCULO

Em 17 anos como professora de um curso licenciatura em Matemática, doze deles na disciplina Cálculo I, a pesquisadora acompanhou a dificuldade de diversos alunos iniciantes no estudo do Cálculo Diferencial. Tais dificuldades, muitas vezes, são justificadas pela "*falta de base*" com relação ao estudo de polinômios, funções e trigonometria, pré-requisitos clássicos para o estudo do Cálculo. Verifica-se, no entanto, que mesmo alunos com relativa facilidade nesses conteúdos, são tomados por sentimentos de estranheza e até de rejeição em relação aos conceitos introdutórios do Cálculo. A justificativa para isso pode estar na especificidade dessa disciplina quanto à terminologia, notação e forma de raciocínio.

> O cálculo é usualmente dividido em duas partes principais – cálculo diferencial e cálculo integral -, sendo que cada uma tem sua própria terminologia não-familiar, notação enigmática e métodos computacionais especializados. Acostumar-se a tudo isso exige tempo e prática, processo semelhante ao de aprender uma nova língua. (SIMMONS, 1987, p. 69).

A identificação dessas dificuldades iniciais traz questionamentos sobre qual seria a metodologia mais adequada para iniciar este estudo. A consulta aos livros-texto de Cálculo poderia ser um caminho para encontrar respostas, mas autores de livros de ensino superior costumam se limitar à apresentação do conteúdo, ficando as escolhas metodológicas muitas vezes a cargo do professor. Possivelmente, por não "enxergar" outra opção, o professor pode optar pela a condução do seu curso no modelo tradicional, que se caracteriza pela manipulação excessiva de fórmulas e técnicas algébricas. E talvez essa seja uma abordagem que não oportunize o desenvolvimento de um entendimento real dos conceitos e que poderia justificar em parte as dificuldades enfrentadas pelos alunos.

No entanto, os professores de Cálculo dos dias atuais já dispõem de algumas obras que além de orientar metodologicamente o professor, valorizam o estudo de uma mesma idéia matemática, sob diferentes perspectivas. Dentre estas, destacam-se: Cálculo de George B. Thomas (FINNEY, GIORDANO e WEIR, 2003), Cálculo (STEWART, 2001) e Cálculo com Geometria Analítica (SIMMONS, 1987).

Segundo Finney, Giordano e Weir (2003, p.ix), "[...] um curso não é feito por um livro, mas por professores e alunos" e "os recursos adicionados [...] [à décima] edição tornaram o livro ainda mais flexível e útil, tanto para o ensino quanto para o aprendizado de Cálculo. A flexibilidade citada pelo autor é confirmada na consulta ao texto: os conceitos são abordados, equilibrando-se os métodos gráfico, numérico e analítico; há indicações de atividades a serem desenvolvidas em calculadoras gráficas e computadores; além de apresentar exercícios que enfatizam os procedimentos e técnicas algébricas, tem-se exercícios teóricos e uma diversidade de problemas aplicados às diversas áreas do conhecimento.

Como diferencial em relação às outras obras ainda indica a consulta à biografia de diversos matemáticos e à história do Cálculo, bem como materiais complementares para alunos e professores, manuais de tecnologia, tutorial interativo de Cálculo e o *Syllabus Manager*MT [44], através do acesso ao *site* www.aw.com/thomas_br). O material complementar do aluno contém ensaios e biografias históricas e exercícios "on-line". Já o do professor traz manual de soluções de todos os problemas propostos e transparências em português com as principais ilustrações do livro.

O autor do livro Cálculo (STEWART, 2001) esclarece que a ênfase do seu texto está na compreensão dos conceitos e na utilização da *Regra de Quatro*, na qual os conceitos devem ser abordados por meio das abordagens: numérica, geométrica, algébrica e do ponto de vista verbal e descritivo. Assim como a obra anterior, também estimula o uso dos recursos tecnológicos, como as calculadoras gráficas e os sistemas algébricos computacionais. Apresenta problemas de aplicação às várias áreas do conhecimento que utilizam dados do mundo real e possibilitam mais de uma estratégia para se chegar ao resultado. Como diferencial em relação a outras obras, sugere diversos projetos de extensão a serem desenvolvidos pelos alunos, numa intenção de que se tornem aprendizes ativos.

Apesar do livro Cálculo com Geometria Analítica (SIMMONS, 1987) não enfatizar, comparativamente aos dois primeiros, de forma constante o pensamento visual na abordagem dos conceitos, optou-se por também destacá-lo, por apresentar uma linguagem textual rica, abordando os conceitos do Cálculo quase como um texto literário, como quem conta uma história, sem deixar de primar pelo rigor. No

[44] "O gerenciador de conteúdo Syllabus ManagerMT é uma ferramenta on-line, em inglês, de criação e gerenciamento de conteúdo para professores e alunos que utilizam [...] [esse] livro. Ele pode ser utilizado por qualquer pessoa para criar e manter um ou vários conteúdos programáticos na rede. Os alunos podem 'ativar' um determinado conteúdo de um professor a partir do site." (FINNEY, 2004, p.xiv)

endereço eletrônico da editora responsável pela publicação do livro no Brasil, sugere-se ao professor solicitar um material de ajuda, contendo as respostas aos exercícios pares, não apresentadas no livro.

4 SOFTWARES PARA O ENSINO DE CÁLCULO

O desenvolvimento tecnológico e a inserção das calculadoras e computadores no ensino de matemática, nas duas últimas décadas, alimentou o debate acerca da visualização e as mídias na educação matemática e também no ensino de Cálculo.

Borba e Villarreal (2006) destacam que o uso da mídia para comunicar, representar e produzir idéias matemáticas, altera o tipo de matemática a ser desenvolvida e a maneira como é feita. Concomitantemente, a visualização alcança uma nova dimensão, decorrente de se considerar um ambiente computacional de aprendizagem, como uma forma particular de pensamento coletivo que integra aluno, professor/pesquisador, mídia e conteúdos matemáticos.

Na condução da pesquisa empírica da dissertação, verificou-se que não só a multiplicidade de representações matemáticas, mas também a diversificação de instrumentos, podem possibilitar o desenvolvimento do pensamento visual-espacial. Essa constatação aponta que, se em alguns momentos as ferramentas tecnológicas mostram-se mais adequadas, em outros o trabalho conduzido com instrumentos tradicionais como lápis, papel e régua são mais convenientes para estimular o uso dos diversos processos mentais associados aos modos de pensamento visual-espacial.

O professor que desejar fazer uso das ferramentas tecnológicas tem à sua disposição diversos softwares de construção gráfica. Dentre esses, optou-se por destacar o *Geogebra*, por ser de distribuição gratuita e integrar de forma simplificada as linguagens gráfica e algébrica. Este software foi desenvolvido por Markus Hohenwarter do Department of Mathematical Sciences da Flórida Atlantic University, sendo premiado por diversas instituições em vários países como Alemanha, Áustria e França, pela sua aplicabilidade educacional.

É um software de *geometria dinâmica* que permite as mais diversas construções geométricas. Além de utilizar princípios da Geometria Analítica relacionando cada objeto construído à sua expressão algébrica, permite o processo inverso, retornando a construção gráfica ou geométrica a partir da entrada de dados algébricos ou simbólicos. Possui uma interface *amigável*, apresentando do lado esquerdo a janela algébrica e do lado direito a janela gráfica(ou geométrica).

É possível, a qualquer momento, mesmo após várias construções em um mesmo sistema cartesiano, relacionar de forma imediata o gráfico à sua expressão algébrica. Apesar da entrada de alguns dados como operadores matemáticos ser feita por uma simbologia computacional específica, a visualização desses dados na janela algébrica é aquela encontrada nos livros-texto de matemática. Um exemplo que ilustra essa afirmativa seria a entrada de dados para a construção do gráfico da função $y = x^2 e^x$. O comando a ser digitado seria (x^2)*exp(x), mas após essa digitação, a expressão apresentada na janela algébrica seria a forma padronizada ou seja $y = x^2 e^x$.

O software pode ser "baixado" gratuitamente, através do endereço http://www.geogebra.org/cms/. No *site* também estão disponíveis instrumentos de ajuda sobre como utilizá-lo, de suporte técnico e exemplos de atividades.

REFERÊNCIAS

COSTA, Maria da Conceição Monteiro da. **Modelo do pensamento visual-espacial: tranformações geométricas no início da escolaridade.** 2005. 314 f. Tese (Doutorado) - Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2005.

FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R.. **Cálculo George B. Thomas.** 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.

FROTA, Maria Clara Rezende. **O Pensar Matemático no Ensino Superior: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos.** 2002. 287 f. Tese (Mestrado) - UfMG, Belo Horizonte, 2002.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, v.1, 1987.

STEWART, James. **Cálculo 1.** 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

TALL, David, **Intuiton and rigour: the role of visualization in the calculus**, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, U.K.., 1991.