PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Mestrado Profissional

Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática - Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática.

Murilo Barros Alves

BELO HORIZONTE

2008

Murilo Barros Alves

Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática - Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática.

Dissertação apresentada ao Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciência e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares

BELO HORIZONTE
2008

Alves, Murilo Barros

Equações diferenciais ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática – formulação, resolução de problemas e introdução à modelagem matemática / Murilo Barros Alves.- Belo Horizonte, 2008.

83 f.il.:

Dissertação (Apresentada ao Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2008.

1. Equações diferenciais. 2. Modelagem. 3. Resolução. 4. Formulação de problemas. 5. Licenciatura em Matemática. I. Alves, Murilo Barros. II. Título.

CDU 517.9

PUC Minas

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

"Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática : Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática,"

Murilo Barros Alves

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Bosco Laudares – Orientador (PUC Minas)
Doutorado em Educação: História, Política, Sociedade (PUC-SP)

Frederico da Silva Reis

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – (UFOP Minas)
Doutorado em Educação (UNICAMP)

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda - (PUC Minas)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial (PUC Minas)

Belo Horizonte, 25 de abril de 2008.

DEDICATÓRIA

Ao Professor Ari Ribeiro e Silva, que com toda a sua competência e sabedoria me iniciou no universo da Matemática.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois sem a sua misericórdia nem aqui estaria.

Aos meus pais Sebastião Alves Quirino e Aldinê Barros Alves que me conduziram no caminho da virtude e sempre me incentivaram a continuar a busca pelo do conhecimento.

Ao Grande amor da minha vida minha esposa Patrícia Vilela Alves, que com seu Amor tem preenchido a minha vida me dando forças para transpor todos os obstáculos.

Aos meus filhos Gustavo e Guilherme Vilela Alves, pela felicidade de compartilhar os meus dias ao seu lado.

Aos meus sogros Franklin Luiz Vilela e Catarina Maria Paulo Vilela, que foram verdadeiros pais nos dias mais difíceis da minha vida.

Aos meus amigos Osmair Ferreira de Araújo e Maristéia Neves Noleto que me apoiaram tanto com palavras amigas como financeiramente.

Ao meu grande amigo o professor José Renato, que nesse tempo de estudos foi verdadeiramente um irmão para mim.

Ao Prof. Dr. João Bosco Laudares, pela orientação correta e segura.

Aos professores Dimas Felipe de Miranda e Frederico da Silva Reis pela sua participação na banca de defesa.

À Prof[a]. Dra. Agnela da Silva Giusta, por sempre estar disponível para incentivar os mestrandos do curso.

Aos professores do Mestrado pelas suas orientações e ensinamentos.

.

RESUMO

O objetivo da pesquisa apresentada nesta dissertação foi de construir uma proposta metodológica para o estudo das Equações Diferenciais, proporcionando um maior entendimento dos conceitos de derivada e taxa de variação. A pesquisa abordou atividades em curso de licenciatura em matemática. Essa abordagem proporcionou uma reflexão sobre a prática pedagógica de sala de aula, no contexto da formação do professor de matemática. As atividades constaram de estudo de fenômenos das Ciências a serem modelados nas etapas: elaboração do modelo matemático, formulação e resolução de uma situação problema, enfatizando-se a interpretação gráfica da função matemática representativa do fenômeno. A última atividade foi realizada com auxílio do software MAPLE analisando-se a evolução de uma população. As atividades foram desenvolvidas por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Maranhão na cidade de Imperatriz. Os resultados apontam para o fato de que a metodologia proposta contribuiu para uma aprendizagem significativa da Equações Diferenciais.

PALAVRAS-CHAVE: Equações Diferenciais, Modelagem, Resolução e Formulação de Problema, Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

The objective of this presented research was to build a methodological propose for the study of Differential Equations, providing a greater understanding of the derivate concepts and variation rate. The research approached activities in the Mathematical graduation course. This approach proposed a reflection about the pedagogic practice inside the classroom at the context of mathematical teacher formation. The activities consisted of the Sciences phenomenon to be elaborated at the followed stages: mathematical model elaboration, formulation and resolution of a problem situation, emphasizing graphical interpretation of the mathematical function representative of the phenomenon. The last activity was realized with support of the software MAPLE analyzing an evolution of a population. The activities were developed by the students of the Mathematical graduation course in the Maranhão State University at the Imperatriz city, Brazil. The research has had good results according with the methodological propose.

KEYWORDS: Differential Equations, Mathematical graduation, Modelling introduction.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01 – Definição de Derivada com decréscimos dy/dx de Leibniz.........14

FIGURA 02 – Resolução Geométrica de uma Equação Diferencial..................20

FIGURA 03 – Campo de Direções...26

FIGURA 04 – Condições Iniciais e de Contorno...26

FIGURA 05 – Processo de Modelagem Matemática (Bassanezi 2002)...............37

FIGURA 06 – Obtenção do Campo de Direções utilizando a ferramenta Maple..70

FIGURA 07 – Obtenção de uma solução particular utilizando a ferramenta Maple..71

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 01 - Avaliação dos estudantes sobre a atividade..................................61

Gráfico 02 - Principal dificuldade na atividade..61

Gráfico 03- Atrativo da atividade..62

Gráfico 04 -Avaliação sobre a segunda atividade...64

Gráfico 05- Dificuldades apresentadas na atividade..65

Gráfico 06- Importância das atividades na formulação do

conceito de taxa de Variação..66

Gráfico 07 – Avaliação dos estudantes sobre a atividade.................................73

Gráfico 08 - Principal dificuldade na atividade..73

Gráfico 09- Atrativo da atividade..74

Gráfico 10 – Avaliação sobre a segunda atividade...75

Gráfico 11 - Dificuldades apresentadas na atividade...75

Gráfico 12 - Importância das atividades na formulação

do conceito de taxa de variação...76

LISTA DE QUADROS

QUADROS I - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM................................*18*

QUADRO II - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 2ª ORDEM...............................19

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO ………………………………………………………………….. **11**

2 O ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.. **13**
2.1 Considerações Históricas... **13**
2.2 As Equações Diferenciais – Definição e Resolução............................... **17**
2.3 Tipos de solução de uma Equação Diferencial Ordinária...................... **20**
2.4 Resolução de Equações Diferenciais e aplicações com "campo de direções"... **23**

3 INTRODUÇÃO À MODELAGEM, FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS...................................... **28**

4 A ABORDAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA E EM LIVROS-TEXTO.. **40**

5 PRODUÇÃO ACADÊMICA DO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.. **48**

6 UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA O PROCESSO DE ENSINO/APREDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS. **53**
6.1 Metodologia.. **54**
6.2 Elaboração de Atividades Investigativas.. **55**
6.3 Aplicação das Atividades Investigativas... **56**
6.4 Resultados da Pesquisa... **57**
6.4.1 Primeira Etapa**...** **57**
6.4.2 Segunda Etapa**..** **71**

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS... **78**

REFERÊNCIAS.. **80**

APÊNDICE.. **83**

1 INTRODUÇÃO

A forma de se estudar Equações Diferenciais tem sido baseada principalmente na leitura de textos e resoluções de exercícios.

Tenho trabalhado há vários anos com disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, e principalmente com as Equações Diferenciais, e neste período de trabalho um questionamento tem sido feito: Porque o estudante passa pela disciplina de Equações Diferenciais, e não consegue correlacionar este estudo com as outras etapas do estudo de Cálculo? E porque a disciplina de Equações Diferenciais não tem tido um tratamento maior no curso de Licenciatura?

Equações Diferenciais é o fechamento de um ciclo referente ao estudo do Cálculo, pois é a partir de seu estudo é que se passa a entender e melhor aplicar os conceitos de Derivada, Taxa de Variação e Integração.

Na prática, o professor tecnicista trabalha a disciplina privilegiando o estudo dos algoritmos e técnicas de resolução de equações diferenciais, o que ocorreu também na minha prática educativa.

Entretanto, o estudo das Equações Diferenciais compreende duas etapas. Uma que consiste na sua resolução e uma outra na sua aplicação, com resolução e formulação de problemas e, iniciação à modelagem de situação-problema em ciências e em Matemática.

Por causa dessa minha inquietação e da vontade de modificar minha prática profissional é que esta pesquisa se realizou, com o intuito também de mostrar a importância desse conteúdo para a formação de professores no curso de Licenciatura em Matemática e a mudança da abordagem metodológica do ensino das Equações Diferenciais.

No Capítulo 2, é realizado um estudo sobre as Equações Diferenciais, enfatizando os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, Taxa de Variação, Algoritimização, e apresentando os tipos de Equações Diferenciais Ordinárias. Também são apresentados alguns elementos da Histórica do Cálculo.

No Capítulo 3, apresenta-se uma abordagem sobre a modelagem, formulação e resolução de problemas com Equações Diferenciais.

No Capítulo 4, aborda-se a forma de estudo de Equações Diferenciais em cursos de Licenciatura e Livros Textos. Analisa-se ainda a sua influência no estudo de Cálculo e

Taxa de Variação; identifica-se alguns aspectos metodológicos relevantes para o desenvolvimento da formação do professor em cursos de Licenciatura de Matemática.

No Capítulo 5, realiza-se uma descrição da produção acadêmica em Cálculo Diferencial e Integral, relatando a preocupação que a academia tem com o ensino de Cálculo nos cursos de Licenciatura de Matemática.

No Capítulo 6, essência dessa dissertação, é apresentada a metodologia da pesquisa realizada e são analisados os resultados da mesma. Foi feita uma aplicação de atividade investigativa para propor uma nova abordagem no ensino de Equações Diferenciais.

O problema de pesquisa foi elaborado como sendo:

Como a Equação Diferencial com a resolução de problemas e iniciação à modelagem em Ciências complementa a aprendizagem da derivada, ressignificando-a como taxa de variação?

Esta dissertação teve como objetivo específico mostrar como o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias pode complementar e ressignificar o entendimento do conceito de derivada com estudo de fenômenos das ciências, através de Taxa de Variação, para contribuição ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Licenciatura de Matemática.

Especificamente procurou-se:

- Elaborar e testar atividades investigativas com os alunos de Licenciatura em Matemática para aplicação dos conceitos de taxa de variação em resolução de problemas e iniciação à modelagem com o uso de Equações Diferenciais;
- Descrever e Analisar o processo de aplicação das atividades, à luz de “Teoria da Aprendizagem”, buscando verificar as contribuições para o complemento da aprendizagem de derivada e de taxa de variação.
- Analisar a utilização do *software* Maple no processo investigativo da resolução de problemas e iniciação à modelagem de Equações Diferenciais.
- Verificar em livros textos didáticos de Equações Diferenciais ou de Cálculo, como ocorre a abordagem metodológica da aplicação de Equações Diferenciais Ordinárias em problemas de ciências;
- Verificar qual a prioridade que tem sido dada à disciplina Equações Diferencias ou ao seu conteúdo nos cursos de Licenciatura em Matemática;

2. O ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1 Considerações históricas

O Cálculo Diferencial está alicerçado no conceito de taxa de variação. Este conceito está implícito em termos como: taxa de crescimento, crescimento relativo, velocidade, aceleração, taxa de reação, densidade e inclinação de uma curva.

Desde a segunda metade do século XVII, a humanidade passou a entender esse conceito, graças à genialidade de dois grandes matemáticos: Issac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), os quais compreenderam que o Cálculo Diferencial está ligado à taxa de variação de uma função.

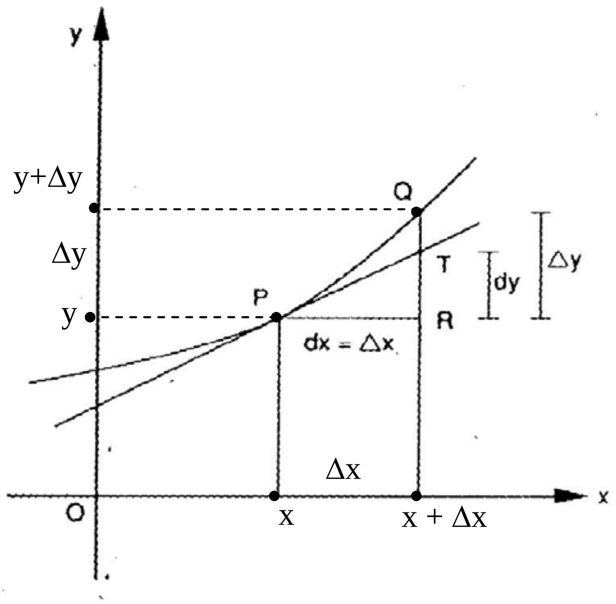
A teoria de Newton se baseou em estudos físicos de variação tais como velocidade e leituras de temperaturas. A essas variações, Newton chamava de *fluente*, e o Cálculo Diferencial é a *fluxão* de um determinado *fluente*. Esta visão, porém, não se originou especificamente com Newton; várias tentativas de se explicar essas variações foram realizadas por outros estudiosos que datam desde a antiguidade, como Galileu, o qual estabeleceu as fundações das teorias da Mecânica (1600).

Newton partiu do pressuposto da relação entre duas variáveis, como por exemplo $y = x^2$, como explica MAOR (2006, p.104):

> Tal relação é representada por um gráfico xy, em nosso exemplo uma parábola. Newton imaginou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel P (x; y). À medida que P traça a curva, ambas as coordenadas, x e y, variam continuamente com o tempo; imagina-se o próprio tempo "fluindo" a uma taxa uniforme – daí a palavra *fluente*. Newton então partiu para encontrar as taxas de mudanças de x e y em relação ao tempo, isto é, suas fluxões.

Leibniz faz uma abordagem diferente de Newton. Voltado mais à Filosofia, elaborou suas idéias de forma mais abstrata, pensava em termos de diferenciais, pequenos acréscimos nos valores de x e y como mostra a figura 1. Esta parte do Cálculo foi denominada Cálculo Infinitesimal e Cálculo Diferencial.

FIGURA 01 – Derivada com a notação dy/dx de Leibniz



A figura mostra a função y=f(x) e um ponto P (x,y) sobre ela. Traça-se uma tangente ao gráfico nesse ponto e considera-se um ponto vizinho a ele denominado de T. Pelo triângulo PRT que Leibniz denominou de “triângulo característico”; seus lados PR e RT são os aumentos nas coordenadas x e y quando se desloca de P para T. Leibniz denominou esses aumentos de dx e dy respectivamente. Seu argumento foi de que se eles fossem suficientemente pequenos, a linha tangente ao gráfico em P seria quase idêntica ao próprio gráfico na vizinhança de P.

Pode-se afirmar que o segmento da linha PT vai quase coincidir exatamente com o segmento curvo PQ, onde Q é um ponto no gráfico diretamente acima ou abaixo de T, dependendo da natureza da curva. Para encontrar a inclinação da linha tangente em P, só é necessário achar a proporção altura-largura do triângulo característico, ou seja, a taxa dy/dx.

Para o entendimento do pensamento de Leibniz é imprescindível o conhecimento do conceito de limite, fato este não inteiramente desenvolvido pelos matemáticos da época, pois os acréscimos propostos são tão pequenos que tendem a zero, definindo a inclinação da reta secante à curva ou taxa de variação média, e na tendência de $\Delta x \to 0$, a inclinação da reta tangente ou taxa de variação instantânea de uma função no ponto P.

Porém, a apresentação dessa proporção entre duas quantidades finitas, ainda que pequenas, e o limite dessa proporção quando as duas quantidades tendem a zero, causou muitas controvérsias e levantou sérias dúvidas na época sobre a base do Cálculo Diferencial e Integral. Essas dúvidas só foram resolvidas no século XIX, quando o conceito de limite foi estabelecido com bases sólidas, foi estabelecido de uma forma rigorosa, o que foi possível somente após o estabelecimento formal do próprio conceito de número, devido aos trabalhos de Dedeking (1831-1916) e Peano (1858-1932).

A parte do Cálculo que trata do estudo das integrais é denominado Cálculo Integral e se originou com problemas de quadratura e cubatura. Resolver um problema de quadratura significa encontrar o valor da área de uma região bidimensional cuja fronteira consiste de uma ou mais curvas. Quanto ao problema de cubatura, determina-se o volume de um sólido tridimensional limitado, pelo menos em parte, por superfícies curvas. Hoje, o uso do termo quadratura não mudou muito. Matemáticos, cientistas e engenheiros comumente dizem que "reduziram um problema a uma quadratura", o que significa que tinham um problema complicado, o simplificaram de várias maneiras e agora o problema pode ser resolvido por uma integral.

Para Leibniz, uma curva era um “polígono com um número infinito de lados”. Leibniz fez “y” representar uma ordenada da curva e “dx” a distância infinitesimal de uma abscissa para a próxima, isto é, a diferença entre abscissas "sucessivas". Então afirmou, "represento a área de uma figura pela soma de todos os retângulos [infinitesimais] limitados pelas ordenadas e diferenças das abscissas... e assim represento em meu cálculo, a área da figura pela soma dos retângulos infinitesimais da área y.dx".

Leibniz tomou o "S" alongado para a integral do latim summa e “d” do latim differentia, e estas têm permanecido, como notações do Cálculo Diferencial e Integral. Ele considerava as contas de cálculo como o meio de abreviar, de algum modo, o clássico método grego de “exaustão” devido aos trabalhos de Eudoxo (408-355 a.C) e de Arquimedes (287-212 a.C.).

O termo integral, como usado no Cálculo, foi cunhado por Johann Bernoulli (1667-1748) e publicado primeiramente por seu irmão mais velho Jakob Bernoulli (1654-1705). Integrais eram consideradas simplesmente como derivadas "inversas", isto é, as integrais indefinidas. O Cálculo das áreas era aproximado por uma noção intuitiva com quadraturas que não podiam ser calculadas usando o Teorema Fundamental do Cálculo sendo aproximadas. Até os séculos XVII e XIX, não se teve a visão de combinar limites e áreas para definir a integral, matematicamente. Em vez disso, com grande engenhosidade, muitas fórmulas de integração foram desenvolvidas.

Aproximadamente ao mesmo tempo em que a tabela de integrais de Newton tinha sido publicada, Johann Bernoulli desenvolveu procedimentos matemáticos para a integração de todas as funções racionais, o qual é chamado então de método das frações parciais. Estas formulações e processos foram resumidos, elegantemente, por Leonhard Euler (1707-1783), em seu trabalho enciclopédico de três volumes sobre Cálculo (1768-1770). Incidentalmente, estes esforços estimularam o aumento do interesse durante o século XVII na fatoração e resolução de equações polinomiais de graus elevados.

Cauchy (1789-1857) definiu a integral de qualquer função contínua no intervalo [a,b] como sendo o limite da soma das áreas de retângulos finos. Inicialmente provou que este limite existia para todas as funções contínuas sobre o intervalo dado. Infelizmente, embora Cauchy tenha usado o Teorema do Valor Intermediário, não conseguiu seu objetivo porque não observou fatos teóricos sutis, mas cruciais. Ele não tinha noção das falhas lógicas no seu argumento e prosseguiu para justificar o Teorema do Valor Médio para Integrais e para provar o Teorema Fundamental do Cálculo para funções contínuas. Niels Henrik Abel (1802-1829) também apontou certos erros delicados ao usar a integral de Cauchy para integrar todo termo de uma série infinita de funções.

Partindo das idéias de Newton e Leibniz, o Cálculo Diferencial foi desenvolvido pelos constantes aperfeiçoamentos que recebeu dos matemáticos que os precederam, como cita STOCHIERO(2007, p.2):

> Nos últimos trezentos anos, muitos matemáticos trabalharam e vêm trabalhando no aprimoramento da estruturação teórica do Cálculo, perseguindo sempre os atalhos inteligentes da sistematização. As brilhantes contribuições de Leonhard Euler (1707-1783), Jean Lê Rond d´Alembert (1717-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Nikolai Ivanovitch Lobatchevski (1793-1856), Bernard Riemann (1826-1866), Richard Dedekind (1831-1916), Oliver Heaviside (1850-1925), bem como as de vários outros luminares, vêm promovendo esse ordenamento sistêmico tão importante para o desenvolvimento desse campo científico e suas ressonâncias em todas as ramificações das atividades tecnológicas e social.

2.2 As Equações Diferenciais – definição e resolução

A ciência teve um grande desenvolvimento a partir do Cálculo Diferencial e Integral, pois observa-se que muitos princípios ou leis que regem o comportamento dos fenômenos naturais, sociais, econômicos, são proposições que envolvem o conceito de Taxa de Variação. Expressas em linguagem matemática, essas relações são chamadas de Equações Diferenciais.

Segundo STEWART(2001, p. 584) “Equação Diferencial é uma equação que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas”.

As Equações Diferenciais são classificadas como ordinárias (solução - função com uma variável independente) ou parcial (solução - função com mais de uma variável independente).

A resolução das Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem tem como método básico a “separação de variáveis”, visto que, uma equação ordinária, se apresenta com uma variável dependente e apenas uma independente. Assim, realiza-se uma integração como mostrado:

$$f(y)dy = g(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int f(y)dy = \int g(x)dx$$

A resolução das Equações Diferenciais Ordinárias não reduzidas à “separação de variáveis”, dependendo da forma que se apresentam, necessitam de uma “mudança de variável” adequada para se chegar à “separação de variável”. Alguns tipos são resolvidos por uma “variação de parâmetros”.

Nos cursos de Cálculo ou Equação Diferencial, a resolução das Equações Diferenciais é estudada por métodos que se diferenciam pela ordem da Equação Diferencial, isto é, a “ordem da maior derivada que se apresenta na equação”.

Assim, podemos sintetizar os principais métodos de resolução das Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª ordem, de acordo os 2 (dois) quadros-síntese:

QUADRO I - Métodos de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem

	TIPO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	
	NÃO LINEARES	***LINEARES***
M É T O D O S	Separação de variável: S.V. Redutível à S.V. por mudança de variável. Exemplos: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ou $\frac{dy}{dx} = f(x \pm y)$. Usa-se uma nova variável $\frac{y}{x} = z$ ou $x \pm y = z$ Cálculo da primitiva de equação diferencial exata ou de diferencial total: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ sendo $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ Obs. Usar fator integrante se $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$	$\frac{dy}{dx} + P(x).y(x) = Q(x)$ a) usa-se fator integrante: $R(x) = e^{\int P(x) \cdot dx}$, ou b) usa-se variação de parâmetros: $y(x) = u(x) \cdot y_h(x)$. Sendo $y_h(x)$ solução da equação dada, para $Q(x) = 0$ Redutível à linear (equação de Bernoulli): $\frac{dy}{dx} + P(x).y = y^n;\ n \neq 0\ e\ n \neq 1$ $y^{-n}.\frac{dy}{dx} + P(x).y^{1-n} = 1$ Usa-se a mudança de variável: $y^{1-n} = z$, sendo $y(x)$ e $z(y)$
	FATOR INTEGRANTE	

Fonte: Guias de aulas de Equação Diferencial de autoria dos Profs. Dr. João Bosco Laudares e Dr. Dimas Miranda (2007)

QUADRO II - Métodos de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª ordem

<table>
<tr><th colspan="3">TIPOS DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL</th></tr>
<tr><th>NÃO LINEAR</th><th colspan="2">LINEAR</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\frac{dy}{dx}\right)$

Mudança de variável para reduzir à 1ª ordem:
$\frac{dy}{dx}=m$
$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dm}{dx}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$
$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right)$

Mudança de variável para reduzir à 1ª ordem:
$\frac{dy}{dx}=m$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dm}{dx}=\frac{dm}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dm}{dy}\cdot m$</td>
<td>.Homogênea
.De coeficientes constantes</td>
<td>. Não homogênea
.De coeficientes constantes</td>
</tr>
<tr>
<td>$A_0\frac{d^2y}{dx^2}+A_1\frac{dy}{dx}+A_2y=0$

Equação característica:

$A_0r^2+A_1r+A_2=0$

$\Delta>0$
$y=c_1.e^{r_1x}+c_2\cdot e^{r_2x}$

$\Delta=0$
$y=(c_1x+c_2)e^{rx}$

$\Delta<0$
$y=e^{ax}\left[c_1\cos(bx)+c_2\,sen(bx)\right]$</td>
<td>$A_0\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+A_1\cdot\frac{dy}{dx}+A_2\cdot y=B(x)$

Solução geral: $y=y_h+y_p$
$y_h=$ solução da equação homogênea (h) correspondente (B(x) = 0)

$y_p=$ solução particular (p) que depende da natureza de B(x)

1º método: (Descartes) coeficientes a determinar

I - $B(x)$ é um polinômio;
II - $B(x)$ é uma exponencial;
III - $B(x)$ é seno ou cosseno.

2º método: (Lagrange) variação de parâmetros.
$y_h=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)$
$y_p=u_1(x)\cdot y_1(x)+u_2(x)\cdot y_2(x).$</td>
</tr>
</table>

Fonte: Guias de aulas de Equação Diferencial de autoria dos Profs. Dr. João Bosco Laudares e Dr. Dimas Miranda (2007)

As Equações Diferenciais Parciais cuja função solução tem mais de uma variável independente, podem se apresentar como no exemplo dado:

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}=0, \text{cuja solução é dada pela função } y=y(x,t).$$

Neste trabalho será dada prioridade ao estudo e pesquisa do ensino de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações.

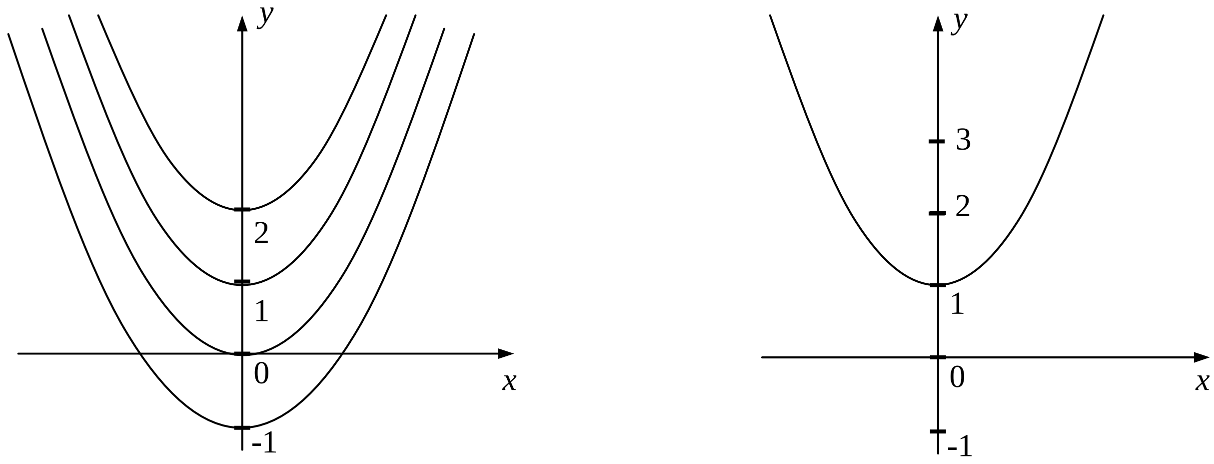
2.3 Tipos de solução de uma Equação Diferencial Ordinária

O processo de resolução de uma Equação Diferencial envolve uma integração, resolução de uma integral indefinida, que traz consigo uma constante arbitrária, cujos possíveis valores geram uma infinidade de soluções. Esta solução é denominada “solução geral”. Muitas vezes, é interessante estudar apenas uma única solução dessa família de infinitas soluções. Já esta solução é denominada “solução particular”.

Geometricamente, a solução geral da Equação Diferencial é uma ”família de curvas”. Para conhecer uma curva determinada, atribui-se para as variáveis dependente e independente um valor, como apresentado no exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow y = x^2 + c \text{ (solução geral)}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 = 1 + c \therefore c = 1 \text{ ou } y = x^2 + 1 \text{(solução particular)}$$



Família de curvas: $c \in R$ Uma curva da família: $c = 1$

FIGURA 02 – Resolução Geométrica de uma Equação Diferencial

Já para o estudo dos **fenômenos naturais**, **biológicos, sociais, econômicos** entre outros, a solução da Equação Diferencial é um “modelo matemático”, que se determina para valores particulares das variáveis obtidos de análises do próprio fenômeno estudado.

Estes valores são denominados “condições iniciais” e “condições de contorno”. Nos fenômenos dinâmicos, a variável independente é o tempo, na maioria das vezes.

Por exemplo, seja um fenômeno dado pela Equação Diferencial, que se segue e sua solução. Então,

$$\frac{dv}{dt} = 2t \text{ ou } v = t^2 + c$$

$$\begin{cases} t = 0s \\ v = 3m/s \end{cases} \Rightarrow 3 = 0^2 + c \therefore c = 3 \text{ ou } \boxed{v = t^2 + 3}$$

Este é um modelo de condição inicial (t = 0) ou um problema de “valor inicial”. Já na Equação Diferencial seguinte tem-se um valor inicial (t = 0) e um valor de contorno $(t > 0)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \Rightarrow x = c_1 \cos t + c_2 sent$$

$$\begin{cases} t = 0s \\ x = 2m \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} t = \dfrac{\pi}{2} s \Rightarrow x = 2\cos t + sent \\ x = 1m \end{cases}$$

, sendo t (tempo), m (metro).

Este referencial é importante, pois, numa situação problema torna-se necessário a identificação das condições iniciais ou de contorno envolvidas no fenômeno. Suponha que a velocidade de resfriamento de um corpo no ar é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e do ar. Se a temperatura do ar é de 20º C e o corpo se resfria em 20 minutos de 100º a 60 º C, dentro de quanto tempo sua temperatura descerá para 30º C?

Neste fenômeno consideram-se dois instantes:

1. Condição Inicial, quando do início do estudo, o tempo é zero e a temperatura do corpo é de 100º C;

2. Condições de contorno, quando no decorrer de 20 minutos a temperatura passa a ser de 60º C.

As condições dadas foram:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow T = 100^{o} \text{ "Condição Inicial"} \\ t = 20 \Rightarrow T = 60^{o} \text{ "Condição de Contorno"} \end{cases}$$

Assim, fenômenos como resfriamento de um corpo, circuitos elétricos, vibração de molas, dentre outros, podem ser estudados com Equações Diferenciais Ordinárias.

Já as Equações de Maxwell, de NAVIER-STOKES da Mecânica Quântica de SCHRÖDINGER são escritas como Equações Diferenciais Parciais.

Na resolução de uma Equação Diferencial Parcial, são usados processos convenientes, transformando a Equação Parcial em Ordinária, com o objetivo de simplificar a resolução.

2.4 Resolução das Equações Diferenciais por séries e aplicação com campo de direções

Muitos autores denominam a "resolução das Equações Diferenciais" como "integração das Equações Diferenciais". Com efeito, a resolução é uma integração, pois:

$$2xdx - ydx = 0 \Rightarrow \int 2xdx - \int ydy = 0 \text{ ou integrando, se tem a solução: } x^2 - \frac{y^2}{2} = c$$

Entretanto, como a integração tem seus limites, na resolução das Equações Diferenciais, utilizam-se "séries" para se ter uma solução aproximada, como demonstra STOCHIERO (2007, p.68):

Um corpo de massa **m** encontra-se preso à extremidade inferior de uma mola de peso sensivelmente nulo, estando sua outra extremidade fixa a um suporte rígido. Com o sistema em equilíbrio, o corpo é deslocado para baixo num alongamento $\mathbf{x_0}$ e solto, em seguida. Considerando x o deslocamento do corpo, medido a partir da posição de equilíbrio, no instante **t**, determinar o seu movimento.

Resolução: Associando a segunda lei de Newton, F=m.a, e a lei de Hooke, F=-K.x, onde a tensão da mola é proporcional à distensão da mesma, constrói-se a equação do movimento descrito pelo corpo considerado:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} = 0$$

$$Modelo:$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$$

Para facilitar os cálculos atribui-se que m=5 Kg, k= 5 e x_0= 1 metro. Então a equação será escrita:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \text{ ou } \ddot{x} + x = 0$$

E, para resolvê-la, utiliza-se a **série de potências**:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n t^n = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \ldots + x_n t^n$$

$$\dot{x}(t)=v(0)=x_1+2x_2t+3x_3t^2+4x_4t^3+5x_5t^4+6x_6t^5+7x_7t^6+\ldots$$

$$\ddot{x}(t)=2x_2+6x_3t+12x_4t^2+20x_5t^3+30x_6t^4+42x_7t^5+\ldots$$

Considerando –se as condições iniciais estabelecidas: $\begin{cases} x'(0)=v(0)=0 \\ x(0)=x_0 \end{cases}$

$$\ddot{x}+x=(2x_2+x_0)+(6x_3+x_1)t+(12x_4+x_2)t^2+\ldots=0$$

$$\begin{cases} 2x_2+x_0=0 \therefore x_2=-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2!} \\ 6x_3+x_1=0 \therefore x_3=0 \\ 12x_4+x_2=0 \therefore x_4=\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{4!} \\ 20x_5+x_3=0 \therefore x_5=0 \\ 30x_6+x_4=0 \therefore x_4=-\dfrac{1}{720}=-\dfrac{1}{6!} \end{cases}$$

.
.
.

Portanto a solução particular será escrita, da seguinte forma:

$$x(t)=1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\ldots$$

Como x(t) é uma série convergente em **R** para cos(t), A solução particular será x(t) = cos(t), configurando um **movimento harmônico simples**, permitindo determinar a **posição** do corpo em relação ao tempo.

Os métodos numéricos são usados através de softwares adequados. Na PUC Minas, para a disciplina de Cálculo Numérico, na qual se resolvem as Equações Diferenciais pelos métodos numéricos, os professores desenvolveram um Software, usado no laboratório de Informática, denominado Visual Cálculo Numérico – VCN (www.matematica.pucminas.br).

Na modelagem de problemas no estudo de fenômenos, a interpretação gráfica do desenvolvimento do mesmo, traz informações muitas vezes suficientes para os pesquisadores e tecnólogos tomarem decisões. Desta forma, o modelo se reduz a uma Equação Diferencial e o gráfico da solução, obtido por uma descrição geométrica do conjunto de curvas integrais a ser esboçado: (I) escolhendo-se uma malha regular de pontos do plano xy; (II) calculando-se as inclinações das retas tangentes às curvas-integrais nos pontos de malha; (III) desenhando pequenos segmentos das retas tangentes naqueles pontos. A figura resultante é chamada de "Campo de Direções" ou um conjunto de inclinações; com este, possibilita-se a visualização (esboço) do gráfico das possíveis soluções de uma Equação Diferencial.

Por exemplo, o comportamento da intensidade de corrente elétrica num circuito pode ser interpretado pela Equação Diferencial e o esboço do gráfico da função intensidade (i) pelo tempo (t). Como se segue, o "campo de direções" é obtido pela derivada atribuindo-se valores para "i", STEWART (2002, p.589) apresenta um exemplo de um circuito cujo comportamento é dado pelo modelo:

$$\frac{di}{dt} = 15 - 3i$$

Então, este modelo é uma Equação Diferencial e o campo de direções pode ser elaborado como a seguir, sendo i (intensidade de corrente no circuito elétrico) e t (tempo):

i

5

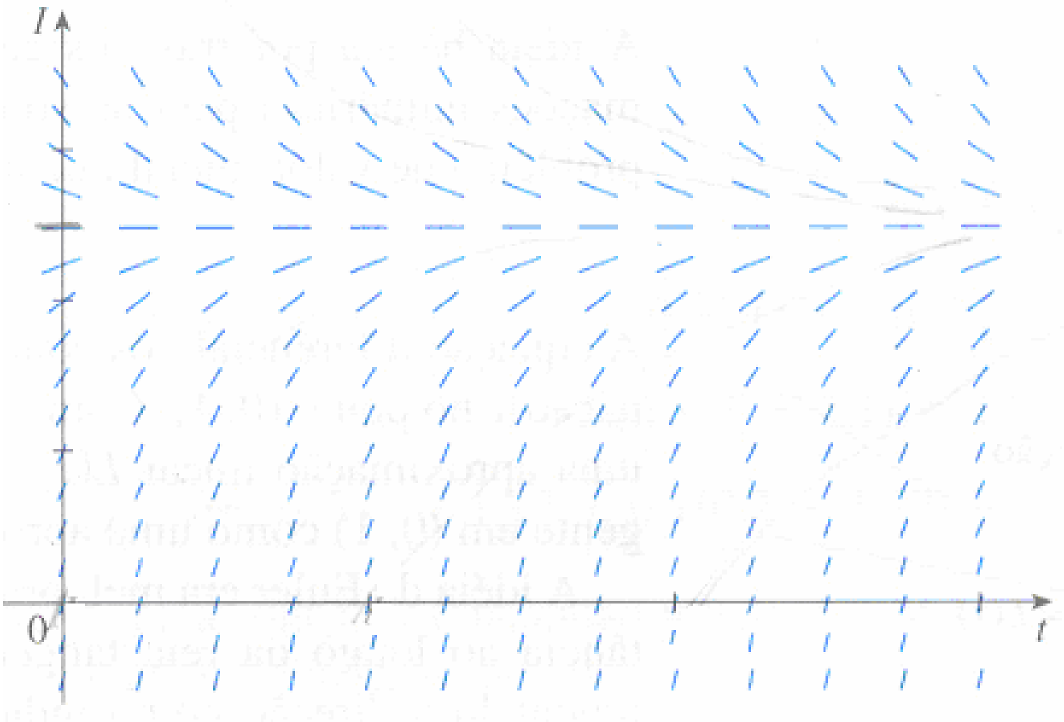


FIGURA 03 – Campo de Direções

Baseado no campo direções, o esboço dos gráficos da função i = i (t), se apresenta como a seguir para diferentes condições iniciais ou de contorno do fenômeno.

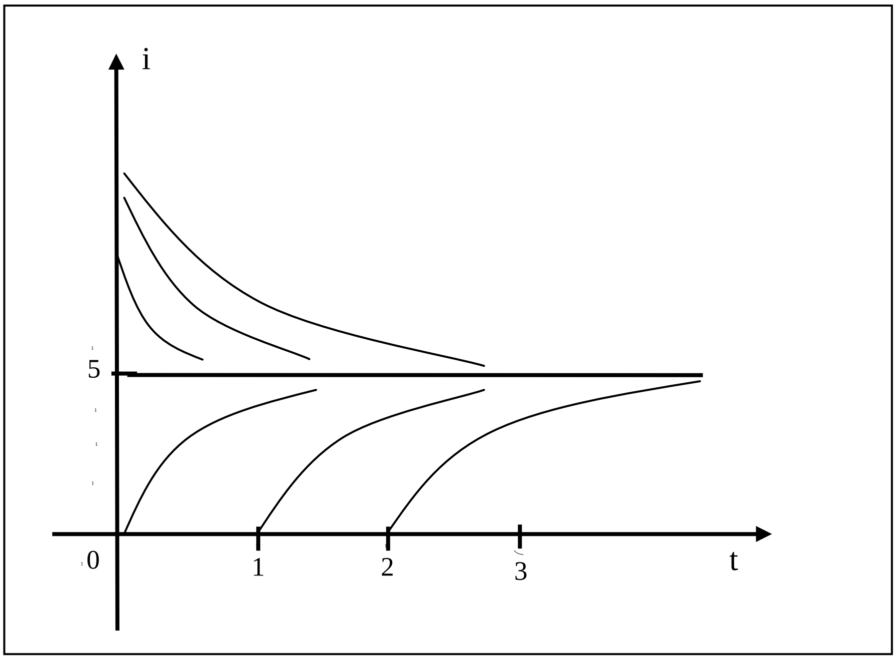


FIGURA 04 – Condições Iniciais e de Contorno

Com esses dados, pode-se conhecer o esboço do gráfico de i = i (t), sem a determinação da expressão algébrica de i em função do t, isto é, apesar de não se ter a solução da Equação Diferencial expressa numa função matemática. Entretanto, o esboço do campo de direções proporciona condições de análise do comportamento do circuito elétrico, fenômeno em estudo.

O estudo de Equações Diferenciais tem atraído a curiosidade de vários matemáticos nos últimos séculos e tem sido uma das áreas de maior desenvolvimento na Matemática, mesmo assim, muitas questões interessantes ainda estão em aberto, esperando que um bom modelo seja criado para poder explicá-las. É assim o desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia, e porque não dizer, da Matemática!

3 INTRODUÇÃO À MODELAGEM, FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma estratégia de motivação e envolvimento dos estudantes de cursos de Ciências se faz pela inserção da Matemática com interdisciplinaridade e pela contextualização, através da formulação e resolução de problemas e, especialmente, na iniciação à modelagem.

A Matemática é utilizada em praticamente todas as ciências, sendo uma ferramenta importante na construção do conhecimento. Na análise quantitativa dos fenômenos, o desafio é proporcionar meios para que os estudantes desenvolvam as habilidades necessárias para que possa criar e resolver problemas.

A modelagem matemática busca a formulação de modelos que possibilitem a interpretação dos fenômenos naturais e sociais. O modelo pode surgir primeiramente de forma mental, a partir dessa idealização procura-se uma forma de relacioná-la com questões levantadas, realizando-se conjecturas e procurando sua avaliação para deduções do modelo a ser criado.

O processo de criação do modelo matemático passa por um processo intuitivo que antecede à formalização teórica. O processo de Intuição Matemática usado pelos matemáticos, apresenta em sua essência uma carga de mistério e ambigüidade. Por vezes parece ser um substituto não legítimo da demonstração formal e rigorosa. Porém, em muitas situações ele surge como uma luz a proporcionar a possibilidade de alargar a visão sobre um determinado conceito matemático. Quando se depara com um problema, tem-se como objetivo resolvê-lo. Neste contexto, a intuição surge como uma forma de pensamento menos rigoroso que a formalização, deixando maior liberdade para observar e analisar as possibilidades de resolução do problema, que por muitas vezes não é solucionado, mas através dele, novas teorias são criadas, como cita o matemático inglês, Andrew Wiles “é bom trabalhar em qualquer problema, contanto que ele dê origem a Matemática interessante durante o caminho, mesmo se não o resolvemos no final” (PONTE, 2003, p.17).

REIS (2001, p.74) defende o processo de intuição da seguinte forma:

> Independentemente de se tratar de uma demonstração de um resultado importante ou do desenvolvimento de um determinado conceito, constatamos que a intuição deveria, obrigatoriamente, estar presente no processo de ensino-aprendizagem do Cálculo e, consequentemente, no processo de construção da Análise, a qual, para atingir uma validação lógico-formal, isto é, rigorosa, jamais poderia prescindir da fase intuitiva e criativa das idéias matemáticas.

Mas o que é Intuição? Segundo OTTE (1993, p.281) a intuição pode ser entendida através das seguintes considerações:

- Intuitivo é oposto de rigoroso, ou seja, pouco rigoroso sem a preocupação com a formalização;
- Intuitivo significa visual, poder reconhecer padrões matemáticos, visualizar formas geométricas e ou topológicas. Porém, deve-se tomar cuidado com situações que parecem óbvias no visual, mas que, quando melhor observadas, constata-se que suas conclusões são falsas;
- Intuitivo significa plausível ou convincente na ausência de demonstração, nesse caso espera-se uma hipótese razoável que possa ser tida como uma séria candidata à demonstração;
- Intuitivo significa incompleto. Podemos utilizar o processo como forma de melhorar a construção do conhecimento; porém, este só será completo depois de formalizado e demonstrado segundo os conceitos lógicos matemáticos;
- Intuitivo significa tomar o modelo físico e ou alguns exemplos importantes como referencial do processo; pode-se dizer que nesse sentido é quase o mesmo que heurístico;
- Intuitivo significa holístico ou integrativo, quando se pensa nas situações matemáticas como uma adequação aos conhecimentos pré-existentes. Já na formalização devem-se justificar tais fatos e conclusões de forma analítica e dedutiva.

A demonstração rigorosa, muitas vezes tem um encadeamento muito longo, pode gerar dúvidas e desconfianças sobre a real veracidade do raciocínio exposto. Pois muitas vezes o argumento intuitivo pode ser mais bem compreendido.

Em todos os aspectos, o uso da intuição é um facilitador do entendimento acerca de conceitos matemáticos, porém, ela não pode ser usada como ferramenta única do processo de construção do conhecimento, pois não se pode resumir a matemática a apenas à intuição, necessitando justificar, comprovar e demonstrar as proposições, principalmente se o enfoque for o ensino da Matemática, porque além da intuição é importante trabalhar com o estudante a capacidade de demonstração e a formalização. Assim, o processo de intuição não se completa se, aliado na estruturação da matemática formal, a ele, não estiver o processo de demonstração, isto é, o processo lógico dedutivo.

Segundo DAVIS & HERSH (1995):

1. Todos os pontos de vista filosóficos atuais assentam-se, de um modo essencial, em alguma noção de intuição;
2. Nenhum desses programas filosóficos tenta sequer explicar a natureza e significado da intuição que postulam;
3. O estudo da intuição, como utilizada atualmente, leva a uma noção que é difícil e complexa, mas não inexplicável e impossível de analisar. Uma análise realista da intuição matemática é um objetivo razoável e deveria ser uma das características centrais de uma filosofia da matemática adequada.

E os formalistas, como ficam nesse contexto? À luz do que afirma DAVIS & HERSH (1995), responde-se a esta pergunta com outro questionamento: o que se ensina e como se ensina? Ou melhor, o que se tenta ensinar e por que se pensa ser necessário ensiná-lo?

Procura-se ensinar os conceitos matemáticos através de exemplos, fazendo problemas e desenvolvendo técnicas de raciocínio, buscando a descoberta da idéia intuitiva da Matemática. Deste modo, o ensino da matemática não se baseia única e exclusivamente na formalização (memorização de definições e demonstração de teorias), mas sim, num processo conjunto de intuição e formalização. As nossas construções mentais são frutos da experiência repetida, através de próprias descobertas próprias. No entanto, o formalista procura obscurecer a importância da intuição através da busca incessante do melhoramento das demonstrações tornando-as dogmáticas e irrefutáveis.

A verdadeira matemática é aquela que pode ser construída e reconstruída para melhor poder conhecê-la e experimentá-la, fazendo com que as construções mentais se solidifiquem e possam ser pilares de novos pensamentos matemáticos.

A grande dificuldade de aceitar e ou entender a intuição é o pensamento de que a matemática deve ser infalível, ou pelo senso comum, uma ciência exata.

Entretanto, os modelos são ajustados para que os resultados matemáticos se enquadrem numa explicação próxima da realidade.

Essas considerações levam a observar que o processo de construção dos modelos matemáticos não ocorre de forma linear, mas por meio de aproximações sucessivas, em um processo cheio de idas e vindas, por percursos que nem sempre parecem lógicos, mas com graus de liberdade para experimentar, intuir, construir e reconstruir conceitos.

Neste contexto a modelagem matemática configura-se como uma arte, buscando formular e resolver problemas interagindo a realidade e a Matemática, num processo contínuo de construção de conhecimento. Essa interação envolve uma série de procedimentos, os quais segundo BIEMBENGUT (2003), podem ser agrupados em três etapas:

- **Interação**: que parte do reconhecimento e da pesquisa teórica sobre situação problema a ser resolvida.
- **Matematização**: formulação do problema através de hipóteses e resolução do problema com base em um modelo.
- **Modelo Matemático**: análise e interpretação da solução, validação e avaliação do modelo.

Esses elementos se completam com uma habilidade que se denomina “arte de modelar”. É preciso desejar modelar, é preciso querer modelar. Para modelar é preciso estar em sintonia com aquilo que se faz, tendo o gosto pelo conhecimento, a liberdade de poder levar a mente a imaginar situações e construir modelos para solucionar problemas.

A modelagem é um campo de conhecimento que investiga a natureza e os benefícios que a resolução de problemas pode trazer no ato de construção do conhecimento, levando-se sempre em conta a experiência do pesquisador e do estudante. Para alcançar os objetivos da modelagem, torna-se necessário investigar as principais características das ciências estudadas.

Segundo LAUDARES & MIRANDA (2007), no caso do Cálculo Diferencial e Integral, as Equações Diferenciais se apresentam como objeto privilegiado para o estudo dos fenômenos físicos, usando a derivação com as noções de “taxa de variação” em problemas de ciências.

Quanto à interpretação geométrica da derivada, esta pode também, através do estudo das trajetórias ortogonais, propor uma aplicação física, por exemplo, em

Eletricidade, como apresentado por Stewart (2002, p.598) no tratamento de linhas de força, em campos eletroestáticos.

A metodologia do ensino de matemática tem 3 (três) pilares básicos: a compreensão conceitual, a operacionalização ou algoritmação e a aplicação.

Quanto ao entendimento dos conceitos, no estudo de Equações Diferenciais, é necessária a compreensão e o domínio de dois deles, principalmente, o de derivada, como taxa de variação, e o de integral, como operação inversa da diferenciação segundo LAUDARES & MIRANDA (2001, p.5)

> A tensão entre o qualitativo e o quantitativo tem sido elemento de discussão contínua entre os educadores de matemática. A dialética da aprendizagem de conceitos de manipulação de fórmulas com resolução de cálculos de forma mecânica, repetitiva tem trazido à discussão a efetividade do ensino da matemática.

Assim, continuam os autores acima referenciados, é estabelecido um conflito dentro do campo de forças do corpo docente na execução do currículo, ora com adeptos à algebrização, ora com os defensores de menos álgebra, menos algoritmização e mais aplicação na exploração conceitual pela interpretação gráfica, formulação e análise de problemas.

Segundo PEGGY A; HOUSE S. (1995, p.2) “em muitas aulas, os alunos continuam sendo treinados para armazenar informação e para desenvolver a competência no desempenho de manipulações algorítmicas”. A algoritmização é reforçada ao executar, no estudo de matemática, uma série de exercícios. O “exercício” objetiva a aplicação ou desenvolvimento de fórmulas ou modelos matemáticos, de forma repetitiva, ao mudar valores de parâmetros e variáveis, às vezes com a mesma expressão, equação, inequação ou função. Trata-se da manipulação algébrica para a retenção de um processo de cálculo.

Numa etapa de aprendizagem da Equação Diferencial, a competência a ser adquirida é do desenvolvimento do Cálculo, isto é, da algebrização pela resolução da Equação Diferencial, de uma forma conexa, analiticamente descrevendo e aplicando passo a passo o processo do cálculo. O pré-requisito para resolução das Equações Diferenciais se constitui das técnicas de derivação, diferenciação e integração.

Apesar de se defender a utilização do software para a busca da solução, não há como desprezar a algoritmização no estudo das Equações Diferenciais, pois acreditamos que a manipulação de fórmulas e algoritmos matemáticos contribui para a construção de um conhecimento matemático procedimental e para a aquisição de habilidades de cálculo, ambos essenciais na formação de um futuro Professor de Matemática.

O processo mais comum da algoritmização é a da “variação de parâmetros” e da “mudança de variáveis” em fórmulas já conhecidas, através dos quais há um retorno a processos antes trabalhados.

O reconhecimento do tipo de Equações Diferenciais (lineares e não-lineares) facilita o uso do algoritmo correto. Assim hoje, com a mudança paradigmática da ciência e da tecnologia, via teoria da complexidade, traz-se o enfoque às equações diferenciais não lineares. Estas equações remetem os estudos à exploração contínua de novos algoritmos, pois o seu comportamento matemático foge da padronização de modelos e pede, então, muitas vezes, soluções numéricas, ou aproximações, em substituição às soluções algébrica/analítica, como afirma LAUDARES& MIRANDA (2007, p.106)

> Uma das metas principais do ensino de matemática é a focalização na compreensão conceitual. Daí uma ênfase a ser dada nas estratégias de estudo as quais se fazem com abordagens variadas sejam descritivas, explicativas e de análise com a diversidade de metodologias do tipo algébricas, numéricas, geométricas. Uma outra ênfase se faz ainda no tratamento do conceito matemático atrelado à situações problemáticas das ciências e da realidade, fugindo da abstração restrita e, no desenvolvimento das habilidades dos estudantes de problematizar em qualquer situação. A maior parte dos conceitos matemáticos, historicamente são elaboradas a partir de demandas surgidas em situações problemáticas das ciências, da tecnologia e da realidade do mundo vivido.

Assim, na elaboração conceitual, POLYA (1994) defende a necessidade do raciocínio heurístico, o qual se faz com suporte em todo capital acumulado de saberes e da sua mobilização, formulando hipóteses e conjecturas. Essas habilidades são de fundamental importância ao licenciando em Matemática, pois, possibilita o desenvolvimento da capacidade de criar e explorar situações problemas, fazendo relações, elaborando conjecturas, argumentando e avaliando o desenvolvimento das situações estudadas. É aquele, segundo o mesmo autor, que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível. POLYA (1994, p.130).

> A medida que avança o nosso exame do problema,prevemos com clareza cada vez maior o que deve ser feito para sua resolução e como isso deve ser feito. Ao resolvermos um problema matemático, podemos prever, se tivermos sorte, que um certo teorema conhecido poderá ser utilizado, que um certo problema já anteriormente resolvido poderá ser útil, que a volta à definição de um certo técnico poderá ser necessária. Não prevemos essas coisas com certeza, apenas com um certo grau de plausibilidade. Teremos

> a certeza absoluta quando obtivermos a solução completa, mas antes de termos certeza absoluta precisamos, muitas vezes, de nos contentar com uma mais ou menos plausível. Sem considerações que sejam apenas plausíveis e provisórias jamais encontraremos a solução, que é certa e final.

Na formulação do problema volta-se às definições, aos conceitos utilizando-se recursos tais como analogias, metáforas, generalização, particularização, decomposição, recombinações e induções.

POLYA (1994) defende o que chama de “variação do problema”, o qual pode trazer elementos auxiliares ou à descoberta de um problema auxiliar mais acessível ou a um já conhecido.

A iniciação na metodologia de resolução de problemas exige um acúmulo de conhecimentos, denominada por POZO (1998, p.87) de conhecimentos prévios.

> Entendemos que conhecimentos prévios são todos aqueles conhecimentos (corretos ou incorretos) que cada sujeito possui e adquiriu ao longo de sua vida na interação com o mundo que o cerca e com a escola. Esse conjunto de conhecimentos serve para que ele conheça o mundo e os fenômenos que observa, ao mesmo tempo em que ajudam a prever e controlar os fatos e acontecimentos futuros.

POZO (1998, p.78-80) apresenta uma classificação dos problemas, no que se refere ao tratamento das informações e dados, isto é, problema qualitativo ou quantitativo.

> São denominados **problemas qualitativos** aqueles que os alunos precisam resolver através de raciocínios teóricos, baseados nos seus conhecimentos, sem necessidade de apoiar-se em cálculos numéricos e que não requerem para a sua solução a realização de experiência ou de manipulações experimentais. Entendemos por **problema quantitativo** aquele no qual o aluno deve manipular dados numéricos e trabalhar com eles para chegar a uma solução, seja ela numérica ou não. São problemas nos quais a informação recebida é principalmente quantitativa, embora o resultado possa não sê-lo. Por isso, a estratégia de resolução estará fundamentalmente baseada no cálculo matemático, na comparação de dados e na utilização de fórmulas.

Segundo LAUDARES & MIRANDA (2007, 9.107),

> nas equações diferenciais, os problemas são quantitativos, mas que exigem uma análise e avaliação qualitativa, pois, sua formulação e solução não são definidas apenas pelo cálculo da solução, via integração. As interpretações das condições iniciais e de contorno da situação problema guardam uma demanda inerente à natureza do acontecimento, as quais vão caracterizar a lei matemática, fórmula ou modelo do fenômeno, em estudo. A metodologia para resolução de problemas de Equações Diferenciais pode ser conduzida, pelos seguintes passos:
>
> - Declaração ou definição de variáveis e invariantes;
> - Identificação da relação das variáreis (pela sua dependência);

- Montagem da equação diferencial (usando a derivada como “taxa de variação” ou sua interpretação geométrica”;
- Identificação das condições iniciais e de contorno;
- Determinação do formato da solução (o que o problema pede);
- Resolução da equação diferencial;
- Análise e crítica da solução com interpretação gráfica da solução.

A modelagem é, de uma maneira geral, um processo na obtenção de um modelo. Modelar é uma ação inerente a todas as áreas das ciências sociais, humanas, exatas, biológicas e de tecnologia.

O modelo matemático, segundo BASSANEZI (2002, p.20), “é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”.

O mesmo autor, afirma que:

> Os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificadas conforme o tipo de matemática utilizada:
>
> i. Linear ou Não Linear, conforme suas equações básicas tenham estas características;
> ii. Estático, quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; ou dinâmico quando simula variações de estágios e fenômenos – por exemplo- crescimento populacional de uma colméia;
> iii. Educacional, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas.

BASSANEZI (2002) define modelagem matemática como um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos, sendo uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências.

Não é tarefa fácil implementar modelagem no processo de ensino e aprendizagem, o que requer do professor ousadia e audácia. BIEMBENGUT (1999), na experimentação de novas práticas educativas, parte de estudo de modelagem de problemas clássicos, para em seguida elaborar alguns novos modelos simples, levando os estudantes à essa prática. BIEMBEGUT (1999, p.42).

> Utilizar modelagem matemática no ensino, como já expus anteriormente implica,necessariamente, levar os alunos a escolherem um tema, fazer com que eles levantem questões e, posteriormente, matematizem-nas, ou seja, traduzam as questões em linguagem matemática até chegar a um modelo (fórmula, gráfico, etc).

No estudo de Equações Diferenciais, podem-se diferenciar as duas práticas metodológicas: de resolução de problemas e da formulação de um problema. Com a formulação se tem uma “iniciação à modelagem”.

A competência matemática é um pré-requisito para o aprendizado e a criação de modelos em diferentes áreas do conhecimento, logo, o profissional da Licenciatura deve ter a capacidade de interpretar/explicar em linguagem matemática os fenômenos modelados nas ciências.

A Matemática Aplicada é essencialmente inter-disciplinar, pois consiste em tornar aplicável alguma estrutura fora de seu campo estrito; tem-se então que a modelagem é uma ferramenta fundamental para a Matemática Aplicada. O estudante de Licenciatura precisa entender que a criação de modelos não se encerra com uma verdade definitiva, pois é sempre uma aproximação da mesma, e que novos modelos surgirão buscando uma nova perspectiva conveniente da realidade analisada. Logo o trabalho do modelador é inacabado, pois não existem modelos perfeitos, mas sim modelos que realizam uma boa estimativa da realidade.

Para PIAGET (apud SMOLE, 2005) o conhecimento não é meramente uma cópia da realidade, tendo em vista que o processo usual de repetições de algoritmos prontos e acabados no ensino de Equações Diferenciais não provoca nenhuma ação transformadora da realidade.

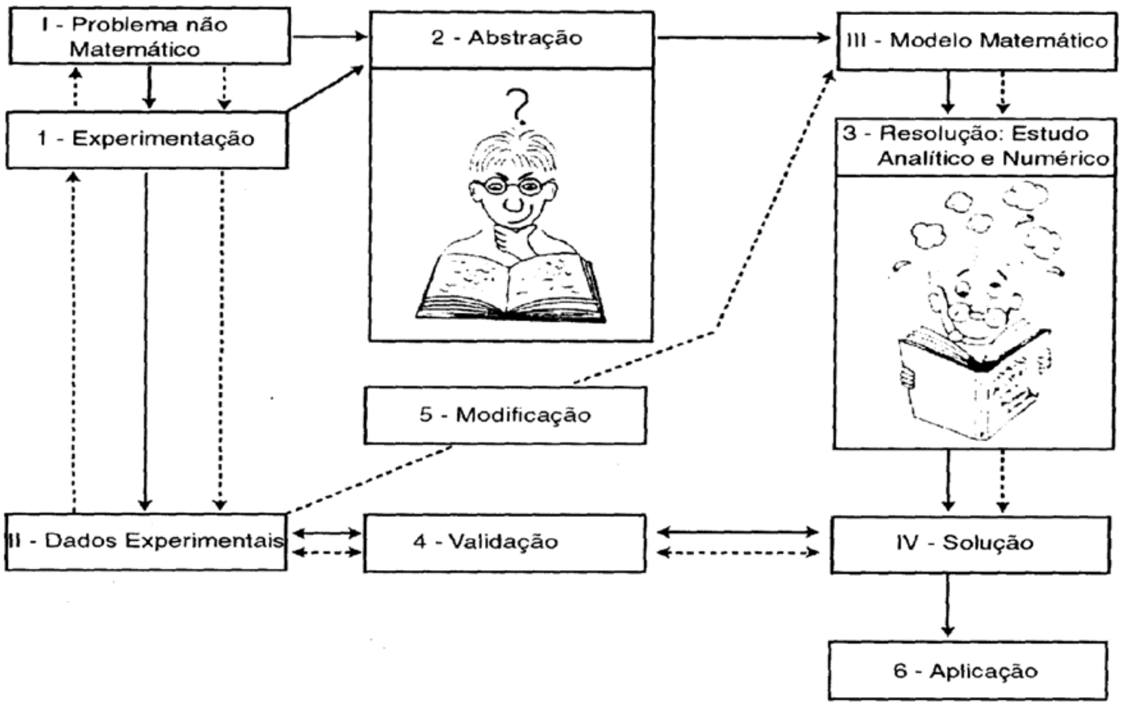
O estudante, se apenas reproduz situações apresentadas nos livros ou pelo professor, não consegue visualizar o elo entre a teoria matemática e sua aplicabilidade na vida real. SMOLE (2005, p.37)

> Nesse sentido, o conhecimento não é algo que se produz sem razão, mas que, tratando-se de um processo adaptativo, decorre de uma necessidade: ao tentar realizar uma ação, ou encontrar uma explicação para o que ocorre, o sujeito encontra uma resistência na realidade. Para enfrentá-la, precisa modificar seus conhecimentos anteriores, pois do contrário não poderá resolver esta dificuldade. Isso o obriga a dar um passo adiante e a abandonar crenças anteriores. Por isso o conhecimento é um processo de criação, e não de repetição.

A partir desse entendimento, os métodos de ensino dependem dos objetivos que se formulam tendo em vista o conhecimento e a transformação da realidade. A prática educativa da modelagem, através do processo de construção de modelos e assimilação ativa de conhecimentos e habilidades, tem em vista a preparação do estudante para a compreensão mais ampla da realidade social e natural em que vive, para que possa se tornar agente ativo na sociedade.

Os conceitos matemáticos historicamente foram elaborados a partir de demandas surgidas em situações problemáticas das ciências e da tecnologia, ou seja, originalmente um problema surge de forma não matemática e através de coleta de dados bem como experimentações, o pesquisador passa a abstrair seus resultados, na tentativa de criar um modelo matemático, que segundo DAVIS & HERSH (apud BASSANEZI, 2002, p.174) “Um modelo que pode ser considerado bom ou ruim, simples ou satisfatório, estético ou feio, útil ou inútil, mas seria difícil dizer se é verdadeiro ou falso...”. Por isso que o fluxo das setas da figura 02 são de ida e volta, pois o pesquisador está sempre moldando e modificando o seu modelo no intuito de aproximá-lo da realidade, validando-o e aplicando-o em outras situações similares aquela que originou o problema.

FIGURA 05 – Processo de Modelagem Matemática segundo BASSANEZI (2002, p.27)



O conteúdo do problema e sua resolução exigem saberes conceituais e procedimentais, bem como sua interação e ativação em contexto. O mesmo autor classifica os problemas em 3 (três) tipos: problemas da vida cotidiana, problemas científicos e problemas escolares.

Problemas da “vida cotidiana” são aqueles enfrentados na vida social e profissional. Num curso de engenharia prevalecem os problemas da tecnologia e do exercício profissional.

Já os problemas escolares são aqueles originados fora da escola, traduzidos e transpostos para o ambiente educacional, que podem ser simulados com condições diferentes ou próximas das reais, a partir das dificuldades de se levar muitas vezes à sala de aula ou ao laboratório a real situação em estudo, o que é denominado de “transposição didática”.

A formulação e resolução de problema exigem do estudante o desenvolvimento da capacidade de análise, além da competência de cálculo.

LAUDARES & MIRANDA (2007) enfatizam que a participação do professor é fundamental na apresentação do fenômeno ou do evento através de questionamentos e elaboração de perguntas, os quais contornam a essência da situação em estudo, pois formular um problema é uma ação investigativa, a qual tem uma pergunta como princípio básico. O direcionamento do professor é questionar o estudante diante da situação proposta, como forma de aprendizagem.

A resolução de um problema pode ser feita por composição de uma tabela numérica ou do esboço de um gráfico, para depois construir uma fórmula algébrica ou uma equação ou uma função. A análise criteriosa da validação do resultado é essencial para sua aceitação.

O estudo de Equações Diferenciais através da modelagem poderá ser eficaz se explorado pelos enfoques: da criação de modelos, da algoritmação (resolução das equações) e da elaboração e resolução de problemas. Pois haverá uma instigação a trabalhar os conceitos matemáticos, relacionados à realidade, às ciências em constante reflexão, não se restringindo somente aos cálculos algébricos. Contudo, os cálculos algébricos podem ser valorizados quando a algoritmização é conduzida como processo a desenvolver habilidades de cálculo, e não como tarefa apenas repetitiva para treinamento de algebrismo.

Segundo BASSANEZI (2002, p.180), a falta de objetividade dos cursos de Licenciatura em Matemática provoca uma angústia nos formandos que se sentem incapazes de exercerem o magistério. Os programas desenvolvidos nas diferentes disciplinas quase sempre são fechados e não existe uma interligação com as outras ciências. O mesmo acontece com o estudo das Equações Diferenciais que, envolvido por um estudo puramente algébrico de determinação de solução geral, via integração, faz com que o estudante não tenha interesse pelo conteúdo ministrado.

Utilizando-se a modelagem, o estudante de Licenciatura em Matemática poderá observar que os conceitos de taxa de variação estão correlacionados com outras ciências; assim o professor formado na prática de modelagem poderá assumir o mesmo posicionamento na sua sala de aula, facilitando assim, a construção do conhecimento por parte dos alunos.

A modelagem também possibilita a formação de um professor crítico, capaz de sintonizar os conceitos matemáticos com as aplicações científicas, pois, segundo BASSANEZI (2002, p.181), deve-se sempre pensar que a prática investigativa que esta metodologia constrói leva à formação de um professor que é seguro de suas competências e capacitado, para esta nova prática de ensino.

4 A ABORDAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA E EM LIVROS-TEXTO.

Os ambientes de ensino nos quais os professores e os estudantes aprendem equações diferenciais mudaram bastante nos últimos anos, dado que as ferramentas computacionais como: calculadoras, computadores e softwares matemáticos têm evoluído de uma forma acelerada, pois facilitam o desenvolvimento de tarefas repetitivas como cálculos numéricos e manipulações algébricas complexas. Além disso, o estudante tem uma poderosa ferramenta de pesquisa que é a *internet.*

Os cursos de Licenciatura em Matemática têm suas abordagens de Equações Diferenciais com principal ênfase nos métodos algébricos e numéricos. Entretanto, trabalhando com as Equações Diferenciais na modelagem de problemas das Ciências se ganha mais uma ferramenta de auxílio para o aprendizado de Cálculo.

Nas Licenciaturas de Matemática, nota-se que a disciplina de Equações Diferenciais está inserida como parte integrante das disciplinas de Cálculo, ou muitas vezes, como disciplina optativa, pois os projetos pedagógicos visam a formação de professores voltados para o ensino fundamental e médio (ver anexo), como se pode constatar no texto abaixo, referente ao projeto pedagógico da UNESP (1991, p.1):

> Entendemos por “instrumentalizar para o ensino” a discussão e a experimentação pedagógica nas salas de aula reais de Ensino Fundamental e Médio, existentes em nossa região; da elaboração de materiais didático-pedagógicos: concretos, escritos e áudio-visuais; e a discussão crítica de livros textos que se encontram no mercado, de forma a levar o futuro professor a ter um embasamento que lhe permita propor alternativas efetivas para o ensino-aprendizagem quando do seu exercício profissional.

Foi realizado um levantamento dos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática de algumas universidades brasileiras. Das estruturas curriculares analisadas, poucos cursos de Licenciatura em Matemática possuem o conteúdo de Equações Diferenciais numa disciplina específica na grade curricular. Dentre estes, podemos destacar o curso da Universidade Estadual do Maranhão, em Imperatriz.

Em muitos cursos das outras universidades, o estudo de Equações Diferenciais é bem simplificado, se localiza nas disciplina de Cálculo, com reduzida carga horária e ênfase apenas na resolução de alguns tipos de equações.

Esta redução das Equações Diferenciais a um mero conteúdo do Cálculo nos causa uma certa indignação, uma vez que se prega, atualmente, a necessidade de formação de um Professor de Matemática com multiplicidade de conhecimentos específicos, pedagógicos e disciplinares e com flexibilidade de pensamento, fatores para os quais as Equações Diferenciais podem contribuir por oferecer um conhecimento que permite elaborar modelos de evolução cósmica, investigar os mistérios do mundo microscópico das partículas que compõem a matéria, ao mesmo tempo em que permite desenvolver novas fontes de energia, criar novos materiais, produtos e tecnologias.

Incorporada à cultura e integrada como instrumento de desenvolvimento tecnológico, a modelagem tornou-se necessária para a formação da cidadania contemporânea. Espera-se, pelo ensino de Equações Diferenciais nas Licenciaturas de Matemática que o professor receba uma contribuição para formação de uma cultura científica efetiva, que permita ao indivíduo interpretar os fatos, fenômenos e processos naturais, situando e dimensionando a interação do ser humano com a natureza e como parte da própria natureza em transformação. Para tanto, é essencial que o conhecimento das Equações Diferenciais esteja incorporado por esse profissional para que, na sua prática docente na educação básica, ensinos fundamental e médio, a criação de modelos e os estudos de taxa de variação, evidentemente sem o uso do Cálculo Diferencial e Integral, isto é, com métodos numéricos e intuitivos, possam ser apresentados como parte integrante dos conteúdos a serem ministrados num trabalho interdisciplinar com as Ciências no ensino fundamental, e com a Física, Química, Biologia no ensino médio e nos cursos superiores da área de exatas, o trabalho com as disciplinas tecnológicas, da formação profissional.

O aprendizado das Equações Diferenciais promove a articulação de toda uma visão de mundo, de uma compreensão dinâmica do universo, mais ampla do que nosso entorno material imediato, capaz, portanto, de transcender nossos limites temporais e espaçais. Assim, ao lado de um caráter mais prático, as Equações Diferenciais revelam também uma dimensão filosófica, com uma beleza e importância que devem ser contempladas no processo educativo. Para que esses objetivos se transformem em linhas orientadas para o Projeto Pedagógico é indispensável traduzi-las em termos de competências e habilidades, superando a prática tradicional de aquisição de conteúdos, o que é facilitado pela modelagem.

Porém, o ensino de Equações Diferenciais, afirmam LAUDARES & MIRANDA (2007), tem-se realizado freqüentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas desarticuladas, distanciadas do mundo vivido pelos alunos e professores, logo, vazios de significado. Privilegia a teoria, desde o primeiro momento, em detrimento de um desenvolvimento gradual de abstração que parta da prática e de exemplos concretos. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através de competências a serem adquiridas. Apresenta o conhecimento como um produto acabado, fruto da genialidade de mentes como a de Galileu, Newton ou Einstein, contribuindo para que os alunos concluam que "não resta mais nenhum problema significativo a resolver". Além disso, envolve uma lista de conteúdos demasiadamente extensa, que impede o aprofundamento necessário e a instauração de um diálogo construtivo.

Esse quadro não decorre unicamente do desespero dos professores, nem de limitações impostas pelas condições escolares deficientes. Expressa, ao contrário, uma deformação estrutural, que veio sendo gradualmente introjetada pelos participantes do sistema escolar e que passou a ser formada como coisa natural.

É preciso rediscutir qual Matemática ensinar para possibilitar uma melhor compreensão do mundo e uma formação para a cidadania mais adequada. Não existem soluções simples ou únicas, nem receitas prontas que garantam o sucesso. Essa é a questão a ser enfrentada pelos educadores de cada instituição que forma professores de matemática em suas licenciaturas, de cada realidade social, procurando corresponder aos desejos e esperanças de todos os participantes do processo educativo, reunidos através de uma proposta pedagógica clara. É sempre possível, no entanto, sinalizar aqueles aspectos que conduzem o desenvolvimento do ensino na direção desejada.

Não se trata, portanto, de elaborar novas listas de tópicos de conteúdo, mas, sobretudo de dar ao ensino de Equações Diferenciais novas dimensões. Isso significa promover um conhecimento contextualizado e integrado à vida de cada estudante. Apresentar uma metodologia didática que explica a queda dos corpos, o movimento da lua ou das estrelas no céu, o arco-íris e também os raios laser, as imagens da televisão e as formas de comunicação. Uma modelagem que explique os gastos da “conta de luz”, ou o consumo diário de combustível e também as questões referentes ao uso das diferentes fontes de energia em escala social e econômica incluída a energia nuclear, com seus riscos e benefícios. Uma disciplina que discuta a origem do universo e sua evolução. Que trate do refrigerador ou dos motores a combustão, das células fotoelétricas, das radiações presentes no dia-a-dia, mas também dos princípios gerais que permitem generalizar todas essas compreensões. Uma disciplina, cujo significado o estudante possa perceber no momento em que aprende, e não em um momento posterior ao aprendizado.

Para isso, é imprescindível considerar o mundo vivencial dos estudantes, sua realidade próxima ou distante, os objetos e fenômenos com que efetivamente lidam ou os problemas e indagações que movem sua curiosidade. Ou seja, feitas as investigações, abstrações e generalizações potencializadas pelo saber das Equações Diferenciais, em sua dimensão conceitual, o conhecimento volta-se novamente para os fenômenos significativos ou objetos tecnológicos de interesse, agora com um novo olhar, como o exercício de utilização do novo saber adquirido, em sua dimensão aplicada ou tecnológica. O saber assim adquirido reveste-se de uma universalidade maior que o âmbito dos problemas tratados, de tal forma que passa a ser instrumento para diferentes investigações. Essas duas dimensões conceitual/universal e local/aplicada, de certa forma, constituem-se em um ciclo dinâmico, na medida em que novos saberes levam a novas compreensões do mundo e a colocação de novos problemas. Portanto, o conhecimento das Equações Diferenciais “em si mesmo” não basta como objetivo, mas deve ser entendido, sobretudo como um meio, um instrumento para a compreensão do mundo, podendo ser prático, mas permitindo ultrapassar o interesse imediato.

Aprender deve ser preocupação central, já que o saber da futura profissão pode ainda estar em gestação, devendo buscar-se competências e habilidades que possibilitem a independência de ação e aprendizagem futura.

Entretanto, habilidades e competências concretizam-se em ações, objetos, experiências que envolvem um determinado olhar sobre a realidade, ao qual denomina-se Ciência, podendo ser desenvolvida em tópicos diferentes, assumindo formas diferentes em cada caso, tornando-se mais ou menos adequadas dependendo do contexto em que estão sendo desenvolvidas. Forma e conteúdo são condicionados aos temas a serem trabalhados.

Para LAUDARES & MIRANDA (2007), as Equações Diferenciais possuem uma maneira própria de lidar com o mundo, que se expressa não só através da forma como representa, descreve e escreve o real, mas, sobretudo na busca de regularidade, na conceituação e quantificação das grandezas, na investigação dos fenômenos, no tipo de síntese que promove. Aprender essa maneira de lidar com o mundo envolve habilidades específicas relacionadas à compreensão e investigação em matemática.

Contudo, para que de fato possa haver uma apropriação desses conhecimentos, as leis e princípios gerais precisam ser desenvolvidos passo a passo, a partir dos elementos próximos, práticos e vivenciais.

As habilidades a serem desenvolvidas na medida em que se constroem com referência no mundo vivencial, possibilitam uma articulação com outros conhecimentos, uma vez que o mundo real não é em si mesmo disciplinar. Assim, a competência para reconhecer o significado do conceito de tempo como parâmetro físico, por exemplo, deve ser acompanhada da capacidade de articular esse conceito com os tempos envolvidos nos processos biológicos ou químicos e mesmo sua contraposição com os tempos psicológicos, além da importância do tempo no mundo da produção e dos serviços.

As Equações Diferenciais expressam relações entre grandezas através de fórmulas, cujo significado pode também ser apresentado em gráficos. Mas, todas essas formas são apenas as expressões de um saber conceitual, cujo significado é mais abrangente. Assim, para dominar os processos de utilização das Equações Diferenciais é necessário ser capaz de ler e traduzir uma forma de expressão em outra, discursiva ou através de um gráfico, ou de uma expressão matemática, aprendendo a escolher a linguagem mais adequada a cada caso.

Expressar-se corretamente na linguagem matemática requer identificar as grandezas físicas que correspondem às situações dadas, sendo capaz de distinguir, por exemplo, calor de temperatura, massa de peso, aceleração de velocidade.

Lidar com o arsenal de informações atualmente disponíveis depende de habilidades para obter, sistematizar, produzir e mesmo difundir informações, aprendendo a acompanhar o ritmo de transformação do mundo. Isso inclui ser um leitor crítico e atento das noticias científicas divulgadas de diferentes formas: vídeos, programas de televisão, sites da internet ou notícias de jornais.

As Equações Diferenciais, percebidas como atividade social humana, emergem da cultura e levam à compreensão de que modelos explicativos não são únicos nem finais, tendo se sucedido ao longo dos tempos.

Essa percepção do saber matemático como construção humana constitui-se condição necessária, mesmo que não suficiente, para que se promova a consciência de uma responsabilidade social e ética.

O objetivo do ensino de Equações Diferenciais é possibilitar aos estudantes o desenvolvimento de suas habilidades investigativas, formando um profissional com uma vocação à pesquisa e a modelagem matemática na sua prática profissional.

Para alcançar este objetivo do ensino, cresce o interesse dos autores de livros didáticos para edição de obras com o conteúdo de Equações Diferenciais.

Foram analisados os seguintes livros didáticos em relação ao conteúdo e metodologia de Equações Diferenciais

- Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno de BOYCE & DIPRIMA (2002);
- Equações Diferenciais Elementares: com Problemas de Contorno de EDWARDS & PENNEY (1995);
- Um Curso de Cálculo de GUIDORIZZ (2001);
- Cálculo de STEWART (2001);
- Cálculo de THOMAS (2002)
- Equações diferenciais com aplicações em modelagem de ZILL (2003).

Tem-se como ponto positivo a variedade de livros de Equações Diferenciais escritos, especificamente, para contemplar tal conteúdo, em obras desvinculadas do Cálculo.

Denota-se a importância que os autores dão para as Equações Diferenciais. Constata-se que se tem uma preocupação com a abordagem da formulação, resolução de problemas e iniciação à modelagem, além da apresentação dos métodos de resolução das equações. Os livros analisados apresentam abundantes situações, problemas a abranger fenômenos das ciências, sejam físicos, químicos, biológicos, econômicos.

Desta forma, o professor de matemática pode, num esforço interdisciplinar, introduzir seus estudantes no equacionamento de problemas e à modelagem, saindo da posição restrita da algebrização e treinamento de algoritmos matemáticos, apoiados nas recentes edições de livros de Equações Diferenciais a contemplar a abordagem de problemas de Física, Química, Biologia e Economia, entre outras do conhecimento.

5 PRODUÇÃO ACADÊMICA DO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Dentre as comunicações em eventos científicos recentes e artigos em periódicos, destacam-se 8 (oito) trabalhos referentes ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral e especificamente em Equações Diferenciais.

A grande maioria dos trabalhos não está ligada diretamente ao tema estudado nessa dissertação, porém têm um fator em comum, ou seja, a preocupação com o ensino superior de Cálculo. Dentre os temas relativos ao ensino de Cálculo, destacam-se:

- Uso de tecnologias computacionais para o aprendizado do conceito de integral;
- Produção de significados para o conceito de continuidade;
- Matemática como vocação;
- Modelagem Matemática no ensino de Cálculo Numérico;
- Utilização do LOGO, linguagem computacional para o aprendizado matemático;
- Aprendizado de resolução de Equações Diferenciais por métodos numéricos utilizando o Excel;
- Iniciação à modelagem em cursos de Engenharia.

Nota-se que a academia tem demonstrado uma preocupação muito grande no que se refere ao aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de nível superior, pois tanto as Licenciaturas em Ciências Exatas, como os Bacharelados em outras áreas afins desenvolvem o ensino de Cálculo fundamentado em algoritmações e memorizações de fórmulas e conceitos.

MELO (2002) em seu trabalho sobre o aprendizado do conceito de integral, demonstra essa preocupação. Fica evidente que existe uma necessidade de novas metodologias para o ensino de Cálculo. A aula tradicional pode continuar existindo, porém não se justifica é que ela seja o único recurso que o professor utiliza para o desenvolvimento da disciplina.

> Os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, na maioria das vezes, têm sido “ensinados e aprendidos ”por meio de aulas que valorizam a memorização a aplicação de técnicas, regras e algoritmos. Dessa forma, os professores têm a convicção de que o conteúdo foi “ensinado” e os alunos têm a convicção de que o conteúdo foi “aprendido”. No entanto, observa-se, no Ensino Superior, que o curso de Cálculo Diferencial e Integral I, considerado básico nos cursos da área de ciências exatas, apresenta um índice muito alto de abandono e repetência. Esta questão foi constatada em 1992 por um estudo realizado por Masetto(1992), que apontou que cerca de 80% a 85% dos alunos foram reprovados. Barbosa &Neto(1992), realizaram um estudo no segundo semestre de 1992 em relação ao rendimento dos alunos na mesma disciplina, e constataram que apenas 27,9% dos alunos obtiveram aprovação.(MELO, 2002, p.10)

Com a era da informação, as oportunidades de inovação metodológica se ampliam, mas o grande questionamento é “Como se deve ensinar Cálculo Diferencial e Integral, atualmente?”. MELO (2002) também coloca essa preocupação:

> Atualmente, muitas formas de ensino e de aprendizagem, não se justificam mais, perde-se tempo demais, ensina-se e aprende-se muito pouco; tanto professores como alunos têm a clara sensação de que a maioria das aulas “convencionais” estão ultrapassadas. Mas o quê mudar? Como ensinar e aprender numa sociedade na era da informação? (MELO, 2002, p.10)

Segundo MELO (2002) os meios computacionais apresentam-se como uma alternativa para a melhoria do aprendizado de Cálculo, criando possibilidades de experimentação para o aluno, fazendo com que os algoritmos não sejam simplesmente decorados, mas sim descobertos. Essas atividades investigativas foram elaboradas com a metodologia de Ponte (2003):

> A realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e a avaliação do trabalho realizado. (PONTE, 2003, p.20).

Os meios computacionais possibilitam ao estudante de Cálculo a passagem por todas essas fases, conciliando o fator experimental com a abstração matemática que leva a criação de modelos e/ou algoritmos para a concretização da solução do problema em estudo e a generalização deste para futuros estudos.

Em sua pesquisa, MELO (2002) propõe atividades a serem realizadas no laboratório de informática, obtendo os seguintes resultados:

> Verificou-se, no final, que as atividades, proporcionaram condições de responder à questão formulada na Problemática. Os alunos são capazes de construir o conceito da Integral, por meio de atividades que levem em conta sua gênese e seu desenvolvimento histórico, utilizando um software matemático como ferramenta. Mostrar-se-ão a seguir algumas dificuldades apresentadas pelos alunos nas atividades desenvolvidas:
>
> - Ao comparar as respostas escritas das duplas com os comentários constatou-se que eles apresentam dificuldades em expressar-se por escrito utilizando a linguagem matemática.
> - Dificuldade na aplicação do conceito de domínio e imagem de uma função em novas situações-problema.
> - Dificuldade em desenvolver cálculos que necessitem transformar números da representação decimal ou dízimas periódicas para a representação fracionária.
> - Dificuldades em desenvolver cálculos com aproximações numéricas.
> - A maioria dos alunos têm a concepção de que o infinito é um número real.
> - Alguns dos alunos têm a concepção de que a tendência para zero é igual a zero e que a tendência para o infinito é igual a um número “bastante grande”.
> - A maioria dos alunos teve dificuldades em relacionar o conceito do Limite ao conceito de integral. Um dos motivos, talvez, seja que esses conceitos são apresentados, separadamente, tanto nas aulas como na maioria dos livros didáticos.
> - A maioria dos alunos não têm o significado da área de uma figura e o do número obtido por meio de algoritmos.
> - A maioria dos alunos não tem o significado matemático de “tendência” ou “aproximar-se”.(MELO,2002,p.156).

Os problemas apresentados decorrem do processo intenso de algoritmização, que ocorre no ensino de Cálculo, não possibilitando o trabalho intuitivo do estudante partindo diretamente para a abstração. Dessa forma, nega-se o ato mais comum de criação da matemática, que parte da experimentação na tentativa de resolver um problema e somente depois realizar uma abstração, possibilitando a generalização.

Outro fator importante, esse abordado por REIS (2001) é a formação de professores, pois os profissionais formados por um processo de algoritmização, tendem na prática a reproduzir esse aprendizado na formação dos estudantes das séries fundamentais. Ainda sobre esse tema, REIS (2001) afirma:

> No Brasil, tem-se observado, mais recentemente, que as disciplinas de Análise, como "Análise I" ou "Análise Real" estão sendo remetidas para o grupo de disciplinas eletivas / optativas, dando ao estudante de Licenciatura, portanto, a opção por cursá-las ou não. Isto nos traz uma série de indagações: Fica, então, a critério do estudante decidir se Análise é ou não importante para sua formação de professor? Por outro lado, perguntamos: Os próprios professores do curso de Licenciatura não consideram mais a disciplina de Análise, importante para a formação profissional de seus alunos? (REIS, 2001,p.80)

Quanto ao estudo do ensino de Equações Diferenciais, poucos são os trabalhos que podem ser relacionados.

Pelas observações feitas até agora, se constata a necessidade de um novo caminho pedagógico que modifique o pensamento do professor de matemática frente a sua disciplina, e mais ainda, frente aos seus alunos. Para tal, os trabalhos concluem que é necessário levar o professor a uma reflexão de sua postura enquanto agente transformador, levando os alunos a se motivarem para o estudo de Cálculo.

Segundo STAHL (2003), a modelagem matemática pode se configurar como uma alternativa para o aprendizado de Cálculo, pois possibilita ao professor uma mudança na sua metodologia de trabalho, tornando-o mais reflexivo e auto crítico, sendo ele obrigado a estar em constante aperfeiçoamento profissional. Essas atitudes por parte do docente se refletem no discente que se torna ator participativo do processo de ensino-aprendizagem.

Uma ferramenta importante para a modelagem e o ensino de Cálculo são as tecnologias computacionais, pois possibilitam a experimentação e o desenvolvimento da intuição matemática. OLIVEIRA (1999), em seu trabalho sobre o uso de calculadoras em salas de aula, afirma:

> A concepção de saber que se delineia neste quadro está vinculada a uma concepção de ensino e de aprendizagem que faz do professor de Matemática um catalisador dinâmico da aprendizagem, que valoriza os processos de raciocínio e proporciona aos seus alunos oportunidades de desenvolvimento de capacidades de utilização de instrumentos de tecnologia, destacando o tripé (o quê - onde -como) para enfatizar a necessidade de se descobrir o que é necessário, onde ele se encontra e quais as formas de acesso para poder utilizá-lo na resolução de problemas do cotidiano. (OLIVEIRA, 1999,p.156)

Estes estudos fizeram parte da revisão bibliográfica desse trabalho. Constata-se que a problemática envolvendo o ensino de Equações Diferenciais em cursos de Licenciatura em Matemática é pouco tratada/estudada pelos educadores matemáticos, pois a maioria dos trabalhos estudados abordam principalmente o Cálculo Diferencial e Integral deixando o estudo das Equações Diferencias apenas como um anexo do Cálculo.

Em paralelo a este trabalho de Mestrado, encontrou-se apenas uma pesquisa da doutoranda Sueli Liberatti Javaroni, orientada pelo Prof. Dr. Marcelo Carvalho Borba, do Programa de Pós-graduação de Educação Matemática da UNESP de Rio Claro / São Paulo, que realiza uma abordagem geométrica ou qualitativa das soluções das Equações Diferenciais, com a utilização do conceito de "campo de direção".

Nessa pesquisa, ela afirma que poucas são as abordagens relativas ao ensino de Equações Diferenciais, pois pouco tem se publicado e investigado acerca do tema, o que foi também constatado pela pesquisa que originou esta dissertação. Afirma também que o desenvolvimento de pesquisas pode contribuir para a análise das mudanças ocorridas no contexto do ensino e aprendizado desta disciplina e o entendimento sobre as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes no seu aprendizado.

Na sua pesquisa, JAVARONI (2005) chega a alguns resultados:

- a experimentação e a visualização conduziram os estudantes a uma discussão sobre as representações múltiplas das Equações Diferenciais;
- trabalhando no Excel com a tabela, no Winplot com o gráfico dos campos de direções e no Maple com o campo de vetores e curvas de soluções, os alunos foram levados a perceber que determinar as soluções de uma Equação Diferencial Ordinária consiste em encontrar uma família de soluções.

6 UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA O PROCESSO DE ENSINO/APREDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.

O problema desta pesquisa é: **“Como a Equação Diferencial com a resolução de problemas e iniciação à modelagem em Ciências complementa a aprendizagem da derivada, ressignificando-a como taxa de variação?”**

Esta questão é uma preocupação desde os tempos de graduação do autor desta dissertação pois, em seu curso de Licenciatura de Matemática não teve um contato maior com as Equações Diferenciais, sendo que estas foram trabalhadas superficialmente, como um conteúdo da disciplina de Cálculo.

Contudo com a sua vida profissional levando-o a ministrar aulas na Universidade Estadual do Maranhão, este passa a observar que as Equações Diferenciais podem ser trabalhadas como uma disciplina, tendo como principal objetivo, a aplicação dos conceitos de taxa de variação aprendidos no Cálculo Diferencial, com resolução e formulação de problemas e ainda, iniciação à modelagem de fenômenos das ciências.

Entretanto, o autor observa que mesmo sendo uma disciplina isolada, a metodologia utilizada não possibilitava que os alunos alcançassem este objetivo, pois o processo puramente algébrico fazia com que o aprendizado da disciplina fosse mínimo, a tal ponto que, em diálogos com ex-formandos estes relatavam que a disciplina Equações Diferenciais de nada contribuiu para a sua formação profissional e que pouco se lembravam de seus conteúdos.

Isso levou o autor a refletir sobre o trabalho com Equações diferenciais, buscando soluções metodológicas para o fraco desempenho dos alunos nessa disciplina. Porém, realizando uma leitura no livro de BASSANEZI (2002, p.205), um trecho chamou-lhe a atenção:

> Não examinar a educação Matemática nesse contexto é uma falha imperdoável principalmente em países de desenvolvimento deficiente como o nosso. Portanto, em cursos de aperfeiçoamento e capacitação de professores, muito mais relevante que estudar detalhes de um programa ou metodologia dentro de uma filosofia de ensino de Matemática abstrata e pautada por tradições obsoletas é aproveitar a oportunidade para examinar a fundo questões mais abrangentes como: Por que estudar Matemática? Por que ensinar Matemática? Ou como fazer com que a matemática que ensinamos aos alunos contribua mais diretamente para a melhoria da qualidade de vida de nosso povo? Assim, somos levados a questionar a estrutura de todo o ensino, em particular a do de Matemática, na tentativa de transferir a ênfase posta no conteúdo abstrato e na quantidade de

> conhecimento transmitidos aos alunos para a aplicação de uma metodologia que desenvolva atitudes positivas e capacidades de matematizar situações reais, de pensar com lógica, colher informações e teorizar adequadamente as situações mais diversas.

Este pensamento veio ao encontro das ansiedades do autor e preocupação com o trabalho acadêmico e de investigação, juntamente com seu orientador de Mestrado, que é professor de Cálculo e de Equações Diferenciais. Foi construído o objeto de pesquisa em consonância com a trajetória investigativa em cursos de Engenharia do orientador e do autor dessa dissertação. A proposta é tornar a disciplina Equações Diferenciais, menos abstratas e mais aplicada, dando a oportunidade ao aluno, de vivenciar a construção de conhecimentos, através da modelagem matemática.

Sendo assim, a presente pesquisa tem como objetivo principal mostrar como o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias pode ressignificar o entendimento do conceito de derivada no estudo de fenômenos das ciências, através de taxa de variação, para contribuição ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Licenciatura de Matemática.

Os sujeitos de estudo foram os estudantes do curso de Licenciatura de Matemática dos Campos da UEMA de Imperatriz, que cursaram a disciplina Equações Diferenciais nos períodos de 2007.1 e 2007.2.

Esta dissertação é uma etapa obrigatória de um Mestrado Profissional, que também exige a realização de um Estágio. Assim, o autor desta dissertação participou de aulas de Equações Diferenciais do curso de Engenharia de Controle e Automação da PUC Minas ministradas pelo orientador desta pesquisa, que desenvolve atividades de iniciação à modelagem. Também participou de aulas de Cálculo Diferencial e Integral, no que se refere ao conteúdo de Equações Diferenciais, do curso de Licenciatura em Matemática da PUC Minas.

6.1 Metodologia

Adotou-se a pesquisa qualitativa empirista com a elaboração de atividades investigativas pela iniciação da modelagem e aplicação para os alunos do curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão. Segundo

FIORENTINI & LORENZATO (2006), o conhecimento e as crenças dos professores mudam continuamente, afetando significativamente a forma como os mesmos organizam e ministram as suas aulas. Existe portanto um esforço por parte dos pesquisadores em Educação Matemática, para que as mudanças da prática docente em sala de aula estejam acompanhadas também de um processo que leve o estudante a construir o seu conhecimento através de processos de modelagem. Sobre esse processo de busca de mudanças na prática docente FIORENTINI & LORENZATO (2006, p.51) diz:

> São inúmeras as pesquisas que procuram investigar a relação entre a cultura da matemática escolar, a cultura matemática que o aluno traz para a escola e a cultura matemática produzida pelos trabalhadores (adultos e algumas crianças trabalhadoras) ao realizar suas atividades profissionais.

A técnica utilizada sobre o sujeito de estudo foi direta e intensiva, através da aplicação e observação das atividades investigativas, realização de entrevistas com alguns alunos para melhor analisar a estrutura, a elaboração e a aplicação dessas mesmas atividades.

O objeto de estudo se inseriu na abordagem interdisciplinar. As disciplinas que se relacionaram foram: na Matemática (o Cálculo Diferencial e Integral), e nas Ciências (Física, Biologia, Estatística, Economia). Foram observadas também quais são as motivações e o nível de envolvimento dos alunos na formulação e resolução de problemas, e iniciação à modelagem.

6.2 Elaboração de atividades investigativas

Foram propostas aos alunos do curso de Licenciatura da UEMA (Imperatriz, Maranhão), 3 (três) atividades investigativas, para iniciá-los à aquisição de competências de formular, resolver problemas e modelar. As atividades investigativas foram elaboradas de acordo com a metodologia de Ponte (2000, p.20):

A elaboração e a aplicação dessas atividades foram realizadas de tal forma que o estudante foi levado a modelar por intuição e aplicar de conhecimentos adquiridos em ciências e cálculo.

6.3 Aplicação das atividades investigativas

Segundo PONTE (2000, p.26) o início da aplicação da atividade investigativa busca, em geral, a formação de atitudes, promovendo uma nova postura do pensamento matemático do aluno para a resolução de problemas e iniciação à modelagem.

No primeiro momento, a expectativa foi que o estudante se empenhasse na aplicação, análise e no desenvolvimento contínuo dos seus conhecimentos em ciências, procurando de forma distinta descrever o fenômeno sem a preocupação com o algebrismo e a algoritmização das formas de resolução de Equações Diferenciais.

Para este primeiro momento, foi disponibilizado um tempo de 150 minutos o que corresponde a 3 horas aulas, os alunos foram dispostos em duplas para que fosse possível haver uma interação entre eles.

Esta atuação possibilitou que, no segundo momento, ocorresse a sociabilização dos resultados obtidos pelos estudantes buscando uma melhor visão do retorno esperado pela prática investigativa. É importante questionar os resultados, buscando explicações dos estudantes sobre como eles chegaram aos modelos. Acima de tudo, é fundamental ressaltar que a constante divulgação das informações facilita o entendimento e a criação de alternativas às soluções ortodoxas.

Houve um terceiro momento, no qual os estudantes, munidos das teorias de resolução de equações diferenciais, voltaram a refazer as atividades, com a mesma disposição de tempo e duplas de alunos. Uma nova sociabilização ocorreu para discutir se o processo de modelagem facilitou ou não o aprendizado dos conceitos teóricos da resolução de equações diferenciais.

O quarto momento foi a resolução dos problemas propostos no laboratório de informática, para discutir as possibilidades de aproveitamento das ferramentas computacionais para o ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Para a realização dessa pesquisa, utilizou-se os instrumentos de observação e anotação dos momentos mais importantes da aplicação das atividades investigativas; estes por sua vez constituíram-se numa forma significativa de coleta de dados e/ou situações importantes para o estudo.

6.4 Resultados da pesquisa.

Durante o trabalho o pesquisador organizou a turma 2007.1 em 15 duplas, e a de 2007.2 em 13 duplas, para facilitar a interação e discussão das questões. No decorrer do tempo, ele acompanhou o desenvolvimento das atividades com pequenas intervenções nos momentos de sociabilização utilizando, principalmente, a técnica de observação. PONTE (2000, p.125) define da seguinte forma o processo de observação:

> Na verdade, a observação dos alunos enquanto trabalham é um processo de avaliação fundamental para dar informações ao professor. A sua atenção tanto pode incidir num ou noutro aluno que precisa de uma atenção individual como na atividade de um ou mais grupos. Essa observação é muitas vezes conduzida de modo seletivo, observando cada grupo ou cada aluno por sua vez. Ao observar, o professor não tem de se limitar a uma atitude passiva, pelo contrário, pode fazer perguntas aos alunos de modo a perceber melhor o que eles estão fazendo e a forma como estão pensando.

6.4.1 Primeira Etapa – Turma 2007.1

1ª Atividade

Responda as questões (baseando-se em seus conhecimentos das **Ciências**, pela sua **intuição** e faça **conjecturas** com seus conhecimentos prévios), do estudo de cada fenômeno dado.

1º Fenômeno: Resfriamento ou aquecimento de um corpo.

a) Consideremos um ambiente mantido a uma temperatura constante durante todo o tempo de uma experiência (denominada temperatura ambiente);
b) Numa primeira situação, tomemos um “corpo de prova” e o aquecemos num forno a uma temperatura dez vezes maior que a temperatura do ambiente;
c) Após o aquecimento introduzimos este “corpo de prova” no ambiente preparado no item (a);
d) A partir deste instante (zerar o cronômetro). Iniciar uma observação do fenômeno a se desenvolver.

Questões:

I) Verbalizar o fenômeno físico a partir da introdução do corpo no ambiente preparado;
II) Identificar as grandezas presentes na experiência;
III) Discriminar as variáveis e invariantes a declarar na experiência;
IV) Identificar as relações físicas entre as variáveis, que são a expressão da variação do fenômeno;
V) Formular ou modelar o fenômeno, através de uma lei ou função matemática;
VI) Expressar as condições iniciais e de contorno existentes nesse fenômeno;
VII) Numa outra situação, suponha que o “corpo de prova” tenha sido levado ao invés de um forno num refrigerador até atingir uma temperatura dez vezes menor do que a do ambiente; e depois introduzido no ambiente preparado, o que acontecerá em relação a primeira experiência;
VIII) Relacionando duas variáveis do fenômeno em observação, tente esboçar um gráfico, que retrate o fenômeno;
IX) O gráfico vai ser o mesmo nas duas situações? Se for diferente, trace os dois;
X) Na sua opinião, que função matemática representa melhor o fenômeno?

A primeira grande dificuldade foi explicar que, neste momento, não seria necessário o desenvolvimento de nenhum tipo de cálculo, mas sim da construção do pensamento matemático sobre o fenômeno ora estudado. Observou-se que a prática de utilização de fórmulas no ensino de matemática restringe, em muito, o pensamento dos estudantes, pois constantemente eles procuravam a utilização de uma fórmula matemática para explicar o fenômeno; porém, todas as duplas conseguem relatar que o corpo irá esfriar com o passar do tempo quando colocado no ambiente preparado. Quando a questão é a identificação das grandezas presentes na experiência, 73,3% conseguiram descrevê-las; o restante, no primeiro momento, sentiu dificuldade de diferenciar as grandezas presentes no problema.

Observa-se também que os estudantes possuem uma grande dificuldade de interpretação do texto. POLYA (1995, p.4), descreve esta situação da seguinte forma:

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo.

Notou-se que à medida que o estudante não conseguiu entender a mensagem do texto, o nível de motivação caiu, sendo necessário a intervenção do professor para realizar questionamentos e facilitar a retomada do problema, levando o estudante a restabelecer sua auto-estima na atividade proposta. O papel do professor, nesse caso, não é aquele da metodologia tradicional que traz consigo a resposta pronta do fato, mas sim a do orientador que promove alternativas de caminhos a serem seguidos na resolução do problema.

Variedades de grandezas foram levantadas, tais como: calor, temperatura, volume, energia, tempo. Os alunos tiveram dificuldades em relacionar as variáveis apresentando, portanto, uma grande dificuldade em determinar uma função ou lei matemática para o fenômeno.

A elaboração do gráfico foi também uma etapa trabalhosa, pois a maioria das duplas (85%) tinha uma visão linear do fenômeno, tanto no primeiro momento quando o corpo é aquecido, como no momento do resfriamento; pensava-se que este aquecimento/resfriamento aconteceria de tal forma que pudesse ser descrito por uma reta. Este fato se deu pela pouca experiência demonstrada em relação à análise matemática de um fenômeno prático.

2º Fenômeno: Crescimento Populacional

a) Consideremos uma população (de bactérias, animais ou humana) imune a doenças, ausência de predadores e com nutrição adequada.

b) Estudemos sua evolução.

QUESTÕES:

I) Verbalizar o fenômeno populacional a partir do momento inicial do estudo de seu desenvolvimento;

II) Identificar as grandezas presentes no fenômeno;

III) Discriminar as variáveis e invariantes a declarar no fenômeno;

IV) Identificar as relações entre as variáveis, que são a expressão da taxa variação do fenômeno;

V) Formular ou modelar o fenômeno, através de uma lei ou função matemática;

VI) Expressar as condições iniciais e de contorno existentes nesse fenômeno;

VII) Relacionando duas variáveis do fenômeno em observação, tente esboçar um gráfico, que retrate o fenômeno;

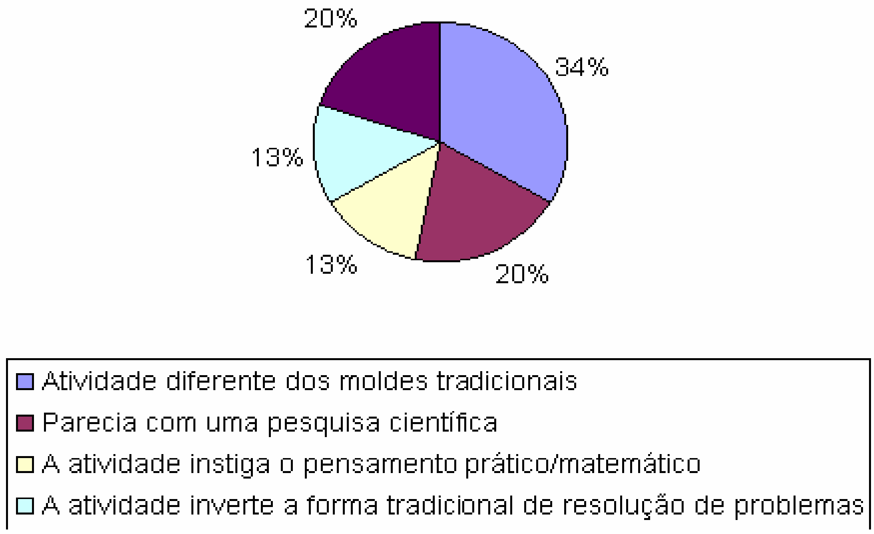
VIII) Na sua opinião, que função matemática representa melhor o fenômeno?

No estudo do crescimento populacional a metodologia foi mantida, os estudantes apresentaram dificuldades similares às do primeiro fenômeno, aqui também a idéia de linearidade prevaleceu, porém a “Idéia” de elaboração do modelo matemático foi aparentemente mais fácil, pois os estudantes conseguiram identificar as variáveis “População” (P) e “Tempo” (T), porém em nenhum momento apresentaram o conceito de constante de proporcionalidade para descrever a relação de crescimento populacional. O que ficou claro para eles é que P era uma função de T.

Após esta etapa passou-se para a “socialização” das respostas dos estudantes.

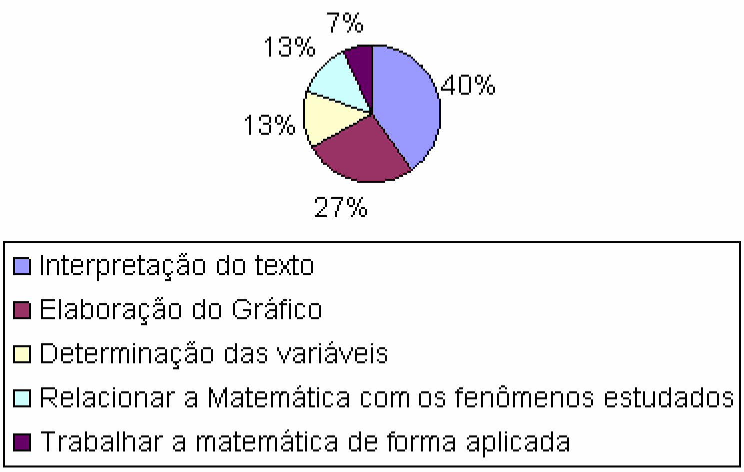
Questionados sobre a atividade, os alunos responderam:

Gráfico 01 – Avaliação dos estudantes sobre a atividade

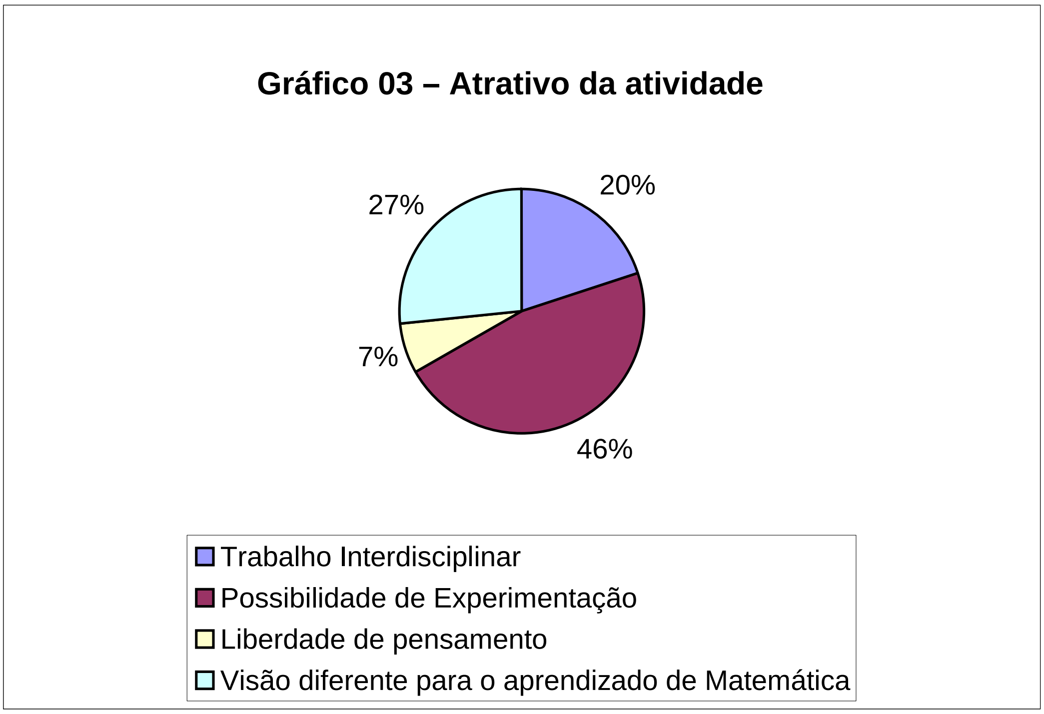


Sobre suas maiores dificuldades, eles relataram:

Gráfico 02 – Principal dificuldade na atividade



Qual foi o maior atrativo que você teve no momento da realização desta atividade?



2ª Atividade

A segunda atividade avançou para a formulação da situação-problema, requerendo agora do estudante a expressão da "lei física" inerente aos mesmos fenômenos da primeira atividade por uma Equação Diferencial. Nessa atividade, no enunciado ou apresentação verbal da situação, já foram dadas mais informações, alguns dados (condições iniciais ou de contorno) e alguns parâmetros. Foi solicitado uma formulação da solução, mas ainda **não** se exigiu a resolução da Equação Diferencial presente no modelo.

Para facilitar a interpretação do fenômeno bem como a elaboração do modelo, foram dadas "tarefas" através de alguns "passos". Foi informado aos estudantes que baseados nas informações da primeira atividade, ainda prevaleceria uma análise qualitativa com a formulação do modelo por uma Equação Diferencial e seu traçado do gráfico.

Os "passos" seguidos foram:

1. Declare as variáveis e os invariantes presentes nos fenômenos;
2. Enuncie a "lei" física e descreva o modelo matemático por uma Equação Diferencial;
3. Explicite as condições iniciais e de contorno;

4. Declare o que se pede no problema;
5. Esboce um gráfico que expresse a variação do fenômeno.

1º Fenômeno: Conhecendo-se a lei física onde a velocidade de resfriamento de um “corpo no ar” é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e do ar, formule uma lei matemática a qual expressa a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo e discrimine as condições iniciais, de contorno, os dados solicitados e os invariantes. Explique a diferença entre as 3 (três) opções.

a) Se a temperatura do ar é de 20º C e o corpo se resfria em 20 minutos de 100º C a 60º C, em quanto tempo sua temperatura descerá para 30º C?
b) Coloca-se um corpo à temperatura de 0º F em quarto mantido à temperatura constante de 100º F. Se após 10 minutos, a temperatura do corpo é de 25º F, determine a temperatura do corpo após 20 minutos;
c) Um corpo com temperatura desconhecida é colocado em um refrigerador mantido à temperatura constante de 0º F. Se após 20 minutos a temperatura do corpo é 40º F e 40 minutos depois é de 20º F, determine a temperatura inicial do corpo.

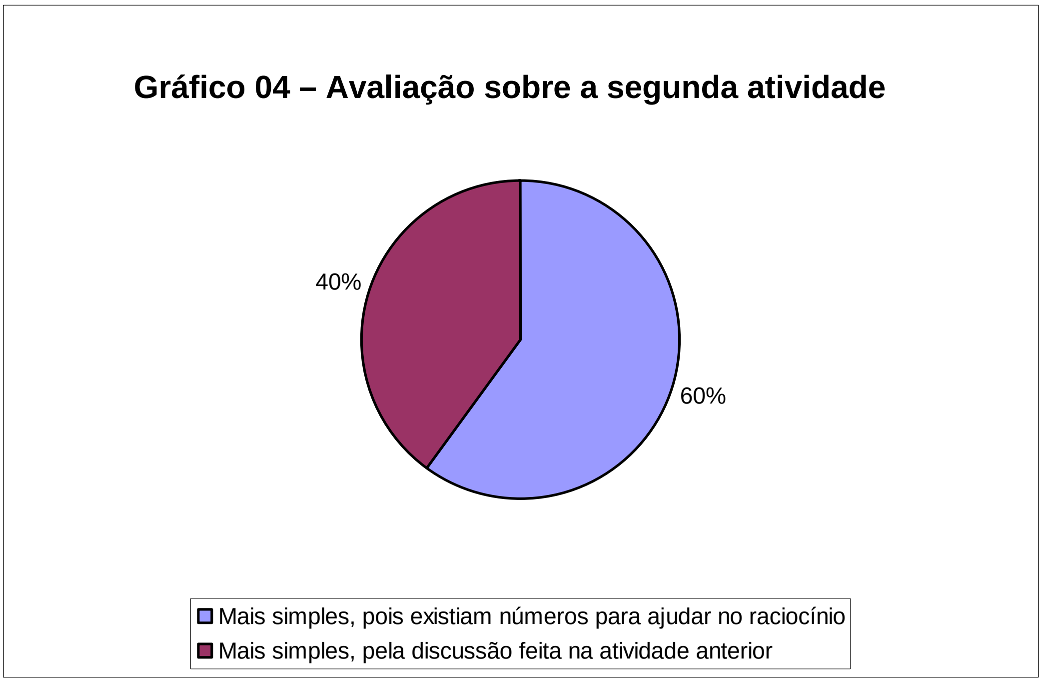
2º Fenômeno: A partir da lei populacional onde a população cresce ou decresce a uma taxa proporcional à população existente, formule uma solução matemática para os fenômenos nas seguintes condições discriminando as condições iniciais, de contorno, a lei matemática – taxa de variação correspondente – e o que está se pedindo em cada um dos problemas. Explique a diferença entre as 3 (três) opções:

a) Se inicialmente a população é de 1500 habitantes e depois de 10 anos é de 2000 habitantes, quanto tempo levará para ter 3000 habitantes?
b) Se após 10 anos a população triplica e 20 anos depois é de 1500 habitantes, determine a população inicial;
c) Um ator de cinema com 120 Kg deve emagrecer. A dieta que vai submeter o emagrecerá proporcionalmente ao peso de cada dia. Nestas condições, iniciada a dieta, o artista emagreceu 20 Kg em 40 dias, quanto tempo será necessário para que ele emagreça 1/3 do seu peso inicial?

Nessa etapa, os estudantes apresentaram maior facilidade na identificação das variáveis e até mesmo na determinação da lei física, o que demonstra que a discussão realizada em torno da primeira atividade facilitou muito o entendimento do processo matemático dessa segunda atividade, o principal problema apresentado foi novamente a elaboração do gráfico, pois algumas duplas ainda permaneceram com a idéia de linearidade para a descrição dos fenômenos.

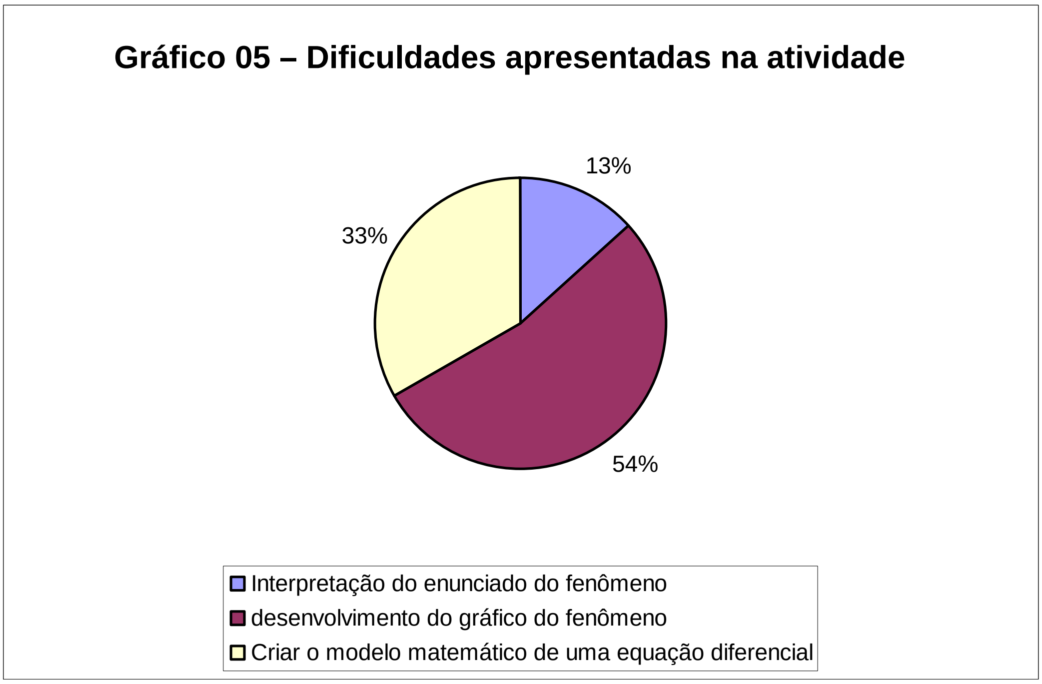
Na fase de socialização com os estudantes se discutiu os resultados dessa segunda atividade. Entre os fatores discutidos destacam-se:

Qual a sua análise sobre esta atividade?



Nessa segunda fase, se observou nas respostas dois parâmetros intrigantes nas respostas. Primeiro, o estudante achou a atividade mais simples porque ela tinha na sua essência componente numéricos, o que demonstra o caráter tradicional do aprendizado matemático. Já a maioria das duplas correlacionou a facilidade do desenvolvimento da atividade ao trabalho realizado na primeira atividade, o que muitos relataram como sendo a segunda um complemento do pensamento investigativo da anterior.

Qual a sua principal dificuldade na resolução dessa atividade?



Observa-se que houve uma grande melhora na questão da interpretação das idéias a partir do texto, porém o desenvolvimento do gráfico, como já citado, motivado pela persistência do conceito de linearidade do fenômeno e a dificuldade da criação do modelo diferencial, pois o conceito de taxa de variação não é bem claro no pensamento do estudante.

3ª Atividade

a) Volte à atividade 2 (dois) e "desenvolva a expressão matemática, isto é, resolva a equação diferencial", aplicando as condições iniciais e de contorno dadas para determinar as constantes de integração, nos fenômenos 1 e 2;
b) Para cada fenômeno dê o "modelo" na sua forma analítica (fórmula matemática) que é a solução da Equação Diferencial e o seu gráfico.

Nesse momento, foi requerido uma formulação do modelo em toda a sua plenitude, exigindo do estudante o desenvolvimento completo de todas as etapas, isto é, a resolução da equação diferencial, adquirindo-se a sua resolução que é uma função matemática e o traçado de seu gráfico, isto é, a construção do modelo.

Assim, integraliza-se a modelagem, com o fenômeno matematizado através da sua lei física atingindo seus três componentes:

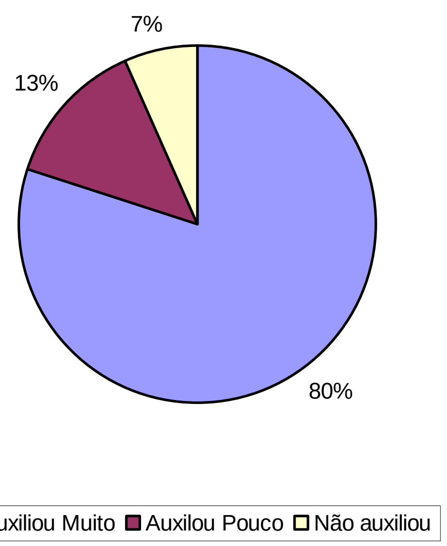
1. Equação Diferencial (expressão matemática da lei física);

2. Solução da Equação Diferencial determinada pelas condições iniciais e de contorno;
3. Traçado do gráfico, a mostrar o comportamento das variáveis intervenientes no fenômeno.

Essa atividade veio como um espaço para a validação das conjecturas realizadas na primeira atividade. Com a resolução da equação diferencial se tem a forma analítica do modelo e através dela se fez a validação do modelo teórico formulado na segunda atividade que foi apoiada nas hipóteses já levantadas. O traçado do gráfico, tendo como referencial a função matemática, ficou facilitado e também serviu como um verificador dos resultados obtidos pelos estudantes.

Na socialização dos resultados, os estudantes manifestaram dificuldades no processo de resolução da Equação Diferencial ao resolver as integrais, e na aplicação dos dados e condições iniciais e de contorno, ao eliminar as constantes indeterminadas de integração. Dado relevante nessa fase é que questionado sobre o auxílio as atividades a proporcionar o entendimento do conceito de taxa de variação, os estudantes responderam:

Gráfico 06 – Importância das atividades na formulação do conceito de taxa de variação



Verificou-se portanto que o processo de modelagem matemática através de atividades investigativas apresentam um resultado satisfatório na ressignificação do conceito de taxa de variação para o estudante de Cálculo.

4ª Atividade

Nessa fase, as duplas foram levadas ao laboratório de informática onde realizaram as tarefas investigativas propostas através do software MAPLE fabricado pela Maplesoft S/A. Essa ferramenta computacional proporciona ao estudante a possibilidade de realizar experimentações a partir de um fenômeno a ser estudado.

O MAPLE é um software matemático que tem variadas aplicações no estudo das Ciências. O Programa inteiro é muito grande, e a maioria do MAPLE não é armazenada conseqüentemente na memória ativa. O MAPLE divide-se em partes chamadas pacotes. Existem pacotes para fazer gráficos, trabalhar com Equações Diferenciais e Integrais e outros.

> "O uso do aplicativo Maple em atividades didáticas tem sido uma tarefa rotineira nos cursos básicos de graduação, pretendendo-se com isso democratizar o ensino, nas suas origens de formação e informação, principalmente no que se refere ao treinamento de especialista e educadores. Apesar das aparentes dificuldades estruturais acredita-se que a utilização de softwares é uma experiência muito rica no que se refere à participação dos alunos e ao construir pedagogicamente os conceitos matemáticos" (MARIANI, 2005, p. 2).

O pacote *student* é o que permite a manipulação de funções diferencias e integrais. Para trabalhar com elas, primeiro tem-se que carregar o pacote através do comando with (student), que significa utilizar ferramentas do cálculo.

O MAPLE é habilitado a executar uma variedade de cálculos e de manipulações complicados de matemática, MARIANI (2005, p.3) sita que o software maple trabalha com:

- Completamento de quadrados
- Montagem de equações
- Distância de pontos
- Limites
- Derivada
- Derivada parcial
- Integral

E muitas outras situações do Cálculo.

Uma das maneiras mais úteis para estudar funções e equações é estudá-los visualmente, e o MAPLE contém uma ferramenta gráfica poderosa para traçar os gráficos das funções de uma e duas variáveis. O pacote gráfico chama-se plots, para disponibilizar o pacote o comando necessário é o with(plots), que significa utilizar as ferramentas gráficas.

O MAPLE tem diante de suas aplicações muitas utilidades no estudo das Ciências, pois ele permite em seu ambiente de trabalho que Equações Diferenciais e gráficos tridimensionais sejam desenvolvidos de maneira prática e rápida. O programa aumenta as possibilidades de visualizações dos comportamentos físicos e químicos em diferentes situações, bastando para isso variar constante e intervalos no trabalho, o que o torna um eficiente laboratório virtual.

O MAPLE, assim como os demais softwares computacionais, possui uma enorme aplicabilidade nas disciplinas de graduação e pós-graduação seja para a resolução de problemas propostos em sala de aula, como também em projetos de pesquisas e trabalhos escolares.

O uso do MAPLE no ensino de Cálculo, segundo SANTOS & BIANCHINI (2002) tem como principais objetivos:

a) Despertar talentos;

b) Aguçar o interesse dos alunos;

c) Estimular a inovação nas disciplinas e projetos de pesquisa;

d) Descobrir novas alternativas para resolução de velhos problemas;

e) Iniciar pequenos projetos em sala de aula;

f) Trocar informações com outras instituições.

Ainda segundo SANTOS & BIANCHINI (2002) o *MAPLE* destaca-se ainda, como uma ferramenta de ensino, para o curso de graduação e pós-graduação, no que se refere:

a) Mecanizar o que for operacional;

b) Agilizar os procedimentos;

c) Obter maior confiabilidade nos resultados;

d) Gerar maior variedade de casos;

e) Concentrar a atenção no conceito;

f) Abordar aspectos novos de velhos problemas.

Enunciado: Investigue graficamente as soluções das equações diferenciais que você estará modelando a partir dos fenômenos descritos abaixo:

1º Fenômeno: Considere uma população de ratos do campo que habitam uma certa área rural. Vamos supor que a população de ratos cresce a uma taxa proporcional à população atual. Porém, existem na região corujas que são o seu predador natural e que elas matam B ratos do campo por dia.

a) Formular ou modelar o fenômeno, através de uma lei ou função matemática;
b) Vamos supor que o fator de proporcionalidade (taxa de crescimento) seja de 0,5 por mês e que as corujas matem 15 ratos por dia, como ficará o modelo matemático nestas condições?
c) Utilize os seguintes comandos do Maple:

> with(DEtools): (Enter)
> eq:=diff(p(t),t)=0.5*p(t)-450; (Enter)
> DEplot(eq,p(t), t=0..5, p=800..1000); (Enter)

A partir do gráfico do campo de direções responda:

1. O gráfico apresenta uma solução de equilíbrio para o fenômeno? Se sim, explique (verbalize) o que significa esta solução;
2. As soluções acima deste equilíbrio estão convergindo ou divergindo? Explique o significado destas soluções;
3. O que acontece com as soluções abaixo deste equilíbrio? Explique o significado destas soluções?
4. Que tipo de função matemática melhor representa a família de soluções apresentada no campo de direções?

Utilize o comando:

> dsolve(eq); (Enter)

A solução apresentada condiz, com a sua resposta do item (4)?
Visualize o gráfico da solução particular onde as condições iniciais são p(0)=950, utilizando o seguinte comando:

DEplot(eq,p(t),t=0..5,[[p(0)=930]], p=800..1000, linecolor=green); (Enter)

5. Esta solução condiz com a sua resposta do item (2)? Explique (verbalizar).

Na primeira fase, os estudantes obtiveram o seguinte resultado pelo software:

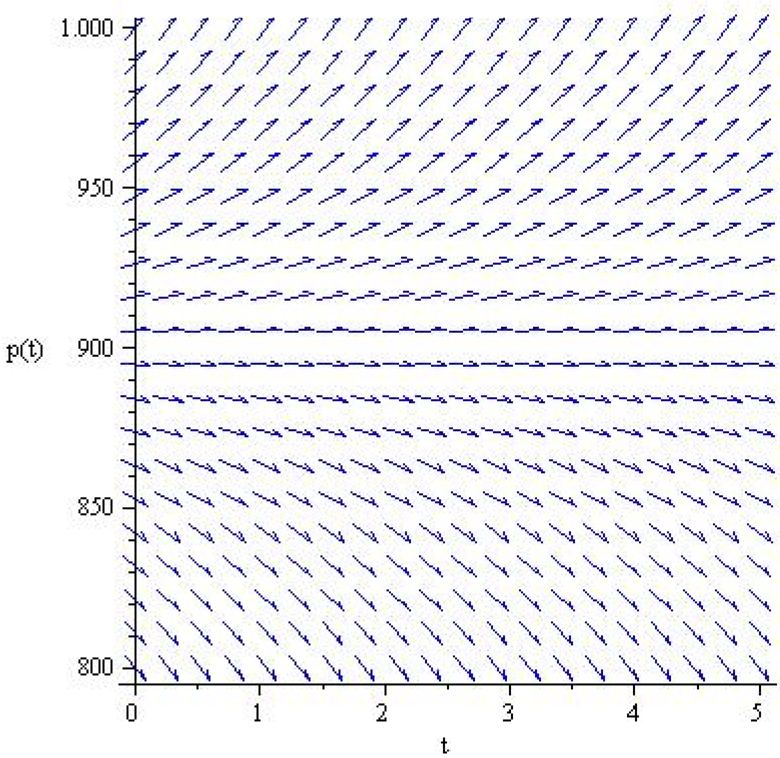


FIGURA 06 – Obtenção do Campo de Direções utilizando a ferramenta Maple.

Na socialização dos resultados, os alunos relataram que com a ferramenta computacional ficou mais simples visualizar o comportamento não linear do fenômeno, fator esse que foi predominante nas atividades anteriores; além disso, destaca-se a possibilidade da mudança de parâmetros e a rapidez como se pode visualizar as novas situações, isso faz com que o estudante habitue-se mais com a experimentação.

A partir da observação do gráfico, os estudantes concluiram que o modelo matemático que representa o fenômeno deve ser uma função exponencial, devido a forma como o campo de direções se configura, o que vem a ser comprovado quando ele solicita ao computador que resolva a equação diferencial, obtendo a seguinte solução:

$$p(t) = 900 + e^{\frac{1}{2}t} + c_1$$

Os estudantes observaram que esta é uma solução genérica, pois apresenta uma constante arbitrária c_1. Solicitaram uma solução particular tendo como parâmetro um valor inicial, obtendo o seguinte resultado:

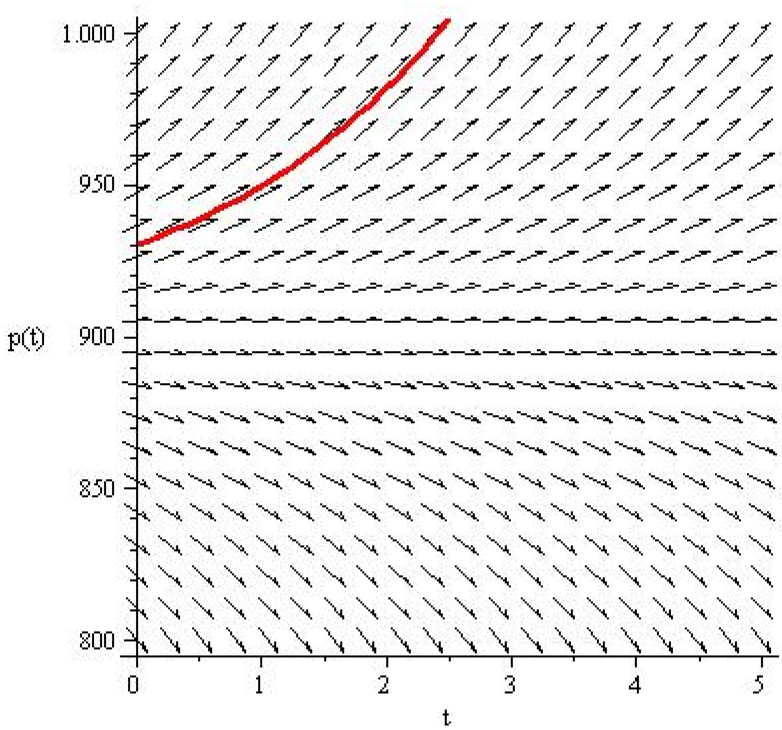


FIGURA 07 – Obtenção de uma solução particular utilizando a ferramenta Maple.

Nessa fase, o aluno tem variadas possibilidades de experimentação, sendo que para isso basta modificar os valores iniciais ou de contorno.

A ferramenta computacional é importante como um complemento do processo investigativo, pois com a sua agilidade proporciona ao estudante maior liberdade no trabalho, possibilitando também que sejam feitas simulações dos fenômenos através do software.

6.4.2 Segunda Etapa – Turma 2007.2

A reaplicação das atividades investigativas em um outro semestre com outra turma foi importante, pois possibilitou a confrontação dos dados obtidos na primeira etapa.

1ª Atividade

1º Fenômeno: Os estudantes também apresentaram dificuldade de trabalhar, num primeiro momento, sem a necessidade de desenvolvimento de nenhum tipo de cálculo, mas com a construção do pensamento matemático sobre o fenômeno ora estudado. A busca por uma fórmula matemática para a resolução do problema também ficou evidenciada nessa etapa. As duplas conseguiram relatar que o corpo irá esfriar com o passar do tempo quando colocado no ambiente preparado; no entanto, quando a questão é a identificação das grandezas presentes na experiência, apresentaram um índice próximo do apresentado na etapa anterior, isto é, 69% conseguiram descrevê-las.

A interpretação do texto se apresentou também como um grande obstáculo para a resolução da atividade

Outra dificuldade que se apresentou foi a elaboração do gráfico delineando índices próximos da anterior, pois a maioria das duplas 81% tinha uma visão linear do fenômeno, tanto no primeiro momento quando o corpo é aquecido como no momento do resfriamento, pensava-se que este aquecimento/resfriamento aconteceria de tal forma que pudesse ser descrito por uma reta.

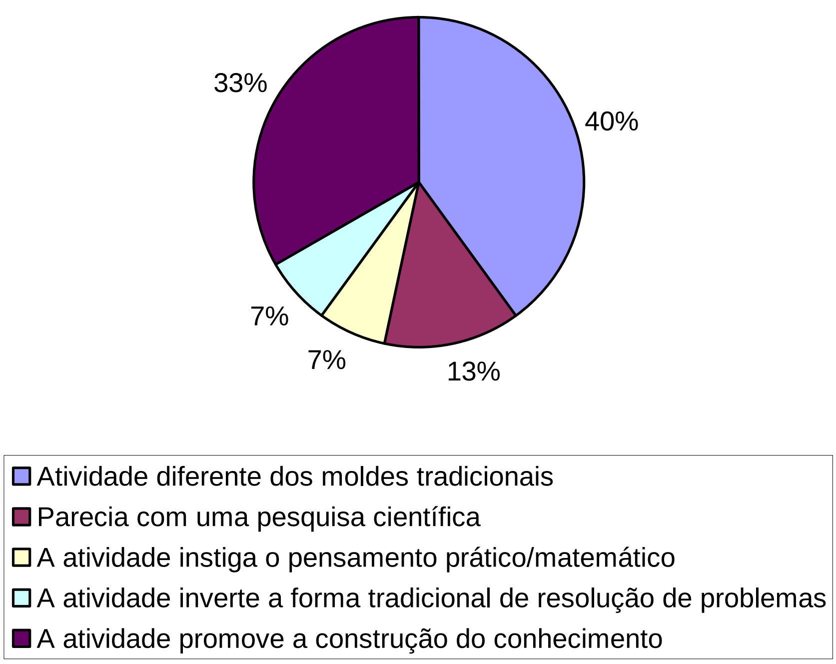
Também foram levantadas muitas variedades de grandezas tais como: calor, temperatura, volume, energia, tempo. Também tiveram dificuldades em relacionar as variáveis apresentando portanto, uma grande dificuldade em determinar uma função ou lei matemática para o fenômeno.

2º Fenômeno: No estudo do crescimento populacional, a metodologia foi mantida. Os estudantes apresentaram dificuldades similares às apresentadas na primeira etapa.

Na “socialização” das respostas dos estudantes, procurou-se realizar os mesmos questionamentos para facilitar o confronto das respostas.

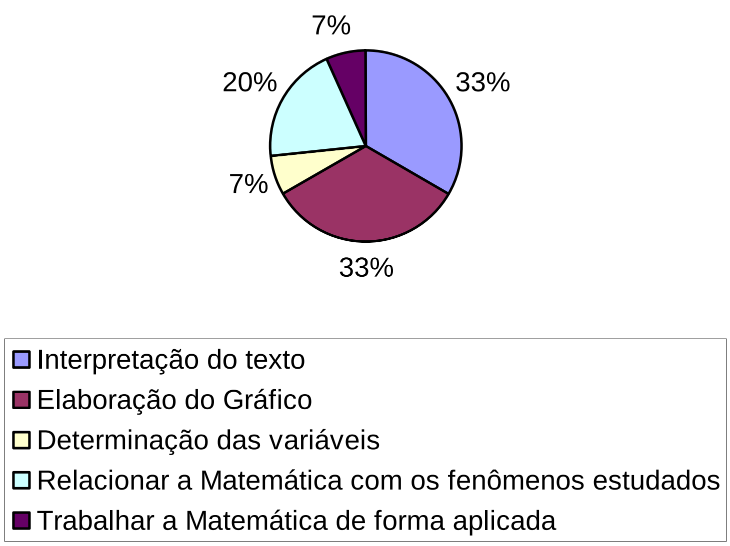
Questionados sobre a impressão que tiveram da atividade, os alunos responderam:

Gráfico 07 – Avaliação dos estudantes sobre a atividade

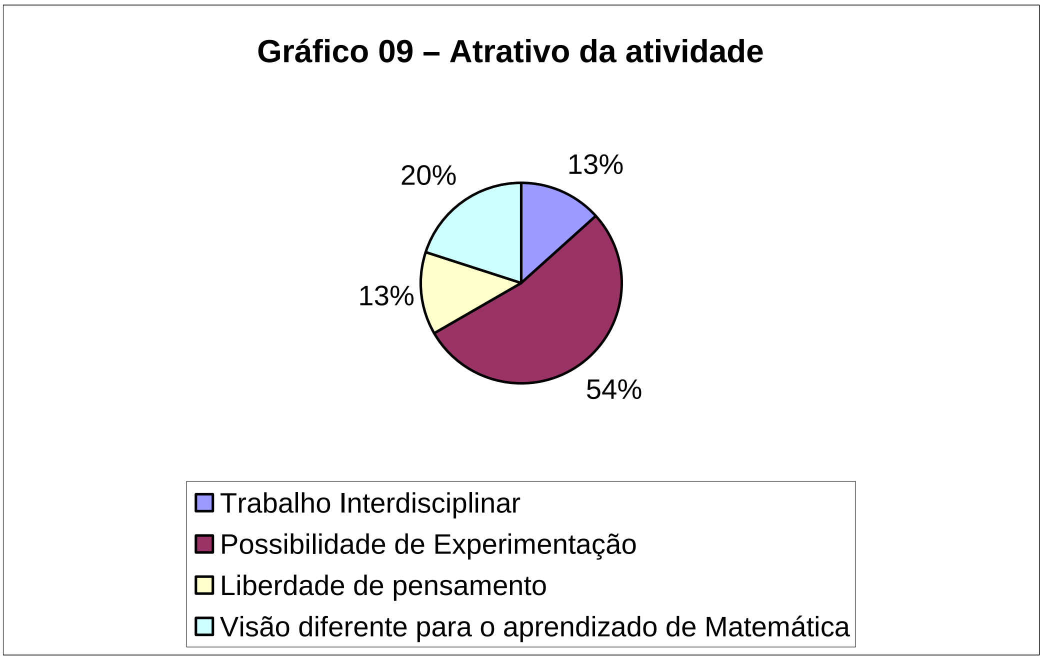


Sobre suas maiores dificuldades, eles relataram:

Gráfico 08 – Principal dificuldade na atividade



Qual foi o maior atrativo que você teve no momento da realização desta atividade?



2ª Atividade

A segunda atividade foi aplicada nos moldes da primeira etapa. Os estudantes apresentaram uma maior facilidade para trabalhar com os fenômenos, houve um grande avanço por parte dessa turma no que se refere a elaboração gráfica, pois, com a socialização da primeira atividade, os estudantes absorveram melhor o conceito exponencial dos fenômenos.

Nessa etapa, também foram mantidos os passos didáticos da etapa anterior, no intuito de facilitar e manter as mesmas condições de estudo.

Na fase de socialização com os estudantes, discutiu-se os resultados dessa segunda atividade. Entre os fatores discutidos destacam-se:

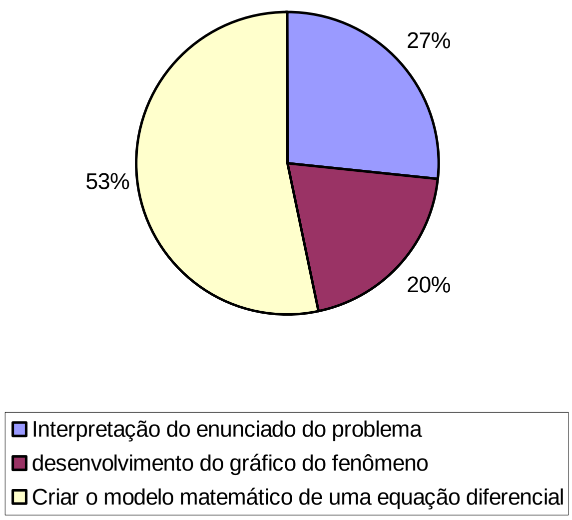
Qual a sua opnião sobre esta atividade?

Gráfico 10 – Avaliação da segunda atividade

Foi interessante observar que a contraposição entre a presença de componentes numéricos e a construção do pensamento investigativo continuou a existir, porém essa segunda turma absorveu melhor as informações obtidas na primeira atividade, o que justifica sua maior afinidade com o método investigativo.

Qual a sua principal dificuldade na resolução dessa atividade?

Gráfico 11 – Dificuldade apresentada na atividade

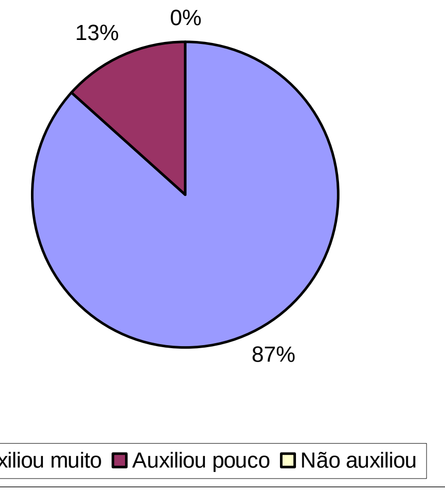


Observa-se que esta turma teve menos problemas com a construção do gráfico, porém o fator mais relevante foi a dificuldade apresentada quanto a criação do modelo matemático com o uso do conceito diferencial, também pelo motivo da aplicação do conceito de taxa de variação aprendido pelos estudantes.

3ª Atividade

Na socialização dos resultados, as características de dificuldade de resolução das equações diferenciais foram mantidas e a dificuldade de aplicação dos dados pelas condições iniciais e de contorno. Sobre o auxílio que as atividades proporcionaram sobre o entendimento do conceito de taxa de variação, os estudantes responderam:

Gráfico 12 – Importância das atividades na formulação do conceito de taxa de variação



Constata-se que o processo de modelagem matemática através de atividades investigativas realmente se apresenta como um fator importante na concretização do conceito de taxa de variação para o estudante de cálculo.

4ª Atividade

Os alunos relataram que, usando a ferramenta computacional, a análise do fenômeno ficou mais simples de ser visualizada. Outro fator importante é a possibilidade da mudança de parâmetros possibilitando a experimentação.

A ferramenta computacional foi considerada como um facilitador do processo investigativo, a cada idéia que o aluno apresenta sobre uma situação problema esta pode ser simulada no computador, o que “agiliza” todo o processo investigativo.

A maior questão deste trabalho é que, com o desenvolvimento avançado da tecnologia no mundo atual, professores e estudantes usam o computador para resolver problemas de modelagem matemática com o objetivo de apresentar suas soluções. O que torna cada vez mais necessária a utilização de softwares especializados que visam facilitar a resolução de problemas complexos de Equações Diferenciais, principalmente no que se refere a Equações Diferenciais Parciais. Assim, o reconhecimento da necessidade de utilização destes softwares corresponde a um ponto fundamental no processo de ensino – aprendizagem. Através das equações, o aluno pode verificar passo a passo como são formulados os problemas de valor de contorno e inicial, a solução analítica deste problema e, finalmente, o aluno também pode dispor de resultados numéricos ou analíticos. A utilização do software possibilita desde a formulação básica das Equações Diferenciais, obtenção da solução e aplicação final, possibilitando ainda a diminuição do tempo de cálculo e uma maior precisão dos resultados. A expectativa é que a utilização desse ambiente interativo possibilite ao estudante e ao profissional uma análise mais completa, rigorosa e com profundidade da resolução de problemas investigativos com o uso de Equações Diferenciais.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na investigação realizada, procurou-se observar o desenvolvimento das atividades, levando-se em consideração as etapas da formação dos conceitos físicos, estudou-se a natureza dos erros, destacou-se a importância da organização do trabalho para obtenção de resultados e o conhecimento da matemática envolvida na formação dos conhecimentos em ciências.

Notou-se que a experiência da prática tradicional de ensino teve influência significadamente no processo de resolução e formação dos modelos matemáticos de Equações Diferenciais, pois o estudante apela mais para a memória e o uso de algoritmos do que o exercício de pensar a matemática. Com base nas observações, constata-se que a metodologia empregada no ensino de Equações Diferenciais, deveria mudar para alcançar uma educação que privilegia o pensamento crítico reflexivo.

Nem sempre o dominio do conhecimento garante um bom resultado na solução de problemas práticos; neste ponto, torna-se necessário um processo de ensino que leve em consideração os processos investigativos que procuram conciliar a teoria e a prática.

A finalidade do processo de observação na pesquisa realizada foi de avaliar as condições em que os alunos trabalhavam os conhecimentos (conteúdos) e interpretavam e analisavam as situações poblemas apresentados nas atividades investigativas.

Para os alunos, a solução de um problema de Equações Diferenciais tem que estar relacionado a um resultado numérico, o que dificultou a análise qualitativa dos fenômenos.

Através de discursos e interações entre estudantes / professor-pesquisador, pôde-se estabelecer um melhor entendimento de conceitos, possibilitando ao aluno fazer novas descobertas, especialmente na etapa de socialização dos resultados das atividades investigativas.

Os resultados observados comprovaram a possibilidade de uma mudança didática no sentido de melhorar a aplicação de conceitos, ressignificando o aprendizado, aproveitando o conhecimento anterior do aluno. Porém, para que isso aconteça torna-se necessário que o professor realize um trabalho especial para diferenciar as “novas” noções das “velhas”, na sua prática educativa.

REFERÊNCIAS

ARNOL´D, Vladimir L.. **Ordinary Diferential Equations.** 3. ed. Burlington: Springer-textbook, 1991. 334 p.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem matemática e implicações no ensino-aprendizagem em matemática**. Blumenau: Ed. Da Furb.1999.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno.** Trad. Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro, LTC, 2002, 7ed.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais de Matemática.** 5 ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática.** Lisboa: Gradiva, 1995. 401 p.

EDWARDS, C.h.; PENNEY, David E.; Jr **Equações Diferenciais Elementares:** com Problemas de Contorno. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-hall, 1995. 643 p.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2001. 472 p.

HOUSE, S; PEGGY, A. Álgebra: idéias e questões. IN: COXFORD, A.; SHULTE, A. (orgs.). **As Idéias da Álgebra.** São Paulo, Atual, 1995. p.1-8.

JAVARONI, Sueli Liberattti. Abordagem Geométrica, Representações Múltiplas e Equações Diferenciais Ordinárias. In: X EBRAPEM, 2006. **Encontro Brasileiro de Alunos de Pós Graduação em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Ufmg, 2006. v. 1, p. 1 - 15.

LACHINI, Jonas; LAUDARES, João Bosco (Org.). **A Prática Educativa sob o Olhar de Professores de Cálculo.** Belo Horizonte: Fumarc, 2001. 190 p.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimentos Matemático: provas e refutações**. Org. por John Worrall e Elie Zahar. Rio de Janeiro, Cultura Científica, 1978.

LAUDARES, João Bosco; MIRANDA, Dimas Felipe. Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais. In: **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: Edu. 2007, V. 9, n. 1, p. 103-120.

MAOR, Eli. **E: A História de um Número.** 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 2006. 291 p.

MARIANI, Viviana Cocco. **Maple:** Fundamentos e Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

MELO, José Manuel Ribeiro de. **Conceito de Integral: Uma Proposta Computacional para seu Ensino e Aprendizagem.** 2002. 180 f. Dissertação (Mestrado) - Puc-sp, São Paulo, 2002.

OLIVEIRA, José Carlos Gomes. **A Visão dos Professores de Matemática do Paraná em relação ao uso de Calculadoras nas aulas de Matemática.** 1999. 180 f. Tese (Doutorado) - Unicamp, Campinas, 1999.

OTTE, Michael. **O formal, o social e o subjetivo:** uma introdução a filosofia da matemática**.** São Paulo: EDUSP, 1993.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PONTE, J. PEDRO; BROCADO, J. OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

POZO, Juan Ignácio. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998.

REGO, Tereza Cristina. **Vygotsky:** uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis- Rio de Janeiro: Vozes, 1995.

REIS, Frederico da Silva. **A Tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise:** A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado) - Unicamp, Campinas, 2001.

SANTOS, Angela Rocha Dos; BIANCHINI, Waldecir. **Aprendendo Cálculo com Maple:** Cálculo de uma Variável. Rio de Janeiro: Ltc, 2002. 408 p.

SMOLE, K.S. Para a aprendizagem da matemática. **Coleção memória da pedagogia.** n.1: Jean Piaget/Editor Manuel da Costa Pinto; [colaboradores Lino de Macedo...et al.]-Rio de Janeiro:Ediouro; São Paulo: Segmento – Duetto,p 34 – 37, 2005.

STAHL, Nilson Sérgio Peres. **O Ambiente e a Modelagem Matemática no ensino do Cálculo Numérico.** 2003. 193 f. Tese (Doutorado) - Unicamp, Campinas, 2003.

STOCHIERO, Arnaldo. **Equações Diferenciais Ordinárias.** Belo Horizonte: Puc - Mg, 2007. 119 p.

STEWART, James. **Cálculo**. 4 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

THOMAS, George B.. **Cálculo.** 10. ed. Rio de Janeiro: Addison-wesley, 2002. 592 p.

UNESP. Projeto Pedagógico de Licenciatura em Matemática. sl;sd. Disponível em:< http://www2.fc.unesp.br/matematica/licenciatura/projetopedagogico.php >. Acesso em: 08 Nov. 2007.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

APÊNDICE

Apêndice A – Atividade Investigativa

1ª Atividade

Responda as questões (baseando-se em seus conhecimentos das **Ciências**, pela sua **intuição** e faça **conjecturas** com seus conhecimentos prévios), do estudo de cada fenômeno dado.

1º Fenômeno: Resfriamento ou aquecimento de um corpo.

a) Consideremos um ambiente <u>mantido a uma temperatura constante</u> durante todo o tempo de uma experiência (denominada temperatura ambiente);
b) Numa primeira situação, tomemos um “corpo de prova” e o aquecemos num forno a uma temperatura dez vezes maior que a temperatura do ambiente;
c) Após o aquecimento introduzimos este “corpo de prova” no ambiente preparado no item (a);
d) <u>A partir deste instante</u> (zerar o cronômetro). Iniciar uma observação do fenômeno a se desenvolver.

QUESTÕES:

I) Verbalizar o fenômeno físico a partir da introdução do corpo no ambiente preparado;
II) Identificar as grandezas presentes na experiência;
III) Discriminar as variáveis e invariantes a declarar na experiência;
IV) Identificar as relações físicas entre as variáveis, que são a expressão da variação do fenômeno;
V) Formular ou modelar o fenômeno, através de uma lei ou função matemática;
VI) Expressar as condições inicias e de contorno existentes nesse fenômeno;
VII) Numa outra situação, suponha que o “corpo de prova” tenha sido levado ao invés de um forno num refrigerador até atingir uma temperatura dez

vezes menor do que a do ambiente; e depois introduzido no ambiente preparado, o que acontecerá em relação a primeira experiência;

VIII) Relacionando duas variáveis do fenômeno em observação, tente esboçar um gráfico, que retrate o fenômeno;

IX) O gráfico vai ser o mesmo nas duas situações? Se for diferente trace os dois.

X) Na sua opinião que função matemática representa melhor o fenômeno?

2º Fenômeno: Crescimento Populacional

a) Consideremos uma população (de bactérias, animais ou humanas) imune a doenças, ausências de predadores e com nutrição adequada.
b) Estudemos sua evolução.

QUESTÕES:

I) Verbalizar o fenômeno populacional a partir do momento inicial do estudo de seu desenvolvimento;

II) Identificar as grandezas presentes no fenômeno;

III) Discriminar as variáveis e invariantes a declarar no fenômeno;

IV) Identificar as relações entre as variáveis, que são a expressão da variação do fenômeno;

V) Formular ou modelar o fenômeno, através de uma lei ou função matemática;

VI) Expressar as condições inicias e de contorno existentes nesse fenômeno;

VII) Relacionando duas variáveis do fenômeno em observação, tente esboçar um gráfico, que retrate o fenômeno;

VIII) O gráfico vai ser o mesmo nas duas situações? Se for diferente trace os dois.

IX) Na sua opinião que função matemática representa melhor o fenômeno?

2ª ATIVIDADE

1º Fenômeno: Conhecendo-se a lei física onde a velocidade de resfriamento de um “corpo” “no ar” é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e do ar. Formule uma lei matemática a qual expressa a taxa de variação da temperatura e relação ao tempo e discrimine as condições iniciais, de contorno, os dados solicitados e os invariantes. Explique a diferença entre as 3 (três) opções.

a) Se a temperatura do ar é de 20º C e o corpo se resfria em 20 minutos de 100º C a 60º C. Em quanto tempo sua temperatura descerá para 30º C;
b) Coloca-se um corpo à temperatura de 0º F em quarto mantido à temperatura constante de 100º F. Se após 10 minutos a temperatura do corpo é de 25º F, determine a temperatura do corpo após 20 minutos;
c) Um corpo com temperatura desconhecida é colocado em um refrigerador mantido à temperatura constante de 0º F, se após 20 minutos a temperatura do corpo é 40º F e 40 minutos depois é de 20º F, determine a temperatura inicial do corpo.

2º Fenômeno: A partir da lei populacional onde a população cresce ou decresce a uma taxa proporcional à população existente, formule uma solução matemática para os fenômenos nas seguintes condições descriminando as condições iniciais, de contorno, a lei matemática – taxa de variação correspondente – e o que está se pedindo em cada um dos problemas. Explique a diferença entre as 3 (três) opções.

a) Se inicialmente a população é de 1500 habitantes e depois de 10 anos é de 2000 habitantes, quanto tempo levará para ter 3000 habitantes?
b) Se após 10 anos a população triplica e 20 anos depois é de 1500 habitantes, determine a população inicial;
c) Um ator de cinema com 120 Kg deve emagrecer. A dieta que vai submeter o emagrecerá proporcionalmente ao peso de cada dia. Nestas condições, iniciada a dieta, o artista emagreceu 20 Kg em 40 dias, quanto tempo será necessário para que ele emagreça 1/3 do seu peso inicial?

3ª ATIVIDADE

a) Volte à atividade 2 (dois) e “desenvolva a expressão matemática, isto é, resolva a equação diferencial”, aplicando as condições iniciais e de contorno dadas para determinar as constantes de integração., nos fenômenos 1 e 2;
b) Para cada fenômeno dê o “modelo” na sua forma analítica (fórmula matemática) que é a solução da Equação Diferencial e o seu gráfico.

4ª ATIVIDADE

Investigue graficamente as soluções das equações diferenciais que você estará modelando a partir dos fenômenos descritos abaixo:

1º Fenômeno: Considere uma população de ratos do campo que habitam uma certa área rural. Vamos supor que a população de ratos cresce a uma taxa proporcional à população atual. Porém existem na região corujas que são o seu predador natural e que elas matam B ratos do campo por dia.

a) Formular ou modelar o fenômeno, através de uma lei ou função matemática;
b) Vamos supor que o fator de proporcionalidade (taxa de crescimento) seja de 0,5 por mês e que as corujas matem 15 ratos por dia, como ficará o modelo matemático nestas condições?
c) Utilize os seguintes comandos do Maple:

```
> with(DEtools):                    (Enter)
> eq:=diff(p(t),t)=0.5*p(t)-450;   (Enter)
> DEplot(eq,p(t), t=0..5, p=800..1000);  (Enter)
```

A partir do gráfico do campo de direções responda:

I) O gráfico apresenta uma solução de equilíbrio para o fenômeno? Se sim explique (verbalize) o que significa esta solução;
II) As soluções acima deste equilíbrio estão convergindo ou divergindo? Explique o significado destas soluções;
III) E o que acontece com as soluções abaixo deste equilíbrio? Explique o significado destas soluções?
IV) Que tipo de função matemática melhor representa a família de soluções apresentada no campo de direções?

Utilize o comando:

```
> dsolve(eq);    (Enter)
```

A solução apresentada condiz, com a sua resposta do item (4)?

Visualize o gráfico da solução particular onde as condições iniciais são p(0)=950, utilizando o seguinte comando:

DEplot(eq,p(t),t=0..5,[[p(0)=930]], p=800..1000, linecolor=green);   (Enter)

5. Esta solução condiz com a sua resposta do itens (2) ? Explique (verbalizar).

Apêndice B – Fotos dos estudantes, realizando as atividades investigativas.

Foto 01- Prof. Dr. João Bosco Laudares (Orientador) demonstra como realizar uma atividade investigativa, durante o período de elaboração do projeto desta dissertação, em sua turma de Engenharia da PUC Minas.

Foto 02 -Mestrando Murilo Barros Alves aplicando as atividades Investigativas na UEMA – Universidade Estadual do Maranhão

Foto 03 - Alunos da UEMA realizando as atividades investigativas. Turma 2007.1

Foto 04 - Alunos da UEMA realizando as atividades investigativas. Turma 2007.2

Foto 05 - Atividades Investigativas realizadas no Laboratório de Informática, utilizando a ferramenta MAPLE.

Foto 06 - Atividades Investigativas realizadas no Laboratório de Informática, utilizando a ferramenta MAPLE.