PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO COM A CONSTRUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS UTILIZANDO O *SOFTWARE*: GEOGEBRA

Humberto Alves Bento

Belo Horizonte – MG
2010

Humberto Alves Bento

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO COM A CONSTRUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS UTILIZANDO O SOFTWARE: GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares

Belo Horizonte – MG
2010

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Bento, Humberto Alves
B478d O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o *software*: Geogebra / Humberto Alves Bento. Belo Horizonte, 2010
2585f. : il.

Orientador: João Bosco Laudares
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Geometria plana. 3. GeoGebra (Software). I. Laudares, João Bosco. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 513

Humberto Alves Bento

***O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o software*: Geogebra**

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Bosco Laudares (Orientador e Presidente da Banca) – PUC Minas
Doutorado em Educação: História, Política, Sociedade (PUC – SP)

Profª. Dra. Maria Clara Rezende Frota – PUC Minas
Doutorado em Educação (UFMG)

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva – UFJF
Doutorado em Educação Matemática (UNESP)

Belo Horizonte, 22 de outubro de 2010.

Ao meu Pai e a minha Mãe: Por terem me ensinado a sonhar e a lutar com muita determinação e ética pela concretização de meus sonhos, colocando Deus sempre a frente de tudo.

À Lívia: Pelo amor dedicado à nossa família e pela compreensão diante de tanta ausência.

A Carlos Alexandre: Por ser a realização do meu maior sonho.

Também dedico este trabalho a todos os corajosos que entram no mundo da Matemática, enfrentam derrotas, vencem obstáculos e saem vitoriosos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, autor da vida e a quem, de certa forma, contribuiu para a criação deste trabalho:

- A minha esposa Lívia e ao meu filho Carlos Alexandre, pelo carinho e paciência destinados a mim nas longas horas de estudo e nas viagens.
- Aos meus Pais: Gedeão e Helena, pela boa base educacional que me deram e pelos grandes incentivos para a realização deste feito.
- Ao meu irmão Carlos Eduardo pelo incentivo e as boas idéias.
- Ao meu orientador, o Professor Doutor João Bosco Laudares, pelo modo como me orientou, me aconselhou, me incentivou, pelas boas observações, comentários e sugestões.
- Aos Professores Doutores Dimas Felipe Miranda, Eliane Sheid Gazire e Maria Clara Rezende Frota pela transmissão de seus conhecimentos e incentivos para a realização deste trabalho.
- A todos meus colegas Mestrandos da PUC Minas, pela amizade que construímos durante nossa convivência, nesses três anos de curso, com ajudas mútuas e recíprocas.
- Aos amigos: Glenda-Amanda, Serginho, Bianca, Valéria da VLX Editoração, meus alunos CEF 07, CEF 19 e graduandos da UCB.

“A paciente instrução das crianças é um tipo de ensino no qual se aprende que o tempo perdido, na realidade, é tempo ganho”.

Jean J. Rousseau

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo investigar questões do ensino de geometria plana com a utilização da informática e o desenvolvimento da habilidade de visualização pela dinâmica das figuras e a exploração da compreensão de conceitos pelo *software GeoGebra*. Para esta investigação, foi utilizado um referencial teórico baseado no ensino aprendizagem de geometria e na informática educacional explorando o pensamento geométrico. Para tanto, foram elaboradas atividades fundamentadas na crescente necessidade de proporcionar ambientes de ensino/aprendizagem mais desafiantes, que permitem aos alunos desenvolver a sua capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente. Nesse estudo, pretendemos compreender a potencialidade do *GeoGebra* como instrumento mediador no processo de ensino aprendizagem da geometria dinâmica. Esta pesquisa se constituiu da elaboração de atividades referenciadas com conteúdos de geometria plana na exploração de propriedades e conceitos tais como: áreas do retângulo e triângulo, teorema de Pitágoras, soma dos ângulos internos de polígono qualquer, pontos notáveis do triângulo (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro), razão áurea. As atividades foram aplicadas a estudantes de escolas públicas do Distrito Federal, onde participaram quatro duplas e dois professores que participaram como sujeitos da pesquisa. A aplicação das atividades mostrou uma melhor compreensão das propriedades e dos conceitos estudados de geometria plana. Como produto do mestrado foi elaborado um texto com as atividades.

Palavras-chave: Pensamento Geométrico. Figuras Geométricas Planas. Geometria Dinâmica. *Software GeoGebra*.

ABSTRACT

This thesis aims to investigate issues of teaching plane geometry with the use of information and skill development for dynamic viewing of figures and operation of the understanding of concepts by the *software GeoGebra*. For this study, we used a theoretical framework based on teaching and learning of geometry in computer education by exploring the geometric thinking. Thus, we developed activities based on the increasing need to provide learning environments and learning more challenging, allowing students to develop their capacity to explore, conjecture and reason logically. In this study, we understand the capability of mediating instrument *GeoGebra* in teaching and learning process of dynamic geometry. This research consisted of developing activities with content referenced plane geometry in the exploration of properties and concepts like the rectangle and triangle areas, Pythagorean theorem, the sum of interior angles of any polygon, notable points of the triangle (centroid, incentre, circumcenter and orthocenter) golden ratio. The activities were applied to students of public schools in the Federal District, where four teams participated. The application of these activities showed a better understanding of the properties and concepts studied plane geometry. As a product of a master text was prepared with the activities.

Key-words: Geometric Thought. Plane Geometric Figures. Dynamic Geometry. *Software GeoGebra*.

LISTAS DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

AGD Ambiente Geométrico Dinâmico

PCNs Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é para mim a disciplina predileta e tudo que a envolve proporciona-me grande satisfação, com a realização de raciocínios lógicos, descobertas e desafios.

Atendendo esta afinidade pela Matemática e ao fato de gostar de ensinar e conviver com os jovens, decidi enveredar pelo curso de licenciatura em Matemática pela Universidade Católica de Brasília em 1997. Logo após o término do curso em 2000, tive a oportunidade de lecionar em diversas escolas públicas e privadas no Distrito Federal.

Portanto, ao longo desses anos a profissão de professor de Matemática é um desafio constante. Decidi em 2005 aprimorar meus conhecimentos fazendo uma pós-graduação em Educação Matemática na Faculdade Jesus Maria José em Taguatinga DF.

Ao término desse curso me senti mais qualificado para ingressar, em 2008, em um Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática na PUC Minas, com o objetivo de aperfeiçoar os meus conhecimentos de conteúdo e didáticos.

Ao longo de minha experiência profissional, tenho observado que existe um conjunto significativo de alunos que não tem entusiasmo pela Matemática, sentindo que esta é mais uma disciplina do seu currículo.

Sabendo que os meios informáticos (computador) estão adentrando em nossas vidas numa velocidade crescente, com isto a falta de entusiasmo por parte dos alunos com a Matemática pode ser amenizada com a introdução eficaz do computador no ensino.

O computador pode provocar uma mudança de paradigma pedagógico. No entanto surgem perguntas do tipo: Que benefícios serão conseguidos com a introdução do computador na educação? Porque usar computador na educação? Existe realmente algum benefício ou é uma questão de modismo?

O advento do computador na educação tem provocado questionamento dos métodos e da prática educacional e também insegurança em alguns professores que receiam em usar o computador em sala de aula. Outra dificuldade é a viabilidade financeira para implantar e manter o laboratório de informática.

O que nos motivou a fazer a pesquisa sobre o tema: *Ensino de geometria plana com uso de software dinâmico*, foi a grande dificuldade de se trabalhar com alunos em um laboratório de informática de forma sistematizada. Apresentamos algumas atividades estudadas e testadas com o objetivo de levar o educando a ter mais uma possibilidade de se apropriar do conhecimento matemático adquirido na aula com o professor.

A geometria, tal qual como é ensinada tradicionalmente, pode mudar com incorporação da tecnologia. Os alunos de geometria poderiam aprender como os conceitos e idéias dessa matéria se aplicam a uma vasta gama de feitos humanos na ciência e na arte. Além disso, poderiam experimentar geometria ativamente. Uma maneira de lhes propiciar essa experiência é através da introdução do computador no currículo escolar. E um excelente aplicativo com o computador é o *software GeoGebra*.

A escolha do *software GeoGebra* se deu por ser um "*software* livre" (não pago) e pela interface de fácil manipulação, interação e visualização, e ainda, por ser um *software* de geometria dinâmica, nele é possível verificar várias propriedades em geometria plana.

Esse trabalho tem o objetivo de apresentar mais uma possibilidade ao educando de se apropriar do conhecimento matemático. Foi realizada uma introdução em sala de aula antes do trabalho com o software.

A questão da pesquisa foi formulada da seguinte maneira: "**Como podem ser estudados conteúdos de Geometria Plana com a utilização da informática, especialmente, utilizando a habilidade de visualização através da dinâmica das figuras e a exploração da compreensão de conceitos pelo *software GeoGebra*.**"

As atividades foram organizadas como seqüências didáticas baseado em Zabala (1998).

A estrutura da pesquisa foi organizada com sete atividades:

- 1ª introdução: Conhecendo o *GeoGebra*;
- 2ª área de um retângulo e área de um triângulo;
- 3ª um resultado de invariância de áreas de triângulos;
- 4ª interpretação Geométrica do Teorema de Pitágoras;
- 5ª propriedades importantes para os polígonos;
- 6ª pontos Notáveis do Triângulo;
- 7ª ilustração geométrica da Razão Áurea.

Os sujeitos da pesquisa foram dois alunos da 7ª série do ensino fundamental (EF), dois alunos da 8ª série do EF, dois alunos da 2ª série do ensino médio, dois professores de Matemática. Todos os sujeitos da pesquisa são alunos ou professores da rede pública do Distrito Federal.

Este trabalho foi assim organizado:

O **capítulo 1** é a introdução dessa dissertação.

No **capítulo 2**, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre o ensino e aprendizagem de geometria, mais especificamente o desenvolvimento geométrico com apoio da informática educativa com o pensamento geométrico e o ensino da geometria plana.

Também nesse capítulo foram feitas algumas reflexões sobre seqüências didáticas no ensino de geometria e sobre o *software GeoGebra*.

No **capítulo 3**, são apresentadas considerações a respeito da abordagem da geometria segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e também considerações a respeito da análise de livros didáticos, sob o tratamento da informática educativa e o ensino de geometria.

O **capítulo 4** é dedicado à apresentação e discussão acerca da metodologia e objetivos de cada atividade.

No **capítulo 5**, apresenta os dados coletados e sua análise a partir da aplicação dessas atividades, as descrições e interpretações feitas pelos alunos e professores, buscando compreender como ocorreu o processo de assimilação e construção das figuras geométricas planas.

Em seguida, no **capítulo 6** são apresentadas as considerações finais, onde procuramos refletir sobre as relações existentes entre os conteúdos de geometria plana e a utilização da informática, especialmente na habilidade de visualização através da utilização de geometria dinâmica.

O produto final de nossa pesquisa (Apêndice) é apresentado na forma de um caderno com seqüências didáticas de geometria plana, elaboradas e aplicadas durante o desenvolvimento da pesquisa.

2 CONCEITOS GEOMÉTRICOS E SEU ENSINO

Euclides foi um grande geômetra e pelas suas obras podemos estudar a geometria, tendo sido um dos protagonistas do estudo do conceito do espaço com possibilidades da abstração.

O conceito de espaço começou, como um conceito de lugar, o nosso lugar, a Terra. Começou com um desenvolvimento técnico que os egípcios e os babilônios chamavam de “medida da terra” A palavra grega para isto é geometria, mas os assuntos não são totalmente iguais. Os gregos foram os primeiros a perceber que a natureza poderia ser entendida usando-se Matemática – que a geometria poderia ser aplicada para revelar, não apenas para descrever. Como observa Mlodinow (2008):

> Desenvolvendo a geometria a partir de descrições simples de pedra e areia, os gregos extraíam as idéias de ponto, linha e plano. Retirando a cortina que encobria a matéria, eles revelaram uma estrutura possuidora de uma beleza que a civilização nunca tinha visto antes. (MLODINOW, 2008, p. 15).

Embora autor de outros trabalhos, a fama de Euclides praticamente repousa sobre seus “Elementos”, o mais antigo texto da Matemática grega a chegar completo a nossos dias. Na realidade, a sua obra não é um livro, mas uma série de treze rolos de pergaminhos. Nenhum dos originais sobreviveu, mas foram transmitidos mais tarde através de uma série de cópias posteriores, e desapareceram quase que completamente na idade das trevas.

Euclides não reivindicou ter sido original em relação a qualquer dos teoremas. Ele viu o seu papel como o de organizador da geometria conforme compreendida pelos gregos. Ele foi o arquiteto do primeiro relato abrangente sobre a natureza do espaço bidimensional do raciocínio puro, sem nenhuma referência ao mundo físico.

A mais importante contribuição de *Os elementos* de Euclides foi o seu método lógico e inovador: primeiro, tornar explícitos os termos, formulando definições precisas e garantidas assim à compreensão mútua de todas as palavras e símbolos. Em seguida, tornar explícitos os conceitos apresentado de forma clara os axiomas ou postulados de modo que não possam ser usados entendimentos ou pressuposições não declarados. Finalmente, deduzir as conseqüências lógicas do sistema empregando somente regras de lógica aceitas, aplicadas aos axiomas e aos teoremas previamente demonstrados.

A sua obra, *Os elementos*, apesar de na sua maior parte ser uma compilação e sistematização de trabalhos anteriores sobre a Matemática elementar da época, teve um grande êxito, haja vista mais de mil edições impressas em todo o mundo, desde a primeira em 1482, um feito editorial talvez só superado pela Bíblia (EVES, 1992).

2.1 Os materiais didáticos

Uma condição fundamental para o ensino e a aprendizagem em Matemática é desenvolver a capacidade de aprender, e para isso, é necessário oferecer um conjunto de materiais, técnicas e sistemas que contribuem significativamente para a incorporação desta habilidade.

De acordo com Lorenzato (2006) os materiais didáticos usados pelo professor podem desempenhar várias funções conforme seu objetivo. Também segundo o mesmo autor, os materiais didáticos são definidos como instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem, sendo que há vários, como: giz, calculadora, *software*s, livros, entre esses estão os materiais manipuláveis. Os materiais, por sua vez, são objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Esses materiais manipuláveis auxiliam o estudante a compreender os objetos geométricos, facilitando a transição para a abstração. Eles permitem, inicialmente, utilizar o tato e a visão, e em seguida imagens, representações ou desenhos. Surge, a partir daí, o registro escrito do que foi vivenciado, podendo ocorrer por meio da reprodução de figuras ou da língua falada. Finalmente viria a linguagem Matemática, com seus símbolos próprios.

É importante salientar que os conceitos matemáticos a serem adquiridos pelos sujeitos, com o auxílio do professor, bem como as representações destes conceitos não estão nos materiais didáticos, mas nas ações interiorizadas pelo sujeito, pelo significado que dão às suas ações, às formulações que enunciam, às verificações e relações que realizam, necessitando para isso o estabelecimento de abstrações e generalizações.

2.2 O uso de novas tecnologias na educação

Durante muito tempo a utilização das calculadoras, computadores e outras mídias foi muito criticada. Ponderava-se que os alunos passariam a apertar teclas e obedecer a máquina, o que contribuiria para torná-lo cada vez mais um repetidor de tarefas. Com essa dificuldade encontrada, o papel do professor ganha uma outra dimensão, pois ele tem que ter conhecimento sobre os potenciais educacionais do computador e ser capaz de alternar adequadamente atividades tradicionais de ensino e atividades que usam o computador. O estudo do uso do computador no ensino de Matemática, ou como ferramenta investigativa cognitiva, ou como maneira de inovar os recursos tradicionais, tem se afirmado como uma das áreas mais ativas e relevantes da Educação Matemática.

Neste contexto, os *software*s educacionais estão sendo incorporados ao processo de ensino e aprendizagem como ferramenta de mediação entre o indivíduo e o conhecimento. Estes permitem a exploração, visualização e experimentação com várias possibilidades. No entanto, isto requer profissionais preparados, dispostos a pesquisar e a inovar e, sobretudo, convicto da importância da educação escolar para a inclusão digital e social.

"O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma alfabetização tecnológica." (BORBA, 2007, p. 16).

O uso de softwares educativos vem adquirindo nos últimos anos uma real importância para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática como de outras disciplinas. Na Geometria, o recurso computacional é um instrumento para desenvolver, entre outras habilidades a de visualização, facilitando a movimentação das figuras com *software* de geometria dinâmica, promovendo maior exploração dos conceitos geométricos, para a aquisição e formalização dos mesmos.

Como observa Valente (1993, p. 32), "quando o aprendiz está interagindo com o computador ele está manipulando conceitos da mesma maneira que ele adquirisse conceitos quando interage com objetos do mundo."

A aprendizagem dos alunos nestes ambientes também tem sido estudada pelo mesmo autor, identificando duas abordagens: instrucionista e a construcionista (VALENTE, 1993). A primeira abordagem, denominada de instrucionista, refere-se à introdução do computador no ensino, alterando muito pouco a prática pedagógica do professor. Em uma segunda abordagem, o aluno constrói o seu conhecimento por meio do fazer algo, do seu interesse, no computador. Essa abordagem foi denominada por Valente (1993) de construcionismo.

D'Ambrósio (1999) também enfatiza a importância dos recursos tecnológicos na escola e no ensino de Matemática:

> A modernização da Matemática nas escolas tornou-se uma preocupação em todos os países, sobretudo em vista da entrada da alta da tecnologia. Os trabalhadores e a população em geral, e sem dúvida técnicos e cientistas, necessitam de uma Matemática mais moderna. Novas posturas, novos métodos de ensino e até mesmo novos conteúdos se fazem necessários. (D'AMBROSIO, 1999, p. 5).

Em geral, as pesquisas do ensino e educação da Matemática procuram criar ambientes de investigação e exploração. Existem inúmeros softwares livres para facilitar o desenvolvimento de tais capacidades cognitivas e permitir a construção do conhecimento matemático. Como exemplo, *GeoGebra*, Winplot e Cabri Geometre que permitem a construção de figuras geométricas pelos próprios alunos e trabalham formas, ângulos, proporcionalidades e semelhanças entre figuras. Também a internet é um recurso que pode ser muito aproveitado na Geometria, pois existem muitos sites que permitem jogos *on line*.

2.3 O computador no processo de ensinar e aprender

O computador pode causar uma grande revolução no processo de ensino e aprendizagem se for utilizado não para "informatizar" os processos tradicionais, mas se for introduzido na escola numa perspectiva de mudança da didática. A mudança deve ser acompanhada da introdução de novas ferramentas para facilitar o processo de expressão do nosso pensamento. E esse é um dos papéis do computador no processo de ensinar e aprender. Quando o aluno resolve um problema utilizando o computador, ele começa pensando na solução do problema e procura descrevê-la por meio de uma linguagem de programação. O computador processa as informações e fornece um resultado. Ao observar o resultado, o aluno realiza uma reflexão, e caso o *feedback* dado não esteja de acordo com o que esperava, o aluno tenta identificar os erros cometidos na descrição, para possíveis correções, depurando, assim, o problema. A ação de resolver um problema utilizando o computador foi mapeada por Valente (1993) por meio do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração.

O computador pode, dessa forma, auxiliar a construção do conhecimento e a compreensão de conceitos. Existem *software*s que contribuem mais (ou menos) para essa compreensão (*software* aberto ou fechado). No entanto, a criação de um ambiente de aprendizagem que favoreça a construção do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades de pensar, não depende somente do *software* escolhido, mas também do professor e da metodologia utilizada por ele.

O desenvolvimento de projetos de trabalho utilizando o computador se apresenta como uma possibilidade metodológica para a criação de ambientes de construção do conhecimento, uma vez que permite uma aprendizagem por meio da participação ativa dos alunos. Permite ainda, a vivência de situações-problema, a reflexão sobre elas e a tomada de decisão. Ao educador compete resgatar as experiências do aluno, auxiliá-lo na identificação de problemas, nas reflexões e na caracterização dessas reflexões em ações.

Para Hernández (1998), a finalidade dos projetos em educação é favorecer o ensino para a compreensão. Desta forma, espera-se que o aluno seja capaz de aprender a aprender, de realizar aprendizagem significativa de conceitos geométricos, desenvolvendo autonomia para o aprendizado. Os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam que o professor deve repensar o processo de ensino da Matemática com a introdução das novas tecnologias, possibilitando ao aluno o interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental da aprendizagem.

É importante salientar que muitos conteúdos específicos de Informática então sendo desenvolvidos na medida em que os conceitos geométricos vão sendo estudados. O computador, utilizado no desenvolvimento das atividades que compõem o trabalho investigativo apresentadas nesta dissertação, foi fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico, uma vez que, por meio dele, os alunos puderam conjecturar, representar idéias, estabelecer relações, comunicar-se, argumentar e validar suas hipóteses. Com as novas tecnologias podemos trabalhar novas formas de representação Matemática. O desenvolvimento do raciocínio pode ser realizado com a utilização de materiais analógicos e digitais.

Mais importante que transmitir informações, conteúdos para serem reproduzidos quando solicitados, é fazer com que os alunos desenvolvam habilidades e estratégias que lhes permitam, de forma autônoma, gerar novos conhecimentos a partir de outros já previamente adquiridos. Capacitando-os assim, a aprender a partir de seus próprios recursos, certamente, terão melhores condições para adaptar-se às mudanças tecnológicas e culturais. Assim, conhecimentos prévios dos estudantes são mobilizados na perspectiva de encontrarem por si mesmos, respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperarem respostas do professor ou do livro didático.

2.4 A exploração do pensamento geométrico com apoio da informática educativa.

Quando se tem a exploração do pensamento geométrico dos alunos, um dos principais objetivos é ajudá-los na aquisição de habilidades do tipo de visualização, identificação de figuras e espaços entre outras.

As características da exploração do pensamento geométrico dos alunos são basicamente relacionadas aos rudimentos da geometria plana. As significações dos conceitos geométricos estão ligadas ao cotidiano. Por exemplo, ao juntar peças os alunos “constroem” uma casa, um barco; tudo que é redondo representa um círculo. As capacidades geométricas foram demonstradas na visualização espacial; verbalização com as trocas de idéias, negociação de significados, construção e manipulação de objetos, contudo, com restrições ao manuseio da régua, dificuldade em medir e a não utilização do transferidor. Infere-se que os conceitos geométricos raramente são desenvolvidos nas escolas.

A ausência de um trabalho com a geometria impede os alunos de ter uma visão ampla da Matemática.

2.5 A informática na geometria: “geometria dinâmica”

Grécia Galvez (1985), em sua tese de doutorado, cujo segundo capítulo tem como título: “A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola”, se refere a uma reflexão sobre o ensino e aprendizagem da geometria com informática que a levou a delimitar uma série de problemas que a geometria dinâmica pode ajudar a solucionar.

A mesma autora levanta importantes questões sobre a geometria dinâmica como: preparação da passagem da geometria de observação, de comprovação empírica para a geometria dedutiva; compatibilização do caráter variável e aproximado dos resultados obtidos empiricamente; trabalho com os parâmetros das funções entre outras.

Na análise de Oliveira (2001) a utilização do “Ambientes de Geometria Dinâmica” leva a uma investigação que tem como finalidade analisar a construção do significado matemático, pelos alunos, em interação social, focando a utilização do computador em atividades de construção geométrica, equacionando e comparando os seguintes aspectos:

- relação entre o sentido conferido à Matemática e o mundo experiencial dos alunos;
- o papel do computador como instrumento mediador dos processos de raciocínio;
- a relação entre as interações sociais e a construção do significado matemático.

2.6 O pensamento geométrico e o ensino de geometria plana

2.6.1 Pensamento geométrico e a visualização

Desenhos, figuras, esboços e diagramas têm um lugar importante no ensino/aprendizagem da Geometria e facilitam a passagem gradual do concreto ao abstrato. A importância das representações externas (desenhos, gráficos, diagramas) é usualmente aceita, mas cada indivíduo tem de criar uma representação mental do objeto, a figura.

De acordo com Shulte (1994) o Ambiente Geométrico Dinâmico (AGD), na aprendizagem da Geometria, é um ambiente que pode propiciar a descoberta de propriedades e relações geométricas, através do desenvolvimento da capacidade dos alunos estabelecerem e explorarem conjecturas.

Os progressos que se têm verificado em termos de *software* permitem manipular as representações externas de forma reconhecidamente dinâmica.

Num AGD é possível fazer construções e manipulá-las, conservando invariantes as propriedades e relações estabelecidas. A observação de regularidades, enquanto se processa a manipulação direta, permite a “descoberta” de propriedades e relações.

Também temos que salientar que as explorações desenvolvidas em ambientes computacionais dinâmicos favorecem a compreensão das relações entre os conceitos geométricos e levam progressivamente o aluno a pensar de um modo mais geral e abstrato.

A visualização é entendida como a capacidade de tratar informação visual e é uma das ferramentas utilizadas na resolução de problemas geométricos e que tem sido considerada como objeto de pesquisa e debate em Matemática e Psicologia.

O movimento e a modificação dos desenhos num AGD possibilitam uma fácil visualização das propriedades e relações geométricas.

Os AGDs funcionam como “espelhos intelectuais” onde os alunos podem experimentar as suas idéias, merecendo especial destaque o feedback visual devolvido pela manipulação dos desenhos no computador como apoio na resolução de problemas.

Este *feedback* visual, através da manipulação de uma construção, permite verificar visualmente uma propriedade ou uma relação ou validar uma construção como resistente à manipulação direta (arrastamentos), ou seja, legitimar uma figura associada a diferentes representações externas.

A utilização dos AGDs é facilitadora da experimentação e da investigação de propriedades e relações. Os AGDs podem dar uma contribuição importante ao processo de descoberta indutiva de teoremas, melhor que os recursos tradicionais de papel e lápis que apresentam: morosidade na exploração de exemplos significativos e menor precisão nas medições e cálculos; não passagem, na maior parte dos casos, da fase de desenho à de figura, porque as construções resultantes são estáticas e apenas podem ser tornadas flexíveis por imaginação.

2.6.2 *Obstáculos visuais*

Os desenhos, apesar dos benefícios que propiciam, também podem trazer obstáculos à compreensão da figura que representam. Pólya (1975) agrupa esses obstáculos em três categorias:

- os diagramas são casos particulares, propiciando que características irrelevantes sejam tomadas como propriedades;
- o uso de desenhos em posições padronizadas (tal como a posição preferida horizontal - vertical) pode provocar confusão entre a representação externa e o ente geométrico;
- a incapacidade de os alunos perceberem um desenho de diferentes maneiras.

Os AGDs permitem construir, relacionar e transformar, de acordo com os desejos do usuário, objetos geométricos de diferentes tipos (retas, ângulos, polígonos, circunferências [...]).

Ponte (1998, p. 97) afirma que: “[...] apesar do reduzido número de estudos a investigação tem confirmado as grandes potencialidades educativas para um ambiente computacional e para o ensino da geometria.” Embora o número de estudos publicados, nomeadamente a partir de 1995, continue a ser muito reduzido, eles confirmam aspectos já considerados por autores, tais como:

- as grandes potencialidades educativas da utilização dos AGD no ensino da Geometria;
- a subordinação da tecnologia à criação de ambientes de aprendizagem poderosos;
- e, para um maior aproveitamento (e conhecimento) das potencialidades das tecnologias, a necessidade de poder contar-se com períodos de trabalho prolongados no tempo.

2.6.3 *Ensino da geometria*

Entre os aspectos fundamentais para uma compreensão de conceitos em Matemática está o desenvolvimento da capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente. A Geometria é um conteúdo privilegiado para desenvolver estas capacidades.

Segundo Duval (1995, p. 126):

> A geometria envolve três formas de processo cognitivo que preenchem específicas funções epistemológicas: visualização para a exploração heurística de uma situação complexa; construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados; raciocínio, que é o processo que conduz para a prova e a explicação.

Segundo, ainda, o mesmo autor, essas três espécies de processos cognitivos são entrelaçadas em sua sinergia e cognitivamente necessárias para a eficácia do aprendizado em geometria. Por outro lado, a heurística dos problemas de geometria refere-se a um registro espacial que dá lugar a formas de interpretações autônomas,

Como o contexto escolar tem um papel fundamental, não é possível separar a atividade, as pessoas que atuam e as respectivas interações e os instrumentos mediadores dessa ação. O computador, segundo Rodrigues (1997, p. 24) "funciona como estrutura mediadora da atividade, organizando-a simultaneamente".

Lesh (1990) considera que o computador propicia o aumento da capacidade de aquisição e compreensão de conceitos, criando espaço para o desenvolvimento de processos reflexivos em geometria.

A criação de contextos sociais favoráveis à aprendizagem é, ainda, uma das características de um ambiente geométrico dinâmico (*software* que permite construir e manipular figuras geométricas), o que parece beneficiar a aquisição de conhecimentos, dada a influência da interação social no desenvolvimento cognitivo, incluindo a produção de provas.

2.6.4 Crítica ao ensino de geometria

Parra e Saiz (1996) fazem uma reflexão, no sentido de que, na escola primária, não se ensina geometria para contribuir ao desenvolvimento, por parte dos alunos, no domínio de suas relações com o espaço, mas que se reduz a aprendizagem da geometria ao conhecimento de uma coleção de objetos definidos como fazendo parte de um "saber cultural".

Este "saber cultural" se opõe ao saber funcional. O primeiro, na ausência do segundo, só serve para mostrar que a pessoa sabe, suprimindo termos, definições e até demonstrações acumuladas na memória, frente à demanda explícita desse saber (que também pode ser um "saber fazer", não só um "saber dizer").

O "saber funcional", em troca, é aquele ao qual se recorre com a finalidade de resolver um problema; são os esquemas ou modelos que utilizamos para enfrentar uma situação e tratar de nos adaptar a ela de um ponto de vista cognitivo (procura de explicações, tentativas de previsão de resultados, análise de fatores que intervêm, esforços de controle do curso dos processos reais).

Fazem parte de um saber funcional as teorias que os cientistas aplicam para dar conta dos fenômenos que estudam, sujeitas a reajustes periódicos a partir de sua confrontação com o acontecer real. Fazem parte de um saber exclusivamente cultural essas mesmas teorias, repetidas por eruditos que não recorrem a elas para orientar sua prática.

"O ensino de geometria, em nossas escolas primárias, se reduz a fazer com que nossos estudantes memorizem os nomes das figuras, os mapas geométricos e as fórmulas que servem para calcular áreas e volumes [...]" (PARRA; SAIZ, 1996, p. 250).

De acordo com Shulte (1994), com muita freqüência a geometria é considerada pelos professores de escola elementar simplesmente como o estudo de retângulos, segmentos de reta, ângulos, congruência e coisas do gênero. Os professores da educação infantil ensinam a reconhecer figuras (círculos, quadrados e triângulos) do mesmo modo como ensinam a reconhecer letras e números. Mesmo nas séries intermediárias, a geometria muitas vezes é negligenciada até o fim do ano, quando então, às pressas, introduzem-se algumas figuras e termos e fazem-se alguns exercícios.

A decisão dos professores sobre a geometria a ser ensinada é profundamente influenciada pela geometria que eles tiveram (geralmente uma pincelada durante o ensino fundamental seguida de definições e demonstrações no ensino médio).

De acordo com Coelho (1995), transformações no plano na era da imagem e do movimento, em se tratando de Geometria, não pode ser estática, como vinha sendo ensinada segundo Euclides. Um curso de geometria dinâmica ideal não lançaria mão do uso de computadores e da experiência dos alunos com vídeo-game.

2.7 Sequências didáticas no ensino de geometria

Há alguns anos, surgiu uma ferramenta muito importante no ensino de geometria: a Geometria Dinâmica. Implementada por *sofwares* como o The Geometer's Sketchpad, o Tabulae, o Cinderella, Cabri-Géomètre, *GeoGebra*, Winplot entre outros, esta ferramenta permite explorar interativamente os conceitos da geometria clássica através do uso do movimento nas figuras construídas.

Esta natureza interativa, quando bem utilizada pedagogicamente, permite levar os estudantes a proporem suas próprias conjecturas e testarem-nas eficientemente, adquirindo uma melhor percepção e compreensão visual daquilo que estão investigando.

Deste modo, têm-se nas potencialidades propiciadas pelo uso de mídias possibilidades de atingir o objetivo de se apropriar do conhecimento matemático de forma sólida e significativa.

No entanto, as *seqüências didáticas* são um dos traços mais claros que determinam as características diferenciais da prática educativa.

Segundo Zabala (1998, p. 18) quando realizamos uma análise destas seqüências didáticas buscando os elementos que as compõe, nos daremos conta de que são *um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos*.

Para organizar uma seqüência didática o professor leva em conta os conhecimentos prévios do aluno em relação aos novos conteúdos de aprendizagem. Também adéqua esses conteúdos ao nível de desenvolvimento do aluno no sentido de provocar um conflito cognitivo e promover a atividade mental do aluno, necessários para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios. Por último, promove uma atitude favorável que seja motivadora em relação à aprendizagem dos conteúdos e ajuda o aluno a adquirir habilidade relacionada com o aprender a aprender, que lhe permita ter autonomia cada vez maior em sua aprendizagem.

Ao analisar as características de uma seqüência didática, percebemos que elas podem envolver atividades de aprendizagem e avaliação. Também são organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos.

As seqüências didáticas são um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa.

No conjunto de relações interativas necessárias para facilitar a aprendizagem em seqüências didáticas, Zabala (1998) caracteriza essas relações da seguinte maneira: planejar a atuação docente, contar com contribuições e conhecimentos dos alunos, estabelecer metas ao alcance dos alunos, oferecer ajudas adequadas entre outras.

Além destes critérios de caráter geral, nas seqüências de aprendizagem, em cada unidade didática e no curso das diferentes unidades, Zabala (1998) acrescenta que é preciso levar em conta ainda uma série de medidas, entre outras: adaptar o caráter dos conteúdos atitudinais às situações reais dos estudantes, partir da realidade, introduzir processos de reflexão críticas, favorecer modelos de atitudes, fomentar autonomia do aluno.

Neste sentido, pudemos ver que a partir de nossas propostas de trabalho aparecem, para os alunos, diferentes oportunidades de aprender. Também devemos levar em consideração que os diferentes conteúdos que apresentamos aos estudantes exigem esforços de aprendizagem e ajudas específicas. Nem tudo se aprende do mesmo modo, no mesmo tempo nem com o mesmo trabalho. Discernir o que pode ser objeto de uma unidade didática exige do professor um trabalho continuado e bem planejado.

2.8 Sobre o *GeoGebra*

GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica que foi desenvolvido pelo Austríaco Ph.D. Markus Hohenwarter no ano de 2002 para ser ulitizado em sala de aula, principalmente em escolas secudárias. O nome *GeoGebra* reúne **GEO**metria, ál**GEBRA** e cálculo. Esse *software* recebeu muitos prémios internacionais incluindo o prémio de *software* educacional Alemão e Europeu.

O ***GeoGebra*** possui todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica, dentre as principais destacamos:

- permite construir figuras geométricas e deformá-las mantendo suas propriedades;
- permite criar novas ferramentas (macro-construções) e adicioná-las na barra de menu;
- permite que seus arquivos sejam facilmente compartilhados em outros programas de computação;
- é um *software* livre;
- excelente interface;
- fácil de manusear.

É possível baixar o *GeoGebra* gratuitamente pela internet acessando a página: - <http://www.*GeoGebra*.org/cms/>. - e seguir os passos para instalação do programa. É possível também, obter pela internet o manual do *GeoGebra*, acessando o site: - **<**www.***GeoGebra***.org/help/docupt_PT.pdf>.

2.8.1 Usando o GeoGebra

O *GeoGebra* é um programa amigável, que os alunos aprendem a dominar rapidamente e que permite concretizar estratégias com as características de intervenção poderosa.

O *GeoGebra* promove uma aprendizagem dinâmica da Geometria e possibilita de uma forma eficaz a interação com os usuários. Também se pode dizer que este Ambiente de Geometria Dinâmica é particularmente apropriado para apoiar um ensino renovado da Geometria.

Foram analisadas estratégias de construção de conhecimentos geométricos, a partir da exploração de construções geométricas resistentes (as propriedades e relações não mudam quando se modifica o desenho por arrastamento de elementos livres e semi-livres), pesquisa essa que envolveu:

- a realização das construções;
- a justificação dos processos utilizados;
- a investigação das construções e descoberta das propriedades das figuras;
- compreensão dos objetos e relações geométricas, formulação de conjecturas e elaboração de argumentos indutivos e dedutivos.

3 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNs) QUANTO AO ESTUDO DE GEOMETRIA, DA INFORMÁTICA E DOS LIVROS DIDÁTICOS

3.1 Introdução

Os PCNs apresentam diretrizes para o processo ensino e aprendizagem da Matemática. Para essa dissertação estudamos os itens relativos à geometria com utilização das novas tecnologias, como é tratado, pois

> a denominada "revolução informática" promove mudanças radicais na área do conhecimento, que passa a ocupar um lugar central nos processos de desenvolvimento, em geral.É possível afirmar que, nas próximas décadas, a educação vá se transformar mais rapidamente do que em muitas outras, em função de uma nova compreensão teórica sobre o papel da escola, estimulada pela incorporação das novas tecnologias. (PCNs, p. 119).

Pesquisamos o que os PCNs propõem a respeito do: "Ensino e aprendizagem de geometria com informática".

Primeiramente é feita uma abordagem a respeito das tecnologias (informática) depois é feita uma análise das contribuições da geometria na formação do cidadão.

3.2 O recurso às novas tecnologias de informática.

Com uso das novas tecnologias há um desafio para a escola que tradicionalmente se apóia na oralidade e na escrita.

Calculadoras computadores e outras tecnologias estão cada vez mais presentes nas atividades da sociedade. Incorporar esses novos recursos tecnológicos ao ensino e aprendizagem em matemática exigem um repensar a partir de:

- relativização do cálculo ou das operações que terão maior rapidez eficiência;
- evidência do novo papel da linguagem gráfica e de formas de representação;
- possibilidade de realização de projetos e atividades de investigação.

Há políticas públicas do governo para incorporação das novas tecnologias das escolas brasileiras que virá em benefício para mudanças de novas estratégias para metodologia e aprendizagem que permita ao estudante desenvolver novos ritmos de aprendizagem.

Quanto a performance do professor haverá um trabalho quanto a escolha de softwares educativos que permitem a elaboração de atividades em aulas com computador e calculadoras complementando as aulas expositivas. Desta forma espera-se uma nova relação professor-aluno, com mais proximidade, interação e colaboração. Não há propósito de substituição do professor, pois o mesmo é envolvido com as novas tecnologias na preparação de material, sua aplicação e avaliação.

3.3 Geometria, espaço e forma

Os PCNs enfatizam a necessidade do trabalho com os conceitos geométricos, pois com os mesmos desenvolve o pensamento geométrico do estudante, possibilitando a descrição e representação do mundo em que vive. Este pensamento geométrico é desenvolvido com a visualização e aplicação de propriedades das figuras e construção de relações.

Tanto para o estudo da geometria dos espaços unidimensional, bidimensional ou tridimensional, a exploração de objetos do mundo físico de obras de arte, pinturas, desenhos, artesanatos, permite o estabelecimento de conexões da matemática com outras áreas de conhecimento num trabalho interdisciplinar.

Um dos itens do conteúdo do ensino de geometria se refere as transformações de uma figura no plano com desenvolvimento mais dinâmico das atividades.

Quanto às representações planas provenientes da análise de figuras espaciais esta pode trazer recursos à visualização e levantamento de conjecturas em situações a serem analisadas, na busca de relações entre a representação do objeto e suas propriedades.

Trabalhar com espaço e forma traz a possibilidade de exploração de situações com construções geométricas também com régua e compasso entre outras.

3.4 Considerações sobre o conteúdo de geometria plana em alguns livros didáticos de matemática do ensino fundamental e médio

3.4.1 O livro didático de matemática

O livro didático é fundamental no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, podendo-se constituir numa referência para a prática docente, como ressaltado por Mansutti (1993).

Segundo Ruggiero (2000, p. 37), o livro didático estaria desenvolvendo algo que ele define como transmissão indireta, ou seja, que não tenha sido passada pelo professor, considerando o livro didático como um instrumento de apoio ao educando.

O livro didático sozinho não tem condições de possibilitar uma aprendizagem adequada, sendo essencial à participação de um professor determinado a realizar um bom trabalho. Como descreve Lopes (2000, p. 39): "Um bom livro, nas mãos de um professor despreparado, pode ser um desastre, assim como um livro de baixa qualidade, nas mãos de um professor competente, pode resultar numa ótima aprendizagem". E ainda, reafirmado por Lopes (2000, p. 39): "utilizado de modo adequado, o livro mais precário é melhor do que nenhum livro, enquanto os mais sofisticados dos livros podem tornar-se pernicioso, se utilizado de modo catequético".

Quanto ao ensino de Geometria, teceremos algumas considerações.

Segundo Pavanello (1993), uma das possíveis causas do abandono do ensino da geometria ocorreu com a promulgação da Lei 5.672/71, que dava as escolas liberdade na escolha dos programas possibilitando aos professores de Matemática o abandono do ensino de geometria ou deixar este conteúdo para o final do ano letivo, talvez por insegurança sobre a matéria. Porém tal situação é preocupante no sentido que a geometria durante a evolução das ciências sempre foi considerada como essencial à formação intelectual do individuo, assim como na capacidade de raciocínio.

Lorenzato (1995, p. 5), justifica a necessidade do ensino de geometria, pelo fato de que, um indivíduo sem este conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas. E ainda não pode se utilizar da geometria como facilitadora para compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano.

À importância da geometria também se dá pelo fato de estarmos cercados de geometria em nosso cotidiano. Lidamos constantemente com idéias de paralelismo, congruência, semelhança, simetria, além de fatores de medição como área, volume. Isso ocorre sem que as pessoas percebam, pois faz parte do cotidiano de suas vidas; quanto "cabe" de água neste pote? (volume), quantos metros de piso eu compro? (metros quadrados – área).

É de grande importância no apoio ao ensino de outras disciplinas, como, por exemplo, no auxilio da interpretação de mapas, nos gráficos estatísticos, conceitos de medições, para se entender a evolução histórica da arte, tanto na pintura como na arquitetura. Poder esclarecer situações abstratas, facilitando a comunicação da idéia Matemática.

Com o objetivo de conhecer um pouco mais a respeito dos livros didáticos, bem como verificar e entender o tratamento dado ao ensino de Geometria Plana, optamos, no presente trabalho, pela análise de três livros didáticos de Matemática onde foram analisados os conteúdos e as abordagens da geometria.

Livro	Título	Autores	Editora	Ano
1	Matemática, contexto e aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática	2008
2	Matemática, uma nova abordagem	José Giovanni e José Roberto Bonjorno	FTD	2007
3	Fundamentos de Matemática elementar	Osvaldo Dolce	Atual	1993

Quadro 1: Dos livros didáticos analisados
Fonte: Dados da pesquisa

Para essa análise estabelecemos alguns critérios, que definimos a partir das recomendações dos PCNs e de acordo com o tema da pesquisa.

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resoluções de questões Matemáticas e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenhos, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. (BRASIL, 2002, p.123).

A metodologia usada na Geometria deve privilegiar práticas que apresentem maior riqueza no que se refere à aplicação no cotidiano, aproveitando sempre as relações entre conteúdos e contexto para dar significado ao que foi aprendido. A forma de apresentação e desenvolvimento do conteúdo abordado nos livros didáticos deverá visar o entrelaçamento das disciplinas, usando a Matemática como ferramenta e linguagem para resolver problemas de todas as áreas do conhecimento, assim como base importante para o progresso científico, tecnológico e social da humanidade.

- **Livro 1**

No livro do Dante percebemos no conteúdo de geometria, no ensino fundamental, que há equilíbrio e inter-relação entre as representações experimental, intuitiva e formal. Não foi verificado um número grande de demonstrações. Verificamos que as demonstrações surgem naturalmente como um desenvolvimento e refinamento de considerações intuitivas.

Esse livro não integra geometria com novas tecnologias (informática).

Percebemos que o autor apresenta os conteúdos partindo de situação problema. Também apresenta atividades de construções geométricas e foi verificado que essas atividades permitem ao aluno, fazer conjecturas. O autor apresenta em sua obra atividades que desenvolvem a habilidade de visualização. Nesse livro, o autor propõe algumas oficinas, atividades de manipulação e atividades com material concreto. Na análise feita percebemos que o autor propõe atividades que propiciam aos alunos alcançarem novos conhecimentos a partir da experimentação e da pesquisa.

Foi verificado que existem, na coleção analisada, atividades que promovem a articulação entre conhecimento novo e o que já foi abordado anteriormente. Começou com problemas simples e foi aos poucos aumentando o grau de complexidade.

Preocupou-se em trabalhar também a história da Matemática, comparando-a em diferentes períodos da História e cultura.

Finalmente propôs situações-problemas que envolvem aplicações de um conjunto de idéias Matemáticas.

- **Livro 2**

No livro do Giovanni, o tratamento da Geometria tem sido estereotipado, privilegiando a nomenclatura e a apresentação de formas canônica. As sistematizações são inadequadas, pois partem dos conceitos de ponto, reta e plano, sem se preocupar com a exploração de conceitos e de propriedades geométricas. Não é explorada também a potencialidade deste campo da Matemática para descrever o mundo e resolver problemas mais concretos. Esse livro tem uma abordagem conservadora onde nele não é abordada geometria com informática.

Percebemos que o autor não apresenta os conteúdos partindo de situação problema. Também não apresenta atividades de construções geométricas. O autor não apresenta atividades que desenvolvem a habilidade de visualização.

Nesse livro, o autor não propõe nenhuma oficina, nem atividades de manipulação com material concreto. Na análise feita percebemos que o autor não propõe atividades que propiciam aos alunos alcançarem novos conhecimentos a partir da experimentação e da pesquisa. Finalmente, foi verificado que não existem, na coleção analisada, atividades que promovem a articulação entre conhecimento novo e o que já foi abordado anteriormente.

- **Livro 3**

O livro do Dolce contempla a transmissão de conhecimentos geométricos e demonstrações.

No quesito: "desenvolvimento de capacidades e competências" e no que diz respeito às habilidades que os alunos desenvolvem, esse livro contempla essas habilidades. Ressaltamos que o livro auxiliar na compreensão de conceitos e não na memorização.

Esse livro não consolida conhecimentos práticos e teóricos adquiridos, referentes à aplicação dos conceitos aprendidos às situações da vida diária do estudante. Esse livro é mais conceitual com uma tendência formalista clássica.

No que diz respeito a avaliação dos conhecimentos práticos e teóricos adquiridos: o livro não promove a avaliação e a auto-avaliação dos alunos mas por um outro lado é um manual completo de teorias e demonstrações em geometria plana. Esse livro não traz nenhuma abordagem de geometria com informática.

No Manual do Professor, o autor discorre sobre a importância de se trabalhar com a História da Matemática, no entanto, na unidade analisada não consta nenhuma citação quanto à História da Matemática.

Os exercícios propostos começam com um grau de complexidade menor que vai aumentando gradualmente, até chegar a exercícios mais complexos.

A teoria foi desenvolvida de maneira objetiva, em linguagem acessível e com o rigor necessário ao nível de alunos de Ensino Médio.

Neste livro-texto, consta a preocupação dos autores em dar ênfase à participação dos alunos na construção do conhecimento.

> O livro didático de Matemática, enquanto instrumento de trabalho do professor e de uso pelo aluno, é adequado na medida em que se constitui um elemento de contribuição para a aquisição, pelo aluno, de um saber matemático autônomo e significativo. (GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS, 2007).

Não averiguamos atividades que fossem ao encontro à proposta de investigação acima citada.

Embora os livros estudados, no capítulo sobre Figuras Geométricas, diferenciem-se pela notação (formal ou não), eles apresentam o conteúdo matemático seguido de exercícios. Algumas atividades possibilitem ao aluno levantar conjecturas. Constatamos também que os autores, enquanto formalizam os conceitos geométricos, não despertam a atenção do aluno para a associação das figuras planas com formas no mundo material.

4 METODOLOGIA DE ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

Nesse capítulo descreveremos as atividades elaboradas de geometria plana com apoio do *software GeoGebra*.

Estudamos os seguintes conteúdos:

- Áreas de triângulos e retângulos.
- Teorema de Pitágoras.
- Soma dos ângulos internos de um polígono.
- Pontos Notáveis de um Triângulo.
- Razão Áurea.

Com as atividades desenvolvidas buscamos explorar o pensamento geométrico com recursos da visualização por meio da geometria plana, a qual enfatiza o movimento das figuras mantendo suas propriedades.

Para o trabalho da geometria dinâmica optamos pelo *software GeoGebra*, que tem a facilidade de acesso por se um *software* livre e com facilidade de manipulação. Tendo características a permitir possibilidades de traçados de figuras com variedade de posições.

A seguir, será apresentada a descrição das atividades que se encontram no APÊNDICE desta dissertação. De cada atividade serão apresentados os seus **conteúdos**, **objetivos** e a **metodologia** de sua elaboração.

4.1 Atividade introdutória

- **TÍTULO**: Conhecendo o *GeoGebra*.
- **CONTEÚDO**: *Software GeoGebra.*
- **OBJETIVOS**:
  - Conhecer e dominar a lógica do *software*.
  - Dominar os seus comandos principais para construção de figuras geométricas planas.
  - Manusear o *software* na construção das principais figuras planas.
  - Explorar os cinco postulados de Euclides.
- **METODOLOGIA**:

Para facilitar o entendimento dos comandos e da sintaxe do programa, dividimos essa atividade em duas partes:

- na primeira parte dessa atividade, foi utilizada uma seqüência de diversas ações para ser guiadas pelo professor, na forma de estudo dirigido, para que o estudante possa conhecer e dominar a construção das figuras planas básicas com o auxílio do *software GeoGebra*;
- na segunda parte, apresentamos um texto com a história de Euclides e a sua grande obra: "Os elementos" nesse texto são mencionamos a grande importância desse trabalho. Nessa atividade, o educando vai ter a possibilidade de construir no *GeoGebra* os cincos postulados de Euclides os quais foram estudados com os recursos da geometria dinâmica.

4.2 Atividade 1

- **TÍTULO**: Exploração do conceito de área do Retângulo e do Triângulo.
- **CONTEÚDO**: Estudo das áreas do Retângulo e do Triângulo.
- **OBJETIVOS**:
  - Identificar e representar um triângulo e um retângulo no *software GeoGebra*.
  - Calcular as medidas dos lados e a área do triângulo e do retângulo, utilizando os recursos do *software* "*GeoGebra*".
  - Estabelecer uma diferença entre a área de um triângulo e a área de um retângulo.
  - Conhecer e manipular as principais ferramentas do *GeoGebra*.
  - Desenvolver habilidade de compreensão da área de um triângulo e de um retângulo com a possibilidade de deformar as figuras planas.
- **METODOLOGIA**:

Nessa atividade o aluno terá a possibilidade de construir um retângulo e um triângulo de forma que quando deformamos a figura, as suas propriedades se mantêm.

Foi solicitado ao estudante, nessa atividade, que em diversas posições da figura fosse calculada a área do retângulo e do triângulo.

O estudante deverá lançar conjecturas para determinar a área do triângulo a partir da área do retângulo. Em várias situações e posições do retângulo e do triângulo o estudante deverá obter a área do retângulo e do triângulo.

No final da atividade, o aluno deverá responder questões em relação ao seu desempenho na atividade.

4.3 Atividade 2

- **TÍTULO**: Um Resultado de Invariância de Áreas de Triângulos.
- **CONTEÚDO**: Área de triângulo.
- **OBJETIVOS**:
  - Utilizando a geometria dinâmica com algumas propriedades dos triângulos, mostrar a invariância da área quando não se altera a altura e nem a base.
  - Dominar o *software GeoGebra* na sua qualidade de movimentação ou deformação referente a área do triângulo. Para verificar que quando deformamos um triângulo sem alterar a sua base e a sua altura, a sua área não se altera.
- **METODOLOGIA**

O aluno irá construir dois triângulos com base no eixo x e altura dada através de uma reta paralela ao eixo x passando por um ponto A. Em seguida, irá deformar esses triângulos pela movimentação dos vértices que ficam na reta paralela ao eixo x.

Fazendo isso, o aluno irá conhecer e manipular as principais funções do *GeoGebra* para verificar que dado um triângulo qualquer, se fixarmos dois vértices (no eixo x) e movimentarmos o terceiro vértice sob uma reta paralela aos vértices fixados, a sua área não irá se alterar.

No final da atividade o aluno responde algumas questões inerentes à propriedade.

4.4 Atividade 3

- **TÍTULO**: Exploração do Teorema de Pitágoras
- **CONTEÚDO**: Uma exploração diversificada e ampliada do Teorema de Pitágoras.
- **OBJETIVOS**:
  - Reconhecer a validade do Teorema de Pitágoras.
  - Representar áreas de figuras planas como o **triângulo retângulo**, onde nos lados, os catetos e a hipotenusa, inserimos figuras planas como o **triângulos eqüiláteros**, **quadrados**, **pentágonos**, **semicircunferências** dentre outras figuras planas para representar e mostrar a validade do Teorema de Pitágoras.

- **METODOLOGIA**:

Na atividade "Teorema de Pitágoras", o aluno vai primeiramente ler a teória para entender quem foi Pitágoras e a idéia do teorema que leva seu nome.

Logo em seguida, o aluno com os recursos das ferramentas do *GeoGebra*, vai verificar a validade do Teorema de Pitágoras, utilizando nos lados de um triângulo retângulo (catetos e hipotenusa), "quadrados".

Para isso, o aluno vai criar um triângulo retângulo ABC, depois criar três quadrados cujos lados coincidem com os comprimentos dos catetos e da hipotenusa do triângulo retângulo.

Depois o aluno mede os lados e obtém as áreas dos quadrados para que possa fazer a verificação preenchendo um quadro de dados.

Desta forma se faz a interpretação geométrica do teorema de Pitágoras que tem a soma das áreas dos quadrados, cujos comprimentos são os catetos é igual a área do quadrado cujo comprimento é a hipotenusa.

A validade do Teorema de Pitágoras pode também ser constatada utilizando "triângulos eqüiláteros", cujos lados são os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo, com o cálculo da área destes triângulos, sendo que o triângulo eqüilátero cujo lado é a hipotenusa tem área que é a soma da área dos triângulos eqüiláteros cujos lados são os catetos.

Para isso, o aluno vai criar um triângulo retângulo **ABC**, depois criar três triângulos eqüiláteros cujos lados coincidem com os comprimentos dos catetos e da hipotenusa do triângulo retângulo.

Logo em seguida, o aluno irá medir os lados do triângulo e obter as áreas dos triângulos. Depois o aluno irá preencher um quadro para constatar novamente a validade do Teorema de Pitágoras.

Da mesma forma o aluno vai utilizar "Pentágonos Regulares" e "Semicircunferências" para fazer a verificação da validade do Teorema de Pitágoras.

4.5 Atividade 4

- **TÍTULO**: Verificação da "Desigualdade Triangular", "Ângulo Externo de um Triângulo" e dedução de fórmulas para:
  - Soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.
  - O número de diagonais de um polígono.

- **CONTEÚDOS**:
  - Soma dos ângulos internos do triângulo.
  - Soma dos ângulos internos do quadrilátero.
  - Soma dos ângulos internos do pentágono e generalização para polígonos qualquer.
  - Dedução de uma fórmula para diagonais de polígonos.
  - Dedução de uma fórmula para soma dos ângulos externos de um triângulo.
  - Verificação existência da desigualdade triangular.
- **OBJETIVOS**:
  - Mostrar as das desigualdades triangulares.
  - Verificar a existência da propriedade para o ângulo externo de um triângulo.
  - Deduzir a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.
  - Deduzir a fórmula do número diagonais de um polígono qualquer; com recursos da visualização no *GeoGebra*.
- **METODOLOGIA**:

Na atividade “soma dos ângulos Internos de um polígono qualquer” o aluno vai construir polígonos (triângulos, quadriláteros, pentágonos e etc.), de medir os ângulos internos dos polígonos e verificar utilizando à geometria dinâmica (podendo deformar a figura mantendo-se as propriedades) a validade da propriedade: “a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º”. Com base nessa propriedade, mostrar a soma dos ângulos internos de quadriláteros e de pentágonos para que no final da atividade, o aluno tenha a oportunidade de generalizar a propriedade para soma de ângulos internos de polígonos quaisquer (180º x n); respondendo a perguntas e preenchendo quadros.

Na atividade “Número de Diagonais de Polígonos”, o aluno vai construir polígonos como: triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, etc., depois vai traçar as suas diagonais seguindo o “roteiro” da atividade. Esse “roteiro” se dá preenchendo os quadros da atividade. A última linha de cada quadro será a generalização através de uma fórmula Matemática obtida a partir da visualização e observação do quadro.

Para verificar a propriedade de que em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele o aluno vai ter que criar um triângulo **ABC**, marcar e medir os dois ângulos internos e um ângulo externo não adjacente aos dois outros lados do triângulo e por último deformar o triângulo e verificar a propriedade preenchendo o quadro.

Para verificar a desigualdade triangular utilizando recursos do *software GeoGebra*, o aluno deverá primeiro criar um triângulo **ABC**, medir os lados do triângulo, depois deformar o triângulo para depois preencher o quadro da atividade para verificar a seguinte propriedade: “se somarmos quaisquer dois lados de um triângulo, essa soma é sempre maior que o terceiro lado”.

4.6 Atividade 5

- **TÍTULO**: Pontos Notáveis do Triângulo
- **CONTEÚDOS**:
  a) O Baricentro.
  b) Um lugar geométrico para o Baricentro.
  c) Outra propriedade para o Baricentro.
  d) O Incentro.
  e) Uma propriedade para o Incentro.
  f) Circunferência Exinscritas – Exincentros.
  g) O Circuncentro.
  h) A reta de Simson.
  i) O Ortocentro.
  j) Propriedade interessante envolvendo o ortocentro.
  k) Um lugar geométrico interessante (Ortocentro).
  l) A reta de Euler.
- **OBJETIVOS**:
  - Identificar as propriedades dos pontos notáveis do triângulo. (Baricentro, Incentro, Circuncentro e Ortocentro).
  - Aplicar os conhecimentos adquiridos nas propriedades dos pontos notáveis do triângulo, para construção de aplicações sobre: “o lugar geométrico para o Baricentro”, a reta de Simson, “Circunferência Exinscritas – Exincentros”, “propriedade envolvendo o ortocentro”, “lugar geométrico para o ortocentro” e a “Reta de Euler”.
  - Verificar que as propriedades dos pontos notáveis do triângulo podem ser utilizadas como instrumentos para realização de demonstrações, mantendo-se as mesmas, com a movimentação das figuras, por meio da geometria dinâmica.
- **METODOLOGIA**

4.6.1 O baricentro

O aluno vai encontrar, com o auxílio das ferramentas do *GeoGebra*, o ponto notável do triângulo chamado baricentro (ponto de interseção das medianas de um triângulo). Para isso, o aluno vai primeiramente construir um triângulo **ABC**. Depois selecionar os pontos médios de cada lado do triângulo, ligar esses pontos médios em cada vértice oposto aos pontos médios. A intersecção dessas três retas é o que chamamos de baricentro (G) do triângulo.

4.6.2 Um lugar geométrico para o baricentro

O aluno vai primeiramente criar um triângulo **ABC** e construir o baricentro (G) do triângulo **ABC**. Depois o aluno vai construir uma reta passando pela base **AC** e outra reta paralela a **AC** passando por **B**. Feito isso, o aluno vai criar uma reta "p" paralela a **AC** passando pelo baricentro (G). Tudo isso, para verificar que quando o vértice **B** do triângulo **ABC** se desloca sobre uma reta paralela a base, o baricentro (G) se desloca sobre a reta "p" que é paralela a base do triângulo.

4.6.3 Outra propriedade para o baricentro

O aluno vai primeiramente criar um triângulo **ABC** e construir o baricentro (G) do triângulo **ABC**. Depois vai construir uma reta paralela ao segmento **BC** passando pelo baricentro(G) em seguida vai construir uma reta paralela ao segmento **AB** passando pelo baricentro (G) com isso o aluno vai verificar a seguinte propriedade: "As paralelas a dois lados de um triângulo que passam pelo baricentro (G) dividem o terceiro lado em três partes iguais".

4.6.4 O incentro

Nessa atividade o aluno vai encontrar com o auxílio das ferramentas do *GeoGebra* o ponto notável do triângulo chamado incentro (I), que é o ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo. Para isso, o aluno vai primeiramente construir no *GeoGebra* um triângulo **ABC**, depois criar as bissetrizes a partir dos vértices do triângulo. Os pontos de intersecção dessas três retas bissetrizes é o que chamamos de incentro (I). Verifica-se na construção do incentro que há uma circunferência inscrita no triângulo.

4.6.5 Uma propriedade para o incentro

O aluno vai construir um triângulo **ABC**, depois determinar o ponto notável do triângulo chamado incentro e logo em seguida, traçar a reta que une o vértice **A** de um triângulo **ABC** com o incentro I. Essa reta vai cortar a circunferência circunscrita num ponto **P** eqüidistante de **B**, de **I** e de **C**.

4.6.6 Circunferência exinscritas – exincentros

Essa atividade é uma aplicação do ponto notável do triângulo “incentro”. A construção dessa atividade é um desafio para o aluno.

Para construir essa figura, primeiramente teremos que encontrar o incentro e depois os três pontos externos que eqüidistam dos lados do triângulo. Porque incentro nos dará uma circunferência inscrita no triângulo. Conseqüentemente sabemos que a circunferência vai tangenciar os lados do triângulo internamente. O desafio será obter as três circunferências que tangenciam os lados do triângulo externamente. Basta pensar nas intersecções das bissetrizes exteriores dos ângulos do triângulo.

Essa atividade vai exigir uma grande habilidade com o *software* por parte do aluno.

4.6.7 O circuncentro

O aluno vai encontrar o ponto notável do triângulo chamado de circuncentro, que é o ponto de interseção das mediatrizes de um triângulo. Para isso, o aluno vai primeiramente construir no *GeoGebra* um triângulo **ABC**, depois criar as mediatrizes em cada lado do triângulo. Os pontos de interseção dessas três retas mediatrizes é o que chamamos de circuncentro.

4.6.8 A reta de Simson

Essa atividade é uma aplicação do ponto notável circuncentro (ponto de interseção das mediatrizes do triângulo), pois utiliza um ponto **P** sobre a circunferência circunscrita ao triângulo.

Para a construção dessa atividade, o aluno vai criar um triângulo **ABC**, determinar o ponto notável circuncentro, vai criar a circunferência circunscrita ao triângulo, vai criar um ponto **P** qualquer em cima da circunferência, criar as retas perpendiculares aos lados que passam pelo ponto **P**, criar as interseções das retas perpendiculares com os lados do triângulo. Finalmente podemos verificar que essas três interseções formam uma reta que chamamos de reta de Simson.

4.6.9 O ortocentro

O aluno vai encontrar o ponto notável do triângulo chamado de ortocentro, que é o ponto de interseção das alturas de um triângulo. Para isso, o aluno primeiramente vai construir um triângulo **ABC**, depois criar as alturas em cada lado do triângulo obtendo a reta perpendicular à base passando pelo vértice. Fazendo isso com outros dois lados do triângulo, vamos obter a intersecção dessas três retas ou cevianas que é o que chamamos de ortocentro.

4.6.10 Propriedade interessante envolvendo o ortocentro

O aluno vai construir um triângulo **ABC** cujo ponto notável seja o ortocentro para verificar a seguinte propriedade:

As paralelas aos lados de um triângulo ABC que passam pelos vértices opostos, formam um triângulo A'B'C' em que A'B' = 2 AB, A'C' = 2 AC e B'C' = 2BC, em que A, B e C são os pontos médios de B'C', A'C' e A'B', respectivamente.

Como conseqüência, as alturas do triângulo [ABC] são as mediatrizes de [A'B'C']. As três alturas de um triângulo (que são afinal mediatrizes de um outro triângulo) cortam-se num ponto H. No entanto, o aluno, no final da atividade vai concluir que: H é o **ortocentro** do triângulo [ABC] e ao mesmo tempo o **circuncentro** de [A'B'C'].

4.6.11 Um lugar geométrico interessante do ortocentro

O aluno terá oportunidade de verificar uma propriedade interessante para o ortocentro.

Quando um vértice (no caso da figura B') de um triângulo ABC se desloca sobre uma reta paralela ao lado oposto A'C', o ortocentro (H) sempre descreve uma parábola.

Para fazer esta verificação o aluno deverá seguir os seguintes passos:

- Primeiro vai criar um ponto A, na janela de construção do *GeoGebra*. Depois uma reta (b) paralela ao eixo das abscissas.
- Depois criar um triângulo cujo ponto notável seja o ortocentro.
- Logo em seguida, irá habilitar a função rastro no ponto (H) e mover o ponto B' para descrever uma parábola.

4.6.12 A reta de Euler

Essa atividade se torna muito interessante porque o aluno terá a possibilidade de num mesmo triângulo, plotar os pontos notáveis: **baricentro** (G) – ponto de interseção das medianas do triângulo –, **circuncentro** (C) – ponto de interseção das mediatrizes do triângulo – e o **ortocentro** (O) ponto de interseção das alturas do triângulo.

Quando o aluno terminar a construção desses três pontos notáveis "**C**", "**G**" e "**O**" ele terá a possibilidade de verificar através da deformação do triângulo, que estes três pontos notáveis estarão sempre alinhados.

4.7 Atividade 6

- **TÍTULO**: Razão Áurea
- **CONTEÚDOS**:
  a) Ponto Áureo.
  b) Retângulo Áureo.
  c) Triângulo Sublime.
  d) Triangulo Espiral.
  e) Espiral Áurea ou Espiral Logarítmica.

- **OBJETIVOS**:
  - Criar uma ferramenta no *GeoGebra*, que encontra o ponto que divide um segmento de reta na razão áurea.
  - Criar uma ferramenta no *GeoGebra* que, dado um segmento de reta **AB**, construa o retângulo áureo.

    <u>Obs</u>: Esse segmento **AB** será o maior lado do retângulo áureo.
  - Construir uma ferramenta no *GeoGebra* que, dado um segmento de reta **AB**, construa o triângulo sublime.
  - Construir uma ferramenta no *GeoGebra* que dado um segmento de reta *AB* gere a espiral triangular.
  - Construir uma ferramenta no *GeoGebra* que dado um segmento de reta **AB** gere a espiral áurea ou espiral logarítmica.
- **METODOLOGIA**

4.7.1 Ponto áureo

Na atividade “Ponto Áureo”, o aluno vai ter a possibilidade de construir o ponto que divide um segmento de reta AB na razão áurea, utilizando as ferramentas do *GeoGebra*.

Para isso, o aluno vai primeiramente criar um segmento $\overline{AB}$, criar o ponto médio **M** de $\overline{AB}$, traçar uma perpendicular a $\overline{AB}$, passando por **B** e traçar uma circunferência com centro em **B**, passando por **M**.

Depois o aluno vai marcar a interseção **C** (superior) da circunferência com a perpendicular, esconder a circunferência, traçar uma circunferência com centro em **C**, passando por **B** e criar o segmento $\overline{AC}$.

Feito isso, o aluno vai marcar a interseção **N** da última circunferência com o segmento $\overline{AC}$, traçar uma circunferência com centro em **A**, passando por **N** e marcar a interseção **R** da última circunferência com o segmento $\overline{AB}$.

Depois desses procedimentos, o aluno vai verificar que: **“R”** é o ponto que divide o segmento na razão áurea.

Para verificar a validade dessa construção, o aluno vai seguir os seguintes passos:

Esconder todos os objetos, deixando apenas o segmento $\overline{AB}$ e o ponto **R**, medir os comprimentos $\overline{AB}$, $\overline{AR}$ e $\overline{\boldsymbol{RB}}$ e efetuar os seguintes quocientes:

$\overline{AB}\ /\ \overline{AR}$ e $\overline{AR}\ /\ \overline{RB}$ digitando-os na caixa de entrada do programa. Em seguida, vão aparecer as constantes **g** e **h** na janela de álgebra com valor de 1,62 cada. Essa é a confirmação de que o ponto **R** é o "ponto áureo".

Feito isso, vamos criar uma ferramenta que, dado um segmento de reta **AB** qualquer, o *GeoGebra* criará o "ponto áureo". Para isso o aluno deverá utilizar a opção: **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** do menu **FERRAMENTAS** e em seguida clique em todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo "Saída de Objetos". Conclua. E a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas.

4.7.2 Retângulo áureo

Na atividade "Retângulo Áureo", o aluno vai ter a possibilidade de construir um retângulo, cujo produto dos lados está na razão áurea.

Para isso, o aluno vai primeiramente criar um segmento $\overline{AB}$ e selecionar a ferramenta criada na atividade anterior "Ponto Áureo", para encontrar o ponto áureo (não se esquecer de rotular o ponto áureo de **R)** e traçar duas perpendiculares a $\overline{AB}$: uma passando por **A** e outra por **B**.

Depois, vai traçar uma circunferência com centro em **A**, passando por **R**, marcar a interseção **D** (superior) da circunferência com a perpendicular e traçar uma paralela a $\overline{AB}$, passando por **D**.

Logo em seguida, marcar a interseção **C** da paralela com a outra perpendicular, criar o polígono **ABCD**, e esconder todos os objetos, deixando apenas o segmento $\overline{AB}$ e o polígono **ABCD**.

No entanto, o retângulo **ABCD** é áureo. O aluno vai verificar a validade dessa construção, fazendo a razão entre a medida do maior lado e a do menor lado.

Feito isso, vamos criar uma ferramenta que, dado um segmento de reta **AB** qualquer, o *GeoGebra* criará um "retângulo áureo". Para isso o aluno deverá utilizar a opção: **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** do menu **FERRAMENTAS** e em seguida clique em todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo "Saída de Objetos". Conclua. E a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas.

4.7.3 Triângulo sublime

Nessa atividade o aluno vai construir uma ferramenta no *GeoGebra* que, dado um segmento de reta **AB**, o *GeoGebra* construa o “Triângulo Sublime”.

O “Triângulo Sublime” é na realidade um triângulo isósceles, que tem a seguinte propriedade: A razão entre a medida comprimento do lado maior e o comprimento do lado menor do triângulo está na razão áurea. Para essa construção o aluno deverá:

Construir um pentagrama ABCDE, construir um triângulo ligando os vértices ABD e de construir o triângulo o aluno vai esconder o pentagrama. Esse triângulo é chamado de sublime porque está na razão áurea, ou seja, dividindo o comprimento do lado maior pelo comprimento do menor teremos a constante 1,62 [...].

Feito isso, vamos criar uma ferramenta que, dado um segmento de reta **AB** qualquer, o *GeoGebra* criará um “Triângulo Sublime”. Para isso o aluno deverá utilizar a opção: **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** do menu **FERRAMENTAS** e em seguida clique em todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo “Saída de Objetos”. Conclua. E a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas.

4.7.4 Espiral triangular

Nessa atividade, o aluno vai construir uma ferramenta no *GeoGebra*, visto que: dado um segmento de reta AB, o *GeoGebra* construa o “Triângulo Espiral”.

Para a construção do “triângulo espiral” o aluno terá que vencer basicamente três etapas:

- Criar uma ferramenta no *GeoGebra* que dado um segmento de reta **AB** o *GeoGebra* nos dê um “**quadrado dado a sua diagonal**”.
- Criar outra ferramenta no *GeoGebra* que dado um segmento de reta **AB** o *GeoGebra* nos dê um “**triângulo sublime**”.
- Construção do “**triângulo espiral**”.

Na **primeira etapa** o aluno deverá criar um quadrado dado a sua diagonal, para isso, temos que criar um segmento de reta **AB** na janela de construção, logo em seguida, determinar uma **reta b** cujo ângulo seja de 45º com o segmento **AB**.

Depois o aluno vai criar a **reta c** que passa pelo ponto **A** e é perpendicular a reta **b**, em seguida, vai criar a **reta d** que passa pelo ponto **A** e é perpendicular com a **reta c**, depois criar a **reta e** que passa pelo ponto **B** e é perpendicular a **reta b**.

Em seguida o aluno vai criar o quadrado **ABCD**, criar a outra diagonal do quadrado e esconder todas quatro retas para ficarmos somente com o quadrado.

Feito isso, vamos criar uma ferramenta que, dado um segmento de reta **AB** qualquer, o *GeoGebra* criará um "quadrado dado a sua diagonal". Para isso o aluno deverá utilizar a opção: **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** do menu **FERRAMENTAS** e em seguida clicar em todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo "Saída de Objetos". Conclua. E a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas.

Na segunda etapa o aluno vai criar um triangulo sublime, para isso, vai criar um pentágono **ABCDE**.

Depois, dentro do pentágono, o aluno vai criar os segmentos **AB**, **AD** e **BD** e esconder o pentágono **ABCDE**. Feito isso, teremos um triângulo sublime.

O triângulo **ABD** é um Triângulo Sublime. O aluno poderá verificar isso fazendo a razão entre a medida do maior lado e a do menor lado $\overline{AD} / \overline{AB} \cong 1{,}62$.

Na construção de triângulos sublimes, o aluno poderá proceder da seguinte forma: criar a bissetriz no **ponto B** e marcar a interseção da reta bissetriz, com o segmento de reta **AD**. (Rotulando o ponto de "**F**"). Em seguida, criar o segmento de **reta BF** e esconder as retas bissetrizes.

Depois criar a bissetriz no **ponto A**, criar a interseção entre a reta bissetriz e o segmento **BF** (Rotule o ponto de "**G**"). Determinar o segmento de **reta AG** e esconder as retas bissetrizes.

Em seguida, o aluno deverá criar a reta bissetriz no **ponto F**, criar a interseção entre a reta bissetriz e o segmento de reta **AG** (Rotule o ponto de "**H**"). Determinar o segmento de **reta FH** e esconder as retas bissetrizes.

Em seguida o aluno deverá criar a reta bissetriz no **ponto G**, depois criar a interseção entre a reta bissetriz e o segmento de reta **FH** (Rotule o ponto de "**I**"), determinar o segmento de **reta GI** e esconder as retas bissetrizes.

Logo depois, o aluno deverá criar a bissetriz no **ponto H**, criar a interseção entre a reta bissetriz e o segmento de reta **GI** (Rotule o ponto de "**J**"), determinar o segmento de **reta HJ** e esconder as retas bissetrizes.

Feito isso, vamos criar uma ferramenta que, dado um segmento de reta **AB** qualquer, o *GeoGebra* criará o “triângulo sublime”. Para isso o aluno deverá utilizar a opção: **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** do menu **FERRAMENTAS** e em seguida clicar em todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo “Saída de Objetos”. Conclua. E a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas.

Na terceira etapa o aluno vai construir a “Espiral Triangular”.

Para isso o aluno vai utilizar a ferramenta “Triângulo Sublime” criada anteriormente para começar a construção da espiral. Quando o triângulo sublime estiver na janela de construção, vamos fazer uso da primeira ferramenta criada: que é o “quadrado dado sua diagonal”. No entanto crie um quadrado com diagonal nos pontos “**B**” e “**C**”. Não se esqueça de rotular os dois pontos da diagonal como “**I**” e “**J**”). Em seguida crie uma circunferência com centro no **ponto J** até o **ponto C** e marque a interseção da circunferência com a diagonal do quadrado. (Não se esqueça de rotular o ponto criado como “**K**”). Depois crie um arco de circunferência nos pontos “**C**”, “**K**” e “**B**”, nessa ordem para criar o arco **BC** e esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos “**J**”, “**I**” e “**K**”.

Continuando a construção, vamos fazer uso da primeira ferramenta criada: que é o “quadrado dado sua diagonal”. No entanto crie um quadrado com diagonal nos pontos “**A**” e “**B**”. (Não se esqueça de rotular os dois pontos da diagonal como “**L**” e “**M**”). Em seguida crie uma circunferência com centro no **ponto L** até o **ponto B** e marque a interseção da circunferência com a diagonal do quadrado. (Não se esqueça de rotular o ponto criado como “**N**”). Depois crie um arco de circunferência nos pontos “**A**”, “**N**” e “**B**”, nessa ordem para criar o arco **AB** e esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos “**L**”, “**M**” e “**N**”.

Continuando a construção, vamos fazer uso da primeira ferramenta criada: que é o “quadrado dado sua diagonal”. No entanto crie um quadrado com diagonal nos pontos “**A**” e “**D**”. (Não se esqueça de rotular os dois pontos da diagonal como “**O**” e “**P**”). Em seguida crie uma circunferência com centro no **ponto P** até o **ponto A** e marque a interseção da circunferência com a diagonal do quadrado. (Não se esqueça de rotular o ponto criado como “**Q**”). Depois crie um arco de circunferência nos pontos “**A**”, “**Q**” e “**D**”, nessa ordem para criar o arco **AD** e esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos “**O**”, “**Q**” e “**P**”.

Continuando a construção, vamos fazer uso da primeira ferramenta criada: que é o “quadrado dado sua diagonal”. No entanto crie um quadrado com diagonal nos pontos “**D**” e

“**E**”. (Não se esqueça de rotular os dois pontos da diagonal como “**R**” e “**S**”). Em seguida crie uma circunferência com centro no **ponto S** até o **ponto D** e marque a interseção da circunferência com a diagonal do quadrado. (Não se esqueça de rotular o ponto criado como “**T**”). Depois crie um arco de circunferência nos pontos “**D**”, “**T**” e “**E**”, nessa ordem para criar o arco **DE** e esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos “**S**”, “**T**” e “**R**”.

Continuando a construção, vamos fazer uso da primeira ferramenta criada: que é o “quadrado dado sua diagonal”. No entanto crie um quadrado com diagonal nos pontos “**E**” e “**F**”. (Não se esqueça de rotular os dois pontos da diagonal como “**U**” e “**V**”). Em seguida crie uma circunferência com centro no **ponto V** até o **ponto E**, e marque a interseção da circunferência com a diagonal do quadrado. (Não se esqueça de rotular o ponto criado como “**W**”). Depois crie um arco de circunferência nos pontos “**E**”, “**W**” e “**F**”, nessa ordem para criar o arco **EF** e esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos “**V**”, “**W**” e “**U**”.

Continuando a construção, vamos fazer uso da primeira ferramenta criada: que é o “quadrado dado sua diagonal”. No entanto crie um quadrado com diagonal nos pontos “**F**” e “**G**”. (Não se esqueça de rotular os dois pontos da diagonal como “**Z**” e “$\mathbf{A_1}$”). Em seguida crie uma circunferência com centro no **ponto Z** até **ponto G**, e marque a interseção da circunferência com a diagonal do quadrado. (Não se esqueça de rotular o ponto criado como “$\mathbf{B_1}$”). Depois crie um arco de circunferência nos pontos “**F**”, “$\mathbf{B_1}$” e “**G**”, nessa ordem para criar o arco **FG** e esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos “$\mathbf{A_1}$”, “$\mathbf{B_1}$” e “**Z**”.

Feito isso, vamos criar uma ferramenta que, dado um segmento de reta **AB** qualquer, o *GeoGebra* criará uma “Espiral Triângular”. Para isso o aluno deverá utilizar a opção: **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** do menu **FERRAMENTAS** e em seguida clique em todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo “Saída de Objetos”. Conclua. E a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas.

4.7.5 Espiral áurea ou espiral logarítmica

Nessa atividade, o aluno vai construir uma ferramenta no *GeoGebra* que: dado um segmento de reta AB, o *GeoGebra* construa a “Espiral Áurea”.

Para construir a espiral, você precisará selecionar a ferramenta criada na **atividade b** para encontrar o **RETÂNGULO ÁUREO** e selecionar a ferramenta criada na **atividade a – PONTO ÁUREO –** para criar o ponto áureo no segmento **AB** e **CD**. Depois criar o segmento **EF**.

Em seguida o aluno vai criar com a ferramenta **PONTO ÁUREO** os pontos **H** e **G**. Depois os pontos **I** e **J**. Depois os pontos **N** e **O**. Depois os pontos **L** e **M**. Depois os pontos **P** e **Q**. Depois os pontos **R** e **S**. Depois os pontos **T** e **U**.

Com a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS** o aluno vai criar as circunferências:

- Circunferência “1” com centro em **F**, passando por **A**.
- Circunferência “2” com centro em **H**, passando por **G**.
- Circunferência “3” com centro em **I**, passando por **G**.
- Circunferência “4” com centro em **O**, passando por **N**.
- Circunferência “5” com centro em **M**, passando por **N**.
- Circunferência “6” com centro em **P**, passando por **Q**.
- Circunferência “7” com centro em **R**, passando por **S**.
- Circunferência “8” com centro em **T**, passando por **U**.

Em seguida, o aluno vai criar as bissetrizes dos seguintes ângulos e marcar as interseções com as circunferências:

- **AFE** e marcar a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 1.
- **EHG** e marcar a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 2.
- **GIJ** e marcar a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 3.
- **NOJ** e marcar a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 4.
- **LMN** e marcar a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 5.
- **LPQ** e marcar a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 6.
- **QRS** e marcar a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 7.
- **SMU** e marcar a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 8.

Em seguida o aluno vai esconder todas as bissetrizes e as circunferências e criar os arcos:

- Crie os arcos: **AE**, **EG, GJ, JN, NL, LQ, QS e SU**.
- Feito isso, vamos criar uma ferramenta que, dado um segmento de reta **AB** qualquer, o *GeoGebra* criará uma “Espiral Áurea”. Para isso o aluno deverá utilizar a opção: **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** do menu

FERRAMENTAS e em seguida clique em todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo “Saída de Objetos”. Conclua. E a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas.

5 RESULTADO DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

5.1 Das atividades investigativas

Segundo Zabala (1998) as seqüências didáticas visam manter unidade na prática educativa com as três fases de uma intervenção reflexiva que são: planejamento, aplicação e avaliação.

Para produzir estas intervenções reflexivas foram utilizados os seguintes passos:

1) o ponto de partida para a pesquisa foram os problemas ou desafios vivenciados pelo pesquisador em sua prática profissional na escola. Sendo essa preocupação com a seguinte questão: “**Como podem ser estudados conteúdos de Geometria Plana com a utilização da informática, especialmente, utilizando a habilidade de visualização através da dinâmica das figuras e a exploração da compreensão de conceitos pelo *software GeoGebra*.**”
2) a partir desse problema ou questão, o pesquisador se mobilizou na busca de literatura pertinente ao caso (ensino de geometria e informática educativa);
3) a partir dessas leituras e de uma melhor compreensão do fenômeno, foram planejadas, com a colaboração do orientador, seqüências didáticas a serem desenvolvidas em sala de aula;
4) essas seqüências didáticas foram aplicadas em sala de aula e registradas através do recolhimento dos cadernos de atividade dos alunos;
5) a partir desses registros, o pesquisador produziu, por escrito, um ensaio narrativo no qual relata e reflete sobre o que aconteceu na aplicação da pesquisa;
6) esse ensaio narrativo e os registros relativos às aplicações das seqüências didáticas são levados para discussão e análise com o orientador da pesquisa, onde foram feitas contribuições que ajudaram a aprofundar a análise da experiência, obtendo outras interpretações e compreensões;
7) com base nessas discussões e contribuições feitas pelo orientador, o pesquisador revisou e reavaliou toda a pesquisa. O processo só terminou quando foi confeccionado um livro com todas as seqüências didáticas pesquisadas e aplicadas pelo pesquisador, que é o produto do mestrado.

5.2 Aplicação das atividades

Foi elaborada uma pesquisa qualitativa, cujas características básicas são:

- a coleta dos dados foi realizada diretamente no local em que o problema acontece (na escola), e se deu por aplicação de questionários (pesquisa naturalista);
- questionários de forma "fechada", onde o pesquisador pressupôs quais eram as respostas possíveis que o sujeito iria dar, não havendo, portanto, possibilidade de obter alguma resposta fora desse conjunto;
- a coleta dos dados foi realizada na sala de informática;
- observação participante ou estruturada, onde o pesquisador esteve presente em todas as fases da pesquisa para elaborar registros sobre a aplicação da atividade, elaborar registros sobre a sua validade e para a proposição de reestruturação das atividades;
- a preocupação maior com o processo do que com o produto;
- integrar informática educativa com geometria plana;
- construção iterativa de uma explicação para as estratégias de análise e de interpretação da pesquisa. Essa construção iterativa se deu quando o pesquisador elaborou pouco a pouco uma explicação lógica da situação estudada.

As atividades investigativas foram aplicadas no período de 15 de fevereiro à 20 de junho de 2010.

Participaram da pesquisa:

- 2 alunos da 7ª série 8º ano do Ensino Fundamental (primeira dupla);
- 2 alunos da 8ª série 9º ano do Ensino Fundamental (segunda dupla);
- 2 alunos da 2ª série do Ensino Médio (terceira dupla);
- 2 professores de Matemática (quarta dupla).

O critério para a seleção dos alunos foi:

- alunos com bom desempenho acadêmico;
- alunos com bom relacionamento interpessoal;
- disponibilidade de tempo para a realização da pesquisa;
- alunos a partir da 7ª série do ensino fundamental e do ensino médio;

  Obs.: Inicialmente, de forma experimental aplicamos as atividades em alunos de 5ª e 6ª série do ensino fundamental. Verificamos que a eficiência não foi constatada. Em uma segunda etapa aplicamos em alunos da 7ª série, 8ª série e 2 ano do ensino médio. Esses responderam melhor à metodologia devido ao grau de maturidade Matemática.

- Ser da rede pública de ensino do Distrito Federal.

As atividades foram realizadas no período de aula diferente do horário regular das aulas visto que os mesmos, nessa época do ano, não estavam estudando esses conteúdos.

Os alunos foram organizados em duplas na sala de informática.

Foram selecionadas e trabalhadas cinco atividades investigativas com duração média de cinqüenta minutos cada, ou seja, um tempo de aula.

Alguns questionamentos foram feitos pelos alunos durante a aplicação de cada uma das atividades trabalhadas, que iniciaram com a leitura dos principais objetivos de cada atividade pelo aplicador.

Metade da primeira atividade foi feita na forma de estudo dirigido pelo pesquisador para que fosse apresentado o *software* e os alunos pudessem se ambientar com o manuseio do computador. E as demais atividades foram feitas na forma de roteiro a ser seguido pelos participantes da pesquisa.

Para a aplicação das atividades desenvolvidas na pesquisa, foram separados cinco dias:

- **1º dia de aplicação de atividade**.
  Título da Atividade: Introdução ao *Software GeoGebra* e Área de um retângulo e Área de um triângulo.
- **2º dia de aplicação de atividade**.
  Título da Atividade: Uma propriedade para área do triângulo.
- **3º dia de aplicação de atividade**.
  Título da Atividade: Teorema de Pitágoras.
- **4º dia de aplicação de atividade**.
  Título da Atividade: Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Qualquer.
- **5º dia de aplicação de atividade**.
  Título da Atividade: Pontos Notáveis do Triângulo.

5.3 1º dia de aplicação de atividade

➢ **TÍTULO**: Introdução ao *software GeoGebra* e Área de um retângulo e Área de um triângulo

No primeiro dia de aplicação da atividade a aula foi dividida em duas partes:

- **1ª Parte da aula –** Conhecendo o *software GeoGebra*.

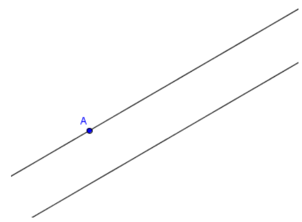
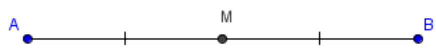
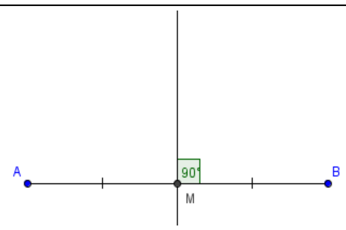
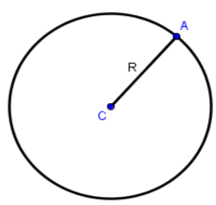
Nesse momento foi feita uma introdução ao *software GeoGebra* com recursos do Power Point, onde o professor e pesquisador fez uma breve explanação dos principais comandos do *GeoGebra* e explicou a sintaxe do programa para os alunos.

Depois de feita essa explanação, entregamos aos alunos a atividade, e demos início à pesquisa. Nessa primeira parte, o aluno teve a oportunidade de construir figuras geométricas planas com o auxílio do professor (estudo dirigido). No entanto, surgiram algumas perguntas:

- Como apagar uma ação feita no *GeoGebra*?
- Como fazer uma reta, uma circunferência?
- O que é mediatriz?
- O que é ponto médio?
- Como construir uma circunferência fora de um pentágono? (Circunscrita)
- Como fazer retas perpendiculares e retas paralelas?

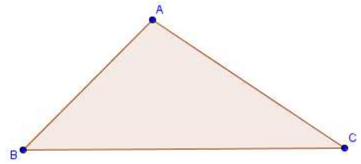
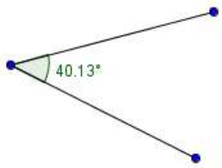
As maiores dificuldades que os alunos tiveram foram à compreensão da idéia Matemática, a apropriação do vocabulário matemático (mediatriz, circunferência circunscrita, ponto médio, etc.) e o manuseio com o *software*.

Na primeira parte o aluno, com base nas definições, construiu as seguintes figuras no *GeoGebra*.

(1) Retas Paralelas: Duas retas de um plano são paralelas se não possuem ponto comum ou se são coincidentes	
(2) Ponto Médio de um Segmento de Reta: O ponto **M** é ponto médio de um segmento se pertencer ao segmento e se for eqüidistante às suas extremidades.	
(3) Reta Mediatriz de um Segmento de Reta: A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento e que passa por seu ponto médio.	
(4) Círculo: O círculo de centro **O** e raio **r** é o conjunto dos pontos **M** do plano tais que **OM** = **r**.	

Continua...

Continuação...

(5) Três pontos determinam um plano.	
(6) Ângulo é a região de um plano concebida pela abertura de duas semi-retas que possuem uma origem em comum, chamada vértice do ângulo.	

QUADRO 2: Construção de figuras geométricas planas no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

Por último, os alunos construíram um pentágono inscrito em uma circunferência no *GeoGebra*.

Ligaram os pontos com segmentos de reta e verificaram a propriedade das infinitas áreas dos pentágonos inscritos nos próprios pentágonos.

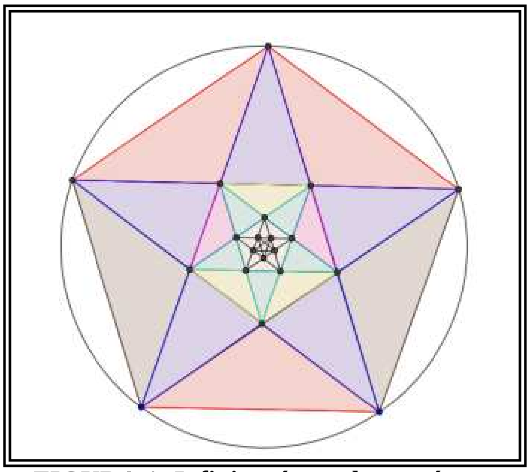


FIGURA 1: Infinitas áreas do pentágono inscrito em uma circunferência
Fonte: Dados da pesquisa

Ao término dessa primeira parte da aula verificamos que os alunos conseguiram cumprir satisfatoriamente cada construção proposta e também o mesmo tempo o aluno pode, devagar, se apropriar do vocabulário matemático pertinente ao conteúdo de geometria plana. Como ponto, reta, plano, ângulo, etc.

Também a grande virtude dessa atividade foi que cada aluno pode construir a sua circunferência, deformá-la e verificar algumas de suas propriedades como centro, raio, círculo e circunferência. O mesmo aconteceu na construção da mediatriz, na construção de retas paralelas, e etc.

- **2ª Parte da aula** – Área de um Retângulo e de um Triângulo.

Orientamos os alunos a seguir os comandos dados na atividade sobre Área de um Retângulo e de um triângulo.

Perguntas freqüentes:

O que é interseção de objetos?

Como exibir Rótulo?

As maiores dificuldades nessa atividade foram à compreensão da idéia Matemática, a apropriação do vocabulário matemático (retas paralelas, interseção, bissetriz, etc.) e o manuseio do o *software*. No decorrer da atividade, tiramos as dúvidas e orientamos os alunos.

Na 2ª parte da aula os alunos tiveram a oportunidade de construir um retângulo e verificar suas propriedades preenchendo o seguinte quadro:

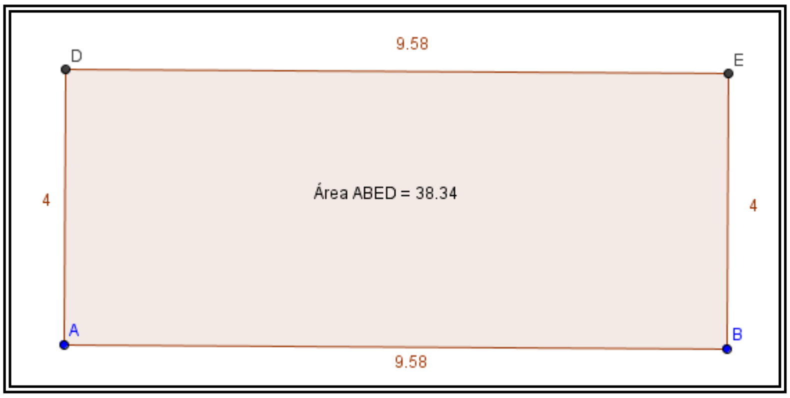


FIGURA 2: Retângulo construído no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

Exercício 1: Modifique três vezes o retângulo e anote no quadro.

ED	EB	ED x EB	Área ABED (no computador)

QUADRO 3: Quadro para preenchimento do aluno sobre comprimento e área do retângulo
Fonte: Dados da pesquisa

Na correção da atividade verificamos que: Todas as duplas preencheram convenientemente o quadro.

Foi pedido aos alunos que respondessem a seguinte questão:

Exercício 2: Marque a resposta correta a respeito da área do retângulo **ABED**.

a) A área do retângulo **ABED** é obtida somando os lados.

b) A área do retângulo **ABED** é obtida multiplicando o comprimento da base **AB** pela altura **AD**.

c) Os valores do produto **AB x AD** no quadro não são os mesmos que os da área mostrados no computador.

- Na correção da atividade verificamos que todas as duplas responderam convenientemente na atividade **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

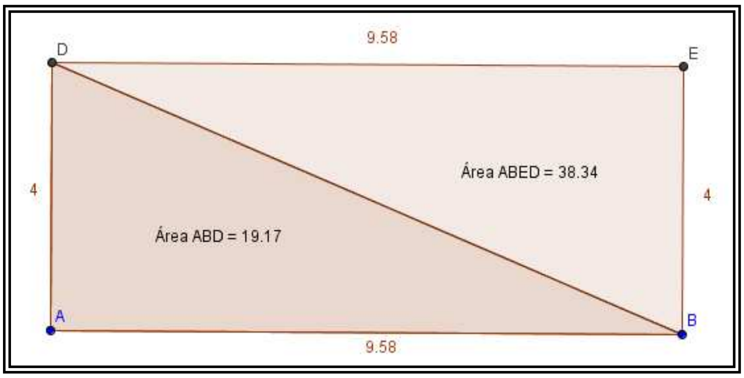


FIGURA 3: Retângulo construído no *GeoGebra* com sua diagonal
Fonte: Dados da pesquisa

Também na 2ª parte da aula o aluno teve a oportunidade de construir um retângulo, traçar a sua diagonal para verificar que existem dois triângulos dentro do retângulo e verificar suas propriedades a respeito de áreas e comprimento, preenchendo o seguinte quadro:

Exercício 3: Modifique três vezes o retângulo e anote no quadro.

AB	AD	$\frac{AB \times AD}{2}$	Área ABD (no computador)

QUADRO 4: Quadro para preenchimento do aluno sobre comprimento e área do triângulo.
Fonte: Dados da pesquisa

Na correção da atividade verificamos que:

Todas as duplas preencheram convenientemente o quadro.

Foi pedido aos alunos que respondessem a seguinte questão:

Exercício 4: Marque a resposta correta a respeito da área do triângulo **ABD**.

a) A área **ABD** é obtida somando os lados.

b) A área **ABED** é obtida multiplicando o comprimento da base **AB** pela altura **AD** e dividindo tudo por 2.

c) Os valores de $\frac{AB \ x \ AD}{2}$ no quadro não são os mesmos que os da área mostrados no computador.

- Na correção da atividade foi verificado que: Todas as duplas responderam convenientemente na atividade **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Os resultados obtidos pela análise das atividades revelaram que os sujeitos investigados mobilizaram relevantes noções, procedimentos e conceitos na construção e resolução das atividades propostas envolvendo a introdução ao *GeoGebra*, a área de um retângulo e área do triângulo. Eis a fala de um aluno da 7ª série:

"Achei legal o retângulo aumentar e diminuir no computador."

Podemos constatar com a fala do aluno, o grande impacto que tem a geometria dinâmica no ensino de geometria principalmente na construção e validação de conceitos geométricos. Com a deformação da figura, os alunos puderam experimentar Matemática e saber o porquê que a área de um retângulo é obtida através do produto entre o comprimento da base do retângulo e o comprimento da altura do retângulo. Também a mesma idéia se aplica na construção do conceito de área de triângulo.

No final da atividade as duplas fizeram uma pequena avaliação sobre a atividade: Introdução ao *Software GeoGebra* e Área de um Retângulo e Área de um Triângulo.

Pergunta 1: Qual foi a sua maior dificuldade nessa atividade?

a) O manuseio com o computador.

b) O manuseio com o *software*.

c) Entender a idéia Matemática sobre o assunto.

d) NDA

- Todas as duplas responderam **letra d**.

Pergunta 2: Você achou a atividade interessante?

a) Sim.

b) Não.

c) Mais ou Menos.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Observação da terceira dupla: Porque o *software* mostra claramente o porquê da idéia apresentada de maneira mais fácil de aprender a propriedade visualizando.

Pergunta 3: Qual é o grau de dificuldade dessa atividade?

a) Muito difícil.

b) Difícil

c) Fácil

d) Muito Fácil.

- Primeira dupla respondeu **letra d**.

Observação da terceira dupla: Dado que possuímos habilidade com o computador, consideramos o *software* simples de manusear.

- As demais duplas responderam **letra c**.

Pergunta 4: Você acha que essa atividade poderia ser aplicada com outras pessoas?

a) Sim.

b) Não.

c) Talvez.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Como última etapa da aplicação das atividades foi realizada uma “socialização” das questões trabalhadas com o objetivo de analisar os porquês das soluções encontradas pelos alunos. A socialização é um espaço importante para a troca experiências sobre a situação investigada, também mais uma oportunidade para os estudantes entrarem em diálogo com os seus colegas e com o professor, para que possam juntos construir o conhecimento matemático.

5.4 2º dia de aplicação de atividade

- **Título da Atividade**: Uma propriedade para área do triângulo

Primeiramente foram dadas algumas orientações gerais sobre o objetivo específico da aula que é conhecer e manipular as principais funções do *GeoGebra* para mostrara seguinte propriedade: “*Dado um triângulo qualquer, se fixarmos dois vértices e movimentarmos o terceiro vértice sob uma reta paralela aos vértices fixados a sua área não irá se alterar*.”

No segundo encontro, percebemos que os alunos estavam mais familiarizados com *software GeoGebra*.

E as perguntas ficam mais no âmbito do entendimento da idéia Matemática sobre a “propriedade para a área do triângulo” e a interpretação do texto.

Perguntas freqüentes:

- Como apagar uma ação feita no *GeoGebra*?

- Como fazer uma reta paralela?
- Como rotular um objeto?
- Como utilizar a opção polígono?

Pedimos aos alunos que respondessem as seguintes questões com base na construção:

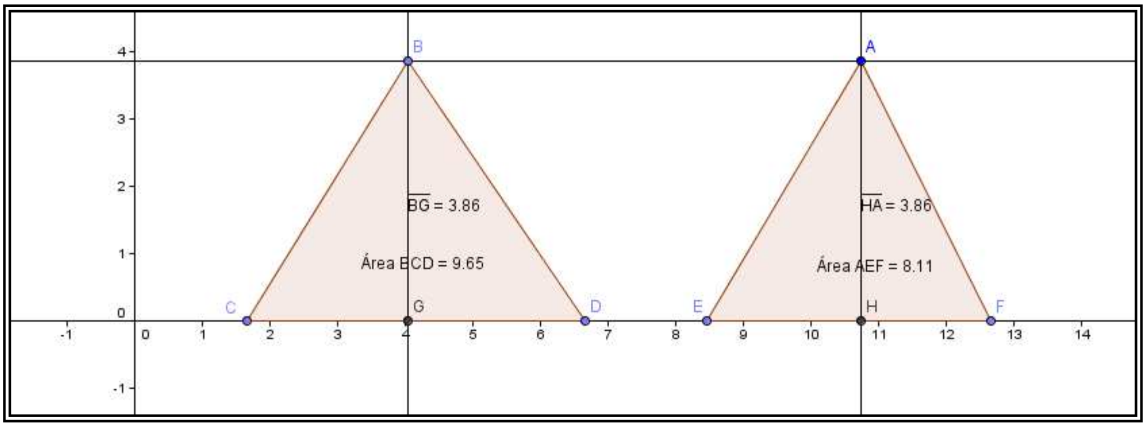


FIGURA 4: Construção da propriedade para a área de um triangulo no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

Se tomarmos outro triângulo a partir do ponto A e movimentarmos o ponto A. Marque a resposta certa:

Exercício 1: Ao movimentar o **ponto B**. O que acontece com a altura do triângulo **BCD**?

a) Altera.
b) Permanece a mesma.

- Todas as duplas responderam **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 2: Ao movimentar o **ponto B**. O que você constata em relação à base **CD**?

a) Ficou a mesma.
b) Altera.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

Exercício 3: Ao movimentar o **ponto B**. O que você observa em relação à área do triângulo **BCD**?

a) Altera.
b) Não altera.

- Todas as duplas responderam **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 4: O que você observa no triângulo **AEF**?

a) A reta paralela a base continua fixa.

b) A reta paralela a base não continua fixa.

c) As alturas continuam as mesmas.

d) O triângulo não se deforma.

- A segunda dupla respondeu na atividade **letra a**.
- As demais duplas responderam na atividade **letra b.**

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 5: Em relação aos triângulos formados podemos concluir que:

a) Movimentando o ponto **B**, a área do triângulo **BCD** não se altera porque o comprimento da base e o comprimento da altura são sempre os mesmos.

b) Movimentando o ponto **A**, a área do triângulo **AEF** se altera porque o comprimento da base e da altura são sempre os mesmos.

c) Movimentando o ponto **B**, a área do triângulo **BCD** não se altera, porque o comprimento da base e o comprimento da altura **não** são sempre os mesmos.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

Exercício 6: Movimentando os **pontos A** e **B**.

O que acontece com a área **AEF**?

a) A área **AEF** não se altera.

b) A área **AEF** se altera.

c) A área **AEF** em relação a área **BCD** ficam iguais, porque ambas tem mesma altura.

d) Se movimentarmos o ponto **B** e depois movimentarmos o ponto **A**, perceberemos que as áreas nos dois movimentos não se alteram.

- Todas as duplas responderam **letra b**.

A realização dessa atividade despertou no aluno a curiosidade e o interesse de poder cumprir a seqüência didática por ele mesmo. Percebemos que os alunos trazem na bagagem um conhecimento muito tímido de geometria. Mas por outro lado, eles apresentam uma grande desenvoltura para aprender a manipular o *software GeoGebra*. Eis a fala de um aluno: *"Se a aula fosse sempre ao computador, talvez eu gostasse mais de* Matemática*"*.

Esse comentário feito pelo aluno mostrou como é importante a escola acompanhar o desenvolvimento da sociedade. Na realidade, os alunos estão habituados a freqüentar as aulas sentados, enfileirados e em silêncio. Essa nova postura de investigar, construir e simular o conhecimento é uma quebra de paradigma, onde alunos e professores assumem uma postura assentada na construção individual e coletiva do conhecimento.

No final da atividade as duplas fizeram uma pequena avaliação sobre a atividade: Uma Propriedade para Área do Triângulo.

Pergunta 1: Qual foi a sua maior dificuldade nessa atividade?

a) O manuseio com o computador.
b) O manuseio com o *software*.
c) Entender a idéia Matemática sobre o assunto.
d) NDA.

- Todas as duplas responderam **letra c.**

Pergunta 2: Você achou a atividade interessante?

a) Sim.
b) Não.
c) Mais ou Menos.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Pergunta 3: Qual é o grau de dificuldade dessa atividade?

a) Muito difícil.
b) Difícil.
c) Fácil.
d) Muito Fácil.

- Todas as duplas responderam **letra b**.

Observação da terceira dupla: Porque não consegui abstrair que o ponto A interfere na reta paralela ao eixo x e o ponto B, não interfere, porém esta dúvida foi bem esclarecida pelo pesquisador.

Pergunta 4: Você acha que essa atividade poderia ser aplicada com outras pessoas?

a) Sim.
b) Não.
c) Talvez.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Ao final do desenvolvimento das atividades propostas no 1º dia de aplicação das atividades, o resultado obtido foi muito positivo, pois em geral, os dados revelaram que os sujeitos tiveram domínio dos conhecimentos necessários para resolverem a seqüência didática proposta. Os alunos reconheceram a importância dos conceitos apresentados, bem como a segurança de seus pontos de vista, através da utilização de argumentação baseada no domínio dos conhecimentos teóricos.

Como última etapa da aplicação da atividade foi realizada uma “socialização” das questões trabalhadas com o objetivo de analisar os porquês das soluções encontradas pelos alunos. Foi nessa etapa que verificamos a apropriação do vocabulário matemático por parte dos alunos, onde eles usavam naturalmente expressões do tipo:

- Essa reta é paralela a essa outra.
- Essa reta passa por esses pontos.
- Esse é o ponto médio do segmento.
- A área do polígono **BCD** é diferente da área do polígono **AEF**.

5.5 3º dia de aplicação de atividade

- **TÍTULO DA ATIVIDADE**: Teorema de Pitágoras

No 3º dia de aplicação da atividade, foi feita a leitura com todos os participantes da pesquisa do texto: “Teorema de Pitágoras”. Logo depois foi feita uma breve explanação no quadro branco e no Power Point sobre o “Teorema de Pitágoras” para que os participantes da pesquisa se inteirassem a respeito do assunto da seqüência didática.

Nessa etapa da pesquisa os alunos estavam mais familiarizados com *software GeoGebra*. E as perguntas ficam mais no âmbito do entendimento da idéia Matemática sobre o “Teorema de Pitágoras” e a interpretação do texto.

Perguntas freqüentes:

- Como apagar uma ação feita no *GeoGebra*?
- Como fazer uma reta perpendicular?
- Como rotular um objeto?
- Como utilizar a opção polígono?
- O que é interseção de objetos?

Nessa atividade, o aluno teve a oportunidade de construir um triângulo retângulo com os vértices em cima dos eixos coordenados, e em cada lado desse triângulo retângulo, construir um quadrado, tudo isso com o objetivo de mostrar que a soma das áreas referente aos quadrados sobrepostos nos lados (catetos) do triângulo retângulo, é igual ao quadrado sobreposto (hipotenusa). Para verificar a existência dessa propriedade foi pedido que os alunos preenchessem o quadro.

5.5.1 Verificação da existência do Teorema de Pitágoras com o uso de polígonos regulares no GeoGebra (usando o quadrado)

Exercício 1: Com base em sua construção no *GeoGebra*, preencha convenientemente o quadro.

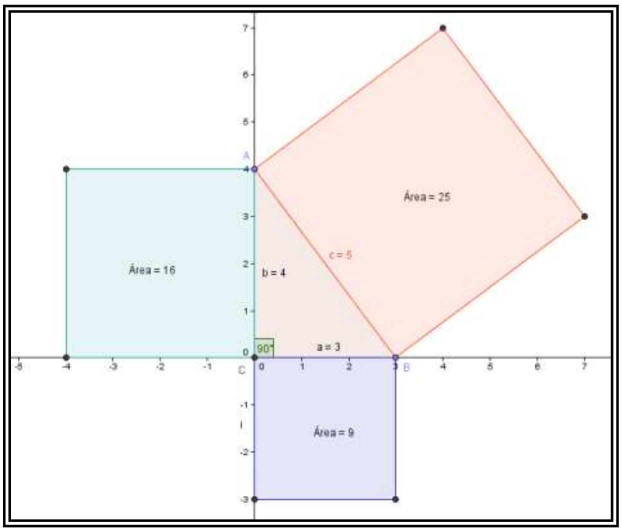


FIGURA 5: Construção do Teorema de Pitágoras no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

AB	$(AB)^2$	Área 1 no computador.	AC	$(AC)^2$	Área 2 no computador.	BC	$(BC)^2$	Área 3 no computador.

QUADRO 5: Quadro para preenchimento do aluno sobre o Teorema de Pitágoras
Fonte: Dados da pesquisa

Na correção da atividade foi verificado que:

Todas as duplas preencheram convenientemente o quadro.

Foi pedido aos alunos que respondessem as seguintes questões com base na construção acima:

Exercício 2: Como o computador chegou a essas três áreas?

a) Somando as medidas dos quatro lados de cada quadrado.

b) Multiplicando o **comprimento** do lado do triângulo retângulo “que é um lado do quadrado” e a **altura** do quadrado (isso nos três lados do triângulo).

c) Multiplicando o comprimento da diagonal de cada quadrado e a soma dos lados.

- Todas as duplas responderam na atividade **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 3: Modifique duas vezes o triângulo retângulo e anote no quadro as áreas de cada um. Será que o teorema de Pitágoras ainda vale?

Coluna 1	**Coluna 2**	**Coluna 3**	**Coluna 4**	**Coluna 5**	**Coluna 6**	**Coluna 7**
AC = a cateto	**$(AC)^2 = a^2$**	**BC = b cateto**	**$(BC)^2 = b^2$**	**$(AC)^2 + (BC)^2$ $a^2 + b^2$**	**AB = c hipotenusa**	**$(AB)^2 = c^2$**

QUADRO 6: Quadro para preenchimento do aluno sobre o Teorema de Pitágoras
Fonte: Dados da pesquisa

Na correção da atividade foi verificado que:

Todas as duplas preencheram convenientemente o quadro.

Exercício 4: Foi pedido para que os alunos medissem a hipotenusa e os catetos, para verificar a existência do "Teorema de Pitágoras" através da fórmula: $a^2 + b^2 = c^2$.

Todas as duplas fizeram satisfatoriamente.

Exercício 5: Levando em consideração as regras de arredondamento, será que os valores da **coluna 5** são iguais aos valores da **coluna 7**?

a) Sim.

b) Não.

- Todas as duplas responderam na atividade **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

Exercício 6: O que você pode concluir a respeito da soma das áreas desses quadrados? Escrevendo na linguagem Matemática o Teorema de Pitágoras temos:

a) Se subtrairmos as áreas referentes aos catetos, teremos a área referente à hipotenusa. $b^2 - c^2 = a^2$.

b) Se somarmos as áreas referentes à hipotenusa e um cateto, teremos a área referente ao outro cateto. $a^2 + b^2 = c^2$.

c) Se somarmos as áreas referentes aos dois catetos, teremos a área referente à hipotenusa. $a^2 + b^2 = c^2$.

- Todas as duplas responderam na atividade **letra c**.

Resposta esperada **letra c**.

5.5.2 *Verificação da existência do Teorema de Pitágoras com o uso de polígonos regulares no GeoGebra (usando o triângulo eqüilátero)*

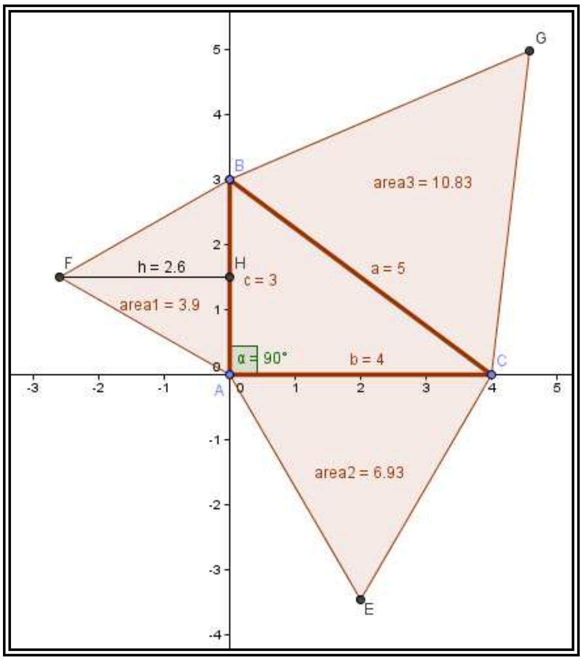


FIGURA 6: Construção do Teorema de Pitágoras usando triangulo eqüiláteros no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

Exercício 7: Modifique três vezes o triângulo e anote no quadro as áreas de cada um. Será que o teorema de Pitágoras ainda vale?

Área 1	Área 2	Área 1 + Área 2	Área 3

QUADRO 7: Quadro para preenchimento do aluno sobre o Teorema de Pitágoras
Fonte: Dados da pesquisa

Na correção da atividade foi verificado que: **Todas as duplas preencheram convenientemente o quadro**.

Exercício 8: Verifique como se chegou as áreas 1, 2 e 3.

Obs.: A Área do Triângulo = $\frac{Base \times Altura}{2}$

a) Somando as medidas dos três lados de cada triângulo.

b) Multiplicando o comprimento do lado do **triângulo retângulo** (base) e a altura do triângulo e esse produto dividido por dois. (Isso nos três lados do triângulo.)

c) Multiplicando o comprimento da altura de cada triângulo e a soma dos lados.

- Todas as duplas responderam **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 9: O que você conclui da soma da área desses triângulos?

a) Se subtrairmos as áreas com referência aos catetos, teremos a área referente à hipotenusa.

b) Se somarmos as áreas referentes à hipotenusa e um cateto, teremos a área referente ao outro cateto.

c) Se somarmos as áreas com referencia nos dois catetos, teremos a área referente à hipotenusa.

- Todas as duplas responderam **letra c**.

Resposta esperada **letra c**.

5.5.3 Verificação da existência do Teorema de Pitágoras com o uso de polígonos regulares no GeoGebra (usando o pentágono)

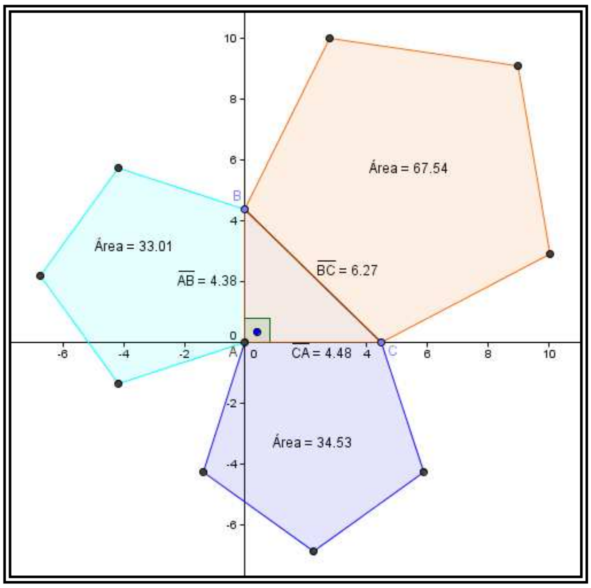


FIGURA 7: Construção do Teorema de Pitágoras usando pentágonos regulares no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

Exercício 10: Somando as duas áreas dos pentágonos menores é possível verificar que o resultado correspondente à área do maior pentágono?

a) Sim.

b) Não.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

Exercício 11: O que você pode então generalizar?

a) A soma da área referente ao lado de um cateto e a área referente à hipotenusa, vai resultar na a área referente ao outro cateto.

b) A soma das áreas referentes aos lados "catetos", vai resultar na área referente ao lado da hipotenusa.

- Todas as duplas responderam **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

➢ **DESAFIO E CONCLUSÃO DA ATIVIDADE**

Exercício 12: Construa a figura abaixo no *GeoGebra* e mostre que o teorema de Pitágoras é válido para o triângulo ABC, preenchendo o quadro a seguir.

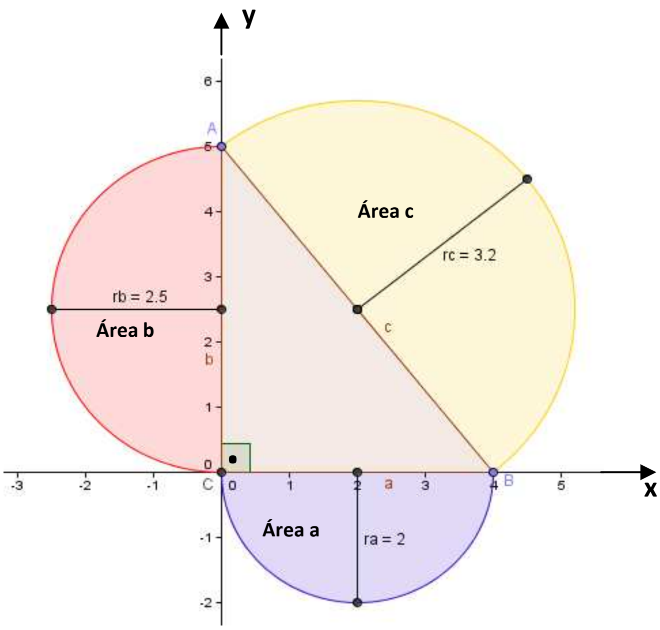


FIGURA 8: Construção do Teorema de Pitágoras usando semicircunferências no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

Altere duas vezes o triângulo **ABC** e preencha o quadro.

Área a = $\frac{\pi.r_a^2}{2}$	**Área b** = $\frac{\pi.r_a^2}{2}$	**(Área a) + (Área b)** $\frac{\pi.r_a^2}{2}$ + $\frac{\pi.r_a^2}{2}$	**Área c** = $\frac{\pi.r_a^2}{2}$

Obs: π é uma constante que vale aproximadamente 3,14.

QUADRO 8: Quadro para preenchimento do aluno sobre o Teorema de Pitágoras
Fonte: Dados da pesquisa

Na correção da atividade foi verificado que: **Todas as duplas preencheram convenientemente o quadro**.

Exercício 13: O que você pode concluir sobre as duas últimas colunas?

a) São iguais. Então o Teorema de Pitágoras é válido quando os lados do triângulo retângulo são formados por semicircunferência.

b) São diferentes. Então o Teorema de Pitágoras **não** é válido quando os lados do triângulo retângulo são formados por semicircunferência.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Nessa atividade tivemos um grande índice de acertos e todas as duplas alcançaram satisfatoriamente os nossos objetivos. Acreditamos que essa atividade oportunizou uma reflexão mais profunda a respeito do teorema de Pitágoras. Essa reflexão exigiu dos alunos o levantamento de hipóteses, o teste e a comprovação dos dados a partir da manipulação do *software*. É importante ressaltar que a imagem concreta das figuras planas no *GeoGebra*, facilitou o entendimento das várias possibilidades de construção do teorema de Pitágoras.

No final da atividade as duplas fizeram uma pequena avaliação sobre a atividade: Teorema de Pitágoras.

Pergunta 1: Qual foi a sua maior dificuldade nessa atividade?

a) O manuseio com o computador.

b) O manuseio com o *software*.

c) Entender a idéia Matemática sobre o assunto.

d) NDA.

- A primeira dupla respondeu **letra b**.

Observação da primeira dupla: Porque não estamos familiarizados com as opções e suas utilidades.

- As demais duplas responderam **letra c**.

Pergunta 2: Você achou a atividade interessante?

a) Sim.

b) Não.

c) Mais ou Menos.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Observação da primeira dupla: Porque o *software* mostra de várias formas o teorema de Pitágoras.

Pergunta 3: Qual é o grau de dificuldade dessa atividade?

a) Muito difícil.

b) Difícil.

c) Fácil.

d) Muito Fácil.

- Todas as duplas responderam **letra b**.

Observação da terceira dupla: Porque deveríamos relacionar o teorema de Pitágoras com as áreas relativas aos lados do triângulo retângulo.

Pergunta 4: Você acha que essa atividade poderia ser aplicada com outras pessoas?

a) Sim.

b) Não.

c) Talvez.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

A fala de um professor que fez a atividade foi: "*Eu nunca iria imaginar que o teorema de Pitágoras tivesse tantas formas interessantes de visualização*."

O ambiente vivenciado fez com que os alunos adotassem uma postura mais séria perante os conceitos de geometria plana, nos levando a refletir como esta abordagem proporcionou uma forma mais atraente de promover a aprendizagem.

5.6 4º dia de aplicação de atividade

- **TÍTULO DA ATIVIDADE**: Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Qualquer

Inicialmente foi dada Orientações gerais sobre o objetivo específico da aula que era:

Deduzir a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.

Nessa etapa da pesquisa os alunos estão mais familiarizados com *software GeoGebra*.

E as perguntas ficam mais no âmbito do entendimento da idéia Matemática sobre a "Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo" e a interpretação do texto.

Perguntas freqüentes:

- Como utilizar a opção Propriedades?
- Como Rotular um objeto?
- Como utilizar a opção polígono?
- O que fazer quando o programa mostra a medida do ângulo externo?

O maior problema aconteceu, quando os alunos foram preencher o quadro, na hora de generalizar a situação e obter a fórmula. Foi muito bom ver alunos generalizar uma situação Matemática pela primeira vez.

5.6.1 Soma dos ângulos internos do triângulo.

O objetivo específico dessa atividade era concluir que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º. Esse objetivo foi alcançado com sucesso.

Exercício 1: Deforme três vezes o triângulo e preencha o quadro a seguir.

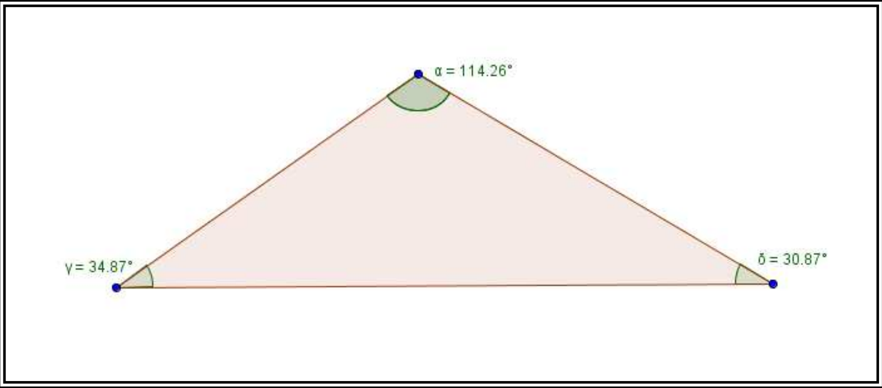


FIGURA 9: Região triangular construído no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

Ângulo α	Ângulo β	Ângulo γ	Soma dos ângulos Internos $\alpha+\beta+\gamma$

QUADRO 9: Quadro para preenchimento do aluno sobre soma dos ângulos internos do triângulo
Fonte: Dados da pesquisa

Na correção da atividade foi verificado que: **Todas as duplas preencheram convenientemente o quadro**.

Exercício 2: A soma dos ângulos internos nas três movimentações se altera?

a) Sim.

b) Não.

- Todas as duplas responderam na atividade **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 3: O que você verifica na soma dos ângulos internos $\alpha + \beta + \gamma$?

a) Se somarmos $\alpha + \beta + \gamma$ teremos 360º.

b) Se somarmos $\alpha + \beta + \gamma$ teremos 900º.

c) Se somarmos $\alpha + \beta + \gamma$ teremos 180º.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra c**.

Resposta esperada **letra c**.

5.6.2 Soma dos ângulos internos do quadrilátero

O objetivo específico dessa atividade era concluir que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º. Esse objetivo foi alcançado com sucesso. Porque todos os alunos acertaram as perguntas.

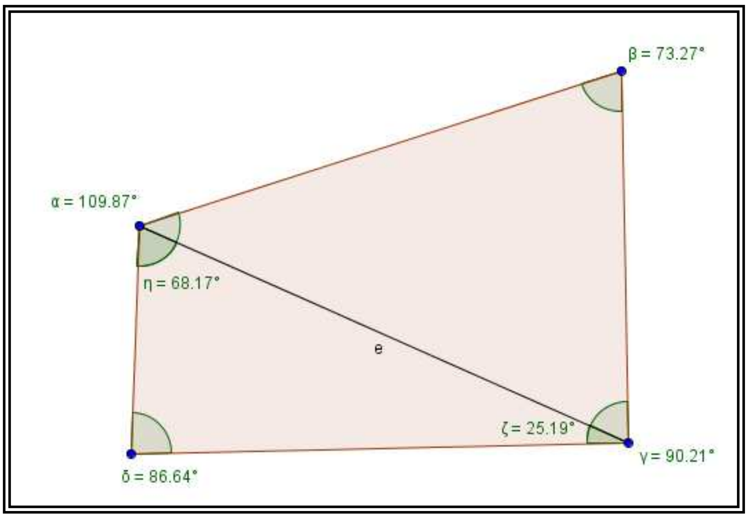


FIGURA 10: Quadrilátero com sua diagonal construído no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

Faça uma análise e marque a resposta certa com base no que você observa no computador.

Exercício 4: O que você verifica na soma dos ângulos internos $\alpha + \beta + \gamma + \delta$?

a) Se somarmos $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ teremos 360º.

b) Se somarmos $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ teremos 900º.

c) Se somarmos $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ teremos 180º.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

Exercício 5: Quantos triângulos formaram?

a) 1 triângulo.

b) 2 triângulos.

c) 3 triângulos.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 6: Qual é a relação entre a soma dos ângulos internos dos triângulos e do quadrilátero?

a) A soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180º. No quadrilátero temos dois triângulos, então 180º + 180º = 360º. Que é a soma dos ângulos internos do quadrilátero.

b) Como o triângulo não tem diagonal, não é possível estabelecer uma relação entre a soma dos ângulos internos do triângulo e do quadrado.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

5.6.3 Soma dos ângulos internos do pentágono

O objetivo específico dessa atividade era concluir que a soma dos ângulos internos de um pentágono é 3 x 180º. Esse objetivo foi alcançado com sucesso.

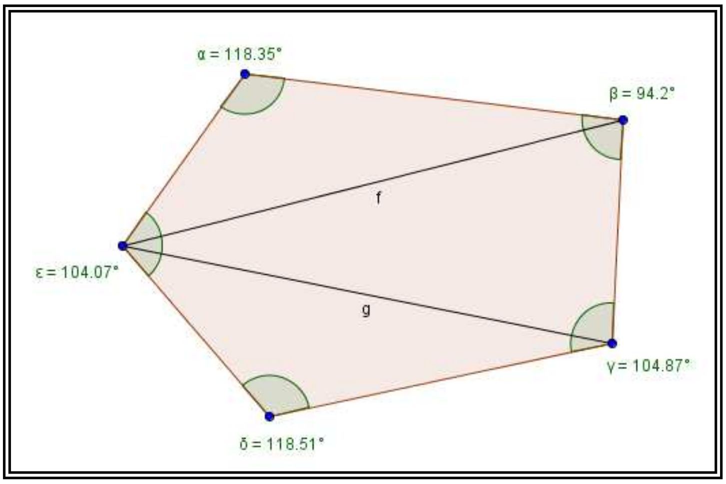


FIGURA 11: Pentágono com suas diagonais construído no *GeoGebra*
Fonte: Dados da pesquisa

Exercício 7: O que você pode observar nessas atividades em relação à soma dos ângulos internos de um triângulo e a de um polígono qualquer?

a) Para saber a soma dos ângulos de um polígono qualquer, basta multiplicar o número de diagonais com o número de lados.

b) Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, podemos observar e contar o número (n) de triângulos dentro do polígono. Então, para saber a soma dos ângulos internos do polígono basta multiplicar 180º x n.

c) Não há nenhuma relação entre o número de triângulos que formamos no polígono e a soma dos ângulos internos de um triângulo.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 8: Preencha o quadro para sua melhor compreensão.

nº de lados (n)	Quantos triângulos consigo formas?	Soma dos ângulos Internos	Se o Polígono for regular cada ângulo interno vale:	Nome do polígono Regular
3	1	1 . 180º	180 ÷ 3 = 60	Triângulo Equilátero
4				
	3			
		4 . 180º = 720		
			900 ÷ 7 = 128,57	Heptágono Regular
				Octógono Regular
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n (lados)				Polígono regular

QUADRO 10: Quadro para preenchimento do aluno sobre generalização de polígonos
Fonte: Dados da pesquisa

Na correção da atividade foi verificado que: **Todas as duplas preencheram convenientemente o quadro**.

A grande dificuldade que os alunos tiveram nessa atividade, foi entender a idéia da “generalização” de cada situação. Com essa dificuldade, tivemos que intervir esclarecendo alguns fatos a respeito de generalização no Quadro 10.

O que facilitou a assimilação desse conteúdo foi a possibilidade de construção e a possibilidade de visualização do objeto no computador. Constatamos que tudo isso, despertou maior interesse por parte dos alunos, já que a aula tornou-se mais interativa prendendo de forma mais fácil a atenção dos mesmos. Foi muito gratificante para nos, ver alunos generalizando uma situação Matemática pela primeira vez.

Os professores que fizeram a atividade elogiaram muito esse quadro onde leva o educando a noção de generalização. Verificamos que esse quadro estimulou os alunos a pensar de forma ativa, autonomamente e o professor atuando como mediador entre o aluno e o conhecimento. Esse quadro também estimulou um processo de exploração e apropriação do saber por parte dos alunos. Por isso verificamos no quadro 17 um excelente índice de acerto das perguntas. Pois todas as duplas alcançaram satisfatoriamente os nossos objetivos propostos no item **4.5**.

No final da atividade as duplas fizeram uma pequena avaliação sobre a atividade: Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Qualquer.

Pergunta 1: Qual foi a sua maior dificuldade nessa atividade?

a) O manuseio com o computador.

b) O manuseio com o *software*.

c) Entender a idéia Matemática sobre o assunto.

d) NDA.

- A terceira dupla respondeu **letra d**.

Observação da terceira dupla: Achamos a atividade muito didática e não tivemos dificuldade alguma.

- As demais duplas responderam **letra c**.

Pergunta 2: Você achou a atividade interessante?

a) Sim.

b) Não.

c) Mais ou Menos.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Observação da terceira dupla: Essa atividade me levou a determinar a generalização da fórmula Matemática da soma dos ângulos internos de forma intuitiva.

Pergunta 3: Qual é o grau de dificuldade dessa atividade?

a) Muito difícil.

b) Difícil.

c) Fácil.

d) Muito Fácil.

- A primeira e a segunda dupla responderam **letra b**.
- A terceira e a quanta dupla responderam **letra c**.

Pergunta 4: Você acha que essa atividade poderia ser aplicada com outras pessoas?

a) Sim.

b) Não.

c) Talvez.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Mas com todas as dificuldades, os alunos acharam a atividade interessante, porque tiveram a oportunidade de construir e simular o conhecimento geométrico.

Que grau de dificuldade da atividade é difícil e que essa atividade pode ser aplicada com outras pessoas. Veja a fala de um aluno: "*Como entendi rápido o problema, ajudei meus colegas a entender a generalização do problema*".

Pela fala do aluno percebemos que a atividade no computador encoraja a cooperação entre estudantes. Percebemos que a informática permite atitudes inovadoras que possibilitam a superação do individualismo, competitivo e isolado. As conversas na sala de informática desencadeiam processos coletivos em que uns dependem dos outros. Percebemos que a tecnologia proporcionou a oportunidade de interação permanente entre os estudantes.

5.7 5º dia de aplicação de atividade

- **TÍTULO DA ATIVIDADE**: Pontos Notáveis do Triângulo

Primeiramente foram dadas algumas orientações gerais sobre o objetivo específico da aula que era conhecer e manipular as principais funções do *GeoGebra* para mostrar os pontos notáveis do triângulo: baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro.

Foi feita uma explanação no Power Point e no quadro branco a respeito dos pontos notáveis do triângulo pelo professor e pesquisador. Com o objetivo de colocar os alunos a par da situação a ser explorada no *GeoGebra*, foi esclarecido o que é Mediana, Bissetriz, Mediatriz e Altura em um triângulo qualquer. Foi comentado também a respeito do teorema de "Ceva".

Depois de feita essa explanação inicial, entregamos aos alunos a atividade e demos início à pesquisa.

Nessa etapa da pesquisa os alunos estão mais familiarizados com *software GeoGebra,* pois já tiveram quatro aulas usando o *software*.

E as perguntas ficam mais no âmbito do entendimento da idéia Matemática sobre os "Pontos Notáveis do Triângulo" e a interpretação do texto.

Perguntas freqüentes:

- Como apagar fazer uma reta paralela?
- Como obter uma mediana?
- Como obter uma bissetriz?
- Como esconder objetos?
- O que é triângulo agudo, obtuso e retângulo?
- O que são pontos coincidentes?

- O que é vértice?
- Como utilizar a opção polígono?

5.7.1 O baricentro

Movimente os pontos **A**, **B** e **C** e marque a resposta correta.

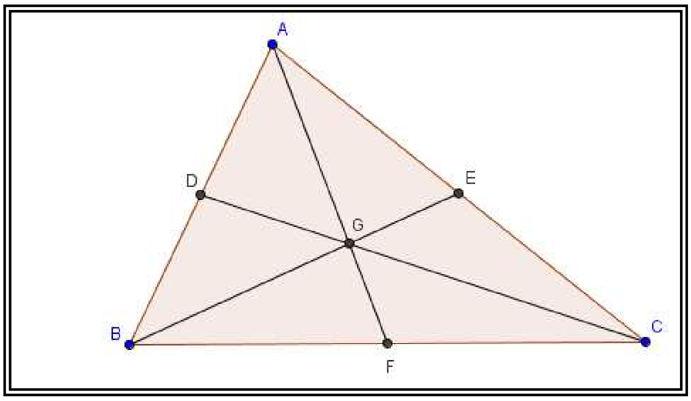


FIGURA 12: Ponto notável do triangulo: baricentro
Fonte: Dados da pesquisa

Exercício 1: O que você pode observar?

a) O segmento **AF** não passa pelo ponto **G**.

b) O segmento **AF** passa pelo ponto **G**.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

5.7.2 O incentro

Movimente os pontos **A**, **B** e **C**.

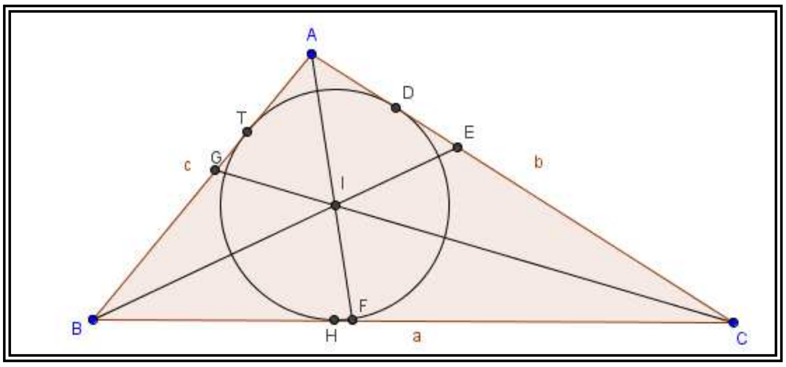


FIGURA 13: Ponto notável do triangulo: incentro
Fonte: Dados da pesquisa

Exercício 2: O que você observa? Marque a alternativa correta.

a) A circunferência fica toda dentro do triângulo.

b) A circunferência fica toda fora do triângulo.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

5.7.3 O circuncentro

Movimente os pontos **A**, **B** e **C**.

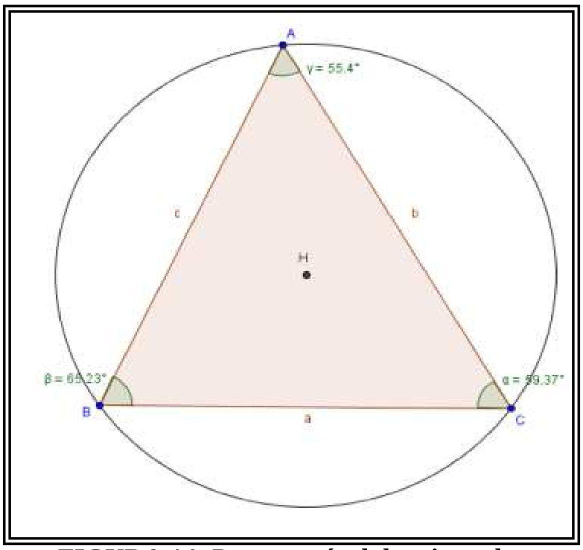


FIGURA 14: Ponto notável do triangulo: circuncentro
Fonte: Dados da pesquisa

Exercício 3: O que você observa?

a) A circunferência passa pelos pontos **B** e **C**.

b) A circunferência não passa pelos pontos **B** e **C**.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

Exercício 4: Quando que o ponto **H** (circuncentro) será **interno** ao triângulo?

a) Quando o triângulo for **"Agudo"** (três ângulos internos menores que 90º).

b) Quando o triângulo for **"Retângulo"** (um ângulo interno igual a 90º).

c) Quando o triângulo for **"Obtuso"** (um ângulo interno maior que 90º).

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

Exercício 5: Quando que o ponto **H** (circuncentro) será **externo** ao triângulo?

a) Quando o triângulo for **"Agudo"** (três ângulos internos menores que 90º).

b) Quando o triângulo for **"Retângulo"** (um ângulo interno igual a 90º).

c) Quando o triângulo for **"Obtuso"** (um ângulo interno maior que 90º).

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra c**.

Resposta esperada **letra c**.

Exercício 6: Quando que o ponto **H** (circuncentro) **estará sobre** um dos lados do triângulo?

a) Quando o triângulo for **"Agudo"** (três ângulos internos menores que 90º).

b) Quando o triângulo for **"Retângulo"** (um ângulo interno igual a 90º).

c) Quando o triângulo for **"Obtuso"** (um ângulo interno maior que 90º).

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

5.7.4 O ortocentro

Com base nessa construção no *GeoGebra*, discuta com os colegas e marque a resposta correta:

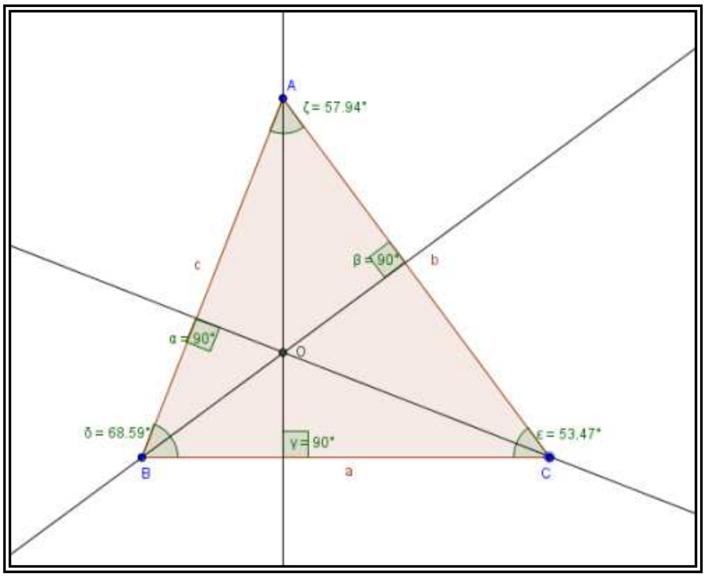


FIGURA 15: Ponto notável do triangulo: ortocentro
Fonte: Dados da pesquisa

Exercício 7: Quando que o ponto **O** (ortocentro) será **interno** ao triângulo?

a) Quando o triângulo for **"Agudo"** (três ângulos internos menores que 90º).

b) Quando o triângulo for **"Retângulo"** (um ângulo interno igual a 90º).

c) Quando o triângulo for **“Obtuso”** (um ângulo interno maior que 90º).

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra a**.

Resposta esperada **letra a**.

Exercício 8: Quando que o ponto **O** (ortocentro) será **externo** ao triângulo?

a) Quando o triângulo for **“Agudo”** (três ângulos internos menores que 90º).

b) Quando o triângulo for **“Retângulo”** (um ângulo interno igual a 90º).

c) Quando o triângulo for **“Obtuso”** (um ângulo interno maior que 90º).

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra c**.

Resposta esperada **letra c**.

Exercício 9: Quando que o ponto **O** (ortocentro) **coincidirá com um dos vértices** do triângulo?

a) Quando o triângulo for **“Agudo”** (três ângulos internos menores que 90º).

b) Quando o triângulo for **“Retângulo”** (um ângulo interno igual a 90º).

c) Quando o triângulo for **“Obtuso”** (um ângulo interno maior que 90º).

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

5.7.5 A reta de Euler

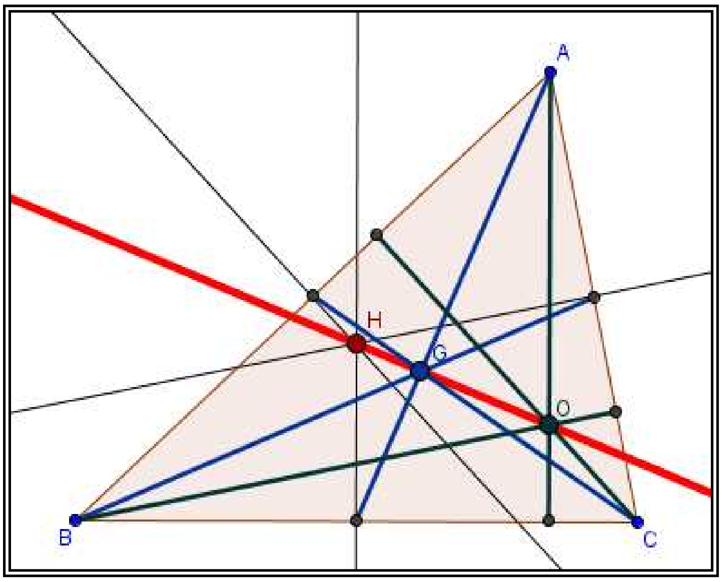


FIGURA 16: Reta de Euler
Fonte: Dados da pesquisa

Exercício 10: Quando que esses três pontos serão coincidentes?

a) Quando o triângulo for **Isósceles** (com dois lados iguais).

b) Quando o triângulo for **Eqüilátero** (com três lados iguais).

c) Quando o triângulo for **Escaleno** (com três lados diferentes).

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 11: O que acontece com os pontos quando o **"Triângulo é Retângulo"**? (**Triângulo Retângulo** se dá quando se tem um ângulo interno de 90º)

a) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam exteriores ao triângulo.

b) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam interiores ao triângulo.

c) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** pertencem ao triângulo.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra c**.

Resposta esperada **letra c**.

Exercício 12: O que acontece com os pontos quando o **"Triângulo é Agudo"**? (**Triângulo agudo** se dá quando todos os ângulos internos são menores que 90º)

a) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam exteriores ao triângulo.

b) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam interiores ao triângulo.

c) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** pertencem ao triângulo.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra b**.

Resposta esperada **letra b**.

Exercício 13: O que acontece com os pontos quando o **"Triângulo é Obtuso"**? (**Triângulo Obtuso** se dá quando temos "um" ângulo interno maior que 90º)

a) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam exteriores ao triângulo.

b) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam interiores ao triângulo.

c) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** pertencem ao triângulo.

- Todas as duplas responderam na atividade a **letra a**.

Os alunos reconheceram a importância dos conceitos apresentados de pontos notáveis do triângulo, tiveram a possibilidade de construir e deformar as propriedade e verificar que as mesmas não se alteram. Com o auxílio da informática, os alunos tiveram a segurança para defender seus pontos de vista, através da utilização de argumentação baseada no domínio dos conhecimentos teóricos. Veja a fala de um aluno:

"Quando meu professor ensinou esse assunto, na 7ª série, eu não tinha sentido nenhuma emoção. Mas agora sim".

Pela fala do aluno temos a clara convicção que a informática pode causar emoção nas pessoas. Isso torna a aula mais atrativa e prazerosa e o aluno não esquece esse conhecimento tornando a assim, esse conhecimento significativo.

Como última etapa da aplicação da atividade foi realizada uma “socialização” das questões trabalhadas com o objetivo de analisar os porquês das soluções encontradas pelos alunos. Foi nessa etapa que verificamos a apropriação do vocabulário matemático por parte dos alunos, onde eles usavam naturalmente expressões do tipo: intersecção, circunferência inscrita, mediatriz, bissetriz, triângulo agudo, retângulo e obtuso entre outras expressões de geometria.

No final da atividade as duplas fizeram uma pequena avaliação sobre a atividade: Pontos Notáveis do Triângulo.

Pergunta 1: Qual foi a sua maior dificuldade nessa atividade?

a) O manuseio com o computador.
b) O manuseio com o *software*.
c) Entender a idéia Matemática sobre o assunto.
d) NDA.

- Todas as duplas responderam **letra d**.

Observação da terceira dupla: Nós estávamos familiarizados com o *software* nas atividades anteriores e, portanto não tivemos nenhuma dificuldade, pois o assunto foi explanado com boa didática.

Pergunta 2: Você achou a atividade interessante?

a) Sim.
b) Não.
c) Mais ou Menos.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Pergunta 3: Qual é o grau de dificuldade dessa atividade?

a) Muito difícil.
b) Difícil.
c) Fácil.
d) Muito Fácil.

- Todas as duplas responderam **letra c**.

Pergunta 4: Você acha que essa atividade poderia ser aplicada com outras pessoas?

a) Sim.
b) Não.
c) Talvez.

- Todas as duplas responderam **letra a**.

Percebemos que os alunos não tiveram dificuldade em realizar a seqüência didática, que a atividade é interessante, é fácil e essa atividade pode ser aplicada com outros estudantes.

Ao final da pesquisa, depois de ter trabalhado com Ambientes de Geometria Dinâmica na unidade de Geometria, concluímos que o ensino com a utilização do computador foi mais explícito, mais objetivo e a identificação de conceitos mais eficaz.

Foi verificada uma evolução favorável da atitude dos alunos em relação à Matemática, também um amadurecimento no modo de encarar os erros cometidos.

Quanto à aprendizagem, ressaltamos o fato dos alunos terem passado mais tempo na construção de figuras. No entanto, entendemos que isso pode ser apontado como uma possível explicação para uma melhor consolidação dos conceitos matemáticos.

Também verificamos que no espaço onde aconteceu a socialização do conhecimento, que era o lugar destinado a debates e levantamento de hipóteses, os alunos tiveram a oportunidade de se apropriar do vocabulário matemático de forma significativa.

Foi verificado também que os padrões das interações, existentes entre os alunos, entre o professor e os alunos, e com o computador, parecem ter um papel fundamental na negociação dos significados matemáticos. Foi identificado que os alunos revelavam maior interesse na realização das tarefas com uso do computador. E que a rapidez proporcionada pelo computador e a apresentação precisa das figuras geométricas dos trabalhos eram valorizadas pelos alunos em sala.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão problematizadora trabalhada se refere à aprendizagem de geometria plana com uso de tecnologia computacional.

Na pesquisa realizada, com a produção de atividades, as quais procuraram explorar a produção do pensamento geométrico, pela visualização e com a manipulação do *software* de geometria dinâmica, conseguimos que o estudante com uma atitude inquiridora de observação e investigação de formas geométricas e propriedades, trabalhasse com a geometria.

O processo ensino-aprendizagem de geometria na procura da compreensão se faz pela figura traçada em seu espaço, no caso dessa investigação, figura no plano, com a manipulação e exploração de propriedades pelo processo da intuição e de levantamento de conjecturas, com uma maneira aproximativa à dedução formal. Isto favorece a formalização com a linguagem específica da Matemática.

Coerente com estas proposições investigativas se tem os preceitos dos PCNs para o ensino de geometria, que defendem estratégias para aprendizagem eficaz pelas mídias.

Os livros didáticos analisados expõem o conteúdo da Matemática mas não utilizam o recurso de um didática progressista com novas tecnologias.

O uso da informática educativa por meio de *software* dinâmico permitiu explorar e formalizar diferentes conceitos geométricos, bem como proposições de cálculo de área, ilustrações geométricas do Teorema de Pitágoras e da Razão áurea.

Segundo Valente (1993) e Borba (2007) a informática não requer exclusividade nos processos didáticos, mas alternância entre aulas expositivas e atividades com as mídias.

A maioria dos alunos é preparada para o cálculo operacional com aplicação de fórmulas o que pode não trazer uma aprendizagem significativa, reduzindo-se apenas a procedimentos de cálculos.

A estruturação das atividades, no formato de uma Seqüência Didática (Zabala, 1998) possibilitou uma ordenação de etapas pelas quais o estudante pode chegar ao formalismo, sem receber prontas e acabadas as propriedades geométricas, as quais propiciaram uma aproximação ao conceito, fazendo que o estudante ao manipular as figuras pelo *GeoGebra*, reconhecesse regularidades pelos parâmetros inerentes à situação criada.

Assim, os PCNs defendem que o ensino de geometria no ensino fundamental, principalmente, está estruturado para propiciar uma primeira reflexão com experimentações e deduções informais, não efetivado a dedução rigorosa dos teoremas. Isto é, evitar uma didática formal de enunciados de axiomas, postulados e demonstrações que apelam a memórias de fórmulas do que a compreensão da Matemática não podendo ser esta uma primeira etapa do estudo da geometria.

Em suma, o uso do *GeoGebra* trouxe possibilidades de criação de experiências que faz o conhecimento geométrico acontecer na evolução de um nível básico da intuição e das conjecturas.

Finalmente trabalhar com o *GeoGebra* propiciou condições do “fazer Matemática” usando estratégias do trabalho com as figuras planas, pela geometria dinâmica, num processo ativo e interativo de discussão e argumentação. Os estudantes conseguiram pensar, geometricamente, pelo papel heurístico da manipulação do *software* e descoberta das propriedades das figuras geométricas.

Nenhuma pesquisa é definitiva. Por isso, verificamos a necessidade de desenvolvimento de outros estudos sobre a problemática investigada:

- comparar a metodologia da aula expositiva com utilização do *software* em laboratório quanto a eficácia dessas metodologias;
- resolução de problemas com uso do *software GeoGebra*.
- desenvolvimento de seqüências didáticas utilizando o *software GeoGebra* para os conteúdos de funções, gráficos e pensamento funcional;
- formação e treinamento de professores em laboratório de informática utilizando o *software GeoGebra*.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 3. ed. 2. reimpr. Belo horizonte: Autêntica, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino fundamental e Ensino Médio). Brasília: MEC/SEMT, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008** (Anos Finais do Ensino Fundamental). Brasília: MEC, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 2. ed. Lisboa: Gradativa, 1998.

COELHO, M. I. P. **O Cabri-géomètre na resolução de problemas**: estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade. Lisboa: APM, 1996.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **EtnoMatemática**. São Paulo: Editora Ática, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto e aplicações**. São Paulo: Editora ática, 2008.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradativa, 1995.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar vol 9**: geometria plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

DOMINGUES, Hygino H. (tradutor). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e da função cognitiva do pensamento. **Jornal de Ensino e Ciências Cognitivas**, v. 5, 1995.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora UNICAMP, 1997.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Coleção**: formação de professores. Investigação em educação matemática (percursos teóricos e metodológicos). 2. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

GALVES, Grécia. **Aprendizagem da orientação no espaço urbano**: uma proposta para o ensino da geometria na escola primária. 1985. 210 p. Tese de Doutorado em Ciências na Especialidade Educação. Departamento de Pesquisas Educacionais do Centro de Pesquisas e Estudos Avançados do Instituto Politécnico Nacional do Chile, 1985.

GEOGEBRA. **Manual do *GeoGebra***. Disponível em: <http://www.*geogebra*.org/cms/>. Acesso em: 23 fev. 2010.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática**: uma nova abordagem. v. único. Ed FTD, 2007.

HERNÁNDEZ, F. **Transgressão e mudança na educação**: os projetos de trabalho. Tradução Jussara Haubert Rodrigues. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

LESH, R. **Avaliação assistida por computador de entendimentos de ordem superior e processos elementares matemática**. Washington, DC: G. Kulm, 1990. p. 81-110.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo. **Temas e problemas**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

LINS, Romulo Campos. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LOPES, J. de A. **Livro didático de matemática**: concepção, seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendências em educação matemática. Campinas, SP, 2000. Tese de Doutorado Campinas. UNICAMP/FE, 2000.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, ano III, n. 4, 1. sem., Blumenau: SBEM, 1995.

MANSUTTI, M. A. Concepção e produção de materiais instrucionais em educação matemática. **Revista de Educação Matemática**. SBEM-SP, ano 1, n. 1, 1993, p. 17-29.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides**: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Traduação de Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2008.

NÓBRIGA, Jorge Cássio. **Aprendendo matemática com o Cabri-Geomètre I**. v. I. Brasília: Ed. do autor, 2003.

NÓBRIGA, Jorge Cássio. **Aprendendo matemática com o Cabri-Geomètre II**. v. II. Brasília: Ed. do autor, 2003.

NÓBRIGA, Jorge Cássio. **Aprendendo matemática com o Cabri-Geomètre II e II PLUS**. v. único. Brasília: Ed. do autor, 2003.

OLIVEIRA, Celina Couto de. COSTA, José Wilson da; MOREIRA, Mércia. **Ambientes informatizados de aprendizagem**: produção e avaliação de *software* educativo. Série Prática Pedagógica. Campinas, SP: Papirus, 2001.

PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma. **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**. Campinas, UNICAMP/FE/CEMPEM, ano 1, n. 1, p. 7-17, mar. 1993.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de matemática**: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1975.

PONTE, J. P.; MATOS, J. M.; ABRANTES, P. **Investigação em educação matemática**: implicações curriculares. Lisboa: IIE, 1998.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. de L. **Didáctia da matemática do 1º ciclo**. Lisboa: Universidade aberta, [19--].

RODRIGUES, M. M. T. **A aprendizagem da matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador**. Lisboa, 1997. Tese de mestrado. APM, 1997.

RUGGIERO, M. A. **Uma contribuição a analise do livro didático de matemática na perspectiva histórico-cultural**. São Carlos, 2000. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), 2000.

SERRAZINA, M. L. Ensinar/aprender matemática. In: **Atlas do professor de matemática (APM)**. Lisboa: APM, 1995, p. 33-41.

SHULTE, Alberto P.; LINDQUIST, Mary Montogomery. **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

VALENTE, J. A. **Computadores e conhecimento**: repensando a Educação. Campinas: Gráfica Central da Unicamp, 1993.

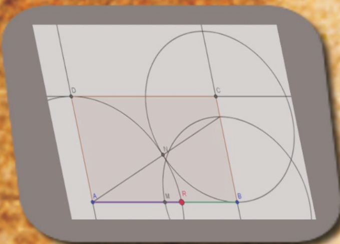
VAN HIELE, Pierre M. **Estruturas e insight**: uma teoria de educação matemática. Academic Press, 1986.

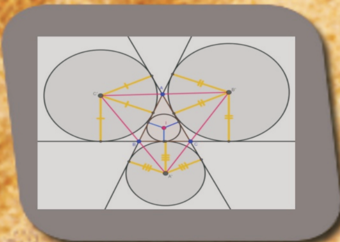
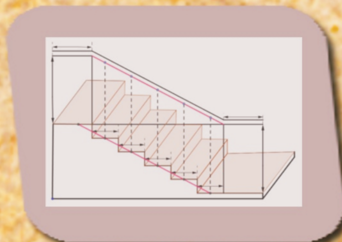
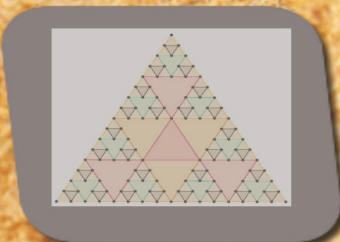
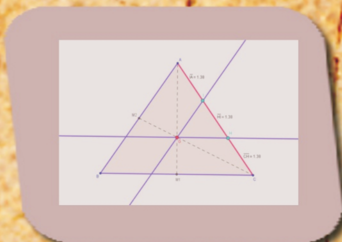
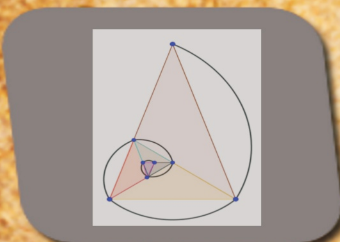
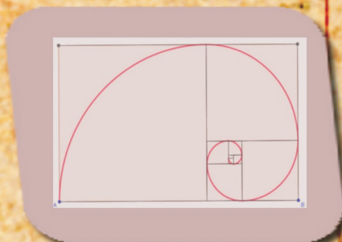
ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE

APÊNDICE A

Possibilidades de construção de figuras geométricas planas com o *software*: *GeoGebra*



POSSIBILIDADES DE CONSTRUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS COM O SOFTWARE

GEOGEBRA

Humberto Alves Bento
João Bosco Laudares

Possibilidades de construção de figuras geométricas planas

com o software:

GEOGEBRA

HUMBERTO ALVES BENTO
JOÃO BOSCO LAUDARES

Possibilidades de construção de figuras geométricas planas com o software: GEOGEBRA

Belo Horizonte - Minas Gerais
2010

2010 by Humberto Alves Bento e João Bosco Laudares

Capa: VLX - Criação & Arte
Projeto Gráfico e
Diagramação: VLX - Criação & Arte

Todos os direitos reservados

Bento, Humberto Alves.

Possibilidades de construção de figuras geométricas planas com o software: GEOGEBRA / Humberto Alves Bento e João Bosco Laudares - Volume único - Brasília: Edição do autor, 2010. 160 p.

Inclui bibliografia.

Conteúdo: Geometria Plana, Áreas, Triângulos, Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, Polígonos, Teorema de Pitágoras, razão áurea, Pontos Notáveis de um Triângulo.

1.Matemática. 2. Ensino Médio. 3. Informática. 4. Ensino aprendizagem de Geometria.

Dedico este livro a todos os corajosos que entram no mundo da matemática, enfrentam derrotas, vencem obstáculos e saem vitoriosos.

Humberto Bento

AGRADECIMENTOS

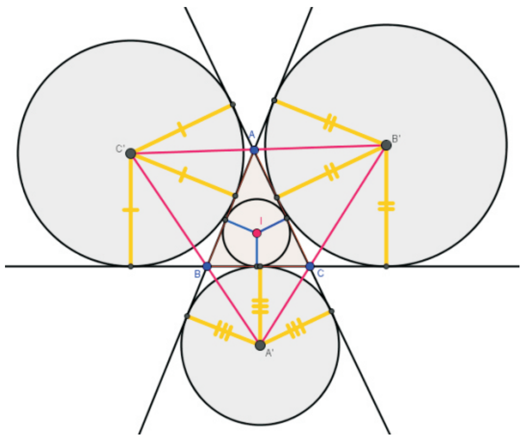
Agradeço primeiramente a Deus, autor da vida e a quem, de certa forma, contribuiu para a criação deste livro:

Profº. Dr. João Bosco Laudares pelas boas orientações e incentivos.

Aos amigos: Carlos Eduardo Alves Bento, Glenda-Amanda, Sérgio Oliveira (Serginho), Mestrandos e Professores da PUC Minas, Valéria da VLX Criação & Arte, Meus alunos do alunos CEF 07, CEF 19 e Graduandos da UCB. Todos vocês me deram valiosas sugestões.

Um agradecimento especial a minha esposa Lívia, meu filho Carlos Alexandre, aos meus maravilhosos Pais Gedeão e Helena e a meu irmão Cadu, que são a fonte de inspiração da minha vida.

APRESENTAÇÃO



O que me motivou a escrever sobre o tema: “Possibilidades de construção de figuras geométricas planas com o software: GEOGEBRA” foi a grande dificuldade de se trabalhar com alunos em um laboratório de informática de forma sistematizada. No entanto, gostaria de sugerir algumas seqüências didáticas já estudadas e testadas em forma de pesquisa para levar o educando a ter um conhecimento globalizado sobre o conhecimento matemático adquirido na aula com o professor em sala.

A geometria, tal qual como é ensinada tradicionalmente, precisa mudar. Chegou o momento de refletir sobre sua evolução nos últimos tempos e perceber que ela deve incorporar também a tecnologia do presente. Os alunos de geometria poderiam aprender como os conceitos e idéias dessa matéria se aplicam a uma vasta gama de feitos humanos na ciência e na arte. Além disso, deveriam experimentar geometria ativamente. Uma maneira de lhes propiciar essa experiência é através da introdução do computador no currículo escolar. E um excelente meio de comunicação com o computador é o software Geogebra.

A escolha do software Geogebra se deu por ser um “software livre” (não pago) e pela interface de fácil manipulação, interação e visualização, e ainda, por ser um software de geometria dinâmica, nele é possível verificar várias propriedades em geometria plana.

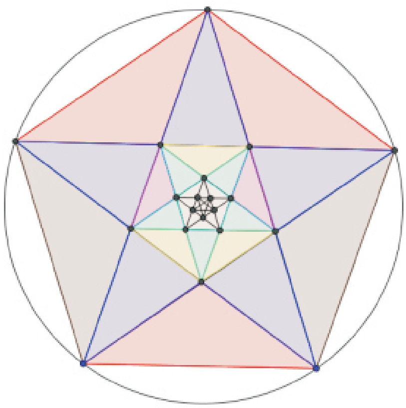
Esse livro tem a idéia de apresentar mais uma possibilidade ao educando de se apropriar do conhecimento matemático. Depois da explanação em sala de aula pelo professor, depois de feito os exercícios propostos aí sim, aplicar a seqüência didática sugerida neste livro. Com isso, reforçar as técnicas de ensino utilizadas anteriormente.

Há uma grande preocupação de diretores de escola com a inserção de laboratório de informática nas escolas particulares. Assim como também o governo também tem feito grandes estudos de viabilidade para ter laboratórios de informática em todas as escolas públicas com o objetivo de acompanhar o desenvolvimento da sociedade.

Esse livro tem o intuito de ajudar o professor a ter uma referência de um trabalho científico que foi estudado e aplicado em alunos com o objetivo de desenvolver aulas que leve o educando a ter várias possibilidades de absolver e aprofundar-se no conhecimento matemático.

Humberto Bento

SOBRE O GEOGEBRA



GeoGebra é um software de matemática dinâmica que foi desenvolvido pelo Austríaco Ph.D. Markus Hohenwarter no ano de 2002 para ser ulitizado em sala de aula, principalmente em escolas secudárias. O nome GeoGebra reúne GEOmetria, álGEBRA e cálculo. Esse software recebeu muitos prémios internacionais incluindo o prémio de software educacional Alemão e Europeu.

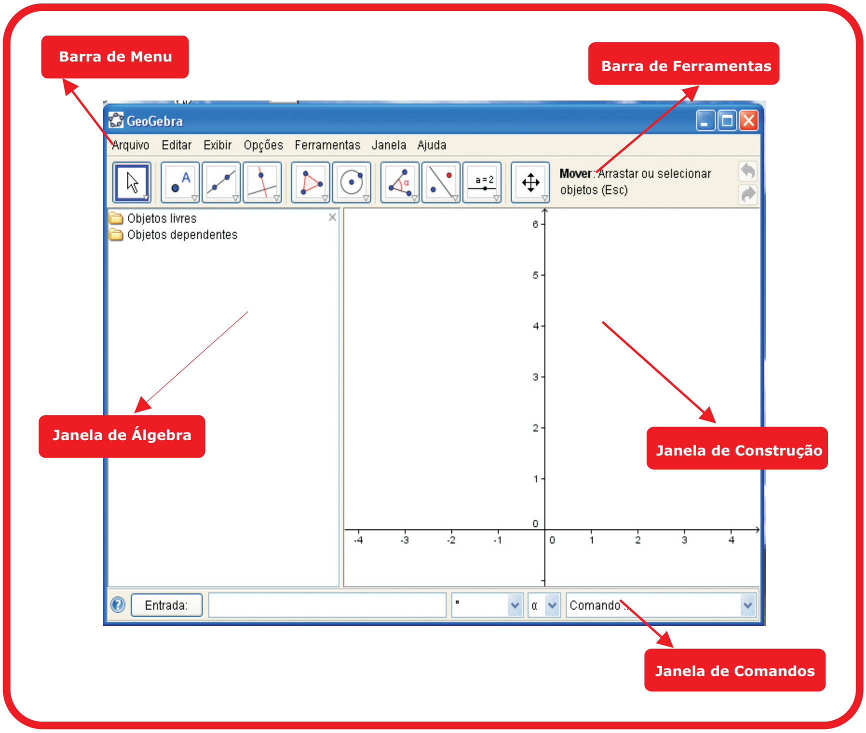
O GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica, dentre as principais destaco:

- ✓Permite construir figuras geométricas e deformá-las mantendo suas propriedades.
- ✓Permite criar novas ferramentas (macro-construções) e adicioná-las na barra de menu.
- ✓Permite que seus arquivos sejam facilmente compartilhados em outros programas de computação.
- ✓É um software livre. (Não Pago)
- ✓Excelente interface.
- ✓Fácil de manusear.

Você pode baixar o Geogebra gratuitamente pela internet acessando a página: <http://www.geogebra.org/cms/> e seguir os passos para instalação do programa. É possível também, obter pela internet o manual do Geogebra, acessando o site: <www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>.

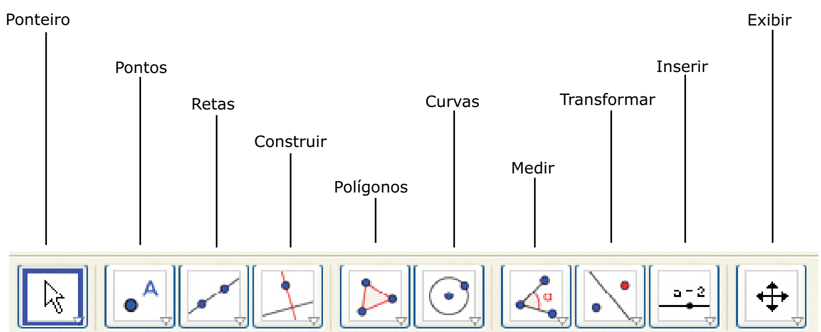
1. A tela do Geogebra

A figura abaixo representa a tela do Geogebra.



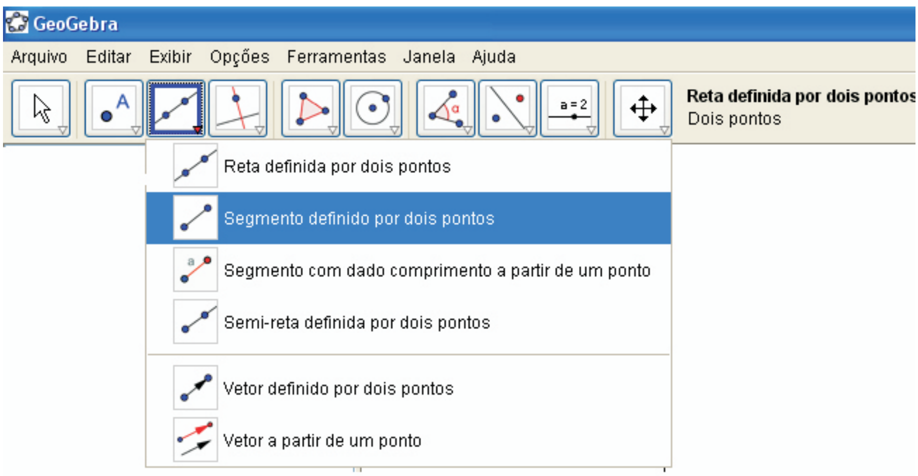
2. A Barra de Ferramentas do Geogebra

A barra de ferramentas do Geogebra está dividida em 10 janelas da seguinte maneira:



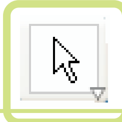
Cada janela contém várias ferramentas. Para selecionar uma função da barra de ferramentas do Geogebra, devemos direcionar o cursor sobre um “triângulo pequeno” que fica no lado direito de cada janela, até que ele fique “vermelho”, logo em seguida dê um clique para abrir selecionar a ferramenta dentro da janela.

Para selecionar a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)**. Nesse caso, você deverá direcionar o cursor sobre a terceira janela (da esquerda para direita), até o triângulo ficar vermelho, clique para que a janela abra mostrando as funções e selecione a função desejada.



Algumas Ferramentas

Menu da Janela 1



Ponteiro

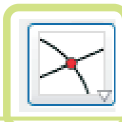
Com essa ferramenta pode-se selecionar, mover e manipular objetos. E é uma das ferramentas mais usadas no programa. Também pode-se selecioná-la apertando o \esc do teclado.

Menu da Janela 2

Novo Ponto

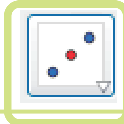
Cria um ponto em um espaço livre, em um objeto ou em uma interseção.

No GeoGebra a rotulação é automática, ou seja, ao criar um ponto automaticamente ele recebe um nome ou rótulo. Esta nomeação se da usando as letras maiúsculas do nosso alfabeto (A,B,C...).



Interseção de dois objetos

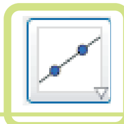
Com esta opção pode-se explicitar os pontos de interseção entre dois objetos. Para utilizar essa ferramenta você poderá apontar o cursor diretamente sobre a intersecção dos objetos ou clicar sucessivamente sobre cada um dos dois objetos aos quais se deseja criar a intersecção.



Ponto médio ou centro

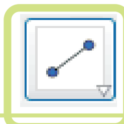
Essa ferramenta cria o ponto médio entre dois pontos. Para se criar o ponto médio de um segmento pode-se clicar diretamente sobre a linha do segmento ou sobre os extremos dele.

Menu da Janela 3



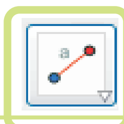
Reta definida por dois pontos

Ativando esta ferramenta pode-se criar uma reta que passa por dois pontos.



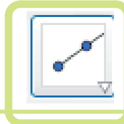
Segmento definido por dois pontos

Esta ferramenta cria o segmento de reta que une dois pontos.



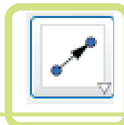
Segmento com dado comprimento a partir de um ponto

Esta ferramenta cria o segmento de reta com comprimento definido. Utilizá-la basta clicar na tela, criando o extremo inicial. Apos isso, aparecerá uma caixa na tela, solicitando a medida do comprimento. Digite-a e der um enter.



Semi-reta definida por dois pontos

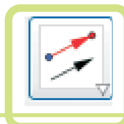
Esta ferramenta cria uma semi-reta a partir de dois pontos. Os pontos podem já estar na área gráfica. Nesse caso, basta clicar nos pontos seguidamente. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta ativada.



Vetor definido por dois pontos

Esta ferramenta cria um vetor a partir de dois pontos. Os pontos podem já estar na área gráfica. Nesse caso, basta clicar nos pontos seguidamente.

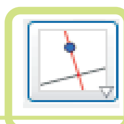
Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta ativada.



Vetor a partir de um ponto

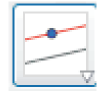
Esta ferramenta cria um vetor paralelo a outro vetor. Para isso, deve-se clicar num vetor e depois num ponto.

Menu da Janela 4



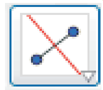
Reta perpendicular

Com esta ferramenta pode-se construir uma reta perpendicular a uma reta, semi-reta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Assim, para se criar uma perpendicular você devera clicar sobre um ponto e sobre uma direção (naturalmente representada por qualquer semi-reta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono).



Reta paralela

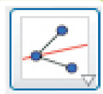
Com esta ferramenta pode-se construir uma reta paralela a uma reta, semi-reta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Assim, para se criar uma paralela você deverá clicar sobre um ponto e sobre uma direção (naturalmente representada por qualquer semi-reta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono).



Mediatriz

Esta ferramenta constrói a reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento. Os pontos ou o segmento podem já estar na área gráfica.

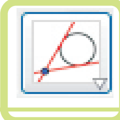
Nesse caso, pode-se criar a mediatriz clicando sobre o segmento ou sobre os dois pontos que o determina. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta ativada.



Bissetriz

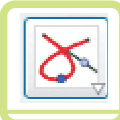
Com esta ferramenta pode-se construir a bissetriz de um ângulo. Para isto, deve-se clicar nos três pontos que determinam o ângulo, lembrando que o 2º ponto clicado e o vértice do ângulo.

Dessa forma o programa construirá a bissetriz do menor ângulo definido pelos 3 pontos. Pode-se também construir a bissetriz, clicando sobre os lados do ângulo. Nesse caso, o Geogebra construirá as bissetrizes dos dois ângulos determinados por esses lados.



Tangentes

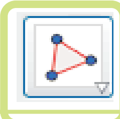
Com esta ferramenta pode-se construir as retas tangentes a uma circunferência ou elipse, a partir de um ponto. Para isto, deve-se clicar em um ponto e depois na circunferência ou na elipse.



Lugar Geométrico

Esta ferramenta constrói automaticamente o lugar geométrico descrito pelo movimento de um objeto (ponto, reta, etc.) ao longo de uma trajetória.

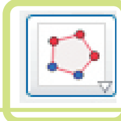
Menu da Janela 5



Polígono

Com esta ferramenta pode-se construir um polígono de N lados. Ao usar esta ferramenta deve-se lembrar de que o polígono se fecha com o último clique sendo dado sobre o primeiro criado.

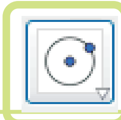
Sobre o Geogebra



Polígono Regular

Com esta ferramenta pode-se construir um polígono regular a partir de um lado e a quantidade de vértices (lados).

Menu da Janela 6

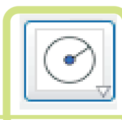


Círculo definido pelo centro e um de seus pontos

Esta ferramenta constrói um círculo a partir de 2 pontos.

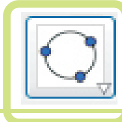
Em várias situações nas atividades será solicitada a construção de uma circunferência com centro em algum ponto passando por outro ponto.

Exemplo: Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**. A seguir, trace uma circunferência com centro em **A** passando por **B**. Para fazer isso você deverá apontar o cursor para o ponto **A**, clicar, direcionar o cursor até o ponto **B** e clicar. Um erro bastante comum é clicar no ponto **A**, arrastar o cursor de forma que a circunferência \passe por **B** e clicar. Dessa forma, a circunferência não estará "amarrada" ao ponto **B**.



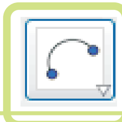
Círculo dados centro e raio

Esta ferramenta constrói um círculo a partir do centro e com comprimento do raio definido. Para utilizá-la basta clicar na tela (ou em um ponto), criando o centro. Após isso, aparecerá uma caixa na tela, solicitando a medida do comprimento do raio. Digite-a e der um enter.



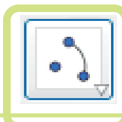
Círculo definido por três pontos

Esta ferramenta constrói um círculo a partir de três pontos. Para utilizá-la basta clicar nos 3 pontos que podem já estar na área gráfica. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta ativada.



Semicírculo dados dois pontos

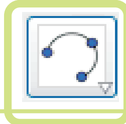
Esta ferramenta constrói um semicírculo a partir de dois pontos. Para utilizá-la basta clicar nos 2 pontos que podem já estar na área gráfica. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta ativada.



Arco circular dados o centro e dois pontos

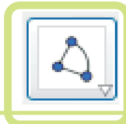
Esta ferramenta constrói um arco circular a partir do centro e dois pontos. Para utilizá-la e preciso lembrar que o primeiro clique deverá ser dado sobre o centro. Se o sentido dos cliques for anti-horário o Geogebra construirá o menor arco definido pelos 3 pontos. Se for horário será construído o maior arco.

Sobre o Geogebra



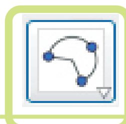
Arco circumcircular dados três pontos

Esta ferramenta constrói um arco a partir de três pontos. Para utilizá-la basta clicar nos 3 pontos que podem já estar na área gráfica. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta ativada.



Setor circular dados o centro e dois pontos

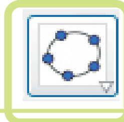
Esta ferramenta constrói um setor circular a partir do centro e dois pontos. Para utilizá-la é preciso lembrar que o primeiro clique deverá ser dado sobre o centro. Se o sentido dos cliques for anti-horário o Geogebra construirá o menor setor definido pelos 3 pontos. Se for horário será construído o maior arco.



Setor circumcircular dados três pontos

Esta ferramenta constrói um setor circumcircular partir de três pontos.

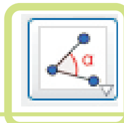
Para utilizá-la basta clicar nos 3 pontos que podem já estar na área gráfica. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta ativada.



Cônica definida por cinco pontos

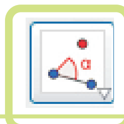
Esta ferramenta constrói uma cônica (parábola, elipse ou hipérbole) a partir de cinco pontos. Para utilizá-la basta clicar nos 5 pontos que podem já estar na área gráfica. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta ativada.

Menu da Janela 7



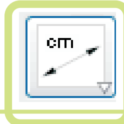
Ângulo

Com esta ferramenta é possível marcar um ângulo definido por três pontos onde o segundo ponto clicado é o vértice do mesmo. Se o sentido dos cliques for anti-horário o Geogebra marcará o maior ângulo definido pelos 3 pontos. Se for horário será construído o menor ângulo.



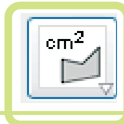
Ângulo com amplitude fixa

Esta ferramenta, a partir de dois pontos, pode-se construir um ângulo com amplitude fixa. Para isto, deve-se clicar nos dois pontos iniciais e o pro-grama abrirá uma janela perguntando a medida do ângulo que quer desenhar e o sentido que é medido (horário ou anti-horário). Na realidade o que essa função faz é rotacionar o primeiro ponto clicado ao redor do segundo por um ângulo definido.



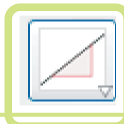
Distância ou comprimento

Esta ferramenta mostra na Janela de Visualização o comprimento de um segmento ou distância entre 2 pontos.



Área

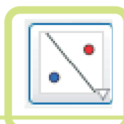
Esta ferramenta mostra a área da região limitada por uma poligonal ou oval (circunferência ou elipse).



Inclinação

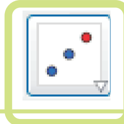
Esta ferramenta mostra a inclinação de uma reta. Se reta foi construída a partir de dois pontos o comando exibirá um triângulo com lado de medida 1 na horizontal e com vértice neste ponto. Se a reta foi obtida de uma equação colocará esse triângulo com vértice na interseção com o Eixo X ou com o Eixo Y.

Menu da Janela 8



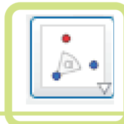
Reflexão com relação a uma reta

Esta ferramenta constrói o reflexo (simetria axial) de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a uma reta.



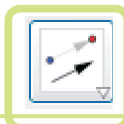
Reflexão com relação a um ponto

Esta ferramenta constrói o reflexo (simetria central) de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a um ponto.



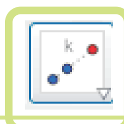
Girar em torno de um ponto por um ângulo

Esta ferramenta constrói o reflexo (simetria rotacional) de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) ao redor de um ponto, por um ângulo determinado.



Transladar por um vetor

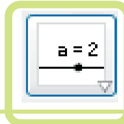
Esta ferramenta constrói o reflexo (simetria translacional) de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) a partir de um vetor.



Ampliar ou reduzir objetos a partir de um ponto por determinado fator (homotetia)

Esta ferramenta constrói o homotético de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.), a partir de um ponto e um fator (número que é a razão de semelhança).

Menu da Janela 9

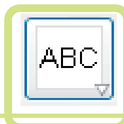


Seletor

Um seletor é um pequeno segmento com um ponto que se movimenta sobre ele. Com esta ferramenta é possível modificar, de forma dinâmica, o valor de algum parâmetro. O uso de seletores neste livro será feito, principalmente no estudo de funções.

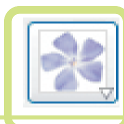
Ativar a caixa para exibir/esconder objeto

Esta ferramenta permite que você escolha quais são os objetos que quer mostrar quando ela está ativada. Desmarcando-a, o objeto a ela vinculado desaparecem da Janela de Visualização.



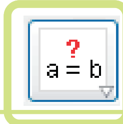
Inserir texto

Com esta ferramenta pode-se inserir qualquer texto na área gráfica. Tem-se toda a simbologia do LATEX à sua disposição. Caso não conheça LATEX poderá usar textos simples.



Inserir imagem

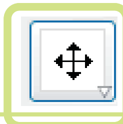
Com esta ferramenta pode-se inserir figuras na área gráfica. Ao se selecionar esta ferramenta e ao clicar na área gráfica, abrirá uma caixa onde você poderá procurar a figura que deseja inserir na tela. Essa figura tem que estar no formato jpg, gif,png e tif.



Relação entre dois objetos

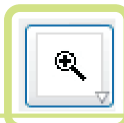
Esta ferramenta identifica algumas relações entre dois objetos: se um objeto pertence a outro, se são paralelos, se são iguais etc.

Menu da Janela 10



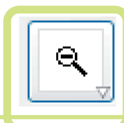
Deslocar eixos

Com esta ferramenta pode-se mover o sistema de eixos, bem como todos os objetos nele contido. É ideal para fazer ajuste com relação a posição dos objetos exibidos na janela de visualização.



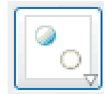
Ampliar

Com esta ferramenta pode-se ampliar as figuras que estão na área gráfica. Como se estivesse aumentando o zoom.



Reduzir

Com esta ferramenta pode-se reduzir as figuras que estão na área gráfica. Como se estivesse diminuindo o zoom.

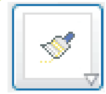


Exibir/esconder objeto

Com esta ferramenta pode-se ocultar objetos. Para isso, após selecionar a ferramenta, deve-se clicar sobre o objeto que deseja ocultar. Ele ficará destacado. Após isso, selecione outra ferramenta qualquer. O objeto ficará oculto. Pode-se também exibir os objetos que estão ocultos.

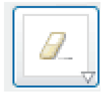
Exibir/esconder rótulo

Com esta ferramenta pode-se ocultar os rótulos dos objetos. Pode-se também exibir os rótulos que estão ocultos.



Copiar estilo visual

Com essa ferramenta pode-se copiar um estilo visual de um objeto para outro: pontilhado, cor, tamanho etc.

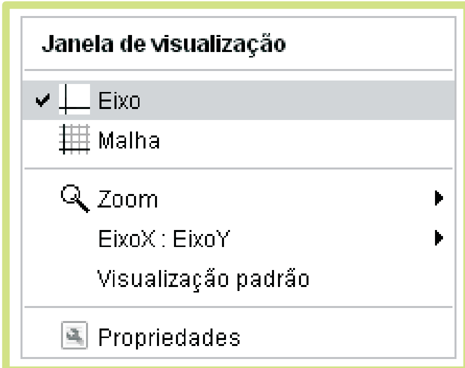


Apagar objetos

Com esta ferramenta pode-se apagar objetos tanto na área Gráfica quanto na Janela de álgebra.

Funções do botão direito mouse

Ao se clicar com o botão do lado direito do mouse em uma área sem objeto da Janela de Visualização aparece uma janela como a mostrada ao lado.



As opções são as seguintes:

①**Eixo**: Exibe ou esconde os eixos coordenados.

②**Malha**: Exibe ou esconde uma grade no sistema de eixos.

③**Zoom**: A partir de um percentual fixo, aumenta ou diminui o zoom da tela.

④**Eixo X**:**Eixo Y**: Permite mudar a escala dos eixos. Vale observar que se ativar a ferramenta DESLOCAR EIXOS, clicar sobre um dos eixos e arrastar também terá o efeito de mudança de escala.

⑤**Visualização padrão**: Retorna o sistema de eixos e a escala na posição inicial.

⑥**Propriedades**: Permite modificar as propriedades da Janela de Visualização como: cor de fundo, cor dos eixos, marcadores, distância entre uma marca e outra, unidades etc.

Ao se clicar com o botão direito do mouse sobre um objeto aparecerá uma janela com diversas opções para o objeto selecionado. Como exemplo, mostramos o que ocorre ao clicar em um objeto que esta na janela de Visualização. No exemplo clicamos sobre um ponto com o botão do lado direito do mouse.

As opções mais comuns são:

①**Exibir objeto**: Esconde ou exibe objetos.

②**Exibir rótulo**: O rótulo é o nome do objeto. Esta opção permite esconder ou exibir rótulos.

③**Habilitar rastro**: Deixa um rastro do objeto ao ser movimentado.

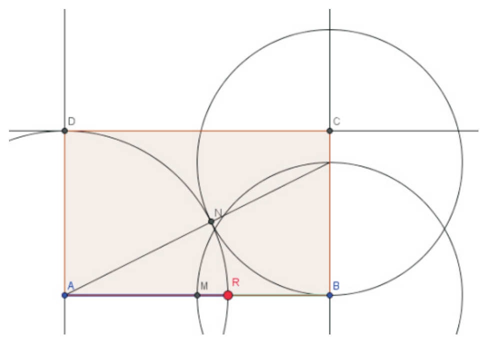
④**Renomear**: Permite dar um novo nome (rótulo) ao objeto.

⑤**Redefinir objeto**: Permite modificar os elementos que geram o objeto.

⑥**Propriedades**: Permite acessar um ambiente de edição de propriedades diversas do objeto tais como: cores, espessura, intensidade de preenchimento, condição para o objeto aparecer, tipos de coordenadas etc.

ATIVIDADE INTRODUTÓRIA

CONHECENDO O GEOGEBRA



A informática pode ser um dos agentes transformadores da educação. E uma das grandes contribuições da informática freqüentemente enfatizadas por alguns especialistas na área de informática na educação é a de ampliar os níveis de abordagem dos conteúdos estudados, quer pelo que o computador oferece como alternativa para realização de atividades curriculares, quer pelas possibilidades de acesso à rede mundial da Internet como fonte de pesquisas e de interlocução científica (OLIVEIRA, 2001).

> A escola não pode ignorar o que se passa no mundo. Ora, as novas tecnologias da informação e da comunicação transformam espetacularmente não só nossas maneiras de comunicar, mas também de trabalhar, de decidir, de pensar (PERRENOUD, 2000).

Essa atividade foi criada para que o leitor tenha a oportunidade conhecer, manipular e dominar as principais ferramentas do Geogebra para atingir seguintes os objetivos:

- ✓Conhecer e dominar a lógica do software Geogebra.
- ✓Dominar os comandos principais do sotfware Geogebra para construção de figuras geométricas planas tais como: retas, segmento de reta, circunferência, ângulo, polígonos, entre outros.
- ✓Manusear o software Geogebra na construção das principais figuras planas.

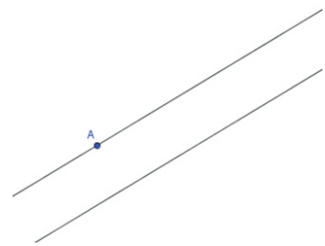
Primeiramente certifique-se de que estejam "desmarcadas" as opções: **EIXOS e JANELA DE ÁLGEBRA** do menu **EXIBIR**.

1ª PARTE

I. Com base nas definições, construa as figuras no Geogebra.

①Definição de duas retas paralelas:

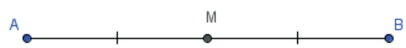
Duas retas de um plano são paralelas se não possuem ponto comum ou se são coincidentes



- ✓ Selecione a opção **RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique em dois lugares na janela de construção.
- ✓ Selecione a opção **NOVO PONTO (Janela 2)** e clique em qualquer lugar na janela de construção.
- ✓ Selecione a opção **RETA PARALELA (Janela 4)** e clique na reta e no **ponto C**.

②Definição de ponto médio de um segmento de reta:

O ponto M é ponto médio de um segmento se pertencer ao segmento e se for eqüidistante às suas extremidades.

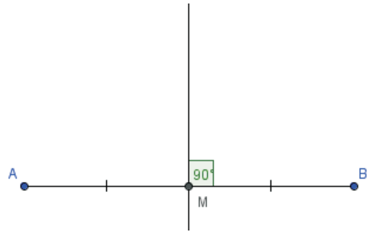


- ✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento de reta **AB**.
- ✓ Selecione a opção **PONTO MÉDIO OU CENTRO (Janela 2)** e clique no segmento de reta **AB**.

Atividade Introdutória: Conhecendo o Geogebra

③Definição de mediatriz de um segmento de reta:

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento e que passa por seu ponto médio.

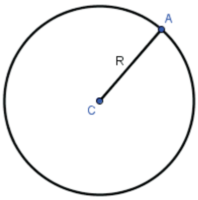


✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento de reta **AB**.

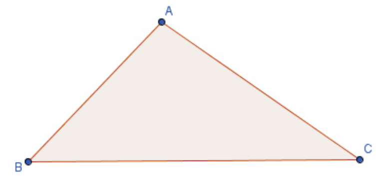
✓ Selecione a opção **MEDIATRIZ (Janela 4)** clique no segmento de reta **AB**.

④Definição de círculo:

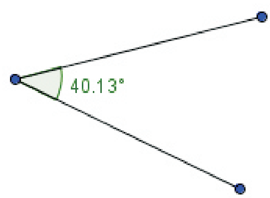
O círculo de centro O e raio r é o conjunto dos pontos M do plano tais que OM = r.



✓ Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)** e clique em dois pontos na janela de construção para criar a circunferência.

⑤Três pontos determinam um plano.	

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** clique em três pontos da janela de construção e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o triângulo.

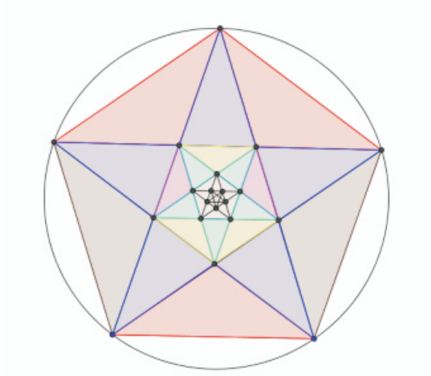
⑥Ângulo é a região de um plano concebida pela abertura de duas semi-retas que possuem uma origem em comum, chamada vértice do ângulo.	

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)**, crie o segmento de reta **AB** e depois , do ponto **A**, crie o segmento de reta **AC**.

✓ Selecione a opção **ÂNGULO (Janela 8)** e clique no segmento **AB** e depois no segmento **AC**.

Obs.: Se aparecer um ângulo maior que 180º, clique com o botão direito em cima do ângulo e selecione a opção PROPRIEDADES, depois desabilite a opção PERMITIR ÂNGULOS MAIORES DO QUE 180º.

II. Construa um pentágono inscrito em uma circunferência no Geogebra.



✓Selecione a opção **POLÍGONO REGULAR (Janela 5)** e clique em dois pontos da janela de construção. Em seguida vai abrir uma janela, digite "**5**" e depois clique em **OK**.

✓Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO POR TRÊS PONTOS (Janela 6)** e clique em três vértices do pentágono.

✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e ligue todos os vértices.

✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e crie a interseção dos segmentos criados anteriormente.

✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e ligue todos os vértices.

2ª PARTE

A lógica de "Os elementos"

Euclides, aproximadamente em 300 a.C., escreveu Os elementos, obra na qual compilou o conhecimento matemático da época. A importância desse trabalho está, contudo, principalmente no método empregado para a apresentação desse conhecimento: o uso continuado e rigoroso da lógica na forma dos raciocínios, ou seja, o método axiomático e dedutivo.

Euclides fixou dez afirmações primitivas, não demonstradas e consideradas auto-evidentes para a demonstração dos resultados da geometria. Os cinco primeiros axiomas são de caráter mais geral, no entanto, a profundidade do seu pensamento é atestada por ele ter recebido a necessidade de fazer estas afirmações:

① Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;

② Se duas coisas iguais são adicionadas a outras iguais, os totais são iguais;

③ Se coisas iguais forem subtraídas de coisas iguais, os restos serão iguais;

④ As coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si;

⑤ O todo é maior do que a parte.

E os cinco seguintes postulados são especificamente geométricos.

Aproveitando os recursos da geometria dinâmica (Geogebra) vamos construir um a um desses cinco postulados.

Obs.: No final de cada construção, deforme a figura para verificar se as propriedades se alteram.

①"Uma linha reta pode ser traçada de um para outro ponto qualquer."

- ✓ Primeiramente certifique-se de que estejam "desmarcadas" as opções: **EIXOS** e **JANELA DE ÁLGEBRA** do menu **EXIBIR**.
- ✓ Selecione a opção **NOVO PONTO** (**Janela 2**) e clique em dois pontos da janela de construção para criar os pontos **A** e **B**.
- ✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** (**Janela 3**) e clique nos pontos **A** e **B**.

②"Qualquer segmento de reta finito pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta."

- ✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** (**Janela 3**) e crie o segmento de reta **AB** clicando em dois pontos da janela de construção.
- ✓ Selecione a opção **RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS** (**Janela 3**) e clique no ponto **A** e **B**.

③"Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à distância dada."

- ✓ Selecione a opção **NOVO PONTO** (**Janela 2**) e clique em um ponto da janela de construção para criar o ponto **A**.
- ✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** (**Janela 3**) e clique no ponto A e em outro lugar na janela de construção para criar o segmento de reta **AB**.
- ✓ Selecione a opção **CIRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS** (**Janela 6**) e clique no ponto **A** e no ponto **B**.

④"Todos os ângulos retos ou perpendiculares ou (= 90º) são iguais entre si."

✓ Selecione a opção **RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS** (**Janela 3**) e crie a reta a que passa pelos pontos **A** e **B**.

✓ Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR** (**Janela 4**) e clique na **reta a** e no ponto **A**, para criar a **reta b**.

✓ Selecione a opção **ÂNGULO** (**Janela 8**) e clique na **reta a** e na **reta b**.

Obs.: Você irá verificar que os ângulos são iguais entre si.

⑤"Se uma reta cortar duas outras de modo que a soma de dois ângulos interiores, de um mesmo lado, seja menor que a de dois ângulos retos, então as duas retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos".

O quinto postulado, de redação mais longa e complexa que os demais, não parece, como se desejava, auto-evidente, assim, durante mais de vinte séculos, muitos matemáticos tentaram ou demonstrá-lo a partir dos postulados anteriores (gerando-se muitas provas com erros), ou substituí-lo por outro mais simples e evidente, a partir do qual o quinto postulado poderia ser deduzido.

No entanto, temos algumas alternativas de substituição para o 5 postulado:

a) Por um ponto fora de uma reta pode-se passar uma única paralela à reta dada.

- ✓ Selecione a opção **RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS** (**Janela 3**) e crie a reta a que passa pelos pontos **A** e **B**.
- ✓ Selecione a opção **NOVO PONTO** (**Janela 2**) e clique em um ponto da janela de construção para criar o ponto **C**.
- ✓ Selecione a opção **RETA PARALELA** (**Janela 4**) e clique na **reta a** e no ponto **C**.

b) A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º.

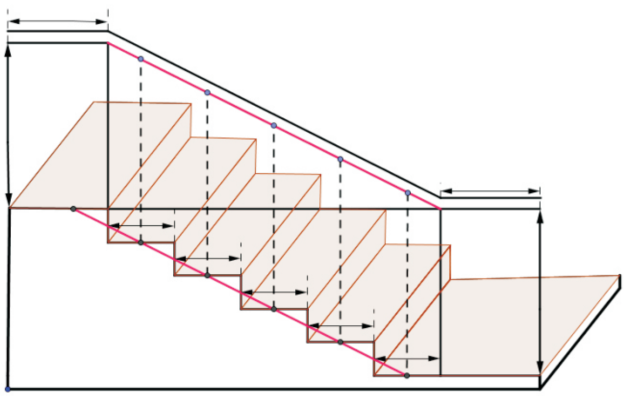
- ✓ Selecione a opção POLÍGONO (**Janela 5**) e clique em três pontos da janela de construção e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o triângulo.
- ✓ Selecione a opção **ÂNGULO** (**Janela 8**) e clique no centro do triângulo.
- ✓ Com uma calculadora some os ângulos e você irá verificar que a soma da sempre 180º. A demonstração disso está na **ATIVIDADE 4**.

c) Três pontos não colineares ou não alinhados determinam um círculo.

- ✓ Selecione a opção **NOVO PONTO** (**Janela 2**) e clique em três pontos da janela de construção para criar os pontos **A**, **B** e **C**.
- ✓ Selecione a opção **CIRCULO DEFINIDO POR TRÊS PONTOS** (**Janela 6**) e clique nos pontos **A, B** e **C**.

ATIVIDADE 1

ÁREAS



As primeiras considerações que o homem fez a respeito da Geometria são, inquestionavelmente, muito antigas. Parece ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar forma e tamanhos.

Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levaram a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes. A noção de distância foi, sem dúvida, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. A necessidade de delimitar a terra levou à noção de figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados e triângulos. Outros conceitos geométricos simples, como as noções de vertical, paralela, perpendicular, teriam sido sugeridos pela construção de muros e moradias (EVES, 1992).

Nessa atividade o leitor terá a possibilidade de construir um retângulo e um triângulo de forma que quando deformamos a figura, as suas propriedades se mantêm. Também o leitor terá a possibilidade de construir a área do retângulo e do triângulo que serão calculadas em diversas posições. Para verificação das propriedades o leitor deverá preencher as tabelas e responder as perguntas.

a) ÁREA DE UM RETÂNGULO

Primeiramente certifique-se de que estejam "desmarcadas" as opções: **EIXOS** e **JANELA DE ÁLGEBRA** do menu **EXIBIR**. Veja figura 1.1.

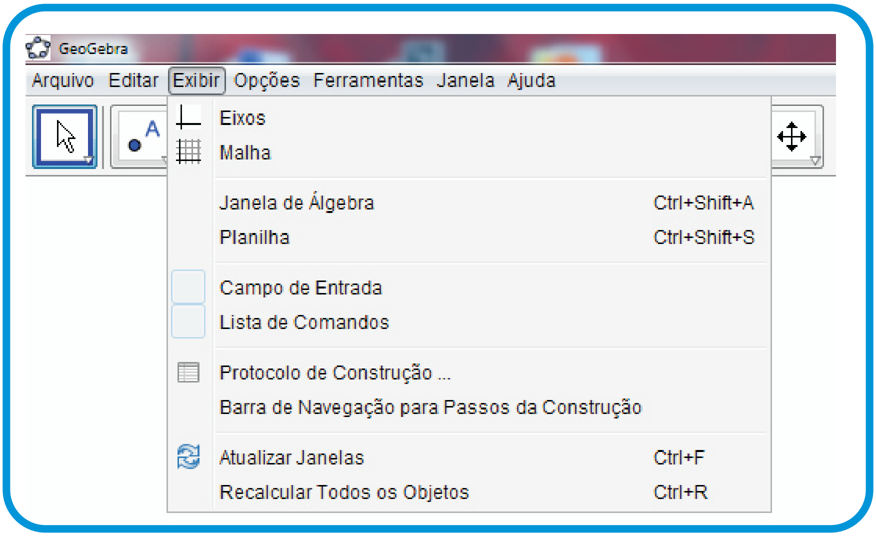


Figura 1.1

Organizada a tela, já podemos começar a trabalhar. Siga as instruções abaixo.

1º Passo: Criar um Retângulo.

✓Selecione a opção **RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique em dois pontos na horizontal.

✓Clique com o botão direito do mouse no primeiro ponto e selecione a opção **EXIBIR RÓTULO**. Faça o mesmo com o outro ponto.

✓Selecione a opção **NOVO PONTO (Janela 2)** e clique em qualquer lugar na janela de construção.

✓Selecione a opção **RETA PARALELA (Janela 4)** e clique na reta e depois no ponto criado anteriormente.

✓Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)** e clique no ponto **A** e na outra reta. Faça o mesmo no ponto **B** e na outra reta.

✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e clique na reta que passa por **A** e na outra reta. Também faça o mesmo com a reta que passa por **B** e na outra reta.

✓Clique com o botão direito do mouse no primeiro ponto e selecione a opção **EXIBIR RÓTULO**. Faça o mesmo com o outro ponto.

✓Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** e clique nos pontos **ABED**. E também clique uma quinta vez no ponto inicial para fechar o retângulo.

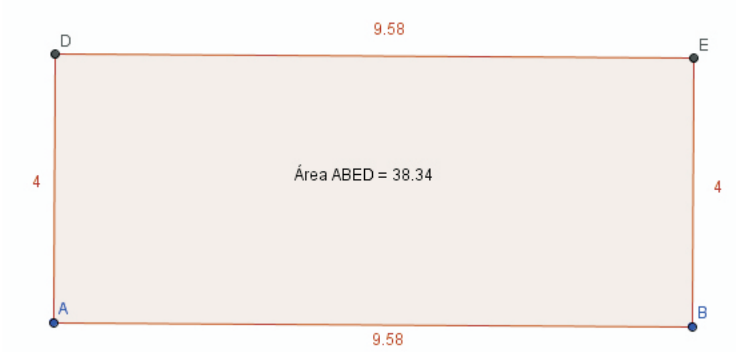
✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e clique em todas as quatro retas e também no ponto que está fora do retângulo.

✓Em seguida, selecione a opção **MOVER (Janela 1)** para desaparecer todos os itens selecionados.

2º Passo: Medir os lados e obter a área do Retângulo.

✓Selecione a opção **DISTÂNCIA OU COMPRIMENTO (Janela 8)** e meça os lados **AB**, **DE**, **AD** e **BE** clicando nos respectivos segmentos de reta.

✓Selecione a opção **AREA (Janela 8)** e clique no retângulo **ABED.**



✓ Selecione a opção **MOVER (Janela 1)**, modifique três vezes o retângulo e anote na tabela.

AB	AD	AB x AD	Área ABED (no computador)

Marque a resposta correta a respeito da área do retângulo ABED.

a) (   ) A área do retângulo ABED é obtida somando os lados.

b) (   ) A área do retângulo ABED é obtida multiplicando o comprimento da base AB pela altura AD.

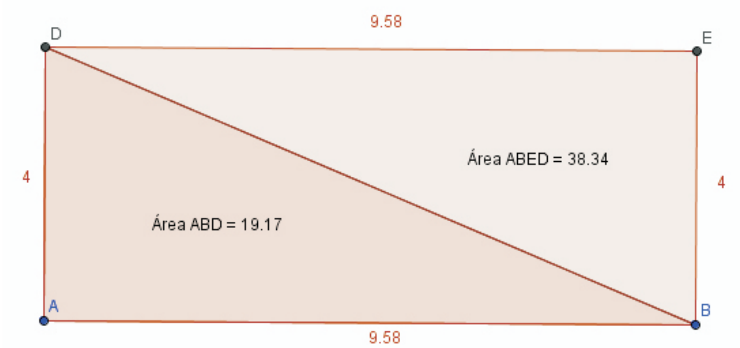
c) (   ) Os valores do produto AB x AD na tabela não são os mesmos que os da área mostrados no computador.

b) ÁREA DO TRIÂNGULO

A partir do retângulo da atividade anterior, deduzir a área do triângulo.

Construa o retângulo.

- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique no ponto **D** e no ponto **B**.
- ✓Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** e clique nos pontos **A**, **B**, **D** e de volta no **A** para fechar o triângulo.
- ✓Selecione a opção **ÁREA (janela 8)** e clique no triângulo **ABD**.



✓Selecione a opção **MOVER (Janela 1)**, modifique três vezes o retângulo e anote na tabela.

AB	AD	$\frac{AB \times AD}{2}$	Área ABD (no computador)

Marque a resposta correta a respeito da área do triângulo **ABD**.

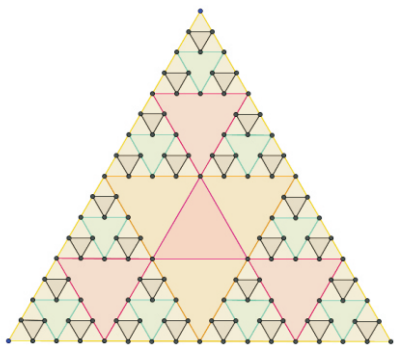
a) (   ) A área ABD é obtida somando os lados.

b) (   ) A área ABD é obtida multiplicando o comprimento da base AB pela altura AD e dividindo tudo por 2.

c) (   ) Os valores de $\frac{AB \times AD}{2}$ na tabela não são os mesmos que os da área mostrados no computador.

ATIVIDADE 2

UM RESULTADO DE INVARIÂNCIA DE ÁREAS DE TRIÂNGULOS



Os três geômetras gregos mais importantes da antiguidade foram Euclides (300 a.C.), Arquimedes (287-212 a.C.) e Apolônio (225 a.C.). Não é exagero dizer que quase tudo o que se fez de significativo em geometria, até os dias de hoje, e ainda hoje, tem sua semente original em algum trabalho desses três grandes eruditos.

Os três foram grandes escritores. Assim, embora os "Elementos", de Euclides, seja de longe seu trabalho mais importante, é na verdade, a obra de geometria mais importante de toda a história. Embora autor de outros trabalhos, a fama de Euclides praticamente repousa sobre seus Elementos, o mais antigo texto da matemática grega a chegar completo a nossos dias. Obra em treze livros, apesar de na sua maior parte ser uma compilação e sistematização de trabalhos anteriores sobre a matemática elementar da época, seu êxito foi enorme. Haja vista mais de mil edições impressas em todo o mundo, desde a primeira em 1482, um feito editorial talvez só superado pela Bíblia.

Em se tratando de Arquimedes, muitos de seus trabalhos se perderam. Mas a sua marca registrada como um dos maiores matemáticos de todos os tempos, e certamente o maior da antiguidade, é o clássico método dos perímetros para calcular , e achou que está situado entre 223/71 e 22/7, ou que, com duas casas decimais, é dado por 3,14. Esse procedimento de Arquimedes foi o ponto de partida da longa história da busca de aproximações cada vez mais apuradas para o valor de , alcançando-se, em 1967, a fantástica aproximação de 500.000 casas decimais. Hoje já temos aproximações de mais de 1.000.000 de casas decimais.

Embora Apolônio tenha sido um astrônomo de méritos, e embora tenha escrito vários temas da matemática, sua fama se deve principalmente a Secções Cônicas, uma obra extraordinária e monumental graças à qual adquiriu o apelido, entre seus contemporâneos, de "o grande geômetra". Secções Cônicas é um estudo exaustivo a respeito dessas curvas, que supera completamente todos os trabalhos anteriores sobre o assunto.

Texto retirado do livro: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Autor: Howard Eves. Tradução de Hygino H. Domingues.

Primeiramente certifique-se de que estejam “marcadas” as opções: **EIXOS** do menu **EXIBIR**. Veja figura 2.1.

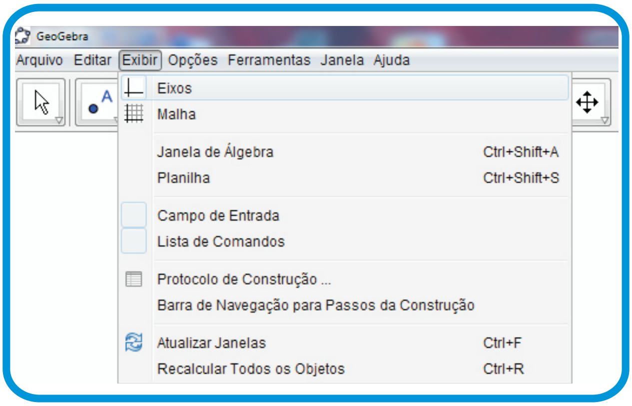


Figura 2.1

Organizada a tela, já podemos começar a trabalhar. Siga as instruções abaixo.

✓ Selecione a opção **PONTO (Janela 2)**. Clique em qualquer ponto da janela de construção.

Obs.: Se não aparecer o rótulo clique com o botão direito do mouse e selecione a opção **EXIBIR RÓTULO**.

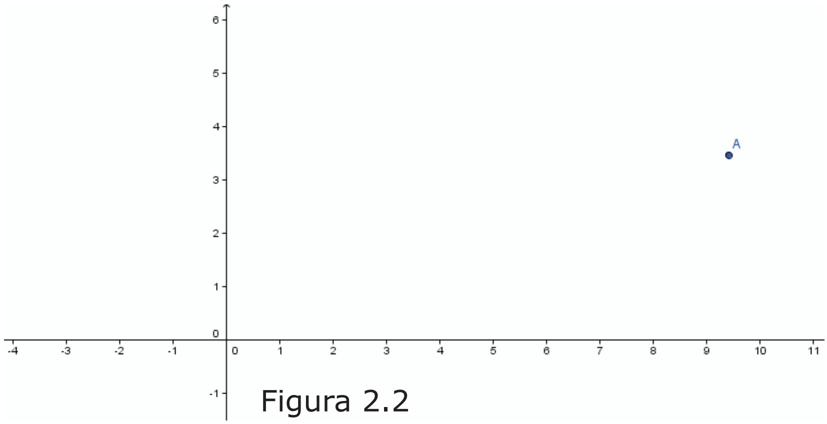


Figura 2.2

✓ Selecione a opção **RETA PARALELA (Janela 4)** e clique no ponto **A** e em seguida na reta **x** (abscissa).

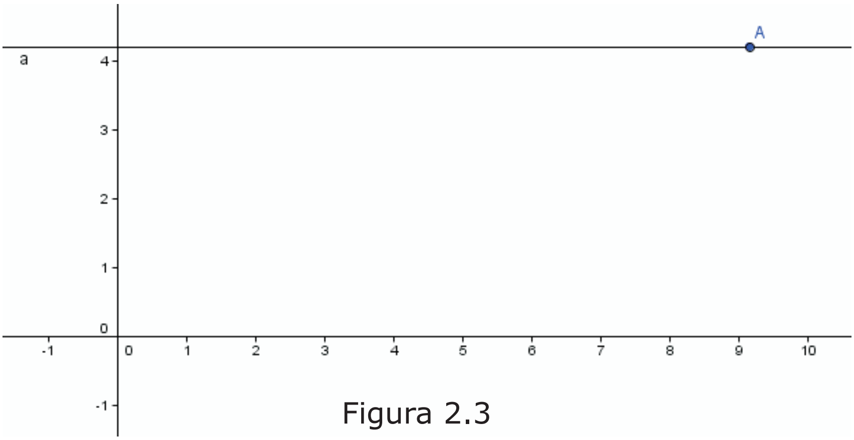


Figura 2.3

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** e crie um triângulo com dois vértices no eixo **x** e o terceiro sobre a reta paralela ao eixo **x.** Também clique uma Quarta vez no ponto inicial para fechar o triângulo.

Obs.: Rotule os pontos criados conforme a figura, clicando com o botão direito do mouse e selecionando a opção **EXIBIR RÓTULO**.

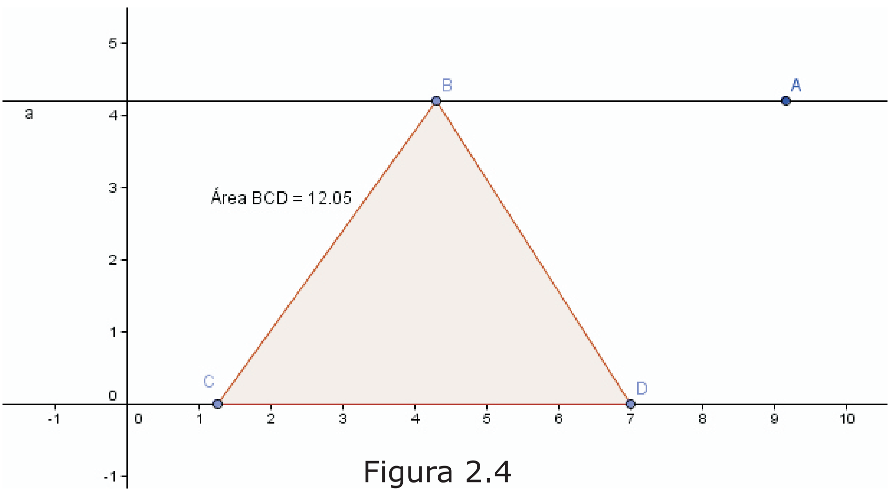


Figura 2.4

✓ Selecione agora a **opção ÁREA (Janela 8)** e clique no triângulo BCD. Aparecerá a área do triângulo. Logo em seguida clique em **MOVER (Janela 1)** e movimente o ponto B.

Pergunta 1: Ao movimentar o ponto B. O que acontece com a altura do triângulo BCD?

a) (   ) Altera.

b) (   ) Permanece a mesma.

Pergunta 2: Ao movimentar o ponto B. O que você constata em relação à base CD?

a) (   ) Ficou a mesma.

b) (   ) Altera.

Pergunta 3: Ao movimentar o ponto B. O que você observa em relação à área do triângulo BCD?

a) (   ) Altera.

b) (   ) Não altera.

Conforme a figura 2.5, construa o triângulo **AEF**.

Para isso, selecione a opção POLÍGONO (janela 5) e clique em dois pontos sobre o eixo x (abscissa) e um terceiro no ponto A.

✓ Selecione agora a opção **ÁREA (Janela 8)** e clique no triângulo **AEF**. Aparecerá a área do triângulo **AEF**. Logo em seguida clique em **MOVER (Janela 1)** e movimente o **ponto A** para ver o que acontece.

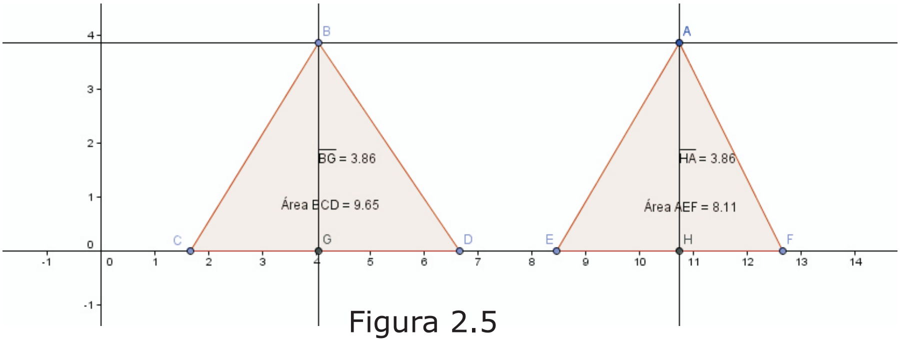


Figura 2.5

✓Construa as alturas selecionando a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)** e clique no ponto **B** e no eixo **x**, depois no ponto **A** e no eixo **x** novamente.

Obs: Rotule as duas retas criadas de **c** e **g**, respectivamente clicando com o botão direito do mouse, selecionando a opção **PROPRIEDADES** e alterar o **NOME** no campo indicado.

✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e clique na reta **c** e no **eixo x** (abscissa), depois na reta **g** e no **eixo x** (abscissa).

Obs.: Rotule os pontos criados de **G** e **H** respectivamente, clicando com o botão direito do mouse, selecionando a opção **PROPRIEDADES** e alterar o **NOME** no campo indicado.

Obs.: Rotule os pontos criados como **G** e **H** respectivamente.

✓Selecione a opção **DISTÂNCIA**, **COMPRIMENTO OU PERÍMETRO (Janela 8)** e clique no ponto **B** depois no ponto **G**. Clique também no ponto **A** e depois no ponto **H** para obter as respectivas alturas dos triângulos **BCD** e **AEF**.

✓Selecione a opção **MOVER (Janela 1)** e movimente os **pontos A** e **B** e marque a resposta correta.

Pergunta 4: O que você observa no triângulo AEF?

a) (   ) A reta paralela a base continua fixa.

b) (   ) A reta paralela a base não continua fixa.

c) (   ) As alturas continuam as mesmas.

d) (   ) O triângulo não se deforma.

Pergunta 5: Em relação aos triângulos formados podemos concluir que:

a) (   ) Movimentando o ponto B, a área do triângulo BCD não se altera porque o comprimento da base e o comprimento da altura são sempre os mesmos.

b) (   ) Movimentando o ponto A, a área do triângulo AEF se altera porque o comprimento da base e da altura são sempre os mesmos.

c) (   ) Movimentando o ponto B, a área do triângulo BCD não se altera, porque o comprimento da base e o comprimento da altura não são sempre os mesmos.

Pergunta 6: Movimentando os pontos A e B.

O que acontece com a área **AEF**?

a) (   ) A área **AEF** não se altera.

b) (   ) A área **AEF** se altera.

c) (   ) A área **AEF** em relação a área **BCD** ficam iguais, porque ambas tem mesma altura.

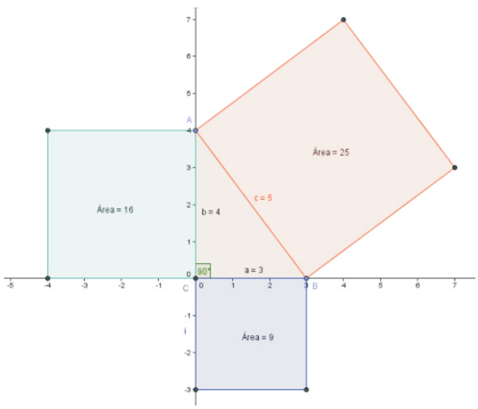
d) (   ) Se movimentarmos o ponto **B** e depois movimentarmos o ponto A, perceberemos que as áreas nos dois movimentos não se alteram.

OBJETIVO ESPECÍFICO DA ATIVIDADE:

Conhecer e manipular as principais funções do Geogebra para demonstrar que dado um triângulo qualquer, se fixarmos dois vértices e movimentarmos o terceiro vértice sob uma reta paralela aos vértices fixados a sua área não irá se alterar.

ATIVIDADE 3

TEOREMA DE PITÁGORAS



O teorema de Pitágoras é uma das proporções mais importantes de todo o campo da geometria. Apesar da forte tradição grega que associa o nome de Pitágoras à afirmação de que "o quadrado da hipotenusa de uma triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos", não há dúvida de que esse resultado era conhecido antes do tempo de Pitágoras. Apolodoro comenta o "sacrifício esplêndido" oferecido por Pitágoras pela demonstração desse teorema. (Diz-se que Pitágoras sacrificou uma hecatombe, um rebanho de cem bois, em observância à prática de ação de graças daquele tempo). Considerando que um tal sacrifício era contrário aos princípios dos pitagóricos e que a mesma coisa se conta de Tales a respeito de sua suposta descoberta de que todo ângulo inscrito num semicírculo é reto, suspeita-se da autenticidade da história. Não obstante, é um tipo de história adequado ao significado do acontecimento. A sociedade pitagórica talvez tenha chegado à primeira prova efetiva da afirmação, mas isso pode apenas ser conjeturado.

Uma prova de que o teorema de Pitágoras era conhecido mais de dez mil anos antes de Pitágoras, foi a descoberta, pelos Babilônicos, da diagonal de um quadrado, dada a medida do lado. Outros indícios disso podem ser encontrados no texto da tábua de argila Plimpton 322, que contém colunas de algarismos relacionados com termos pitagóricos.

Texto retirado do livro: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Autor: Howard Eves. Tradução de Hygino H. Domingues.

I. ALGUNS APORTES TEÓRICOS

Pitágoras (850 a 507 a.C.) nasceu na ilha de Samos da Grécia, pertencendo a uma família modesta. Foi um excelente aluno e viajou bastante enquanto novo. A sua história permanece bastante vaga até sensivelmente perto dos seus 50 anos de idade.

Nesta altura, mudou-se para Itália, onde fundou uma escola que se baseava em ensinamentos de Filosofia, Religião e Matemática. Por mera curiosidade, além de Pitágoras ser vegetariano, fica a saber que todos os membros da sua escola não também não podiam comer carne: esta era uma de entre muitas regras que os seus alunos tinha que obedecer.

Pitágoras, como ponto central dos seus ensinamentos, tinha uma visão da harmonia do universo, que se baseava nos número e nas fórmulas matemática abstratas.

Assim Pitágoras desejava encontrar a "harmonia matemática" em todas as coisas.

Por exemplo, ele descobriu que a soma de todos os ângulos de um triângulo era sempre igual 180º.

Finalmente, sabias que o conhecido "Teorema de Pitágoras" já tinham sido descoberto? É verdade, no entanto, ele foi a primeira pessoa que o conseguiu provar matematicamente.

Pitágoras descobriu uma propriedade muito especial num tipo de triângulos também especial - O triângulo retângulo, que contém um ângulo de 90º.

Antes de mais, vamos dar nomes aos lados de um triângulo retângulo:

"Catetos" são os dois lados adjacentes ao ângulo de 90º, enquanto que a "hipotenusa" é o lado oposto a esse mesmo ângulo, como podes ver pelas seguintes figuras.

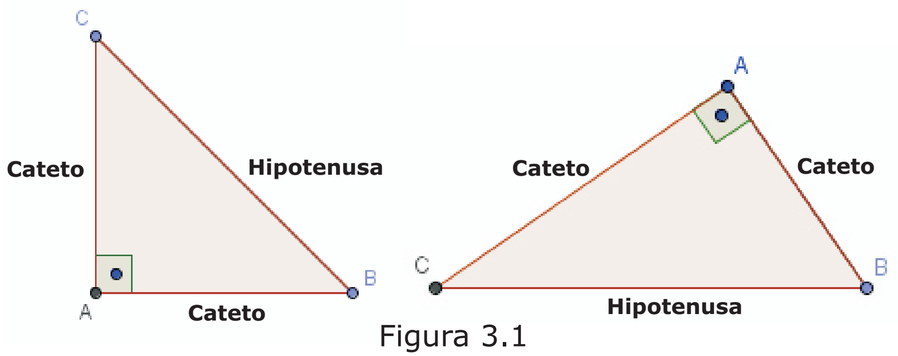


Figura 3.1

Com estas definições já serás capaz de entender o famoso Teorema de Pitágoras:

Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos ou então em símbolos:

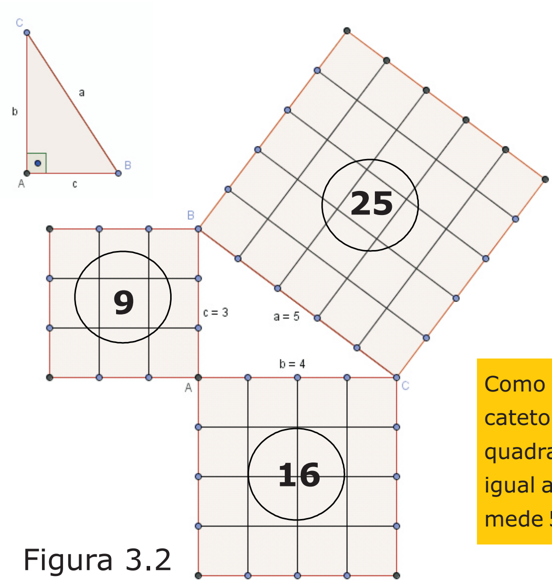


Figura 3.2

a^2	b^2	c^2

a^2	b^2	c^2
5^2	4^2	3^2
25	**16**	**9**

Como podes ver, o quadrado do cateto que mede 3 somado com o quadrado do cateto que mede 4 é igual ao quadrado da hipotenusa que mede 5.

II. INSTRUÇÕES PARA USO DO SOFTWARE

a)Verificação da existência do teorema de Pitágoras com o uso de polígonos regulares no Geogebra.

Usando o Quadrado

1º Passo: Criar um Triângulo Retângulo ABC.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (JANELA 3)** e em seguida clique na origem dos eixos e em qualquer ponto do eixo **x**, depois clique na origem dos eixos **(0,0)** e em qualquer ponto do eixo **y**, formando assim um triângulo retângulo.

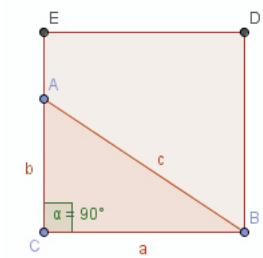
Obs.: Se não aparecer o rótulo, rotule os pontos **ABC**, clicando com o botão direito em cima dos pontos e selecione a opção **EXIBIR RÓTULO**. Rotule conforme a figura 3.3.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (JANELA 5)**. Clique nos pontos **ABC** e também clique uma quarta vez no ponto inicial para fechar o triângulo.

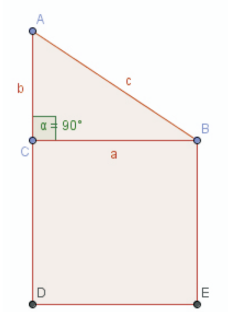
2º Passo: Criar Três quadrados cujos lados coincidem com cada lado do triângulo.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO REGULAR (JANELA 5)** Clique nos pontos **AB**. Em seguida aparecerá uma janela clique em **"APLICAR ou Ok"**. **Obs.**: Poderá acontecer de o quadrado ficar na parte superior. Se isso acontecer, desfaça a ação no menu editar "DESFAZER" e em seguida refaça a ação de criar um quadrado clicando em BA.

Faça o mesmo procedimento com os outros dois lados do triângulo.



Não



Sim

3º Passo: Medir os lados e obter a área dos quadrados.

✓ Selecione a opção **DISTÂNCIA OU COMPRIMENTO (JANELA 8)** e meça os lados **AB**, **AC** e **BC**.

✓ Selecione a opção **ÁREA (JANELA 8)** e clique nos três quadrados

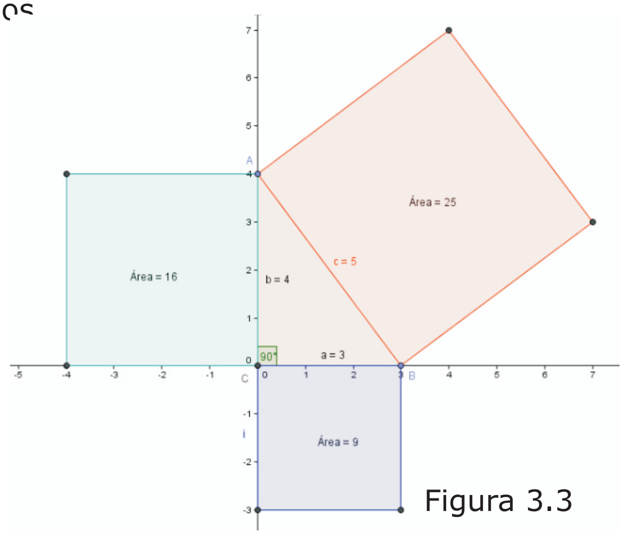


Figura 3.3

✓ Selecionando a opção **MOVER (Janela 1)**, modifique três vezes o triângulo retângulo e preencha a tabela.

AB	$(AB)^2$	Área 1 no computador	AC	$(AC)^2$	Área 2 no computador	BC	$(BC)^2$	Área 3 no computador

Marque a resposta correta com base no que você observa no computador.

Pergunta 1: Como o computador chegou a essas três áreas?

a)( ) Somando as medidas dos quatro lados de cada quadrado.

b)( ) Multiplicando o **comprimento** do lado do triângulo retângulo "que é um lado do quadrado" e a **altura** do quadrado. (Isso nos três lados do triângulo.)

c)( ) Multiplicando o comprimento da diagonal de cada quadrado e a soma dos lados.

Pergunta 2: Modifique duas vezes o triângulo retângulo e anote na tabela as áreas de cada um. Será que o teorema de Pitágoras ainda vale?

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7
AC = a cateto	$(AC)^2 = a^2$	BC = b cateto	$(BC)^2 = b^2$	$(AC)^2 + (BC)^2$ $a^2 + b^2$	AB = c hipotenusa	$(AB)^2 = c^2$

Medindo a hipotenusa e os catetos, verifique a existência do "Teorema de Pitágoras": $a^2 + b^2 = c^2$.

Levando em consideração as regras de arredondamento, será que os valores da **coluna 5** são iguais aos valores da **coluna 7**?

a) ( ) Sim b) ( ) Não

Pergunta 3: O que você pode concluir a respeito da soma das áreas desses quadrados? Escrevendo na linguagem matemática o Teorema de Pitágoras temos:

a) ( ) Se subtrairmos as áreas referentes aos catetos, teremos a área referente à hipotenusa. $b^2 - c^2 = a^2$

b) ( ) Se somarmos as áreas referentes à hipotenusa e um cateto, teremos a área referente ao outro cateto. $a^2 + b^2 = c^2$

c) ( ) Se somarmos as áreas referentes aos dois catetos, teremos a área referente à hipotenusa. $a^2 + b^2 = c^2$

b)Verificação da existência do teorema de Pitágoras com o uso de polígonos regulares no Geogebra.

Usando o Triângulo Eqüilátero.

1º Passo: Criar um Triângulo Retângulo ABC.

✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (JANELA 3)** e em seguida clique na origem dos eixos **(0,0)** e na reta x, depois clique na origem dos eixos e na reta y, formando assim um triângulo retângulo.

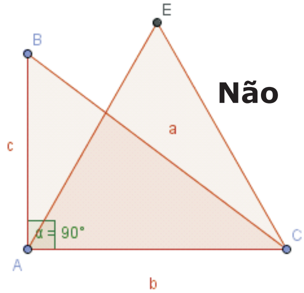
Obs.: Se não aparecer o rótulo, rotule os pontos **ABC**, clicando com o botão direito em cima dos pontos e selecione a opção **EXIBIR RÓTULO**. Rotule conforme a figura 3.4.

✓Selecione a opção **POLÍGONO (JANELA 5)**, clique nos pontos ABC. E também clique uma quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono.

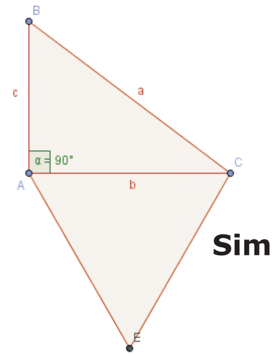
2º Passo: Criar Três triângulos nos lados do triângulo.

✓Selecione a opção **POLÍGONO REGULAR (JANELA 5)** Clique nos pontos **AB**. Em seguida aparecerá uma janela, nela digite 3 (para os lados do triângulo eqüilátero) clique em "**APLICAR ou Ok!**".

Obs.: Poderá acontecer de o triângulo ficar na parte superior. Se isso acontecer, desfaça a ação no menu editar "**DESFAZER**" e em seguida refaça a ação de criar um triângulo clicando em **BA**.
Faça o mesmo procedimento com os outros dois lados do triângulo.



Não



Sim

3º Passo: Obter a área dos triângulos.

✓Selecione a opção **ÁREA (JANELA 8)** e clique no três triângulos.

✓**O computador obteve essas áreas da seguinte maneira:**

$$A_{Triângulo} \qquad \frac{Base \ x \ Altura}{2}$$

✓**No exemplo da área 1.**

$$A_{Triângulo} \qquad \frac{3 \ x \ 2{,}6}{2} \qquad 3{,}9$$

O mesmo acontece nas áreas 2 e

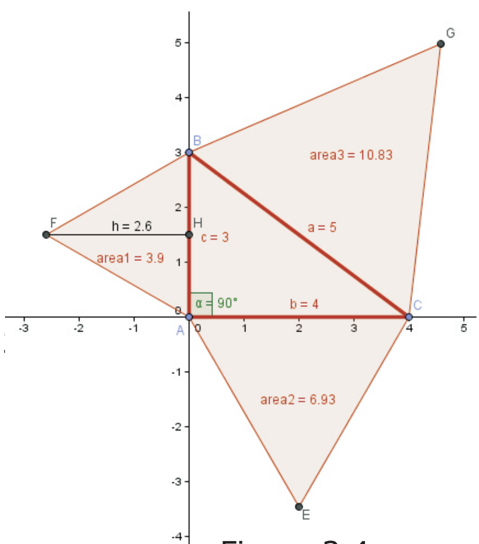


Figura 3.4

Pergunta 1: Modifique três vezes o triângulo e anote na tabela as áreas de cada um. Será que o teorema de Pitágoras ainda vale?

Área 1	Área 2	Área 1 + Área 2	Área 3

Pergunta 2: Verifique como se chegou as áreas 1, 2 e 3.

Obs.: $A_{\text{Área do Triângulo}} \quad \dfrac{Base \ x \ Altura}{2}$

a) ( ) Somando as medidas dos três lados de cada triângulo.

b) ( ) Multiplicando o comprimento do lado do **triângulo retângulo** (base) e a altura do triângulo e esse produto dividido por dois. (Isso nos três lados do triângulo).

c) ( ) Multiplicando o comprimento da altura de cada triângulo e a soma dos lados.

Pergunta 3: O que você conclui da soma da área desses triângulos?

a) ( ) Se subtrairmos as áreas com referência aos catetos, teremos a área referente à hipotenusa.

b) ( ) Se somarmos as áreas referentes à hipotenusa e um cateto, teremos a área referente ao outro cateto.

c) ( ) Se somarmos as áreas com referencia nos dois catetos, teremos a área referente à hipotenusa.

c) Verificação da existência do teorema de Pitágoras com o uso de polígonos regulares no Geogebra.

Usando o Pentágono.

1º Passo: Criar um Triângulo Retângulo ABC.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (JANELA 3)** e em seguida clique na origem dos eixos e na reta x, depois clique na origem dos eixos e na reta y, formando assim um triângulo retângulo.

Obs.: Se não aparecer o rótulo, rotule os pontos **ABC**, clicando com o botão direito em cima dos pontos e selecione a opção **EXIBIR RÓTULO**. Rotule conforme a figura 3.5.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (JANELA 5)** Clique nos pontos **ABC**. E também clique uma quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono.

2º Passo: Criar Três pentágonos nos lados do triângulo.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO REGULAR (JANELA 5)** Clique nos pontos **AB**. Em seguida aparecerá uma janela, nela digite 5 (para os lados do pentágono regular) clique em "**APLICAR ou Ok!**". Faça o mesmo procedimento com os outros dois lados do triângulo.

3º Passo: Medir os lados e obter a área dos pentágonos.

✓Selecione a opção **DISTÂNCIA OU COMPRIMENTO (JANELA 8)** e meça os lados **AB**, **AC** e **BC**.

✓Selecione a opção **ÁREA (JANELA 8)** e clique no três polígonos.

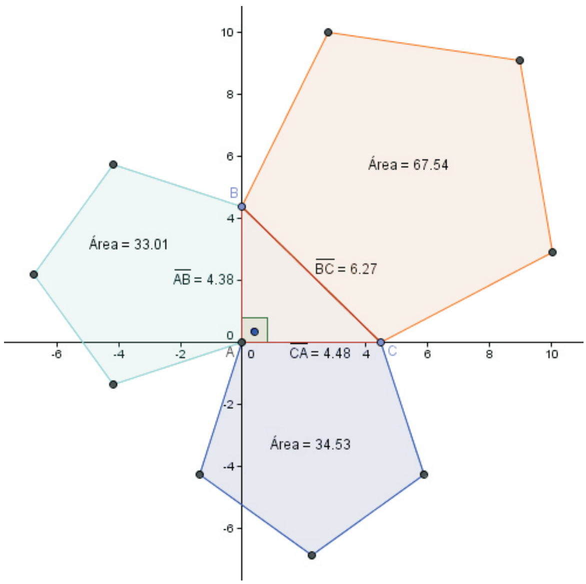


Figura 3.5

Pergunta1: Somando as duas áreas dos pentágonos menores é possível verificar que o resultado corresponde à área do maior pentágono?

a) (   ) Sim.

b) (   ) Não.

Pergunta2: O que você pode então generalizar?

a) ( ) A soma da área referente ao lado de um cateto e a área referente à hipotenusa, vai resultar na a área referente ao outro cateto.

b) ( ) A soma das áreas referentes aos lados "catetos", vai resultar na área referente ao lado da hipotenusa.

Desafio e Conclusão da Atividade

Construa a figura abaixo no Geogebra e mostre que o teorema de Pitágoras é válido para o triângulo ABC, preenchendo a tabela.

✓ A área de uma circunferência é dada por: $A \quad . r^{2}$

✓ Como no exercício se trata de semicircunferência, temos que a área é dada por: $A \quad \frac{. r^{2}}{2}$

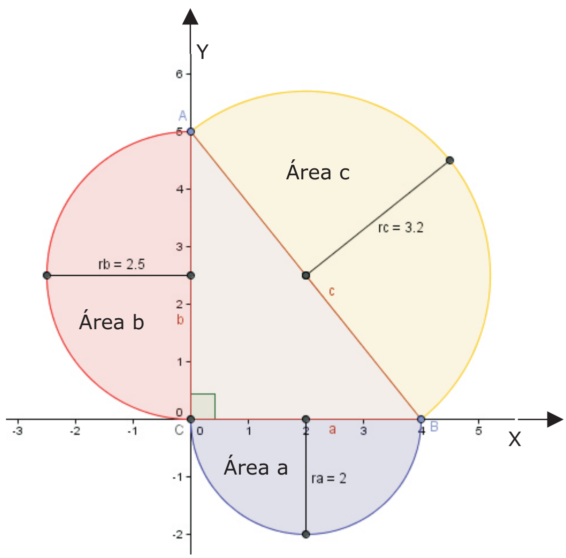


Figura 3.6

Altere duas vezes o triângulo **ABC** e preencha a tabela.

Área a $\frac{.r_a^2}{2}$	*Área b* $\frac{.r_a^2}{2}$	(Área a) + (Área b) $\frac{.r_a^2}{2}$ $\frac{.r_a^2}{2}$	*Área c* $\frac{.r_a^2}{2}$

Obs.: é uma constante que vale aproximadamente 3,14.

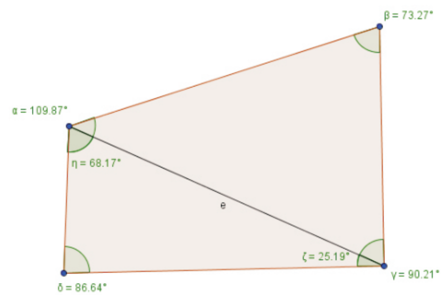
Pergunta 3: O que você pode concluir sobre as duas últimas colunas?

a) ( ) São iguais. Então o Teorema de Pitágoras é válido quando os lados do triângulo retângulo são formados por semicircunferência.

b) ( ) São diferentes. Então o Teorema de Pitágoras **não** é válido quando os lados do triângulo retângulo são formados por semicircunferência.

ATIVIDADE 4

PROPRIEDADES IMPORTANTES PARA OS POLÍGONOS



No início o homem só considerava problemas geométricos concretos, que se apresentavam individualmente e entre os quais não era observada nenhuma ligação. Mais tarde, a inteligência humana tornou-se capaz de, a partir de certo número de observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, extrair certas propriedades gerais e relações que incluíam as observações anteriores como casos particulares. Isto acarretou a vantagem de se ordenarem problemas geométricos práticos em conjuntos tais que os problemas de um conjunto podiam ser resolvidos pelo mesmo procedimento geral. Chegou-se assim à noção de lei ou regra geométrica. Por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo, a fórmula para as Diagonais dos Polígonos, soma dos ângulos externos de um triângulo, as desigualdades triangulares entre outros.

Esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza geométrica pode ser chamado de “geometria científica”, uma vez que indução, ensaio e erro e procedimentos empíricos eram os instrumentos de descoberta. A geometria transformou-se num conjunto de receitas práticas e resultados de laboratórios, alguns corretos e alguns apenas aproximados.

Nenhum dado nos permite estimar quantos séculos se passaram até que o homem fosse capaz de elevar a geometria ao status de ciência. Mas escritores que se ocuparam desta questão concordam que o vale do rio Nilo, no Egito antigo, foi o local onde a geometria subconsciente transformou-se em científica.

Texto retirado do livro: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Autor: Howard Eves. Tradução de Hygino H. Domingues.

a) DESIGUALDADE TRIÂNGULAR

Vamos verificar a propriedade da "Desigualdade Triangular".

"Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois."

1º Passo: Criar um triângulo ABC.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)**. Clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono triângulo.

2º Passo: Medir os lados do triângulo.

✓ Selecione a opção **DISTÂNCIA OU COMPRIMENTO (Janela 7)** e clique nos segmentos **AB**, **AC** e **BC**.

3° Passo: Deformar o Triângulo.

✓ Selecione a opção **PONTEIRO (Janela 1)** e movimente três os vértices do triângulo. Anote na tabela abaixo o resultado de cada movimentação.

AB	AC	BC

Some quaisquer dois dados e verifique se essa soma é maior ou menor que o do terceiro lado. Verifique se a desigualdade triangular é verdadeira ou falsa.

b) ÂNGULO EXTERNO DE UM TRIÂNGULO

Agora que você já conhece qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo, agora vamos conhecer uma propriedade interessante para um dos ângulos externos de um triângulo.

"Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele".

"Ângulo externo de um polígono convexo é um ângulo suplementar (maior que 90º) adjacente a um ângulo (interno) do polígono."

Vamos construir a figura abaixo no Geogebra.

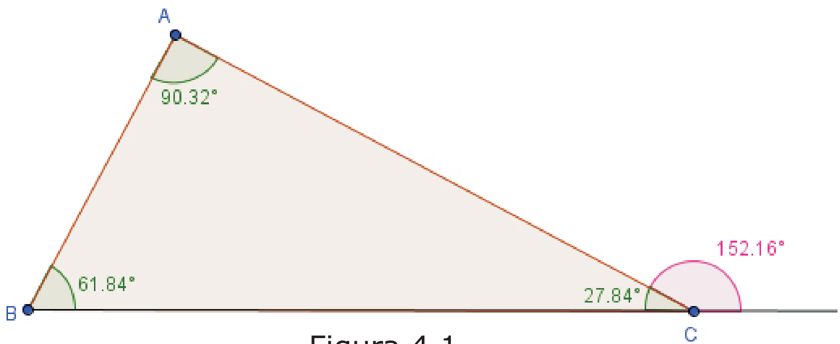


Figura 4.1

1º Passo: Criar um triângulo ABC.

- ✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)**. Clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono triângulo.
- ✓ Selecione a opção **SEMI-RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique no ponto **B** e no ponto **C**.

2º Passo: Marcar e medir os ângulos internos do triângulo e um ângulo externo.

- ✓ Selecione a opção **ÂNGULO (Janela 7)**. Clique sobre suas retas adjacentes para que seja mostrada a medida do ângulo interno. Faça esse procedimento em cada um dos três vértices.

Obs. 1: Pode acontecer do programa mostrar a medida do ângulo externo. Nesse caso clique com o botão direito do mouse em cima do ângulo, selecione a opção "**PROPRIEDADES**" e logo em seguida desmarque a opção: "**PERMITE ÂNGULOS MAIORES DO QUE 180 GRAUS**".

3° Passo: Deformar o Triângulo.

- ✓ Selecione a opção **PONTEIRO (Janela 1)** e movimente três os vértices do triângulo. Anote na tabela abaixo o resultado de cada movimentação.

Ângulo A (Interno)	Ângulo B (Interno)	Soma A + B (Interno)	Ângulo C (Externo)

Pergunta: O que você pode concluir em relação a soma dos ângulos internos não adjacentes a um ângulo externo?

a) ( ) Que o valor do ângulo externo **C** é sempre a soma dos ângulos internos dos vértices **A** e **B**.

b) ( ) Que o valor do ângulo externo **C** não é a soma dos ângulos internos dos vértices **A** e **B**.

A sua conclusão é uma propriedade de um ângulo externo em relação a dois ângulos internos.

c) SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO

Objetivos Específicos:

Deduzir a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.

Obs.: Para essa atividade, desabilite a opção **EIXO** no **Menu EXIBIR** e deixe habilitada a **JANELA DE ALGEBRA** também no menu **EXIBIR**.

1º Passo: Criar um triângulo ABC.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)**. Clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono triângulo. (Observe que esses pontos não podem estar alinhados).

2º Passo: Marcar e medir os ângulos internos do triângulo.

✓ Selecione a opção **ÂNGULO (Janela 8)**. Clique sobre suas retas adjacentes para que seja mostrada a medida do ângulo interno. Faça esse procedimento em cada um dos três vértices.

Obs. 1: Pode acontecer do programa mostrar a medida do ângulo externo. Nesse caso clique com o botão direito do mouse em cima do ângulo, selecione a opção "**PROPRIEDADES**" e logo em seguida desmarque a opção: "**PERMITE ÂNGULOS MAIORES DO QUE 180 GRAUS**".

Obs. 2: Se você quiser, é possível retirar todos os rótulos do triângulo para uma melhor visualização do seu objetivo que é verificar a soma dos ângulos internos do triângulo. Basta você clicar com o botão direito do mouse em cima do rótulo e desabilitar a opção: "**EXIBIR RÓTULO**".

3º Passo: Somar os ângulos internos do triângulo.

- ✓ Digite no campo de entrada: (utilizando o campo de letras gregas ao lado do campo "**comando**"). E em seguida "**ENTER**".
- ✓ Vai aparecer no campo Objetos Independentes uma variável igual a 180°.

4° Passo: Deformar o Triângulo.

- ✓ Selecione a opção **MOVER (Janela 1)** e movimente os vértices do triângulo.

Anote na tabela abaixo o resultado de cada movimentação.

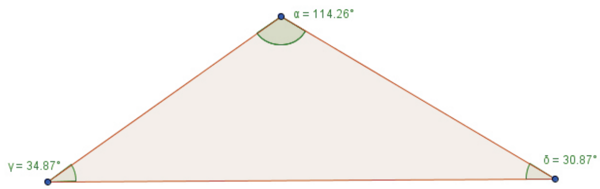


Figura 4.2

Ângulo	Ângulo	Ângulo	Soma dos Ângulos Internos

Pergunta 1: A soma dos ângulos internos nas três movimentações se altera?

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

Pergunta 2: O que você verifica na soma dos ângulos internos ?

a) ( ) Se somarmos teremos 360º.

b) ( ) Se somarmos teremos 900º.

c) ( ) Se somarmos teremos 180º.

d) SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO QUADRILÁTERO

1º Passo: Criar um quadrilátero ABCD.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** clique quatro vezes em pontos distintos da janela de construção e uma quinta vez no ponto inicial para fechar o polígono.

2º Passo: Marcar e medir os ângulos internos do quadrilátero.

✓ Selecione a opção **ÂNGULO (Janela 8)**. Clique sobre suas retas adjacentes para que seja mostrada a medida do ângulo interno. Faça esse procedimento em cada um dos quatro vértices.

Obs. 1: Pode acontecer do programa mostrar a medida do ângulo externo. Nesse caso clique com o botão direito do mouse em cima do ângulo, selecione a opção "**PROPRIEDADES**" e logo em seguida desmarque a opção: "**PERMITE ÂNGULOS MAIORES DO QUE 180 GRAUS**".

3º Passo: Somar os ângulos internos do quadrilátero.

✓ Digite no campo de entrada: (utilizando o campo de ltras gregas ao lado do campo "**comando**"). E em seguida "**ENTER**".

✓ Vai aparecer no campo "Objetos Independentes" uma variável (que é a soma dos ângulos internos) igual a quanto? Resposta: ____________.

Esse valor será a soma dos ângulos internos do quadrilátero.

4º Passo: Deformar o Quadrilátero.

✓ Selecione a opção **MOVER (Janela 1)** e movimente os vértices do triângulo. O resultado da soma dos ângulos internos altera?

a) ( ) Sim b) ( ) Não

Verifique o que acontece com a soma dos ângulos internos e responda:

Pergunta 1: O que você verifica na soma dos ângulos internos ?

a)( ) Se somarmos teremos 360º.

b)( ) Se somarmos teremos 900º.

c)( ) Se somarmos teremos 180º.

5º Passo: Traçar uma diagonal do quadrilátero.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique sobre dois vértices opostos do quadrilátero.

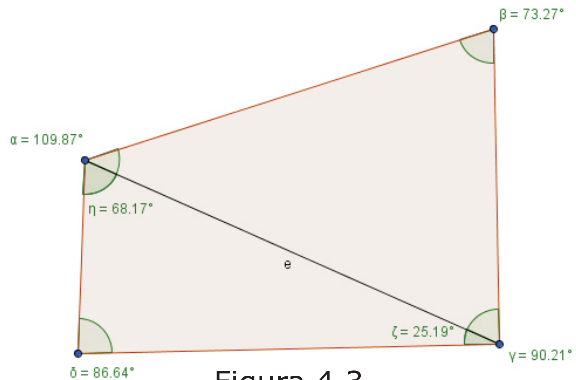


Figura 4.3

Faça uma análise e marque a resposta certa com base no que você observa no computador.

Pergunta 2: Quantos triângulos formaram?

a) ( ) 1 triângulo

b) ( ) 2 triângulos

c) ( ) 3 triângulos

Pergunta 3: Qual é a relação entre a soma dos ângulos internos dos triângulos e do quadrilátero?

a) ( ) A soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180º. No quadrilátero temos dois triângulos, então 180º + 180º = 360º. Que é a soma dos ângulos internos do quadrilátero.

b) ( ) Como o triângulo não tem diagonal, não é possível estabelecer uma relação entre a soma dos ângulos internos do triângulo e do quadrado.

e) SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO PENTÁGONO

1º Passo: Criar um pentágono ABCD.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** clique cinco vezes em pontos distintos da janela de construção e uma sexta vez no ponto inicial para fechar o polígono.

2º Passo: Marcar e medir os ângulos internos do pentágono.

✓ Selecione a opção **ÂNGULO (Janela 8)**. Clique sobre suas retas adjacentes para que seja mostrada a medida do ângulo interno.

Faça esse procedimento em cada um dos cinco vértices.

Obs. 1: Pode acontecer do programa mostrar a medida do ângulo externo. Nesse caso clique com o botão direito do mouse em cima do ângulo, selecione a opção "**PROPRIEDADES**" e logo em seguida desmarque a opção: "**PERMITE ÂNGULOS MAIORES DO QUE 180 GRAUS**".

3º Passo: Somar os ângulos internos do pentágono.

✓ Digite no campo de entrada: (utilizando o campo de letras gregas ao lado do campo "**comando**"). E em seguida "**ENTER**".

✓ Vai aparecer no campo Objetos Independentes uma variável (que é a soma dos ângulos internos) igual a quanto? Resposta: ___________

Esse valor será a soma dos ângulos internos do pentágono.

4º Passo: Deformar o pentágono.

✓ Selecione a opção **MOVER (Janela 1)** e movimente os vértices do pentágono. O resultado da soma dos ângulos internos altera?

a) ( ) Sim b) ( ) Não

5º Passo: Traçar duas diagonais do pentágono por um mesmo vértice.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie duas diagonais pelo mesmo vértice no pentág

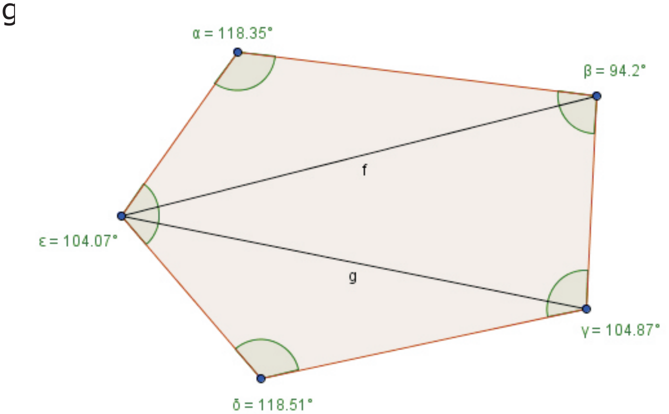


Figura 4.4

Faça uma análise e marque a resposta certa com base no que você observa no computador.

Pergunta 1: O que você pode observar nessas atividades em relação à soma dos ângulos internos de um triângulo e a de um polígono qualquer?

a) (   ) Para saber a soma dos ângulos de um polígono qualquer, basta multiplicar o número de diagonais com o número de lados.

b) (   ) Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, podemos observar e contar o número (n) de triângulos dentro do polígono. Então, para saber a soma dos ângulos internos do polígono basta multiplicar 180º x n.

c) (   ) Não há nenhuma relação entre o número de triângulos que formamos no polígono e a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Preencha a tabela para sua melhor compreensão.

nº de lados	Quantos triângulos consigo formas	Soma dos ângulos internos	Se o polígono for regular cada ângulo interno vale:	Nome do polígono regular
3	1	1 . 180º	180 : 3 = 60	Triângulo Equilátero
4				
	3			
		4 . 180º = 720		
			900 : 7 = 128,57	Heptágono Regular
				Octógono Regular
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N(lados)				Polígono Regular

Obs.: A última linha será uma fórmula que você deverá generalizar a partir da tabela.

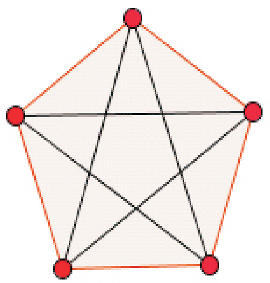
f) O NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

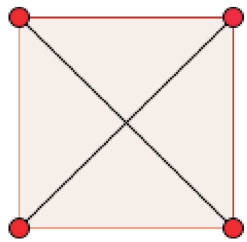
1º Passo: Construção de polígonos.

✓ Construa os polígonos como nos exemplos abaixo e faça uma análise para o correto preenchimento das tabelas abaixo.

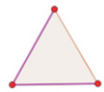
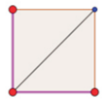
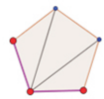
✓ Para isso utilize as opções: **POLÍGONO REGULAR (Janela 5)** e a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** para as construções dos polígonos regulares bem como as suas respectivas diagonais.

Exemplos:

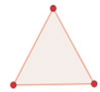
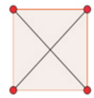
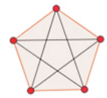




2º Passo: Preenchimento da Tabela

Nº de Lados	Nome do Polígono	Com extremidade num dos vértices do Polígono	Exemplos
3	Triângulo	3 - 3 = 0 Diagonal	
4	Quadrado	4 - 3 = 1 diagonal	
5	Pentágono	5 - 3 = 2 diagonais	
6			
7			
8			
9			
10			
⋮		⋮	⋮
n			

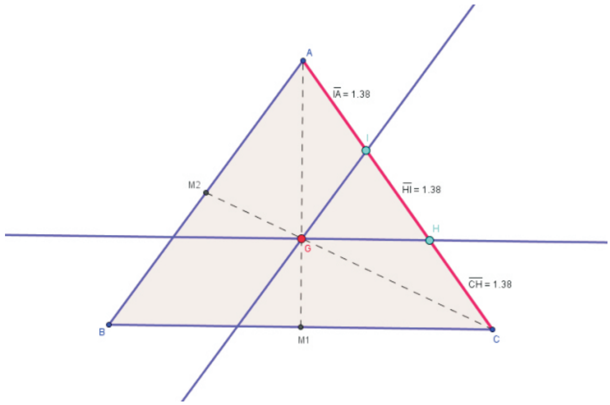
Obs.: A última linha será uma fórmula que você deverá generalizar a partir da tabela.

Nº de Lados	**Nome do Polígono**	**Nº de Diagonais com extremidade nos (n) vértices**	**Como o número de diagonais é contado duas vezes divide-se por 2 o número de extremidade nos (n) vértices**	**Exemplos**
3	**Triângulo**	**3 (3 - 3) = 0**	**0 : 2 = 0**	
4	**Quadrado**	**4 (4 - 3) = 4 diagonais**	**4 : 2 = 2 diagonais**	
5	**Pentágono**	**5 (5 - 3) = 10 diagonais**	**10 : 2 = 5 diagonais**	
6				
7				
8				
9				
10				
⋮	**⋮**	**⋮**	**⋮**	**⋮**
n	**Polígono**			

Obs.: A última linha será uma fórmula que você deverá generalizar a partir da tabela.

ATIVIDADE 5

PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO



Nos três primeiros postulados dos Elementos, Euclides enuncia as três “construções” permitidas em geometria:

① Traçar uma reta por dois pontos;

② Prolongar uma reta limitada continuamente segundo uma reta;

③ Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer distância.

Euclides não usa a palavra “compasso” em seus Elementos e nunca descreve como as construções devem ser feitas. A restrição de que essas construções devem ser realizadas apenas com o uso de uma régua e um compasso tem tradicionalmente sido atribuída a Platão (390 a.C.).

Embora os gregos tivessem chegado muito perto de levar a termo todas as construções que são permissíveis usando apenas régua e compasso, eles também tinham ciência de muitos problemas relativamente simples que eram capazes de resolver somente por esses meios:

① Inscrever um polígono regular num círculo;

② Encontrar o incentro de um triângulo;

③ Achar o lado de um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado;

④ Construir um quadrado de área igual à de um dado círculo.

Imagine o trabalho que os Gregos tiveram para fazer a formalização destas construções. Por outro lado podemos imaginar se os gregos tivessem à sua disposição as ferramentas que temos hoje no Geogebra. Com certeza eles ficariam impressionados com a geometria dinâmica. Essa geometria na qual podemos construir rapidamente as figuras e suas propriedades, deformá-las para verificar sua validade.

É muito mais fácil e agradável aprender matemática hoje do que na época de Euclides. Podemos dizer que somos privilegiados.

Com a Geometria Dinâmica podemos trocar a régua e o compasso de Euclides por um poderoso software que simula todas as possíveis situações que a figura plana nos pode proporcionar.

I. ALGUNS APORTES TEÓRICOS

Os pontos notáveis do triângulo são: **BARICENTRO**, **INCENTRO**, **CIRCUNCENTRO E ORTOCENTRO**.

a) BARICENTRO

É o ponto de intersecção das **medianas** de um triângulo.

Mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

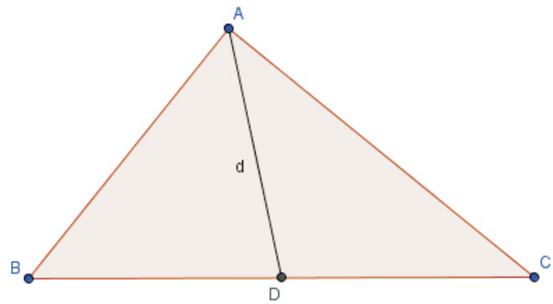


Figura 5.1

b) INCENTRO

É o ponto de intersecção das **bissetrizes** de um triângulo.

Bissetriz de um triângulo é o segmento que une um vértice ao lado oposto, dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos de mesma medida.

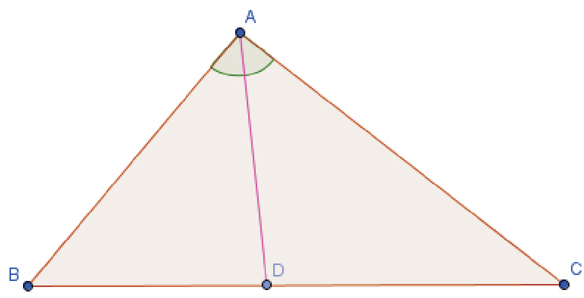


Figura 5.2

c) CIRCUNCENTRO

É o ponto de intersecção das **mediatrizes** de um triângulo.

Mediatriz é a reta perpendicular no ponto médio do lado de um triângulo.

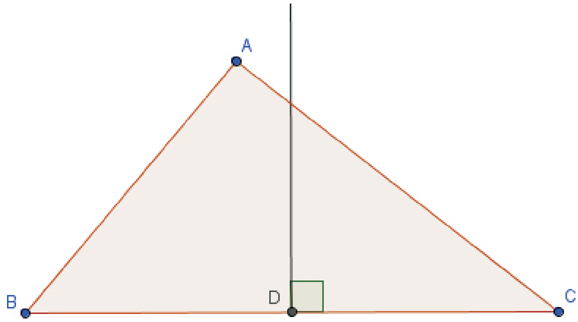


Figura 5.3

d) ORTOCENTRO

É o ponto de intersecção das alturas de um triângulo.

Altura de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice ao lado oposto (ou ao seu prolongamento), formando um ângulo de 90° com esse lado.

Figura 5.4

II. INSTRUÇÕES PARA USO DO SOFTWARE E CONSTRUÇÃO DOS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

a) O BARICENTRO

✓ Primeiramente desabilite a opção **EIXO** no **Menu EXIBIR**.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)**. Clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo **ABC** e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono triângulo. (Observe que esses pontos não podem estar alinhados). Se não aparecer o rótulo, rotule o triângulo **ABC**.

✓ Selecione a opção **PONTO MÉDIO (Janela 2)** e crie o ponto médio **AB** clicando nos pontos **A** e **B**. Logo em seguida, rotule ou chame o ponto médio de **D**.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie um segmento com extremos no ponto médio criado anteriormente e no vértice **C**. (Esse segmento é a mediana).

✓ Selecione a opção **PONTO MÉDIO (Janela 2)** e crie o ponto médio **AC** clicando nos pontos **A** e **C**. Logo em seguida, rotule o ponto médio de **E**.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie um segmento com extremos no ponto médio criado anteriormente e no vértice **B**. **(Esse segmento também é a mediana[1])**.

---

[1] As medianas de um triângulo intersectam-se num ponto chamado "Baricentro" que dista dois terços do vértice da mediana correspondente. (Teorema de Ceva). Esse teorema foi criado pelo matemático italiano Giovanni Ceva em 1678. Este teorema dá condições para que três cevianas sejam **Concorrentes**. (Três retas que passam pelo mesmo ponto.) **Ceviana** é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao lado oposto correspondente ou do seu prolongamento. São exemplos de cevianas a mediana, a altura e a bissetriz.

✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e crie a interseção **G** das medianas clicando em duas retas internas ao triângulo (logo após criado, rotule de **G** o ponto).

✓ Selecione a opção **PONTO MÉDIO (Janela 2)** e crie o ponto médio **BC** clicando nos pontos **B** e **C**. Logo em seguida, rotule o ponto médio de **F**.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie um segmento com extremos no ponto médio criado anteriormente e no vértice **A**.

Movimente os pontos **A**, **B** e **C** e marque a resposta correta.

Pergunta 1: O que você pode observar?

a) (   ) O segmento **AF** não passa pelo ponto **G**.

b) (   ) O segmento **AF** passa pelo ponto **G**.

O ponto **G** é o **BARICENTRO** do triângulo. Qual é a relação entre os segmentos **AG** e **GF**? **BG** e **GE**? **CG** e **GD**?

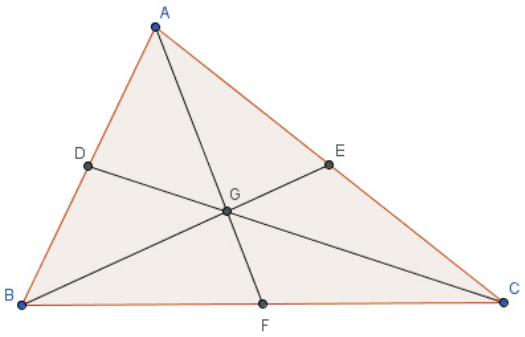


Figura 5.1.1

✓ Selecione a opção **PONTO MÉDIO (Janela 2)** e meça o ponto médio entre **AG**. Rotule-o de **H**.

✓ Selecione a opção **DISTÂNCIA**, **COMPRIMENTO OU PERÍMETRO (Janela 8)** e meça os comprimentos **AH**, **HG** e **GF**. Conforme a figura abaixo. Você irá verificar que **AG** está na razão de **2 para 1**, em relação a **GF** ou seja, **AG** é sempre duas vezes **GF**. Ou também podemos dizer que **AG** é 2/3 de **AF** e ainda, **GF** é 1/3 de **AF**.

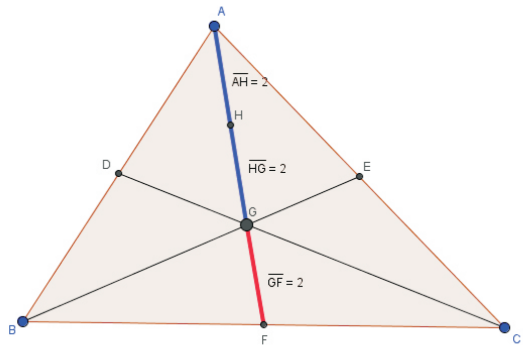


Figura 5.1.2

Em seguida mova bastante o triângulo e você vai verificar que o ponto G nunca vai sair do triângulo. Essa é uma característica do ponto G que é chamado de **centro de massa**[2].

b) Um lugar Geométrico para o Baricentro

Atendendo aos resultados afirmados para o baricentro, quando um vértice B do triângulo ABC se desloca sobre uma "paralela p" ao seu lado oposto AC, o **baricentro** deve descrever uma reta ainda paralela a AC.

Com base na figura tente montar no Geogebra essa interessante propriedade do Baricentro.

[2] Centro de massa ou centro de gravidade de um triângulo, quer dizer que se suspendermos um triângulo de material homogêneo pelo seu baricentro, ele fica em equilíbrio.

No final você pode mover os vértices do triângulo de partida para verificar que os resultados não dependem de qualquer triângulo em particular.

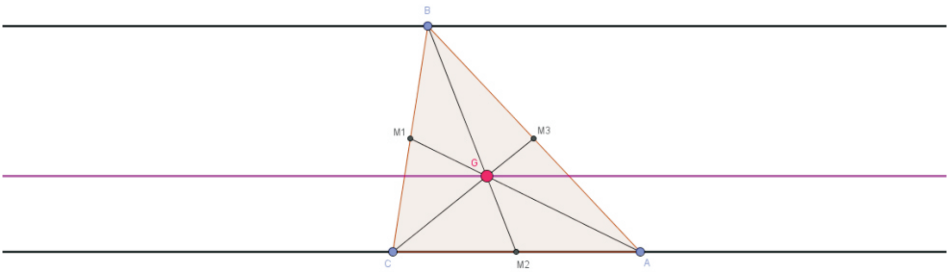


Figura 5.1.3

c) Outra Propriedade do Baricentro

"As paralelas a dois lados de um triângulo que passam pelo baricentro dividem o terceiro lado em três partes iguais".

Analise a figura e tente fazer você no Geogebra.

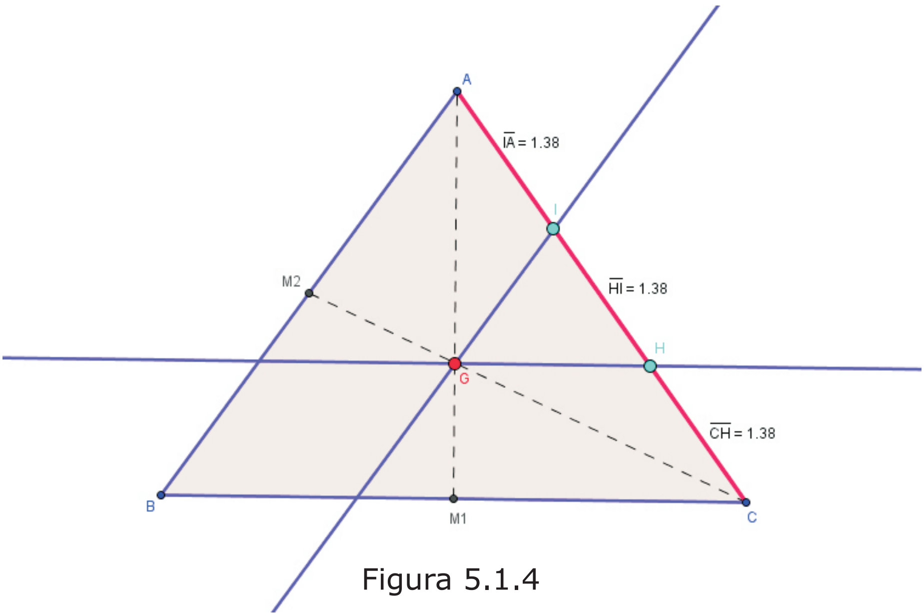


Figura 5.1.4

d) O INCENTRO

✓ Primeiramente desabilite a opção **EIXO** no **Menu EXIBIR**.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)**. Clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono triângulo. (Observe que esses pontos não podem estar alinhados).

✓ Selecione a opção **BISSETRIZ (Janela 4)** e crie duas bissetrizes de dois ângulos internos do triângulo (clique sobre as suas retas adjacentes).

✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e crie a intersecção I das bissetrizes (logo após criado, rotule de **I** o ponto).

✓ Selecione a opção **BISSETRIZ (Janela 4)** e crie a bissetriz do outro ângulo interno do triângulo. Você poderá perceber que essa última bissetriz vai passar exatamente pelo ponto **I**.

✓ Feito esse procedimento agora vamos arrumar esses segmentos.

a)Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e marque a intersecção entre a reta bissetriz com o lado do triângulo. Faça isso com os outros dois lados e rotule todos os pontos.

b)Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e ligue o vértice **A** até o ponto de intersecção entre a reta bissetriz e o lado oposto do vértice **A** do triângulo **ABC** ou seja, crie os segmentos **AF**, **BE** e **CG**.

✓ Selecione a opção **EXIBIR/ ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e esconda as bissetrizes clicando em todas as retas e depois selecionando a opção **MOVER (Janela 1)**. Para esconder todas as bissetrizes.

- ✓ Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)** e crie uma perpendicular ao lado **AB** passando por **I**.
- ✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e crie a intersecção **T** da perpendicular com o lado **AB**.
- ✓ Selecione a opção **CIRCUNFERÊNCIA DEFINIDA PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**. A seguir, trace uma circunferência com centro em **I** passando por **T**.

  Movimente os pontos **A**, **B** e **C**.

Pergunta 1: O que você observa? Marque a alternativa correta.

a) (   ) A circunferência fica toda dentro do triângulo.

b) (   ) A circunferência fica toda fora do triângulo.

- ✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e selecione os outros dois pontos de intersecção da circunferência com o triângulo clicando na circunferência e no lado do triângulo.
- ✓ Selecione a opção **EXIBIR/ ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e esconda a reta perpendicular
- ✓ Selecione a opção **MOVER (Janela1)** movimente o ponto **A**, **B** ou **C** e observe. O ponto **I** (Incentro) é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

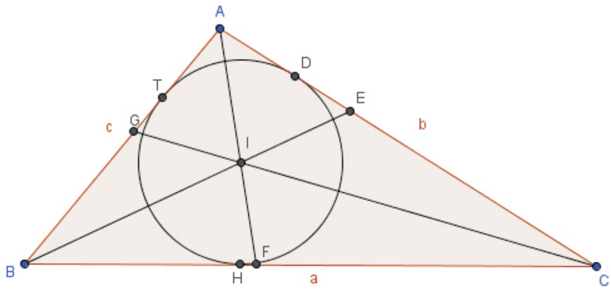


Figura 5.2.1

Obs: A propriedade a ser identificada ao mover os pontos **A**, **B** e **C** é que a circunferência está sempre inscrita no triângulo, ou seja, a circunferência está sempre dentro do triângulo.

e) Uma Propriedade para o Incentro

A reta que une o vértice A de um triângulo [ABC] com o incentro I corta a circunferência circunscrita num ponto P equidistante de B, de I e de C.

Analise a seguinte figura e tente você fazer no Geogebra.

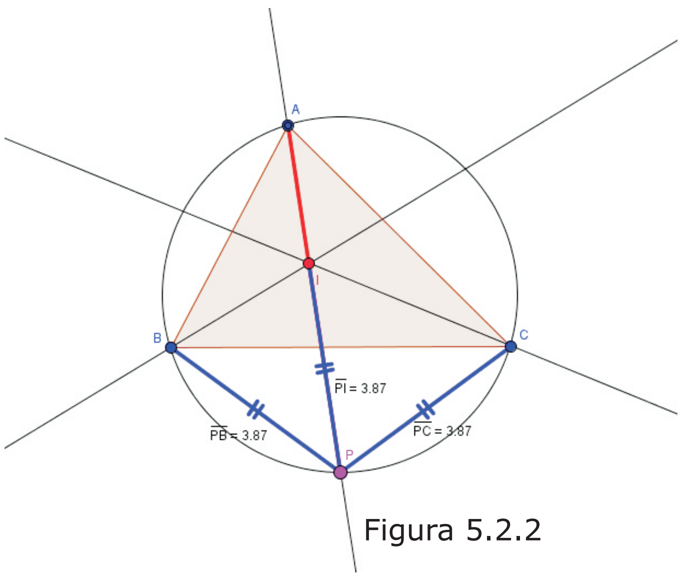


Figura 5.2.2

f) Circunferência Exinscritas Exincentros

O ponto I, incentro de um triângulo [ABC], é o único ponto interior que é equidistante dos lados do triângulo. Mas há pontos exteriores com a mesma propriedade do incentro. Chamamos-lhes exincentros. Basta pensar nas intersecções das bissetrizes exteriores dos ângulos do triângulo. Aliás, pelo ponto de encontro das bissetrizes exteriores de A e C também passa a bissetriz interior de B. (Pode provar que as bissetrizes exteriores de A e C se intersectam e que a bissetriz exterior de A é perpendicular à bissetriz interior de A, ou que as bissetrizes interiores de [ABC] contêm as alturas de [LMN]). É claro que você pode e deve mover os vértices do triângulo para ver que o resultado não depende de qualquer triângulo em particular.

Agora com base na figura e no texto tente montar no GeoGebra os exincentros.

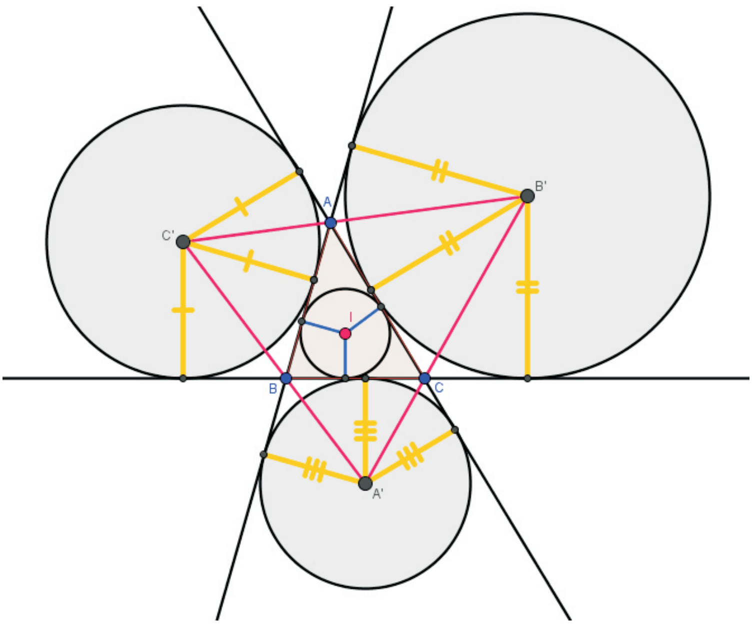


Figura 5.2.3

Obs.: As vezes há dúvidas em relação à posição da circunferência em relação ao polígono.

①Uma "circunferência está circunscrita" ao polígono, quando a circunferência contém os vértices do polígono.

②Uma "circunferência está Inscrita" ao polígono, quando a circunferência tangencia os lados do polígono.

③Uma "circunferência é exinscrita" ao polígono, quando há pontos exteriores que eqüidistam dos lados do polígono.

g) O CIRCUNCENTRO

✓ Primeiramente desabilite a opção **EIXO** no **Menu EXIBIR**.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)**. Clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono triângulo. (Observe que esses pontos não podem estar alinhados).

✓ Selecione a opção **MEDIATRIZ (Janela 4)**, a seguir clique sobre dois lados do triângulos. O que é a mediatriz?

Mediatriz é a "reta perpendicular" no ponto médio do lado de um triângulo.

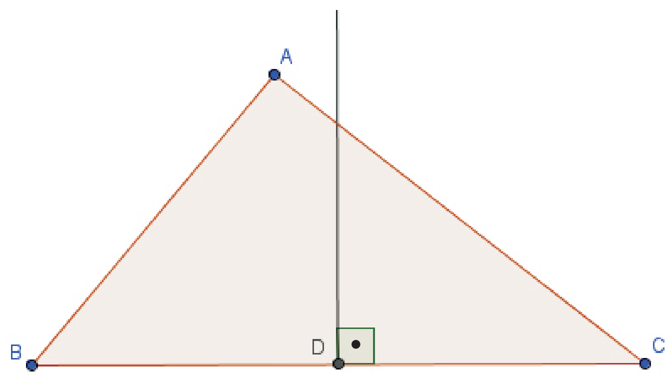


Figura 5.3.1

- ✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e crie a intersecção **H** das mediatrizes (logo após criado, rotule de **H** o ponto).
- ✓ Selecione a opção **MEDIATRIZ (Janela 4)** a seguir crie a mediatriz do outro lado do triângulo. Você vai observar que essa mediatriz vai passar exatamente por **H**.
- ✓ Selecione a opção **EXIBIR/ ESCONDER OBJETO (Janela 10)** e esconda as mediatrizes clicando nas retas mediatrizes e logo em seguida selecionando a opção **MOVER (Janela 1)**.
- ✓ Selecione a opção **CIRCUNFERÊNCIA DEFINIDA PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**. A seguir, trace uma circunferência com centro em **H**, passando por **A**.

Pergunta 1: O que você observa?

a) ( ) A circunferência passa pelos pontos **B** e **C**.

b) ( ) A circunferência não passa pelos pontos **B** e **C**.

- ✓ Selecione a opção **ÂNGULO (Janela 8)** e clique em dois lados adjacentes ao ponto **A** para que se tenha o valor do ângulo. Faça esse procedimento com os outros dois vértices.
- ✓ Selecione a opção **MOVER (Janela 1)** movimente o ponto **A, B** ou **C** e observe. O ponto **H** é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

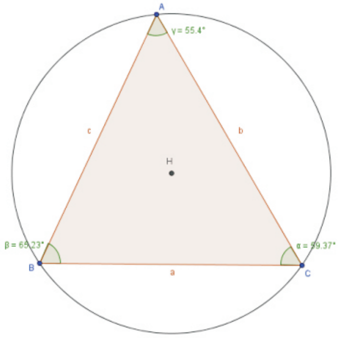


Figura 5.3.2

Com base nessa construção no GEOGEBRA, discuta com os colegas e marque a resposta correta:

Pergunta 2: Quando que o ponto H (circuncentro) será interno ao triângulo?

a) ( ) Quando o triângulo for "**Agudo**". (Três ângulos internos menores que 90º)

b) ( ) Quando o triângulo for "**Retângulo**". (Um ângulo interno igual a 90º)

c) ( ) Quando o triângulo for "**Obtuso**". (Um ângulo interno maior que 90º)

Pergunta 3: Quando que o ponto H (circuncentro) será externo ao triângulo?

a) ( ) Quando o triângulo for "**Agudo**". (Três ângulos internos menores que 90º)

b) ( ) Quando o triângulo for "**Retângulo**". (Um ângulo interno igual a 90º)

c) ( ) Quando o triângulo for "**Obtuso**". (Um ângulo interno maior que 90º)

Pergunta 4: Quando que o ponto H (circuncentro) estará sobre um dos lados do triângulo?

a) ( ) Quando o triângulo for "**Agudo**". (Três ângulos internos menores que 90º)

b) ( ) Quando o triângulo for "**Retângulo**". (Um ângulo interno igual a 90º)

c) ( ) Quando o triângulo for "**Obtuso**". (Um ângulo interno maior que 90º)

h) RETA DE SIMSON

A reta de Simson é uma propriedade da circunferência circunscrita ao triângulo, cujo ponto notável é o circuncentro, essa propriedade é muito interessante e curiosa, no entanto, propomos a sua construção.

"Se por um **ponto P** de uma circunferência circunscrita a um triângulo **ABC**, passarmos perpendiculares aos lados do triângulo, estas (perpendiculares) intersectam os três lados em três pontos que são colineares, ou seja, em três pontos alinhados."

A linha reta que passa por esses três pontos toma o nome de reta de Simson.

CONSTRUÇÃO DA RETA DE SIMSON

Para a construção dessa propriedade desabilite a opção **EIXO** no menu **exibir** e também desabilite a **JANELA DE ÁLGEBRA** no menu **exibir**.

1º Passo: Criar um triângulo ABC.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** e clique em três lugares da janela de construção para criar os vértices do triângulo e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o triângulo.

✓ Rotule os vértices do triângulo **ABC** clicando com o botão direito do mouse em cima de cada ponto e selecionando a opção **EXIBIR RÓTULO**.

2º Passo: Determinar o circuncentro (encontro das mediatrizes)

✓ Selecione a opção **MEDIATRIZ (Janela 4)** e clique nos três lados do triângulo para criar as mediatrizes.

✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e clique em duas retas mediatrizes criadas anteriormente para criar o **ponto D** (Circuncentro).

✓ Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e esconda as três retas mediatrizes clicando nas três retas.

✓ Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)** e clique no **ponto D** (Circuncentro) e no **ponto A** para criar uma circunferência circunscrita ao triângulo.

3º Passo: Criar a reta de Simson.

✓ Selecione a opção **NOVO PONTO (Janela 2)** e crie um **ponto P** sobre a circunferência. (Rotule esse **ponto de P**)

✓ Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)** e:

a) Clique no **ponto P** e no segmento de reta **AB**. (Você criou a reta perpendicular a **AB** que passa pelo **ponto P**).

b) Clique no **ponto P** e no segmento de reta **AC**. (Você criou a reta perpendicular a **AC** que passa pelo **ponto P**).

c) Clique finalmente no **ponto P** e no segmento de reta **BC**. (você criou a reta perpendicular a **BC** que passa pelo **ponto P)**.

✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)**:

a) Clique no segmento de reta **AB** e na reta perpendicular criada anteriormente.

b)Clique no segmento de reta **AC** e na reta perpendicular criada anteriormente.

c)Clique finalmente no segmento de reta **BC** e na reta perpendicular criada anteriormente.

✓Selecione a opção reta definida por dois pontos (Janela 3) e clique em dois pontos de interseção criados anteriormente.

Obs.: Você irá verificar que essas intersecções estarão sempre alinhadas ou seja esses três pontos são colineares. (Essa é a reta que chamamos de Reta de Simson). Veja a figura abaixo para a verificação.

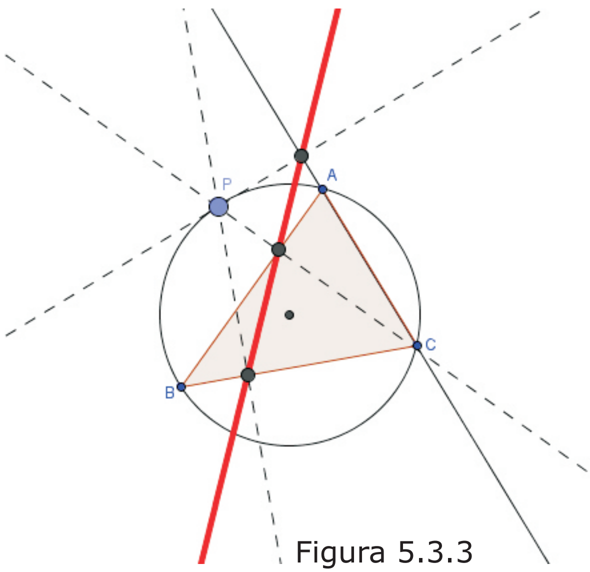


Figura 5.3.3

A figura acima é bem sugestiva da construção que se faz e do resultado. Pode deslocar os vértices do triângulo ou o ponto P sobre a circunferência para confirmar que o resultado não depende do triângulo nem de um particular **ponto P** (O resultado de Simson aplica-se para **pontos P** distintos dos vértices.)

Pergunta 1: Porque é que o resultado não é interessante quando P coincide com um dos vértices?

a) (   ) A reta de Simson, irá coincidir com uma das retas perpendiculares ao ponto que são na realidade a altura do triângulo.

b) (   ) A reta de Simson vai virar uma curva.

i) O ORTOCENTRO

✓ Primeiramente desabilite a opção **EIXO** no **Menu EXIBIR**.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)**. Clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono triângulo. (Observe que esses pontos não podem estar alinhados).

✓ Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)**, e crie uma perpendicular ao lado **AB** passando por **C** e outra ao lado **BC** passando por **A**.

✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e crie a intersecção **O** das perpendiculares (logo após criado, rotule de **O** o ponto).

✓ Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)**, e crie a perpendicular ao lado **AC** passando por **B**. Você vai observar que essa última perpendicular passa pelo ponto **O**.

✓ Selecione a opção **ÂNGULO (Janela 8)** e clique em dois lados adjacentes ao ponto **A** para que se tenha o valor do ângulo. Faça esse procedimento com os outros dois vértices.

✓ Selecione a opção **MOVER (Janela 1)** movimente o ponto **A**, **B** ou **C** e observe:

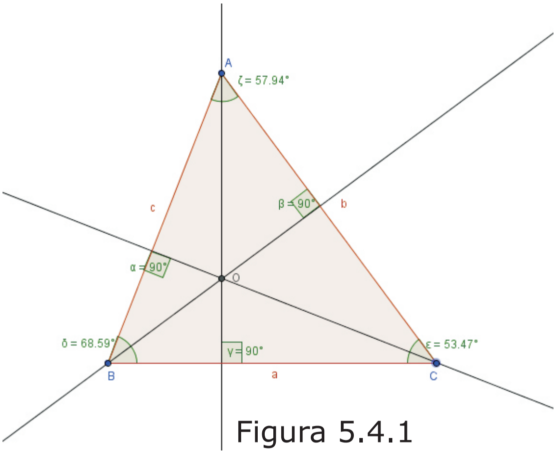


Figura 5.4.1

Com base nessa construção no GEOGEBRA, discuta com os colegas e marque a resposta correta:

Pergunta 1: Quando que o ponto O (ortocentro) será interno ao triângulo?

a) ( ) Quando o triângulo for "**Agudo**". (Três ângulos internos menores que 90º)

b) ( ) Quando o triângulo for "**Retângulo**". (Um ângulo interno igual a 90º)

c) ( ) Quando o triângulo for "**Obtuso**". (Um ângulo interno maior que 90º)

Pergunta 2: Quando que o ponto O (ortocentro) será externo ao triângulo?

a) ( ) Quando o triângulo for "**Agudo**". (Três ângulos internos menores que 90º)

b) ( ) Quando o triângulo for "**Retângulo**". (Um ângulo interno igual a 90º)

c) ( ) Quando o triângulo for "**Obtuso**". (Um ângulo interno maior que 90º)

Pergunta 3: Quando que o ponto O (ortocentro) coincidirá com um dos vértices do triângulo?

a) ( ) Quando o triângulo for "**Agudo**". (Três ângulos internos menores que 90º)

b) ( ) Quando o triângulo for "**Retângulo**". (Um ângulo interno igual a 90º)

c) ( ) Quando o triângulo for "**Obtuso**". (Um ângulo interno maior que 90º)

j) Propriedade interessante envolvendo o Ortocentro

Objetivo: Construir um triângulo ABC cujo ponto notável seja o ortocentro para verificar a propriedade abaixo.

As paralelas aos lados de um triângulo ABC que passam pelos vértices opostos, formam um triângulo A'B'C' em que A'B' = 2 AB, A'C' = 2 AC e B'C' = 2BC, em que A, B e C são os pontos médios de B'C', A'C' e A'B' respectivamente.

Como conseqüência, as alturas do triângulo [ABC] são as mediatrizes de [A'B'C']. As três alturas de um triângulo (que são afinal mediatrizes de um outro triângulo) cortam-se num ponto H. H é o ortocentro do triângulo [ABC] e o circuncentro de [A'B'C'].

1ª parte

Construa um triângulo ABC cujo ponto notável seja o ortocentro (H).

2ª Parte (Construção da propriedade)

✓ Selecione a opção **RETA PARALELA (Janela 4)** e crie a reta paralela a **AB** passando por **C**, a reta paralela a **AC** passando por **B**, também a reta paralela a **BC** passando por **A**.

✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS PONTOS (Janela 2)** e crie o ponto **A'** que passa pelos pontos **A** e C, crie também o ponto **B'** que passa pelos pontos **B** e **C** e finalmente crie o ponto **C'** que passa pelos pontos **A** e **B**.

✓ Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO POR TRÊS PONTOS (Janela 6)** e crie a circunferência com centro em H que passa por **A'B'C'**.

3ª Parte (Verificação da Propriedade)

✓ Selecione a opção **DISTÂNCIA OU COMPRIMENTO (Janela 7)** e merça a distância entre **AB** e **A'B'**. Você pode observar que **A'B' = 2 AB**?

Faça a mesma medição com os outros lados do triângulo e chegue as mesmas conclusões, preenchendo a tabela.

Depois mova os vértices do triângulo **ABC** para verificar que o resultado não depende de qualquer triângulo em particular.

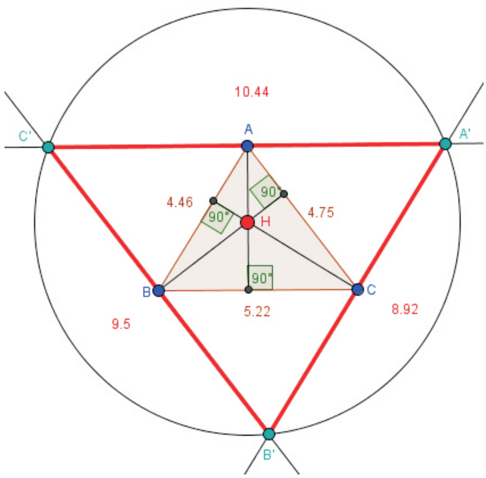


Figura 5.4.2

Obs.:

①No triângulo ABC o ponto H é ortocentro (Encontro das alturas do triângulo).

②No triângulo A'B'C' o ponto H é circuncentro (Encontro das mediatrizes do triângulo).

AB	2 x AB	A’B’
AC	2 x AC	B’C’
BC	2 x BC	A’C’

k) Um lugar Geométrico interessante para o Ortocentro

Quando um vértice C, no caso da figura, de um triângulo [ABC] se desloca sobre uma paralela ao lado oposto (AB), o ortocentro H descreve uma parábola.

✓Selecione a opção **PONTO (Janela 2)**. Clique em qualquer ponto da janela de construção.

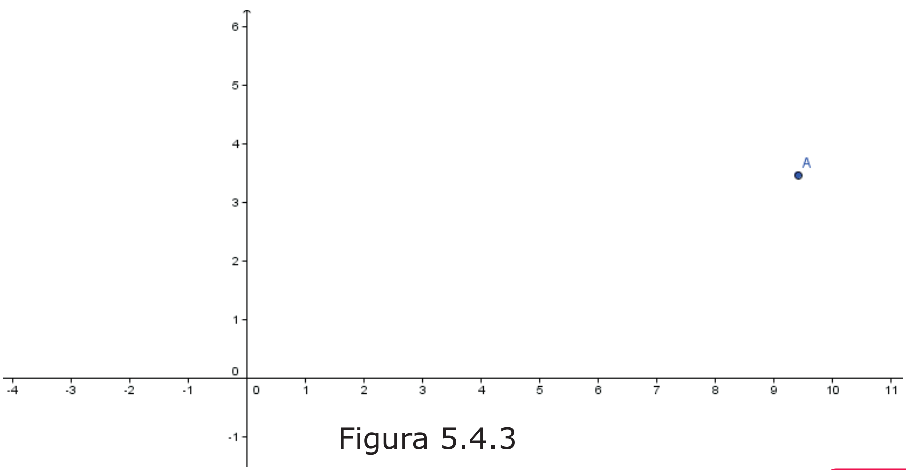


Figura 5.4.3

✓ Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)** e clique no ponto **A** e em seguida na reta **x** (abscissa) e depois clique no ponto **A** e na reta **y** (ordenada).

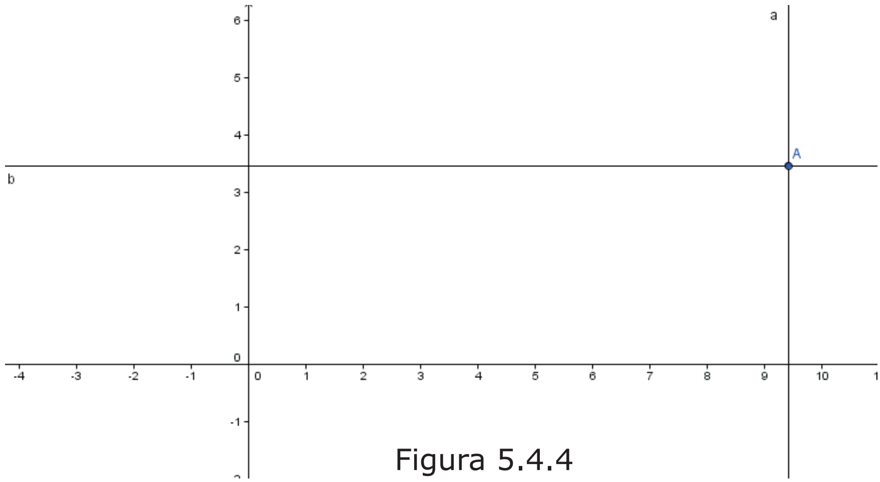


Figura 5.4.4

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** e crie um triângulo com os vértices **A'C'** em cima da reta **x** e o vértice **B'** em cima da reta **b**.

✓ Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)** e crie a reta perpendicular a **A'B'** passando por **C'**, também a reta perpendicular a **A'C'** passando por **B'** e finalmente a reta perpendicular a **B'C'** passando por **A'**.

✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e clique em duas das retas perpendiculares criadas anteriormente.

✓ Esse ponto notável que aparece é o "ortocentro". Chame esse ponto de **"H"**.

✓ Clique com o **BOTÃO DIREITO** em cima do ponto **H** e selecione a opção **HABILITAR RASTRO**.

✓ Em seguida, mova o ponto **B'**. Você vai observar que o ponto **H** descreve uma parábola.

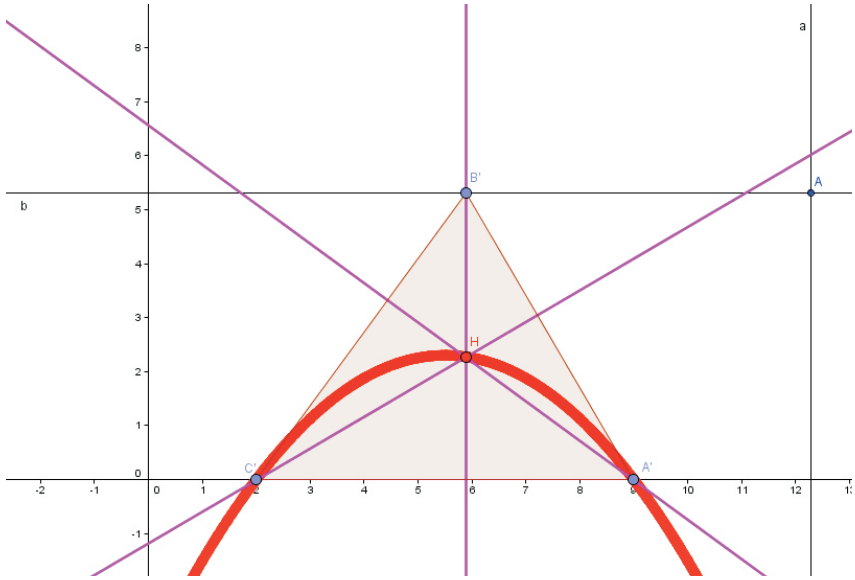


Figura 5.4.5

Um exercício interessante consiste em determinar uma equação em (x,y) para a parábola descrita por H, para um sistema de eixos previamente escolhido.

I) A RETA DE EULER

Uma atividade interessante a respeito dos pontos notáveis de um triângulo **ABC** é a construção da "**RETA DE EULER**". Leonhard Poul Euler (le-se "Óilã"), foi um grande matemático suíço (1707 1783).

Essa atividade consiste em construir em uma mesma figura (triângulo), os pontos notáveis **Baricentro (G)**, **Circuncentro (H)** e o **Ortocentro (O)** de um mesmo triângulo **ABC**.

Construa os três pontos notáveis citados acima em um mesmo triângulo **ABC**, quando você movimentar os vértices do triângulo, será possível observar que esses três pontos estarão sempre alinhados.

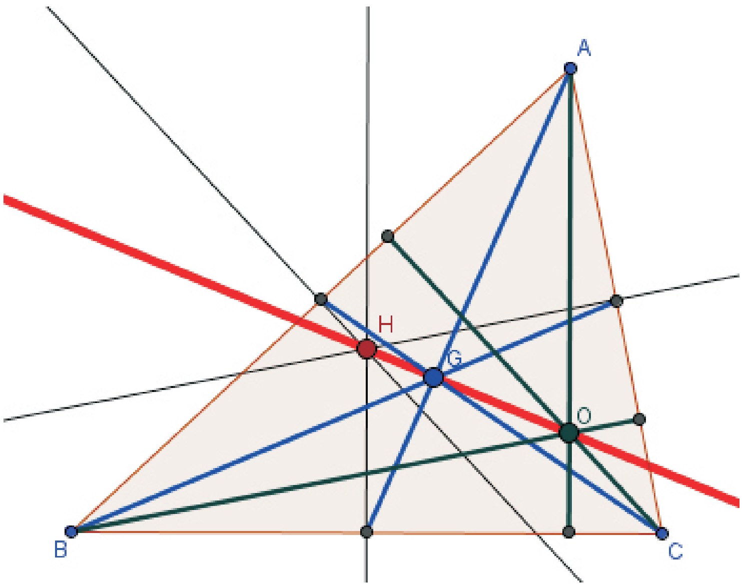


Figura 5.5

Outra propriedade interessante para a reta de Euler é que os comprimentos **GO = 2 GH**. Tente verificar essa propriedade utilizando a ferramenta **DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO (Janela 8)**. Para isso, clique nos pontos **G** e **H**, e depois nos pontos **G** e **O**. Preencha a tabela para a verificação.

1	2	3
GH	2 GH	GO

Os valores da coluna 2 coincidem com os valores da coluna 3 ?

a) (   ) Sim   b) (   ) Não

Com base nessa construção no GEOGEBRA, discuta com os colegas e marque a resposta correta:

Pergunta 1: Quando que esses três pontos serão coincidentes?

a) (   ) Quando o triângulo for **Isósceles**. (com dois lados iguais)

b) (   ) Quando o triângulo for **Eqüilátero**. (com três lados iguais)

c) (   ) Quando o triângulo for **Escaleno**. (com três lados diferentes)

Pergunta 2: O que acontece com os pontos quando o "Triângulo é Retângulo"? (Triângulo Retângulo "um" ângulo interno de 90º)

a) (   ) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam exteriores ao triângulo.

b) (   ) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam interiores ao triângulo.

c) (   ) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** pertencem ao triângulo.

Pergunta 3: O que acontece com os pontos quando o "Triângulo é Agudo"? (Triângulo agudo ângulos internos menores que 90º)

a) (   ) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam exteriores ao triângulo.

b) (   ) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam interiores ao triângulo.

c) (   ) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** pertencem ao triângulo.

Pergunta 4: O que acontece com os pontos quando o "Triângulo é Obtuso"? (Triângulo Obtuso "um" ângulo interno maior que 90º)

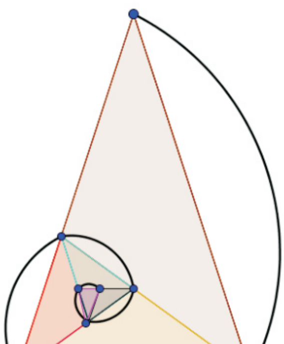
a) ( ) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam exteriores ao triângulo.

b) ( ) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** ficam interiores ao triângulo.

c) ( ) O **Ortocentro** e o **Circuncentro** pertencem ao triângulo.

ATIVIDADE 6

RAZÃO ÁUREA



Quando o comendador grego Proclus disse que Eudóxio (c. 370 a.C.) continuou as pesquisas sobre a secção começadas por Platão, estava se referindo ao que se tornou a segunda razão mais conhecida entre os matemáticos (ocupa um incontestável primeiro lugar).

A "secção áurea, como veio a ser conhecida, foi assim estudada pelos gregos antes do tempo de Euclides.

Por outro lado alguns estudos mostram que a razão áurea pode ter sido conhecida mesmo antes da época dos gregos. O historiador grego Heródoto relata que os sacerdotes egípcios lhe haviam dito que as dimensões da pirâmide de Giseh haviam sido escolhidas de maneira que a área de um quadrado cujo lado é a altura da grande pirâmide fosse igual à área da face triangular. Uma álgebra bastante simples pode ser usada para mostrar que a razão entre a altura de uma face triangular e a metade do comprimento da base é . Medições reais da pirâmide parecem dar um resultado muito próximo dessa razão.

As propriedades estéticas e artísticas dessa razão são mostradas no "retângulo áureo" um retângulo cujos lados estão na razão de 1 para ϕ ou de ϕ para 1. Esse retângulo, entre todos os possíveis, é considerado por alguns como o mais agradável aos olhos.

Muitos trabalhos famosos de arquitetura e arte, tais como o Pártenon grego e alguns dos quadros de Leonardo da Vinci, parecem ter sido emoldurados num retângulo áureo, ainda que isso, é óbvio, não prove que o criador necessariamente tivesse essa razão específica em mente desde o início.

Em 1509 Luca Pacioli escreveu um tratado De divina proportione (da divina proporção), ilustrado por Leonardo da Vinci, que trata dessa razão. Leonardo refer-se à sectio áurea (secção áurea), ao passo que Kepler refere-se a ela como sectio divina (secção divina).

Mesmo a natureza parece mostrar um interesse peculiar em apresentar modelos envolvendo essas relações. As sementes do girassol ou as florzinhas que formam a configuração dos flósculos da margarida do campo estão dispostas em dois conjuntos de espirais sobrepostos, irradiando-se nos sentidos horário e anti-horário. Relações semelhantes são encontradas em várias plantas cujas folhas obedecem a um modelo de desenvolvimento em espiral.

Texto retirado do livro: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Autor: Howard Eves. Tradução de Hygino H. Domingues.

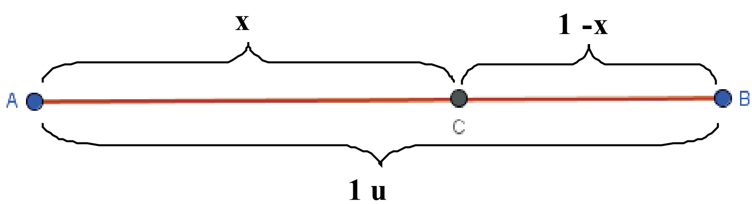
ALGUNS APORTES TEÓRICOS

Razão Áurea - O que é número de ouro e uma secção áurea?

Consideremos o seguinte segmento:

"C" é o ponto que divide $\overline{AB}$ na razão áurea se: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Agora chamemos a medida $\overline{AB}$ de **1 u** e $\overline{AC}$ de **x**. Assim temos:



Fazendo alguns cálculos temos:

$$\frac{1}{x} \quad \frac{x}{1 \quad x}$$

$$x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$$

Resolvendo esta equação do segundo grau temos:

$$5$$

$$x \quad \frac{1 \qquad \sqrt{5}}{2} \qquad x_1 \quad 0{,}618\ldots \; e \;\; x_2 \quad 1{,}618\ldots$$

- ✓ x_1 é a medida da maior parte.
- ✓ x_2 por conveniência desconsideramos esse valor, uma vez que não existe comprimento negativo.
- ✓ Assumindo **1 u** como a medida do segmento todo, dividindo pela parte maior:

$$\frac{1}{0,618\ldots} \quad 1,618\ldots$$

- ✓ O número de ouro é 1,618... que na realidade pertence ao conjunto dos números Irracionais, esse número também é representado pela letra grega (fi).

No Geogebra, a função "**Criar uma nova ferramenta**" é uma seqüência de construções interdependentes. Através dela, podemos criar novas ferramentas e adicioná-las ao menu do Geogebra.

Muitas vezes nos deparamos com construções que necessitam de ferramentas que não estão explícitas no menu, mas que podem ser feitas através de uma série de passos, utilizando outras ferramentas. Uma das vantagens de criar uma nova função é que ela pede nos ajudar a ganhar tempo e não precisarmos repetir todo um processo para executarmos uma construção.

A) PONTO ÁUREO

Objetivo específico: Criar uma nova ferramenta no geogebra que: dado um segmento de reta AB, o Geogebra encontra o ponto que divide o segmento na razão áurea.

Obs.: Desabilite os eixos **(Menu Exibir)** e rotule todos os pontos mencionados no texto.

Passo 1: Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie um segmento $\overline{AB}$. (Rotule os pontos "**A**" e "**B**".

Passo 2: Selecione a opção **PONTO MÉDIO ou CENTRO (Janela 2)** e crie o ponto médio **M** de $\overline{AB}$ clicando no segmento $\overline{AB}$

Passo 3: Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)** e trace uma perpendicular a $\overline{AB}$, passando por **B**.

Passo 4: Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)** e trace uma circunferência com centro em **B**, passando por **M**.

Passo 5: Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e marque a interseção **C (superior)** da circunferência com a perpendicular, clicando na circunferência e na reta perpendicular. Também selecione a opção **EXIBIR/ ESCONDER OBJETO (Janela 10)** e esconda a circunferência.

Passo 6: Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)** e trace uma circunferência com centro em **C**, passando por **B**.

Passo 7: Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento $\overline{AC}$.

Passo 8: Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e marque a interseção **N** da última circunferência com o segmento , clicando na circunferência e no segmento $\overline{AC}$.

Passo 9: Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)** e trace uma circunferência com centro em **A**, passando por **N**.

Passo 10: Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)**. Marque a interseção **R** da última circunferência com o segmento $\overline{AB}$.

Obs: "**R**" é o ponto que divide o segmento na razão áurea. Verifique isso fazendo os passos seguintes.

Passo 11: Selecione a opção **EXIBIR/ ESCONDER OBJETO (Janela 10)**. Esconda todos os objetos, deixando apenas o segmento $\overline{AB}$ e o ponto **R**.

Passo 12: Selecione a opção **DISTÂNCIA OU COMPRIMENTO (Janela 7)** e meça os comprimentos $\overline{AB}$, $\overline{AR}$ e $\overline{RB}$.

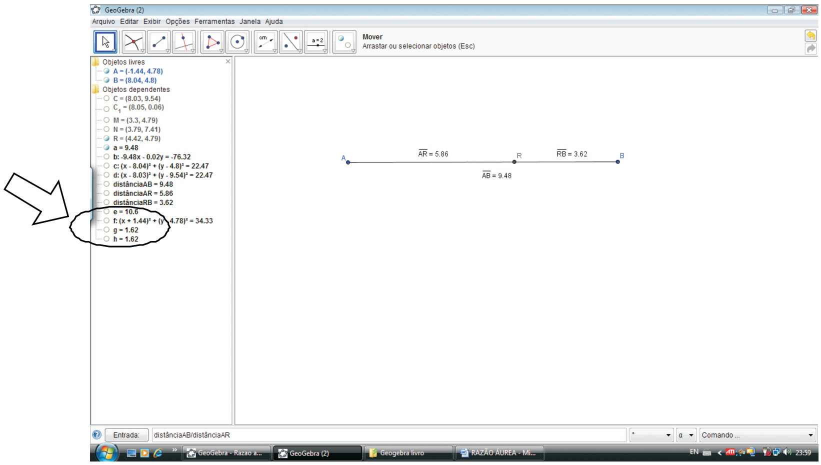
Faça isso clicando nos extremos de cada segmento.

Passo 13: Agora efetue os seguintes quocientes:

$$\overline{AB}/\overline{AR} \quad e \quad \overline{AR}/\overline{RB}$$

digitando na caixa de entrada: distânciaAB/distânciaAR e depois distânciaAR/distânciaRB. Depois tecle enter.

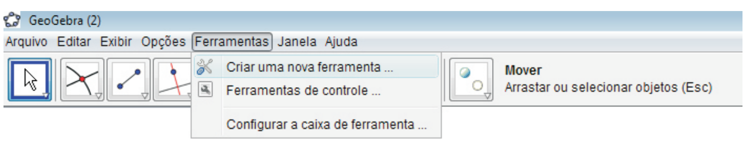
✓ Vai aparecer as constantes **g** e **h** com valor de 1,62 cada. Essa é a confirmação de que **R** é o ponto áureo.



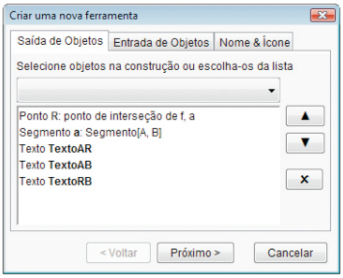
✓ Movimente os pontos **A** e **B**.

✓ Agora vamos criar uma ferramenta no Geogebra que, dado um segmento qualquer, encontre o ponto que divide o segmento na razão áurea.

Passo 14: Selecione no menu a opção **FERRAMENTAS** e em seguida a opção **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** como apresentado abaixo.



Logo em seguida, siga a seqüência:



Ponto Áureo

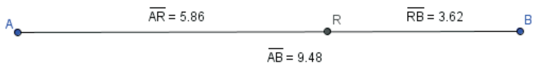
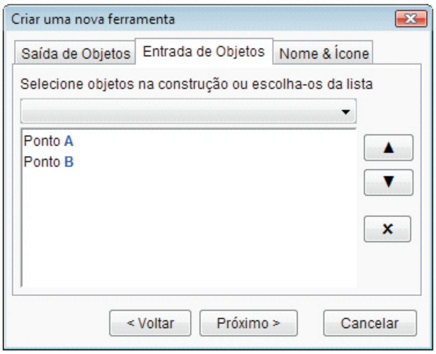
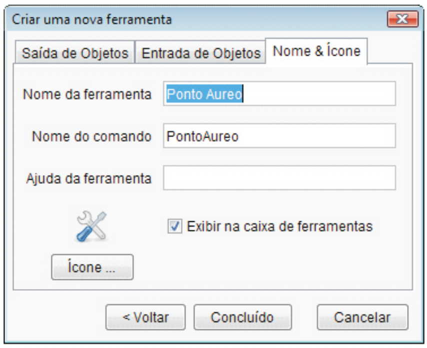


Figura 6.1.1

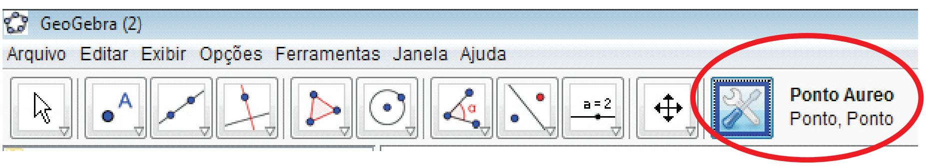
Clique em cima de todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo "Saída de Objetos"





No nome da ferramenta escreva: Ponto Áureo

✓Conclua e a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramenta. Veja:



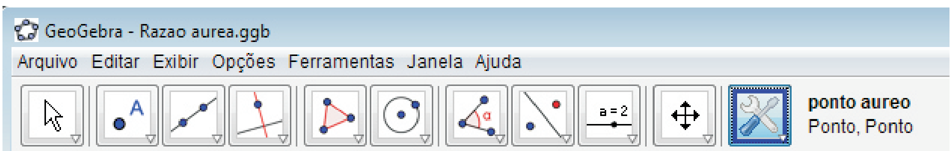
Para testar a ferramenta, selecione a ferramenta **Ponto Aureo** que está na **(Janela 11)** e crie um segmento na tela.

Abra um novo arquivo selecione **ARQUIVO** e depois **NOVO**.

b) RETÂNGULO ÁUREO

Objetivo específico: Criar uma ferramenta no Geogebra que, dado um segmento AB, o Geogebra construa o retângulo áureo. Esse segmento AB será o maior lado do retângulo áureo.

Passo 1: Selecione a ferramenta criada na **atividade 1** para encontrar o ponto áureo. Ela está na **Janela 11**. Agora crie um segmento . Rotule o ponto áureo de **R**.



Passo 2: Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)**. Trace duas perpendiculares a $\overline{AB}$: uma passando por **A** e outra por **B**.

Passo 3: Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)** e trace uma circunferência com centro em **A**, passando por **R**.

Passo 4: Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e marque a interseção **D** (superior) da circunferência com a perpendicular.

Passo 5: Selecione a opção **RETA PARALELA (Janela 4)** e trace uma paralela a $\overline{AB}$, passando por **D**.

Passo 6: Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e marque a interseção **C** da paralela com a outra perpendicular.

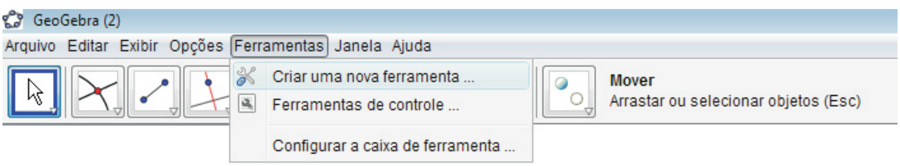
Passo 7: Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** e crie o polígono **ABCD** (clique sobre **A**, **B**, **C**, **D** e **A**).

Passo 8: Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 10)**. Esconda todos os objetos, deixando apenas o segmento e o polígono **ABCD**.

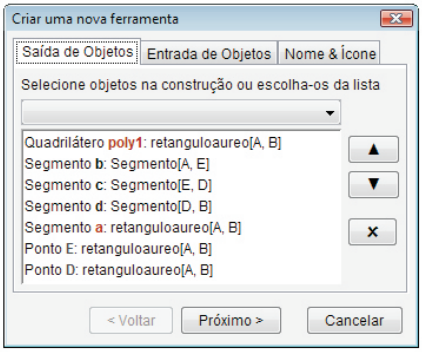
Obs.: O retângulo ABCD é áureo. Verifique isso, fazendo a razão entre a medida do maior lado e a do menor lado.

Vamos agora criar uma ferramenta no Geogebra, que dado um segmento, ela construa o retângulo áureo.

Passo 9: Selecione no menu a opção **FERRAMENTAS** e em seguida a opção **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** como apresentado abaixo.



Logo em seguida, siga a seqüência:



Retângulo Áureo

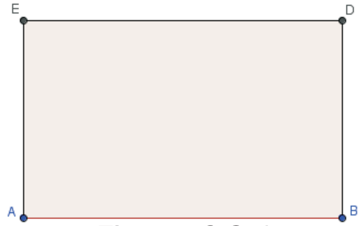
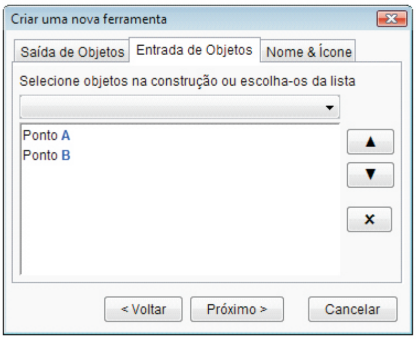
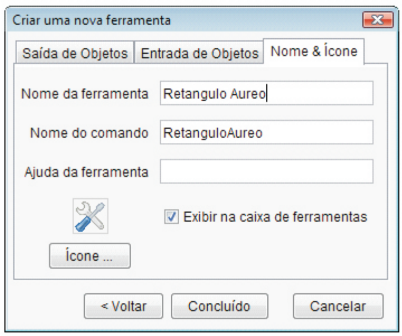


Figura 6.2.1

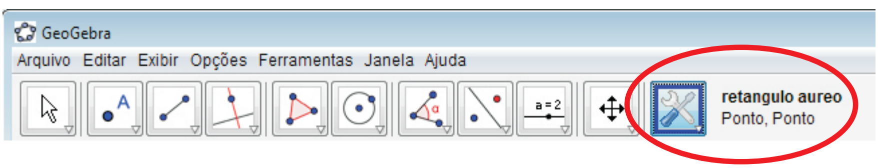
Clique em cima de todos os objetos da figura.
Eles aparecerão em forma de lista no campo "Saída de Objetos"





No nome da ferramenta escreva:
Retângulo Áureo

Conclua e a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramenta. Veja:



Para testar a ferramenta, selecione a ferramenta **Retângulo Áureo** que está na **(Janela 11)** e crie um segmento na tela.

Abra um novo arquivo - selecione **ARQUIVO** e depois **NOVO**.

c) TRIÂNGULO SUBLIME

Objetivo específico: Construir uma ferramenta no Geogebra que: dado um segmento de reta AB, o Geogebra construa o "Triângulo Sublime".

O pentagrama é o símbolo máximo da Escola Pitagórica. Para os pitagóricos, era uma figura perfeita, pois ela apresenta uma surpreendente profusão de segmentos na razão áurea. Vamos então construir um pentagrama. Com o objetivo de encontrar um Triângulo Sublime.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO REGULAR (Janela 5)**. Clique em dois pontos da janela de construção. Logo em seguida, vai abrir uma janela, digite "**5**" e em seguida selecione **Ok!** para criar um polígono de cinco lados.

✓ Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** e clique nos pontos "**A**", "**B**", "**D**" e uma quanta vez no **ponto A** para fechar o triângulo sublime.

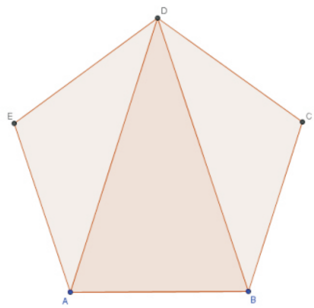


Figura 6.3.1

✓ Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO** (**Janela 10**). Esconda o **Polígono ABCDE**. Para fazer isso basta clicar em qualquer parte do polígono e nos pontos "E" e "C". Feito isso, teremos um triângulo sublime.

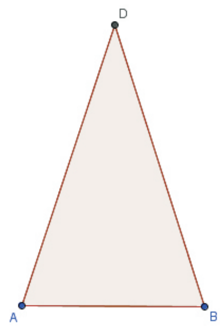
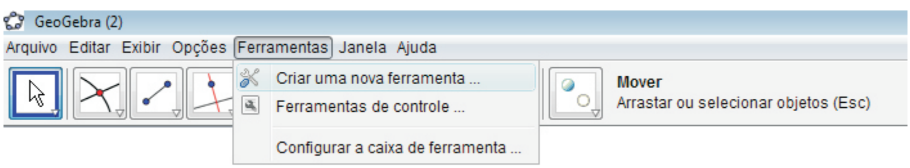


Figura 6.3.2

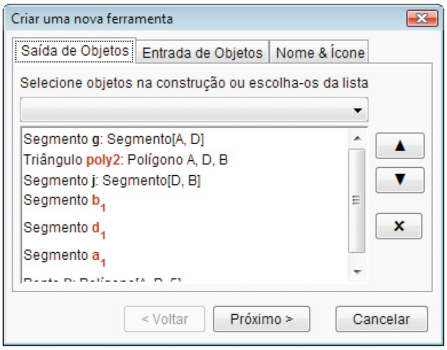
Obs: O triângulo **ABD** é um Triângulo Sublime. Você pode verificar isso fazendo a razão entre a medida do maior lado e a do menor lado $\overline{AD} / \overline{AB}$ $\quad$ $1{,}62$.

Agora vamos criar uma ferramenta no Geogebra que, dado um segmento qualquer, ela criará o Triângulo Sublime.

✓ Selecione no menu a opção **FERRAMENTAS** e em seguida a opção **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** como apresentado abaixo.



Logo em seguida, siga a seqüência:



Triângulo Sublime

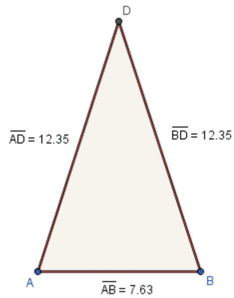
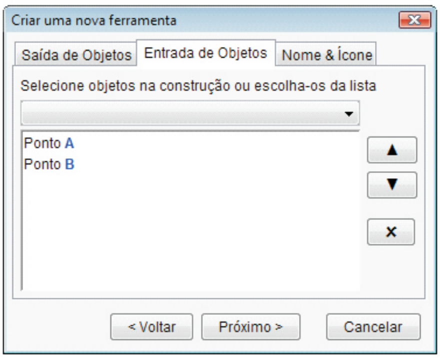
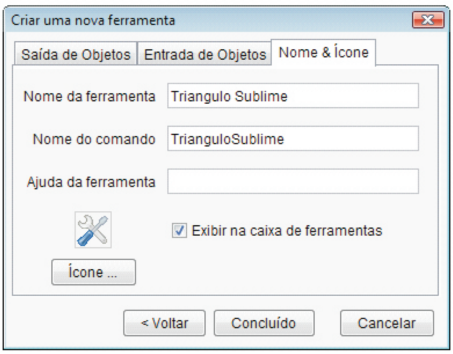


Figura 6.3.3

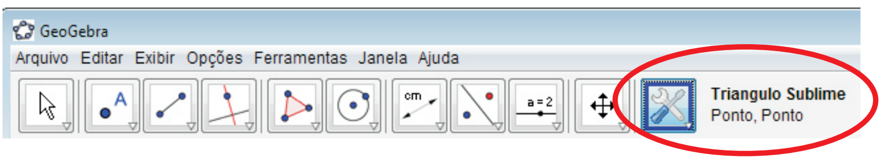
Clique em cima de todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo "Saída de Objetos"





No nome da ferramenta escreva: Triângulo Sublime

Conclua e a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá a barra de ferramenta. Veja:



Para testar a ferramenta, selecione a ferramenta **Triângulo Sublime** que está na **(Janela 11)** e crie um segmento na tela.

Aparecerá um Triângulo Sublime.

Abra um novo arquivo - selecione **ARQUIVO** e depois **NOVO**.

d) TRIÂNGULO ESPIRAL

Objetivo específico: Construir uma ferramenta no Geogebra que: dado um segmento de reta **AB**, o Geogebra construa o "Triângulo Espiral".

Para construirmos o "triângulo espiral" temos que vencer basicamente três etapas:

① Criar uma ferramenta no Geogebra que dado um segmento de reta AB o Geogebra nos dê um "**quadrado dado a sua diagonal**".

② Criar outra ferramenta no Geogebra que dado um segmento de reta **AB** o Geogebra nos dê um "**triângulo sublime**".

③ Construção do "**triângulo espiral**".

Para iniciar a construção, desabilite os **EIXOS** no menu **EXIBIR** e desabilite também a **JANELA DE ÁLGEBRA** no menu **EXIBIR**.

1º Passo: Criar um quadrado dado a sua diagonal.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie um segmento de reta **AB** na janela de construção.

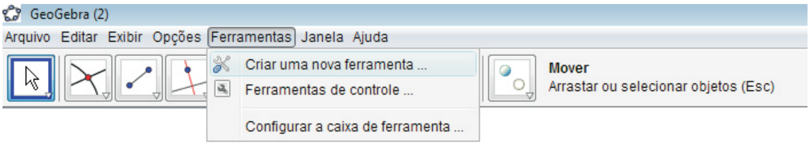
- ✓Logo em seguida, rotule os pontos clicando com o botão direito em cima dos **pontos A** e **B**, e selecione a opção **EXIBIR RÓTULO**.
- ✓Selecione a opção **ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA (janela 8)** e clique nos **pontos A** e **B**.

Obs.: Vai aparecer uma janela. Confirme **Ok!** Para o **ângulo de 45º**.

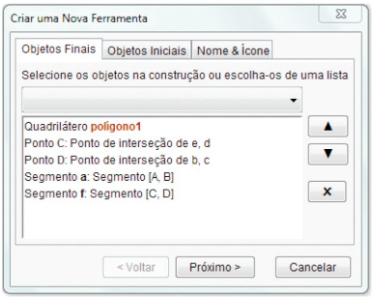
- ✓Selecione a opção **RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique no ponto **B** e no ponto **A**' . (Rotule a reta criada como "**b**")
- ✓Selecione a opção **RETA PERPENDICULAR (Janela 4)** e clique no **ponto A** e na **reta b**. Clique também no **ponto B** e na **reta b**. (Rotule as retas criadas como "**c**" e "**d**")
- ✓Selecione a **OPÇÃO RETA PARALELA (Janela 4)** e clique na **reta b** e no **ponto A**. (Rotule a reta criada como "e")
- ✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS PONTOS (Janela 2)** e clique na **reta b** e na **reta c**. Depois na **reta d** e na **reta e**. Com o botão direito do mouse clique em cima dos pontos criados e rotule os pontos criados em "**C**" e "**D**".
- ✓Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** e clique nos **pontos ACBD** e de volta no **ponto A** para completar o polígono.
- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie a outra diagonal do quadrado.
- ✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e esconda as quatro retas "**b**", "**c**", "**d**", "**e**" e o **ponto À**'. Clicando nos respectivos objetos.

2º Passo: Criar uma ferramenta no Geogebra que, dado um segmento qualquer, ela criará um quadrado dado a sua diagonal.

✓ Selecione no menu a opção **FERRAMENTAS** e em seguida a opção **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** como apresentado abaixo.



Logo em seguida, siga a seqüência:



Quadrado dado a sua diagonal

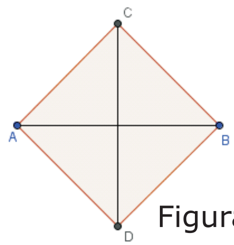
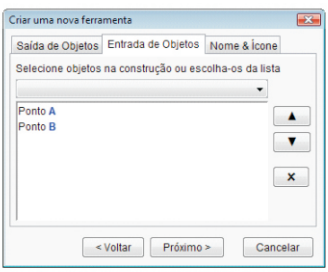
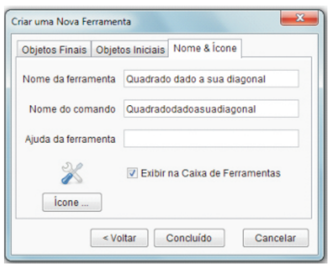


Figura 6.4.1

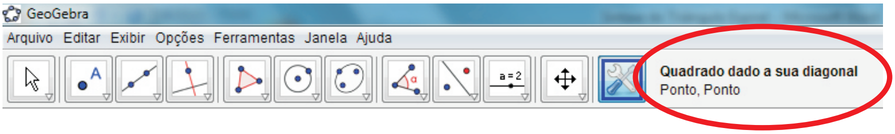
Clique em cima de todos os objetos da figura.
Eles aparecerão em forma de lista no campo "Saída de Objetos"





No nome da ferramenta escreva: Quadrado dado a sua diagonal

Conclua. E a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas. Veja:



Para testar a ferramenta, selecione a ferramenta **Quadrado dado a sua diagonal** que está na **(Janela 11)** e crie um segmento **AB** na tela.

Aparecerá um quadrado dado a sua diagonal.

Passo 3: Criar o "Triângulo Sublime".

- ✓Selecione a opção **POLÍGONO REGULAR (Janela 5)**. Clique em dois pontos da janela de construção. Logo em seguida, vai abrir uma janela, digite "**5**" e em seguida selecione **Ok!** para criar um polígono de cinco lados.
- ✓Selecione a opção **POLÍGONO (Janela 5)** e clique nos pontos "**A**", "**B**", "**D**" e uma quanta vez no **ponto A** para fechar o triângulo sublime.

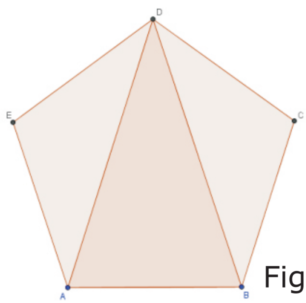


Figura 6.4.2

- ✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 10)**. Esconda o **Polígono ABCDE**. Para fazer isso basta clicar em qualquer parte do polígono e nos pontos “**E**” e “**C**”. Feito isso, teremos um triângulo sublime.

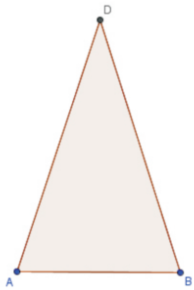


Figura 6.4.3

Obs.: O triângulo **ABD** é um Triângulo Sublime. Você pode verificar isso fazendo a razão entre a medida do maior lado e a do menor lado $\overline{AD} / \overline{AB} \quad 1{,}62$.

Passo 4: Construção de triângulos sublimes.

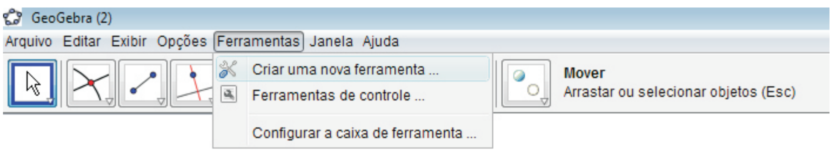
- ✓ Selecione a opção **BISSETRIZ (Janela 4)** e crie a bissetriz no ponto B, clicando nos lados adjacentes do **ponto B**.
- ✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e clique na reta bissetriz e no segmento de reta **AD** (Rotule o ponto de “**F**”).
- ✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique no **ponto B** e no **ponto F**, criado anteriormente para determinar o segmento de **reta BF**.
- ✓ Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e esconda as retas bissetrizes, clicando nas duas retas.
- ✓ Selecione a opção **BISSETRIZ (Janela 4)** e crie a bissetriz no **ponto A**, clicando nos lados adjacentes do **ponto A**.
- ✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e clique na reta bissetriz e no segmento de reta **BF**. (Rotule o ponto de “**G**”)

- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique no **ponto A** e no **ponto G**, criado anteriormente para determinar o segmento de **reta AG**.
- ✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e esconda as retas bissetrizes, clicando nas duas retas.
- ✓Selecione a opção **BISSETRIZ (Janela 4)** e crie a bissetriz no **ponto F**, clicando nos lados adjacentes do **ponto F**.
- ✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e clique na reta bissetriz e no segmento de reta **AG** (Rotule o ponto de "**H**").
- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique no **ponto F** e no **ponto H**, criado anteriormente para determinar o segmento de **reta FH**.
- ✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e esconda as retas bissetrizes, clicando nas duas retas.
- ✓Selecione a opção **BISSETRIZ (Janela 4)** e crie a bissetriz no **ponto G**, clicando nos lados adjacentes do **ponto G**.
- ✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e clique na reta bissetriz e no segmento de reta **FH** (Rotule o ponto de "**I**").
- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique no **ponto G** e no **ponto I**, criado anteriormente para determinar o segmento de **reta GI**.
- ✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e esconda as retas bissetrizes, clicando nas duas retas.
- ✓Selecione a opção **BISSETRIZ (Janela 4)** e crie a bissetriz no **ponto H**, clicando nos lados adjacentes do **ponto H**.
- ✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)** e clique na reta bissetriz e no segmento de reta **GI** (Rotule o ponto de "**J**").

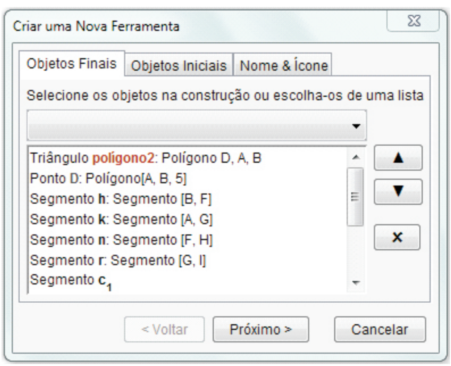
- ✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e clique no **ponto H** e no **ponto J**, criado anteriormente para determinar o segmento de **reta HJ**.
- ✓ Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)** e esconda as retas bissetrizes, clicando nas duas retas.

Passo 5: Vamos criar uma ferramenta no Geogebra que, dado um segmento de reta AB, criará a figura construída anteriormente.

- ✓ Selecione no menu a opção **FERRAMENTAS** e em seguida a opção **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** como apresentado abaixo.



Logo em seguida, siga a seqüência:



Triângulo Sublime

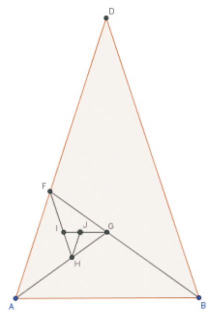
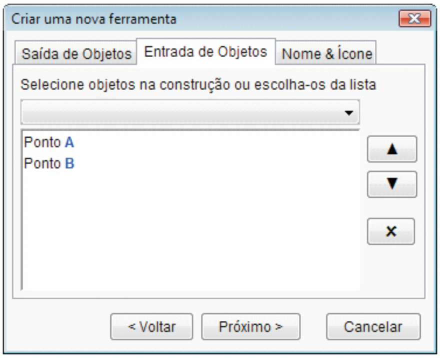
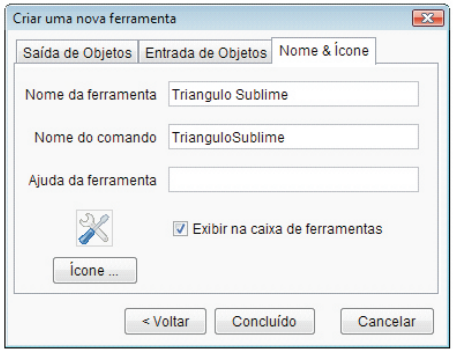


Figura 6.4.4

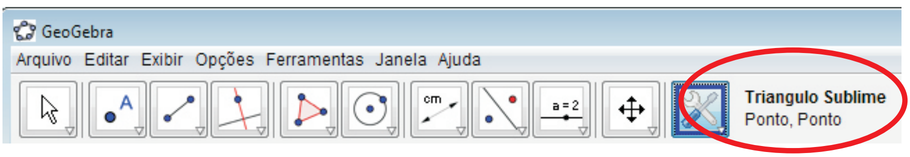
Clique em cima de todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo "Saída de Objetos"





No nome da ferramenta escreva:
Triângulo Sublime

Conclua. E a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramenta. Veja:



Para testar a ferramenta, selecione a ferramenta **Triângulo Sublime** que está na **(Janela 11)** e clique em dois pontos na janela de construção e parecerá um Triângulo Sublime.

Obs.: A criação dessa ferramenta se deu pelo fato de que temos escondido muitos objetos e isso atrapalharia a construção da “Espiral Triangular” que teremos a oportunidade de iniciar agora.

Apague tudo da Janela de Construção.

Passo 6: Construção da Espiral Triangular.

✓ Selecione a opção **TRIANGULO SUBLIME (Janela 12)**, clique em dois pontos na janela de construção para criar o triangulo sublime e "**ROTULE**" todos os pontos como na figura abaixo.

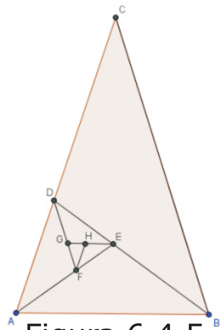


Figura 6.4.5

✓ Selecione a opção **QUADRADO DADO SUA DIAGONAL (Janela 12)** e clique nos pontos "**B**" e "**C**", para criar um quadrado dado a sua diagonal. (Rotule os dois pontos da diagonal como "**I**" e "**J**").

✓ Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**, clique no **ponto J** e no **ponto C**, para criar uma circunferência.

✓ Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)**, clique na circunferência e na diagonal do quadrado. (Rotule o ponto criado como "**K**").

✓ Selecione a opção **ARCO CIRCUNCIRCULAR DADOS TRÊS PONTOS (Janela 6)**, clique nos pontos "**C**", "**K**" e "**B**" nessa ordem para criar o **arco BC**.

✓ Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)**, esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos "**J**", "**I**" e "**K**".

- ✓Selecione a opção **QUADRADO DADO SUA DIAGONAL (Janela 12)** e clique nos pontos "**A**" e "**B**", para criar um quadrado dado a sua diagonal. (Rotule os dois pontos da diagonal como "**L**" e "**M**").
- ✓Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**, clique no **ponto L** e no **ponto B**, para criar uma circunferência.
- ✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)**, clique na circunferência e na diagonal do quadrado. (Rotule o ponto criado como "**N**").
- ✓Selecione a opção **ARCO CIRCUNCIRCULAR DADOS TRÊS PONTOS (Janela 6)**, clique nos pontos "**A**", "**N**" e "**B**" nessa ordem para criar o **arco AB**.
- ✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)**, esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos "**L**", "**M**" e "**N**".
- ✓Selecione a opção **QUADRADO DADO SUA DIAGONAL (Janela 12)** e clique nos pontos "**A**" e "**D**", para criar um quadrado dado a sua diagonal. (Rotule os dois pontos da diagonal como "**O**" e "**P**").
- ✓Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**, clique no **ponto P** e no **ponto A**, para criar uma circunferência.
- ✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)**, clique na circunferência e na diagonal do quadrado. (Rotule o ponto criado como "**Q**").
- ✓Selecione a opção **ARCO CIRCUNCIRCULAR DADOS TRÊS PONTOS (Janela 6)**, clique nos pontos "**A**", "**Q**" e "**D**" nessa ordem para criar o **arco AD**.

✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)**, esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos "**O**", "**Q**" e "**P**".

✓Selecione a opção **QUADRADO DADO SUA DIAGONAL (Janela 12)** e clique nos pontos "**D**" e "**E**", para criar um quadrado dado a sua diagonal. (Rotule os dois pontos da diagonal como "**R**" e "**S**").

✓Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**, clique no **ponto S** e no **ponto D**, para criar uma circunferência.

✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)**, clique na circunferência e na diagonal do quadrado. (Rotule o ponto criado como "**T**").

✓Selecione a opção **ARCO CIRCUNCIRCULAR DADOS TRÊS PONTOS (Janela 6)**, clique nos pontos "**D**", "**T**" e "**E**" nessa ordem para criar o **arco DE**.

✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)**, esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos "**S**", "**T**" e "**R**".

✓Selecione a opção **QUADRADO DADO SUA DIAGONAL (Janela 12)** e clique nos pontos **"E"** e **"F"**, para criar um quadrado dado a sua diagonal. (Rotule os dois pontos da diagonal como **"U"** e **"V"**).

✓Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**, clique no **ponto V** e no **ponto E**, para criar uma circunferência.

✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)**, clique na circunferência e na diagonal do quadrado. (Rotule o ponto criado como "**W**").

- ✓Selecione a opção **ARCO CIRCUNCIRCULAR DADOS TRÊS PONTOS (Janela 6)**, clique nos pontos "**E**", "**W**" e "**F**" nessa ordem para criar o **arco EF**.
- ✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)**, esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos "**V**", "**W**" e "**U**".
- ✓Selecione a opção **QUADRADO DADO SUA DIAGONAL (Janela 12)** e clique nos pontos "**F**" e "**G**", para criar um quadrado dado a sua diagonal. (Rotule os dois pontos da diagonal como "**Z**" e "**A1**").
- ✓Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**, clique no **ponto Z** e no **ponto G**, para criar uma circunferência.
- ✓Selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS (Janela 2)**, clique na circunferência e na diagonal do quadrado. (Rotule o ponto criado como "**B1**").
- ✓Selecione a opção **ARCO CIRCUNCIRCULAR DADOS TRÊS PONTOS (Janela 6)**, clique nos pontos "**F**", "**B1**" e "**G**" nessa ordem para criar o **arco FG**.
- ✓Selecione a opção **EXIBIR/ESCONDER OBJETO (Janela 11)**, esconda o quadrado, a diagonal do quadrado, a circunferência e os pontos "**A1**", "**B1**" e "**Z**".

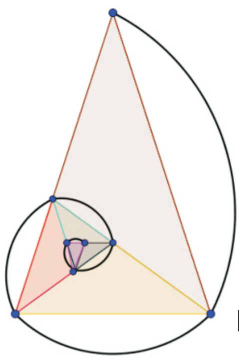


Figura 6.4.6

e) ESPIRAL ÁUREA OU LOGARÍTMICA

Objetivo específico: Construir uma ferramenta no Geogebra que dado um segmento de reta **AB** gera a espiral áurea ou logarítmica.

Para construir a espiral, você precisará primeiro construir a figura abaixo, e rotular os pontos como apresentado seguir.

Para rotular os pontos, clique com o botão direito do mouse e selecione a opção **PROPRIEDADES**.

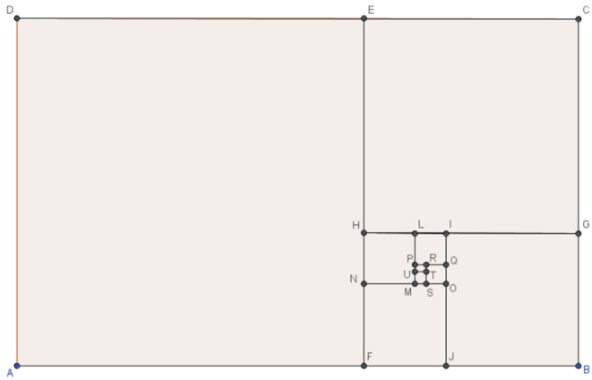
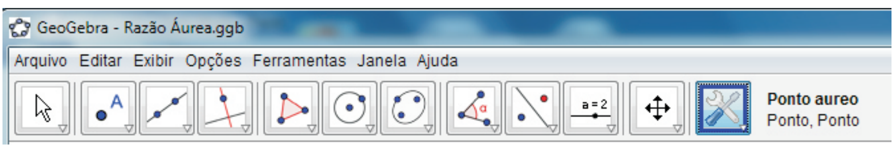


Figura 6.5.1

- ✓ Selecione a ferramenta criada na **atividade b - RETÂNGULO ÁUREO (Janela 12)** para criar um retângulo áureo. Para isso clique em dois pontos da Janela de construção.
- ✓ Selecione a ferramenta criada na **atividade a PONTO ÁUREO (Janela 12)** para criar o ponto áureo no segmento **AB** e **CD**. Para isso clique no **ponto A**, no **ponto B** e rotule o ponto de "**F**". Depois no **ponto D** e no **ponto C** e rotule o ponto de "**E**".



- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** crie o segmento EF, clicando no ponto E e no ponto F.
- ✓Selecione a opção **PONTO ÁUREO (Janela 12)**, clique nos pontos "**E**" e "**F**" depois "**C**" e "**B**", para criar o **ponto H** e o **ponto G**.
- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento **HG**.
- ✓Selecione a opção **PONTO ÁUREO (Janela 12)**, clique nos pontos "**G**" e "**H**" depois "**B**" e "**F**", para criar o **ponto I** e o **ponto J**.
- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento **IJ**.
- ✓Selecione a opção **PONTO ÁUREO (Janela 12)**, clique nos pontos "**F**" e "**H**" depois "**J**" e "**I**", para criar o **ponto N** e o **ponto O**.
- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento **NO**.
- ✓Selecione a opção **PONTO ÁUREO (Janela 12)**, clique nos pontos "**H**" e "**I**" depois "**N**" e "**O**", para criar o **ponto L** e o ponto **M**.
- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento **LM**.
- ✓Selecione a opção **PONTO ÁUREO (Janela 12)**, clique nos pontos "**L**" e "**M**" depois "**I**" e "**O**", para criar o **ponto P** e o **ponto Q**.
- ✓Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento **PQ**.
- ✓Selecione a opção **PONTO ÁUREO (Janela 12)**, clique nos pontos "**Q**" e "**P**" depois "**O**" e "**M**", para criar o **ponto R** e o **ponto S**.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento **RS**.

✓ Selecione a opção **PONTO ÁUREO (Janela 12)**, clique nos pontos "**S**" e "**R**" depois "**M**" e "**P**", para criar o **ponto T** e o **ponto U**.

✓ Selecione a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)** e crie o segmento **TU**.

Obs.: Olhe a figura 6.5.1 e verifique se a sua construção é igual.

a) Sim (prossiga)

b) Não (Conserte os erros)

✓ Selecione a opção **CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS (Janela 6)**. Crie as seguintes circunferências:

- Circunferência "1" com centro em **F**, passando por **A**.
- Circunferência "2" com centro em **H**, passando por **G**.
- Circunferência "3" com centro em **I**, passando por **G**.
- Circunferência "4" com centro em **O**, passando por **N**.
- Circunferência "5" com centro em **M**, passando por **N**.
- Circunferência "6" com centro em **P**, passando por **Q**.
- Circunferência "7" com centro em **R**, passando por **S**.
- Circunferência "8" com centro em **T**, passando por **U**.

✓ Criar as bissetrizes dos seguintes ângulos e marcar as interseções com as circunferências:

- Selecione a opção **BISSETRIZ (Janela 4)**, clique nos pontos **AFE**, selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** (**Janela 2**) e marque a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 1.

- Selecione a opção **BISSETRIZ** (**Janela 4**), clique nos pontos **EHG**, selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** (**Janela 2**) e marque a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 2.
- Selecione a opção **BISSETRIZ** (**Janela 4**), clique nos pontos **GIJ**, selecione a opção I**NTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** (**Janela 2**) e marque a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 3.
- Selecione a opção **BISSETRIZ** (**Janela 4**), clique nos pontos **NOJ**, selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** (**Janela 2**) e marque a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 4.
- Selecione a opção **BISSETRIZ** (**Janela 4**), clique nos pontos **LMN**, selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** (**Janela 2**) e marque a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 5.
- Selecione a opção **BISSETRIZ** (**Janela 4**), clique nos pontos **LPQ**, selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** (**Janela 2**) e marque a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 6.
- Selecione a opção **BISSETRIZ** (**Janela 4**), clique nos pontos **QRS**, selecione a opção I**NTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** (**Janela 2**) e marque a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 7.
- Selecione a opção **BISSETRIZ** (**Janela 4**), clique nos pontos **SMU**, selecione a opção **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** (**Janela 2**) e marque a interseção (superior) da bissetriz com a circunferência 8.

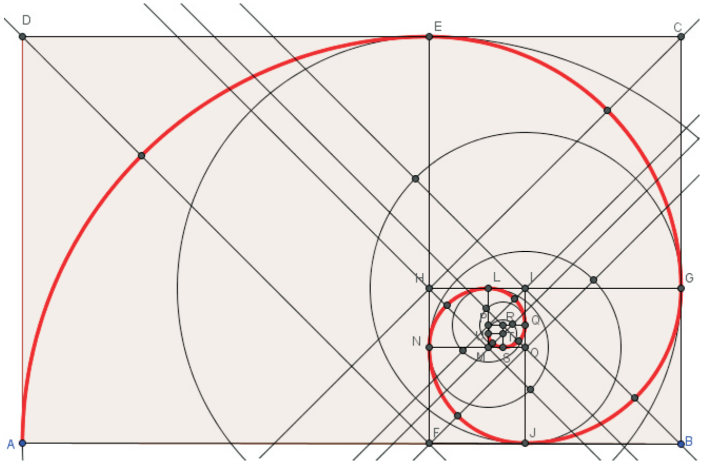


Figura 6.5.2

✓Selecione a opção **ESCONDER/MOSTRAR** (**Janela 10**). Clique nas bissetrizes e nas circunferências para escondê-las.

✓Selecione a opção **ARCO CIRCUMCIRCULAR DADOS TRÊS PONTOS** (**Janela 6**).

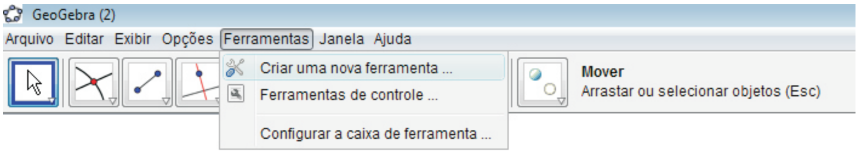
Crie os arcos: $\overset{\frown}{\mathbf{AE}}$, $\overset{\frown}{\mathbf{EG}}$, $\overset{\frown}{\mathbf{GJ}}$, $\overset{\frown}{\mathbf{JN}}$, $\overset{\frown}{\mathbf{NL}}$, $\overset{\frown}{\mathbf{LQ}}$, $\overset{\frown}{\mathbf{QS}}$ e $\overset{\frown}{\mathbf{SU}}$.

Obs.: Para criar o arco $\overset{\frown}{\mathbf{AE}}$, você deverá clicar em **A**, **P** e **E**. Faça o mesmo para os outros arcos.

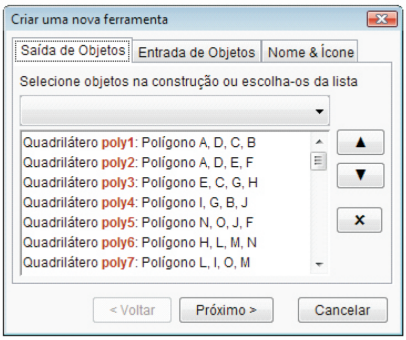
✓Clique com o botão direito do mouse em cima do Arco Circumcircular [A, P, E] e selecione a opção **PROPRIEDADES** depois a opção **ESTILO** e aumente a espessura do arco. Faça isso com todos os arcos.

Agora vamos criar uma ferramenta no Geogebra que, dado um segmento qualquer, ela criará a Espiral Logarítmica.

✓ Selecione no menu a opção **FERRAMENTAS** e em seguida a opção **CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA** como apresentado abaixo.



Logo em seguida, siga a seqüência:



Espiral Logarítmica

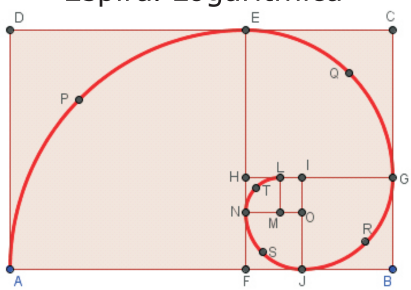
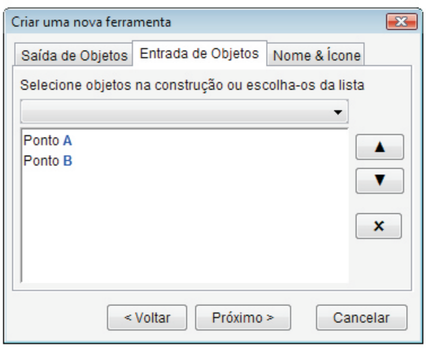
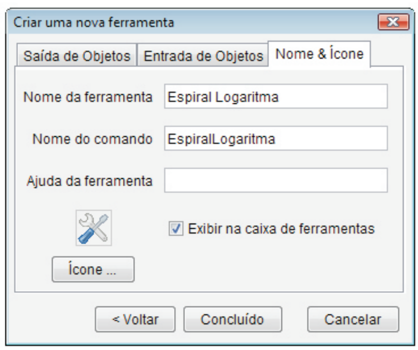


Figura 6.5.3

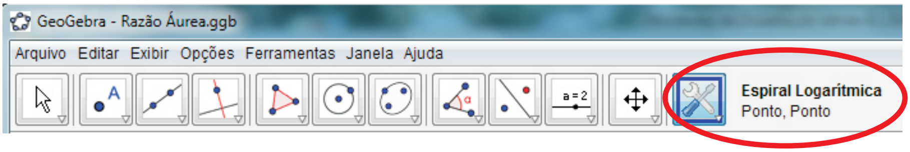
Clique em cima de todos os objetos da figura. Eles aparecerão em forma de lista no campo "Saída de Objetos"





No nome da ferramenta escreva: Espiral Logarítmica

Conclua e a nova ferramenta será criada com sucesso. Essa nova ferramenta aparecerá na barra de ferramenta. Veja:



Para testar a ferramenta, selecione a ferramenta **Espiral Logarítmica** que está na **(Janela 11**) e crie um segmento na tela.

Aparecerá a Espiral Logarítmica.

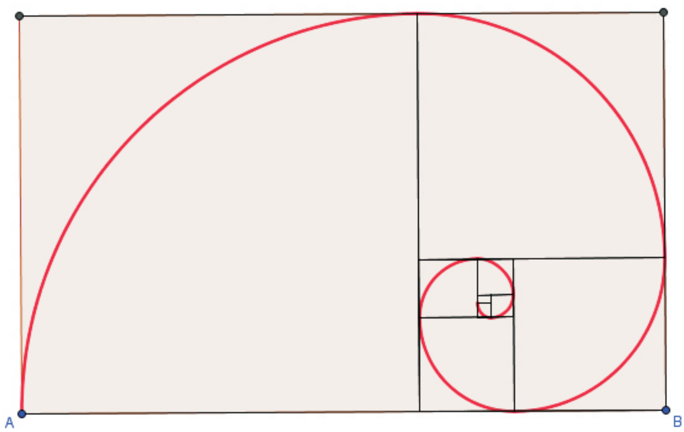


Figura 6.5.4

REFERÊNCIAS

BRAVIANO, Gilson; RODRIGUES, Maria Helena W. L. **Geometria dinâmica**: uma nova geometria? Revista do professor de matemática, n. 49.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto e aplicações**. v. único. São Paulo: Ática, 2000.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**. v. 9: Geometria Plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

EVES, Howard. **História da geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 3).

GEOGEBRA. **Manual do Geogebra**. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/>. Acesso em: 23 fev. 2010.

LIMA, L. Elon. **A matemática do ensino médio**. v. 1-3 (SBM), 2001.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Ano III, n. 4, 1º semestre, Blumenau: SBEM, 1995.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo matemática com o CABRI-GÉOMÉTRE**. v. I e II, 2002.

OLIVEIRA, Celina Couto de; COSTA, José Wilson da; MOREIRA, Mercia. **Ambientes informatizados de aprendizagem**: produção e avaliação de software educativo. Campinas, SP: Papirus, 2001. (Série Prática Pedagógica).

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil**: causas e conseqüências. Zetetiké. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEM. Ano 1, n. p. 7-17, mar./1993.

PERRENOUD, P. **Novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

SHULTE, Alberto P; LINDQUIST, Mary Montomery. **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

Humberto Alves Bento é licenciado em matemática pela Universidade Católica de Brasília, pós-graduado em Educação Matemática pela Faculdade Jesus Maria José e Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Ministrou vários cursos de Geogebra para professores do ensino fundamental e médio. Tem dez anos de experiência como professor de matemática do Ensino Fundamental e Médio em diversas instituições públicas e privadas do Distrito Federal.

"Possibilidades de construção de figuras Geométricas Planas com o sotware: Geogebra" é um livro de matemática que utiliza um software livre, o Geogebra, como instrumento auxiliador do processo de ensino e aprendizagem. Este livro é resultado de uma pesquisa feita em um mestrado em ensino de matemática, sob a orientação do Profº Dr. João Bosco Laudares, onde tivemos a oportunidade de criar e aplicar seqüências didáticas para ajudar no ensino de geometria plana. O propósito deste livro é apresentar uma alternativa pedagógica de inserção do computador na sala de aula e aliar o uso da informática ao ensino da matemática.
Neste livro exploramos vários assuntos: Áreas de figuras planas, Teorema de Pitágoras, Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, Pontos Notáveis de um Triângulo, Razão Áurea, entre outros.

GEOGEBRA